Géométrie des domaines bornés symétriques et indice de Maslov en dimension infinie

Stephane Merigon

▶ **To cite this version:**

Stephane Merigon. Géométrie des domaines bornés symétriques et indice de Maslov en dimension infinie. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2008. Français. NNT : 2008NAN10072 . tel-01748435v2

HAL Id: tel-01748435

https://theses.hal.science/tel-01748435v2

Submitted on 26 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Stéphane Mérigon

Géométrie des domaines bornés symétriques et indice de Maslov en dimension infinie

soutenue publiquement le 15 septembre 2008

Membres du Jury :

Rapporteurs :	**Karl-Hermann Neeb**	Professeur, Darmstadt
	Harald Upmeier	Professeur, Marburg
Examinateurs :	**Wolgang Bertram**	Professeur, Nancy
	Jean-Louis Clerc	Professeur émérite, Nancy (Directeur de thèse)
	Khalid Koufany	Maître de conférence habilité, Nancy
	Tilmann Wurzbacher	Professeur, Metz

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Stéphane Mérigon

Géométrie des domaines bornés symétriques et indice de Maslov en dimension infinie

soutenue publiquement le 15 septembre 2008

Membres du Jury :

Rapporteurs :	**Karl-Hermann Neeb**	Professeur, Darmstadt
	Harald Upmeier	Professeur, Marburg
Examinateurs :	**Wolgang Bertram**	Professeur, Nancy
	Jean-Louis Clerc	Professeur émérite, Nancy (Directeur de thèse)
	Khalid Koufany	Maître de conférence habilité, Nancy
	Tilmann Wurzbacher	Professeur, Metz

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Jean-Louis Clerc d'avoir accepté de diriger mes travaux, et de m'avoir accompagné avec une telle gentillesse pendant ces années. L'indice de Maslov est un très beau sujet, je le remercie de l'avoir partager avec moi.

Karl-Hermann Neeb et Harald Upmeier m'ont fait l'honneur de rapporter sur ce mémoire. Je leur adresse mes remerciements pour ce travail. Je remercie également Tilmann Wurzbacher d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Ce fut un grand plaisir pour moi de compter Wolgang Bertram et Khalid Koufany dans mon jury de thèse, et d'avoir pu travailler dans leur équipe pendant ces années. Je remercie également Wolfgang de m'avoir introduit à ses travaux en m'offrant livres et articles. Ceux-ci m'ont beaucoup aidé à rédiger la première partie de ce mémoire.

J'ai bénéficié à l'Institut Elie Cartan de conditions de travail remarquables. Je remercie toutes les personnes qui y ont contribué, en particulier les bibliothécaires et les secrétaires du département et du laboratoire.

L'Institut fut aussi le lieu de nombreuses franches rigolades, en particulier avec la "bande du midi" : Regine, Julien, Vincent, Stéphane G., François, Lucas, Benoît et Pierre. Ce fut un plaisir de partager le bureau 411 avec Benoît. J'ai beaucoup apprécié les différentes conversations mathématiques que j'ai eu avec lui. Je tient aussi à témoigner mon amitié à Pierre. Je n'oublierai pas les nombreux moments passé avec lui à l'Institut où à Nancy, et le plaisir que j'ai eu à partager nos passions communes.

Ma vie à Nancy n'aurait pas été la même sans les amis que j'ai eu la chance d'y rencontrer. Je pense en particulier à Boris, Matthieu et Yoann.

Je tiens à remercier mon père et mon frère d'avoir braver le climat Lorrain pour venir me soutenir lors de la présentation de ce mémoire.

Pendant mes années de thèse j'ai rencontré Nathalie. Je ne sais pas qui je dois remercier pour cela. En tout cas je la remercie du soutient inconditionnel qu'elle m'a apporté, en particulier pendant la rédaction de ce mémoire.

Table des matières

Première partie

Domaines bornés symétriques et JB^*-triples

CHAPITRE 1

Introduction à la première partie

Le but principal de cette partie est de montrer que l'étude des domaines bornés symétriques dans les espaces de Banach se ramène à celle des JB^*-triples. Ce résultat, démontré par W. Kaup dans [**Kau77, Kau83**], s'inscrit dans une correspondance plus générale :

THÉORÈME 1.1 ([**Kau77**]). *La catégorie des variétés banachiques métriques complexes symétriques connexes simplement connexes pointées est équivalente à la catégorie des systèmes triples de Jordan-Banach hermitiens.*

Dans cette équivalence, la variété métrique complexe symétrique associée à un JB^*-triple coïncide avec sa boule unité et donc

THÉORÈME 1.2 ([**Kau77**]). *La boule unité d'un JB^*-triple est un domaine borné symétrique.*

Ce résultat avait été démontré par L.A. Harris (cf. [**Har74**]) pour une certaine classe d'exemples, incluant notamment les C^*-algèbres. La réciproque est démontrée dans [**Kau83**] :

THÉORÈME 1.3 (Kaup, 1983). *Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné symétrique d'un espace de Banach E. Le système triple de Jordan-Banach associé à $\mathcal{D}$ est un JB^*-triple pour une norme équivalente à celle de E, et D est biholomorphe à la boule unité de E pour cette norme.*

Dans cette partie nous donnons une démonstration de ces théorèmes en nous plaçant dans une correspondance différente. Dans [**Ber02, BN04, BN05**], W.Bertram et K.H. Neeb construisent, pour chaque système triple de Jordan (V, T) sur un anneau commutatif $\mathbb{K}$ (tel que 2 et 3 sont inversibles), une *géométrie polaire* qui, lorsque (V, T) est un système triple de Jordan-Banach, est un espace symétrique banachique au sens de Loos dont le système triple de Lie est donné par

$$[x, y, z] = T(x, y, z) - T(y, x, z).$$

D'une manière bien plus générale, lorsque $\mathbb{K}$ est un anneau topologique dont l'ensemble des éléments inversibles est dense, la géométrie polaire est un espace symétrique pour le calcul différentiel sur $\mathbb{K}$ (on renvoie aux articles déjà cités, à leur bibliographie, ainsi qu'à [**Ber08**]).

Nous montrons que lorsque (V, T) est un JB^*-triple, l'espace symétrique associé à $(V, -T)$ coïncide avec la boule unité de V. Nous démontrons également le théorème 1.3 dans ce cadre.

CHAPITRE 2

Complétion projective des paires de Jordan

Dans ce chapitre (et dans le suivant) $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif et unitaire tel que 2 et 3 sont inversibles. Soient V et W deux $\mathbb{K}$-modules. On note $\mathrm{L}(V,W)$ le $\mathbb{K}$-module des applications linéaires de V dans W, et on pose $\mathrm{L}(V)=\mathrm{L}(V,V)$.

Après avoir donné les définitions de bases, nous montrons, en suivant **[BN04]**, comment la complétion projective d'une paire de Jordan se réalise dans l'espace des 3-filtrations de l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits associée.

1. Systèmes de Jordan

1.1. Une *paire de Jordan* $V=(V^+,V^-)$ est la donnée d'une paire de $\mathbb{K}$-modules (V^+,V^-) et d'applications trilinéaires

$$T^\varepsilon : V^\varepsilon \times V^{-\varepsilon} \times V^\varepsilon \to V^\varepsilon, \quad \varepsilon \in \{-1,1\},$$

symétriques en les variables extérieures :

$$T^\varepsilon(x,y,z)=T^\varepsilon(z,y,x),$$

et telles que si l'on pose $T^\varepsilon(x,y)z=T^\varepsilon(x,y,z)$ on ait l'identité :

$$\text{(J)} \quad T^\varepsilon(u,v)T^\varepsilon(x,y)=T^\varepsilon(T^\varepsilon(u,v)x,y)-T^\varepsilon(x,T^{-\varepsilon}(v,u)y) \\ +T^\varepsilon(x,y)T^\varepsilon(u,v).$$

On note $Q_\varepsilon : V^\varepsilon \to \mathrm{L}(V^{-\varepsilon},V^\varepsilon)$ l'application quadratique définie par

$$Q_\varepsilon(x)y=\frac{1}{2}T^\varepsilon(x,y)x.$$

On écrit aussi $Q_\varepsilon(x,y)=Q_\varepsilon(x+y)-Q_\varepsilon(x)-Q_\varepsilon(y)$. L'identité (J) est équivalente aux identités suivantes

$$\text{(J1)} \qquad T^\varepsilon(Q_\varepsilon(x)y,y)=T^\varepsilon(x,Q_\varepsilon(y)x),$$

$$\text{(J2)} \qquad T^\varepsilon(x,y)Q_\varepsilon(x)=Q_\varepsilon(x)T^\varepsilon(y,x)=Q_\varepsilon(x,Q_\varepsilon(x)y),$$

et implique l'identité

$$\text{(J3)} \qquad Q_\varepsilon(Q_\varepsilon(x)y)=Q_\varepsilon(x)Q_\varepsilon(y)Q_\varepsilon(x).$$

Un morphisme de la paire de Jordan V sur la paire de Jordan W est une paire d'applications linéaires $(f^+, f^-) \in \mathrm{L}(V^+, W^+) \times \mathrm{L}(V^-, W^-)$ telles que $\forall\,(x, y, z) \in V^\varepsilon \times V^{-\varepsilon} \times V^\varepsilon$

$$T^\varepsilon(f^\varepsilon(x), f^{-\varepsilon}(y), f^\varepsilon(z)) = f^\varepsilon(T^\varepsilon(x, y, z)).$$

On note $\mathrm{Aut}(V^+, V^-)$ le groupe des automorphismes de V.

Une algèbre de Jordan $J = (V, \circ)$ est un $\mathbb{K}$-module V muni d'un produit commutatif $x \circ y$ tel que $\forall\, x, y \in V$,

$$x^2 \circ (x \circ y) = x \circ (x^2 \circ y).$$

Lorsque ce produit possède un neutre, celui-ci est unique et on dit que J est unitaire. On note $L(x)$ l'opérateur défini par

$$L(x)y = x \circ y$$

et on appelle *représentation quadratique* l'opérateur $P : V \to \mathrm{L}(V)$ défini par

$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2).$$

On pose

$$\text{(P)} \qquad P(u, v) = P(u + v) - P(u) - P(v)$$

et on a

$$\text{(P')} \qquad P(u, v) = 2\big(L(u)L(v) + L(v)L(u) - L(u \circ v)\big).$$

THÉORÈME 2.1 (Meyberg). *Soit (V^+, V^-) une paire de Jordan. Soient $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $a \in V^{-\varepsilon}$. Posons*

$$x \circ y = \frac{1}{2} T^\varepsilon(x, a, y)$$

Alors $V^{(a)} := (V^\varepsilon, \circ)$ est une algèbre de Jordan.

DÉMONSTRATION. On écrit (J) :

$$\begin{aligned} T^\varepsilon(u, v)T^\varepsilon(x, y, z) = T^\varepsilon(T^\varepsilon(u, v)x, y, z) - T^\varepsilon(x, T^{-\varepsilon}(v, u)y, z) \\ + T^\varepsilon(x, y, T^\varepsilon(u, v)z) \end{aligned}$$

et on spécialise en $z = x$ et $v = y$ pour obtenir

$$\text{(J4)} \qquad T^\varepsilon(Q_\varepsilon(x)y, y) = T^\varepsilon(x, y)^2 - 2Q_\varepsilon(x)Q_{-\varepsilon}(y).$$

Alors

$$\begin{aligned} T^\varepsilon(x, a)T^\varepsilon(x^2, a) &= T^\varepsilon(x, a)T^\varepsilon(Q_\varepsilon(x)a, a) \\ &= T^\varepsilon(x, a)(T^\varepsilon(x, a)^2 - 2Q_\varepsilon(x)Q_{-\varepsilon}(a)) \\ &= T^\varepsilon(x, a)^3 - 2T^\varepsilon(x, a)Q_\varepsilon(x)Q_{-\varepsilon}(a) \\ &= T^\varepsilon(x, a)^3 - 2Q_\varepsilon(x)Q_{-\varepsilon}(a)T^\varepsilon(x, a) \quad \text{par (J2)} \\ &= T^\varepsilon(x^2, a)T^\varepsilon(x, a) \end{aligned}$$

$\square$

Soit $y \in V^{-\varepsilon}$. On note L_y l'opérateur de multiplication dans $V^{(y)}$. De même, on note P_y la représentation quadratique de $V^{(y)}$. La formule (J4) s'écrit une fois divisée par deux

$$P_y(x) = Q_\varepsilon(x)Q_{-\varepsilon}(y). \tag{J4'}$$

1.2. Inversibilité, quasi-inversiblité et spectre. Considérons une algèbre de Jordan unitaire $(V, \circ)$ d'élément neutre e. Un élément $x \in V$ est dit *inversible* lorsqu'il existe $y \in V$ tel que

$$\begin{aligned} x \circ y &= e \\ x^2 \circ y &= x. \end{aligned}$$

L'élément y est alors appelé l'inverse de x et on note $y = x^{-1}$. On note $V^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de V.

Le théorème suivant est du à Jacobson (cf. [**McC04**, II.6]).

THÉORÈME 2.2. *L'élément x est inversible si et seulement si l'opérateur $P(x)$ est inversible et alors*

$$x^{-1} = P(x)^{-1}x.$$

L'enveloppe unitaire d'une algèbre de Jordan $J = (V, \circ)$, unitaire ou non, est l'algèbre de Jordan $\mathbf{J} = (\mathbf{V}, \circ)$ où

$$\mathbf{V} = V \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$$

et

$$(x + \lambda\mathbf{1}) \circ (y + \mu\mathbf{1}) = x \circ y + \mu x + \lambda y + \lambda\mu\mathbf{1}.$$

Le couple (x, y) de la paire de Jordan (V^+, V^-) est dit *quasi-inversible* si $\mathbf{1} - x$ est inversible dans l'enveloppe unitaire de $V^{(y)}$. Le quasi-inverse de x par rapport à y est alors l'élément $x^y \in V^{(y)}$ tel que

$$(\mathbf{1} - x)^{-1} = \mathbf{1} + x^y.$$

LEMME 2.3. *L'opérateur $\boldsymbol{P_y}(\mathbf{1} - x)$ s'écrit dans la décomposition $\boldsymbol{V^{(y)}} = V^{(y)} \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$:*

$$\boldsymbol{P_y}(\mathbf{1} - x) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{V^{(y)}} - 2L_y(x) + P_y(x) & -2x + x^2 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathbb{K}\mathbf{1}} \end{pmatrix}$$

DÉMONSTRATION. On a d'après (P')

$$\boldsymbol{P_y}(\mathbf{1}, x) = 2(\boldsymbol{L_y}(\mathbf{1})\boldsymbol{L_y}(x) + \boldsymbol{L_y}(\mathbf{1})\boldsymbol{L_y}(x) - \boldsymbol{L_y}(\mathbf{1} \circ x)) = 2\boldsymbol{L_y}(x)$$

donc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P_y}(\mathbf{1} - x) &= \boldsymbol{P_y}(\mathbf{1}) + \boldsymbol{P_y}(x) - \boldsymbol{P_y}(\mathbf{1}, x) \\ &= \mathrm{Id}_{\boldsymbol{V^{(y)}}} + \boldsymbol{P_y}(x) - 2\boldsymbol{L_y}(x) \end{aligned}$$

$\square$

On définit alors l'*opérateur de de Bergman* $B^+(x,y) \in \mathrm{L}(V^+)$ associé au couple $(x,y) \in V$ par :

$$B^+(x,y) = \mathrm{Id} - T^+(x,y) + Q_+(x)Q_-(y)$$

On pose aussi

$$B^-(y,x) = \mathrm{Id} - T^-(y,x) + Q_-(y)Q_+(x)$$

C'est l'opérateur de Bergman de (y,x) dans la paire *opposée*

$$V^{op} := (V^-, V^+).$$

COROLLAIRE 2.4. *Le couple $(x,y) \in V$ est quasi-inversible si et seulement si l'opérateur de Bergman $B^+(x,y)$ est inversible et alors*

$$x^y = B^+(x,y)^{-1}(x - Q_+(x)y). \tag{QI}$$

DÉMONSTRATION. On déduit du lemme précédent que $\boldsymbol{P_y}(\mathbf{1} - x)$ est inversible si et seulement si $B_+(x,y) = \mathrm{Id}_{V^{(y)}} - 2L_y(x) + P_y(x)$ l'est et qu'alors

$$\boldsymbol{P_y}(\mathbf{1} - x)^{-1} = \begin{pmatrix} B^+(x,y)^{-1} & B^+(x,y)^{-1}(2x - x^2) \\ 0 & Id_{\mathbb{K}\mathbf{1}} \end{pmatrix}$$

donc $\mathbf{1} + x^y = \boldsymbol{P_y}(\mathbf{1} - x)^{-1}(\mathbf{1} - x) = \mathbf{1} + B^+(x,y)^{-1}(2x - x^2) - B^+(x,y)^{-1}(x) = \mathbf{1} + B^+(x,y)^{-1}(x - Q_+(x)y)$ $\square$

Enonçons le *principe de symétrie* ([**Loo75**, Proposition 3.3]) :

PROPOSITION 2.5. *Soit $(x,y) \in V$. Alors (x,y) est quasi-inversible si et seulement si (y,x) est quasi-inversible dans V^{op} et dans ce cas*

$$x^y = x + Q_+(x)y^x.$$

Dans une algèbre de Jordan unitaire (V,e), le *spectre* d'un élément $x \in V$ est l'ensemble des scalaires λ tels que $\lambda e - x$ n'est pas inversible. On le note $Sp(x,V)$ ou simplement $Sp(x)$.

$$\begin{aligned} Sp(x) &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda e - x \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda e - x) \text{ n'est pas inversible}\} \end{aligned}$$

On définit alors le spectre du couple $(x,y) \in V^+ \times V^-$ comme le spectre de x dans l'enveloppe unitaire de $V^{(y)}$:

$$Sp(x,y) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{K}^* \mid B^+(\lambda^{-1}x, y) \text{ non inversible}\}$$

Le couple (x,y) est quasi-inversible si et seulement si $1 \notin Sp(x,y)$.

2. La complétion projective d'une paire de Jordan

2.1. L'algèbre de Kantor-Koecher-Tits. Une algèbre de Lie 3-graduée $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur laquelle il existe une décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$$

telle que

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_{i+j} \quad \text{où} \quad \mathfrak{g}_k = \{0\} \text{ si } k \notin \{1, 0, -1\}.$$

Il revient au même de se donner un couple $(\mathfrak{g}, D)$ où D est une dérivation sur $\mathfrak{g}$ telle que $D^3 = D$, la 3-graduation correspondante étant donnée par $\mathfrak{g}_k = \ker(D - kId)$. Celle-ci est dite *intérieure* lorsque D est intérieure, ie. $D = \operatorname{ad} E$ pour E dans $\mathfrak{g}$.

La construction de Kantor-Koecher-Tits associe une algèbre de Lie 3-graduée à une paire de Jordan (V^+, V^-). Posons pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$\mathfrak{g}_\varepsilon = V^\varepsilon,$$

et soit $\mathfrak{g}_0$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V^+) \oplus \mathfrak{gl}(V^-)$ engendrée par les $(-T^+(x, y)) \oplus T^-(y, x)$, $(x, y) \in V^+ \times V^-$ et $E = \mathrm{Id} \oplus -\mathrm{Id}$. Posons

$$\begin{aligned}
&\forall\ x, y \in \mathfrak{g}_\varepsilon && [x, y] = 0,\\
&\forall\ (x, y) \in \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{-1} && [x, y] = -[y, x] = (-T^+(x, y)) \oplus T^-(y, x),\\
&\forall\ (X, x) \in \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1} && [X, x] = -[x, X] = X(x),\\
&\forall\ X, Y \in \mathfrak{g}_0 && [X, Y] = XY - YX.
\end{aligned}$$

Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1} =: KKT(V)$ munie du crochet ainsi défini est une algèbre de Lie 3-graduée. La graduation de $\mathfrak{g}$ est de plus intérieure puisqu'elle correspond à la dérivation $\operatorname{ad} E$. Remarquons enfin que le centre de $\mathfrak{g}$ est nul.

2.2. La complétion projective d'une paire de Jordan. On note $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$. Lorsque $Z \in \mathfrak{g}_\varepsilon$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on a $(\operatorname{ad} Z)^n = 0$ pour $n \geq 3$. On peut donc définir

$$e^{\operatorname{ad} Z} := \exp(\operatorname{ad} Z) := \mathrm{Id} + \operatorname{ad} Z + \frac{1}{2}(\operatorname{ad} Z)^2.$$

On note U^ε le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ engendré par les $e^{\operatorname{ad} Z}$, $Z \in \mathfrak{g}_\varepsilon$. On a un isomorphisme de groupes abéliens :

$$\begin{aligned}
V^\varepsilon &\to U^\varepsilon\\
u &\mapsto \exp(\operatorname{ad} u).
\end{aligned}$$

Le *groupe projectif élémentaire* $G = PE(V^+, V^-)$ de la paire (V^+, V^-) est par définition le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ engendré par U^+ et U^-. On note $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, E)$ le sous-groupe des automorphismes qui préservent le graduation $(\mathfrak{g}, \operatorname{ad} E)$. Un élément $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, E)$ s'écrit

$$h = h_1 \oplus h_0 \oplus h_{-1},\ h_\varepsilon : \mathfrak{g}_\varepsilon \to \mathfrak{g}_\varepsilon,\ \varepsilon \in \{1, 0, -1\}$$

et vérifie
$$\forall u \in V^\varepsilon \quad he^{\operatorname{ad} u}h^{-1} = e^{\operatorname{ad} h_\varepsilon(u)}.$$
En particulier $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, E)$ normalise U^+ et U^-. Posons
$$H = \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, E) \cap G.$$
Il en résulte que $P^\varepsilon = HU^\varepsilon = U^\varepsilon H$ est un sous-groupe de G. De plus

Proposition 2.6. *$U^\varepsilon \cap P^{-\varepsilon} = \{\mathrm{Id}\}$ et $P^+ \cap P^- = H$.*

Démonstration. En effet si $e^{\operatorname{ad} u} = he^{\operatorname{ad} v}$ où $(u, v) \in V^\varepsilon \times V^{-\varepsilon}$, on applique à E pour trouver $E + \varepsilon u = h_0(E) - \varepsilon h_\varepsilon(v)$ donc $u = h_\varepsilon(v) = v = 0$. Ainsi $U^\varepsilon \cap P^{-\varepsilon} = \{\mathrm{Id}\}$ et donc $P^+ \cap P^- = H$. □

Donc l'application
$$\begin{aligned} V^+ \times V^- &\to G/P^- \times G/P^+ \\ (u, v) &\mapsto (\exp(\operatorname{ad} u)P^-, \exp(\operatorname{ad} v)P^+) \end{aligned}$$
est injective. On identifie V^ε à son image dans G/P^ε. Le couple
$$(X^+, X^-) := (G/P^-, G/P^+)$$
est par définition la *complétion projective* de la paire (V^+, V^-). On note (o_+, o_-) le point base (P^+, P^-) dans (X^+, X^-).

Le groupe $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, E)$ normalise G et donc agit sur (X^+, X^-). En particulier, le groupe G^{ext} engendré par G et les transformations
$$h^{E,r} := r\,\mathrm{Id} \oplus \mathrm{Id} \oplus r^{-1}\,\mathrm{Id}, \quad r \in \mathbb{K}^\times,$$
agit sur (X^+, X^-).

Notons enfin que tout $(f_+, f_-) \in \operatorname{Aut}(V^+, V^-)$ définit un élément $h \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, E)$ en posant
$$h_{\pm 1} = f_\pm, \quad h_0(X_+ \oplus X_-) = f_+X_+f_+^{-1} \oplus f_-X_-f_-^{-1},$$
et que l'on obtient ainsi une bijection
$$\operatorname{Aut}(V^+, V^-) \simeq \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, E).$$

2.3. Réalisation dans l'espace des 3-filtrations. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une 3-filtration $\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_0)$ sur $\mathfrak{g}$ est une suite de sous-algèbres
$$\{0\} \subset \mathfrak{f}_1 \subset \mathfrak{f}_0 \subset \mathfrak{g}$$
telle que
$$[\mathfrak{f}_i, \mathfrak{f}_j] \subset \mathfrak{f}_{i+j} \quad \text{où} \quad \mathfrak{f}_k = \{0\} \text{ si } k \notin \{0, 1\}.$$
Toute 3-graduation $(\mathfrak{g}, D) = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ définie deux 3-filtrations
$$\mathfrak{f}^\varepsilon(D) = (\mathfrak{g}_\varepsilon, \mathfrak{g}_\varepsilon \oplus \mathfrak{g}_0), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$
Remarquons que l'on a $\mathfrak{f}^\varepsilon(-D) = \mathfrak{f}^{-\varepsilon}(D)$. Une 3-filtration $\mathfrak{f}$ telle qu'il existe une dérivation intérieure $D = \operatorname{ad} E$ telle que $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^\varepsilon(D)$ est également appelée intérieure. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des 3 -filtrations intérieures sur $\mathfrak{g}$.

On définit une action de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ sur l'ensemble des 3-filtrations en posant pour toute 3-filtration $\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_0)$ et tout $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$,

$$g.\mathfrak{f} = (g(\mathfrak{f}_1), g(\mathfrak{f}_0)).$$

Alors si $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^+(\mathrm{ad}\, E)$, on a $g.\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^+(\mathrm{ad}\, gE)$, et donc $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ agit sur $\mathcal{F}$.

Un couple $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ de 3-filtrations est dit *transverse* lorsque

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_1 \oplus \mathfrak{f}_0 = \mathfrak{e}_0 \oplus \mathfrak{f}_1$$

et on note

$$\mathfrak{e} \top \mathfrak{f}$$

cette relation. Lorsque $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}$, on note $\mathfrak{f}^\top$ l'ensemble des 3-filtrations intérieures transverses à $\mathfrak{f}$.

Soit $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}\, E) = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ une 3-graduation intérieure sur $\mathfrak{g}$. Alors le couple $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}) := (\mathfrak{f}^-(\mathrm{ad}\, E), \mathfrak{f}^+(\mathrm{ad}\, E))$ est transverse. Remarquons que si $Z \in \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{g}_1$, alors $e^{\mathrm{ad}\, Z}.\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$. Comme $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ agit sur les couples de 3-filtrations en préservant la transversalité, le couple $(e^{\mathrm{ad}\, Z}.\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ est encore transverse. On définit ainsi une action du groupe additif $(\mathfrak{f}_1, +)$ sur $\mathfrak{f}^\top$:

$$\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}^\top \to \mathfrak{f}^\top, \quad (Z, \mathfrak{e}) \mapsto e^{\mathrm{ad}\, Z}.\mathfrak{e}.$$

On a alors le théorème suivant [**BN04**, Theorem 1.6] :

THÉORÈME 2.7 ([**BN04**]). *Soit $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}$. Alors $\mathfrak{f}^\top$ est un espace affine sous l'action du groupe $(\mathfrak{f}_1, +)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}$, il existe $E \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^+(\mathrm{ad}\, E)$. Notons alors $\mathfrak{e} = \mathfrak{f}^-(\mathrm{ad}\, E)$. Soit $\mathfrak{e}' \in \mathfrak{f}^\top$. On a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}'_0 \oplus \mathfrak{f}_1,$$

donc E s'écrit

$$E = E - Z + Z, \quad E - Z \in \mathfrak{e}'_0,\ Z \in \mathfrak{f}_1.$$

Montrons que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{e}'_0 \cap \mathfrak{f}_0 \oplus \mathfrak{e}'_1$$

est une 3-graduation associée à la dérivation $\mathrm{ad}(E - Z)$.

On vérifie, en calculant sur chaque $\mathfrak{g}_k = \ker(\mathrm{ad}\, E - k\, \mathrm{Id})$, $k \in \{-1, 0, 1\}$, que $(\mathrm{ad}(E - Z))^3 = \mathrm{ad}(E - Z)$. L'opérateur $\mathrm{ad}(E - Z)$ est donc semi-simple.

On a $e^{\mathrm{ad}(Z)}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ donc $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^+(\mathrm{ad}\,(e^{\mathrm{ad}\, Z}E)) = \mathfrak{f}^+(\mathrm{ad}(E - Z))$, ie.

$$\mathfrak{f}_1 = \ker(\mathrm{ad}(E - Z) - \mathrm{Id}),$$

et $\mathfrak{f}_0 = \ker(\mathrm{ad}(E - Z)) \oplus \ker(\mathrm{ad}(E - Z) - \mathrm{Id})$. Or, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_0 \oplus \mathfrak{e}'_1$$

et

$$\mathrm{ad}(E - Z)\mathfrak{e}'_1 \subset \mathfrak{e}'_1.$$

Comme $\mathfrak{f}_0$ a un unique supplémentaire stable par $\mathrm{ad}(E - Z)$, il vient

$$\mathfrak{e}'_1 = \ker(\mathrm{ad}(E - Z) + \mathrm{Id}).$$

Enfin,

$$\mathrm{ad}(E-Z)\mathfrak{e}'_0 \cap \mathfrak{f}_0 \subset \mathfrak{e}'_0 \cap \mathfrak{f}_0,$$

et par le même argument,

$$\mathfrak{e}'_0 \cap \mathfrak{f}_0 = \ker \mathrm{ad}\,(E-Z).$$

Il en résulte que

$$(\mathfrak{e}',\mathfrak{f}) = \big(\mathfrak{f}_-(\mathrm{ad}(E-Z)),\mathfrak{f}_+(\mathrm{ad}(E-Z))\big) = (e^{\mathrm{ad}\,Z}\mathfrak{e},\mathfrak{f}).$$

L'action de $(\mathfrak{f}_1,+)$ sur $\mathfrak{f}^\top$ est de plus simplement transitive : si $(e^{\mathrm{ad}\,Z}\mathfrak{e},\mathfrak{f}) = (\mathfrak{e},\mathfrak{f})$ alors $\mathrm{ad}\,(E-Z) = \mathrm{ad}\,E$ et en appliquant à E on trouve $Z = 0$. □

Le théorème suivant (cf. [**BN04**, Theorem 1.12]) montre que la complétion projective de la paire (V^+,V^-) se réalise dans l'espace des 3-filtrations intérieures. On note $(\mathcal{F}\times\mathcal{F})^\top$ l'ensemble des couples de 3-filtrations intérieures transverses.

Théorème 2.8 ([**BN04**]). *Soit (V^+,V^-) une paire de Jordan. Soient $(\mathfrak{g},\mathrm{ad}\,E) = KKT(V^+,V^-)$, et $(\mathfrak{f}^-,\mathfrak{f}^+) = (\mathfrak{f}^-(\mathrm{ad}\,E),\mathfrak{f}^+(\mathrm{ad}\,E))$. Alors*

(i) On a, pour $\varepsilon \in \{-1,1\}$,

$$P^\varepsilon = \{g \in G \mid g.\mathfrak{f}^\varepsilon = \mathfrak{f}^\varepsilon\}.$$

En conséquence,

$$(X^+,X^-) \simeq (G.\mathfrak{f}^-,G.\mathfrak{f}^+).$$

(ii) Posons $M = G.(o_+,o_-)$. Alors

$$M = (\mathcal{F}\times\mathcal{F})^\top \cap (X^+\times X^-).$$

(iii) Identifions X^ε à $G.\mathfrak{f}^\varepsilon$. Alors si $x \in X^\varepsilon$, $x^\top$ est contenu dans $X^{-\varepsilon}$ et donc $V_x := x^\top$ est un espace affine sous l'action de $(V^\varepsilon,+)$.

3. Structure géométrique et analytique de la complétion projective

Dans toute la suite (V^+,V^-) est une paire de Jordan sur $\mathbb{K}$, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_{-1}$ est son algèbre de Kantor-Koecher-Tits. Les notations sont celles du théorème précédent. Rappelons que nous identifions V^ε à un sous-espace de X^ε. Alors d'après ce qui précède, on a $V^\varepsilon = V_{o_\varepsilon}$. Nous donnons dans cette section, en suivant toujours [**BN04**], une expression de $g \in G$ dans la "carte" $V^+ \hookrightarrow X^+$, ce qui permet de donner une structure de variété banachique analytique à X^+.

3.1. Dénominateurs et codénominateurs. Un automorphisme $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ possède une représentation matricielle par rapport à la graduation $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{10} & g_{1-1} \\ g_{01} & g_{00} & g_{0-1} \\ g_{-11} & g_{-10} & g_{-1-1} \end{pmatrix}.$$

On note par ailleurs Y_j la composante du vecteur $Y \in \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_j$.

On definit alors le *dénominateur* $d_g : V^+ \to \mathrm{L}(V^+)$ et le *codénominateur* $c_g : V^+ \to \mathrm{L}(V^-)$ de g en $x \in V^+$ par

$$\begin{aligned} d_g(x) &= (e^{-\operatorname{ad} x} g^{-1})_{11}, \\ c_g(x) &= (g e^{\operatorname{ad} x})_{-1-1}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 2.9. **[BN04]** *Soient $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et $x \in V^+$. Alors $g.x \in V^+$ si et seulement si $d_g(x)$ et $c_g(x)$ sont inversibles.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} g.x \in V^+ &\Leftrightarrow g e^{\operatorname{ad} x}.o_+ \in V^+, \\ &\Leftrightarrow g e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{f}^- \top \mathfrak{f}^+, \\ &\Leftrightarrow (g e^{\operatorname{ad} x})^\varepsilon(\mathfrak{g}_{-\varepsilon}) \text{ est transverse à } \mathfrak{g}_\varepsilon \oplus \mathfrak{g}_0 \ , \ \varepsilon \in \{-1, 1\}, \\ &\Leftrightarrow ((g e^{\operatorname{ad} x})^\varepsilon)_{-\varepsilon-\varepsilon} \text{ est inversible}, \ \varepsilon \in \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

□

On note

$$\Omega^\varepsilon = U^\varepsilon H U^{-\varepsilon}.$$

Soit $g \in G$. Alors $g e^{\operatorname{ad} x} \in \Omega^+$ si et seulement si $g.x \in V^+$. De plus

$$g e^{\operatorname{ad} x} = e^{\operatorname{ad} g.x} h e^{-\operatorname{ad} e^{\operatorname{ad}(-x)} g^{-1}.o_-}$$

avec

$$(h_{11}, h_{-1-1}) = (d_g(x)^{-1}, c_g(x)).$$

Bien sûr cette formule est encore vrai pour $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ si l'on remplace Ω^ε par $U^\varepsilon \,\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, E) U^{-\varepsilon}$.

Soit $(\alpha, \beta) \in V^+ \times V^-$. Alors $\forall v \in V^+$ et $\forall v \in V^-$,

$$\begin{aligned} [\alpha, [\beta, v]] &= [[v, \beta], \alpha] = -T^+(v, \beta)\alpha = -T^+(\alpha, \beta)v, \\ [\beta, [\beta, v]] &= [[v, \beta], \beta] = 2Q_-(\beta)v, \\ [\beta, [\alpha, w]] &= -[[\alpha, w], \beta] = -T^-(w, \alpha))\beta = -T^-(\beta, \alpha)w, \\ [\alpha, [\alpha, w]] &= 2Q_-(\alpha)w. \end{aligned}$$

Soient $v \in V^-$ et $g = e^{\operatorname{ad} v}$, alors

$$\begin{aligned} d_g(x) &= \mathrm{Id} + \operatorname{ad} x \operatorname{ad} v + \frac{1}{4}(\operatorname{ad} x)^2 (\operatorname{ad} v)^2, \\ c_g(x) &= \mathrm{Id} + \operatorname{ad} v \operatorname{ad} x + \frac{1}{4}(\operatorname{ad} v)^2 (\operatorname{ad} x)^2 \end{aligned}$$

soit, dans le language des paires de Jordan,

$$d_g(x) = B^+(x, v),$$
$$c_g(x) = B^-(v, x).$$

Donc $(x, -v) \in (X^+, X^-)$ est transverse si et seulement si (x, v) est quasi-inversible.

PROPOSITION 2.10. *Soient $x \in V^+$ et $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ tels que $g.x \in V^+$, et posons $p(g, x) = e^{-\operatorname{ad} g.x} g e^{\operatorname{ad} x} \in P^-$. Alors*

$$d_g(x) = (p(g, x)^{-1})_{11},$$

et on en déduit la relation de cocycle : lorsque x, $g_2.x$, $g_1g_2.x$ sont dans V^+, on a

$$d_{g_1g_2}(x) = d_{g_2}(x) d_{g_1}(g_2 x).$$

DÉMONSTRATION. On a facilement $\forall u \in V^+$, $d_g(x) = d_{e^{\operatorname{ad} u} g}(x)$. En particulier $d_g(x) = d_{e^{\operatorname{ad}(-gx)} g}(x) = (p(g, x)^{-1})_{11}$. Si x, $g_2.x$, $g_1g_2.x$ sont dans V^+, alors $p(g_1g_2, x) = p(g_1g_2, g_2x)p(g_2x, x)$ et donc

$$p(g_1g_2, x)^{-1} = p(g_2, gx)^{-1} p(g_1g_2x, g_2x)^{-1}.$$

Par suite,

$$(p(g_1g_2, x)^{-1})_{11} = (p(g_2, x)^{-1})_{11} (p(g_1g_2x, g_2x)^{-1})_{11},$$

puisque $p(g_2, x)$ et $p(g_1g_2x, g_2x)$ sont dans P^-. □

3.2. Le fibré naturel et le numérateur. Pour $\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_0) \in \mathcal{F}$, on pose

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{f}} \mathcal{F} := \mathfrak{g}/\mathfrak{f}_0.$$

C'est par définition l'*espace tangent naturel* à $\mathcal{F}$ en $\mathfrak{f}$. Le *fibré tangent naturel* de $\mathcal{F}$ est alors l'espace

$$\mathcal{T}\mathcal{F} := \sqcup_{\mathfrak{f} \in \mathcal{F}} \mathcal{T}_{\mathfrak{f}} \mathcal{F}.$$

Chaque $Y \in \mathfrak{g}$ définit une section $\widetilde{Y}$ du fibré $\mathcal{T}\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ en posant

$$\widetilde{Y}(\mathfrak{f}) = Y \bmod \mathfrak{f}.$$

Soit $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Pour chaque $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}$ on considère l'application linéaire

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{f}} g : \mathcal{T}_{\mathfrak{f}} \mathcal{F} \to \mathcal{T}_{g.\mathfrak{f}} \mathcal{F}, \quad Y + \mathfrak{f}_0 \mapsto gY + g(\mathfrak{f}_0).$$

On définit ainsi une application $\mathcal{T}g : \mathcal{T}\mathcal{F} \to \mathcal{T}\mathcal{F}$ et une action de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{T}\mathcal{F}$. Le fibré

$$\mathcal{T}X^+ \to X^+$$

est donc un fibré G-homogène. On peut le décrire au moyen d'une représentation de P^- sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}_0$.

Si $\pi : P^- \to \mathrm{GL}(W)$ est une représentation de P^- sur le $\mathbb{K}$-module W, on pose

$$G \times_\pi W = G \times W / \sim$$

où

$$(g,w) \sim (gp, \pi(p)w),\ p \in P^-,$$

et alors

$$G \times_\pi W \to G/P^-$$

est un fibré vectoriel. On note $[g,w]$ la classe de (g,w) dans $G \times_\pi W$. Les sections de ce fibré sont obtenues à partir des fonctions $f : G \to W$ telles que $f(gp) = \pi(p)^{-1} f(g)$ pour tout $g \in G$, en posant

$$s_f(gP^-) = [g, f(g)].$$

Rappelons que $o_+ = \mathfrak{f}^- = (\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1})$. Posons à partir de maintenant $W = \mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) = \mathcal{T}_{o_+} X^+$ et $\pi(p) = \mathcal{T}_{o_+} p$ pour $p \in P^-$. On a une bijection G-équivariante

$$\begin{aligned} G \times_\pi \mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) &\to \mathcal{T} X^+, \\ [g, Y + \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}] &\mapsto \mathcal{T}_{o_+} g\,(Y + \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}). \end{aligned}$$

Si $\widetilde{Y}$ est la section de $\mathcal{T} X^+$ associée à Y, alors $s_Y(gP^-) := [g, g^{-1}Y + \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}]$ est la section de $G \times_\pi W$ correspondante, et celle-ci provient de la fonction

$$Y_G(g) := g^{-1}Y + \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}.$$

On identifie $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ à $\mathfrak{g}_1 = V^+$ et on définit

$$\widetilde{Y}^+ : V^+ \to V^+, \quad u \mapsto Y_G(e^{\operatorname{ad} u}).$$

Proposition 2.11. *Soient $g \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ et $x \in V^+$ tels que $g.x \in V^+$. Alors pour tout $Y \in \mathfrak{g}$,*

$$\widetilde{g^{-1}Y}^+(x) = d_g(x)\, \widetilde{Y}^+(g.x).$$

Démonstration. Soit $p(g,x) = e^{-\operatorname{ad} g.x} g e^{\operatorname{ad} x} \in P^-$. On a

$$e^{-\operatorname{ad} x} g^{-1} Y = p(g,x)^{-1} e^{-\operatorname{ad} g.x} Y,$$

et donc $(e^{-\operatorname{ad} x} g^{-1} Y)_1 = (p(g,x)^{-1})_{11} (e^{-\operatorname{ad} g.x} Y)_1$. □

En particulier si $Y = E = \operatorname{Id} \oplus -\operatorname{Id}$,

$$\widetilde{g^{-1}E}^+(x) = d_g(x)\, g.x.$$

Définissons alors le *numérateur* de $g \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$:

$$n_g : V^+ \to V^+, \quad x \mapsto \widetilde{g^{-1}E}^+(x).$$

Théorème 2.12 ([**BN04**]). *Soit $g \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ et $x \in V^+$. Alors $g.x \in V^+$ si et seulement si $d_g(x)$ et $c_g(x)$ sont inversibles et dans ce cas*

$$g.x = d_g(x)^{-1} n_g(x).$$

En particulier, si $u \in V^-$ et $\widetilde{t_u} := e^{\operatorname{ad} u}$ alors $\widetilde{t_u}(x) \in V^+$ si et seulement si (x,u) est quasi-inversible et alors

$$\widetilde{t_u}(x) = x^u.$$

3.3. La structure différentielle de la complétion projective. Une algèbre de Jordan-Banach (réelle ou complexe) $(V, \circ, |\cdot|)$ est une algèbre de Jordan sur l'espace de Banach (réel ou complexe) $(V, |\cdot|)$ telle que

$$|x \circ y| \leq |x|\,|y|\,.$$

Une paire de Jordan-Banach (réelle ou complexe) est une paire de Jordan (V^+, V^-) telle que V^+ et V^- sont des espaces de Banach (réels ou complexes) et les opérateurs T^+ et T^- sont continus. Il existe donc une constante c telle que pour tout $(x, y, z) \in V^\varepsilon \times V^{-\varepsilon} \times V^\varepsilon$,

$$|T^\varepsilon(x, y, z)|_\varepsilon \leq c\,|x|_\varepsilon\,|y|_{-\varepsilon}\,|z|_\varepsilon$$

où $|\cdot|_\varepsilon$ est la norme de V^ε. Pour $y \in V^{-\varepsilon}$, l'algèbre de Jordan $V^{(y)}$ devient une algèbre de Jordan-Banach avec la norme $|\cdot|_y = \sqrt{c\,|y|_{-\varepsilon}}\,|\cdot|_\varepsilon$.

Dans la suite (V^+, V^-) est une paire de Jordan-Banach. On introduit l'*atlas naturel* de X^+ :

$$\mathcal{A} = \{(g(V^+), \varphi_g) \mid g \in G\}, \quad \varphi_g : g(V^+) \to V^+, \quad g.x \mapsto x.$$

Le lemme suivant (cf. [**BN05**, lemme 5.4]) et son corollaire montrent que $\mathcal{A}$ munit X^+ d'une structure de variété analytique.

Lemme 2.13. *Soit (V^+, V^-) une paire de Jordan-Banach. Notons B^ε la sous-algèbre de $\mathrm{L}(V^\varepsilon)$ engendrée par les opérateurs $B^\varepsilon(x, y)$, $(x, y) \in V^\varepsilon \times V^{-\varepsilon}$, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Alors si $g \in G$, $d_g(x)$ et $c_g(x)$ sont dans B^+ et B^- respectivement, pour tout $x \in V^+$. En particulier ce sont des opérateurs linéaires continus de V^+ et V^- respectivement.*

Démonstration. Un élément de G s'écrit

$$g = e^{\operatorname{ad} w_1} e^{\operatorname{ad} v_1} \ldots e^{\operatorname{ad} w_k} e^{\operatorname{ad} v_k},$$

où $v_i \in V^+$ et $w_i \in V^-$, $i = 1, \ldots k$. Raisonnons par récurrence sur k. Si $k = 1$ alors

$$d_{e^{\operatorname{ad} w_1} e^{\operatorname{ad} v_1}}(x) = d_{e^{\operatorname{ad} w_1}}(x + v_1) = B^+(x + v_1, w_1).$$

Écrivons alors $g = \widetilde{g} e^{\operatorname{ad} w_k} e^{\operatorname{ad} v_k}$ et supposons que $d_{\widetilde{g}}(x)$ est dans B^+ pour tout $x \in V^+$. Dés que $(x + v_k, w_k)$ est transverse, la relation de cocycle donne

$$d_g(x) = B^+(x + v_k, w_k) d_{\widetilde{g}}(e^{\operatorname{ad} w_k}(x + v_k)),$$

donc par hypothèse de récurrence $d_g(x) \in B^+$, pour tout x tel que $(x + v_k, w_k)$ est transverse. Comme cet ensemble est ouvert il engendre V^+, et puisque $x \mapsto d_g(x)$ est polynomiale, $d_g(x) \in B^+$ pour tout x dans V^+. □

Puisque l'inversion est une application analytique sur l'ensemble (ouvert) des éléments inversibles de l'algèbre de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach, on a le

COROLLAIRE 2.14. *Soit $g \in G$. Alors*

$$V^g := \{x \in V^+ \mid d_g(x) \text{ et } c_g(x) \text{ sont inveribles } \}$$

est ouvert dans V^+ et $x \mapsto d_g(x)^{-1} n_g(x)$ est analytique sur V^g.

L'atlas naturel vérifie donc les 3 axiomes de définition d'un atlas (cf. [**Lan99**]) :

AT1: Les gV^+, $g \in G$ recouvrent X^+.

AT2: Chaque $\varphi_g(gV^+) = V^+$ est bien ouvert dans V^+ et chaque

$$\begin{aligned}\varphi_g(gV^+ \cap hV^+) &= \{x \in V^+ \mid \exists y \in V^+, g.x = h.y\} \\ &= \{x \in V^+ \mid h^{-1}g.x \in V^+\} \\ &= \{x \in V^+ \mid d_{h^{-1}g}(x) \text{ et } c_{h^{-1}g}(x) \text{ sont inversibles}\}\end{aligned}$$

est ouvert dans V^+.

AT3: Les fonctions de transition

$$\varphi_h {\varphi_g}^{-1} : \varphi_g(gV^+ \cap hV^+) \to \varphi_h(gV^+ \cap hV^+)$$

sont analytiques. En effet,

$$\begin{aligned}\varphi_h \varphi_{g^{-1}}(x) &= \varphi_h(g.x) = \varphi_h(h(h^{-1}g).x) \\ &= h^{-1}g.x = d_{h^{-1}g}(x)^{-1} n_{h^{-1}g}(x)\end{aligned}$$

est analytique.

Il définit donc sur X^+ une structure de variété analytique. La topologie sous-jacente à cette structure est par définition la topologie la plus fine sur X^+ telle que les applications ${\varphi_g}^{-1} : V^+ \to gV^+$ soient continues, et celles-ci sont alors des homéomorphismes.

Il est clair que le groupe G (et donc aussi G^{ext}) agit par difféomorphismes analytiques : soient $g \in G$ et $x \in X^+$. Alors $x \in hV^+$ pour un certain $h \in G$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} hV^+ \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_h"] & ghV^+ \arrow[d, "\varphi_{gh}"'] \\ V^+ \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & V^+ \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 2.15 ([**BN05**]). *Soit (V^+, V^-) une paire de Jordan-Banach. Alors*

(i) Il existe une bijection G-équivariante canonique entre le fibré tangent de la variété analytique X^+ et le fibré naturel défini en 3.2.

(ii) Soit $Y \in \mathfrak{g}$ et $\widetilde{Y}$ la section du fibré naturel associée. Alors le champs de vecteur ξ_Y correspondant dans l'identification précédente est analytique. En outre,

$$[\xi_Y, \xi_Z] = -\xi_{[Y,Z]}.$$

(iii) Soit $g \in G$ tel que $V^g = V^+ \cap g^{-1}V^+ \neq \emptyset$. Alors la différentielle de $Dg(x)$ de g en $x \in V^g$ dans la carte (V^+, φ_e) est

$$Dg(x) = d_g(x)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. (1) Considérons l'application

$$G \times V^+ \to TX^+, \quad (g, u) \mapsto T_{o_+}g(u).$$

Alors (g, u) et (gp, v) ont la même image si et seulement si $u = T_{o_+}p(v)$. Soit $p = he^{\operatorname{ad} w}$ la décomposition de p dans $P^- = HU^-$. Alors on a $T_{o_+}p(v) = T_{o_+}hT_{o_+}e^{\operatorname{ad} w}(v)$. Mais $T_{o_+}e^{\operatorname{ad} w} = \mathrm{Id}_{V^+}$ car

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{ad} w}(tv) - e^{\operatorname{ad} w}(0) &= B^+(tv, w)(tv - Q_+(tv)w) \\ &= tB^+(tv, w)(v - tQ_+(tv)w), \end{aligned}$$

et $T_{o_+}h(v) = h_{11}v$ donc $T_{o_+}p = h_{11} = p_{11}$. Or lorsque l'on identifie le quotient $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1})$ à $\mathfrak{g}_1 = V^+$, le fibré tangent naturel est canoniquement isomorphe au fibré $G \times_\pi V^+$ avec $\pi(p) = p_{11}$, $p \in P^-$. Donc TX^+ est en bijection avec $\mathcal{T}X^+$, et cette bijection est G-équivariante par construction.

(2) L'expression de ξ_Y dans la carte (gV^+, φ_g) est donnée par l'application $\widetilde{Y}^+$, quelque soit g dans G. Celle-ci étant polynomiale, ξ_Y est analytique. Par définition, l'expression de $[\xi_Y, \xi_Z]$ dans la carte (gV^+, φ_g) est

$$[\widetilde{Y}^+, \widetilde{Z}^+](x) = D\widetilde{Z}^+(x)\widetilde{Y}^+(x) - D\widetilde{Y}^+(x)\widetilde{Z}^+(x),$$

et on vérifie que l'on a bien

$$[\widetilde{Y}^+, \widetilde{Z}^+] = -\widetilde{[Y, Z]}^+.$$

(3) Soit $g \in G$. Pour un champs de vecteur ξ sur X^+ on pose $(g^*\xi)(x) := T_xg^{-1}\xi(gx)$. Par G-équivariance on a

$$g^*\xi_Y = \xi_{g^{-1}Y}.$$

Si $g.x \in V^+$, alors dans la carte (V^+, φ_e) on a $\forall u \in V^+$,

$$g^*\xi_u(x) = Dg(x)^{-1}\xi_u(x) = Dg(x)^{-1}(u).$$

Comme, toujours dans cette carte, $\xi_{g^{-1}u}(x) = \widetilde{g^{-1}u}^+(x) = d_g(x)\,u$, il vient $d_g(x) = Dg(x)^{-1}$. $\square$

THÉORÈME 2.16 (**[BN05]**). *Les actions*

$$V^\varepsilon \times X^+ \to X^+, \quad (u, x) \mapsto e^{\operatorname{ad} u}.x,$$

sont analytiques.

4. Intégration d'un certain élément

4.1. Le théorème spectral dans les algèbres de Jordan Banach. Une sous-algèbre W de l'algèbre de Jordan $(V, \circ)$ est dite *fortement associative* lorsque

$$[L(x), L(y)] = 0 \quad \forall x, y \in W,$$

et $(W, \circ)$ est alors une algèbre abélienne (associative et commutative). On dit également que W est *pleine* (dans V) lorsque

$$W^{\times} = V^{\times} \cap W.$$

On alors le théorème suivant (cf. [**MM77**] et aussi [**Hes96**]) :

THÉORÈME 2.17. *Soient $(V, \circ)$ une algèbre de Jordan, et W une sous-algèbre fortement associative maximale. Alors W est pleine.*

Soit $(V, \circ)$ une algèbre de Jordan-Banach complexe unitaire. Soit $x \in V$. La sous-algèbre fermée engendrée par x et l'élément neutre est fortement associative. Elle est donc contenue dans une sous-algèbre fortement associative maximale, et donc pleine, qui est elle aussi fermée. Par suite, l'intersection de toutes les sous-algèbres fermée, fortement associatives et pleines contenant x et l'élément neutre est non-vide. On la note $\mathcal{P}(x)$. C'est la plus petite sous-algèbre de V vérifiant ces propriétés.

Le *calcul fonctionnel holomorphe* associé à x dans V est alors par définition le calcul fonctionnel holomorphe de x dans l'algèbre de Banach abélienne $\mathcal{P}(x)$.

4.2. Action d'un certain élément. Dans cette partie (V^+, V^-) est une paire de Jordan-Banach complexe. Nous calculons le dénominateur et le numérateur en $0 \in V^+$ de $g = e^{\mathrm{ad}(\alpha-\beta)}$ pour $(\alpha, \beta) \in (V^+, V^-)$. Ce calcul est nouveau, et les corollaires 2.20 et 2.21 sont à comparer à [**Kau83**, 2.23] et [**Loo01**].

Pour $(\alpha, \beta) \in (V^{\varepsilon}, V^{-\varepsilon})$ on note $\beta^{n,\alpha}$ la puissance n-ème de β dans l'algèbre de Jordan $V^{(\alpha)}$. Soit ψ la fonction entière

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{(2n)!} z^n.$$

et posons pour $(\alpha, \beta) \in V^{\varepsilon} \times V^{-\varepsilon}$:

$$\psi_{\alpha}(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{(2n)!} \beta^{n,\alpha}.$$

THÉORÈME 2.18. *Soit* $(\alpha,\beta)\in V^+\times V^-$ *et* $g=e^{\mathrm{ad}(\alpha-\beta)}$. *Alors*

$$\begin{aligned} d_g(0) &= B^+(\alpha,\psi_\alpha(\beta)) = B^+(\psi_\beta(\alpha),\beta),\\ c_g(0) &= B^-(\psi_\alpha(\beta),\alpha) = B^-(\beta,\psi_\beta(\alpha)),\\ n_g(0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!}\alpha^{n,\beta}. \end{aligned}$$

Dans la démonstration interviendront les formules collectées dans le lemme suivant (cf. [**Pet76**] pour une démonstration) :

LEMME 2.19. *Soient* $\varepsilon\in\{-1,1\}$ *et* $(\alpha,\beta)\in V^\varepsilon\times V^{-\varepsilon}$. *Alors*

$$\begin{gathered} T^\varepsilon(\alpha,\beta)T^\varepsilon(\alpha,\beta^{n,\alpha}) = T^\varepsilon(\alpha,\beta^{n+1,\alpha})+Q_\varepsilon(\alpha)Q_{-\varepsilon}(\beta,\beta^{n,\alpha}),\\ T^{-\varepsilon}(\beta,\alpha)Q_{-\varepsilon}(\beta^{i,\alpha},\beta^{n-i,\alpha}) = Q_{-\varepsilon}(\beta^{i+1,\alpha},\beta^{n-i,\alpha})+Q_{-\varepsilon}(\beta^{i,\alpha},\beta^{n+1-i,\alpha}). \end{gathered}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Dans cette démonstration nous posons $\beta^n=\beta^{n,\alpha}$. Développons le deuxième membre de la formule annoncée :

$$\begin{aligned} B^+(\alpha,\psi_\alpha(\beta)) &= \mathrm{Id}-T^+(\alpha,\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{(2n)}\beta^n)+Q_+(\alpha)Q_-(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{(2n)!}\beta^n)\\ &= \mathrm{Id}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}T^+(\alpha,\beta^n)+\sum_{1\le i,j\le\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{(2i)!(2j)!}Q_+(\alpha)Q_-(\beta^i,\beta^j)\\ &= \mathrm{Id}+\frac{1}{(2n)!}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}T^+(\alpha,\beta^n)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i}Q_+(\alpha)Q_-(\beta^i,\beta^{n-i})\Big). \end{aligned}$$

D'autre part, $\forall v\in V^+$ et $\forall v\in V^-$

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(-\alpha+\beta)^2v &= T^+(\alpha,\beta)v+2Q_-(\beta)v,\\ \mathrm{ad}(-\alpha+\beta)^2w &= T^-(\beta,\alpha)w+2Q_-(\alpha)w. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit par récurrence que $\forall n\ge 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(-\alpha+\beta)^{2n}v &\in \mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{-1},\\ \mathrm{ad}(-\alpha+\beta)^{2n-1}v &\in \mathfrak{g}_0. \end{aligned}$$

Montrons alors que $\forall n\ge 2$ et $\forall v\in V^+$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(-\alpha+\beta)^{2n}v = T^+(\alpha,\beta^n)v &+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i}Q_+(\alpha)Q_-(\beta^i,\beta^{n-i})v\\ &+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i-1}Q_-(\alpha^i,\beta^{n+1-i})v. \end{aligned}$$

On a bien

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}(-\alpha+\beta)^4 v = T^+(\alpha,\beta)T^+(\alpha,\beta)v + 2Q_-(\beta)T^+(\alpha,\beta)v \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + T^-(\beta,\alpha)2Q_-(\beta)v + 2Q_+(\alpha)2Q_-(\beta)v, \\
&= T^+(\alpha,\beta^2)v + Q_+(\alpha)Q_-(\beta,\beta)v + 4Q_-(\beta)T^+(\alpha,\beta) + 4Q_+(\alpha)Q_-(\beta), \\
&= T^+(\alpha,\beta^2))v + 3Q_+(\alpha)Q_-(\beta,\beta)v + 4Q_-(\beta,\beta^2).
\end{aligned}$$

Supposons donc la propriété vraie au rang n et calculons

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{ad}(-\alpha+\beta)^{2(n+1)}v = \operatorname{ad}(-\alpha+\beta)^2 \operatorname{ad}(-\alpha+\beta)^{2n}v \\
&= \big(T^+(\alpha,\beta)+2Q_-(\beta)\big)\Big(T^+(\alpha,\beta^n)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i}Q_+(\alpha)Q_-(\beta^i,\beta^{n-i})\Big)v \\
&+ \big(T^-(\beta,\alpha)+2Q_+(\alpha)\big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i-1}Q_-(\alpha^i,\beta^{n+1-i})v \\
&= T^+(\alpha,\beta)T^+(\alpha,\beta^n)v+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i}T^+(\alpha,\beta)Q_+(\alpha)Q_-(\beta^i,\beta^{n-i})v \\
&+\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{2i-1}Q_+(\alpha)Q_-(\alpha^i,\beta^{n+1-i})v+2Q_-(\beta)T^+(\alpha,\beta^n)v \\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n}{2i}Q_-(\beta)Q_+(\alpha)Q_-(\beta^i,\beta^{n-i})v \\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i-1}T^-(\beta,\alpha)Q_-(\alpha^i,\beta^{n+1-i})v \\
&= T^+(\alpha,\beta^n)v+Q_+(\alpha)Q_-(\beta,\beta^n)v \\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i}Q_+(\alpha)\left(Q_-(\beta^{i+1},\beta^{n-i})+Q_-(\beta^i,\beta^{n+1-i})\right)v \\
&+\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{2i-1}Q_+(\alpha)Q_-(\alpha^i,\beta^{n+1-i})v+2Q_-(\beta,\beta^{n+1})v \\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n}{2i}Q_-(\beta^{i+1},\beta n+1-i)v \\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\binom{2n}{2i-1}\left(Q_-(\alpha^{i+1},\beta^{n+1-i})+Q_-(\alpha^i,\beta^{n+2-i})\right)v \\
&= T^+(\alpha,\beta^n)v \\
&+\frac{1}{2}Q_+(\alpha)\left(\sum_{i=2}^{n-1}\left(\binom{2n}{2i-2}+2\binom{2n}{2i-1}+\binom{2n}{2i}\right)Q_-(\beta^i,\beta^{n+1-i})v\right. \\
&\qquad\qquad\left.+\left(2+4\binom{2n}{2n-1}+2\binom{2n}{2n-2}\right)Q_-(\beta,\beta^n)v\right) \\
&+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\binom{2n}{2i-3}+2\binom{2n}{2i-2}+\binom{2n}{2i-1}\right)Q_-(\beta^i,\beta^{n+2-i})v \\
&+(2+2n)\,Q_-(\beta,\beta^{n+1})v \\
&= T^+(\alpha,\beta^{n+1})v+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\binom{2n+2}{2i}Q_+(\alpha)Q_-(\beta^i,\beta^{n+1-i})v \\
&\qquad\qquad+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2}\binom{2n+2}{2i-1}Q_-(\alpha^i,\beta^{n+2-i})v.
\end{aligned}
$$

Nous retrouvons bien la propriété au rang $n+1$ et donc la formule annoncée est vraie pour tout $n \geq 2$. La formule pour le dénominateur en résulte. En considérant la paire opposée on obtient la formule pour le codénominateur. Le numérateur est donné par :

$$n_g(0) = pr_1(e^{\operatorname{ad} -\alpha+\beta}(E)).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\operatorname{ad}(-\alpha+\beta)^{2n-1}(E) = 2^{2n-2}(\alpha^n + \beta^n).$$

La propriété est claire pour n=1. Supposons donc la vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(-\alpha+\beta)^{2n}(E) &= \operatorname{ad}(-\alpha+\beta)2^{2n-2}(\alpha^n+\beta^n) \\
&= 2^{2n-2}\big(T^+(\alpha,\beta^n) \oplus (-T^-(\beta^n,\alpha)) \\
&\qquad\qquad + (T^+(\alpha^n,\beta) \oplus (-T^-(\beta,\alpha^n)\big) \\
&= 2^{2n-1}T^+(\alpha^n,\beta) \oplus (-T^-(\alpha,\beta^n)), \\
\operatorname{ad}(-\alpha+\beta)^{2n+1}(E) &= \operatorname{ad}(-\alpha+\beta)2^{2n-1}T^+(\alpha^n,\beta) \oplus (-T^-(\alpha,\beta^n)) \\
&= 2^{2n-1}(T^+(\alpha^n,\beta)\alpha + T^-(\alpha,\beta^n)\beta) \\
&= 2^{2n-1}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule pour le numérateur. □

Le théorème spectral dans l'algèbre de Jordan Banach $\boldsymbol{V^{(\beta)}}$ nous donne

Corollaire 2.20. *Pour $g = e^{\operatorname{ad}(\alpha-\beta)}$ on a $g.o \in V^+$ si et seulement si $\psi^{-1}(1) \cap Sp(\alpha,\beta) = \emptyset$.*

Calculons explicitement $\psi^{-1}(1)$. Remarquons que $\psi(u^2) = 1 - \cosh u$. Alors

$$\psi(u^2) = 1 \Leftrightarrow \cosh u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^u(1+e^{-2u}) = 0 \Leftrightarrow u \in i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}.$$

Donc

$$\psi^{-1}(1) = \{-\frac{\pi^2}{4} - k(k+1)\pi^2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Corollaire 2.21. *Si $d_g(0)$ est inversible alors*

$$g = e^{\operatorname{ad} g.o_+}he^{-\operatorname{ad} g^{-1}.o_-}$$

avec

$$(h_{11}, h_{-1-1}) = \big(B^+(\psi_\beta(\alpha),\beta)^{-1}, B^-(\beta,\psi_\beta(\alpha))\big).$$

En particulier on a $h \in H$ et $g \in G$.

CHAPITRE 3

L'espace symétrique associé à un système triple de Jordan

1. Espaces symétriques banachiques

Un *espace symétrique* banachique est une variété banachique M munie d'une application régulière $\mu : M \times M \to M$, appelée multiplication, telle que, si l'on pose $\sigma_x = \mu(x, .)$,

S1: $\mu(x, x) = x$

S2: ${\sigma_x}^2 = id$

S3: $\sigma_x(\mu(y, z)) = \mu(\sigma_x(y), \sigma_x(z))$

S4: $T_x\sigma_x = -\operatorname{Id}_{T_xM}$

Grâce au théorème des fonctions implicites, l'axiome (S4) est équivalent (les trois premiers étant satisfaits) à l'axiome

S4': x est un point fixe isolé de σ_x.

Un morphisme de l'espace symétrique (M, μ) dans l'espace symétrique (N, ν) est une application régulière $f : M \to N$ respectant les multiplications :

$$\forall\, x, y \in M, \quad f(\mu(x, y)) = \nu(f(x), f(y)).$$

La droite numérique $\mathbb{R}$ (et plus généralement tout espace de Banach sur $\mathbb{R}$) est un espace symétrique avec la multiplication $(x, y) \mapsto 2x - y$. Une *géodésique* de M est un morphisme d'espace symétrique de $\mathbb{R}$ dans M.

En dimension finie il existe une unique connection, dite canonique, invariante par toute les symétries (cf. [**Loo69**]). Les géodésique telles que nous venons de les définir sont les géodésiques pour cette connection. Sur les variétés banachiques on ne parle plus de connection mais de jet (cf. [**Lan99**]).

Proposition 3.1. *Le fibré tangent $(TM, T\mu)$ est encore un espace symétrique. Dans chaque fibre T_mM le produit est donné par*

$$T\mu(v, w) = 2v - w.$$

On note encore $\sigma_v := T\mu(v, .)$ la symétrie en $v \in TM$. Notons par ailleurs $Z : M \to TM$ la section nulle : $\forall m \in M$, $Z(m) = 0_m \in T_mM$.

THÉORÈME 3.2 ([**Nee02**], 3.4). *L'application*

$$F : TM \to TTM, \quad F(v) := -T(\sigma_{\frac{v}{2}} \circ Z)(v)$$

définit un jet sur M.

La théorie des équations différentielles ordinaires dans les espaces de Banach assure pour tout $(m, v) \in T_m M$ l'existence et l'unicité d'une F-géodésique $\gamma_{m,v} : I_{(m,v)} \to M$ telle $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$ et telle que l'intervalle ouvert $I_{(m,v)}$ soit maximal. L'application exponentielle est alors définie sur l'ensemble (ouvert) $\mathcal{D}_{\mathrm{Exp}}$ des vecteurs tangents à M tel que $1 \in I_{(m,v)}$ par

$$\mathrm{Exp}_m(v) = \gamma_{(m,v)}(1).$$

La dérivée de la restriction $\mathrm{Exp}_m : T_m M \to M$ en 0_m est l'identité, et donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage de m dont chaque point est sur une unique géodésique issue de m. Un tel voisinage sera dit *étoilé*.

THÉORÈME 3.3 ([**Nee02**], 3.6). *Soit* (M, μ) *un espace symétrique banachique et* F *la connection construite au théorème précédent. Alors*

(i) $\mathrm{Aut}(M, \mu) = \mathrm{Aut}(M, F)$.

(ii) F *est l'unique jet invariant par toutes les symétries.*

(iii) (M, F) *est géodésiquement complet ie.* $\mathcal{D}_{\mathrm{Exp}} = TM$, *et les* F-*géodésiques sont les géodésiques au sens des espaces symétriques.*

(iv) Soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$ *une géodésique. Alors les applications* $\tau_{\alpha,s} := \sigma_{\alpha(\frac{s}{2})} \circ \sigma_{\alpha(0)}$, $s \in \mathbb{R}$, *sont des automorphismes de* (M, μ) *tels que*

$$\tau_{\alpha,s}(\alpha(t)) = \alpha(t + s),$$

et $T_{\alpha(t)}\tau_{\alpha,s} : T_{\alpha(t)}M \to T_{\alpha(t+s)}M$ *est le transport parallèle le long de* α.

Fixons $o \in M$. Du Théorème 3.3 (*iv*) on déduit que la géodésique passant par o et de vecteur tangent v en o est la courbe intégrale passant par o du champ de vecteur

$$\widetilde{v} = \frac{1}{2}\sigma_v \sigma_{0_o} \circ Z.$$

Le crochet triple défini par

$$[u, v, w] = [[\widetilde{u}, \widetilde{v}], \widetilde{w}](o)$$

est un *système triple de Lie* sur $T_o M$. Réciproquement, à tout système triple de Lie de dimension fini on associe un espace symétrique (pointé) connexe et simplement connexe de sorte que les deux catégories sont équivalentes.

Le lemme suivant nous sera utile deux fois.

LEMME 3.4. *Soit D un ouvert non vide d'un espace symétrique banachique connexe M tel que $\sigma_x(D) \subset D$ pour tout $x \in D$. Alors $D = M$.*

DÉMONSTRATION. Si D est distinct de M, soit x dans la frontière de D. Considérons alors un voisinage étoilé de x. Il existe un point y de ce voisinage qui est dans D. Alors le milieu de x et y sur la géodésique passant par x n'est pas dans D car la symétrie qu'il définit envoie y sur x, et alors par hypothèse x serait dans D, ce qui n'est pas le cas. Pour la même raison le milieu de ce point et de y n'y est pas non plus. En prenant ces milieux successifs on obtient une suite de points dans le complémentaire de D qui converge vers y ce qui est impossible et donc $D = M$. □

2. Involutions, systèmes triples de Jordan, et géométries polaires

2.1. Soit $V = (V^+, V^-)$ une paire de Jordan sur $\mathbb{K}$. On reprend l'ensemble des notations du chapitre précédent.

Une *involution* $\nu = (\nu^+, \nu^-)$ de la paire de Jordan $V = (V^+, V^-)$ est un isomorphisme de V sur la paire opposée V^{op} tel que $\nu^2 = Id_V$, c'est-à-dire tel que

$$\nu^- = (\nu^+)^{-1}.$$

Une involution définit sur V^+ une structure de *système triple de Jordan*, c'est-à-dire une application trilinéaire T sur V^+ symétrique en les variable extérieures et vérifiant l'identité de Jordan, où l'on a posé $T(x,y)z = T(x,y,z)$,

$$T(u,v)T(x,y) = T(T(u,v)x,y) - T(x,T(v,u)y) + T(x,y)T(u,v).$$

Il suffit pour cela de poser

$$T(x,y) := T^+(x, \nu^+(y)).$$

Réciproquement, au système triple de Jordan (E,T) on associe la paire de Jordan (E,E) munie de l'involution $\nu = (\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$. Dans un système triple de Jordan on utilise également les notations

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \frac{1}{2}T(x,y) \\ \{x,y,z\} &= L(x,y)z \\ Q(x)y &= \{x,y,x\}. \end{aligned}$$

et

$$B(x,y) = B^+(x, \nu^+(y)).$$

Sur le plan géométrique, une involution définit sur (X^+, X^-) une *polarité*, c'est-à-dire une identification

$$p : X^+ \to X^-$$

telle que $p(o_+) = o_-$ et telle que (p, p^{-1}) soit un isomorphisme de la *paire affine* (X^+, X^-) sur la paire opposée (X^-, X^+) (voir la prochaine section pour une définition). Il faut pour cela associer à ν une involution de l'algèbre de Lie 3-graduée $\mathfrak{g} = KKT(V)$ (ie. un automorphisme involutif renversant la graduation) en posant $\forall (u, X_+ \oplus X_-, v) \in \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_{-1}$,

$$\theta(u + X_+ \oplus X_- + v) = \nu^-(v) + \nu^- X_- \nu^+ \oplus \nu^+ X^+ \nu^- + \nu^+(u).$$

On obtient alors par conjugaison une involution encore notée θ sur G^{ext} et on définit $p : X^+ \to X^-$ par la formule

$$p(gP^-) = \theta(g)P^+.$$

Remarquons que dans le modèle des 3-filtrations on a simplement $p(\mathfrak{f}) = \theta(\mathfrak{f})$. Alors le sous-groupe $(G^{ext})^\theta$ des éléments de G^{ext} invariants par θ agit sur l'espace

$$M^{(p)} := \{x \in X^+ \mid x \top p(x)\}$$

qui est par définition la *géométrie polaire* associée à ν.

Lorsque (V^+, V^-) est une paire de Jordan-Banach, et lorsque ν est continue, $M^{(p)}$ est un ouvert de X^+. Nous allons montrer que l'on peut munir $M^{(p)}$ d'une structure d'espace symétrique banachique.

2.2. Paires affines. Une *paire affine* est la donnée d'une paire d'ensembles (X, X') et d'une relation $M \subset X \times X'$ appelée *transversalité* telle que pour tout $x \in X$ et $x' \in X'$, il existe sur

$$V_{x'} = \{y \in X \mid (y, x') \in M\}$$

et sur

$$V_x = \{y' \in X' \mid (x, y') \in M\}$$

une structure d'espace affine (sur $\mathbb{K}$) (cf. [**Ber02**]).

Un morphisme de la paire affine (X, X', M) sur la paire affine (Y, Y', N) est une paire d'application

$$(g, g') : (X, X') \to (Y, Y')$$

telle que $(g, g')M \subset N$ et telle que pour tout $x \in X$ et $x' \in X'$,

$$g : V_{x'} \to V_{gx'} \quad \text{et } g' : V_x \to V_{g'x}$$

sont des applications affines.

Le théorème 2.7 énonce que la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F}, \top)$ est une paire affine et le théorème 2.8 énonce que $(X^+, X^-, \top)$ est une sous-paire affine de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

Soit (X, X') une paire affine. Pour les triplets (x, a, y) tels que $(x, a) \in M$ et $(y, a) \in M$ on définit

$$\mu_r(x, a, y) := (1 - r)x + ry,$$

où la dernière expression se rapporte à la structure affine de V_a, et on définit μ'_r de manière duale. Alors une application $(g, g') : (X, X') \mapsto$

(Y, Y') préservant la transversalité est un morphisme de paires affines si et seulement si l'on a

$$g\mu_r(x, a, y) = \mu_r(gx, g'a, gy),$$

ainsi que l'identité duale.

Considérons désormais la paire $(X, X') = (X^+, X^-)$.

PROPOSITION 3.5. *Tout élément de $g \in G^{ext}$ définit un automorphisme $(g_+, g_-) := (g, g)$ de la paire (X^+, X^-).*

DÉMONSTRATION. Montrons que pour tout $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, (g, g) est un automorphisme de la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$. Il s'agit de montrer que pour tout $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}$, g induit un isomorphisme de l'espace affine $(\mathfrak{f}^\top, \mathfrak{f}_1)$ sur l'espace affine $((g\mathfrak{f})^\top, (g\mathfrak{f})_1)$. Soit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{f}^\top$ et $Z \in \mathfrak{f}_1$. Alors

$$g(e^{\mathrm{ad}\, Z}.\mathfrak{e}) = ge^{\mathrm{ad}\, Z}g^{-1}g\mathfrak{e} = e^{\mathrm{ad}\, gZ}.g\mathfrak{e}.$$

□

On peut reformuler la proposition précédente en disant que la structure affine induite sur $gV^+ = V_{g.o_-}$ par la carte (gV^+, φ_g) est isomorphe à la structure affine de $V_{g.o_-}$.

Notons $r_{x,a} := \mu_r(x, a, .)$ et $r_{a,x} := {\mu'}_r(a, x, .)$ pour tout $(x, a) \in (X^+ \times X^-)^\top$.

PROPOSITION 3.6. *Pour tout $r \in \mathbb{K}^*$ et tout $(x, a) \in (X^+ \times X^-)^\top$ la paire d'applications*

$$(r_{x,a}, r_{a,x}^{-1})$$

admet une extension en un automorphisme de la paire affine (X^+, X^-). De plus cet automorphisme provient d'un élément de G^{ext}. Lorsque V est une paire de Jordan-Banach l'application

$$\begin{aligned} (X^+ \times X^-)^\top \times X^+ &\to X^+ \\ (x, a, y) &\mapsto r_{x,a}y \end{aligned}$$

est analytique.

DÉMONSTRATION. Pour tout $r \in \mathbb{K}^*$ et tout $u \in V^+ = V_{o_-}$

$$h^{E,r}u = ru = \mu_r(o_+, o_-, u)$$

et pour tout $u \in V^- = V_{o_+}$

$$h^{E,r}u = r^{-1}u = \mu_{r^{-1}}(o_-, o_+, u)$$

donc $h^{E,r}$ définit un automorphisme de la paire (X^+, X^-) qui étend $(r_{o_+,o_-}, {r^{-1}}_{o_-,o_+})$. Si $(x, a) \in (X^+, X^-)^\top$, $(x, a) = (g.o_+, g.o_-)$ pour $g \in G$. Alors $gh^{E,r}g^{-1}$ étend $(r_{x,a}, {r^{-1}}_{a,x})$. Remarquons que l'on peut choisir $g = e^{\mathrm{ad}\, x}e^{\mathrm{ad}\, e^{-\mathrm{ad}\, x}a}$. La deuxième assertion résulte alors du théorème 2.16. □

La première assertion de la proposition précédente fait partie des axiomes définissant la notion de *géométrie projective généralisée* (cf. [**Ber02**]).

2.3. L'espace symétrique d'une géométrie polaire. On suppose dans toute la suite que V est une paire de Jordan-Banach. En appliquant la proposition 3.6 aux paires $((-1)_{x,p(x)}, (-1)_{p(x),x})$, $x \in M^{(p)}$, on obtient :

THÉORÈME 3.7 ([**BN05**]). *La variété $M^{(p)}$ munie de l'application*

$$\mu(x, y) := \mu_{-1}(x, p(x), y)$$

est un espace symétrique banachique. De plus le système triple de Lie associé à $(M^{(p)}, o_+)$ vérifie

$$[x, y, z] = T(x, y, z) - T(y, x, z).$$

DÉMONSTRATION. Il reste à établir la formule reliant le système triple de Lie au système triple de Jordan. Elle découle de l'égalité

$$\widetilde{v} = v + \nu(v),$$

où $\widetilde{v}$ est défini après le théorème 3.3. On renvoie à [**BN05**, Theorem 6.3 (ii)] pour une démonstration. □

Dans la suite, étant donnée une involution ν, on considère l'espace symétrique $M^{(-p)}$ associé à la polarité définie par $-\nu$, mais le système triple de Jordan T est celui associé à ν. Ainsi, les géodésiques issues de o_+ sont les courbes intégrales des champs

$$\widetilde{v} = v - \nu(v),$$

ie. les courbes

$$t \mapsto e^{\operatorname{ad} t(v-\nu(v))}.$$

Notons $v^{(2n-1)} = v^{n,\nu(v)}$ les puissances impaires dans le système triple de Jordan associé à ν. Lorsque $e^{\operatorname{ad}(v-\nu(v))}o_+ \in V^+$, on pose,

$$\tanh v := e^{\operatorname{ad}(v-\nu(v))}.o_+ = B^+(\psi_{\nu(v)}(v), v)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!} v^{(2n-1)}\right),$$

et on a comme dans [**Ber00**, X.4],

$$\tanh v = (\cosh v)^{-1} \sinh v,$$

où

$$\cosh v := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \big(Q_+(v)\nu^+\big)^n$$

et

$$\sinh v := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} v^{(2n-1)},$$

lorsque $\cosh v$ est inversible.

3. Involutions positives

3.1. Une *involution antilinéaire* d'une paire de Jordan complexe est une involution de la paire de Jordan réelle sous-jacente qui est $\mathbb{C}$-antilinéaire. Le système triple de Jordan associé est alors $\mathbb{C}$-linéaire en les variables extérieurs et $\mathbb{C}$-antilinéaire en la variable du milieu. En dimension finie un tel système triple de Jordan est appelé *hermitien* mais nous éviterons cette terminologie car l'usage lui a donné un autre sens pour les systèmes triples de Jordan-Banach. Aussi dans toute la suite un système triple de Jordan-Banach (sur $\mathbb{C}$) sera implicitement $\mathbb{C}$-antilinéaire en la variable du milieu. Si E est un tel système triple, on note $\overline{E}$ l'espace conjugué de E. Alors l'application $\nu : E \to \overline{E}$ qui identifie les espaces vectoriels réels sous-jacent est une involution antilinéaire de la paire de Jordan $(E, \overline{E})$ telle que le système triple associé est E.

Un système triple de Jordan-Banach complexe E est alors dit hermitien lorsque pour tout $x \in E$, l'opérateur $L(x,x)$ est hermitien, ie. $e^{itL(x,x)}$ est une isométrie de E pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le spectre d'un tel opérateur est alors réel. On dit alors que E est hermitien positif lorsque pour tout $x \in E$ le spectre de $L(x,x)$ est positif ou nul. Soit $V = (V^+, V^-)$ une paire Jordan-Banach complexe et ν une involution antilinéaire sur V. On dit que ν est hermitienne si le système triple associé est hermitien et on dit que ν est positive si le système triple est hermitien positif.

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre (associative) de Banach complexe. Pour $x \in B$, on note $sp(x, \mathcal{B})$ le spectre de x dans $\mathcal{B}$. Soit E un espace de Banach complexe. On note alors $\mathrm{L}(E)$ l'algèbre de Banach des applications linéaires continues de E. Lorsque $\mathcal{B} = \mathrm{L}(E)$ et $T \in \mathrm{L}(E)$, on note parfois $sp(T) = sp(T, \mathrm{L}(E))$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité. On note $\rho(T)$ le rayon spectral de T.

Soit $V = (V^+, V^-)$ est une paire Jordan-Banach et ν une involution hermitienne. Soit $E := V^+$ le système triple hermitien associé. Rappelons que l'on note $L(x,y) = \frac{1}{2}T^+(x, \nu(y))$. Posons

$$D = \{x \in V^+ \mid sp(L(x,x)) < 1\}$$

D est circulaire et étoilé par rapport à 0. Il est donc connexe et simplement connexe. Les théorèmes suivant sont les résultats principaux de ce chapitre :

THÉORÈME 3.8 (W.Kaup). *Si ν est positive, alors D est homogène sous l'action de ses automorphismes analytiques.*

THÉORÈME 3.9. *Si ν est positive, alors $D \subset X^+$ est la composante connexe contenant o_+ de l'espace symétrique $M^{(-p)}$ pour la polarité associée à $-\nu$.*

On appelle *JB^*-triple* un système triple de Jordan Banach hermitien positif E tel que pour tout $x \in E$,

$$|x| = \rho(L(x,x))^{\frac{1}{2}}.$$

Autrement dit, le domaine D est la boule unité de E.

COROLLAIRE 3.10 (W.Kaup). *La boule unité d'un JB^*-triple est un domaine borné symétrique.*

3.2. Deux résultats sur les systèmes triples de Jordan. Soit V une algèbre de Jordan-Banach unitaire. On note $C(x)$ la sous-algèbre engendrée par x et l'élément neutre. Soit $\mathcal{P}(x)$ la plus petite sous-algèbre fermée, fortement associative et pleine contenant $C(x)$. On a alors

$$Sp(x,V) = Sp(x,\mathcal{P}(x)) = sp(x,\mathcal{P}(x)) \subset sp(x,C(x)) = sp(L(x)_{|C(x)}),$$

avec égalité lorsque $Sp(x,V)$ est réel.

Le résultat important suivant est du à J. Martinez Moreno (cf. [**MM80**] et [**Kau83**]) :

THÉORÈME 3.11. *Soit V une algèbre de Jordan-Banach complexe unitaire. Pour $x \in V$ on a*

(i) $sp(L(x)) \subset \frac{1}{2}(Sp(x) + Sp(x))$,

(ii) $sp(P(x)) \subset Sp(x)Sp(x)$.

Soit (V^+, V^-) de Jordan-Banach. Soit $(x,y) \in V^+$. Alors

$$L^+(x,y) := \frac{1}{2}T^+(x,y)$$

est l'opérateur de multiplication dans $V^{(y)}$ et on note $C(x,y)$ le plus petite sous-espace fermé de V^+ contenant x et stable par $L^+(x,y)$, ie. la sous-algèbre fermée de $V^{(y)}$ engendrée par x. Dans $V^{(y)} \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$, la sous-algèbre fermée engendrée par x et $\mathbf{1}$ est $C(x,y) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$. Alors

$$Sp(x,y) \subset sp(L^+(x,y), C(x,y) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}) = sp(L^+(x,y), C(x,y)) \cup \{0\},$$

avec égalité si $Sp(x,y)$ est réel.

COROLLAIRE 3.12. *Soit (V^+, V^-) une paire de Jordan Banach. Alors $\forall\,(x,y) \in (V^+, V^-)$,*

(i) $sp(L^+(x,y)) \subset \frac{1}{2}(Sp(x,y) + Sp(x,y))$,

(ii) $sp(Q_+(x)Q_-(y)) \subset Sp(x,y)Sp(x,y)$,

(iii) $sp(B^+(x,y)) \subset (1 - Sp(x,y))(1 - Sp(x,y))$.

Considérons maintenant un système triple de Jordan-Banach hermitien positif E et posons pour tout x dans E,

$$|x|_\infty = \rho(L(x,x))^{\frac{1}{2}}.$$

PROPOSITION 3.13 ([**Kau83**]). *L'application $x \mapsto |x|_\infty$ définit une semi-norme continue sur E telle que pour tout x et y dans E,*

$$\rho(L(x,y)) \leq |x|_\infty \, |y|_\infty \, .$$

3.3. Démonstration des théorèmes 3.8 et 3.9. Soient $V = (V^+, V^-)$ une paire de Jordan-Banach complexe, ν une involution hermitienne, $M^{(-p)}$ l'espace symétrique associé à $-\nu$, et E le système triple de Jordan-Banach hermitien associé à ν. Pour tout x de E , le spectre de $L(x,x)$ est réel. On a d'après le corollaire 3.12,

$$D = \{x \in V^+ \mid Sp(x,x) < 1\}.$$

LEMME 3.14. *La composante connexe de*

$$V^+ \cap M^{(-p)} = \{x \in V^+ \mid B(x,x) \text{ est inversible}\}$$

contenant o_+ est D.

DÉMONSTRATION. Si $x \in D$ alors 1 n'est pas dans $Sp(x,x)$ et donc x est dans $V^+ \cap M^{(-p)}$. Comme D est connexe et contient o_+, D est dans la composante connexe de $V^+ \cap M^{(-p)}$ contenant o_+. Si l'inclusion était strict, soit x un élément de la frontière de D dans $V^+ \cap M^{(-p)}$. Mais alors $1 \in Sp(x,x)$, ce qui est contradictoire. $\square$

La proposition suivante utilise le calcul fonctionnel holomorphe des opérateurs sur les espaces de Banach (cf. [**Kau77**] et [**Upm85**, 20.6]).

PROPOSITION 3.15. *L'application $\alpha \mapsto \tanh \alpha$ définit une bijection bianalytique réelle entre l'ensemble*

$$\Omega = \{\alpha \in V^+ \mid Sp(\alpha, \alpha) > -\frac{\pi^2}{4}\}$$

et D.

La proposition précédente assure que tout point de D est atteint par une géodésique issue de o_+, et que lorsque ν est positive, tout point de D est sur une et une seule géodésique issue de o_+.

Supposons désormais ν positive. Alors

$$D = \{x \in V^+ \mid |x|_\infty < 1\}.$$

Notons

$$Q := \{e^{\operatorname{ad}(\alpha - \nu(\alpha))} \in G \mid \alpha \in V^+\}.$$

Alors $Q.o_+ = D$. De plus on a

PROPOSITION 3.16. *Lorsque ν est positive, on a $Q(D) \subset D$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha \in V^+$. Posons $c = \tanh \alpha$. Alors

$$e^{\operatorname{ad}(\alpha - \nu(\alpha))} = e^{\operatorname{ad} c} h e^{\operatorname{ad} -\nu(c)},$$

donc $e^{\operatorname{ad}(\alpha - \nu(\alpha))}.x \in V^+$ si et seulement $x \top \nu(c)$. Mais si x in D, on a $|x|_\infty < 1$ et donc d'après 3.13,

$$\rho(L(x,-c)) \leq |x|_\infty \, |-c|_\infty < 1$$

et donc d'après 3.12, en notant Δ le disque unité complexe,

$$\sigma(B^{+}(x, -\nu(c))) \subset (1-\Delta)(1-\Delta) \subset \mathbb{C}^{*}.$$

Donc $(x, -\nu(c))$ est quasi-inversible, et $x \top \nu(c)$. □

Le domaine D est donc homogène. Soit maintenant $\mathcal{D}$ la composante connexe de $M^{(-p)}$ contenant $o = o_{+}$. C'est un espace symétrique connexe. Le domaine D est inclus dans $\mathcal{D}$, et il est stable par toutes les symétries σ_x de $\mathcal{D}$ telles que $x \in D$. En effet, la symétrie σ_o laisse D stable, et il en est de même pour tout les symétrie $\sigma_{g.o} = g\sigma_o g^{-1}$ où $g \in Q$. On conclut alors grâce au lemme 3.4 que $D = \mathcal{D}$.

CHAPITRE 4

Domaines bornés symétriques

1. Domaines bornés symétriques

Un ouvert connexe et borné $\mathcal{D}$ d'un espace de Banach E est appelé domaine borné symétrique si à chacun de ses points est associé un biholomorphisme involutif de $\mathcal{D}$ dont il est un point fixe isolé.

Dans la suite on note $\mathrm{L}(E)$ l'algèbre de Banach des applications linéaires continues de E, et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathrm{L}(E)$.

1.1. Le groupe des automorphismes de $\mathcal{D}$ et son algèbre de Lie. Lorsque M est une variété banachique complexe, on note $\mathrm{Aut}(M)$ le groupe des biholomorphismes de M, et on note $\mathrm{aut}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes complets sur M.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné symétrique. Alors $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ est un groupe topologique pour la topologie de la *convergence uniforme locale*. Le théorème suivant a été démontré (indépendamment) par H. Upmeier et J-P. Vigué.

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné symétrique. Alors*

(i) L'ensemble $\mathrm{aut}(\mathcal{D})$ *est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de $\mathcal{D}$, qui peut être munie d'une norme qui en fait une algèbre de Lie-Banach.*

(ii) Le groupe (topologique) $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ *est un groupe de Lie-Banach agissant analytiquement sur $\mathcal{D}$, et dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'algèbre de Lie-Banach* $\mathrm{aut}(\mathcal{D})$.

En dimension finie, tout biholomorphisme de $\mathcal{D}$ est une isométrie pour la métrique de Bergman. Dans le cadre banachique on utilise la *métrique de Caratheodory*. Soit Δ le disque unité complexe, δ une métrique sur Δ invariante par $\mathrm{Aut}(\Delta)$, et $\mathrm{Hol}(\mathcal{D},\Delta)$ l'ensemble des applications holomorphes de $\mathcal{D}$ dans Δ. Alors

$$\delta_{\mathcal{D}}(m,n) := \sup\left\{\delta(f(m),f(n)) \mid f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D},\delta)\right\}.$$

définit une métrique sur $\mathcal{D}$ uniformément équivalente à la métrique induite par la norme de E et donc *compatible* (cf. [**Upm85**, 12.1-12.4]).

Une *variété banachique métrique complexe* (M,d) est une variété banachique complexe M munie d'une métrique compatible d. On note $\mathrm{Aut}(M,d)$ le groupe des isométries biholomorphes de (M,d). C'est un groupe topologique pour la topologie de la convergence uniforme locale. Par construction tout biholomorphisme de $\mathcal{D}$ est une isométrie et donc $(\mathcal{D}, \delta_{\mathcal{D}})$ est une variété banachique métrique complexe telle que $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{D}, \delta_{\mathcal{D}})$. Le théorème précédent peut alors se déduire (en partie) du résultat plus général suivant.

THÉORÈME 4.2 ([**Upm76**]). *Soit (M, d) variété banachique métrique complexe. Alors*

(i) L'ensemble

$$\mathrm{aut}(M, d) = \{\xi \in \mathrm{aut}(M) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \exp t\xi \in \mathrm{Aut}(M, d)\}$$

est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M et c'est une algèbre de Lie-Banach pour une norme convenable.

(ii) Il existe une topologie sur $\mathrm{Aut}(M, d)$ qui en fait un groupe de Lie agissant analytiquement sur M. Son algèbre de Lie s'identifie à l'algèbre de Lie-Banach $\mathrm{aut}(M, d)$.

La topologie dont *(ii)* énonce l'existence est en générale strictement plus fine que la topologie de la convergence uniforme locale, mais pour les domaines bornés symétriques les deux topologies coïncident (cf. corollaire 4.13). Notons que la démonstration de J.P. Vigué utilise aussi la métrique de Caratheodory (cf. [**Vig76**]).

Fixons un point $o \in \mathcal{D}$. On a les versions topologiques suivantes du *théorème d'unicité de Cartan* et de sa version infinitésimale :

THÉORÈME 4.3 ([**Vig76**]).

(i) L'application

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) \to \mathcal{D} \times \mathrm{GL}(E), \quad g \mapsto (g(o), Dg(o)),$$

est un homéomorphisme sur son image.

(ii) L'application

$$\mathrm{aut}(\mathcal{D}) \to E \times \mathrm{L}(E), \quad \xi \mapsto (\xi(o), D\xi(o)),$$

est un homéomorphisme sur son image.

Tout élément $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ définit un automorphisme de $\mathfrak{l} = \mathrm{aut}(\mathcal{D})$ par la formule

$$(g_*\xi)(g(x)) = Dg(x)\xi(x).$$

Soit s_o la symétrie associée à o. Alors $(s_o)_*^2 = \mathrm{Id}$ donc

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{q},$$

où

$$\mathfrak{k} = \{\xi \in \mathfrak{l} \mid (s_o)_*\xi = \xi\},$$
$$\mathfrak{q} = \{\xi \in \mathfrak{l} \mid (s_o)_*\xi = -\xi\}.$$

Alors l'application

$$\mathfrak{l} \to E, \quad \xi \mapsto \xi(o)$$

a pour noyau $\mathfrak{k}$ et on a le résultat capital suivant :

THÉORÈME 4.4 ([**Vig76**]). *L'application*

$$\mathfrak{q} \to E, \quad \xi \mapsto \xi(o),$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach.

COROLLAIRE 4.5. $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ *agit transitivement sur* $\mathcal{D}$.

COROLLAIRE 4.6. *Le domaine* $\mathcal{D}$ *est un espace symétrique banachique, ie.*

$$(x, y) \mapsto s_x(y)$$

est analytique (réelle en la première variable et complexe en la seconde).

1.2. La carte canonique, la réalisation de Harish-Chandra. L'algèbre de Lie-Banach $\mathfrak{l}$ est purement réelle :

LEMME 4.7. *On a*

$$\mathfrak{l} \cap i\mathfrak{l} = \{0\}.$$

THÉORÈME 4.8 ([**Vig76**]). *Il existe une carte locale au voisinage de* $o \in \mathcal{D}$ *envoyant* o *sur* $0 \in E$ *dans laquelle, si l'on note* ξ_v *l'unique élément de* $\mathfrak{q}$ *tel que* $\xi_v(0) = v$, *le champ* $\eta_v = \frac{1}{2}(\xi_v - i\xi_{iv})$ *est constant égale à* v. *Dans une telle carte, les automorphismes de* $\mathcal{D}$ *fixant* o *sont représentés par des automorphismes linéaires, les champs de* $\mathfrak{k}$ *sont linéaires et les champs de* $\mathfrak{q}$ *s'écrivent*

$$\xi_v(z) = z - Q(z)v$$

où $Q : E \mapsto \mathrm{L}(\overline{E})$ *est quadratique.*

Posons

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}\big(Q(x + y)z - Q(x)z - Q(y)z\big).$$

Alors les règles du crochet sur $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{q}$ impliquent que

$$(x, y, z) \mapsto \{x, y, z\}$$

est un système triple de Jordan-Banach.

Les résulats précédents s'étendent aux varitétés banachique métriques complexes symétriques (cf. [**Vig82**]). Dans le cas des domaines bornés symétriques, Vigué démontre de plus le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 4.9 ([**Vig76**]). *La carte locale précédente se prolonge en un isomorphisme de* $\mathcal{D}$ *sur un domaine borné cerclé et étoilé par rapport à l'origine.*

L'existence d'une réalisation comme domaine borné cerclé et étoilé par rapport à l'origine avait été démontrée en dimension finie par Elie Cartan (en utilisant la classification des domaines bornés symétriques) puis Harish-Chandra.

Dans toute la suite on considère toujours $\mathcal{D}$ dans cette réalisation.

On note $\mathrm{Aut}(E)$ le groupe des automorphismes (continus) du système triple de Jordan-Banach E, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}(E)$ tels que pour tout $x, y, z \in E$,

$$\{gx, gy, gz\} = g\{x, y, z\}$$

, et on note $\mathrm{aut}(E)$ l'algèbre de Lie des dérivations de E. On note $\mathrm{U}(E) := \mathrm{U}(E, |\cdot|)$ le groupe des isométries surjectives de E.

PROPOSITION 4.10. *Un automorphisme de $\mathcal{D}$ fixe l'origine si et seulement si c'est un automorphisme du système triple de Jordan-Banach associé, ie.*

$$\mathrm{Aut}(D)_0 = \mathrm{Aut}(E)$$

et donc

$$\mathfrak{k} = \mathrm{aut}(E).$$

COROLLAIRE 4.11. *Soit E un JB^*-triple. Alors*

$$\mathrm{Aut}(E) = \mathrm{U}(E).$$

DÉMONSTRATION. On a $\mathrm{Aut}(E) \subset \mathrm{U}(E)$. De plus, la boule unité de E est un domaine borné symétrique, et le système triple associé est celui de E. Donc $\mathrm{U}(E) \subset \mathrm{Aut}(E)$. □

Le théorème suivant montre que $\mathrm{Aut}(E)$ est un groupe de Lie pour la topologie induite de celle de la norme de E.

THÉORÈME 4.12 ([**HK77**]). *Soit A une algèbre de Banach associative unitaire, $A^\times$ le groupe des éléments inversibles de A et G un sous-groupe de A, algébrique de degré d au sens où*

$$G = \{g \in A^\times \mid \forall f \in F \ f(g, g^{-1}) = 0\}$$

pour une famille F de polynomes (à valeurs dans un espace de Banach) de degré plus petit que d. Alors G est un groupe de Lie-Banach dans la topologie induite.

COROLLAIRE 4.13. *La topologie sur* $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ *pour laquelle c'est un groupe de Lie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme locale.*

2. Le théorème de Kaup

2.1. Un critère de positivité pour les systèmes triples de Jordan hermitiens.

LEMME 4.14 ([**Kau83**], lemma 3.6). *Soit E un système triple de Jordan Banach hermitien tel que*

$$x \in E,\ \sigma(L(x,x)) \leq 0 \Rightarrow x = 0.$$

Alors E est positif.

2.2. Le théorème de Kaup. Dans cette partie nous démontrons ce théorème du à W. Kaup :

THÉORÈME 4.15. *Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné symétrique d'un espace de Banach E. Le système triple de Jordan-Banach associé à $\mathcal{D}$ est un JB^*-triple pour une norme équivalente à celle de E, et $\mathcal{D}$ est biholomorphe à la boule unité de E pour cette norme.*

Supposons $\mathcal{D}$ dans sa réalisation comme domaine borné cerclé étoilé. Soit $(E, \overline{E})$ la paire Jordan et $\nu = (\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ l'involution antilinéaire associés au système triple de Jordan Banach (E, L), où $L(x,y)z = \frac{1}{2}T(x,y,z)$. Soit $M^{(-p)}$ l'espace symétrique associé à $-\nu$. Tout d'abord, nous voulons une norme (équivalente à celle de départ) pour laquelle (E, L) soit un système triple de Jordan-Banach hermitien. Pour cela nous suivons H. Upmeier (cf. [**Upm87**, 2]) et utilisons la norme de jauge $x \to ||x||$ associée a l'adhérence de l'enveloppe convexe $co\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$, de sorte que

$$\overline{co\mathcal{D}} = \{x \in E \mid ||x|| \leq 1\}.$$

Cette norme est bien équivalente à celle de départ puisque $\mathcal{D}$ est ouvert et borné.

PROPOSITION 4.16. *Lorque E est muni de la norme $||\cdot||$, le système triple de Jordan-Banach (E, L) est hermitien.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} iL(x,x) &= \frac{1}{2}(L(ix,x) - L(x,ix)) \\ &= \frac{1}{4}[ix - \nu(ix), x - \nu(x)], \end{aligned}$$

donc $e^{iL(x,x)} \in \mathfrak{k}$ et donc pour tout $z \in E$ et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\left|e^{itL(x,x)}z\right|\right| \leq ||z||,$$

ce qui implique que $itL(x,x)$ est hermitien pour $||\cdot||$. □

Le théorème 4.15 découle de la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 4.17. *La composante connexe de $M^{(-p)}$ contenant o_+ coïncide avec $\mathcal{D}$.*

DÉMONSTRATION. Le champs de vecteur $\xi_v(z) = z - Q(z)v$ est complet sur $\mathcal{D}$ donc pour tout $v \in E$, $\tanh v \in \mathcal{D}$. En particulier, $D := \{x \in V \mid sp(L(x,x)) < 1\}$ est contenu dans $\mathcal{D}$.

Supposons que pour $x \in E$ on ait $sp(L(x,x)) \leq 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $sp(L(tx,tx)) = t^2 sp(L(x,x)) \leq 0$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $tx \in D \subset \mathcal{D}$, ce qui implique $x = 0$ puisque $\mathcal{D}$ est borné. Le lemme 4.14 s'applique et (E, L) est positif. Rappelons qu'alors

$$D = \{x \in E \mid |x|_\infty < 1\},$$

ce qui implique que $e^{\operatorname{ad}(\alpha - \nu(\alpha))}(D) \subset D$ pour tout $\alpha \in E$ et que D est la composante connexe de $M^{(-p)}$ comprenant o (c'est le théorème 3.9). Mais on a aussi $e^{\operatorname{ad}(\alpha - \nu(\alpha))}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ pour tout $\alpha \in E$. Cela entraîne que les symétries de l'espace symétrique D s'obtiennent comme restrictions des symétries de $\mathcal{D}$. En effet, soit $x \in D$. Alors la symétrie en x de D est $s_x = g s_o g^{-1}$ où $g = e^{\operatorname{ad}(\alpha - \nu(\alpha))}$ pour un certain $\alpha \in E$ tel que $\tanh \alpha = x$. Comme la symétrie $s_o = -\operatorname{Id}$ est la même pour les deux espaces symétriques, il en est de même pour s_x. Nous sommes donc dans la situation du lemme 3.4 et donc $D = \mathcal{D}$. □

Donnons un corollaire (cf. [**Upm85**, 20.25]), qui donne une nouvelle définition des JB^*-triples.

COROLLAIRE 4.18. *Un système triple de Jordan hermitien positif E est un JB^*-triple si et seulement si pour tout $x \in E$,*

$$|\{x, x, x\}| = |x|^3 .$$

Deuxième partie

L'indice de transversalité et l'indice de Maslov

CHAPITRE 5

L'indice de transversalité abstrait dans les JBW^*-triples

Dans ce chapitre nous introduisons l'indice de transversalité abstrait de deux tripotents inversibles d'un JBW^*-triple E, en utilisant la structure de treillis de l'ensemble des tripotents. Nous montrons alors son invariance par l'action de la composante neutre L du groupe des automorphismes de la boule unité $\mathcal{D}$ de E. Nous commençons par rappeler les propriétés de bases des tripotents, et leur lien avec la géométrie de la frontière de $\mathcal{D}$.

1. Les tripotents

1.1. Les tripotents inversibles. Considérons un système triple de Jordan E. Un élément x est dit inversible lorsque $Q(x)$ l'est. On note $E^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de E, et pour tout $x \in E^\times$ on pose

$$x^\# = Q(x)^{-1}x,$$

et on a

$$(x^\#)^\# = x$$

et

$$L(x, x^\#) = \mathrm{Id}\,.$$

On appelle *tripotent* tout élément x de E tel que

$$Q(x)x = x,$$

et on note $\mathcal{T}$ leur ensemble. On note par ailleurs Σ l'ensemble des tripotents inversibles

$$\Sigma = \{x \in E \mid x \text{ inversible et } x^\# = x\ \}.$$

Pour tout $e \in \mathcal{T}$ on a d'après l'identité de Jordan :

$$\text{(JT)} \qquad Q(e)^2 = 2L(e,e)^2 - L(e,e)$$

et donc

$$\Sigma = \{x \in E \mid L(x,x) = \mathrm{Id}\ \}.$$

Soit $e \in \Sigma$. Alors e est neutre dans l'algèbre de Jordan $E^{(e)}$ donc les éléments de Σ sont parfois appelés unités, ou éléments unitaires. De plus, on a $Q(e)^2 = \mathrm{Id}$ et $Q(e)$ est un automorphisme de E, comme on le voit en linéarisant la formule suivante (qui découle de (J3)),

$$Q(Q(e)x)Q(e) = Q(e)Q(x).$$

Dans l'algèbre de Jordan $E^{(e)}$ on note
$$x^* = Q(e)x.$$
Puisque, toujours dans $E^{(e)}$ on a $P(x) = Q(x)Q(e)$, l'élément x est inversible dans $E^{(e)}$ si et seulement si il l'est dans E, et on a
$$x^{-1} = Q(e)x^{\#}.$$
En particulier,
$$\Sigma = \{x \in E^{(e)} \mid x^* = x^{-1}\}.$$
Rappelons enfin la formule (cf. [**Loo75**, 2.12])
$$B(x, y) = Q(y^{\#} - x)Q(y).$$
Il en découle que dans $E^{(e)}$, si $x \in \Sigma$,
$$P(x - e) = Q(x - e)Q(e) = B(x, e).$$

Supposons maintenant que E est un système triple de Jordan sur $\mathbb{C}$ antilinéaire en la variable du milieu. Soit $e \in \Sigma$. Alors $Q(e)$ est antilinéaire : c'est une involution de l'algèbre de Jordan unitaire complexe $E^{(e)}$. Réciproquement, toute algèbre de Jordan unitaire complexe $(E, \circ)$ avec involution (ie. automorphisme $\mathbb{C}$-antilinéaire) $x \mapsto x^*$ définit un système triple de Jordan (antilinéaire en la variable du milieu) en posant
$$\{x, y, z\} = x \circ (y^* \circ z) - (x \circ z) \circ y^* + (x \circ y^*) \circ z.$$
Il s'agit du système triple associé à la paire (E, E) et à l'involution antilinéaire $* : E \to E$. Le système triple défini par $E^{(e)}$ et $Q(e)$ est celui de départ : on obtient ainsi une correspondance bijective entre systèmes triples de Jordan avec unité distinguée et algèbres de Jordan unitaires avec involution. Aux JB^*-triples avec unité distinguée correspondent les *JB^*-algèbres* unitaires. En fait les JB^*-algèbres unitaires sont les algèbre de Jordan-Banach (complexe) unitaires avec involution telles que le produit triple défini ci-dessus vérifie $|\{x, x, x\}| = |x|^3$. Il faut alors voir que l'opérateur $L(x, x) = \{x, x, .\}$ est hermitien positif (cf. [**Upm85**, 20.35]). Reciproquement, il n'est pas trivial que l'algèbre de Jordan défini à partir d'un JB^*-triple soit une algèbre de Jordan-Banach, ie. verifie
$$|x \circ y| \leq |x|\,|y|\,.$$
Cela résulte du théorème suivant (puisque les tripotents non-nuls sont de norme 1), dont la seule démonstration (à notre connaissance) utilise le théorème de Gelf'and-Naimark pour les JB^*-triples (démontré par Y. Friedman et B. Russo) :

THÉORÈME 5.1 ([**FR86**]). *Soit E un JB^*-triple. Alors pour tout x, y et z dans E on a*
$$|\{x, y, z\}| \leq |x|\,|y|\,|z|\,.$$

Notons de plus que dans une JB^*-algèbre (cf. [**Upm85**, 20.30]),

$$|x^*| = |x|.$$

Une algèbre de Jordan-Banach réelle A est appelée une *JB-algèbre* lorsque

$$\left|a^2\right| = |a|^2 \quad \text{et} \quad \left|a^2\right| \leq \left|a^2 + b^2\right|.$$

La partie autoadjointe d'une JB^*-algèbre est une JB-algèbre, et la réciproque est vraie : il existe une et une seule façon d'étendre la norme d'une JB-algèbre à sa complexification pour faire de celle-ci une JB^*-algèbre. C'est un théorème du à J.D. Maitland Wright (cf. [**Wri77**]).

Exemple 5.2. Une C^*-algèbre E de produit $(x, y) \mapsto xy$ devient un JB^*-triple pour le produit triple

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x).$$

Nous renvoyons à [**Upm85**, 20.10] pour une démonstration.
Supposons que la C^*-algèbre E possède un neutre e. Alors les deux notions d'inversibilité coïncident. En effet, si $x \in E$ est inversible au sens des C^*-algèbres, alors $Q(x)$ est inversible avec $Q(x)^{-1} = Q((x^{-1})^*)$, et donc $x^{\#} = (x^{-1})^*$. Réciproquement, si $Q(x)$ est inversible, soit $y = Q(x)^{-1}e$. On a $e = xy^*x$ donc x possède un inverse à droite et à gauche, et est donc inversible.
Les tripotents sont les éléments tels que $xx^*x = x$. On les appelle aussi isométries partielles. La terminologie provient de l'exemple de la C^*-algèbre $L(H)$ des opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert H : rappelons qu'un élément $u \in \mathrm{L}(H)$ est une isométrie partielle si il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) $uu^*u = u$,

(ii) uu^* et u^*u sont des projecteurs,

(iii) $u : (\ker u)^\perp \to H$ est une isométrie.

Les tripotents inversibles sont (toujours lorsque E possède un neutre) les élément unitaires. Soit u un tripotent inversible. Le produit

$$x \circ_u y = \frac{1}{2}(xu^*y + yu^*x)$$

et l'involution

$$x^{*,u} = ux^*u$$

munissent E d'une structure de JB^*-algèbre de neutre u . L'inverse (pour ce produit) d'un élément inversible x est alors

$$x^{-1,u} = ux^{-1}u.$$

Lorsque $E = \mathrm{L}(H)$ et $u = e$, la partie autoadjointe de E est la JB-algèbre $\mathrm{Herm}(H)$ des opérateurs hermitiens de H.

1.2. La décomposition de Peirce. Soit $e \in \mathcal{T}$. D'après (J2),

$$Q(e)L(e,e) = L(e,e)Q(e) = Q(e),$$

et donc lorsque l'on multiplie (JT) par $L(e,e)$ on obtient

$$Q(e)^2 = 2L(e,e)^3 - L(e,e)^2.$$

Il vient alors, en comparant cette égalité à (JT),

$$L(e,e)(2L(e,e) - \mathrm{Id})(L(e,e) - \mathrm{Id}) = 0.$$

L'espace de Banach E admet donc la *décomposition de Peirce*

$$E = E_1(e) \oplus E_{\frac{1}{2}}(e) \oplus E_0(e),$$

où $E_\alpha(e)$ est l'espace propre associé à la valeur propre α de $L(e,e)$. On note $P_\alpha(e)$ le projecteur spectral correspondant, et alors

$$P_1(e) = Q(e)^2,\ P_{\frac{1}{2}}(e) = 2(L(e,e) - Q(e)^2),\ P_0(e) = B(e,e).$$

L'identité de Jordan conduit aux règles suivantes :

$$\{E_i, E_j, E_k\} \subset E_{i-j+k},$$

On a de plus (cf. par exemple [**Upm85**, 21.9.3]),

$$\{E_1, E_0, E\} = \{E_0, E_1, E\} = \{0\}.$$

La discussion du 1.1 s'applique au sous-JB^*-triple $E_1(e)$ puisque e est un tripotent inversible de $E_1(e)$: c'est une JB^*-algèbre d'unité e pour le produit $x \circ y = \{x, e, y\}$ et l'involution $Q(e)_{|E_1(e)}$, et sa partie réelle (ou autoadjointe) $A(e)$ est une JB-algèbre.

Un tripotent e est dit *maximal* lorsque $E_0(e) = \{0\}$, autrement dit lorsque $L(e,e)$ est inversible. On note S l'ensemble des tripotents maximaux. Lorsque E est de dimension finie, le groupe des automorphismes de E agit transitivement sur S, et donc si Σ est non vide, alors $S = \Sigma$.

Exemple 5.3. Soit $E = \mathrm{L}(H)$ et u une isométrie partielle. Alors en écrivant les définitions on voit que

$$\begin{aligned} E_1(u) &= \{x \in E \mid x(\ker u^\perp) \subset \operatorname{im} u \text{ et } x(\ker u) = \{0\}\ \}, \\ &= \mathrm{L}(\ker u^\perp, \operatorname{im} u). \end{aligned}$$

On sait que $E_1(u)$ est une JB^*-algèbre pour le produit $\frac{1}{2}(xu^*y + yu^*x)$ (en considérant $u^* : \ker u^\perp \to \operatorname{im} u$) et l'involution $x \mapsto ux^*u$. Cette JB^*-algèbre est isomorphe à la JB^*-algèbre $\mathrm{L}(\ker u^\perp)$ (avec le produit et l'involution standard) grâce à l'application $x \mapsto u^*x$. On a d'autre part

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2}}(u) &= \{x \in E \mid x(\ker u^\perp) \subset \operatorname{im} u^\perp \text{ et } x(\ker u) \subset \operatorname{im} u\}, \\ &= \mathrm{L}(\ker u^\perp, \operatorname{im} u^\perp) \oplus \mathrm{L}(\ker u, \operatorname{im} u), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_0(u) &= \{x \in E \mid x(\ker u^\perp) = \{0\} \text{ et } x(\ker u) \subset \operatorname{im} u^\perp\}, \\ &= \mathrm{L}(\ker u, \operatorname{im} u^\perp). \end{aligned}$$

Un tripotent est maximal si et seulement si $u^*u = 1$ ou $uu^* = 1$. Dans le premier cas $\mathrm{L}(H) = \mathrm{L}(H, \operatorname{im} u \oplus \operatorname{im} u^\perp) = \mathrm{L}(H, \operatorname{im} u) \oplus \mathrm{L}(H, \operatorname{im} u^\perp) \simeq \mathrm{L}(H, H) \oplus \mathrm{L}(H, \operatorname{im} u^\perp) = \mathrm{L}(H, H \oplus \operatorname{im} u^\perp)$.

1.3. La variété des tripotents et des idempotents. Soit $e \in \mathcal{T}$. Pour

$$v = iv_1 + v_{\frac{1}{2}} \in iA(e) \oplus E_{\frac{1}{2}}(e)$$

on pose

$$k_v^{(e)} := \frac{i}{2}(L(v_1, e) + L(e, v_1)) + 2(L(v_{\frac{1}{2}}, e) - L(e, v_{\frac{1}{2}})).$$

L'endomorphisme k_v est une dérivation de E. La proposition suivante est due à J. Sauter (cf. [**Sau95**, 4.4])

Proposition 5.4. *L'ensemble des tripotents $\mathcal{T}$ est une sous-variété de E dont l'espace tangent en $e \in \mathcal{T}$ est*

$$T_e\mathcal{T} = iA(e) \oplus E_{\frac{1}{2}}(e),$$

et l'application $v \mapsto \exp k_v^{(e)} e$ est une carte locale de $\mathcal{T}$ en e. En particulier, $\mathrm{Aut}(E)$ *agit localement transitivement sur E.*

Soit maintenant $e \in \Sigma$, de sorte que $E = A(e) \oplus iA(e)$. On note $\mathcal{P}^{(e)}$ l'ensemble des idempotents de $A(e)$. On a bien sûr $\mathcal{P}^{(e)} \subset \mathcal{T}$. Soit $p \in \mathcal{P}^{(e)}$. Chaque sous-espace $E_\alpha(p)$, $\alpha \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ est stable par $Q(e)$, et $A_\alpha(p) = E_\alpha(p) \cap A(e)$ est l'espace propre associé à la valeur propre α de l'opérateur $L(p) = L(p, e)$ de $A(e)$. On a alors la proposition suivante (cf. [**CI00**]).

Proposition 5.5. *Soit $e \in \Sigma$. Alors l'ensemble $\mathcal{P}^{(e)}$ des idempotents de $A(e)$ est une sous-variété directe de $\mathcal{T}$, dont l'espace tangent en p est $A_{\frac{1}{2}}(e)$. Lorsque $v \in A_{\frac{1}{2}}(e)$, l'endomorphisme $k_v^{(p)}$ est une dérivation de $A(e)$, et l'application $A_{\frac{1}{2}}(e) \to \mathcal{P}^{(e)}$, $v \mapsto \exp k_v^{(p)} p$, est une carte locale de $\mathcal{P}^{(e)}$ en p.*

1.4. La frontière d'un domaine borné symétrique. Soit B est un domaine convexe d'un espace de Banach complexe E. Rappelons que l'on note Δ le disque unité complexe. On appelle *composante holomorphe* de $\overline{B}$ un sous-ensemble non-vide $A \subset B$ tel que

(i) Toute application holomorphe $f : \Delta \mapsto \overline{B}$ telle $f(\Delta) \cap A \neq \emptyset$ vérifie $f(\Delta) \subset A$.

(ii) A est minimal par rapport à (i).

L'ensemble $\overline{B}$ est la réunion disjointe de ses composantes holomorphes, et on peut montrer que B est l'une d'entre elles, les autres étant contenues dans ∂B. On définit de même les *composantes* $\mathbb{K}$-*affines*, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en considérant les applications affines $f : \Delta \cap \mathbb{K} \mapsto B$. Lorsque B est la boule unité de E, les composantes holomorphes et $\mathbb{C}$-affines sont les mêmes (cf. [**KS00**, Proposition 4.2]).

Les points holomorphiquement (resp. $\mathbb{K}$-affinement) extrêmes sont les points qui a tels que $\{a\}$ est une composante holomorphe (resp. $\mathbb{K}$-affine). Supposons maintenant que E est un JB^*-triple et que $B = \mathcal{D}$ est la boule unité de E. On alors la proposition suivante (cf. [**KU77**, 3.5] et [**BKU78**, 4.1]) :

PROPOSITION 5.6. *Soit $e \in \overline{\mathcal{D}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) e est un tripotent maximal,

(ii) e est holomorphiquement extrême,

(iii) e est $\mathbb{R}$-affinement extrême,

(iv) e est $\mathbb{C}$-affinement extrême.

Dans l'article [**KS00**] on a le résultat suivant :

THÉORÈME 5.7 (Kaup-Sauter). *Pour tout tripotent $e \in \mathcal{T}$, la composante holomorphe de $\mathcal{D}$ contenant e est*

$$\mathcal{J}_e = e + (E_0(e) \cap \mathcal{D}).$$

2. Le treillis des tripotents dans les JBW^*-triples

Lorsque E est un espace de Banach, on note E^* le dual topologique de E, et on note E_1 la boule unité fermée de E.

2.1. Les JBW^*-systèmes. Soit E un espace de Banach. Si E admet un prédual, c'est-à-dire si il existe un espace de Banach F tel que $E = F^*$, alors $(F^*)^* = E^*$ et donc l'injection canonique d'un espace de Banach dans son bidual identifie F à un sous espace de E^*. On dira donc que E a un unique prédual si il existe un unique sous-espace fermé de E^* qui est un prédual de E dans cette dualité. Lorsque E admet un prédual E_*, on peut le munir de la topologie faible-$*$: c'est la topologie la moins fine rendant les applications $\varphi \in E_*$ continues. Cette topologie est moins fine que la topologie faible (pour la quelle on considère toutes les formes linéaires continues) qui est elle-même moins fine que la topologie de la norme. La boule unité de E est compact pour la topologie faible-$*$.

Soit A une JB-algèbre. Le cône des carrés A_+ est un cône convexe propre fermé de A. Il induit une structure d'ordre sur A en posant

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in A_+.$$

Une forme linéaire continue ϕ sur A est dite positive lorsqu'elle verifie $\phi(A_+) \subset [0, +\infty[$. On dit que A est une JBW-algèbre lorsque

(i) Toute famille (x_α) croissante bornée possède une *borne supérieure* $x = \sup(x_\alpha)$:
$$\forall \alpha,\ x_\alpha \leq x \quad \text{et} \quad (\forall \alpha,\ x_\alpha \leq y) \Rightarrow x \leq y.$$

(ii) L'ensemble des formes linéaires positives *normales*, c'est-à-dire telles que $(\varphi(x_\alpha))$ converge vers $\varphi(\sup(x_\alpha))$ pour toute famille (x_α) croissante bornée, sépare les points de A.

Notre référence pour la théorie des JB-algèbres et des JBW-algèbres est [**HOS84**]. Une JBW-algèbre est automatiquement unitaire (cf. [**HOS84**, 4.1.7]). Une JB-algèbre est une JBW-algèbre si et seulement si elle possède un prédual. Celui est alors unique : il s'agit de l'ensemble des formes linéaires normales (cf. [**Shu79**] et [**HOS84**, 4.4.16]).

Une JBW^*-algèbre est une JB^*-algèbre qui a un prédual. Une JB^*-algèbre est une JBW^*-algèbre si et seulement si sa partie auto-adjointe est une JBW-algèbre. La partie autoadjointe de son prédual s'identifie alors au prédual de sa partie autoadjointe.

Un JBW^*-triple est un JB^*-triple qui a un prédual. Celui-ci est alors unique et le produit triple est séparément continue pour la topologie faible-$*$ (cf. [**Hor87, BT86, Din86**]).

Exemple 5.8. D'après le théorème de Sakaï, une C^*-algèbre est une algèbre de von Neumann si et seulement si elle admet un prédual. Les algèbres de von Neumann sont donc des JBW^*-algèbres.
Soit (Ω, μ) un espace mesuré de mesure totale σ-finie et $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mu)$ la C^*-algèbre des (classes de) fonctions (complexes) mesurables essentiellement bornées sur Ω. Notons $\mathrm{L}^1(\Omega, \mu)$ l'espace de Banach des fonctions sommables. Alors
$$\mathrm{L}^1(\Omega, \mu)^* = \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mu)$$
et donc $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mu)$ est une algèbre de von Neumann et donc une JBW^*-algèbre.
Un espace topologique compact K est dit *stonéen* si la fermeture de tout ouvert est encore ouvert. Dans ce cas toute suite de fonctions réelles continue croissante bornée admet une borne supérieure dans l'espace $C_{\mathbb{R}}(K)$ des fonctions réelles continues sur K. Le compact K est alors dit *hyper-stonéen* si les formes linéaires positives (ie. les mesures positives) normales séparent les points de $C_{\mathbb{R}}(K)$.
L'ensemble $Herm(H)$ des opérateurs autoadjoints sur l'espace de Hilbert complexe H est une JBW-algèbre : c'est la partie autoadjointe de $\mathrm{L}(H)$, dont le prédual s'identifie à l'ensemble $\mathrm{L}_1(H)$ des opérateurs à trace sur H.

2.2. Le treillis des tripotents. Un *treillis* est un ensemble partiellement ordonné tel que tout sous-ensemble à deux éléments $\{a, b\}$

admet une borne supérieure

$$a \vee b := \sup\{a, b\},$$

et une borne inférieure

$$a \wedge b := \inf\{a, b\}.$$

Un treillis est dit *complet* lorsque tout sous-ensemble non-vide admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Nous commençons par décrire la structure de treillis de l'ensemble des idempotents (ou projections) d'une JBW-algèbre.

Soit A une JBW-algèbre de neutre e. L'ensemble $\mathcal{P}$ des projections de A est un ensemble partiellement ordonné par l'ordre induit de celui de A. Soit $a \in A$. On note $W(a)$ la sous-algèbre de A fermée (pour la topologie faible-$*$) engendrée par a et e. Alors $W(a)$ est une JBW-algèbre associative ([**HOS84**, 4.1.10]).

LEMME 5.9 ([**HOS84**], 4.2.6). *Soit $a \in A$. Il existe une plus petite projection $r(a)$ dans A telle que $r(a) \circ a = a$. De plus $r(a)$ est dans $W(a)$.*

EXEMPLE 5.10. Lorsque $a \in C_{\mathbb{R}}(K)$ où K est hyperstonéen, $r(a)$ est la fonction caractéristique du support de a. Lorsque $a \in Herm(H)$, $r(a)$ est le projecteur orthogonal sur l'adhérence de $\operatorname{im} a$.

Pour $p \in \mathcal{P}$, notons $p^\perp = e - p$. Le lemme précédent permet de munir $\mathcal{P}$ d'une structure de treillis en posant pour tout p et q dans $\mathcal{P}$:

$$p \vee q = r(p+q), \quad p \wedge q = (r(p^\perp \vee q^\perp))^\perp$$

On montre, en utilisant l'existence d'une borne supérieure dans A pour toute famille croissante bornée, que ce treillis est de plus *complet* (cf. [**HOS84**, 4.2.8]).

Soit E un JB^*-triple. Deux tripotents u et v sont dits orthogonaux lorsque l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) $L(u, v) = 0$,

(ii) $L(v, u) = 0$,

(iii) $\{u, u, v\} = 0$,

(iv) $\{v, v, u\} = 0$.

On munit l'ensemble des tripotents d'une structure d'ordre partiel en posant : $u \leq v$ si et seulement si $v - u$ est un tripotent orthogonal à u.

Le lemme suivant ([**ER88**, 2.4]) est important :

LEMME 5.11. *Soit E un JBW^*-triple et v un tripotent de E. Alors*

(i) Un élément u de E est un tripotent tel que $u \leq v$ si et seulement si u est un idempotent de $A(v)$.

(ii) Deux tripotents u_1 et u_2 plus petits que v vérifient $u_1 \leq u_2$ si et seulement si $u_2 - u_1 \geq 0$ dans $A(v)$.

Dans l'article [**ER88**], C.M. Edwards et G.T. Rüttimann montrent que la structure de treillis de l'ensemble des tripotents est liée à la structure faciale des boules unités de E et de son prédual.

Soit V un espace vectoriel complexe et $\mathcal{C}$ un convexe de V. Une face de $\mathcal{C}$ est un convexe F de $\mathcal{C}$ vérifiant : tout segment (sans les extrémités) contenu dans $\mathcal{C}$ dont l'intersection avec F est non vide est contenu dans F. Si f est une forme linéaire sur V, on note H_f l'hyperplan (réel)

$$H_f = \{x \in V \mid \Re f(x) = 1\}.$$

La face F est dite *exposée* lorsque il existe une forme linéaire f sur V telle que $\mathcal{C} \subset \{x \in V \mid \Re f(x) \leq 1\}$ et $F = H_f \cap \mathcal{C}$. Lorsque (V, τ) est un espace vectoriel topologique, on dit que F est τ*-exposée* si de plus f est continue pour τ. Une intersection finie de faces τ-exposées est encore τ-exposée, et une intersection quelconque de faces τ-exposées est appelée τ*-semi-exposée*. L'ensemble des faces τ-fermées est un treillis de manière naturelle, et l'ensemble des faces τ-semi-exposées est un treillis complet.

Notons n la topologie de la norme sur E_*. Une face F de $(E_*)_1$ est n-exposée si et seulement si il existe $a \in E$ de norme $|a| = 1$ tel que $F := F_a := \{f \in E_* \mid f(a) = 1\}$. Cela résulte du fait que $(E_*)_1$ est circulaire et étoilé par rapport à 0. La proposition suivante montre que a peut être choisi tripotent.

Proposition 5.12 ([**FR85**], Proposition 8). *Soit F une face exposée de $(E_*)_1$: $F = \{f \in E_* \mid f(a) = 1\}$ pour $a \in E$ tel que $|a| = 1$. Alors il existe un unique tripotent $u(a)$ tel que $F = F_{u(a)}$.*

Soit l'ensemble $\widetilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\omega\}$, où ω n'appartient pas à $\mathcal{T}$, et est supposé plus grand que tous les éléments de $\mathcal{T}$.

Lemme 5.13 ([**ER88**], 3.2). *L'application $u \mapsto F_u$, $\omega \mapsto (E_*)_1$, est un isomorphisme de l'espace ordonné $\widetilde{\mathcal{T}}$ sur l'espace ordonné (par l'inclusion) des faces n-exposées de $(E_*)_1$.*

En utilisant le lemme 5.11 et l'existence d'une borne supérieure pour les familles croissantes bornées dans les JBW-algèbres, on montre que toute face n-semi-exposée de $(E_*)_1$ est n-exposée, ce qui revient à munir $\widetilde{\mathcal{T}}$ d'une structure de treillis complet.

Lemme 5.14 ([**ER88**], 4.1). *L'application $u \to F_u$, $\omega \mapsto (E_*)_1$ est un isomorphisme de l'espace ordonné $\widetilde{\mathcal{T}}$ sur l'espace ordonné (par l'inclusion) des faces n-semi-exposées de $(E_*)_1$.*

On a de plus :

Théorème 5.15 ([**ER88**], 4.4). *Toute face n-fermée de $(E_*)_1$ est semi-exposée et donc l'application $u \to F_u$, $\omega \mapsto (E_*)_1$ est un isomorphisme du treillis $\widetilde{\mathcal{T}}$ sur le treillis des faces n-fermée de $(E_*)_1$.*

Pour tout tripotent u on pose $\mathcal{F}_u = \{x \in E_1 \mid \forall f \in F_u \; f(x) = 1\}$ et on pose $\mathcal{F}_\omega = E_1 = \overline{\mathcal{D}}$. On note f-$*$ la topologie faible-$*$.

THÉORÈME 5.16 ([**ER88**], 4.6). *L'application $u \mapsto \mathcal{F}_u$ est un anti-isomorphisme du treillis $\widetilde{\mathcal{T}}$ sur le treillis de faces f-$*$-semi-exposées de $\overline{\mathcal{D}}$, et si $u \in \mathcal{T}$,*

$$\mathcal{F}_u = u + (E_0(u) \cap \overline{\mathcal{D}}).$$

3. L'indice de transversalité abstrait, son invariance

Soit E un JBW^*-triple. Soit $\mathcal{D}$ la boule unité de E, $\mathcal{T}$ l'ensemble des tripotents et Σ l'ensemble (supposé non vide) des tripotents inversibles de E. Rappelons que $\mathrm{Aut}(E)$ agit localement transitivement sur $\mathcal{T}$, et soit $K = \mathrm{Aut}(E)^0$ sa composante neutre.

DÉFINITION 5.17. *Soit E un JB^*-triple. Un couple $(x, y) \in E^2$ est dit transverse lorsque $B(x, y)$ est inversible.*

Soit $(e, d) \in \Sigma \times \Sigma$. Soit $p := e \wedge d$ le plus grand élément de l'ensemble de tripotents plus petits que e et d. On définit l'*indice de transversalité abstrait* du couple (e, d) comme la composante connexe de la variété des tripotents contenant p, ou, ce qui revient au même, comme la K-orbite de p. Notons que p est une projection à la fois dans $A(e)$ et dans $A(d)$, et que $\mathcal{F}_p = p + E_0(p) \cap \overline{\mathcal{D}}$ est la plus petite face de $\mathcal{D}$ fermée pour la topologie faible-$*$ contenant e et d.

En dimension finie, une définition de l'indice de transversalité utilisant les faces de $\mathcal{D}$ se trouve dans l'article [**CN06**].

PROPOSITION 5.18. *Si deux tripotents sont transverses alors leur indice de transversalité abstrait est nul (ie. est $\{0\}$).*

Soit $L = \mathrm{Aut}(D)^0$ la composante neutre du groupe des automorphismes de $\mathcal{D}$. Rappelons que l'algèbre de Lie de L s'écrit $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{q}$ où $\mathfrak{k} = \mathrm{aut}(E)$ et $\mathfrak{q} \simeq E$. La composante neutre K de $\mathrm{Aut}(E)$ coïncide avec le stabilisateur L_0 de l'origine dans L (parce que $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{D})_0 \times Q$ où $Q = \exp \mathfrak{q}$). Le groupe de Lie-Banach L agit (analytiquement) sur Σ (cf. par exemple [**NØ06**, Corollary 2.2]).

THÉORÈME 5.19. *L'indice de transversalité abstrait est invariant sous l'action de L sur $\Sigma \times \Sigma$.*

Ce résultat va être un corollaire du théorème suivant :

THÉORÈME 5.20. *Soit $e \in \mathcal{T}$ et soit $\mathcal{J}_e$ la composante holomorphe de $\overline{\mathcal{D}}$ contenant e. Le normalisateur $N_{(e)}$ dans L de $\mathcal{J}_e$ est un sous-groupe de Lie-Banach de L et l'on a*

$$L = KN_{(e)} = N_{(e)}K.$$

Nous avons besoin des deux propositions suivantes qui se trouvent dans [**Loo77**, 9.12-15] et dont les démonstrations s'étendent sans modification au cadre banachique.

PROPOSITION 5.21. *Soit e un tripotent et ξ_e l'unique élément de $\mathfrak{q}$ dont la valeur à l'origine est e. On note $\mathfrak{l}_\alpha = \{X \in \mathfrak{l} \mid \operatorname{ad} \xi_e X = \alpha X\}$. Alors*

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-2} \oplus \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$$

avec

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{k}_e \oplus \{\xi_v \mid v \in A(e) \oplus E_0(e)\} \quad \text{où} \quad \mathfrak{k}_e = \{X \in \mathfrak{k} \mid X(e) = 0\},$$
$$\mathfrak{l}_{\pm 1} = \{\xi_v \mp 2(L(v,e) - L(e,v)) \mid v \in E_{\frac{1}{2}}(e)\},$$
$$\mathfrak{l}_{\pm 2} = \{\xi_v \mp 2L(v,e) \mid v \in iA(e)\}.$$

PROPOSITION 5.22. *Soit $\mathfrak{n}_{(e)} = \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$. Alors*

$$\mathfrak{n}_{(e)} = \{\xi \in \mathfrak{l} \mid \forall z \in E_0(e) \cap \mathcal{D},\ \xi(e+z) \in E_0(e)\}.$$

On peut alors donner la

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.20. (1) Soit $\operatorname{Ad} : L \to \mathrm{GL}(\mathfrak{l})$ la représentation adjointe. Posons

$$\mathcal{N}_{(e)} = \{l \in L \mid \operatorname{Ad}(l)\mathfrak{n}_{(e)} \subset \mathfrak{n}_{(e)}\}.$$

Alors $\mathcal{N}_{(e)} = \operatorname{Ad}^{-1}(\widetilde{\mathcal{N}_{(e)}})$ où $\widetilde{\mathcal{N}_{(e)}} = \{g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{l}) \mid g(\mathfrak{n}_{(e)}) \subset \mathfrak{n}_{(e)}\}$, et $\widetilde{\mathcal{N}_{(e)}}$ est un sous-groupe de Lie-Banach de $\mathrm{GL}(\mathfrak{l})$ d'après [**Nee04**, Lemma IV.12] et donc $\mathcal{N}_{(e)}$ est un sous groupe de Lie-Banach de L.

(2) Le groupe $\mathcal{N}_{(e)}$ stabilise $\mathcal{J}_e$. En effet, soit $n \in \mathcal{N}_{(e)}$. Comme $\mathcal{J}_e$ est une composante holomorphe de $\overline{\mathcal{D}}$, il suffit de montrer que pour un $x \in \mathcal{J}_e$, $n.x \in \mathcal{J}_e$. Supposons $n = \exp \xi$. Alors il existe un $\tau > 0$ tel que

$$\forall\ 0 < t < \tau, \quad \exp(t\xi).x \in \mathcal{J}_e.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{k} < \tau$. Alors $\exp(\frac{1}{k}\xi).x \in \mathcal{J}_e$ et donc $\exp(\frac{1}{k}\xi).y \in \mathcal{J}_e$ pour tout $y \in \mathcal{J}_e$ et donc $(\exp \xi).x = (\exp(\frac{1}{k}\xi))^k.x \in \mathcal{J}_e$, et c'est encore vraie lorsque n est un produit $\exp \xi_1 \ldots \exp \xi_l$ avec chaque ξ_i dans $\mathfrak{n}_{(e)}$.

(3) Le groupe $\mathcal{N}_{(e)}$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$. En effet, l'application

$$\mathfrak{n}_{(e)} \to T_0\mathcal{D}, \quad \xi \mapsto \xi(0),$$

est surjective donc l'orbite $\mathcal{N}_{(e)}.0$ est ouverte mais aussi fermée car L (donc $\mathcal{N}_{(e)}$) agit par isométries pour la métrique de Caratheodory et donc on peut appliquer [**Upm85**, Lemma 8.21]. Il en résulte que

$$L = \mathcal{N}_{(e)}K = K\mathcal{N}_{(e)}.$$

(4) Le normalisateur dans L de $\mathcal{J}_e$ est bien $\mathcal{N}_{(e)}$, ie. $N_{(e)} = \mathcal{N}_{(e)}$. En effet, soit $l \in L$ tel que $l\mathcal{J}_e = \mathcal{J}_e$. Alors si $l = kn$ avec $k \in K$ et $n \in \mathcal{N}_{(e)}$ on a $k\mathcal{J}_e = \mathcal{J}_e$ et $k.e = e$, puisque e est le seul tripotent dans $\mathcal{J}_e$. Mais $K_e \subset \mathcal{N}_{(e)}$ puisque pour tout $k' \in K_e$, $\operatorname{Ad}(k')\xi_e = \xi_{k'.e} = \xi_e$ donc $\operatorname{ad} \xi_e \operatorname{Ad} k' = \operatorname{Ad} k' \operatorname{ad} \xi_e$ et donc $\operatorname{Ad} k'$ stabilise $\mathfrak{n}_{(e)}$. On a donc $l \in \mathcal{N}_{(e)}$. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.19. Soient $(e, d) \in \Sigma \times \Sigma$ et

$$(e', d') = l.(e, d).$$

Posons $p = e \wedge d$ et $p' = e' \wedge d'$. Ecrivons, grâce au théorème 5.20, $l = kn$ avec $k \in K$ et $n \in N_{(p)}$. Alors

$$l\mathcal{J}_p = kn\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_{kp}$$

et par continuité (l'adhérence de $\mathcal{J}_p$ étant $\mathcal{F}_p$),

$$l\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_{kp}.$$

Donc $e', d' \in \mathcal{F}_{kp}$ et $\mathcal{F}_{p'} \subset \mathcal{F}_{kp}$. De même, $\mathcal{F}_p \subset l^{-1}\mathcal{F}_{p'}$ donc $l\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_{p'}$. Donc $\mathcal{F}_{kp} = \mathcal{F}_{p'}$ et $kp = p'$. □

Nous donnons dans la suite une réciproque partielle.

Soient deux couples (x, e) et (x', e') de tripotents maximaux ayant le même indice de transversalité. Existe-t-il un élément $l \in L$ tel que $l.(x, e) = (x', e')$? Cela nous semble faux en général, puisqu'un couple dont l'indice de transversalité est nul n'est pas forcément transverse. Supposons néanmoins que e et e' sont dans la même composante de Σ. Dans ce cas, il existe $k \in K$ tel que $k.e' = e$ et puisque $k.(e' \wedge x') = ke' \wedge kx'$, on peut supposer que $e' = e$, et il s'agit de trouver $l \in L_e$ tel que $l.x = x'$. La question suivante arrive donc naturellement : soit p et p' sont deux idempotents de $A(e)$ appartenant à la même orbite sous K, alors appartiennent-ils à la même orbite sous K_e ? Si c'est le cas alors supposer que $p = e \wedge x = e \wedge x'$.

PROPOSITION 5.23. *Soit $e \in \Sigma$. Soient $x, x' \in \Sigma$ tels que*

$$p := x \wedge e = x' \wedge e.$$

Supposons de plus que $a = x - e$ et $a' = x' - e$ sont transverses à $e - p$. Alors il existe $l \in L_e$ tel que $lx = x'$.

La proposition découle du lemme suivant.

LEMME 5.24. *Soit $e \in \Sigma$, p et q deux idempotents orthogonaux de $A(e)$ tels que $e = p + q$. Soient u et v dans Σ tels que $u = p - q$ et $v = p + a$ où a est transverse q. Alors il existe $l \in L_e$ tel que $lu = v$.*

Ce lemme peut se voir comme un raffinement de [**NØ06**, lemma 3.2 (2)]. Reprenons les notations de cet article. Au lieu d'utiliser l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits $KKT(E, \overline{E})$, les auteurs considèrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l}$ graduée par la dérivation $E(z) = z\frac{\partial}{\partial z}$ (la graduation correspondant alors au degré des champs de vecteurs). La complétion projective de $(E, \overline{E})$ se réalise alors dans l'espace des trois filtrations de $\mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l}$:

$$(X^+, X^-) = (\mathrm{Aut}(\mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l})^0 \mathfrak{f}^-, \mathrm{Aut}(\mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l})^0 \mathfrak{f}^+),$$

la structure analytique étant induite par celle du groupe de Lie-Banach $\mathrm{Aut}(\mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l})^0$. On note τ l'involution de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l}$ correspondant à la forme réelle $\mathfrak{l} \oplus i\{0\}$. Au niveau de la paire de Jordan

$(E, \overline{E})$, cette involution correspond à l'involution $-\mathrm{Id} : E \to \overline{E}$. On note τ_X la polarité associée. La transversalité de $(x, y) \in E^2$ correspond a la transversalité de $(e^{\operatorname{ad} x} o_+, \tau_X(e^{\operatorname{ad} x} o_+) = e^{\operatorname{ad} -y} o_-)$. On renvoie enfin à [**NØ06**, 1.2] pour la définition de la transformée de Cayley partielle associée à un tripotent.

Démonstration du lemme. Par définition a est transverse à q si et seulement si a est inversible dans $E_1(q)$ et alors $v = C_q(a) \in E_1(q)$ où C_q est la transformée de Cayley (partielle) définie par q. Soit $l = \exp(C_q{}^{-1}.v) = C_q{}^{-1} \exp(\operatorname{ad} v) C_q$. Alors

$$e^{\operatorname{ad} v} C_q(p - q) = e^{\operatorname{ad} v}(p - 0) = p + v = C_q(p + C_q{}^{-1}(v))$$

donc $lu = v$. D'autre part, puisque p et q sont orthogonaux on a (en utilisant $\{E_1, E_0, E\} = \{E_0, E_1, E\} = \{0\}$) :

$$[\tau(p), q] = [\tau(p), h_q] = [\tau(p), v] = 0,$$

donc $e^{\operatorname{ad} \tau p}$ commute avec $e^{\operatorname{ad} q}$, $e^{\log \sqrt{2} \operatorname{ad} h_q}$ et $e^{\operatorname{ad} v}$. Alors

$$\begin{aligned}
C_q e &= e^{\operatorname{ad} q} e^{\log \sqrt{2} \operatorname{ad} h_q} e^{-\operatorname{ad} \tau q}(p + q) \\
&= e^{\operatorname{ad} q} e^{\log \sqrt{2} \operatorname{ad} h_q} \tau_X e^{-\operatorname{ad} q} \tau_X(p + q) \\
&= e^{\operatorname{ad} q} e^{\log \sqrt{2} \operatorname{ad} h_q} \tau_X e^{-\operatorname{ad} q}(p + q) \\
&= e^{\operatorname{ad} q} e^{\log \sqrt{2} \operatorname{ad} h_q} \tau_X(p) \\
&= e^{\operatorname{ad} q} e^{\log \sqrt{2} \operatorname{ad} h_q} \tau_X e^{\operatorname{ad} p}(0) \\
&= e^{\operatorname{ad} q} e^{\log \sqrt{2} \operatorname{ad} h_q} e^{\operatorname{ad} \tau p} \mathfrak{f}^+ \\
&= e^{\operatorname{ad} \tau p} e^{\operatorname{ad} q} e^{\log \sqrt{2} \operatorname{ad} h_q} \mathfrak{f}^+ \\
&= e^{\operatorname{ad} \tau p} \mathfrak{f}^+
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
le &= C_q{}^{-1} e^{\operatorname{ad} v} e^{\operatorname{ad} \tau p} \mathfrak{f}^+ \\
&= C_q{}^{-1} e^{\operatorname{ad} \tau p} e^{\operatorname{ad} v} \mathfrak{f}^+ \\
&= C_q{}^{-1} e^{\operatorname{ad} \tau p} \mathfrak{f}^+ \\
&= e
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 6

Les paires de Fredholm et l'indice de Maslov

Dans son traité *théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, V.P. Maslov introduit un indice pour les chemins dans une sous-variété lagrangienne M de $\mathbb{R}^{2n}$ qui intervient dans le prolongement de solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles. Lorsque l'on se restreint aux chemins fermés, on obtient ainsi un élément du premier groupe de cohomologie à valeur entière $H^1(M,\mathbb{Z})$ appelée classe de Maslov. Dans [**Arn67**], Arnol'd clarifie la définition de cet indice. Le groupe fondamentale de la Lagrangienne Λ_n de $\mathbb{R}^{2n}$ est cyclique infini, un générateur étant donné par l'image réciproque du générateur standard du groupe fondamentale du cercle S^1 par l'application

$$\Lambda_n \simeq U(n)/O(n) \overset{\mathrm{Det}^2}{\to} S^1.$$

(L'isomorphisme précédent dépend du choix d'une structure complexe sur $\mathbb{R}^{2n}$ compatible avec la structure symplectique, mais le générateur reste le même). Arnol'd définit alors un indice pour les chemins dans Λ_n (appelé dans la suite indice de Maslov), qui lorsque l'on se restreint aux chemins fermés donne ce générateur. Enfin Arnol'd montre que la classe de Maslov s'obtient comme image réciproque de la classe associée à ce générateur (ici $\pi_1(S^1) \simeq H^1(S^1,\mathbb{Z})$) par l'application $M \to \Lambda_n$ qui à $m \in M$ associe son espace tangent.

Dans [**Ler77**] Leray, étudiant le traité de Maslov, introduit deux nouveaux indices : un indice triple sur la Lagrangienne, qui possède une propriété de cocycle, et une primitive de ce cocycle sur le revêtement universel de la Lagrangienne.

Dans [**CØ01**], Jean-Louis Clerc et Bent Ørsted généralisent l'indice triple à la frontière de Shilov d'un domaines borné symétrique de type tube. Les autres indices sont également généralisés dans [**CK07**].

La définition de l'indice de Maslov que donne Arnold repose sur la délicate notion d'indice d'intersection. Dans l'article [**BBF98**] (voir aussi [**Fur04**]), B. Booss-Bavnbek et K. Furutani, suivant les idées de J. Philips qui dans [**Phi96**] donne une nouvelle définition purement analytique et élémentaire du *flot spectral*, construisent l'indice de Maslov pour les chemins dans la Fredholm-Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique réel. Dans ce chapitre nous nous inspirons de leur méthode pour construire l'indice de Maslov pour les chemins dans l'ensemble des tripotents inversibles d'un JB^*-triples.

Nous commençons par montrer comment l'ensemble des tripotents inversibles du JB^*-triple $\mathrm{Sym}(H)$ s'interprète comme la Lagrangienne de l'espace de Hilbert symplectique réel $\mathbb{H}_0 = H_0 \oplus H_0$, où H_0 est la forme réelle de H. Nous rappelons la notion de paire de Fredholm pour les Lagrangiens, essentielle dans la construction de Booss-Bavnbek et Furutani et la nous traduisons en termes d'opérateur. Puis nous étudions un autre exemple, celui des facteurs spin. Dans la deuxième section nous donnons une définition des paires de Fredholm dans les JB^*-triples, et nous définissons un indice de transversalité pour ces paires. Puis nous étudions comment se comporte cet indice lorsque l'on perturbe l'un des deux éléments de la paire, ce qui nous permet alors de construire l'indice de Maslov. Dans la dernière section, nous faisons le lien entre cet indice et les indices de [**CØ01, Cle04**] et [**CK07**] lorsque le JB^*-triple est de dimension finie.

1. Deux exemples

Tous les espaces de Hilbert sont supposés séparables.

1.1. La Lagrangienne. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert complexe (séparable). Le produit hilbertien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est antilinéaire par rapport à la seconde variable. Soit τ une involution (ie. une application $\mathbb{C}$-antilinéaire involutive) isométrique de H. On note $\mathrm{Sym}(H)$ l'espace de Banach des opérateurs symétriques pour la forme bilinéaire symétrique

$$(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\tau(\cdot)\rangle\,.$$

Pour $z \in \mathrm{L}(H)$, on pose

$$\overline{z} = \tau \circ z \circ \tau.$$

L'espace de Banach $\mathrm{Sym}(H)$ muni du produit triple

$$\{x,y,z\} = \frac{1}{2}(x\overline{y}z + z\overline{y}x)$$

est un JB^* -triple. En effet, c'est un sous-système triple de Jordan fermé de $\mathrm{L}(H)$ et on peut donc appliquer [**Upm85**, 20.9].

Soit $z \in \mathrm{Sym}(H)$. Si z est inversible comme opérateur, alors $z^{-1} \in \mathrm{Sym}(H)$ et donc (cf. Exemple 5.2) les deux notions d'inversibilité coïncident. Grâce à l'exemple 5.3 et à l'implication

$$\overline{x}x = \mathrm{id} \Rightarrow x\overline{x} = \mathrm{id},$$

on voit que les tripotents maximaux sont inversibles :

$$\Sigma = S = \{x \in \mathrm{Sym}(H) \mid \overline{x}x = \mathrm{id}\}.$$

L'opérateur de Bergman s'écrit

$$\begin{aligned} B(x,y)z &= z - (x\overline{y}z + z\overline{y}x) + x\overline{y}z\overline{y}x \\ &= (1 - x\overline{y})z(1 - \overline{y}x), \end{aligned}$$

et lorsque x et y sont dans Σ on a

$$B(x,y)z = Q(y-x)Q(y)z = (1 - xy^{-1})z(1 - y^{-1}x).$$

Alors (x,y) est transverse si et seulement si $y-x$ est inversible (en effet, si $y - x = (1 - xy^{-1})y$ est inversible, $B(x,y)$ l'est et réciproquement, si $B(x,y)$ est inversible, alors $\mathrm{id} = (y-x)y^{-1}B(x,y)^{-1}\,\mathrm{id}\,y^{-1}(y-x)$ et donc $y - x$ est inversible).

Considérons la structure de JB^*-algèbre sur $\mathrm{Sym}(H)$ définie par le tripotent inversible id. Le produit s'écrit

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

et l'involution

$$x^* = \overline{x}.$$

Soit $H_0 = \ker(\tau - \mathrm{id})$ la forme réelle de H associée à τ. Alors la partie autoajointe de la JB^*-algèbre $\mathrm{Sym}(H)$ s'identifie à l'espace $\mathrm{Sym}(H_0)$ des opérateur symétriques de H_0 (qui est donc une JB-algèbre).

Introduisons maintenant un peu de vocabulaire et quelques notations. Soit $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert réel ou complexe. Une forme bilinéaire antisymétrique ω continue et fortement non-dégénérée (ie. telle que l'application $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, $\xi \mapsto \omega(\cdot, \xi)$ est bijective) est appelée *forme symplectique*. Supposons $\mathcal{H}$ muni d'une telle forme. On dit alors que $\mathcal{H}$ est un *espace de Hilbert symplectique*. Pour un sous-espace $F \subset \mathcal{H}$, on note F° l'orthogonal de F pour ω, alors que l'on note $F^\perp$ l'orthogonal pour la structure Hilbertienne. Un *lagrangien* de $\mathcal{H}$ est un sous-espace λ tel que $\lambda^\circ = \lambda$. Un lagrangien est automatiquement fermé (car $(F^\circ)^\circ = \overline{F}$ pour tout sous espace F). On appelle *Lagrangienne* l'ensemble des lagrangiens de $\mathcal{H}$, et on la note $\Lambda(\mathcal{H})$.

On pose $\mathbb{H} = H \oplus H = \{\eta \oplus \xi \mid \xi, \eta \in H\}$. C'est un espace de Hilbert pour la forme hermitienne

$$\langle \eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi' \rangle = \langle \eta, \eta' \rangle + \langle \xi, \xi' \rangle \,,$$

et on muni $\mathbb{H}$ d'une structure symplectique (complexe) en posant

$$\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = (\eta, \xi') - (\xi, \eta').$$

L'involution τ s'étend à $\mathbb{H}$ en posant

$$\tau(\eta \oplus \xi) = \tau(\eta) \oplus \tau(\xi).$$

Alors $\mathbb{H}_0 = H_0 \oplus H_0$ est la forme réelle de $\mathbb{H}$ asociée à τ, et puisque la forme symplectique vérifie

$$\omega(\tau(\eta \oplus \xi), \tau(\eta' \oplus \xi')) = \overline{\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi')},$$

on peut la restreindre à $\mathbb{H}_0$ en une forme symplectique réelle. Nous allons montrer comment l'ensemble Σ s'identifie à la lagrangienne $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ de $\mathbb{H}_0$.

Commençons par envoyer $\mathrm{Sym}(H)$ dans $\Lambda(\mathbb{H})$.

Notons $H_1 = H \oplus 0$ et $H_2 = 0 \oplus H$, π_1 et π_2 les projections sur H_1 (resp. H_2) parallèlement à H_2 (resp. H_1). Si $x \in \mathrm{L}(H)$ alors

$$G(x) := \{x\xi \oplus \xi \mid \xi \in H\}$$

est un sous-espace fermé de $\mathbb{H}$. Il est de plus transverse à H_1 (ie. $G(x) \oplus H_1 = \mathbb{H}$) car $\xi \oplus \eta = \xi' \oplus (x\xi' + \eta')$, $\xi, \eta, \xi', \eta' \in H$ se résout de manière unique en $\xi = \xi'$, $\eta' = \eta - x\xi$. Réciproquement, soit F un sous-espace fermé et transverse à H_1 et $\pi : F \to H_2$ la restriction de π_2 à F. L'application π est bijective parce que F est transverse et comme H_1 est un supplémentaire fermé π est continue et donc d'après le théorème de Banach elle est bicontinue. Alors $\pi_1 \circ \pi^{-1} \in \mathrm{L}(H)$ et $G(\pi_1 \circ \pi^{-1}) = F$. Remarquons que H_1 et H_2 sont dans $\Lambda(\mathbb{H})$. Si $x \in \mathrm{L}(H)$ on note ${}^{\mathrm{t}}x$ le transposé de x par rapport à $(.,.)$. Alors $G({}^{\mathrm{t}}x) = G(x)^\circ$. En effet l'inclusion $G({}^{\mathrm{t}}x) \subset G(x)^\circ$ est clair et si il n'y avait pas égalité on aurait $G(x)^\circ \cap H_2 \neq \{0\}$ ce qui impliquerait $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$. L'application G induit donc une bijection entre $\mathrm{Sym}(H)$ et les lagrangiens transverses à H_1.

Posons $J(\eta \oplus \xi) = (-\xi) \oplus \eta$. Alors $\omega(\cdot,\cdot) = (J\cdot,\cdot)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda(\mathbb{H})$, $\lambda^\perp = J\tau(\lambda)$.

Pour caractériser l'image de Σ par l'application G introduisons la forme hermitienne

$$h(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = \langle \xi, \xi' \rangle - \langle \eta, \eta' \rangle.$$

Proposition 6.1. *Soit λ un lagrangien sur lequel h est une forme positive. Alors λ est transverse à H_1.*

Démonstration. Soit λ un lagrangien sur lequel h est une forme positive. Si $\eta \oplus 0 \in \lambda$ alors

$$h(\eta \oplus 0, \eta \oplus 0) = -\langle \eta, \eta \rangle \geq 0$$

donc $\eta = 0$ et $\lambda \cap H_1 = \{0\}$. Comme

$$(\lambda + H_1)^\perp = \lambda^\perp \cap H_1{}^\perp = J\tau(\lambda) \cap J\tau(H_1) = J\tau(\lambda \cap H_1) = \{0\},$$

il suffit de montrer que $\lambda + H_1$ est fermé. Soit $(\zeta_n)_\mathbb{N}$ une suite de $\lambda + H_1$ qui converge vers $\zeta \in \mathbb{H}$. Pour tout entier n, $\zeta_n = \xi_n + \eta_n + \eta'_n$ avec $\xi_n \in H_2$, $\eta_n, \eta'_n \in H_1$ et $\xi_n + \eta_n \in \lambda$. ξ_n est la projection orthogonale de ζ_n sur H_2 et converge donc vers la projection orthogonale ξ de η sur H_2. D'autre part, $h(\xi_n + \eta_n, \xi_n + \eta_n) = \langle \xi_n, \xi_n \rangle - \langle \eta_n, \eta_n \rangle \geq 0$ donc $(\eta_n)_\mathbb{N}$ est bornée et on peut extraire une suite, toujours notée $(\eta_n)_\mathbb{N}$, qui converge faiblement vers η. Mais H_1 est fermé pour la topologie forte et convexe donc fermé pour la topologie faible et donc $\eta \in H_1$. Comme $\xi_n + \eta_n$ converge faiblement vers $\xi + \eta$ et que η'_n converge faiblement vers $\eta' = \zeta - \xi - \eta$, on en déduit de même que $\xi + \eta \in \lambda$ et $\eta' \in H_1$. Par unicité de la limite on obtient la décomposition $\zeta = \xi + \eta + \eta'$ qui nous permet de conclure que $\zeta \in \lambda + H_1$. Finalement, λ est bien transverse à H_1. $\square$

Alors h s'annule sur $\lambda = G(x)$ si et seulement si pour tout $\xi \in H$, $\langle x\xi, x\xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$, ie. si et seulement si $\langle (1 - x^*x)\xi, \xi \rangle = 0$ ce qui équivaut par polarisation à $x^*x = 1$. En résumé,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(H) &\overset{G}{\hookrightarrow} \Lambda(\mathbb{H}) \\ \Sigma &\simeq \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{H}) \mid h_{|\lambda \times \lambda} = 0\}. \end{aligned}$$

On définit la transformée de Cayley sur $\mathbb{H}$ par

$$C(\eta \oplus \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\eta + i\xi) \oplus (i\eta + \xi)).$$

On a

$$\omega(C\cdot, C\cdot) = \omega(\cdot,\cdot) \quad \text{et} \quad ih(\cdot,\cdot) = \omega(C\cdot, \tau(C\cdot)).$$

Donc C conserve les lagrangiens de $\mathbb{H}$, et les lagrangiens sur lesquels h s'annule sont transformés en les lagrangiens stables par τ. Il ne reste plus qu'à identifier l'ensemble des lagrangiens stables par τ et $\Lambda(\mathbb{H}_0)$.

Si F_0 est un sous-espace de $\mathbb{H}_0$, alors $F_0 \oplus iF_0$ est un sous-espace complexe de $\mathbb{H}$ stable par τ . Réciproquement, si F est un sous-espace de $\mathbb{H}$ stable par τ, alors $F = F \cap \mathbb{H}_0 \oplus F \cap i\mathbb{H}_0 = F \cap \mathbb{H}_0 \oplus i(F \cap \mathbb{H}_0)$. De plus il est clair que si F_0 est un lagrangien réel, alors $F_0 \oplus iF_0$ est un lagrangien complexe et que si F est un lagrangien complexe, alors $F \cap \mathbb{H}_0$ est un lagrangien réel. On a donc une bijection entre la Lagrangienne réelle et l'ensemble $\Lambda(\mathbb{H})^\tau$ des lagrangiens complexes stables par τ. Finalement on a bien une bijection entre Σ et la Lagrangienne réelle :

$$\Sigma \overset{G}{\simeq} \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{H}) \mid h_{|\lambda\times\lambda} = 0\} \overset{C}{\simeq} \Lambda(\mathbb{H})^\tau \simeq \Lambda(\mathbb{H}_0).$$

La Lagrangienne $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ est munie d'une structure de variété banachique (cf. [**Fur04**]). La bijection que nous avons décrite est alors un difféomorphisme. Nous n'écrivons pas les détails.

Réciproquement, partons maintenant d'un espace de Hilbert symplectique réel $(\mathbb{H}_0, \omega, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On peut supposer, quitte à remplacer le produit scalaire par un autre définissant une norme équivalente, que la forme symplectique et le produit scalaire sont *compatibles*, c'est-à-dire qu'ils sont liés par la relation

$$\omega(\cdot,\cdot) = \langle J\cdot,\cdot\rangle$$

où J est à la fois un opérateur orthogonal et une structure complexe (cf. [**Fur04**, Appendix D]). Soit $H_0 \in \Lambda(\mathbb{H}_0)$. Alors H_0 est fermé et $H_0^\perp = JH_0$. Suivant la décomposition $\mathbb{H}_0 = H_0 \oplus JH_0 \simeq H_0 \oplus H_0$,

$$\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = \langle \eta, \xi'\rangle - \langle \xi, \eta'\rangle$$

et on peut étendre ω et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ à $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}$ et poser $H = H_0 \oplus iH_0$ pour se retrouver dans la situation du paragraphe précédent.

La notion de *paire de Fredholm* est essentielle dans la définition de l'indice de Maslov en dimension infinie. La paire de lagrangiens $(\lambda, \mu) \in \Lambda(\mathbb{H}_0)^2$ est appelée paire de Fredholm si

$$\dim \lambda \cap \mu < \infty \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{H}_0/(\lambda + \mu) < \infty.$$

La Fredholm-Lagrangienne relativement à λ est alors

$$\mathcal{F}\Lambda_\lambda = \{\mu \in \Lambda(\mathbb{H}_0) \mid (\mu, \lambda) \text{ est une paire de Fredholm}\}.$$

L'indice de Maslov relativement à λ est défini pour les chemins (continus) dans la Fredholm-Lagrangienne relativement à λ (cf. [**BBF98, Fur04**]). Nous voulons maintenant traduire cette notion dans la réalisation de la Lagrangienne comme ensemble des tripotents inversibles de $\mathrm{Sym}(H)$. Soient x et y deux opérateurs de H, et $G(x)$ et $G(y)$ leurs graphes dans $\mathbb{H}$. Alors

$$\ker(y - x) = \pi_2(G(x) \cap G(y)),$$

et

$$H/\ker(y - x) \simeq G(x)/G(x) \cap G(y)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}G(x)+G(y) &= \{x\xi \oplus \xi + y\xi' \oplus \xi' \mid \xi, \xi' \in H\} \\ &= \{(x\xi + y\xi') \oplus (\xi + \xi') \mid \xi, \xi' \in H\} \\ &= \{(x\zeta + (y-x)\xi') \oplus \zeta \mid \zeta, \xi' \in H\} \\ &= G(x) + ((y-x)H \oplus 0).\end{aligned}$$

En considérant l'application

$$\begin{gathered}\mathbb{H} \to H_1 \to H_1/((y-x)H \oplus 0) \\ \xi \oplus \eta \mapsto (\eta - x\xi) \oplus 0 \mapsto ((\eta - x\xi) \oplus 0) + ((y-x)H \oplus 0)\end{gathered}$$

on obtient l'isomorphisme

$$\mathbb{H}/G(x) + G(y) \simeq H/(y-x)H.$$

Supposons maintenant que x et y sont dans Σ, et soient λ et μ les lagrangiens associées. Comme C et l'application qui à un lagrangiens réel associe le lagrangien complexe qu'il engendre, respectent l'intersection et la somme, on en déduit que λ et μ forment une paire transverse (ie. $\lambda \oplus \mu = \mathbb{H}_0$) si et seulement si $y-x$ est inversible, ie. si et seulement si (x, y) est transverse, et forment une paire de Fredholm si et seulement si $y-x$ est un opérateur de Fredholm sur H. De plus, π_2 étant injective sur $G(x) \cap G(y)$, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(y-x) = \dim \lambda \cap \mu.$$

On peut considérer $\mathbb{H}_0$ comme un espace de Hilbert complexe grâce à la la structure presque complexe J et au produit hilbertien

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \langle \cdot, \cdot \rangle + i\omega(\cdot, \cdot).$$

On note alors $U(\mathbb{H}_0, J)$ le groupe des opérateur unitaires. Puisque $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle$, on voit que $U(\mathbb{H}_0, J)$ agit sur $\Lambda(\mathbb{H}_0)$. Cette action est de plus transitive. En effet, soient λ et μ deux lagrangiens. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne réelle de $\mathbb{H}_0$. Alors comme $\mathbb{H}_0 = \lambda \oplus \lambda^\perp = \lambda \oplus J\lambda$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne complexe de $\mathbb{H}_0$. De même une base hilbertienne réelle $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de μ est une base hilbertienne complexe de $\mathbb{H}_0$. On sait qu'il existe un opérateur unitaire envoyant la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur la base $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et un tel opérateur envoie λ sur μ.

Nous voulons maintenant transporter l'action de $U(\mathbb{H}_0, J)$ en une action d'un groupe (à caractériser) sur Σ. Soit $U \in U(\mathbb{H}_0, J)$. Notons $U_{\mathbb{C}}$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de U à $\mathbb{H}$. Alors $U_{\mathbb{C}}$ agit sur $\Lambda(\mathbb{H})$, et préserve $\Lambda(\mathbb{H})^\tau$. Pour tout $a, b, c, d \in H_0$, un calcul montre que

$$C^{-1}U_{\mathbb{C}}C((a+ib) \oplus (c+id)) = (a' - ib') \oplus (c'' + id''),$$

où $a', b', c'', d'' \in H_0$ sont définis par

$$a' \oplus b' = U(a \oplus (-b)) \quad \text{et} \quad c'' \oplus d'' = U(c \oplus d).$$

Remarquons que $C^{-1}U_{\mathbb{C}}C$ laisse $H_1 = H \oplus 0$ et $H_2 = 0 \oplus H$ stables et notons

$$u = (C^{-1}U_{\mathbb{C}}C)_{|H_1} \quad \text{et} \quad v = (C^{-1}U_{\mathbb{C}}C)_{|H_2}.$$

On considère u et v comme des opérateurs sur H. Ce sont des opérateurs unitaires de H car $C^{-1}U_{\mathbb{C}}C$ est unitaire. Soit $x \in \mathrm{Sym}(H)$. Alors

$$C^{-1}U_{\mathbb{C}}C(G(x)) = G(uxv^{-1}).$$

Montrons que $v^{-1} = {}^{\mathrm{t}}u$. Il suffit de montrer que pour tout $a, b \in H_0$,

$$(u(a+ib), v(a+ib)) = (a+ib, a+ib),$$

donc que

$$(a' - ib', a'' + ib'') = (a+ib, a+ib),$$

ou encore, en développant (le produit hermitiens et la forme bilinéaire coïncidant sur H_0), que

$$\langle a', a''\rangle + \langle b', b''\rangle + i(\langle a', b''\rangle - \langle b', a''\rangle) = \langle a, a\rangle - \langle b, b\rangle + 2i\,\langle a, b\rangle\,.$$

Mais comme $U \in U(\mathbb{H}_0, J)$,

$$\langle U(a \oplus (-b)), U(a \oplus b)\rangle_J = \langle a \oplus (-b), a \oplus b\rangle_J\,,$$

donc

$$\langle a' \oplus b', a'' \oplus b''\rangle_J = \langle a \oplus (-b), a \oplus b\rangle_J\,,$$

ce qui donne la relation voulue. En résumé, l'action de $U(\mathbb{H}_0, J)$ sur $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ se transporte en une action (transitive) du groupe unitaire $U(H)$ sur Σ (on peut en effet montrer que l'on obtient bien tout $U(H)$), et cette action est la restriction de l'action de $U(H)$ sur $\mathrm{Sym}(H)$ définie par

$$U(H) \times \mathrm{Sym}(H) \to \mathrm{Sym}(H), \quad (u, z) \mapsto uz\,{}^{\mathrm{t}}u.$$

Remarquons pour conclure que $U(H)$ agit par automorphismes du système triple de Jordan $\mathrm{Sym}(H)$.

1.2. Les facteurs spin. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert complexe munie d'une involution isométrique $x \mapsto \overline{x}$. Alors H devient un JB^*-triple avec le produit triple

$$\{u, v, w\} = u\,\langle w, v\rangle + w\,\langle u, v\rangle - \overline{v}\,\langle u, \overline{w}\rangle\,.$$

On a

$$Q(x)y = 2x\,\langle x, y\rangle - \overline{y}\,\langle x, \overline{x}\rangle\,,$$

et les tripotents sont de deux types :

(i) Les éléments e tels que $\langle e, \overline{e}\rangle = 0$ et $\langle e, e\rangle = \frac{1}{2}$. Pour ceux là,

$$E_0(e) = \mathbb{C}\overline{e}, \quad E_{\frac{1}{2}}(e) = \mathrm{vect}(e, \overline{e})^{\perp}, \quad E_1(e) = \mathbb{C}e.$$

(ii) Les éléments e tels qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{e} = e^{i\theta}e$ et $\langle e, e\rangle = 1$. Ce sont les tripotents inversibles.

Soit e un tripotent inversible. La JB^*-algèbre $E^{(e)}$ a pour produit
$$x \circ y = x\langle x,e\rangle + y\langle x,e\rangle - \overline{e}\langle x,\overline{y}\rangle,$$
et pour involution
$$x^* = 2e\langle e,x\rangle - \overline{x}.$$
Pour un sous-espace complexe $F \subset H$, notons $F_0 = \{x \in H \mid \overline{x} = x\}$. Alors la forme réelle de $E^{(e)}$ est, lorsque l'on choisit e tel que $\overline{e} = e$,
$$A(e) = i(e^{\perp})_0 \oplus \mathbb{R}e.$$
Soit $x \in \Sigma$ tel que $\overline{x} = x$. On a $x = u \oplus \lambda$ avec $u \in (e^{\perp})_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $|u|^2 + \lambda^2 = 1$. Supposons $x \neq \pm e$, ie. $\lambda \neq \pm 1$. Alors
$$x = e^{i\arccos\lambda}p + e^{-i\arccos\lambda}\overline{p}$$
où
$$p = \frac{u}{2i\sqrt{1-\lambda^2}} \oplus \frac{1}{2}$$
est une projection dans $A(e)$. Soit maintenant $x \in \Sigma$ tel que $x = e^{i\theta}u \oplus \lambda$ avec $u \oplus \lambda$ comme plus haut. Alors
$$x = e^{i(\theta+\arccos\lambda)}\left(\frac{u}{2i\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \oplus \frac{1}{2} + e^{i(\theta-\arccos\lambda)}\left(\frac{-u}{2i\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \oplus \frac{1}{2}.$$
Les $e^{i(\theta\pm\arccos\lambda)}$ sont les valeurs spectrales de x par rapport à e, et x est transverse à e si et seulement si elles sont toutes les deux différentes de 1.

L'opérateur de Bergman, s'écrit, après calcul,
$$\begin{aligned}B(x,y)z = z(1 - 2\langle x,y\rangle + \langle\overline{y},y\rangle\langle x,\overline{x}\rangle)&\\ + x(-2\langle z,y\rangle + 4\langle z,y\rangle\langle x,y\rangle - 2\langle\overline{y},y\rangle\langle x,\overline{z}\rangle)&\\ + \overline{y}(2\langle z,\overline{x}\rangle - 2\langle z,y\rangle\langle x,\overline{x}\rangle)&\end{aligned}$$
Si $y = e$ et $x = p + e^{i\alpha}\overline{p}$, on a, sachant que $e = p + \overline{p}$, $\langle p,\overline{p}\rangle = 0$ et $\overline{x} = e^{-i\alpha}x$,
$$B(x,e)z = 2\overline{p}(1 - e^{i\alpha})^2\langle z,\overline{p}\rangle,$$
et donc,
$$\ker B(x,e) = \overline{p}^{\perp},$$
alors que $E_1(p) = \mathbb{C}p$.

2. L'indice de transversalité des paires de Fredholm et l'indice de Maslov

2.1. Soit E un JB^*-triple. On suppose Σ non vide. Soit $e \in \Sigma$. Pour $z \in E^{(e)}$, on pose $z^* = Q(e)z$. Soit $x \in \Sigma$ et soit $C^*(x,e)$ la sous-algèbre fermée de $E^{(e)}$ engendrée par e, x et x^*.

PROPOSITION 6.2. *Soient $(x,e) \in \Sigma^2$. Alors*

(i) $C^*(x,e)$ est associative et c'est donc une C^*-algèbre commutative.

(ii) *Le spectre* $U_{x,e}$ *de* x *dans* $C^*(x,e)$ *est contenu dans le cercle unité* $\mathbb{U}$*, et c'est aussi le spectre de* x *dans* $E^{(e)}$.

(iii) *La paire* (x,e) *est transverse, ie.* $B(x,e)$ *est inversible, si et seulement si* $1 \notin U_{x,e}$.

Démonstration. Dans $E^{(e)}$, $x^* = x^{-1}$. Or on a $[L(x), L(x^{-1})] = 0$ (cf. [**Upm85**, 19.26]) et donc $C^*(x,e)$ est fortement associative, en particulier associative. Le système triple $C^*(x,e)$ est donc lui aussi associatif et l'on a (cf. [**Upm85**, 20.32]), pour tout $u, v \in C^*(x,e)$, $|u \circ v| \leq |u|\,|v|$, sans invoquer le difficile théorème 5.1. On écrit alors comme dans [**Upm85**, 20.33], pour $z \in C^*(x,e)$,

$$|z|^3 = |\{z,z,z\}| = |z \circ (z^* \circ z)| \leq |z|\,|z^* \circ z| \leq |z|^2\,|z^*| = |z|^3 .$$

Donc $C^*(x,e)$ est une C^*-algèbre. Comme x est unitaire dans cette C^*-algèbre, son spectre est contenu dans $\mathbb{U}$. Or $C^*(x,e)$ est contenue dans une sous-algèbre fortement associative maximale (et fermée) de $E^{(e)}$, et le spectre de x dans cette sous-algèbre est égale au spectre de x dans $C^*(x,e)$, puisque celui-ci est égal à sa frontière. Mais d'après le théorème 2.17, cette sous-algèbre fortement associative maximale est pleine dans l'algèbre de Jordan $E^{(e)}$, et donc le spectre de x dans $C^*(x,e)$ est égal au spectre de x dans $E^{(e)}$. La dernière assertion découle immédiatement de la précédente et du fait que $B(x,e) = Q(x-e)Q(e) = P(x-e)$. □

Puisque $C^*(x,e)$ est engendrée (comme C^*-algèbre) par x et e, on a l'isomorphisme de Gelf'and :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{x,e} :& C^*(x,e) \to C(U_{x,e}), \\ & y \mapsto \hat{y}, \end{aligned}$$

qui à l'élément x associe la fonction $\hat{x}(\mu) = \mu$.

Proposition 6.3. *Soit* $(x,e) \in \Sigma^2$*. On a*

$$U_{e,x} = \overline{U_{x,e}}.$$

Démonstration. Cela résulte du fait que $Q(e - \lambda x)$ est inversible si et seulement si $Q(x - \lambda^{-1} e)$ l'est. □

Supposons maintenant que $1 \notin U_{x,e}$ ou bien que 1 est isolé dans $U_{x,e}$. Alors la fonction caractéristique $\chi_{\{1\}}$ de $\{1\}$ est continue sur $U_{x,e}$. On note alors

$$p = p(x,e) = {\mathcal{G}_{x,e}}^{-1}(\chi_{\{1\}})$$

le projecteur associé à 1, et

$$A_p(e) = \{p, A(e), p\}.$$

On dit que 1 est de multiplicité finie si $A_p(e)$ est une JB-algèbre de rang finie, ie.

$$A_p(e) = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q$$

où chaque A_j est une algèbre de Jordan euclidienne simple (cf. [**FK94**]) ou un facteur spin (ie. la JB-algèbre, de rang 2, $H \oplus \mathbb{R}$ où H est un espace de Hilbert), le rang de $A_p(e)$ étant alors par définition

$$\operatorname{rang} A_p(e) = \operatorname{rang}(A_1) + \cdots + \operatorname{rang}(A_q).$$

DÉFINITION 6.4. *Soit $(x, e) \in \Sigma$. On dit que (x, e) est une paire de Fredholm lorsque (x, e) est transverse, ou lorsque 1 est isolé dans $U_{x,e}$, et est de multiplicité finie.*

On définit alors l'indice de transversalité de la paire de Fredholm comme le rang de $A_p(e)$,

$$\mu(x, e) = \operatorname{rang} A_p(e).$$

Lorsque 1 est isolé mais que $A_p(e)$ n'est pas de rang fini, on pose $\mu(x, e) = \infty$.

REMARQUE 6.5. Dans le chapitre précédent nous définissons un projecteur $x \wedge e$ pour une paire quelconques de tripotents inversibles dans un JBW^*-triple. Nous pensons que lorsque (x, e) est une paire de Fredholm d'un JBW^*-triple, on a bien

$$x \wedge e = p(x, e).$$

EXEMPLE 6.6. Considérons le JB^*-triple $E = \operatorname{Sym}(H)$. Les notations sont celles du chapitre précédent. En particuliers τ désigne l'involution de H et H_0 la forme réelle associée. Soit $(x, e) \in \Sigma^2$. Alors xe^{-1} est unitaire, donc normal. Soit $C^*(xe^{-1})$ la sous-algèbre fermée de $\mathrm{L}(H)$ engendrée par id, xe^{-1}, et $(xe^{-1})^* = ex^{-1}$. Alors la multiplication à droite par e est un isomorphisme de $C^*(xe^{-1})$ sur $C^*(x, e)$ (qui envoie id sur e et xe^{-1} sur x). Supposons que 1 est isolé dans $U_{x,e}$. Notons p le projecteur associé à 1 dans $C^*(x, e)$ et $p' = pe^{-1}$ le projecteur associé à 1 dans $C^*(xe^{-1})$. L'opérateur p' est une projection au sens usuel, et l'on a

$$\ker(\mathrm{id} - xe^{-1}) = p'H.$$

Nous avons vu au chapitre précédent que l'action du groupe unitaire $U(H)$ sur Σ par automorphismes du système triple E (définie par $z \mapsto vz{}^{t}v$) est transitive. En particuliers, il existe $u \in U(H)$ tel que $e = u{}^{t}u$. Alors $A(e)$ (la partie autoadjointe de E pour l'involution définie par e) est isomorphe à $\operatorname{Sym}(H_0)$:

$$A(e) = A(u \,\mathrm{id}\, {}^{t}u) = uA(\mathrm{id}){}^{t}u \simeq A(\mathrm{id}) \simeq \operatorname{Sym}(H_0).$$

Soit $p'' = u^{-1}p\,{}^{t}u^{-1}$. C'est un projecteur de $\operatorname{Sym}(H_0)$, ie. une projection de H laissant H_0 stable. De plus

$$A_{p''}(\mathrm{id}) = p'' \operatorname{Sym}(H_0)p'' \simeq \operatorname{Sym}(p''H_0),$$

comme on peut le voir en écrivant la "matrice" d'un opérateur $z \in \operatorname{Sym}(H_0)$ relativement à la décomposition $H_0 = p''H_0 \oplus (1 - p'')H_0$, et donc

$$A_p(e) \simeq \operatorname{Sym}(p''H_0).$$

Ainsi $A_p(e)$ est de rang fini si et seulement si $p''H_0$ est de dimension finie. De plus

$$\ker(\mathrm{id} - xe^{-1}) = pe^{-1}H = pH = p\,{}^{\mathrm{t}}u^{-1}H = up''H,$$

donc

$$\dim\ker(\mathrm{id} - xe^{-1}) = \dim_{\mathbb{C}} p''H = \dim_{\mathbb{R}} p''H_0,$$

et lorsque l'un des deux membres est fini,

$$\dim\ker(e - x) = \operatorname{rang} A_p(e).$$

Montrons que dans ce cas, $x - e$ est un opérateur de Fredholm. Puisque

$$(\mathrm{id} - xe^{-1})^* = \mathrm{id} - ex^{-1} = (x - e)x^{-1} = (xe^{-1} - \mathrm{id})ex^{-1},$$

on a

$$\operatorname{codim} \overline{\operatorname{im}(\mathrm{id} - xe^{-1})} = \dim\ker(\mathrm{id} - xe^{-1}),$$

et il reste à montrer que $\mathrm{id} - xe^{-1}$ est d'image fermée. Grâce à l'isomorphisme de Gelf'and on voit que $(1 - (xe^{-1} - p'))$ est inversible, et l'on a

$$\mathrm{id} - p' = (\mathrm{id} - xe^{-1})(1 - (xe^{-1} - p'))^{-1}.$$

Donc

$$\operatorname{im}(\mathrm{id} - xe^{-1}) = \operatorname{im}(\mathrm{id} - p') = \ker p'$$

est bien fermé. Réciproquement, si $x - e$ est un opérateur de Fredholm, c'est aussi le cas de $\mathrm{id} - xe^{-1}$. Comme 0 est dans la frontière du spectre de cet opérateur, il est en fait isolé d'après [**Mau04**, Lemme P. 51], et donc 1 est isolé dans $U_{x,e}$.

Revenons au cas général.

Proposition 6.7. *Soit* $(x, e) \in \Sigma^2$. *Alors* 1 *est isolé dans* $U_{x,e}$ *si et seulement si* 0 *est isolé dans* $B(x, e)$.

Démonstration. Posons $U = U_{x,e}$. Dans l'algèbre de Jordan unitaire $E^{(e)}$ on a $B(x, e) = P(x - e)$, et d'après le théorème 3.11,

$$sp(P(x - e)) \subset (1 - U)(1 - U).$$

Donc si 1 est isolé dans U, alors 0 est isolé dans $sp(B(x, e))$.

Pour établir la réciproque, on montre que

$$\{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset sp(P(x - e)).$$

Commençons par monter que

$$\{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial_{ext}(1 - U)(1 - U),$$

où $\partial_{ext}K$ est la frontière de la composante connexe non bornée du complémentaire du compact K. Tout élément $1 - \lambda \in 1 - \mathbb{U}$ s'écrit de manière unique $2\cos\frac{\Theta}{2}e^{i\frac{\Theta}{2}}$ avec $-\pi < \Theta \leq \pi$, et alors

$$(1 - \lambda)^2 = 4\cos^2\frac{\Theta}{2}e^{i\Theta}.$$

Soient $2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $2\cos(\Theta-\frac{\theta}{2})e^{i(\Theta-\frac{\theta}{2})}$ dans $1-\mathbb{U}$: leur produit vaut

$$4\cos\frac{\theta}{2}\cos(\Theta-\frac{\theta}{2})e^{i\Theta}=2\big(\cos\Theta+\cos(\Theta-\theta)\big)e^{i\Theta}.$$

Or la fonction $\theta\mapsto\cos\Theta+\cos(\Theta-\theta)$ est maximale pour $\Theta=\theta$. La demi-droite $]4\cos^2\frac{\Theta}{2},+\infty[e^{i\Theta}$ est donc entièrement contenue dans le complémentaire de $(1-U)(1-U)$, et cela implique notre assertion. Considérons

$$\mathcal{B}=\{T\in \mathrm{L}(E)\mid TC^*(x,e)\subset C^*(x,e)\}.$$

C'est une sous-algèbre fermée de $\mathrm{L}(E)$ qui contient $P(x-e)$. Le spectre de $P(x-e)$ dans $\mathcal{B}$ est constitué de $\sigma(P(x-e))$ et, éventuellement, de certains de ses trous (ie. les composantes connexes bornées de son complémentaire). De plus, en considérant le morphisme

$$\mathcal{B}\to \mathrm{L}(C^*(x,e)),\ T\mapsto T_{|C^*(x,e)},$$

on a, puisque $\sigma(P(x-e)_{|C^*(x,e)})=\{(1-\lambda)^2\mid\lambda\in U\}$, l'inclusion

$$\{(1-\lambda)^2\mid\lambda\in U\}\subset sp(P(x-e),\mathcal{B}).$$

Il résulte alors de

$$\{(1-\lambda)^2\mid\lambda\in U\}\subset\partial_{ext}(1-U)(1-U)$$

que

$$\{(1-\lambda)^2\mid\lambda\in U\}\subset\partial sp(P(x-e),\mathcal{B}).$$

Comme $\partial sp(P(x-e),\mathcal{B})\subset\partial sp(P(x-e))$, il vient

$$\{(1-\lambda)^2\mid\lambda\in U\}\subset\partial sp(P(x-e)).$$

Et donc si $1\in U$ n'est pas isolé, alors $0\in sp(P(x-e))$ n'est pas isolé. □

On note Σ_e le composante connexe de Σ contenant e, et $\mathcal{F}\Sigma_e$ l'ensemble des $x\in\Sigma$ tels que (x,e) est une paire de Fredholm.

Proposition 6.8. *Soit Σ_e la composante connexe de Σ contenant e. Alors*

$$\mathcal{F}\Sigma_e\subset\Sigma_e.$$

Démonstration. Soit $x\in\mathcal{F}\Sigma_e$. Alors $U_{x,e}$ n'est pas $\mathbb{U}$ tout entier, puisque soit 1 n'y est pas, soit 1 y est mais est isolé, et on peut donc définir $\log x\in C^*(x,e)$, log étant une détermination adéquate du logarithme. Alors $P(\exp(\frac{1}{2}\log x))e=x$ et donc on a bien $x\in\Sigma_e$. □

2.2. Perturbation de l'indice de transversalité. Considérons $(x, e) \in \Sigma^2$ et soit $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. On a $U_{x,e^{i\theta}e} = e^{-i\theta}U_{x,e}$, et donc si $e^{i\theta}$ est isolé dans $U_{x,e}$, alors 1 est isolé dans $U_{x,e^{i\theta}e}$, et on peut définir $p(x, e^{i\theta}e)$ et $\mu(x, e^{i\theta}e)$.

Un sous-ensemble σ de $U_{x,e}$ est dit spectral lorsque il est à la fois ouvert et fermé. Cela revient à dire que la fonction caractéristique χ_σ est continue.

LEMME 6.9. *Soient $(x, e) \in \Sigma^2$ et σ un sous-ensemble spectral de $U_{x,e}$. Si $p = \mathcal{G}^{-1}_{(x,e)}(\chi_\sigma)$ alors $P(p)x$ et p sont deux unités de $P(p)E$ et on a les propriétés suivantes :*

(i) $P(p)C^*(x, e) = C^*(P(p)x, p) \subset C^*(x, e)$,

(ii) $U_{P(p)x,p} = \sigma$.

DÉMONSTRATION. (1) Puisque $p \in C^*(x, e)$, on a

$$P(p)x^2 = pxxp = pxxp^2 = pxpxp = pxppxp = (P(p)x)^2.$$

(2) Si $\lambda \notin U_{P(p)x,p}$ alors il existe $z \in C^*(P(p)x, p)$ tel que

$$(\lambda p - P(p)x)z = p.$$

Soit $g(\mu) = (1 - \chi_\sigma(\mu))(\lambda - \mu)^{-1}$ pour $\mu \in U_{P(p)x,p}$. Alors

$$g(x)(\lambda e - x) = e - p.$$

Grâce à (1), $(\lambda e - x)z = (\lambda e - x)P(p)z = (\lambda e - x)pzp = (\lambda p - P(p)x)z = p$ et

$$(g(x) + z)(\lambda e - x) = e - p + p = e.$$

Donc $\lambda \notin U_{x,e}$. Réciproquement, si $\lambda \notin \sigma$ soit $h(\mu) = \chi_\sigma(\mu)(\lambda - \mu)^{-1}$ pour $\mu \in U_{x,e}$. Alors $h(x)(\lambda e - x) = p$ donc

$$P(p)h(x)(\lambda p - P(p)x) = ph(x)p((\lambda p - pxp) = ph(x)(\lambda e - x)p = p.$$

□

Pour $0 < \varepsilon < \pi$ on note

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{e^{i\theta} \mid 0 < |\theta| \leq \varepsilon\}.$$

LEMME 6.10 (Perturbation de l'indice de transversalité). *Soit (x, e) une paire de Fredholm. Il existe $0 < \varepsilon < \pi$ tel que 1 est la seule valeur spectrale de x dans $\mathcal{A}_\varepsilon$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que pour tout tripotent inversible $y \in \mathcal{V}$, le spectre de y dans $\mathcal{A}_\varepsilon$ est fini et ne contient pas $e^{\pm i\varepsilon}$, et*

$$\mu(x, e) = \sum_{|\theta| \leq \varepsilon} \mu(y, e^{i\theta}e).$$

DÉMONSTRATION. Puisque 1 est isolé (ou n'est pas) dans $U_{x,e}$, soit $0 < \varepsilon < \pi$ tel que $U_{x,e} \cap \mathcal{A}_\varepsilon = \emptyset$. Dans une algèbre de Jordan Banach, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert, donc il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que

$$\forall y \in \mathcal{V} \quad y - e^{\pm i\varepsilon}e \text{ est inversible.}$$

Alors si y est une unité dans $\mathcal{V}$, $\sigma_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \cap U_{y,e}$ est un sous-ensemble spectral et on peut donc définir $q(y,e,\sigma_\varepsilon) = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(\chi_{\sigma_\varepsilon})$. Alors (cf. par exemple [**DS88**, IX, lemma 13])

$$p(x,e) = \int_{|\lambda-1|=\varepsilon} \frac{1}{2i\pi}(\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

et

$$q(y,e,\sigma_\varepsilon) = \int_{|\lambda-1|=\varepsilon} \frac{1}{2i\pi}(\lambda e - y)^{-1} d\lambda,$$

ce qui montre, l'inversion étant continue, que si y est suffisamment proche de x, alors $q(y,e,\sigma_\varepsilon)$ l'est suffisamment de $p(x,e)$. Or si p est un idempotent d'une JB-algèbre A, tout idempotent q dans un voisinage de p peut s'écrire

$$q = \exp k_v^{(p)}(p)$$

où $v \in A_{\frac{1}{2}}(p)$ et $\exp k_v^{(p)}$ est un automorphisme de A (cf. Proposition 5.5). Quitte à restreindre $\mathcal{V}$, on a donc, en faisant $p = p(x,e)$ et $q = q(y,e,\sigma_\varepsilon)$: pour tout y dans $\mathcal{V}$, $A_q(e)$ est isomorphe à $A_p(e)$. En particulier, si $A_p(e)$ est de rang fini alors $A_q(e)$ aussi et les rangs sont égaux. De plus, dans ce cas, d'après le lemme précédent, l'ensemble σ_ε est fini. Supposons $\sigma_\varepsilon = \{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_l}\}$ et soit $q_j = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(e^{i\theta_j})$, alors en faisant le calcul dans $C(U_{y,e})$, on voit que les q_j sont des idempotents deux à deux orthogonaux tels que

$$q = q_1 + \cdots + q_l,$$

et donc $\mathrm{rang}(q) = \mathrm{rang}(q_1) + \cdots + \mathrm{rang}(q_l)$. □

2.3. L'indice de Maslov. On considère un chemin continu

$$x : [0,1] \to \Sigma$$

tel que pour tout $t \in [0,1]$, $(x(t),e)$ soit une paire de Fredholm. Les résultats suivant généralisent ceux de [**BBF98, Fur04**] et grâce à la partie précédente les démonstrations sont semblables.

LEMME 6.11. *Il existe une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ et des réels $\varepsilon_j \in]0,\pi[$, $j = 1 \dots N$ tels que $\forall t \in [t_{j-1}, t_j]$*

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon_j} e) = 0,$$

et

$$U_{x(t),e} \cap \mathcal{A}_{\varepsilon_j} \quad \text{consiste en un nombre fini de valeurs propres isolées de multiplicités finies.}$$

DÉMONSTRATION. On applique le lemme 6.10 à chaque $(x(t),e)$ pour $t \in [0,1]$ et on obtient des voisinages $\mathcal{V}_t$ et des ε_t. On extrait un recouvrement fini de $[0,1]$:

$$\left[0 = s_0, s_0 + \delta_0^+\right[, \dots, \left]s_i - \delta_i^-, s_i + \delta_i^+\right[, \dots, \left]s_{N-1} - \delta_{N-1}^-, s_{N-1} = 1\right]$$

et on pose

$$t_0 = s_0 = 0, t_1 = s_0 + \delta_0^+, \ldots, t_{N-1} = s_{N-2} + \delta_{N-2}^+, t_N = s_{N-1} = 1$$

et

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{s_{j-1}}.$$

□

On dira qu'une telle subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ est *admissible* pour les ε_j, $j = 1, \ldots, N$. Posons

$$k(t, \varepsilon_j) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon_j} \mu(x(t), e^{i\theta} e) \quad \text{pour } t_{j-1} \leq t \leq t_j.$$

LEMME 6.12. *Soit $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ une subdivision admissible pour les ε_j, $j = 1, \ldots, N$ et les $\widetilde{\varepsilon_j}$, $j = 1, \ldots, N$. Alors pour tout $1 \leq j \leq N$,*

$$k(t_j, \varepsilon_j) - k(t_{j-1}, \varepsilon_j) = k(t_j, \widetilde{\varepsilon_j}) - k(t_{j-1}, \widetilde{\varepsilon_j})$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $\varepsilon_j \geq \widetilde{\varepsilon_j}$. Alors

$$k(t, \varepsilon_j) - k(t, \widetilde{\varepsilon_j}) = \sum_{\widetilde{\varepsilon_j} \leq \theta \leq \varepsilon_j} \mu(x(t), e^{i\theta} e).$$

Mais si γ est le cercle de diamètre $\left[e^{i\varepsilon_j}, e^{i\widetilde{\varepsilon_j}}\right]$, et

$$p_t = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (\lambda e - x(t))^{-1} \mathrm{d}\lambda$$

alors $\sum_{\widetilde{\varepsilon_j} \leq \theta \leq \varepsilon_j} \mu(x(t), e^{i\theta} e) = \mathrm{rang}\,(p_t)$. Mais $t \mapsto p_t$ est continue donc le rang de p_t est constant. □

PROPOSITION-DÉFINITION 6.13. *La quantité*

$$Mas(x(t), e) = \sum_{j=1}^{N} (k(t_j, \varepsilon_j) - k(t_{j-1}, \varepsilon_j))$$

ne dépend ni des t_j, ni des ε_j, pourvu que la subdivision $t_0, \ldots, t_N$ soit admissible pour les ε_j. On l'appelle l'indice de Maslov du chemin $x(t)$ par rapport au point e.

DÉMONSTRATION. La démonstration utilise le lemme précédent comme dans [**Fur04**, Proposition 3.3]. □

THÉORÈME 6.14. *L'indice de Maslov (par rapport à un point fixé) est additif pour la concaténation des chemins et invariant par homotopie.*

DÉMONSTRATION. La propriété d'additivité découle directement de la construction. Pour démontrer l'invariance par homotopie on suit la démonstration de [**Fur04**, Theorem 3.6]. Soit une application continue

$$x : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{F}\Sigma_e.$$

Grâce au Lemme 6.10 on montre que pour chaque $s \in [0,1]$ il existe un nombre $c_s > 0$, une partition $t_0 = 0 < t_1 \cdots < t_N = 1$, et des ε_j, $j = 1 \dots N$, tels que pour tout $t \in [t_{j-1}, t_j]$ et $s' \in [s - c_s, s + c_s]$,

$$\mu(x(s',t), e^{\pm i\varepsilon_j} e) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{|\theta| \leq \varepsilon_j} \mu(x(s',t), e^{i\theta} e) < \infty.$$

Alors $\forall\, 1 \leq j \leq N$ et $\forall\, v \in [s, s + c_s]$,

$$\begin{aligned} &\sum_{|\theta|\leq\varepsilon_j} \mu(x(s+v,t_j), e^{i\theta}e) - \sum_{|\theta|\leq\varepsilon_j} \mu(x(s+v,t_{j-1}), e^{i\theta}e) \\ &\qquad + \sum_{|\theta|\leq\varepsilon_j} \mu(x(s+v,t_{j-1}), e^{i\theta}e) - \sum_{|\theta|\leq\varepsilon_j} \mu(x(s,t_{j-1}), e^{i\theta}e) \\ &= \sum_{|\theta|\leq\varepsilon_j} \mu(x(s+v,t_j), e^{i\theta}e) - \sum_{|\theta|\leq\varepsilon_j} \mu(x(s,t_j), e^{i\theta}e) \\ &\qquad + \sum_{|\theta|\leq\varepsilon_j} \mu(x(s,t_j), e^{i\theta}e) - \sum_{|\theta|\leq\varepsilon_j} \mu(x(s,t_{j-1}), e^{i\theta}e). \end{aligned}$$

En additionnant par rapport à j on obtient

$$\begin{aligned} &Mas(x(\cdot,0)_{|[s,s+c_s]}, e) + Mas(x(s+c_s,\cdot), e) \\ &\qquad\qquad = Mas(x(s,\cdot), e) + Mas(x(\cdot,1)_{|[s,s+c_s]}, e), \end{aligned}$$

et donc

$$Mas(x(\cdot,0), e) + Mas(x(1,\cdot), e) = Mas(x(0,\cdot), e) + Mas(x(\cdot,1), e).$$

$\square$

3. L'indice de Maslov en dimension finie

Dans cette section, E est un JB^*-triple de dimension finie, ie. un système triple de Jordan hermitien positif, et on note $\mathcal{D}$ sa boule unité. Rappelons que tout espace hermitien symétrique de type non-compact se réalise comme domaine borné symétrique (cf. [**Hel78**]), et donc comme boule unité d'un JB^*-triple de dimension finie. Dans toute la suite on suppose $\mathcal{D}$ de type tube. Cela revient à dire que Σ est non-vide, et alors $\Sigma = S$ est la frontière de Shilov du domaine $\mathcal{D}$.

3.1. L'indice triple. Dans l'article [**CØ01**], Jean-Louis Clerc et Bent Ørsted généralisent l'indice (triple) de Maslov à la frontière de Shilov d'un domaine borné symétrique de type tube. On suppose dans la suite que E est simple de rang r. Soit $L = \mathrm{Aut}(\mathcal{D})^0$ la composante neutre du groupe des automorphismes de $\mathcal{D}$ et $K = \mathrm{Aut}(E)^0$. Le groupe L agit transitivement sur S. Il agit également transitivement sur l'ensemble $S^2_\top$ des couples de tripotents inversibles transverses. Notons $S^3_\top$

l'ensemble des triplets transverses. Fixons $e \in S$ et soit $(c_1, \dots, c_r)$ une base de Jordan de $A(e)$. Posons, pour $j = 0, 1, \dots, r$,

$$\varepsilon_0 = -e, \quad \varepsilon_j = \sum_{k=1}^{j} c_k - \sum_{k=j+1}^{r} c_k, \quad \varepsilon_r = e.$$

THÉORÈME 6.15 ([**CØ01**]). *Il y a exactement $r+1$ orbites dans $S^3_\top$ sous l'action de L. La famille $(e, -e, -i\varepsilon_j)$, $1 \leq j \leq r$, est une famille exhaustive de représentants des orbites.*

Soit $(\sigma, \tau, \nu) \in S^3_\top$. Il existe donc $0 \leq k \leq r$ tel que (σ, τ, ν) est conjugué par L à $(e, -e, -i\varepsilon_k)$. L'*indice de Maslov* du triplet (σ, τ, ν) est par définition

$$\iota(\sigma, \tau, \nu) = 2k - r.$$

L'indice de Maslov du triplet (σ, τ, ν) s'interprète (pour une certaine normalisation) comme l'aire orientée du triangle idéal de sommets (σ, τ, ν).

THÉORÈME 6.16 ([**CØ01**]). *L'indice de Maslov est antisymétrique, et c'est un cocycle.*

Dans [**Cle04**], J.-L. Clerc étend la définition de l'indice de Maslov aux triplets non-transverses.

3.2. L'indice double dans le revêtement universel de la frontière de Shilov. Soit $e \in S$. On note $\det_e$ la fonction déterminant de l'algèbre de Jordan euclidienne $A(e)$. Rappelons que c'est une fonction polynomiale, et que $\det_e x$ est le produit des valeurs propres de x (comptées avec multiplicités). On note encore $\det_e$ son extension à $E^{(e)} = A(e) \oplus iA(e)$.

LEMME 6.17. *Soient e, σ dans S. Alors pour tout x dans E, on a*

$$\det_\sigma x = \det_\sigma e \det_e x.$$

DÉMONSTRATION. Soit $k \in K$ tel que $\sigma = ke$. Alors l'application

$$E^{(e)} \to E^{(\sigma)}, \quad x \mapsto kx,$$

est un morphisme d'algèbre de Jordan complexe avec involution, et donc $\det_\sigma(kx) = \det_e(x)$. Or $\det_\sigma(kx) = \chi_\sigma(k) \det_\sigma(x)$ où χ_σ est un caractère de $E^{(\sigma)}$. En testant en $x = e$, on trouve l'identité annoncée. □

Le revêtement universel $\widetilde{S}$ de S est construit dans [**CK07**]. On fixe $e_0 \in S$ et alors [**CK07**, Théorème 3.5]

$$\widetilde{S} = \{(\sigma, \theta) \in S \times \mathbb{R} \mid \det_{e_0} \sigma = e^{ir\theta}\}.$$

Une primitive du cocycle de Maslov est une fonction antisymétrique $m : \widetilde{S} \times \widetilde{S} \mapsto \mathbb{Z}$ vérifiant la *formule de Leray* :

$$\iota(\sigma, \tau, \nu) = m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) + m(\widetilde{\tau}, \widetilde{\nu}) + m(\widetilde{\nu}, \widetilde{\sigma}).$$

Dans le cas de la Lagrangienne, Jean Leray (cf. [**Ler77**]) donne une construction de cette primitive. Deux autres constructions sont données par Souriau ([**Sou76**]) et Arnold ([**Arn85**]). Dans [**CK07**] Clerc et Koufany suivent ces deux méthodes pour construire une primitive du cocycle de Maslov généralisé.

Soient σ et τ dans S. Écrivons la décomposition spectrale de τ par rapport à σ :

$$\tau = \sum_{j=1}^{r} e^{i\theta_j}\sigma_j,$$

où $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ est une base de Jordan de $A(\sigma)$, et supposons $\theta_j \in [0, 2\pi[$. On pose alors :

$$\Psi(\sigma,\tau) = \sum_{0<\theta_j} (1 - \frac{\theta_j}{\pi}).$$

Proposition 6.18. *La fonction Ψ vérifie les propriété suivantes :*

(i) $\Psi(\sigma,\tau) = -\Psi(\tau,\sigma)$.

(ii) $\forall k \in \mathrm{Aut}(E)$, $\Psi(k\sigma, k\tau) = \Psi(\sigma,\tau)$.

La fonction Ψ peut se définir, lorsque τ et $-\sigma$ sont transverses, au moyen du logarithme. En effet sur l'ouvert $S_\top(-\sigma)$ des tripotents inversibles transverses à $-\sigma$ l'application

$$\log_\sigma \tau = \int_{-\infty}^{0} ((s\sigma - \tau)^{-1} - (s-1)^{-1}\sigma)ds,$$

où les opérations sont dans $E^{(\sigma)}$, est bien définie et régulière, et l'on a (cf. [**CK07**, Proposition 5.3]),

Proposition 6.19. *Supposons σ et τ transverses. On a*

(i) $\Psi(-\sigma,\tau) = \frac{i}{\pi}\operatorname{tr}_\sigma \log_\sigma \tau$,

(ii) si $\tau = k(-e)$, *avec* $k \in \mathrm{Aut}(E)$ *alors* $\Psi(\sigma,\tau) = -\frac{i}{\pi}\operatorname{tr}_e \log_e k^{-1}\sigma$,

(iii) Ψ *est continue sur* $S_\top^2$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, les assertions *(i)* et *(ii)* sont équivalentes et *(i)* se déduit de la formule (15) de [**CK07**]. L'assertion *(iii)* est une conséquence de *(ii)* et de [**CK07**, Proposition 5.2]. □

Soient $\widetilde{\sigma} = (\sigma, \theta)$ et $\widetilde{\tau} = (\tau, \psi)$ dans $\widetilde{S}$. On définit la fonction m par

$$m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) = \Psi(\sigma,\tau) + \frac{r}{\pi}(\psi - \theta).$$

Proposition 6.20. *On a $m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Ecrivons $\tau = \sum e^{i\varphi_j}\sigma_j = \sum e^{i\psi_j}e'_j$ la décomposition de τ par rapport à σ et e respectivement, et $\sigma = \sum e^{i\theta_j}e_j$ celle de σ par rapport à e. On a $e^{i\sum\psi_j} = e^{ir\psi}$ et $e^{i\sum\theta_j} = e^{ir\theta}$. De la formule $\det_e\tau = \det_e\sigma\det_\sigma\tau$ on déduit $e^{ir\psi} = e^{ir\theta}e^{ir\sum\varphi_j}$ et donc $e^{2i\pi m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau})} = 1$. □

La fonction m est clairement antisymétrique, et c'est une primitive du cocyle ι.

Théorème 6.21 ([**CK07**] Théorèmes 5.5 et 6.3). *La fonction m vérifie la formule de Leray.*

Démonstration. Soient $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\tau}$ et $\widetilde{\nu}$ de projections respectivement σ, τ et ν. On a

$$m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}) + m(\widetilde{\tau},\widetilde{\nu}) + m(\widetilde{\nu},\widetilde{\sigma}) = \Psi(\sigma,\tau) + \Psi(\tau,\nu) + \Psi(\nu,\sigma),$$

La fonction $j(\sigma,\tau,\nu) = \Psi(\sigma,\tau) + \Psi(\tau,\nu) + \Psi(\nu,\sigma)$ prend donc des valeurs entières et est continue sur $S^3_\top$. Pour montrer que $j = \iota$ sur $S^3_\top$, il suffit donc de vérifier que $j(e,-e,-i\varepsilon_k) = \iota(e,-e,-i\varepsilon_k) = 2k-r$, ce qui est immédiat. Pour étendre la formule à S^3, on utilise une idée due à M. de Gosson : la quantité

$$\iota(\sigma,\tau,\nu) + m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\nu}) + m(\widetilde{\nu},\widetilde{\tau})$$

ne varie pas lorsque $\nu \in S_\top(\sigma)\cap S_\top(\tau)$ (cf. [**CK07**, théorème et définition 6.1]). Posons $\widetilde{\sigma} = (\sigma,\theta)$ et $\widetilde{\tau} = (\tau,\psi)$ et soit $\tau = \sum e^{\varphi_j}\sigma_j$, $\varphi_j \in [0,2\pi[$, la décomposition spectrale de τ par rapport à σ. Posons

$$l = \#\{1 \le j \le r \mid \varphi_j = 0\}.$$

Calculons donc cette quantité avec $\widetilde{\nu} = (e^{i\alpha}\sigma,(\theta+\alpha))$ où l'on suppose $\sup_j\varphi_j < \alpha < 2\pi$:

$$\begin{aligned}\iota(\sigma,\tau,\nu) + m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\nu}) + m(\widetilde{\nu},\widetilde{\tau}) &= r - l + \frac{1}{\pi}\Big(\sum_{j=1}^r(\pi-\alpha) + r(\theta+\alpha-\theta)\Big)\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\Big(\sum_{j=1}^r(\pi-(2\pi+\varphi_j-\alpha)) + r(\psi-(\theta+\alpha))\Big)\\ &= r - l + r - 2r + \frac{1}{\pi}\Big(\sum_{j=1}^r(\pi-\varphi_j) + r(\psi-\theta)\Big)\\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\sum_{\varphi_j>0}(\pi-\varphi_j) + r(\psi-\theta)\Big) = m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau})\end{aligned}$$

Donc la formule est vraie pour tous les triplets (σ,τ,ν) tels que ν est transverse à σ et à τ, et cela implique que la formule de Leray est vraie en toute généralité (cf. [**CK07**, Théorème 6.3]). □

3.3. L'indice pour les chemins. La construction que nous avons développée dans la section 2 est valable en particulier en dimension finie. L'indice de transversalité $\mu(x,e)$ se lit sur la décomposition spectrale de x par rapport à e : si $x = \sum_{j=1}^{r} e^{i\varphi_j} e_j$, alors

$$\mu(x, e^{i\theta}e) = \#\{1 \leq j \leq r \mid e^{i\varphi_j} = e^{i\theta}\}.$$

Dans [**CK07**] l'indice de transversalité est défini au moyen de la transformée de Cayley en généralisant la *distance arithmétique* étudiée par Hua.

Exemple 6.22. On calcule l'indice de Maslov dans le cas du cercle pour les chemins suivants :

(i) $x(t) = e^{it\varphi}e$, où $\varphi \in [0, \pi[$.
On choisit $\varphi < \varepsilon < \pi$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon}e) = 0 \text{ pour } t \in [0,1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e^{i\varphi}e, e^{i\theta}e) - \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e, e^{i\theta}e) = 1 - 1 = 0$$

(ii) $x(t) = e^{i(t\varphi+\psi)}e$, où $\psi \in]0, 2\pi[$ et $0 < \varphi < 2\pi - \psi$.
On choisit $0 < \varepsilon < \min\{\psi, 2\pi - (\varphi + \psi)\}$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon}e) = 0 \text{ pour } t \in [0,1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e^{i(\varphi+\psi)}e, e^{i\theta}e) - \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e^{i\psi}e, e^{i\theta}e) = 0 - 0 = 0$$

(iii) $x(t) = e^{-it\varphi}e$, où $\varphi \in [0, \pi[$.
On choisit $\varphi < \varepsilon < \pi$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon}e) = 0 \text{ pour } t \in [0,1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e^{-i\varphi}e, e^{i\theta}e) - \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e, e^{i\theta}e) = 0 - 1 = -1.$$

L'indice de Maslov étant invariant par homotopie, on peut le définir comme un indice sur $\widetilde{S}$. Soient $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$ de projections respectives σ et τ. On pose $Mas(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, e) = Mas(x(t), e)$ où x est n'importe quel chemin d'extrémités σ et τ dont le relèvement d'origine $\widetilde{\sigma}$ se termine en $\widetilde{\tau}$.

Théorème 6.23. *Soient $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$ dans $\widetilde{\Sigma}$, de projections respectives σ et τ, et soit e dans Σ. Alors*

$$\text{(E)} \qquad Mas(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, e) = \frac{1}{2}(m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) + \iota(e, \tau, \sigma) + \mu(\tau, e) - \mu(\sigma, e)).$$

DÉMONSTRATION. Soient

$$\widetilde{\sigma} = (\sigma = \sum e^{i\varphi_j} c_j, r\varphi) \quad \text{et} \quad \widetilde{\tau} = (\tau = \sum e^{i\phi_j} d_j, r\phi)$$

deux points de $\widetilde{\Sigma}$, (c_j) et (d_j) étant deux repères de Jordan de $A(e)$. Posons $\widetilde{\tau}' = (\tau' = \sum e^{i\phi_j} c_j, r\phi)$. Il existe $k \in K^{(e)}$ tel que $kd_j = c_j$, $j = 1 \dots r$, et soit $t \mapsto k_t$ un chemin dans $K^{(e)}$ tel que $k_0 = id$ et $k_1 = k$. Alors $t \mapsto (\sum e^{i\phi_j} k_t d_j, r\phi)$ est un chemin dans $\widetilde{\Sigma}$ et on note $t \mapsto x(t)$ sa projection. Alors $Mas(\{x(t)\}, e)$ est nul car $\mu(x(t), e)$ est constant. Soit $\widetilde{e}$ un point quelconque au dessus de e. Alors d'après la formule de Leray,

$$m(\widetilde{\tau}, \widetilde{\tau}') + \iota(e, \tau', \tau) + \mu(\tau', e) - \mu(\tau, e) = m(\widetilde{e}, \widetilde{\tau}') - m(\widetilde{e}, \widetilde{\tau}) = 0.$$

Comme le second membre de (E) est aussi additif pour la concaténation des chemins, il suffit de démontrer (E) en remplaçant $\widetilde{\tau}$ par $\widetilde{\tau}'$. Supposons que $\varphi_j \in [0, 2\pi[$ et que $r\varphi = \sum \varphi_j$, ce qui est possible sans perte de généralité. On considère le chemin

$$t \mapsto \sum e^{i(1-t)\varphi_j} c_j$$

Son relevé d'origine $\widetilde{\sigma}$ se termine en $(e, 0)$, et son indice de Maslov est nul puisqu'il se décompose en une succession de chemins d'indices de Maslov nuls. D'autre part, posons

$$l = \#\{j \mid \varphi_j = 0 \ \ [2\pi]\}.$$

Alors

$$m(\widetilde{\sigma}, (e, 0)) + \iota(e, e, \sigma) + \mu(e, e) - \mu(\sigma, e) = -(r - l) + 0 + r - l = 0,$$

et donc il reste à montrer que le formule est vrai si $\widetilde{\sigma} = (e, 0)$. Supposons que $\phi_j \in [0, 2\pi[$ et que $r\phi = \sum \phi_j + 2k\pi$. L'indice de Maslov du chemin

$$t \mapsto \sum e^{it\phi_j}$$

est nul, et si $l = \#\{j \mid \phi_j = 0\, [2\pi]\}$ alors

$$m((e, 0), (\tau, \sum \phi_j)) + \iota(e, \tau, e) + \mu(\tau, e) - \mu(e, e) = r - l + 0 + l - r = 0.$$

Considérons enfin le chemin

$$t \mapsto e^{i\phi_1 + 2kt\pi} + \sum_{j=2}^{r} e^{i\phi_j},$$

dont le relevé d'origine $(\tau, \sum \phi_j)$ se termine en $\widetilde{\tau}$. Son indice de Maslov vaut k, tout comme le membre de droite de (E). □

COROLLAIRE 6.24. *Soit $\widetilde{e}$ au dessus de e. Alors*

$$Mas(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, e) = \frac{1}{2}(m(\widetilde{e}, \widetilde{\tau}) - m(\widetilde{e}, \widetilde{\sigma}) + \mu(\tau, e) - \mu(\sigma, e)).$$

COROLLAIRE 6.25. *On a*

$$\begin{aligned} m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) &= 2(Mas(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \sigma) - \mu(\tau, e) + r) \\ &= 2(Mas(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \tau) + \mu(\sigma, e) - r) \end{aligned}$$

COROLLAIRE 6.26. *Soient σ, τ et ν dans S. Soient α, β et γ trois chemins $[0,1] \to S$ tels que $\gamma(1) = \alpha(0) = \sigma$, $\alpha(1) = \beta(0) = \tau$ et $\beta(1) = \gamma(0) = \nu$ et tels que la concaténation $\gamma * \beta * \alpha$ soit homotope au chemin constant. Alors on a*

$$\iota(\sigma, \tau, \nu) = -(Mas(\alpha, \nu) + Mas(\beta, \sigma) + Mas(\gamma, \tau)).$$

3.4. La forme de Keller-Arnold-Maslov et l'indice pour les paires de chemins. On note $\frac{1}{2\pi} d\theta$ la 1-forme normalisée du cercle unité orienté dans le sens trigonométrique. Soit $e \in S$, et soit

$$\omega = (\det_e)^* \frac{1}{2\pi} d\theta$$

son image réciproque par $\det_e$. Alors, d'après le lemme 6.17, ω ne dépend pas de e.

Le résultat suivant a été démontré par Arnold dans le cas de la Lagrangienne (cf. [**Arn67**]). Il s'agit ici d'une conséquence de la formule (E).

THÉORÈME 6.27. *Soit $\gamma : [0,1] \to S$ un lacet, ie. $\gamma(0) = \gamma(1)$. Alors pour tout $e \in S$,*

$$Mas(\gamma, e) = \int_0^1 \gamma^* \omega.$$

La forme ω permet de donner, avec le corollaire 6.24, une définition alternative de l'indice de Maslov pour les chemins : Soit $\gamma : [0,1] \mapsto S$ et $e \in S$. Alors

$$Mas(\gamma, e) = \Psi(e, \gamma(1)) - \Psi(e, \gamma(0)) + \int_0^1 \gamma^* \omega + \mu(\gamma(1), e) - \mu(\gamma(0), e).$$

Elle permet également de donner une définition de l'indice de Maslov pour les paires de chemins (cf. [**CLM94**]) : soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans S. Alors l'indice de Maslov de la paire de chemins (γ_1, γ_2) est

$$\begin{aligned} Mas(\gamma_1, \gamma_2) &= \Psi(\gamma_2(1), \gamma_1(1)) - \Psi(\gamma_2(0), \gamma_1(0)) \\ &\quad + \int_0^1 (\gamma_1^* \omega - \gamma_2^* \omega) + \mu(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) - \mu(\gamma_1(0), \gamma_2(0)). \end{aligned}$$

Bibliographie

[Arn67] V. I. Arnol′d, *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Funkcional. Anal. i Priložen. **1** (1967), 1–14.

[Arn85] ______, *Sturm theorems and symplectic geometry*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **19** (1985), no. 4, 1–10, 95.

[BBF98] Bernhelm Booss-Bavnbek and Kenro Furutani, *The Maslov index : a functional analytical definition and the spectral flow formula*, Tokyo J. Math. **21** (1998), no. 1, 1–34.

[Ber00] Wolfgang Bertram, *The geometry of Jordan and Lie structures*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1754, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Ber02] ______, *Generalized projective geometries : general theory and equivalence with Jordan structures*, Adv. Geom. **2** (2002), no. 4, 329–369.

[Ber08] ______, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces over general base fields and rings*, Mem. Amer. Math. Soc. **192** (2008), no. 900, x+202.

[BKU78] Robert Braun, Wilhelm Kaup, and Harald Upmeier, *A holomorphic characterization of Jordan C^*-algebras*, Math. Z. **161** (1978), no. 3, 277–290.

[BN04] Wolfgang Bertram and Karl-Hermann Neeb, *Projective completions of Jordan pairs. I. The generalized projective geometry of a Lie algebra*, J. Algebra **277** (2004), no. 2, 474–519.

[BN05] ______, *Projective completions of Jordan pairs. II. Manifold structures and symmetric spaces*, Geom. Dedicata **112** (2005), 73–113.

[BT86] T. Barton and Richard M. Timoney, *Weak*-continuity of Jordan triple products and its applications*, Math. Scand. **59** (1986), no. 2, 177–191.

[CI00] C.-H. Chu and J. M. Isidro, *Manifolds of tripotents in* JB**-triples*, Math. Z. **233** (2000), no. 4, 741–754.

[CK07] Jean-Louis Clerc and Khalid Koufany, *Primitive du cocycle de Maslov généralisé*, Math. Ann. **337** (2007), no. 1, 91–138.

[Cle04] Jean-Louis Clerc, *L'indice de Maslov généralisé*, J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 1, 99–114.

[CLM94] Sylvain E. Cappell, Ronnie Lee, and Edward Y. Miller, *On the Maslov index*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 2, 121–186.

[CN06] Jean-Louis Clerc and Karl-Hermann Neeb, *Orbits of triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain*, Transform. Groups **11** (2006), no. 3, 387–426.

[CØ01] Jean-Louis Clerc and Bent Ørsted, *The Maslov index revisited*, Transform. Groups **6** (2001), no. 4, 303–320.

[Din86] Seán Dineen, *The second dual of a JB* triple system*, Complex analysis, functional analysis and approximation theory (Campinas, 1984), North-Holland Math. Stud., vol. 125, North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 67–69.

[DS88] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear operators. Part II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[ER88] C. M. Edwards and G. T. Rüttimann, *On the facial structure of the unit balls in a* JBW**-triple and its predual*, J. London Math. Soc. (2) **38** (1988), no. 2, 317–332.

[FK94] Jacques Faraut and Adam Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994, , Oxford Science Publications.

[FR85] Yaakov Friedman and Bernard Russo, *Structure of the predual of a JBW*-triple*, J. Reine Angew. Math. **356** (1985), 67–89.

[FR86] ———, *The Gel′fand-Naĭmark theorem for* JB**-triples*, Duke Math. J. **53** (1986), no. 1, 139–148.

[Fur04] Kenro Furutani, *Fredholm-Lagrangian-Grassmannian and the Maslov index*, J. Geom. Phys. **51** (2004), no. 3, 269–331.

[Har74] Lawrence A. Harris, *Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces*, Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy (Internat. Conf., Univ. Kentucky, Lexington, Ky., 1973) (Berlin), Springer, 1974, pp. 13–40. Lecture Notes in Math., Vol. 364.

[Hel78] Sigurdur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 80, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[Hes96] Gerald Hessenberger, *On operator-commutative subalgebras of Jordan algebras*, Jordan Theory Preprint Archives (1996).

[HK77] L. A. Harris and W. Kaup, *Linear algebraic groups in infinite dimensions*, Illinois J. Math. **21** (1977), no. 3, 666–674.

[Hor87] Günther Horn, *Characterization of the predual and ideal structure of a* JBW**-triple*, Math. Scand. **61** (1987), no. 1, 117–133.

[HOS84] Harald Hanche-Olsen and Erling Størmer, *Jordan operator algebras*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 21, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[Kau77] Wilhelm Kaup, *Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds*, Math. Ann. **228** (1977), no. 1, 39–64.

[Kau83] ———, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Math. Z. **183** (1983), no. 4, 503–529.

[KS00] W. Kaup and J. Sauter, *Boundary structure of bounded symmetric domains*, Manuscripta Math. **101** (2000), no. 3, 351–360.

[KU77] Wilhelm Kaup and Harald Upmeier, *Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces*, Math. Z. **157** (1977), no. 2, 179–200.

[Lan99] Serge Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 191, Springer-Verlag, New York, 1999.

[Ler77] Jean Leray, *Analyse lagrangienne et mécanique quantique*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1976–1977), I, Collège de France, Paris, 1977, pp. Exp. No. 1, 303.

[Loo69] Ottmar Loos, *Symmetric spaces. I : General theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[Loo75] ———, *Jordan pairs*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 460.

[Loo77] ———, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Lectures Note, Irvine, 1977.

[Loo01] ———, *Extracting square roots of Bergmann operators*, Arch. Math. (Basel) **77** (2001), no. 4, 313–316.

[Mau04] Bernard Maurey, *Cours de Théorie Spectrale*, Notes disponibles sur Internet, 2004.

[McC04] Kevin McCrimmon, *A taste of Jordan algebras*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2004.

[MM77] J. Martinez Moreno, *"sobre algebras de Jordan normadas"*, Tesis doctorales de la Universidad de Granada, vol. 149, 1977.

[MM80] J. Martínez Moreno, JV-*algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **87** (1980), no. 1, 47–50.

[Nee02] Karl-Hermann Neeb, *A Cartan–Hadamard Theorem for Banach–Finsler Manifolds*, Geom. Dedicata **95** (2002), 115–156.

[Nee04] ———, *Infinite-dimensional groups and their representations*, Lie theory, Progr. Math., vol. 228, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 213–328.

[NØ06] Karl-Hermann Neeb and Bent Ørsted, *A topological Maslov index for 3-graded Lie groups*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 2, 426–477.

[Pet76] Holger P. Petersson, *Zur Arithmetik der Jordan-Paare*, Math. Z. **147** (1976), no. 2, 139–161.

[Phi96] John Phillips, *Self-adjoint Fredholm operators and spectral flow*, Canad. Math. Bull. **39** (1996), no. 4, 460–467.

[Sau95] J. Sauter, *"Randstrukturen beschränkter symmetrischer Gebiete"*, Ph.D. Dissertation, Universität Tübingen, 1995.

[Shu79] Frederic W. Shultz, *On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces*, J. Funct. Anal. **31** (1979), no. 3, 360–376.

[Sou76] Jean-Marie Souriau, *Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications*, Group theoretical methods in physics (Fourth Internat. Colloq., Nijmegen, 1975), Springer, Berlin, 1976, pp. 117–148. Lecture Notes in Phys., Vol. 50.

[Upm76] Harald Upmeier, *Über die Automorphismengruppen von Banach-Mannigfaltigkeiten mit invarianter Metrik*, Math. Ann. **223** (1976), no. 3, 279–288.

[Upm85] ———, *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 104, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, , Notas de Matemática [Mathematical Notes], 96.

[Upm87] ———, *Jordan algebras in analysis, operator theory, and quantum mechanics*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 67, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1987.

[Vig76] Jean-Pierre Vigué, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), no. 2, 203–281.

[Vig82] ———, *Les automorphismes analytiques isométriques d'une variété complexe normée*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), no. 1, 49–73.

[Wri77] J. D. Maitland Wright, *Jordan C^*-algebras*, Michigan Math. J. **24** (1977), no. 3, 291–302.

Cette thèse traite de la géométrie des domaines bornés symétriques (et de leur frontière) dans les espaces de Banach. Dans la première partie, nous démontrons deux résultats connus dus à W. Kaup : la boule unité d'un JB^*-triple est un domaine borné symétrique, et tout domaine borné symétrique est biholomorphe à la boule unité d'un JB^*-triple. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'ensemble des tripotents inversibles d'un JB^*-triple, qui est une réunion de composantes connexes de la frontière extrémale du domaine associé. Lorsque le JB^*-triple admet un predual (ie. est un JBW^*-triple), nous introduisons l'*indice de transversalité abstrait* de deux tripotents inversibles, et nous montrons qu'il est invariant sous l'action du groupe des biholomorphismes du domaine. Dans la suite nous construisons l'indice de Maslov d'un chemin continu dans la variété des tripotents inversibles d'un JB^*-triple. Un tel chemin doit vérifier une condition de type Fredholm relativement à un tripotent fixé (par rapport auquel est calculé l'indice). Le point délicat est ici d'introduire la notion de paire de Fredholm. Nous définissons alors l'indice de transversalité d'une paire de Fredholm, et nous établissons un lemme de perturbation pour cet indice, qui nous permet de construire l'indice de Maslov et de montrer qu'il est invariant par homotopies à extrémités fixées. Cette construction généralise celle de Booss-Bavnbek et Furutani dans le cas de la Fredholm-Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique. Nous faisons enfin le lien, en dimension finie, avec l'indice triple généralisé de J.-L. Clerc et B. Ørsted.

Geometry of bounded symmetric domains and Maslov index in infinite dimensions

This thesis deals with the geometry of bounded symmetric domains (and their boundaries) in Banach spaces. In the first part, we prove two known results due to W. Kaup : the unit ball of a JB^*-triple is a bounded symmetric domain, and every bounded symmetric domain is biholomorphic to the unit ball of a JB^*-triple. The second part deals with the set of invertible tripotents in a JB^*-triple, wich is a union of connected components of the extremal boundary of the associated domain. When the JB^*-triple admits a predual (ie. is a JBW^*-triple), we introduce the *abstract index of transversality* and prove that it is invariant under the action of the group of biholomorphisms of the domain. After that we turn to the main topic of our thesis, wich consists in constructing the Malov index of a continuous path in the manifold of invertible tripotents of a JB^*-triple. The path must satisfy a Fredholm-type condition with respect to a fixed invertible tripotent (with respect to wich the index is calculated). The difficulty is here to define a efficient notion of Fredholm pair. Then we define the index of transversality of a Fredholm-pair, and prove a perturbation lemma for this index, which enables us to construct the Maslov index and to prove that it is invariant under homotopies with fixed endpoints. This construction generalises the construction by Booss-Bavnbek and Furutani in the case of the Fredholm-Lagrangian of a symplectic Hilbert space. At the end we provide a link, in the finite dimensional case, with the generalised triple index of J.-L. Clerc and B. Ørsted.

Discipline : Mathématiques

Mots clés : Indice de Maslov, domaines bornés symétriques, JB^*-triples, systèmes de Jordan-Banach, algèbres d'opérateurs non-associatives, géométrie en dimension infinie, espaces symétriques

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex