# Puissance asymptotique des tests non paramétriques d'ajustement du type Cramer-Von Mises

Mohammed Boukili Makhoukhi

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE PARIS VI

*Spécialité* : Mathématiques

*Option* : Statistique

*présentée par*

**Mohammed BOUKILI MAKHOUKHI**

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

## Puissance asymptotique des tests non paramétriques d'ajustement de type Cramér-von Mises

Soutenue le 21 juin 2007

devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| *Directeur de thèse :* | M. Paul DEHEUVELS | Univ. Paris VI |
| *Rapporteurs :* | Mme Marina KLEPTSYNA | Univ. du Maine, Le Mans |
| | M. Yakov NIKITIN | Univ. St Petersbourg, Russie |
| *Examinateurs :* | Mme Armelle GUILLOU | Univ. de Strasbourg |
| | Mme Lioudmila VOSTRIKOVA | Univ. d'Angers |
| | M. Philippe BERTHET | Univ. de Rennes I |
| | M. Michel BRONIATOWSKI | Univ. Paris VI |
| *Président du jury :* | M. Marc YOR | Univ. Paris VI |

# Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse le Professeur Paul DEHEUVELS, pour la confiance qu'il m'a témoignée d'une part, ainsi que pour les entretiens fructueux que nous avons pu avoir. J'ai ainsi eu l'occasion de me rendre compte de l'importance de la rigueur mathématique, de la rédaction et de la remise en cause répétée de mon propre travail. Merci aussi pour m'avoir poussé à l'initiative personnelle dans mes recherches, en m'indiquant quels articles récents offraient des pistes de recherche éventuelle, mais en me laissant complétement le champ libre dans mes investigations.

Je remercie très chaleureusement les Professeurs Marina KLEPTSYNA et Yakov NIKITIN, d'avoir consenti à être rapporteurs, et pour les commentaires qu'ils ont bien voulu faire sur ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements aux Professeurs Armelle GUILLOU, Lioudmila VOSTRIKOVA-JACOD, Michel BRONIATOWSKI, Marc YOR et Philippe BERTHET ; ils m'ont fait un grand honneur en acceptant d'être membres du jury.

Merci encore au Professeur Michel BRONIATOWSKI, pour sa disponibilité et ses conseils. Que le Professeur Djamal LOUANI en soit remercié, ainsi que tous les Professeurs de l'équipe du LSTA.

Tous mes remerciements aussi à Louise LAMART et Pascal EPRON pour leurs disponibilités quotidiennes.

Je n'oublie pas de remercier très vivement, mes parents, mes frères et soeurs, ainsi qu'à tous ceux qui ont su m'encourager, en particulier, Bouchra Jelfa, Catie Muller, Karima Zerargui, Haykel Ben Ahmed, Salim Bouzebda, Jean-Renaud Pyke, Mohamed Debbarh et tant d'autres avec qui j'ai partagé des bons moments.

Enfin, je dédie ce modeste travail à mon père, parti trop tôt pour le voir.

Mohammed Boukili

# Table des matières

**Introduction** **3**
0.1 Généralités . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
0.2 Développements de Karhunen-Loève d'un processus gaussien . 5
0.3 Puissance d'un test d'ajustement de type Cramér-Von Mises . 8

**1 Développement de Karhunen-Loève d'un processus gaussien et applications statistiques** **19**
1.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
1.2 Définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
1.3 Espaces d'Hilbert associés à un processus gaussien . . . . . . . 23
1.3.1 Notations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.4 Conditions sur la fonction de covariance K . . . . . . . . . . . 29
1.5 Endomorphisme associé au noyau K . . . . . . . . . . . . . . . 31
1.6 Théorème sur la décomposition de Karhunen-Loève . . . . . . 35
1.7 Convergence en norme $L^2$ du processus empirique pondéré . . 38
1.8 Une loi du logarithme itéré du type Chung-Mogulski . . . . . 40

**2 Le processus empirique uniforme sur $[0, 1]$** **43**
2.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
2.2 Comportement asymptotique des processus empiriques uniformes pondérés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
2.3 La convergence faible du processus empirique uniforme avec des paramètres estimés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.4 Rappels concernant la théorie de la mesure . . . . . . . . . . . 56
2.4.1 Notations et définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
2.5 Propriétés des espaces vectoriels $D_\psi[0, 1]$ et $H_\psi[0, 1]$ . . . . . . 59
2.5.1 Définition de l'espace vectoriel $D_\psi[0, 1]$ . . . . . . . . . 60
2.5.2 Définition de l'espace de Hilbert $H_\psi[0, 1]$ . . . . . . . . 61
2.6 Convergence en loi sous $H_a$ dans $D_\psi[0, 1]$ . . . . . . . . . . . 61
2.7 Convergence en loi sous $H_a$ dans l'espace de Hilbert $H_\psi[0, 1]$ . 67
2.8 Convergence en loi sous $H_a$ dans un espace métrique $(E, \rho)$ . . 70

2.9 Conditions nécesssaires pour qu'une statistique $\phi(\alpha_n)$ converge en loi sous $H_a$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80

**3 Illustrations** **83**
3.1 Tests non-paramétriques d'ajustement . . . . . . . . . . . . . 83
3.2 Evaluation de la puissance relativement aux suites d'alternatives locales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
3.3 Preuve du théorème 3.2.1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93

**A Résultats fondamentaux sur quelques fonctions spéciales** **104**
A.1 Fonctions de Legendre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
A.2 Fonctions de Bessel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105
A.3 Quelques fonctions de Bessel particulières . . . . . . . . . . . . 106

**B Généralités sur les vecteurs aléatoires réels** **110**
B.1 Changement de variables dans une densité . . . . . . . . . . . 110
B.2 Fonction caractéristique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
B.3 Espérance et matrice de covariance . . . . . . . . . . . . . . . . 111
B.4 Transformations linéaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
B.5 Densité de la loi normale à p dimensions . . . . . . . . . . . . 112
B.5.1 Cas particulier de la loi normale à deux dimensions . . 113
B.5.2 Loi conditionelle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113

**Bibliographie** **115**

# Introduction

## 0.1 Généralités

L'analyse statistique, prise au sens large, est centrée sur la *description*, et, lorsque les circonstances le permettent, la *modélisation quantitative*, des phénomènes observés, pour peu que ces derniers possèdent une part d'incertitude, et donc, qu'ils soient soumis aux lois du hasard. Dans cette activité scientifique, le plus grand soin doit être apporté à la *validation* des hypothèses de modélisation, nécessaires à l'interprétation des résultats. Ce principe général s'applique d'ailleurs à toutes les sciences expérimentales, et tout aussi bien aux sciences humaines (en psychologie), qu'en économie, et dans bien d'autres disciplines. Une théorie scientifique repose, au départ, sur des hypothèses de modélisation, qui sont ensuite soumises à l'épreuve de l'expérimentation. Celle-ci est basée sur le recueil de données, dont il est nécessaire de décider la nature, compatible ou non, avec les modèles choisis, aboutissant, soit au rejet, soit à l'acceptation, de ces derniers. La statistique a développé, dans ce but, une technologie basée sur les *tests d'hypothèses*, dont nous nous abstiendrons ici de discuter les bases et les fondements. Dans cette thèse, nous aborderons l'étude de certains *tests d'ajustement* (dits, en Anglais, "*tests of fit*"), de nature *paramétrique et non paramétrique*. Les aspects techniques de ces tests d'hypothèses ont été abordés, dans le contexte particulier de notre étude, en particulier par [33], pour les tests de type Cramér-von Mises. On ne manquera pas de citer l'approche de [34], initialement utilisée pour les tests de type Kolmogorov-Smirnov. Enfin, l'ouvrage de [74] est une référence de base particulièrement adaptée à la nature de notre recherche.

L'objectif principal de notre thèse est d'évaluer la puissance asymptotique de certains tests d'ajustement, relevant de la catégorie générale des tests de Cramér-von Mises. Nous évaluerons cette puissance, relativement à des suites convenables d'alternatives locales, qui seront décrites plus loin. Le présent travail a pour objet secondaire de compléter des recherches récentes de P.Deheuvels et G.Martynov (voir [30]), qui ont donné l'expression *explicite* des fonctions propres et valeurs propres des développements de Karhunen-

Loève de certains ponts browniens pondérés à l'aide de fonctions de Bessel.

La suite de notre introduction est composée de deux paragraphes. Dans le premier, nous exposons les fondements des développements de Karhunen-Loève [D.K.L], ainsi que les applications qui en découlent en probabilités et statistiques. Le deuxième paragraphe est consacré à un exposé de la composante de la théorie des tests d'hypothèses adaptée à la suite de notre mémoire. Dans ce même paragraphe, nous montrons l'intérêt qu'apporte une connaissance *explicite* des composantes d'un développement de Karhunen-Loève, en vue de l'évaluation de la puissance de tests d'ajustement basés sur les statistiques de type Cramér-Von Mises qui sont liées à ce D.K.L.

## 0.2 Développements de Karhunen-Loève d'un processus gaussien

Les bases de la théorie générale correspondant à ces développements sont dues, pour l'essentiel, aux travaux initiateurs de Karhunen, Loève, Kac et Seigert (voir ([57], [58], [62], [63], [64], [54] et [55]).

Soit $X = (X(t))_{t\in T}$ un processus gaussien centré défini sur un pavé $T \subseteq \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$, muni d'une mesure positive bornée $\mu$. Notons

$$K(s,t) = \mathbb{E}\big(X(s)X(t)\big),\ \ s,t \in T$$

la fonction de covariance du processus $X(\cdot)$. La théorie générale des développements de Karhunen-Loève montre que, sous la condition :

$$\int_T K(s,s)d\mu(s) < \infty,$$

la fonction $K(.,.)$ peut s'écrire, pour tout $s,t \in T$, sous forme d'une série convergente dans $L^2(T,\mu)$,

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) e_j(t), \tag{0.2.1}$$

où les couples $\{(\lambda_j, e_j(.)) : j \geq 1\}$ représentent les valeurs propres et les fonctions propres normalisées de l'opérateur intégral

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : L^2(T,\mu) &\rightarrow L^2(T,\mu) \\ f &\rightarrow \mathcal{I}(f) := \int_T K(s,.)f(s)d\mu(s) \end{aligned}$$

associé au noyau K(.,.). Les valeurs propres, $(\lambda_j)_{j\geq 1}$, sont nécessairement positives ou nulles. Avec les fonctions propres, $(e_j(.))_{j\geq 1}$, elles vérifient, pour tout $i, j \geq 1$,

$$\int_T K(s,.)e_i(.)d\mu(s) = \lambda_i e_i(.), \tag{0.2.2}$$

$$\int_T e_i(s)e_j(s)d\mu(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le processus $X = (X(t))_{t\in T}$ peut alors se décomposer presque sûrement en un développement de Karhunen-Loève (ou de Kac-Seigert), noté D.K.L., comme suit

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\xi_j e_j(t), \ t \in T, \tag{0.2.3}$$

où $\{\xi_j : j \geq 1\}$ est une suite de variables i.i.d $N(0, 1)$.

Lorsqu'un tel processus est défini sur un espace compact $T$, et que sa fonction de covariance y est continue, le D.K.L (0.2.3) est un résultat classique obtenu à l'aide du théorème de Mercer, et démontré dans de multiples ouvrages (voir par exemple [65] paragraphe 37.5 page 143-144, [73] proposition 3.11 p. 49 et [3] le paragraphe 4.6 p. 198 etc). Mais, malheureusement, un grand nombre de processus d'intérêt statistique sont définis sur des espaces non-compacts (comme l'intervalle $(0, 1)$ pour le processus d'Anderson-Darling [5], et l'intervalle $(0, 1]$ pour certaines valeurs du paramètre, dans le cas des ponts browniens pondérés étudiés par Deheuvels et Martynov [30]). La non-compacité de $T$ nécessite des preuves spécifiques (voir ainsi [3] le paragraphe 4.6 p. 198 et [87] théorème 2 p. 210).

Pour certains processus gaussiens, les valeurs propres $\lambda_j$ et les fonctions propres associées $e_j(.)$ dans le D.K.L (0.2.3) s'obtiennent à partir de fonctions spéciales, en particulier les fonctions trigonométriques, les fonctions de Legendre et les fonctions de Bessel (voir [1] et [95]).

Rappelons que le pont brownien standard $B = \{B(t) : t \in [0, 1]\}$, est un processus gaussien centré, à trajectoires continues (p.s.), tel que $B(0) = B(1) = 0$, et ayant une fonction de covariance donnée par

$$\mathbb{E}\big(B(s)B(t)\big) = \min(s, t) - st \qquad \forall\ s, t \in [0, 1].$$

Pour ce processus, nous avons le D.K.L

$$B(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(\pi j)^{-1}\xi_j\{\sqrt{2}\sin(\pi jt)\} \quad \forall\ t \in [0, 1].$$

Pour le processus d'Anderson-Darling, nous avons sur l'intervalle $(0,1)$

$$\big(t(1-t)\big)^{-\frac{1}{2}}B(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\xi_j \frac{2}{\sqrt{j(j+1)}}\sqrt{t(1-t)}P_j'(2t-1),$$

où $P_j'$ est la dérivée du polynôme de Legendre $P_j$ (voir l'annexe A).

Un autre processus récent dont le D.K.L s'écrit comme suit, a fait l'objet d'une étude par Deheuvels et Martynov [30].

Pour $\theta > 0$, $\beta > -\frac{1}{2}(\theta+1)$ et $\upsilon = \frac{\theta}{2\beta+\theta+1}$,

$$t^{\beta}B(t^{\theta}) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2\upsilon}{z_{\upsilon,j}\sqrt{\theta}}\right)\xi_j \Big\{\sqrt{\theta}\ t^{\frac{\theta}{2\upsilon}-\frac{1}{2}}\Big\{\frac{J_{\upsilon}(z_{\upsilon,j}t^{\frac{\theta}{2\upsilon}})}{\sqrt{\upsilon}J_{\upsilon}(z_{\upsilon-1,j})}\Big\}\Big\},$$

où $J_{\upsilon}(.)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'indice $\upsilon$ (voir l'annexe A).

La convergence des séries (0.2.1) et (0.2.3) a lieu dans différents espaces, notés $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$, et pour différentes normes, qui seront étudiés en détail au premier chapitre du présent mémoire. L'expression explicite de ces séries permet de nombreuses applications dans l'étude probabiliste des processus correspondants. Par exemple, l'étude des *grandes déviations* de ces processus, relativement à la norme $L^2$, fait intervenir des probabilités de la forme

$$\mathbb{P}\Big(\int_T X^2(t)d\mu(t) \geq x^2\Big) \quad \text{lorsque} \quad x \to \infty.$$

L'évaluation de celles-ci peut être faite selon un procédé unifié pour la plupart des processus gaussiens. On fait usage à cet effet d'un résultat de Zolotarev [99], qui montre que cette probabilité peut être évaluée à partir de la connaissance du D.K.L du processus $X$. À l'opposé, la probabilité des "petites boules", faisant intervenir les probabilités

$$\mathbb{P}\Big(\int_T X^2(t)d\mu(t) \leq \varepsilon^2\Big) \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0,$$

donne lieu à des comportements très variables, d'un processus gaussien à l'autre. De ce fait, ces probabilités de "petites boules" sont souvent très difficiles à étudier. À ce sujet, on pourra consulter [30], [96] et [97] qui donnent de nombreuses références et applications. La connaissance du D.K.L du processus $(X(t))_{t\in T}$ se révèle ici encore d'une grande utilité, grâce à des résultats comme le Théorème 1.4 Page 63 de [30] que nous reverrons au chapitre suivant. Les résultats concernant les grandes déviations ont à leur tour des applications statistiques, notamment en permettant d'obtenir des lois du logarithme itéré pour certains processus empiriques. Ces résultats seront discutés en fin de chapitre.

Dans la suite, nous discuterons tout particulièrement les D.K.L. de processus, s'écrivant dans un intervalle $T \subset \mathbb{R}$, sous la forme

$$X(t) = \sqrt{q(t)}B\big(p(t)\big), \tag{0.2.4}$$

où $p : T \to [0,1]$ est une fonction de classe $C^1$ strictement monotone ; et $q$ est une fonction positive (dite fonction de poids) définie sur $T$. Ces fonctions seront supposées telles que

$$(i)\ \lim_{t\downarrow 0}\big(p(t)\big)^2 q(t) = \lim_{t\uparrow 1}\big(1-p(t)\big)^2 q(t) = 0 \quad (ii)\int_T p(t)\big(1-p(t)\big)q(t)dt < \infty. \tag{0.2.5}$$

Comme ces conditions permettent à la fonction $q$ de n'être ni continue ni sommable sur le compact $[0,1]$, le D.K.L. du processus (0.2.4) devient plus difficile à établir, car ne relevant plus d'une conséquence directe du théorème de Mercer. C'est pourquoi, une partie importante du chapitre suivant de notre thèse sera consacrée à la démonstration d'une généralisation du théorème de Mercer, sous des conditions permettant la résolution de ce problème.

La connaissance *explicite* des composantes du D.K.L (0.2.3) a de nombreuses applications statistiques. Un bon nombre d'entre elles sont discutées, par exemple, dans [87] au chapitre 5. Nous verrons, dans le paragraphe suivant, certaines de ces applications, dans le cadre de l'évaluation de la puissance de tests d'ajustement basés sur la statistique de type Cramér-von Mises associée à ce D.K.L. Avant d'en entamer un exposé détaillé, il est nécessaire de définir, comme de décrire, dans leurs grandes lignes, la structure de ces tests.

## 0.3 Puissance d'un test d'ajustement de type Cramér-Von Mises

La théorie des tests d'hypothèses a fait l'objet d'innombrables travaux. Dans la perspective qui est la nôtre, on pourra citer, tout particulièrement, le traitement des tests du Khi-deux par [33], l'approche du test de Kolmogorov-Smirnov par les principes d'invariance (voir [34]), sans oublier de mentionner l'approche de Neyman-Pearson (voir [75]).

Le principe de base des tests d'hypothèse consiste à formuler deux hypothèses alternatives, désignées par $H_0$ et $H_a$, entre lesquelles un choix décisionnel sera pris sur la base de la réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$. Il est classique de supposer que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées [i.i.d.], à valeurs dans $\mathbb{R}$, et ayant une fonction de répartition commune $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)$ continue. Dans un cadre paramétrique, $F(x)$ est supposée dépendre d'un paramètre $\theta$, réel ou multidimensionnel. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les distributions continues. Alors $F \in \mathcal{F}$, et l'ensemble $\mathcal{F}$ est supposé décomposé en deux sous-ensembles disjoints, $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ tels que

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_1 = \varnothing.$$

Sous ces hypothèses, le problème de test s'énonce comme suit. La fonction $F$, inconnue, appartient-elle à $\mathcal{F}_0$ ou à $\mathcal{F}_1$ ? Il est possible de formuler deux hypothèses :

$$H_0 : F \in \mathcal{F}_0 \quad \text{à tester contre l'alternative} \quad H_a : F \in \mathcal{F}_1.$$

En statistique, $H_0$ s'appelle l'hypothèse *nulle* ou *privilégiée*. Une hypothèse est dite *simple* si elle se réduit à un seul élément ; dans le cas contraire elle est dite *multiple*. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux tests d'hypothèses simples. En fait, les tests que nous allons considérer ici se ramènent à des procédures de décision, basées sur des statistiques de la forme générale $T_n(X) = T(X_1, X_2, \ldots X_n)$, et qui nous permet de choisir entre les deux hypothèses $H_0$ et $H_a$, exclusives l'une de l'autre.

**Région critique du test**

La description générale d'un test se ramène à la caractérisation des réalisations $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour lesquelles la décision du rejet $H_0$ sera prise. Celles-ci constituent la *région critique* du test. Dans le cas où le test est associé à une statistique $T_n(\mathbf{x})$, il est classique d'utiliser des régions critiques de la forme

$$\{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) \geq c\},$$

où $c$ est une constante réelle donnée, parfois appelée niveau de signification.

Nous décrivons la *taille* et la *puissance* du test en faisant usage des définitions suivantes.

**Taille et puissance du test**

Un test constitue une procédure de décision basée sur un échantillon aléatoire. Par ce fait même, il n'est généralement pas possible de prendre des décisions ayant une probabilité d'erreur nulle. Ceci est une conséquence naturelle du fait qu'on ne dispose, par l'observation d'un échantillon aléatoire, que d'une information partielle de la structure du phénomène étudié. Toutefois l'utilisation d'échantillons aléatoires nous permet de quantifier, en termes de probabilistes, les risques d'erreur associés aux décisions prises. On mesure ainsi la *puissance* du test.

Soit $\mathbb{P}_F$ la loi associée à la fonction de répartition $F$. Lors du jugement, deux types d'erreur peuvent être commis. Nous les décrivons ci-dessous dans le cadre d'*hypothèses simples*. Au vu de la réalisation $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, on a décidé de rejeter $H_0$, alors que $H_0$ devait être admise. Le rejet à tort de $H_0$ est qualifié d'erreur de première espèce. Au vu de la même réalisation, on a décidé d'accepter $H_0$, alors que $H_0$ est fausse. L'acceptation à tort de $H_0$ est qualifiée d'erreur de deuxième espèce. Alors, chacune de ces erreurs, est associée à une probabilité. On désigne ainsi par *risque d'erreur de première espèce*, noté $\alpha$, la probabilité de rejeter à tort $H_0$ :

$$\alpha = \mathbb{P}(T_n \geq c | H_0 \text{ est vraie}).$$

De manière duale, on désigne par *risque d'erreur de deuxième espèce*, noté $\beta_1$, la probabilité d'accepter à tort $H_0$ :

$$\beta_1 = \mathbb{P}(T_n \leq c | H_0 \text{ est fausse }).$$

À partir de ces erreurs, nous donnons les définitions suivantes.

**Définition** 0.3.1 *( Taille d'un test )*

La taille d'un test est définie par

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_0} \{\mathbb{P}_F(T_n \geq c)\}.$$

*On dit qu'un test est de niveau $\alpha$, si sa taille est inférieure ou égale à $\alpha$.*

**Définition** 0.3.2 *(Fonction puissance d'un test )*

La fonction puissance d'un test est une application définie comme suit

$$\begin{aligned} P: \ \mathcal{F}_1 &\to [0,1] \\ F &\mapsto \mathbb{P}_F(T_n \geq c) = 1 - \beta_1. \end{aligned} \tag{0.3.6}$$

*On dit qu'un test est puissant suivant la statistique $T_n$, si sa taille est faible et sa puissance est forte.*

Le calcul de $\beta_1$ est un élément crucial dans l'analyse des performances d'un test. Nous verrons que, sous certaines alternatives bien précises, nous pouvons évaluer asymptotiquement cette quantité. Ceci sera l'une des préoccupations essentielles de la suite de cette thèse.

### Statistiques et tests de type Cramér-Von Mises

Supposons qu'on veuille tester l'hypothèse simple

$$H_0 : F = F_0 \in \mathcal{F},$$

où $F(x) = \mathbb{P}\big(X_1 \leq x\big)$ est une fonction de répartition continue provenant de variables aléatoires réelles i.i.d $X_1, \ldots, X_n$. Notons $\mathbb{F}_n$ la fonction de répartition empirique associée à ces variables. Donc

$$\mathbb{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_i \leq x\}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Pour tester $H_0$, de nombreuses statistiques «historiques» basées sur la différence $\{\mathbb{F}_n - F_0\}$ ont été suggérées (voir par exemple [59] et [21]). La statistique

$$W_{n,q}^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} q\big(F_0(x)\big)\big[\mathbb{F}_n(x) - F_0(x)\big]^2 dF_0(x) \quad q \geq 0 \tag{0.3.7}$$

a été suggérée par Cramér [20] p.145-147 et Von Mises [94] p 316-335 (voir aussi [93]). Si on suppose que la distribution $F$ à tester appartient à une famille paramètrique, un choix judicieux de la fonction $q$ permet parfois d'obtenir un test d'*efficacité asymptotique optimale* au sens de Bahadur. La référence de base concernant la notion d'efficacité au sens de Bahadur est [12]. L'application de cette notion aux tests de type Cramér-Von Mises est abordée par exemple dans [74]. Smirnov a démontré dans [89] que, sous l'hypothèse $H_0$, la distribution asymptotique de $W_{n,q}^2$ est indépendante de $F_0$. L'utilisation des statistiques de type Cramér-Von Mises dans le cas paramétrique avec paramétres estimés à partir de l'échantillon est exposée au chapitre 3 où l'on trouvera également d'autres références bibliographiques sur le sujet.

Sous l'hypothèse nulle, les variables $U_i := F_0(X_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont uniformément réparties sur $(0,1)$ et on peut toujours se ramener à tester l'hypothèse

$$(H_0): \quad G = I, \tag{0.3.8}$$

où $G(t) = F\big(F_0^{-1}(t)\big)$, $F_0^{-1}(t) = \big\{x : F_0(x) \geq t\big\}$ est la fonction de quantile et $I$ est l'application identité.

Dans la suite, nous chercherons à tester l'hypothèse nulle (0.3.8). À cet effet, nous introduisons le processus empirique uniforme

$$\alpha_n(t) := \sqrt{n}\big(\mathbb{G}_n(t) - t\big) \quad \forall\, t \in [0,1], \tag{0.3.9}$$

où $\mathbb{G}_n$ est la fonction de répartition empirique associée à l'échantillon $U_1, \ldots, U_n$ définie par

$$\mathbb{G}_n(t) := \mathbb{F}_n\big(F_0^{-1}(t)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{U_i \le t\}} \quad \forall\ t \in [0,1].$$

Ainsi, $\alpha_n(.)$ est un processus stochastique sur $[0,1]$ décrivant l'écart entre la fonction de répartition empirique $\mathbb{G}_n(.)$ et la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$. Ce processus a été abondamment étudié dans la littérature scientifique. Son intérêt statistique est évident, et de nombreuses statistiques s'expriment en fonction de celui-ci. Doob [36] et Donsker [35] ont montré que sous l'hypothèse $(H_0)$ nous avons

$$\alpha_n \overset{faiblement}{\longrightarrow} B, \tag{0.3.10}$$

où la convergence faible est définie comme dans Billingsley [15]. Araujo et Giné ont donné dans [6] p. 205, ex. 14 une méthode pour avoir la convergence faible. Certaines propriétés asymptotiques se déduisent donc des propriétés du pont brownien $B(\cdot)$. Dans ce cas, de nombreuses applications statistiques possibles portent sur des processus empiriques de la forme

$$X_n(t) := \sqrt{q(t)}\alpha_n\big(p(t)\big), \qquad t \in T.$$

En particulier, pour $p(t) = t$, nous définissons les statistiques

$$w_{n,q}^2 := \int_0^1 q(t)\alpha_n^2(t)dt \overset{loi}{=} W_{n,q}^2, \tag{0.3.11}$$

où $q$ est une fonction positive (dite fonction de poids) vérifiant

$$\int_0^1 t(1-t)q(t)dt < \infty. \tag{0.3.12}$$

La condition nécessaire et suffisante sur $q$ pour avoir la convergence faible du processus $\{\sqrt{q(t)}B\big(t\big) : t \in T\}$ se trouve dans [76].

Pour $q \equiv 1$ nous retrouvons la statistique de Cramér-Von Mises. Pour le cas «historique» $q(t) = \big(t(1-t)\big)^{-1}$ nous obtiendrons la statistique introduite par Anderson et Darling dans [3] et [5]. D'autres exemples de statistiques de type de Cramér-Von Mises ont été étudiées par Rodriguez-Viollaz dans [81] avec $q(t) = (1-t)^{-1}$ et $q(t) = \big(t(2-t)\big)^{-1}$ et par Scott dans [86] avec $q(t) = t^{-1}$. Deheuvels et Martynov ont généralisé dans [30] la statistique de Scott en prenant $q(t) = t^{2\beta}$ pour les réels $\beta > -1$. Nous reviendrons plus loin sur cette généralisation.

En termes de processus, le raisonnement est le suivant. La convergence faible (0.3.10) implique que, sous l'hypothèse $(H_0)$, la statistique $w_{n,q}^2$ converge en loi vers la variable

$$w_q^2 := \int_0^1 q(t)B^2(t)dt$$

qui est presque sûrement finie sous la condition (0.3.12). Or le D.K.L du pont brownien pondéré $\{\sqrt{q(t)}B(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ nous permet d'en déduire aisément que

$$w_q^2 \overset{loi}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j^2, \tag{0.3.13}$$

et la fonction caractéristique de cette somme pondérée de variables $\chi_1^2$ est donnée par

$$\psi_q(u) = \mathbb{E}\big(e^{iuw_q^2}\big) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - 2iu\lambda_j)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\ u \in \mathbb{R}.$$

Smirnov a montré dans [89] et [91] que l'inversion de cette fonction caractéristique nous permet de trouver la fonction de répartition de $w_q^2$. Sa formule, établie dans le cas où les valeurs propres de l'opérateur de Fredholm associées au processus gaussien limite sont distinctes (ce qui revient à supposer que les $\lambda_j = 1/\nu_j$ de (0.3.13) sont distincts), montre que, pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}\big(w_q^2 \leq x\big) = 1 - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\int_{\nu_{2j-1}}^{\nu_{2j}} \frac{e^{-\frac{tx}{2}}}{t\sqrt{|\mathbb{F}(t)|}}dt, \tag{0.3.14}$$

où les $\nu_j$ sont les valeurs qui annulent le déterminant de Fredholm

$$\mathbb{F}(\nu) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - \frac{\nu}{\nu_j})$$

associé au noyau

$$K_q(s,t) = \sqrt{q(s)q(t)}\big(\min(s,t) - st\big), \quad \forall\ s,t \in [0,1].$$

Pour $q \equiv 1$ nous avons $\nu_j = (j\pi)^2$ et nous connaissons donc théoriquement la distribution asymptotique correspondante (dite de Cramér-Von Mises)

$$w_n^2 := \int_0^1 \alpha_n^2(t)dt.$$

Plus généralement, si $X_n$ est un processus empirique qui converge faiblement (ou, de manière moins restrictive, en norme $L^2(T,\mu)$) vers un processus gaussien centré $X$, dont le D.K.L est donné par (0.2.1), nous avons

$$\int_T X_n^2 d\mu(t) \xrightarrow{loi} \int_T X^2 d\mu(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j^2$$

et la fonction caractéristique de cette somme pondérée de variables $\chi_1^2$ est donnée par

$$\psi_X(u) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - 2u\lambda_j\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\ u \in \mathbb{R}.$$

L'inversion de cette fonction conduit à une probabilité de type (0.3.14) et la distribution de la variable aléatoire $\int_T X^2 d\mu(t)$ constitue, pour $n$ assez grand, une approximation de celle de la statistique $\int_T X_n^2 d\mu(t)$. On peut ainsi appliquer ces résultats pour développer des tests d'ajustement.

Le développement suivant de la statistique $w_{n,q}^2$, tel qu'elle est définie dans (0.3.11), se trouve être très utile dans la pratique. Il sera justifié au troisième chapitre du présent mémoire.

**Proposition 0.3.3**

Soit $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ la statistique d'ordre associée à l'échantillon $(U_1, \dots, U_n)$ telle que

$$U_{(0)} := 0 < U_{(1)} \leq \dots \leq U_{(n)} \leq U_{(n+1)} := 1.$$

Alors, $w_{n,q}^2$ peut s'écrire comme suit

$$w_{n,q}^2 = 2\sum_{j=1}^{n} \psi_2(U_{(j)}) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\psi_1(U_{(j)}) + n\int_0^1 (1-t)^2 q(t)dt,$$

où $\psi_1$ et $\psi_2$ sont deux fonctions définies par

$$\psi_1(t) = \int_0^t q(u)du \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = \int_0^t uq(u)du.$$

En particulier, pour $q(t) = t^{2\beta}$, avec $\beta > -1$ tel que $\beta \neq -\frac{1}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} w_{n,\beta}^2 &:= \int_0^1 t^{2\beta}\alpha_n^2(t)dt \\ &= \frac{1}{n(2\beta+1)}\sum_{j=1}^{n}\left\{(1-2j)U_{(j)}^{2\beta+1} + \frac{n(2\beta+1)}{\beta+1}U_{(j)}^{2\beta+2}\right\} \\ &\quad -\frac{n}{2(2\beta+3)(\beta+1)}, \end{aligned}$$

et, pour $\beta = -\frac{1}{2}$,

$$w^2_{n,-\frac{1}{2}} \quad = \quad -\frac{3n}{2} + 2\sum_{j=1}^{n} \Big\{ U_{(j)} - \frac{(j-\frac{1}{2})}{n} \log U_{(j)} \Big\}.$$

C'est la statistique $w^2_{n,q}$ (en particulier $w^2_{n,\beta}$) que nous étudierons dans notre travail. Deheuvels et Martynov ont donné l'expression *explicite* (voir [30]) des fonctions propres et valeurs propres du D.K.L du processus $\{t^{\beta}B(t) : 0 < t \leq 1\}$ à l'aide de fonctions de Bessel. On ne manquera pas, non plus, de citer la généralisation de ce D.K.L effectuée par P.Deheuvels dans [31] en prenant $T = \mathbb{R}^d$. Nous avons pour tout $s, t \in (0,1]$ et $\beta = \frac{1}{2v} - 1 > -1$ (ou $v > 0$),

$$(st)^{\beta}\Big(\min(s,t) - st\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) e_j(t)$$

et

$$t^{\beta}B(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\xi_j e_j(t) \quad \text{ presque sûrement.}$$

Ici, les variables aléatoires $\{\xi_j : j \geq 1\}$ sont i.i.d., chacune, de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$, et les valeurs propres et les fonction propres du développement sont données par

$$\lambda_j = \big(\frac{2v}{z_{v,j}}\big)^2 \quad \text{et} \quad e_j(t) = t^{\frac{1}{2v}-\frac{1}{2}} \Big\{ \frac{J_v(z_{v,j} t^{\frac{1}{2v}})}{\sqrt{v} J_{v-1}(z_{v,j})} \Big\}, \qquad j \geq 1, \ t \in (0,1].$$

Ainsi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \frac{1}{2(\beta+1)(2\beta+3)} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 e_i(t) e_j(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

### Décomposition orthogonale en composantes principales

La décomposition orthogonale en composantes principales des statistiques de type Cramér-Von Mises sert à évaluer asymptotiquement la puissance des tests d'ajustement. Nous trouvons des exemples de cette décomposition pour le processus empirique uniforme $\alpha_n(t)$ et le processus empirique d'Anderson-Darling $\big(t(1-t)\big)^{-1}\alpha_n(t)$ dans [40] et [43] respectivement. Cette technique est basée sur le fait que les fonctions $\{e_j(.), j \geq 1\}$ du D.K.L (0.2.3) forment un système orthogonal dans $L^2(T,\mu)$, ce qui implique que, pour tout $j \geq 1$, la convergence en loi

$$\lim_{n\to\infty} \int_T X_n(t) e_j(t) dt = \sqrt{\lambda_j}\xi_j.$$

La variable aléatoire du membre de droite suit une loi $N(0,\lambda_j)$, ce qui nous permet, ici, encore, de construire un test d'ajustement pour chaque choix de $j \geq 1$.

**Puissance du test relative à une suite d'alternatives locales**

Supposons que l'hypothèse $(H_0)$ ne se tienne pas et que les variables aléatoires $U_1,\ldots,U_n$ sont indépendantes et équidistribuées de fonction de répartition $G^{(n)}(.)$ vérifiant, pour $\delta_n(t) := \sqrt{n}\big(G^{(n)}(t)-t\big)$, la condition

$$\int_0^1 q(t)\big(\delta_n(t)-\delta(t)\big)^2(t)dt \to 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty, \tag{0.3.15}$$

où $\delta(.)$ est une fonction telle que

$$\int_0^1 q(t)\delta^2(t)dt < \infty. \tag{0.3.16}$$

Nous considérons alors *la suite d'alternatives locales*

$$(H_a) : G = G^{(n)}.$$

Cette modélisation des hypothèses alternatives a été discutée, en particulier, par Chibisov dans [18]. Sous les conditions (0.3.15) et (0.3.16) et l'alternative $(H_a)$, le processus empirique uniforme $\alpha_n(.)$ converge faiblement vers le processus limite $B(.)+\delta(.)$, et nous avons

$$w_{n,q}^2 \xrightarrow{loi} w_{(\delta,q)}^2 := \int_0^1 q(t)\big[B(t)+\delta(t)\big]^2 dt. \tag{0.3.17}$$

Donc, l'hypothèse $(H_0)$ est rejetée pour un risque $\alpha \in (0,1)$ si l'inégalité $w_{n,q}^2 > w_\alpha$ est vraie pour $n$ assez grand. La constante $w_\alpha$ s'obtient à partir de l'égalité

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^1 q(t)B^2(t)dt > w_\alpha\Big) = \alpha.$$

Pour $q(t)=t^{2\beta}$ et une selection de valeurs $\beta > -1$, une tabulation numérique des quantiles $w_\alpha$ pour $\alpha$ =10%, 5%, 1%, 0.5%, 0.1% est mentionnée dans [30]. Donc la puissance asymptotique du test basé sur la statistique $w_{n,q}^2$, sous l'alternative locale $(H_a)$, est donnée par

$$\mathbb{P}\Big(w_{(\delta,q)}^2 > w_\alpha\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(w_{n,q}^2 > w_\alpha | H_a\Big). \tag{0.3.18}$$

Le calcul de cette probabilité est, comme on pourrait s'y attendre, très délicat. Dans ce qui suit, en faisant usage du D.K.L (0.2.3), et de sa décomposition orthogonale, nous allons présenter une nouvelle méthode pour évaluer asymptotiquement cette probabilité. Pour simplifier les notations, nous posons

$$g(t) := \sqrt{q(t)}\delta(t), \qquad \eta := \frac{w_\alpha - \tau_0 - \int_0^1 g^2(t)dt}{2},$$

$$\tau_0 := \int_0^1 s(1-s)q(s)ds, \qquad g_j := \int_0^1 g(t)e_j(t)dt, \quad \text{pour tout} \quad j \geq 1.$$

En utilisant le D.K.L de la page 6, nous obtenons les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
\Lambda &:= \int_0^1 \Big[\int_0^1 g(s)K_q(s,t)ds\Big]^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j g_j)^2, \\
D^2 &:= \int_0^1 \int_0^1 g(s)g(t)K_q(s,t)dsdt = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j g_j^2, \\
T &:= \int_0^1 q(t)B^2(t)dt - \tau_0 = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j \xi_j^2 - \tau_0 \quad \text{presque sûrement}, \\
S &:= \int_0^1 g(t)\sqrt{q(t)}B(t)dt = \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j} g_j \xi_j \quad \text{presque sûrement}.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que la variable aléatoire $S$ suit la loi normale $N(0, D^2)$. À l'aide de ces expressions, nous pouvons réécrire la variable $w^2_{(\delta,q)}$ définie dans (0.3.17) comme suit

$$w^2_{(\delta,q)} = T + 2S + w_\alpha - 2\eta. \tag{0.3.19}$$

Cette égalité joue un rôle très important pour évaluer asymptotiquement la probabilité (0.3.18). Le résultat principal concernant cette évaluation sera résumé dans le théorème suivant. Soit $\varphi$ (respectivement $\Phi$) la densité (resp. la fonction de répartition) de la loi normale $N(0,1)$. C'est à dire

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy.$$

**Théorème 0.3.1** *(Puissance asymptotique du test de type Cramér-von Mises)*

Nous avons

$$\mathbb{P}\big(w^2_{(\delta,q)} \leq w_\alpha\big) =$$
$$\Phi\big(\frac{\eta}{D}\big) + \frac{1}{D}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2^m m!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\Big\{\varphi\big(\frac{x}{D}\big)\mathbb{E}\Big(T^m \mid S = x\Big)\Big\}\Big|_{x=\eta} + \varepsilon_k(\eta),$$

où le reste $\varepsilon_k(.)$ vérifie

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varepsilon_k(x)| \leq \frac{C}{\Big(D^2 - \frac{\Lambda}{\lambda_1}\Big)^{\frac{k+1}{2}}}, \tag{0.3.20}$$

et $C$ est une constante ne dépendant que de $k$ et $q$ définie par

$$C := \frac{M}{(k-1)!}\Big\{\frac{\tau_0^{k+1}\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{2^{(k-\frac{1}{2})}(k+1)}\Gamma(\frac{3}{2}) + \frac{2^{\frac{3}{2}}\lambda_1^{k+\frac{5}{2}}}{k+1}\Gamma(k+\frac{5}{2})\Big\},$$

avec

$$M := \frac{2^{\frac{k+3}{2}}\Gamma\big(\frac{k+1}{2}\big)\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{e}}{\big(2\pi\big)^2}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_{2k+3}}\Big)^{k+1} I_k,$$

où

$$I_k := \int_0^{+\infty}\prod_{j=2k+4}^{\infty}\big[1 + (2ua_j)^2\big]^{-\frac{1}{4}}du \quad \text{ et } \quad a_j := \frac{\lambda_1\lambda_j}{\lambda_1 - \lambda_j}, \quad \forall\, j \geq 2k+4.$$

*Cas pratiques*

**1)** Pour $k = 1$, nous obtenons

$$\mathbb{P}\Big(W^2_{(\delta,q)} \leq w_\alpha\Big) = \Phi\left(\frac{\eta}{D}\right) + \frac{\Lambda}{2D^3}\Big[1 - (\frac{\eta}{D})^2\Big]\varphi\left(\frac{\eta}{D}\right) + \varepsilon_1(\eta).$$

**2)** Si nous remplaçons $\delta(.)$ par $a\delta(.)$ (avec $a \geq 0$) dans la condition (0.3.16), nous avons

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varepsilon_k(x)| = o\big(a^{-\frac{k+1}{2}}\big) \quad \text{lorsque } \ a \to \infty. \tag{0.3.21}$$

# Chapitre 1

# Développement de Karhunen-Loève d'un processus gaussien et applications statistiques

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats généraux concernant les processus gaussiens et certains processus empiriques. Le résultat principal qui retient notre intérêt est le théorème 1.6.1, page 36, qui porte sur le développement de Karhunen-Loève d'un processus gaussien centré. Lorsqu'un tel processus est défini sur un espace compact $T$, et que sa fonction de covariance y est continue, le théorème 1.6.1 est un résultat classique, conséquence directe du théorème de Mercer, et démontré dans de multiples ouvrages. On consultera, par exemple, [65] paragraphe 37.5 p. 143-144, [73] Proposition 3.11 p.49 et [2] Théorème 3.16 p.75. Malheuresement, de nombreux processus d'intérêt, en statistique, sont définis sur des espaces non-compacts. Il en est ainsi pour le processus d'Anderson-Darling, où $T = (0, 1)$, et pour le processus étudié par Deheuvels et Martynov [30], pour lequel $T = (0, 1]$. Dans ces cas particuliers, il existe, bien sûr, des résultats spécifiques. On citera, par exemple, dans [3] le paragraphe suivant la relation (4.6) p. 198, ou, dans [87], le théorème 3 p. 210. Mais de tels résultats nécessitent, dans chacun des cas étudié, de faire appel aux propriétés particulières des noyaux de covariance et n'ont pas été systématiquement développés dans un cadre général.

Le théorème 1.6.1, page 36, de ce document ne fait intervenir que deux hypothèses, assez faibles et simples, portant sur la fonction de covariance (voir (1.5.20) et (1.5.21) page 33). Celles-ci sont satisfaites dans l'immense majorité des cas intéressants en statistiques, ce qui justifie leur intérêt.

Donnons un exemple , pour illustrer l'utilité d'un tel résultat. Un des sous-produits des D.K.L concerne le calcul des puissances des tests. Ce dernier fait un appel privilégié à la théorie des fonctions spéciales. La résolution de l'équation intégrale (0.2.2) permet alors d'obtenir un développement du type (0.2.1) fournissant, par contre-coup, des égalités intéressantes.

Les fonctions de Bessel (voir l'annexe A) joue un rôle privilégié dans le D.K.L. des ponts browniens et processus de Wiener pondérés. Par exemple pour le paramètre $\beta = \frac{1}{2\upsilon} - 1 > -1$, on a

$$(st)^{\beta}\big(\min(s,t) - st\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) e_j(t) \quad \text{pour } s,t \in (0,1], \tag{1.1.1}$$

où les valeurs propres, $\lambda_j$, et les fonctions propres, $e_j(.)$, sont données par

$$\lambda_j = (\frac{2\upsilon}{z_{j,\upsilon}})^2 \quad \text{et} \quad e_j(t) = t^{\frac{1}{2\upsilon}-\frac{1}{2}} \frac{J_\upsilon(z_{\upsilon,j} t^{\frac{1}{2\upsilon}})}{\sqrt{\upsilon} J_{\upsilon-1}(z_{\upsilon,j})}. \tag{1.1.2}$$

En particulier, pour $\beta = 0$, nous obtenons le développement associé au pont Brownien standard. Celui-ci fait intervenir les fonctions trigonométiques

$$\min(s,t) - st = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi j s)\sin(\pi j t)}{(\pi j)^2}. \tag{1.1.3}$$

Le domaine de définition du pont Brownien standard est l'intervalle compact $T = [0,1]$, et le théorème de Mercer garantit, dans ce cas, la convergence uniforme dans (1.1.3). Plus généralement, par une extension directe de ce résultat, il est possible d'établir, sans hypothèse additionnelle, la convergence de la série (1.1.3), dans $L^2(T \times T)$. La convergence uniforme de cette même série a lieu, lorsque la fonction de covariance est continue sur le compact $T \times T$. Cette propriété n'est plus satisfaite, en général, dans (1.1.1), lorsque $T$ n'est plus compact. On peut, néanmoins, pour chacune de ces séries, affirmer que la convergence est ponctuelle sur tout ouvert, et uniforme sur tout compact.

Les fonctions de Legendre (voir l'annexe A) ont été utilisées par Pyke [80] pour trouver le développement suivant : Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $s,t \in (0,1)$, nous avons

$$\begin{aligned}&\{\frac{\min(s,t)-st}{\sqrt{s(1-s)t(1-t)}}\}^a\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a}{(a+i-1)(a+i)}\frac{(2a+2i-1)\Gamma(2a+i)}{(i-1)!}\times\\&\quad P_{a+i-1}^{-a}(2s-1)P_{a+i-1}^{-a}(2t-1).\end{aligned}$$

Pour le cas particulier $a=1$, nous retrouvons le développement introduit par Anderson-Darling [87].

Nos démonstrations, présentées par la suite, reposent sur les propriétés des espaces gaussiens, et de leurs noyaux auto-reproduisant associés, dont nous rappelons les propriétés plus loin. Un résultat clé dans la suite de cet exposé est la proposition 1.3.1. Les derniers paragraphes de ce chapitre énoncent diverses propriétés asymptotiques du processus empirique uniforme, dont une loi du logarithme itéré pour le pont brownien pondéré.

En préambule, nous rappelons certaines notions de base sur les processus gaussiens, et donnons une série de définitions utiles.

## 1.2 Définitions

La notion de mesure gaussienne s'étend aux espaces vectoriels topologiques localement convexes. Dans cette thèse, nous nous limitons au cas des espaces d'Hilbert.

**Définition** 1.2.1 *(Processus stochastique)*

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle processus stochastique indexé par un espace métrique $T$, toute famille (mesurable) de variables aléatoires réelles définies sur $\Omega\times T$.

**Définition** 1.2.2 *(Processus Gaussien)*

On appelle processus Gaussien (resp. Gaussien centré) indexé par $T$, tout processus $(X(t))_{t\in T}$ tel que, pour toute famille finie $(t_1,\dots,t_p)$ des points de $T$, le vecteur aléatoire $(X(t_1),\dots,X(t_p))$ suit une loi Gaussienne (resp. Gaussienne centrée) dans $\mathbb{R}^p$.

**Définition** 1.2.3 *(Semi-métrique intrinsèque)*

Soit $(X(t))_{t\in T}$ un processus tel que

$$X(t) \in L^2(\mathbb{P}), \text{ pour tout } t \in T.$$

On définit la semi-métrique sur l'ensemble $T$ par

$$\varrho_X(s,t) = \sqrt{\mathbb{E}\big(X(s) - X(t)\big)^2}.$$

**Définition** 1.2.4 *(Modification d'un processus)*

Soit $(X(t))_{t\in T}$ un processus défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit qu'un processus $(Y(t))_{t\in T}$ est une modification de $(X(t))_{t\in T}$ si, pour tout $s, t \in T$, on a

$$X(t) = Y(t) \text{ presque sûrement.}$$

(Remarquons que deux processus modifient l'un de l'autre ont la même semi-métrique).

**Définition** 1.2.5 *(Processus séparable)*

On dit qu'un processus $(X(t))_{t\in T}$ indexé par un espace métrique $(T, |.|)$ est *séparable* s'il existe un sous ensemble dénombrable $T^{'} \subset T$ tel que, pour tout ouvert $O$ de $(T, |.|)$, on a

$$\sup_{t\in O} X(t) = \sup_{t\in O\cap T'} X(t) \text{ avec probabilité 1.}$$

**Définition** 1.2.6 *(Mesure Gaussienne)*

Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace d'Hilbert. On dit qu'une mesure de probabilité $\eta$ sur les boréliens de $(E, \| \,.\, \|)$ est une mesure Gaussienne lorsque toute forme linéaire continue sur $(E, \| \,.\, \|)$ suit une loi Gaussienne sous $\eta$. On dit que la mesure Gaussienne $\eta$ est centrée lorsque toute forme linéaire continue sur $(E, \| \,.\, \|)$ suit une loi centrée sous $\eta$.

**Définition** 1.2.7 *(Mesure de Radon)*

On dit qu'une mesure de probabilité $\eta$ définie sur un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est de Radon, lorsque pour tout borélien $B$ de $(E, \mathcal{O})$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $C$ de $(E, \mathcal{O})$ inclus dans $B$ vérifiant

$$\eta(B) \leq \eta(C) + \varepsilon.$$

Les propriétés de linéarité des mesures Gaussiennns nous permettent de définir les notions suivantes.

**Définition** 1.2.8

Soit $\eta$ une mesure Gaussienne centrée sur un espace d'Hilbert $(E, \| \ . \ \|)$. Nous notons $E^{'}$ le dual topologique de $(E, \| \ . \ \|)$, et, comme $E^{'} \subset L^2(\eta)$, nous définissons $E^*$ comme la fermeture de $E^{'}$ dans l'espace d'Hilbert $L^2(\eta)$.

**Définition** 1.2.9 *(Espace auto-reproduisant)*

On appelle espace *auto-reproduisant* d'une mesure Gaussienne (noté $\mathbb{H}_\eta$) l'adhérence de l'image de $E^*$ par l'application $g \to z_g$.

**Proposition 1.2.10**

Pour tout élément $g \in E^*$, il existe un unique élément de $E$, noté $z_g$ tel que, pour tout $f \in E^*$, on a

$$f(z_g) = \mathbb{E}_\eta(fg). \tag{1.2.4}$$

L'application $g \to z_g$ est linéaire injective et est $L^2(\eta)-$continue sur $E^*$.

## 1.3 Espaces d'Hilbert associés à un processus gaussien

### 1.3.1 Notations

Soient $p \geq 1$ un entier et un pavé $T = T_1 \times \ldots \times T_p \subseteq \mathbb{R}^p$, où pour $i = 1, \ldots, p$, $T_i$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous notons par $\mathcal{T}$ la tribu des boréliens de $T$ pour la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^p$. Soit $\mu$ une mesure de Radon positive sur $T$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, notée (dt). Nous désignons $m(.)$ sa densité, de sorte que nous avons $d\mu(t) = m(t)dt$. Nous munissons l'espace $L^2(T, \mu)$ par $(.|.)$ et $\| \ . \ \|_2$ respectivement le produit scalaire et la norme définis par :

$$(f|g) = \int_T f(t)g(t)d\mu(t) \quad \text{et} \quad \| f \|_2 = (f|g)^{\frac{1}{2}} \ \ \forall \ f, g \in L^2(T, \mu).$$

Soit $X = \{X(t) : t \in T\}$ un processus gaussien réel centré défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La fonction de covariance $K(.,.)$ du processus $X$ est définie pour tout couple $(s, t) \in T \times T$ par

$$K(s, t) = \mathbb{E}\big(X(s)X(t)\big).$$

Elle est telle que la matrice $\{K(t_i, t_j) : 1 \leq i, j \leq N\}$ est symétrique positive, pour tout $N$-uplet $\{t_1, \ldots, t_N\} \subseteq T$. De plus,

$$K(s,s) \geq 0, \tag{1.3.5}$$
$$K(s,t) = K(t,s), \tag{1.3.6}$$
$$K^2(s,t) \leq K(s,s)K(t,t). \tag{1.3.7}$$

Pour la démonstration des propriétés suivantes, nous nous référons à [73], chapitres 1-3. En résumant, nous pouvons toujours associer à un processus gaussien $X$ de fonction de covariance $K(.,.)$ deux espaces d'Hilbert qui seront notés respectivement $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$.

L'espace gaussien $\mathbb{G}$ est la fermeture dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de l'espace vectoriel de variables aléatoires gaussiennes qui s'écrivent sous la forme

$$\vartheta(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X(t_i), \tag{1.3.8}$$

où pour tout $0 \leq i \leq n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le couple $(\alpha_i, t_i) \in \mathbb{R} \times T$.

L'espace $\mathbb{G}$ est muni du produit scalaire défini par :

$$(g_1 \mid g_2)_{\mathbb{G}} = \mathbb{E}(g_1 g_2) \qquad \text{pour tout} \qquad g_1, g_2 \in \mathbb{G}.$$

Ensuite, l'espace d'Hilbert $\mathbb{H}$ introduit par Aronszajn (voir [7]) est défini comme suit. On part de l'espace $H_0(X)$ de fonctions réelles $h(.)$, définies sur $T$, par

$$h(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(t_i, s), \tag{1.3.9}$$

où pour tout $0 \leq i \leq n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le triplet $(\alpha_i, t_i, s) \in \mathbb{R} \times T \times T$.

Cet espace est muni du produit scalaire $(. \mid .)_{\mathbb{H}}$, défini pour deux fonctions

$$h_1(.) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(t_i, .) \qquad \text{et} \qquad h_2(.) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i K(t_i, .)$$

par

$$(h_1 \mid h_2)_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_2(t_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j h_1(t_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j K(t_i, t_j). \tag{1.3.10}$$

Pour toute fonction $h \in H_0(X)$, nous avons la propriété, dite d'auto-reproduction,

$$h(t) = (h \mid K(t,.))_{\mathbb{H}} \quad \text{pour tout } t \in T. \tag{1.3.11}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit donc, pour tout $(t,h) \in T \times \mathbb{H}$, sous la forme

$$h(t) = (h \mid K(t,.)_{\mathbb{H}} \leq \sqrt{(h \mid h)_{\mathbb{H}}}\sqrt{K(t,t)}. \tag{1.3.12}$$

Nous déduisons de tout ceci une norme, en posant

$$\parallel h \parallel_{\mathbb{H}} = \sqrt{(h \mid h)_{\mathbb{H}}}. \tag{1.3.13}$$

L'espace d'Hilbert $\mathbb{H}$ *auto-reproduisant*, associé au processus gaussien $X$, est donc le complété de $H_0(X)$ pour cette norme.

Nous avons donc l'isomorphisme d'espaces d'Hilbert

$$\begin{aligned} \iota \ : \ & \mathbb{G} \to \mathbb{H} \\ & g \mapsto \mathbb{E}(gX(.)). \end{aligned}$$

En vertu de l'isomorphisme précédent, nous avons, pour tout $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$,

$$(g_1 \mid g_2)_{\mathbb{G}} = (g_1 \mid g_2)_{\mathbb{H}} = (\iota(g_1) \mid \iota(g_2))_{\mathbb{H}}.$$

Si les espaces $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont séparables, alors, ils admettent des bases orthonormales hilbertiennes de même cardinal fini ou infini, noté $n_X$. Dans ce cas, grâce à la proposition 1.3.1 qui suit, nous avons un premier résultat utile, pour le développement de $X$ en série de variables aléatoires gaussiennes orthogonales. Pour démontrer cette propriété, nous aurons besoin du lemme suivant.

### Lemme 1.3.1

Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, symétriques à valeurs dans un espace de Banach réel $F$, muni de la topologie induite par la norme correspondante. Posons $s_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$. Alors $s_n$ converge presque sûrement, si et seulement si, il existe une variable aléatoire $s$ à valeurs dans $F$, telle que pour tout $s^*$ appartenant au dual topologique de $F$, nous ayons la convergence en probabilité suivante : $s^*(s_n) \to s^*(s)$.

**Preuve.** Ce lemme est cité dans [2] lemme 3.9 p. 71 et démontré dans [52] théorème 4.1 p. 40.$\square$

### Proposition 1.3.1

Soit $X = \{X(t) : t \in T\}$ un processus gaussien centré de fonction de covariance $K(.,.)$, dont l'espace gaussien $\mathbb{G}$, et l'espace auto-reproduisant $\mathbb{H}$, associés sont séparables. Si nous désignons par $\{\xi_i : 1 \leq i \leq n_X\}$, une base orthogonale de $\mathbb{G}$, et par $\{e_i(.) = \iota(\xi_i) : 1 \leq i \leq n_X\}$, la base orthonormée de $\mathbb{H}$, qui lui correspond par l'isomorphisme $\iota$, alors, nous avons, pour tout $t \in T$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n_X} \xi_i e_i(t) \quad \text{dans } (\mathbb{G}, \| \, . \, \|_{\mathbb{G}}) \text{ presque sûrement }, \tag{1.3.14}$$

$$K(t,.) = \sum_{i=1}^{n_X} e_i(t) e_i(.) \quad \text{dans } \ (\mathbb{H}, \| \, . \, \|_{\mathbb{H}}), \tag{1.3.15}$$

et, pour tout $(s,t) \in T \times T$,

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n_X} e_i(s) e_i(t). \tag{1.3.16}$$

La série (1.3.16) est absolument convergente. Si, de plus $K(.,.)$ est continue sur $T \times T$, alors, elle est uniformément continue sur $T_\varepsilon \times T_\varepsilon$, pour tout compact $T_\varepsilon \subseteq T$.

**Preuve.** Mise à part la convergence presque sûre dans (1.3.14), et la convergence absolue dans (1.3.16), cette proposition découle de [73] proposition 3.7 p. 42. Pour la convergence presque sûre dans (1.3.14), nous appliquons le lemme 1.3.1, avec les choix particuliers de $F = \mathbb{G}$, $Z_i = \xi_i e_i(s)$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Comme tout élément du dual topologique de $\mathbb{G}$ est de la forme $\mathbb{E}(g.)$, avec $g \in \mathbb{G}$, nous obtenons que, d'après la première assertion dans (1.3.14),

$$\mathbb{E}(gS_n) \to \mathbb{E}(gX(s)) \quad \text{presque sûrement} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Ceci signifie que, pour tout $s \in T$, la suite $S_n$ admet une limite presque sûre $S(s)$. La convergence a, bien sûr, également lieu en probabilité. Nous nous référons à [73], lemme 1.5 p. 16. Pour une telle suite gaussienne, la convergence en probabilité implique la convergence en moyenne quadratique. Donc, cette convergence a bien lieu, relativement à la norme $\| \, . \, \|_{\mathbb{G}}$ . Or pour cette norme, $S_n$ converge vers $X(s)$, comme conséquence de la première assertion dans (1.3.14). L'unicité de la limite nous garantit l'égalité $S(s) = X(s)$. Par conséquent, la convergence presque sûre dans (1.3.14) est établie. Quant à la convergence absolue de la série (1.3.16), elle est une conséquence de sa convergence simple. En effet, soient $s, t \in T$ et $\varepsilon > 0$, les séries $\sum_{i=1}^{n_X = \infty} e_i^2(s)$ et $\sum_{i=1}^{n_X = \infty} e_i^2(t)$ convergent respectivement vers $K(s,s)$ et $K(t,t)$. Donc, il existe un entier $N$ assez grand tel que, pour tout $p, q \geq N$, nous ayons

$$\sum_{i=p}^{q} e_i^2(s) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{i=p}^{q} e_i^2(t) < \varepsilon.$$

Alors, nous déduisons de l'inégalité de Cauchy-Shwarz que

$$\sum_{i=p}^{q} |e_i(s)e_i(t)| \leq [\sum_{i=p}^{q} e_i^2(s)]^{\frac{1}{2}}[\sum_{i=p}^{q} e_i^2(t)]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Le résultat cherché en découle naturellement.□

On a, de plus, le résultat additionnel suivant pour les processus à trajectoires presque sûrement continues.

**Lemme 1.3.2**

Si le processus $X$ a des trajectoires presque sûrement continues, la convergence de la série (1.3.14) est presque sûrement uniforme sur tout compact $T_\varepsilon \subseteq T$.

*Remarque 1.3.1*

Dans [2] théorème 3.8 p. 71, nous trouvons un énoncé similaire aux résultats précédents, mais sans la restriction que le processus est défini sur un ensemble compact. Dans ce théorème, $T$ est supposé compact. En effet, si nous ignorons la compacité, nous perdons le sens de la convergece uniforme presque sûre dans (1.3.14) comme le montre le contre-exemple du processus d'Anderson-Darling que nous allons étudier dans la suite. Pour la preuve du lemme 1.3.2 dans le cas général, nous reprenons la démonstration du théorème 3.8 p.71 dans [2], en l'adaptant au cas où $T$ n'est pas compact. La première étape consiste à reformuler le lemme 3.10 p. 71 dans [2], sur laquelle cette démonstration s'appuie. Ce lemme s'énonce comme suit.

**Lemme.** Si $\{e_i(.) : i \geq 1\}$ est une base orthogonale de l'espace $\mathbb{H}$, alors la série $\sum_{i\geq 1} e_i^2(s)$ est convergente uniformément sur $T$ vers $K(s,s)$.

Ce lemme est établi sous l'hypothèse que $T$ est compact. Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, le résultat n'est plus valable, comme le montre le contre-exemple suivant, construit à partir du développement D.K.L. du processus d'Anderson-Darling (où $B(\cdot)$ est un pont brownien)

$$\frac{B(t)}{\sqrt{s(1-s)t(1-t)}}.$$

Supposons que nous ayons la convergence uniforme du D.K.L. de ce processus. Il suffit, dans ce cas, de prendre pour chaque $i \geq 1$, la fonction de Legendre $P_i^{-1}(2t-1)$, continue sur le compact $[0,1]$ et qui s'annule en $t = 0$. Donc, sous l'hypothèse d'une convergence uniforme de la série, nous aurions

$$\lim_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{s(1-s)t(1-t)}} = 0 \qquad \text{presque sûrement.}$$

Autrement dit, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existerait un $\eta > 0$, tel que pour tout $t \leq \eta$, nous aurions, presque sûrement ;

$$\frac{B(t)}{\sqrt{s(1-s)t(1-t)}} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{\mathbb{E}B^2(t)}{s(1-s)t(1-t)} = 1 \leq \frac{1}{2}.$$

Ce qui est manifestement impossible.

Lorsque $T$ n'est pas compact, l'application du théorème du Dini nous permet d'énoncer le lemme suivant.

**Lemme 1.3.3**

La relation (1.3.16) implique la convergence simple de $\sum_{i\geq 1} e_i^2(s)$ sur $T$ vers $K(s,s)$, ainsi que la convergence uniforme de cette série sur tout compact $T_\varepsilon \subseteq T$.

Nous utiliserons ce résultat dans notre démonstration.

**Preuve du lemme 1.3.3.** D'après ([2] p. 72), si le processus $X$ est à trajectoires presque sûrement continues, alors $X$ est continu en moyenne quadratique, ce qui implique que sa fonction de covariance est continue. Donc, les fonctions de base $\{e_i(.) : i \geq 1\}$ sont aussi continues (voir [2] proposition 3.6 p. 40). Soient $T_\varepsilon \subseteq T$ un compact et $F_\varepsilon$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $T_\varepsilon$. Notons par $\widetilde{X}$ et $\widetilde{e}_i(.)$ les restrictions respectivement de $X$ et $e_i(.)$ sur le compact $T_\varepsilon$. Il est clair que $\widetilde{X}$ et $Z_i := \xi_i \widetilde{e}_i(.)$ sont des variables aléatoires dans $F_\varepsilon$. De plus, tout élément $\mu^*$ du dual topologique de $F_\varepsilon$ est une mesure borélienne signée finie sur $T_\varepsilon$. Rappelons $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\mu^*(S_n) - \mu^*(\widetilde{X})| = \mathbb{E}\int_{T_\varepsilon} |S_n(t) - \widetilde{X}(t)| d\mu^*(t) \\
&\leq \int_{T_\varepsilon} \mathbb{E}|S_n(t) - \widetilde{X}(t)| d\mu^*(t) \\
&\leq \int_{T_\varepsilon} \{\mathbb{E}|S_n(t) - \widetilde{X}(t)|^2\}^{\frac{1}{2}} d\mu^*(t) \\
&\leq \int_{T_\varepsilon} [\sum_{i\geq n+1} \widetilde{e}_i^2(t)]^{\frac{1}{2}} d|\mu^*|(t),
\end{aligned}$$

où $|\mu^*|(.)$ désigne la variation totale de la mesure $\mu^*$. La convergence uniforme de $\sum_{i\geq n+1} \widetilde{e}_i^2(t)$ vers 0 obtenue au lemme 1.3.3 et l'inégalité de Tchebicheff nous permettent de conclure que $\mu^*(S_n)$ tend en probabilité vers 0 quelle que soit $\mu^*$. Finalement, le lemme 1.3.1 nous assure que $S_n$ converge presque sûrement vers $\widetilde{X}$ pour la norme $\| \, . \, \|_\infty$ .□

## 1.4 Conditions sur la fonction de covariance K

Dans ce paragraphe, nous allons introduire deux conditions importantes, notées $C1$ et $C2$, sur la fonction de covariance (ou noyau) $K(.,.)$. Avant tout, en utilisant la définition 1.2.3, nous rappelons qu'un processus gaussien $X$ est continu en probabilité au point $t \in T$ si et seulement si $\lim_{s \to t} \varrho_X(s,t) = 0$ (voir [73], proposition 3.6 p. 40).

Nous pouvons aisément montrer que

$$K(t,t) + K(s,s) - 2K(s,t) = \varrho_X^2(s,t).$$

Soient maintenant les conditions :

$C1$ : Pour tout $t \in T$, la fonction $s \to \varrho_X^2(s,t)$ est $\mu$-presque continue.

$C2$ : $\int_T K(s,s)d\mu(s) < \infty$.

La condition $C1$ est équivalente à la continuité en probabilité du processus gaussien $X$, $\mu$-presque partout sur $T$. Nous nous référons à [47] théorème 1 p. 219, et à la remarque 1, p. 221 de [47], pour montrer l'existence d'un processus $\widetilde{X}$, séparable au sens de la définition 1.2.5 et qui modifie $X$, au sens de la définition 1.2.4. On a, en d'autres termes,

$$\mathbb{P}\big(X(t) = \widetilde{X}(t)\big) = 1 \quad \text{pour tout } t \in T.$$

Nous concluons donc que, sous la condition $C1$, nous aurons deux implications. La première est que le processus de départ $X$ est séparable. Quant à la deuxième, les deux fonctions $(s,t) \to K(s,t)$ et $t \to K(t,t)$ sont continues $\mu$-presque partout respectivement sur $T \times T$ et $T$.

En effet, nous pouvons observer que

$$xy - x_0y_0 = (x - x_0)(y - y_0) + (x - x_0)y_0 + (y - y_0)x_0$$

Pour tout $(s,t), (s_0,t_0) \in T^2$, nous avons

$$|K(s,t) - K(s_0,t_0)| = |\mathbb{E}[X(s)X(t) - X(s_0)X(t_0)]|$$

$$\leq |\mathbb{E}[(X(s) - X(s_0))(X(t) - X(t_0))]| + |\mathbb{E}(X(s) - X(s_0))X(t_0)|$$
$$+|\mathbb{E}(X(t) - X(t_0))X(s_0)|$$

$$\leq \varrho_X(s,s_0)\varrho_X(t,t_0) + \varrho_X(s,s_0) \parallel X(t_0) \parallel_2 + \varrho_X(t,t_0) \parallel X(s_0) \parallel_2 . \quad (1.4.17)$$

En conséquence, sous la condition $C1$, le membre droit de (1.4.17) tend vers 0 lorsque $(s,t) \to (s_0,t_0)$. Ceci implique la continuité de $K(.,.)$ sur $T^2$. Concernant la continuité de $t \to K(t,t)$, il suffit de prendre $s = t$ et $s_0 = t_0$.$\square$

**Lemme 1.4.1**

Si le noyau $K(.,.)$ vérifie $C1$ et $C2$, on a

**1)** $\mathbb{H} \subseteq L^2(T,\mu)$

**2)** Pour tout $h \in \mathbb{H}$, $\| h \|_2^2 \leq \| h \|_{\mathbb{H}}^2 \int_T K(t,t)d\mu(t)$.

**Preuve.** D'après l'inégalité (1.3.12), pour tout $t \in T$, nous avons

$$h^2(t) \leq \| h \|_{\mathbb{H}}^2 K(t,t).$$

En intégrant sur $T$ par rapport à $\mu$, sous $C2$, nous obtenons

$$\int_T h^2(t)d\mu(t) \leq \| h \|_{\mathbb{H}}^2 \int_T K(t,t)d\mu(t) < \infty.$$

Le lemme en découle.□

**Proposition 1.4.1**

Les conditions $C1$ et $C2$ impliquent les propriétés suivantes.

$R1$ **:** $\int_{T\times T} K^2(s,t)d\mu(s)d\mu(t) < \infty$;

$R2$ **:** $\mathbb{E}\int_T X^2(s)d\mu(s) = \int_T K(s,s)d\mu(s)$;

$R3$ **:** $\int_T X^2(t)d\mu(t) < \infty$ presque sûrement.

**Preuve.** Sous $C1$, nous avons vu que le noyau $K(.,.)$ est continu sur $T^2$, et donc, mesurable. Par l'inégalité (1.3.7) page 24, et, faisant usage du théorème de Fubini, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \int_{T\times T} K^2(s,t)\mu(s)d\mu(t) &\leq \int_{T\times T} K(s,s)K(t,t)\mu(s)d\mu(t) \\ &= [\int_T K(s,s)d\mu(s)]^2 < \infty. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat $R1$. Pour les résultats $R2$ et $R3$, il suffit de remarquer que l'opérateur intégral $\int_T$ est une application linéaire. Donc, nous obtenons aisément que

$$\mathbb{E}\int_T X^2(s)d\mu(s) = \int_T \mathbb{E}X^2(s)d\mu(s) = \int_T K(s,s)d\mu(s) < \infty.$$

Ce qui implique que

$$\int_T X^2(s)d\mu(s) < \infty \quad \text{presque sûrement.}$$

Le lemme est ainsi démontré.□

## 1.5 Endomorphisme associé au noyau K

Dans ce paragraphe, nous supposerons que le noyau $K$ satisfait la condition $R1$ de la proposition 1.4.1. Sous cette condition, il existe un endomorphisme continu $\mathcal{I}(.)$ de $L^2(T,\mu)$ sur lui-même, défini par

$$f \in L^2(T,\mu) \to \mathcal{I}f := \int_T K(s,.)f(s)d\mu(s) \in L^2(T,\mu). \qquad (1.5.18)$$

On consultera, à ce sujet, et pour plus de détails, par exemple, [50] chapitre 3. L'application $\mathcal{I}$ est bien définie par (1.5.18). En effet, pour tout $t \in T$, et pour tout $f \in L^2(T,\mu)$, nous avons

$$(\mathcal{I}f)(t) = \int_T K(s,t)f(s)d\mu(s) \leq [\int_T K^2(s,t)d\mu(s)]^{\frac{1}{2}} \parallel f \parallel_2 . \qquad (1.5.19)$$

Donc, sous $R1$, nous avons la relation

$$\int_T (\mathcal{I}f)^2(t)d\mu(t) \leq \int_{T\times T} K^2(s,t)d\mu(s)d\mu(t) \parallel f \parallel_2^2 < \infty.$$

Tout ceci montre que l'endomorphisme de (1.5.18) est bien défini, et continu, d'après (1.5.19).$\square$

L'opérateur $\mathcal{I}$ est symétrique (i.e $\forall f,g \in L^2(T,\mu)$, $(\mathcal{I}f \mid g) = (g \mid \mathcal{I}f)$) et compact (l'image de la boule unité a une adhérence compacte). Nous nous référons à ([46], chapitres 4 et 5), pour la justification des propriétés suivantes.

– Il existe une base orthogonale de $L^2(T,\mu)$ formée de fonctions propres de $\mathcal{I}$ ;

– La valeur 0 est le seul point d'accumulation possible pour l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{I}$ ;

– L'espace propre associé à une valeur propre non nulle est de dimension finie ;

– Deux fonctions propres associées à deux valeurs propres distinctes sont orthogonales.

Rappelons aussi qu'un endomorphisme $A$ est dit *positif* si pour tout $f \in L^2(T,\mu)$, on a $(Af \mid f) \geq 0$, et si de plus il est symétrique compact, il est équivalent de dire que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Nous allons utiliser ces propriétés pour obtenir une décomposition de $L^2(T,\mu)$ en somme directe de sous espaces propres de $\mathcal{I}$.

Nous résumons comme suit l'essentiel de ces propriétés, en disant que, si $K$ vérifie les conditions $C1$ et $C2$, alors, nous pouvons lui associer l'endomorphisme (ou l'opérateur) $\mathcal{I}$ défini dans (1.5.18)-(1.5.19). Cet endomorphisme est symétrique et compact. Le lien entre cet endomorphisme et l'espace auto-reproduisant associé au processus gaussien $X$ est maintenant établi, dans le lemme suivant.

**Lemme 1.5.1**

Soit $K(.,.)$ vérifiant les deux conditions $C1$ et $C2$. Alors, pour tout $f \in L^2(T,\mu)$, on a $\mathcal{I}f \in \mathbb{H}$ et pour tout $h \in \mathbb{H}$

$$(\mathcal{I}f|h)_{\mathbb{H}} = \int_T fhd\mu := (f|h).$$

**Preuve.** Dans la démonstration qui suit, les résultats $R1$, $R2$ et $R3$ de la proposition 1.4.1 jouent un rôle essentiel. On sait que $X(.) \in L^2(T,\mu)$. Donc pour tout $f \in L^2(T,\mu)$, nous pouvons définir une forme linéaire continue sur $\mathbb{G}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f^* : \ \ \mathbb{G} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \mathbb{E}\{g\int_T X(s)f(s)d\mu(s)\} = \mathbb{E}\{g(X|f)\}. \end{aligned}$$

Remarquons que, pour tout $t \in T$, $f^*(X(t)) = \int_T K(s,t)f(s)d\mu(s) = (\mathcal{I}f)(t)$. La forme $f^*$ est un élément du dual topologique $\mathbb{G}^*$ de l'espace d'Hilbert $\mathbb{G}$. En effet, la continuité de $f^*$ s'obtient facilement d'après le calcul suivant :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\{g(X|f)\}| &\leq \{\mathbb{E}(g^2)\}^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{E}(X|f)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \{\mathbb{E}(g^2)\mathbb{E} \parallel X \parallel_2^2 \parallel f \parallel_2^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \parallel f \parallel_2 \{\int_T K(s,s)d\mu(s)\}^{\frac{1}{2}} \parallel g \parallel_{\mathbb{G}} . \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la proposition 1.2.10 page 23, il existe un unique élément $g_f \in \mathbb{G}$ tel que, pour tout $g \in \mathbb{G}$, nous avons $f^*(g) = \mathbb{E}(gg_f)$. En particulier, pour le processus $X(.)$, nous obtenons

$$f^*(X(.)) = \mathbb{E}(X(.)g_f) = \iota(g_f) = \mathcal{I}f \in \mathbb{H}.$$

De plus, pour tout $t \in T$, nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}f|K(.,t))_{\mathbb{H}} &= (\iota(g_f)|\iota(X(t)))_{\mathbb{H}} = (g_f|X(t))_{\mathbb{H}} \\ &= f^*(X(t)) = \int_T K(s,t)f(s)d\mu(s) = (f|K(.,t)). \end{aligned}$$

Soit maintenant $h \in H_0(X)$. Cette fonction se décompose nécessairement sous la forme $h(.) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(t_i, .)$. Nous pouvons écrire, en conséquence, que

$$(\mathcal{I}f|h)_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\mathcal{I}f|K(t_i, .))_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f|K(t_i, .))_{\mathbb{H}} = (f|h).$$

Comme les deux formes linéaires $h \to (\mathcal{I}f|h)_{\mathbb{H}}$ et $h \to (f|h)$ sont continues et coïncident sur l'espace $H_0(X)$, qui est dense dans $\mathbb{H}$, nous en déduisons qu'elles coïncident sur $\mathbb{H}$ tout entier. Nous avons donc

$$(\mathcal{I}f|h)_{\mathbb{H}} = (f|h) \quad \forall\ h \in \mathbb{H}.$$

La continuité des formes linéaires découle du lemme 1.4.1.$\square$

**Corollaire 1.5.1**

Si le noyau $K$ vérifie les conditions $C1$ et $C2$, alors l'endomorphisme $\mathcal{I}$ est positif.

**Preuve.** On sait que l'endomorphisme $\mathcal{I}$ est symétrique compact, donc il suffit de montrer que ses valeurs propres sont positives ou nulles. Soient $\lambda$ une valeur propre non nulle de $\mathcal{I}$ et $f \in L^2(T, \mu)$ la fonction propre non nulle associée. Suivant le lemme 1.5.1, nous avons $\lambda f = \mathcal{I}f \in \mathbb{H}$ donc $f \in \mathbb{H}$ et par conséquent $(\mathcal{I}f|f)_{\mathbb{H}} = (\lambda f|f)_{\mathbb{H}} = (f|f)$. Ce qui implique la positivité de la valeur propre $\lambda = \frac{(f|f)}{(f|f)_{\mathbb{H}}} > 0$. De plus 0 est le seul point d'accumulation pour toutes les valeurs propres possibles.$\square$

Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... > 0$ les valeurs propres non nulles de $\mathcal{I}$. Prenons pour chaque espace propre $E_{\lambda_i}$ $(i = 1, 2...,)$ une base orthonormale $B_{\lambda_i}$ et $n_\lambda = \sum_{i \geq 1} \dim E_{\lambda_i}$ (éventuellement fini ou infini). Les $E_{\lambda_i}$ étant orthogonaux, alors il existe un système de fonctions $\{e_i : i = 1, ..., n_\lambda\} \subseteq L^2(T, \mu)$ tel que pour tout $i, j = 1, ...n_\lambda$

$$\mathcal{I}e_i = \lambda_i e_i, \tag{1.5.20}$$

et

$$(e_i|e_j) = \int_T e_i(s) e_j(s) d\mu(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \tag{1.5.21}$$

Nous avons donc (voir [50] chapitre 3, théorème 14 p. 63) dans l'espace $L^2(T \times T, \mu \otimes \mu)$ l'égalité suivante :

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i e_i(s) e_i(t) \qquad \forall\ (s, t) \in T \times T \tag{1.5.22}$$

et nous obtenons, en conséquence, que

$$\int_{T\times T} K^2(s,t)d\mu(s)d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i^2. \tag{1.5.23}$$

Notons $\mathcal{P}_{n_\lambda} = \mathrm{Vect}(e_i)_{1\leq i\leq n_\lambda}$ le sous espace vectoriel de $L^2(T,\mu)$ engendré par le système $(e_i)_{1\leq i\leq n_\lambda}$. Posons $c_i(f) = (f|e_i)$ pour tout $f \in L^2(T,\mu)$ et $1 \leq i \leq n_\lambda$.

**Proposition 1.5.2**

Soit $P_\lambda$ la projection orthogonale de $L^2(T,\mu)$ sur le sous espace $\mathcal{P}_{n_\lambda}$. On a $\mathcal{P}_{n_\lambda} \oplus \mathcal{P}_{n_\lambda}^\perp = L^2(T,\mu)$, ainsi que

$$\mathcal{P}_\lambda f = \sum_{i=1}^{n_\lambda} c_i(f)e_i := s_n$$

et

$$\inf_{g\in\mathcal{P}_{n_\lambda}} \| f-g \|_2^2 = \| f-s_n \|_2^2 = \| f \|_2^2 - \sum_{i=1}^{n_\lambda}(c_i(f))^2. \tag{1.5.24}$$

**Preuve.** Remarquons que pour tout $i = 1,...,n_\lambda$, $c_i(f) = (f|e_i) = (s_n|e_i)$. Donc $(f-s_n|e_i) = 0$. Autrement dit, $f-s_n \in \mathcal{P}_{n_\lambda}^\perp$. Comme $f = s_n+f-s_n$ avec $s_n \in L^2(T,\mu)$ nous déduisons $\mathcal{P}_{n_\lambda} \cap \mathcal{P}_{n_\lambda}^\perp = \{0\}$. D'où $L^2(T,\mu) = \mathcal{P}_{n_\lambda} \oplus \mathcal{P}_{n_\lambda}^\perp$. Puisque $s_n$ et $f-s_n$ sont orthogonaux, alors $\mathcal{P}_\lambda f = s_n$ et

$$\| s_n \|_2^2 + \| f-s_n \|_2^2 = \| f \|_2^2 .$$

Par ailleurs, pour tout $g \in \mathcal{P}_{n_\lambda}$, nous avons

$$\| f-g \|_2^2 = \| f-s_n+s_n-g \|_2^2 = \| f-s_n \|_2^2 + \| s_n-g \|_2^2 \geq \| f-s_n \|_2^2 .$$

D'où l'égalité (1.5.24).$\square$

La formule (1.5.24) montre que la série $\sum_{i=1}^{n_\lambda}(c_i(f))^2$ est convergente car

$$\sum_{i=1}^{n_\lambda}(c_i(f))^2 \leq \| f \|_2^2 = (f|f) = \int_T f^2(s)d\mu(s) < \infty.$$

*Remarque 1.5.1*

L'égalité (1.5.20) signifie que, pour tout $f \in L^2(T, \mu)$ et $t \in T$

$$\mathcal{I}f(t) = \lambda_i e_i(t) \quad \mu\text{-presque sûrement}$$

Si $K$ est continue sur $T \times T$, alors les fonctions du système $\{e_k : k = 1, \ldots, n_\lambda\}$ sont continues (voir [83] p. 350). Comme dans ce cas la fonction $t \to \int_T K(s,t)f(s)d\mu(s)$ est également continue, nous avons

$$\mathcal{I}f(t) = \lambda_i e_i(t) \quad \text{pour tout } t \in T.$$

**Lemme 1.5.2**

Si $K$ vérifie les conditions $C1$ et $C2$, nous avons

$$\mathcal{P}_{n_\lambda} = Vect\{e_k : k = 1, \ldots, n_\lambda\} \subseteq \mathbb{H},$$

et l'orthogonal du système $\{e_k : k = 1, \ldots, n_\lambda\}$ dans $\mathbb{H}$ est réduit à la fonction nulle.

**Preuve.** Soient $i \in \{1, \ldots, n_\lambda\}$ et $h \in \{e_k : k = 1, \ldots, n_\lambda\}^\perp$. La fonction $e_i$ est un vecteur propre de $\mathcal{I}$, donc d'après le lemme 1.5.1, $e_i \in \mathbb{H}$. Ainsi $\mathcal{P}_{n_\lambda} \subseteq \mathbb{H}$. Ensuite, en utilisant l'égalité (1.5.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} (e_i|h)_{\mathbb{H}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad (\lambda_i e_i|h)_{\mathbb{H}} = (\mathcal{I}e_i|h)_{\mathbb{H}} = (e_i|h) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{I}h = 0 \Rightarrow (\mathcal{I}h|h)_{\mathbb{H}} = (h|h) = 0 \\ &\Rightarrow \quad h = 0.\square \end{aligned}$$

Nous concluons que, si $K$ vérifie les conditions $C1$ et $C2$, alors la famille $\{\sqrt{\lambda_i} e_k : k = 1, ..., n_\lambda\}$ constitue une base *orthonormale* de $\mathbb{H}$. Ceci nous permet de dire

$$\dim L^2(T, \mu) = \dim \mathbb{H} = n_\lambda = n_X.$$

Rappelons que nous sommes toujours dans le cas où les espaces $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont séparables. Dans le paragraphe suivant, nous allons énoncer un théorème fondamental sur la décomposition de Karhunen-Loève.

## 1.6 Théorème sur la décomposition de Karhunen-Loève

Des résultats précédents, en particulier de la proposition 1.3.1 page 25 et du lemme 1.3.2 page 27, découle le théorème suivant.

**Théorème 1.6.1**

Soit $X = \{X(t) : t \in T\}$ un processus gaussien centré dont la fonction de covariance $K$ vérifie la condition $C1$. Alors $K$ est mesurable, et à une équivalence près, $X$ est mesurable et séparable.

Si $K$ vérifie en outre la condition $C_2$, alors $X \in L^2(T, \mu)$ presque sûrement et les espaces associés $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont séparables. De plus, il existe une famille

$$\{(\lambda_i, e_i) : 1 \leq i \leq n_\lambda\} \subseteq (0, \infty) \times L^2(T, \mu)$$

vérifiant les relations (1.5.18)-(1.5.21) ci-dessus et telle que le système

$$\{\sqrt{\lambda_i} e_i : 1 \leq i \leq n_\lambda\}$$

constitue une base orthonormale de l'espace $\mathbb{H}$. Il existe également une suite $\{\xi_i : 1 \leq i \leq n_\lambda\}$ de variables aléatoires (i.i.d), chacune de loi normale centrée réduite $N(0, 1)$, formant une base orthonormale de $\mathbb{G}$, et telle que, pour tout $t \in T$, nous ayons, presque sûrement

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sqrt{\lambda_i} \xi_i e_i(t) \quad \text{dans } \mathbb{G}. \tag{1.6.25}$$

Si, de plus, $X$ a des trajectoires presque sûrement continues, alors, la série (1.6.25) converge presque sûrement uniformément sur tout compact $T_\varepsilon \subset T$, et nous avons

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i e_i(s) e_i(t) \quad \forall\ (s, t) \in T \times T. \tag{1.6.26}$$

La série (1.6.26) converge absolument, et, si, de plus, $K$ est continue sur $T \times T$, alors, elle converge uniformément sur tout compact $T_\varepsilon \times T_\varepsilon \subseteq T \times T$.

De l'égalité (1.6.25), nous déduisons que

$$X_0 := \int_T X^2(t) d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i \xi_i^2. \tag{1.6.27}$$

Nous donnons dans la proposition suivante, la moyenne, la variance et la fonction caractéristique de la variable aléatoire $X_0$.

**Proposition 1.6.2**

Sous les conditions du théorème 1.6.1, nous avons

$$\mathbb{E}(X_0) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i = \int_T K(t,t)d\mu(t) < \infty, \tag{1.6.28}$$

$$\mathbb{V}ar(X_0) = 2\sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i^2 = 2\int_T K^2(s,t)d\mu(t)d\mu(s) < \infty, \tag{1.6.29}$$

et, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\exp(iuX_0) = \prod_{j=1}^{n_\lambda}(1-2iu\lambda_j)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.6.30}$$

**Preuve.** Rappelons que si une variable aléatoire $y$ suit la loi normale centrée réduite $N(0,1)$, alors son carré $y^2$ suit la loi de $\chi_1^2$. Donc $\mathbb{E}(y^2) = 1$, $\mathbb{V}ar(y^2) = 2$, et la fonction caractéristique de $y^2$ est donnée par

$$\mathbb{E}\exp(iuy^2) = (1-2iu)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.6.31}$$

La condition $C_2$, et le théorème de la convergence monotone appliqués à la série $\sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i e_i^2(t) = K(t,t)$, nous permettent d'obtenir l'égalité (1.6.28).

L'égalité (1.6.29) découle de l'indépendence des $\xi_i$ et du fait que $\xi_i$ suit la loi normale centrée réduite.

Quant à la fonction caractéristique (1.6.30), il suffit de remplacer $u$ par $\lambda_i u$ dans (1.6.31).□

Le lemme suivant illustrera l'influence de la première valeur propre du D.K.L d'un processus gaussien dans la théorie des grandes déviations.

**Lemme 1.6.1**

Soit $X$ un processus gaussien satisfaisant la décomposition de Karhunen-Loève décrite dans le théorème 1.6.1. Si $\lambda_1$ désigne la première valeur propre associée à cette décomposition, alors

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x^2}\log\mathbb{P}\Big(\int_T X^2(t)d\mu(t) \geq x^2\Big)\right\} = -\frac{1}{2\lambda_1}. \tag{1.6.32}$$

**Preuve.** Il suffit de prendre les logarithmes dans [99], relation (6).□

Pour écrire le D.K.L d'un processus gaussien $X$, nous utiliserons la notation

$$X(.) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\,\xi_i e_i(.).$$

Le terme de gauche de $\xi_i$ correspondra toujours à la racine carrée d'une valeur propre. Quant au terme de droite, c'est la fonction propre normalisée associée à la valeur propre. La nature de la convergence est précisée dans le théorème 1.6.1.

## 1.7 Convergence en norme $L^2$ du processus empirique pondéré

Dans ce paragraphe, nous établissons un résultat concernant la convergence en norme d'un processus empirique pondéré. Ce résultat trouvera son utilité dans le domaine des tests d'ajustement. Nous parlerons de l'*hypothèse nulle* pour le processus empirique uniforme $\alpha_n$, lorsque ce processus est, effectivement, construit à partir d'une suite de v.a.i.i.d. uniformes sur $(0,1)$. L'alternative correspond au cas où ces v.a. sont de loi commune quelconque.

**Proposition 1.7.1**

Soit $p : T \to [0,1]$, une fonction, de classe $C^1$ et strictement monotone. Soit $q$, une fonction de pondération, $p$ et $q$ étant définies sur $T$, et telles que

$$\int_T q(t)p(t)\big(1-p(t)\big)d\mu(t) < \infty. \tag{1.7.33}$$

Alors, sous l'hypothèse nulle, nous avons la convergence en loi suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_T q(t)\alpha_n^2(p(t))d\mu(t) = \int_T q(t)B^2(p(t))d\mu(t). \tag{1.7.34}$$

Si de plus il existe un réel $\gamma \in [1,2)$ tel que

$$\int_a^b \Big\{ \int_a^x q(t)p(t)d\mu(t)\Big\}^\gamma p'(x)dx < \infty \tag{1.7.35}$$

et

$$\int_a^b \Big\{ \int_x^b q(t)\big(1-p(t)\big)d\mu(t)\Big\}^\gamma p'(x)dx < \infty, \tag{1.7.36}$$

alors il existe une constante $C(p,q,\gamma)$ telle que, pour tout $x > 0$, $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\gamma_n(p,q,\gamma) &= \Big|\mathbb{P}\Big(\int_T q(t)\alpha_n^2(p(t))d\mu(t) \leq x\Big) - \mathbb{P}\Big(\int_T q(t)B^2(p(t))d\mu(t) \leq x\Big)\Big| \\ &\leq \frac{C(p,q,\gamma)}{n^{\gamma-1}}. \end{aligned} \tag{1.7.37}$$

De plus
$$\gamma_n(p,q,\gamma)=\circ(\frac{1}{n^{\gamma-1}}). \tag{1.7.38}$$
**Preuve.** Pour $p(t)=1$, les relations (1.7.33) et (1.7.34) sont équivalentes (voir par exemple [22] théorème 3.3 p. 325). Le cas général s'y ramène par le changement de variable $u=p(t)$. Remarquons que nous pouvons écrire, en notant $m$ la densité de $\mu$ (i.e $d\mu(t)=m(t)dt$),
$$\mathbb{P}\big(\int_T q(t)\alpha_n^2(p(t))d\mu(t)\le x\big)=\mathbb{P}\big(\int_0^1 Q(u)\alpha_n^2(u)du\le x\big), \tag{1.7.39}$$
$$\mathbb{P}\big(\int_T q(t)B^2(p(t))d\mu(t)\le x\big)=\mathbb{P}\big(\int_0^1 Q(u)B^2(u)du\le x\big), \tag{1.7.40}$$
où $Q$ est une fonction définie sur $[0,1]$ par
$$Q(u)=\begin{cases}(\frac{qm}{p'})\circ p^{-1}(u) & \text{si } u\in\big(p(a),p(b)\big),\\ 0 & \text{si } u\notin\big(p(a),p(b)\big).\end{cases}$$
D'après le théorème 1.4 p. 89, de [78], (1.7.37) et (1.7.38) seront établis, dès que nous aurons prouvé les trois inégalités
$$\int_0^1 Q(u)u(1-u)du<\infty, \tag{1.7.41}$$
$$\int_0^1\Big\{\int_0^x uQ(u)du\Big\}^\gamma dx<\infty, \tag{1.7.42}$$
$$\int_0^1\Big\{\int_x^1 (1-u)Q(u)du\Big\}^\gamma dx<\infty. \tag{1.7.43}$$
Nous avons, tout d'abord,
$$\int_T q(t)p(t)\big(1-p(t)\big)m(t)dt=\int_{p(a)}^{p(b)}u(1-u)(\frac{qm}{p'})\circ p^{-1}(u)du=\int_0^1 u(1-u)Q(u)du.$$
Donc (1.7.41) découle de l'inégalité (1.7.33). Ensuite, nous pouvons écrire
$$\begin{aligned}&\int_0^1\{\int_0^x uQ(u)du\}^\gamma dx=\int_{p(a)}^1\{\int_{p(a)}^x uQ(u)du\}^\gamma dx\\ &=\int_{p(a)}^{p(b)}\{\int_{p(a)}^x uQ(u)du\}^\gamma dx+(1-p(b))\{\int_{p(a)}^{p(b)} uQ(u)du\}^\gamma\\ &=\int_{p(a)}^{p(b)}\{\int_a^{p^{-1}(x)} p(t)q(t)m(t)dt\}^\gamma dx+(1-p(b))\{\int_a^b p(t)q(t)m(t)d\mu(t)\}^\gamma\\ &=\int_a^b\{\int_a^y p(t)q(t)d\mu(t)\}^\gamma p'(y)dy+(1-p(b))\{\int_a^b p(t)q(t)d\mu(t)\}^\gamma.\end{aligned}$$

Si $p(b) = 1$, le terme de droite dans la somme ci-dessus disparait. Sinon, nous avons la majoration

$$\int_a^b q(t)p(t)d\mu(t) \leq \frac{1}{1-p(b)} \int_a^b q(t)p(t)(1-p(t))d\mu(t)$$

par (1.7.37) et donc la condition (1.7.35) implique (1.7.42). De même, (1.7.36) implique (1.7.43).□

**Cas particulier.** Si nous prenons $T = (0,1)$, $\mu$ la mesure de Lesbsque et, pour un paramétre $\theta > 0$,

$$p(t) = t^\theta, \; q(t) = t^\beta. \tag{1.7.44}$$

Les conditions (1.7.33), (1.7.36) et (1.7.37) sont remplies dès que

$$\begin{cases} \int_0^1 t^\theta t^\beta (1-t^\theta)dt < \infty, \\ \int_0^1 \{\int_0^x t^\theta t^\beta dt\}^\gamma x^{\theta-1}dx < \infty, \\ \int_0^1 \{\int_x^1 (1-t^\theta)t^\beta dt\}^\gamma x^{\theta-1}dx < \infty. \end{cases}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} \theta + \beta > -1, \\ (\theta+\beta+1)\gamma + \theta - 1 > -1, \\ (\beta+1)\gamma + \theta - 1 > -1. \end{cases}$$

Ces relations sont satisfaites pour $\gamma \geq 1$ dès que l'inégalité suivante sera vérifiée.

$$\theta + \beta + 1 > 0. \tag{1.7.45}$$

## 1.8 Une loi du logarithme itéré du type Chung-Mogulski

### Proposition 1.8.1

Soient $p : T \to [0,1]$, une fonction de classe $C^1$ strictement monotone, et $q$, une fonction de poids, définie sur $T$. Supposons ces fonctions telles que

$$\int_T q(t)p(t)\big(1-p(t)\big)d\mu(t) < \infty. \tag{1.8.46}$$

Supposons que, pour la suite $\{\lambda_j : j \geq 1\}$ des valeurs propres du D.K.L du processus $X(t) = \sqrt{q(t)}B(p(t))$, il existe deux constantes $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$ telles que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c(j+d)^2\lambda_j - 1| < \infty. \tag{1.8.47}$$

Alors, sous l'hypothèse nulle, nous avons presque sûrement

$$\liminf_{n\to\infty}(\log_2 n)\int_T q(t)\alpha_n^2(p(t))d\mu(t) = \frac{\pi^2}{8c}. \tag{1.8.48}$$

**Preuve.** Posons $k_0 = \inf\{k \geq 1 : k + d > 0\}$. Nous avons donc

$$k_0 - 1 + d > -1$$

et la condition (1.8.47) implique

$$\sum_{j=k_0}^{\infty} |c(j+d)^2\lambda_j - 1| < \infty.$$

En utilisant le théorème 2 page 3 dans [96], nous avons lorsque $x \to \infty$,

$$\mathbb{P}\big(\sum_{j=k_0}^{\infty}\lambda_j\xi_j^2 < x^2\big)\prod_{j=k_0}^{\infty}\{c\lambda_j(j+d)^2\} \sim \mathbb{P}\big(\sum_{j\geq k_0}\frac{\xi_j^2}{c(j+d)^2} < x^2\big).$$

En prenant les logarithmes dans l'équivalence ci-dessus et en utilisant le corollaire 4 p. 12 puis la formule (3.4) p. 14 dans [96] (ce qui est légitime puisque $k_0 - 1 + d > -1$), il vient successivement

$$\begin{aligned}
\log\mathbb{P}\big(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\xi_j^2 < x^2\big) &\sim \log\mathbb{P}\big(\sum_{j=k_0}^{\infty}\lambda_j\xi_j^2 < x^2\big)\\
&\sim \log\mathbb{P}\big(\sum_{j=k_0}^{\infty}\frac{\xi_j^2}{c(j+d)^2} < x^2\big)\\
&\sim \log\mathbb{P}\big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_{k_0+j}^2}{c(j+k_0+d-1)^2} < x^2\big)\\
&\sim -\frac{\pi^2}{8x^2c}.
\end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons écrire

$$\log\mathbb{P}\big(\int_T X^2(t)d\mu(t) < x^2\big) \sim -\frac{\pi^2}{8x^2c} := -g(x). \tag{1.8.49}$$

La fonction inverse de $g$ est donnée par

$$g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2cx}}.$$

Nous pouvons utiliser [72], théorème 1 dont les hypothèses (2-1)-(2-4) p. 400-401 sont vérifiées vu les relations (1.7.34), (1.7.37), (1.8.49) et (1.6.32) respectivement. Nous obtenons presque sûrement,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\left(\int_T X_n^2(t)d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}}{g^{-1}(\log_2 n)} = 1,$$

où le processus $X_n(t) = \sqrt{q(t)}\alpha_n(p(t))$, $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction $x \to x^2$ est continue, nous en déduisons aisément (1.8.48).$\square$

**Corollaire 1.8.2**

Soient $\theta$ et $\beta$ deux paramètres tels que $\theta+\beta+1>0$. Alors, sous l'hypothèse nulle, nous avons presque sûrement

$$\liminf_{n\to\infty}(\log_2 n)\int_0^1 t^\beta \alpha_n^2(t^\theta)dt = \frac{\theta}{2(\theta+\beta+1)^2}. \tag{1.8.50}$$

**Preuve.** Prenons l'intervalle $T=(0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue $dt$. Pour le processus $t^{\frac{\beta}{2}}B(t^\theta)$, nous avons (voir [30]), pour tout $j \geq 1$,

$$\lambda_j = \frac{4\upsilon^2}{\theta z_{\upsilon,j}^2} \quad \text{avec} \quad \upsilon = \frac{\theta}{\theta+\beta+1},$$

où $z_{\upsilon,j}$ est la j-ième racine de la fonction de Bessel $J_\upsilon(.)$ (voir l'annexe A) vérifiant, lorsque $j$ est assez grand,

$$z_{\upsilon,j} = \{j+\frac{1}{2}(\upsilon-\frac{1}{2})\}\pi - \frac{4\upsilon^2-1}{8\{j+\frac{1}{2}(\upsilon-\frac{1}{2})\}\pi} + O(\frac{1}{j^3}).$$

Donc

$$z_{\upsilon,j} = \{j+\frac{\upsilon}{2}-\frac{1}{4}\}\pi + O(\frac{1}{j}) \Longrightarrow \frac{\{j+\frac{\upsilon}{2}-\frac{1}{4}\}\pi}{z_{\upsilon,j}} = 1 + O(\frac{1}{j^2})$$

C'est à dire

$$\{\frac{(j+\frac{\upsilon}{2}-\frac{1}{4})\pi}{z_{\upsilon,j}}\}^2 = 1 + O(\frac{1}{j^2}) \Longrightarrow \sum_{j\geq 1}|\frac{\theta\pi^2}{4\upsilon^2}(j+\frac{\upsilon}{2}-\frac{1}{4})^2\lambda_j - 1| < \infty.$$

La condition (1.8.47) est satisfaite pour

$$c = \frac{\theta\pi^2}{4\upsilon^2} = \frac{(\theta+\beta+1)^2\pi^2}{4\theta} \quad \text{et} \quad d = \frac{\upsilon}{2}-\frac{1}{4}.$$

D'où,

$$\frac{\pi^2}{8c} = \frac{4\theta\pi^2}{8(\theta+\beta+1)^2\pi^2} = \frac{\theta}{2(\theta+\beta+1)^2}.$$

Ainsi, le corollaire est prouvé.$\square$

# Chapitre 2

# Le processus empirique uniforme sur $[0, 1]$

## 2.1 Introduction

Dans toute la suite du chapitre, les variables considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{B}$ est une tribu borélienne d'événements, $\Omega$ un ensemble d'événements élémentaires, et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathcal{B}, \mathbb{P})$. Nous considérons ici des tests d'ajustement destinés à tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : G(.) = I(.) \quad \text{contre l'alternative} \quad H_a : G(.) = G^{(n)}(.), \tag{2.1.1}$$

où $I(t) = t$ désigne l'application identité, et $G^{(n)}(.)$ est une suite de fonctions de répartition, vérifiant, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{t \in [0,1]} |G^{(n)}(t) - t| \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \delta_n(t) := \sqrt{n}\big(G^{(n)}(t) - t\big) \longrightarrow \delta(t). \tag{2.1.2}$$

Les conditions précises imposées sur les fonctions $\delta_n(.)$ et $\delta(.)$, ainsi que sur la convergence (2.1.2), seront détaillées par la suite. Nous débutons le présent chapitre par l'énoncé d'un ensemble de résultats utiles, concernant le comportement asymptotique presque sûr, lorsque $n \to \infty$, du processus empirique uniforme $\alpha_n$. Après pondération, ce processus prend ses valeurs dans des espaces, désignés par $D_\psi[0, 1]$ et $H_\psi[0, 1]$. L'étude de cette convergence nous mène à la description d'une famille générale de statistiques qui s'expriment à partir de fonctionnelles continues $\phi(\alpha_n)$ du processus empirique uniforme $\alpha_n$ sur $[0, 1]$. Dans le cas précis de notre étude de tests d'ajustement, nous montrerons que, sous des hypothèses convenables, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathcal{L}[\phi(\alpha_n)|H_0] \longrightarrow \mathcal{L}[\phi(B)], \tag{2.1.3}$$

et

$$\mathcal{L}[\phi(\alpha_n)|H_a] \longrightarrow \mathcal{L}[\phi(B+\delta)]. \tag{2.1.4}$$

Ici, $B$ désigne un pont Brownien, et la notation $\mathcal{L}[X]$ désigne la loi de la variable aléatoire $X$ (voir [60], [77] et [44]). Le formalisme décrivant les limites (2.1.3) et (2.1.4) a été utilisé à maintes reprises dans la littérature scientifique pour l'étude des perfomances de certaines familles de tests d'ajustement (voir [4]). Cependant, les conditions de validité justifiant ces convergences n'ont pas toujours systématiquement été éudiées dans leurs details. Au cours du présent chapitre, nous nous pencherons sur ce problème, afin de fournir des conditions simples justifiant leur validité.

## 2.2 Comportement asymptotique des processus empiriques uniformes pondérés

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées [i.i.d.] de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, le processus empirique uniforme basé sur $U_1,\ldots,U_n$ est défini sur $[0,1]$ par

$$\alpha_n(t) = \sqrt{n}(\mathbb{G}_n(t) - t) \quad \forall\, t \in [0,1],$$

où

$$\mathbb{G}_n(t) := n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq t\}},$$

désigne la fonction de répartition empirique associée à $U_1,\ldots,U_n$. Ce processus a été abondamment étudié dans la littérature scientifique. De nombreuses statistiques d'intérêt ont des expressions simples à partir de celui-ci. Nous sommes ici, plus spécifiquement intéressés par le cas des statistiques du type de Cramér-Von Mises. Toutefois, bien d'autres tests d'ajustement partagent cette propriété (voir [74]), comme, par exemple, la statistique de Kolmogorov-Smirnov (voir [34]). Ces propriétés sont décrites, de manière approfondie, entre autres dans les ouvrages de Shorack-Wellner [87], Csörgö-Révész [23] et Nikitin [74]. Par application des principes d'invariance forts de Komlós, Major et Tusnády (voir [59]), nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que l'espace de probabilités orginal $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, éventuellement élargi par produits, supporte les variables aléatoires $\{U_i : i \geq 1\}$ ainsi qu'une suite de ponts Browniens $\{B_n; n \geq 1\}$, vérifiant, pour des contantes universelles positives $C, K, \lambda$ convenables, pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$, l'inégalité

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq 1} |\alpha_n(t) - B_n(t)| \geq \frac{C\log n + x}{\sqrt{n}}\Big) \leq K\exp(-\lambda x). \tag{2.2.5}$$

Cette inégalité, permet, dans une large mesure, de ramener l'étude de $\alpha_n$ à celle de $B_n$. Ainsi, par application de cette inégalité et du lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons que, presque sûrement

$$\sup_{0\leq t\leq 1}|\alpha_n(t)-B_n(t)| = O\Big(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\Big) \quad \text{lorsque } n\to\infty. \tag{2.2.6}$$

Les meilleurs choix possibles des constantes $C, K, \lambda$ dans l'inégalité (2.2.5) sont inconnues. On sait, cependant (voir [16]) que les choix suivants

$$C = 12, \qquad K = 2 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{1}{6},$$

sont possibles.

Les théorèmes suivants sont déjà prouvés dans [24]. Cependant, ils ont des conséquences importantes pour étudier les processus empiriques pondérés.

**Théorème 2.2.1**

Dans un espace probabilisé suffisamment élargi $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P})$, nous pouvons trouver une suite $\{U_n\}_n$ de variables aléatoires i.i.d sur $(0,1)$ et une suite de processus pont Brownien $\{B_n\}_n$ vérifiant, pour tout $d>0$,

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}\sup_{0\leq t\leq \frac{d}{n}}|\alpha_n(t)-B_n(t)| > C\log d + x) \leq K\exp{(-\lambda x)}, \tag{2.2.7}$$

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}\sup_{1-\frac{d}{n}\leq t\leq 1}|\alpha_n(t)-B_n(t)| > C\log d + x) \leq K\exp{(-\lambda x)}, \tag{2.2.8}$$

où $C, K$ et $\lambda$ sont des constantes positives.

Ces inégalités ont des applications importantes concernant le comportement asymptotique des processus empiriques pondérés. Maintenant, nous verrons comment la construction de [24] et les inégalités (2.2.7)-(2.2.8) peuvent être employées pour donner le comportement asymptotique du processus $\alpha_n$ pondérés.

**Théorème 2.2.2**

Dans un espace probabilisé suffisamment élargi $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P})$, nous pouvons trouver une suite de ponts Browniens $(B_n)_n$ vérifiant

$$\sup_{0\leq t\leq 1}|\alpha_n(t)-B_n(t)| = O(\frac{\log n}{\sqrt{n}}) \text{ presque sûrement} \tag{2.2.9}$$

et

$$n^{\frac{1}{2}-\upsilon} \sup_{\frac{\lambda}{n} \leq t \leq 1-\frac{\lambda}{n}} \frac{|\alpha_n(t) - B_n(t)|}{[t(1-t)]^\upsilon} = O_{\mathbb{P}}(1) \quad \text{pour tout } 0 < \upsilon \leq \frac{1}{2} \text{ et } \lambda > 0. \tag{2.2.10}$$

**Preuve.** En utilisant (2.2.7) avec $d = n$ et $x = \frac{2}{\lambda} \log n$, nous obtenons que

$$\mathbb{P}(\sup_{1 \leq t \leq 1} |\alpha_n(t) - B_n(t)| > \frac{\log(2/\lambda + C)}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{n^2}.$$

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, nous en déduisons facilement l'égalité (2.2.9). Quant à l'égalité (2.2.10), nous la prouvons tout d'abord pour le cas $\lambda = 1$, et nous déduisons, ensuite, de ce premier résultat, la forme générale pour un $\lambda$ quelconque.

Pour tout $0 < \upsilon \leq \frac{1}{2}$, nous notons

$$\Lambda_{n,\upsilon,1} = n^{\frac{1}{2}-\upsilon} \sup_{\frac{1}{n} \leq t \leq 1} \frac{|\alpha_n(t) - B_n(t)|}{t^\upsilon}$$

$$\Lambda_{n,\upsilon,2} = n^{\frac{1}{2}-\upsilon} \sup_{0 \leq t \leq 1-\frac{1}{n}} \frac{|\alpha_n(t) - B_n(t)|}{(1-t)^\upsilon}.$$

Montrons alors que $\Lambda_{n,\upsilon,i} = O_{\mathbb{P}}(1)$ (pour $i = 1, 2,$). Fixons tout d'abord $0 < e < d < \infty$ et définissons les éléments suivants

$$d_i = \begin{cases} id & \text{si } i = 1, 2, ..., i_{n-1}, \\ n & \text{si } i = i_n = \max\{j : d_{j-1} \leq n\}, \end{cases}$$

et

$$\delta_{n,i} = \sup_{0 \leq t \leq \frac{d_i}{n}} \{|\alpha_n(t) - B_n(t)|\}, \qquad I_i = \begin{cases} [\frac{1}{n}, \frac{d_1}{n}] & \text{si } i = 1, \\ [\frac{d_{i-1}}{n}, \frac{d_i}{n}] & \text{si } i = 2, ..., i_n. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\Lambda_{n,\upsilon,1} > (C+1)\log d\} &\leq \mathbb{P}\{\delta_{n,1} > n^{-\frac{1}{2}}(C+1)\log d\} \\ &+ \sum_{i=2}^{i_n} \mathbb{P}\{\delta_{n,i} > n^{-\frac{1}{2}}(C+1)\log d_{i-1}^\upsilon\} := \sum_{i=2}^{i_n} \mathbb{P}_{n,i}(d). \end{aligned}$$

En utilisant (2.2.7) et le fait que $d_{i-1}^\upsilon \geq \log d$, nous avons pour $d$ assez grand,

$$\mathbb{P}_{n,1}(d) \leq K \exp(-\lambda \log d) = K d^{-\lambda}$$

et

$$\mathbb{P}_{n,i}(d) \leq K \exp(-\lambda d_{i-1}^{v}) \leq K((i-1)d)^{-2}.$$

Ainsi

$$\sum_{i=2}^{i_n} \mathbb{P}_{n,i}(d) \leq K\frac{1}{d^{\lambda}} + K\frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } d \longrightarrow \infty.$$

Ceci implique que $\Lambda_{n,v,1} = O_{\mathbb{P}}(1)$ pour $\lambda = 1$.

Pour tout $0 < \lambda < 1$, nous constatons que $[\frac{\lambda}{n}, \frac{1}{n}] \subset [0,1]$ et nous avons donc la relation

$$n^{\frac{1}{2}-v} \sup_{\frac{\lambda}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}} \frac{|\alpha_n(t)|}{t^v} \leq \lambda^{-\lambda}(nG_n(\frac{1}{n}) + 1) = O_{\mathbb{P}}(1)$$

Comme la variable aléatoire $nG_n(\frac{1}{n})$ converge faiblement vers une variable suivant la loi de Poisson, l'inégalité suivante en découle

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}-v} \sup_{\frac{\lambda}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}} \frac{|B_n(t)|}{t^v} &\leq \lambda^{-\lambda} n^{\frac{1}{2}} \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{n}} |B_n(t)| \\ &\overset{loi}{=} \lambda^{-\lambda} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W(t) - \frac{1}{n}W(n)| = O_{\mathbb{P}}(1). \square \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.3** *(Birnbaum-Marshall)*

Soit $\{|S_t|, \mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq \theta}$ une sous-martingale, continue à droite, et admettant une limite à gauche. Supposons que $S_0 = 0$ et $v(t) = \mathbb{E}(S_t^2) < \infty$ sur $[0, \theta]$. Soit $g > 0$ une fonction croissante et continue à droite sur $[0, \theta]$. Alors,

$$\mathbb{P}\{\sup_{0 \leq t \leq \theta} |\frac{S_t}{g(t)}| \geq 1\} \leq \int_0^{\theta} \frac{1}{g^2(t)} dv(t).$$

**Preuve.** Voir l'inégalité 4 page 873 dans [88].□

Puisque

$$\{\frac{\alpha_n(t)}{1-t} : 0 \leq t < 1\}$$

est une martingale, nous obtenons à l'aide de ce théorème la proposition suivante.

**Proposition 2.2.1**

Soit $q > 0$ une fonction symétrique par rapport à l'axe $t = \frac{1}{2}$, croissante et continue sur $[0, \theta]$ (pour tout $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$). Alors, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\{\sup_{0 \leq t \leq \theta} |\frac{\alpha_n(t)}{q(t)}| \geq x\} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^\theta \frac{1}{q^2(t)} dt.$$

**Preuve.** En effet, pour tout $x > 0$, nous définissons la fonction

$$g(t) = \frac{xq(t)}{1-t}.$$

Nous avons donc pour la martingale $\{\frac{\alpha_n(t)}{1-t} : 0 \leq t < 1\}$, $v(t) = \frac{t}{1-t}$. En utilisant le théorème de *Birnbaum-Marshall*, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\sup_{0 \leq t \leq \theta} |\frac{\alpha_n(t)}{q(t)}| \geq x\} &\leq \int_0^\theta \frac{1}{g^2(t)} dv(t) = \int_0^\theta \frac{1}{g^2(t)} (1-t)^{-2} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^\theta \frac{1}{q^2(t)} dt. \square \end{aligned}$$

Cette proposition a un intérêt pour donner un résultat sur la convergence en probabilité du processus $\alpha_n$ suivant la norme *sup :*

$$\| f/q \| = \sup_{0<t<1} |\frac{f(t)}{q(t)}|.$$

**Théorème 2.2.4**

Soit $q$ une fonction strictement positive, symétrique par rapport à l'axe $t = \frac{1}{2}$, croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et vérifiant

$$\int_0^1 \frac{1}{q^2(t)} dt < \infty.$$

Alors, il existe un espace probabilisé suffisamment élargi $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P})$ sur lequel est basé un processus de pont Brownien $B$ tel que

$$\| \frac{\alpha_n - B}{q} \| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

**Preuve.** Voir le théorème 1 page 140 dans [88].□

**Définition** 2.2.2

*On dit qu'une fonction réelle $f$ définie sur [0,1] est C.A.R.L.A.G, lorsqu'elle est continue à droite en tout point de [0,1[ et admet une limite à gauche en tout point de ]0,1].*
Notons

$$\begin{aligned}
FC_0 : &= \{q : \inf_{\delta \le t \le \frac{1}{2}} q > 0 \quad \forall\, \delta > 0,\ q \text{ ne décroît pas au voisinage de } 0\},\\
E_{q,c} : &= \int_0^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{2}} q(s) \exp(-c\frac{q^2(s)}{s}) ds,\\
I_{q,c} : &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s} \exp(-c\frac{q^2(s)}{s}) ds,\\
FC_{0,1} : &= \{f \text{ est C.A.R.L.A.G \ telle que } \inf_{\delta \le t \le 1-\delta} f(t) > 0 \quad \forall\, \delta > 0\}.
\end{aligned}$$

**Lemme 2.2.1**

Soit $q \in FC_0$. Alors
**(i)** si $I_{q,c} < \infty$, alors $E_{q,d} < \infty \quad \forall\, d > c$ et $\lim_{t\to 0} \frac{q(t)}{t} = \infty$.
**(ii)** si $E_{q,c} < \infty$ et $\lim_{t\to 0} \frac{q(t)}{\sqrt{t}} = \infty$, alors $I_{q,c} < \infty$.
**Preuve.** La propriété (ii) est facile à établir. En effet, considérons la constante

$$C := \inf\{0 < t \le \frac{1}{2} : \frac{q(t)}{\sqrt{t}} > 0\}$$

qui est strictement positive. Alors

$$E_{q,c} \ge C I_{q,c}.$$

Pour prouver (i), nous remarquons tout d'abord que si $I_{q,c_1} < \infty$, alors $I_{q,c_1} < \infty$ pour tout $c_2 > c_1$. Par conséquent, nous pouvons considérer $c > 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $q$ ne décroît pas sur l'intervalle $(0, \varepsilon]$. Alors, pour tout $t \in (0, \frac{\varepsilon}{c}]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_t^{ct} \frac{1}{s} \exp\big(-c\frac{q^2(s)}{s}\big) ds &\ge \int_t^{ct} \frac{1}{s} \exp\big(-c\frac{q^2(s)}{t}\big) ds\\
&\ge \int_t^{ct} \frac{1}{s} \exp\big(-c\frac{q^2(ct)}{t}\big) ds\\
&= (\log c) \exp\big(-c^2\frac{q^2(ct)}{ct}\big).
\end{aligned}$$

Par conséquent, cette inégalité conduit à $\lim_{t\to 0} \frac{q(t)}{\sqrt{t}} = \infty$, et nous avons, pour tout $d > c$,

$$\frac{q(t)}{\sqrt{t}} \leq \exp\big((d-c)\frac{q^2(t)}{t}\big) \quad \forall\, t \in (0, \varepsilon].$$

D'où

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{t}\Big(\frac{q(t)}{\sqrt{t}}\Big) \exp\big(-d\frac{q^2(t)}{t}\big)dt \leq \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{t} \exp\big(-c\frac{q^2(t)}{t}\big)dt.$$

Ceci complète la démonstration du lemme.□

**Lemme 2.2.2**

Soit $q \in FC_0$ telle que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{q^2(t)}dt < \infty$. Alors, pour tout $c > 0$, on a $I_{q,c} < \infty$.

**Preuve.** On sait que pour tout $x, c > 0$, nous avons $x \exp\big(-cx\big) \leq 1$. En prenant donc $x = \frac{q^2(t)}{t}$, nous obtenons

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} \exp\big(-c\frac{q^2(t)}{t}\big)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{q^2(t)} \frac{q^2(t)}{t} \exp\big(-c\frac{q^2(t)}{t}\big)dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{q^2(t)}dt.\square$$

Les lemmes ci-dessus nous seront très utiles pour établir les théorèmes qui vont suivre.

Nous récapitulons, dans le corollaire suivant, les conséquences les plus utiles des résultats ci-dessus, pour caractériser la norme *sup* de $\| B/q \|_\infty$.

**Corollaire 2.2.3**

Soit $q \in FC_{0,1}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

**(i)** $\sup_{0<t<1} |\frac{B(t)}{q(t)}| < \infty$ presque sûrement.

**(ii)** il existe $c > 0$ vérifiant

$$\widehat{I}_{q,c} := \int_0^1 \frac{1}{s(1-s)} \exp\big(-c\frac{q^2(s)}{s(1-s)}\big)ds < \infty.$$

**(iii)** $\lim_{t\to 0} \frac{q(t)}{\sqrt{t(1-t)}} = \lim_{t\to 1} \frac{q(t)}{\sqrt{t(1-t)}} = 1$, et il existe $c > 0$ vérifiant,

$$\widehat{E}_{q,c} := \int_0^1 \big(s(1-s)\big)^{-\frac{3}{2}} q(s) \exp\big(-c\frac{q^2(s)}{s(1-s)}\big)ds < \infty.$$

À l'aide de ce corollaire, nous pouvons démontrer les théorèmes de Chibisov-O'Reilly. Nous renvoyons à [33] pour le détail de leurs démonstrations.

**Théorème 2.2.5** *(Comportement asymptotique suivant la norme sup)*

Soit $q \in FC_{0,1}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.
**(i)** il existe une suite de ponts Browniens $\{B_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ telle que

$$\sup_{0<t<1} \frac{|\alpha_n(t) - B_n(t)|}{q(t)} = o_{\mathbb{P}}(1).$$

**(ii)** il existe $c > 0$ tel que

$$\widehat{I}_{q,c} := \int_0^1 \frac{1}{s(1-s)} \exp\big( -c\frac{q^2(s)}{s(1-s)}\big)ds < \infty.$$

**Théorème 2.2.6** *(Loi asymptotique suivant la norme sup)*

Soit $q \in FC_{0,1}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.
**(i)**

$$\sup_{0<t<1} \frac{|\alpha_n(t)|}{q(t)} \xrightarrow{loi} \sup_{0<t<1} \frac{|B(t)|}{q(t)}.$$

**(ii)** il existe $c > 0$ tel que

$$\widehat{I}_{q,c} := \int_0^1 \frac{1}{s(1-s)} \exp\big( -c\frac{q^2(s)}{s(1-s)}\big)ds < \infty.$$

## 2.3 La convergence faible du processus empirique uniforme avec des paramètres estimés

Une étude générale de la convergence faible du processus empirique estimé a été effectuée par Durbin dans [42]. Dans cette section, nous présentons une approche nouvelle de ces résultats, basée sur des approximations fortes.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires réelles (i.i.d) dont la fonction de répartition $F(x, \theta) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)$, continue en $x \in \mathbb{R}$, dépend d'un paramètre multidimensionnel $\theta$ qui appartient à un sous-ensemble $\Theta$ de $\mathbb{R}^k$. Notons

$$\mathcal{F} := \{F(., \theta) : \theta \in \Theta\}.$$

Introduisons le processus empirique avec paramètres estimés

$$\alpha_n^{\widehat{\theta}_n}(x) := \sqrt{n}\big(\mathbb{F}_n(x) - F(x, \widehat{\theta}_n)\big) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

où $\widehat{\theta}_n$ est une suite d'estimateurs de $\theta$ vérifiant

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} l(X_i, \theta) + o_{\mathbb{P}}(1),$$

où $l(X_1, \theta) := \big(l_1(X_1, \theta_1), \ldots, l_k(X_1, \theta_k)\big)$ est une fonction centrée, ayant des moments d'ordre 2 finis.

**Exemple.** Supposons que $F(x, \theta)(\in \mathcal{F})$ ait une densité $f(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, \theta)$ vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta} dF(x, \theta) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta}\Big]\Big[\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta}\Big]^T dF(x, \theta) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \log f(x, \theta)}{\partial^2 \theta} dF(x, \theta) \\ &:= I(\theta). \end{aligned}$$

Choisissons alors $\widehat{\theta}_n$, comme l'estimateur du maximum de vraisemblance associé à la fonction

$$v(\theta) := \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i, \theta).$$

On a donc

$$v'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad v''(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \log f(x, \theta)}{\partial^2 \theta}.$$

Par une application directe de la loi des grands nombres, nous obtenons que, presque sûrement

$$\frac{1}{n} v''(\theta) \longrightarrow -I(\theta).$$

Un développement de Taylor de $v'$ au voisinage de $\theta$ donne alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}\big(v'(\widehat{\theta}_n) - v'(\theta)\big) &= \frac{1}{n} v''(\theta)\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) + o_{\mathbb{P}}(1) \\ &= -I(\theta)\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) + o_{\mathbb{P}}(1). \end{aligned}$$

Puisque $v'(\widehat{\theta}_n) = 0$, ceci implique donc que

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} l(X_i, \theta) + o_{\mathbb{P}}(1),$$

où
$$l(x,\theta)=I(\theta)^{-1}\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta}.$$
Il est clair que cette fonction vérifie les identités
$$\int_{-\infty}^{+\infty} l(x,\theta)dF(x,\theta)=0$$
et
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big[l(x,\theta)\big]\big[l(x,\theta)\big]^T dF(x,\theta)=I(\theta)^{-1}I(\theta)I(\theta)^{-1}=I(\theta)^{-1}.\square$$
Posons maintenant, pour tout $t\in[0,1]$,
$$H(t,\theta):=\frac{\partial F\big(F^{-1}(t,\theta),\theta\big)}{\partial\theta}\quad\text{ et }\quad L(t,\theta):=l\big(F^{-1}(t,\theta),\theta\big).$$
Ici, $F^{-1}(t,\theta)=\big\{x: F(x,\theta)\geq t\big\}$ désigne la fonction de quantiles associée à $F(x,\theta)$.

À l'aide du processus empirique uniforme $\alpha_n(.)$, tel qu'il est défini dans le paragraphe précédent, nous obtenons un estimateur de $\alpha_n^{\widehat{\theta}_n}(x)$, en écrivant
$$\begin{aligned}
\alpha_n^{\widehat{\theta}_n}(x) &= \sqrt{n}\big(\mathbb{F}_n(x)-F(x,\theta)\big)-\sqrt{n}\big(F(x,\widehat{\theta}_n)-F(x,\theta)\big)\\
&= \alpha_n\big(F(x,\theta)\big)-\frac{\partial F(x,\theta)}{\partial\theta}^T\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n-\theta\big)+o_{\mathbb{P}}(1)\\
&= \alpha_n\big(F(x,\theta)\big)-\frac{\partial F(x,\theta)}{\partial\theta}^T\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n l(X_i,\theta)+o_{\mathbb{P}}(1)\\
&= \alpha_n\big(F(x,\theta)\big)-\frac{\partial F(x,\theta)}{\partial\theta}^T\int_{-\infty}^{+\infty} l(x,\theta)d\alpha_n\big(F(x,\theta)\big)+o_{\mathbb{P}}(1)\\
&= \alpha_n\big(F(x,\theta)\big)-H(F(x,\theta),\theta)^T\int_0^1 L(t,\theta)d\alpha_n(t)+o_{\mathbb{P}}(1)\\
&:= \widehat{\alpha}_n\big(F(x,\theta)\big)+o_{\mathbb{P}}(1),
\end{aligned}$$
où *le processus empirique uniforme estimé* $\widehat{\alpha}_n(t)$ est défini par
$$\widehat{\alpha}_n(t):=\alpha_n(t)-H(t,\theta)^T\int_0^1 L(s,\theta)d\alpha_n(s)\quad\forall\ t\in[0,1].\tag{2.3.11}$$
Nous rappelons ici que (voir [87]), pour n'importe quelle fonction $h$ continue sur $[0,1]$, nous avons l'identité
$$\int_0^1 h(s)dB(s)=-\int_0^1 B(s)dh(s),\tag{2.3.12}$$

où $B(.)$ est un pont brownien. De plus l'intégrale stochastique $\int_0^1 h(s)dB(s)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de fonction de covariance donnée par

$$\mathrm{Var}\Big(\int_0^1 h(s)dB(s)\Big) = \int_0^1 h^2(s)ds - \big(\int_0^1 h(s)ds\big)^2.$$

En se basant sur le résultat (2.3.12), nous obtenons alors que

$$|\int_0^1 h(s)d\alpha_n(s) - \int_0^1 h(s)dB_n(s)| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} |\alpha_n(t) - B_n(t)| \int_0^1 d|h(s)|,$$

$B_n(.)$ est suite de ponts browniens.

Nous pouvons résumer, maintenant, l'essentiel des arguments précédents, dans le théorème suivant.

**Théorème 2.3.1**

Si $H(t,\theta)$ et $L(t,\theta)$ sont continues sur $[0,1]$. Alors, on peut définir un processus empirique uniforme $\alpha_n$ et une suite de ponts browniens $B_n(.)$ vérifiant presque sûrement

$$\sup_{0<t<1} |\widehat{\alpha}_n(t) - \widehat{B}_n(t)| = O(\frac{\log n}{\sqrt{n}}),$$

où $\widehat{B}_n(t) := B_n(t) - H(t,\theta)^T \int_0^1 L(s,\theta)dB_n(s)$ est un processus gaussien centré avec la fonction de covariance

$$\begin{aligned} \widehat{K}(s,t) &= \min(s,t) - st - H(t,\theta)^T \int_0^s L(x,\theta)dx - H(s,\theta)^T \int_0^t L(x,\theta)dx \\ &+ H(s,\theta)^T \Big[\int_0^1 L(x,\theta)L(x,\theta)^T dx\Big] H(t,\theta). \qquad (2.3.13) \end{aligned}$$

Si $\widehat{\theta}_n$ désigne l'estimateur de maximum de vraisemblance de $\theta$, alors cette fonction de covariance se réduit à

$$\widehat{K}(s,t) = \min(s,t) - st - H(t,\theta)^T I(\theta)^{-1} H(t,\theta).$$

Dans ce dernier cas, cette fonction de covariance peut s'exprimer sous la forme

$$\widehat{K}(s,t) = \min(s,t) - st - \sum_{i=1}^k \phi_i(s)\phi_i(t),$$

où les fonctions $\phi_i$ sont bien déterminées (voir l'exemple suivant). Une étude très complète du développement de Karhunen-Loève des processus gaussiens ayant ce type de fonction de covariance a été effectuée dans [92].

**Exemple.** Soit $G_0(.)$ une fonction de répartition dont la densité est notée $g_0$. Considérons le cas où $\mathcal{F}$ est donné par $\mathcal{F} = \{G_0(\frac{\cdot-\mu}{\sigma}) : \theta = (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\}$. Alors

$$H(t,\theta) = -\frac{1}{\sigma} g_0\big(G_0^{-1}(t)\big) \begin{bmatrix} 1 \\ G_0^{-1}(t) \end{bmatrix}$$

et

$$I(\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \int \frac{g_0^2(x)}{g_0(x)} dx & \int x \frac{g_0^2(x)}{g_0(x)} dx \\ \int x \frac{g_0^2(x)}{g_0(x)} dx & \int x^2 \frac{g_0^2(x)}{g_0(x)} dx - 1 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$I(\theta)^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix},$$

où les éléments $\sigma_{ij}$ ne dépendent que de $G_0$, et non pas de $\mu$, ou de $\sigma$. Nous avons alors

$$\widehat{K}(s,t) = \min(s,t) - st - \phi_1(s)\phi_1(t) - \phi_2(s)\phi_2(t),$$

où

$$\phi_1(t) = -\sqrt{\big(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}\big) g_0\big(G_0^{-1}(t)\big)}$$

et

$$\phi_2(t) = -\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{22}}} g_0\big(G_0^{-1}(t)\big) - \sqrt{\sigma_{22}}\, g_0\big(G_0^{-1}(t)\big) G_0^{-1}(t).$$

Dans le cas particulier où $G_0(.)$ est la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$, nous obtenons les relations

$$I(\theta)^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\sigma_{11} = 1$, $\sigma_{22} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$ et

$$\begin{aligned} \widehat{K}(s,t) &= \min(s,t) - st - g_0\big(G_0^{-1}(s)\big) g_0\big(G_0^{-1}(t)\big) \\ &- \frac{1}{2} g_0\big(G_0^{-1}(s)\big) G_0^{-1}(s) g_0\big(G_0^{-1}(t)\big) G_0^{-1}(t). \end{aligned}$$

Dans le cas gaussien précédent, et bien que la fonction $L$ ne soit pas bornée sur $[0,1]$, nous obtenons que $\widehat{\alpha}_n(.)$ converge faiblement, dans $D[0,1]$ et $L^2[0,1]$, vers le processus limite défini par

$$\begin{aligned}\{\widehat{\alpha}_n(t)\}_t \quad \xrightarrow{w} \quad & \Big\{B(t) + g_0\big(G_0^{-1}(s)\big)\int_0^1 \big(G_0^{-1}(s)\big)dB(s) + \\ & \frac{1}{2}g_0\big(G_0^{-1}(t)\big)G_0^{-1}(t)\int_0^1 \big(G_0^{-1}(s)^2 - 1\big)dB(s)\Big\}_t . \square\end{aligned}$$

## 2.4 Rappels concernant la théorie de la mesure

Nous poursuivons ici le but de donner un cadre théorique suffisant pour nos besoins, portant sur la convergence faible (et en loi) de lois de probabilités, définies sur des espaces métriques, tels que ceux que nous verrons dans la suite. Avant d'aborder un exposé plus détaillé de ces notions, nous rappelons quelques définitions et résultats classiques de la théorie de la mesure.

Dans ce qui suit, nous aurons besoin des notions suivantes.

Soit $(E, \mathcal{E}, \rho)$ un espace métrique, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$, et d'une métrique spécifiée $\rho$.

### 2.4.1 Notations et définitions

Notons par $\mu$, $(\mu_n)_n$, $\nu$ et $(\nu_n)_n$ une suite de mesures définies sur $\mathcal{E}$. Ici, $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{E}_0$ (respectivement $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{E}_1$) désignent la probabilité et l'espérance mathématique sous l'hypothèse $H_0$ (resp. sous $H_1$).

Posons également

$$\begin{aligned} \Lambda : &= \{h : [0,1] \to [0,1] \text{ telle que } h \text{ soit continue et croissante}\}, \\ D[0,1] : &= \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ telle que} f \text{ est C.A.R.L.A.G}\}, \\ \parallel f \parallel : &= \sup_{0\le t\le 1} |f(t)| \text{ désigne la norme } sup \text{ usuelle,} \end{aligned}$$

$$A^{\varepsilon} := \{x \in E : \inf_{y\in A} \rho(x,y) < \varepsilon\}, \qquad \forall\, A \in \mathcal{E}, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{2.4.14}$$

$$\mathbf{d}(f,g) := \inf_{h\in\Lambda} \max\big\{ \parallel f - g\circ h \parallel, \parallel h - I \parallel \big\}, \quad \forall\, f,g \in D[0,1]. \tag{2.4.15}$$

Plus loin, $E$ désignera un espace métrique de fonctions définies sur le compact $[0,1]$. La mesure $(\mu_n)_{n\ge 1}$ désignera, pour $n = 1,2,\ldots$, la loi du processus empirique $\alpha_n$ sous $H_0$, notée

$$\mu_n := \mathcal{L}[\alpha_n | H_0].$$

La mesure $\mu$ désignera la loi du pont brownien $B$, et sera également notée

$$\mu := \mathcal{L}[B].$$

La suite de mesures $(\nu_n)_{n\geq 1}$ sera associée aux lois du processus empirique uniforme $\alpha_n$ sous $H_a$, et sera notée

$$\nu_n := \mathcal{L}[\alpha_n/H_a].$$

La mesure $\nu$ désignera la loi du processus $B+\delta := \big\{B(t)+\delta(t) : t \in [0,1]\big\}$, et sera notée

$$\nu := \mathcal{L}[B+\delta].$$

En fait, pour que la mesure $\mu$ ait un sens, il est nécessaire de supposer que l'espace $E$ est séparable, et que ses ouverts sont mesurables, relativement à la tribu engendrée par les ensembles de la forme :

$$\{f < c_i : i = 1, \ldots, k\}.$$

Pour permettre l'existence de la mesure $\mu_n$, il nous faut supposer que la métrique $\rho$ rende l'application

$$(U_1, \ldots, U_n) \to \alpha_n$$

mesurable.

**Définition** 2.4.1 *(Convergence au sens de Skorokhod)*

On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions réelles définies sur $[0,1]$ converge vers $f$ *au sens de Skorokhod*, s'il existe une suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ de $\Lambda$ vérifiant $h_n(0) = 0,\ h_n(1) = 1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq u\leq 1} \big\{|f_n(h_n(u)) - f(u)| + |h_n(u) - u|\big\} = 0. \tag{2.4.16}$$

**Définition** 2.4.2 *(Convergence faible)*

On dit que la suite de mesures $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge *faiblement* vers la mesure $\mu$, (notée $\mu_n \Longrightarrow \mu$), si pour toute fonction réelle continue et bornée $f$ définie sur $E$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f d\mu_n = \int_E f d\mu.$$

**Définition** 2.4.3 (Convergence en loi)

On dit que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge *en loi* vers $\mu$, si pour tout ensemble $B \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(\partial B) = 0$, on a
$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(B) = \mu(B).$$
Ici $\partial B$ désigne la frontière de $B$.

**Définition** 2.4.4

Soient $\mu_1$ et $\mu_2$ deux mesures définies sur $\mathcal{E}$. La distance entre $\mu_1$ et $\mu_2$ est définie par :
$$L(\mu_1, \mu_2) = \max(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}), \tag{2.4.17}$$
où pour tout fermé $F \in \mathcal{E}$,

$$\varepsilon_{12} = \inf\{\varepsilon : \mu_2(F) \leq \mu_1(F^\varepsilon) + \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{21} = \inf\{\varepsilon : \mu_1(F) \leq \mu_2(F^\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Nous rappelons maintenant quelques résultats bien connus concernant la convergence faible,
$$\mu_n \Longrightarrow \mu \text{ et } \nu_n \Longrightarrow \nu,$$
dans l'espace métrique $(E, \mathcal{E}, \rho)$.

**Théorème 2.4.5**

Les propositions suivantes sont équivalentes :

**P1)** La suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers $\mu$ :
$$\mu_n \Longrightarrow \mu$$

**P2)** Pour tout ensemble fermé $F \in \mathcal{E}$, on a
$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$$

**P3)** Pour tout ensemble $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(\partial A) = 0$, on a
$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$$

**P4)** Pour toute fonction $f$ continue sur $E$ à valeurs dans $E$, on a
$$\mu_n^f \Longrightarrow \mu^f,$$

où $\mu_n^f$ et $\mu^f$ désignent les mesures images respectivement de $\mu_n$ et $\mu$ par la fonction $f$.

**Preuve.** Voir [15].$\square$

**Théorème 2.4.6**

Si l'espace métrique $(E, \rho)$ est complet et séparable alors, lorsque $n \to \infty$, on a l'équivalence suivante :

$$L(\mu_n, \mu) \to 0 \iff \mu_n \Longrightarrow \mu.$$

**Preuve.** Voir le théorème 1.11, et le lemme 1.2 de [77] .$\square$

**Théorème 2.4.7**

Soit $f$ une fonction mesurable définie sur $E$ à valeurs dans $E$ telle que

$$\mu\{x : \rho(f(x), x) \geq \delta\} < \varepsilon \quad \text{pour tout } \delta > 0 \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Si l'espace métrique $(E, \rho)$ est complet et séparable, alors

$$L(\mu^f, \mu) \leq \max(\varepsilon, \delta). \tag{2.4.18}$$

**Preuve.** Voir le théorème 1.11, et le lemme 1.2 de [77] .$\square$

## 2.5 Propriétés des espaces vectoriels $D_\psi[0, 1]$ et $H_\psi[0, 1]$

Dans ce paragraphe, nous allons définir deux espaces particuliers sur lesquels nous étudions la nature des convergences (2.1.3) et (2.1.4). Ces résultats sont très importants pour la suite de notre travail. Pour cette raison, nous donnerons le détail des démonstrations correspondantes.

Commençons par rappeler certaines propriétés concernant l'espace métrique $(D[0, 1], \mathbf{d})$, en renvoyant à [77] pour les démonstrations correspondantes. Ici, nous ne rentrerons pas dans les détails, en nous limitant à l'énoncé de trois propriétés essentielles (voir par exemple [87] et [88]).

- L'espace $(D[0, 1], \mathbf{d})$ est complet et séparable.
- La convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ vers une fonction continue $f$, relativement à la métrique $\mathbf{d}$, est équivalente à la convergence uniforme de ces fonctions vers leur limite.

– La convergence dans l'espace $(D[0,1], \mathbf{d})$ est équivalente à la convergence *au sens de Skorokhod.*

Ainsi, les conditions d'existence des mesures $\mu$ et $\mu_n$ mentionnées plus haut sont justifiées. La convergence faible de ces mesures est également caractérisée dans [77]. En fait, l'espace $(D[0,1], \mathbf{d})$ fournit la base essentielle pour la construction des espaces vectoriels suivants.

### 2.5.1 Définition de l'espace vectoriel $D_\psi[0,1]$

Soit $\psi$ une fonction positive, bornée sur tout intervalle $]\tau, 1-\tau[$ $(\tau > 0)$ et vérifiant les conditions suivantes :

Il existe un réel $u_0 > 0$ tel que pour tout $u \in ]0, u_0[$,

$$\psi(u) \leq \psi_1(u) := \frac{1}{\sqrt{uh_1(u)}} \quad \text{et} \quad \psi(1-u) \leq \psi_2(u) := \frac{1}{\sqrt{uh_2(u)}}, \tag{2.5.19}$$

où les fonctions $h_1(u)$ et $h_2(u)$ vérifient

$$\lim_{u\to 0} \frac{h_1(ku)}{h_1(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{h_2(ku)}{h_2(u)} = 1 \quad \forall\, k > 0, \tag{2.5.20}$$

et pour une constante $l > 0$,

$$\int_0^{u_0} u^{-1} \exp\big\{ - l^2 h_i^2(u)\big\} du < \infty \quad \text{ pour } i = 1, 2. \tag{2.5.21}$$

*Remarque 2.5.1*

Les conditions (2.5.20) et (2.5.21), nous donnent presque sûrement

$$\lim_{u\to 0} \psi_i(u)|B(u)| = 0, \quad \text{ pour } i = 1, 2. \tag{2.5.22}$$

Ce résultat peut être démontré à l'aide du lemme 2.2.1 de la page 49.

**Définition** 2.5.1 *(l'espace vectoriel $D_\psi[0,1]$)*

Soit $\psi$ une fonction vérifiant (2.5.19). L'espace métrique $(D_\psi[0,1], \mathbf{d}_\psi)$ est alors défini comme suit :

$$f \in D_\psi[0,1] \quad \text{si et seulement si} \quad \psi f \in D[0,1]$$

et

$$\mathbf{d}_\psi(f, g) = \mathbf{d}(\psi f, \psi g) \quad \forall\, f, g \in D_\psi[0,1]. \tag{2.5.23}$$

Cet espace est complet et séparable. Ainsi, l'existence des mesures $\mu$ et $\mu_n$ est justifiée. Leur convergence faible découle du théorème 2.6.1, dans le cas particulier $\delta = 0$ (voir la page 62).

### 2.5.2 Définition de l'espace de Hilbert $H_\psi[0,1]$

Soit $\psi$ une fonction strictement positive vérifiant

$$\int_0^1 u(1-u)\psi(u)du < \infty. \tag{2.5.24}$$

**Définition** 2.5.2

Soit $\psi$ une fonction satisfaisant (2.5.24). L'espace de Hilbert $(H_\psi[0,1], \| \cdot \|_\psi)$ est alors défini comme suit :

$$f \in H_\psi[0,1] \quad \text{si et seulement si} \quad \psi f \in L^2[0,1]$$

et

$$\| f \|_\psi := \| \sqrt{\psi} f \|_2 = \Big[ \int_0^1 \psi(u) f^2(u) du \Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5.25}$$

Cet espace est complet et séparable. Ainsi, l'existence des mesures $\mu$ et $\mu_n$, ainsi que leur convergence faible, sont bien justifiées (voir par exemple, dans [77], le § 1.6 et l'exemple 1).

## 2.6 Convergence en loi sous $H_a$ dans $D_\psi[0,1]$

L'objectif de ce paragraphe est de caractériser la convergence faible (ou en loi) des mesures $\nu_n$ et $\mu_n$, telles qu'elles sont définies, dans la page 56 du présent mémoire. Dans ce qui suit, nous supposerons, bien évidemment, que ces mesures sont défines sur les boréliens de l'espace $(D_\psi[0,1], \mathbf{d}_\psi)$.

Nous rappelons la définition du test d'ajustement décrit dans la page 43, et nous posons

$$r_n := \mathbf{d}_\psi(\delta_n, \delta).$$

**Théorème 2.6.1**

Soit $\delta_0$ une fonction, positive et continue sur $[0,1]$, telle que

$$\lim_{t\to 0} \psi(t)\delta_0(t) = 0 \quad \text{si } \lim_{t\to 0} \psi(t) = \infty, \tag{2.6.26}$$

et

$$\lim_{t\to 1} \psi(t)\delta_0(t) = 0 \quad \text{si } \lim_{t\to 1} \psi(t) = \infty. \tag{2.6.27}$$

Alors, en posant $S := \{\delta : \; |\delta(t)| \leq \delta_0(t), \forall\, t \in [0,1]\}$, nous avons, dans l'espace $(D_\psi[0,1], \mathbf{d}_\psi)$,

$$L(\nu_n, \nu) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty \quad \text{et} \quad \sup_{\delta\in S} r_n \to 0.$$

**Preuve.** La preuve de ce théorème s'obtient directement à l'aide des lemmes suivants.□

**Lemme 2.6.1**

La mesure $\nu_n$ coïncide avec la loi du processus $\alpha_n\big(G^{(n)}(.)\big) + \delta_n$, sous l'hypothèse $H_0$. En d'autres termes,

$$\nu_n = \mathcal{L}\big[\alpha_n(G^{(n)})/H_0\big] + \delta_n.$$

**Preuve.** Puisque la fonction de répartition $G^{(n)}(.)$ est continue, alors, sous $H_a$, les variables aléatoires $\big\{G^{(n)}(U_i)\big\}_{1\leq i\leq n}$ sont uniformément équidistribuées sur $[0,1]$ et nous avons l'égalité en loi

$$\mathcal{L}[\mathbb{G}_n(.)/H_a] = \mathcal{L}[\mathbb{G}_n\big(G^{(n)}(.)\big)/H_0].$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl}\nu_n & = & \mathcal{L}\big[\alpha_n/H_a\big] = \mathcal{L}\big[\sqrt{n}\big(\mathbb{G}_n - I\big)/H_a\big] \\ & = & \mathcal{L}\big[\sqrt{n}\big(\mathbb{G}_n(G^{(n)}) - G^{(n)}\big)/H_0\big] + \sqrt{n}\big(G^{(n)} - I\big) \\ & = & \mathcal{L}\big[\alpha_n\big(G^{(n)}\big)/H_0\big] + \delta_n.\end{array}$$

Ceci suffit à démontrer le lemme.□

**Lemme 2.6.2**

Soit $\psi$ une fonction telle que

$$\lim_{t\to 0}\psi(t) = \infty.$$

Alors, pour tout couple $\varepsilon, \eta > 0$, il existe $\tau, r' > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que, si $\sup_{\delta\in S} r_n \leq r'$, alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}_1\{\sup_{0<t\leq\tau}\psi(t)|\alpha_n(t)| > \eta\} < \varepsilon. \qquad (2.6.28)$$

**Preuve.** Compte tenu du lemme 2.6.1, on constate que l'inégalité (2.6.28) est équivalente à

$$\mathbb{P}_0\left\{\sup_{0<t\leq\tau}\psi(t)|\alpha_n(t+\frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}) + \delta_n(t)| > \eta\right\} < \varepsilon. \qquad (2.6.29)$$

Fixons $0 < \lambda < \eta/2$. Alors la condition du théorème ( $\lim_{t\to 0}\psi(t)\delta_0(t) = 0$) nous permet de déterminer deux constantes, $\tau_\lambda$ et $r_\lambda$, strictement positives, et telles que, lorsque $r_n < r_\lambda$,

$$\sup_{0<t\leq\tau_\lambda} \psi(t)|\delta_n(t)| < \lambda < \frac{\eta}{2}.$$

Notons

$$I_1 := \big\{0 < t \leq \tau : t \geq \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}\big\} \qquad \text{et} \qquad I_2 := (0,\tau] - I_1.$$

Compte tenu de ces relations, pour établir (2.6.29), il suffit de démontrer que les relations

$$\mathbb{P}_0\left\{\sup_{I_i}\psi(t)|\alpha_n(t+\frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}})| > \frac{\eta}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad i = 1,2 \tag{2.6.30}$$

sont satisfaites, lorsque $\tau < \tau_\lambda$ et $r' < r_\lambda$. En effet, commençons par fixer $t \in I_1$. Nous voyons alors (voir [18]) que, si $\psi_1$ vérifie la condition (2.5.19), nous avons la relation

$$\lim_{\tau\to 0,\ n\to\infty} \mathbb{P}_0\left\{\sup_{0<t\leq\tau} \psi_1(t)|\alpha_n(t)| > \varepsilon\right\} = 0 \qquad \forall\ \varepsilon > 0. \tag{2.6.31}$$

Posons

$$v(t) := \begin{cases} t + \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}} & \text{pour } t \in I_1, \\ 2t & \text{pour } t \in I_2. \end{cases}$$

Cette fonction est croissante, et telle que, pour tout $t \in ]0,\tau]$, $v(t) \leq 2t$. De plus, les conditions (2.5.19)-(2.5.20) impliquent que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi_1(t/2)}{\psi_1(t)} = \sqrt{2}.$$

Donc, pour tout $c > \sqrt{2}$ et $t$ suffisamment petit, cette égalité se ramène à :

$$\psi(v^{-1}(t)) \leq \psi_1(v^{-1}(t)) \leq c\psi_1(t).$$

Cette dernière relation implique que

$$\mathbb{P}_0\left\{\sup_{t\in I_1}\psi(t)|\alpha_n(t+\frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}})| > \frac{\eta}{2}\right\} \leq \mathbb{P}_0\left\{\sup_{0<t\leq 2\tau} c\psi_1(t)|\alpha_n(t)| > \frac{\eta}{2}\right\}.$$

En faisant tendre $\tau$ vers 0, et à l'aide de (2.6.31), nous déduisons aisément l'inégalité (2.6.30) pour le cas $i = 1$.

Pour le cas $i = 2$, nous fixons $t \in I_2$. Alors, $s := t + \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}} > 2t$ et nous avons, lorsque $\tau < \tau_\lambda$ et $r_n < r_\lambda$,

$$\psi(t) < \frac{\lambda}{\delta_n(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{n}(s-t)} < \frac{2\lambda}{s\sqrt{n}}.$$

Ainsi, en posant $\tau_n := \tau + \frac{\delta_n(\tau)}{\sqrt{n}}$, nous obtenons que

$$\sup_{t \in I_2} \psi(t) \left| \alpha_n(t + \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}) \right| \leq \sup_{0 < s \leq \tau_n} \frac{2\lambda}{s\sqrt{n}} |\alpha_n(s)|.$$

Or, lorsque $s$ est suffisamment petit, le processus $\alpha_n(s)$ a le même comportement que le processus

$$\gamma_n(s) := \sqrt{n}\left(\frac{p(ns)}{n} - s\right),$$

où $p(s)$ est un processus de Poisson homogène de paramètre 1 (voir [18], lemme 3). De plus, pour $\gamma_n(s)$, nous avons presque sûrement

$$\sup_{0 < s \leq \tau_n} \frac{2\lambda}{s\sqrt{n}} |\gamma_n(s)| \leq 2\lambda \sup_{0 < t < \infty} |\frac{p(t)}{t} - 1| < \infty.$$

Finalement, en faisant tendre $\lambda$ vers 0, nous obtenons (2.6.30) pour $i = 2$. Ceci achève la démonstration du lemme.□

Dans la suite, pour simplifier les notations, nous poserons, pour tout $f, g \in D[0,1]$,

$$\mathbf{d}(f,g) = \mathbf{d},$$

$$\rho = \rho(f,g) := \sup_{0<t<1} |f(t) - g(t)| \quad \text{et} \quad w(f,\tau) := \sup_{0 \leq t_1 < t_2 < t_1 + \tau \leq 1} |f(t_2) - f(t_1)|.$$

**Lemme 2.6.3**

Pour tout $f, g \in D[0,1]$, nous avons

$$\mathbf{d} \leq \big(1 + 2\sqrt{2}\big)\rho < 4\rho \qquad \text{et} \qquad \rho \leq \mathbf{d} + \min\big\{w(f,\mathbf{d}), w(g,\mathbf{d})\big\}.$$

**Preuve.** Ces inégalités s'obtiennent à l'aide de la définition de $\mathbf{d}$ (Voir [77]).□

**Lemme 2.6.4**

Si la fonction $\psi$ est bornée sur le compact $[0,1]$, alors la topologie définie par la métrique $\mathbf{d}_\psi$ est plus faible que la topologie définie par la métrique $\mathbf{d}$.

**Preuve.** Ce résultat découle de l'équivalence entre la convergence relative à la métrique $\mathbf{d}$, et la convergence *au sens de Skorokhod* (Voir [77]).□

**Corollaire 2.6.2**

Si la fonction $\psi$ est bornée sur le compact $[0,1]$, alors, lorsque $n \to \infty$,

$$\mu_n \Longrightarrow \mu \quad \text{dans } D_\psi[0,1].$$

**Preuve.** En effet, d'après le lemme 2.6.4, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $\mathbf{d}_\psi \leq C_0 \mathbf{d}$. Ceci signifie que la convergence faible dans l'espace $(D[0,1], \mathbf{d})$ implique la convergence faible dans $(D_\psi[0,1], \mathbf{d}_\psi)$.□

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 2.6.1. La démonstration comprend deux parties. Dans la première, nous supposons que la fonction $\psi$ est bornée. Dans la seconde, nous traitons le cas où $\psi$ est non bornée au voisinage de 0, et bornée au voisinage de 1.

Commençons par étudier le cas où $\psi$ est bornée sur $[0,1]$. Il existe alors une constante positive $C$ telle que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(t) \leq C.$$

En utilisant le lemme 2.6.1, et le théorème 2.4.7 de la page 59, nous obtenons, dans ce cas, que

$$L(\mu'_n, \mu) \to 0 \quad \text{lorsque } \ n \to \infty \text{ et } \sup_{\delta \in S} r_n \longrightarrow 0, \tag{2.6.32}$$

où $\mu'_n$ désigne la loi du processus $\alpha_n\big(G^{(n)}\big)$ dans l'espace $D_\psi[0,1]$. En effet, puisque la fonction $\delta_0$ est continue sur le compact $[0,1]$, alors elle est bornée sur $[0,1]$. Par conséquent, la suite des fonctions $\delta_n$ est uniformément bornée sur $[0,1]$. Donc, il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\delta_n(t)| \leq k \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Cette inégalité implique que, pour tout entier $n > \frac{k^2}{\tau^2}$, et tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{|\delta_n(t)|}{\sqrt{n}} \leq \tau.$$

À l'aide du lemme 2.6.3, nous obtenons donc que

$$\mathbf{d}_\psi\big(\alpha_n(G^{(n)}), \alpha_n\big) \leq 4C\omega(\alpha_n, \tau).$$

Puisque la fonction $x \to \omega(x, \tau)$ est $\mu$-presque sûrement continue, alors par une application du corollaire 2.6.2, et du théorème 2.4.5, nous en déduisons, que, pour tout $\tau > 0$, la loi de $\omega(\alpha_n, \tau)$ converge faiblement dans $D_\psi[0,1]$ vers la loi de $\omega(B,\tau)$. Or, puisque $\omega(B,\tau) \to 0$ $\mu$-presque sûrement lorsque $\tau \to 0$, nous déduisons du théorème 2.4.7, la convergence (2.6.32) recherchée, pour le cas où $\psi$ est bornée.

Si maintenant, nous supposons que $\psi$ n'est pas nécessairement bornée au voisinage de 0, tout en demeurant bornée au voisinage de 1, la démonstration de (2.6.32) se déduit du cas précédent, au prix des modifications suivantes. Posons

- pour toute fonction $f$ et pour tout $\tau > 0$,

$$f^\tau(u) = \begin{cases} f(u) & \text{pour } \tau \le u \le 1, \\ 0 & 0 \le u \le \tau. \end{cases}$$

- notons $\nu^\tau$ la loi de probabilité image de $\nu$ par la fonction $f^\tau$.

Nous obtenons alors que

$$L(\nu_n, \nu) \le L(\nu_n, \nu_n^\tau) + L(\nu_n^\tau, \nu^\tau) + L(\nu^\tau, \nu).$$

À l'aide de la remarque 2.5.1 de la page 60 et les lemmes 2.6.2 et 2.6.3, la condition du théorème : $\psi(t)\delta_0(t) \to 0$ ( lorsque $t \to 0$), nous permet de trouver des constantes $\tau, r' > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n > n_0$, $\sup_{\delta \in S} r_n < r'$ implique que

$$\mathbb{P}_1\Big(\mathbf{d}_\psi(\alpha_n^\tau, \alpha_n) > \frac{\varepsilon}{3}\Big) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\Big(\mathbf{d}_\psi(B^\tau + \delta^\tau, B + \delta) > \frac{\varepsilon}{3}\Big) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Nous obtenons donc, grâce au théorème 2.4.7,

$$L(\nu_n, \nu_n^\tau) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad L(\nu^\tau, \nu) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Et si, nous notons par $L^\tau$ la distance entre deux mesures de l'espace $D_{\psi^\tau}[0,1]$, nous avons

$$L(\nu_n^\tau, \nu^\tau) = L^\tau(\nu_n, \nu).$$

Puisque la fonction $\psi^\tau$ est bornée, selon la première partie de la démonstration, alors il existe $r'' > 0$ et $n_0' \in \mathbb{N}$ tels que, si $\sup_{\delta \in S} r_n < r''$ pour tout $n > n_0'$, nous avons $L^\tau(\nu_n, \nu) < \frac{\varepsilon}{3}$. Par conséquent, si $r_n < \min(r', r'')$ pour tout $n > \max(n_0, n_0')$, nous obtenons $L(\nu_n, \nu) < \varepsilon$. Ceci conclut la démonstration du théorème.$\square$

## 2.7 Convergence en loi sous $H_a$ dans l'espace de Hilbert $H_\psi[0,1]$

Dans ce paragraphe, nous étudions, dans l'espace de Hilbert $(H_\psi[0,1], \| . \|_\psi)$, la convergence faible des mesures $\nu_n$ et $\nu$, telles qu'elles sont définies dans la page 56 du présent document. Dans toute la suite, nous noterons $r_n := \| \delta_n - \delta \|_\psi$, et poserons, pour tout $\delta_0 \in H_\psi[0,1]$,

$$S := \{\delta : |\delta(t)| < |\delta_0(t)|, \ \forall \ t \in [0,1]\}.$$

**Théorème 2.7.1**

Soit $\delta_0 \in H_\psi[0,1]$. Alors,

$$L(\nu_n, \nu) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty \ \text{ et } \ \sup_{\delta \in S} r_n \to 0.$$

**Preuve.** La démonstration de ce théorème est très semblable à celle du théorème 2.6.1, à un changement notable près. Dans le cas présent, nous essayons de montrer, tout d'abord, que, lorsque $n \to \infty$ et $\sup_{\delta \in S} r_n \to 0$,

$$L(\mu_n', \mu) \to 0,$$

où $\mu_n'$ désigne la loi de probabilité du processus $\{\alpha_n(t + \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}) : t \in [0,1]\}$.

Posons maintenant

$$m_n := \int_0^1 \delta_n(u)\psi(u)du \quad \text{et} \quad s_n := \| \delta_n \|_\psi^2 . \tag{2.7.33}$$

Il est alors clair que

$$\mathbb{E}_0 \int_0^1 \left[\alpha_n(t + \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}) - \alpha_n(t)\right]^2 \psi(t)dt = \frac{m_n}{\sqrt{n}} - \frac{s_n}{n}. \tag{2.7.34}$$

En effet, nous avons les relations

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \int_0^1 \Big[\alpha_n\big(t + \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}\big) - \alpha_n(t)\Big]^2 \psi(t)dt &= \mathbb{E}_0 \int_0^1 \Big[\alpha_n\big(\frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}\big)\Big]^2 \psi(t)dt \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}_0 \Big[\alpha_n\big(\frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}\big)\Big]^2 \psi(t)dt \\ &= \int_0^1 \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}\big(1 - \frac{\delta_n(t)}{\sqrt{n}}\big)\psi(t)dt. \end{aligned}$$

Sous les conditions du théorème, l'intégrale $m_n$ peut être infinie. Si c'est le cas, nous pouvons construire un autre processus, noté $\alpha_n^{'}(t)$, qui coïncide, presque sûrement sous $H_a$, avec le processus $\alpha_n$, et tel que son intégrale associée, $m_n^{'}$, vérifie

$$\frac{m_n^{'}}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \qquad \text{et} \qquad \sup_{\delta\in S} r_n \longrightarrow 0.$$

Finalement, la preuve du théorème découle de cette relation, en combinant (2.7.34), pour $\alpha_n^{'}$, avec l'inégalité de Chebyshev et le théorème 2.4.7.

Pour établir ceci, posons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$t_n := \inf\{t : G^{(n)}(t) > \frac{2\varepsilon}{n}\}, \quad \bar{t}_n := \inf\{t : G^{(n)}(1-t) < 1 - \frac{2\varepsilon}{n}\}$$

$$t_n^* := \min(t_n, \frac{\varepsilon}{n}), \qquad \bar{t}_n^* := \min(\bar{t}_n, \frac{\varepsilon}{n}).$$

Définissons des variables aléatoires $(V_i)_{1\leq i\leq n}$, et une suite de fonctions $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, comme suit :

$$V_i := \begin{cases} U_i & \text{si} \quad t_n^* < U_i \leq 1 - \bar{t}_n^*, \\ t_n^* & \text{si} \quad U_i \leq t_n^*, \\ 1 - \bar{t}_n^* & \text{si} \quad U_i > 1 - \bar{t}_n^*. \end{cases}$$

$$\lambda_n(t) := \begin{cases} \delta_n(t) & \text{pour tout} \quad t_n^* < t \leq \bar{t}_n^*, \\ -t\sqrt{n} & \text{pour tout} \quad 0 \leq t \leq t_n^*, \\ (1-t)\sqrt{n} & \text{pour tout} \quad \bar{t}_n^* < t \leq 1. \end{cases}$$

Les variables $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes, et sous $H_a$, ont comme fonction de répartition :

$$H_n(t) := t + \frac{\lambda_n(t)}{\sqrt{n}}.$$

Notons $\alpha_n'(.)$ le processus empirique uniforme associé aux variables $(V_i)_{1\leq i\leq n}$, et posons $\nu_n' = \mathcal{L}[\alpha_n'/H_a]$. Nous avons alors, pour ce processus, les inégalités

$$\mathbb{P}_1\big(\alpha_n'(t) \neq \alpha_n(t)\big) \leq n\Big\{\mathbb{P}_1(U_i \leq t_n^*) + \mathbb{P}_1(U_i > \bar{t}_n^*)\Big\} \leq 4\varepsilon.$$

En utilisant le théorème 2.4.7, nous obtenons que

$$L(\nu_n, \nu_n') \leq 4\varepsilon.$$

De plus, il est clair que, lorsque $n \to \infty$ et $r_n \to \infty$,

$$r_n' := \int_0^1 \big(\lambda_n(t) - \delta(t)\big)^2 \psi(t)dt \to 0.$$

Fixons $\eta > 0$. Alors, en utilisant (2.5.21), page 60, et la condition du théorème, nous montrons l'existence d'un $\tau > 0$, tel que

$$\int_0^\tau t\psi(t)dt < \eta, \qquad \int_{1-\tau}^1 (1-t)\psi(t)dt < \eta$$

$$\int_0^\tau \delta_0^2(t)\psi(t)dt < \frac{\varepsilon\eta}{4}, \qquad \int_{1-\tau}^1 \delta_0^2\psi(t)dt < \frac{\varepsilon\eta}{4}.$$

Choisissons maintenant un $r > 0$, tel que l'inégalité $r_n < r$ implique que $r_n^{'} < \frac{\varepsilon\eta}{2}$. Nous obtenons alors que

$$\int_0^\tau \lambda_n^2(t)\psi(t)dt < \varepsilon\eta \qquad \text{et} \qquad \int_{1-\tau}^1 \lambda_n^2(t)\psi(t)dt < \varepsilon\eta. \tag{2.7.35}$$

Posons $m_n' := \int_0^1 |\lambda_n(t)|\psi(t)dt$. Nous obtenons la relation

$$m_n' := \int_0^\tau |\lambda_n(t)|\psi(t)dt + \int_\tau^{1-\tau} |\lambda_n(t)|\psi(t)dt + \int_{1-\tau}^1 |\lambda_n(t)|\psi(t)dt. \tag{2.7.36}$$

Montrons maintenant que, lorsque $n \to \infty$, $\frac{m_n'}{\sqrt{n}} \to 0$. Fixons $s_0 >\| \delta_0 \|_\psi$ . Il découle des relations précédentes que, lorsque $r_n$ est suffisamment petit,

$$\sup_{0\le u\le 1} |\lambda_n(u)| < s_0.$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons les inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_\tau^{1-\tau} |\lambda_n(t)|\psi(t)dt \le \frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{\int_\tau^{1-\tau} \lambda_n^2(t)\psi(t)dt\int_\tau^{1-\tau} \psi(t)dt\Big\}^{1/2}$$

$$\le \frac{s_0}{\sqrt{n}}\Big(\int_\tau^{1-\tau} t(1-t)\psi(t)dt\Big)^{1/2} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n\to\infty. \tag{2.7.37}$$

D'autre part, si nous posons

$$S_1 := \{0 \le t \le \tau : |\lambda_n(t)| > \varepsilon/\sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad S_2 := [0,\tau] - S_1,$$

nous obtenons, à l'aide de la première de (2.7.35), que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{S_1} |\lambda_n(t)|\psi(t)dt \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{S_1} \lambda_n^2(t)\psi(t)dt < \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda_n^2(t)\psi(t)dt < \eta. \tag{2.7.38}$$

Puisque, pour tout $t \in S_2$, $\frac{1}{\sqrt{n}}|\lambda_n(t)| \le \frac{\varepsilon}{n} \le t$, on en déduit que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{S_2} |\lambda_n(t)|\psi(t)dt \le \int_0^\tau t\psi(t)dt < \eta. \tag{2.7.39}$$

En procédant d'une manière analogue sur l'intervalle $[1-\tau, 1]$, nous obtenons l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{1-\tau}^{1} |\lambda_n(t)| \psi(t) dt \leq \eta. \tag{2.7.40}$$

Il découle donc de (2.7.36)-(2.7.40), que, lorsque $n \to \infty$, $\frac{m'_n}{\sqrt{n}} \to 0.\square$

## 2.8 Convergence en loi sous $H_a$ dans un espace métrique $(E, \rho)$

L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir des conditions nécessaires pour que la convergence faible de $\mu_n$ et $\nu_n$ reste valable dans un espace métrique $(E, \rho)$, pourvu que la métrique $\rho$ vérifie les conditions introduites dans le paragraphe 2.4.1, page 56. Ici, $\delta_n, \delta$ sont des fonctions absolument continues vérifiant $\delta_n(0) = \delta(0) = \delta_n(1) = \delta(1) = 0$. Les fonctions $\Delta_n$ et $\Delta$ représentent respectivement la dérivée de $\delta_n$ et $\delta$. Soit $s :=\| \Delta \|_2^2 < \infty$ et notons

$$r_n :=\| \Delta_n - \Delta \|_2^2 = \int_0^1 \big(\Delta_n(t) - \Delta(t)\big)^2 dt.$$

Dans ce paragraphe, nous adoptons les notations suivantes. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &:= \Big\{ g \in L^2[0,1] : \int_0^1 g(t)dt = 0 \Big\}, \\ \mathcal{M} &:= \Big\{ g \in \mathcal{J} : \ g' \text{ continue et bornée} \Big\}, \\ \Sigma &:= \Big\{ \delta : \{\Delta : \delta \in \Sigma\} := \mathcal{S} \text{ est un compact de } L^2[0,1] \Big\}. \end{aligned}$$

Nous nous référons à [22] pour constater que l'ensemble $\mathcal{M}$ est dense dans l'ensemble $\mathcal{J}$.

Supposons que :

**(a)** $\mu_n$ converge faiblement vers la mesure $\mu$ dans $(E, \rho)$ : $\mu_n \Longrightarrow \mu$.

**(b)** Pour tout $h \in \mathcal{M}$, la métrique $\rho$ rend l'application

$$f \in E \to \int_0^1 f(t) h'(t) dt, \tag{2.8.41}$$

continue.

**Théorème 2.8.1**

Soit $A$ un borélien de $E$ tel que $\mu(\partial A) = 0$. Alors, sous les conditions **(a)** et **(b)** ci-dessus, on a

$$\nu_n(A) \to \nu(A) \quad \text{lorsque} \ \ n \to \infty \text{ et } \sup_{\delta \in \Sigma} r_n \to 0.$$

*Remarque 2.8.1*

Si $\| \ \Delta \ \|_2^2 < \infty$, la mesure $\nu$ est absolument continue par rapport à $\mu$ (voir 2.8.42) et on a $\nu(\partial A) = 0$.

**Preuve.** La preuve de ce théorème est basée sur le théorème de Hajek-Shepp, et les lemmes suivants que nous démontrerons ultérieurement.$\square$

**Théorème 2.8.2** *(Hajek-Shepp)*

Soit $\delta_0 \in L^2[0,1]$ telle que $\overline{\delta}_0 := \int_0^1 \delta_0(u)du = 0$. Alors, en posant $\Lambda(t) := \int_0^t \delta_0(u)du$, la loi $\nu_\Lambda := \mathcal{L}[B + \Lambda]$ est absolument continue par rapport à $\mu$, et on a

$$\log \frac{d\nu_\Lambda}{d\mu} = \int_0^1 \delta_0(t)dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 \delta_0^2(t)dt.$$

**Preuve.** Voir le théorème 5, pp 157, de [87].$\square$

Il découle du théorème précédent que la densité $\frac{d\nu_n}{d\mu_n}$ peut s'exprimer, en fonction du processus $\alpha_n$, de la manière suivante. On a

$$\frac{d\nu_n}{d\mu_n} = f_n(\alpha_n).$$

**Lemme 2.8.1**

Sous les hypothèses du théorème 2.8.1, on a

$$\log f_n(\alpha_n) = \int_0^1 \Delta_n(t)d\alpha_n(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 \Delta^2(t)dt + \kappa_n$$

où, pour tout $\eta > 0$,

$$\mathbb{P}_0(|\kappa_n| \geq \eta) \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty \quad \text{et} \quad \sup_{\delta \in \Sigma} r_n \to 0.$$

Compte tenu de tout ce qui précède, on constate que la densité $f := \frac{d\nu}{d\mu}$, vérifie la relation

$$\log f\big(B(.)\big) = \int_0^1 \Delta(t)dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 \Delta^2(t)dt. \qquad (2.8.42)$$

Par ailleurs (voir [87]), le processus stochastique $\int_0^1 \Delta(t)dB(t)$ suit une loi normale $N(0, \| \Delta \|_2^2)$, et on a, pour tout $g \in \mathcal{M}$,

$$\int_0^1 g(t)dB(t)dt = -\int_0^1 B(t)dg(t) = -\int_0^1 B(t)g'(t)dt. \tag{2.8.43}$$

**Lemme 2.8.2**

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Alors, ils existe un $\kappa > 0$, et un entier $n_0$, tels que, si $\Delta \in S$ et $g \in \mathcal{M}$ vérifient

$$\int_0^1 [g(t) - \Delta(t)]^2 dt < \kappa \quad \text{ et } \quad r_n < \kappa \quad \forall\, n \geq n_0,$$

alors, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\mu_n\{|f_n(\alpha_n) - h(B)| > \varepsilon\} < \eta, \tag{2.8.44}$$

où $h$ désigne la fonction définie par

$$h(x) := \exp\Big\{ -\int_0^1 x(t)g'(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 g^2(t)dt\Big\} \quad \forall\, x \in E. \tag{2.8.45}$$

*Remarque 2.8.2*

Si $\lambda$ désigne la loi du processus $B + \int_0^{\cdot} g(u)du$, alors les relations (2.8.42) et (2.8.43) impliquent que $\lambda$ est absolument continue relativement à $\mu$, et vérifie

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = h(B).$$

Notons, pour tout $\gamma > 0$,

$$w(\gamma) = \sup_{A:\mu(A)\leq\gamma} \nu(A) \quad \text{ et } \quad w_n(\gamma) = \sup_{A:\mu_n(A)\leq\gamma} \nu_n(A).$$

**Lemme 2.8.3**

Soient $\lambda$ et $\nu$ deux mesures (positives), absolument continues relativement à $\mu$, et telles que

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}, \quad h = \frac{d\lambda}{d\mu}, \quad \mu(|f-h| \geq \varepsilon) \leq \gamma.$$

Alors,

$$\sup_{A:A\subset E} |\nu(A) - \lambda(A)| = \frac{1}{2}\int |f-h|d\mu \leq \varepsilon + w(\gamma). \tag{2.8.46}$$

**Lemme 2.8.4**

Soit $h(.)$ une fonction positive sur $E$ telle que

$$\mu_n\big(|f_n - h| \geq \varepsilon\big) \leq \gamma_n.$$

Alors, en posant $H_z := \{x \in E : h(x) < z\}$, on a les relations

$$\int_{H_N} |f_n - h| d\mu_n \leq \big(1 - \int_{H_{N-\varepsilon}} h d\mu_n\big) + 2\varepsilon + 2N\gamma_n. \tag{2.8.47}$$

**Lemme 2.8.5**

Soient $A$ un borélien de $E$ tel que $\mu(\partial A) = 0$, et $h(.)$ une fonction, continue et bornée sur $A$. Alors, lorsque $n \to \infty$,

$$\int_A h d\mu_n \to \int_A h d\mu. \tag{2.8.48}$$

**Preuve du théorème 2.8.1.** Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.8.1. Posons

$$F_z = \{x \in E : f(x) < z\}.$$

À l'aide de (2.8.42), et, en utilisant le fait que le processus $\int_0^1 \Delta(t) dB(t)$ suit une loi normale $N(0, s)$, nous obtenons que

$$\mu(F_z) = \Phi\big(\frac{\log z + \frac{s^2}{2}}{s}\big) \tag{2.8.49}$$

et

$$\nu(F_z) = \int_{F_z} f d\mu = \Phi\big(\frac{\log z - \frac{s^2}{2}}{s}\big), \tag{2.8.50}$$

où $\Phi(.)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$. En faisant usage du lemme de Neyman-Pearson (voir [74]), nous en déduisons que

$$\omega(\gamma) = \nu(F^c_{z_\gamma}) = 1 - \Phi(u_\gamma - s). \tag{2.8.51}$$

Ici, $A^c$ désigne le complémentaire de $A$, et les constantes $u_\gamma$ et $z_\gamma$ s'obtiennent à partir des égalités :

$$\Phi(u_\gamma) = 1 - \gamma \quad \text{et} \quad \mu(F^c_{z_\gamma}) = \gamma.$$

Le fait que l'ensemble $\mathcal{S}$ soit un compact borné implique l'existence d'une constante $s_0$ vérifiant

$$s \leq \sup_{\Delta \in S} \| \Delta \|_2^2 < \sqrt{s_0}.$$

Cette inégalité implique que, lorsque $\gamma \to 0$,

$$\omega(\gamma) \leq 1 - \phi(u_\gamma - s_0) := \omega_0(\gamma) \to 0. \tag{2.8.52}$$

Soient $\varepsilon, \gamma > 0$, et $N \in \mathbb{N}$, tels que $\omega_0(\gamma) < \varepsilon$ et $\mu(F^c_{N-1}) < \gamma$. Alors,

$$\nu(F^c_{N-1}) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \nu(F_{N-1}) > 1 - \varepsilon.$$

Par application du lemme 2.8.2, nous pouvons donc trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, et une constante $\kappa > 0$, dépendant de $\varepsilon$ et $\eta := \min(\frac{\varepsilon}{N}, \gamma)$ tels que les propriétés suivantes soient satisfaites. Puisque $\mathcal{S}$ est un compact de $\mathcal{J}$, et du fait que $\mathcal{M}$ est dense dans $\mathcal{J}$, il existe une famille finie d'ensembles $K_\kappa \subset \mathcal{M}$ telle que, pour tout $\Delta \in \mathcal{S}$, il existe $g \in K_\kappa$ vérifiant $\parallel \Delta - g \parallel_2^2 < \kappa$. Ceci implique que, si pour tout $n \geq n_0$, $r_n < \kappa$, alors, nous avons l'inégalité

$$\mu_n(|f_n - h| > \varepsilon) < \eta, \tag{2.8.53}$$

où $h$ est la fonction définie dans (2.8.45). Donc, d'après le lemme 2.8.3, nous avons

$$\sup_{A \subset E} |\int_A f d\mu - \int_A h d\mu| = \frac{1}{2} \int_E |f - h| d\mu \leq 2\varepsilon. \tag{2.8.54}$$

En particulier, si nous posons $H_z = \{x : h(x) < z\}$, alors, pour tout $\varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_{H^c_{N-1/2}} h d\mu &\leq \int_{H^c_{N-1/2-\varepsilon}} (f + \varepsilon) d\mu + \int_{\{|f-h|>\varepsilon\}} h d\mu \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \int_{\{|f-h|>\varepsilon\}} f d\mu + 2\varepsilon \\ &\leq 5\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.8.55}$$

Soit $A \subset H_N$ tel que $\mu(\partial A) = 0$. Nous avons l'inégalité

$$|\nu_n(A) - \nu(A)| \leq$$
$$\int_{H_N} |f_n - h| d\mu_n + \int_E |f - h| d\mu + |\int_A h d\mu_n - \int_A h d\mu|. \tag{2.8.56}$$

À l'aide du lemme 2.8.4, nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} \int_{H_N} |f_n - h| d\mu_n &\leq \big(1 - \int_{H_{N-1/2}} h d\mu_n\big) + 2\varepsilon + 2N \times \frac{\varepsilon}{N} \\ &\leq \big(1 - \int_{H_{N-1/2}} h d\mu_n\big) + \kappa'_n + 4\varepsilon \\ &\leq 9\varepsilon + \kappa'_n, \end{aligned} \tag{2.8.57}$$

où $\kappa'_n$ est une constante donnée par

$$\kappa'_n := |\int_{H_{N-1/2}} h d\mu_n - \int_{H_{N-1/2}} h d\mu|.$$

Comme la fonction $h(.)$ est continue (voir (2.8.41)), et du fait que $z \to \mu(H_z)$ définit également une fonction continue (parce qu'elle peut s'exprimer d'une manière analogue à (2.8.49)), alors, pour tout $z > 0$, $\mu(\partial H_z) = 0$. En utilisant le lemme 2.8.5, nous obtenons donc que

$$\kappa'_n \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty \text{ et } \sup_{g \in K_\kappa} r_n \to 0.$$

Ainsi, nous en déduisons que

$$|\int_A h d\mu_n - \int_A h d\mu| \to 0, \quad \text{lorsque } n \to \infty \text{ et } \sup_{g \in K_\kappa} r_n \to 0.$$

Par conséquent, en utilisant les inégalités (2.8.54), (2.8.56) et (2.8.57), nous constatons que, pour tout $A \subset H_N$,

$$|\nu_n(A) - \nu(A)| \leq 13\varepsilon + \upsilon_1(r_n, n), \tag{2.8.58}$$

où $\upsilon_1(r_n, n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $r_n \to 0$.

D'autre part, en utilisant les deux inégalités (2.8.54) et (2.8.55), nous obtenons l'inégalité

$$\nu(H_N) = \int_{H_N} f d\mu \geq \int_{H_N} h d\mu - 2\varepsilon \geq 1 - 7\varepsilon. \tag{2.8.59}$$

Ceci implique que

$$\nu(H_N^c) \leq 7\varepsilon + \upsilon_2(r_n, n), \tag{2.8.60}$$

où $\upsilon_2(r_n, n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $r_n \to 0$.

Nous utilisons maintenant le fait que $\mu(\partial H_n) = \mu(\partial H_n^c) = 0$, et les inégalités (2.8.58)-(2.8.60). Nous déduisons de tout cela que

$$|\nu_n(A) - \nu(A)| \leq |\nu_n(H_N) - \nu(H_N)| + |\nu_n(H_N^c) - \nu(H_N)| \leq 27\varepsilon + \upsilon(r_n, n),$$

où $\upsilon(r_n, n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $r_n \to 0$. Puisque $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement, nous complétons donc par ces relations la démonstration du théorème 2.8.1.□

Nous allons maintenant donner les démonstrations des lemmes 2.8.1, 2.8.2, 2.8.3, 2.8.4 et 2.8.5.

**Preuve du lemme 2.8.1.** Rappelons tout d'abord que la densité de la variable aléatoire $U_1$, sous l'hypothèses $H_0$ et $H_a$, est donnée, respectivement, par

$$g_0(u) = 1 \quad \text{et} \quad g_1(u) = 1 + \frac{\Delta_n(u)}{\sqrt{n}}.$$

À l'aide d'un développement limité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, nous obtenons que, pour un $\vartheta_i \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} \log f_n(\alpha_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + \frac{\Delta_n(u)}{\sqrt{n}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_n(U_i) - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_n^2(U_i) \qquad (2.8.61) \\ &\quad + \frac{1}{3n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_n^3(U_i)(1 + \frac{\vartheta_i \Delta_n(U_i)}{\sqrt{n}})^{-3}. \end{aligned}$$

Puisque $\int_0^1 \Delta_n(u)du = \delta_n(1) - \delta_n(0) = 0$ (voir [87]), le premier terme de (2.8.61) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_n(U_i) = \int_0^1 \Delta_n(u) d\alpha_n(u). \qquad (2.8.62)$$

Nous nous intéressons maintenant au second terme de (2.8.61). Choisissons un $\varepsilon > 0$, et un ensemble fini $K_\varepsilon \subset \mathcal{M}$, tels que, pour tout $\Delta(.) \in \mathcal{S}$, il existe une fonction $g \in K_\varepsilon$ vérifiant $\| \Delta - g \|_2^2 \leq \varepsilon$. Comme l'ensemble $\mathcal{S}$ est compact (et borné), il existe une constante $s_0$ vérifiant

$$s_0 > \sup_{\Delta \in \mathcal{S}} \| \Delta \|_2^2 .$$

Du fait que les variables aléatoires $U_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance finie, la loi des grands nombres implique que, pour tout $\eta > 0$,

$$\max_{g \in K_\varepsilon} \mathbb{P}_0 \Big\{ |\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g^2(U_i) - \int_1^0 g^2(u)du| > \eta \Big\} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty. \quad (2.8.63)$$

Supposons maintenant $r_n < \varepsilon$, de sorte que

$$\mathbb{E}_0 |\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big( \Delta_n^2(U_i) - g^2(U_i) \Big)| \leq \mathbb{E}_0 |\Big( \Delta_n^2(U_1) - g^2(U_1) \Big)| \qquad (2.8.64)$$

$$= \mathbb{E}_0 |\Big( \Delta_n(U_1) - g(U_1) \Big)| \times |\Big( \Delta_n(U_1) + g(U_1) \Big)| \leq 4 s_0 \varepsilon.$$

À l'aide de l'inégalité de Chebyshev, nous en déduisons que

$$\mathbb{P}_0\Big\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\Delta_n^2(U_i)-g^2(U_i)\Big)|>\eta\Big\}\leq\frac{4s_0\varepsilon}{\eta}. \tag{2.8.65}$$

Nous procédons d'une manière analogue à (2.8.63), pour obtenir que

$$\int_0^1 g^2(u)du-\int_0^1\Delta^2(u)du\leq 2s_0\varepsilon. \tag{2.8.66}$$

Puisque $r_n$ est suffisamment petit, il existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq n_0$, et $\parallel\Delta_n\parallel_2^2<s_0$, nous ayons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_n^2(U_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g^2(U_i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\Delta_n^2(U_i)-g^2(U_i)\Big). \tag{2.8.67}$$

D'où, en utilisant (2.8.63) et (2.8.65)-(2.8.67), nous en déduisons que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_n^2(U_i)\overset{\mathbb{P}_0}{\to}\int_0^1\Delta^2(u)du\quad\text{lorsque } n\to\infty \text{ et } \sup_{\Delta\in S}r_n\to 0. \tag{2.8.68}$$

Considérons maintenant le troisième terme de (2.8.61). Montrons tout d'abord que

$$\max_{1\leq i\leq n}|\frac{\Delta_n(U_i)}{\sqrt{n}}|\overset{\mathbb{P}_0}{\to}0\qquad\text{lorsque } n\to\infty \text{ et } \sup_{\Delta\in S}r_n\to 0. \tag{2.8.69}$$

Soit $g\in\mathcal{M}$ telle que $\parallel\Delta_n-g\parallel_2^2\leq 2\varepsilon$. La fonction $g$ est bornée, posons donc

$$\varphi_0=\max_{g\in K_\varepsilon}\max_{0\leq u\leq 1}|g(u)|.$$

Ainsi,

$$\Delta_n(U_i)=g(U_i)+\Big[\Delta_n(U_i)-g(U_i)\Big],$$

$$\mathbb{P}_0\Big(|\Delta_n(U_i)|>z\Big)\leq\mathbb{P}_0\Big(|\Delta_n(U_i)-g(U_i)|>z-\varphi_0\Big)\leq\frac{4\varepsilon^2}{(z-\varphi_0)^2},$$

$$\mathbb{P}_0\Big\{\max_{1\leq i\leq n}|\frac{\Delta_n(U_i)}{\sqrt{n}}|>\eta\Big\}\leq n\mathbb{P}_0\Big\{|\Delta_n(U_i)|>\eta\sqrt{n}\Big\}\leq\frac{4\varepsilon^2}{(\eta-\frac{\varphi_0}{\sqrt{n}})^2}.$$

Puisque le choix de $\varepsilon>0$ est arbitraire, nous obtenons donc (2.8.69).

Il est clair que

$$\frac{1}{3n^{3/2}}\sum_{i=1}^{n}\Delta_n^3(U_i)\Big(1+\frac{\vartheta_i\Delta_n(U_i)}{\sqrt{n}}\Big)^{-3}\leq$$

$$\max_{1\le i\le n}|\frac{\Delta_n(U_i)}{\sqrt{n}}|\times\max(1+\frac{\vartheta_i\Delta_n(U_i)}{\sqrt{n}})^{-3}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_n^2(U_i).$$

Donc, puisque le premier facteur de cette inégalité tend vers 0, le second vers 1 et le dernier vers $\int_0^1\Delta^2(u)du$, nous constatons que

$$\frac{1}{3n^{3/2}}\sum_{i=1}^{n}\Delta_n^3(U_i)(1+\frac{\vartheta_i\Delta_n(U_i)}{\sqrt{n}})^{-3}\xrightarrow{P}0 \qquad \text{lorsque } n\to\infty \text{ et } r_n\to 0.$$

Ceci complète la démonstration du lemme 2.8.1.□

**Preuve du lemme 2.8.2.** Avant de prouver ce lemme, justifions tout d'abord la propriété suivante : Soient $X, Y$ deux variables aléatoires telles que $\mathbb{E}X^2\le s^2$, et $q(.)$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon,\eta>0$, posons $\delta:=\delta(s,\varepsilon,\eta)>0$.

$$\text{Si}\quad \mathbb{P}(|X-Y|>\delta)<\delta \quad\text{alors}\quad \mathbb{P}(|q(X)-q(Y)|>\varepsilon)<\eta.$$

En effet, d'après l'inégalité de Chebyshev, la condition $\mathbb{E}X^2\le s^2$ implique que $\mathbb{P}\big(|X|>s\sqrt{\frac{2}{\eta}}\big)<\frac{\eta}{2}$. Comme la fonction $q(z)$ est uniformément continue sur tout intervalle borné, il existe donc une constante $\eta_0>0$, telle que, si $|z_1-z_2|\le\eta_0,\ |z_1|\le s\sqrt{\frac{2}{\eta}}$, alors, nous avons

$$|q(z_1)-q(z_2)|<\varepsilon.$$

Prenons en particulier $\delta=\min(\varepsilon,\eta_0,\frac{\eta}{2})$, donc si $\mathbb{P}(|q(X)-q(Y)|>\delta)<\delta$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|q(X)-q(Y)|>\varepsilon) &\le \mathbb{P}(|X-Y|>\eta_0)+\mathbb{P}(|X|>s\sqrt{\frac{2}{\eta}})\\ &\le \mathbb{P}(|X-Y|>\delta)+\mathbb{P}(|X|>s\sqrt{2/\eta})\le\eta.\square\end{aligned}$$

Si nous prenons $X=\log h(\alpha_n), Y=\log f_n(\alpha_n), q(z)=e^z$ et $\mathbb{P}=\mu_n$, les conditions de la propriété précédente sont vérifiées d'après le lemme 2.8.1 et l'égalité (2.8.42) de la page 71. Ceci complète la démonstration du lemme 2.8.2.□

**Preuve du lemme 2.8.3.** Fixons $\varepsilon>0$, et posons

$$D_\varepsilon=\{x\in E:|f(x)-h(x)|<\varepsilon\}.$$

Nous avons

$$\int_E|f-h|d\mu\le\int_{D_\varepsilon}|f-h|d\mu+\int_{D_\varepsilon^c}fd\mu+\int_{D_\varepsilon^c}hd\mu. \qquad (2.8.70)$$

Nous obtenons, sous la condition $\mu(D_\varepsilon^c) < \gamma$,

$$\int_{D_\varepsilon} |f-h| d\mu \leq \varepsilon, \quad \int_{D_\varepsilon^c} f d\mu = \nu(D_\varepsilon^c) \leq \omega(\gamma)$$

et

$$\int_{D_\varepsilon^c} h d\mu = 1 - \int_{D_\varepsilon} h d\mu \leq 1 - \int_{D_\varepsilon} (f-\varepsilon) d\mu \leq 1 - [1-\omega(\gamma)-\varepsilon] = \omega(\gamma)+\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\int |f-h| d\mu \leq \omega(\gamma)+\varepsilon.$$

D'où, la preuve du lemme 2.8.3. □

**Preuve du lemme 2.8.4.** Posons

$$D_{nz} = \{x \in E : |f_n(x) - h(x)| < z\}, \; F_{nz} = \{x \in E : f_n(x) < z\}. \quad (2.8.71)$$

Sous la condition $\mu_n(D_{n\varepsilon}^c) < \gamma_n$, nous avons les inégalités

$$\int_{H_N} |f_n - h| d\mu_n = (\int_{D_{n\varepsilon}\cap H_N} + \int_{D_N \cap D_{n\varepsilon}^c \cap H_N} + \int_{D_N^c \cap H_N}) |f_n - h| d\mu_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{H_N} |f_n - h| d\mu_n &\leq \varepsilon + N\gamma_n + \int_{F_{nN}^c \cap H_N} f_n d\mu_n \\ &= \varepsilon + N\gamma_n + 1 - \int_{F_{nN}\cup H_N^c} f_n d\mu_n. \quad (2.8.72) \end{aligned}$$

Or, puisque

$$\begin{aligned} \int_{F_{nN}\cup H_N^c} f_n d\mu_n &\geq \int_{D_{n\varepsilon}\cap H_{N-\varepsilon}} (h-\varepsilon) d\mu_n \\ &\geq \int_{H_{N-\varepsilon}} h d\mu_n - \int_{H_{N-\varepsilon}\cap D_{n\varepsilon}^c} h d\mu_n - \varepsilon \\ &\geq \int_{H_{N-\varepsilon}} h d\mu_n - (N-\varepsilon)\gamma_n - \varepsilon, \quad (2.8.73) \end{aligned}$$

nous en déduisons, par (2.8.72) et (2.8.73), que

$$\int_{H_N} |f_n - h| d\mu_n \leq 2(\varepsilon + N\gamma_n) + (1 - \int_{H_{N-\varepsilon}} h d\mu_n).$$

Nous obtenons donc le résultat du lemme 2.8.4.□

**Preuve du lemme 2.8.5.** La preuve de ce lemme s'obtient à partir de l'observation que l'ensemble des fonctions étagées est dense dans l'ensemble des fonctions continues. Autrement dit, toute fonction étagée est une limite d'une suite de fonctions continues.□

## 2.9 Conditions nécesssaires pour qu'une statistique $\phi(\alpha_n)$ converge en loi sous $H_a$

Dans ce paragraphe, nous étudions le comportement asymptotique de la statistique $\phi(\alpha_n)$ sous les hypothèses $H_0$ et $H_a$. Nous nous plaçons sous les hypothèses et notations utilisées dans le paragraphe précédent. Nous établissons le théorème suivant.

**Théorème 2.9.1**

Soit $(E, \rho)$ un espace métrique, défini à l'aide d'une distance $\rho$, satisfait les conditions du théorème 2.4.7 page 59. Soit $\phi$ une fonction vérifiant

$$\mathcal{L}[\phi(\alpha_n)/H_0] \to \mathcal{L}[\phi(B)] \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Supposons, de plus, que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, et une fonction $\phi_\varepsilon$, $\mu$-presque continue, de telle sorte que

$$\mathbb{P}\{|\phi(B) - \phi_\varepsilon(B)| > \varepsilon\} < \varepsilon,$$

et

$$\mathbb{P}_0\{|\phi(\alpha_n) - \phi_\varepsilon(\alpha_n)| > \varepsilon\} < \varepsilon \quad \text{pour tout } \; n \geq n_0.$$

Alors, nous avons la convergence en loi

$$\mathcal{L}[\phi(\alpha_n)/H_a] \to \mathcal{L}[\phi(B+\delta)] \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty \text{ et } \quad r_n \to 0.$$

**Preuve.** Ce théorème se déduit des lemmes 2.9.1, 2.9.2 et 2.9.3 ci-dessous.□

**Lemme 2.9.1**

Pour tout $\gamma \in [0, 1]$ et $\delta \in \Sigma$, nous avons

$$\omega_n(\gamma) \to \omega(\gamma) \;\text{ lorsque } n \to \infty, \quad \text{et} \quad r_n \to 0.$$

(Les définitions de $\omega_n(\gamma)$ et $\omega(\gamma)$ sont données dans le lemme 2.8.3 page 72).

**Preuve.** En rappelant les notations $D_{nz}, F_{nz}$, $D_z, F_z$ et $H_z$, introduites dans le paragraphe précédent, nous posons

$$T_n^0(z) = \mu_n(F_{nz}), \quad T^0(z) = \mu(F_z),$$

$$T_n(z) = \nu_n(F_{nz}), \quad T(z) = \nu(F_z),$$

les fonctions $T^0(z)$ et $T(z)$ étant définies, respectivement, par les égalités (2.8.49) et (2.8.50). Montrons maintenant que

$$T_n(z) \to T(z) \quad \text{et} \quad T_n^0(z) \to T^0(z) \quad \text{lorsque } n \to \infty \text{ et } r_n \to 0.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors, par application du lemme 2.8.2, on obtient l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$, d'une constante $\kappa = \kappa_\varepsilon > 0$, et d'un $\eta := \min(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{z+\varepsilon})$, tels que, pour tout $g \in \mathcal{M}$, on ait

$$\int_1^0 (\Delta(u) - g(u))^2 du < \kappa.$$

On a donc, pour tout $n \geq n_0$, et $r_n < \kappa$,

$$\mu_n\{|f_n - h| > \varepsilon\} < \eta \ \text{ et } \ \mu\{|f_n - h| > \varepsilon\} < \eta,$$

où la fonction $h$ est définie dans (2.8.45). Nous obtenons donc les inégalités

$$\begin{aligned} T_n(z) &= \int_{F_{nz}} f_n d\mu_n \\ &= \int_{F_{nz}\cap D_{n\varepsilon}} f_n d\mu_n + \int_{F_{nz}\cap D_{n\varepsilon}^c} f_n d\mu_n \\ &\leq \int_{H_{z+\varepsilon}} (h+\varepsilon) d\mu_n + z\eta \\ &\leq \int_{H_{z+\varepsilon}} h d\mu_n + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.9.74}$$

Puisque $\mu(\partial H_{z+\varepsilon}) = 0$, à l'aide du lemme 2.8.5, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{H_{z+\varepsilon}} h d\mu_n &= \int_{H_{z+\varepsilon}} h d\mu \\ &= \int_{H_{z+\varepsilon}\cap D_\varepsilon} h d\mu + \int_{H_{z+\varepsilon}\cap D_\varepsilon^c} h d\mu \\ &\leq \int_{F_{z+2\varepsilon}} (f+\varepsilon) d\mu + (z+\varepsilon)\eta \\ &\leq \int_{F_{z+2\varepsilon}} f d\mu + 2\varepsilon = T(z+2\varepsilon) + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.9.75}$$

De ceci et des relations (2.9.74) et (2.9.75), nous déduisons que

$$T_n(z) \geq T(z - 2\varepsilon) - 2\varepsilon.$$

Ceci implique que

$$T_n(z) \to T(z) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty \quad \text{et} \quad r_n \to 0.$$

Finalement, si nous prenons en particulier, dans (2.9.74) et (2.9.75), $f_n \equiv f \equiv h \equiv 1$, nous obtenons aisément que

$$T_n^0(z) \to T^0(z) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty \quad \text{et} \quad r_n \to 0.$$

Par ces relations, et au vu des définitions de $\omega_n(\gamma)$ et $\omega(\gamma)$, nous avons bien démontré le résultat annoncé.□

**Lemme 2.9.2**

Si une suite d'ensembles mesurables $A_n \subset E$ vérifie

$$\mu_n(A_n) \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty,$$

alors,

$$\nu_n(A_n) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty \quad \text{et} \quad \sup_{\delta \in \Sigma} r_n \to 0.$$

**Preuve.** Ce lemme est une conséquence directe du lemme 2.9.1.□

**Lemme 2.9.3**

Si une suite de fonctions $\phi_n(.)$ vérifie la condition

$$\mathbb{P}_0\{|\phi_n(\alpha_n)| > \eta\} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

alors,

$$\mathbb{P}_1\{|\phi_n(\alpha_n)| > \eta\} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty \quad \text{et} \quad \sup_{\delta \in \Sigma} r_n \to 0.$$

**Preuve.** Ce lemme est une conséquence directe du lemme 2.9.2.□

En conclusion de ce paragraphe, on constate bien que le théorème 2.9.1 se déduit directement des lemmes précédents, et plus spécifiquement, du lemme 2.9.3.

# Chapitre 3

# Illustrations

Les principes généraux relatifs à la construction et aux caractéristiques d'un test d'hypothèse ont été rappelés au chapitre 1. Nous reprenons ici la même démarche dans le cadre de *tests non-paramétriques d'ajustement*.

Les tests paramétriques supposent d'admettre a priori que la loi de probabilité des observations appartient à une famille spécifiée de distributions, indexée par un paramètre variant dans un espace de dimension finie. Les tests non paramétriques admettent des familles plus générales de lois de probabilités. Ceci les rend plus flexibles et plus fiables, lorsqu'on n'a peu de renseignements sur la répartition des observations.

## 3.1 Tests non-paramétriques d'ajustement

Soit un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la variable aléatoire $X$, de fonction de répartition $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ continue. Nous nous intéressons, dans ce qui suit, à des tests de l'hypothèse simple

$$H_0 : F = F_0,$$

où $F_0$ est une fonction de répartition continue donnée, contre l'alternative que $F \neq F_0$. Soit $\psi$ une fonction positive et continue sur $(0,1)$ vérifiant les conditions

$$(i)\ \lim_{t\uparrow 0} t^2\psi(t) = \lim_{t\downarrow 1}(1-t)^2\psi(t) = 0 \quad \text{et} \quad (ii)\ \int_0^1 t(1-t)\psi(t) < \infty. \quad (3.1.1)$$

Pour tester l'hypothèse $(H_0)$ contre l'alternative que $F \neq F_0$, nous ferons usage de statistiques de type Cramér-Von Mises, de la forme

$$W^2_{n,\psi} := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\big(F_0(x)\big)\big[\mathbb{F}_n(x) - F_0(x)\big]^2 dF_0(x).$$

Il est facile de vérifier, à l'aide de la transformation de quantiles que, sous $H_0$, la distribution asymptotique de $W_{n,\psi}^2$ est indépendante de $F_0$, et ne dépend que des variables réduites $U_i := F_0(X_i)$ $(i = 1, \dots, n)$, elles-même, uniformément réparties sur $[0,1]$. On peut toujours donc se ramener à tester l'hypothèse

$$(H_0): \quad \mathbb{G} = I, \tag{3.1.2}$$

contre l'alternative que $\mathbb{G} \neq I$. Ici, on pose $\mathbb{G}(t) = F\big(F_0^{-1}(t)\big)$, et on désigne par $I$ l'application identité. Nous notons $F_0^{-1}(t) = \big\{x : F_0(x) \geq t\big\}$ la fonction de quantile associée à $F_0$.

Dans la suite, nous chercherons à tester l'hypothèse $(H_0)$, réduite sous la forme (3.1.2). À cet effet, nous ferons usage du processus empirique unuiforme

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \big(\mathbb{I}_{\{U_i \leq t\}} - t\big) = \sqrt{n}\,(\mathbb{G}_n(t) - t).$$

Sous l'hypothèse $(H_0)$, on a l'identité en loi

$$W_{n,\psi}^2 \overset{loi}{=} w_{n,\psi}^2 := \int_0^1 \psi(t)\alpha_n^2(t)dt,$$

et la statistique $w_{n,\psi}^2$ converge en loi vers la variable

$$w_\psi^2 := \int_0^1 \psi(t)B^2(t)dt,$$

où $B(\cdot)$ est un pont brownien. On remarquera que l'intégrale $w_\psi^2$, ci-dessus, est presque sûrement finie sous la condition (3.1.1). À partir du D.K.L du pont brownien pondéré $\{\sqrt{\psi(t)}B(t) : 0 < t < 1\}$ (dont on ne fait usage que des valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$), on déduit aisément de ces relations que

$$w_\psi^2 \overset{loi}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j^2.$$

La fonction caractéristique de cette somme pondérée de variables $\chi_1^2$ est alors donnée par

$$\psi_\psi(u) = \mathbb{E}\big(e^{iuw_\psi^2}\big) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - 2iu\lambda_j)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

Smirnov a donné, dans [89] et [91], des formules explicites d'inversion de cette fonction caractéristique, permettant une évaluation numérique (relativement) simple de la fonction de répartition de $w_\psi^2$. Sa formule de base est établie dans le cas où les valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$, de l'opérateur de Fredholm associé au processus gaussien limite $\{\sqrt{\psi(t)}B(t) : 0 < t < 1\}$, sont distinctes. On obtient alors que, pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(w_\psi^2 \leq x\big) = 1 - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\int_{\gamma_{2j-1}}^{\gamma_{2j}} \frac{e^{-\frac{tx}{2}}}{t\sqrt{|\mathbb{F}(t)|}}dt,$$

où les $\gamma_j = 1/\lambda_j$ pour $j \geq 1$, sont les valeurs qui annulent le *déterminant de Fredholm*

$$\mathbb{F}(\gamma) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - \frac{\gamma}{\gamma_j})$$

associé au noyau de covariance $K_\psi(s,t) = E(\sqrt{\psi(s)}\,B(s)\sqrt{\psi(t)}\,B(t))$. Ce dernier est donné, explicitement, par la relation

$$K_\psi(s,t) = \sqrt{\psi(s)\psi(t)}\big(\min(s,t) - st\big), \quad \forall\ s,t \in (0,1).$$

Le développement suivant de la statistique $w_{n,\psi}^2$ nous sera utile dans la suite de notre exposé.

**Proposition 3.1.1**

Soit $(U_{(1)},\ldots,U_{(n)})$ la statistique d'ordre associée à l'échantillon $(U_1,\ldots,U_n)$, vérifiant les inégalités

$$U_{(0)} := 0 < U_{(1)} \leq \ldots \leq U_{(n)} \leq U_{(n+1)} := 1.$$

Alors, $w_{n,\psi}^2$ peut se décomposer sous la forme

$$w_{n,\psi}^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big\{2\psi_2(U_{(j)}) + \frac{(1-2j)}{n}\psi_1(U_{(j)})\Big\} + n\int_0^1 (1-t)^2\psi(t)dt,$$

où les fonctions $\psi_1$ et $\psi_2$ sont définies par les relations

$$\psi_1(t) = \int_0^t \psi(u)du \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = \int_0^t u\psi(u)du.$$

En particulier, pour $\psi(t) = t^{2\beta}$, avec $\beta > -1$ tel que $\beta \neq -\frac{1}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} w_{n,\beta}^2 &:= \int_0^1 t^{2\beta}\alpha_n^2(t)dt \\ &= \frac{1}{n(2\beta+1)}\sum_{j=1}^{n}\Big\{(1-2j)U_{(j)}^{2\beta+1} + \frac{n(2\beta+1)}{\beta+1}U_{(j)}^{2\beta+2}\Big\} \\ &\quad -\frac{n}{2(2\beta+3)(\beta+1)}, \end{aligned}$$

et pour $\beta = -\frac{1}{2}$,

$$w^2_{n,-\frac{1}{2}} \quad = \quad -\frac{3n}{2} + 2\sum_{j=1}^{n}\Big\{U_{(j)} - \frac{(j-\frac{1}{2})}{n}\log U_{(j)}\Big\}.$$

**Preuve.** Rappelons que, pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\mathbb{G}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \le t < U_{(1)}, \\ \frac{j}{n} & \text{si } t \in [U_{(j)}, U_{(j+1)}[, \ j = 1, \ldots, n-1 \\ 1 & \text{si } U_{(n)} \le t \le 1. \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
w^2_{n,\psi} &= n\int_0^1 \psi(t)(\mathbb{G}_n(t)-t)^2 dt = n\sum_{j=0}^{n}\int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}} \psi(t)(\frac{j}{n}-t)^2 dt \\
&= n\sum_{j=0}^{n}\int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}} \psi(t)\big[(\frac{j}{n})^2 - 2(\frac{j}{n})t + t^2\big]dt \\
&= n\int_0^1 t^2\psi(t)dt - 2\sum_{j=1}^{n} j\int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}} t\psi(t)dt + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2\int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}} \psi(t)dt \\
&= n\int_0^1 t^2\psi(t)dt - 2\Big[\sum_{j=1}^{n} j\psi_2(U_{(j+1)}) - \sum_{j=1}^{n} j\psi_2(U_{(j)})\Big] \\
&+ \frac{1}{n}\Big[\sum_{j=1}^{n} j^2\psi_1(U_{(j+1)}) - \sum_{j=1}^{n} j^2\psi_1(U_{(j)})\Big] \\
&= n\int_0^1 t^2\psi(t)dt - 2\Big[\sum_{j=1}^{n+1}(j-1)\psi_2(U_{(j)}) - \sum_{j=1}^{n} j\psi_2(U_{(j)})\Big] \\
&+ \frac{1}{n}\Big[\sum_{j=1}^{n+1}(j-1)^2\psi_1(U_{(j)}) - \sum_{j=1}^{n} j^2\psi_1(U_{(j)})\Big] \\
&= n\int_0^1 t^2\psi(t)dt - 2n\psi_2(1) + 2\sum_{j=1}^{n}\psi_2(U_{(j)}) + n\psi_1(1) \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(1-2j\big)\psi_1(U_{(j)}) \\
&= n\int_0^1 \big(t^2 - 2t + 1\big)\psi(t)dt + 2\sum_{j=1}^{n}\psi_2(U_{(j)}) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(1-2j\big)\psi_1(U_{(j)}).\Box
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $\psi(t) = t^{2\beta}$ (pour $\beta \neq -\frac{1}{2}$), nous avons

$$\psi_1(u) = \int_0^u t^{2\beta} dt = \frac{1}{2\beta+1} u^{2\beta+1}, \qquad \psi_2(u) = \int_0^u t^{2\beta+1} dt = \frac{1}{2\beta+2} u^{2\beta+2}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \big(1-t\big)^2 \psi(t) dt &= \int_0^1 \big(t^2 - 2t + 1\big) t^{2\beta} dt \\ &= \frac{1}{2\beta+3} - \frac{2}{2\beta+2} + \frac{1}{2\beta+1} = -\frac{1}{2(2\beta+3)(\beta+1)}. \end{aligned}$$

Le développement annoncé de $w_{n,\beta}^2$ découle de ces trois égalités, ce qui achève la démonstration de la proposition, lorsque $\beta \neq -\frac{1}{2}$.

Dans le cas où $\beta = -\frac{1}{2}$, nous faisons usage du procédé suivant. Il est clair que

$$\begin{aligned} & w_{n,-\frac{1}{2}}^2 = n \int_0^1 t^{-1} (\mathbb{G}_n(t) - t)^2 dt \\ = \;& n \int_{U_{(0)}}^{U_{(1)}} \frac{t^2}{t} dt + n \sum_{j=1}^{n-1} \int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}} \frac{1}{t} (\frac{j}{n} - t)^2 dt + n \int_{U_{(n)}}^{U_{(n+1)}} \frac{1}{t} (1-t)^2 dt \\ = \;& \frac{n}{2} U_{(1)}^2 + n \sum_{j=1}^{n-1} \int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}} \Big\{ (\frac{j}{n})^2 \frac{1}{t} - \frac{2j}{n} + t \Big\} dt + n \int_{U_{(n)}}^{U_{(n+1)}} \big[\frac{1}{t} + t - 2\big] dt. \end{aligned}$$

Or, puisque

$$\begin{aligned} & \int_{U_{(n)}}^{U_{(n+1)}} \Big[\frac{1}{t} + t - 2\Big] dt = \Big[\log t + \frac{t^2}{2} - 2t\Big]_{U_{(n)}}^{U_{(n+1)}} \\ = \;& \Big[\log U_{(n+1)} + \frac{U_{(n+1)}^2}{2} - 2U_{(n+1)}\Big] - \Big[\log U_{(n)} + \frac{U_{(n)}^2}{2} - 2U_{(n)}\Big] \\ = \;& -\frac{3}{2} - \Big[\log U_{(n)} + \frac{U_{(n)}^2}{2} - 2U_{(n)}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1}\int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}}(\frac{j}{n})^2\frac{1}{t}dt &= \sum_{j=1}^{n-1}(\frac{j}{n})^2\log U_{(j+1)} - \sum_{j=1}^{n-1}(\frac{j}{n})^2\log U_{(j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\frac{j-1}{n})^2\log U_{(j)} - \sum_{j=1}^{n-1}(\frac{j}{n})^2\log U_{(j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\Big((\frac{j-1}{n})^2 - (\frac{j}{n})^2\Big)\log U_{(j)} + \log U_{(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(1-2j)}{n^2}\log U_{(j)} + \log U_{(n)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1}\int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}}(\frac{2j}{n})dt &= \sum_{j=1}^{n-1}(\frac{2j}{n})U_{(j+1)} - \sum_{j=1}^{n-1}(\frac{2j}{n})U_{(j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\frac{2j-2}{n})U_{(j)} - \sum_{j=1}^{n-1}(\frac{2j}{n})U_{(j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\Big((\frac{2j-2}{n}) - (\frac{2j}{n})\Big)U_{(j)} + 2U_{(n)} \\
&= -\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}U_{(j)} + 2U_{(n)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1}\int_{U_{(j)}}^{U_{(j+1)}} tdt &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}U_{(j+1)}^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}U_{(j)}^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}U_{(j)}^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}U_{(j)}^2 = \frac{U_{(n)}^2}{2} - \frac{U_{(1)}^2}{2},
\end{aligned}$$

nous obtenons, après simplifications et regroupement des termes, que

$$\begin{aligned}
w_{n,-\frac{1}{2}}^2 &= -\sum_{j=1}^{n}(\frac{2j-1}{n})\ln U_{(j)} - \frac{3n}{2} + 2\sum_{j=1}^{n}U_{(j)} \\
&= -\frac{3n}{2} + 2\sum_{j=1}^{n}\big[U_{(j)} - \frac{(j-\frac{1}{2})}{n}\ln U_{(j)}\big].
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.□

On constatera ici que, sous les conditions $(i)-(ii)$, les processus $\alpha_n(.)$ et $B$ prennent leurs valeurs dans l'espace de Hilbert *séparable* $L^2((0,1),\psi)$, composé de l'ensemble des fonctions réelles $f$, telles que

$$\| f \|_\psi^2 = \int_0^1 \psi(t) f^2(t) dt < \infty,$$

cet espace étant muni de la norme

$$\| f \|_\psi := \| \sqrt{\psi} f \|_2 .$$

Avec ces notations, on peut écrire que $w_{n,\psi}^2 = \| \alpha_n \|_\psi^2$ . La convergence en loi de $w_{n,\psi}^2$ vers $w_\psi^2$ n'est alors rien d'autre qu'une convergence faible (désignée par ma suite par le symbole "$w$" pour l'anglais emphweak) de lois de probabilité dans un espace de Banach. Le résultat suivant sera, à cet effet, particulièrement utile.

**Théorème 3.1.1** *(Araujo et Giné, 1980) Dans* $L^2((0,1),\psi)$, *on a*

$$\alpha_n \xrightarrow{w} B \Longleftrightarrow \quad (ii) : \int_0^1 t(1-t)\psi(t)dt < \infty.$$

*Dans ce cas, on a sous* $(H_0)$,

$$w_{n,\psi}^2 \xrightarrow{w} \| B \|_\psi^2 = \int_0^1 \psi(t) B^2(t) dt \overset{p.s}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j^2.$$

Donc, l'hypothèse $(H_0)$ est rejetée si l'inégalité $w_{n,\psi}^2 > w_\alpha$ est satisfaite. Ce test possède un risque tendant vers $\alpha \in (0,1)$, lorsque $n \to \infty$, si on choisit $w_\alpha$ par l'identité

$$\mathbb{P}\Big( \int_0^1 \psi(t) B^2(t) dt > w_\alpha \Big) = \alpha.$$

Pour $\psi(t) = t^{2\beta}$ et une sélection de valeurs de $\beta > -1$, une tabulation numérique des quantiles $w_\alpha$ pour $\alpha$ =10%, 5%, 1%, 0.5%, 0.1% est donnée dans [30].

## 3.2 Evaluation de la puissance relativement aux suites d'alternatives locales

Nous supposons maintenant que l'hypothèse $(H_0)$ n'est pas satisfaite, et que, pour chaque $n \geq 1$, les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes et équidistribuées, de fonction de répartition $G^{(n)}(.)$, vérifiant la condition, lorsque $n \to \infty$,

$$\| G^{(n)} - I \| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |G^{(n)}(t) - t| \to 0. \tag{3.2.3}$$

Supposons, de plus, que, lorsque $n \to \infty$, la fonction $\delta_n(t) := \sqrt{n}\big(G^{(n)}(t) - t\big)$ converge, dans $L^2([0,1],\psi)$, vers une fonction $\delta$, de sorte que

$$\| \delta_n - \delta \|_\psi \to 0. \tag{3.2.4}$$

Considérons alors *la suite d'alternatives locales :*

$$(H_a) : G(t) = G^{(n)}(t) = t + n^{-1/2}\delta_n(t) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il sera commode, dans la suite, de poser

$$g(t) := \sqrt{\psi(t)}\,\delta(t), \quad \tau_0 := \int_0^1 K_\psi(s,s)ds = \int_0^1 s(1-s)\psi(s)ds$$
$$\eta := \frac{w_\alpha - \tau_0 - \int_0^1 g^2(t)dt}{2}, \quad g_j := \int_0^1 g(t)e_j(t)dt, \quad \forall\, j \geq 1.$$

La propriété suivante s'obtient aisément, à l'aide du théorème de la convergence monotone, compte tenu du fait que les fonctions $\{e_j(.), j \geq 1\}$ du [D.K.L.] forment un système orthonormal dans $L^2[0,1]$, et en faisant usage du théorème du Mercer.

**Propriété 3.2.1**

Si $\psi$ est prolongeable par continuité sur [0, 1], nous obtenons à l'aide du [D.K.L.],

$$\begin{aligned}
\Lambda &:= \int_0^1 \Big[\int_0^1 g(s)K_\psi(s,t)ds\Big]^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j g_j)^2,\\
D^2 &:= \int_0^1\int_0^1 g(s)K_\psi(s,t)g(t)dsdt = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j g_j^2,\\
T &:= \int_0^1 \psi(t)B^2(t)dt - \tau_0 \overset{p.s}{=} \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\xi_j^2 - \tau_0,\\
S &:= \int_0^1 g(t)\sqrt{\psi(t)}B(t)dt \overset{p.s}{=} \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}\,g_j\xi_j.
\end{aligned}$$

Ici, la suite $\{\xi_j : j \geq 1\}$ est composée de variables i.i.d., de même loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

*Remarque 3.2.1*

- Ces quatres séries sont convergentes. De plus les séries $T$ et $S$ sont (p.s) uniformément convergentes sur $[0,1]$.
- La variable aléatoire $S$ suit la loi normale $N(0, D^2)$.

Sous les conditions (3.2.3)-(3.2.4) et l'alternative locale $(H_a)$, nous avons dans $L^2((0,1),\psi)$ :

$$\alpha_n \xrightarrow{w} B + \delta.$$

Ainsi,

$$w^2_{n,\psi} \xrightarrow{w} \| B + \delta \|^2_\psi = \int_0^1 \psi(t)[B(t) + \delta(t)]^2 dt := w^2_{(\delta,\psi)}.$$

Donc, *la puissance asymptotique* du test basé sur la statistique $w^2_{n,\psi}$, sous $(H_a)$, est donnée par

$$\mathbb{P}\Big(w^2_{(\delta,\psi)} > w_\alpha\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(w^2_{n,\psi} > w_\alpha | H_a\Big). \tag{3.2.5}$$

Le calcul exact de cette probabilité est, généralement, très délicat. Dans ce qui suit, en faisant usage de techniques basées sur les [D.K.L.] et les décompositions orthogonales associées, nous allons présenter une nouvelle méthode, permettant d'évaluer cette quantité.

À l'aide de la propriété (3.2.1), nous pouvons décomposer la variable $w^2_{(\delta,\psi)}$ de (3.2.5) en

$$w^2_{(\delta,\psi)} = T + 2S + w_\alpha - 2\eta.$$

Cette égalité jouera, dans la suite, un rôle très important pour évaluer la probabilité (3.2.5). Le résultat principal concernant ce problème sera résumé dans le théorème ci-dessous.

Dans la suite, nous noterons $\varphi$ (resp. $\Phi$), la densité (resp. la fonction de répartition) de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$. De manière explicite,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy.$$

**Théorème 3.2.1** *(Puissance asymptotique)*

Supposons que $\psi$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, et que la première valeur propre $\lambda_1$, liée au [D.K.L.] du processus $\{\sqrt{\psi(t)}B(t) : 0 \le t \le 1\}$, vérifie :

$$\lambda_1 > \sqrt{2}\lambda_i \quad \forall\, i = 5, 6, \dots .$$

Alors, pour tout entier $k = 1, 2 \ldots,$

$$\mathbb{P}\Big(w^2_{(\delta,\psi)} \leq w_\alpha\Big) =$$
$$\Phi\big(\frac{\eta}{D}\big) + \frac{1}{D}\sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m}{2^m m!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\Big\{\varphi\big(\frac{x}{D}\big)\mathbb{E}\Big(T^m \mid S = x\Big)\Big\}\Big|_{x=\eta} + \varepsilon_k(\eta),$$

où le reste $\varepsilon_k(.)$ vérifie (voir les expressions de $D^2$ et $\Lambda$ dans la page 90)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varepsilon_k(x)| \leq \frac{C}{\Big(D^2 - \frac{\Lambda}{\lambda_1}\Big)^{\frac{k+1}{2}}}, \tag{3.2.6}$$

et $C$ est une constante définie par

$$C := \frac{M}{(k-1)!}\Big\{\frac{\tau_0^{k+1}\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{2^{(k-\frac{1}{2})}(k+1)}\Gamma\big(\frac{3}{2}\big) + \frac{2^{\frac{3}{2}}\lambda_1^{k+\frac{5}{2}}}{k+1}\Gamma\big(k+\frac{5}{2}\big)\Big\},$$

*avec*

$$M := \frac{2^{\frac{k+3}{2}}\Gamma\big(\frac{k+1}{2}\big)\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{e}}{\big(2\pi\big)^2}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_{2k+3}}\Big)^{k+1} I_k,$$

*où*

$$I_k := \int_0^{+\infty} \prod_{j=2k+4}^{\infty} \big[1+(2ua_j)^2\big]^{-\frac{1}{4}} du < \infty \quad \text{et} \quad a_j := \frac{\lambda_1\lambda_j}{\lambda_1 - \lambda_j} \quad \forall j \geq 2k+4.$$

*Cas pratiques*

**1)** Pour $k = 1$, nous obtenons

$$\mathbb{P}\Big(w^2_{(\delta,\psi)} \leq w_\alpha\Big) = \Phi\Big(\frac{\eta}{D}\Big) + \frac{\Lambda}{2D^3}\Big[1 - \big(\frac{\eta}{D}\big)^2\Big]\varphi\Big(\frac{\eta}{D}\Big) + \varepsilon_1(\eta).$$

**2)** Si nous remplaçons $\delta(.)$ par $a\delta(.)$, (avec $a \geq 0$), nous avons

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varepsilon_k(x)| = o\big(a^{-\frac{k+1}{2}}\big) \quad \text{lorsque } a \to \infty. \tag{3.2.7}$$

*Exemple 3.2.1*

La fonction de pondération $\psi(t) = t^{2\beta}$ $(\beta \geq 0)$ remplit toutes les conditions souhaitées.

La preuve de ce théorème sera donnée dans le paragraphe suivant.□

## 3.3 Preuve du théorème 3.2.1.

La preuve du théorème 3.2.1 repose sur les lemmes suivants. Ici, nous reprenons les notations des éléments définis dans les paragraphes précédents (voir la page 90).

**Lemme 3.3.1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $X = (\xi_n, S)$ suit la loi binormale de moyenne

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et de matrice de variance} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\lambda_n} g_n \\ \sqrt{\lambda_n} g_n & D^2 \end{bmatrix}.$$

La loi de $\xi_n/S = s$ est une loi normale d'espérance

$$\mathbb{E}[\xi_n/S = s] = \frac{\sqrt{\lambda_n} g_n}{D^2} s = \frac{\rho}{D} s$$

et de variance

$$\mathbb{V}ar[\xi_n/S = s] = (1 - \rho^2).$$

Nous déduisons de ceci que la densité conditionnelle de $\xi_n$ sachant $S = s$ est donnée par

$$f_S(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ - \frac{(t - \frac{\rho}{D} s)^2}{2(1-\rho^2)} \Big\} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

**Preuve.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a (voir l'annexe B)

$$\begin{aligned} X &= [\xi_n, S] \\ &= [\xi_n, \sqrt{\lambda_n} g_n \xi_n + \sum_{k \neq n} \sqrt{\lambda_k} g_k \xi_k] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{\lambda_n} g_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_n \\ \sum_{k \neq n} \sqrt{\lambda_k} g_k \xi_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Or, puisque les variables aléatoires $\xi_n$ et $\sum_{k \neq n} \sqrt{\lambda_k} g_k \xi_k$ sont normales et indépendantes, alors le vecteur $\begin{bmatrix} \xi_n \\ \sum_{k \neq n} \sqrt{\lambda_k} g_k \xi_k \end{bmatrix}$ est gaussien. De plus, en remarquant que le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{\lambda_n} g_n & 1 \end{bmatrix}$ est non nul, nous en déduisons que $[\xi_n, S]$ suit la loi binormale de moyenne $\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et de matrice de covariance

$$\begin{aligned}\Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\lambda_n} g_n \\ \sqrt{\lambda_n} g_n & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sum_{k \neq n} \lambda_k g_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\lambda_n} g_n \\ \sqrt{\lambda_n} g_n & D^2 \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\lambda_n} g_n \\ \sqrt{\lambda_n} g_n & D^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi, par identification selon l'annexe B, nous obtenons

$$\rho = \frac{\sqrt{\lambda_n} g_n}{D}, \quad \mathbb{E}[\xi_n/S] = \frac{\rho}{D} S \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar[\xi_n/S] = (1 - \rho^2).$$

Par conséquent, la densité conditionnelle de $\xi_n$ sachant $S = s$ peut s'écrire

$$f_S(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ - \frac{(t - \frac{\rho}{D} s)^2}{2(1 - \rho^2)} \Big\} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \square$$

**Lemme 3.3.2**

Désignons par $\rho(t, s)$ la fonction densité jointe du vecteur aléatoire $(T, S)$. Alors, pour tout $k = 1, 2 \ldots,$ on a

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \Big| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \rho(t, s) \Big| \leq \frac{M}{\big(D^2 - \frac{\Lambda}{\lambda_1}\big)^{\frac{k+1}{2}}} \sqrt{t + \tau_0} \exp\Big( - \frac{t + \tau_0}{2\lambda_1} \Big) \quad \forall\, t \geq -\tau_0.$$

**Preuve.** La preuve de ce lemme sera reportée ultérieurement.$\square$

Nous sommes en mesure de prouver le théorème 3.2.1. En rappelant la forme de $w^2_{(\delta,\psi)}$, nous avons

$$\mathbb{P}\Big( w^2_{(\delta,\psi)} < w_\alpha \Big) = \mathbb{P}\Big( \frac{1}{2} T < \eta - S \Big) = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\Big( \frac{1}{2} T < \eta - s | S = s \Big) \varphi\Big( \frac{s}{D} \Big) ds.$$

Par changement de variable $u = \eta - s$, nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(w^2_{(\delta,\psi)} < w_\alpha\big) &= \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}T < u|S = \eta - u\Big)\varphi(\frac{\eta-u}{D})du \\
&= \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}T < u|S = \eta - u\Big)\varphi(\frac{\eta-u}{D})du + \\
&\quad \frac{1}{D}\int_{0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}T < u|S = \eta - u\Big)\varphi(\frac{\eta-u}{D})du \\
&= \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}T < u|S = \eta - u\Big)\varphi(\frac{\eta-u}{D})du + \\
&\quad \frac{1}{D}\int_{0}^{+\infty} \Big\{1 - \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}T \geq u|S = \eta - u\Big)\Big\}\varphi(\frac{\eta-u}{D})du \\
&= \Phi(\frac{\eta}{D}) + \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}T < u|S = \eta - u\Big)\varphi(\frac{\eta-u}{D})du - \\
&\quad \frac{1}{D}\int_{0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}T \geq u|S = \eta - u\Big)\varphi(\frac{\eta-u}{D})du \\
&= \Phi(\frac{\eta}{D}) + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{2u} \rho(t, \eta - u)dtdu \qquad (3.3.8) \\
&- \int_{0}^{+\infty}\int_{2u}^{+\infty} \rho(t, \eta - u)dtdu.
\end{aligned}
$$

Puisque la fonction $x \to \rho(t, x)$ est de $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en posant $a = \eta$, $b = \eta - u$ et $\rho_m(t, \eta) = \frac{\partial^m}{\partial x^m}\rho(t, x)\big|_{x=\eta}$, nous obtenons à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral

$$
\rho(t, \eta - u) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-u)^m}{m!}\rho_m(t, \eta) + \frac{(-u)^k}{(k-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{k-1}\rho_k\big(t, \eta - u\theta\big)d\theta. \qquad (3.3.9)
$$

D'après (3.3.8)-(3.3.9), nous constatons que

$$
\mathbb{P}(w^2_{(\delta,\psi)} < w_\alpha) = \Phi(\frac{\eta}{D}) +
$$

$$
\sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m}{m!}\Big\{\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{2u} u^m\rho_m(t, \eta)dtdu - \int_{0}^{+\infty}\int_{2u}^{+\infty} u^m\rho_m(t, \eta)dtdu\Big\} + \varepsilon_k(\eta), \qquad (3.3.10)
$$

où le reste $\varepsilon_k(.)$ est donné par

$$\varepsilon_k(\eta) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \Big\{ \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{2u} (-u)^k \rho_k\big(t, \eta - u\theta\big) dt du - \int_{0}^{+\infty} \int_{2u}^{+\infty} (-u)^k \rho_k\big(t, \eta - u\theta\big) dt du \Big\} d\theta . \tag{3.3.11}$$

Considérons $\rho(t|\eta)$ la densité conditionnelle de la variable aléatoire $T$ sachant $S = \eta$. Nous avons donc

$$\rho(t, \eta) = \frac{1}{D} \varphi(\frac{\eta}{D}) \rho(t|\eta).$$

En utilisant le lemme 3.3.2, l'intégration par partie et la dérivation sous signe intégral, nous obtenons, après une simplification, le calcul des intégrales figurant dans (3.3.10)

$$\int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{2u} u^m \rho_m(t, \eta) dt du = -\frac{1}{2^{m+1}(m+1)} \int_{-\infty}^{0} u^{m+1} \rho_m\big(u, \eta\big) du$$

$$= \quad -\frac{1}{2^{m+1}(m+1)D} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \Big\{ \varphi(\frac{x}{D}) \int_{-\infty}^{0} u^{m+1} \rho\big(u|x\big) du \Big\} \Big|_{x=\eta} \tag{3.3.12}$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} \int_{2u}^{+\infty} u^m \rho_m(t, \eta) dt du = \frac{1}{2^{m+1}(m+1)} \int_{0}^{+\infty} u^{m+1} \rho_m(u, \eta) du$$

$$= \quad \frac{1}{2^{m+1}(m+1)D} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \Big\{ \varphi(\frac{x}{D}) \int_{0}^{+\infty} u^{m+1} \rho\big(u|x\big) du \Big\} \Big|_{x=\eta} . \tag{3.3.13}$$

En remplaçant (3.3.12) et (3.3.13) dans (3.3.10), nous obtenons aisément

$$\mathbb{P}\Big( w^2_{(\delta,\psi)} < w_\alpha \Big) =$$

$$\Phi(\frac{\eta}{D}) + \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m}{2^m m!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} \Big\{ \varphi(\frac{x}{D}) \mathbb{E}\Big( T^m | S = x \Big) \Big\} \Big|_{x=\eta} + \varepsilon_k(\eta).$$

Pour le cas particulier ($k = 1$), nous obtenons

$$\mathbb{P}\Big( w^2_{(\delta,\psi)} < w_\alpha \Big) = \Phi(\frac{\eta}{D}) - \frac{1}{2D} \varphi(\frac{x}{D}) \mathbb{E}\Big( T | S = \eta \Big) + \varepsilon_1(\eta). \tag{3.3.14}$$

Or, d'après le théorème de la convergence monotone, nous obtenons

$$\mathbb{E}\big(T|S=\eta\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \mathbb{E}\big(\xi_j^2|S=\eta\big) - \tau_0.$$

Puisque la variable $\xi_j|S=\eta$ suit la loi normale (voir le lemme 3.3.1) d'espérance mathématique

$$\frac{\sqrt{\lambda_j}g_j}{D^2}\eta \qquad \text{et de variance} \quad 1-\frac{\lambda_j {g_j}^2}{D^2},$$

nous obtenons pour tout $j=1,2,\ldots,$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\xi_j^2|S=\eta\big) &= \mathbb{V}ar\big(\xi_j|S=\eta\big) + \Big[\mathbb{E}\big(\xi_j|S=\eta\big)\Big]^2 \\ &= 1-\frac{\lambda_j {g_j}^2}{D^2} + \frac{\lambda_j {g_j}^2}{D^2}\eta^2.\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(T|S=\eta\big) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \mathbb{E}\big(\xi_j^2|S=\eta\big) - \tau_0 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Big[1-\frac{\lambda_j {g_j}^2}{D^2} + \frac{\lambda_j {g_j}^2}{D^4}\eta^2\Big] - \tau_0 \\ &= \Big[-\frac{\Lambda}{D^2}+\frac{\Lambda}{D^4}\eta^2\Big] = \Big[(\frac{\eta}{D})^2-1\Big]\frac{\Lambda}{D^2}.\end{aligned}$$

Si nous remplaçons cette dernière égalité dans (3.3.14), nous obtenons la formule paticulière du théorème.□

On s'occupe maintenant du reste $\varepsilon_k(\eta)$ défini dans (3.3.11). Nous avons

$$|\varepsilon_k(\eta)| \leq \frac{1}{(k-1)!}\sup_{\theta\in[0,1]}\Big|\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{2u}(-u)^k\rho_k\big(t,\eta-u\theta\big)dtdu - \\ \int_{0}^{+\infty}\int_{2u}^{+\infty}(-u)^k\rho_k\big(t,\eta-u\theta\big)dtdu\Big|. \tag{3.3.15}$$

À l'aide du lemme 3.3.2 et le fait que $\rho(t,\eta)=0$ pour tout $t\leq -\tau_0$, nous obtenons après une petite simplification

$$|\varepsilon_k(\eta)| \leq \frac{M}{(k-1)!\big(D^2-\frac{\Lambda}{\lambda_1}\big)^{\frac{k+1}{2}}}\Big\{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{0}\int_{-\tau_0}^{2u}(-u)^k\sqrt{t+\tau_0}\exp\big(-\frac{t+\tau_0}{2\lambda_1}\big)dtdu$$

$$+\int_0^{+\infty}\int_{2u}^{+\infty} u^k\sqrt{t+\tau_0}\exp\big(-\frac{t+\tau_0}{2\lambda_1}\big)dtdu\Big\}.$$

En utilisant l'intégration par partie de ces deux intégrales, nous obtenons,

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{0}\int_{-\tau_0}^{2u}(-u)^k\sqrt{t+\tau_0}\exp(-\frac{t+\tau_0}{2\lambda_1})dtdu =$$

$$\frac{1}{2^{k+1}(k+1)}\int_0^{\tau_0}(\tau_0-t)^{k+1}\sqrt{t}\exp(-\frac{t}{2\lambda_1})dt \leq \frac{\tau_0^{k+1}\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{2^{(k-\frac{1}{2})}(k+1)}\Gamma(\frac{3}{2}).$$

Et

$$\int_0^{+\infty}\int_{2u}^{+\infty} u^k\sqrt{t+\tau_0}\exp(-\frac{t+\tau_0}{2\lambda_1})dtdu =$$

$$\frac{1}{2^{k+2}(k+1)}\int_{\tau_0}^{+\infty}(t-\tau_0)^{k+1}\exp(-\frac{t}{2\lambda_1})dt \leq \frac{2^{\frac{3}{2}}\lambda_1^{k+\frac{5}{2}}}{k+1}\Gamma(k+\frac{5}{2}).$$

Ces deux inéqualités nous permettent donc d'avoir aisément l'inégalité (3.2.6) ; et nécessitent la constante

$$C = \frac{M}{(k-1)!}\Big\{\frac{\tau_0^{k+1}\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{2^{(k-\frac{1}{2})}(k+1)}\Gamma(\frac{3}{2}) + \frac{2^{\frac{3}{2}}\lambda_1^{k+\frac{5}{2}}}{k+1}\Gamma(k+\frac{5}{2})\Big\}.$$

Enfin, le théorème 3.2.1 est complètement prouvé.□

**Preuve du lemme 3.3.2.** Pour démontrer ce lemme, nous utiliserons le théorème de dérivation sous signe intégral. Pour cela nous essayerons de trouver une fonction intégrable $A$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\kappa(t,s)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(t,u,v)dudv < \text{à une constante bien déterminée.}$$

Ici, $\kappa(t,s)$ désignera la densité jointe du vecteur aléatoire

$$(T_0, S) := (T+\tau_0, S).$$

Dans un premier temps, nous remarquons que $\rho(t,s) = \kappa(t+\tau_0, s)$ et nous reprendrons la méthode utilisée par Zolotarev (voir [99]). Pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, nous considérons la transformation de Laplace

$$\mathbb{E}\exp(-xT_0 - yS) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-xt-ys)\kappa(t,s)dtds = \exp\big(\psi(x,y)\big),$$

où

$$\psi(x,y) := -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\log\big(1+2x\lambda_j\big) + \frac{1}{2}y^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j g_j^2}{1+2x\lambda_j}.$$

La formule d'inversion de la transformation de Laplace dans $\mathbb{R}^2$ nous permet d'écrire, pour tout $c_1, c_2, s \in \mathbb{R}$ et $t > 0$,

$$\kappa(t,s) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\exp\Big(tx+sy+\psi(x,y)\Big)dxdy.$$

En particulier, pour $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{2\lambda_1}+\frac{1}{2t}$, $x = c_2 + \frac{iu}{t}$ et $y = iv$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\kappa(t,s) = {} & \frac{t^{-1}}{(2\pi)^2}\exp\Big\{\frac{1}{2}-\frac{t}{2\lambda_1}\Big\}\times \\ & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{iu+isv-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\log u_j(t,u)+h(t,u,v)\Big\}dudv,\end{aligned}$$

où

$$u_j(t,u) = 1-\frac{\lambda_j}{\lambda_1}+\frac{\lambda_j}{t}+i\frac{2u\lambda_j}{t} \quad \text{et} \quad h(t,u,v) = -\frac{1}{2}v^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j g_j^2}{u_j(t,u)}. \qquad (3.3.16)$$

La fonction complexe $u_j(t,u)$ peut s'écrire sous la forme

$$u_j(t,u) = \ell_j(t,u)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(i\arctan\big(\frac{\frac{2u\lambda_j}{t}}{1-\frac{\lambda_j}{\lambda_1}+\frac{\lambda_j}{t}}\big)\Big),$$

avec

$$\ell_j(t,u) := \big(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_1}+\frac{\lambda_j}{t}\big)^2+(\frac{2u\lambda_j}{t})^2 \leq \big(1+\frac{\lambda_1}{t}\big)^2+(\frac{2u\lambda_1}{t})^2. \qquad (3.3.17)$$

Donc

$$\sum_{j=1}^{\infty}\log u_j(t,u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\log\ell_j(t,u)+i\sum_{j=1}^{\infty}\arctan\big(\frac{\frac{2u\lambda_j}{t}}{1-\frac{\lambda_j}{\lambda_1}+\frac{\lambda_j}{t}}\big) \qquad (3.3.18)$$

et la partie réelle de $h(t,u,v)$ s'écrit

$$\mathrm{Re}\big(h(t,u,v)\big) = -\frac{1}{2}v^2\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j g_j^2\Big\{\ell_j(t,u)\Big\}^{-1}\Big[1-\frac{\lambda_j}{\lambda_1}+\frac{\lambda_j}{t}\Big]. \qquad (3.3.19)$$

Notons par $\Upsilon(t,s,u,v)$ la dérivée partielle d'ordre $k \in \mathbb{N}$ par rapport à l'argument $s$ de la fonction située à l'intérieur de l'intégrale de $\kappa(t,s)$. Soit donc

$$\Upsilon(t,s,u,v) := \frac{t^{-1}}{(2\pi)^2} \exp\Big\{\frac{1}{2} - \frac{t}{2\lambda_1}\Big\}\times$$

$$(iv)^k \exp\Big\{iu + isv - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \log u_j(t,u) + h(t,u,v)\Big\}. \qquad (3.3.20)$$

En passant au module de la fonction complexe $\Upsilon(t,s,u,v)$, nous obtenons à l'aide de (3.3.18) et (3.3.19),

$$|\Upsilon(t,s,u,v)| = \frac{t^{-1}}{(2\pi)^2} \exp\Big\{\frac{1}{2} - \frac{t}{2\lambda_1}\Big\}\times$$

$$|v|^k \exp\Big\{-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty} \log \ell_j(t,u)\Big\} \exp\Big\{\mathrm{Re}\big(h(t,u,v)\big)\Big\}$$

$$= \frac{t^{-1}}{(2\pi)^2} \exp\Big(\frac{1}{2} - \frac{t}{2\lambda_1}\Big)\Big\{\ell_1(t,u)\Big\}^{-\frac{1}{4}} \times$$

$$\prod_{j=2}^{\infty}\Big\{\ell_j(t,u)\Big\}^{-\frac{1}{4}} |v|^k \exp\Big\{\mathrm{Re}\big(h(t,u,v)\big)\Big\}. \qquad (3.3.21)$$

Posons, pour $j = 2, 3\ldots,$

$$\eta_j := 1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad r_j(t,u) := \Big[\big(1 + \frac{\lambda_j}{\eta_j t}\big)^2 + \big(\frac{2u\lambda_j}{\eta_j t}\big)^2\Big]^{-\frac{1}{4}}. \qquad (3.3.22)$$

Puisque la suite $(\eta_j)_j$ est croissante et converge vers 1 (car $(\lambda_j)_j$ est décroissante et converge vers 0), alors

$$\Big\{\ell_1(t,u)\Big\}^{-\frac{1}{4}} \le \big(\frac{\lambda_1}{t}\big)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \prod_{j=2}^{\infty}\Big\{\ell_j(t,u)\Big\}^{-\frac{1}{4}} \le \eta_2^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=2}^{\infty} r_j(t,u).$$

Ainsi

$$|\Upsilon(t,s,u,v)| \le A(t,u,v),$$

où

$$A(t,u,v) := \frac{t^{-1}}{(2\pi)^2} \exp\Big\{\frac{1}{2} - \frac{t}{2\lambda_1}\Big\}\big(\frac{\lambda_1}{t}\big)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\eta_2^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=2}^{\infty} r_j(t,u)|v|^k \exp\Big\{Re\big(h(t,u,v)\big)\Big\}. \tag{3.3.23}$$

Posons

$$\sigma := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j^2 \Big\{\ell_j(t,u)\Big\}^{-1}\Big[1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_1} + \frac{\lambda_j}{t}\Big].$$

Alors, $\mathrm{Re}\big(h(t,u,v)\big) = -\frac{\sigma}{2}v^2$, et à l'aide de (3.3.17), nous obtenons

$$\sigma \geq \Big[(1+\frac{\lambda_1}{t})^2 + (\frac{2u\lambda_1}{t})^2\Big]^{-1}\Big(D^2 - \frac{\Lambda}{\lambda_1}\Big). \tag{3.3.24}$$

C'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v|^k \exp\Big(\mathrm{Re}\big(h(t,u,v)\big)\Big)dv = 2\int_0^{+\infty} v^k \exp(-\frac{\sigma}{2}v^2)dv$$

$$\begin{aligned} &= 2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2})\sigma^{-\frac{k+1}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2})\Big[\big(1+\frac{\lambda_1}{t}\big)^2 + (\frac{2u\lambda_1}{t})^2\Big]^{\frac{k+1}{2}}\Big(D^2 - \frac{\Lambda}{\lambda_1}\Big)^{-\frac{k+1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

En posant $a_j := \frac{\lambda_j}{\eta_j}$, nous remarquons que, pour tout $2 \leq j \leq 2k+3$,

$$\eta_j^{-1} \geq \eta_{2k+3}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_j \geq \lambda_{2k+3}.$$

À l'aide des définitions de $\eta_j$ et $r_j(t,u)$ dans (3.3.22), nous obtenons

$$a_j \geq a_{2k+3} \quad \text{et} \quad r_j(t,u) \leq r_{2k+3}(t,u) \quad \forall\ 2 \leq j \leq 2k+3.$$

Donc

$$\prod_{j=2}^{\infty} r_j(t,u) = \prod_{j=2}^{2k+3} r_j(t,u) \prod_{j=2k+4}^{\infty} r_j(t,u)$$

$$\leq \Big[(1+\frac{a_{2k+3}}{t})^2 + (\frac{2ua_{2k+3}}{t})^2\Big]^{-\frac{k+1}{2}} \prod_{j=2k+4}^{\infty}\Big[1 + (\frac{2ua_j}{t})^2\Big]^{-\frac{1}{4}}. \tag{3.3.26}$$

En utilisant (3.3.25) et (3.3.26), nous avons la majoration suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=2}^{\infty} r_j(t,u)|v|^k \exp\Big(\mathrm{Re}\big(h(t,u,v)\big)\Big)dudv \leq$$

$$\frac{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\big(\frac{k+1}{2}\big)}{\big(D^2 - \frac{\Lambda}{\lambda_1}\big)^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\omega(t,u)\Big)^{\frac{k+1}{2}} \prod_{j=2k+4}^{\infty}\Big[1 + (\frac{2ua_j}{t})^2\Big]^{-\frac{1}{4}} du, \tag{3.3.27}$$

où la fonction

$$\omega(t,u) := \frac{(t+\lambda_1)^2 + (2u\lambda_1)^2}{(t+a_{2k+3})^2 + (2ua_{2k+3})^2}.$$

Cette fonction vérifie, sous la condition du théorème : $\lambda_1 > \sqrt{2}\lambda_j$, pour tout $j \geq 5$,

$$\omega(t,u) \leq (\frac{\lambda_1}{a_{2k+3}})^2 \leq (\frac{\lambda_1}{\lambda_{2k+3}})^2. \tag{3.3.28}$$

Cette inégalité implique que, en posant

$$I_k := \int_0^{+\infty} \prod_{j=2k+4}^{\infty} \left[1 + (2ua_j)^2\right]^{-\frac{1}{4}} du < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\omega(t,u)\Big)^{\frac{k+1}{2}} \prod_{j=2k+4}^{\infty} \left[1 + (\frac{2ua_j}{t})^2\right]^{-\frac{1}{4}} du \leq 2t\big(\frac{\lambda_1}{\lambda_{2k+3}}\big)^{k+1} I_k. \tag{3.3.29}$$

Finalement, d'après (3.3.23)-(3.3.29), nous concluons que

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |\Upsilon(t,s,u,v)| \leq A(t,u,v) \tag{3.3.30}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(t,u,v)dudv \leq \frac{M}{(D^2 - \frac{\Lambda}{\lambda_1})^{\frac{k+1}{2}}} \sqrt{t}\exp(-\frac{t}{2\lambda_1}) < \infty. \tag{3.3.31}$$

La constante $M$ est déterminée donc par

$$M = 2^{\frac{k+3}{2}} (2\pi)^{-2} \Gamma\big(\frac{k+1}{2}\big)\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{e}\big(\frac{\lambda_1}{\lambda_{2k+3}}\big)^{k+1} I_k.$$

Enfin, comme

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\kappa(t,s)| &= |\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(t,s,u,v)dudv| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Upsilon(t,s,u,v)|dudv \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} |\Upsilon(t,s,u,v)|dudv \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(t,u,v)dudv \\
&\leq \frac{M}{(D^2 - \frac{\Lambda}{\lambda_1})^{\frac{k+1}{2}}} \sqrt{t}\exp(-\frac{t}{2\lambda_1}) < \infty,
\end{aligned}$$

alors

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |\frac{\partial^k}{\partial s^k}\kappa(t,s)| \leq \frac{M}{(D^2-\frac{\Lambda}{\lambda_1})^{\frac{k+1}{2}}}\sqrt{t}\exp(-\frac{t}{2\lambda_1}) < \infty.$$

Conclusion : puisque $\rho(t,s) = \kappa\big(t+\tau_0, s\big)$ pour tout $t \geq -\tau_0$, alors le lemme est complètement prouvé.$\square$

# Annexe A

# Résultats fondamentaux sur quelques fonctions spéciales

Dans cet annexe, nous présentons les résultats les plus utiles que nous avons exploités dans cette thèse.

## A.1 Fonctions de Legendre

L'équation différentielle homogène

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + \big(n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\big) = 0 \tag{A.1.1}$$

possède les solutions particulières $B_n^m$ et $D_n^m$ dites fonctions de legendre de première et de seconde espèce respectivement. Lorsque la variable $z$ appartient à l'intervalle $(0,1)$, on note ces fonctions $P_n^m$ (fonction de première espèce) et $Q_n^m$ (fonction de seconde espèce). Elles vérifient, pour tout $x \in (0,1)$, l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \big(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\big) = 0. \tag{A.1.2}$$

Une expression explicite de $P_n^m$ (voir Robin (1959) formule (91) page 52 ou Magnus et al. (1966) page 166-174) est donnée par :

$$P_n^m(x) = \begin{cases} \Gamma(1-m)^{-1}(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{m}{2}} F(-n, 1+n, 1-m, \frac{1-x}{2}), & \text{si } m \neq 1,2,... \\ (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), & \text{si } m = 1,2,... \end{cases}$$

où $F$ désigne la fonction Hypergéometrique

$$F(a,b,c,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k} z^k,$$

où $(x)_k = x(x+1)...(x+k-1)$ désigne le symbole de Pochhammer.
Pour tout $x \in (0,1)$ et $k = 0, 1, ...$, posons

$$P_{m+k}^{-m}(x) = \frac{(-1)^k}{2^{m+k}\Gamma(m+k+1)}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^{m+k}. \tag{A.1.3}$$

Les fonctions du système $\{P_{m+k}^{-m} : k = 0, 1, ...\}$ sont orthogonales et vérifiant la relation suivante (voir Robin (1959) formule (357) page 183) :

$$\int_{-1}^{1} P_{m+k}^{-m}(x)P_{m+l}^{-m}(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ \frac{2k!}{(2m+2k+1)\Gamma(2m+k+1)}, & \text{si } k = l. \end{cases} \tag{A.1.4}$$

## A.2 Fonctions de Bessel

Pour une consante $\upsilon \in \mathbb{R}$, nous désignons par $J_\upsilon(.)$ (respectivement $Y_\upsilon(.)$) la fonction de Bessel de premier ordre (respectivement de deuxième ordre ) d'indice $\upsilon$. Nous rappelons quelques propriétés importantes de ces fonctions (voir [60] et [95] pour plus en détails). L'équation différentielle suivante

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \upsilon^2)y = 0 \tag{A.2.5}$$

admet des solutions fondamentales sur $]0, \infty[$ de la forme

$$y(x) = Cx^\upsilon \sum_{k\geq 0} a_k x^k,$$

où $C$ et $a_k$ sont des constantes réelles. Nous référons à [1], ces solutions sont proportionnelles aux fonctions de Bessel $J_\upsilon(.)$ et $Y_\upsilon(.)$ que nous allons définir explicitement. Pour tout $\upsilon \in \mathbb{R}$, nous avons

$$J_\upsilon(x) = \frac{(\frac{1}{2}x)^\upsilon}{\Gamma(\upsilon+1)}F_1(\upsilon+1, -\frac{1}{4}x^2) = (\frac{1}{2}x)^\upsilon \sum_{k\geq 0}\frac{(-\frac{1}{4}x^2)^k}{\Gamma(\upsilon+k+1)\Gamma(k+1)}, \tag{A.2.6}$$

où la fonction Hypergéométrique $F_1(.,.)$ définie par

$$F_1(b,z) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(b)_k}\frac{z^k}{k!} \quad \forall\, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, \tag{A.2.7}$$

avec

$$\begin{cases} (b)_0 = 1, \\ (b)_k = b(b+1)...(b+k-1), \ k \geq 1. \end{cases}$$

*Remarque A.2.1*

Pour $\upsilon \geq 0$ et $x \geq 0$, la fonction de Bessel $J_\upsilon(.)$ est bornée et vérifie l'inégalité suivante (voir théorème 8, p. 21 dans [82]) :

$$|J_\upsilon(x)| \leq \min\{1, \frac{(\frac{x}{2})^\upsilon}{\Gamma(\upsilon+1)}\}. \tag{A.2.8}$$

De plus, si la constante $\upsilon \neq n$ n'est pas entier, les deux fonctions $J_\upsilon(.)$ et $J_{-\upsilon}(.)$ sont linéairement indépendantes et solutions de l'équation (A.2.5). Dans le cas où $\upsilon = n$ est un entier, $J_n(.)$ et $J_{-n}(.)$ sont linéairement dépendantes vérifiant la relation suivante :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{A.2.9}$$

## A.3 Quelques fonctions de Bessel particulières

Nous donnons quelques formes explicites pour les fonctions de Bessel $J_{m+\frac{1}{2}}(.)$, où l'entier relatif $m = -1, 0, 1, ...$
Pour $m = -1$, nous avons

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x),\ \ J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x). \tag{A.3.10}$$

Pour $m \geq 0$,

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^m x\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\frac{\sin(x)}{x}). \tag{A.3.11}$$

En général, pour tout entier $m \geq -1$, la fonction $J_{m+\frac{1}{2}}(.)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}J_{m+\frac{1}{2}}(x) = Q_m(\frac{1}{x})\sin(x) - P_m(\frac{1}{x})\cos(x), \tag{A.3.12}$$

où les polynômes $Q_m(.)$ et $P_m(.)$ vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$P_{-1}(u) = -1, Q_{-1}(u) = 0, P_0(u) = 0, Q_0(u) = 1, \tag{A.3.13}$$

$$Q_{m+1}(w) = (2m+1)wQ_m(w) - Q_{m-1}(w), \tag{A.3.14}$$

$$P_{m+1}(w) = (2m+1)wP_m(w) - P_{m-1}(w). \tag{A.3.15}$$

Maintenant, nous nous intéressons à la définition de la fonction $Y_\upsilon(.)$ (voir th. 8, pp. 21 [82]).
Si l'indice $\upsilon \neq n$ n'est pas un entier relatif, pour tout $x > 0$, nous avons

$$Y_\upsilon(x) = \frac{J_\upsilon(x)\cos(\upsilon\pi) - J_{-\upsilon}(x)}{\sin(\upsilon\pi)}.$$

Si l'indice $\upsilon = n$ est un entier naturel, nous avons

$$Y_\upsilon(x) = \lim_{\upsilon \to n} \frac{J_\upsilon(x)\cos(\upsilon\pi) - J_{-\upsilon}(x)}{\sin(\upsilon\pi)} = \frac{2}{\pi} J_n(x)[\gamma + \log(\frac{x}{2})] +$$

$$-\frac{1}{\pi}(\frac{x}{2})^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!}(\frac{x^2}{4})^m - \frac{1}{\pi}(\frac{x}{2})^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{x^2}{4})^m}{m!(m+n)!}\{\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\},$$

où $\gamma = 0.577215...$ désigne la constante d'Euler.
Au voisinage de zéro, pour tout $\upsilon > 0$, la fonction $Y_\upsilon(.)$ s'écrit

$$Y_\upsilon(x) = (1 + \circ(1)) \frac{(\frac{1}{2}x)^{-\upsilon}}{\Gamma(1-\upsilon)sin(\upsilon\pi)} = (1 + \circ(1)) \frac{\Gamma(\upsilon)}{\pi} (\frac{1}{2}x)^{-\upsilon} \text{ lorsque } x \downarrow 0, \tag{A.3.16}$$

où la fonction Gamma vérifie $\Gamma(\upsilon)\Gamma(1-\upsilon) = \pi / \sin \upsilon\pi$.
D'après (A.2.6) (voir aussi [60]), nous avons, pour tout $\upsilon > 0$, la relation de récurrence suivante :

$$J_{\upsilon+1}(x) = \frac{2\upsilon}{x} J_\upsilon(x) - J_{\upsilon-1}(x) \ \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{A.3.17}$$

Nous dérivons (A.2.7), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x} F_1(b, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(b)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{b} F_1(b+1, x). \tag{A.3.18}$$

Nous aurons donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} J_\upsilon(x) = \frac{\upsilon}{x} J_\upsilon(x) - J_{\upsilon+1}(x) &= J_{\upsilon-1}(x) - \frac{\upsilon}{x} J_\upsilon(x) \\ &= \frac{1}{2}\{J_{\upsilon-1}(x) - J_{\upsilon+1}(x)\}. \end{aligned} \tag{A.3.19}$$

En particulier, nous remarquons que, pour tout $x > 0$

$$J_\upsilon(x) = 0 \Longleftrightarrow J_{\upsilon-1}(x) = -J_{\upsilon+1}(x) = J'_\upsilon(x) \tag{A.3.20}$$

et

$$J'_\upsilon(x) = 0 \Longrightarrow J_{\upsilon-1}(x) = J_{\upsilon+1}(x) = \frac{\upsilon}{x} J_\upsilon(x). \tag{A.3.21}$$

Pour $\upsilon > -1$, (voir [95], p. 479) l'équation $J_\upsilon(z) = 0$ admet une infinité de solutions positives croissantes, notées $0 < z_{\upsilon,1} < z_{\upsilon,2} < \dots$ . Ces racines sont intercalées avec celles de l'équation $J_{\upsilon+1}(z) = 0$ de la manière suivante :

$$0 < z_{\upsilon,1} < z_{\upsilon+1,1} < z_{\upsilon,2} < z_{\upsilon+1,2} < z_{\upsilon,3} \dots . \tag{A.3.22}$$

Par exemple, pour $\upsilon = \mp\frac{1}{2}$, nous avons

$$z_{\frac{1}{2},j} = \pi j \quad \text{et} \quad z_{-\frac{1}{2},j} = (j - \frac{1}{2})\pi \quad \text{pour tout } j = 1, 2 \dots .$$

**Proposition A.3.1**

Les racines $z_{v,j}$ vérifient les propiétés suivantes.

**a)** La fonction $v \to z_{v,j}$ est continue et croissante sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

**b)** Lorsque $j \to \infty$, nous avons

$$z_{v,j} = \Big\{j + \frac{1}{2}\big(v - \frac{1}{2}\big)\Big\}\pi - \frac{4v^2 - 1}{8\Big\{j + \frac{1}{2}\big(v - \frac{1}{2}\big)\Big\}\pi} + O(\frac{1}{j^3}). \quad \text{(A.3.23)}$$

**c)** En particulier,

$$z_{v,j} > z_{v,1}\sqrt{2} \quad \text{pour tout} \quad j \geq 5. \quad \text{(A.3.24)}$$

**Preuve.** voir [95] chapitre 5, page 478-521 et [60] page 96 .□

Pour tout $z > 0$, il y a une autre expression pour la fonction $J_v(.)$ qui vérifie les équalités suivantes (voir [95], p. 498) :

$$J_v(z) = \frac{(\frac{z}{2})^v}{\Gamma(v+1)} \prod_{k\geq 1}\{1 - \frac{z^2}{z_{v,k}^2}\} \quad \text{(A.3.25)}$$

et

$$J_{v+1}(z) = -zJ_v(z)\{\sum_{k\geq 1} \frac{1}{z_{v,k}(z - z_{v,k})} - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{z_{v,k}(z + z_{v,k})}\}. \quad \text{(A.3.26)}$$

Soient $a$, $b > 0$ $(a \neq b)$ et $v > -1$, nous avons toujours

$$\int_0^1 tJ_v(at)J_v(bt)dt = \frac{aJ_v(b)J'_v(a) - bJ_v(a)J'_{v+1}(b)}{b^2 - a^2} \quad \text{(A.3.27)}$$

$$= \frac{bJ_v(a)J_{v+1}(b) - aJ_v(b)J_{v+1}(a)}{b^2 - a^2}$$

$$= \frac{aJ_v(b)J_{v-1}(a) - bJ_v(a)J_{v-1}(b)}{b^2 - a^2}$$

et

$$\int_0^1 tJ_v^2(at)dt = \frac{1}{2}\{J_v^2(a) - J_{v-1}(a)J_{v+1}(a)\} \quad \text{(A.3.28)}$$

$$= \frac{1}{2}\{J_v^2(a) + J_{v+1}^2(a) - \frac{2v}{a}J_v(a)J_{v+1}(a)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{J_v^2(a) + J_{v-1}^2(a) - \frac{2v}{a}J_v(a)J_{v-1}(a)\}.$$

**Lemme A.3.1**

Soit $v > -1$. Alors, pour tous entiers $i, j \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\int_0^1 tJ_v(tz_{v,i})J_v(tz_{v,j})dt = 0, \text{ si } i \neq j \tag{A.3.29}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 tJ_v^2(tz_{v,j})dt &= \int_0^1 tJ_{v-1}^2(tz_{v,j})dt \\ &= \frac{1}{2}J_{v+1}^2(z_{v,j}) = \frac{1}{2}J_{v-1}^2(z_{v,j}).\end{aligned} \tag{A.3.30}$$

Remarquons que les deux fonctions $\sqrt{t}J_v(z_{v,i}t)$ et $\sqrt{t}J_v(z_{v,j}t)$ $(i \neq j)$ sont orthogonales dans $L^2[0,1]$.

**Preuve.** Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Prenons $a = z_{v,i} > 0$ et $b = z_{v,j} > 0$. Nous savons que $J_v(z_{v,k}) = J_v(z_{v,l}) = 0$. Donc, selon (A.3.27)-(A.3.28), nous obtenons aisément le lemme 1 .$\square$

Soient $\gamma > 0$ et $\beta > 0$ deux constantes données. Alors, l'équation différentielle

$$y'' + \gamma x^{2\beta}y = 0 \tag{A.3.31}$$

admet comme solutions sur $]0, \infty[$ les fonctions suivantes :

$$x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2(\beta+1)}}(\frac{\sqrt{\gamma}x^{\beta+1}}{\beta+1}) \text{ et } x^{\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{2(\beta+1)}}(\frac{\sqrt{\gamma}x^{\beta+1}}{\beta+1}). \tag{A.3.32}$$

Ces deux solutions sont linéairement indépendentes. Ce qui signifie que la solution générale de l'équation différentielle (A.3.31) est donnée par :

$$y(x) = Ax^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2(\beta+1)}}(\frac{\sqrt{\gamma}x^{\beta+1}}{\beta+1}) + Bx^{\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{2(\beta+1)}}(\frac{\sqrt{\gamma}x^{\beta+1}}{\beta+1}), \tag{A.3.33}$$

où $A$ et $B$ sont des constantes réelles.

# Annexe B

# Généralités sur les vecteurs aléatoires réels

## B.1 Changement de variables dans une densité

Soient $X = (X_1, \dots, X_p)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$ deux vecteurs aléatoires réels. On désigne par $f$ la densité de $X$. Effectuons le changement de variables aléatoires défini par :

$$Y_i = \varphi_i(X_1, \dots, X_p).$$

Les fonctions $\varphi_i$ telles que le passage de $(X_1, \dots, X_p)$ à $(Y_1, \dots, Y_p)$ est $C^1$-difféomorphisme. Nous désignerons, en abrégé, par $\varphi$ la transformation :

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \qquad Y = \varphi(X).$$

La densité du vecteur $Y$ s'obtient alors par la formule :

$$g(y) = \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{|\det J|},$$

où $\det J$, appelé Jacobien de la transformation, est tel que :

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_p}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_p} & \dots & \frac{\partial y_p}{\partial x_p} \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det(J)^{-1} = \det(J^{-1}).$$

La démonstration de cette propriété figure dans tous les ouvrages consacrés à l'intégration (changement de variable dans les intégrales multiples).

Si la transformation $\varphi$ est linéaire de matrice $A$ constante, $Y = AX$ (A doit être régulière) on a $\det J = |A|$. En particulier, si $A$ est orthogonale le Jacobien vaut 1.

## B.2 Fonction caractéristique

Soit $a$ un vecteur non aléatoire de composantes $(a_1, \dots, a_p)$.

**Définition** B.2.1

On appelle fonction caractéristique du vecteur aléatoire $X$ la fonction définie par :

$$\varphi_X(a) = \mathbb{E}\exp(ia'X) = \mathbb{E}\exp\big(i(a_1X_1 + ... + a_pX_p)\big).$$

**Théorème B.2.1**

*Les composantes $X_1, \dots, X_p$ de $X$ sont indépendantes si et seulement si la fonction caractéristiques de $X$ est égale au produit des fonctions caractéristiques de ses composantes :*

$$\varphi_X(a) = \prod_{i=1}^{p} \varphi_{X_i}(a_i).$$

Ce théorème signifie que la loi de $X$ est entièrement déterminée par celles de toutes les combinaisons linéaires de ses composantes.

**Définition** B.2.2

*On dit que le vecteur $X$ est gaussien à $p$ dimensions si toute combinaison linéaire de ses composantes $a'X$ suit une loi normale à une dimension.*

On remarquera que la normalité de chaque composante ne suffit nullement à définir un vecteur gaussien.

La fonction caractéristique de $X$ dont la matrice de covariance $\Sigma$ se déduit aisément (on supposera ici que $X$ est centré ce qui ne nuit pas à la généralité) comme suit :

$$\varphi_X(a) = \exp(-\frac{1}{2}a'\Sigma a).$$

## B.3 Espérance et matrice de covariance

**Définition** B.3.1

Si $\mu_i$ désigne $\mathbb{E}(X_i)$, on appelle par définition espérance de $X = (X_1, \dots, X_p)$ le vecteur

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ ... \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

La matrice de covariance, notée $\Sigma$, de $X$ est définie par

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_p) \\ . & \sigma_2^2 & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} = \mathbb{E}(XX') - \mu\mu'$$

c'est une matrice carrée symétrique d'ordre $p$.

Si les variables $X_i$ sont réduites, $\Sigma$ s'identifie avec la matrice de corrélation :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ . & 1 & \dots & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}.$$

# B.4 Transformations linéaires

Effectuons un changement de variable linéaire $Y = AX$ où $A$ est une matrice quelconque de constantes (pas nécessairement carrée), alors :

$$\mu_Y = A\mu \qquad \text{et} \qquad \Sigma_Y = A\Sigma A'.$$

En particulier, si $A$ est une matrice uniligne, $Y$ est alors une variable aléatoire unidimensionnelle. Si $a'$ désigne cette ligne,

$$Y = \sum_{i=1}^{p} a_i X_i \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y) = a'\Sigma a.$$

On a donc pour tout $a$, $a'\Sigma a \geq 0$. Car une variance est toujours positive.

# B.5 Densité de la loi normale à p dimensions

En général, on notera $N_p(\mu, \Sigma)$ la loi normale à $p$ dimensions d'espérance $\mu$ et de matrice de variance $\Sigma$. Celle-ci n'existe que lorsque $\Sigma$ est régulière.

### Théorème B.5.1

*Soit $X = (X_1, \dots, X_p)$ une variable aléatoire gaussienne dont l'espérance est égale à $\mu$ et la matrice de covariance est égale à $\Sigma$. Supposons que $\Sigma$ soit régulière. Alors, $X$ admet pour densité :*

$$f(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\Big\}.$$

En effet, $Y = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(X-\mu)$ est alors un vecteur gaussien dont les composantes sont centrées réduites et indépendantes. Donc, $Y$ a pour densité :

$$g(y) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y_i^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} y_i^2\big).$$

Il suffit alors d'appliquer la formule du changement de variable ; le jacobien $J$ vaut ici

$$\det(\Sigma^{\frac{1}{2}}) = \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

ce qui établit le résultat.

### B.5.1 Cas particulier de la loi normale à deux dimensions

Ici, on réduit la variable aléatoire $X = (X_1, X_2)$ à deux dimensions. Si l'on introduit $\rho$ coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables aléatoires réelles $X_1$ et $X_2$, on peut partitionner

$$\mu = (m_1, m_2) \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\det\Sigma = (\sigma_1\sigma_2)^2(1-\rho^2) \quad \text{et} \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{\det\Sigma}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, $X$ admet pour densité

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big[(\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + (\frac{y-m_2}{\sigma_2})^2\Big]\Big\}.$$

### B.5.2 Loi conditionelle

Si l'on cherche la loi du $X_1$ conditionnée par $X_2$, notée $X_1/X_2$, on a les résultats suivants (voir par exemple Filler [45]).

**Théorème B.5.2**

La loi de $X_1/X_2$ est une loi normale à une dimension :
- d'espérance : $\mathbb{E}[X_1/X_2] = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2 - m_2)$;

– de variance : $\mathbb{V}ar[X_1/X_2] = \sigma_1^2(1-\rho^2)$.

On constate que la variance conditionnelle ne dépend pas des valeurs prises par $X_2$.

La densité conditionnelle de $X_1$ sachant $X_2 = x_2$ est donnée donc par

$$f_{X_2}(x_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\frac{x_1 - m_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\Big)^2\Big\}.$$

# Bibliographie


[1] Abramowitz, M. and Stegum, I. A. (1965). Handbook of Mathematical Functions. *Dover, New York.*

[2] Adler, Robert J. (1990). An introduction to continuity, extrema, and related topics for general gaussien process. Vol **12** *of Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes-Monograph Series. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA,.*

[3] Anderson, T.W. and Darling, D. A.( 1952). Asymptotic theory of certain "goodness-of-fit" criteria based on stochastic processes. *Ann. Math. Statistics,* **23** 193-212.

[4] Anderson, T. W. (1954). Distribution of some integrals of certain Gaussian stochastic processes and the limiting distributions of some "goodness of fit" criteria. *Ann. Math. Stat.*, **25**, 1, pp. 174-175.

[5] Anderson, T.W. and Darling, D. A. ( 1954). A test of "goodness-of-fit". *J. Amer. Statist. Assoc.,* **49** 765-769.

[6] Araujo, A. and Giné, E. (1980). The Central Limit Theorem for real and Banach valued Random Variables. *Wiley, New York.*

[7] Aronszjn, N.( 1950). Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** p. 337-404.

[8] Ash, R. B. and Gardner, M. F. (1975). Topics in Stochastic Processes. *Academic Press, New York.*

[9] Bahadur, R. R. (1960a). On the asymptotic efficiency of tests and estimates. *Sankhya* **22** 229-52.

[10] Bahadur, R. R. (1960b). Stochastic comparison of tests. *Ann. Math. statist.* **31** 276-95.

[11] Bahadur, R. R. (1967). Rates of convergence of estimates and test statistics. *Ann. Math. Statist.* **38** 303-24.

[12] Bahadur, R. R. (1971). Some Limit Theorems in Statistics. *Philadelphia : SIAM.*

[13] Bahadur, R. R. and Raghavachari, M. (1972). Some asymptotic properties of Likelihood ratios on general sample spaces. *In Proc. 6th Berkeley Sympos. on Probab. Theory and Mathem. Statist.*, vol. **1**, *eds. L. Le Cam, J. Neyman, and E. L. Scott,* pp. 129-152. *Berkeley and Los Angeles : Univ. of California. Press.*

[14] Bahadur, R. R., Chandra, T. K. and Lambert.D. (1982). Some further properties of Likelihood ratios on general sample spaces. *In Proc. Indian Statist. Instit., Golden Jubilee Intern. Confer. On statistics : Applications and New Directions,* pp, 1-19. *Calcutta : Indian Statist. Institute.*

[15] Billingsley, Patrik. (1968). Convergence of probability measures. *John Wiley. Sons Inc., New York.*

[16] Bretagnolle, J. and Massart, P. (1989). Hungarian constructions from the non-asymptotic viewpoint. *Ann. Probab.,* **17** 239-256.

[17] Chernoff, H. (1952). A measure of asymptotic of efficiency for tests of hypothesis based on the sum of observations. *Ann. Math. Stat.*, **23** 493-507.

[18] Chibisov, D. M.(1964). Some theorems on the limiting behaviour of an empirical distribution function. *Trudy Mat. Inst. Steklov.,* **71** 104-112.

[19] Cochran, W. G. (1952). The $\chi_2$ goodness-of-fit test. *Ann. Math. Statist.* **23** 315-345.

[20] Cramér, H.( 1928). On the composition of elementary errors : *II, Statistical applications. Skand. Akt.,* **11** 141-180.

[21] Cramér, H. (1937). Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. *In Colloquium on theory of probability.*

[22] Csörgö, Miklos. and Horvath, Lajos.(1993). Weigted approximations in probability and statistics. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, With a forword by David Kendall.*

[23] Csörgö, M. and Révész.(1981). Strong Approximation in probability and statistics. *Academic Press, New York.*

[24] Csörgö, M., Csörgö, S., Horvath, L and Mason, D. M. (1986). Weighted empirical and quantile process. *Ann. Prob.* **14**, 31-85.

[25] Csörgö, M. and Horváth, L. (1986). Weighted approximations in probability and statistics. John Wiley and Sons.

[26] Csörgö, M. and Rreesz, P. (1978). Strong approximations of the quantile process. *Ann. Statist.* **6**, 882-894.

[27] Darling, D.A. (1955). The Cramér-Smirnov test in the parametric case. *Ann. Math. Statist.* **26**, 1-20.

[28] David, F.N. and Johnson, N.L. (1948). The probability integral transformation when parameters are estimated from the sample. *Biometrika* **35**, 182-190.

[29] Darling, D. A. (1957). The Kolmorogov-Smirnov, Cramér-von Mises tests. *Ann. Math. Statist.* **28** 823-838

[30] Deheuvels, P and Martynov, G.(2003). High Dimensional probability III. *Progress in probability,* Vol. **55**, 57-93.

[31] Deheuvels, P. (2005) Weighted multivariate Cramér-von Mises type statistics . Afrika Statistika **1** n°1, 114

[32] Deheuvels, P., Peccati, G. and Yor, M. (2006). On quadratic functionals of the Brownian sheet and related functionals . Stochastic Processes Appl. **116** 493-538.

[33] Del Barrio, E., Giné, E. and Utzet. (2005). Asymptotics for $L_2$ functionals of the empirical quantile process, with applications to tests of fit based on weighted Wasserstein distances. *Bernoulli* **11** 131-149.

[34] Donsker, D. (1952). Justification and extension of Doob's heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems. *Ann. Math. Stat.,* **23**, 2 PP. 277-281.

[35] Donsker, D. (1951). An invariance principale for certain probability limit theorems. *Mem. Math. Soc.,* 1951(6) : 12.

[36] Doob, J. L. (1949). Heuristic approche to the Kolmogorov-Smirnov theorems. *Ann. Math. Statistics,* **20** 329-344.

[37] Donati-Martin, C and Yor, M. (1997). Some Brownian functionals and their laws. *Ann. Probab.,* **25**(3) : 1011-1058.

[38] Donati-Martin, C. and Yor, M. (1991). Fubini's theorem for double Wiener integrals and the variance of the Brownian path. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.,* **27**(2) : 181-200.

[39] Donati-Martin, C. and Yor, M.(1991). Somme Brownian functionals and their laws. *Ann. Probab.,* **25**(2) : 181-200.

[40] Durbin, J. and Knott, M. (1972). Components of Cramér-Von Mises statistics. *I. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B,* **34** 290-307.

[41] Durbin, J. (1973). Distribution Theory for tests based on the sample distribution function. *Regional conference Series in applied Mathematics,* 9 S.I.A.M., Philadelphia.

[42] Durbin, J. (1973). Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated. *Ann. Statist.* **1**, 279-290.

[43] Durbin, J., Knott, M. and Taylor, C. (1975). Components of Cramér-Von Mises statistics. *II. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B,* **37** 216-237.

[44] Filippova, A. (1962). Mises theorem on asymptotic behavior of functionals of empirical distribution functions and its statistical applications. *Theory Prob. Applications,* **7** pp. 24-57 (English translation).

[45] Filler, W. (1967). Introduction of probability theory and its Applications. Vol. **2**, *Mir, Moscow [Russian translation].*

[46] Guichardet, A. (1989). Integration. *Analyse Hilbertienne.* Éditions Marketing.

[47] Guikhman, I. and Skorohod, A. (1980). Introduction à la théorie des processus aléatoires. *Editions Mir, Moscou. Traduit du russe par D. Embarek.*

[48] Giné, E. and Zinn, J. (1999). Some limit theorems for empirical processes. *Ann. Probab.,* **12** p. 929-989.

[49] Hoadley, A. B. (1967). On the probability of large deviations of functions of several empirical c.d.f's. *Ann. Math. Statist.* **38** 360-381.

[50] Hochstadt, H. (1989). Integral equations. *Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York. Reprint of the 1973 original, A Wiley-Interscience Publication.*

[51] Inglot, T. and Ledwina, T. (1990). On probabilities of excessive deviations for Kolmogorov-Smirnov, Cramér-Von Mises and chi-square statistics. *Ann. Stat.* **18** 1491-1495.

[52] Kiyosi Itô and Markiko Nisio.(1968). On the convergence of sums of independent Banach space valued random variable. *Osaka J. Math.,* **5**35-48.

[53] Kac, M., Kiffer, J. and Wolfowitz, J. (1955). On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. *Ann. Math. Statist.* **26** p. 189-211.

[54] Kac, M. and Siegert, A. J. F. (1947). An explicit representation of a stationary Gaussian process. *Ann. Math. Statist.* **18** 438-442.

[55] Kac, M. and Siegert, A. J. F. (1947). On the theory of noise in radio receivers with square law detectors. *J. Appl. Phys.,* **18** 383-397.

[56] Kac, M. (1951). On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proc. Second Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab.* 180-215.

[57] Karhunen, K. (1946). Zur Spektraltheorie stochastisher Prozesse. *Ann.Acad.Sci.Fennicae.Ser.A.I.Math-Phys.*1946(34) ; (7).

[58] Karhunen, K. (1947). Über lineare Methoden in der Wahrscheilichkeittrechung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math-Phyys.,* 1947(37) ;79,(1947).

[59] Komlós, J., Major, P. and Tusnády, G. (1976). An approximation of partial sums of independent r.v.'s and sample d.f., Part II. Z. *Warsch. Verv. Geb.* **34** 33-58.

[60] Korenev, B, G. (2002). Bessel Functions and their Applications. *Taylor and francis. London*

[61] Kullback, S. (1975). On chernoff-Savage statistics and sequential rank testes. *Ann. Statist.* **3** 825-845.

[62] Loève, M. (1946). Sur les fonctions aléatoires stationnaires de second ordre.

[63] Loève, M. (1946) Fonctions aléatoires de second ordre. *Revue Sci.,* **84** 195-206.

[64] Loève, M. (1946). Quelques propriétés des fonctions aléatoires de second ordre. *C. R. Acad.Sci. Paris,* **222** 469-470.

[65] Loève, M. (1978). Probability theory II. *Springer-Verlag, New York, fourth edition. Graduate Texts in Mathematics,* Vol.**46**.

[66] Martynov, G. V.(1975). Computation of the distribution function of quadratic forms in normal random variables. *Theor. Probab. Appl.* **20**(4) :797-809.

[67] Martynov, G. V. (1976). Calculation of the limit distributions of statisics for tests of normality of $w^2 - type$. *Teor. Verojatnost. i Primenen.,* **21**(1) :3-15.

[68] Martynov, G. V. (1977). Generalization of the Smirnov formula for the quadratic forms distributions. *Theor. Probab. Appl.* **22** 614-620.

[69] Martynov, G. V. (1978). Fredholm determinants for Kernels connected with the omega-squared test. *In adptive systems and their applications (Russian),* pages 92-97, 187. Nauka sibirsk. Otdel., Novosibirsk.

[70] Martynov, G. V. (1979). Calculation of the function of normal distribution. *In Probability theory. Mathematical statistics. Theoretical cybernetics,* Vol. **17** *(Russian), pages 57-84. Akad. Nauka SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. informatisii, Moscow.*

[71] Martynov, G. V. (1992). Statistical tests based on empirical processes and related question. *J. Soviet. Math.* **61** 2195-2275.

[72] Mogulsky, A. (1979). The law of the iterated logarithm in chung's form for function spaces. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.,* **24**(2) : 399-407.

[73] Neveu, J. (1968). Processus aléatoire gaussien. *Volume 1968 of Séminaire de Mathématiques Supérieures,* No. 34 (*Eté.* Les presses de l'université de Montréal, Montreal Quebec).

[74] Nikitin, Y. (1995). Asymptototic efficiency of non parametric tests. *Cambridge University Press, Cambridge.*

[75] Henze, N. and Nikitin, Y. (2000). A new approche to goodness-of-fit testing based on the integrated empirical process. *J. Nonparameter. Statist.,* **12**(3) : 391-416.

[76] O'Reilly, N. (1974). On the weak convergence of empirical process in supnorm metrics. *Ann. Probability,* **2** 642-651.

[77] Prokhorov, Y. (1956). The convergence of random processes and limit theorems of probability theory. *Theory Prob. Applications,* **1** pp. 157-214.

[78] Prokhorov, Y. and Statulevicius, V. (2000). Limit theorems of probability theory. *Springerverlag, Berlin. Tranlation of Probability theory.* **6** *(Russian), Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Probl. Mat. Fund. Naprav., 81, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz.*

[79] Raghavachari, M. (1970). On a theorem of Bahadur on the rate of convergence of test statistics. *Ann. Math. Statist.* **41** 1695-1699.

[80] Pycke, J.R. (2003). Multivariate extensions of the Anderson-Darling process. *Statistics & Probability Letters* **63** p. 387-399.

[81] Rodriguez, J. C. and Viollaz, A. J. (1995). A Cramér-Von Mises type goodness of fit test with asymetric weight function. *Commun. Statist. Theory. Methods,* **24**(4), pp. 1095-1120.

[82] Rainville, E. D. (1960). Special function.*Chelsea, New York.*

[83] Sato, H. (1992). Nuclearity of a nonnegative definite integral kernel on a separable metric space. *J. Theoret. Probab.,* **5**(2) : 349-353.

[84] Sanov, I. N. (1957). On probabilities of large deviations of random variables. *Matem. Sbornik in (Russian)* **42**(84) p. 11-44.

[85] Sato, H. (1992). Nuclearity of a nonnegative definite integral Kernel on a separable metric space. *J. Theoret. Probab.*, **5**(2) p. 349-353.

[86] Scott, W. F. (1999). A wieghted Cramér-Von Mises statistic, with some applications to clinical trials. *Commun. Statist. Theor. Methods.* V **28** pp. 3001-3008.

[87] Shorack, G. R, and Wellner, J. A. (1989). Empirical process with applications to statistics. *Wiley serie in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons., New York.*

[88] Skorokhod, A. V. (1956). Limit theorems for stochastic processes. *Theory Prob. Applications,* **1** pp. 261-290.

[89] Smirnov, N. V. (1936). Sur la distribution de $\omega^2$. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **202** 449-452.

[90] Smirnov, N. V. (1948). Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *Ann. Math. Statist.* **19** 279-281.

[91] Smirnov, N. V. (1949). On the Cramér-Mises criterion. *Uspehi Matem. Nauka (N; S)*, **4**(32) : 196-197.

[92] Sukhatme, S .(1972). Fredholm determinant of a positive definite kernel of a special type and its application. *Ann. Math. Statist.* **43**, 1914-1926.

[93] Von Mises, R. (1936). Die Gesetze der grossen Zahl für statistiche Funktionen Monatsh. *Math.,* **43** 105-128.

[94] Von Mises, R. (1931). Warscheinlichkeitsrechnung und Ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik. *Deuticke, Leipzig.*

[95] Watson, G, N. (1952). A Treatise on the theory of Bessel Functions. *Cambridge University Press, Cambridge.*

[96] Wenbo, V. Li. (1992). Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms. *J. Theory. Probab ;* **5**(1) ; 1-31.

[97] Wenbo, V. Li. (1992). Lim inf results for the Wiener process and its increments under the $L^2-$norm. *Probab. Theory Related Fields,* **92**(1) 69-90.

[98] Yor, M. (1991). Une explication du théorème de Ciesielski-Taylor. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.,* **27**(2) : 201-213.

[99] Zolotarev, V. M. (1961). A probability problem. *Theor. Verojatnost. i Primenen.,* **6** : 219-222.

**Abstract**. We consider in this paper goodness-of-fit tests of the null hypothesis that the underlying d.f. of a sample $F(.)$, belongs to a given family of distribution functions. We propose a method for deriving approximate values of the power of a weighted Cramér-von Mises type test of goodness of fit. Our method relies on Karhunen-Loève [K.L] expansions on $(0,1)$ for weighted Brownian bridges.

**Résumé**. Nous proposons dans ce document une méthode pour calculer approximativement, sous certaines suites d'alternatives locales, la puissance d'un test non paramétrique d'ajustement basé sur une statistique de Cramér-von Mises pondérée. Notre méthode repose sur le développement de Karhunen-Loève [K.L] sur $(0,1)$ d'un pont brownien pondéré.

**Mots clés** : Tests de type Cramér-von Mises, Tests d'ajustement, Puissance d'un test, Processus empirique, Convergence faible et en loi, Processus Gaussien, Développement de Karhunen-Loève.