

Étude mathématique et numérique du transport d'aérosols dans le poumon humain

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 décembre 2009

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'École Normale Supérieure de Cachan
(spécialité mathématique)

par

Ayman MOUSSA

Composition du jury

Directeurs :	Laurent DESVILLETES	Professeur, École Normale Supérieure de Cachan
	Marcel FILOCHE	Directeur de recherche CNRS, École Polytechnique
Rapporteurs :	Benoît DESJARDINS	Professeur associé, École Normale Supérieure
	Frédéric LAGOUTIÈRE	Professeur, Université Paris-Sud 11
Examineurs :	Laurent BOUDIN	Maître de conférences, UPMC
	Céline GRANDMONT	Chargée de recherche INRIA, Paris-Rocquencourt
	Bertrand MAURY	Professeur, Université Paris-Sud 11

Mis en page avec la classe thloria.

Merci ! شُكْرًا

Je tiens en premier lieu à remercier mes deux directeurs de thèse : Laurent Desvilletes et Marcel Filoche, pour leur disponibilité et les précieux conseils qu'ils ont pu me donner. J'ai connu Laurent tout d'abord comme enseignant, lors de mon arrivée dans l'École. J'ai retrouvé ses qualités pédagogiques durant ces trois années de thèse. À chacune de mes questions, il prenait le temps de fournir une réponse précise, ou une ébauche de démonstration même pour des résultats dont je comprenais plus tard qu'ils étaient classiques. Marcel m'a permis de renouer avec la physique que j'avais laissée depuis plusieurs années. Les expériences numériques qu'il m'a proposées ainsi que son interprétation concrète des résultats ont aidé à déceler de nombreuses erreurs présentes dans le code !

Je remercie Benoît Desjardins et Frédéric Lagoutière d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit et de l'avoir lu en détail, leurs remarques ont contribué à son amélioration. Je remercie également Bertrand Maury d'avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance et de l'avoir présidé. Laurent Boudin et Céline Grandmont m'ont souvent encouragé et aidé. Une partie du travail de cette thèse leur doit beaucoup, c'est donc un plaisir que de les compter parmi les membres de mon jury.

Durant ma thèse, j'ai eu la chance de faire partie de l'équipe-projet [re3](#) de l'INRIA Rocquencourt. Je remercie Jean-Frédéric Gerbeau, le responsable de cette équipe, de m'avoir accueilli, mais également d'avoir répondu à plusieurs reprises à mes questions de débutant en C++. Miguel Fernandez m'a de nombreuses fois aidé à me familiariser à l'environnement `LifeV`, merci à lui et à sa bonne humeur. Je pense également à Michaël Grasseau, la « force tranquille » qui maille et code (proprement !) plus vite que son ombre, merci pour tous ces coups de mains. Merci à Matteo et Nejib pour les conseils nombreux (et les talents de photographe du premier) et pour toutes les fois où ils ont aperçu des lignes de « amoussa » apparaître après un top sur leurs machines (paradis et dictus, mes amours). J'en profite pour remercier également les membres du bâtiment 16 qui ont contribué à faire de mes passages à l'INRIA autre chose que du développement en C- - : Julien, William (même si il n'est pas sortable), Annabelle (même si elle m'a snobé pour son film), Asven, Cristóbal, Franz, Nick, Dr Thomas...

J'ai rédigé une partie de ce manuscrit au CEMRACS, dans une atmosphère très agréable. Je remercie Vincent Calvez et Paul Vigneaux pour l'organisation de cette édition (et mon inscription tardive), Anne pour sa gestion de stock exemplaire (et pour avoir fait le déplacement pour ma soutenance !) et les personnes avec qui j'ai eu plaisir à travailler : Guillemette, Cristina, Florence, Alexis (nous le valons bien).

Même si j'ai souvent été amené à me déplacer, ma thèse s'est principalement déroulée au Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, dans d'excellentes conditions. Merci donc à Frédéric Pascal pour son accueil et les discussions intéressantes sur l'enseignement et la formation dans l'École.

J'ai bénéficié, pour mon monitorat, d'une grande liberté de travail ainsi que de conseils avisés : je remercie à cet égard ma tutrice pédagogique Claudine Picaronny. Préparer les différents travaux dirigés et/ou cours a toujours été un plaisir et j'en profite pour remercier tous les agrégatifs que j'ai eu l'occasion d'avoir en classe pour leur assiduité et leur questions intéressantes.

Je tiens également à remercier un certain nombre de personnes contribuant à l'atmosphère scientifique et humaine du laboratoire. Yves Meyer a toujours été disposé à répondre à mes questions, et je pense que c'est une véritable chance que d'avoir une telle mine de connaissances dans son laboratoire : merci à lui. J'ai à plusieurs reprises eu des discussions très intéressantes avec Alain Trouvé, que cela soit concernant l'enseignement ou les mouvements browniens, et cela a toujours été enrichissant. Merci également à Bernard Sapoval pour les brèves discussions, toujours remplies de nouvelles idées !

Dans des domaines très variés, Jean-François et Karine, et maintenant Jérôme, les organisateurs du séminaire du laboratoire, m'ont conseillé avec justesse (et le symbole \int sera pour moi à jamais associé à Karine). Merci à eux. Je remercie par ailleurs Pascal et Christophe pour tous les conseils informatiques dont j'ai pu bénéficier, et notamment pour l'ouverture du port 2332 ! Christophe, Nantes c'était un peu bidon comme excuse, mais je te pardonne, même si tu es désagréable. L'accueil au secrétariat a toujours été très chaleureux et je remercie à ce titre Carine, Micheline (2^e maman de tous les thésards !), Véronique

et Virginie pour leur disponibilité! Je n'oublie pas Sandra et ses commandes de livres éclairs (tu le méritais bien ce tiramisu!). Bien entendu, un labo ne serait rien sans ses doctorants, je pense donc à Éric (et son gâteau à tartiner), Aude (petite sœur!), Rafa, Zhong Wei, Julie (merci pour la musique classique pré-soutenance et le joli thème beamer), Adina, Benjamin, Bruno (un jour il faudra choisir entre les maths et le tennis), Stanley, Magali (même si elle nous a fui), Assia, l'agent du KGB qui se reconnaîtra... Les petits nouveaux qui viennent de nous rejoindre : Nicolas, Yohann, Saad, et les anciens que j'ai croisé, Frédéric (et ses appels nocturnes), Jérémie, JP (merci pour la fontaine!), FX, Stéphanie, Julien (merci pour les discussions particulières), Benjamin. Les conseils et encouragements de Céline et Francesco (mes aînés de thèses) m'ont également touché, merci. Un énoooooorme merci à Nicolas Limare pour tous ses conseils informatiques et sa réactivité à toute épreuve (incluant le décalage horaire).

Une mention spéciale aux trois galériens ayant goûté comme moi aux joies de la rédaction estivale (ou automnale, c'est selon) 2009 : Frédérique (merci pour ton aide et tes conseils de tête de course!), Gaël (co-témoin d'un évènement exceptionnel au champion) et Neus (Queen Macaron mais également Miss Picard à ses heures).

Durant ces trois années j'ai également continué à croiser d'anciens ou nouveaux camarades du campus. L'improvisation théâtrale a joué un rôle important pour ma santé mentale, en me servant d'exutoire. Merci donc aux membres de la LIKA et des Impro'Wizards qui m'ont souvent permis d'aller sur saturne en molybde pour me changer les idées. Merci à Cyril pour ses conseils de $\zeta\epsilon\epsilon k$ (et le séjour à la montagne)! Souvenirs des nombreux « séminiam[©] » également, merci à tous les participants! J'en profite pour remercier plus particulièrement ميلوز qui, a plus d'une reprise, n'a pas hésité à *s'arracher les cheveux* pour m'aider avec des petits scripts en bash ou en python, Dr Kassiotis, pour ses précieux conseils beamer que je n'ai finalement pas suivis (mais j'avais le choix final!) et aussi Renaud, mais je ne sais plus pourquoi. Merci. Je remercie très chaleureusement Ouardane, Nicolas et Petit Manu (ou l'inverse) pour l'organisation et la préparation du pot de thèse pour lequel on n'a pas arrêté de me féliciter! Merci également à toutes les petites mains qui sont venues aider à un moment ou à un autre. Je termine ce paragraphe « cachanais » en remerciant les nombreux élèves de l'École s'impliquant dans la vie associative ou sportive, merci de votre dévouement, et continuez à faire vivre le campus (et le cr@ns)!

Une pensée pour les personnes de la promo maths 2003 que j'ai le plaisir de croiser de temps en temps : Gab, Laëtitia, Sylvain, Julien, John-Wolf², Benjamin, Martin... Et plus particulièrement Guillaume, Rafik et Domi, toujours enclins à proposer ou à résoudre « un exo ». Je n'oublierai pas les nombreuses discussions prenantes, qu'elles soient mathématiques ou non, et je souhaite au premier d'entre eux tout le bonheur qu'il mérite – ou pas, grrr – concernant l'heureuse nouvelle que j'ai eu la joie d'apprendre il y a quelques temps.

Il me serait difficile de ne pas mentionner la « Cairo Crew » avec qui j'ai débarqué en France il y a 8 ans (le temps passe!), et plus spécialement : Hedi (akhscntzrrr!), Jalila qui est retournée là d'où nous venons tous, Philippe (pack it up, pack it in!), Yasmine (les 10LE, je ne me souviens plus finalement...), Amine, Moh, Charlotte, Seif, Youssef, Layane (courage à vous deux!)... Et bien sûr ceux que j'ai toujours le bonheur de retrouver lors de mes séjours là-bas : Ahmed, Nadim (fdps) et Adham.

Un petit voyage dans le temps pour remercier mes professeurs de spé', MM. Antetomaso et Massias, de m'avoir encouragé dans le choix de mon école, force est de constater qu'ils avaient raison. Leur pédagogie et leur rigueur me serviront toujours d'exemple.

La fin de cette thèse correspond malheureusement à la fin de la colloc' « benneton », je remercie donc Van (à deux balles) et Romain d'avoir contribué au rayonnement culinaire de la ville de Montrouge pendant ces deux ans, et accessoirement de m'avoir nourri pendant ma période de rédaction!

Un petit mot pour la princesse qui a su faire preuve de patience ces derniers mois : merci pour tout.

Mes remerciements les plus vifs vont à mes parents et mon grand frère. Leur fierté m'a soutenu durant ces longues années d'études, et je ne peux décrire à quel point je leur suis reconnaissant. Merci à ma mère d'avoir été si souvent là quand j'en avais besoin et d'avoir tout fait pour que je ne manque de rien. Merci à mon père pour tous ses conseils et son aide, malgré la distance, et à son dévouement lors de nos combats administratifs.

Merci enfin à l'inventeur de l'autocuiseur sans qui je serais probablement mort de faim.

À mes parents, petit Ayman est devenu grand !

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons au transport des aérosols dans les voies aériennes supérieures du poumon humain. Ce phénomène est modélisé dans notre étude par un couplage d'équations aux dérivées partielles issues de la mécanique des fluides et de la théorie cinétique. Ainsi, le fluide est décrit par des fonctions macroscopiques (vitesse, pression), par l'intermédiaire des équations de Navier-Stokes incompressibles tandis que la phase dispersée est décrite par sa densité dans l'espace des phases, grâce à une équation de transport (Vlasov ou Vlasov-Fokker-Planck). Le couplage effectué est fort, en ce sens qu'il associe à l'aérosol une force de rétroaction correspondant au retour de l'accélération de traînée fournie par le fluide : l'interaction fluide/spray se fait dans les deux sens. Enfin, les équations sont en toute généralité considérées en domaine spatial mobile, ceci afin de tenir compte de l'éventuel mouvement des bronches.

Dans un premier chapitre, après quelques rappels concernant l'arbre pulmonaire et les aérosols, nous décrivons le système d'équations de Vlasov/Navier-Stokes pour lequel nous avons développé un schéma d'approximation numérique. Ce dernier aspect est abordé dans le deuxième chapitre. La méthode utilisée consiste en un couplage explicite d'une méthode ALE/éléments finis pour le fluide et d'une méthode particulière pour la phase dispersée. L'algorithme développé nécessitant une procédure de localisation des particules dans le maillage, celle-ci a également été mise en place.

Différentes exploitations du code ont ensuite été réalisées. Une première série de simulations numériques a été effectuée afin d'évaluer l'influence de la rétroaction du spray sur le fluide. On prouve ainsi que, pour des données en cohérence avec les nébuliseurs commerciaux, l'aérosol peut accélérer un fluide au repos et de ce fait influencer son propre mouvement. Une autre exploitation du code a été effectuée en collaboration avec une équipe de l'INSERM, à Tours, à l'aide de données expérimentales *in vitro*. Enfin, une dernière étude a été réalisée sur un conduit cylindrique présentant une constriction en son centre. Nous avons évalué l'influence du mouvement de sa paroi sur la capture de particules sur cette géométrie.

Les deux derniers chapitres de cette thèse traitent de l'analyse mathématique de deux couplages fluides/cinétiques. Le premier de ces couplages est celui de Vlasov/Navier-Stokes, précédemment introduit. On prouve l'existence de solutions faibles globales périodiques du système par une méthode basée sur un schéma d'approximation voisin de celui utilisé lors de l'implémentation numérique. Le deuxième couplage est celui de Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes pour lequel nous avons obtenu l'existence de solutions fortes pour des données initiales régulières et proches d'un point d'équilibre. Nous avons ensuite étudié le comportement en temps long de solutions du système et précisé la régularité que celui-ci leur impose.

Mots-clés: Équation cinétique, Vlasov, Vlasov-Fokker-Planck, équations de Navier-Stokes incompressible, couplage fort, modélisation, ALE, éléments finis, méthode particulière, capture, poumon, aérosol, solutions faibles globales, solutions fortes globales, temps long, régularité.

Abstract

We study the transport of a spray in the upper airways of the human lung. The model is based on the coupling of two partial differential equations respectively coming from fluid mechanics and kinetic theory. The fluid is described through macroscopic quantities (velocity and pressure) by the Navier-Stokes equations, whereas the dispersed phase is described through its phase-space density (*pdf*, probability density function) by a transport equation (Vlasov or Vlasov-Fokker-Planck). The coupling arises from a two-way interaction between the two phases : the drag force exerted by the fluid on the particles and the retroaction of the whole spray on the fluid. The equations are written in the general case of a moving domain allowing the modelling of a possible movement of the lung airways.

The first chapter introduces the model we used for the numerical simulations. It is based on the Vlasov/Navier-Stokes coupling. The numerical scheme we developed is based on an ALE/finite elements method for the fluid together with a particle method for the spray. Furthermore, a point-location algorithm has been implemented in order to locate the particles at each time step.

The numerical code is then used in several frameworks. First, we estimate the action of the spray on the fluid *via* the retroaction. We prove that for data consistent with the commercial nebulizers, the spray possibly acts on the fluid behavior and thus on its own behavior. An other exploitation has been performed collaboratively with a team of INSERM, in Tours, based on experimental *in vitro* data. Finally, we studied how the movement of the boundary of a tube can influence the capture of particles.

Eventually, the two last chapters of this thesis tackle the mathematical analysis of two fluid/kinetic couplings. The first one is the Vlasov/Navier-Stokes system that we already used before. We prove the global existence for weak periodic solutions using a method based on an approximation scheme which is close to the one we used in our numerical study. The second coupling is the Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes system for which we obtained the global-in-time existence of classical solutions for smooth data close to an equilibrium. We investigate further regularity properties of the solutions as well as their long time behavior.

Keywords: Kinetic equation, Vlasov, Vlasov-Fokker-Planck, Navier-Stokes, coupling, modelling, ALE, finite elements, particle method, capture, lung, spray, global weak solutions, global classical solutions, long time behavior, regularity.

Table des matières

Introduction	5
1 Le modèle considéré	6
1.1 Le mouvement de l'air dans les voies respiratoires	6
1.2 L'aérosol	7
1.3 Le couplage : l'interaction fluide/aérosol	8
1.3.1 Action du fluide sur l'aérosol	8
1.3.2 Rétroaction de l'aérosol sur le fluide	8
1.3.3 Le système complet	9
2 Implémentation numérique	9
2.1 Principe	9
2.2 Validation de programmation	10
3 Simulations numériques	10
3.1 Comparaison avec des résultats expérimentaux sur un dispositif complexe	10
3.2 Influence de la rétroaction	11
3.3 Un tube avec constriction	12
4 Analyse mathématique	12
4.1 Couplages fluide/cinétique	12
4.2 Le couplage Vlasov/Navier-Stokes	13
4.3 Le couplage Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes	15
4.4 Statut des travaux effectués durant cette thèse	18
1 Un modèle d'aérosol dans le poumon humain	19
1.1 L'air dans le système pulmonaire	19
1.1.1 Les voies respiratoires	19
1.1.1.1 Géométrie	19
1.1.1.2 Physiologie et fonction des voies respiratoires	20
1.1.2 Physique de la ventilation	21
1.1.3 Un peu d'hydrodynamique	22
1.1.3.1 Les équations de Navier-Stokes incompressible	22
1.1.3.2 Le nombre de Reynolds	22

1.1.3.3	Le domaine étudié et les conditions aux limites	23
1.2	Les aérosols	24
1.2.1	L'équation de Vlasov	25
1.2.2	Les conditions aux bords	27
1.3	L'interaction aérosol/fluide	27
1.3.1	L'action du fluide sur l'aérosol	28
1.3.2	La rétroaction de l'aérosol	29
1.3.3	Le système complet	30
2	Aspects numériques	31
2.1	Introduction	31
2.2	Cadre de développement : la bibliothèque <code>LifeV</code>	32
2.3	Schéma numérique	32
2.3.1	Discrétisation de l'équation de Vlasov	32
2.3.1.1	La méthode particulière	32
2.3.1.2	Discrétisation des caractéristiques	34
2.3.2	Discrétisation des équations de Navier-Stokes	34
2.3.2.1	Discrétisation en temps pour un domaine fixe : le schéma d'Euler semi-implicite	34
2.3.2.2	La méthode ALE pour les domaines mobiles	35
2.3.2.3	Formulation faible ALE conservative	38
2.3.2.4	Discrétisation en temps de la formulation faible ALE	39
2.3.2.5	ALE et éléments finis	39
2.3.2.6	Discrétisation du mouvement \mathcal{A}_t	41
2.3.3	Couplage	42
2.3.3.1	Discrétisation de la force de traînée	42
2.3.3.2	Discrétisation de la force de rétroaction	43
2.3.3.3	$n \rightarrow n + 1$	43
2.3.3.4	Implémentation	44
2.4	Validation du code	47
2.4.1	Le cas du fluide immobile	47
2.4.2	Le cas du profil de Poiseuille	48
2.4.3	Comparaisons élémentaires	49
2.5	Tests numériques en domaine fixe	52
2.5.1	Influence de la rétroaction	52
2.5.1.1	Principe	52
2.5.1.2	Paramètres de simulation	52
2.5.1.3	Paramètres des particules	52
2.5.1.4	Résultats	52
2.5.1.5	Conclusion et perspectives	54

2.5.2	Comparaison avec une expérience	56
2.5.2.1	Données expérimentales	56
2.5.2.2	Maillage du dispositif	56
2.5.2.3	Paramètres de la simulation	56
2.5.2.4	Paramètres des particules	57
2.5.2.5	Comparaison des zones de dépôt	57
2.5.2.6	Perspectives	57
2.6	Tests numériques en domaine mobile	58
2.6.1	Constriction dans un conduit cylindrique	58
2.6.2	Nombre de Stokes	59
2.6.3	Caractéristiques des particules numériques	60
2.6.3.1	Paramètres physiques	60
2.6.3.2	Paramètres d'injection	60
2.6.3.3	Nombre de particules et poids numérique	60
2.6.4	Paramètres de simulation en domaine fixe	60
2.6.5	Paramètres de simulations en domaine mobile	60
2.6.6	Résultats	61
2.6.6.1	Capture en domaine fixe	61
2.6.6.2	Comparaison fixe/mobile sur une période	63
2.6.6.3	Comparaison fixe/extension et fixe/contraction	63
2.7	Conclusion et perspectives	64
3	Le couplage Vlasov/Navier-Stokes	67
3.1	Introduction	67
3.1.1	Système étudié	67
3.1.2	Cadre fonctionnel et notations	69
3.1.3	Théorème d'existence	69
3.2	Preuve	70
3.2.1	Le système régularisé	70
3.2.1.1	Existence de solutions pour un système découplé	73
3.2.1.2	Contrôle des suites d'approximation	74
3.2.1.3	Convergence du schéma	75
3.2.2	Élimination des perturbations : $\varepsilon \rightarrow 0$	83
3.2.2.1	Preuve de l'estimation <i>a priori</i>	83
3.2.2.2	Preuve de l'existence locale par compacité	88
3.2.3	Existence globale : minoration du temps de vie et itération	104
4	Le couplage Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes	107
4.1	Introduction	107
4.1.1	Équation de Vlasov-Fokker-Planck	107

4.1.2	Couplage étudié	108
4.1.3	Notations et énoncés	110
4.2	Proofs	112
4.2.1	Global existence and regularity theory	112
4.2.1.1	Existence of global solutions to (4.10)-(4.13)	112
4.2.1.2	Estimates of full Sobolev norms	115
4.2.2	Large time behavior	122
4.2.3	Smoothing effect	126
Annexes		131
A Lemmes utiles		133
A.1	Quelques Grönwalleries	133
A.2	L'équation de Vlasov, dans le cas régulier	135
A.3	L'équation de Stokes incompressible	138
B Localisation d'un point dans un maillage		141
B.1	Position du problème	141
B.2	Algorithmes de localisation	142
B.2.1	Algorithme de remontée déterministe	142
B.2.2	Méthodes de couleurs	143
B.2.3	Algorithme de remontée aléatoire	143
B.3	Généralisations	143
B.3.1	Domaine non convexe	143
B.4	Utilisation d'une grille de fond	144
C Écoulement dans une structure branchée : l'origine du paramètre h		145
C.1	Le régime de Hagen-Poiseuille	145
C.2	La loi de Hess-Murray	146
C.3	Un poumon idéal : le modèle A de Weibel	146
Bibliographie		149

Introduction

L'administration de soins par les voies respiratoires est un procédé vieux de plusieurs millénaires puisque déjà, les civilisations égyptiennes, hindoues et grecques pratiquaient l'inhalation de certaines plantes pour leurs vertus thérapeutiques. Il faut ensuite attendre le début du XIX^e siècle pour rencontrer les premiers pulvérisateurs. Le terme « aérosol » apparaît pour la première fois en 1932 dans le vocabulaire pharmaceutique pour désigner l'ensemble des particules élémentaires constituant une inhalation [3]. Mais ce n'est qu'à partir des années 1950 que la pratique de l'administration thérapeutique par les voies respiratoires se popularise vraiment, avec l'invention des inhalateurs portatifs remplaçant peu à peu les nébuliseurs à poire utilisés jusqu'alors.

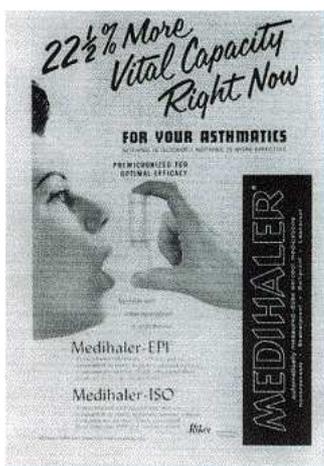


FIG. 1 – « Medihaler », l'un des premiers aérosols doseurs portatifs, 1956.

À cette époque, ces « aérosols doseurs » avaient pour principale motivation le traitement des asthmatiques. Depuis, les applications se sont largement diversifiées : mucoviscidose, allergies, bronchites et plus récemment les maladies systémiques telles que le diabète ou l'hypertension artérielle pulmonaire. De nouvelles recherches se dirigent vers les chimiothérapies tumorales, et la vaccination par aérosol est d'ores et déjà utilisée sur certains animaux. Ces applications diverses ont apporté des résultats indéniables, mais la non accessibilité directe à la zone de traitement conduit à un certain nombre de questions. Lors de son inhalation, jusqu'à quelle génération de l'arbre respiratoire l'aérosol peut-il être transporté? Cette dernière dépend probablement de la taille des particules et des vitesses d'injection, mais comment? Existe-t-il une technique précise d'inhalation de l'aérosol (inhalation en cours/début ou fin d'inspiration)? Ces questions sont abordées depuis plusieurs années maintenant par de nombreux médecins et expérimentateurs, voir par exemple [47] et les références associées. Cependant, il n'est pas possible d'observer directement *in vivo* l'évolution de l'aérosol dans un poumon humain; aussi, les études précédentes sont essentiellement basées sur des données post-transport, et les conclusions sont principalement obtenues à partir d'un catalogue de faits.

La modélisation mathématique du transport des aérosols devient alors un outil complémentaire indispensable, permettant la prédiction numérique du comportement de l'aérosol dans les voies respiratoires. Naturellement, le nombre important d'applications qu'offre ce domaine n'a d'égal que celui des défis scientifiques mis en jeu. La géométrie complexe et mobile du poumon, les différents régimes d'écoulement de l'air, la nature de l'aérosol, l'interaction aérosol/fluide sont des critères à prendre en compte lors de l'établissement du modèle.

Du fait de ces multiples possibilités, l'étude des aérosols dans les voies respiratoires à elle seule a engendré une littérature très riche. Suivant la région du poumon où l'on se place, les phénomènes en jeu diffèrent. Au niveau le plus profond, les voies respiratoires sont recouvertes d'alvéoles. Tsuda, Butler et Fredberg ont étudié le dépôt et la diffusion de particules dans ce type de géométrie dans [96]. On trouvera le même genre d'étude (toujours sur les conduits alvéolaires) également dans [64], avec en plus la prise en compte d'une géométrie mouvante. Plus haut dans l'arborescence, on trouvera par exemple dans [9] une étude de

dépôts dans une bifurcation asymétrique. Hofmann *et. al.* prennent en compte dans [65] les flux secondaires de l'air (pour une définition voir [79] par exemple). Dans [107], Zhang *et. al.* cherchent à établir le lien entre la courbure de la bifurcation et le dépôt de particules. Dans [45], Fontana, Vanni et Baldi étudient l'influence de la coplanarité de deux bifurcations successives sur la capture de particules. Pour un exemple d'étude dans une autre zone de dépôt que les parois bronchiques, on peut consulter les travaux de Gemci *et. al.* qui se concentrent sur l'étude de l'impaction dans la trachée [48]. Par ailleurs, fait assez rare, on trouvera dans ce dernier article le traitement de la turbulence du fluide d'une part, et la prise en compte de la rétroaction de l'aérosol d'autre part. Même la forme des particules peut jouer un rôle : ainsi, dans [10] c'est le dépôt de *fibres* dans les bronches qui est modélisé, en tenant compte de l'orientation des fibres lors de l'impact. Dans tous ces travaux, des codes de simulation fluides commerciaux ou privés sont utilisés (FIRE[®], FLUENT[®], CFX[®], TEMPEST[®]...), citons encore [21, 76, 49, 26, 8] pour d'autres exemples d'utilisations, parfois couplés à des expériences *in vitro*.

Le travail effectué durant cette thèse se situe à l'intersection de différents domaines de recherche, chacun d'eux reflétant l'une des nombreuses facettes scientifiques qu'offre la description des aérosols dans les voies respiratoires : modélisation, implémentation numérique et analyse mathématique. Ce mémoire comporte quatre chapitres. Dans le **premier chapitre**, on présente, d'abord séparément, les modèles retenus pour le fluide et l'aérosol ; on décrit ensuite le couplage les reliant, pour finalement écrire le système Vlasov/Navier-Stokes étudié tout au long de ce travail. Le **deuxième chapitre** traite des aspects numériques développés durant cette thèse, tant au niveau abstrait (présentation des schémas numériques et de l'algorithme utilisés), qu'au niveau pratique (détails d'implémentations, expériences numériques). Dans le **troisième chapitre**, on établit l'existence de solutions faibles du système Vlasov/Navier-Stokes. Enfin, dans le **quatrième chapitre**, on étudie un couplage fluide/cinétique proche du précédent : le système Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes. Dans ce dernier chapitre, l'accent est porté, d'une part sur l'obtention de solutions globales et régulières mais proches d'un point d'équilibre, et d'autre part sur le retour exponentiel vers ce dernier état, toujours dans le cas de petites perturbations.

1 Le modèle considéré

1.1 Le mouvement de l'air dans les voies respiratoires

Les tentatives de compréhension du mécanisme de la respiration ont donné naissance à plusieurs modèles de la circulation de l'air dans les voies respiratoires, allant des modèles simplificateurs « 0D » aux modèles plus complexes de mécanique des fluides, en deux ou trois dimensions. Les modèles « 0D » considèrent généralement l'ensemble du poumon comme une grosse boîte connectée à l'extérieur par la trachée. Le but est alors d'établir des relations entre la pression et le volume, dans une approche de type circuit électrique équivalent (notion de résistance), voir par exemple [1, 14, 15, 98]. En général, les simulations effectuées en deux ou trois dimensions ne reproduisent pas l'écoulement de l'air dans *tout* le poumon. La complexité de la structure arborescente de ce dernier, ainsi que les différents régimes d'écoulement rencontrés selon la génération considérée (écoulement à 1 m/s dans la trachée, quasiment immobile au niveau des alvéoles) sont autant de freins à l'élaboration d'un poumon numérique. Par ailleurs, les régions les plus basses ne peuvent faire l'objet de reconstruction par imagerie médicale, nécessaire à la création d'un maillage.

Une approche alliant le modèle 0D et le modèle 3D a cependant été proposée par Grandmont, Maday et Maury dans [57], les conditions aux limites dans les parties distales étant remplacées par l'action d'un piston (modélisant la pression exercée par le diaphragme).

Une alternative à cette simulation globale est la modélisation de différentes parties de l'arbre, permettant de comprendre son fonctionnement partie par partie en vue d'un éventuel recollement. L'inconvénient de ce type d'approches est que les conditions aux limites utilisées ne sont en général pas physiologiques (lorsque l'on coupe l'arbre pulmonaire à une génération donnée, la pression est une véritable inconnue). Néanmoins, on obtient ainsi un aperçu du comportement de l'air dans certaines zones du poumon. Dans cet esprit, un certain nombre de simulations 3D ont été réalisées permettant la mesure des effets inertiels

et/ou d'asymétrie dans les voies respiratoires. Signalons par exemple [12, 23, 43, 70, 80].

On peut distinguer trois zones dans les voies aériennes pulmonaires correspondant à trois régimes de transport différents pour les gaz constituant l'air. Celui-ci est considéré comme un fluide newtonien, visqueux et incompressible. En descendant dans la structure arborescente, sa vitesse diminue, et les phénomènes de diffusion (du dioxygène et du dioxyde de carbone) prennent peu à peu le pas sur la convection. Le découpage est alors le suivant : dans les cinq premières générations, l'écoulement de l'air est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressible. Ensuite, de la sixième à la dix-septième génération, la vitesse de l'air diminue considérablement et les termes inertiels (incluant le terme non linéaire) des équations de Navier-Stokes peuvent être négligés : c'est le régime de Stokes. À partir de la dix-huitième génération, et jusqu'au bout de l'arbre bronchique, la constitution même de l'air se modifie, puisque les échanges gazeux avec le système sanguin débutent. Macroscopiquement, l'air ne se déplace quasiment plus : le régime de transport des gaz est essentiellement diffusif.

Dans tout le travail présenté ici, nous nous plaçons dans les deux premières régions (environ les dix-sept premières générations). L'air y est considéré comme un fluide newtonien incompressible, obéissant aux équations de Navier-Stokes. Ces dernières gouvernent le fluide par l'intermédiaire de deux variables macroscopiques : sa vitesse $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ et sa pression $p(t, \mathbf{x})$, toutes deux dépendant du temps t et de la position dans l'espace \mathbf{x} . Durant la respiration, la paroi de certaines bronches peut se déformer. C'est pourquoi nous posons le problème dans un domaine mobile Ω_t , qui pourra être, suivant le cas, une bifurcation, une portion de bronche, un cylindre légèrement déformé, *etc.* Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho_a[\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} &= \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \end{aligned}$$

où ρ_a est la masse volumique de l'air, η sa viscosité dynamique et \mathbf{F}_{ext} une force extérieure volumique exercée sur le fluide. Hormis ce terme source, on peut séparer la première équation en deux parties distinctes : les termes d'inertie (entre crochets) associés à la variation de quantité de mouvement, et les termes de contraintes internes visqueuses (laplacien) ou surfaciques (pression).

Des conditions aux bords de non-glissement (*i.e.* de Dirichlet homogène) sont appliquées au fluide sur la frontière physique du domaine Ω_t , pour imposer son adhésion à la paroi. La présence du mucus tapissant les bronches justifie en effet l'hypothèse d'annulation de la vitesse au bord. Les conditions en entrée et en sortie pour les frontières non physiques dépendent alors de l'écoulement étudié.

1.2 L'aérosol

Lorsqu'il est suffisamment dense dans le fluide où il évolue, l'aérosol peut être considéré comme un fluide à part entière ; on obtient alors un couplage diphasique. Ce type de système est étudié par exemple dans [78, 46]. Nous adoptons ici un point de vue *cinétique* : l'aérosol est régi par une équation aux dérivées partielles portant sur une densité de probabilité dont les différentes variables décrivent les particules. Ce type d'approche est issu de la théorie cinétique des gaz de Maxwell et Boltzmann (pour une introduction physique et mathématique, voir [27, 24, 25] par exemple). Son utilisation dans le cadre du couplage fluide/aérosol a été introduite par les travaux fondateurs d'O'Rourke [88] et Williams [106]. Cependant, même une fois arrêté le choix du modèle cinétique pour l'aérosol, un certain nombre d'alternatives restent ouvertes. Nous devons donc préciser les hypothèses retenues dans notre travail.

Tout d'abord, nous supposons l'aérosol suffisamment raréfié pour pouvoir négliger les interactions entre particules. De plus, nous faisons l'hypothèse que l'aérosol reste **monodispersé** en taille : toutes les gouttelettes ont le même rayon, et celui-ci ne change pas au cours du temps. Cette dernière hypothèse se justifie en considérant qu'aucun phénomène ne vient modifier la taille des particules et parce que les interactions entre gouttes sont négligées. Enfin, nous négligeons l'influence de la gravitation. Ainsi, l'équation cinétique décrivant le comportement de l'aérosol se réduit à une équation de Vlasov qui est une équation de transport dans l'espace des phases. En considérant le domaine mobile Ω_t précédemment introduit, celle-ci s'écrit :

$$\partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{A}_{\text{ext}} f] = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3.$$

Dans l'équation précédente, f est la fonction de densité (*probability density function* en anglais), de sorte que $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}$ représente à l'instant t le nombre de particules présentes dans un pavé infinitésimal de l'espace des phases, centré en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ (position, vitesse). Le gradient en $\boldsymbol{\xi}$ représente donc l'accélération des particules, celle-ci provenant d'un champ extérieur \mathbf{A}_{ext} . Dans le contexte des aérosols pulmonaires, l'équation de Vlasov précédente s'avère suffisante. Néanmoins, lorsque c'est nécessaire, on peut faire appel à des modèles plus complets mais plus coûteux, voir par exemple [40, 78, 11, 2].

Les conditions aux bords sont des conditions d'absorption sur la frontière physique de Ω_t , encore une fois justifiées par la présence de mucus. Concernant les frontières non physiques, une seule d'entre elles bénéficie d'une condition aux bords imposée (l'entrée), toutes les autres restant libres.

1.3 Le couplage : l'interaction fluide/aérosol

1.3.1 Action du fluide sur l'aérosol

Revenons sur l'accélération \mathbf{A}_{ext} à transmettre aux particules. Dans [40], on trouve un panorama exhaustif des forces que peut exercer un fluide sur une particule immergée. Nous ne retenons ici que la **force de traînée**. Celle-ci dépend de la vitesse relative de la particule dans le référentiel du fluide, ainsi que de paramètres physiques (masse volumique, rayon..) et son expression précise dépend, *via* le **coefficient de traînée**, d'évaluations semi-empiriques. La formule permettant de calculer ce coefficient varie sensiblement dans la littérature [45, 96, 107, 20, 19, 48], mais reste toujours proche de la loi de Schiller et Naumann (voir par exemple [30]) qui suppose la linéarité de la traînée comme fonction de la vitesse relative, dans la limite d'un faible nombre de Reynolds relatif à la particule. Cette loi a en particulier été utilisée dans le code KIVA [6, 5] et c'est celle que nous retiendrons pour notre travail.

1.3.2 Rétroaction de l'aérosol sur le fluide

Une fois l'action du fluide sur l'aérosol déterminée, que peut-on dire de l'éventuelle rétroaction ? Même si l'écriture d'une telle rétroaction est tout à fait familière en mathématiques (voir [13, 78] par exemple) et dans certains domaines d'applications (études des moteurs diesel par exemple), celle-ci est usuellement négligée dans le cadre de l'étude des voies respiratoires. Ainsi, dans tous les articles cités précédemment présentant des simulation numériques, seule l'étude de Gemci *et. al.* [48] tient compte de cette force de rétroaction. Le méthode numérique utilisée dans cet article provient du code KIVA [6, 5] développé à Los Alamos. Il est donc naturel d'y voir apparaître un tel terme : les gouttelettes considérées possèdent probablement une masse volumique très élevée et l'action de l'aérosol sur le fluide n'est pas du tout négligeable. La masse volumique des gouttelettes constituant les sprays de l'industrie pharmaceutique est en général bien moindre, mais le nombre de particules est important (10^{10} pour une minute d'injection typiquement). Comme nous le verrons (voir le chapitre 2), dans certains cas, même pour une masse volumique de 1 g/cm^3 , l'action de l'aérosol sur le fluide n'est absolument pas négligeable. Ceci justifie *a posteriori* la prise en compte de ce terme de rétroaction. Par ailleurs, c'est par ce terme que s'effectue le couplage fort des deux équations et qu'apparaît la difficulté de l'analyse mathématique du système. Cette rétroaction correspond uniquement au retour de quantité de mouvement que l'aérosol reçoit par la force de traînée. L'expression de cette force est la suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{spray}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}_d(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

où \mathbf{F}_d est la force de traînée s'appliquant aux gouttelettes.

1.3.3 Le système complet

Notre modèle se fonde donc sur le système suivant :

$$(\text{VNS}) \begin{cases} \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{A}_d f] = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{spray}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}), & t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \end{cases}$$

où \mathbf{A}_d est le champ d'accélération de traînée des particules, obtenu en divisant \mathbf{F}_d par leur masse individuelle, et Ω_t un domaine mobile. Le mouvement du domaine, qui peut être donné explicitement ou décrit par une nouvelle équation aux dérivées partielles, n'intervient alors que par l'intermédiaire des conditions aux limites imposées à \mathbf{u} , p et f . Typiquement, ce type de système pourra être utilisé pour modéliser le mouvement périodique de la paroi d'une bronche durant un cycle de respiration.

L'étude d'un tel couplage **fluide/cinétique** dans un domaine **mobile**, au moins du point de vue **numérique**, en vue d'applications dans le cadre du transport d'aérosol dans les voies respiratoires, constitue la principale innovation de cette thèse.

2 Implémentation numérique

2.1 Principe

Une part importante de mon travail de thèse a consisté à développer puis implémenter un module au sein d'un code numérique de l'équipe-projet **veu** de l'INRIA Rocquencourt. Ce code s'appuie sur le solveur éléments finis **LifeV**¹. Il s'agit d'une bibliothèque d'éléments finis développée en licence LGPL de façon collaborative par l'*École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, le *Politecnico di Milano* et l'*INRIA Paris-Rocquencourt*. L'un de ses objectifs est de permettre la simulation des phénomènes d'interaction fluide-structure et du transport de masse.

Je me suis donc appuyé sur les solveurs des équations de Navier-Stokes (en domaine fixe et en domaine mobile), implémentés dans **LifeV**, pour ajouter le traitement d'un aérosol couplé à l'écoulement d'un fluide.

Du fait de la grande dimension de l'espace des phases (6), la résolution de l'équation de Vlasov par des méthodes de type différences finies, volumes finis ou éléments finis est vraiment très coûteuse. J'ai donc utilisé une méthode particulière (voir par exemple [33, 34]), dans laquelle l'inconnue f est d'abord approchée par une combinaison linéaire positive de masses de Dirac localisées aux positions des particules *numériques* dans l'espace des phases. On peut alors suivre ces particules numériques le long des courbes caractéristiques de l'équation de Vlasov. Ainsi, la discrétisation en temps est la même pour le fluide et les particules mais la discrétisation en espace, elle, diffère.

La méthode **ALE**, **A**rbitrary **L**agrangian **E**ulerian, permet en toute généralité la simulation d'équations d'évolution en domaine variable [66, 38], et est parfois utilisée dans le cadre d'une résolution par éléments finis [87, 32]. Basé sur cette dernière approche, un solveur Navier-Stokes ALE du code **LifeV** permet la simulation d'écoulements en domaine mobile. La mise en place de la méthode particulière en interaction avec ce solveur, où les données du fluide sont nodales, implique l'usage éventuel d'une procédure de localisation de chaque particule dans le maillage. Cette procédure a été implémentée pour la circonstance. Le calcul de la force de rétroaction de l'aérosol sur le fluide a également été ajouté pour tenir compte du couplage fort entre le fluide et l'aérosol. Par ailleurs, il peut arriver que le pas de temps utilisé pour le fluide soit trop grossier pour approcher les caractéristiques des particules (c'est typiquement le cas si les particules « sautent » des mailles). On a donc introduit un pas de temps particulière optionnel, permettant de raffiner le calcul des caractéristiques (sans affecter le pas de temps fluide) tout en gardant à l'esprit que celui-ci diminue l'effet de la rétroaction lorsque celle-ci est prise en compte. Le couplage est résolu de

¹<http://www.lifev.org/>

manière **explicite** (cette méthodologie sera reprise lors de l'analyse mathématique du système) conduisant à un schéma empiriquement stable.

2.2 Validation de programmation

Pour assurer la validité du code développé, nous avons effectué des simulations numériques sur des cas-tests dont le comportement est prévisible analytiquement. Nous avons donc considéré dans un premier temps des particules **passives**, soumises à une accélération de traînée. En effet, dès lors que l'on enclenche la rétroaction des particules, le système est couplé fortement dans les deux sens et devient alors difficile à résoudre explicitement. Le premier test effectué a consisté à insérer une particule dans un fluide au repos. Pour un nombre de Reynolds particulaire suffisamment faible, l'expression de la force de traînée se réduisant à la loi de Stokes, la vitesse théorique de la particule suit une décroissance exponentielle. Une comparaison des vitesses théorique et numérique a été effectuée et la sensibilité au pas de temps particulaire a été étudiée.

Un deuxième cas-test plus élaboré est celui de l'insertion de particules dans un fluide suivant un régime de Poiseuille. Ce type de régime s'installe lorsque l'on considère un écoulement laminaire dans un cylindre de révolution dont la longueur est bien supérieure à son diamètre, soumis à une différence de pression constante. La vitesse du fluide est alors explicitement donnée par la *loi de Hagen-Poiseuille* (voir section C.1 en annexe) : orientée selon l'axe du cylindre, elle est invariante par rotation par rapport à ce dernier, ainsi que par translation. L'injection de particules à différentes distances du centre et la comparaison aux trajectoires théoriques ont donc constitué cette deuxième étape de validation.

Enfin, la comparaison entre les trajectoires calculées en utilisant le solveur Navier-Stokes en domaine fixe et les trajectoires obtenues avec le solveur Navier-Stokes/ALE avec un déplacement nul ainsi que la vérification de l'indépendance du fluide vis-à-vis des particules (lorsque la rétroaction n'est pas enclenchée) ont constitué les dernières étapes de la validation.

3 Simulations numériques

3.1 Comparaison avec des résultats expérimentaux sur un dispositif complexe

Dans le monde médical, on utilise également des aérosols sur des patients sous respiration mécanique. Plusieurs méthodes existent pour connecter le système de ventilation aux voies aériennes du patient. L'une d'entre elles consiste à utiliser une **sonde endotrachéale** : on fait pénétrer dans la trachée du patient un tube en plastique jusqu'au niveau de la première bifurcation pulmonaire. Une telle sonde, permettant un accès direct au poumon, est une alternative aux masques respiratoires. L'administration d'un aérosol à un patient intubé implique une perte potentielle de la substance inhalée par dépôt sur les parois de la sonde dont la mesure précise est nécessaire.

Une équipe de l'INSERM au sein de l'U618, à Tours, travaille sur le développement de générateurs d'aérosols. Durant le stage de M2 de Thomas Duparque [41], un protocole expérimental a été mis au point permettant la mesure par diffractométrie du pourcentage de capture de particules dans une sonde endotrachéale. Le marquage des gouttelettes et l'usage d'une gamma caméra a permis également la localisation des zones de dépôt. Différents résultats expérimentaux ont été obtenus, résumés dans [41], correspondant à différentes valeurs du rayon moyen des particules et à différents débits d'entrée.

Nous avons cherché, avec notamment Laurent Boudin et Michaël Grasseau au sein du projet **res**, à reproduire numériquement les expériences effectuées par Thomas Duparque. Le maillage du dispositif endotrachéal, réalisé (voir figure 3) par Michaël Grasseau a permis d'exploiter le code numérique développé sur la géométrie du dispositif. Une série de simulations numériques est en cours, pour différents rayons de particules et différents débits d'injections, et les premiers résultats permettent de retrouver une partie des zones de dépôt observées expérimentalement.

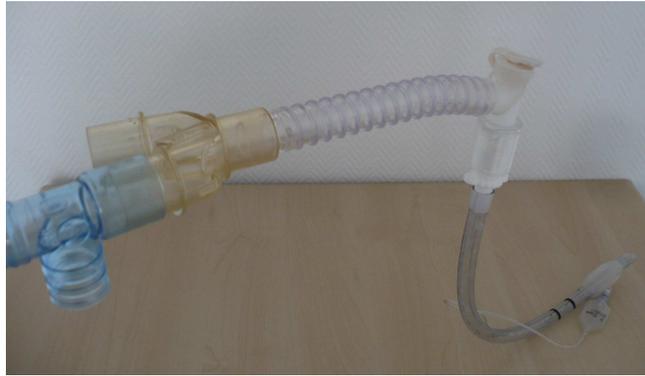


FIG. 2 – Photo de l'intubateur réalisée par les soins de Matteo Astorino.

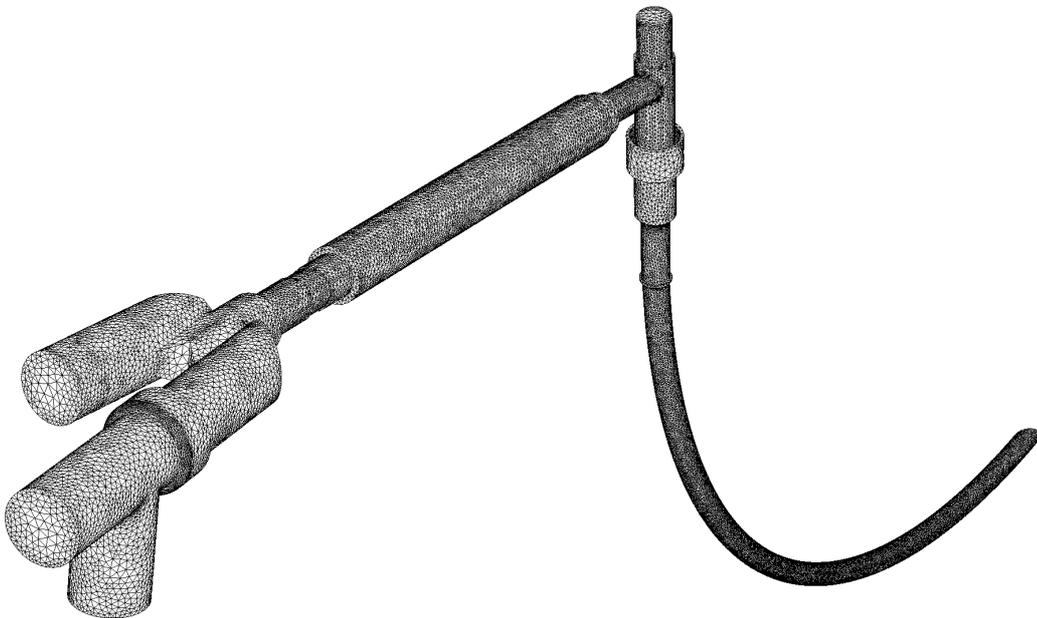


FIG. 3 – Maillage surfacique du dispositif expérimental complet. Le maillage volumique associé contient 600 000 tétraèdres.

3.2 Influence de la rétroaction

La prise en compte de la rétroaction peut affecter tout autant le fluide que l'aérosol lui-même. En effet, si le nombre et le rayon des particules sont suffisamment élevés, la force induite sur le fluide peut modifier de manière non négligeable son comportement [19]. Inversement, une fois le comportement du fluide modifié, la force de traînée s'exerçant sur les particules peut avoir tendance à s'amoinrir. Nous avons observé ce phénomène sur un cas-test très simple en injectant un grand nombre (environ 10^{10}) de grosses particules (environ $50 \mu\text{m}$ de rayon) dans un fluide immobile. Dans un premier test, on injecte une unique salve de particules. Un autre essai avec des injections à chaque pas de temps de la simulation a été effectué.

3.3 Un tube avec constriction

Les bronches ne sont pas des tubes lisses mais peuvent présenter des aspérités de tailles diverses, qu'il s'agisse de cartilages sous forme d'anneaux dans les bronches supérieures ou bien de constriction localisées dans le cas de certaines pathologies pulmonaires. Nous avons étudié l'influence d'une modification de la géométrie tubulaire d'un conduit sur la capture de particules. Nous avons pour cela utilisé un tube avec constriction en son centre, représenté figure 4. Le fluide, soumis à une différence de pression de part et

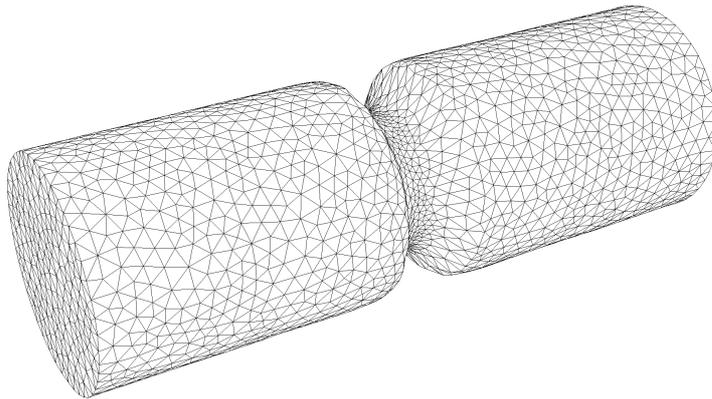


FIG. 4 – Le maillage du tube avec constriction.

d'autre du conduit, est en régime quasi-statique. Des particules de tailles variables (entre $10\ \mu\text{m}$ et $50\ \mu\text{m}$ de rayon) sont injectées de manière uniforme par l'entrée du conduit. Les simulations ont été réalisées en domaine fixe et également dans le cas où la paroi présente un mouvement homothétique sinusoïdal. Les profils de capture (pourcentage de particules déposées en fonction de la taille ou en fonction du nombre de Stokes) ont été réalisés, et ont donné lieu à une comparaison du comportement des particules entre le domaine fixe et le domaine mobile.

4 Analyse mathématique

4.1 Couplages fluide/cinétique

Le couplage que nous avons établi associe deux familles distinctes d'équations aux dérivées partielles : les équations cinétiques d'une part (Vlasov) et les équations de la mécanique des fluides d'autre part (Navier-Stokes). Tout comme dans le cas de l'approximation numérique de ce système, l'étude de ces deux jeux d'équations pris séparément est classique, la difficulté résidant principalement dans le couplage *via* l'interaction entre le fluide et les particules.

Des déclinaisons sont possibles autant pour l'équation cinétique que pour l'équation fluide, chacune correspondant à un modèle précis. Les possibilités de couplage sont donc nombreuses. Pour la partie cinétique, citons par exemple l'équation de Vlasov-Fokker-Planck ou l'équation de Vlasov-Boltzmann pour la prise en compte de collisions. De même, d'autres hypothèses peuvent être retenues pour le fluide : compressible, non visqueux (équations d'Euler), régime de Stokes, équation de Burgers.

Puisque les deux familles d'équations évoluent à deux échelles physiques différentes (mésoscopique et macroscopique), il est intéressant d'obtenir, par un *scaling* et un passage à la limite approprié, un couple d'équations fluide/fluide correspondant au régime asymptotique. C'est précisément sur ce genre de questions que se sont penchés Goudon, Jabin et Vasseur dans [55, 56], concernant un couplage Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes incompressible dans lequel on trouve, par exemple, un régime asymptotique associé

à une très forte traînée et une très forte diffusion (en vitesse) des particules. Cette limite hydrodynamique est également explorée par Mellet et Vasseur dans [83], cette fois-ci dans le cadre d'un couplage Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes compressible.

Concernant les problèmes d'existence de solutions pour les couplages fluide/cinétique, plusieurs travaux ont été menés. Ainsi, Mellet et Vasseur ont obtenu dans [82] l'existence globale de solutions pour le système sur lequel ils ont effectué l'analyse asymptotique précédemment citée. Concernant les couplages fluides/cinétiques sans diffusion en vitesse pour les particules, Domolevo et Roquejoffre ont réalisé une étude des ondes progressives en modélisant le fluide par une équation de Burgers [37]. Enfin, plus récemment, Baranger et Desvillettes ont obtenu dans [13] l'existence locale de solutions \mathcal{C}^1 au couplage Vlasov/Euler, et Mathiaud a étendu ce résultat aux sprays dits « modérément épais », c'est-à-dire en tenant compte des collisions, dans [78].

4.2 Le couplage Vlasov/Navier-Stokes

Nous avons obtenu l'existence globale de solutions faibles *périodiques en espace* pour le modèle étudié, dans lequel l'accélération de traînée est supposée proportionnelle à la vitesse relative de la particule par rapport au fluide. Cette dernière hypothèse se justifie dans le cas d'un faible nombre de Reynolds particulaire par la *loi de Stokes*. La prise en compte d'une expression générale de la constante de traînée (comme la loi de Schiller et Nauman par exemple [30]) reste difficilement envisageable puisque ce type de formule, obtenu par des considérations semi-empiriques, se prête difficilement à l'analyse mathématique. Par ailleurs, l'hypothèse de périodicité peut être vue comme une étape préliminaire à l'étude du même système, sur un ouvert borné, éventuellement mobile de \mathbb{R}^3 . Les difficultés que nous avons rencontrées proviennent du fait que les deux équations ne sont pas du même type et conduisent donc à des estimations de normes différentes ; le terme de rétroaction mélangeant les deux inconnues a imposé la troncature des grandes vitesses pour l'obtention d'une première estimation *a priori*.

Deux articles proches de notre travail ont été réalisés séparément par Anoschenko, Boutet de Monvel-Berthier [7], et Hamdache [61]. Hormis le fait que Hamdache traite l'équation de Stokes (*i.e.* sans terme non linéaire de convection) instationnaire, la principale différence avec notre étude est constituée d'une part de l'estimation d'énergie que nous obtenons pour les solutions faibles du système, et d'autre part de la méthodologie employée, les deux précédents articles se basant sur le théorème du point fixe de Schauder. Notre méthode est, quant à elle, basée sur un schéma itératif explicite avec traitement adéquat des grandes vitesses de particules, correspondant à l'algorithme implémenté dans `LifeV`, mais n'est valable qu'en dimension inférieure ou égale à 3 à cause des injections de Sobolev utilisées.

Comme nous recherchons des solutions périodiques en espace, il convient d'introduire le tore : $\mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Soit $T > 0$ un réel fixé.

On considère le système de **V**lasov/**N**avier-**S**tokes (**VNS**), pour $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})f] = 0, & (1) \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = - \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}, & (2) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0. & (3) \end{cases}$$

Il est associé aux conditions initiales :

$$f(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3. \quad (5)$$

Une première estimation peut être formellement obtenue en intégrant (1) contre $|\boldsymbol{\xi}|^2$ sur $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ et (2) contre \mathbf{u} sur le tore uniquement. En sommant les deux résultats précédents et en intégrant une dernière

fois en temps, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} - \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} \\ = - \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 f d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned} \quad (6)$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} M_2 f(t) &:= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi}, \\ M_2 f_{\text{in}} &:= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

La relation (6) correspond à la dissipation de l'énergie cinétique du système (membre de gauche), par la viscosité du fluide et de son échange avec l'aérosol par la force de traînée (membre de droite). Cette estimation, combinée aux équations (1)–(3), motive l'introduction des espaces suivants. Pour tout entier naturel k , $\mathcal{C}^k(A, B)$ désignera toujours l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k (continue si $k = 0$) sur A , à valeur dans B . Lorsque l'espace d'arrivée n'est pas précisé, les fonctions considérées sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^3 . On notera $\mathcal{C}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ l'espace des fonctions vectorielles $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^3)$ à divergence nulle, $L_{\text{div}}^2(\mathbb{T}^3)$ son adhérence dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ et $H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ son adhérence dans $H^1(\mathbb{T}^3)$ (espace dual : $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$). Enfin, $H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)$ désigne l'ensemble des fonctions $H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ à support compact en vitesse (espace dual : $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)$). Nous allons chercher à construire des solutions répondant à la définition suivante.

Définition 1 : *On dira que le couple (\mathbf{u}, f) est solution du système (1)–(5) sur $[0, T]$ lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \cap L^\infty([0, T]; L_{\text{div}}^2(\mathbb{T}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$;
- $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$, pour presque tout triplet $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$;
- $f \in L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3))$;
- $M_2 f \in L^\infty([0, T])$;
- pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, à support compact en vitesse, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\langle f(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Theta_1(\mathbf{u})(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\phi) f(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)/H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)$ et $\Theta_1(\mathbf{u})$ est l'opérateur différentiel :

$$\Theta_1(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}};$$

- pour toute fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Theta_2(\mathbf{u})(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) d\mathbf{x} ds = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$ et cette fois-ci :

$$\Theta_2(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u} \cdot \partial_t.$$

Le découplage brutal du système **VNS** consisterait par exemple, partant d'une vitesse fluide \mathbf{u}_0 , à l'injecter dans (1) pour obtenir une première fonction de densité f_0 , elle-même réinjectée par la suite dans (2) pour définir \mathbf{u}_1 et ainsi de suite, en espérant construire un couple de solutions comme limite du procédé précédent. L'équation de Vlasov se prête bien à des estimations L^∞ sur ses solutions (par la méthode des caractéristiques) et on peut en général contrôler $M_2 f$, mais la force de rétroaction de l'aérosol fait intervenir un terme hybride :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (7)$$

Ce terme, s'il n'est pas modifié, fait apparaître une non-linéarité dans les estimations. Il paraît donc difficile d'obtenir directement l'existence de solutions à partir du découplage précédent. Pour pallier cette difficulté, nous avons introduit un système approché **VNSA $_\varepsilon$** incluant une troncature des grandes vitesses de particules dans l'expression de la force de rétroaction de l'aérosol et également diverses régularisations pour le fluide. La troncature permet de contrôler dans une première étape la force de rétroaction en utilisant le contrôle L^∞ que l'on a sur f . Les diverses régularisations réalisées permettent d'utiliser la méthode des caractéristiques pour obtenir un couple de solutions fortes du système. Le caractère régulier des solutions permet l'obtention immédiate et rigoureuse d'estimations de type (6). Le découplage du système est alors réalisable, et conduit effectivement à l'existence de solutions pour le système **VNSA $_\varepsilon$** . La dernière étape consiste alors à relaxer toutes les perturbations effectuées, simultanément. À ce stade, la troncature des hautes vitesses est perdue et le contrôle obtenu n'est plus linéaire à cause du terme (7) mentionné plus haut. On contrôle d'abord le premier moment de f (en vitesse) par \mathbf{u} grâce à l'équation de Vlasov, puis on en déduit une borne appropriée pour (7). Cette non-linéarité a un coût : l'estimation finale ne permet d'obtenir la convergence de solutions au système approché **VNSA $_\varepsilon$** que sur un intervalle local $[0, T_*]$. Le temps d'existence T_* dépend en fait uniquement de $\|f_{\text{in}}\|_\infty$, $M_2 f_{\text{in}}$ et $\|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}$, de façon croissante. En établissant rigoureusement une version affaiblie de (6), on prolonge alors la solution à l'intervalle global par itération du procédé précédent. Au final, le résultat obtenu est résumé par le théorème suivant :

Théorème 1 :

On suppose que f_{in} est un élément p.p. positif de $L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et que $\mathbf{u}_{\text{in}} \in L^2(\mathbb{T}^3)$. On suppose de plus que $M_2 f_{\text{in}} < \infty$. Sous ces conditions, le système (1)–(5) admet un couple de solutions faibles (\mathbf{u}, f) sur $[0, T]$, au sens de la définition 1. De plus, ce couple vérifie les deux estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 f d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\|f\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \leq e^{3T} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}. \quad (9)$$

Ce travail a fait l'objet de l'article *Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations* en collaboration avec Laurent Boudin, Laurent Desvillettes et Céline Grandmont, paru dans le journal *Differential and Integral Equations* [18]. La version présentée dans ce mémoire diffère en quelques points (notamment par l'absence de force extérieure), et est plus détaillée.

4.3 Le couplage Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes

Nous adoptons dans cette section des notations différentes des précédentes, pour rester en accord avec le chapitre concerné qui a fait l'objet de l'article *The Navier-Stokes/Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium*, en collaboration avec Thierry Goudon, Lingbing He et Ping Zhang [54]. Le chapitre concerné a donc été rédigé en anglais.

L'équation de Vlasov-Fokker-Planck est une équation cinétique obtenue en ajoutant à l'équation de Vlasov un laplacien en vitesse. Ce terme modélise une force aléatoire agissant sur les particules :

$$F_t + v \cdot \nabla_x F + \operatorname{div}_v (A(t, x, v) F - \nabla_v F) = 0.$$

Dans le cadre fluide/cinétique, un tel terme peut donc s'interpréter comme l'action des molécules de fluide sur l'aérosol. Nous nous intéressons dans ce chapitre au couplage Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes suivant :

$$u_t + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p - \Delta_x u = \int_{\mathbb{R}^3} (v - u) F dv, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \quad (10)$$

$$\nabla_x \cdot u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \quad (11)$$

$$F_t + v \cdot \nabla_x F + \operatorname{div}_v((u - v)F - \nabla_v F) = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (12)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \nabla_x \cdot u_0 = 0, \quad F|_{t=0} = F_0. \quad (13)$$

Le couplage, identique à celui effectué au chapitre 3, réside dans les termes de traînée que l'on a supposés proportionnels aux vitesses relatives des particules. La seule différence réside donc dans l'ajout du laplacien en vitesse dans l'équation cinétique. Celui-ci confère à l'équation des propriétés de régularisation absentes dans l'équation de Vlasov. Nous abordons l'étude de ce système avec une approche différente de celle employée pour le couplage Vlasov/Navier-Stokes. Nous nous contentons dans ce chapitre de l'obtention d'estimations *a priori* assurant l'existence globale de solutions et ne détaillons pas l'étape d'approximation comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent.

On introduit le couple de solutions stationnaires du système (10)–(12) suivant :

$$u_{\text{eq}} = 0, \quad F_{\text{eq}} = M e^{-\frac{|v|^2}{2}},$$

où M est une constante positive. En notant $\mu(v) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}$, on cherche alors les solutions de l'équation cinétique sous la forme suivante :

$$F = \mu + \sqrt{\mu} f.$$

On peut réécrire le système (10)–(12) sur le couple (u, f) :

$$u_t + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p - \Delta_x u + u + u \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f dv - \int_{\mathbb{R}^3} v \sqrt{\mu} f dv = 0, \quad (14)$$

$$\nabla_x \cdot u = 0, \quad (15)$$

$$f_t + v \cdot \nabla_x f + u \cdot (\nabla_v f - \frac{v}{2} f) - u \cdot v \sqrt{\mu} = -\frac{|v|^2}{4} f + \frac{3}{2} f + \Delta_v f, \quad (16)$$

augmenté des conditions initiales :

$$u|_{t=0} = u_0, \quad f|_{t=0} = f_0. \quad (17)$$

La recherche de solutions au système (14)–(16) revient alors à celle de solutions du système (10)–(12), *autour du point d'équilibre* $(u_{\text{eq}}, F_{\text{eq}})$. À l'aide d'estimations d'énergie fines obtenues sur (u, f) , nous obtenons l'existence de solutions globales **régulières** et **proches** de l'équilibre, ces deux dernières propriétés provenant du fait que les données initiales sont également supposées régulières et proches de l'équilibre (en un sens précisé plus bas). Celles-ci sont de plus supposées vérifier les égalités suivantes :

$$\int_{\mathbb{T}^3} u_0 dx + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} v \sqrt{\mu} f_0 dv dx = 0, \quad \nabla \cdot u_0 = 0, \quad (18)$$

auxquelles on peut éventuellement ajouter une hypothèse de conservation de la masse :

$$\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f_0 dv dx = 0. \quad (19)$$

La méthode que nous avons employée est à rapprocher des travaux de Guo [59, 58], pour les équations de Boltzmann et Landau. Nous utilisons ensuite les méthodes d'hypocoercivité décrites par Villani dans [100]

(et déjà utilisées dans [36, 84]) pour prouver le retour exponentiel à l'équilibre pour de petites perturbations. Enfin, dans une dernière section, nous précisons l'aspect régularisant du système, par un argument d'hypoellipticité basé sur un théorème de Bouchut [16]. Le résultat s'applique aux solutions construites précédemment et implique que celles-ci deviennent instantanément \mathcal{C}^∞ en toutes leurs variables. Afin d'énoncer les résultats obtenus, nous introduisons les normes suivantes : pour tout entier $s \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_{H^s}$ désigne la norme usuelle de $H^s(\mathbb{T}^3)$ ou celle de $H^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, si la fonction étudiée dépend en plus de la vitesse. $|\cdot|_s$ désigne la norme de l'espace $L^2(\mathbb{R}_x^3; H^s(\mathbb{T}_x^3))$. Enfin, on notera \bar{u} le vecteur moyenné, pris sur le tore, associé à la vitesse du fluide :

$$\bar{u}(t) := \frac{1}{|\mathbb{T}^3|} \int_{\mathbb{T}^3} u(t, x) dx.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les trois théorèmes (existence, comportement en temps long et régularité) résumant le travail effectué.

Théorème 2 :

Soit $s \geq 2$ un entier. Il existe deux constantes C et ε_0 strictement positives assurant la propriété d'existence suivante.

Pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et tout couple $(u_0, f_0) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3; H^s(\mathbb{R}^3))$ satisfaisant à (18), si le contrôle

$$\|u_0\|_{H^s}^2 + |f_0|_s^2 \leq \varepsilon \quad (20)$$

est vérifié, alors le système (10)-(13) possède une solution forte globale (u, F) , où $F = \mu + \sqrt{\mu}f \geq 0$ satisfait

$$\sup_{t \geq 0} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + |f(t)|_s^2) + \int_0^t [|\bar{u}|^2 + \|\nabla_x u\|_{H^s}^2 + |\sqrt{\mu}u - (\nabla_v f + \frac{v}{2}f)|_s^2] d\tau \leq C\varepsilon. \quad (21)$$

De plus, si (20) est vérifiée pour $s \geq 3$, alors pour tout $t \geq t_0 > 0$, on a :

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq t_0} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|f(t)\|_{H^s}^2 + \|vf(t)\|_{H^{s-1}}^2) \\ & + \int_t^{t+1} \left[\|\nabla_v f + \frac{v}{2}f\|_{H^s}^2 + \|v \otimes \nabla_v f + \frac{v \otimes v}{2}f\|_{H^{s-1}}^2 \right] d\tau \leq C(t_0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (22)$$

où la constante $C(t_0, \varepsilon)$ tend éventuellement vers l'infini à mesure que t_0 tend vers 0.

Le deuxième résultat établit la convergence en temps long vers l'équilibre :

Théorème 3 :

Il existe deux réels strictement positifs ε_0 et λ tels que, pour des conditions initiales vérifiant (18), (19) et (20) avec $s \geq 3$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on ait la convergence exponentielle suivante :

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2 \leq C(t_0, \varepsilon)e^{-\lambda t},$$

pour tout $t \geq t_0 > 0$, avec $C(t_0, \varepsilon)$ constante positive.

Le troisième théorème précise la régularité des solutions du système :

Théorème 4 :

Soit (u, F) un couple de solutions (locales) du système (10)-(13). Si les données initiales u_0 et F_0 vérifient, pour deux entiers $n \geq 3$ et $q \geq 2$ l'inégalité suivante :

$$\|u_0\|_{H^q}^2 + |F_0 \langle v \rangle^n|_q^2 < \infty,$$

où $\langle v \rangle = (1 + |v|^2)^{\frac{1}{2}}$, alors, il existe un temps $T > 0$ tel que, pour tout $0 < t_* < T_* < T$, la solution (u, F) du système (10)-(13) vérifie :

$$\begin{aligned} \sup_{t_* \leq t \leq T_*} (\|u(t)\|_{H^q}^2 + \|F(t) \langle v \rangle^{n-3}\|_{H^q}^2) + \int_{t_*}^{T_*} \left[\|u\|_{H^{q+1}}^2 + \|F \langle v \rangle^{n-3}\|_{H^{q+1}}^2 \right] d\tau \\ \leq C(t_*, T, \|u_0\|_{H^q}, |F_0 \langle v \rangle^n|_q) < \infty. \end{aligned} \tag{23}$$

4.4 Statut des travaux effectués durant cette thèse

Les articles associés aux deux premiers chapitres de ce mémoire sont actuellement en cours de préparation. Le troisième chapitre de cette thèse a donné lieu à un article, intitulé *Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations* en collaboration avec Laurent Boudin, Laurent Desvillettes et Céline Grandmont, paru dans le journal *Differential and Integral Equations* [18]. Le quatrième chapitre a fait l'objet du preprint #07 du CMLA (2009), sous le titre *The Navier-Stokes/Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium*, en collaboration avec Thierry Goudon, Lingbing He et Ping Zhang [54].

Chapitre 1

Un modèle d'aérosol dans le poumon humain

L'inhalation d'un aérosol implique son transport, par l'air, dans les voies respiratoires, au travers des conduits pulmonaires. Il convient donc de modéliser dans un premier temps le système aérien pulmonaire (*i.e.* ses propriétés physiologiques et mécaniques), puis d'étudier la physique de l'aérosol lui-même. On peut ensuite coupler les deux modèles précédents pour étudier le dépôt d'aérosol dans l'arbre bronchique.

1.1 L'air dans le système pulmonaire

1.1.1 Les voies respiratoires

La modélisation mathématique du transport dans l'arbre trachéobronchique a déjà fait l'objet de plusieurs travaux, parmi lesquels les thèses de Mauroy [79] et Soualah [91]. On trouve dans les deux précédents ouvrages une description détaillée de la modélisation de l'arbre pulmonaire, de sa géométrie et sa physiologie ainsi que de la mécanique ventilatoire. Citons également l'ouvrage de référence [102] de Weibel qui est une véritable mine d'informations en physiologie pulmonaire. Dans un premier temps, nous allons présenter quelques propriétés classiques des voies respiratoires.

1.1.1.1 Géométrie

Les voies aériennes respiratoires du poumon humain s'organisent de manière arborescente, se divisant successivement sur vingt-trois générations. La branche mère est la trachée. Son diamètre est d'environ 1,8 cm chez l'homme. Les conduits ont une forme légèrement conique mais nous les assimilerons à des cylindres durant toute notre étude. Au fur et à mesure des générations, le rayon des branches diminue de plus en plus jusqu'à atteindre un quart de millimètre tout au bout de l'arbre. Alors que les premières bifurcations ne sont ni binaires, ni symétriques (le poumon gauche doit contourner le cœur), les suivantes s'uniformisent peu à peu et l'on peut réellement parler d'arbre dichotomique à partir de la 5^e ou 6^e génération. De même, les branches filles ressemblent de plus à des copies homothétiques de leur mère et le rapport de la longueur sur le diamètre du conduit reste à peu près constant, égal à 3, tout au long de l'arbre.

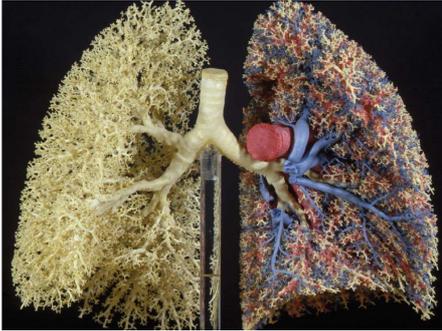


FIG. 1.1 – Moulage de poumon humain réalisé par E. R. Weibel. Sur la gauche, en jaune, seules les voies respiratoires sont représentées. Sur la droite, les artères sont en rouge et les veines en bleu.



FIG. 1.2 – Zoom sur les petites bronches d'un moulage réalisé par E.R. Weibel.

1.1.1.2 Physiologie et fonction des voies respiratoires

La surface de tous les conduits est tapissée de mucus, liquide visqueux qui protège la paroi et capte les poussières ou tout autre intrus parvenant par les voies aériennes. Afin d'être dégluti, le mucus est tiré en permanence vers la bouche par de petits filaments appelés **cils**. Ce mécanisme de hissage s'appelle *l'escalator muco-ciliaire*. On pourra ainsi en première approximation dire que l'air adhère parfaitement aux parois bronchiques.

On distingue les gros conduits des cinq premières générations, les bronches, des conduits suivants, plus fins, les bronchioles. Les premières sont entourées de cartilage qui disparaît peu à peu lorsque la génération augmente, tandis que la paroi des bronchioles est recouverte par un **muscle lisse**. Ce muscle confère aux bronchioles une souplesse qui leur permet de modifier leur diamètre durant la respiration alors que les grosses bronches sont plus rigides en raison du cartilage qui entoure leur surface sous forme d'anneaux. C'est ce mouvement et son influence sur le dépôt d'aérosol que l'on souhaite essayer de comprendre et qui motivera l'une de nos études numériques. Ce muscle disparaît au bout de l'arbre à partir de la 16^e génération, génération à partir de laquelle on commence à apercevoir de petites « poches » sur les parois des bronchioles : ce sont les **alvéoles**, sièges des échanges gazeux entre l'air et le sang.

En 1962, Weibel *et al.* observent que, jusqu'à environ la 17^e génération, le facteur de réduction homothétique du diamètre bronchique est proche de la racine cubique de 1/2 [104] (voir la figure 1.2 pour une vue de plus près). Le lecteur intéressé par l'origine de ce mystérieux facteur $h = 2^{-1/3} \approx 0.79$ trouvera son lien avec l'hydrodynamique dans l'annexe C. Weibel a établi un modèle d'arbre bronchique, dénommé « modèle A » constitué d'un poumon dichotomique, auto-similaire (*i.e.* dont les branches sont homothétiques) de facteur h , les paramètres géométriques des différents conduits étant alors tous déterminés par ceux de la première génération [101]. L'écoulement dans un tel arbre jouit de propriétés hydrodynamiques particulières (voir l'annexe C), ce qui explique l'usage fréquent du modèle A, même si en réalité le facteur d'homothétie du poumon humain dans l'arbre trachéobronchique intermédiaire est légèrement plus élevé que le précédent facteur h . Nous suivrons également cette démarche dans ce mémoire puisque cet arbre, et les lois hydrodynamiques qui lui sont associées (annexe C), nous serviront de paradigme lors de nos simulations numériques.

En physiologie, l'arbre pulmonaire est en général découpé en deux grandes zones selon le rôle des voies aériennes considérées. Les seize premières générations sont purement des conduits : elles transportent l'air inspiré vers les générations suivantes, on parle de région **proximale**.

Après une zone de transition se situant autour de la 16^e génération, correspondant à l'apparition des premières alvéoles, le transport de l'air est extrêmement ralenti, et les échanges gazeux entre l'air et le sang commencent à avoir lieu. Les **acini** sont les sous-arbres du poumon démarrant à la 18^e génération. L'ensemble des acini constitue la zone **distale**. La figure 1.3 ci-contre représente schématiquement une descente le long des bifurcations. Dans ce schéma, on ne suit qu'une génération à chaque étape ; il faut bien sûr s'imaginer un arbre tridimensionnel beaucoup plus dense, notamment au niveau des acini. Ceux-ci ont une forme de mûre, leur nombre s'élève à environ 30000 dans un poumon humain et ils constituent 95% du volume pulmonaire. La surface d'échange gazeux (*i.e.* la surface alvéolaire) formée à l'issue par ce processus dichotomique est d'environ 100 m² chez l'humain adulte.

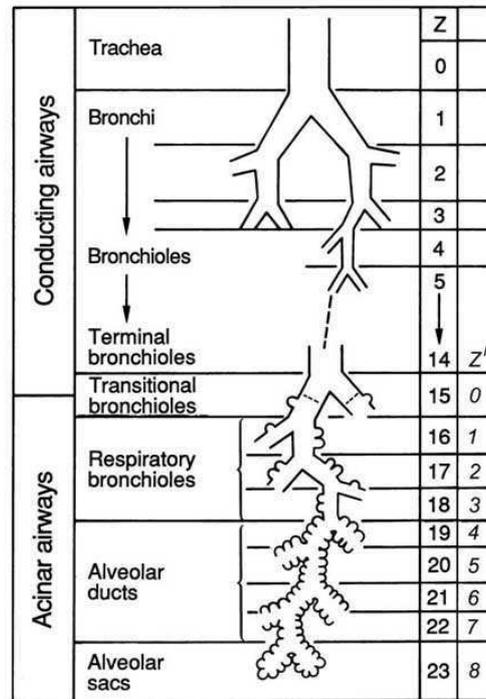


FIG. 1.3 – De la trachée aux acini.

1.1.2 Physique de la ventilation

La respiration est basée sur le mouvement d'une nappe musculaire située entre le bas du thorax et le haut de l'abdomen : le **diaphragme**. La contraction de ce muscle induit une expansion de la cage thoracique de laquelle résulte une dépression dans les poumons, provoquant une entrée d'air. D'autres muscles participent plus modérément à cette augmentation du volume inspiratoire : les muscles intercostaux écartent les côtes et les muscles scalènes, tendus entre les vertèbres et le haut de la cage thoracique, élèvent les premières côtes.

Selon que l'on considère une ventilation au repos ou un régime d'exercice, le comportement du système pulmonaire varie de manière conséquente. Par exemple, la zone de transport introduite dans la sous-section précédente s'étend de quelques générations en régime d'exercice. De même, alors que l'inspiration au repos est active (contraction des muscles), l'expiration est passive puisqu'elle consiste uniquement en la relâche des muscles précédemment sollicités. L'expiration forcée est, elle, un processus musculaire actif qui fait appel aux muscles intercostaux et abdominaux.

Dans tout ce travail nous faisons l'hypothèse d'une ventilation **au repos**.

Le découpage physiologique (zone proximale)/(zone distale) se traduit également en physique. En effet, l'évolution de la vitesse de l'air dans l'arbre permet de diviser celui-ci en trois régions distinctes. Le déplacement de l'air dans la zone proximale est réalisé par convection, à l'instar d'un liquide qui s'écoule dans un tuyau. La région proximale est alors divisée en deux. Sur les cinq premières générations la vitesse de l'air varie entre 1m/s (dans la trachée) et environ 10cm/s (à la 5^e génération). Ensuite, dans la région s'étendant de la 6^e à la 17^e génération, la vitesse de l'air diminue (une fraction de centimètre par seconde à l'entrée de l'acinus) et les phénomènes de viscosité prennent de plus en plus d'importance dans l'écoulement.

À partir de la 18^e génération (début des acini) et jusqu'au bout de l'arbre, la convection ne devient

plus le phénomène prédominant de transport, un déplacement vient la remplacer, comparable à celui d'une goutte d'encre lâchée dans un verre d'eau : c'est la diffusion. Au commencement de la zone distale, le modèle associé est celui de la convection-diffusion. Un travail préliminaire, dans lequel on suppose que la diffusion n'influence pas la convection de l'air, a été effectué par Felici *et. al.* dans [44].

1.1.3 Un peu d'hydrodynamique

Nous allons maintenant écrire les équations régissant le comportement de l'air dans les voies respiratoires.

1.1.3.1 Les équations de Navier-Stokes incompressible

Le modèle des équations de Navier-Stokes propose une description du fluide via deux fonctions macroscopiques dépendant du temps et de la position : sa vitesse $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ et sa pression $p(t, \mathbf{x})$. La dérivation de ces équations correspond à l'écriture de trois lois de conservation : masse, quantité de mouvement, énergie. Certaines hypothèses peuvent alléger considérablement le système obtenu. Ainsi, l'air dans les voies respiratoires est généralement considéré comme un fluide newtonien incompressible, les équations se synthétisant alors de la manière suivante (voir [75] par exemple) :

$$\begin{aligned} \rho_a[\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}] &= -\nabla_{\mathbf{x}} p + \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, & t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, & (1.1) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} &= 0, & t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, & (1.2) \end{aligned}$$

où ρ_a est la masse volumique de l'air (que l'on suppose constante), η son coefficient de viscosité dynamique, et \mathbf{F}_{ext} désigne un champ de force résultant de toutes les actions extérieures au fluide, par exemple la gravité ou la rétroaction de l'aérosol, comme nous le verrons dans la section 1.3. Enfin, pour pouvoir rendre compte du caractère éventuellement mobile du domaine, nous considérons une famille d'ouverts de $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, indexée par le temps. Commentons rapidement le système précédent. Le membre de gauche de (1.1) décrit l'inertie du fluide (la variation de sa quantité de mouvement). Étant donné que la masse volumique est invariante, les seules manifestations de cette variation sont l'instationnarité du régime ($\partial_t \mathbf{u}$) et la convection ($\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$), cette dernière traduisant un changement de vitesse *en espace* uniquement (typiquement l'accélération observée dans un conduit dont la section se réduit). Le membre de droite représente les différentes forces et contraintes exercées sur le fluide : on distingue les forces extérieures volumiques \mathbf{F}_{ext} , les forces internes surfaciques de pression ($-\nabla_{\mathbf{x}} p$), et enfin la contrainte de viscosité ($\eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$). L'équation (1.2) traduit le caractère incompressible du fluide.

1.1.3.2 Le nombre de Reynolds

La principale source de difficulté des équations de Navier-Stokes incompressible, tant du point de vue physique que mathématique et numérique, réside dans le terme non linéaire de convection. Dans certains régimes, ce terme est négligeable et il est utile d'établir un critère précis justifiant ou non sa prise en compte. L'idée est d'étudier le ratio entre l'**inertie**, provenant des termes instationnaire et convectif ($\rho_a[\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}]$), et les forces volumiques de **viscosité** (terme $\eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$). De manière heuristique, en isolant une particule fluide, ce ratio traduit la compétition entre la poussée que subit cette particule par le fluide qui la précède et le frottement qu'elle subit durant son mouvement.

Si l'on dispose d'une vitesse caractéristique U pour le fluide et d'une longueur caractéristique L pour le domaine d'étude, on peut adimensionner les équations de Navier-Stokes en introduisant le nouveau jeu de variables et de fonctions associées (toutes sans dimension) :

$$\tilde{t} := \frac{U}{L} t, \quad \tilde{\mathbf{x}} := \frac{1}{L} \mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) := \frac{1}{U} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \quad \tilde{p}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) := \frac{L}{\eta U} p(t, \mathbf{x}).$$

Les équations de Navier-Stokes (1.1)–(1.2) peuvent alors se réécrire :

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\eta}{\rho_a U L} (\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{p} - \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}}, \quad \tilde{t} \in \mathbb{R}_+, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}_{\tilde{t}}, \quad (1.3)$$

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad \tilde{t} \in \mathbb{R}_+, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}_{\tilde{t}}. \quad (1.4)$$

Il apparaît un nombre adimensionnel :

$$\text{Re} := \frac{\rho_a U L}{\eta},$$

c'est le **nombre de Reynolds**. Deux fluides ayant des vitesses et des domaines d'études différents, mais partageant le même nombre de Reynolds, obéiront donc *exactement* à la même équation adimensionnée (1.3). On s'attend donc à avoir un comportement similaire pour les deux fluides, à des échelles différentes. Le nombre de Reynolds permet donc de décrire le régime de l'écoulement étudié. Il existe généralement un seuil au-delà duquel a lieu un changement assez brusque du régime. Ce seuil dépend de la géométrie considérée ; pour l'écoulement dans un tube, celui-ci est d'environ 2300. Ainsi pour des nombres de Reynolds inférieurs à cette valeur, les lignes de courants du fluides sont toutes parallèles, on parle de régime *laminaire*. Si l'on augmente progressivement la valeur du nombre de Reynolds (par exemple en augmentant la vitesse en entrée du tube) et que l'on dépasse la valeur critique, les lignes de courants ne sont plus parallèles, et des tourbillons peuvent se former : le régime est *turbulent*. Ce phénomène de turbulence, que nous écartons en vertu de l'hypothèse de ventilation au repos, est extrêmement complexe et constitue jusqu'à aujourd'hui une source de défis numériques et mathématiques.

Lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à l'unité, l'amortissement dû à la viscosité domine les effets inertiels, on obtient le régime de *Stokes* et les équations s'écrivent :

$$\nabla_{\mathbf{x}} p - \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad \tilde{t} \in \mathbb{R}_+, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}_{\tilde{t}}, \quad (1.5)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \tilde{t} \in \mathbb{R}_+, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}_{\tilde{t}}. \quad (1.6)$$

Dans certaines situations on peut obtenir le même type d'équation malgré un nombre de Reynolds plus grand que 1.

Le nombre de Reynolds permet de préciser la division de la région proximale introduite dans la sous-section 1.1.2. En effet, alors que dans la première partie de la zone proximale, l'air est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressibles (1.1)–(1.2), dans la seconde ces équations sont toujours valables mais le nombre de Reynolds est petit devant 1 et le terme d'inertie $\rho_a [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}]$ peut donc être négligé : c'est le régime de Stokes, donné par les équations (1.5)–(1.6).

1.1.3.3 Le domaine étudié et les conditions aux limites

Comme nous l'avons vu, le régime d'écoulement de l'air variant avec les générations, utiliser le modèle des équations de Navier-Stokes incompressible dans tout le poumon paraît inutilement général et coûteux. Par ailleurs, la complexité de la géométrie arborescente du pou-

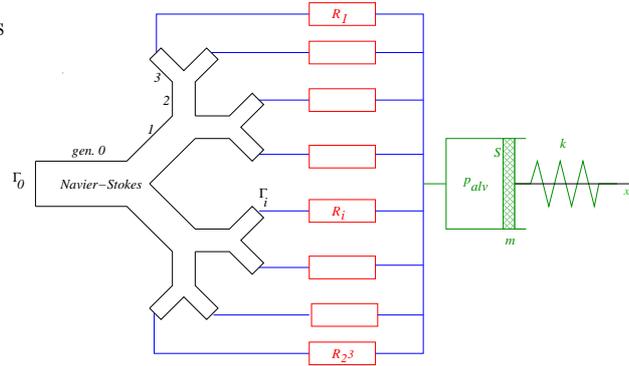


FIG. 1.4 – Le modèle avec piston proposé par Grandmont, Maday et Maury.

mon et le peu d'informations morphométriques dont on dispose dans la partie la région au delà de la 7^e génération sont autant de barrières à son maillage et donc à la résolution numérique des équations de

Navier-Stokes par les méthodes d'éléments ou de volumes finis. Mentionnons cependant une stratégie intéressante proposée par Grandmont, Maday et Maury [57] permettant de modéliser l'écoulement de l'air dans toute la zone proximale à l'aide d'un modèle réduit pour la partie distale : les équations de Navier-Stokes sont résolues dans la première partie de l'arbre, les conditions aux bords "au bout" de ce sous-arbre étant données par la pression résultante des branches plus profondes, modélisée par un piston, de sorte qu'elles correspondent à des conditions aux limites physiques, voir figure 1.4 (schéma obtenu grâce à l'amabilité de Leonardo Baffico).

L'alternative à la simulation globale du poumon est l'étude spécifique d'une zone, afin de comprendre son fonctionnement et éventuellement plus tard le rattacher au comportement du reste de l'organe. C'est ce point de vue que nous adoptons ici, en nous focalisant sur le transport de particules dans l'arbre trachéobronchique (générations 1 à 17). Introduisons les conditions aux bords considérées pour notre étude.

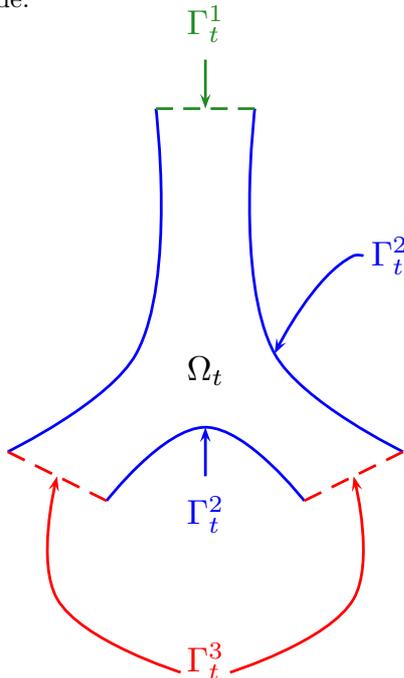


FIG. 1.5 – Bifurcation avec paroi mobile

La viscosité de la paroi due à la présence de mucus se traduit par une condition aux bords à imposer sur le fluide et l'aérosol.

Si l'on reprend la notation Ω_t pour décrire le domaine d'étude à l'instant t , on distingue deux types de frontière. Le plus commode est de définir celles-ci sur un exemple concret. Sur la figure 1.5, Γ_t^1 et Γ_t^3 sont des frontières *artificielles* délimitant le domaine d'étude, la paroi de la bifurcation Γ_t^2 constitue par contre une frontière *physique*.

Pour Γ_t^2 , on considère que la viscosité de la paroi mentionnée plus haut lui impose la vitesse du bord. Dans le cas d'un domaine mobile, on aura donc une condition du type :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t^2,$$

où \mathbf{v} est la vitesse donnée par le paramétrage de Ω_t en fonction du temps. Dans le cas d'un domaine fixe, on obtiendra donc simplement une condition de Dirichlet homogène : $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0$ sur la paroi Γ_t^2 .

Les conditions aux bords à imposer sur Γ_t^1 et Γ_t^3 dépendent du régime que l'on souhaite étudier.

1.2 Les aérosols

Un aérosol ou spray est un ensemble de particules dispersées en suspension dans un fluide. Considérons un tel système dans un flot d'air. Les particules sont assimilées à de petites sphères, toutes du même rayon : on parle d'aérosol **monodispersé** en rayon. Les données initiales sont les positions des particules à l'instant $t = 0$ ainsi que les vitesses d'injection. En pratique, le nombre N de particules est très grand et l'aérosol n'est pas monodispersé. Ainsi l'atomiseur de poche produit par la DTF²(Atomiser pocket aeroneb GOTM), possède un débit de 0.3 mL/min, pour un diamètre moyen de $3.6\mu\text{m}$. Pour une injection continue pendant

²<http://www.dtf.fr>

une minute, on obtient ainsi $N \approx 10^{10}$ particules émises par le nébuliseur. La distribution de rayons des particules générées par le nébuliseur est généralement celle d'une loi « log-normale ». Nous allons introduire le formalisme des équations cinétiques, couramment utilisé pour modéliser une phase dispersée.

1.2.1 L'équation de Vlasov

Reprenons le système particules-air précédent et intéressons-nous à son évolution au cours du temps. Chaque gouttelette est soumise à la gravitation, à des interactions électro-magnétiques avec les autres particules et éventuellement à une accélération extérieure que l'on note \mathbf{A}_{ext} .

On néglige les deux premières (voir par exemple [19]) par rapport à la troisième et on suppose de plus que les gouttelettes ne se rencontrent et ne se fragmentent pas. On suppose enfin que l'aérosol est suffisamment raréfié pour ne pas être considéré comme une phase continue et donc ne pas être modélisé par une équation de la mécanique des fluides.

La première idée qui vient à l'esprit pour décrire le comportement d'un système de ce type consiste à considérer une à une les particules le constituant en écrivant le jeu d'équations constitué de toutes les trajectoires de particules, trajectoires définies par :

$$(S) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \boldsymbol{\xi}_k(t), & 1 \leq k \leq N, \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_k(t) = \mathbf{A}_{\text{ext}}(t, \mathbf{x}_k(t), \boldsymbol{\xi}_k(t)), & 1 \leq k \leq N. \end{cases}$$

L'espace des phases dans lequel évoluent les particules est de dimension $6N$. Les équations cinétiques, dans notre cas l'équation de Vlasov, permettent de synthétiser le système précédent par l'intermédiaire d'une quantité *mésoscopique* : la densité de particules. La densité de particules est une fonction numérique dépendant du temps t et des différentes caractéristiques des gouttelettes que l'on souhaite prendre en compte. On considère ici le cas le plus simple de densité (ou p.d.f., *probability density function* en anglais), dans la mesure où f ne dépend que du temps, de la position $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et de la vitesse $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ des particules. On pourrait par exemple choisir de tenir compte du rayon des particules, dans le cas d'un spray **polydispersé**, de leur température ou de leur énergie interne. Ce formalisme provient au départ de la théorie cinétique des gaz de Maxwell et Boltzmann (voir [27, 24, 25]) et a été repris dans le cadre de couplage avec un fluide par Williams [106] et O'Rourke [88] ; pour des exemples d'utilisation avec un plus grand nombre de variables, on peut par exemple consulter [40] ou [78].

La densité de particules se présente comme une fonction à valeurs réelles, positives :

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \longmapsto f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Heuristiquement, on peut comprendre cette densité de deux manières complémentaires :

- C'est une *densité de nombres* : $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi}$ est, à l'instant t , le nombre de gouttelettes présentes dans un pavé infinitésimal de l'espace des phases, centré en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, de dimensions $d\mathbf{x} \times d\boldsymbol{\xi}$.
- C'est aussi une *densité de probabilité* : si f a un moment d'ordre 0 égal à 1, $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est la fonction de densité, à l'instant t , de la probabilité de présence des particules dans l'espace des phases.

L'équation de transport de Vlasov, pour des particules soumises à une accélération $\mathbf{A}_{\text{ext}}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, s'écrit :

$$\partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{A}_{\text{ext}} f] = 0. \quad (1.7)$$

Outre l'aspect synthétique de cette équation par rapport au système S de taille $6N$, celle-ci possède plusieurs avantages.

- L'interprétation probabiliste de f permet de retranscrire les aléas d'une expérience physique sur la condition initiale : $f(0, \cdot, \cdot)$ n'est pas une liste de positions déterminées, mais une estimation probabiliste des positions initiales.

- Lorsque l'on tient compte des interactions entre les gouttelettes, l'étude mathématique et numérique du système S est irréalisable : la simple interaction gravitationnelle se ramène à l'étude du problème à N corps !

Partant de l'équation (1.7), on peut modéliser un grand nombre d'interactions de type particules-particules, le prix à payer étant toujours la linéarité de l'équation.

- Par exemple, en ajoutant à l'accélération \mathbf{A}_{ext} un terme de ce type :

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathbf{F}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) f(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\zeta}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\zeta},$$

on peut prendre en compte l'interaction gravitationnelle des particules.

- Il est également possible d'ajouter différents noyaux au membre de droite de l'équation de Vlasov : noyaux de collisions (équation de Boltzmann), fragmentations, etc.
- Les méthodes numériques que nous emploierons pour simuler notre spray s'appuient sur l'interprétation cinétique en justifiant le remplacement des particules **physiques** par des particules **numériques**, réduisant ainsi considérablement la taille du système S , puisqu'une particule numérique représentera un paquet de plusieurs particules physiques.

Si l'on décide de prendre en compte des interactions entre les particules, le passage du système discret à N particules à l'équation associée peut s'avérer très complexe. Le champ d'accélération \mathbf{A}_{ext} dépend alors des particules et la dérivation de l'équation associée est délicate. Les notes de cours [99] de Villani sont très appropriées à une introduction à ces problèmes dits de *champs moyen*. Pour une étude plus détaillée, le lecteur pourra aussi consulter [92].

Dans notre cas, le plus simple, la justification ne coûte pas très cher. On peut donc présenter brièvement la façon dont l'équation de Vlasov apparaît naturellement. Ici, le terme d'accélération \mathbf{A}_{ext} est donc donné *indépendamment des particules* ; on le suppose par ailleurs suffisamment régulier pour assurer l'existence globale des caractéristiques (voir A.2).

On introduit la *mesure empirique* :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_k^0} \otimes \delta_{\boldsymbol{\xi}_k^0}.$$

C'est une mesure de probabilité sur l'espace des phases. On fait l'hypothèse suivante :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_k^0} \otimes \delta_{\boldsymbol{\xi}_k^0} \rightharpoonup \mu_0, \quad (1.8)$$

où μ_0 est une mesure (que l'on suppose de Radon) sur l'espace des phases $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. La convergence mentionnée est la convergence vague. Cette hypothèse traduit la répartition, pour N grand, du spray dans l'espace des phases. Typiquement, si les points sont *équirépartis*, μ_0 sera la mesure de Lebesgue. On a alors le résultat suivant, pour tout t :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_k(t)} \otimes \delta_{\boldsymbol{\xi}_k(t)} \rightharpoonup \mu(t),$$

où $t \mapsto \mu(t)$ est une solution faible de l'équation de Vlasov (1.7). En effet, à t fixé, la mesure moyennée

$$\hat{\mu}_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_k(t)} \otimes \delta_{\boldsymbol{\xi}_k(t)}$$

n'est rien d'autre que la mesure image de la mesure moyennée $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_k^0} \otimes \delta_{\boldsymbol{\xi}_k^0}$

par la caractéristique $\mathbf{T}_{(0,t)}$, puisque les particules suivent les caractéristiques (c'est exactement ce que dit le système S). Pour t fixé, la suite de mesures moyennées $(\hat{\mu}_t^N)_N$ converge donc vaguement vers la mesure image de μ par $\mathbf{T}_{(0,t)}$, d'après (1.8).

Reste à vérifier que (μ_t) est bien solution de l'équation de Vlasov, sur un intervalle fixé $[0, T]$.

La formulation que l'on va vérifier est la suivante : pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ à support compact, on a l'égalité :

$$\int_0^T \langle \mu, \partial_t \varphi + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi + \mathbf{A}_{\text{ext}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \varphi \rangle dt = \langle \mu_0, \varphi(0, \cdot, \cdot) \rangle,$$

où les crochets sont à comprendre au sens des mesures :

$$\forall t \quad \langle \mu(t), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mu_t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Remarque 1.2.1 : L'intégration en temps dans le membre de gauche est licite : le crochet est, par définition de $\mu(t)$, une limite simple de fonctions mesurables (plus précisément, de sommes finies d'évaluations de φ en les différentes particules).

Par définition de la mesure image on a, pour tout temps t :

$$\langle \mu(t), \partial_t \varphi + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi + \mathbf{A}_{\text{ext}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \varphi \rangle = \int_0^T \langle \mu_0, \Psi(t) \rangle dt,$$

où $\Psi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = [\partial_t \varphi + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi + \mathbf{A}_{\text{ext}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \varphi] \circ T_{0,t}$.

Par définition de la caractéristique, on a : $\Psi = \partial_t \theta$ où $\theta(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \varphi(t, T_{0,t}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))$. Le théorème de Fubini donne finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \mu, \partial_t \varphi + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi + \mathbf{A}_{\text{ext}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \varphi \rangle dt &= \int_0^T \langle \mu_0, \partial_t \theta \rangle dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \int_0^T \partial_t \theta dt d\mu_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= \langle \mu_0, \varphi(0, \cdot, \cdot) \rangle, \end{aligned}$$

puisque $\varphi(T, \cdot, \cdot) = 0$.

1.2.2 Les conditions aux bords

En raison de la forte viscosité des parois bronchiques, on adopte une condition d'absorption pour l'aérosol, ce qui se traduit, dans le formalisme des équations cinétiques, en reprenant les notations de la figure 1.5 :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{x} \in \Gamma_t^2, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) < 0 \Rightarrow f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0,$$

où $\mathbf{n}(t, \mathbf{x})$ est le vecteur normal sortant en $\mathbf{x} \in \Gamma_t^2$. Dans [20], Boudin et Weynans modélisent l'impaction d'un aérosol dans les bronches supérieures et la création éventuelle de gouttelettes lors d'un tel impact. Leurs résultats en deux dimensions confirment notre approche : lors d'un cycle de ventilation au repos, ce phénomène de « splashing » est négligeable.

1.3 L'interaction aérosol/fluide

Pour pouvoir correctement modéliser un système aérosol/air il va falloir tenir compte de leur interaction. En effet, il paraît difficile de considérer leur évolution indépendamment l'un de l'autre, d'autant que les deux types d'équations (fluide et cinétique) introduits précédemment proposent la prise en compte d'un terme source que nous allons utiliser pour relier les deux modèles.

1.3.1 L'action du fluide sur l'aérosol

Le lâcher d'une boule (suffisamment dense pour couler), uniquement soumise à son poids, dans un bassin d'eau animée d'un courant permet de visualiser très simplement la notion de **force de traînée** : si notre boule est assez lourde, elle poursuivra quasiment la trajectoire qu'elle aurait acquise sans courant : une ligne presque droite jusqu'au fond. À l'inverse, en deçà d'une certaine masse, sa trajectoire sera déviée par le courant. De manière très schématique, on aurait, pour une boule de pétanque grise et une petite bille rouge lâchées au-dessus d'un courant d'eau, le comportement décrit en figure 1.6.

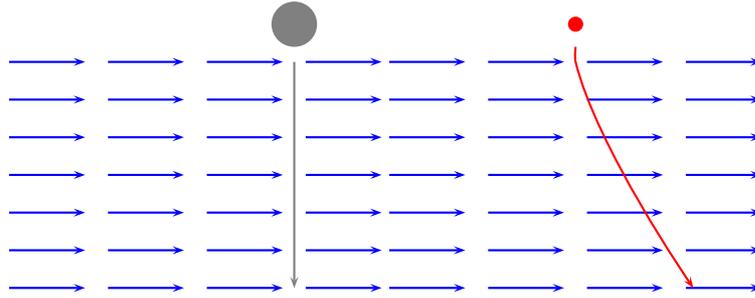


FIG. 1.6 – Trajectoires possibles lors du lâcher.

Bien évidemment, la discussion qui précède est extrêmement simplifiée. L'immersion d'une sphère dans un fluide visqueux est un problème de physique délicat, voir par exemple [60] pour une étude détaillée. Dans le premier chapitre de sa thèse [40], Dufour réalise une synthèse des forces pouvant s'exercer sur une particule supposée sphérique. De toutes ces forces, nous ne retiendrons que la force de traînée, comme souvent en mécanique des fluides (voir par exemple [68]). L'expression la plus générale de la force de traînée (appelée *drag force* en anglais) est établie dans le travail d'O'Rourke [88] :

$$\mathbf{F}_d(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8} s_p \rho_a C_D \|\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}\| (\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}), \quad (1.9)$$

où s_p est la surface de la particule en contact avec le fluide, ρ_a la masse volumique du fluide (ici, nous considérons l'air) et C_D un paramètre adimensionnel, le **coefficient de traînée**. Le calcul de la force de traînée passe par des évaluations semi-empiriques toutes contenues dans ce coefficient C_D , qui est censé tenir compte de la déformation de la goutte et du régime considéré. Celle-ci permet de modéliser principalement deux phénomènes :

- la friction exercée par le fluide sur la sphère, due aux frottements, ce qui explique l'intervention de la surface de la particule dans la formule (1.9),
- le phénomène de traînée proprement dit : du fait de son mouvement, la particule crée une dépression à l'arrière et une surpression à l'avant, et est donc aspirée vers l'arrière, ce qui explique l'orientation de la force de traînée dans (1.9), opposée à la vitesse relative de la particule par rapport au fluide.

À l'instar du fluide, on peut introduire un nombre de Reynolds particulaire qui permet de mesurer le rapport entre les forces d'inerties et les forces de viscosité agissant sur la particule :

$$\text{Re}_p := \frac{2}{\eta} \rho_a r \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}\|.$$

Ce paramètre intervient en général dans l'expression de la constante de traînée. Dans le cas de petits nombres de Reynolds particulaires, l'expression du coefficient de traînée est (relativement) simple [60] :

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p}.$$

On en déduit la force de traînée par la *loi de Stokes* :

$$\mathbf{F}_d(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -6\pi\eta r(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})). \quad (1.10)$$

La formule (1.10) est d'ailleurs utilisée directement dans [20, 19] dans le contexte d'un couplage fluide-cinétique.

Si l'hypothèse de petits nombres de Reynolds n'est pas vérifiée, l'expression du coefficient de traînée se complique considérablement. Plusieurs lois expérimentales ont été proposées, on trouvera un grand nombre d'entre elles dans l'ouvrage [30]. Dans toute cette thèse, nous utiliserons l'expression de la constante de traînée donnée par la loi de Schiller et Naumann, présentée dans [30], utilisée dans [40, 48] ainsi que dans les codes KIVA [6, 5] :

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_p} \left(1 + \frac{1}{6}\text{Re}_p^{\frac{2}{3}}\right), & \text{pour } \text{Re}_p < 1000, \\ 0.424, & \text{pour } \text{Re}_p \geq 1000. \end{cases} \quad (1.11)$$

Remarque 1.3.1 : *En toute rigueur, le coefficient de traînée dépend, via le nombre de Reynolds particulaire, des mêmes variables que la force de traînée ; par souci de clarté, on omet de noter cette dépendance.*

Remarque 1.3.2 : *On peut tenir compte de la turbulence du régime du fluide en décomposant la vitesse du gaz en deux parties, c'est ce qui est fait dans le code KIVA-3V et utilisé dans [48]. Néanmoins, le fluide que nous considérons ne présente pas de caractère turbulent.*

Les particules ayant toutes le même rayon (monodispersion) et la même masse volumique (ρ_p), leur masse physique est identique et vaut : $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p$. Celle-ci permet alors d'obtenir l'accélération de traînée des particules :

$$\mathbf{A}_d(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \frac{3}{4} \frac{1}{\pi r^3 \rho_p} \mathbf{F}_d(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

que l'on peut encore écrire, à l'aide de (1.9) et (1.11)–(1.12) :

$$\mathbf{A}_d = \begin{cases} \frac{9}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\eta}{\rho_p} \left(1 + \frac{1}{6}\text{Re}_p^{\frac{2}{3}}\right) (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}), & \text{pour } \text{Re}_p < 1000, \\ 0.424 \times \frac{3}{8} \frac{1}{r} \frac{\rho_a}{\rho_p} \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}\| (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}), & \text{pour } \text{Re}_p \geq 1000. \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\quad (1.14)$$

1.3.2 La rétroaction de l'aérosol

On suppose dorénavant que l'aérosol est monodispersé et constitué de particules incompressibles. L'interaction avec le fluide obéit à une classification des sprays introduite par O'Rourke [88].

- Les *sprays très fins* : le fluide agit sur les particules *via* la force de traînée, mais on néglige la rétroaction. On ne tient pas non plus compte des collisions et coalescences de particules : il y a suffisamment peu de gouttelettes pour que leurs rencontres soient négligeables. La fraction volumique qu'occupe le spray est négligée.
- Les *sprays fins* : on considère une rétroaction des particules sur le spray. On ne tient toujours pas compte des collisions/coalescences de particules, ni de la fraction volumique du spray.
- Les *sprays très ou modérément épais* : on considère les interactions binaires entre particules et/ou également la fraction volumique occupée par le spray, le modèle se rapproche alors de celui d'un fluide composée de deux phases.

Dans le cadre du transport d'aérosol dans les voies respiratoires, le modèle le plus couramment utilisé est celui des sprays très fins, la rétroaction n'étant en général pas prise en compte [9, 65, 45, 96, 64, 107, 21, 42, 76, 49, 8]. On trouvera cependant dans [48] une étude du transport de spray dans la trachée dans laquelle l'effet de la rétroaction est comptabilisé. Citons également [19] où une étude de l'influence de

la rétroaction est menée, le phénomène acquiert une importance significative dans certains cas (grosses particules, vitesse relative élevée). C'est cette dernière démarche que nous poursuivons dans ce travail, en réalisant l'hypothèse d'un spray fin.

Le travail développé dans ce mémoire s'articule donc autour du couplage de deux phénomènes généralement négligés dans la communauté des "aérosols thérapeutiques" : d'une part l'aspect **rétractif** de l'aérosol, d'autre part la simulation en **domaine mobile**. Signalons cependant que ce dernier aspect a déjà été exploré par Tsuda, Henry *et. al.* dans [97, 64], mais uniquement au niveau des conduits alvéolaires (et sans rétroaction).

L'expression de la force de rétroaction correspond exactement au renvoi de la quantité de mouvement fournie par la force de traînée. En un point donné \mathbf{x} , on est donc amené à sommer toutes les contributions de particules présentes en cet endroit, à l'instant considéré. L'addition que l'on aurait à effectuer dans le cas d'un système discret de N particules se transforme en intégrale, pondérée par la fonction de densité, sur toutes les vitesses des particules en \mathbf{x} ,

$$\mathbf{F}_{\text{spray}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}_d(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (1.15)$$

où \mathbf{F}_d est la force de traînée définie par (1.9).

1.3.3 Le système complet

Le système d'équation complet s'écrit, en domaine fixe :

$$\partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{A}_d f] = 0, \quad (t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3, \quad (1.16)$$

$$\rho_a [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{spray}}, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega \quad (1.17)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega, \quad (1.18)$$

où \mathbf{A}_d est définie par (1.13)–(1.14), et $\mathbf{F}_{\text{spray}}$ par (1.15). Il est possible d'obtenir, au moins formellement, une équation de conservation d'énergie pour un tel système. En effet, en multipliant l'équation (1.16) par $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p \times \frac{1}{2} |\boldsymbol{\xi}|^2$ puis en intégrant le résultat sur $\Omega \times \mathbb{R}^3$, on obtient par intégration par parties, en ne tenant pas compte des termes de bords :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_p |\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} - \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}_d d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = 0.$$

De même, en intégrant (1.17) sur Ω après l'avoir multipliée (scalairement) par $\frac{1}{2} \mathbf{u}$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_a |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_d d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = 0.$$

En sommant les deux équations précédentes on obtient donc :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_p |\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_a |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \right\} + \eta \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{F}_d d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = 0.$$

Étant donnée l'expression de la force de traînée (1.9), on voit que le dernier terme du membre de gauche de l'équation précédente est toujours positif. L'équation précédente s'interprète alors ainsi : l'énergie cinétique du système (accolade de gauche) est décroissante et cette dissipation est due d'une part à la viscosité η du fluide, d'autre part au travail des forces de traînée (dans un sens comme dans l'autre). Remarquons enfin que dans le cas où l'équation de Navier-Stokes est augmentée d'un terme source, le travail associé se rajoute directement dans le membre de droite de l'équation précédente.

La non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes et le couplage fort réalisé sont les deux grandes difficultés associées au système (1.16)–(1.18) et que nous rencontrerons tant sur l'aspect numérique que sur l'analyse mathématique. Le premier de ces deux objectifs est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 2

Aspects numériques

Ce chapitre est dédié au divers aspects numériques abordés durant cette thèse. Ces derniers sont basés sur l'approximation du système introduit dans le chapitre précédent. Le schéma implémenté couple une méthode d'approximation de type éléments finis (en domaine mobile) à une méthode particulière et a été exploité sur diverses expériences numériques.

2.1 Introduction

On considère le système (1.16)–(1.18) dans le cadre général d'un domaine mobile Ω_t :

$$\partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{A}_d f] = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.1)$$

$$\rho_a [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{spray}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad (2.2)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} \in \Omega_t. \quad (2.3)$$

Ce chapitre s'organise de la manière suivante : après un rapide descriptif du cadre de développement dans lequel nous avons travaillé, nous allons décrire les différentes méthodes utilisées pour approcher le système (2.1)–(2.3). Les discrétisations employées pour l'équation fluide et l'équation cinétique étant différentes, nous les présentons séparément dans une première étape. L'approximation de l'aérosol est basée sur une méthode PIC [31, 85, 105, 77, 89] adaptée à l'équation de Vlasov : on parle de méthode particulière [33, 34]. Les équations fluides sont, elles, approchées en espace par éléments finis, et pour tenir compte de l'aspect mobile, on se base sur le formalisme ALE introduit dans [66, 38]. La différence entre la méthode particulière et la méthode des éléments finis réside dans la discrétisation spatiale : contrairement au fluide, l'approximation de l'aérosol n'est pas fournie de manière nodale. Par contre, la discrétisation temporelle est identique (même si l'on peut être amené à considérer un pas de temps plus fin pour les particules que pour le fluide).

Nous décrivons par la suite la gestion du couplage des équations (2.1)–(2.3). Ce dernier se faisant dans les deux sens, à chaque pas de temps il n'y a *a priori* aucune raison de résoudre l'une des deux équations en premier. Cependant, afin de réduire le coût numérique de la méthode, nous explicitons le couplage en introduisant un décalage temporel artificiel dans notre schéma. On résout d'abord le fluide, puis les particules et on utilise à l'étape courante la force de rétroaction calculée à l'étape précédente.

Nous présentons ensuite quelques détails d'implémentation ainsi qu'une étape de validation numérique constituée de quelques cas-tests pour lesquels on peut calculer une solution explicite.

Le chapitre se termine par plusieurs expériences numériques, exploitant les divers fonctionnalités proposées par la méthode que nous avons implémentée. Dans le cas « simple » du domaine fixe, sans tenir

compte de la rétroaction de l'aérosol, nous avons collaboré avec une équipe de l'INSERM de Tours afin de comparer des résultats expérimentaux obtenus sur un dispositif complexe. Une fois le maillage de ce dernier réalisé, nous cherchons à reproduire les conditions expérimentales pour finalement comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux. Concernant la rétroaction, celle-ci a été étudiée sur quelques cas-tests basiques servant à estimer l'influence que peut avoir le spray sur le fluide, lorsqu'on traite de particules lourdes ($50 \mu\text{m}$ de rayon). Enfin, l'aspect mobile du code a été exploité sur le maillage d'un cylindre de révolution présentant une constriction en son centre. Une première étude a été effectuée visant à étudier l'influence du déplacement de la paroi sur la capture des particules.

2.2 Cadre de développement : la bibliothèque LifeV

LifeV³ est une bibliothèque d'éléments finis implémentée en C++, comportant un grand nombre de méthodes numériques permettant :

- la manipulation de maillages fixes ou mobiles,
- les structures d'éléments finis Q_0 , Q_1 , P_1 , P_2 , \tilde{P}_2 , P_1 -bulle, RT ,
- l'utilisation de solveurs dédiés (Navier-Stokes, Darcy...).

Avec plus de 80 000 lignes, le développement de LifeV se poursuit encore. Celui-ci est motivé tant par la recherche que par l'utilisation des solveurs qu'il produit dans le monde industriel et médical. LifeV est un projet libre, sous licence LGPL, fruit du travail commun de trois institutions : l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, le Politecnico di Milano et l'INRIA Paris-Rocquencourt. La ligne directrice de ce projet à l'INRIA est la modélisation et la simulation numérique d'écoulements biologiques, plus particulièrement du sang dans les gros vaisseaux et de l'air dans les voies respiratoires. C'est dans le cadre de l'équipe-projet [reu](#) de l'INRIA Paris-Rocquencourt que le contenu de ce chapitre a été développé.

2.3 Schéma numérique

Nous présentons dans cette section les schémas numériques utilisés pour l'approximation du système (2.1)–(2.3). Le travail réalisé durant cette thèse consiste en l'implémentation de la méthode d'approximation de l'aérosol ainsi que son couplage avec le solveur Navier-Stokes ALE. Ce solveur existait déjà dans la bibliothèque LifeV.

2.3.1 Discrétisation de l'équation de Vlasov

On cherche à simuler numériquement la solution d'une équation de Vlasov :

$$\begin{cases} f(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \\ \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{A}_{\text{ext}} f] = 0, \end{cases}$$

où le champ d'accélération \mathbf{A}_{ext} est fourni.

2.3.1.1 La méthode particulière

La grande dimension de l'espace des phases $((\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ ralentit considérablement la résolution de cette équation par une méthode de différences finies, volumes ou éléments finis. Il lui est souvent préféré une méthode dite **particulaire** [33, 34] qui non seulement fait diminuer le temps de calcul, mais en plus permet une interprétation intuitive de l'implémentation du schéma.

³<http://www.lifev.org/>

Supposons que f_0 soit une combinaison linéaire positive finie de masses de Dirac définies sur l'espace des phases :

$$f_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{p=1}^{N_f} \omega_p \delta_{\mathbf{x}_p} \otimes \delta_{\boldsymbol{\xi}_p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

On appelle alors *poids numérique* de la particule p le réel strictement positif ω_p (malgré son appellation, ce nombre est sans dimensions). La théorie des caractéristiques (voir A.2) nous fournit l'unique solution faible associée :

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{p=1}^{N_f} \omega_p \delta_{\mathbf{T}_{t,0}(t, \mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

où $\mathbf{T}_{t,0}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est le point de l'espace des phases par lequel passe, à l'instant t , la caractéristique issue de $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ à $t = 0$.

Du point de vue numérique, partant d'une condition initiale de type mesure de Dirac, la résolution de l'équation de Vlasov revient donc juste au calcul des courbes caractéristiques.

Dans le cas général, la condition initiale $f_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ peut être une simple fonction. On cherche un entier N_f ainsi qu'une suite de coefficients positifs $(\omega_p)_{1 \leq p \leq N_f}$ et de points $(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p)_{1 \leq p \leq N_f}$ de l'espace des phases tels que :

$$f_0 \approx \sum_{i=1}^{N_f} \omega_p \delta_{\mathbf{x}_p} \otimes \delta_{\boldsymbol{\xi}_p}.$$

Le plus raisonnable est de chercher l'approximation précédente au sens des mesures, *i.e.* pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$:

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{p=1}^{N_f} \omega_p \varphi(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Une telle approximation peut par exemple être fournie par une formule de quadrature :

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{p=1}^{N_f} a_p f_0(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p) \varphi(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p),$$

et on approche alors la solution de l'équation de Vlasov en remontant les caractéristiques :

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \approx \sum_{p=1}^{N_f} \omega_p \delta_{\mathbf{T}_{t,0}(t, \mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p)}, \quad (2.4)$$

où les poids numériques sont fournis par la formule suivante :

$$\omega_p = a_p f_0(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p).$$

On a alors l'impression d'être revenu à l'interprétation microscopique à laquelle on tentait d'échapper dans la section 1.2, mais il n'en est rien ! Le nombre N_f sera en pratique bien inférieur au nombre de particules physiques modélisées. Les particules que l'on suit dans l'espace des phases sont des **particules numériques**, affectées d'un **poids** (les coefficients $(\omega_p)_{1 \leq p \leq N_f}$) : chaque particule numérique peut être interprétée comme un paquet de ω_p particules physiques.

2.3.1.2 Discrétisation des caractéristiques

On cherche à approcher une courbe caractéristique, $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ issue, à l'instant initial, d'un point $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_0)$ de l'espace des phases. Il s'agit donc d'approcher le système :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \mathbf{A}_{\text{ext}}(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\xi}(t)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \boldsymbol{\xi}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\xi}_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Les deux schémas d'ordre 1 classiques d'Euler, explicites, implicites, sont souvent utilisés pour ce genre d'approximation, le premier n'étant utilisé que lorsque l'expression de \mathbf{A}_{ext} rend l'implémentation du second délicate. Dans le cas contraire, le schéma implicite s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_p^{n+1} &= \boldsymbol{\xi}_p^n + \Delta t \mathbf{A}_{\text{ext}}(t, \mathbf{x}_p^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_p^{n+1}), \\ \mathbf{x}_p^{n+1} &= \mathbf{x}_p^n + \Delta t \boldsymbol{\xi}_p^{n+1}. \end{aligned}$$

Mentionnons l'existence de variantes intermédiaires dans lesquelles une vitesse artificielle $\boldsymbol{\xi}^{n+\frac{1}{2}}$ est calculée entre deux pas de temps (correspondant à $\boldsymbol{\xi}^{n+1}$ dans le schéma d'Euler explicite), puis utilisée pour calculer \mathbf{x}^{n+1} . Dans notre cas nous utiliserons un schéma semi-implicite, en ce sens que le coefficient de traînée sera calculé à l'étape précédente, et la vitesse relative à l'étape courante (voir la sous-section 2.3.3.4 consacrée à l'implémentation).

2.3.2 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

On cherche à approcher les équations de Navier-Stokes dans un domaine mobile Ω_t , et sur un intervalle temporel $[0, T]$. Le fluide est soumis à une force extérieure volumique donnée \mathbf{f}_{ext} :

$$\begin{aligned} \rho_a [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} &= \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{x} \in \Omega_t. \end{aligned}$$

Dans un souci de simplification, nous présentons le schéma pour des conditions aux bords de Dirichlet homogène pour \mathbf{u} , même si en pratique la méthode implémentée peut tenir compte de conditions aux limites plus générales.

2.3.2.1 Discrétisation en temps pour un domaine fixe : le schéma d'Euler semi-implicite

Considérons une subdivision régulière $t_0 = 0 < t^1 = \Delta t < \dots < t^N = N\Delta t = T$ de l'intervalle $[0, T]$. Le domaine étant fixe, nous le noterons Ω . Si on approche la dérivée temporelle de \mathbf{u} par la formule classique d'ordre 1 :

$$\partial_t \mathbf{u}(t^{n+1}, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^n(\mathbf{x})}{\Delta t},$$

une manière d'assurer la stabilité du schéma est « d'impliciter » tous les autres termes de l'équation. L'inconvénient de cette méthode est de conserver la non-linéarité du terme de convection et d'imposer par la suite une méthode de type point fixe ou de Newton à chaque pas de temps. Le schéma d'Euler semi-implicite permet de s'affranchir de cet obstacle, tout en conservant une inégalité d'énergie assurant sa stabilité. Ce schéma s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_a \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^n(\mathbf{x})}{\Delta t} + \rho_a \mathbf{u}^n \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} + \nabla_{\mathbf{x}} p^{n+1} - \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{f}_{\text{ext}}^n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que l'implicitation est portée sur le *gradient* du terme convectif. Il est alors facile de voir que le schéma semi-discrétisé en temps est stable. En effet, pour une famille de champs $(\mathbf{u}^n)_n \in \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\Omega)$, en multipliant par \mathbf{u}^{n+1} l'équation précédente et en l'intégrant sur Ω , on obtient, pour tout n :

$$\rho_a \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \eta \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq \rho_a \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{C_\Omega}{2\eta} \|\mathbf{f}_{\text{ext}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2,$$

où C_Ω est la constante associée à l'inégalité de Poincaré. En sommant pour $0 \leq n \leq N-1$ on obtient par télescopage une estimation impliquant la stabilité inconditionnelle du schéma :

$$\rho_a \|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \eta \Delta t \sum_{k=1}^N \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^k\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq \rho_a \|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + T \frac{C_\Omega}{\eta} \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{f}_{\text{ext}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2.$$

2.3.2.2 La méthode ALE pour les domaines mobiles

Depuis trente ans, un nombre important de méthodes numériques visant à approcher une équation en domaine mouvant ont été développées. Nous utilisons ici la formulation **ALE**, **A**rbitrary **L**agrangian **E**ulerian, introduite au début des années 80 [66, 38]. Pour un bref panorama des autres méthodes existantes, le lecteur pourra consulter le premier chapitre de la thèse de Nobile [87].

Présentons le principe général de la méthode ALE avant de détailler son application dans le cadre de l'approximation des équations de Navier-Stokes en domaine mouvant *via* une méthode d'éléments finis. Ce paragraphe est largement inspiré des chapitres introductifs des thèses de Nobile [87] et Decoene [32].

Tout au long de cette sous-section, nous prendrons comme paradigme l'équation d'advection scalaire suivante :

$$\partial_t \psi + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{a}\psi] = f, \quad (2.5)$$

où \mathbf{a} est un champ et f un terme source réguliers.

La méthode ALE au service de la formulation forte

Considérons l'équation (2.5) sur $[0, T] \times \Omega$. En utilisant la méthode des différences finies d'ordre 1 classique pour approcher le terme de dérivation en temps, présent dans (2.5), on peut écrire :

$$\partial_t \psi(t^{n+1}, \mathbf{x}) \approx \frac{\psi(t^{n+1}, \mathbf{x}) - \psi(t^n, \mathbf{x})}{\Delta t}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.6)$$

Quid de (2.6) lorsque Ω est mobile? Il faut déjà préciser le domaine de définition de la fonction ψ , qui n'est plus simplement le cylindre $[0, T] \times \Omega$ (ensemble de \mathbb{R}^4 dont les sections sont isométriques) mais sur l'ensemble suivant que l'on peut voir comme un hypertube (à section variable!) de dimension 4 :

$$\Lambda := \bigcup_{t \in [0, T]} \{t\} \times \Omega_t,$$

où $(\Omega_t)_{0 \leq t \leq T}$ est la famille des domaines successifs en espace. Ceci étant dit, il est clair que l'approximation (2.6) est caduque puisque les ensembles de définitions de $\psi(t^{n+1}, \cdot)$ et $\psi(t^n, \cdot)$ ne sont pas les mêmes : $\psi(t^{n+1}, \mathbf{x})$ et $\psi(t^n, \mathbf{x})$ n'ont aucune raison d'être simultanément définis. La formulation ALE permet de contourner cette difficulté, mais nécessite une série d'hypothèses (raisonnables) sur le déplacement du domaine. Soit Ω_0 le domaine initial, qui sera également le domaine de référence. On suppose que l'on dispose, à chaque instant t , d'un homéomorphisme $\mathcal{A}_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant $\Omega_t = \mathcal{A}_t(\Omega_0)$; on suppose également que presque partout (en espace), $t \mapsto \mathcal{A}_t(\mathbf{x})$ est dérivable en temps.

L'une des clés de la méthode ALE est d'associer à la fonction ψ définie sur Λ une fonction de référence $\psi^\#$, définie sur $[0, T] \times \Omega_0$, de sorte qu'à chaque instant t , la fonction spatiale définie par $\psi(t, \cdot)$ n'est que

le « transport » de cette fonction de référence fixée, définie sur le domaine Ω_0 . Plus précisément, on notera par la suite, pour ψ définie sur Λ :

$$\begin{aligned} \psi^\# : [0, T] \times \Omega_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \mathbf{y}) &\longmapsto \psi(t, \mathcal{A}_t(\mathbf{y})). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Cette fonction permet de définir un nouvel opérateur de dérivation temporelle : la *dérivée au sens ALE*, notée $\partial_t^\#$.

$$\partial_t^\# \psi(t, \mathbf{x}) := [\partial_t \psi^\#](t, \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})).$$

L'intérêt de cet opérateur différentiel est d'être parfaitement adapté à une approximation de type (2.6). En effet, si pour $\mathbf{x} \in \Omega_{t^{n+1}}$ on note $\mathbf{y} := \mathcal{A}_{t^{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}) \in \Omega_0$ et on a :

$$\partial_t^\# \psi(t^{n+1}, \mathbf{x}) = \partial_t \psi^\#(t^{n+1}, \mathbf{y}) \approx \frac{\psi^\#(t^{n+1}, \mathbf{y}) - \psi^\#(t^n, \mathbf{y})}{\Delta t}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{t^{n+1}}, \quad (2.8)$$

où tous les termes du membre de droite sont définis sans ambiguïté, puisque $\psi^\#$ est définie sur $[0, T] \times \Omega_0$. En associant à la famille $(\mathcal{A}_t)_{t \in [0, T]}$ l'application :

$$\begin{aligned} \Theta : [0, T] \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathcal{A}_t(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

on note

$$\dot{\mathcal{A}}_t(\mathbf{x}) := \partial_t \Theta(t, \mathbf{x}), \quad (2.10)$$

et on introduit la vitesse du domaine $\mathbf{w}(t, \mathbf{x})$, définie sur Λ par :

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{x}) := \dot{\mathcal{A}}_t[\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})]. \quad (2.11)$$

Cette vitesse permet de relier les deux opérateurs de dérivation temporelle ∂_t et $\partial_t^\#$ par l'expression suivante, simple conséquence de la formule de chaîne :

$$\partial_t^\# = \partial_t + \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}.$$

Finalement, en utilisant (2.8) et la définition (2.7), on dispose alors d'une formule d'approximation pour la dérivée temporelle, donnée par :

$$\partial_t \psi(t^{n+1}, \mathbf{x}) \approx \frac{\psi(t^{n+1}, \mathbf{x}) - \psi(t^n, \mathcal{A}_{t^n} \circ \mathcal{A}_{t^{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}))}{\Delta t} - \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi(t^{n+1}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{t^{n+1}},$$

où, encore une fois, tous les termes sont correctement définis.

Les formulations faibles ALE

La méthode ALE permet également d'approcher une formulation faible (en espace) de l'équation (2.5) en domaine mobile, à condition que les fonctions tests utilisées soient choisies correctement. Le domaine étant mobile, il est nécessaire de travailler avec des fonctions tests spatiales dépendantes du temps. Au lieu de considérer, à chaque instant t , un espace de fonctions tests $\mathcal{S}(\Omega_t)$ associé à Ω_t , la formulation ALE impose de passer par un espace de fonctions tests de **référence**. Ainsi, étant donné un espace $\mathcal{S}(\Omega_0)$ constitué de fonctions régulières, définies sur Ω_0 , et indépendantes du temps, on introduit :

$$\mathcal{S}(\Omega)^\#, t := \{\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3; \varphi \circ \mathcal{A}_t \in \mathcal{S}(\Omega_0)\}.$$

où la composition “ $\circ \mathcal{A}_t$ ” est à comprendre uniquement sur la variable spatiale. L’ensemble $\mathcal{S}(\Omega)^{\#,t}$ sera alors l’espace de fonctions tests associé à Ω_t . On remarque que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)^{\#,t}$, $\varphi \circ \mathcal{A}_t$ ne dépend plus du temps. Ainsi, les fonctions tests ne dépendent du temps que par l’intermédiaire du mouvement du domaine. Ceci est d’une importance capitale pour la formulation ALE conservative décrite plus bas. Il faut prendre garde au fait suivant : parti d’un espace $\mathcal{S}(\Omega_0)$ constitué de fonctions admissibles pour la formulation faible choisie (typiquement suffisamment régulières et intégrables), *a priori* rien n’impose que cela sera également le cas pour $\mathcal{S}(\Omega)^{\#,t}$. En général, il faut imposer une condition sur la déformation \mathcal{A}_t pour assurer ce type de condition, nous reviendrons sur ce point lorsque nous présenterons la méthode ALE dans le cadre de la résolution par éléments finis des équations de Navier-Stokes.

Sans tenir compte des conditions aux bords, ni des conditions initiales, une formulation faible de l’équation (2.5) est alors donnée par l’expression suivante :

$$\int_{\Omega_t} \varphi \{ \partial_t \psi + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{a}\psi] \} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \psi f \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \forall t \in [0, T], \forall \varphi \in \mathcal{S}(\Omega)^{\#,t}.$$

Partant de cette formulation, il existe deux types de formulations faibles ALE, permettant de faire disparaître le terme de dérivation temporelle dont on a vu que la discrétisation serait problématique.

La formulation faible ALE non-conservative :

Elle consiste à remplacer l’opérateur ∂_t par l’opérateur $\partial_t^\#$ introduit dans le paragraphe précédent pour la formulation forte. Elle s’écrit donc :

$$\int_{\Omega_t} \varphi \partial_t^\# \psi \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} \varphi \{ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{a}\psi] - \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi \} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \psi f \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \forall t \in [0, T], \forall \varphi \in \mathcal{S}(\Omega)^{\#,t}.$$

La formulation faible ALE conservative :

Le principe de la formulation conservative est de « sortir » la dérivation temporelle du signe intégral dans l’expression suivante :

$$\int_{\Omega_t} \varphi \partial_t \psi \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Ceci ne peut se faire sans terme de correction, même formellement, car la fonction test φ ainsi que le domaine considéré dépendent du temps. Si l’on effectue le changement de variable $\mathbf{y} := \mathcal{A}_t(\mathbf{x})$ pour revenir au domaine fixe, la dépendance temporelle de φ est éliminée ($\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)^{\#,t} \Rightarrow \varphi \circ \mathcal{A}_t$ indépendante du temps) mais un terme de convection apparaît, dû au flux produit par le déplacement du domaine.⁴

Détaillons le calcul. Remarquons en premier lieu que l’on peut considérer $\Theta(t, \mathbf{x}) = \mathcal{A}_t(x)$ comme un point d’une courbe caractéristique, issue du point $\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})$, avec la vitesse $\mathbf{w}(t, \mathbf{x})$ (on parcourt le chemin inverse menant à Ω_0). En particulier, en notant pour tout $t \geq 0$ J_t le jacobien de \mathcal{A}_t , on a la formule classique qui nous servira par la suite :

$$\dot{J}_t(\mathbf{y}) = J_t(\mathbf{y}) \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})(t, \mathcal{A}_t(\mathbf{y})). \quad (2.12)$$

⁴On peut voir cela comme une variante du théorème de Reynolds qui exprime la variation de la masse $m(t)$ d’un volume $S(t)$ dont la masse volumique $s(t, \mathbf{x})$ et la forme évoluent au cours du temps :

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{S(t)} s(t, \mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\Downarrow \\ m'(t) &= \int_{S(t)} \left[\partial_t s(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (s(t, \mathbf{x}) \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) \right] \, \mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned}$$

Écrivons maintenant le changement de variable associé au terme temporel (∇_2 désigne le gradient de ψ par rapport à la variable spatiale, on reprend la notation $\nabla_{\mathbf{x}}$ par la suite, lorsque l'ambiguïté sera levée) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \varphi \partial_t \psi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_0} [\varphi \partial_t \psi](t, \mathcal{A}_t(\mathbf{y})) J_t(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega_0} \varphi^\#(\mathbf{y}) [\partial_t \psi](t, \mathcal{A}_t(\mathbf{y})) J_t(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega_0} \varphi^\#(\mathbf{y}) \partial_t [\psi(t, \mathcal{A}_t(\mathbf{y})) J_t(\mathbf{y})] \, d\mathbf{y} - \int_{\Omega_0} \varphi^\#(\mathbf{y}) \dot{\mathcal{A}}_t(\mathbf{y}) \cdot \nabla_2 \psi(t, \mathcal{A}_t(\mathbf{y})) J_t(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Omega_0} \varphi^\#(\mathbf{y}) \psi(t, \mathcal{A}_t(\mathbf{y})) \dot{J}_t(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Le vecteur $\varphi^\#(\mathbf{y}) = \varphi(t, \mathcal{A}_t(\mathbf{y}))$ ne dépend plus du temps, si bien que dans le premier terme de la dernière ligne, on peut cette fois-ci formellement sortir la dérivation du signe intégral. Ensuite, on revient au domaine mobile en effectuant le changement de variable inverse, pour finalement obtenir :

$$\int_{\Omega_t} \varphi \partial_t \psi \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi \psi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t} \varphi [\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi] \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{w}) \psi(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (2.13)$$

La formulation faible ALE conservative s'écrit finalement : pour tout $t \in [0, T]$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)^{\#,t}$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} \varphi \{ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{a}\psi] - \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi - \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{w}) \psi \} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \psi f \, d\mathbf{x},$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} \varphi \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{w})\psi] \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \psi f \, d\mathbf{x}, \quad \forall t \in [0, T], \forall \varphi \in \mathcal{S}(\Omega)^{\#,t}.$$

Si l'on prend une source nulle et que l'on considère une fonction indicatrice $\varphi = \mathbb{1}_V$ admissible, l'équation précédente se transforme en équation de conservation, justifiant l'appellation de cette formulation.

2.3.2.3 Formulation faible ALE conservative

Nous allons utiliser la formulation faible ALE conservative présentée dans la sous-section 2.3.2.2 pour approcher le système (2.2)–(2.3). Suivant ce qui a été décrit, nous introduisons les deux espaces de fonctions tests de références. On note $\mathbf{H}_0^1(\Omega_0)$ l'adhérence, au sens \mathbf{H}^1 , des fonctions tests vectorielles à support compact dans Ω_0 . L'ensemble $L_0^2(\Omega_0)$ désigne le sous-espace des fonctions scalaires d'intégrale nulle. On définit alors les deux espaces de fonctions tests :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)^{\#,t} &:= \{ \mathbf{v} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \mathbf{v} \circ \mathcal{A}_t \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0) \}, \\ L^2(\Omega_0)^{\#,t} &:= \{ q : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} ; q \circ \mathcal{A}_t \in L^2(\Omega_0) \}, \end{aligned}$$

et les deux espaces dans lesquels nous allons chercher nos solutions (vitesse et pression)

$$\begin{aligned} L_0^2(\Omega_0)^{\#,t} &:= \{ p : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} ; p \circ \mathcal{A}_t \in L_0^2(\Omega_0) \}, \\ L^2([0, T]; \mathbf{H}_0^1(\Omega_0))^{\#,t} &:= \left\{ \mathbf{u} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \mathbf{u} \circ \mathcal{A}_t \in L^2([0, T]; \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)) \right\}. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons remarqué précédemment, en général, à t fixé, l'espace $\{ \mathbf{v}(t, \cdot) ; \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)^{\#,t} \}$ diffère de $\mathbf{H}_0^1(\Omega_t)$ mais il est nécessaire pour donner un sens à la formulation faible sur Ω_t d'imposer $\mathbf{v}(t, \cdot) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_t)$. Nobile donne un critère suffisant d'égalité entre les deux premiers espaces en ajoutant une équivalence des normes associées (résultats analogues pour $L_0^2(\Omega_t)$). Le critère se résume en une condition de régularité Lipschitz pour le bord de Ω_t à tout instant, et les appartenances $\mathcal{A}_t \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega_0)$, $\mathcal{A}_t^{-1} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega_t)$.

Nous supposons par la suite cette condition vérifiée de sorte que ces espaces soient confondus.

Les espaces fonctionnels sont maintenant définis et nous pouvons écrire la formulation faible conservative en intégrant (1.17) contre une fonction test $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)^{\#,t}$, et en utilisant une formule analogue à (2.13). La formulation faible est donc la suivante :

$$\rho_a \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \rho_a \int_{\Omega_t} [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \rho_a \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{w}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.14)$$

$$+ \eta \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad (2.15)$$

pour tout $t \in [0, T]$ et toute fonction test $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^{\#,t}$, complétée par la condition d'incompressibilité :

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{u}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall q \in L^2(\Omega)^{\#,t}.$$

Remarque 2.3.1 : *Revenons sur l'appellation (« Arbitrary Lagrangian Eulerian »). Au départ, les données du problème ne fournissent que le déplacement de la frontière du domaine. Pour définir le déplacement interne de ce dernier, on pourrait par exemple choisir de déplacer le domaine (en son intérieur) en prenant pour vitesse de déplacement \mathbf{u} (méthode Lagrangienne), ou 0 (Eulérienne). La méthode ALE propose une vitesse arbitraire \mathbf{w} , que l'on peut voir comme un compromis entre les deux précédentes configurations. L'avantage de cette dernière option étant de pouvoir choisir une vitesse ne déformant pas trop le maillage.*

2.3.2.4 Discrétisation en temps de la formulation faible ALE

Si on adapte le schéma d'Euler semi-implicite que l'on a établi dans la sous-section 2.3.2.1 à la formulation faible précédemment obtenue, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_a}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v}^{n+1} d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{t^n}} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v}^n d\mathbf{x} \right\} + \int_{\Omega_{t^{n+1}}} [(\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1}] \cdot \mathbf{v}^{n+1} d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \operatorname{div}(\mathbf{w}^{n+1}) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v}^{n+1} d\mathbf{x} \\ + \eta \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^{n+1} d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega_{t^{n+1}}} p^{n+1} \operatorname{div}(\mathbf{v}^{n+1}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}^{n+1} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'élément \mathbf{u}^* doit alors être fixé. Le choix $\mathbf{u}^* := \mathbf{u}^n$ réalisé dans le cas fixe ne semble pas cohérent ici car \mathbf{u}^n n'est pas défini sur le domaine $\Omega_{t^{n+1}}$ mais uniquement sur Ω_{t^n} ! Une solution raisonnable est alors de transporter \mathbf{u}^n sur le nouveau maillage :

$$\mathbf{u}^* := \mathbf{u}^n \circ \mathcal{A}_{t^n} \circ \mathcal{A}_{t^{n+1}}^{-1}. \quad (2.17)$$

2.3.2.5 ALE et éléments finis

Il s'agit d'écrire la formulation semi-discrétisée précédente dans des espaces de dimension finie approchant $\mathbf{H}_0^1(\Omega_t)$ et $L_0^2(\Omega_t)$. Nous allons encore une fois transporter des structures de référence pour définir des espaces d'éléments finis à chaque pas de temps. Le descriptif qui suit s'inspire en partie de [87, 32] pour l'aspect ALE, et de l'ouvrage [4] pour l'aspect éléments finis. Pour un maillage tétraédrique T_0^h (i.e. une union de tétraèdres $(T_i)_{1 \leq i \leq P_h}$) approchant le domaine Ω_0 , et une méthode $\mathbb{P}_{k_1} - \mathbb{P}_{k_2}$, on prendra les deux espaces de référence suivants :

$$\begin{aligned} V_h^0 &= \{ \mathbf{v} \in \mathcal{C}^0(\overline{T_0^h}); \mathbf{v}|_{T_i} \in \mathbb{P}_{k_1} \forall i \in \llbracket 1, P_h \rrbracket \} \cap \mathbf{H}_0^1(T^h), \\ Q_h^0 &= \{ q \in \mathcal{C}^0(\overline{T_0^h}); q|_{T_i} \in \mathbb{P}_{k_2} \forall i \in \llbracket 1, P_h \rrbracket \} \cap L_0^2(T_0^h), \end{aligned}$$

où \mathbb{P}_ℓ est le sous-espace de $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ formé des polynômes de degré total inférieur à ℓ .

V_h et Q_h sont alors tous les deux de dimension finie de bases respectives $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq N_h}$ et $(\psi_j)_{1 \leq j \leq M_h}$, vérifiant :

$$\varphi_k^0(\sigma_i) = \delta_{ik}, \quad 1 \leq i \leq N_h, \quad (2.18)$$

$$\psi_j^0(\tau_m) = \delta_{jm}, \quad 1 \leq m \leq M_h, \quad (2.19)$$

où les points $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ et $(\tau_m)_{1 \leq m \leq M_h}$ parcourent respectivement les nœuds des treillis d'ordre k_1 et k_2 du maillage T^h . On définit alors les espaces d'éléments finis utilisés à l'instant t de manière analogue à ce que l'on a fait pour les espaces fonctionnels :

$$V_h^{\#,t} := \{\mathbf{v} : \Lambda^h \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{v} \circ \mathcal{A}_t \in V_h^0\},$$

$$Q_h^{\#,t} := \{q : \Lambda^h \rightarrow \mathbb{R}; q \circ \mathcal{A}_t \in Q_h^0\},$$

où Λ^h est défini par :

$$\Lambda^h := \bigcup_{t \in [0, T]} \{t\} \times T_t^h,$$

et $T_t^h := \mathcal{A}_t(T_0)$. Ainsi, à chaque pas de temps t^n , on transporte les éléments finis précédents par les deux bases de références, (2.18) et (2.19) deviennent :

$$\varphi_k^n(\mathbf{x}) := \varphi_k^0 \circ \mathcal{A}_{t^n}^{-1}(\mathbf{x}), \quad (2.20)$$

$$\psi_j^n(\mathbf{x}) := \psi_j^0 \circ \mathcal{A}_{t^n}^{-1}(\mathbf{x}). \quad (2.21)$$

On a alors les décompositions, à l'instant t^n :

$$\mathbf{u}_h^n(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_h} u_k^n \varphi_k(\mathbf{x}), \quad p_h^n(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{M_h} p_j^n \psi_j(\mathbf{x}),$$

de sorte que les inconnues sont désormais les vecteurs :

$$\mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_{N_h}^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} p_1^n \\ \vdots \\ p_{M_h}^n \end{pmatrix}.$$

Le transport (2.20)–(2.21) des éléments finis justifie d'autant plus l'approximation (2.17) réalisée précédemment car, de cette manière, la décomposition de \mathbf{u}_h^n sur la base d'éléments finis $(\varphi_k^n)_{1 \leq k \leq N_h}$ se transforme en :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^n &= \sum_{k=1}^n u_k^n \varphi_k^n(\mathbf{x}) \\ &\Downarrow \\ \mathbf{u}_h^* &= \sum_{k=1}^n u_k^n \varphi_k^n \circ \mathcal{A}_{t^n} \circ \mathcal{A}_{t^{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n u_k^n \varphi_k^{n+1}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Concrètement, cela revient à stocker les valeurs nodales définies par le vecteur \mathbf{U}^n et les réinjecter telles quelles dans le schéma de l'étape courante.

L'équation (2.16) se transforme alors en système linéaire :

$$\frac{\rho_a}{\Delta t} [M^{n+1} \mathbf{U}^{n+1} - M^n \mathbf{U}^n] - \rho_a C^{n+1}(\mathbf{U}^n, \mathbf{W}^{n+1}) \mathbf{U}^{n+1} + \eta A^{n+1} \mathbf{U}^{n+1} + {}^t B \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (2.22)$$

$$B \mathbf{U}^{n+1} = 0, \quad (2.23)$$

avec

$$\mathbf{W}^{n+1} := \begin{pmatrix} w_1^{n+1} \\ \vdots \\ w_{N_h}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \text{vitesse du maillage donnée par nœuds,} \quad (2.24)$$

$$M^{n+1} := (M_{i,j}^{n+1})_{1 \leq i,j \leq N_h}, \quad M_{i,j}^{n+1} := \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \varphi_i^{n+1} \cdot \varphi_j^{n+1} \, d\mathbf{x},$$

$$A^{n+1} := (A_{i,j}^{n+1})_{1 \leq i,j \leq N_h}, \quad A_{i,j}^{n+1} := \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i^{n+1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_j^{n+1} \, d\mathbf{x},$$

$$C^{n+1}(\mathbf{U}^n, \mathbf{W}^{n+1}) := (C_{i,j}^{n+1}(\mathbf{U}^n, \mathbf{W}^{n+1}))_{1 \leq i,j \leq N_h},$$

$$C_{i,j}^{n+1}(\mathbf{U}^n, \mathbf{W}^{n+1}) := \sum_{k=1}^{N_h} (u_k^n - w_k^{n+1}) \int_{\Omega_{t^{n+1}}} [\varphi_k^{n+1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_j^{n+1}] \cdot \varphi_i^{n+1} \, d\mathbf{x}, \quad (2.25)$$

$$B^{n+1} := (B_{m,j}^{n+1})_{1 \leq m \leq M_h, 1 \leq j \leq N_h}, \quad B_{m,j}^{n+1} := - \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \psi_m^{n+1} \operatorname{div}(\varphi_j^{n+1}) \, d\mathbf{x},$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N_h} \end{pmatrix}, \quad f_i := \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \varphi_i^{n+1} \, d\mathbf{x}, \quad \forall i \in \llbracket 1, N_h \rrbracket. \quad (2.26)$$

En pratique, on résout le système de taille $N_h + M_h$:

$$\begin{pmatrix} D_n & {}^t B \\ B^{n+1} & 0_{M_h, M_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ 0_{M_h} \end{pmatrix} + \frac{\rho_a}{\Delta t} \begin{pmatrix} M^n \mathbf{U}^n \\ 0_{M_h} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

où $D_n = \frac{\rho_a}{\Delta t} M^{n+1} - \rho_a C^{n+1}(\mathbf{U}^n, \mathbf{W}^{n+1}) + \eta A^{n+1}$.

Remarque 2.3.2 : Nous avons volontairement omis d'aborder les méthodes de stabilisation implémentées dans `LifeV`, notre but étant juste de décrire l'interaction du fluide avec l'aérosol.

2.3.2.6 Discrétisation du mouvement \mathcal{A}_t

La déformation \mathcal{A}_t n'est en général pas donnée de manière explicite : on part d'une déformation de la frontière et on définit \mathcal{A}_t comme solution, par exemple, d'un problème de Poisson dans Ω_t à chaque instant. Cette méthode de **relèvement harmonique** est celle utilisée dans `LifeV`, l'équation au laplacien étant résolue par des éléments finis d'ordre \mathbb{P}_1 ⁵.

On a alors, à chaque pas de temps, la nouvelle position de chaque point du maillage et on discrétise la vitesse du maillage (dont on a besoin dans la formulation ALE) par une méthode de différences finies. Plus précisément, en reprenant les notations (2.9) et (2.10), on a par définition (2.11) de la vitesse :

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{x}) := \partial_t \Theta[t, \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})].$$

Comme Θ est définie sur $[0, T] \times \Omega_0$, cette expression peut donc être approchée par la méthode de différence finies :

$$\mathbf{w}(t^{n+1}, \mathbf{x}) \approx \frac{\Theta(t^{n+1}, \mathcal{A}_{t^{n+1}}^{-1}(\mathbf{x})) - \Theta(t^n, \mathcal{A}_{t^n}^{-1}(\mathbf{x}))}{\Delta t},$$

i.e., d'après (2.9) :

$$\mathbf{w}(t^{n+1}, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathcal{A}_{t^{n+1}}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}_{t^n}(\mathbf{x})}{\Delta t}.$$

⁵En règle générale, la discrétisation de l'équation de base est intimement liée à la discrétisation choisie pour le mapping \mathcal{A}_t : celle-ci doit être isoparamétrique, de degré égal à celui du paramétrage des éléments finis utilisés pour l'équation. Nous renvoyons à [87] pour plus de détails.

\mathcal{A}_t étant fourni par valeurs nodales, il en est de même de la vitesse. Finalement, ce déplacement du maillage sous forme discrète suffit à transporter les éléments finis suivant les formules (2.20)–(2.21), puisque ceux-ci sont définis par leur valeurs aux nœuds et la vitesse calculée en chaque nœud permet de définir (2.24).

2.3.3 Couplage

Il s’agit maintenant de décrire le couplage entre les équations de Navier-Stokes et l’équation de Vlasov. Plusieurs difficultés se posent : comment faire passer l’information du fluide aux particules (*i.e.* calcul de l’accélération de traînée) et des particules au fluide (calcul de la force de rétroaction) ? Et comment avancer en temps le schéma ?

2.3.3.1 Discrétisation de la force de traînée

On cherche à implémenter la méthode de la section 2.3.1.1 dans le cadre d’un couplage Vlasov/Navier-Stokes en domaine mobile dans lequel les équations de Navier-Stokes sont approchées par la méthode d’éléments finis détaillée précédemment. Dans le cadre de l’approximation particulaire, à l’étape temporelle n , nous étudions donc une particule numérique de position \mathbf{x}_p^n , vitesse $\boldsymbol{\xi}_p^n$. Rappelons l’expression (1.13)–(1.14) fournissant le champ d’accélération de traînée subie par une particule physique, de position \mathbf{x} et vitesse $\boldsymbol{\xi}$, évoluant dans un fluide ayant une vitesse \mathbf{u} (voir la sous-section 1.3.1) :

$$\mathbf{A}_d(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{9}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\eta}{\rho_p} \left(1 + \frac{1}{6} \text{Re}_p^{\frac{2}{3}}\right) (\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}), & \text{pour } \text{Re}_p < 1000, \\ 0.424 \times \frac{3}{8} \frac{1}{r} \frac{\rho_a}{\rho_p} \|\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}\| (\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}), & \text{pour } \text{Re}_p \geq 1000. \end{cases}$$

Le fluide étant donné sous forme discrète, pour donner un sens à l’expression précédente, et notamment à l’évaluation $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_p^n)$, on procède classiquement par interpolation. En conservant les notations des sections précédentes, on note $\tilde{\mathbf{u}}^n$ l’interpolation linéaire continue du vecteur \mathbf{U}^n sur le maillage $T_{t^n}^h$. Celle-ci permet alors de définir une accélération de traînée discrétisée, pour la particule située au point $(\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n)$ de l’espace des phases :

$$\widetilde{\mathbf{A}}_d(\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n, \tilde{\mathbf{u}}^n) = \text{K}_D[\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n, \tilde{\mathbf{u}}^n] (\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{x}_p^n) - \boldsymbol{\xi}_p^n),$$

où

$$\text{K}_D[\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n, \tilde{\mathbf{u}}^n] := \begin{cases} \frac{9}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\eta}{\rho_p} \left(1 + \frac{1}{6} \text{Re}_p^{\frac{2}{3}}\right), & \text{pour } \text{Re}_p < 1000, & (2.28) \\ 0.424 \times \frac{3}{8} \frac{1}{r} \frac{\rho_a}{\rho_p} \|\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{x}_p^n) - \boldsymbol{\xi}_p^n\|, & \text{pour } \text{Re}_p \geq 1000. & (2.29) \end{cases}$$

Remarque 2.3.3 : *On rappelle que le nombre de Reynolds particulaire Re_p dépend de la position et de la vitesse de la particule.*

Il serait inutile de reconstruire, à chaque pas de temps, la fonction $\tilde{\mathbf{u}}^n$ sur *tout* le maillage. En réalité, seule son évaluation en les positions des particules est nécessaire, *i.e.* seules les coordonnées barycentriques des particules dans les mailles les contenant. Si une particule appartient à une maille tétraédrique donnée, la vitesse du fluide vue par cette particule est la somme des vitesses aux quatre nœuds de la maille, pondérées par les coordonnées barycentriques correspondantes.

Ceci suppose, à chaque pas de temps, la connaissance de la maille dans laquelle chacune des particules se trouve. On utilise pour cela un algorithme de localisation détaillé en annexe B. Si on simule un grand nombre de particules numériques, l’exécution répétée (nombre de pas temps multiplié par nombre de particules) d’un tel algorithme peut s’avérer très coûteuse. Mais en pratique, cette localisation s’effectue en un petit nombre d’étapes car, à chaque pas de temps, l’algorithme de localisation commence par la maille contenant la particule à l’étape précédente et une particule ne traverse qu’une ou deux mailles

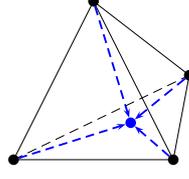


FIG. 2.1 – Interpolation de la vitesse aux nœuds de la maille contenant la particule

par pas de temps. Cet algorithme de localisation permet également de prendre en compte la condition d'absorption de la paroi : si la particule n'est pas localisée dans le maillage, elle n'est plus prise en compte dans les itérations suivantes.

2.3.3.2 Discrétisation de la force de réaction

La discrétisation de l'accélération de traînée fournit celle de la force de traînée (pour des particules de masse r et de masse volumique ρ_p) :

$$\widetilde{\mathbf{F}}_d(\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n, \tilde{\mathbf{u}}^n) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_p \widetilde{\mathbf{A}}_d(\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n, \tilde{\mathbf{u}}^n).$$

L'expression de la force de réaction établie en (1.15),

$$\mathbf{F}_{\text{spray}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}_d(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.30)$$

fait intervenir la fonction de densité f qui, dans le cadre de la méthode particulaire, est approchée par une combinaison linéaire positive de masses de Dirac (2.4) :

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \approx \sum_{p=1}^{N_f} \omega_p \delta_{\mathbf{T}_{t,0}(t, \mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p)}.$$

En notant $(\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n)$ la position des caractéristiques à l'instant t^n , on a donc la discrétisation :

$$f(t^n, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \approx \sum_{p=1}^{N_f} \omega_p \delta_{\mathbf{x}_p^n} \otimes \delta_{\boldsymbol{\xi}_p^n}.$$

On déduit de ce qui précède la discrétisation de la force de réaction, sous forme de mesure :

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{\text{spray}}(\mathbf{u}^n) = - \sum_{p=1}^{N_f} \omega_p \widetilde{\mathbf{F}}_d(\tilde{\mathbf{u}}^n, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_p^n) \delta_{\mathbf{x}_p^n}. \quad (2.31)$$

2.3.3.3 $n \rightarrow n + 1$

Nous traitons le couplage étudié de manière **explicite**, *i.e.* nous calculons une seule fois par pas de temps la vitesse du fluide que nous utilisons ensuite pour faire avancer les particules. Ce schéma itératif correspond à celui utilisé dans la démonstration de l'existence de solution faible que l'on présente au chapitre 3 et semble stable dans la gamme de tests numériques que nous avons réalisés (mais ne conviendrait probablement plus pour des vitesses trop grandes). Le calcul de la force de réaction se fait également en décalage. Plus précisément, à chaque pas de temps la force de réaction utilisée pour mettre à jour la vitesse du fluide correspondra aux vitesses de particules et à la vitesse fluide *de l'étape précédente*. Cette décision

prise (même si elle explicite sensiblement le schéma), le pendant de l'expression nodale (2.26) dans le cas d'une force extérieure quelconque devient, en utilisant (2.31) :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}^n := \begin{pmatrix} f_1^n \\ \vdots \\ f_{N_h}^n \end{pmatrix}, \quad f_i^n := - \sum_{p=1}^N \widetilde{\mathbf{F}}_d(\mathbf{u}^n, \mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n) \varphi_i^n(\mathbf{x}_p^n) \omega_p, \quad \forall i \in \llbracket 1, N_h \rrbracket.$$

Cette expression est ensuite injectée, à l'étape $n + 1$, dans le système (2.27).

2.3.3.4 Implémentation

Le solveur Navier-Stokes implémenté dans `LifeV` utilise très fortement l'aspect objet du `C++`. Aussi, le plus naturel a été d'introduire une classe `Particle` pour insérer la méthode particulière dans le code existant.

La définition de cette classe commence par les lignes suivantes :

```
class Particle
{
public:

    const mesh_type *M_meshp;
    Vector M_particlePosition;
    Vector M_particleVelocity;
    int M_particleNumber;
    int M_particleStepOut;
    ID M_particleWhereOut;
    double M_particleRadius;
    double M_particleDensity;
    int M_particleFlag;
    double M_particleTimeInjection;
    ID M_particleElementID;
    double M_particleTimeStep;
    double M_particleDragFactor;
    double M_particleNumericMass;
    ...

};
```

Un certain nombre d'attributs méritent d'être commentés. Comme nous l'avons remarqué dans la section 2.3.3.1, à chaque pas de temps il faudra localiser la particule dans le maillage. Étant donné l'aspect mobile de ce dernier, l'algorithme de localisation doit prendre en compte son déplacement à chaque pas de temps. L'attribut « `M_meshp` » est donc mis à jour à chaque pas de temps.

Rappelons l'expression de l'accélération de traînée (1.13)–(1.14) subie par une particule de masse $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p$, située au point $(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\xi}_p)$ de l'espace des phases, « percevant » au sens précisé dans la section 2.3.3.1, la vitesse $\tilde{\mathbf{u}}_p$ du fluide :

$$\widetilde{\mathbf{A}}_d(\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n, \tilde{\mathbf{u}}^n) = K_D[\mathbf{x}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n, \tilde{\mathbf{u}}^n](\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{x}_p^n) - \boldsymbol{\xi}_p^n),$$

où K_D est définie par (2.28)–(2.29).

Gemci *et al.* suivent dans [48] un schéma semi-implicite utilisé par O'Rourke pour la résolution des caractéristiques. Nous l'adaptions ici, en notant $K_p^n := K_D[\tilde{\mathbf{u}}_p^n, \boldsymbol{\xi}_p^n]$. Ce schéma revient à faire successivement les deux mises à jours suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_p^{n+1} &= \boldsymbol{\xi}_p^n + \Delta t K_p^n (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{x}_p^n) - \boldsymbol{\xi}_p^{n+1}), \\ \mathbf{x}_p^{n+1} &= \mathbf{x}_p^n + \Delta t \boldsymbol{\xi}_p^{n+1}. \end{aligned}$$

Il peut arriver que le pas de temps utilisé pour le fluide ne soit pas adapté à la particule considérée. Typiquement, si $\|\xi_p^n\|\Delta t > h$ où h est une taille caractéristique des tétraèdres du maillage, la particule risque de traverser plusieurs mailles en un pas de temps. La consistance du schéma s'en trouve réduite : la particule a traversé plusieurs mailles sans tenir compte du comportement du fluide dans celles-ci. Par ailleurs, la localisation effectuée à chaque étape prendra plus de temps (puisque'il faudra parcourir plus de mailles) sans pour autant augmenter la précision du schéma.

À chaque étape temporelle, pour chaque particule, on calcule donc un pas de temps approprié et on réalise une sous-boucle de calcul. Le pas de temps est une fraction entière du pas de temps fluide, calculé de sorte que $\|\xi_p\|\Delta s \leq h/2$.

Remarque 2.3.4 : Pour bien prendre la rétroaction en compte, le pas de temps fluide et le pas de temps particule doivent être égaux : la particule est freinée, maille par maille, mais doit pouvoir retransmettre sa vitesse au fluide, maille par maille, sans quoi l'effet de la rétroaction est très diminué. En pratique un calcul avec rétroaction est donc beaucoup plus coûteux puisqu'il impose au fluide un pas de temps parfois bien plus faible que dans le cas où la rétroaction n'est pas prise en compte.

La constante K_p^n est mise à jour une fois la particule déplacée (si celle-ci est toujours dans le maillage) et est utilisée pour le calcul de la force de rétroaction. Chaque particule alimente cette dernière sur les quatre nœuds de la maille la contenant, via ses coordonnées barycentriques. Les données fluides sont les conditions initiales ainsi que le paramétrage du déplacement surfacique. Les données initiales pour les particules sont contenues dans un fichier répertoriant leurs positions, vitesses, temps d'injection ainsi que leurs paramètres physiques (masse volumique, rayon). Le fichier indique également par quelle maille commencer la recherche de particules ; cette maille ne sera utilisée que pour la première boucle puisque par la suite la localisation est initialisée par l'ancienne position des particules.

La figure 2.2 contient un diagramme résumant l'algorithme implémenté.

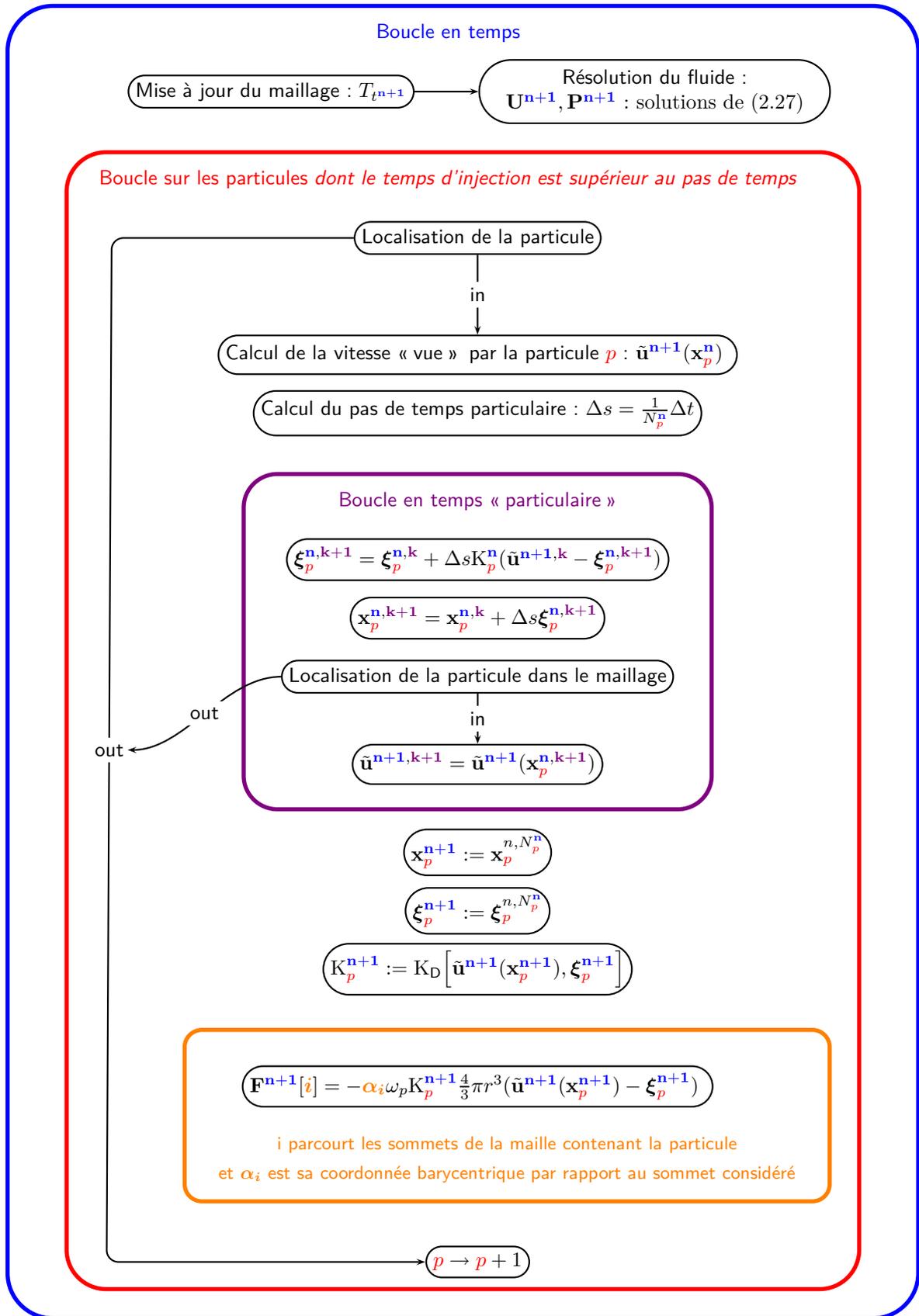


FIG. 2.2 – Algorithme de couplage ALE/Particules. Chacune des quatre boucles effectuées correspond à une couleur : temps fluide, particules, temps particule et sommets d'une maille.

2.4 Validation du code

Les tests suivants ont été réalisés sur le maillage tétraédrique d'un cylindre de révolution de longueur 25 fois supérieur à son rayon, de sorte qu'un régime de Poiseuille puisse s'y établir. Comme nous l'avons

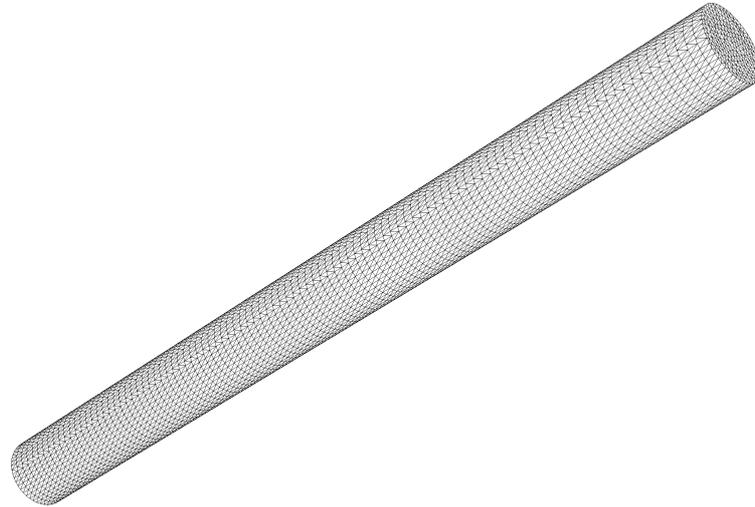


FIG. 2.3 – Maillage tétraédrique d'un cylindre de révolution de rayon 0.2 cm et de longueur 5 cm. 130 200 tétraèdres.

vu dans la sous-section 1.3.1, dans la limite d'un faible nombre de Reynolds particulaire, la loi de Stokes fournit une expression simple de la force de traînée.

$$\mathbf{F}_d(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -6\pi\eta r(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})).$$

Cette formule nous permet donc de prévoir la trajectoire des particules dans certains cas simples. Nous allons considérer dans chaque test une seule particule, sans tenir compte de la rétroaction, le but étant uniquement de valider le transport le long des caractéristiques.

2.4.1 Le cas du fluide immobile

Considérons une particule de vitesse initiale $\boldsymbol{\xi}_p^0$, de rayon r_p , de masse volumique ρ_p , injectée au temps $t = 0$ dans un fluide immobile (de l'air).

Si la loi de Stokes est vérifiée, l'équation régissant le mouvement de la particule est :

$$\boldsymbol{\xi}_p(t) = \boldsymbol{\xi}_p^0 \exp\left(-\frac{9}{2} \frac{\eta}{r_p^2 \rho_p} t\right). \quad (2.32)$$

La particule que nous allons considérer aura un rayon de l'ordre du micron ; la décroissance exponentielle aura donc tendance à empêcher toute progression dans le fluide dès lors que la particule y pénètre. Si l'on considère les paramètres physiques modélisant une gouttelette d'eau dans de l'air par exemple, le temps de pénétration est inutilement court et impose un pas de temps bien inférieur à celui nécessité par le schéma numérique. La motivation de ce test n'étant pas la physique du phénomène mais la convergence du calcul, nous allons accroître de manière non réaliste la masse volumique de la gouttelette à 1000g/cm^3 pour

permettre son avancée tout en gardant un nombre de Reynolds particulaire suffisamment petit. Rappelons que celui-ci est défini par :

$$\text{Re}_p := \frac{2}{\eta} \rho_a r \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}\|.$$

Le fluide étant au repos, si l'on prend comme vitesse de référence la vitesse d'entrée de la particule (celle-ci sera de toute façon ralentie par le fluide), l'expression précédente nous donne pour l'air :

$$\text{Re}_p \approx 13.016 \times r \|\boldsymbol{\xi}_p^0\|.$$

Ainsi, pour un rayon de $5 \mu\text{m}$ et une vitesse d'entrée de 5 cm/s , on obtient :

$$\text{Re}_p \approx 0.032 \ll 1.$$

La vitesse suit alors la loi suivante :

$$\boldsymbol{\xi}_p(t) = 5e^{-3.33t}.$$

Nous avons ensuite effectué la simulation correspondante sur un tube. La figure 2.4 représente les évolutions théorique et numérique de la vitesse (celle-ci étant essentiellement axiale) de la particule. Afin de tester la stabilité du schéma, nous avons effectué la même simulation pour différents pas de temps. La figure 2.5 représente l'écart dans l'espace des phases, en norme euclidienne, entre une série d'approximations de la courbe caractéristique pour différents pas de temps et une approximation de référence obtenue avec un pas de temps de 10^{-7} s .

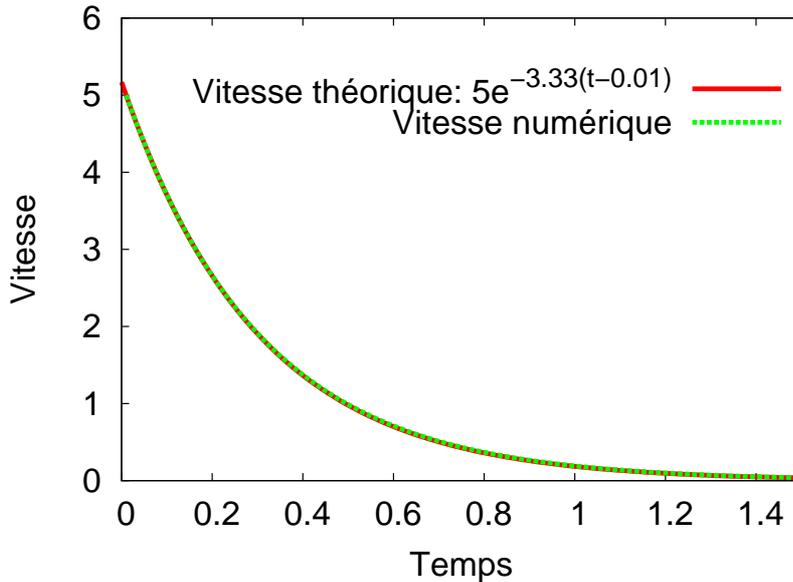


FIG. 2.4 – Vitesses numérique et théorique d'une particule immergée dans un fluide. L'insertion ayant lieu au premier pas de temps ($t = 0.01 \text{ s}$), la trajectoire théorique est translatée d'autant.

2.4.2 Le cas du profil de Poiseuille

Le cas suivant est un peu plus élaboré mais peut également se résoudre explicitement, ce qui permet encore une fois la prévision du comportement des particules. Si l'on impose à un fluide une différence de pression (uniforme selon le plan orthogonal au tube) en amont et en aval, un profil de Poiseuille (voir

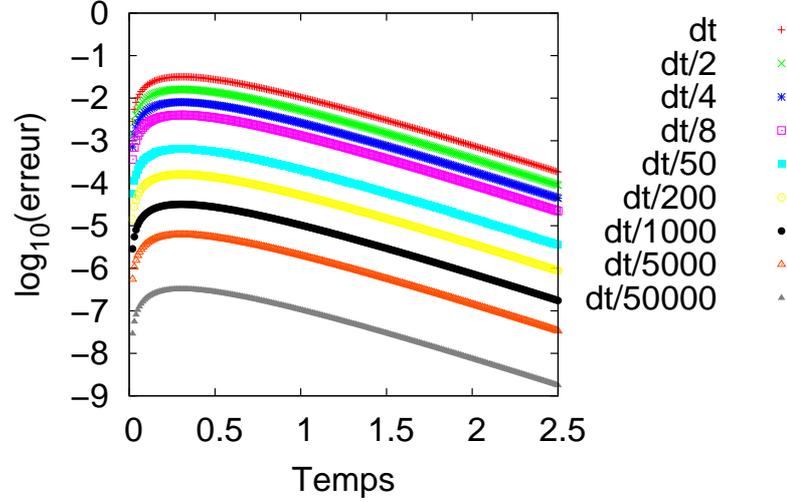


FIG. 2.5 – Critère de Cauchy vérifié par rapport au pas de temps, pour une particule de $5 \mu\text{m}$ insérée dans un fluide immobile. La figure représente le logarithme en base 10 de la distance euclidienne, dans l'espace des phases, avec une caractéristique de référence de pas de temps $10^{-5}dt$, avec dt le pas de temps fluide (valant 10^{-2}).

annexe C) s'installe, correspondant à une répartition en vitesse donnée par la formule (C.1) de l'annexe. Reprenons la particule considérée dans le cas précédent, et supposons que sa vitesse initiale est axiale. La formule (C.1) nous assure que la vitesse du fluide est une fonction radiale, dirigée selon l'axe. Étant donnée l'expression de l'accélération de traînée, la vitesse de la particule va donc rester axiale et, si la particule est initialement à une distance d_{inj} du centre du cylindre, on aura :

$$\xi_p(t) = \left\{ \xi_p^0 + \frac{1}{\tau_p} \int_0^t \mathbf{u}(d_{\text{inj}}) e^{s/\tau_p} ds \right\} e^{-t/\tau_p},$$

où l'on a noté

$$\tau_p := \frac{2 r_p^2 \rho_p}{9 \eta}.$$

Il vient donc, finalement :

$$\xi_p(t) = \mathbf{u}(d_{\text{inj}}) + (\xi_p^0 - \mathbf{u}(d_{\text{inj}})) e^{-t/\tau_p}. \quad (2.33)$$

Numériquement, le profil de Poiseuille s'établit en quelques étapes de calculs. Nous considérons une différence de pression de 10^{-2} Pa. On injecte trois particules situées respectivement à 0 cm (particule 1), 0.1 cm (particule 2) et 0.19 cm (particule 3) du centre, ayant initialement une vitesse axiale de -0.1 cm/s (*i.e.* opposée au mouvement du fluide). Tout d'abord, on vérifie le critère de Cauchy vis-à-vis du pas de temps comme dans le cas du fluide immobile (voir figure 2.7). Ensuite, on représente sur la figure 2.8 les trajectoires numériques des particules (uniquement en vitesse), ainsi que leur vitesse théorique *i.e.* la vitesse calculée grâce à la formule (2.33).

2.4.3 Comparaisons élémentaires

Dans une dernière étape de validation, nous avons vérifié les deux résultats de cohérence suivant :

- Si la rétroaction n'est pas enclenchée, le comportement du fluide est le même, avec ou sans particules, que cela soit en domaine fixe ou en domaine mobile.

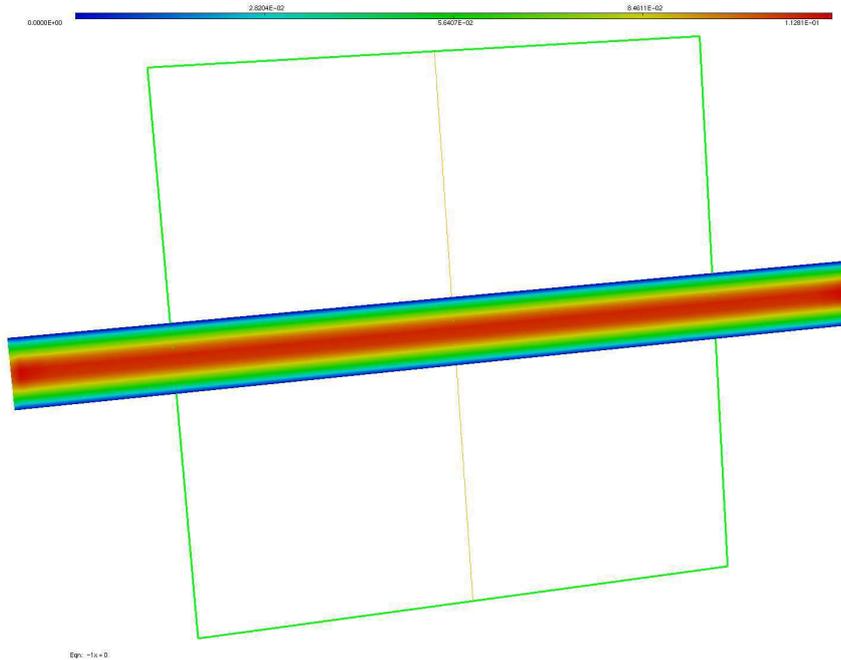


FIG. 2.6 – Composante axiale de la vitesse du fluide, sur une coupe du cylindre de révolution. Le profil de Poiseuille s’installe au bout de quelques itérations.

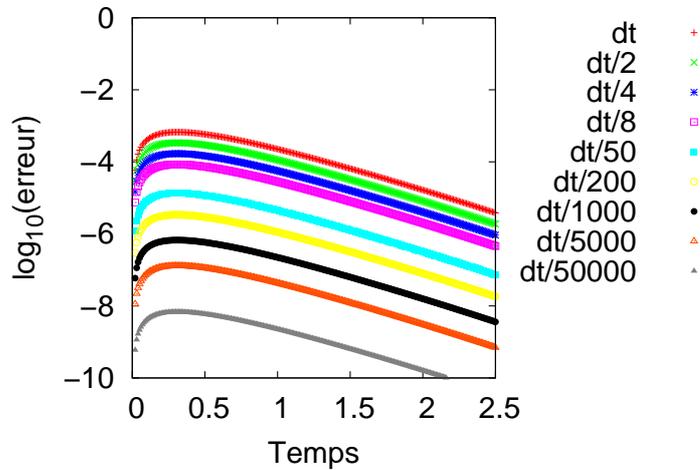


FIG. 2.7 – Critère de Cauchy dans le cas d’un régime de Poiseuille, pour une particule de $5\ \mu\text{m}$ située à $0.19\ \text{cm}$ du centre. La figure représente le logarithme en base 10 de la distance euclidienne, dans l’espace des phases, avec une caractéristique de référence de pas de temps $10^{-5}dt$, avec dt le pas de temps fluide (valant 10^{-2}).

- Les trajectoires de particules obtenues en utilisant le solveur Navier-Stokes en domaine fixe sont les mêmes que celles que l’on obtient avec le solveur Navier-Stokes/ALE avec un déplacement nul.

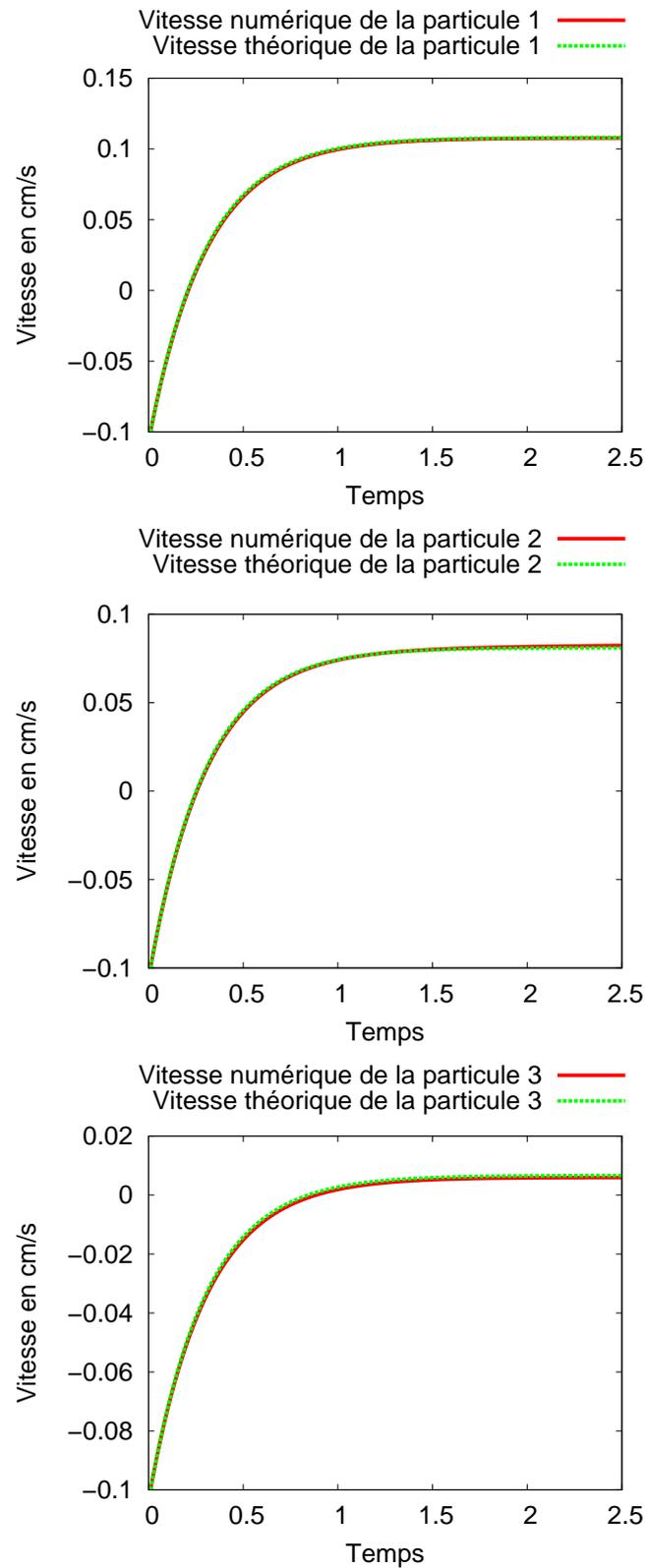


FIG. 2.8 – Particules insérées dans un régime de Poiseuille. La particule 1 est insérée au centre du cylindre, les particule 2 et 3 respectivement à 0.1 cm et 0.19 cm de l'axe.

2.5 Tests numériques en domaine fixe

2.5.1 Influence de la rétroaction

Le terme de rétroaction que nous avons introduit lors de la dérivation de notre modèle (voir la sous-section 1.3.2) n'est en général pas pris en compte dans les simulations numériques réalisées dans le cadre du transport de particules dans les voies respiratoires. Une des raisons possibles est sans doute son absence dans la plupart des codes commerciaux. Il est cependant important d'estimer l'influence de ce terme, en fonction de la taille et du nombre de particules. La modification, même légère, du comportement du fluide pourrait finalement modifier la trajectoire des particules et les phénomènes d'impaction associés.

2.5.1.1 Principe

Pour isoler ce phénomène, nous considérons un fluide initialement immobile dans lequel on injecte un aérosol à vitesse non nulle. Même si une telle expérience numérique n'a pas vraiment d'interprétation physique, elle a l'avantage de pouvoir facilement quantifier l'action de l'aérosol sur le fluide, tout en donnant une idée de ce qui se passerait dans un cas plus complexe où l'aérosol viendrait rencontrer orthogonalement un fluide en mouvement (en projetant sur l'axe perpendiculaire à l'écoulement).

2.5.1.2 Paramètres de simulation

La simulation est réalisée sur le maillage d'un cylindre de révolution de rayon 0.5 cm, de longueur 5 cm, constitué de 4680 tétraèdres. Le fluide est initialement au repos et l'on injecte des salves de 200 particules numériques par pas de temps (celui-ci valant 0.002 s), entre 0.002 s et 0.8 s, la simulation durant 1 s.

2.5.1.3 Paramètres des particules

Les particules numériques considérées ont un rayon de $50\ \mu\text{m}$ et une masse volumique de $1\ \text{g}/\text{cm}^3$ et sont injectées uniformément à l'entrée du cylindre (surface $z = 0$). Leur poids numérique est de 10^5 . Dans le cas de l'injection totale (soit 400 injections) on aboutit donc à un nombre total de 80 000 particules numériques, soit $8 \cdot 10^9$ particules physiques. Ceci surestime légèrement le nombre de particules qu'expulsent les nébuliseurs commerciaux (plutôt 10^{10} par minute). Mais à l'inverse, la vitesse d'injection que nous considérons est inférieure à celle des dispositifs pharmaceutiques (qui elle est plutôt de l'ordre du mètre par seconde). Avec une telle vitesse d'entrée, nos particules sortiraient au bout de quelques étapes de calculs. En effet, pour se donner un ordre d'idée, observons que l'amortissement exponentiel fourni par la formule de Stokes (2.32) donnerait, dans le cas d'une particule de $50\ \mu\text{m}$ injectée avec une vitesse de $1\ \text{m}/\text{s}$, une vitesse d'environ $3.5\ \text{cm}/\text{s}$ au bout de 10 itérations, alors que notre cylindre fait 5 cm de longueur. En réduisant cette vitesse d'un facteur 10 et en augmentant le nombre de particules considérées, on conserve le même ordre de grandeur pour la quantité de mouvement transmise au fluide (et c'est finalement ce qui détermine l'importance de la force de rétroaction) et on permet aux particules de ne pas sortir du maillage.

2.5.1.4 Résultats

On considère, dans un premier temps, le cas d'une seule salve : le fluide, initialement au repos, voit arriver 200 particules numériques lors du premier pas de temps. On représente sur la figure 2.9 la vitesse du fluide en deux nœuds proches de l'entrée. On observe que la vitesse du fluide approche au maximum les $0.05\ \text{cm}/\text{s}$, puis retombe à zéro lorsque le troupeau de particules est passé. Si l'on réalise une nouvelle fois la simulation en injectant cette fois-ci deux salves de particules l'une à la suite de l'autre, le fluide accélère un peu plus comme on le voit figure 2.10, représentant la vitesse du fluide en les deux mêmes nœuds précédents. Dans le cas d'une injection continue jusqu'à 0.8 s (à raison de 200 particules numériques à chaque pas de temps), le résultat se confirme, comme le montre la figure 2.11 : le fluide dépasse les $2.5\ \text{cm}/\text{s}$ puis ralentit par la suite. La figure 2.12 représente les différentes vitesses (axiales) d'une particule pour les différentes injections. On voit que dans le cas de l'injection régulière jusqu'à $t = 0.8\ \text{s}$, la vitesse de la particule est

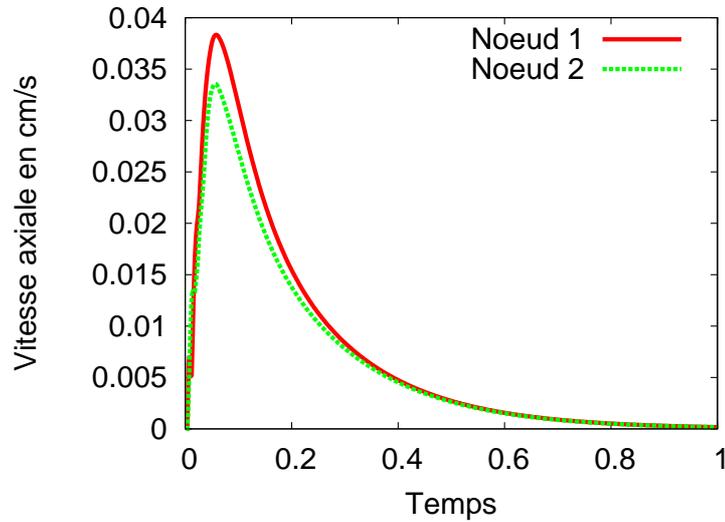


FIG. 2.9 – Vitesse du fluide en deux nœuds différents. Le fluide est initialement au repos et accélère à cause du passage de 200 particules numériques.

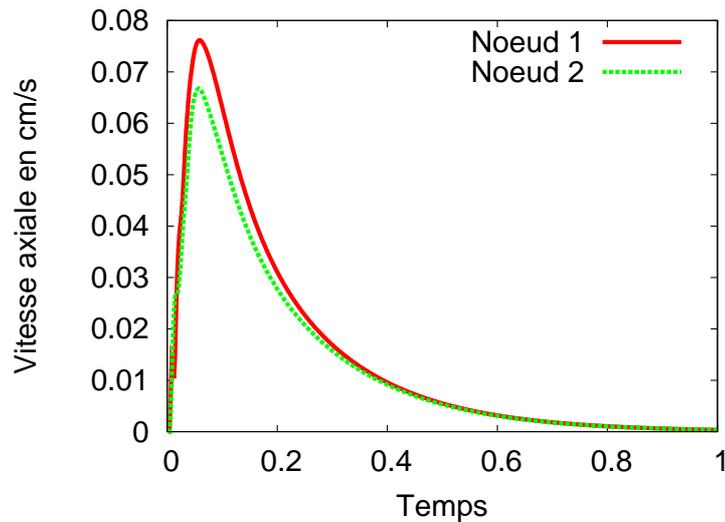


FIG. 2.10 – Vitesse du fluide en deux nœuds différents. Le fluide est initialement au repos et cette fois-ci deux salves successives de 200 particules numériques sont considérées : l'accélération double.

d'abord amortie comme dans les deux autres cas puis elle « décolle » à $t = 0.1$ s. Au bout de 0.8 s, comme les injections s'arrêtent, l'amortissement reprend. On représente également sur les figures 2.13 et 2.14 deux profils de distribution de particules, que l'on obtient, toujours pour une injection continue pendant toute la simulation numérique. Dans le premier cas, la rétroaction n'est pas prise en compte (les particules avancent uniformément et se « tassent » peu à peu), dans l'autre on considère des particules actives ; on observe alors un profil de distribution parabolique : l'action des particules sur le fluide est affaiblie au bord à cause de la condition de Dirichlet.

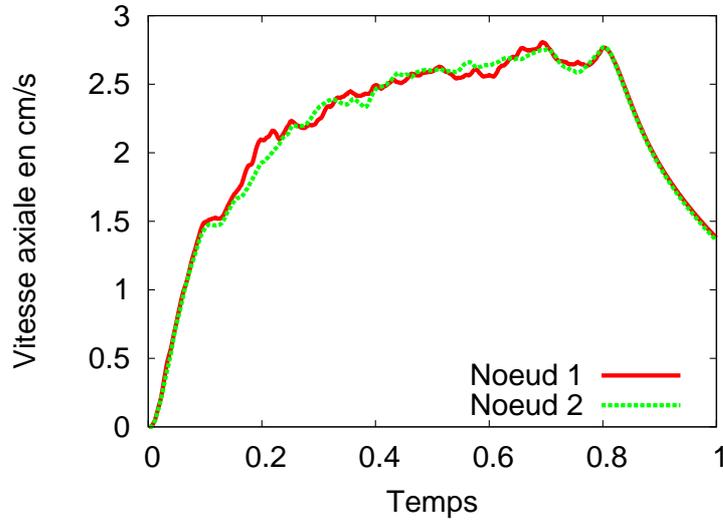


FIG. 2.11 – Vitesse du fluide en deux nœuds différents. Le fluide est initialement au repos et les particules sont cette fois-ci injectées à chaque pas de temps jusqu’à $t = 0.8$ s. Au total 80 000 particules numériques sont injectées.

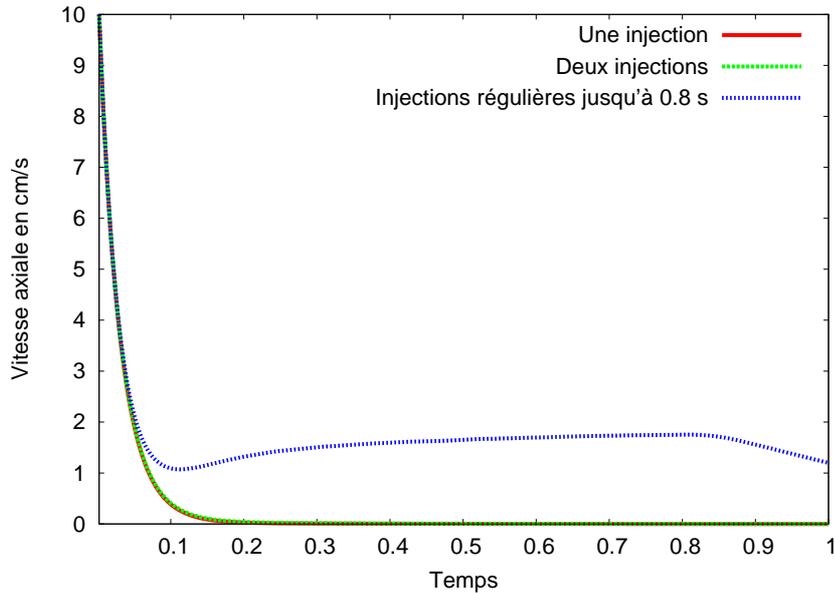


FIG. 2.12 – Vitesse d’une particule pour les différentes injections.

2.5.1.5 Conclusion et perspectives

L’exemple de la salve continue représentée dans la figure 2.11 prouve que l’action d’un aérosol peut fortement influencer le comportement du fluide, pour des données correspondant (au moins en terme de quantité de mouvement) à celle d’un nébuliseur générant de grosses particules, et les figures 2.12 et 2.14

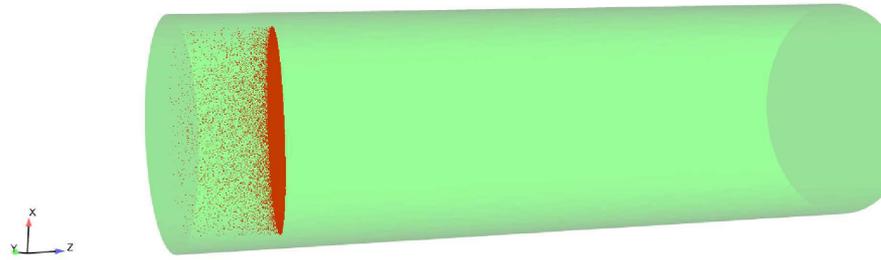


FIG. 2.13 – Particules de $50\ \mu\text{m}$, injectées avec une vitesse de 10cm/s , amorties dans un fluide au repos, sans rétroaction. Image de la simulation au bout de 0.7 s .

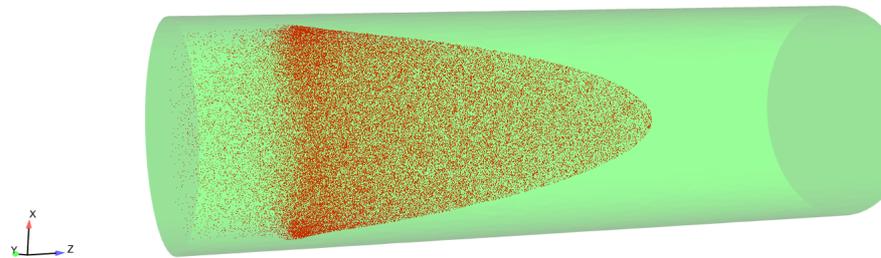


FIG. 2.14 – Particules de $50\ \mu\text{m}$, injectées avec une vitesse de 10cm/s , amorties dans un fluide au repos, avec rétroaction. Le profil parabolique est dû aux conditions de Dirichlet imposées aux bords. Image de la simulation au bout de 0.7 s .

suggèrent effectivement qu'un tel changement peut influencer en retour la dynamique des particules elle-même. Il faudrait maintenant envisager la situation inverse : le cas d'un fluide en déplacement rencontrant un grand nombre de particules immobiles. Un ralentissement se fait-il ressentir ? À partir de quelle masse totale de spray ? Pour quelles vitesses du fluide ? Le cas de particules ayant une vitesse opposée à celle du fluide serait également pertinent. On trouvera par ailleurs dans [19] une étude plus exhaustive du phénomène, mais à deux dimensions seulement.

2.5.2 Comparaison avec une expérience

L'équipe de l'INSERM de Tours, constituée entre autres de Laurent Vecellio et Patrice Diot, travaille sur le développement de générateurs d'aérosols. Le but de cette section est de confronter les données expérimentales obtenues dans un modèle *in vitro* aux données numériques produites par notre code.

2.5.2.1 Données expérimentales

Ces données ont été obtenues lors du stage de M2 de Thomas Duparque et sont résumées dans le mémoire associé [41]. Chez les patients respirant sous ventilation mécanique, l'administration de soins thérapeutiques par l'usage de nébuliseurs implique le passage des particules de spray dans le **dispositif endotrachéal**. C'est par l'intermédiaire de ce dernier que s'établit le lien entre les voies respiratoires du patient et l'appareil de ventilation mécanique.

Plusieurs expériences ont été réalisées en faisant varier la taille des particules ainsi que le débit d'entrée. Les mécanismes de génération de particules utilisés dans les nébuliseurs ne peuvent bien évidemment pas créer une gamme de particules de rayon donné. On parle plutôt du *diamètre aérodynamique médian de masse* (MMAD) correspondant au diamètre moyen autour duquel se répartit la masse des particules (50% en dessous, 50% au dessus). Ce dernier peut-être calculé sur une partie d'aérosol en mouvement, par diffractométrie. L'idée est d'exploiter la dépendance de l'angle de déviation en fonction de la taille de la particule. Mais comment récupérer le pourcentage de particules capturées par la paroi? Dans une première étape, on établit les conditions expérimentales assurant la non-évaporation des particules dans le conduit (principale cause de modification du diamètre). Ensuite, on compare la distribution en diamètre à la sortie et celle fournie en entrée, la différence correspondant aux particules impactées sur la paroi. Afin de comparer la localisation des zones de dépôts obtenues expérimentalement avec les simulations numériques, les particules sont marquées au *technétium* (élément chimique radioactif), puis tracées à l'aide d'une gamma caméra. On obtient ainsi le profil de dépôt à l'issue de l'expérience.

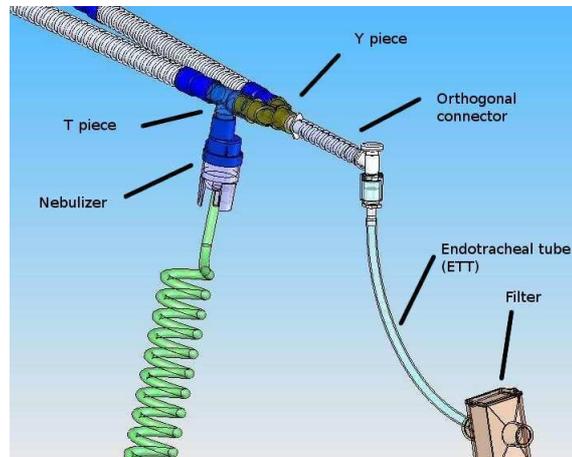


FIG. 2.15 – Dispositif expérimental

2.5.2.2 Maillage du dispositif

L'utilisation du solveur éléments finis implémenté dans *LifeV* nécessite le maillage du domaine sur lequel on souhaite effectuer la simulation. Ici il s'agit donc de la réunion des éléments suivants : les pièces en « *T* » et « *Y* », le coude, le tube plissé ainsi que la sonde endotrachéale. Ce maillage a été réalisé par Michaël Grasseau avec le logiciel *3-matic*®.

2.5.2.3 Paramètres de la simulation

Les conditions aux bords sont les suivantes :

- sur la paroi Γ_0 : $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0$; $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, r) = 0$ pour $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0$, où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est le vecteur normal sortant,
- sur l'entrée de l'aérosol Γ_1 : on impose la vitesse du fluide \mathbf{u} et l'injection de particules f ,
- sur l'entrée de l'air Γ_2 : \mathbf{u} est imposée, aucune condition sur f
- sur la sortie libre Γ_3 : mêmes conditions que sur Γ_0 .
- à la sortie de la sonde endotrachéale Γ_4 : sortie libre pour l'air comme pour les particules.



FIG. 2.16 – Maillage du dispositif. 600 000 tétraèdres.

2.5.2.4 Paramètres des particules

Les particules sont injectées uniformément sur l'entrée Γ_1 . Deux MMAD sont considérés : $5.4 \mu\text{m}$ et $14 \mu\text{m}$, ainsi que trois débits : 10, 20 et 40 L/min. Étant donnée la (relative) petite taille des particules, nous ne considérons pas la rétroaction dans cette première série d'expérience. Ceci permet d'économiser du temps de calcul, facteur non négligeable étant donnée la taille du maillage.

2.5.2.5 Comparaison des zones de dépôt

Comme on peut le voir sur la figure 2.17, une partie des zones de dépôts est reproduite à l'aide de la simulation numérique. En revanche, le dépôt au niveau du coude est nul alors que ce virage à 90° est la zone majoritaire de dépôt dans l'expérience.

2.5.2.6 Perspectives

De nouvelles simulations numériques sont en cours pour obtenir une localisation plus précise de ces zones de dépôts, et établir également un comparatif entre les pourcentages de captures numériques et expérimentaux. Par ailleurs, pour l'instant, la prise en compte de débit trop important (40 L/min) conduit à l'impaction de l'essentiel des particules à l'entrée du dispositif, ce qui n'est pas observé par l'expérience. Une fois les conditions expérimentales reproduites numériquement, l'étape suivante pourrait être la prise en compte de la force de rétroaction sur une géométrie réaliste de ce type, pour des particules plus grosses.

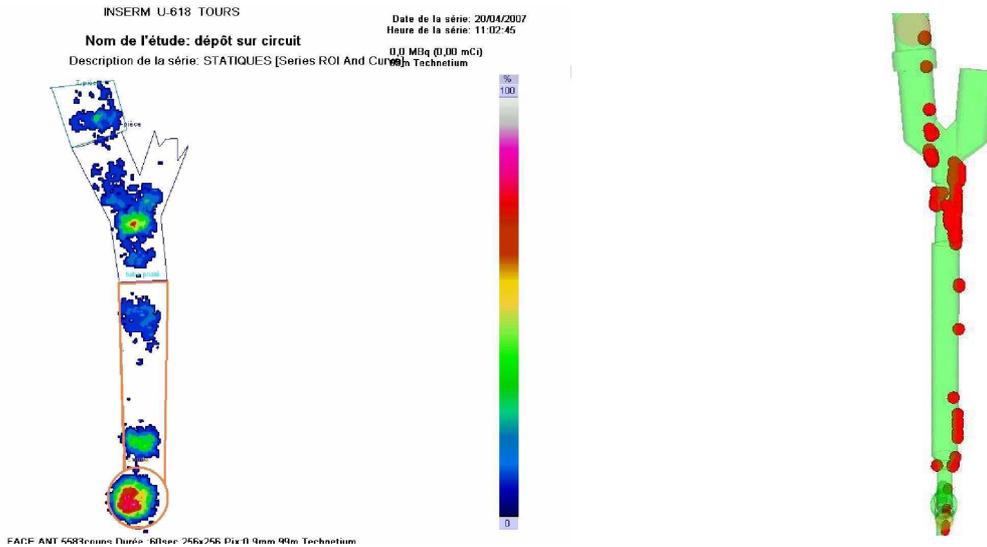


FIG. 2.17 – À gauche, une image de dépôt obtenue par Thomas Duparque par gamma caméra, à droite son équivalent numérique. Débit de 10 L/min pour des particules de rayon $5.4 \mu\text{m}$.

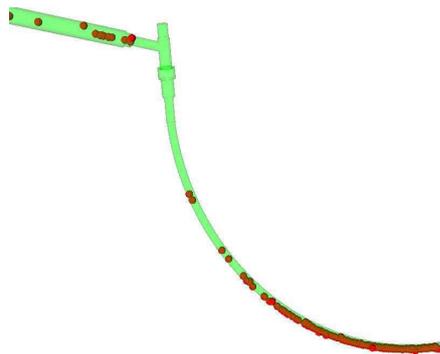


FIG. 2.18 – Vue latérale du dispositif, durant une étape de simulation numérique.

2.6 Tests numériques en domaine mobile

Nous allons maintenant présenter des résultats numériques dans le cas d'un domaine mobile. Ces simulations sont motivées par le fait que les parois des bronches sont déformables.

2.6.1 Constriction dans un conduit cylindrique

Les conduits pulmonaires n'ont pas une surface régulière, qu'il s'agisse des grosses bronches à la surface desquelles apparaissent des anneaux cartilagineux ou des petites bronches qui peuvent présenter des constriction localisées dans le cas de pathologies. Il peut donc être intéressant d'étudier l'influence d'une telle géométrie pour la capture de particules. Nous considérons ici une géométrie test, un tube qui présente une constriction au milieu de sa longueur, dont le rayon diminue de 50%. Notre objectif est d'estimer l'influence de divers paramètres sur la capture des particules en cette zone. De plus, cette géométrie oscille dans le temps, subissant des cycles de dilatation et de contraction. La question est alors : le caractère os-

cillant du flux et de la géométrie affecte-t-il les caractéristiques de la capture de particules par impaction ?

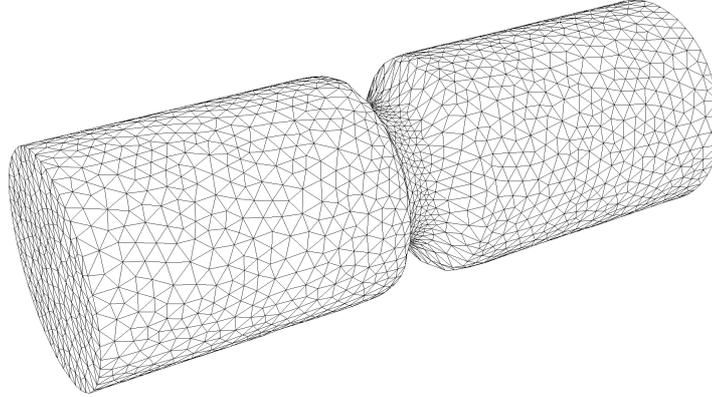


FIG. 2.19 – Le maillage du conduit avec constriction (20 000 tétraèdres). Les dimensions du conduit sont celles d’une bronche de la septième génération du modèle A de Weibel. $L = 1.07$ cm, $r_e = 0.18$ cm.

2.6.2 Nombre de Stokes

Dans la sous-section 2.4.1, en étudiant l’injection d’une particule dans un fluide *immobile*, nous avons fait apparaître un temps de relaxation τ_p , caractéristique de la dynamique de la particule (dans un écoulement à faible nombre de Reynolds) :

$$\xi_p(t) = \xi_p^0 e^{-t/\tau_p}.$$

On aurait envie de dire simplement, que plus τ_p est grand, plus la particule sera rapidement ralentie. En réalité, cela dépend bien sûr de la durée de l’expérience considérée : dans la phrase précédente, le terme « rapidement » est très relatif ! Typiquement, si l’expérience dure $\frac{\tau_p}{100}$ secondes et que la vitesse de la particule est de l’ordre de l’unité, le ralentissement sera quasiment nul.

Dans le cas où le fluide est en déplacement, la situation est plus complexe. L’échelle de temps adaptée n’est plus simplement celle de l’expérience, l’accélération de la particule dépendant de la vitesse du fluide (voir la sous-section 2.4.2 par exemple). Il faut alors tenir compte du temps caractéristique de déplacement du fluide. On introduit un nombre pour quantifier ceci : le **nombre de Stokes**. Celui-ci est défini comme le rapport entre le temps de relaxation de la particule dans le fluide *au repos* et le temps caractéristique de l’écoulement :

$$\text{St}_p := \tau_p \frac{U}{L} = \frac{2 r_p^2 \rho_p U}{9 \eta L},$$

où U et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques de l’écoulement.

Ce paramètre adimensionnel permet donc d’estimer l’inertie de la particule et plus précisément sa propension à dévier ou non des lignes de courant du fluide. Si le nombre de Stokes est très inférieur à 1, le temps de relaxation de la particule est très court devant le temps caractéristique de variation du fluide : si le fluide change de direction en un point, la particule le suit, sa trajectoire épouse donc à peu près la ligne de courant. Inversement, dans le cas d’un grand nombre de Stokes, le temps de réaction de la particule est beaucoup plus long et un changement brutal de direction pour le fluide n’implique pas nécessairement la modification de sa trajectoire.

2.6.3 Caractéristiques des particules numériques

2.6.3.1 Paramètres physiques

Les particules numériques considérées ont toutes un rayon compris entre $10\ \mu\text{m}$ et $50\ \mu\text{m}$. En-deçà de cette gamme, les particules suivent toujours les lignes de courant du fluide. Quant à la borne de $50\ \mu\text{m}$, celle-ci correspond au rayon moyen maximal des gouttelettes générées par la plupart des pulvérisateurs pharmaceutiques : au-delà, les particules sont impactées pour la plupart dans les parties aériennes supérieures, avant la trachée. La masse volumique est prise égale à celle de l'eau, soit $1\ \text{g}/\text{cm}^3$. Enfin, notons que dans toutes les simulations les particules considérées sont **passives**, *i.e.* la force de rétroaction n'est pas prise en compte.

2.6.3.2 Paramètres d'injection

En notant r_e le rayon de la section d'entrée, les particules sont injectées dans la couronne $0.2r_e \leq r \leq 0.9r_e$. L'injection de particules près de l'axe du tube ne présente pas de pertinence particulière car, loin de la paroi, aucune ne va se déposer, ce qui explique l'élimination du disque $r \leq 0.2r_e$ pour l'injection. À l'injection, la vitesse est prise égale à celle du fluide dans la maille (vitesse « vue » par interpolation aux nœuds). Enfin, les particules sont injectées un peu en aval (coordonnée selon $z \approx 0.03$), pour limiter les effets de bords.

2.6.3.3 Nombre de particules et poids numérique

Au total, environ 3500 particules numériques sont injectées par simulation. Le poids numérique est ici pris égal à 1 pour toutes les particules. Il faut bien comprendre que jouer sur la valeur de celui-ci n'a d'intérêt que lorsqu'on prend en compte la rétroaction de l'aérosol. Si cette dernière n'est pas enclenchée (comme c'est le cas ici), quelque soit la valeur prise pour le poids numérique, la simulation numérique donnera le même résultat puisque le paramètre n'intervient que dans le calcul de la force de rétroaction.

2.6.4 Paramètres de simulation en domaine fixe

L'air est d'abord considéré en régime permanent : soumis à une pression constante en entrée et à une pression nulle en sortie et à des conditions aux bords de type Dirichlet homogène, au bout de quelques itérations temporelles, un profil de vitesse proche de celui d'un écoulement de Poiseuille s'installe (il n'est pas strictement égal car le cylindre est déformé). La vitesse maximale du fluide est de l'ordre de $20\ \text{cm}/\text{s}$, correspondant à celui de la vitesse axiale que l'on obtiendrait dans la septième génération de l'arbre de Weibel (voir C.3 en annexe). On effectue la simulation de lancer de particules pendant une durée de $2.5\ \text{s}$.

2.6.5 Paramètres de simulations en domaine mobile

Lorsqu'un flux d'air circule dans un conduit déformable, celui-ci se comprime : c'est l'effet **Venturi**. La surface des conduits pulmonaires étant flexible, ce phénomène va se produire à l'expiration comme à l'inspiration même si, lors de cette dernière cet effet est amoindri par l'expansion de la cage thoracique. Si l'on considère uniquement la phase d'expiration par exemple, celle-ci durant $2.5\ \text{s}$ (en réalité un peu moins), le conduit va se rétrécir puis revenir à sa taille originale. On peut par exemple modéliser ce mouvement par une homothétie centrée dont le rapport est sinusoïdal de période de $2.5\ \text{s}$ et d'amplitude 0.1 , la simulation débutant par la phase de contraction. Comme nous allons le voir dans la section suivante, avec un tel mouvement, la différence de taux de capture avec le domaine fixe n'est pas vraiment perceptible. Pour isoler le comportement de la paroi selon qu'elle se rapproche ou qu'elle s'éloigne, nous considérons deux nouveaux mouvement uniquement constitués d'une phase d'extension pour l'un et de contraction pour l'autre, obtenus en doublant la période d'oscillation. Les conditions aux bords sont identiques à celles utilisées pour le cas du domaine fixe.

2.6.6 Résultats

2.6.6.1 Capture en domaine fixe

La surface de la figure 2.20 représente la dépendance de la capture en fonction de la distance au bord (en terme de pourcentage du rayon de la section d'entrée) et du rayon de la particule. On remarque qu'à

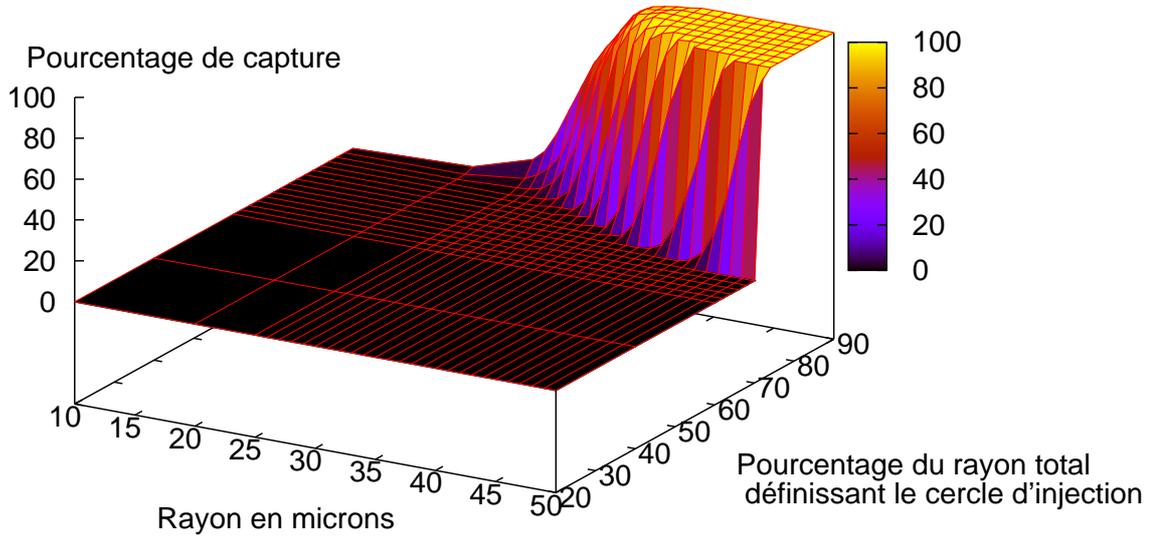


FIG. 2.20 – Pourcentage de capture en fonction du rayon et de la distance au bord. Les particules sont disposées sur des couronnes d'épaisseur 0.001 cm autour de cercles de rayon compris entre $0.2r_e$ et $0.9r_e$.

mesure que le rayon augmente, la transition entre la zone de « fuite » et la zone de « capture » est de plus en plus brutale. Cela correspond au fait que plus les particules sont lourdes, plus leur trajectoire se rapproche d'une ligne droite. Dans le cas limite où la trajectoire est une droite dirigée par sa vitesse initiale, l'impaction sur la zone de constriction est alors entièrement déterminée par l'intersection ou non de cette droite avec la paroi du conduit : l'évolution du taux de capture en fonction de la densité au bord se réduirait à une fonction constante par morceaux valant successivement 0 puis 100. Nous ne sommes pas réellement dans ce cas-là puisque la capture ne démarre qu'aux alentours d'un cercle d'injection de rayon $0.78r_e$ (et non $0.25r_e$ comme cela serait le cas pour des lignes droites).

Inversement, si l'on observe les sections à zone d'injection constante, on peut suivre le pourcentage de capture en fonction du rayon des particules, comme nous le verrons dans la sous-section suivante. Une autre manière d'examiner l'influence du rayon sur la capture de la particule consiste à mesurer l'écart que présente sa trajectoire par rapport aux lignes de courants du fluide. Ainsi, on a représenté dans les figures 2.21–2.23 la trajectoire (en rouge) de trois particules issues d'un même point et de rayons différents ($1\mu\text{m}$, $30\mu\text{m}$ et $50\mu\text{m}$) dans un fluide en régime permanent. La ligne noire fléchée est la ligne de courant issue du point de départ des particules.

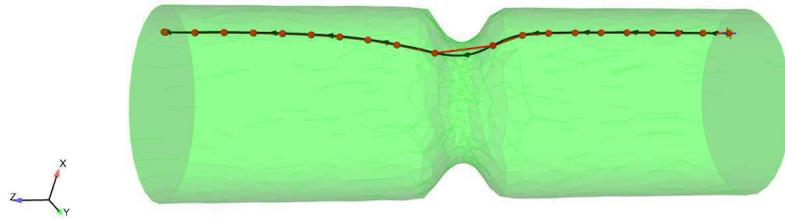


FIG. 2.21 – Particule de $1 \mu\text{m}$ de rayon, injectée à une distance de $0.9r_e$ de l'axe du cylindre. La particule épouse la ligne de courant.

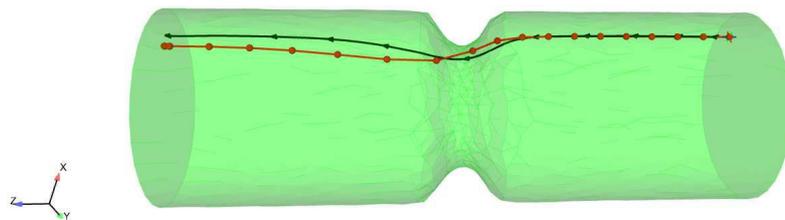


FIG. 2.22 – Particule de $30 \mu\text{m}$ de rayon, injectée à $0.9r_e$ de l'axe du cylindre. La particule « échappe » à l'impaction, mais elle dévie légèrement de la ligne de courant du fluide.

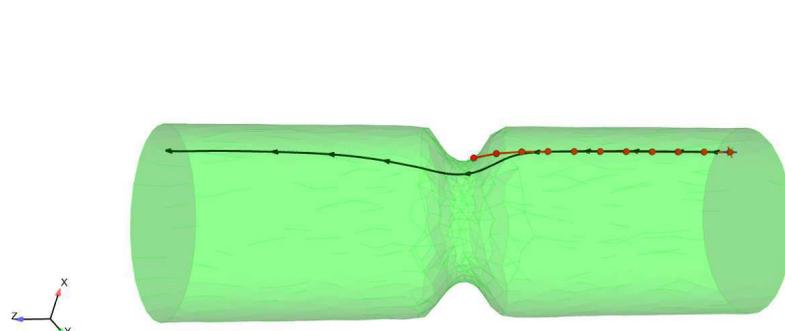


FIG. 2.23 – Particule de $50 \mu\text{m}$ de rayon, injectée à $0.9r_e$ de l'axe du cylindre. La particule est trop lourde pour suivre le fluide : elle avance quasiment en ligne droite jusqu'à impacter sur l'obstacle.

2.6.6.2 Comparaison fixe/mobile sur une période

Lorsque l'on considère l'homothétie sinusoidale sur toute sa période, l'aspect mobile ne semble pas modifier de manière remarquable la dépendance de la capture de particules vis-à-vis de la distance au bord et du rayon. Nous représentons sur la figure 2.24 le taux de capture en fonction du rayon des particules, pour un cercle d'injection de rayon $0.9r_e$. Il est également intéressant d'étudier ce taux de capture en fonction du nombre de Stokes, c'est ce qui est représenté sur la figure 2.25.

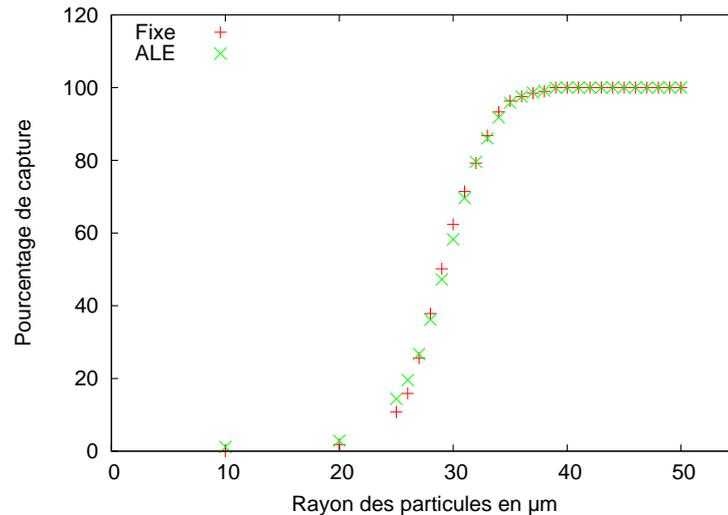


FIG. 2.24 – Pourcentage de capture en fonction du rayon pour une disposition des particules sur une couronne d'épaisseur 0.001 cm autour du cercle de rayon $0.9r_e$. Les taux de capture sont proches pour le domaine fixe et le domaine mobile.

2.6.6.3 Comparaison fixe/extension et fixe/contraction

Si l'on étudie séparément la phase d'extension et la phase de contraction, on s'aperçoit que le mouvement du maillage a une incidence sur la capture des particules, comme on le voit figure 2.26. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, sur l'exemple considéré c'est la phase d'extension qui augmente le taux de capture, alors que la phase de contraction l'amoinndrit. Jusqu'à $50\mu\text{m}$, les particules ne semblent pas suffisamment lourdes pour se faire capturer à proprement parler par le mouvement de la paroi. Lorsque celle-ci se rapproche, elle déplace le fluide (condition de Dirichlet avec la vitesse du maillage), qui lui-même transmet son déplacement aux particules. Ainsi durant la phase d'extension, les particules acquièrent une composante de vitesse centrifuge alors que celle-ci est centripète dans la phase de contraction.

Remarquons que les simulations effectuées ne prennent en compte qu'un déplacement léger du maillage (10%), d'une vitesse peu importante. Cette limitation provient en réalité des capacités actuelles du solveur ALE de *LifeV*, gérant un déplacement modéré. Dans un cas plus général, il est fort probable qu'un mouvement de contraction brusque de la paroi entraînerait un taux de capture plus important, même dans le cas de particules ayant un rayon compris entre $10\mu\text{m}$ et $50\mu\text{m}$.

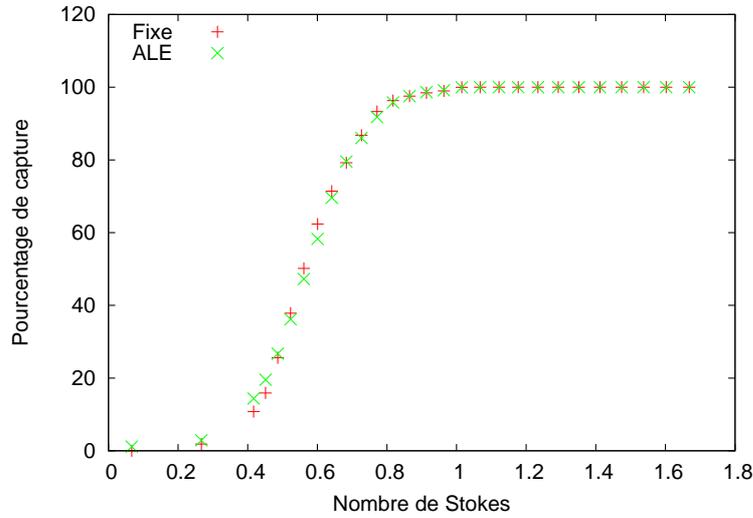


FIG. 2.25 – Pourcentage de capture en fonction du nombre de Stokes pour une disposition des particules sur une couronne d'épaisseur 0.001 cm autour du cercle de rayon $0.9r_e$.

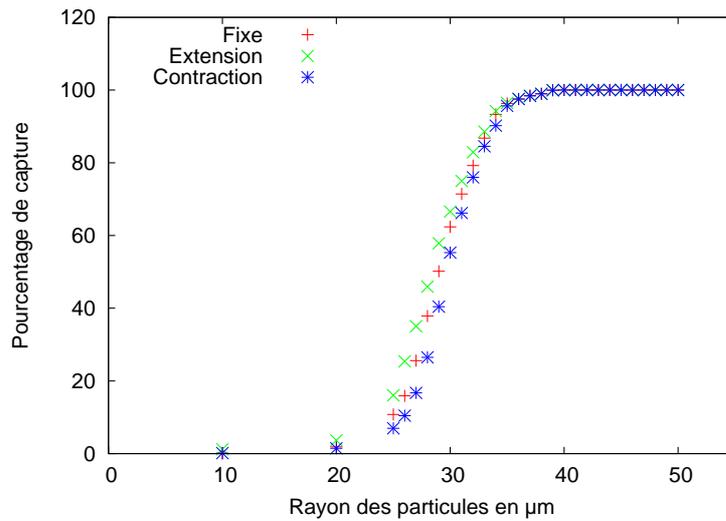


FIG. 2.26 – Pourcentage de capture en fonction du nombre de Stokes pour une disposition des particules sur une couronne d'épaisseur 0.001 cm autour du cercle de rayon $0.9r_e$. Les trois cas sont représentés : domaine fixe, extension, contraction. La phase de contraction diminue la capture, celle d'extension l'augmente.

2.7 Conclusion et perspectives

Nous avons mis au point et implémenté un schéma d'approximation numérique du couplage Vlasov/Navier-Stokes, valable en domaine mobile; bien que celui-ci soit explicite, il est stable empiriquement dans la gamme des tests effectués. Il reste maintenant à établir les limites de ce schéma, puisque l'on s'attend naturellement à ne plus avoir de convergence pour des vitesses trop importantes.

Une autre conséquence de ce décalage est la difficulté de définir le critère de capture. En effet, puisque nous déplaçons le maillage *avant* de traiter les particules (figure 2.2), il nous faut décider si une particule peut être capturée par le mouvement du maillage. Actuellement, c'est le choix que nous avons fait, puisque nous localisons les particules juste après le déplacement du maillage. Une alternative serait de déplacer les particules à cet instant, à l'aide de la vitesse du maillage, puis de les déplacer à l'aide de la nouvelle vitesse du fluide. Cette solution réduirait certainement le taux de capture mais est basée sur une phase de transport des particules qui n'est pas physique (le déplacement du maillage est artificiel). Par ailleurs, en l'état, notre schéma ne conserve pas la quantité de mouvement du système toujours en raison du décalage temporel entre la résolution fluide et l'approximation des trajectoires des particules.

Pour pallier ce caractère explicite du schéma, on pourrait par exemple envisager d'effectuer deux résolutions du système à chaque pas de temps, espacées par une étape de mise à jour de la force de rétroaction. Malheureusement une telle méthode double le temps de calcul (puisque l'essentiel de celui-ci est souvent contenu dans l'approximation du fluide).

En dehors de ce travail d'amélioration du schéma, les perspectives qu'offrent le travail développé dans ce chapitre incluent l'utilisation du solveur Vlasov/Navier-Stokes en domaine mobile dans des géométries plus complexes (une ou plusieurs bifurcations par exemple) ainsi que la prise en compte de conditions au limites physiologiques.

Chapitre 3

Le couplage Vlasov/Navier-Stokes

Ce chapitre a pour objet l'analyse mathématique du couplage des deux équations introduites dans le chapitre 1. Nous avons obtenu l'existence de solution faibles globales périodiques pour le système considéré. Ce travail a fait l'objet d'un article en collaboration avec Laurent Desvillettes, Laurent Boudin et Céline Grandmont : *Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations*, paru dans le journal *Differential and Integral Equations* [18].

3.1 Introduction

3.1.1 Système étudié

Nous nous intéressons au système de Vlasov/Navier-Stokes, sur un domaine périodique en espace, notre but étant de prouver l'existence de solutions faibles globales.

Parmi la littérature existante concernant les systèmes couplant une équation de la mécanique des fluides et une équation cinétique, les deux travaux se rapprochant le plus du nôtre sont probablement ceux de Hamdache [61] et d'Anoschenko, Boutet de Monvel-Berthier [7]. Les principales différences sont les suivantes :

- Notre preuve n'est valable qu'en dimension inférieure ou égale à 3, à cause des injections de Sobolev utilisées. Par ailleurs, les conditions aux bords en espace sont supposées périodiques.
- Nous prenons en compte les grandes vitesses de particules de manière explicite par l'intermédiaire d'une fonction de troncature. Cela conduit à des estimations explicites sur certains moments de la densité de particules.
- Nous obtenons une estimation d'énergie dont nous prouvons qu'elle est vérifiée par la suite d'approximations de solutions, puis par la solution elle-même.
- Le terme non-linéaire provenant de la convection est pris en compte dans notre travail, ce qui est aussi le cas dans [7] mais pas dans le travail de Hamdache.
- Notre preuve se base sur un schéma d'approximation proche de l'algorithme implémenté dans le code `LifeV`, présenté à la section 2.3 du chapitre 1, alors que Hamdache, Boutet et Anoschenko utilisent le théorème du point fixe de Schauder.

Par ailleurs, Goudon, Jabin et Vasseur [55, 56] ont étudié la limite hydrodynamique de systèmes analogues, en réalisant différents types de scaling pour la phase dispersée. Dans [82], Mellet et Vasseur prouvent l'existence globale de solutions au système Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes (compressible) : un laplacien en vitesse est rajouté dans l'équation de transport. Les cas de conditions d'absorption et de réflexion aux

bords sont tous deux étudiés. Dans [83], quelques régimes asymptotiques du système sont examinés.

Une preuve d'existence locale au système Vlasov/Euler est présentée par Baranger et Desvillettes dans [13]. Une extension de ce résultat au cas de sprays plus "épais" (i.e. tenant compte des collisions entre particules) a été obtenue par Mathiaud dans [78]. Domelevo et Roquejoffre [37] ainsi que Goudon [53] ont également étudié un couplage fluide/cinétique, mais en utilisant une équation de Burgers pour le gaz.

Établissons maintenant le jeu d'équations à étudier.

Soit $T > 0$ un réel fixé. On pose $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

Le fluide, supposé incompressible et de densité constante, est classiquement décrit par les quantités macroscopiques que sont sa vitesse $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ et sa pression $p(t, \mathbf{x})$, à l'instant $t \in [0, T]$ et à la position $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^3$. Le spray est décrit par une fonction de densité f définie sur l'espace des phases des particules et évoluant avec le temps. $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ représente la densité de nombre de particules de position $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^3$, ayant une vitesse $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$, à l'instant $t \in [0, T]$.

f est solution d'une équation de type Vlasov, accélérée par un terme de traînée, dépendant de la vitesse du fluide et de la particule considérée; plus précisément, la force de traînée est positivement proportionnelle à la vitesse relative $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ du fluide par rapport à la particule. En pratique (voir section 1.3.1 du chapitre 1), cette proportionnalité n'est vérifiée que dans l'hypothèse de bas nombre de Reynolds, ce que nous supposons ici. Nous prenons une constante de proportionnalité égale à 1 pour alléger les calculs.

En réponse à cette accélération, le spray dans son ensemble renvoie en chaque point de l'espace $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^3$ une force de rétroaction, correspondant à la résistance de l'ensemble des particules présentes en ce point. Au final, le système Vlasov-Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})f] = 0, & (t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, & (3.1) \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = - \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}, & (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3, & (3.2) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, & (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3. & (3.3) \end{cases}$$

L'écriture complète du système s'achève avec les conditions initiales :

$$f(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (3.5)$$

où $f_{\text{in}} \geq 0$ et \mathbf{u}_{in} sont données.

Remarque 3.1.1 : L'hypothèse du spray fin se traduit ici par la linéarité de l'équation de Vlasov (une fois découplée de l'équation de Navier-Stokes), du fait de l'absence d'opérateur de collision. Par ailleurs le fluide et le spray n'interagissent que par l'intermédiaire des termes de traînée : la fraction volumique occupée par le spray n'est pas prise en compte.

Remarque 3.1.2 : Dans [18], le système précédent est augmenté d'une force extérieure dans l'équation fluide, dont on suppose qu'elle est dans $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$. La démonstration est globalement inchangée.

Ce chapitre sera organisé de la manière suivante. On trouvera à la sous-section 3.1.2 le cadre fonctionnel et les notations utilisées. À la sous-section 3.1.3 se trouve l'énoncé du théorème d'existence globale obtenu, ainsi que la définition des solutions faibles considérées. La section 3.2 est consacrée à la démonstration du théorème. Nous perturbons tout d'abord le système par différentes convolutions/troncatures et nous obtenons, par la construction d'un schéma convergent, l'existence de solutions pour ce système approché. Enfin, nous revenons au système initial par un argument de compacité mais uniquement sur un intervalle local dans une première étape. On étend ensuite la solution de proche en proche en fournissant une minoration du temps de vie.

3.1.2 Cadre fonctionnel et notations

Le cadre d'étude du système précédent va être obtenu grâce à une première estimation a priori. Supposons l'existence de solutions fortes telles que f soit à support compact en vitesse. En intégrant sur le tore le produit de (3.2) par \mathbf{u} , et sur $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ celui de (3.1) par $|\boldsymbol{\xi}|^2$, on obtient en sommant le tout, après intégration par parties :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} = 0. \quad (3.6)$$

Cette égalité exprime la dissipation de l'énergie cinétique du système (les deux premiers membres) due à la viscosité du fluide et à la force de traînée. L'énergie cinétique est (modulo la validité de l'estimation) donc décroissante. Cela motive les hypothèses suivantes pour les conditions initiales :

$$f_{\text{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} < \infty, \mathbf{u}_{\text{in}} \in L^2(\mathbb{T}^3). \quad (3.7)$$

Les deux dernières hypothèses assurent que le système initial possède une énergie cinétique finie. La première signifie qu'initialement, il n'y a pas de concentration de particules en un point (i.e. une densité infinie) de l'espace des phases (ce critère sera propagé par l'intermédiaire de l'étude des caractéristiques de (3.1)).

Quelques notations :

- $\mathcal{C}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ désigne les fonctions vectorielles $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^3)$ à divergence nulle.
- $L_{\text{div}}^2(\mathbb{T}^3)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{C}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ dans $L^2(\mathbb{T}^3)$.
- $H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{C}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ dans $H^1(\mathbb{T}^3)$.
- $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$ désigne le dual de $H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$.
- $H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)$ désigne l'ensemble des fonctions $H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ à support compact en vitesse.
- $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)$ désigne le dual de $H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)$.
- Soit $g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Les moments de g seront notés ainsi :

$$m_\alpha g(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^\alpha d\boldsymbol{\xi}, \quad M_\alpha g(t) = \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^\alpha d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{T}^3} m_\alpha g(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

- La norme d'un espace E sera toujours notée $\|\cdot\|_E$, sauf exceptions suivantes :

$$\begin{aligned} L^r([0, T]; L^q(\mathbb{T}^3)) &\longrightarrow \|\cdot\|_{r,q}, \\ L^r([0, T]; H_{\text{div}}^k(\mathbb{T}^3)) &\longrightarrow \|\cdot\|_{r;k}, \\ L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) &\longrightarrow \|\cdot\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

3.1.3 Théorème d'existence

Définissons le type de solutions pour lesquelles on a obtenu une existence globale.

Définition 3.1.1 : *On dira que le couple (\mathbf{u}, f) est solution du système (3.1)-(3.5) sur $[0, T]$ lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \cap L^\infty([0, T]; L_{\text{div}}^2(\mathbb{T}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$,
- $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$, pour presque tout triplet $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$,

- $f \in L^\infty\left([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)\right) \cap \mathcal{C}^0\left([0, T]; H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)\right)$,
- $M_2 f \in L^\infty([0, T])$,
- Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, à support compact en vitesse, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\langle f(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Theta_1(\mathbf{u})(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\phi) f(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \quad (3.8)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)/H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)$ et $\Theta_1(\mathbf{u})$ est l'opérateur différentiel :

$$\Theta_1(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}},$$

- Pour toute fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Theta_2(\mathbf{u})(s, \mathbf{x}) (\boldsymbol{\psi}) d\mathbf{x} ds = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \quad (3.9)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ et cette fois-ci :

$$\Theta_2(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u} \cdot \partial_t.$$

Remarque 3.1.3 : *Quid de la pression ? Son existence revient au problème suivant : étant donné un élément q de $H^{-1}(\mathbb{T}^3)$, nul sur $\mathcal{C}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$, existe-il $p \in L^2(\mathbb{T}^3)$ tel que $q = \nabla_{\mathbf{x}} p$? Lions a remarqué dans [74] qu'un théorème de De Rham, basé sur la théorie des courants, fournissait une réponse positive à cette question (même dans l'hypothèse générale d'une simple distribution). Tartar propose dans [93] une démonstration plus spécifique au problème, en utilisant l'hypothèse d'appartenance $H^{-1}(\mathbb{T}^3)$. Celle-ci est reprise dans les ouvrages de références [51, 95]. Enfin plus récemment, Simon a obtenu une preuve constructive et presque auto-contenue, voir [90].*

Le principal résultat de ce chapitre est résumé par le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 :

Soit $T > 0$. Sous les conditions (3.7), le système (3.1)-(3.5) possède au moins une solution sur $[0, T]$ au sens de la Définition 3.1.1. De plus, cette solution vérifie les deux estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 f d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\|f\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \leq e^{3T} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}. \quad (3.11)$$

3.2 Preuve

3.2.1 Le système régularisé

Soit $\varepsilon > 0$ et φ_ε un noyau régularisant défini par $\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon^3 \varphi(\boldsymbol{\xi}/\varepsilon)$, où φ est un élément positif de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ vérifiant : $\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 1$. En particulier, les moments d'indice $n \leq 1$ de φ_ε tendent vers 0.

On considère de même ψ_ε un noyau régularisant périodique (défini sur le tore), vérifiant des hypothèses

analogues. On rappelle que la convolution sur le tore est à comprendre au sens suivant, pour deux éléments f et g périodiques :

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = \int_{[0,1]^3} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

On la notera par la suite \star comme la convolution habituelle.

Soit γ_ε un autre élément positif de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{T}^3)$, à support inclus dans la boule $\mathbf{B}(0, 1/\varepsilon)$, borné par 1 et valant 1 sur la boule $\mathbf{B}(0, 1/2\varepsilon)$. On considère enfin une fonction saturante β_ε , définie par $\beta_\varepsilon(x) = x\beta(\varepsilon x)$, où β est un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ égal à 1 sur $] -1, 1[$. On adoptera la notation vectorielle, pour $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$:

$$\beta(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \beta(u_1) \\ \vdots \\ \beta(u_N) \end{pmatrix}.$$

On considère alors le système **Vlasov-Navier-Stokes Approché** ($\mathbf{VNSA}_\varepsilon$), pour $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{VNSA}_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\varphi_\varepsilon \star \mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi})f_\varepsilon] = 0, \\ \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + ((\varphi_\varepsilon \star \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) + \nabla_{\mathbf{x}} p_\varepsilon - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\mathbf{u}_\varepsilon(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi})\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0. \end{cases}$$

L'écriture complète du système se termine par les données initiales pour \mathbf{u}_ε et f_ε :

$$f_\varepsilon(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\mathbf{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})(\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}})(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\mathbf{in}}^\varepsilon(0, \mathbf{x}) := \psi_\varepsilon \star \mathbf{u}_{\mathbf{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (3.14)$$

où

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \psi_\varepsilon(\mathbf{x})\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}),$$

de sorte que $(f_{\mathbf{in}}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers $f_{\mathbf{in}}$ fortement dans tous les $L^p(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, pour $1 \leq p < \infty$, faible- \star dans $L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

L'approximation choisie conduit même à la convergence de $(M_2 f_{\mathbf{in}}^\varepsilon)_\varepsilon$ vers $M_2 f_{\mathbf{in}}$.

Détaillons ce point.

$$M_2 f_{\mathbf{in}}^\varepsilon - M_2 f_{\mathbf{in}} = \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})(\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}})|\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\mathbf{in}}|\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}.$$

Par convergence dominée ($M_2 f_{\mathbf{in}}$ étant fini par hypothèse), il nous suffit en fait de prouver que

$$\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})(\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}})|\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})f_{\mathbf{in}}|\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

ou encore

$$\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}})|\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\mathbf{in}}|\boldsymbol{\xi}|^2 d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

ce qu'on obtient en écrivant :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\phi_\varepsilon \star f_{\text{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\psi_\varepsilon \star_{\mathbf{x}} \varphi_\varepsilon \star_{\boldsymbol{\xi}} f_{\text{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} \\
 &= \int_{\mathbb{T}^3_{\mathbf{x}} \times \mathbb{T}^3_{\mathbf{y}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\zeta}}} \psi_\varepsilon(\mathbf{y}) \varphi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\text{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta} \\
 &= \int_{\mathbb{T}^3_{\mathbf{x}} \times \mathbb{T}^3_{\mathbf{y}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\zeta}}} \psi_\varepsilon(\mathbf{y}) \varphi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\text{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}|^2 dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta} \\
 &\quad + \int_{\mathbb{T}^3_{\mathbf{x}} \times \mathbb{T}^3_{\mathbf{y}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\zeta}}} \psi_\varepsilon(\mathbf{y}) \varphi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\text{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta} \\
 &\quad + \int_{\mathbb{T}^3_{\mathbf{x}} \times \mathbb{T}^3_{\mathbf{y}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\zeta}}} \psi_\varepsilon(\mathbf{y}) \varphi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\text{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\zeta}|^2 dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta}.
 \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de la dernière égalité n'est que la norme 1 du produit de convolution de $\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ par $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^2$, qui tend bien vers $M_2 f_{\text{in}}$.

Quant aux deux derniers termes, ceux-ci tendent vers 0 car on peut les contrôler respectivement par le premier et le deuxième moment de φ_ε . Au passage, du fait de la troncature en vitesse, on a également obtenu $M_2 f_{\text{in}}^\varepsilon \leq M_2 f_{\text{in}}$.

Précisons le sens du mot « solution » pour le système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$. On dira que le couple $(f_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ est une solution au système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$ si et seulement les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $f_\varepsilon \in L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$,
- $\mathbf{u}_\varepsilon \in L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0, T]; H^1_{\text{div}}(\mathbb{T}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H^{-1}_{\text{div}}(\mathbb{T}^3))$,
- Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, à support compact en vitesse, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\langle f(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dx d\boldsymbol{\xi} = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Pi_1^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\phi) f_\varepsilon(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dx d\boldsymbol{\xi} ds,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)/H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, et $\Pi_1^\varepsilon(\mathbf{u})$ est l'opérateur différentiel :

$$\Pi_1^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi^\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}},$$

- Pour toute fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Pi_2^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) dx ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) dx \\
 &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} dx d\boldsymbol{\xi} ds,
 \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H^{-1}_{\text{div}}(\mathbb{T}^3)/H^1_{\text{div}}(\mathbb{T}^3)$ et cette fois-ci :

$$\Pi_2^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} - (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \partial_t.$$

On a alors la proposition :

Proposition 3.2.1 : Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, le système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$ possède une solution.

Preuve :

Dans toute la démonstration, ε est un paramètre fixé. Par souci de clarté, on omettra donc parfois l'indexation associée, celle-ci reviendra lors du passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

La construction d'un couple de solutions va passer par l'étude d'une suite de solutions régulières approchant le problème $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$ (ε fixé).

3.2.1.1 Existence de solutions pour un système découplé

On considère le système découplé suivant, pour $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{VNSA}_\varepsilon^n) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^n + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f^n + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\varphi \star \mathbf{u}^n - \boldsymbol{\xi}) f^n] = 0, \\ \partial_t \mathbf{u}^{n+1} + ((\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n) + \nabla_{\mathbf{x}} p^n - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} = - \int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{u}^n(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ f^n(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\mathbf{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \\ \mathbf{u}^{n+1}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\mathbf{in}}^\varepsilon(0, \mathbf{x}). \end{array} \right.$$

Remarque 3.2.1 : Nous employons ici une méthode légèrement différente de celle employée dans l'article [18] dans lequel l'équation de Navier-Stokes est résolue à chaque étape (seul le terme de force est à l'indice précédent). Le résultat est le même, à la différence que nous utilisons ici l'existence de solutions régulières au problème de Stokes, plus immédiate.

Précisons comment on construit une telle suite de fonctions. On part de la donnée initiale pour définir $\mathbf{u}^0 := \mathbf{u}_{\mathbf{in}}^\varepsilon$. Cette fonction étant \mathcal{C}^∞ et bornée, elle nous définit, par le lemme A.2.4 et la remarque A.2.1, une fonction $f^0 \in \mathcal{C}^\infty$ en toutes ses variables, solution de l'équation de Vlasov du système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon^0$. Grâce au lemme A.2.5, on voit que pour t borné, la solution est à support compact en vitesse : $f_{\mathbf{in}}^\varepsilon$ l'est et l'accélération est de la forme $\mathbf{a} - \boldsymbol{\xi}$, avec \mathbf{a} bornée.

Remarquons maintenant que la fonction :

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}^0, f^0)(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^3} f^0(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} - (\mathbf{u}^0 \star \varphi \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^0)$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$: toutes les fonctions utilisées ont la régularité souhaitée et les intégrations ne portent que sur des domaines bornés (grâce à γ).

Le lemme A.3.1 nous permet alors de définir le couple (\mathbf{u}^1, p^1) comme solution \mathcal{C}^∞ du problème de Stokes :

$$\partial_t \mathbf{u}^1 - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^1 + \nabla_{\mathbf{x}} p^1 = \mathbf{g}(\mathbf{u}^0, f^0).$$

Une récurrence immédiate nous permet d'obtenir, pour tout entier n , l'existence de fonctions \mathcal{C}^∞ : \mathbf{u}^n et f^n , solutions du système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon^n$.

On vérifie alors aisément que ces solutions (fortes) vérifient la formulation faible suivante :

- Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, à support compact en vitesse, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\langle f(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\mathbf{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, dx d\boldsymbol{\xi} = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Pi_1(\mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\phi) f^n(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, dx d\boldsymbol{\xi} ds,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)/H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3)$, et $\Pi_1(\mathbf{u}^n)$ est l'opérateur différentiel :

$$\Pi_1(\mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u}^n \star \varphi - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}},$$

- Pour toute fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Pi_3(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) d\mathbf{x} ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n(\mathbf{u}^n - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente toujours le crochet de dualité $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$, et cette fois-ci :

$$\Pi_3(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} : \nabla_{\mathbf{x}} - (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t.$$

3.2.1.2 Contrôle des suites d'approximation

Une fois ces deux suites de fonctions construites, on a ce premier lemme :

Lemme 3.2.1 :

La suite $(\mathbf{u}^n)_n$ est bornée dans les deux espaces suivants : $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ et $L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

Preuve :

Dans le système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon^n$ on multiplie l'équation de Navier-Stokes par \mathbf{u}_{n+1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot [(\mathbf{u}^n \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{u}^n)] \\ + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} p^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1} \cdot \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n(t, \mathbf{x})) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

et on intègre l'équation obtenue sur le tore \mathbb{T}^3 .

Par intégration par parties et dérivation sous le signe somme, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{n+1} d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x}, \\ \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} p^{n+1} d\mathbf{x} &= 0, \\ - \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que \mathbf{u}^{n+1} est à divergence nulle. Ces opérations sont licites car toutes les fonctions manipulées sont régulières et les intégrations réalisées sur un compact, les termes de bords disparaissant par périodicité.

Détaillons maintenant ce qui se passe pour le terme de convection. En utilisant encore une fois l'incompressibilité des \mathbf{u}^n , il vient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot [(\mathbf{u}^n \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{u}^n)] d\mathbf{x} \right| &= \left| \sum_{k,j=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} u_j^{n+1} (u_k^n \star \varphi) \frac{\partial \beta(u_j^n)}{\partial x_k} d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| - \sum_{k,j=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_k} (u_k^n \star \varphi) \beta(u_j^n) d\mathbf{x} \right|. \end{aligned}$$

La fonction saturante β étant par définition bornée par une constante M_β , on majore alors les termes de la somme :

$$\left| \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_k} (u_k^n \star \varphi) \beta(u_j^n) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{1}{2} M_\beta^2 |u_k^n \star \varphi|^2,$$

d'où :

$$\left| \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot [(\mathbf{u}^n \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{u}^n)] d\mathbf{x} \right| \leq \frac{1}{2} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{3}{2} M_\beta^2 \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2.$$

Pour le terme source, on utilise l'expression des solutions $(f^n)_n$ fournie par le lemme A.2.4 :

$$f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) e^{3t},$$

d'où l'on tire que la suite $(f^n)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$. Notons alors :

$$K_f := \sup_{p \in \mathbb{N}} \|f^p\|_{L^\infty}.$$

On écrit, en notant R_γ le rayon d'une boule contenant le support de γ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\xi} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^n f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}| f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 |\boldsymbol{\xi}| f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}^n|^2 f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\ &\leq \underbrace{K_f R_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)|}_{:=A_1} + \underbrace{K_f |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| (R_\gamma + 1)}_{:=A_3} \|\mathbf{u}^{n+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\ &\quad + \underbrace{K_f |\mathbf{B}(0, R_\gamma)|}_{:=A_2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\ &= A_1 + A_2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + A_3 \|\mathbf{u}^{n+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

Mises bout à bout, les estimations précédentes conduisent à :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} \right] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} \leq A_1 + (A_2 + \frac{3}{2} M_\beta^2 \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}^2) \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^n|^2 d\mathbf{x} + A_3 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x},$$

et on a donc l'existence de trois constantes C_1 , C_2 et C_3 telles que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} \right] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} \leq C_1 + C_2 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^n|^2 d\mathbf{x} + C_3 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x}.$$

Le lemme de Grönwall A.1.1 permet alors de conclure. \blacklozenge

3.2.1.3 Convergence du schéma

Les bornes précédemment obtenues vont nous permettre d'obtenir la convergence du schéma $\mathbf{VNSA}_\varepsilon^n$:

Lemme 3.2.2 :

Les suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(f^n)_n$ sont convergentes respectivement dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ et $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

Preuve :

D'après le lemme précédent, on sait que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$. L'expression des solutions de l'équation de Vlasov donnée par le lemme A.2.4 nous montre par ailleurs que la suite $(f^n)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$. Notons donc

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{u}} &:= \sup_{p \in \mathbb{N}} \|\mathbf{u}^p\|_{\infty, 2}, \\ K_f &:= \sup_{p \in \mathbb{N}} \|f^p\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

L'idée va être d'étudier la norme de l'accroissement $\mathbf{w}^{n+1} := \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n$ et de prouver que celle-ci est le terme général d'une série convergente. D'après le lemme de Grönwall A.1.1, il suffit de prouver l'existence de deux constantes B_1 et B_2 telles que :

$$\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq B_1 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds + B_2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds.$$

Écrivons l'équation vérifiée par ce taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w}^{n+1} + ((\mathbf{w}^n \star \varphi) \cdot \nabla) \beta(\mathbf{u}^n) &+ ((\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi) \cdot \nabla) [\beta(\mathbf{u}^n) - \beta(\mathbf{u}^{n-1})] + \nabla_{\mathbf{x}}(p^{n+1} - p^n) - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{R}^3} f^{n-1}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

À ce stade, les solutions manipulées sont toujours régulières, on peut donc multiplier la précédente équation par \mathbf{w}^{n+1} , et intégrer sur \mathbb{T}^3 . Cela donne, termes à termes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \partial_t \mathbf{w}^{n+1} d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x}, \\ \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \nabla(p^{n+1} - p^n) d\mathbf{x} &= 0, \\ - \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1} d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Il reste ensuite quatre termes à majorer :

$$\begin{aligned} \boxed{1} &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \left\{ ((\mathbf{w}^n \star \varphi) \cdot \nabla) \beta(\mathbf{u}^n) \right\} d\mathbf{x}, \\ \boxed{2} &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \left\{ ((\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi) \cdot \nabla) [\beta(\mathbf{u}^n) - \beta(\mathbf{u}^{n-1})] \right\} d\mathbf{x}, \\ \boxed{3} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^{n-1} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \mathbf{w}^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \\ \boxed{4} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1}) \mathbf{w}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On intègre par parties, on utilise toujours la périodicité des vitesses et la nullité de leur divergence :

$$\begin{aligned} \boxed{1} &= - \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial w_j^{n+1}}{\partial x_k} [w_k^n \star \varphi] \beta(u_j^n) d\mathbf{x}, \\ \boxed{2} &= - \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial w_j^{n+1}}{\partial x_k} [u_k^{n-1} \star \varphi] [\beta(u_j^n) - \beta(u_j^{n-1})] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En considérant les deux cas (un pour chacune des majorations) de l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} \|h_1 \star h_2\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\leq \|h_1\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} \|h_2\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \\ \|h_1 \star h_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} &\leq \|h_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|h_2\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \end{aligned}$$

et en notant $\text{Lip}(\beta)$ la constante de Lipschitz de la fonction saturante, on voit que :

$$\begin{aligned} \boxed{1} &\leq \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + 9M_\beta^2 \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}^2 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2 d\mathbf{x}, \\ \boxed{2} &\leq K_{\mathbf{u}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \left\{ \frac{1}{3K_{\mathbf{u}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}} \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + 9K_{\mathbf{u}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \text{Lip}(\beta)^2 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2 d\mathbf{x} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + 9K_{\mathbf{u}}^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \text{Lip}(\beta)^2 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\boxed{3} \leq \frac{1}{2} M_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| K_f \left[\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2 d\mathbf{x} \right],$$

de sorte qu'il ne reste que le quatrième terme à majorer, et ce sera le plus pénible :

$$\begin{aligned} \boxed{4} &= \left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1}) \mathbf{w}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1})^2 |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{2} M_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + \boxed{5}, \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{5} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1})^2 |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}.$$

Nous sommes donc arrivés à la majoration suivante (tous les \mathbf{w}^n sont nuls initialement) :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{3} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}|^2(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds \\ &\leq D \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds + \frac{1}{2} |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| (K_f + 1) \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds + \int_0^t \boxed{5} ds, \end{aligned}$$

où

$$D = 9M_\beta^2 \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}^2 + 9K_{\mathbf{u}}^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \text{Lip}(\beta)^2 + \frac{|\mathbf{B}(0, R_\gamma)|}{2} K_f.$$

Comme $(\mathbf{u}^n)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$, on aboutit à l'existence d'une constante K_1 dont on s'épargne le calcul, telle que :

$$\boxed{5} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1})^2 |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \leq K_1 \|f^n - f^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t).$$

On notera ici que la norme infinie est prise en espace et en vitesse, mais pas en temps.
Si on parvient à prouver une estimation du type :

$$\|f^n - f^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t) \leq K_2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}|^2(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds = K_2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds,$$

on aura

$$\int_0^t \boxed{5} ds \leq TK_1 K_2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds,$$

et le lemme de Grönwall A.1.1 permettra d'obtenir que $(\mathbf{u}^n)_n$ est bien convergente (car de Cauchy) dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

Pour étudier la différence $f^n - f^{n-1}$, on exploite l'expression des solutions de l'équation de Vlasov :

$$\begin{aligned} f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= f_{\text{in}}(\mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) e^{3t}, \\ f^{n-1}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= f_{\text{in}}(\mathbf{T}_{t,0}^{n-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) e^{3t}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ représente la caractéristique au temps t , issue de $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, associée à l'accélération :

$$\mathbf{\Gamma}^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = [\mathbf{u}^n \star \varphi(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}].$$

On a alors, en s'épargnant la notation des variables :

$$\begin{aligned} |f^n - f^{n-1}| &= |f_{\text{in}}(\mathbf{T}_{t,0}^n) - f_{\text{in}}(\mathbf{T}_{t,0}^{n-1})| e^{3t} \\ &\leq \text{Lip}(f_{\text{in}}) \|\mathbf{T}_{t,0}^n - \mathbf{T}_{t,0}^{n-1}\| e^{3t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Il reste enfin à majorer le dernier terme ($\|\cdot\|$ représente la distance euclidienne induite sur $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$) :

$$\|\mathbf{T}_{t,0}^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{T}_{t,0}^{n-1}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\|,$$

pour lequel on va utiliser le lemme de Grönwall A.1.2. On rappelle la définition des caractéristiques :

$$\mathbf{T}_{t,0}^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^n(t) \\ \boldsymbol{\xi}^n(t) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}^n(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^n(t) \\ \mathbf{\Gamma}^n(t, \mathbf{x}^n(t), \boldsymbol{\xi}^n(t)) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^n(0) \\ \boldsymbol{\xi}^n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Nous allons appliquer le lemme de Grönwall (n , \mathbf{x} et $\boldsymbol{\xi}$ sont ici **fixés**) à la fonction :

$$a_n(t) = \|\mathbf{T}_{t,0}^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{T}_{t,0}^{n-1}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\| = \|(\mathbf{x}^n(t) - \mathbf{x}^{n-1}(t), \boldsymbol{\xi}^n(t) - \boldsymbol{\xi}^{n-1}(t))\|.$$

On a d'abord :

$$\begin{aligned} a_n(t) &\leq \|\mathbf{x}^n(t) - \mathbf{x}^{n-1}(t)\| + \|\boldsymbol{\xi}^n(t) - \boldsymbol{\xi}^{n-1}(t)\| \\ &\leq \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\xi}}^n(s) - \dot{\boldsymbol{\xi}}^{n-1}(s)\| ds + \|\boldsymbol{\xi}^n(t) - \boldsymbol{\xi}^{n-1}(t)\| \\ &\leq \int_0^t a_n(s) ds + \int_0^t \|\mathbf{\Gamma}^n(s, \mathbf{x}^n(s), \boldsymbol{\xi}^n(s)) - \mathbf{\Gamma}^{n-1}(s, \mathbf{x}^{n-1}(s), \boldsymbol{\xi}^{n-1}(s))\| ds. \end{aligned}$$

Et maintenant le gros bout, en notant $\mathbf{\Gamma}^m := \mathbf{\Gamma}^m(s, \mathbf{x}^n(s), \boldsymbol{\xi}^m(s))$, pour $m \in \{n, n-1\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^n - \mathbf{\Gamma}^{n-1} &= [(\mathbf{u}^n \star \varphi)(s, \mathbf{x}^n(s)) - \boldsymbol{\xi}^n(s)] - [(\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi)(s, \mathbf{x}^{n-1}(s)) - \boldsymbol{\xi}^{n-1}(s)] \\ &= \overbrace{\left\{ (\mathbf{u}^n \star \varphi)(s, \mathbf{x}^n(s)) - (\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi)(s, \mathbf{x}^{n-1}(s)) \right\}}^{\boxed{\text{A}}} + \overbrace{\left\{ -\boldsymbol{\xi}^n(s) + \boldsymbol{\xi}^{n-1}(s) \right\}}^{\boxed{\text{B}}}. \end{aligned}$$

Les hypothèses réalisées et le lemme 3.2.1 démontré précédemment conduisent aux remarques suivantes :

- La suite de fonctions $(\mathbf{u}^n \star \varphi)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$.
- À t fixé, les fonctions $(\mathbf{u}^n \star \varphi)$ sont lipschitziennes en espace et leurs constantes de Lipschitz peuvent être bornées indépendamment de n et de t . En effet :

$$|\mathbf{u}^n \star \nabla_{\mathbf{x}} \varphi| \leq \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq K_{\mathbf{u}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

- $\gamma(\boldsymbol{\xi})$ et $\boldsymbol{\xi}\gamma(\boldsymbol{\xi})$ sont lipschitziennes. On fixe C_γ une constante majorant leurs constantes de Lipschitz. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \|\boxed{\text{A}}\| &\leq \|(\mathbf{u}^n \star \varphi)(s, \mathbf{x}^n(s)) - (\mathbf{u}^n \star \varphi)(s, \mathbf{x}^{n-1}(s))\| + \left\| \left[(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \star \varphi \right](s, \mathbf{x}^{n-1}(s)) \right\| \\ &\leq K_{\mathbf{u}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{x}^n(s) - \mathbf{x}^{n-1}(s)\| + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq K_{\mathbf{u}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} a_n(s) + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \\ \|\boxed{\text{B}}\| &= \|\boldsymbol{\xi}^n(s) - \boldsymbol{\xi}^{n-1}(s)\| \leq a_n(s). \end{aligned}$$

Au final on obtient :

$$a_n(t) \leq \overbrace{(2 + K_{\mathbf{u}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)})}^M \int_0^t a_n(s) ds + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \int_0^t \|\mathbf{w}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds.$$

On a donc (lemme A.1.2) :

$$\begin{aligned} a_n(t) &\leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \int_0^t \|\mathbf{w}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds + M \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \int_0^t e^{M(t-s)} \int_0^s \|\mathbf{w}^n(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\sigma ds \\ &\leq (\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + M \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} T e^{MT}) \int_0^t \|\mathbf{w}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds. \end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$\|\mathbf{T}_{t,0}^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{T}_{t,0}^{n-1}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\| \leq (\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + M \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} T e^{MT}) \int_0^t |\mathbf{w}^n|_2(s) ds. \quad (3.19)$$

En reportant ceci dans (3.15), on a alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - f^{n-1}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| &\leq \overbrace{\text{Lip}(f_{\text{in}}) e^{3T} (\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + M \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} T e^{MT})}^L \int_0^t \|\mathbf{w}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds \\ &\leq L \sqrt{T} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^n|^2(s, \mathbf{x}) dx ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En élevant l'inégalité précédente au carré et en passant à la borne supérieure (uniquement en espace et en vitesse), il vient :

$$\|f^n - f^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t) \leq \overbrace{L^2 T}^{K_2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |w^n|^2(s, \mathbf{x}) dx ds, \quad (3.20)$$

ce qui était précisément l'inégalité recherchée pour pouvoir appliquer le lemme de Grönwall discret. Ainsi la norme de la suite $(\mathbf{w}^n)_n$ dans l'espace $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ est le terme général d'une série convergente. Ce dernier espace étant complet, on en déduit que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ y converge vers un élément u . Mais l'estimation (3.20) nous permet de faire le même raisonnement dans l'espace $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, pour la suite $(f^n)_n$. Cette dernière est donc convergente vers un élément $f \in L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$ et le lemme 3.2.2 est finalement démontré. \blacklozenge

On sait grâce au lemme 3.2.1 que $(\mathbf{u}^n)_n$ est bornée dans l'espace de Hilbert $L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$, on peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente (on omet l'indexation) vers un élément \mathbf{v} de $L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$. Par ailleurs, le lemme 3.2.2 nous fournit la convergence forte, et donc faible, de cette sous-suite dans $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$, vers un élément \mathbf{u} de $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$. Par unicité de la limite faible, il vient $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned} f^n &\rightarrow f \text{ dans } L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)), \\ \mathbf{u}^n &\rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3)), \\ \mathbf{u}^n &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)). \end{aligned}$$

Prouvons que le couple (\mathbf{u}, f) est solution du système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$.

On va passer à la limite dans la formulation faible $\mathbf{VNSA}_\varepsilon^n$.

Pour l'équation de Navier-Stokes, on a pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle et pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^{n+1}(t), \psi(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Pi_3(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x})(\psi) d\mathbf{x} ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon \cdot \psi(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n(\mathbf{u}^n - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \psi d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est crochet de dualité $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ et :

$$\Pi_3(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} : \nabla_{\mathbf{x}} - (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t.$$

Écrivons la liste des convergences à obtenir :

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad &\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{2} \quad &\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{3} \quad &\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t \psi d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u} \cdot \partial_t \psi d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{4} \quad &\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \cdot \psi d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \psi d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{5} \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \|\langle \mathbf{u}^{n+1}(t), \psi(t) \rangle - \langle \mathbf{u}(t), \psi(t) \rangle\|_{L^\infty([0, T])} = 0. \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ découle des convergences faibles de $(\mathbf{u}^n)_n$ vers \mathbf{u} dans $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ et $L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

Pour [2] on écrit :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_x \boldsymbol{\psi} - (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}) : \nabla_x \boldsymbol{\psi} dx ds \right| \\ & \leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} [(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \star \varphi] \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_x \boldsymbol{\psi} dx ds \right| + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes (\beta(\mathbf{u}^n) - \beta(\mathbf{u})) : \nabla_x \boldsymbol{\psi} dx ds \right|, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_x \boldsymbol{\psi} - (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}) : \nabla_x \boldsymbol{\psi} d\xi ds \right| \\ & \leq M_\beta \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla_x \boldsymbol{\psi}\|_{2,2} T \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty,2} + \text{Lip}(\beta) \|\mathbf{u}\|_{\infty,2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla_x \boldsymbol{\psi}\|_{2,2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty,2}, \end{aligned}$$

et la convergence vers 0 découle de celle de $(\mathbf{u}^n - \mathbf{u})_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$; cette dernière fournit d'ailleurs [3] directement car $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

Passons à [4]. On écrit :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \cdot \boldsymbol{\psi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\xi dx ds \right| \\ & \leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{u} - \mathbf{u}^n) \cdot \boldsymbol{\psi} d\xi dx ds \right| + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f) \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\xi dx ds \right|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{u} - \mathbf{u}^n) \cdot \boldsymbol{\psi} d\xi dx ds \right| \leq |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| K_f \|\boldsymbol{\psi}\|_{1,2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty,2} \longrightarrow 0, \\ & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f) \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\xi dx ds \right| \leq \|f^n - f\|_{L^\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi}| d\xi dx ds \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Reste [5]. On va réaliser une dernière extraction pour obtenir cette convergence. Cette extraction dépendra de $\boldsymbol{\psi}$ (mais cela ne pose pas de problème pour la vérification de la formulation faible).

L'argument qui suit est inspiré du cours de Jean-Yves Chemin [28]. On définit :

$$\begin{aligned} g_n : [0, T] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \langle \mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{u}^n)_n$ est bornée dans $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$, $(g_n)_n$ l'est dans $L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$. On a par ailleurs (toutes les fonctions manipulées sont régulières en temps) :

$$\dot{g}_n(t) = \langle \partial_t \mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\psi} \rangle + \langle \mathbf{u}^n, \partial_t \boldsymbol{\psi} \rangle.$$

Mais \mathbf{u}^n vérifie (fortement) l'équation approchée de Navier-Stokes, en particulier la formulation faible en espace et forte en temps suivante :

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle & = \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^{n-1}) : \nabla_x \boldsymbol{\psi} dx - \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_x \mathbf{u}^n : \nabla_x \boldsymbol{\psi} dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{T}^3} f^{n-1} \gamma(\boldsymbol{\xi}) [\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^{n-1}] \cdot \boldsymbol{\psi}(t, x) dx. \end{aligned}$$

Au vu des estimations obtenues sur les suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(f^n)_n$, on voit facilement que le membre de droite est borné dans $L^2([0, T]; \mathbb{R})$ et de même pour $\dot{g}_n(t)$. Mais alors la suite (g_n) est uniformément hôlderienne

d'exposant 1/2. Le théorème d'Ascoli fournit alors une extraction (que l'on ne note pas) et un élément $g \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$ limite de $(g_n)_n$ dans cet espace. Mais on sait que $(\mathbf{u}^n)_n$ tend vers \mathbf{u} dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$, en particulier $(g_n)_n(t)$ tend vers $\langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle$ dans $L^2([0, T]; \mathbb{R})$. Par unicité de la limite, il vient $\boxed{5}$. Après tous ces passages à la limite, on obtient bien, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Pi_2(\mathbf{u})(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) d\mathbf{x} ds = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds.$$

Pour l'équation de Vlasov : $\forall \phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, on a pour tout t :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Pi_1(\mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\phi) f^n(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned}$$

avec, on rappelle,

$$\Pi_1(\mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u}^n \star \varphi - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}.$$

L'opérateur différentiel $\partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ envoie $\mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ dans $L^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$. La convergence forte L^∞ impliquant la convergence $L^\infty - \star$, on a le résultat voulu pour le terme concerné du membre de droite. Pour le dernier bout, on écrit (on omet les variables) :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\mathbf{u}^n \star \varphi) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f^n d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \right| \\ & \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty, 2} K_f \|\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \phi\|_{L^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + \|f^n - f\|_{L^\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |(u \star \varphi) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \phi| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds. \end{aligned}$$

Le membre de droite tend bien vers 0 car $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(f^n)_n$ approchent respectivement \mathbf{u} et f dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ et $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

Pour le terme de gauche, on procède comme pour l'équation de Navier-Stokes (en réalisant une nouvelle extraction pour le crochet). L'équation de Vlasov est donc également vérifiée.

Il nous reste un point à vérifier pour que le couple (\mathbf{u}, f) soit bien solution au sens précisé plus haut : c'est la continuité temporelle de \mathbf{u} et f à valeurs dans $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$ et $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ respectivement.

Pour f il suffit de remarquer qu'elle est continue par limite uniforme en toutes ses variables, et donc bien dans l'espace voulu.

Passons à \mathbf{u} . On écrit la formulation variationnelle contre une fonction test $\boldsymbol{\psi}$ indépendante du temps :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}(t_1), \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \mathbf{u}(t_2), \boldsymbol{\psi} \rangle &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} ds - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} ds \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds. \end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$|(\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u})| \leq M_\beta \|\mathbf{u}\|_{\infty, 2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} =: C_1,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} f \gamma(\boldsymbol{\xi}) |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi} \leq 2K_f |\mathbb{B}(0, R_\gamma)| \left\{ R_\gamma^2 + \|\mathbf{u}\|_{\infty, 2} \right\} =: C_2.$$

En notant $M_{\mathbf{u}} = C_1 + C_2$, on a (Cauchy-Schwarz) :

$$|\langle \mathbf{u}(t_1), \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \mathbf{u}(t_2), \boldsymbol{\psi} \rangle| \leq \left[M_{\mathbf{u}} |t_1 - t_2| + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}\|_{2,2} |t_1 - t_2|^{1/2} \right] \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbb{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)}$$

et la continuité en découle. La proposition 3.2.1 est donc démontrée. \blacklozenge

On a obtenu, pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$ l'existence de solutions au système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$ introduit au début de la section 3.2.1

3.2.2 Élimination des perturbations : $\varepsilon \rightarrow 0$

3.2.2.1 Preuve de l'estimation *a priori*

On va maintenant relaxer toutes les perturbations d'un coup, pour obtenir dans un premier temps un couple de solutions *locales* en temps.

Le lemme suivant va nous servir à plusieurs reprises :

Lemme 3.2.3 :

Soit $\gamma > 0$ et g un élément de $L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, tels que $m_\gamma g(t, \mathbf{x}) < +\infty$, presque partout en temps et en espace. On a alors l'estimation suivante, pour tout $\alpha < \gamma$, presque partout en temps et en espace :

$$m_\alpha g(t, \mathbf{x}) \leq \left(\frac{4}{3} \pi \|g(t, \mathbf{x}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + 1 \right) m_\gamma g(t, \mathbf{x})^{\frac{\alpha+3}{\gamma+3}}.$$

Preuve : Pour tout $R > 0$, on a :

$$\begin{aligned} m_\alpha g(t, \mathbf{x}) &= \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leq R} |\boldsymbol{\xi}|^\alpha g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_{|\boldsymbol{\xi}| > R} |\boldsymbol{\xi}|^{\alpha-\gamma} |\boldsymbol{\xi}|^\gamma g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \frac{4}{3} \|g(t, \mathbf{x}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} R^{\alpha+3} + \frac{1}{R^{\gamma-\alpha}} m_\gamma g(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

En écartant le cas trivial où g est nulle presque sûrement en vitesse et en posant $R = m_\gamma g(t, \mathbf{x})^{\alpha+3}$, on obtient l'estimation annoncée. \blacklozenge

Avant de poursuivre, remarquons que la solution de f_ε de l'équation de Vlasov construite précédemment est \mathcal{C}^1 en toutes ses variables. En effet l'estimation (3.19) obtenue durant le lemme 3.2.2 et le résultat fourni par celui-ci indiquent que les caractéristiques $\mathbf{T}_{t,0}^n$ convergent uniformément. Le caractère lipschitzien de la donnée initiale $f_{\text{in}}^\varepsilon$ transmet la convergence aux solutions f_ε^n et par unicité de la limite on a donc :

$$f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) e^{3t},$$

où $\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est la limite uniforme sur $[0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ des caractéristiques $\mathbf{T}_{t,0}^n$. Le caractère \mathcal{C}^1 de f_ε se ramène donc à l'étude de celui de $\mathbf{T}_{t,0}$. Or le système (4.5) – (4.7) montre que la convergence uniforme (en temps) des caractéristiques $(\mathbf{x}^n(t), \boldsymbol{\xi}^n(t))$ et celle de \mathbf{u}^n (dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$) fournissent celle de la dérivée $(\dot{\mathbf{x}}^n(t), \dot{\boldsymbol{\xi}}^n(t))$ (on utilise ici la convolution présente dans l'accélération!). Un théorème classique de convergence montre que $\mathbf{T}_{t,0}$ est dérivable en temps et que le système (4.5) – (4.7) passe à la limite pour donner :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{t,0}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\xi}(t)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \boldsymbol{\xi}(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $\Gamma_\varepsilon(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\xi}(t)) = [(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon)(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}]$.

Le second membre de droite est limite uniforme de fonctions continues (en toutes variables), donc l'est également. Le caractère lipschitzien en le couple de variable $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est acquis grâce à la convolution. Le théorème de régularité par rapport aux conditions initiales s'applique et on récupère le fait que f_ε est \mathcal{C}^1 en toutes ses variables. Par ailleurs, une limite uniforme d'applications propres est toujours propre, c'est le cas de $\mathbf{T}_{t,0}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ et f_ε est donc à support compact en vitesse.

Nous allons commencer par écrire les estimations a priori fournies par le système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$.

D'après ce qui précède, f_ε est régulière et à support compact en vitesse. Cela justifie l'obtention de l'inégalité suivante par multiplication de l'équation de Vlasov par $|\boldsymbol{\xi}|^2$ et intégration parties :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_2 f_\varepsilon + 2M_2 f_\varepsilon &= 2 \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} [\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon] \cdot \boldsymbol{\xi} f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\ &\Downarrow \\ \frac{d}{dt} M_2 f_\varepsilon + 2M_2 f_\varepsilon &\leq 2 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon| m_1 f_\varepsilon(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le lemme 3.2.3 nous donne, pour $\alpha = \gamma - 1 = 1$,

$$m_1 f_\varepsilon(t, \mathbf{x}) \leq \left[\overbrace{\frac{4}{3} \pi e^{3T} \|f_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + 1}^{C_{f_{\text{in}}}^\varepsilon} \right] m_2 f^\varepsilon(t, \mathbf{x})^{4/5},$$

et donc, en remarquant $C_{f_{\text{in}}}^\varepsilon \leq C_{f_{\text{in}}}$:

$$\|m_1 f_\varepsilon(t)\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} \leq C_{f_{\text{in}}} M_2 f_\varepsilon(t)^{4/5}. \quad (3.22)$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_2 f_\varepsilon(t) + 2M_2 f_\varepsilon(t) &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}(t) \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} \|m_1 f_\varepsilon(t)\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq C_{f_{\text{in}}} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} M_2 f_\varepsilon(t)^{4/5}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En posant $\Psi(t) = M_2 f_\varepsilon(t)^{1/5}$ on a :

$$\begin{aligned} \Psi'(t) + \frac{2}{5} \Psi(t) &\leq C_{f_{\text{in}}} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} \\ &\Downarrow \\ \Psi(t) &\leq \Psi(0) + \int_0^t e^{-\frac{2}{5}(t-s)} C_{f_{\text{in}}} \|\mathbf{u}^\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} ds \\ &\Downarrow \\ \Psi(t) &\leq \Psi(0) + C_{f_{\text{in}}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}(s) ds \\ &\Downarrow \\ M_2 f_\varepsilon(t) &\leq \left\{ M_2 f_{\text{in}}^\varepsilon + C_{f_{\text{in}}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}(s) ds \right\}^5. \end{aligned}$$

En injectant cela dans (3.23) et en utilisant le contrôle $M_2 f_{\text{in}}^\varepsilon \leq M_2 f_{\text{in}}$ mentionné en début de section, on a donc l'estimation (on a $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} = 1$) :

$$\frac{d}{dt} M_2 f_\varepsilon + 2M_2 f_\varepsilon \leq C_{f_{\text{in}}} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + C_{f_{\text{in}}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} ds \right\}^4.$$

Pour l'équation de Navier-Stokes, si la solution fluide du système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$ était régulière, en multipliant par \mathbf{u}_ε et en intégrant en espace on obtiendrait (en utilisant la nullité de la divergence) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 = \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_\varepsilon) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x},$$

D'où il viendrait :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|(t, \mathbf{x}) m_1 f_\varepsilon(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

et en intégrant en temps on obtiendrait finalement pour tout t :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \\ \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|(s, \mathbf{x}) m_1 f_\varepsilon(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pour démontrer rigoureusement l'inégalité précédente, on a deux alternatives : récupérer un peu de régularité pour \mathbf{u}_ε en « bricolant » par des arguments de type bootstrap (en utilisant fortement les convolutions présentes), ou bien établir une estimation similaire pour la suite \mathbf{u}_ε^n et passer à la limite. Détaillons la deuxième option : pour le système $\mathbf{VNSA}_\varepsilon^n$, les solutions sont régulières par construction et on obtient donc, après multiplication et intégrations (en utilisant toujours la nullité de la divergence des champs de vitesse) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} ((\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n) \cdot [\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}] d\mathbf{x} ds \\ = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^{n-1} \mathbf{u}^n \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^{n-1}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

On rappelle les convergences obtenues :

$$\begin{aligned} f^n &\rightarrow f \text{ dans } L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)), \\ \mathbf{u}^n &\rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3)), \\ \mathbf{u}^n &\rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)). \end{aligned}$$

D'autre part, la suite $((\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n)$ est bornée dans $L^1([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$:

$$|(\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n)|^2 \leq 5 \sum_{k,j=1}^3 |\varphi \star \mathbf{u}_k^n|^2 \beta'(\mathbf{u}_j^n)^2 \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j^n}{\partial x_k} \right]^2 \leq 5 \|\mathbf{u}^n\|_{\infty,2}^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 M_\beta |\nabla \mathbf{u}^n|^2.$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 &\rightarrow \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \text{ dans } L^\infty([0, T]), \\ \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds, \\ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} ((\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n) \cdot [\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}] d\mathbf{x} &\rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty([0, T]). \end{aligned}$$

Enfin en écrivant $\mathbf{u}^{n-1} \cdot \mathbf{u}^n - |\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}^{n-1} \cdot (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u})$ et en exploitant la convergence uniforme de $(f^n)_n$, on obtient pour tout temps t :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^{n-1} \mathbf{u}^n \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^{n-1}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \longrightarrow \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x},$$

et en passant à la limite inférieure dans (3.25), il vient :

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \quad (3.26)$$

on obtient donc rigoureusement (3.24).

En utilisant l'inégalité de Hölder et l'estimation (3.22), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \|m_1 f_\varepsilon(s)\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} ds \\ & \leq C_{f_{\text{in}}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + C_{f_{\text{in}}} \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right\}^4 ds \\ & \quad + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En notant

$$E^\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + M_2 f_\varepsilon(t) \right\} + \int_0^t M_2 f_\varepsilon(s) ds + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds,$$

les estimations précédentes se résument ainsi ($\|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}$) :

$$E^\varepsilon(t) \leq \frac{1}{2} \left\{ \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + M_2 f_{\text{in}} \right\} + \int_0^t \frac{3}{2} C_{f_{\text{in}}} \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + C_{f_{\text{in}}} \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right\}^4 ds.$$

Majorons l'intégrande du terme de droite :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} C_{f_{\text{in}}} \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + C_{f_{\text{in}}} \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right\}^4 \\ & \leq 24 C_{f_{\text{in}}} \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \left\{ (M_2 f_{\text{in}})^4 + C_{f_{\text{in}}}^4 \left[\int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} ds \right]^4 \right\} \\ & \leq \eta \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}^2 + 2 \frac{(24 C_{f_{\text{in}}})^2}{\eta} \left\{ (M_2 f_{\text{in}})^8 + C_{f_{\text{in}}}^8 \left[\int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right]^8 \right\} \\ & \leq K_{1,\eta} + \eta K_{\mathbb{T}^3} \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} \\ & \quad + K_{2,\eta} \left[\int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right]^8, \end{aligned}$$

où $K_{\mathbb{T}^3}$ est une constante de Sobolev. Les deux autres constantes sont données par :

$$\begin{aligned} K_{1,\eta} & := 2 \frac{(24 C_{f_{\text{in}}})^2}{\eta} (M_2 f_{\text{in}})^8, \\ K_{2,\eta} & := 2 \frac{(24 C_{f_{\text{in}}})^2}{\eta} C_{f_{\text{in}}}^8. \end{aligned}$$

Enfin η est choisi de telle sorte que $\eta K_{\mathbb{T}^3}$, $4\eta K_{\mathbb{T}^3} T$ et $\frac{\eta K_{\mathbb{T}^3}}{1-\eta K_{\mathbb{T}^3}}$ soient tous inférieurs à $\frac{1}{2}$.
On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\varepsilon(t) \leq & \overbrace{\frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\mathbf{in}} + \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}}^{:=K_{3,\eta}} + K_{1,\eta} T + \eta K_{\mathbb{T}^3} \int_0^t \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) \right\} ds \\ & + K_{2,\eta} \int_0^t \left[\int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}(\sigma) d\sigma \right]^8 ds. \end{aligned} \quad (3.28)$$

En particulier cela donne :

$$(1 - \eta K_{\mathbb{T}^3}) \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq K_{3,\eta} + \eta K_{\mathbb{T}^3} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + K_{2,\eta} \int_0^t \left[\int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right]^8 ds,$$

en intégrant une nouvelle fois (3.28) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ M_2 f_\varepsilon(s) + \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} ds \leq & K_{3,\eta} T + \eta K_{\mathbb{T}^3} \int_0^t \int_0^s \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} d\sigma ds \\ & + K_{2,\eta} T \int_0^t \left[\int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right]^8 ds. \end{aligned}$$

Et en mettant tout bout à bout :

$$\begin{aligned} \int_0^t M_2 f_\varepsilon(s) ds + \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq & K_{3,\eta} \left(\frac{1}{1 - \eta K_{\mathbb{T}^3}} + 2T \right) + \frac{\eta K_{\mathbb{T}^3}}{1 - \eta K_{\mathbb{T}^3}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ & + \left(\frac{K_{2,\eta}}{1 - \eta K_{\mathbb{T}^3}} + 2K_{2,\eta} T \right) \int_0^t \left[\int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right]^8 ds \\ & + 2\eta K_{\mathbb{T}^3} \int_0^t \int_0^s \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} d\sigma ds. \end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[\int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} d\sigma \right]^8 ds & \leq T \int_0^t \left[\int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}^2 d\sigma \right]^4 ds \\ & \leq T K_{\mathbb{T}^3}^8 \int_0^t \left[\int_0^s \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} d\sigma \right]^4 ds, \end{aligned} \quad (3.29)$$

et, grâce au choix de η ,

$$2\eta K_{\mathbb{T}^3} \int_0^t \int_0^s \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} d\sigma ds \leq \frac{1}{4} \int_0^t \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} ds,$$

ce qui donne finalement, en utilisant que $\frac{\eta K_{\mathbb{T}^3}}{1-\eta K_{\mathbb{T}^3}} \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_0^t M_2 f_\varepsilon(s) ds + \frac{1}{4} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \frac{3}{4} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq & \frac{A_0}{4} + \frac{B_0}{4} \int_0^t \left[\int_0^s \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} d\sigma \right]^4 ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\frac{A_0}{4} &:= K_{3,\eta} \left(\frac{1}{1 - \eta K_{\mathbb{T}^3}} + 2T \right), \\ \frac{B_0}{4} &:= K_{2,\eta} \left(\frac{1}{1 - \eta K_{\mathbb{T}^3}} + 2T \right) T K_{\mathbb{T}^3}^8.\end{aligned}$$

De sorte qu'en notant :

$$a(t) := \int_0^t M_2 f_\varepsilon(s) ds + \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds,$$

on ait :

$$a(t) \leq A_0 + B_0 \int_0^t a(s)^4 ds.$$

D'après le lemme A.1.3 (Grönwall surlinéaire), on en déduit l'existence d'un temps⁶

$$T_* = T_* \left[\|f_{\mathbf{in}}\|_\infty; M_2 f_{\mathbf{in}}; \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right],$$

et d'une constante $K_1 = K_1 \left[\|f_{\mathbf{in}}\|_\infty; M_2 f_{\mathbf{in}}; \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right]$ tels que pour $t \in [0, T_*]$ et $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$a(t) \leq K_1.$$

En utilisant (3.28) et (3.29) on obtient :

Lemme 3.2.4 :

Il existe un temps $T_ = T_* \left[\|f_{\mathbf{in}}\|_\infty; M_2 f_{\mathbf{in}}; \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right]$ et une constante $K = K \left[\|f_{\mathbf{in}}\|_\infty; M_2 f_{\mathbf{in}}; \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right]$ vérifiant :*

$$\mathbf{E}^\varepsilon(t) \leq K. \quad (3.30)$$

3.2.2.2 Preuve de l'existence locale par compacité

Proposition 3.2.1 (Existence locale) :

Il existe une solution locale au système VNS sur l'intervalle $[0, T_]$. Cette solution vérifie de plus, presque sûrement :*

$$\|f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq e^{3T_*} \|f_{\mathbf{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 f d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\mathbf{in}} + \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}.\end{aligned} \quad (3.32)$$

En particulier on a :

$$M_2 f(t) + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq M_2 f_{\mathbf{in}} + \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \quad (3.33)$$

Preuve :

Pour cette démonstration, on se place systématiquement sur l'intervalle $[0, T_*]$ et on adapte la notation

⁶On a utilisé ici implicitement la décroissance du temps de vie par rapport aux constantes A_0 et B_0 , nous reviendrons sur ce point lors du prolongement de la solution à tout l'intervalle $[0, T]$.

des normes/espaces en conséquences.

On construit les solutions comme limites de solutions des systèmes $\mathbf{VNSA}_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour la partie Vlasov, on ne peut pas faire beaucoup mieux que le principe du maximum et une extraction $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$.

Pour l'équation de Navier-Stokes, on va chercher à appliquer un lemme du type Aubin. On trouvera par exemple la démonstration de ce lemme dans l'ouvrage de référence [74], et une version plus détaillée dans le polycopié de Jérôme Droniou [39]. Il faut pour cela contrôler les dérivées faibles en temps $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon$ dans un espace du type $L^p([0, T_*]; H_{\text{div}}^{-k}(\mathbb{T}^3))$ aussi « gros » ($k \gg 1$) que nécessaire. Ici $L^{4/3}([0, T_*]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$ suffira.

L'équation vérifiée par \mathbf{u}_ε va nous permettre de décrire précisément sa dérivée faible $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon$ qui est une distribution à valeurs dans $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$.

En effet, si φ est une fonction test à support dans $]0, T_*[$, alors :

$$\langle \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon, \varphi \rangle := - \int_0^{T_*} \mathbf{u}_\varepsilon \varphi'(s) ds$$

est un élément de $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$ dont l'action sur $\boldsymbol{\psi} \in H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ est donnée par l'égalité de Fubini et l'équation vérifiée par \mathbf{u}_ε :

$$\begin{aligned} \langle \langle \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon, \varphi \rangle, \boldsymbol{\psi} \rangle &= - \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_\varepsilon \partial_t (\varphi \boldsymbol{\psi}) \, dx ds \\ &= \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}} (\varphi \boldsymbol{\psi}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} (\varphi \boldsymbol{\psi}) \, dx ds \\ &\quad - \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\varphi \boldsymbol{\psi}) \, dx d\boldsymbol{\xi} ds. \end{aligned}$$

Pour borner $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon$ dans $L^{4/3}([0, T_*]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$, il suffit de majorer les termes de droite par un terme $C \|\Psi\|_{L^4([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))}$, où C est une constante indépendante de ε et $\Psi = \varphi \boldsymbol{\psi}$. Pour le premier, on a :

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon] \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\leq \| \mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon \|_{L^4(\mathbb{T}^3)}(t) \| \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t) \|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq \| \mathbf{u}_\varepsilon(t) \|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \overbrace{\| \varphi_\varepsilon \|_{L^1(\mathbb{T}^3)}}^{=1} \| \mathbf{u}_\varepsilon(t) \|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \\ &= \| \mathbf{u}_\varepsilon(t) \|_{L^4(\mathbb{T}^3)}^2 = \left(\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon| |\mathbf{u}_\varepsilon|^3(t, \mathbf{x}) \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \| \mathbf{u}_\varepsilon(t) \|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^{1/2} \| \mathbf{u}_\varepsilon(t) \|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/2} \\ &\leq \sqrt{K} \| \mathbf{u}_\varepsilon(t) \|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/2}, \end{aligned}$$

où K est la constante obtenue par le lemme 3.2.4. Ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}} (\Psi) \, dx ds \right| &\leq \sqrt{K} \int_0^{T_*} \| \mathbf{u}_\varepsilon(t) \|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/2} \| \nabla_{\mathbf{x}} \Psi(t) \|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \, dt \\ &\leq \sqrt{K} \left(\int_0^{T_*} \| \mathbf{u}_\varepsilon(t) \|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 \, dt \right)^{3/4} \left(\int_0^{T_*} \| \nabla_{\mathbf{x}} \Psi(t) \|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^4 \, dt \right)^{1/4} \\ &= \sqrt{K} \| \mathbf{u}_\varepsilon \|_{2,6}^{3/2} \| \nabla_{\mathbf{x}} \Psi \|_{4,2} \\ &\leq \sqrt{K} K_{\mathbb{T}^3}^{3/2} \| \mathbf{u}_\varepsilon \|_{2;1}^{3/2} \| \Psi \|_{4;1} \\ &\leq K^2 K_{\mathbb{T}^3}^{3/2} \| \Psi \|_{4;1}. \end{aligned}$$

Par le lemme 3.2.4, on voit que $\|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,2}$ est bornée, ce qui suffit pour le deuxième terme. Pour le dernier terme, on a d'abord :

Fait 1 :

Les suites $(m_1 f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(m_0 f_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ sont bornées dans $L^2([0, T_]; L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$.*

Par (3.22) on voit que $(m_1 f_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, T_*]; L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$, et donc dans $L^2([0, T_*]; L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$. Ensuite, à l'aide du lemme 3.2.3 ($\alpha = \gamma - 2 = 0$) on écrit

$$|m_0 f_\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leq C_{\text{fin}} m_2 f_\varepsilon(t, \mathbf{x})^{3/5},$$

et donc, $\forall t \in [0, T_*]$:

$$\|m_0 f_\varepsilon(t)\|_{L^{5/3}(\mathbb{T}^3)} \leq C_{\text{fin}} (M_2 f_\varepsilon)^{3/5} \leq C_{\text{fin}} K^{3/5},$$

la dernière inégalité provenant du lemme 3.2.4.

Mais alors, $\forall t \in [0, T_*]$:

$$\begin{aligned} \|(m_0 f_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} &\leq \|m_0 f_\varepsilon(t)\|_{L^{5/3}(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq C_{\text{fin}} K^{3/5} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \\ &\Downarrow \\ \|(m_0 f_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{2,5/4} &\leq C_{\text{fin}} K^{3/5} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,5} \\ &\leq C_{\text{fin}} K^{3/5} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,6} \\ &\leq C_{\text{fin}} K^{3/5} K_{\mathbb{T}^3} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,1} \\ &\leq C_{\text{fin}} K^{8/5} K_{\mathbb{T}^3}, \end{aligned}$$

où $K_{\mathbb{T}^3}$ est une constante de Sobolev introduite précédemment. La dernière inégalité est encore une fois obtenue grâce au lemme 3.28. $(m_1 f_\varepsilon - m_0 f_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ est donc bien bornée dans $L^2([0, T_*]; L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$ et l'injection continue $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \hookrightarrow L^2([0, T_*]; L^5(\mathbb{T}^3))$ passée au dual donne alors que cette même suite est bornée dans $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$, et donc dans $L^{4/3}([0, T_*]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$. On obtient alors par dualité le contrôle annoncé :

$$\left| \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\varphi \boldsymbol{\psi}) \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \right| \leq C \|\Psi\|_{L^4([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))}.$$

Finalement, le lemme d'Aubin s'applique et on a bien, à extraction près, convergence forte de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ vers un élément \mathbf{u} dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

Par ailleurs, la méthode des caractéristiques permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= f_{\text{in}}(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) e^{3t} \\ &\Downarrow \\ \sup_{t \in [0, T_*]} \sup_{0 < \varepsilon < 1} \|f_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} &\leq e^{3T_*} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Ainsi, à extraction près, on a convergence faible $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$ de $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ vers un élément f de $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, vérifiant de plus :

$$\|f\|_{L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \leq e^{3T_*} \|f_{\text{in}}\|_\infty,$$

qui est la première estimation (3.31) annoncée dans la proposition 3.2.1.

Par ailleurs, une autre extraction fournit (d'après le lemme 3.2.4, la réflexivité de l'espace considéré et l'unicité de la limite faible) la convergence faible dans $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$ de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ vers \mathbf{u} .

Il faut maintenant vérifier que le couple (\mathbf{u}, f) est bien solution de **VNS** sur $[0, T_*]$ au sens défini plus haut, mais surtout les contrôles (3.32), (3.33) annoncés (qui nous permettront de prolonger les solutions). Commençons par l'estimation.

On rappelle ce que le lemme 3.2.4 nous fournit :

$$\begin{aligned} E^\varepsilon(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + M_2 f_\varepsilon(t) \right\} + \int_0^t M_2 f_\varepsilon(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq K, \end{aligned}$$

avec $K = K \left[\|f_{\text{in}}\|_\infty; M_2 f_{\text{in}}; \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right]$.

En sommant (3.26) et l'intégration de (3.21), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_\varepsilon(t) + \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \int_0^t M_2 f_\varepsilon(s) ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} \\ + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} [\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon] \cdot \boldsymbol{\xi} f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_\varepsilon) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx ds, \end{aligned}$$

si bien que l'on a, pour tous $0 < \varepsilon < 1$, $t \in [0, T_*]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_\varepsilon(t) + \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + R_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(t) &= \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 (1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})) dx d\boldsymbol{\xi} ds}^{R_\varepsilon^1(t)} + \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon (\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) - 1) dx d\boldsymbol{\xi} ds}^{R_\varepsilon^2(t)} \\ &\quad + \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) dx d\boldsymbol{\xi} ds}^{R_\varepsilon^3(t)}. \end{aligned}$$

Fait 2 :

Le reste R_ε tend uniformément vers 0 sur $[0, T_]$.*

On va démontrer cela successivement pour chacun des R_ε^i .

En notant $h_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}))$, on a :

$$R_\varepsilon^1(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 m(0, h_\varepsilon)(s, \mathbf{x}) dx ds.$$

Comme précédemment, on applique le lemme 3.2.3 ($\alpha = \gamma - 3/2 = 0$, $|h_\varepsilon| \leq |f_\varepsilon|$), pour obtenir :

$$\begin{aligned} |m_0 h_\varepsilon(t, \mathbf{x})| &\leq C_{\text{fin}} m_{3/2} h_\varepsilon(t, \mathbf{x})^{2/3}, \\ \|m_0 h_\varepsilon(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^3)} &\leq C_{\text{fin}} M_{3/2} h_\varepsilon(t)^{2/3}. \end{aligned}$$

Par hypothèse on a $|1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})| \leq \mathbb{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\varepsilon}$, si bien que :

$$\begin{aligned} M_{3/2} h_\varepsilon(t) &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^{3/2} h_\varepsilon d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^{3/2} f_\varepsilon |1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^{3/2} f_\varepsilon \mathbb{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\varepsilon} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \sqrt{2\varepsilon} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \sqrt{2\varepsilon} M_2 f_\varepsilon(t) \\ &\leq \sqrt{2\varepsilon} K \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du lemme 3.2.4. Au final, $M_{3/2} h_\varepsilon$ tend uniformément vers 0 sur l'intervalle considéré, et il en est de même de $\|m_0 h_\varepsilon(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^3)}$. On termine par Hölder :

$$0 \leq R_\varepsilon^1(s) \leq \|m_0 h_\varepsilon\|_{\infty, 3/2} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,6},$$

qui tend bel et bien vers 0 : (\mathbf{u}_ε) est bornée dans $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \hookrightarrow L^1([0, T_*]; L^6(\mathbb{T}^3))$.

Passons à R_ε^2 . C'est sensiblement le même raisonnement :

$$|R_\varepsilon^2|(t) \leq \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon| m_1 h_\varepsilon(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds.$$

On invoque encore une fois le lemme 3.2.3 ($\alpha = 1$, $\gamma = 9/5$, $|h_\varepsilon| \leq |f_\varepsilon|$), pour obtenir :

$$\begin{aligned} m_1 h_\varepsilon(t, \mathbf{x}) &\leq C_{\text{fin}} m_{9/5} h_\varepsilon(t, \mathbf{x})^{5/6} \\ &\downarrow \\ \|m_1 h_\varepsilon(t)\|_{L^{6/5}(\mathbb{T}^3)} &\leq C_{\text{fin}} M_{9/5} h_\varepsilon(t)^{5/6}, \end{aligned}$$

et, toujours grâce au lemme 3.2.4 pour la dernière inégalité :

$$\begin{aligned} M_{9/5} h_\varepsilon(t)^{5/6} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})) |\boldsymbol{\xi}|^{9/5} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\boldsymbol{\xi}|^{9/5} \mathbb{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\varepsilon} d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\boldsymbol{\xi}|^2 (2\varepsilon)^{1/5} d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\ &= 2^{1/5} \varepsilon^{1/5} M_2 f_\varepsilon(t) \leq 2^{1/5} \varepsilon^{1/5} K \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Donc au final on a bien :

$$R_\varepsilon^2(s) \leq \|m_0 h_\varepsilon\|_{\infty, 6/5} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,6} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

comme précédemment.

Reste à traiter R_ε^3 que l'on obtient un peu plus difficilement.

Fait 3 :

Si une famille de champs de vecteurs $(\mathbf{v}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers 0 avec ε dans $L^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3)$ et est bornée dans $L^1([0, T_*]; L^6(\mathbb{T}^3))$, alors :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

uniformément sur $[0, T_*]$.

Soit $\delta > 0$. Pour tous $0 < \varepsilon, \eta < 1$ on a :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds = \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta(\boldsymbol{\xi})) \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds}^{A_\varepsilon^\eta(t)} + \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \gamma_\eta(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds}^{B_\varepsilon^\eta(t)}.$$

Un calcul similaire à celui effectué pour R_ε^2 fournit :

$$|A_\varepsilon^\eta(t)| \leq C_{f_{\text{in}}} \eta^{1/6} K^{5/6} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,6} \leq \eta^{1/6} C_{f_{\text{in}}} K^{5/6} \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,6} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

uniformément en ε et t .

Par ailleurs

$$|B_\varepsilon^\eta(t)| \leq \frac{4}{3} \pi \frac{1}{\eta^4} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} e^{3T_*} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,1},$$

qui, à η fixé, tend bien vers 0, uniformément en t .

Pour prouver le **Fait 3** il suffit donc de se fixer η tel que $|A_\varepsilon^\eta(t)| \leq \delta$, indépendamment de ε et t , puis de faire tendre ε vers 0 dans le deuxième bout.

On revient finalement à :

$$R_\varepsilon^3(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) dx d\boldsymbol{\xi} ds,$$

en découpant :

$$\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon = \overbrace{(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon}^{\mathbf{v}_\varepsilon^1} + \overbrace{\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}}^{\mathbf{v}_\varepsilon^2} + \overbrace{\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon}^{\mathbf{v}_\varepsilon^3}.$$

Vérifions que les hypothèses du **Fait 3** sont vérifiées pour chaque \mathbf{v}_ε^i . Tout d'abord on a :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon\|_{2,2} &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{2,2} \xrightarrow{\varepsilon \in]0,1[} 0, \\ \|\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{2,1} &\leq 2\|\mathbf{u}\|_{2,1}, \\ \|(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon\|_{2,1} &\leq \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,1} + \|\mathbf{u}\|_{2,1}, \\ \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{2,1} &\leq \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,1} + \|\mathbf{u}\|_{2,1}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Young, l'égalité $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} = 1$, les propriétés de base de la convolution (on peut passer le gradient du côté que l'on veut) et la convergence de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ vers \mathbf{u} dans $L^2([0, T_*] \times \mathbb{T}^3)$ et sa bornitude dans $L^2([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

Montrons que \mathbf{v}_ε^2 converge également vers 0 dans $L^2([0, T_*] \times \mathbb{T}^3) = L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$. On va appliquer le théorème de convergence dominée, après avoir remarqué que, φ_ε étant une approximation de l'unité, et $\mathbf{u}(s)$ presque sûrement un élément de $L^2(\mathbb{T}^3)$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_\varepsilon^2(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &= \|\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon(s) - \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ presque partout sur } [0, T_*], \\ \|\mathbf{v}_\varepsilon^2(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\leq 2\|\mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \in L^2([0, T_*]), \end{aligned}$$

toujours grâce à l'inégalité de Young.

On a donc obtenu la convergence vers 0 de chaque \mathbf{v}_ε^i dans $L^2([0, T_*] \times \mathbb{T}^3)$, et une borne pour chacune de ces suites dans $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$. Pour \mathbf{v}_ε^1 et \mathbf{v}_ε^2 , ce résultat sera utilisé une nouvelle fois plus loin.

En tous les cas, cela suffit à vérifier les hypothèses du **Fait 3** grâce aux injections classiques :

$$\begin{aligned} L^2([0, T_*] \times \mathbb{T}^3) &\hookrightarrow L^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3), \\ L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) &\hookrightarrow L^2([0, T_*]; L^6(\mathbb{T}^3)), \end{aligned}$$

ce qui achève donc la démonstration du **Fait 2**.

Je rappelle que l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_\varepsilon(t) + \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} &+ \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + R_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

La convergence uniforme vers 0 de R_ε que l'on vient d'obtenir permet de voir que l'estimation (3.32) dans la proposition peut être obtenue en majorant chacun des termes, presque sûrement :

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2, \quad (3.34)$$

$$\int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds, \quad (3.35)$$

$$M_2 f(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} M_2 f_\varepsilon(t), \quad (3.36)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds. \quad (3.37)$$

Pour (3.34), on a en fait mieux car la convergence de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ vers \mathbf{u} dans $L^2([0, T_*] \times \mathbb{T}^3)$ implique, à extraction près, la convergence presque sûre de $\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}$ qui implique la première inégalité. On peut aussi utiliser directement la convergence faible.

Pour (3.35), on utilise la convergence dans $L^2([0, t] \times \mathbb{T}^3)$ combinée à la convergence faible dans $L^2([0, t]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$ (et l'inégalité classique liée à la convergence faible).

Pour (3.36), on a la convergence $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ dans $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$.

Pour $\eta \in]0, 1[$ un réel fixé, on constate que :

$$M_2[f_\varepsilon \gamma_\eta](t) \leq K,$$

où $\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ est la troncature en vitesse introduite précédemment, positive, bornée par 1, et K la constante obtenue par le lemme 3.2.4.

On a, à une extraction diagonale près en ε , pour tout η :

$$M_2[f_\varepsilon \gamma_\eta] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g_\eta$$

dans $L^\infty([0, T_*]) - \star$ et donc :

$$\|g_\eta\|_{L^\infty([0, T_*])} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|M_2[f_\varepsilon \gamma_\eta]\|_{L^\infty([0, T_*])} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|M_2[f_\varepsilon]\|_{L^\infty([0, T_*])}.$$

Or la convergence faible $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ dans $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$ implique également : (pour tout η)

$$M_2[f_\varepsilon \gamma_\eta] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M_2[f \gamma_\eta]$$

dans $L^\infty([0, T_*]) - \star$, en effet : le produit d'une fonction $\varphi \in L^1([0, T_*])$ par $|\xi|^2 \gamma_\eta$ est un élément de $L^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Par unicité de la limite faible, on obtient donc

$$M_2[f \gamma_\eta] = g_\eta(t).$$

Mais alors, d'après Fatou (tout est positif), pour tout $t \in [0, T_*]$, on a :

$$M_2 f(t) \leq \liminf_{\eta \rightarrow 0} M_2[f \gamma_\eta](t) = \liminf_{\eta \rightarrow 0} g_\eta(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|M_2[f_\varepsilon]\|_{L^\infty([0, T_*])},$$

et on a l'inégalité voulue.

Enfin, il reste à prouver (3.37) pour laquelle on écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \xi|^2 f d\xi dx ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f_\varepsilon d\xi dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\xi|^2 f d\xi dx ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f d\xi dx ds. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pour le premier terme du membre de droite, on a :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f_\varepsilon d\xi dx ds = \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta) d\xi dx ds}^{\boxed{\text{A}}} + \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f_\varepsilon \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds}^{\boxed{\text{B}}}.$$

$\boxed{\text{A}}$ tend vers 0, en adaptant le contrôle effectué sur $(m_0 h_\varepsilon)_\varepsilon$ dans la démonstration du **Fait 2**.

À η fixé, $\boxed{\text{B}}$ tend vers $\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds$, par convergence $L^\infty([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) - \star$. D'où (Fatou) :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f d\xi dx ds &\leq \liminf_{\eta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds = \liminf_{\eta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f_\varepsilon \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f_\varepsilon d\xi dx ds. \end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite de (3.38) est contrôlé à l'aide de Fatou et (3.36) précédemment obtenue.

Reste le troisième terme, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u}_\varepsilon f_\varepsilon d\xi dx ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) f_\varepsilon d\xi dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta(\xi)) d\xi dx ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f_\varepsilon \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 d'après le **Fait 3**. Le deuxième également, par un calcul analogue à celui fait pour le terme A_ε^η au début de la preuve du **Fait 3**. Le dernier terme tend vers $\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} f \gamma_\eta(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx ds$ par convergence faible- \star . On utilise alors encore une fois Fatou comme précédemment, ce qui achève la preuve des estimations annoncées.

Passons à la vérification des équations.

On note K_f une constante qui majore sur $[0, T_*]$, uniformément en ε , les quantités $\|f_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}$, $M_2 f_\varepsilon(t)$ sur $[0, T_*]$; de même $K_{\mathbf{u}}$ majore sur le même intervalle $\|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}$ et $\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2;1}$. Ces constantes existent par le lemme 3.2.4.

La vérification des équations se fait comme précédemment. D'abord l'équation de Navier-Stokes : pour tout $0 < \varepsilon < 1$, pour toute fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle et pour tout $t \in [0, T_*]$ on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Pi_2^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) dx ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) dx \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} dx d\boldsymbol{\xi} ds, \\ \Pi_2^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t, \mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} - (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \partial_t, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$. On doit prouver :

$$\langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Theta_2(\mathbf{u})(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) dx ds = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} dx d\boldsymbol{\xi} ds.$$

Écrivons la liste des convergences à obtenir :

- 1 $\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} dx ds,$
- 2 $\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} dx ds,$
- 3 $\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \partial_t \boldsymbol{\psi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\psi} dx ds,$
- 4 $\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds,$
- 5 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\langle \mathbf{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle - \langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle\|_{L^\infty([0, T_*])} = 0.$

1 découle des convergences faibles de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ vers \mathbf{u} dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$ et $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

Pour 2 on remarque d'abord la chose suivante :

Fait 4 :

Si $(\mathbf{v}_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\mathbf{w}_\varepsilon)_\varepsilon$ sont deux familles de champs de vecteurs de $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$ bornées dans cet espace et telles que $(\mathbf{v}_\varepsilon)_\varepsilon$ tend vers 0 dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$, alors, pour $t \in [0, T_*]$:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{v}_\varepsilon \otimes \mathbf{w}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En effet, en notant :

$$\mathbf{v}_\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_\varepsilon^1(t, \mathbf{x}) \\ v_\varepsilon^2(t, \mathbf{x}) \\ v_\varepsilon^3(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} w_\varepsilon^1(t, \mathbf{x}) \\ w_\varepsilon^2(t, \mathbf{x}) \\ w_\varepsilon^3(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

on a, par définition :

$$\mathbf{v}_\varepsilon \otimes \mathbf{w}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} \psi = \sum_{i,j=1}^3 v_\varepsilon^i w_\varepsilon^j \partial_i \psi^j.$$

On obtient donc, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz discrètes et continues :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{v}_\varepsilon \otimes \mathbf{w}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} \psi| \, d\mathbf{x} \, ds &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \left(\sum_{i,j=1}^3 v_\varepsilon^{i2} w_\varepsilon^{i2} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^3 \partial_i \psi^{j2} \right)^{1/2} \, d\mathbf{x} \, ds \\ &\leq \int_0^t \left(\int_{\mathbb{T}^3} \sum_{i,j=1}^3 v_\varepsilon^{i2} w_\varepsilon^{i2} \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{T}^3} \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \psi^{j2} \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}}_{\leq \|\psi(s)\|_{\mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)} \leq \|\psi\|_{\infty;1}} \, ds \\ &\leq \|\psi\|_{\infty;1} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{T}^3} \sum_{i,j=1}^3 v_\varepsilon^{i2} w_\varepsilon^{i2} \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \, ds \\ &\leq \|\psi\|_{\infty;1} \int_0^t \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} \left(\sum_{i,j=1}^3 v_\varepsilon^{i4} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^3 w_\varepsilon^{i4} \right)^{1/2} \, d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \, ds \\ &\leq \|\psi\|_{\infty;1} \int_0^t \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{i,j=1}^3 v_\varepsilon^{i4} \, d\mathbf{x} \right\}^{1/4}}_{\leq \|\mathbf{v}_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{i,j=1}^3 w_\varepsilon^{i4} \, d\mathbf{x} \right\}^{1/4}}_{\leq \|\mathbf{w}_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}} \, ds \\ &\leq \|\psi\|_{\infty;1} \int_0^t \|\mathbf{v}_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \, ds \\ &\leq \|\psi\|_{\infty;1} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{2,4} \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{2,4}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que les fonctions tests sont dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3) \hookrightarrow L^\infty([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$. $(\mathbf{w}_\varepsilon)_n$ est bornée dans $L^2([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$, une injection de Sobolev implique que cette suite est également bornée dans $L^2([0, T_*]; L^4(\mathbb{T}^3))$. Pour prouver le **Fait** 4 énoncé plus haut, il suffit donc de prouver que $\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{2,4} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, ce que l'on obtient par interpolation (Hölder pour le couple $(4, 4/3)$ pour la dernière inégalité) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} &\leq \|\mathbf{v}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^{1/4} \|\mathbf{v}_\varepsilon(s)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/4} \\ &\Downarrow \\ \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{2,4}^2 &\leq \int_0^{T_*} \|\mathbf{v}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^{1/2} \|\mathbf{v}_\varepsilon(s)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/2} \, ds \\ &\Downarrow \\ \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{2,4}^2 &\leq \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{2,2}^2 \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{2,6}^2. \end{aligned}$$

Le membre de droite tend bien vers 0 quand $(\mathbf{v}_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$ car cette suite est bornée dans $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$, et donc dans $L^2([0, T_*]; L^6(\mathbb{T}^3))$ par injection.

Revenons donc à [2]. On décompose la différence tensorielle comme suit (la deuxième égalité doit se comprendre termes à termes) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} &= [(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon] \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) + [\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}] \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) \\ &+ \mathbf{u} \otimes [\beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) - \beta_\varepsilon(\mathbf{u})] + \mathbf{u} \otimes [\beta_\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{u}] \\ &= \mathbf{v}_\varepsilon^1 \otimes \mathbf{w}_\varepsilon^1 + \mathbf{v}_\varepsilon^2 \otimes \mathbf{w}_\varepsilon^2 + \mathbf{w}_\varepsilon^3 \otimes \mathbf{v}_\varepsilon^3 + \mathbf{w}_\varepsilon^4 \otimes \mathbf{v}_\varepsilon^4. \end{aligned}$$

Pour appliquer le **Fait** 4 démontré précédemment, il suffit de vérifier, par linéarité, que pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, les suites $(\mathbf{v}_\varepsilon^i)_\varepsilon$ et $(\mathbf{w}_\varepsilon^i)_\varepsilon$ sont toutes les deux bornées dans $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$, la première tendant vers 0 dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

Pour les deux suites $(\mathbf{v}_\varepsilon^1)_\varepsilon$ et $(\mathbf{v}_\varepsilon^2)_\varepsilon$, ce travail à déjà été fait précédemment (avec la même notation !) dans la preuve du **Fait** 3.

Pour borner les termes en $\beta_\varepsilon(\mathbf{x})$, il faut juste s'assurer que cette fonction soit bornée par $|\mathbf{x}|$ et de dérivée bornée sur \mathbb{R} (indépendamment de ε). Une telle approximation peut-être obtenue en régularisant la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \mathbf{1}_{[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\mathbf{1}_{[1/\varepsilon, +\infty[} - \mathbf{1}_{]-\infty, -1/\varepsilon]} \right). \end{aligned}$$

Par « régulariser », je veux dire arrondir les deux coins (en $1/\varepsilon$ et $-1/\varepsilon$) : une simple convolution ne suffit pas a priori, il faut que la fonction soit toujours en dessous de $|x|$ et de dérivée bornée indépendamment de ε .

Reste à vérifier que \mathbf{v}_ε^3 et \mathbf{v}_ε^4 tendent bien vers 0 dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^3(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \|\beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s) - \beta_\varepsilon(\mathbf{u})(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C_\beta \|\mathbf{u}_\varepsilon(s) - \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ dans } L^2([0, T_*]),$$

où C_β est une constante de Lipschitz commune (qui existe bien) à tous les β_ε . Le membre de droite tend bien vers 0 dans l'espace indiqué car $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ approche \mathbf{u} dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

Pour le dernier terme, on applique la convergence dominée :

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_\varepsilon^4|(\mathbf{x}, s) &= |\beta_\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{u}|(\mathbf{x}, s) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ presque partout sur } [0, T_*] \times \mathbb{T}^3, \\ |\beta_\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{u}|(\mathbf{x}, s) &\leq 2|\mathbf{u}|(\mathbf{x}, s) \in L^2([0, T_*] \times \mathbb{T}^3), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de [2].

Pour [3], par définition de la fonction test ψ , on a $\partial_t \psi \in C^0([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \hookrightarrow L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$ qui est son propre dual et dans lequel on a convergence forte, donc faible, de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ vers \mathbf{u} .

On passe à [4].

On va utiliser l'estimation obtenue sur f plus haut et les estimations du lemme 3.2.4 : $M_2 f$ et $M_2 f_\varepsilon$ sont bornées, uniformément en ε et t par une constante.

En combinant le lemme 3.2.3 avec les bornes $L^\infty([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ que l'on a pour f_ε et f , on obtient, pour tout $0 \leq \alpha \leq 2$:

$$(m_\alpha f_\varepsilon)_\varepsilon \text{ bornée dans } L^\infty([0, T_*]; L^{5/3+\alpha}(\mathbb{T}^3)), \quad (3.39)$$

$$m_\alpha f \in L^\infty([0, T_*]; L^{5/3+\alpha}(\mathbb{T}^3)). \quad (3.40)$$

En particulier, pour $\alpha = 7/6$, on voit que $(m_{7/6}f_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, T_*]; L^{6/5}(\mathbb{T}^3))$.

Maintenant développons l'intégrande de la différence dans [\[4\]](#) :

$$f(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} - f_\varepsilon \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\psi} = f\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} - f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} - f\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} + f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi}.$$

Intéressons-nous donc d'abord à la convergence :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \longrightarrow \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds.$$

Soit $\delta > 0$.

On forme les différences dans les intégrandes, pour tout $\eta \in]0, 1[$:

$$f\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} - f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} = (f - f_\varepsilon) \gamma_\eta \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} + f(1 - \gamma_\eta) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} + f_\varepsilon(\gamma_\eta - 1) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} + f_\varepsilon(1 - \gamma_\varepsilon) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi}. \quad (3.41)$$

On suppose toujours $0 \leq 1 - \gamma_\eta \leq \mathbb{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\eta}$, d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(1 - \gamma_\eta) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \mathbb{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\eta} |\boldsymbol{\xi}| |\boldsymbol{\psi}| d\boldsymbol{\xi} dx ds \\ &\leq 2^{1/6} \eta^{1/6} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{\psi}| m_{7/6} f(s, \mathbf{x}) dx ds \\ &\leq 2^{1/6} \eta^{1/6} \|\boldsymbol{\psi}\|_{1,6} \|m_{7/6} f\|_{\infty, 6/5}, \end{aligned}$$

et le même calcul fournit :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(1 - \gamma_\eta) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| &\leq 2^{1/6} \eta^{1/6} \|\boldsymbol{\psi}\|_{1,6} \sup_{\varepsilon \in]0, 1[} \|m_{7/6} f_\varepsilon\|_{\infty, 6/5}, \\ \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon - 1) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| &\leq 2^{1/6} \varepsilon^{1/6} \|\boldsymbol{\psi}\|_{1,6} \sup_{\varepsilon \in]0, 1[} \|m_{7/6} f_\varepsilon\|_{\infty, 6/5}. \end{aligned}$$

Les deux seconds membres tendent bien vers 0 avec η et ε respectivement. Pour le premier, on a convergence uniforme par rapport à ε . Fixons donc un réel η en deçà duquel les deux termes

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(1 - \gamma_\eta) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right|, \\ &\left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(1 - \gamma_\eta) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right|, \end{aligned}$$

sont bornés par $\frac{\delta}{2}$; en deçà de η , en intégrant (3.41) on a donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} - f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| &\leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f - f_\varepsilon) \gamma_\eta \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| + \delta \\ &\quad + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon - 1) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right|. \end{aligned}$$

Les deux termes intégrés du membre de droite tendent vers 0 avec ε . En effet, pour le premier c'est juste la convergence faible $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) \rightharpoonup$ de f_ε vers f : à η fixé $\gamma_\eta \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} \in L^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Quant au deuxième, il tend vers 0 car on a prouvé plus haut qu'il était en $O(\varepsilon^{1/6})$. Au final, on a donc, pour tout ε :

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} - f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| \leq \delta,$$

et ce, pour tout $\delta > 0$. D'où

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds.$$

Pour prouver [4](#), il faut maintenant établir la convergence :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds.$$

On écrit la différence pour tout η :

$$\begin{aligned} -f \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} + f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} &= f_\varepsilon (\gamma_\varepsilon - 1) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} + f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} \\ &\quad + f_\varepsilon \gamma_\eta (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} + (f_\varepsilon - f) \gamma_\eta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} + f (\gamma_\eta - 1) \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En appliquant (3.39) et (3.40), on voit que :

$$\begin{aligned} (m_{1/3} f_\varepsilon)_\varepsilon &\text{ est bornée dans } L^\infty([0, T_*]; L^{3/2}(\mathbb{T}^3)), \\ (m_0 f_\varepsilon)_\varepsilon &\text{ est bornée dans } L^\infty([0, T_*]; L^{5/3}(\mathbb{T}^3)), \\ m_{1/3} f &\in L^\infty([0, T_*]; L^{3/2}(\mathbb{T}^3)), \\ m_0 f &\in L^\infty([0, T_*]; L^{5/3}(\mathbb{T}^3)). \end{aligned}$$

On écrit alors, en utilisant Hölder et les différentes bornes obtenues sur $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\gamma_\varepsilon - 1) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} m_0 f_\varepsilon \mathbf{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\varepsilon} |\mathbf{u}_\varepsilon| |\boldsymbol{\psi}| dx ds \\ &\leq 2^{1/3} \varepsilon^{1/3} \|m_{1/3} f_\varepsilon\|_{\infty, 3/2} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,6} \|\boldsymbol{\psi}\|_{2,6} \\ &\leq 2^{1/3} \varepsilon^{1/3} \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|m_{1/3} f_\varepsilon\|_{\infty, 3/2} \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,6} \|\boldsymbol{\psi}\|_{2,6} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

et de manière analogue :

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| \leq 2^{1/3} \eta^{1/3} \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|m_{1/3} f_\varepsilon\|_{\infty, 3/2} \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,6} \|\boldsymbol{\psi}\|_{2,6} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

où la convergence vers 0 se fait cette fois-ci uniformément en ε .

De même :

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f (\gamma_\eta - 1) \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| \leq 2^{1/3} \eta^{1/3} \|m_{1/3} f\|_{\infty, 3/2} \|\mathbf{u}\|_{2,6} \|\boldsymbol{\psi}\|_{2,6} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Comme précédemment, on fixe η au delà duquel les deux dernières majorations sont plus petites que $\frac{\delta}{2}$ (indépendant de ε pour la première). En intégrant (3.42), on obtient donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} -f \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} + f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| &\leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\gamma_\varepsilon - 1) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| + \frac{\delta}{2} \\ &\quad + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \gamma_\eta (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f_\varepsilon - f) \gamma_\eta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| + \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

de sorte qu'il nous reste trois convergences à établir. La première intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini : on a démontré qu'elle était en $O(\varepsilon^{1/3})$. Pour la deuxième, on écrit (η fixé) :

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \gamma_\eta(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\xi d\mathbf{x} ds \right| \leq \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \frac{4}{3} \frac{\pi}{\eta^3} \|\boldsymbol{\psi}\|_{2,2} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{2,2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Enfin pour la dernière, il suffit de remarquer (encore une fois, à η fixé) que $\gamma_\eta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} \in L^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, si bien que la convergence vers 0 est la conséquence de la convergence faible $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$ de f_ε vers f .

Ainsi, $\boxed{4}$ est bien vérifiée.

Reste à vérifier $\boxed{5}$: cela va fonctionner de manière similaire à ce que l'on a vu lors du passage $\mathbf{VNSA}_\varepsilon^n \rightarrow \mathbf{VNSA}_\varepsilon$.

On définit presque sûrement :

$$\begin{aligned} g_\varepsilon : [0, T_*] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \langle \mathbf{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$, $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ l'est dans $L^\infty([0, T_*]; \mathbb{R})$.

L'égalité que l'on avait dans le cas régulier :

$$\dot{g}_\varepsilon(t) = \langle \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\psi} \rangle + \langle \mathbf{u}_\varepsilon, \partial_t \boldsymbol{\psi} \rangle,$$

n'est vérifiée cette fois-ci que faiblement.

Plus précisément on a, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(0, T_*)$:

$$- \int_0^{T_*} \langle \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\psi} \rangle \phi'(s) ds = - \int_0^{T_*} \langle \mathbf{u}_\varepsilon, (\boldsymbol{\psi} \phi)' \rangle ds + \int_0^{T_*} \langle \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\psi}' \rangle \phi(s) ds.$$

À partir de cette équation, on va prouver que $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $W^{1,4/3}([0, T_*])$.

Pour le second terme du membre de droite, comme $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$, on voit facilement que $\langle \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\psi}' \rangle$ est bornée dans $L^{4/3}([0, T_*])$.

Pour le premier terme, on rappelle que \mathbf{u}_ε vérifie faiblement l'équation approchée de Navier-Stokes, d'où :

$$\begin{aligned} - \int_0^{T_*} \langle \mathbf{u}_\varepsilon, (\boldsymbol{\psi} \phi)' \rangle ds &= \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\psi} \phi) d\mathbf{x} ds \\ &\quad - \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\psi} \phi) d\mathbf{x} ds - \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\boldsymbol{\psi} \phi) d\xi d\mathbf{x} ds \\ &= \int_0^{T_*} \left[\int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} \right] \phi(s) ds \\ &\quad - \int_0^{T_*} \left[\int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} \right] \phi(s) ds \\ &\quad - \int_0^{T_*} \left[\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\xi d\mathbf{x} \right] \phi(s) ds. \end{aligned}$$

En interpolant les estimations obtenues sur $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$, on voit que cette suite est bornée dans $L^{8/3}([0, T_*]; L^4(\mathbb{T}^3))$.

En effet :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^{1/4} \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/4}, \\ \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}^{8/3} &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\infty,2}^{2/3} \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2, \\ \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{8/3,4}^2 &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\infty,2}^{1/4} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,6}^{3/4}.\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi}| \, d\mathbf{x} \right)^{4/3} ds &\leq \| \|\boldsymbol{\psi}\| \|_{\infty;1}^{4/3} \int_0^{T^*} \|\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}^{4/3} \|\beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}^{4/3} ds \\ &\leq \| \|\boldsymbol{\psi}\| \|_{\infty;1}^{4/3} \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{8/3,4}^{8/3},\end{aligned}$$

ce qui permet de voir que le terme convectif est bien borné dans l'espace annoncé.

Pour le terme en gradient, il est même borné dans $L^2([0, T_*])$ car $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$

et $\boldsymbol{\psi} \in L^\infty([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

Enfin pour le dernier terme, on écrit :

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{T}^3} m_1 f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi} - m_0 f_\varepsilon \gamma_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi}(s, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| &\leq \|m_1 f_\varepsilon(s)\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} \|\boldsymbol{\psi}(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \\ &\quad + \|m_0 f_\varepsilon(s)\|_{L^{5/3}(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}_\varepsilon \boldsymbol{\psi}(s)\|_{L^{5/2}(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq \|m_1 f_\varepsilon\|_{\infty,5/4} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\infty,5} + \|m_0 f_\varepsilon\|_{\infty,5/3} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\infty,5} \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{\mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)},\end{aligned}$$

où on a utilisé une injection de Sobolev et les estimations précédemment effectuées sur les moments de $(f^n)_n$. Ce terme est donc borné dans $L^2([0, T_*])$ et donc aussi dans $L^{4/3}([0, T_*])$.

On a ainsi obtenu que $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $W^{1,4/3}([0, T_*])$. Par injection compacte celle-ci admet donc, moyennant une extraction, une limite uniforme continue, g . Mais la convergence L^2 en toutes variables de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ vers \mathbf{u} implique que $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers $\langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle$. Quitte à extraire une dernière fois, on a convergence presque sûre et le dernier crochet admet donc un représentant continu : g .

Au final, on a donc l'équation, valable sur $[0, T_*]$:

$$\langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Theta_2(\mathbf{u})(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) \, d\mathbf{x} ds = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds.$$

On passe à l'équation de Vlasov. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ à support compact en vitesse, pour tout $t \in [0, T_*]$:

$$\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Pi_1^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\phi) f_\varepsilon(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds,$$

avec :

$$\Pi_1^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi^\varepsilon) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}.$$

De manière similaire à ce que l'on a fait pour $\langle \mathbf{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi},$$

uniformément sur $[0, T_*]$.

Par ailleurs, l'opérateur différentiel $\partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ envoie $\mathcal{C}^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ dans $L^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$. La convergence faible $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$ s'applique donc directement. Pour le dernier bout, on écrit (on omet les variables) :

$$(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f_\varepsilon - \mathbf{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f = [(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon] \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f_\varepsilon + [\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}] \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f_\varepsilon + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) (f_\varepsilon - f),$$

et :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} [(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon] \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f_\varepsilon \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \right| &\leq \overbrace{\|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}}{=1} K_f \|m_0 \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi)\|_{\infty, 2} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{2, 2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \\ \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} [\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}] \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f_\varepsilon \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \right| &\leq K_f \|m_0 \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi)\|_{\infty, 1} \int_0^{T_*} \|\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon(s) - \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

la deuxième convergence étant obtenue par convergence dominée par exemple.

Pour le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) (f_\varepsilon - f)$, il suffit de remarquer que $\mathbf{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) \in L^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et la convergence faible $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$ s'applique donc directement. L'équation de Vlasov est donc vérifiée.

Vérifions maintenant la continuité temporelle de \mathbf{u} et f (à valeurs dans $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$ et $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$). On détaille la preuve pour \mathbf{u} , la méthode est analogue pour f . On écrit la formulation variationnelle contre une fonction test $\boldsymbol{\psi}$ indépendante du temps :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}(t_1), \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \mathbf{u}(t_2), \boldsymbol{\psi} \rangle &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} ds - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds. \end{aligned}$$

Par une interpolation détaillée précédemment, on voit que $\mathbf{u} \in L^{8/3}([0, T_*]; L^4(\mathbb{T}^3))$, et donc, en particulier :

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} ds \right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi}|^2 \right)^{1/2} ds \\ &\leq \|\boldsymbol{\psi}\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} ds \\ &\leq \|\boldsymbol{\psi}\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)} |t_1 - t_2|^{1/4} \|\mathbf{u}\|_{8/3, 4}^2. \end{aligned}$$

On a également :

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} ds \right| \leq \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}\|_{2, 2} |t_1 - t_2|^{1/2} \|\boldsymbol{\psi}\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)},$$

et enfin :

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \right| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} [m_0 f \mathbf{u} - m_1 f] \cdot \boldsymbol{\psi}(s, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} |m_0 f \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi}|(s, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} ds + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} |m_1 f \boldsymbol{\psi}|(s, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} ds \\ &\leq \|m_0 f\|_{\infty, 5/3} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\infty, 5} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} ds + \int_{t_1}^{t_2} \|m_1 f\|_{\infty, 5/4} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} ds \\ &\leq |t_2 - t_1|^{1/2} \|m_0 f\|_{\infty, 5/3} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}\|_{2, 5} \\ &\quad + |t_2 - t_1| \|m_1 f\|_{\infty, 5/4} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}. \end{aligned}$$

Les injections de Sobolev nous fournissent donc la continuité de \mathbf{u} à valeurs dans $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$, ce qui achève la démonstration de la proposition 3.2.1. \blacklozenge

3.2.3 Existence globale : minoration du temps de vie et itération

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.1.1 énoncé en début de chapitre. Il nous reste à construire, par prolongement, une solution globale sur tout l'intervalle $[0, T]$ à partir des solutions offertes par la proposition 3.2.1.

Soit (f_1, \mathbf{u}_2) le couple de solutions obtenu par la proposition 3.2.1. On a donc presque sûrement (en temps), $\mathbf{u}_1(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{T}^3)$, $f_1(t, \cdot, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, on a également $M_2 f_1(t) < \infty$.

Ainsi, quelque soit $\sigma > 0$, il existe $t_0 \in]T_* - \sigma, T_*[$ tel que $(f_1(t_0, \cdot, \cdot), \mathbf{u}_1(t_0, \cdot))$ soit un couple de conditions initiales admissibles pour le système **VNS**.

D'après la proposition 3.2.1, on sait alors qu'il existe un couple de solutions (f_2, \mathbf{u}_2) , démarrant de la condition initiale $(f_1(t_0, \cdot, \cdot), \mathbf{u}_1(t_0, \cdot))$, sur un intervalle $[t_0, S_*]$, où S_* est un temps dépendant uniquement de $\|f_1(t_0, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}$, $M_2 f_1(t_0)$, $\|\mathbf{u}_1(t_0)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}$.

Écrivons dans un premier temps comment effectuer le recollement des deux couples de solutions (f_1, \mathbf{u}_1) et (f_2, \mathbf{u}_2) .

On a, par définition des solutions au système **VNS**, la continuité des applications suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &: [0, T_*] \longrightarrow H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3), \\ \mathbf{u}_2 &: [t_0, S_*] \longrightarrow H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3), \\ f_1 &: [0, T_*] \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3), \\ f_2 &: [t_0, S_*] \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3), \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{u}_1(t_0) = \mathbf{u}_2(t_0) \in L^2(\mathbb{T}^3), \quad f_1(t_0) = f_2(t_0) \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3).$$

On définit alors un élément de $\mathcal{C}^0([0, S_*]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$ et un autre de $\mathcal{C}^0([0, S_*]; H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}_c^3))$, par :

$$\begin{aligned} f_3(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \mathbb{1}_{[0, t_0]} f_1(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbb{1}_{]t_0, S_*]} f_2(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \\ \mathbf{u}_3(t, \mathbf{x}) &= \mathbb{1}_{[0, t_0]} \mathbf{u}_1(t, \mathbf{x}) + \mathbb{1}_{]t_0, S_*]} \mathbf{u}_2(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

et on vérifie que le couple (f_3, \mathbf{u}_3) est bien solution au sens de la Définition 3.1.1.

Les conditions d'appartenance et de positivité découlent directement de la définition choisie.

Pour vérifier les deux formulations faibles, on considère $\phi, \boldsymbol{\psi}$ deux fonctions tests admissibles pour les formulations associées à f_3 et \mathbf{u}_3 .

Les formulations faibles (3.8), (3.9) sont clairement vérifiées pour $t \leq t_0$: sur cet intervalle, le couple (f_3, \mathbf{u}_3) coïncide avec (f_1, \mathbf{u}_1) , qui est solution de **VNS** sur $[0, T] \supset [0, t_0]$.

Si $t > t_0$, on écrit :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi \mathbb{1}_{[0, t_0]}, \quad \phi_2 = \phi \mathbb{1}_{]t_0, S_*]}, \\ \boldsymbol{\psi}_1 &= \boldsymbol{\psi} \mathbb{1}_{[0, t_0]}, \quad \boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{\psi} \mathbb{1}_{]t_0, S_*]}. \end{aligned}$$

En t_0 , la formulation locale pour le couple (f_1, \mathbf{u}_1) , donne sur $(\phi_1, \boldsymbol{\psi}_1)$:

$$\begin{aligned} \langle f_1(t_0), \phi_1(t_0) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi_1(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} &= \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Theta_1(\mathbf{u}_1)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\phi_1) f_1(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \\ \langle \mathbf{u}_1(t_0), \boldsymbol{\psi}_1(t_0) \rangle + \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{T}^3} \Theta_2(\mathbf{u}_1)(s, \mathbf{x}) (\boldsymbol{\psi}_1) d\mathbf{x} ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\psi}_1(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_1(\mathbf{u}_1 - \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi}_1 d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned}$$

et pour $t \in]t_0, S_*[$, pour (f_2, \mathbf{u}_2) , sur (ϕ_2, ψ_2) :

$$\begin{aligned} \langle f_2(t), \phi_2(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_1(t_0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(t_0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} \, d\boldsymbol{\xi} &= \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Theta_1(\mathbf{u}_2)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\phi_2) f_2(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} \, d\boldsymbol{\xi} \, ds, \\ \langle \mathbf{u}_2(t), \psi_2(t) \rangle + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^3} \Theta_2(\mathbf{u}_2)(s, \mathbf{x}) (\psi_2) \, d\mathbf{x} \, ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_1(t_0) \cdot \psi_2(t_0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_2(\mathbf{u}_2 - \boldsymbol{\xi}) \cdot \psi_2 \, d\mathbf{x} \, d\boldsymbol{\xi} \, ds. \end{aligned}$$

On obtient le recollement voulu en sommant deux à deux les équations précédentes.

Pour conclure la démonstration, il nous reste à prouver qu'en un nombre fini d'itérations de ce processus de recollement, on arrive à atteindre le temps T . Cela vient du fait que le temps de vie T_* , dont l'existence a été obtenue avant l'énoncé de la proposition 3.2.1, est une fonction décroissante du couple $(M_2 f_1(t_0) + \|\mathbf{u}_1(t_0)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2, \|f(t_0)\|_\infty)$ pour la relation d'ordre $[(a, b) \preceq (c, d)] \Leftrightarrow [a \leq c \wedge b \leq d]$. Et la même proposition nous fournit que ce dernier couple reste toujours inférieur (au sens \preceq) à $(M_2 f_{\mathbf{in}} + \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2, e^{3T} \|f_{\mathbf{in}}\|_\infty)$: le temps de vie est donc minoré et le prolongement se termine en un nombre fini d'étapes.

Chapitre 4

Le couplage Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes

Dans ce dernier chapitre nous prouvons l'existence de solutions pour un couplage fluide/cinétique légèrement différent de celui présenté précédemment de part la présence d'un terme de diffusion en vitesse pour la phase dispersée. Nous démontrons l'existence de solutions globales fortes, pour des données initiales régulières et proches d'un point d'équilibre. Une étude du comportement en temps long des solutions ainsi que de leur régularité est également proposée. Les résultats en question ont fait l'objet d'un article en collaboration avec Thierry Goudon, Lingbing He et Ping Zhang [54]. Les notations utilisées ne sont pas les mêmes que dans les chapitres précédents et les preuves sont entièrement rédigées en anglais.

4.1 Introduction

Dans un premier temps nous allons présenter le système étudié, introduire les notations et espaces fonctionnels nécessaires, et enfin énoncer les théorèmes obtenus.

4.1.1 Équation de Vlasov-Fokker-Planck

Tout comme l'équation de Vlasov introduite au chapitre 1, l'équation de Vlasov-Fokker-Planck est une équation cinétique portant sur une densité de particules (notée F dans ce chapitre)

$$F_t + v \cdot \nabla_x F + \operatorname{div}_v (A(t, x, v)F - \nabla_v F) = 0, \quad (4.1)$$

où $A(t, x, v)$ est un champ d'accélération.

La différence entre l'équation (4.1) et l'équation (1.7) étudiée dans les trois premiers chapitres réside dans la présence d'un laplacien (en vitesse) pour la deuxième. Ce terme modélise les perturbations que subissent les gouttelettes de l'aérosol par les molécules du fluide environnant. L'idée est, suivant le modèle de Langevin [69], de rajouter aux forces visqueuses s'exerçant sur les particules (ici il n'y aura que la force de traînée) une force *aléatoire*. Le terme "aléa" est bien sûr très vague et depuis la description de Langevin⁷, le formalisme mathématique a évolué (voir [67] pour un historique intéressant) et s'est précisé

⁷Celui-ci la décrivait dans [69] par les mots suivants « [cette force] est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule »

par la notion de bruit blanc. Retournons au passage du système discret à l'équation de Vlasov réalisé dans la section 1.2.1 du chapitre 1 et ajoutons un mouvement Brownien⁸ aux vitesses des particules dans le système S considéré (et donc un bruit blanc aux accélérations), si bien que celui-ci est dorénavant constitué d'EDS :

$$S = \begin{cases} dx_k = v_k dt, & 1 \leq k \leq N, \\ dv_k = A(t, x_k, v_k) dt + dB_t^k, & 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

où les B_t^k sont des mouvements Browniens indépendants. Concrètement cela signifie que l'on accorde une part d'aléatoire à la dynamique des particules (on pourrait également en accorder à la disposition initiale des particules, mais c'est une autre histoire). Les trajectoires des particules sont donc aléatoires, et le raisonnement à effectuer n'est cette fois plus sur la mesure empirique mais sur les lois des trajectoires. On peut alors prouver, considérant un champs d'accélération donné $(t, x, v) \mapsto A(t, x, v)$ suffisamment régulier pour assurer l'existence de caractéristiques globales, en utilisant la formule d'Itô, un passage à la limite similaire à celui fait dans le cas de l'équation de Vlasov, et qui aboutit à l'apparition d'un laplacien (typique des phénomènes de diffusion). On trouvera dans [99] ce type de passage à la limite dans le cas plus général de particules en interaction (gravitationnelle par exemple).

4.1.2 Couplage étudié

L'objet de ce chapitre est donc l'analyse d'un couplage entre les équations de Navier-Stokes incompressibles et l'équation de Vlasov-Fokker-Planck. Le système sera étudié sur un domaine périodique pour la variable d'espace : $x \in \mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$. Il s'écrit donc :

$$u_t + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p - \Delta_x u = \int_{\mathbb{R}^3} (v - u) F dv, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^3, \quad (4.2)$$

$$\nabla_x \cdot u = 0, \quad (4.3)$$

$$F_t + v \cdot \nabla_x F + \operatorname{div}_v((u - v)F - \nabla_v F) = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3. \quad (4.4)$$

et est associé aux conditions initiales :

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \nabla_x \cdot u_0 = 0, \quad F|_{t=0} = F_0. \quad (4.5)$$

Le modèle ressemble fortement à celui présenté au chapitre 1 et représente l'évolution d'un aérosol dans un fluide visqueux et incompressible augmenté d'un terme de diffusion en vitesse pour les particules. On réalise à nouveau (voir chapitre 1) l'hypothèse d'un *spray fin*, ce faisant les interactions entre particules sont négligées ainsi que la fraction de volume occupée par l'aérosol dans le fluide. Par ailleurs le couplage des deux équations se fait une nouvelle fois par l'intermédiaire de la *force de traînée*. Comme nous l'avons vu à la section 1.3.1 du chapitre 1, en pratique l'expression de cette force passe par le calcul d'un coefficient de traînée, dont la valeur est déterminée par une loi semi-empirique. Cette expression compliquée est utilisée dans les simulations numériques (voir chapitre 2), mais est inadaptée pour l'analyse mathématique que nous abordons. Nous supposons donc pour simplifier que la traînée est directement fournie par la vitesse relative $u - v$, ce qui n'est réaliste que dans le cas où l'écoulement est laminaire : pour ce type de régime, dans la limite d'un faible nombre de Reynolds particulaire, la force de traînée est proportionnelle à la vitesse relative d'après la loi de Stokes.

Étudions maintenant, de manière purement formelle, l'énergie et l'entropie du système.

⁸Note : ce faisant la trajectoire elle-même des particules ne décrit pas un mouvement Brownien !

Intégrant (4.2), u (4.5) et $\frac{1}{2}|v|^2$ (4.9), en espace et en vitesse, on obtient :

$$\text{Conservation de la masse : } \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} F dx dv = 0, \quad (4.6)$$

$$\text{Conservation de la quantité de mouvement : } \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{T}^3} u dx + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} vF dx dv \right) = 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Dissipation énergie/entropie : } & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^3} \left(\frac{|u|^2}{2} + \int_{\mathbb{R}^3} (F \ln F + \frac{|v|^2 + M_0}{2} F) dv \right) dx \\ & + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|(u-v)F - \nabla_v F|^2}{F} dx dv + \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_x u|^2 dx = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

où $M_0 \in \mathbb{R}$ est une constante. Ces égalités définissent le cadre fonctionnel adapté au système (4.2)-(4.5). L'étude du même système dans le cas compressible est établie dans [82]. Dans [55, 56, 22, 83] on trouvera différentes analyses asymptotiques de ce type de systèmes. L'existence et l'unicité en temps petit sont abordées dans [13, 78], dans le cas des équations d'Euler compressibles, sans terme de diffusion en vitesse. Dans ce travail, nous allons chercher à construire un couple de solution autour d'un point d'équilibre. De fait pour $M \geq 0$, le couple $u_{\text{eq}} = 0$, $F_{\text{eq}} = M e^{-\frac{|v|^2}{2}}$, est solution stationnaire du système (4.2)-(4.5). Considérant alors la Maxwellienne normalisée :

$$\mu(v) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\mathbb{T}^3|} e^{-v^2/2},$$

nous allons chercher une solution de l'équation (4.4) prenant la forme suivante :

$$F = \mu + \sqrt{\mu} f. \quad (4.9)$$

Si on insère l'expression précédente dans (4.2), on voit que le système (4.2)-(4.5) se réécrit sur le couple (u, f) :

$$u_t + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p - \Delta_x u + u + u \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f dv - \int_{\mathbb{R}^3} v \sqrt{\mu} f dv = 0, \quad (4.10)$$

$$\nabla_x \cdot u = 0, \quad (4.11)$$

$$f_t + v \cdot \nabla_x f + u \cdot (\nabla_v f - \frac{v}{2} f) - u \cdot v \sqrt{\mu} = -\frac{|v|^2}{4} f + \frac{3}{2} f + \Delta_v f. \quad (4.12)$$

Nous allons chercher à obtenir un résultat d'existence globale pour le système (4.10)-(4.12) complété de données initiales (qui seront supposées « petites », dans un sens précisé par la suite) :

$$u|_{t=0} = u_0, \quad f|_{t=0} = f_0, \quad (4.13)$$

satisfaisant à :

$$\int_{\mathbb{T}^3} u_0 dx + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} v \sqrt{\mu} f_0 dv dx = 0, \quad \text{et} \quad \nabla \cdot u_0 = 0. \quad (4.14)$$

Cette hypothèse sera d'une importance capitale lors de l'étude du système; à l'aide de (4.7), celle-ci se traduit par la condition suivante sur la perturbation.

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{T}^3} u dx + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} v \sqrt{\mu} f dv dx \right) = 0.$$

De manière analogue, l'hypothèse

$$\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f_0 dv dx = 0, \quad (4.15)$$

assure que la perturbation n'accroît pas la masse du système.

De toute évidence, la démonstration utilisée au chapitre 3 s'appliquerait aisément dans le cas traité ici, et on obtiendrait de même l'existence de solutions faibles globales. La stratégie adoptée ici est différente ; moyennant des hypothèses plus fortes sur les données initiales (régulières et petites), nous obtiendrons l'existence globale de solutions **régulières** en utilisant des estimations d'énergie fines. On retrouvera cette approche dans les deux articles [59, 58] de Guo portant sur l'équation de Boltzmann et de Landau. Nous allons aborder l'existence globale de solutions, le comportement en temps long et la régularité des solutions, selon le plan suivant. On trouvera dans la section 4.1.3 les notations utilisées (propres à ce chapitre), les principaux espaces fonctionnels étudiés ainsi que les trois résultats obtenus. La section 4.2 est consacrée aux preuves. La sous-section 4.2.1 est dédiée à la construction d'un couple de solutions globales. Dans la sous-section 4.2.2, nous étudions le comportement en temps long en appliquant les méthodes d'hypo-coercivité détaillées dans [100], déjà utilisées par Desvillettes et Villani dans [36], Mouhot et Neumann dans [84]. Enfin, dans la sous-section 4.2.3, l'effet régularisant du système est étudié par des arguments d'hypo-ellipticité. La méthode se base sur un résultat de Bouchut [16].

4.1.3 Notations et énoncés

Les notations suivantes seront utilisées durant toute notre étude. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ sa longueur. Sans indice, les opérateurs de dérivations doivent être compris spatialement. Ainsi l'expression ∂^α désigne la dérivée spatiale :

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3},$$

et pour la vitesse on notera

$$\partial_v^\alpha = \partial_{v_1}^{\alpha_1} \partial_{v_2}^{\alpha_2} \partial_{v_3}^{\alpha_3}.$$

Pour deux multi-indices α et β , vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\beta_i \leq \alpha_i$, on définit le coefficient binomial généralisé :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^3 \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!}.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignera indifféremment le produit scalaire associé aux espaces $L^2(\mathbb{T}^3)$ ou $L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^3} fg \, dx \quad \text{ou} \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} fg \, dv \, dx,$$

et les normes associées seront toutes les deux notées $\|\cdot\|_{L^2}$. De même, pour tout entier $s \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_{H^s}$ désigne la norme usuelle de $H^s(\mathbb{T}^3)$ ou $H^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ selon le contexte : si la fonction étudiée est indépendante de la vitesse il s'agit du premier espace, sinon c'est le second. Enfin, on pourra être amené à considérer la norme $L^2(\mathbb{R}^3; H^s(\mathbb{T}^3))$, que l'on notera pour une fonction $\phi : \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$|\phi|_s = \left\{ \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \sum_{|\alpha| \leq s} |\partial^\alpha \phi|^2 \, dx \, dv \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, on utilisera à plusieurs reprises la lettre C pour désigner une constante ne dépendant que des données initiales (mais pouvant varier d'une ligne à l'autre).

Revenons au système (4.10)-(4.12), et introduisons la vitesse moyenne :

$$\bar{u}(t) := \frac{1}{|\mathbb{T}^3|} \int_{\mathbb{T}^3} u(t, x) \, dx.$$

En intégrant (4.10), il vient :

$$\bar{u}_t + \bar{u} + \frac{1}{|\mathbb{T}^3|} \int_{\mathbb{T}^3} u \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f \, dv \, dx - \frac{1}{|\mathbb{T}^3|} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} v \sqrt{\mu} f \, dv \, dx = 0.$$

Par ailleurs la conservation de la quantité de mouvement obtenue en (4.7) et l'hypothèse (4.14) nous donnent :

$$- \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} v \sqrt{\mu} f \, dv \, dx = \int_{\mathbb{T}^3} u \, dx.$$

On en déduit l'équation suivante pour la vitesse moyenne :

$$\bar{u}_t + 2\bar{u} + \frac{1}{|\mathbb{T}^3|} \int_{\mathbb{T}^3} u \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f \, dv \, dx = 0. \quad (4.16)$$

Énonçons alors les résultats. Tout d'abord un résultat d'existence globale de solutions régulières, pour des données initiales petites :

Théorème 4.1.1 :

Soit $s \geq 2$ un entier. Il existe deux constantes C et ε_0 strictement positives assurant la propriété d'existence suivante.

Pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et tout couple $(u_0, f_0) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3; H^s(\mathbb{R}^3))$ satisfaisant à (4.14), si le contrôle

$$\|u_0\|_{H^s}^2 + |f_0|_s^2 \leq \varepsilon, \quad (4.17)$$

est vérifié, alors le système (4.2)-(4.5) possède une solution forte globale (u, F) , où $F = \mu + \sqrt{\mu} f \geq 0$ satisfait à

$$\sup_{t \geq 0} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + |f(t)|_s^2) + \int_0^t \left[|\bar{u}|^2 + \|\nabla_x u\|_{H^s}^2 + |\sqrt{\mu} u - (\nabla_v f + \frac{v}{2} f)|_s^2 \right] d\tau \leq C\varepsilon. \quad (4.18)$$

De plus, si (4.17) est vérifiée pour $s \geq 3$, alors pour tout $t \geq t_0 > 0$, on a :

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq t_0} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|f(t)\|_{H^s}^2 + \|vf(t)\|_{H^{s-1}}^2) \\ & + \int_t^{t+1} \left[\|\nabla_v f + \frac{v}{2} f\|_{H^s}^2 + \|v \otimes \nabla_v f + \frac{v \otimes v}{2} f\|_{H^{s-1}}^2 \right] d\tau \leq C(t_0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.19)$$

où la constante $C(t_0, \varepsilon)$ tend éventuellement vers l'infini à mesure que t_0 tend vers 0.

Le second résultat établit la convergence en temps long vers l'équilibre :

Théorème 4.1.2 :

Il existe deux réels strictement positifs ε_0 et λ tels que, pour des conditions initiales vérifiant (4.14), (4.15) et (4.17) avec $s \geq 3$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on ait la convergence exponentielle suivante :

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2 \leq C(t_0, \varepsilon) e^{-\lambda t},$$

pour tout $t \geq t_0 > 0$, avec $C(t_0, \varepsilon)$ constante positive.

L'estimation (4.19) atteste d'ores et déjà de l'aspect régularisant du système étudié. En exploitant uniquement le système (4.2)-(4.4), on peut obtenir une estimation plus précise de ce gain de régularité instantané par un argument d'hypoellipticité similaire à celui utilisé dans [16].

Théorème 4.1.3 :

Soit (u, F) un couple de solutions (locales) du système (4.2)-(4.5). Si les données initiales u_0 et F_0 vérifient, pour deux entiers $n \geq 3$ et $q \geq 2$ l'inégalité suivante :

$$\|u_0\|_{H^q}^2 + |F_0 \langle v \rangle^n|_q^2 < \infty,$$

où $\langle v \rangle = (1 + |v|^2)^{\frac{1}{2}}$, alors, il existe un temps $T > 0$ tel que, pour tout $0 < t_* < T_* < T$, la solution (u, F) du système (4.2)-(4.5) vérifie :

$$\begin{aligned} \sup_{t_* \leq t \leq T_*} (\|u(t)\|_{H^q}^2 + \|F(t) \langle v \rangle^{n-3}\|_{H^q}^2) + \int_{t_*}^{T_*} \left[\|u\|_{H^{q+1}}^2 + \|F \langle v \rangle^{n-3}\|_{H^{q+1}}^2 \right] d\tau \\ \leq C(t_*, T, \|u_0\|_{H^q}, |F_0 \langle v \rangle^n|_q) < \infty. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Remarque 4.1.1 : Ce résultat s'applique aux solutions construites dans le théorème 4.1.1 et prouve qu'instamment ces solutions sont \mathcal{C}^∞ en toutes leurs variables. En effet, (4.18) implique pour tout entiers $s \geq 3$ et $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $T > 0$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + |F(t) \langle v \rangle^n|_s^2) \leq C(1 + \varepsilon),$$

et (4.20) fournit alors la régularité souhaitée.

Les preuves des théorèmes 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3 présentées (en anglais) dans la section suivante sont directement tirées de l'article *The Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium* [54], écrit en collaboration avec Thierry Goudon, Lingbing He et Ping Zhang.

4.2 Proofs

4.2.1 Global existence and regularity theory

In this section we present the proof of Theorem 4.1.1. It uses the conservation and dissipation properties (4.6)-(4.8). The proof splits into two parts. Firstly, we detail the derivation of (4.18) which is the key estimate for justifying the global existence of solutions. Secondly, we prove the strengthened regularity estimate (4.19).

4.2.1.1 Existence of global solutions to (4.10)-(4.13)

It is well-known that the existence of solutions to a nonlinear PDE can be obtained by constructing solutions to approximated problems and proving estimates which are uniform with respect to the approximation parameter. For (4.10)-(4.14), one can construct such approximate solutions via Galerkin's approximation, like in [73]. For simplicity, we do not detail this part. Instead, we assume that there is a positive time T such that (4.10)-(4.13) has a unique smooth enough solution on $[0, T]$, and we shall present the *a priori* estimates for such solutions. Obtaining estimates uniform with respect to T allows to construct global solutions. The main issue is summarized in the following claim.

Proposition 4.2.1. *Let $s \geq 2$. Let (u, f) be a solution of (4.10)-(4.14). We have*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_{H^s}^2 + |f|_s^2 + |\bar{u}|^2) + \|\nabla u\|_{H^s}^2 + 2|\bar{u}|^2 + \left| u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f \right|_s^2 \\ \leq C(|f|_s + \|u\|_{H^s}) \left(\|\nabla u\|_{H^s}^2 + |\bar{u}|^2 + \left| u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f \right|_s^2 \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Proof. The proof is based on energy estimates. Let $s \geq 2$ be a positive integer and let $\alpha \in \mathbb{N}^3$ with $|\alpha| \leq s$. We first apply ∂^α to (4.10), then multiply the resulting equation by $\partial^\alpha u$, and integrate over \mathbb{T}^3 . We get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 + \langle \partial^\alpha (u \cdot \nabla u), \partial^\alpha u \rangle + \|\nabla \partial^\alpha u\|_{L^2}^2 + \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \\ & + \left\langle \partial^\alpha \left(u \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f dv \right), \partial^\alpha u \right\rangle - \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} v \sqrt{\mu} \partial^\alpha f dv, \partial^\alpha u \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Similar arguments applied to (4.12) yield

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 + \left\langle \partial^\alpha \left(u \cdot \left(\nabla_v f - \frac{v}{2} f \right) \right), \partial^\alpha f \right\rangle - \langle \partial^\alpha u \cdot v \sqrt{\mu}, \partial^\alpha f \rangle \\ & = - \left\| \nabla_v \partial^\alpha f + \frac{v}{2} \partial^\alpha f \right\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Note that $\nabla \cdot u = 0$, and thus integrating by parts we have $\langle u \cdot \nabla_x u, u \rangle = 0$. Since $s \geq 2 > 3/2$, we can estimate as follows

$$|\langle \partial^\alpha (u \cdot \nabla_x u), \partial^\alpha u \rangle| = |\langle \partial^\alpha (u \cdot \nabla u) - u \cdot \partial^\alpha \nabla_x u, \partial^\alpha u \rangle| \leq C \|u\|_{H^s} \|\nabla u\|_{H^s}^2.$$

Furthermore, since μ is normalized and satisfies $\nabla_v \sqrt{\mu} = -\frac{v}{2} \sqrt{\mu}$, by using an integration by parts we obtain

$$\begin{aligned} & \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 - 2 \langle \partial^\alpha u \cdot v \sqrt{\mu}, \partial^\alpha f \rangle + \|\nabla_v \partial^\alpha f + \frac{v}{2} \partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \\ & = \|\partial^\alpha u \sqrt{\mu} - \nabla_v \partial^\alpha f - \frac{v}{2} \partial^\alpha f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

We can also write

$$\begin{aligned} & \left\langle \partial^\alpha \left(u \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f dv \right), \partial^\alpha u \right\rangle + \left\langle \partial^\alpha \left(u \cdot \left(\nabla_v f - \frac{v}{2} f \right) \right), \partial^\alpha f \right\rangle \\ & = \left\langle \partial^\alpha (uf), \partial^\alpha u \sqrt{\mu} - \nabla_v \partial^\alpha f - \frac{v}{2} \partial^\alpha f \right\rangle. \end{aligned}$$

Then owing to (4.22) and (4.23), we are led to

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 + \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2) + \|\nabla \partial^\alpha u\|_{L^2}^2 + \|\partial^\alpha u \sqrt{\mu} - \nabla_v \partial^\alpha f - \frac{v}{2} \partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \\ & \leq C \|u\|_{H^s} \|\nabla_x u\|_{H^s}^2 + \left| \left\langle \partial^\alpha (uf), \partial^\alpha u \sqrt{\mu} - \nabla_v \partial^\alpha f - \frac{v}{2} \partial^\alpha f \right\rangle \right|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Still using $s \geq 2$, we get (see Lemma 3.1 of [71] for a similar estimate)

$$\|\partial^\alpha (uf)\|_{L^2} \leq |uf|_s \leq C \|u\|_{H^s} |f|_s \leq C (\|u\|_{L^2} + \|\nabla_x u\|_{H^{s-1}}) |f|_s.$$

Now, we make use of the mean velocity \bar{u} . By the Poincaré-Wirtinger inequality, there exists a constant C_P such that

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u - \bar{u}\|_{L^2} + \sqrt{|\mathbb{T}^3|} |\bar{u}| \leq C_P (\|\nabla_x u\|_{L^2} + |\bar{u}|) \leq C_P (\|\nabla_x u\|_{H^{s-1}} + |\bar{u}|),$$

since $s - 1 \geq 0$. Hence, we obtain

$$\|\partial^\alpha (uf)\|_{L^2} \leq C (\|\nabla_x u\|_{H^{s-1}} + |\bar{u}|) |f|_s.$$

Summing over α , (4.24) leads to

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_{H^s}^2 + |f|_s^2) + \|\nabla u\|_{H^s}^2 + |u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f|_s^2 \\ & \leq C(|f|_s + \|u\|_{H^s}) \left(\|\nabla u\|_{H^s}^2 + |\bar{u}|^2 + |u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f|_s^2 \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

It remains to derive an estimate for the mean fluid velocity. To this end, we go back to (4.16). We deduce the following estimate

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\bar{u}|^2 + 2|\bar{u}|^2 &= -\frac{\bar{u}}{|\mathbb{T}^3|} \cdot \int_{\mathbb{T}^3} u \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu} f \, dv \, dx \\ &\leq \frac{1}{|\mathbb{T}^3|} \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2} |\bar{u}| \\ &\leq C \|f\|_{L^2} (\|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2), \end{aligned} \quad (4.26)$$

where the last line follows from the Poincaré-Wirtinger inequality. Combining (4.25) with (4.26), we obtain (4.21). This completes the proof of Proposition 4.2.1. \blacklozenge

We now are in position to present the proof to the existence part of Theorem 4.1.1.

Proof of Theorem 4.1.1 (Existence and estimate (4.18)). According to what is stated at the beginning of this subsection, the crucial point consists in proving (4.18). Indeed, this estimate provides all the necessary compactness on the sequence of approximations which allows to pass to the limit in the equations, and thus we obtain a solution which still satisfies (4.18). We skip the discussion of this point and switch to the proof of (4.18), assuming a smallness condition on the initial data. Clearly (4.17) combined to the Sobolev imbedding $H^2(\mathbb{T}^3) \subset L^1(\mathbb{T}^3)$ yields

$$\|u_0\|_{H^s}^2 + |\bar{u}_0|^2 + |f_0|_s^2 \leq C_0 \varepsilon, \quad (4.27)$$

for some $C_0 > 0$. Then using continuity with respect to time, we define

$$T^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \tilde{T} \geq 0 : \sup_{0 \leq t < \tilde{T}} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + |\bar{u}|^2 + |f(t)|_s^2) \leq 2C_0 \varepsilon \right\}. \quad (4.28)$$

However, (4.21) can be recast as

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_{H^s}^2 + |f|_s^2 + |\bar{u}|^2) \\ & + (1 - C(|f|_s + \|u\|_{H^s})) \left(\|\nabla u\|_{H^s}^2 + 2|\bar{u}|^2 + |u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f|_s^2 \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Let us fix ε such that $0 < \varepsilon < 1/(2C_0C)$. Hence, on $0 \leq t \leq T^*$ we have $1 - C(|f|_s + \|u\|_{H^s}) > 0$ and it follows that

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 + |f(t)|_s^2 + |\bar{u}(t)|^2 \leq \|u_0\|_{H^s}^2 + |\bar{u}_0|^2 + |f_0|_s^2 \leq C_0 \varepsilon,$$

holds on $0 \leq t \leq T^*$. It prevents T^* from being finite. Thus, the proof to the existence part of Theorem 4.1.1 is complete. \blacklozenge

4.2.1.2 Estimates of full Sobolev norms

Up to now, we have only obtained a partial regularity for the particles distribution function, since only space derivatives are involved in the norm $|f|_s$. We wish to strengthen the regularity analysis, showing that for positive time, the regularity of f with respect to the space variables can be transferred to the velocity variables. We make use of the nice structure of the Fokker-Planck operator, which allows to avoid any estimates on the moment of the distribution, like it is done in [72] for the Dumbbell model. We start by introducing convenient functions spaces and justify a useful statement on real variable functions.

Definition 4.2.1. *We consider the cone of nonnegative continuous functions*

$$C_+(\mathbb{R}_+) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}_+) : f \geq 0 \right\}.$$

Then, for any $K, r > 0$, we set

$$\mathcal{B}(K, r) := \left\{ f \in C_+(\mathbb{R}_+) : \int_t^{t+1} f(\tau) d\tau \leq K, \forall t \geq r \right\}.$$

Lemma 4.2.1. *Let $\zeta(t), \xi(t) \in \mathcal{B}(K, r)$, and $\eta(t) \in C_+(\mathbb{R}_+)$ satisfy*

$$\zeta'(t) + \eta(t) \leq K(1 + \xi(t)). \quad (4.29)$$

Then for all $t_0 > r$, there exists a constant \tilde{K} depending on t_0, r and K , such that

$$\sup_{t \geq t_0} \zeta(t) \leq \tilde{K} \quad \text{and} \quad \eta(t) \in \mathcal{B}(\tilde{K}, t_0).$$

Proof. We first prove the uniform estimate on ζ . Let n be the smallest integer such that $t_0 < r + n$. Since $\zeta \in \mathcal{B}(K, r)$, we have

$$\int_r^{t_0} \zeta(\tau) d\tau \leq \int_r^{r+n} \zeta(\tau) d\tau \leq nK.$$

Hence the mean value theorem allows us to find some $\tau_0 \in]r, t_0[$ such that :

$$\zeta(\tau_0) \leq \frac{nK}{t_0 - r}.$$

Then for $t \in [t_0, \tau_0 + n + 1]$ we have

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \zeta(\tau_0) + \int_{\tau_0}^t \zeta'(\tau) d\tau \\ &\leq \zeta(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_0+n+1} K(1 + \xi(\tau)) d\tau \\ &\leq \frac{nK}{t_0 - r} + (n+1)(K + K^2), \end{aligned}$$

by using (4.29) and the fact that ξ is non negative.

For $t \geq \tau_0 + n + 1 > r + 1$, since $\zeta \in \mathcal{B}(K, r)$, we have

$$\int_{t-1}^t \zeta(\tau) d\tau \leq K.$$

Thus there exists $\tilde{t} \in [t-1, t]$ such that $\zeta(\tilde{t}) \leq K$. Integration of (4.29) over $[\tilde{t}, t]$ yields

$$\begin{aligned} \zeta(t) &\leq \zeta(\tilde{t}) + K \int_{\tilde{t}}^t (1 + \xi(\tau)) d\tau \\ &\leq K + K \int_{t-1}^t (1 + \xi(\tau)) d\tau \\ &\leq K + K(1 + K), \end{aligned}$$

where we used the definition of \tilde{t} and again the fact that $\xi \in \mathcal{B}(K, r)$ and $\eta \geq 0$.

Summarizing the obtained estimates, we get

$$\sup_{\tau \geq t_0} \zeta(\tau) \leq \max \left(2K + K^2, \frac{nK}{t_0 - r} + (n+1)(K + K^2) \right) := K_1.$$

Finally, let us integrate (4.29) over $[t, t+1]$. It follows that, for any $t \geq t_0$,

$$\int_t^{t+1} \eta(\tau) d\tau \leq \zeta(t) + K \left[1 + \int_t^{t+1} \xi(\tau) d\tau \right] \leq K_1 + K(1 + K) := \tilde{K}.$$

This concludes the proof of the Lemma 4.2.1. \blacklozenge

Lemma 4.2.1 will be useful for proving the transfer of regularity. The argument is based on an induction.

Lemma 4.2.2. *Let $s \geq 3$. Let (u, f) be a solution to (4.10)-(4.12), satisfying for any $t \geq 0$*

$$\sup_{t \geq 0} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + |f(t)|_s^2) + \int_t^{t+1} |\nabla_v f + \frac{v}{2} f|_s^2 d\tau \leq A. \quad (4.30)$$

Then for any $t_0 > 0$ and $t \geq t_0$, there holds :

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_0} (|\partial_{v_i} f|_{s-1}^2 + |v_i f|_{s-1}^2) + \int_t^{t+1} \left[\left| \nabla_v \partial_{v_i} f + \frac{v}{2} \partial_{v_i} f \right|_{s-1}^2 \right. \\ \left. + \left| v \otimes \nabla_v f + \frac{v \otimes v}{2} f \right|_{s-1}^2 \right] d\tau \leq C(t_0, A). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Proof. Let $h \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_v f + \frac{v}{2} f$. Then a simple calculation shows that

$$\partial_t h + v \cdot \nabla_x h + u \cdot (\nabla_v h - \frac{v}{2} h) - u f - u \sqrt{\mu} = -\frac{|v|^2}{4} h + \frac{3}{2} h + \Delta_v h - h - \nabla_x f.$$

Let $|\alpha| \leq s-1$. We remark that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \partial^\alpha \left(-\frac{|v|^2}{4} h + \frac{3}{2} h + \Delta_v h \right) \partial^\alpha h dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\partial^\alpha \nabla_v h|^2 - \frac{v^2}{4} |\partial^\alpha h|^2 + \frac{3}{2} |\partial^\alpha h|^2 \right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\partial^\alpha \nabla_v h|^2 - \frac{v^2}{4} |\partial^\alpha h|^2 + \frac{1}{2} \nabla_v \cdot v |\partial^\alpha h|^2 \right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla_v \partial^\alpha h + \frac{v}{2} \partial^\alpha h \right)^2 dv. \end{aligned}$$

Thus, the following energy estimate holds

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\alpha h\|_{L^2}^2 + \|\partial^\alpha [\nabla_v h + \frac{v}{2} h]\|_{L^2}^2 + \|\partial^\alpha h\|_{L^2}^2 \\ = -\left\langle \partial^\alpha \left[u \cdot \left(\nabla_v h - \frac{v}{2} h \right) \right], \partial^\alpha h \right\rangle + \langle \partial^\alpha [u f], \partial^\alpha h \rangle + \langle \partial^\alpha u \sqrt{\mu}, \partial^\alpha h \rangle - \langle \partial^\alpha \nabla_x f, \partial^\alpha h \rangle. \end{aligned}$$

The third and the fourth term in the right-hand side can be estimated by $C|h|_{s-1}\|u\|_{H^{s-1}}$ and $C|f|_s\|u\|_{H^{s-1}}$ respectively. Moreover, we observe that

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \partial^\alpha \left[u \cdot \left(\nabla_v h - \frac{v}{2} h \right) \right], \partial^\alpha h \right\rangle \right| &= \left| \left\langle \partial^\alpha (uh), \partial^\alpha \left(\nabla_v h + \frac{v}{2} h \right) \right\rangle \right| \\ &\leq C\|u\|_{H^{s-1}} \left| \nabla_v h + \frac{v}{2} h \right|_{s-1} |h|_{s-1} \\ &\leq C\|u\|_{H^{s-1}}^2 |h|_{s-1}^2 + \frac{1}{2} \left| \nabla_v h + \frac{v}{2} h \right|_{s-1}^2, \end{aligned}$$

and, since $s-1 \geq 3/2$,

$$|\langle \partial^\alpha (uf), \partial^\alpha h \rangle| \leq C\|u\|_{H^{s-1}} |f|_{s-1} |h|_{s-1} \leq C\|u\|_{H^{s-1}} (|f|_{s-1}^2 + |h|_{s-1}^2).$$

Therefore, by using (4.30), we obtain

$$\frac{d}{dt} |h|_{s-1}^2 + \left| \nabla_v h + \frac{v}{2} h \right|_{s-1}^2 + |h|_{s-1}^2 \leq C_A(1 + |h|_{s-1}^2).$$

We apply lemma 4.2.1 with $\zeta = \xi = |h|_{s-1}^2$ which belongs to $\mathcal{B}(A, 0)$ by virtue of (4.30), and $\eta = \left| \nabla_v h + \frac{v}{2} h \right|_{s-1}^2$. We get for $t \geq t_0 > 0$

$$\sup_{t \geq t_0} |h(t)|_{s-1}^2 + \int_t^{t+1} \left| \nabla_v h + \frac{v}{2} h \right|_{s-1}^2 d\tau \leq C(t_0, A). \quad (4.32)$$

Now we make use of the following formulae

$$\begin{aligned} |h|_{s-1}^2 &= |\nabla_v f|_{s-1}^2 + \left| \frac{v}{2} f \right|_{s-1}^2 - \frac{3}{2} |f|_{s-1}^2, \\ \left| \nabla_v h + \frac{v}{2} h \right|_{s-1}^2 &= |\nabla_v h|_{s-1}^2 + \left| \frac{v}{2} h \right|_{s-1}^2 - \frac{3}{2} |h|_{s-1}^2, \\ \partial_{v_j} h_i &= \partial_{v_i} (\partial_{v_j} f) + \frac{v_i}{2} (\partial_{v_j} f) + \delta_{ij} \frac{f}{2}, \\ \frac{v}{2} h_i &= \frac{v}{2} \partial_{v_i} f + \frac{v v_i}{2} f. \end{aligned}$$

Consequently, (4.32) leads to

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_0} \left(|\nabla_v f|_{s-1}^2 + \left| \frac{v}{2} f \right|_{s-1}^2 \right) &\leq \sup_{t \geq t_0} |h|_{s-1}^2 + \frac{3}{2} \sup_{t \geq t_0} |f|_{s-1}^2 \\ &\leq C(t_0, A) + 3A, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+1} \sum_{i,j=1}^3 \left[\left| \partial_{v_i} (\partial_{v_j} f) + \frac{v_i}{2} (\partial_{v_j} f) \right|_{s-1}^2 + \left| v_j \partial_{v_i} f + v_j \frac{v_i}{2} f \right|_{s-1}^2 \right] d\tau \\ &\leq 4 \int_t^{t+1} \left[|\nabla_v h|_{s-1}^2 + \left| \frac{v}{2} h \right|_{s-1}^2 + \frac{3}{2} |f|_{s-1}^2 \right] d\tau \\ &\leq 4 \int_t^{t+1} \left[\left| \nabla_v h + \frac{v}{2} h \right|_{s-1}^2 + 3|f|_{s-1}^2 \right] d\tau \leq 4C(t_0, A) + 12A. \end{aligned}$$

It completes the proof Lemma 4.2.2. \blacklozenge

Thanks to Lemma 4.2.2, we now can present the estimate for mixed derivatives of f via an inductive argument.

Lemma 4.2.3. *Under the assumptions of Lemma 4.2.2, for any $t \geq t_0 > 0$ we have*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq t_0} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|f(t)\|_{H^s}^2 + \|vf(t)\|_{s-1}^2) \\ & + \int_t^{t+1} \left[\|\nabla_v f + \frac{v}{2}f\|_{H^s}^2 + \|v \otimes \nabla_v f + \frac{v \otimes v}{2}f\|_{s-1}^2 \right] d\tau \leq C(t_0, A). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Proof. We wish to estimate the mixed derivatives $\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f$ with $|\alpha| + |\beta| \leq s$. Lemma 4.2.2 already tells us that for any $|\alpha| + |\beta| \leq s$ with $|\beta| \leq 1$ we have

$$\sup_{t \geq t_0 > 0} \|\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 + \int_t^{t+1} \|\nabla_v(\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f) + \frac{v}{2}\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(t_0, A). \quad (4.34)$$

For $N \in \{1, \dots, s\}$, we define $P(N)$ as the following property :

For all $t_1 > 0$ there exists a constant $C(t_1, A)$ such that :

1. For all multi-indices α and β such that $|\alpha| + |\beta| \leq s$, $0 \leq |\beta| \leq N < s$,

$$\sup_{t \geq t_1 > 0} \|\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 + \int_t^{t+1} \|\nabla_v(\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f) + \frac{v}{2}\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(t_1, A). \quad (4.35)$$

2. For all multi-indices α and β such that $|\alpha| + |\beta| \leq s - 1$, $0 \leq |\beta| \leq N - 1 < s$ and $t \geq t_1 > 0$,

$$\sup_{t \geq t_1 > 0} \|v \partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 + \int_t^{t+1} \|v \otimes \nabla_v(\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f) + \frac{v \otimes v}{2}\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(t_1, A). \quad (4.36)$$

Property $P(1)$ holds true, due to Lemma 4.2.2 : see (4.31) and (4.34). Let us now assume that $P(N)$ is satisfied.

Let us set

$$g_{\alpha, \beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x^\alpha \partial_v^\beta f,$$

with $|\alpha| + |\beta| \leq s - 1$, $|\beta| = N < s$. We use the generalized Leibniz formula

$$\partial^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma \varphi \partial^{\alpha-\gamma} \psi.$$

Let us define the operators

$$K = \nabla_v + \frac{v}{2}, \quad L = \nabla_v - \frac{v}{2}.$$

We apply $\partial_x^\alpha \partial_v^\beta$ to (4.12). Then $g_{\alpha, \beta}$ satisfies :

$$\begin{aligned} & \partial_t g_{\alpha, \beta} + v \cdot \nabla_x g_{\alpha, \beta} \\ & + \sum_i \binom{\beta}{\delta_i} \partial_x^{\alpha+\delta_i} \partial_v^{\beta-\delta_i} f - \partial_x^\alpha u \cdot \partial_v^\beta (v\sqrt{\mu}) + \partial_x^\alpha [u \cdot L(\partial_v^\beta f)] - \frac{1}{2} \sum_i \binom{\beta}{\delta_i} \partial_x^\alpha [u_i \partial_v^{\beta-\delta_i} f] \\ & = -\frac{|v|^2}{4} g_{\alpha, \beta} + \frac{3}{2} g_{\alpha, \beta} + \Delta_v g_{\alpha, \beta} - \frac{1}{2} \sum_i \left[\binom{\beta}{2\delta_i} \partial_x^\alpha \partial_v^{\beta-2\delta_i} f + \binom{\beta}{\delta_i} v_i \partial_x^\alpha \partial_v^{\beta-\delta_i} f \right], \end{aligned}$$

where δ_i is the multi-index whose i th component is 1, and the others are 0.

Before going further, we set $H_{\alpha, \beta} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_v g_{\alpha, \beta} + \frac{v}{2} g_{\alpha, \beta}$. Noticing that :

$$H_{\alpha, \beta}^j = K_j(g_{\alpha, \beta}) \quad \text{and} \quad K_j \partial_x^\alpha = \partial_x^\alpha K_j,$$

we apply K_j to the previous equation so that $H_{\alpha,\beta}^j$ satisfies

$$\partial_t H_{\alpha,\beta}^j + v \cdot \nabla H_{\alpha,\beta}^j + \partial_{x_j} g_{\alpha,\beta} + I_j = -\frac{|v|^2}{4} H_{\alpha,\beta}^j + \frac{3}{2} H_{\alpha,\beta}^j + \Delta_v H_{\alpha,\beta}^j - H_{\alpha,\beta}^j + II_j,$$

where

$$\begin{aligned} I_j &= \sum_i \left[\binom{\beta}{\delta_i} K_j (\partial_x^{\alpha+\delta_i} \partial_v^{\beta-\delta_i} f) \right] - \partial_x^\alpha u \cdot \left[K_j (\partial_v^\beta (v\sqrt{\mu})) \right] + \partial_x^\alpha [u \cdot K_j L(\partial_v^\beta f)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i \binom{\beta}{\delta_i} \partial_x^\alpha [u_i K_j (\partial_v^{\beta-\delta_i} f)], \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} II_j &= -\frac{1}{2} \sum_i \left[\binom{\beta}{2\delta_i} K_j (\partial_x^\alpha \partial_v^{\beta-2\delta_i} f) + \binom{\beta}{\delta_i} v_i K_j (\partial_x^\alpha \partial_v^{\beta-\delta_i} f) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \binom{\beta}{\delta_j} \partial_x^\alpha \partial_v^{\beta-\delta_j} f. \end{aligned}$$

We now multiply the previous equation by $H_{\alpha,\beta}^j$, and standard energy estimates will tell us that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \|\nabla_v H_{\alpha,\beta} + \frac{v}{2} H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \sum_j |\langle I_j + II_j, H_{\alpha,\beta}^j \rangle|$$

holds.

Let us estimate the components of the last sum, term by term. By Young's inequality, we only need to bound the L^2 norm of each term contained in the I_j and II_j s. To this end, we use the estimates contained in $P(N)$. More precisely, we have for $t \geq t_1$:

$$\|K_j (\partial_x^{\alpha+\delta_i} \partial_v^{\beta-\delta_i} f)\|_{L^2}^2 + \|K_j (\partial_x^\alpha \partial_v^{\beta-2\delta_i} f)\|_{L^2}^2 \leq \sum_{\substack{|\alpha|+|b|\leq s-1, \\ 1\leq|b|\leq N}} \|\nabla_v (\partial_x^a \partial_v^b f) + \frac{v}{2} \partial_x^a \partial_v^b f\|_{L^2}^2,$$

and

$$\begin{aligned} \|v_i K_j (\partial_x^\alpha \partial_v^{\beta-\delta_i} f)\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{\substack{|\alpha|+|b|\leq s-2, \\ 1\leq|b|\leq N-1}} \|v \otimes \nabla_v (\partial_x^a \partial_v^b f) + \frac{v \otimes v}{2} \partial_x^a \partial_v^b f\|_{L^2}^2, \\ \|\partial_x^\alpha u \cdot K_j (\partial_v^\beta (v\sqrt{\mu}))\|_{L^2}^2 &\leq C \|u\|_s^2, \\ \|\partial_x^\alpha \partial_v^{\beta-\delta_j} f\|_{L^2}^2 &\leq C(t_1, A). \end{aligned}$$

The last nonlinear term in I_j reads

$$\left\| \partial_x^\alpha [u_i K_j (\partial_v^{\beta-\delta_i} f)] \right\|_{L^2}^2 = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \left\| \partial_x^{\alpha_1} u_i K_j (\partial_x^{\alpha_2} \partial_v^{\beta-\delta_i} f) \right\|_{L^2}^2.$$

When $|\alpha| \leq 1$, it can be estimated as follows

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x^\alpha [u_i K_j (\partial_v^{\beta-\delta_i} f)] \right\|_{L^2}^2 &\leq C \|u\|_{H^{|\alpha_1|+2}}^2 \left| K_j (\partial_v^{\beta-\delta_i} f) \right|_{|\alpha_2|}^2 \\ &\leq C \|u\|_{H^s}^2 \sum_{\substack{|\alpha|+|b|\leq s-1, \\ 1\leq|b|\leq N}} \|\nabla_v (\partial_x^a \partial_v^b f) + \frac{v}{2} \partial_x^a \partial_v^b f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Now we turn to the case $|\alpha| \geq 2 > 3/2$. We have

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x^\alpha [u_i K_j (\partial_v^{\beta-\delta_i} f)] \right\|_{L^2}^2 &\leq C \|u\|_{H^{|\alpha|}}^2 \left| K_j (\partial_v^{\beta-\delta_i} f) \right|_{|\alpha|}^2 \\ &\leq C \|u\|_{H^s}^2 \sum_{\substack{|\alpha|+|b|\leq s-1, \\ 1\leq|b|\leq N}} \|\nabla_v (\partial_x^a \partial_v^b f) + \frac{v}{2} \partial_x^a \partial_v^b f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Therefore, we conclude that

$$\left\| \partial_x^\alpha [u_i K_j (\partial_v^{\beta-\delta_i} f)] \right\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_s^2 \sum_{\substack{|\alpha|+|b|\leq s-1, \\ 1\leq|b|\leq N}} \|\nabla_v (\partial_x^a \partial_v^b f) + \frac{v}{2} \partial_x^a \partial_v^b f\|_{L^2}^2.$$

Eventually, for the nonlinear terms of I_j which involve L , we proceed as follows

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \partial_x^\alpha [u \cdot K_j L (\partial_v^\beta f)], H_{\alpha,\beta}^j \right\rangle \right| &= \sum_m \left| \left\langle \partial_x^\alpha [u_m K_j L_m (\partial_v^\beta f)], H_{\alpha,\beta}^j \right\rangle \right| \\ &\leq \sum_m \left| \left\langle \partial_x^\alpha [u_m L_m K_j (\partial_v^\beta f)], H_{\alpha,\beta}^j \right\rangle \right| + \left| \left\langle \partial_x^\alpha [u_j K_j (\partial_v^\beta f)], H_{\alpha,\beta}^j \right\rangle \right| \\ &\leq \sum_m \left| \left\langle \partial_x^\alpha [u_m K_j (\partial_v^\beta f)], K_m H_{\alpha,\beta}^j \right\rangle \right| + \left| \left\langle \partial_x^\alpha [u_j K_j (\partial_v^\beta f)], H_{\alpha,\beta}^j \right\rangle \right| \\ &\leq C_\epsilon \|u\|_s^2 \left(\sum_{\substack{|\alpha|+|b|\leq s-1, \\ 1\leq|b|\leq N}} \|\nabla_v (\partial_x^a \partial_v^b f) + \frac{v}{2} \partial_x^a \partial_v^b f\|_{L^2}^2 \right) + \epsilon (\|K_m H_{\alpha,\beta}^j\|_{L^2}^2 + \|H_{\alpha,\beta}^j\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

with $\epsilon > 0$, where we use the fact that $K_i^* = -L_i$, and $[K_j, L_i] = -\delta_{i,j}$ in the second inequality.

Combining together all the above estimates, we end up with

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_v H_{\alpha,\beta} + \frac{v}{2} H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \left(\|\nabla_x g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \sum_{\substack{|\alpha|+|b|\leq s-2, \\ 1\leq|b|\leq N-1}} \|v \otimes \nabla_v (\partial_x^a \partial_v^b f) + \frac{v \otimes v}{2} \partial_x^a \partial_v^b f\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{|\alpha|+|b|\leq s-1, \\ 1\leq|b|\leq N}} \|\nabla_v (\partial_x^a \partial_v^b f) + \frac{v}{2} \partial_x^a \partial_v^b f\|_{L^2}^2 + 1 \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Let us now prove that $P(N+1)$ holds true. Estimate (4.35) in $P(N)$ implies for all $t \geq t_1$

$$\int_t^{t+1} \|H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(t_1, A) \quad \text{and} \quad \int_t^{t+1} \|H_{a,b}\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(t_1, A).$$

We also have

$$\|\nabla_x g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 = \|\nabla_x \partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 = \sum_i \|\partial_x^{\alpha+\delta_i} \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 \leq C(t_1, A).$$

Since now $|\alpha| + |\beta| \leq s-1$ and $|\beta| = N < s$, (4.35) in $P(N)$ can be used again. Therefore, we can exhibit a constant (still denoted by $C(t_1, A)$) such that (4.37) becomes

$$\frac{d}{dt} \|H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \|\nabla_v H_{\alpha,\beta} + \frac{v}{2} H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 \leq C(t_1, A)(1 + \xi),$$

where by using now the second assumption (4.36) in $P(N)$, the nonnegative function ξ belongs to $\mathcal{B}(C(t_1, A), t_1)$.

We use Lemma 4.2.1 with $\zeta(t) = \|H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2$, which lies in $\mathcal{B}(C(t_1, A), t_1)$, and $\eta(t) = \|\nabla_v H_{\alpha,\beta} + \frac{v}{2}H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2$. Then for all $t \geq t_2 > t_1$, there exists a constant denoted $C(t_2, A)$ such that :

$$\|H_{\alpha,\beta}(t)\|_{L^2}^2 + \int_t^{t+1} \|\nabla_v H_{\alpha,\beta} + \frac{v}{2}H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(t_2, A). \quad (4.38)$$

Observe that

$$\begin{aligned} \|H_{\alpha,\beta}^i\|_{L^2}^2 &= \|\partial_{v_i} g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \|\frac{v_i}{2}g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2, \\ \|\nabla_v H_{\alpha,\beta} + \frac{v}{2}H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 &= \|\nabla_v H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \|\frac{v}{2}H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 - \frac{3}{2}\|H_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2, \\ \partial_{v_j} H_{\alpha,\beta}^i &= \partial_{v_i}(\partial_{v_j} g_{\alpha,\beta}) + \frac{v_i}{2}\partial_{v_j} g_{\alpha,\beta} + \delta_{ij} \frac{g_{\alpha,\beta}}{2}, \\ \frac{v_j}{2}H_{\alpha,\beta}^i &= \frac{v_j}{2}\partial_{v_i} g_{\alpha,\beta} + \frac{v_j}{2}\frac{v_i}{2}g_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Hence, we rewrite (4.38) as follows

$$\begin{aligned} &\sup_{t \geq t_2} \left(\sum_i \|\partial_{v_i} g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \|\frac{v_i}{2}g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 \right) \\ &+ \int_t^{t+1} \sum_{i,j} \|\partial_{v_i}(\partial_{v_j} g_{\alpha,\beta}) + \frac{v_i}{2}\partial_{v_j} g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 + \|\frac{v_j}{2}\partial_{v_i} g_{\alpha,\beta} + \frac{v_j}{2}\frac{v_i}{2}g_{\alpha,\beta}\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\leq C(t_2, A). \end{aligned}$$

As a consequence, $P(N+1)$ holds. More precisely, we have

1. For all multi-indices α and β such that $|\alpha| + |\beta| \leq s$, $|\beta| \leq N+1$, and $t \geq t_2 > 0$,

$$\sup_{t \geq t_2 > 0} \|\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 + \int_t^{t+1} \|\nabla_v(\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f) + \frac{v}{2}\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(t_2, A).$$

2. For all multi-indices α and β such that $|\alpha| + |\beta| \leq s-1$, $|\beta| \leq N$ and $t \geq t_2 > 0$,

$$\sup_{t \geq t_2 > 0} \|v \partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 + \int_t^{t+1} \|v \otimes \nabla_v(\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f) + \frac{v \otimes v}{2}\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(t_2, A).$$

The induction is proved and this procedure stops when $|\beta| = s$, which gives (4.33). This completes the proof of Lemma 4.2.3. \blacklozenge

Remark 4.2.1. *The proof does not involve the commutator $[v \cdot \nabla_x, \Delta_v]$. The main reason for this lies in the fact that the inductive method depends only on the structure of the Fokker-Planck operator (and the basic Lemma 4.2.1), which also can be applied to treat other models (see[62]).*

End of proof of Theorem 4.1.1 : (proof of (4.19)). Owing to Lemma 4.2.3, we are left with the task of justifying that (4.30) holds. Actually, due to (4.18), it only remains to exhibit a positive constant A such that the inequality

$$\int_t^{t+1} |\nabla_v f + \frac{v}{2}f|_s^2 d\tau \leq A \quad (4.39)$$

holds for any $t \geq 0$. Noticing that $|\nabla_v f \pm \frac{v}{2}f|_s^2 = |\nabla_v f \mp \frac{v}{2}f|_s^2 \mp 3|f|_s^2$, we deduce from (4.23) that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |f|_s^2 + |\nabla_v f + \frac{v}{2}f|_s^2 \leq C \|u\|_{H^s} |f|_s (1 + |\nabla_v f + \frac{v}{2}f|_s)$$

holds. Using the basic inequality $|ab| \leq a^2/2 + b^2/2$, we conclude that

$$\frac{d}{dt}|f|_s^2 + |\nabla_v f + \frac{v}{2}f|_s^2 \leq C\|u\|_{H^s}|f|_s(1 + \|u\|_{H^s}|f|_s).$$

Integrating this inequality over $[t, t + 1]$ yields to the estimate

$$\int_t^{t+1} |\nabla_v f + \frac{v}{2}f|_s^2 d\tau \leq C\varepsilon(1 + \varepsilon),$$

as a consequence of (4.18). It proves (4.39) and concludes the proof of Theorem 4.1.1. \blacklozenge

4.2.2 Large time behavior

In this section, we consider the large time behavior of the solutions to the nonlinear system (4.10)-(4.12) and prove Theorem 4.1.2. The key obstacle is that there is no dissipation terms to control the microscopic solution f . However, the diffusion operator in (4.12) takes the abstract form $K^*K + P$, with P a skew-symmetric operator $P^* = -P$ (A^* denotes the adjoint operator of A for the L^2 inner product). This specific form makes appealing the use of the hypocoercivity method, see [100]. From now on, we denote $[\cdot, \cdot]$ is the commutator bracket

$$K = \nabla_v + \frac{v}{2}, \quad P = v \cdot \nabla_x, \quad S_i = [K_i, P] = \partial_{x_i}.$$

We notice that $K^*Kf = (-\nabla_v + v/2) \cdot [(\nabla_v + v/2)f] = -\Delta_v f - \nabla_v \cdot (\frac{v}{2}f) + \frac{v}{2} \cdot \nabla_v f + \frac{v^2}{4}f = -\Delta_v f - \frac{3}{2}f - \frac{v}{2} \cdot \nabla_v f + \frac{v}{2} \cdot \nabla_v f + \frac{v^2}{4}f$, so that

$$K^*Kf = -\Delta_v - \frac{3}{2} + \frac{v^2}{4}, \quad P^* = -P, \quad [S, P] = 0 = [S, K].$$

Accordingly, the microscopic equation (4.12) can be rewritten as

$$\partial_t f + Pf + K^*Kf = g, \tag{4.40}$$

where

$$g = u \cdot v\sqrt{\mu} + u \cdot K^*f.$$

Note also that

$$\text{Ker}(K^*K + P) = \text{Span}\{\mathbb{1}(x)\sqrt{\mu(v)}\},$$

since $\langle (K^*K + P)f, f \rangle = \|Kf\|_{L^2}^2 = \int |\nabla_v(f/\sqrt{\mu})|^2 \mu dv dx$. Let us set

$$\mathcal{N} = \text{Ker}^\perp(K^*K + P) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3); \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g\sqrt{\mu} dx dv = 0 \right\}.$$

Bearing in mind Proposition 4.2.3, we introduce a new inner product $((\cdot, \cdot))$ on \mathcal{N} defined as follows

$$((f, g)) \stackrel{\text{def}}{=} 2\langle Kf, Kg \rangle + \langle Kf, Sg \rangle + \langle Sf, Kg \rangle + \langle Sf, Sg \rangle.$$

We can find two constants $C^* > C_* > 0$ such that

$$C_*(\|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2) \leq ((f, f)) \leq C^*(\|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2). \tag{4.41}$$

Then, the key ingredient for obtaining the exponential convergence to equilibrium relies on the following statement :

Proposition 4.2.2. *Let the assumptions of Theorem 4.1.1 be fulfilled with $s \geq 3$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ small enough. Furthermore, we assume that (4.15) holds. Then, there exists a strictly positive constant λ_1 such that*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((f, f)) + \lambda_1(\|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2 + \|K^2f\|_{L^2}^2 + \|KSf\|_{L^2}^2) \\ \leq C(\lambda_1)(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + \|Kf\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (4.42)$$

We begin with the proof of a weighted Poincaré inequality.

Proposition 4.2.3. *There exists a constant $C_P^* > 0$ such that for any $f \in L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ verifying $\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \sqrt{\mu} dv dx = 0$, we have*

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq C_P^*(\|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2). \quad (4.43)$$

Proof. We argue by contradiction : suppose that for any integer n , there exists a function f_n such that $\|f_n\|_{L^2} = 1$ and

$$\|Kf_n\|_{L^2}^2 + \|Sf_n\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{n}. \quad (4.44)$$

Since

$$\|\nabla_v f\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{v}{2} f \right\|_{L^2}^2 = \|Kf\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2} \|f\|_{L^2}^2,$$

we immediately deduce that

$$\|\nabla_v f_n\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{v}{2} f_n \right\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x f_n\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{n} + \frac{3}{2}.$$

Since this estimate controls both the derivatives of f_n and the tails for large velocities, we can assume, as a consequence of the Rellich-Kondrachov theorem, that a subsequence satisfies

$$\begin{aligned} f_{n_k} &\longrightarrow f && \text{strongly in } L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3), \\ \nabla_x f_{n_k} &\rightharpoonup \nabla_x f \text{ and } \nabla_v f_{n_k} &\rightharpoonup \nabla_v f && \text{weakly in } L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

with furthermore $\|f\|_{L^2} = 1$. Coming back to (4.44), we obtain

$$\|\nabla_v f + \frac{v}{2} f\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x f\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (\|Kf_{n_k}\|_{L^2}^2 + \|Sf_{n_k}\|_{L^2}^2) = 0.$$

We deduce that $f(x, v) = M \sqrt{\mu(v)}$ for some $M \in \mathbb{R}$. Eventually, assuming that the f_n 's are orthogonal to $\sqrt{\mu}$, we get

$$\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \sqrt{\mu} dv dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{n_k} \sqrt{\mu} dv dx = 0.$$

Hence $f = 0$, which contradicts the fact that f is normalized. This completes the proof of Proposition 4.2.3. \blacklozenge

Proof of Proposition 4.2.2. Multiply (4.40) by f and use the new scalar product. It yields

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}((f, f)) + ((Pf + K^*Kf, f)) = ((g, f)). \quad (4.45)$$

We shall estimate the quantities of this equality, term by term.

Firstly, by definition of the scalar product, we have

$$((Pf, f)) = 2\langle KPf, Kf \rangle + \langle KPf, Sf \rangle + \langle SPf, Kf \rangle + \langle SPf, Sf \rangle.$$

Since P is skew-symmetric, for any u we have $\langle Pu, u \rangle = -\langle u, Pu \rangle = 0$, so that $\langle SPf, Sf \rangle = \langle PSf, Sf \rangle = 0$ and $\langle KPf, Kf \rangle = \langle [K, P]f, Kf \rangle$. We can also write $\langle SPf, Kf \rangle = \langle PSf, Kf \rangle = -\langle PKf, Sf \rangle$. We thus end up with

$$\begin{aligned} \langle (Pf, f) \rangle &= 2\langle [K, P]f, Kf \rangle + \langle [K, P]f, Sf \rangle \\ &= 2\langle Sf, Kf \rangle + \|Sf\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{3}{4}\|Sf\|_{L^2}^2 - 4\|Kf\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Secondly, we get

$$\begin{aligned} \langle (K^*Kf, f) \rangle &= 2\langle KK^*Kf, Kf \rangle + \langle KK^*Kf, Sf \rangle + \langle Kf, SK^*Kf \rangle + \langle SK^*Kf, Sf \rangle \\ &= 2\langle [K_i, K_j^*]K_jf, K_if \rangle + 2\langle K_iK_jf, K_jK_if \rangle + \langle [K_i, K_j^*]K_jf, S_if \rangle \\ &\quad + 2\langle K_iK_jf, K_jS_if \rangle + \langle S_iK_jf, K_jS_if \rangle \\ &= 2\|Kf\|_{L^2}^2 + 2\|K^2f\|_{L^2}^2 + \|SKf\|_{L^2}^2 + \langle Kf, Sf \rangle + 2\langle K^2f, SKf \rangle \\ &\geq \frac{3}{2}\|Kf\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|K^2f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3}\|SKf\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|Sf\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

where we used the identity

$$[K_i, K_j^*] = \delta_{ij}. \quad (4.46)$$

We now treat the right-hand side of (4.45). We have, for any $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |((u \cdot v\sqrt{\mu}, f))| &= \left| 2\langle K(u \cdot v\sqrt{\mu}), Kf \rangle + \langle K(u \cdot v\sqrt{\mu}), Sf \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle S(u \cdot v\sqrt{\mu}), Kf \rangle + \langle S(u \cdot v\sqrt{\mu}), Sf \rangle \right| \\ &\leq \epsilon(\|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2) + C_\epsilon(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x u\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

since $\|K(u \cdot v\sqrt{\mu})\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$ and $\|S(u \cdot v\sqrt{\mu})\|_{L^2} \leq C\|\nabla_x u\|_{L^2}$. Next, by virtue of (4.46), we can write

$$\langle K(u \cdot K^*f), Kf \rangle = \langle K^*(u \cdot Kf), Kf \rangle + \langle [K, K^*]uf, Kf \rangle = \langle u \cdot Kf, K^2f \rangle + \langle uf, Kf \rangle.$$

Therefore, we are led to the following estimate

$$\begin{aligned} |((u \cdot K^*f, f))| &= \left| 2\langle u \cdot K^*f, K^2f \rangle + 2\langle uf, Kf \rangle + \langle K(u \cdot K^*f), Sf \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle S(u \cdot K^*f), Kf \rangle + \langle S(u \cdot K^*f), Sf \rangle \right| \\ &\leq \|u\|_{L^\infty} (2\|Kf\|_{L^2}\|K^2f\|_{L^2} + 2\|f\|_{L^2}\|Kf\|_{L^2} \\ &\quad + 2\|Kf\|_{L^2}\|KSf\|_{L^2} + \|KSf\|_{L^2}\|Sf\|_{L^2}) \\ &\quad + \|\nabla_x u\|_{L^\infty} (\|Kf\|_{L^2}^2 + \|Kf\|_{L^2}\|Sf\|_{L^2}). \end{aligned}$$

We combine now (4.43), the Sobolev embedding $H^3(\mathbb{T}^3) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{T}^3)$ and Young's inequality, so that this relation becomes

$$\begin{aligned} |((u \cdot K^*f, f))| &\leq C\|u\|_{H^3} (\|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2 + \|KSf\|_{L^2}^2 + \|K^2f\|_{L^2}^2) \\ &\leq C\epsilon(\|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2 + \|KSf\|_{L^2}^2 + \|K^2f\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

where the last line uses (4.18). Combining together the estimates concludes the proof of Proposition 4.2.2.

◆

We now are in position to prove Theorem 4.1.2.

Proof of Theorem 4.1.2. Thanks to Theorem 4.1.1, we can revisit the basic energy estimates. Coming back to (4.24) with $\alpha = 0$ (so that there is no contribution from the convection term in (4.10)), we obtain :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2) + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f\|_{L^2}^2 \\ & \leq |\langle uf, u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f \rangle| \leq C\|u\|_{L^2} \|f\|_s \|u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f\|_{L^2} \\ & \leq C\epsilon (\|u\|_{L^2}^2 + \|u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

We have used successively the Sobolev embedding $H^s(\mathbb{T}^3) \subset L^\infty(\mathbb{T}^3)$ for $s > 3/2$ and (4.18). Similarly, (4.18) allows to deduce from (4.26)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\bar{u}|^2 + 2|\bar{u}|^2 \leq C\epsilon (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2).$$

Since $K = \nabla_v + \frac{v}{2}$, we expand $\|u\sqrt{\mu} - \nabla_v f - \frac{v}{2}f\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|Kf\|_{L^2}^2 - 2\langle u\sqrt{\mu}, Kf \rangle$. Hence, we deduce that

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2) + 2\|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + 2|\bar{u}|^2 + 2\|u\|_{L^2}^2 + 2\|Kf\|_{L^2}^2 \\ & \leq 4\langle u\sqrt{\mu}, Kf \rangle + C\epsilon (2\|u\|_{L^2}^2 - 2\langle u\sqrt{\mu}, Kf \rangle + \|Kf\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2) \end{aligned}$$

holds. Let $\alpha > 1$ be determined later. By using Young's inequality, we arrive at

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2) + (2 - C\epsilon) (\|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2) \\ & \quad + ((2 - C\epsilon)(1 - \alpha) - 2C\epsilon) \|u\|_{L^2}^2 + (2 - C\epsilon)(1 - 1/\alpha) \|Kf\|_{L^2}^2 \leq 0. \end{aligned} \tag{4.47}$$

The last step uses the Poincaré-Wirtinger inequality, which tells us that for any $\kappa > 0$,

$$\kappa \|u\|_{L^2}^2 - \kappa C_P (\|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2) \leq 0.$$

Therefore, we can modify (4.47) as follows

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2) + (2 - C\epsilon - \kappa C_P) (\|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2) \\ & \quad + (\kappa + (2 - C\epsilon)(1 - \alpha) - 2C\epsilon) \|u\|_{L^2}^2 + (2 - C\epsilon)(1 - 1/\alpha) \|Kf\|_{L^2}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Let us now choose the parameters in a suitable way. We proceed as follows :

- Firstly we pick κ small enough to ensure $2 - \kappa C_P > 0$,
- Secondly, we pick ϵ small enough to ensure both $2 - \kappa C_P - C\epsilon > 0$ and $\kappa - 2C\epsilon > 0$, that is $0 < \epsilon \leq \frac{1}{C} \min(2 - \kappa C_P, \frac{\kappa}{2})$,
- Thirdly, we pick $\alpha > 1$ such that the coefficient in front of $\|u\|_{L^2}^2$ is positive, that is $1 < \alpha < \frac{\kappa - 2C\epsilon + 2 - C\epsilon}{2 - C\epsilon} = 1 + \frac{\kappa - 2C\epsilon}{2 - C\epsilon}$.

Summarizing, we exhibit a constant $\lambda_2 > 0$ such that

$$\frac{d}{dt} (\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2) + \lambda_2 (\|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2 + \|Kf\|_{L^2}^2) \leq 0. \tag{4.48}$$

To finish the proof of Theorem 4.1.2, we pick $\lambda > 0$ such that

$$2C(\lambda_1) + 2C(\lambda_1)C_P < \lambda\lambda_2,$$

with λ_1 and $C(\lambda_1)$ defined in Proposition 4.2.2, and we introduce

$$\mathcal{E}(t) := \lambda(\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2 + |\bar{u}(t)|^2) + ((f(t), f(t))).$$

Thanks to Proposition 4.2.3, (4.41) and Poincaré-Wirtinger's inequality, we see that

$$\mathcal{E} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2 + \|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2).$$

Combining estimates (4.42) and (4.48), the Poincaré-Wirtinger inequality again, and the definition of λ , we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) &\leq -\lambda\lambda_2(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2 + \|Kf\|_{L^2}^2) + C(\lambda_1)(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + \|Kf\|_{L^2}^2) - \lambda_1\|Sf\|_{L^2}^2 \\ &\leq -C(\lambda_1)(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2 + \|Kf\|_{L^2}^2) - \lambda_1\|Sf\|_{L^2}^2 \\ &\leq -\min(C(\lambda_1), \lambda_1)(\|\nabla_x u\|_{L^2}^2 + |\bar{u}|^2 + \|Kf\|_{L^2}^2 + \|Sf\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

At last, one obtains the existence of a constant λ_3 ($:= \frac{\min(C(\lambda_1), \lambda_1)}{C+1}$) such that

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \lambda_3\mathcal{E}(t) \leq 0, \tag{4.49}$$

so that, by using (4.19),

$$\mathcal{E}(t) \leq C(t_0, \epsilon)e^{-\lambda_3 t}.$$

This completes the proof of Theorem 4.1.2.

4.2.3 Smoothing effect

In this section, we wish to investigate the smoothing effect of system (4.2)-(4.4). The analysis is based on the hypoellipticity property of (4.4). We start the proof of Theorem 4.1.3 with the following claim.

Proposition 4.2.4. *Let $s \geq 2$. Let $f, g \in H^{s+1}(\mathbb{T}^3)$ and set $D_x^\gamma = (-\Delta_x)^{\gamma/2}$ with $0 < \gamma < 1$. Then*

$$\|D_x^\gamma(fg)\|_{H^s} \leq \|D_x^\gamma f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} + \|f\|_{H^s}\|D_x^\gamma g\|_{H^s}.$$

Proof. We introduce the operator $\Delta_{\gamma,k}$ defined by

$$\Delta_{\gamma,k}f(x) = \frac{f(x+k) - f(x)}{|k|^{\gamma+\frac{3}{2}}},$$

so that (see e. g. [94], Lemma 16.3)

$$\|D_x^\gamma f\|_{L^2(x)} = \|\Delta_{\gamma,k}f\|_{L^2(x,k)}.$$

It implies

$$\begin{aligned} \|D_x^\gamma(fg)\|_{H^s} &= \|\Delta_{\gamma,k}(fg)\|_{L^2(k;H^s(x))} \\ &\leq \|(\Delta_{\gamma,k}f)g(x+k)\|_{L^2(k;H^s(x))} + \|f(x)\Delta_{\gamma,k}g\|_{L^2(k;H^s(x))} \\ &\leq \|\Delta_{\gamma,k}f\|_{L^2(k;H^s(x))}\|g\|_{H^s} + \|f\|_{H^s}\|\Delta_{\gamma,k}g\|_{L^2(k;H^s(x))} \\ &= \|D_x^\gamma f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} + \|f\|_{H^s}\|D_x^\gamma g\|_{H^s}, \end{aligned}$$

so that Proposition 4.2.4 is proven. \blacklozenge

Proof of Theorem 4.1.3. Let $s \geq 2$ be a positive integer and $|\alpha| \leq s$. For every integer $n \geq 3$, we can derive from (4.2) the following energy estimate

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x \partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \leq C\|u\|_{H^s}^2 \|\nabla u\|_{H^s} + C|F\langle v \rangle^n|_s \|u\|_{H^s}^2 + C|F\langle v \rangle^n|_s \|u\|_{H^s}.$$

By using Young's inequality, we deduce that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{H^s}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_x u\|_{H^s}^2 \leq C(\|u\|_{H^s}^4 + \|u\|_{H^s}^2 + |F\langle v \rangle^n|_s^2) \quad (4.50)$$

holds. Treating similarly (4.4), we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |F\langle v \rangle^n|_s^2 + \frac{1}{2} |(\nabla_v F)\langle v \rangle^n|_s^2 &\leq C(\|u\|_{H^s}^2 + 1) |F\langle v \rangle^n|_s^2 \\ &\leq C(\|u\|_{H^s}^4 + |F\langle v \rangle^n|_s^2 + |F\langle v \rangle^n|_s^4). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Let us set

$$X(t) = \|u(t)\|_{H^s}^2, \quad \text{and} \quad Y(t) = |F(t)\langle v \rangle^n|_s^2.$$

Then X and Y satisfy the following system of differential inequalities

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) \leq C(X(t)^2 + X(t) + Y(t)), \\ \frac{d}{dt} Y(t) \leq C(X(t)^2 + Y(t) + Y(t)^2), \end{cases}$$

so that

$$\frac{d}{dt} (X(t) + Y(t)) \leq C((X(t) + Y(t))^2 + (X(t) + Y(t))).$$

Therefore we can estimate

$$X(t) + Y(t) \leq C(T, X(0) + Y(0)) < \infty,$$

at least on a (small enough) time interval $0 \leq t \leq T$ (related to the life time of the solution of $\frac{d}{dt} z = C(z^2 + z)$ with initial data $z(0) = X(0) + Y(0)$). Accordingly, coming back to (4.50), (4.51), we have, for every integer $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + |F(t)\langle v \rangle^n|_s^2) + \int_0^T \left[\|u\|_{H^{s+1}}^2 + |(\nabla_v F)\langle v \rangle^n|_s^2 \right] d\tau \\ \leq C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0\langle v \rangle^n|_s). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Let us introduce

$$p \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \phi \in C_c^\infty((0, T]).$$

We set

$$g^p = \phi(t) \partial_x^\alpha F\langle v \rangle^p,$$

which satisfies

$$\partial_t g^p + v \cdot \nabla_x g^p = \operatorname{div}_v (\nabla_v g^p + h_1^p) + h_2^p, \quad (4.53)$$

where

$$\begin{aligned} h_1^p &= \phi(t) \partial^\alpha [(v - u)F]\langle v \rangle^p - 2\phi(t) \partial^\alpha F p \langle v \rangle^{p-2} v, \\ h_2^p &= -p \langle v \rangle^{p-2} \phi(t) \partial^\alpha [(v - u)F] \cdot v + 2\phi(t) \partial^\alpha F \operatorname{div}_v [p \langle v \rangle^{p-2} v] \\ &\quad - \phi(t) \partial^\alpha F \Delta_v (\langle v \rangle^p) + \phi'(t) \partial^\alpha F \langle v \rangle^p. \end{aligned}$$

Owing to (4.52), we check that

$$\|g^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + \|h_1^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + \|h_2^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} < C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0\langle v \rangle^{p+1}|_s).$$

Then the basic energy estimate for (4.53) yields

$$\|\nabla_v g^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq C(\|g^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + \|h_1^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + \|h_2^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}).$$

Thus, we can make use of Theorem 2.1 from [16]. It allows to control the L^2 norm, with respect to time, space and velocity variables, of $D_x^{\frac{1}{3}} g^p$ by quantities depending on the L^2 norms of $g^p, \nabla_v g^p, h_1^p, h_2^p$. We obtain

$$\|D_x^{\frac{1}{3}} g^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0 \langle v \rangle^{p+1}|_s). \quad (4.54)$$

We shall repeat the argument in order to estimate a full space derivative of g^p . We introduce another cut-off function

$$\varphi_1 \in C_c^\infty((0, T]), \quad \text{supp}(\varphi_1) \subset \text{supp}(\phi),$$

and we set

$$\tilde{g}^p = \varphi_1(t) D_x^{\frac{1}{3}} g^p.$$

The function \tilde{g}^p verifies

$$\partial_t \tilde{g}^p + v \cdot \nabla_x \tilde{g}^p = \text{div}_v (\nabla_v \tilde{g}^p + \varphi_1(t) D_x^{\frac{1}{3}} h_1^p) + \varphi_1(t) D_x^{\frac{1}{3}} h_2^p + \varphi_1'(t) D_x^{\frac{1}{3}} g^p. \quad (4.55)$$

Due to the Proposition 4.2.4, we have

$$\left| D_x^\gamma [\phi(t) u F \langle v \rangle^p] \right|_s^2 \leq C \left(\|D_x^\gamma u\|_{H^s}^2 \left| \phi(t) F \langle v \rangle^p \right|_s^2 + \|u\|_{H^s}^2 \left| D_x^\gamma [\phi(t) F \langle v \rangle^p] \right|_s^2 \right).$$

Integrating with respect to time, it follows that

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| D_x^\gamma [\phi(t) u F \langle v \rangle^p] \right|_s^2 dt &\leq C \left(\|D_x^\gamma u\|_{L^2(0, T; H^s(\mathbb{T}^3))}^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \phi(t) F \langle v \rangle^p \right|_s^2 \right. \\ &\quad \left. + \|u\|_{L^\infty(0, T; H^s(\mathbb{T}^3))}^2 \int_0^T \left| D_x^\gamma [\phi(t) F \langle v \rangle^p] \right|_s^2 dt \right). \end{aligned}$$

By using this formula, we obtain the following estimate

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \varphi_1(t) D_x^\gamma h_1^p \right\|_{L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2 dt &\leq C \left(\|D_x^\gamma u\|_{L^2(0, T; H^s(\mathbb{T}^3))}^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \varphi_1(t) F \langle v \rangle^p \right|_s^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 + \|u\|_{L^\infty(0, T; H^s(\mathbb{T}^3))}^2) \int_0^T \left| D_x^\gamma [\varphi_1(t) F \langle v \rangle^{p+1}] \right|_s^2 dt \right), \end{aligned}$$

since h_1^p involves a higher moment with respect to v . Therefore, coming back to (4.54), we are led to

$$\left\| \varphi_1(t) D_x^{\frac{1}{3}} h_1^p \right\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2 \leq C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0 \langle v \rangle^{p+2}|_s). \quad (4.56)$$

By the same calculation, we also get

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_1(t) D_x^{\frac{1}{3}} h_2^p \right\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2 + \left\| \varphi_1'(t) D_x^{\frac{1}{3}} g^p \right\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2 \\ \leq C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0 \langle v \rangle^{p+2}|_s). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Consequently, the basic energy estimate for (4.55) yields

$$\|\nabla_v \tilde{g}^p\|_{L^2(t, x, v)} \leq C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0 \langle v \rangle^{p+2}|_s).$$

With this estimate, together with (4.56) and (4.57), we can apply Theorem 2.1 of [16] again to equation (4.55). It allows to estimate $D_x^{\frac{1}{3}} \tilde{g}^p$ by means of h_1^p , h_2^p , g^p , \tilde{g}^p and $\nabla_v \tilde{g}^p$ and thus it finally leads to

$$\|D_x^{\frac{1}{3}} \tilde{g}^p\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0 \langle v \rangle^{p+2}|_s). \quad (4.58)$$

Let us consider

$$\varphi_2 \in C_c^\infty((0, T]), \quad \text{supp}(\varphi_2) \subset \text{supp}(\varphi_1) \subset \text{supp}(\phi).$$

Set

$$\hat{g}^p = \varphi_2(t) D_x^{\frac{2}{3}} g^p.$$

Then \hat{g}^p satisfies

$$\partial_t \hat{g}^p + v \cdot \nabla_x \hat{g}^p = \text{div}_v (\nabla_v \hat{g}^p + \varphi_2(t) D_x^{\frac{2}{3}} h_1^p) + \varphi_2(t) D_x^{\frac{2}{3}} h_2^p + \varphi_2'(t) D_x^{\frac{2}{3}} g^p.$$

Repeating the previous argument and using (4.58), we show that

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(t) D_x^{\frac{2}{3}} h_1^p\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2 &\leq \|D_x^{\frac{2}{3}} u\|_{L^2(0, T; H^s(\mathbb{R}^3))}^2 \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_2(t) F \langle v \rangle^p|_s^2 \\ &\quad + \left(\|u\|_{L^\infty(0, T; H^s(\mathbb{R}^3))}^2 + 1 \right) \int_0^T \left| D_x^{\frac{2}{3}} [\varphi_2(t) F \langle v \rangle^{p+1}] \right|_s^2 dt \\ &\leq C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0 \langle v \rangle^{p+3}|_s) \end{aligned}$$

holds. Therefore, we can prove

$$\|D_x^{\frac{1}{3}} \hat{g}^p\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq C(T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0 \langle v \rangle^{p+3}|_s).$$

In other words, for all $0 < t_* < T_* < T$, we have

$$\int_{t_*}^{T_*} |F(\tau) \langle v \rangle^p|_{s+1}^2 d\tau < C(t_*, T, \|u_0\|_{H^s}, |F_0 \langle v \rangle^{p+3}|_s). \quad (4.59)$$

Once this estimate of a higher full space derivative has been obtained, it becomes quite standard to justify (4.20), by using (4.52) and (4.59), and the parabolic structure with respect to the variable v of the Fokker-Planck equation (4.4). \blacklozenge

Remark 4.2.2. *As a final comment, let us mention that an alternative proof of the smoothness of the solution in Theorem 4.1.1 can be proposed. This proof is based on the averaging lemma, see [52] and [17], and does not use explicitly the hypoellipticity result of [16]. Let us sketch the proof, referring for details to [29] and [35] where this approach has been successfully used. Let us assume we already know that, for all $t > t_1 > 0$, $u(t)$ and $F(t)$ belong to $H^s(\mathbb{T}^3)$ and $H^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, respectively, with $s \geq 3$.*

- *Firstly, thanks to the diffusion term in (4.2), we see that, for all $t > t_1$, $u(t) \in H^{s+1}(\mathbb{T}^3)$.*
- *Secondly, thanks to the diffusion term with respect to v in (4.4), we get $\nabla_v F(t) \in H^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, still for $t > t_1$.*
- *Writing the equation satisfied by any derivative of order $\leq s$ of F , we can apply the averaging lemma (see [52] and [17]) and get that the averages with respect to the v variable of this derivative lie in $H^{1/6}(\mathbb{T}^3)$.*
- *Interpolating this result with the estimate of regularity that we obtained for the v variable, we get that $F(t) \in H^{s+1/20}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ for $t > t_1$.*
- *Iterating this result 20 times (it requires to write down the equation satisfied by translations of the derivatives of F of order less than s), we end up with $F(t) \in H^{s+1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, for all $t > t_1$ and, finally, that f is of class \mathcal{C}^∞ .*

Annexes

Les lemmes présentés dans l'annexe A sont tous utilisés dans le chapitre 3. L'algorithme de « remontée déterministe » décrit dans l'annexe B a été utilisé lors de l'implémentation numérique du schéma d'approximation présenté dans la section 2.3 du chapitre 2. Enfin, on trouvera dans l'annexe C quelques rappels concernant le régime de Poiseuille (utilisé dans la section 2.4 du chapitre 2) et la loi de Hess-Murray (permettant de comprendre l'origine du paramètre h) ainsi qu'une description du modèle A de Weibel et de ses propriétés hydrodynamiques dont nous nous sommes servis pour certaines expériences numériques (voir la section 2.4 du chapitre 2).

Annexe A

Lemmes utiles

A.1 Quelques Grönwalleries

Lemme A.1.1 (Grönwall discret) :

Soit $(a_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives et continues définies sur \mathbb{R}_+ . On fixe T un réel strictement positif et on suppose l'existence de trois constantes positives C_1 , C_2 et C_3 telles que, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, T]$:

$$a_{n+1}(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t a_n(s) ds + C_3 \int_0^t a_{n+1}(s) ds.$$

Alors on a l'existence d'une constante K telle que, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, T]$:

1. Si C_1 est nulle :

$$a_n(t) \leq \frac{K^n t^n}{n!}.$$

2. Si C_1 est non nulle :

$$a_n(t) \leq K e^{KT}.$$

Preuve : Le cas où $C_3 = 0$ se traite aisément par récurrence. Pour se ramener au cas général il suffit de dériver la fonction $e^{-C_3 t} \int_0^t a_{n+1}(s) ds$. ♦

Lemme A.1.2 (Grönwall continu) :

Soit $a(t)$, $b(t)$ deux fonctions continues et positives définies sur \mathbb{R}_+ . On suppose qu'on a l'inégalité suivante pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$a(t) \leq b(t) + C \int_0^t a(s) ds,$$

alors on a :

$$a(t) \leq b(t) + C \int_0^t b(s) e^{C(t-s)} ds.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \left\{ e^{-Ct} \int_0^t a(s) ds \right\}' &= e^{-Ct} \left[a(t) - C \int_0^t a(s) ds \right] \leq e^{-Ct} b(t) \\ &\Downarrow \\ \int_0^t a(s) ds &\leq \int_0^t e^{C(t-s)} b(s) ds, \end{aligned}$$

et le contrôle souhaité s'en déduit. \blacklozenge

Lemme A.1.3 (Grönwall continu surlinéaire) :

Soit $a(t)$ une fonction continue et positive définie sur \mathbb{R}_+ et soit α un réel strictement supérieur à 1. On suppose qu'on a une inégalité du type suivant pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$a(t) \leq A_0 + B_0 \int_0^t a(s)^\alpha ds. \quad (\text{A.1})$$

Alors il existe un réel $t_* > 0$, ne dépendant que de α et des constantes A_0 et B_0 , tel que pour $t \in [0, t_*]$ on ait :

$$a(t) \leq 2A_0 \exp(B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} t).$$

Preuve : Si a est bornée sur \mathbb{R}_+ par $2A_0$, la proposition est démontrée. Sinon on pose :

$$T_* = \inf\{t \geq 0; a(t) \geq 2A_0\},$$

qui est bien défini. Maintenant quelques faits :

- ❶ Comme a est continue on a nécessairement $a(T_*) \geq 2A_0$.
- ❷ Par définition, pour tout $t \leq T_*$ on a : $a(t) \leq 2A_0$.
- ❸ La fonction $t \mapsto A_0 \exp(B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} t)$ est **strictement** majorée par $2A_0$ pour

$$t < t_* := \frac{\ln(2)}{2^{\alpha-1} B_0 A_0^{\alpha-1}}.$$

D'après ❷ il suffit de prouver que $t_* \leq T_*$. Supposons qu'on ait le contraire.

❷, (A.1), puis le lemme de Grönwall précédent, fournissent successivement, pour $t < T_*$:

$$\begin{aligned} a(t) &\leq 2A_0 \\ &\Downarrow \\ a(t) &\leq A_0 + B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} \int_0^t a(s) ds \\ &\Downarrow \\ a(t) &\leq A_0 \exp(B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} t). \end{aligned}$$

Mais alors par continuité, d'après ❸ :

$$a(T_*) \leq A_0 \exp(B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} T_*) < 2A_0,$$

ce qui contredit ❶. \blacklozenge

A.2 L'équation de Vlasov, dans le cas régulier

On s'intéresse d'abord à l'équation de transport :

$$(\mathbf{Tr}) \begin{cases} \partial_t g + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g = 0, \\ g|_{t=0} = g_0, \end{cases}$$

où est $g(t, \mathbf{y})$ une fonction du temps ($t \in \mathbb{R}_+$) et de l'espace ($\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$) à valeurs réelles. $\mathbf{a}(t, \mathbf{y})$ est elle à valeur dans \mathbb{R}^d .

On fait l'hypothèse, notée \mathbf{H} par la suite, suivante :

$$\mathbf{a} \text{ et } g_0 \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ et } \mathbf{a} \text{ est globalement à croissance sous-linéaire en la deuxième variable, i.e. : } \|\mathbf{a}(t, \mathbf{y})\| \leq C + \|\mathbf{y}\|, \text{ uniformément en temps.}$$

L'hypothèse \mathbf{H} implique, par Cauchy-Lipshitz et le théorème de sortie des compacts, que, pour $s \geq 0$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{a}(t, \mathbf{Y}), \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{y}, \end{cases}$$

possède une unique solution, définie sur \mathbb{R}_+ tout entier. On note cette solution $\mathbf{Y}(t; \mathbf{y}, s)$ et on l'appelle caractéristique issue de \mathbf{y} au temps s .

On introduit les opérateurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{t,s} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \mathbf{y} &\longmapsto \mathbf{Y}(t; \mathbf{y}, s). \end{aligned}$$

Le théorème de régularité par rapport aux conditions initiales et l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz permettent d'obtenir que les opérateurs $\mathbf{T}_{t,s}$ sont des \mathcal{C}^1 -difféomorphismes de \mathbb{R}^d dans lui-même vérifiant :

$$\mathbf{T}_{t_1, t_3} = \mathbf{T}_{t_2, t_3} \circ \mathbf{T}_{t_1, t_2},$$

et bien sûr $\mathbf{T}_{s,s} = Id_{\mathbb{R}^d}$, pour tout $s \geq 0$.

Lemme A.2.1 :

Si l'hypothèse \mathbf{H} est vérifiée, alors le système \mathbf{Tr} possède une unique solution donnée par : $g(t, \mathbf{y}) = g_0(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{y}))$.

Preuve :

Supposons g solution.

On pose

$$\zeta = \mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{y}) \iff \mathbf{y} = \mathbf{T}_{0,t}(\zeta),$$

et

$$h(t, \zeta) := g(t, \mathbf{T}_{0,t}(\zeta)).$$

Un calcul immédiat montre que h ne dépend pas du temps et l'unicité est montrée. Pour l'existence, il suffit de constater que la fonction donnée est bien solution. \blacklozenge

Traitons maintenant le cas où un terme source intervient : $G(t, \mathbf{y})$.

$$(\mathbf{TrS}) \begin{cases} \partial_t g + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g = G, \\ g|_{t=0} = g_0. \end{cases}$$

Lemme A.2.2 :

Si l'hypothèse **H** est vérifiée et G de classe \mathcal{C}^1 , le système **TrS** possède une unique solution donnée par :

$$g(t, \mathbf{y}) = g_0(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{y})) + \int_0^t G(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{y})) ds.$$

Preuve :

Comme précédemment, supposons g solution.

On pose successivement :

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{y}) &:= g(t, \mathbf{y}) - \int_0^t G(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{y})) ds, \\ h(t, \zeta) &:= \varphi(t, \mathbf{T}_{0,t}(\zeta)). \end{aligned}$$

L'égalité des caractéristiques :

$$\mathbf{T}_{t_1, t_3} = \mathbf{T}_{t_2, t_3} \circ \mathbf{T}_{t_1, t_2},$$

implique :

$$h(t, \zeta) = g(t, \mathbf{T}_{0,t}(\zeta)) - \int_0^t G(s, \mathbf{T}_{0,s}(\zeta)) ds.$$

On voit encore une fois que, si g est solution de **TrS**, h ne dépend pas du temps et donc :

$$g(t, \mathbf{y}) = g_0(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{y})) + \int_0^t G(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{y})) ds,$$

ce qui fournit l'unicité et l'existence car la fonction donnée est bien sûr solution. \blacklozenge

A partir des lemmes précédents, on peut traiter le cas de l'équation de transport sous forme « conservative » :

$$\partial_t g + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}g) = 0.$$

En notant $b(t, \mathbf{y}) = \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})$, on se ramène au système :

$$(\mathbf{TrC}) \begin{cases} \partial_t g + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g + bg = 0, \\ g|_{t=0} = g_0. \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

Lemme A.2.3 :

Si l'hypothèse **H** est vérifiée et b de classe \mathcal{C}^1 , le système **TrC** possède une unique solution donnée par :

$$g(t, \mathbf{y}) = g_0(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{y})) \exp\left(-\int_0^t b(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{y})) ds\right).$$

Preuve :

Comme à l'accoutumée, on suppose g solution.

On pose

$$h(t, \mathbf{y}) := \int_0^t b(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{y})) ds.$$

D'après le lemme précédent, h est l'unique solution, de condition initiale nulle, de l'équation :

$$\partial_t h + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} h = b.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\partial_t[e^h g] &= e^h [\partial_t g + \partial_t h g], \\ \nabla_y[e^h g] &= e^h [\nabla_y g + g \nabla_y h] \\ &\downarrow \\ \partial_t[e^h g] + \mathbf{a} \cdot \nabla_y[e^h g] &= 0,\end{aligned}$$

et la fonction $e^h g$ est donc solution de l'équation de transport basique, initialisée à g_0 . Le premier lemme fournit donc :

$$g(t, y) = g_0(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{y})) \exp[-h(t, \mathbf{y})] = g_0(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{y})) \exp\left(-\int_0^t b(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{y})) ds\right),$$

qui est bien solution et le dernier lemme est démontré. \blacklozenge

On peut également obtenir les solutions dans le cas mixte « accélération/source »...

On revient maintenant à l'équation de Vlasov :

$$(\mathbf{V}) \begin{cases} \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\boldsymbol{\Gamma} f] = 0, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ représente l'accélération transmise aux particules.

En posant $\mathbf{y} := (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{a}(t, \mathbf{y}) := (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))$ et $b(t, \mathbf{y}) = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\Gamma})$ (on notera les caractéristiques comme précédemment), ce système peut s'écrire :

$$(\mathbf{V}) \begin{cases} \partial_t f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} f + b f = 0, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Une application directe du dernier lemme fournit :

Lemme A.2.4 :

Si f_0 , $\boldsymbol{\Gamma}$ et $\operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\Gamma})$ sont de classe \mathcal{C}^1 et $\boldsymbol{\Gamma}$ globalement à croissance sous-linéaire en espace et en vitesse, alors le système \mathbf{V} possède une unique solution donnée par :

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_0(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\Gamma})[s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] ds\right).$$

On obtient par ailleurs un contrôle du support de la solution sous la forme suivante :

Lemme A.2.5 :

On suppose que la donnée initiale est \mathcal{C}^1 , à support compact en vitesse, inclus dans $\mathbf{B}(0, R)$, et que l'accélération est donnée par $\boldsymbol{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}$, où $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.

Alors les hypothèses du lemme A.2.4 sont vérifiées et à tout temps t , la solution du système \mathbf{V} est à support compact (toujours en vitesse). Plus précisément celui-ci est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon $R + t\|\mathbf{u}\|_\infty$.

Preuve :

Les conditions de régularité et de croissance sont immédiates.

D'après l'expression de la solution obtenue dans les lemmes précédents, on voit que le support de f est inclus dans $\mathbf{T}_{0,t}(\mathbf{B}(0, R))$. Il suffit donc d'étudier l'évolution de la caractéristique en vitesse $\boldsymbol{\xi}(t)$, sachant qu'elle est partie d'une vitesse dans $\mathbf{B}(0, R)$. Or on a :

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{-t}\boldsymbol{\xi}(0) + \int_0^t e^{-(t-s)} \mathbf{u}(s, \mathbf{x}(s)) ds,$$

d'où l'on tire

$$\|\xi(t)\| \leq \|\xi(0)\| + t\|\mathbf{u}\|_\infty,$$

et le lemme est démontré. ♦

Remarque A.2.1 (Le cas périodique) : *Dans le cas où les données du problème (initialisation, accélération...) sont périodiques en l'une des variables, il en est de même pour les solutions fournies par les lemmes précédents, car la périodicité est directement transmise aux caractéristiques via leur définition.*

A.3 L'équation de Stokes incompressible

On se place dans \mathbb{R}^d . La notation $c_{\mathbf{n}}(f)$ désigne le \mathbf{n} -ième coefficient de Fourier de f , fonction scalaire de d variables. On notera éventuellement les coefficients $\mathbf{c}_{\mathbf{n}}(\mathbf{g})$ dans le cas d'une fonction \mathbf{g} à valeurs vectorielles. On a le résultat (classique) suivant :

Lemme A.3.1 :

Soit $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d)$ et $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$.

Le problème de Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} p = \mathbf{g} & (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^d, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^d, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d, \end{cases}$$

admet un couple de solutions $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d)$.

Preuve :

Quitte à redimensionner le domaine, on peut supposer que l'on traite d'éléments $2\pi\mathbb{Z}^d$ -périodiques. On note les vecteurs :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u^1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ u^d(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g^1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ g^d(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Au vu des hypothèses on a pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, en décomposant en série de Fourier :

$$g^j(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}}(g^j)(t) e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}.$$

En écrivant la définition :

$$c_{\mathbf{n}}(g^j)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} g^j(t, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

on voit que les coefficients $c_{\mathbf{n}}(g^j)$ sont des fonctions \mathcal{C}^∞ du temps. Elles, et leurs dérivées, sont uniformément bornées en cette variable et la suite de leurs normes infinies est à décroissance rapide (par rapport au vecteur-index \mathbf{n}). On remarque que cette dernière condition est une CNS à la régularité infinie d'une série de Fourier. C'est ce critère que l'on va vérifier sur le couple solution (\mathbf{u}, p) que l'on construit ci-après. On cherche une solution sous la forme :

$$\begin{aligned} u^j(t, \mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \alpha_{\mathbf{n}}^j(t) e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}, \\ p(t, \mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \beta_{\mathbf{n}}(t) e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

L'équation de Stokes impose aux coefficients de vérifier :

$$\dot{\alpha}_{\mathbf{n}}^j(t) + |\mathbf{n}|^2 \alpha_{\mathbf{n}}^j(t) + i\beta_{\mathbf{n}}(t)n_j = c_{\mathbf{n}}(g^j)(t).$$

Mais en appliquant la divergence à l'équation de Stokes, on voit que le laplacien de la pression est explicitement donné par la force \mathbf{g} . Ainsi en passant en Fourier :

$$\beta_{\mathbf{n}}(t) = i \frac{\mathbf{c}_{\mathbf{n}}(\mathbf{g})(t) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2},$$

pour $\mathbf{n} \neq 0$ naturellement. Le coefficient $\beta_{\mathbf{0}}$ peut être fixé arbitrairement (il n'y a que le gradient de la pression qui intervient dans l'équation). En particulier, on peut le fixer égal à 0.

À ce stade on peut déjà voir que la pression sera bien infiniment dérivable en temps et en espace, d'après la CNS donnée plus haut et l'hypothèse faite sur \mathbf{g} .

On a par ailleurs explicitement la forme des coefficients de \mathbf{u} :

$$\alpha_{\mathbf{n}}^j(t) = \underbrace{c_{\mathbf{n}}(u_0^j)}_{\textcircled{1}} + \int_0^t e^{-|\mathbf{n}|^2(t-s)} \underbrace{\left[c_{\mathbf{n}}(g^j)(s) + n_j \frac{\mathbf{c}_{\mathbf{n}}(\mathbf{g})(s) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \right]}_{\textcircled{2}} ds.$$

① est à décroissance rapide par hypothèse sur la condition initiale (et ne dépend pas du temps).

② est à décroissance rapide, indépendamment du temps par l'hypothèse réalisée sur la force \mathbf{g} .

On obtient ainsi aisément que les coefficients $\alpha_{\mathbf{n}}^j(t)$ sont bornés en temps et que la suite de leur normes infinies est à décroissance rapide. Pour obtenir le même résultat sur les dérivées, le mieux est de retourner à l'équation différentielle définissant $\alpha_{\mathbf{n}}^j(t)$ et procéder par récurrence...

En particulier toutes ces suites de coefficients sont, à t fixé, dans $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Elles définissent bien une vitesse et une pression qui sont clairement \mathcal{C}^∞ en temps et en espace et solutions du problème. ♦

Annexe B

Localisation d'un point dans un maillage

B.1 Position du problème

L'utilisation d'une méthode particulière interagissant avec la résolution éléments finis d'un fluide nécessite la localisation des particules numériques dans le maillage, à chaque étape. Ceci est d'autant plus vrai lorsque l'on considère un domaine de résolution mobile. Nous allons présenter une liste non exhaustive d'algorithmes de localisation, comprenant l'algorithme utilisé lors de l'implémentation numérique mentionnée au chapitre 2. Dans un souci de simplification, notre description se limite au problème de localisation en dimension 2, pour un maillage composé de triangles. Le cas de la dimension 3, pour un maillage tétraédrique, est analogue.

Dans la suite, on s'intéresse à un domaine Δ convexe en deux dimensions, et on suppose connu un maillage de ce domaine composé uniquement de triangles. On considère un point M de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ contenu dans Δ (voir fig. B.1). On veut déterminer dans quelle maille se trouve le point M .

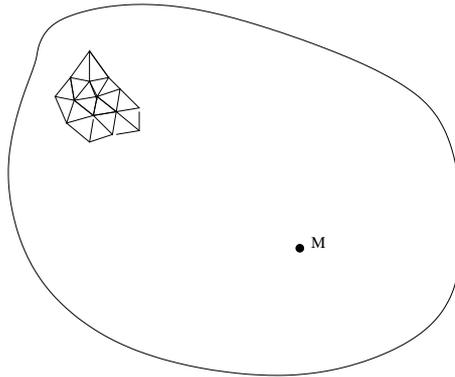


FIG. B.1 – Localisation de M dans le maillage

Critère d'appartenance à un triangle

La première question est évidemment d'obtenir un critère pour déterminer si un point est contenu dans un triangle $\mathcal{K} = (ABC)$. On suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique. Le point M est

contenu dans le triangle \mathcal{K} si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \delta_1 = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \geq 0, \\ \delta_2 = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \geq 0, \\ \delta_3 = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \geq 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

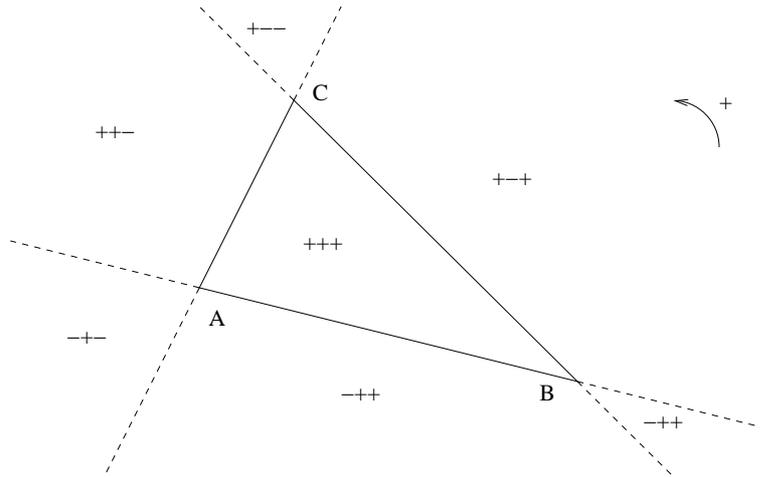


FIG. B.2 – Signes des (δ_i) suivant la position de M

Dans la figure B.2, on donne les signes des déterminants suivant la position de M dans le plan. Par exemple, si M est dans le même demi-plan que A par rapport à la droite (BC) , alors $\delta_1 \geq 0$, avec égalité si $M \in (BC)$.

Remarque : le critère est difficile à mettre en application numériquement. Il peut être relaxé en $\delta_i \geq -\varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est de l'ordre de la précision machine, par exemple.

B.2 Algorithmes de localisation

La solution évidente consiste à parcourir toutes les mailles de façon systématique, jusqu'à trouver celle qui contient M , en calculant pour chaque triangle du maillage, les trois déterminants associés. Pour un très grand nombre de mailles, cette solution est extrêmement coûteuse (algorithme quadratique), on est donc amené à en proposer d'autres. L'algorithme suivant est proposé dans [63], entre autres.

B.2.1 Algorithme de remontée déterministe

Il s'agit de l'algorithme que nous avons utilisé lors de l'implémentation du schéma numérique décrit dans le chapitre 2.

On part d'une maille quelconque $\mathcal{K}^1 = (A^1B^1C^1)$, et on calcule les trois déterminants associés (δ_i^1) . Si $M \in \mathcal{K}^1$, c'est-à-dire si les critères (B.1) sont vérifiés, on s'arrête. Sinon, comment peut-on choisir la maille suivante ?

Dans le triplet $(\delta_1^1, \delta_2^1, \delta_3^1)$, on peut prendre le premier i tel que $\delta_i^1 < 0$ (ou inférieur à $-\varepsilon$), et on passe à la maille \mathcal{K}^2 voisine de \mathcal{K}^1 par son arête numéro i . En itérant le processus, on aboutit à la maille contenant le point M , dans la plupart des cas. Mais malheureusement, le processus itératif ne marche pas systématiquement. On a ainsi le contre-exemple suivant, que l'on peut trouver dans [50].

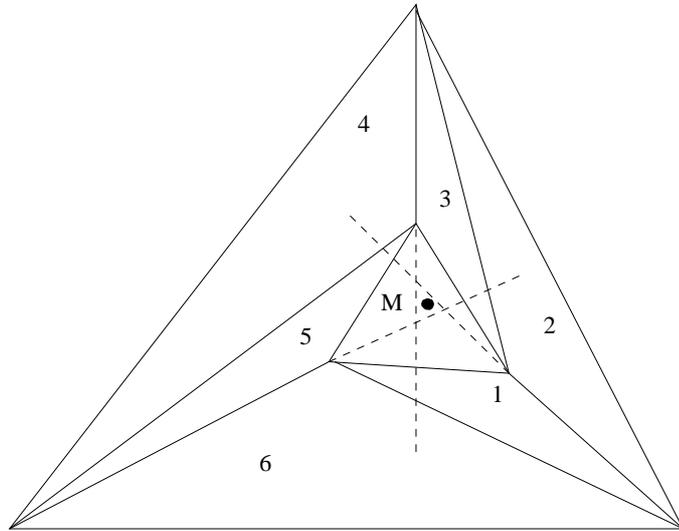


FIG. B.3 – Parcours cyclique

En utilisant le parcours orienté décrit dans la figure B.3 pour localiser le point M , on constate qu'on peut effectivement ne jamais rentrer dans la maille centrale du grand triangle, contenant M .

On peut proposer deux solutions pour éviter le problème.

B.2.2 Méthodes de couleurs

On part d'une maille quelconque *que l'on colorie* (i.e. à laquelle on attribue un marqueur numérique spécifique), et on suit le précédent algorithme en y ajoutant le fait que chaque maille par laquelle on passe est coloriée. Ainsi, si l'algorithme fait repasser par une maille coloriée, on empêche ce repassage en forçant l'usage d'un autre parcours (éventuellement de façon récursive). Cette méthode peut malheureusement s'avérer coûteuse.

B.2.3 Algorithme de remontée aléatoire

On part d'une maille quelconque, et on calcule les trois déterminants associés. Si deux au moins parmi eux sont négatifs, on choisit *aléatoirement* l'arête qui mène à la maille voisine. On peut prouver que cet algorithme converge (presque sûrement), et qu'il est quasi-linéaire (en coût).

B.3 Généralisations

B.3.1 Domaine non convexe

L'algorithme de remontée aléatoire ne marche pas si on choisit mal la maille initiale, comme le suggère la figure B.4. On utilise la méthode de couleurs pour lever la difficulté : on colorie chaque maille traversée jusqu'à ce qu'on ne soit plus en mesure de poursuivre. Ensuite, on choisit une nouvelle maille initiale non coloriée, on utilise l'algorithme jusqu'à arriver à une nouvelle impossibilité, une maille précédemment coloriée ou la bonne maille. Dans les deux premiers cas, on repart d'une nouvelle maille non coloriée.

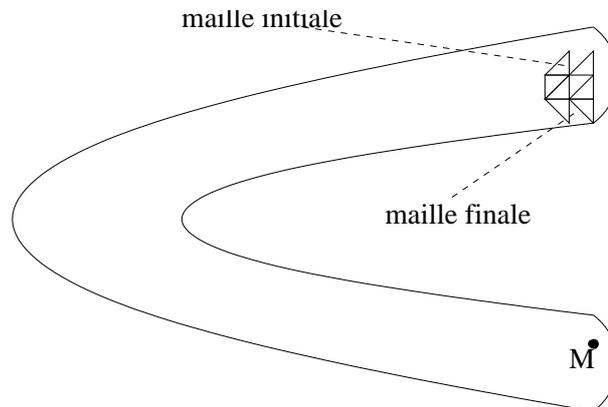


FIG. B.4 – Domaine maillé non convexe

B.4 Utilisation d'une grille de fond

Le choix arbitraire de la maille de départ pour l'algorithme de recherche peut engendrer un coût important suivant le nombre de cellules dans le maillage. Pour pallier ce problème, on peut utiliser une grille de fond régulière qui permet de réduire significativement le coût de calcul.

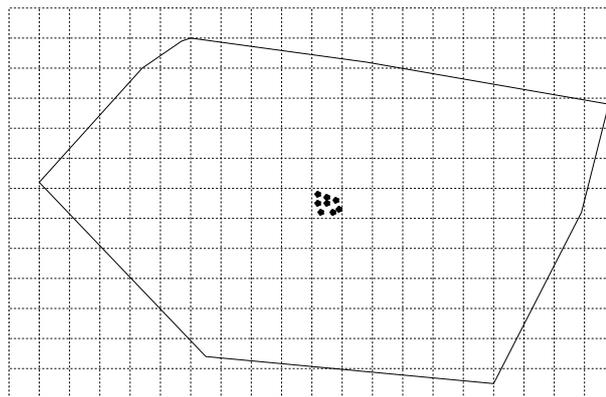


FIG. B.5 – Grille de fond

On considère une grille régulière relativement grossière que l'on plaque sur le domaine préalablement maillé finement en triangles. Comme on connaît les coordonnées de M , on trouve aisément dans quelle cellule de la grille grossière il se trouve. Il est ensuite immédiat de déterminer quels sont les sommets du maillage fin contenus dans la cellule de la grille grossière. On peut dès lors entamer la procédure de localisation comme précédemment en utilisant l'un des algorithmes de remontée.

Annexe C

Écoulement dans une structure branchée : l'origine du paramètre h

C.1 Le régime de Hagen-Poiseuille

En pratique, si l'on étudie un écoulement laminaire dans un cylindre auquel on impose une différence de pression fixée entre les deux extrémités (P_0 et P_1), on observe une répartition des vitesses dirigée suivant l'axe, invariante par translation (resp. rotation) le long de (resp. par rapport à) ce dernier, et de profil parabolique dans tout plan de coupe le contenant, l'orientation étant bien sûr celle des pressions décroissantes.

La loi de Hagen-Poiseuille, initialement formulée pour certains écoulements sanguins, est la formalisation de la précédente remarque ; elle exprime la vitesse d'un fluide de viscosité η , dans un cylindre de longueur ℓ (orienté selon z), rayon R , soumis à une différence de pression $\Delta P = P|_{z=\ell} - P|_{z=0}$, en régime permanent laminaire :

$$\mathbf{u}(t, r, \theta, z) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{\ell} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \mathbf{n}_z, \quad (\text{C.1})$$

en coordonnées cylindriques.

Pour comprendre d'où provient cette équation, on peut raisonner à partir du principe fondamental de la dynamique et de l'interprétation physique de la viscosité et établir un bilan des forces exercées sur un « disque de fluide élémentaire ». Une autre manière est de l'interpréter comme une solution particulière du système (1.1)–(1.2) (sans terme source). En effet, on peut facilement prouver que ce système possède une unique solution stationnaire à symétrie cylindrique, indépendante de z moyennant une hypothèse de régularité (typiquement $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^3$) et celle-ci correspond à la loi de Hagen-Poiseuille.

La simplicité de cette expression est d'autant plus attrayante que l'on observe fréquemment, dans le cas d'un écoulement laminaire, l'établissement d'un régime de Poiseuille. Elle permet de plus de définir une notion de **résistance** associée à la géométrie considérée.

En effet, si l'on suppose que $\Delta P \leq 0$, de telle sorte que l'écoulement soit orienté selon les z croissant, on définit le flux sortant de notre cylindre par :

$$\Phi := \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_z,$$

où l'on a noté S la section sortante $z = \ell$ du cylindre. Ce flux peut être calculé explicitement grâce à la formule (C.1) :

$$\Phi = -\frac{\pi R^4}{8\ell\eta} \Delta P.$$

Cette relation peut également s'écrire :

$$P_{|z=0} - P_{|z=\ell} = R_h \Phi.$$

Ceci n'est pas sans rappeler la *loi d'Ohm* des dipôles électriques : le coefficient R_h est appelé **résistance hydrodynamique** du cylindre. Ce paramètre ne dépend que de la viscosité du fluide considéré et des propriétés géométriques du conduit. Les règles d'additivité des résistances s'appliquent à ce type d'écoulement selon que l'on considère un branchement en série (deux conduits l'un après l'autre) ou en parallèle (deux conduits reliés par leurs extrémités).

C.2 La loi de Hess-Murray

Considérons un écoulement laminaire dans un arbre fictif dichotomique et auto-similaire. En hydrodynamique, la loi de Hess-Murray exprime une **condition d'optimalité** de répartition du flux. Cette loi a été énoncée initialement par Walter Hess en 1913, dans le cadre des écoulements sanguins. Son principe consiste à maximiser la distribution (et donc à minimiser la résistance hydrodynamique) en minimisant les coûts : des vaisseaux sanguins trop larges nécessitent plus de tissu pour leurs surfaces et occupent plus de place. Hess a prédit à partir de cela que la taille des vaisseaux sanguins doit diminuer d'un facteur constant h à chaque génération, avec $h = 2^{-1/3} \approx 0.79$ [103]. Une vingtaine d'années plus tard, en 1926, Cecil D. Murray, toujours pour les écoulements sanguins, aboutit également à ce facteur d'homothétie optimal en émettant l'hypothèse selon laquelle les sections et les angles des ramifications sont tels que la circulation qui s'y effectue obéit à un « principe de moindre travail » [86].

Remarque C.2.1 : L'intervention du facteur h dans les mesures de Weibel et. al. sur le poumon humain apparaît tout de suite moins mystérieuse, puisque celui-ci correspond à une certaine condition d'optimalité. Il est cependant intéressant de se demander pourquoi le facteur d'homothétie d'un poumon humain est légèrement supérieur à h , au niveau de l'arbre trachéobronchique intermédiaire. En fait, du point de vue de la sélection naturelle, cet écart peut s'interpréter comme une marge de sécurité, comme l'expliquent Mauroy et. al. dans [81].

C.3 Un poumon idéal : le modèle A de Weibel

Le modèle A de poumon de Weibel est celui d'un poumon dichotomique, auto-similaire de paramètre $h = 2^{-1/3} \approx 0.79$. Les paramètres géométriques des différents conduits sont donc tous donnés par la première génération, de rayon R_0 et de longueur $\ell_0 = 6R_0$ [101] :

$$R_i = h^i R_0, \quad \ell_i = h^i \ell_0$$

Par ailleurs, l'incompressibilité implique, en utilisant la symétrie des intersections et en notant Φ_i le flux sortant d'un conduit de la génération i :

$$\Phi_i = 2\Phi_{i+1}. \tag{C.2}$$

On introduit la *vitesse moyenne* dans une section de rayon R :

$$u := \frac{\Phi}{\pi R^2},$$

et (C.2) implique :

$$u_{i+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_i}{R_{i+1}} \right)^2 \times u_i = \frac{1}{2h^2} u_i.$$

On obtient donc l'expression générale de la vitesse moyenne à la i -ième génération :

$$u_i = \frac{1}{(2h^2)^i} u_0.$$

En définissant le temps de parcours moyen comme le rapport entre la vitesse moyenne et la longueur du conduit, on a :

$$t_i = \frac{\ell_i}{u_i} = h^i \times (2h^2)^i \frac{\ell_0}{u_0} = t_0,$$

puisque $2h^3 = 1$! On s'aperçoit donc que le temps de parcours d'un conduit est indépendant de la génération considérée.

Bien que cet arbre optimal ne corresponde pas exactement à la réalité physique, et ceci indépendamment du choix du paramètre h (on a supposé avoir un régime de Poiseuille dès le début de l'arbre et on a négligé l'influence des intersections), il nous a servi de paradigme lors de nos simulations numériques, pour le choix des rayons et vitesses d'entrées des aérosols.

Bibliographie

- [1] S. Abboud, O. Barnea, A. Guber, N. Narkiss, and I. Bruderman. Maximum expiratory flow-volume curve : mathematical model and experimental results. *Medical Engineering and Physics*, 17(5) :332–336, 1995.
- [2] P. Achim. *Simulations de collisions, coalescence et rupture de gouttes par une approche lagrangienne : application aux moteurs à propergol solide*. PhD thesis, Faculté des sciences de l’université de Rouen, 1999.
- [3] J.-M. Aiache and S. Aiache. Les aérosols du XIX^e au XXI^e siècle. *Journal de Pharmacie de Belgique*, 60(4) :117–128, 2005.
- [4] G. Allaire. *Analyse Numérique et Optimisation*. Éditions de l’École Polytechnique, 2005.
- [5] A.A. Amsden. KIVA-3 : A KIVA program with Block-Structured Mesh for Complex Geometries. Technical report, Los Alamos National Laboratory, 1992.
- [6] A.A. Amsden, P.J. O’Rourke, and T.D. Butler. KIVA-II, a computer program for chemical reactive flows with spray. Technical report, Los Alamos National Laboratory, 1989.
- [7] O. Anoshchenko and A. Boutet de Monvel-Berthier. The existence of the global generalized solution of the system of equations describing suspension motion. *Math. Methods Appl. Sci.*, 20(6) :495–519, 1997.
- [8] B. Asgharian. A model of deposition of hygroscopic particles in the human lung. *Aerosol Science and Technology*, 38(9) :938–947, 2004.
- [9] I. Balásházy and W. Hofmann. Deposition of aerosols in asymmetric airway bifurcations. *Journal of Aerosol Science*, 26(2) :273–292, 1995.
- [10] I. Balásházy, M. Moustafa, W. Hofmann, R. Szoke, A. El-Hussein, and A.R. Ahmed. Simulation of fiber deposition in bronchial airways. *Inhalation toxicology*, 17(13) :717–727, 2005.
- [11] C. Baranger. *Modélisation, étude mathématique et simulation des collisions dans les fluides complexes*. PhD thesis, ENS Cachan, France, 2004.
- [12] C. Baranger, L. Boudin, P.-E. Jabin, and S. Mancini. A modeling of biospray for the upper airways. In *CEMRACS 2004 — Mathematics and applications to biology and medicine*, volume 14 of *ESAIM Proc.*, pages 41–47 (electronic). EDP Sci., Les Ulis, 2005.
- [13] C. Baranger and L. Desvillettes. Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays : the local-in-time, classical solutions. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 3(1) :1–26, 2006.
- [14] W. Benish, P. Harper, J. Ward, and J. Popovich Jr. A mathematical model of lung static pressure-volume relationships : comparison of clinically derived parameters of elasticity. *Henry Ford Hospital medical journal*, 36(1) :44, 1988.
- [15] J.M. Bogaard, S.E. Overbeek, A.F. Verbraak, C. Vons, H.T. Folgering, T.W. Van Der Mark, C.M. Roos, and P.J. Sterk. Pressure-volume analysis of the lung with an exponential and linear-exponential model in asthma and COPD. Dutch CNSLD Study Group. *European Respiratory Journal*, 8(9) :1525, 1995.

-
- [16] F. Bouchut. Hypocoelliptic regularity in kinetic equations. *J. Math. Pures Appl.*, 81(11) :1135–1159, 2002.
- [17] F. Bouchut and L. Desvillettes. Averaging lemmas without time Fourier transform and application to discretized kinetic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 129(1) :19–36, 1999.
- [18] L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont, and A. Moussa. Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations. *Differential Integral Equations*, 22(11-12) :1247–1271, 2009.
- [19] L. Boudin, A. Devys, C. Grandmont, B. Grec, and D. Yakoubi. Aerosol retroaction on the air in a two-dimensional branch. Technical report, 2008.
- [20] L. Boudin and L. Weynans. Spray impingement on a wall in the context of the upper airways. In *Mathematical and numerical modelling of the human lung*, volume 23 of *ESAIM Proc.*, pages 1–9 (electronic). EDP Sci., Les Ulis, 2008.
- [21] J.K. Briant, D.D. Frank, A.C. James, and L.L. Eyler. Numerical simulation of aerosol particle transport by oscillating flow in respiratory airways. *Annals of biomedical engineering*, 20(6) :573–581, 1992.
- [22] J.A. Carrillo and T. Goudon. Stability and asymptotic analysis of a fluid-particle interaction model. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(7-9) :1349–1379, 2006.
- [23] J.R. Cebral and R.M. Summers. Tracheal and central bronchial aerodynamics using virtual bronchoscopy and computational fluid dynamics. *IEEE transactions on medical imaging*, 23(8) :1021–1033, 2004.
- [24] C. Cercignani. *The Boltzmann equation and its applications*, volume 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [25] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. *The mathematical theory of dilute gases*, volume 106 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [26] H.K. Chan, S. Eberl, E. Daviskas, C. Constable, and I. Young. Changes in lung deposition of aerosols due to hygroscopic growth : a fast SPECT study. *Journal of Aerosol Medicine*, 15(3) :307–311, 2002.
- [27] S. Chapman, T.G. Cowling, and D. Park. The mathematical theory of non-uniform gases. *American Journal of Physics*, 30 :389, 1962.
- [28] J.-Y. Chemin. *Théorie des équations d'évolutions. Cours de Master 2*. Université Paris-VI, 2008.
- [29] Y. Chen, L. Desvillettes, and L. He. Smoothing effects for classical solutions of the full Landau equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 193(1) :21–55, 2009.
- [30] R. Clift, J.R. Grace, and M.E. Weber. *Bubbles, drops and particles*. Academic Press, 1978.
- [31] G.-H. Cottet and P.-A. Raviart. On particle-in-cell methods for the Vlasov-Poisson equations. *Transport Theory Statist. Phys.*, 15(1-2) :1–31, 1986.
- [32] A. Decoene. *Modèle hydrostatique pour les écoulements à surface libre tridimensionnels et schémas numériques*. PhD thesis, Université Paris VI, France, 2006.
- [33] P. Degond and S. Mas-Gallic. The weighted particle method for convection-diffusion equations. I. The case of an isotropic viscosity. *Math. Comp.*, 53(188) :485–507, 1989.
- [34] P. Degond and S. Mas-Gallic. The weighted particle method for convection-diffusion equations. II. The anisotropic case. *Math. Comp.*, 53(188) :509–525, 1989.
- [35] L. Desvillettes and F. Golse. On a model Boltzmann equation without angular cutoff. *Differential Integral Equations*, 13(4-6) :567–594, 2000.
- [36] L. Desvillettes and C. Villani. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : the linear Fokker-Planck equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(1) :1–42, 2001.
- [37] K. Domelevo and J.-M. Roquejoffre. Existence and stability of travelling wave solutions in a kinetic model of two-phase flows. *Comm. Partial Differential Equations*, 24(1-2) :61–108, 1999.

-
- [38] J. Donea. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods. *Computational methods for transient analysis*. Amsterdam, North-Holland, pages 473–516, 1983.
- [39] J. Droniou. Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, 2001.
- [40] G. Dufour. *Modélisation multi-fluide Eulérienne pour les écoulements diphasiques à inclusions dispersées*. PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse III, France, 2005.
- [41] T. Duparque. *Étude par imagerie scintigraphique des dépôts d'aérosols dans un circuit de respirateur*. Mémoire de Master 2, Unité INSERM 618, Faculté de Médecine de Tours, 2007.
- [42] H. Fakir, W. Hofmann, and I. Aubineau-Laniece. Microdosimetry of radon progeny alpha particles in bronchial airway bifurcations. *Radiation protection dosimetry*, 117(4) :382–394, 2005.
- [43] C. Fetita, S. Mancini, D. Perchet, F. Prêteux, M. Thiriet, and L. Vial. An image-based computational model of oscillatory flow in the proximal part of tracheobronchial trees. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 8(4) :279–293, 2005.
- [44] M. Filoche, M. Felici, and B. Sapoval. Renormalized random walk study of oxygen absorption in the human lung. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 357(1) :27–35, 2005.
- [45] D. Fontana, M. Vanni, and G. Baldi. Fluid dynamics modeling of particulate deposition in the lungs. *International journal of artificial organs*, 28(7) :667–677, 2005.
- [46] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(5) :663–700, 2004.
- [47] P. Gehr and J. Heyder. *Particle-lung interactions*. Informa Healthcare, 2000.
- [48] T. Gemci, T.E. Corcoran, and N. Chigier. A numerical and experimental study of spray dynamics in a simple throat model. *Aerosol Sci. Technol.*, 36 :18–38, 2002.
- [49] T. Gemci, T.E. Corcoran, K. Yakut, B. Shortall, and N. Chigier. Spray dynamics and deposition of inhaled medications in the throat. In *Proceedings of ILASS-Europe*, 2001.
- [50] P.-L. George and H. Borouchaki. *Triangulation de Delaunay et maillage - applications aux éléments finis*. Hermès Science Publications, 1998.
- [51] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [52] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, and R. Sentis. Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *J. Funct. Anal.*, 76(1) :110–125, 1988.
- [53] T. Goudon. Asymptotic problems for a kinetic model of two-phase flow. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 131(6) :1371–1384, 2001.
- [54] T. Goudon, L. He, A. Moussa, and P. Zhang. The Navier-Stokes/Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium. *Preprint #07 du CMLA, ENS Cachan*, 2009.
- [55] T. Goudon, P.-E. Jabin, and A. Vasseur. Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. I. Light particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6) :1495–1515, 2004.
- [56] T. Goudon, P.-E. Jabin, and A. Vasseur. Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. II. Fine particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6) :1517–1536, 2004.
- [57] C. Grandmont, Y. Maday, and B. Maury. A multiscale/multimodel approach of the respiration tree. In *New trends in continuum mechanics*, volume 3 of *Theta Ser. Adv. Math.*, pages 147–157. Theta, Bucharest, 2005.
- [58] Y. Guo. The Landau equation in a periodic box. *Comm. Math. Phys.*, 231(3) :391–434, 2002.
- [59] Y. Guo. The Vlasov-Poisson-Boltzmann system near Maxwellians. *Comm. Pure Appl. Math.*, 55(9) :1104–1135, 2002.
- [60] É. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. CNRS Éditions, 2001.
- [61] K. Hamdache. Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 15(1) :51–74, 1998.

-
- [62] L. He and Z. Zhang. Regularity of the solutions for micro-macro models near equilibrium. *J. Math. Anal. Appl.*, 348(1) :419–432, 2008.
- [63] F. Hecht. *Maillage 2d, 3d, adaptation. Notes de cours de Master 2*. Université Paris-VI, 2004.
- [64] F.S. Henry, J.P. Butler, and A. Tsuda. Kinematically irreversible acinar flow : a departure from classical dispersive aerosol transport theories. *Journal of Applied Physiology*, 92(2) :835–845, 2002.
- [65] W. Hofmann, I. Balásházy, and T. Heistracher. The relationship between secondary flows and particle deposition patterns in airway bifurcations. *Aerosol Science and Technology*, 35(6) :958–968, 2001.
- [66] T.J.R. Hughes, W.K. Liu, and T.K. Zimmermann. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. In *Interdisciplinary Finite Element Analysis*, page 179. College of Engineering and School of Civil & Environmental Engineering of Cornell University, 1981.
- [67] J.-P. Kahane. Le mouvement brownien. *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XIX^e Siècle*, 1996.
- [68] F. Lagoutière, N. Seguin, and T. Takahashi. A simple 1D model of inviscid fluid-solid interaction. *J. Differential Equations*, 245(11) :3503–3544, 2008.
- [69] P. Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *Compte-rendus de l'académie de sciences*, 146 :530–532, 1908.
- [70] S. Ley, D. Mayer, B.S. Brook, E.J. Van Beek, C.P. Heussel, D. Rinck, R. Hose, K. Markstaller, and H.U. Kauczor. Radiological imaging as the basis for a simulation software of ventilation in the tracheo-bronchial tree. *European radiology*, 12(9) :2218, 2002.
- [71] F. Lin, P. Zhang, and Z. Zhang. On the global existence of smooth solution to the 2-d FENE dumbbell model. *Commun. Math. Phys.*, 277(2) :531–553, 2008.
- [72] F.-H. Lin, C. Liu, and P. Zhang. On a micro-macro model for polymeric fluids near equilibrium. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(6) :838–866, 2007.
- [73] F.-H. Lin and P. Zhang. The FENE dumbbell model near equilibrium. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 24(4) :529–538, 2008.
- [74] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [75] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, volume 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Incompressible models, Oxford Science Publications.
- [76] T.B. Martonen, Z. Zhang, G. Yu, and C.J. Musante. Three-dimensional computer modeling of the human upper respiratory tract. *Cell biochemistry and biophysics*, 35(3) :255–261, 2001.
- [77] S. Mas-Gallic, M. Louaked, and O. Pironneau. A particle-in-cell method for the 2-D compressible Euler equations. In *Vortex flows and related numerical methods (Grenoble, 1992)*, volume 395 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 373–387. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [78] J. Mathiaud. *Étude de systèmes de type gaz-particules*. PhD thesis, ENS Cachan, France, 2006.
- [79] B. Mauroy. *Hydrodynamique dans le poumon, relations entre flux et géométries*. PhD thesis, ENS Cachan, France, 2004.
- [80] B. Mauroy, M. Filoche, J.S. Andrade Jr, and B. Sapoval. Interplay between geometry and flow distribution in an airway tree. *Physical review letters*, 90(14) :148101, 2003.
- [81] B. Mauroy, M. Filoche, E.R. Weibel, and B. Sapoval. The optimal bronchial tree is dangerous. *Nature*, 427 :633–636, 2004.
- [82] A. Mellet and A. Vasseur. Global weak solutions for a Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes system of equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(7) :1039–1063, 2007.
- [83] A. Mellet and A. Vasseur. Asymptotic analysis for a Vlasov-Fokker-Planck/compressible Navier-Stokes system of equations. *Comm. Math. Phys.*, 281(3) :573–596, 2008.

-
- [84] C. Mouhot and L. Neumann. Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus. *Nonlinearity*, 19(4) :969–998, 2006.
- [85] C.-D. Munz, R. Schneider, E. Sonnendrücker, E. Stein, U. Voss, and T. Westermann. A finite-volume particle-in-cell method for the numerical treatment of Maxwell-Lorentz equations on boundary-fitted meshes. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 44(4) :461–487, 1999.
- [86] C.D. Murray. The physiological principle of minimum work. I. The vascular system and the cost of blood volume. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 12(3) :207–214, 1926.
- [87] F. Nobile. *Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with applications to haemodynamics*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2001.
- [88] P. J. O’Rourke. *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*. PhD thesis, Los Alamos National Laboratory, 1981.
- [89] P.J. O’Rourke, J.U. Brackbill, and B. Larrouturou. On particle-grid interpolation and calculating chemistry in particle-in-cell methods. *J. Comput. Phys.*, 109(1) :37–52, 1993.
- [90] J. Simon. Démonstration constructive d’un théorème de G. de Rham. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 316(11) :1167–1172, 1993.
- [91] A. Soualah-Alila. *Modélisation mathématique et numérique du poumon humain*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, France, 2008.
- [92] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer-Verlag, 1991.
- [93] L. Tartar. *Topics in nonlinear analysis*, volume 13 of *Publications Mathématiques d’Orsay 78*. Université de Paris-Sud Département de Mathématique, Orsay, 1978.
- [94] L. Tartar. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, volume 3 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer, Berlin, 2007.
- [95] R. Temam. *Navier-Stokes equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1984. Theory and numerical analysis, With an appendix by F. Thomasset.
- [96] A. Tsuda, J.P. Butler, and J.J. Fredberg. Effects of alveolated duct structure on aerosol kinetics. II. Gravitational sedimentation and inertial impaction. *Journal of Applied Physiology*, 76(6) :2510–2516, 1994.
- [97] A. Tsuda, F. S. Henry, and J.P. Butler. Chaotic mixing of alveolated duct flow in rhythmically expanding pulmonary acinus. *Journal of Applied Physiology*, 79(3) :1055–1063, 1995.
- [98] J.G. Venegas, R.S. Harris, and B.A. Simon. A comprehensive equation for the pulmonary pressure-volume curve. *Journal of Applied Physiology*, 84(1) :389–395, 1998.
- [99] C. Villani. *Limite de champ moyen*. *Cours de DEA*. ENS Lyon, 2001-2002.
- [100] C. Villani. *Hypocoercivity*. À paraître dans *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2008.
- [101] E.R. Weibel. Morphometry of the human lung. *Anesthesiology*, 26(3) :367, 1965.
- [102] E.R. Weibel. *The pathway for oxygen : structure and function in the mammalian respiratory system*. Harvard Univ Press, 1984.
- [103] E.R. Weibel. *Symmorphosis : on form and function in shaping life*. Harvard Univ Press, 2000.
- [104] E.R. Weibel. Beau poumon–bon poumon? *Revue des Maladies Respiratoires*, 21 :665–71, 2004.
- [105] T. Westermann. Particle-in-cell simulations with moving boundaries—adaptive mesh generation. *J. Comput. Phys.*, 114(2) :161–175, 1994.
- [106] F. A. Williams. *Combustion theory*. Benjamin Cummings, second edition edition, 1985.
- [107] Z. Zhang, C. Kleinstreuer, and C.S. Kim. Effects of curved inlet tubes on air flow and particle deposition in bifurcating lung models. *Journal of Biomechanics*, 34(5) :659–669, 2001.