



HAL
open science

Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques : expérimentations, simulations et corrélations

Salma Ghorbel

► **To cite this version:**

Salma Ghorbel. Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques : expérimentations, simulations et corrélations. Autre. Ecole Centrale Paris, 2009. Français. NNT : 2009ECAP0017 . tel-00453865

HAL Id: tel-00453865

<https://theses.hal.science/tel-00453865>

Submitted on 5 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Présentée par

Salma GHORBEL

Pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE DES STRUCTURES

Laboratoire d'accueil : LISMMA, Institut Supérieur de Mécanique de Paris

Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques : expérimentations, simulations et corrélations

Soutenue le : 14 mai 2009

Devant un jury composé de MM:

J. Pouget, PU, Université Paris VI

A. Deraemaeker, Chercheur Qualifié FNRS (HDR), ULB, Belgique

J.-F. Deü, MC HDR, CNAM-Paris

A. Benjeddou, PU, Supméca-Paris

G. Chevallier, MC, Supméca-Paris

M. A. Trindade, Assitant Professor, São Carlos School of Engineering, Brésil

2009-

Remerciements

Ce travail n'aurait pu être effectué sans l'accord, le soutien et l'aide de plusieurs personnes d'autant sur le plan professionnel que sur le plan personnel. J'ai passé trois années de ma vie à Supméca marquées par des hauts et des bas, des moments de doute et de quiétude

Je tiens à remercier, le Professeur Ayech Benjeddou, mon directeur de thèse, qui m'a guidé tout au long de cette thèse, appris à ne pas baisser les bras et à persévérer.

Un grand Merci à Gaël Chevallier pour ses précieux conseils, sa disponibilité et son soutien tout au long de cette thèse ainsi qu'à sa collaboration pour que cette thèse puisse voir le jour. Je tiens à le remercier aussi pour le matériel qui a été mis à ma disposition.

Je remercie en particulier la Commission Européenne qui a financé ces travaux de recherche (2005-2008) via le contrat n° FP6-NMP3-CT-2005-013517-CASSEM

Je tiens également à remercier, le Professeur Erasmo Carrera, qui m'a reçu au sein de son équipe au département aérospatial de Politecnico di Torino, pour son aide précieuse et sa disponibilité.

J'adresse évidemment mes sincères remerciements à l'ensemble du jury : son président, ses rapporteurs et ses examinateurs qui me font l'honneur d'évaluer ce travail.

Je souhaite remercier aussi le Professeur Alain Rivière, Directeur du LISMMA, Sandrine, Franck, Hamidou, Mme Inglebert, Muriel, Mariama, Sylvain, Tony, Arturo, Mickaël, Ykhlef et tous les autres....

Je suis très reconnaissante à mes parents de m'avoir encouragé, aidé et soutenu dans les moments difficiles et à qui je dois tout. Merci à Mainou qui m'a accompagné virtuellement tout au long de ma thèse pendant de très longues soirées...

Enfin, je remercie tous mes amis à Paris, en Tunisie et un peu partout dans le monde...

Salma

Résumé

Le coefficient de couplage électromécanique (CCEM) est un paramètre essentiel pour la description des matériaux piézoélectriques, il traduit la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique et vice versa. Ce coefficient de couplage est étudié et déterminé dans le cadre de cette thèse pour des céramiques piézoélectriques. Ces dernières sont utilisées pour trois structures différentes ; la première structure étudiée est constituée d'une poutre longue et mince avec des petits patches collés symétriquement sur les deux faces de la poutre en Aluminium, la seconde structure se compose d'une poutre courte et épaisse avec deux grands patches. La dernière structure étudiée est une plaque composite multicouche du type aéronautique avec un seul grand patch. Ces trois structures ont été étudiées afin de déterminer le coefficient de couplage électromécanique effectif qui est considéré comme un indicateur de performance de l'amortissement passif shunté. Ce coefficient de couplage a été évalué de différentes manières en utilisant différents paramètres dont les conditions limites électriques, les propriétés élastiques des patches, les propriétés modales de la poutre seule ainsi que les facteurs de couplages piézoélectriques. Une première étude expérimentale a été menée sur la poutre longue pour deux types de configurations en court circuit et circuit ouvert pour identifier ses propriétés modales. La poutre longue a été simulée pour deux types de polarisations, identiques et opposées, et simulée dans les deux codes Ansys® et Abaqus®. L'influence de la condition d'équipotentielle sur le coefficient de couplage a été étudiée. Une seconde campagne expérimentale et numérique sur une autre structure a été nécessaire pour valider les résultats obtenus. Pour pouvoir atteindre cet objectif, il était nécessaire de travailler sur une structure plus courte et plus rigide. Ainsi, la poutre courte a été simulée dans Ansys® et les résultats obtenus ont confirmé la nécessité de prendre en compte l'équipotentialité sur les faces des patches. Cette condition a pour effet de réduire le couplage électromécanique et parfois de découpler certains modes. L'écart résultant de la corrélation expérimentale / numérique des deux poutres instrumentées a incité à recalibrer les modèles numériques. Ce recalage peut se présenter sous trois formes : mécanique en remplaçant l'encastrement par des ressorts linéaires, électrique en remplaçant les capacités fournies par le fabricant par les valeurs mesurées expérimentalement et électromécanique en utilisant les deux recalages précédents simultanément. Les deux poutres ont ensuite été simulées en déformations planes et contraintes planes et recalées afin d'approcher les résultats expérimentaux. L'étude de ces deux structures a permis de confronter les différentes méthodes d'évaluation du CCEM effectif, d'évaluer l'influence de l'équipotentialité sur les faces des électrodes et de comparer les simulations bidimensionnelles aux tridimensionnelles. Une plaque composite multicouche du type aéronautique a été ensuite étudiée pour généraliser la méthode d'évaluation du CCEM effectif pour les structures minces composites. La plaque seule a d'abord été simulée dans Ansys® pour valider le modèle numérique. Des tests sur la structure adaptative ont ensuite été menés pour l'évaluation du CCEM expérimental. La position choisie du patch a été déterminée par une analyse de l'énergie de déformation de la plaque seule pour les modes d'intérêt. Cette méthode de placement du patch s'est avérée efficace dans le sens où elle a conduit à des CCEM effectifs élevés pour certains modes de la bande de fréquence retenue.

Mots clés : piézoélectricité, coefficient de couplage électromécanique, equipotentialité, poutre, plaque, composite, expérience, simulation par EF, recalage.

Abstract

The electromechanical coupling coefficient (EMCC) is an important parameter for the description of piezoelectric materials; it measures the conversion of electrical energy into mechanical one and vice versa. The coupling coefficient is studied and determined in this dissertation for piezoelectric ceramics. The latter are used for different structures: the first studied one is a long and thin Aluminium beam with small patches bonded symmetrically on its faces, the second one is a short and thick Aluminium beam with symmetrically bonded two large patches, and the third structure is considered more complex because it is an aeronautic-type multilayer composite plate with a single large patch. These three structures were studied to determine the electromechanical coupling coefficient which is considered as a performance indicator for passive shunted damping. The coupling coefficient was evaluated in different ways using different parameters, including the electrical boundary conditions, the elastic properties of the patches, the modal properties of the base beam and the piezoelectric coupling factor. A first experimental study was conducted on the long beam for two configurations, short circuit and open circuit, to identify its modal properties. The long beam was simulated for two configurations of polarization, same and opposite, in Ansys[®] and Abaqus[®] commercial codes. The equipotential condition influence on the coupling coefficient has been studied. A second experimental and numerical campaign for a different structure was necessary to validate the obtained results. For this purpose, it was necessary to work on a shorter and more stiff structure. Thus, the short beam was simulated in Ansys[®] which results have confirmed the necessity to consider the equipotentiality of the patches faces. This condition was found to reduce the electromechanical coupling and to uncouple some modes. The difference between experimental and numerical results of both adaptive structures was reduced by updating the numerical models. This updating is made in three ways: mechanically, by replacing the theoretical clamp conditions by linear springs, electrically, by replacing the capacities provided by the supplier by the experimental measured values, and electromechanically by considering previous updates simultaneously. Both beams were simulated in 2D plane-strain and plane-stress and updated in order to approximate the experimental results. The study of these two structures allowed to assess different methods for the evaluation of the EMCC, to evaluate the influence of the equipotentiality constraints on the electroded faces, and to compare two-dimensional simulations to three-dimensional ones. Finally, an aeronautic-type multilayer plate composite has been studied in order to generalize the evaluation method of the EMCC for thin composite structures. The base plate was first simulated in Ansys[®] in order to validate the numerical model, then tests of the adaptive plate were conducted in order to evaluate the experimental EMCC. The selected position of the patch results from a strain energy analysis of the base plate for the mode of interest. The patch placement method was efficient in the sense that it provided high EMCC for some modes in the retained frequency range.

Keywords: piezoelectricity, electromechanical coupling coefficient, equipotentiality, beam, plate, composite, experience, FE simulation, updating.

Nomenclature

$\{D\}$	vecteur des déplacements électriques
$\{S\}$	vecteur des déformations linéaires
$\{T\}$	vecteur des contraintes de Cauchy
$\{E\}$	vecteur des champs électriques
$[e]$	matrice des constantes piézoélectriques en contrainte
$[C^E]$	matrice d'élasticité à champ électrique constant
$[C^D]$	matrice élastique à déplacement électrique constant
$[\epsilon^s]$	matrice de permittivité diélectrique à déformation constante
$[\beta^s]$	matrice de perméabilité diélectrique à déformation constante
$[h]$	matrice de charge des déformations piézoélectriques
$[K_m]$	matrice de rigidité mécanique
$[K_{em}]$	matrice de rigidité électromécanique
$[K_e]$	matrice de rigidité électrique
$[M]$	matrice de masse
$\{U\}$	vecteur des déplacements mécaniques nodaux
$\{V\}$	vecteur des tensions électriques des électrodes
$\{Q\}$	vecteur des charges électriques surfaciques des électrodes
E_i	module d'Young
ν_{ij}	coefficient de poisson
G_{ij}	module de cisaillement
C_p^S	capacité à déformation constante
ϵ_{33r}^S	permittivité relative à déformation constante
ξ	amortissement visqueux
k_{ij}	facteur de couplage électromécanique du matériau piézoélectrique
ρ	masse volumique
φ	potentiel électrique
f_j	force volumique
\ddot{u}_j	accélération
t	désigne l'opération transposée
n_i	composante du vecteur normal à une surface
A	aire d'une électrode
h	épaisseur d'un patch piézocéramique
V	tension électrique
Y	admittance électrique

CO	circuit ouvert
CC	court circuit
PSD	amortissement piézoélectrique shunté (Piezoelectric Shunted Damping)
EF	élément fini
DDL	degré de liberté
CCEM	coefficient de couplage électromécanique
EP	équipotentialité
IR	intégration réduite
DP	déformations planes
CP	contraintes planes
SR	sans recalage
RM	recalage mécanique
RE	recalage électrique
REM	recalage électromécanique
PI	polarisations identiques
PO	polarisations opposées
ω_a	pulsation d'anti-résonance
ω_r	pulsation de résonance
R	résistance
RL	résistance-inductance
FRF	fonction de réponse en fréquence
U_{cc}	énergie de déformation stockée dans la structure quand le patch est court-circuité
U_{co}	énergie de déformation stockée dans la structure quand le patch est en circuit ouvert
U_{poutre}	énergie de déformation de la poutre
U_{cc}^p, U_{co}^p	énergies de déformation stockées dans le patch en CC ou en CO
f_{cc}	fréquence propre en court circuit
f_{co}	fréquence propre en circuit ouvert
f_E	fréquence propre de la poutre avec des patches purement élastiques en utilisant uniquement la matrice $[C^E]$ dans les analyses modales
f_D	fréquence propre de la poutre avec des patches purement élastiques en utilisant la matrice $[C^D]$ dans les analyses modales
f_{poutre}	fréquence propre de la poutre seule
K	coefficient de couplage électromécanique effectif
K_D	coefficient de couplage électromécanique issu des simulations avec les matrices élastiques des patches
K_{poutre}	coefficient de couplage électromécanique utilisant des simulations de la poutre nue
k_i	raideur d'un ressort

Liste des Figures

Figure 2-1: Poutre Aluminium encastree avec une paire de patches PZT PIC255 (dim en mm) .	18
Figure 2-2 : Croquis de la poutre instrumentee (dimensions en mm)	18
Figure 2-3 : Modele EF Ansys® de la poutre instrumentee	20
Figure 2-4 : Polarisations identiques (gauche) et opposees (droite)	21
Figure 2-5 : Comparaison du CCEM (%) experientiel et par EF sans equipotentialite	23
Figure 2-6 : Comparaison de K (%) et K_{poutre} (%) pour les deux premiers modes.....	24
Figure 2-7 : Comparaison de K_{exp} (%) et K_D (%) pour les deux premiers modes.....	25
Figure 2-8 : Comparaison des differentes methodes d'evaluation du CCEM pour la poutre de la Figure 2-2.....	26
Figure 3-1: Comparaison des CCEM (%) avec et sans EP dans Ansys® et Abaqus®	28
Figure 3-2 : Comparaison essais-calculs du CCEM ² (%) avec l'equipotentialite.....	29
Figure 3-3 : Visualisation des deforme'es et du potentiel electrique dans Abaqus® en CO avec et sans equipotentialite sur les faces externes des patches (polarisations identiques)	30
Figure 3-4 : Visualisation des deforme'es et du potentiel electrique dans Ansys® en CO avec et sans equipotentialite sur les faces externes des patches (polarisations identiques)	31
Figure 3-5 : Vue isometrique du dispositif experientiel (dimensions en mm).....	33
Figure 3-6 : Collage des patches en polarisations opposees [17].....	33
Figure 3-7 : Description de la chaine d'acquisition	34
Figure 3-8: FRF pour le mode 1 en circuit ouvert et en court-circuit	36
Figure 3-9 : FRF pour le mode 2 en circuit ouvert et en court-circuit	36
Figure 3-10 : FRF pour le mode 3 en circuit ouvert et en court-circuit	37
Figure 3-11 : FRF pour le mode 4 en circuit ouvert et en court-circuit	37
Figure 3-12 : Vue de la structure maill'ee (a) dans le plan XY, (b) dans le plan XZ.....	38
Figure 3-13 : Distribution du potentiel electrique sur les electrodes des patches pour les quatre 1 ^{er} modes sans et avec equipotentialite : (a) 1 ^{er} mode de flexion transverse (x-z), (b) 1 ^{er} mode de flexion dans le plan (x-y), (c) 1 ^{er} mode de torsion, (d) 2 ^{eme} mode de flexion transverse (x-z)....	40
Figure 3-14 : Comparaison essais-EF 3D (sans recalages) du CCEM (%) effectif	41
Figure 3-15 : Comparaison de K (%) et K_{poutre} (%) pour les quatre modes (sans recalage).....	42
Figure 3-16 : Comparaison de K_{exp} (%) et K_D (%) pour les 4 modes (sans recalage).....	43
Figure 3-17 : Recalage mecanique dans Abaqus®	45
Figure 3-18 : Comparaison du CCEM (%) pour les deux premiers modes dans Abaqus®	47
Figure 3-19 : Comparaison du CCEM (%) pour les deux premiers modes dans Ansys®	47
Figure 3-20 : CCEM ² (%) recal'ee dans Ansys® et Abaqus® utilisant les capacites experientielles (Table 3-13).....	49
Figure 3-21 : CCEM (%) recal'ee dans Ansys® et Abaqus® utilisant les capacites experientielles (Table 3-13).....	50
Figure 3-22 : Comparaison du CCEM (%) apres RE en connexion parallele et serie pour les deux premiers modes.....	50
Figure 3-23 : Comparaison du CCEM (%) pour les deux 1 ^{er} modes dans Abaqus® et Ansys® ..	51
Figure 3-24 : Recalage mecanique de l'encastrement.....	52
Figure 3-25 : Comparaison avec l'experience de K (%) sans et apres recalage mecanique	53
Figure 3-26 : Comparaison avec l'experience de K (%) avant et apres recalage electrique	55
Figure 3-27: Comparaison de CCEM (%) pour les quatre modes apres recalage electromecanique du modele EF.....	56
Figure 4-1 : Geometrie des elements Plane 223 et Plane 183 a 8 noeuds d'Ansys®	66
Figure 4-2 : Apercu (zoom) du maillage de la poutre longue en 2D.....	66
Figure 4-3: Visualisation des deforme'es et du potentiel electrique du modele 2D en deformations planes et 3D dans Ansys® pour le cas du CO _{ep} en polarisations opposees.....	67
Figure 4-4 : Visualisation des deforme'es et du potentiel electrique du modele 2D en deformations planes et 3D dans Ansys® pour le cas du CO _{ep}	72

Figure 4-5 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique des modes 3D qui n'apparaissent pas en 2D dans Ansys® pour le cas du CO _{ep}	73
Figure 4-6 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique du modèle 2D contraintes planes et 3D pour le cas du CO _{ep} en polarisations opposées	78
Figure 4-7 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique du modèle 2D contraintes planes et 3D pour le cas du CO _{ep}	83
Figure 4-8 : Comparaison des fréquences propres sans recalages en 3D et 2D pour les quatre modes	87
Figure 4-9 : Comparaison des coefficients de couplage sans recalages en 3D et 2D pour les quatre modes de flexion	88
Figure 4-10 : Comparaison des fréquences propres en CO _{ep} après REM en 3D et 2D pour les quatre modes de flexion	89
Figure 4-11 : Comparaison des fréquences propres en CC après REM en 3D et 2D pour les quatre modes de flexion	89
Figure 4-12 : Comparaison aux valeurs expérimentales des fréquences propres en CC après REM en 2D pour les deux premiers modes.....	90
Figure 4-13 : Comparaison aux valeurs expérimentales des fréquences propres en CO _{ep} après REM en 2D pour les deux premiers modes.....	90
Figure 4-14 : Comparaison des coefficients de couplage avec recalage électromécanique en 3D et 2D pour les deux premiers modes	91
Figure 4-15 : Comparaison avec l'expérience des coefficients de couplage sans recalages en 2D pour les deux premiers modes de flexion.....	92
Figure 4-16 : Comparaison avec l'expérience des coefficients de couplage après recalage mécanique en 2D pour les deux premiers modes de flexion.....	93
Figure 4-17 : Comparaison avec l'expérience des coefficients de couplage après recalage électrique en 2D pour les deux premiers modes de flexion	93
Figure 4-18 : Comparaison avec l'expérience des coefficients de couplage après recalage électromécanique en 2D pour les deux premiers modes de flexion	94
Figure 4-19 : Comparaison de K (%) pour les deux premiers modes après recalage mécanique en 2D-DP.....	101
Figure 4-20 : Comparaison de K (%) pour les deux premiers modes après recalage mécanique en 2D-CP.....	102
Figure 5-1 : Dispositif expérimental de la plaque composite.....	105
Figure 5-2 : Cibles réfléchissantes pour les mesures au laser (gauche) et coordonnées des points d'excitation/mesures (droite).....	105
Figure 5-3 : Echantillon des FRF post-traitées (haut : module, bas : phase).....	106
Figure 5-4 : Les huit premières déformées modales après le post-traitement des FRF de tous les points de mesures de la Figure 5-2.....	107
Figure 5-5 : Stratification de la plaque composite [90/45/0/-45] _{2S}	108
Figure 5-6 : (a) L'EF multicouche Solid191 ; (b) Maillage EF 3D de la plaque composite....	109
Figure 5-7 : Les huit premières déformées modales numériques correspondant aux déformées expérimentales identifiées dans la Figure 5-4.....	110
Figure 5-8 : Matrice de MAC pour les modes expérimentaux et numériques	111
Figure 5-9 : Présentation des énergies de déformation modales des huit premiers modes	112
Figure 5-10 : (a) Position du PZT PIC255 ; (b) Modèle EF 3D de la plaque composite instrumentée	113
Figure 5-11 : Position et maillage du pot vibrant.....	114
Figure 5-12 : Position et maillage de l'accéléromètre.....	114
Figure 5-13 : Matrice de MAC pour les modes numériques de la plaque avec et sans patch... ..	115
Figure 5-14 : Dispositif expérimental de la plaque instrumentée	116
Figure 5-15 : Erreur sur K ² pour les huit premiers modes expérimentaux.....	116
Figure 5-16 : Fonction de réponse en fréquence pour la bande 150 – 600 Hz.....	117
Figure 5-17 : Fonction de réponse en fréquence pour la bande 500 – 1500 Hz.....	118
Figure 5-18 : Comparaison du CCEM _{ep} (%) expérimental et numérique pour la plaque+patch pour les huit premiers modes	119

Liste des Tables

Table 1-1 : Récapitulatif des éléments finis piézoélectriques d'Ansys [®] et Abaqus [®] utilisés pour les différentes structures étudiées.....	9
Table 2-1 : Propriétés du PZT PIC255 et de l'Aluminium	19
Table 2-2 : Géométrie et discrétisation par EF de la poutre instrumentée	20
Table 2-3 : Comparaison des fréquences propres expérimentales et par EF 3D sans EP pour les deux premiers modes en connexion série et parallèle pour la poutre de la Figure 2-2	22
Table 2-4 : Fréquences propres en CO sans équipotentialité et CC et CCEM (%) effectif dans Ansys [®] et Abaqus [®] de la poutre de la Figure 2-2.....	22
Table 2-5 : CCEM ² (%) et CCEM (%) expérimentaux et par EF 3D sans EP.....	22
Table 2-6 : Fréquences propres et CCEM _{poutre} pour la poutre de la Figure 2-2.....	23
Table 2-7 : Fréquences propres et CCEM _D pour la poutre de la Figure 2-2	24
Table 2-8 : Comparaison des fréquences propres expérimentales et par EF 3D utilisant la matrice C ^D pour les deux premiers modes en connexion série et parallèle pour la poutre de la Figure 2-2.....	24
Table 3-1: Fréquences propres avec (f _{coep}) et sans (f _{co}) équipotentialité dans Ansys [®] et Abaqus [®]	28
Table 3-2 : Comparaison des fréquences propres expérimentales et EF 3D avec EP pour les deux premiers modes en connexion série et parallèle de la poutre longue	29
Table 3-3 : CCEM ² (%) et CCEM (%) expérimentaux et par EF 3D avec EP	29
Table 3-4 : Capacités et résistances mesurées des patches et de la poutre.....	34
Table 3-5: Récapitulatif des fréquences, amortissements mesurés et CCEM dans les deux configurations CO et CC.....	35
Table 3-6 : Géométrie et discrétisation par EF de la poutre de la Figure 3-5	38
Table 3-7 : Fréquences propres et CCEM effectif (sans recalages) pour la poutre courte en PO	40
Table 3-8 : Fréquences propres et CCEM sans recalage par la méthode approchée.....	42
Table 3-9 : Fréquences propres et CCEM sans recalage par la nouvelle méthode	43
Table 3-10 : Fréquences propres avec RM pour les différentes raideurs nodales k _n testées dans Abaqus [®]	45
Table 3-11 : Fréquences propres et CCEM avec RM dans Abaqus [®] et Ansys [®]	46
Table 3-12 : Comparaison du CCEM (%) (avec RM) dans Abaqus [®] et Ansys [®] pour les deux premiers modes	46
Table 3-13 : ϵ_{33}^S recalée pour la simulation par EF utilisant la capacité à déformation constante	48
Table 3-14 : Fréquences propres numériques utilisant Ansys [®] et Abaqus [®] pour la connexion parallèle et série après recalage électrique	48
Table 3-15 : Comparaison du CCEM ² (%) et du CCEM (%) EF 3D dans Ansys [®] et Abaqus [®] entre K ² _{ep} (%), K _{ep} (%) et K ² (%), K' (%) recalés utilisant la capacité expérimentale (Table 3-13)	49
Table 3-16 : Fréquences propres et CCEM (%) après recalage électromécanique dans Ansys [®] et Abaqus [®] en connexions série et parallèle.....	51
Table 3-17 : Comparaison du CCEM (%) pour les deux premiers modes.....	51
Table 3-18 : Fréquences propres après recalage mécanique de la poutre courte dans les trois directions.....	53
Table 3-19 : Comparaison de K (%) après recalage mécanique du modèle EF 3D	53
Table 3-20 : Fréquences propres après recalage électrique de la poutre courte.....	54
Table 3-21 : Comparaison de K (%) après recalage électrique du modèle EF 3D.....	54
Table 3-22 : Fréquences propres après recalage électromécanique de la poutre courte.....	55
Table 3-23 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique du modèle EF 3D	56

Table 4-1 : Comparaison des résultats numériques sans recalages en 2D déformation plane et 3D	68
Table 4-2 : Comparaison numérique sans recalages entre 2/3 K (%) en 2D DP et K (%) en 3D	68
Table 4-3 : Raideurs des ressorts appliqués suivant x et y pour le recalage mécanique en 2D DP	69
Table 4-4 : Fréquences propres et coefficients de couplage avec recalage mécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI).....	69
Table 4-5 : Comparaison de K (%) après recalage mécanique	69
Table 4-6 : Fréquences propres et coefficients de couplage avec recalage électrique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI).....	70
Table 4-7 : Comparaison de K (%) avec recalage électrique	70
Table 4-8 : Fréquences propres et coefficients de couplage avec recalage électromécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI).....	71
Table 4-9 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique.....	71
Table 4-10 : Comparaison des résultats numériques sans recalages en 2D déformations	74
Table 4-11 : Erreur des fréquences propres après recalage mécanique en 2D-DP	74
Table 4-12 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage mécanique pour la poutre courte.....	74
Table 4-13 : Comparaison de K (%) après recalage mécanique	75
Table 4-14 : Permittivité relative à déformation constante ϵ_{33r}^S	75
Table 4-15 : Fréquences propres et coefficients de couplage en 2D-DP avec recalage électrique pour la poutre courte	75
Table 4-16 : Comparaison de K (%) après recalage électrique	76
Table 4-17 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électromécanique pour la poutre courte	76
Table 4-18 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique.....	76
Table 4-19 : Comparaison des résultats numériques sans recalages en 2D contraintes planes et 3D.....	79
Table 4-20 : Raideurs des ressorts appliqués suivant x et y pour le recalage mécanique en 2D contraintes planes	79
Table 4-21 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage mécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI).....	80
Table 4-22 : Comparaison de K (%) avec recalage mécanique	80
Table 4-23 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électrique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI).....	81
Table 4-24 : Comparaison de K (%) après recalage électrique.....	81
Table 4-25 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électromécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)	82
Table 4-26 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique.....	82
Table 4-27 : Comparaison des résultats numériques sans recalages en 2D contraintes planes et 3D dans Ansys®	84
Table 4-28 : Erreur des fréquences propres après recalage mécanique en 2D-CP pour les deux premiers modes	84
Table 4-29: Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage mécanique pour la poutre courte.....	84
Table 4-30 : Comparaison de K (%) après recalage mécanique	85
Table 4-31 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électrique pour la poutre courte.....	85
Table 4-32 : Comparaison de K (%) après recalage électrique.....	86
Table 4-33 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électromécanique pour la poutre courte	86
Table 4-34 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique.....	86
Table 4-35 : Comparaison des coefficients de couplage en 2D-DP et 2D-CP avec recalage électromécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)	89

Table 4-36 : Comparaison des coefficients de couplage numériques avec recalage électromécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)	91
Table 4-37 : Coefficients de couplage sans recalages en 2D déformations planes	95
Table 4-38 : Fréquences propres et CCEM approché sans recalages (2D-DP).....	95
Table 4-39 : Fréquences propres après recalage mécanique (2D-DP)	95
Table 4-40 : Comparaison du coefficient de couplage K_{poutre} (%) après recalage mécanique (2D-DP)	96
Table 4-41 : Coefficients de couplage sans recalages en 2D contraintes planes.....	96
Table 4-42 : Fréquences propres et CCEM sans recalages (2D-CP)	96
Table 4-43 : Fréquences propres après recalage mécanique	97
Table 4-44 : Comparaison du coefficient de couplage K_{poutre} (%) après recalage mécanique.....	97
Table 4-45 : Coefficients de couplage K_D (%) sans recalage (2D-DP).....	98
Table 4-46 : Fréquences propres et CCEM sans recalages (2D-DP)	98
Table 4-47 : Fréquences propres après recalage mécanique (2D-DP)	98
Table 4-48 : Comparaison avec l'expérience de K_D (%) après recalage mécanique (2D-DP) ...	99
Table 4-49 : Coefficients de couplage par K_D (%) sans recalage (2D-CP).....	99
Table 4-50 : Fréquences propres et CCEM sans recalages (2D-CP)	99
Table 4-51 : Fréquences propres après recalage mécanique (2D-CP)	100
Table 4-52 : Comparaison du coefficient de couplage K_D (%) après recalage mécanique (2D-CP)	100
Table 4-53 : Comparaison des coefficients de couplage après recalage mécanique.....	101
Table 5-1 : Fréquences propres moyennées extraites des FRF post-traitées.....	106
Table 5-2 : Données 3D complétées du matériau de la plaque composite.....	109
Table 5-3 : Fréquences numériques et leurs erreurs pour les huit premiers modes	109
Table 5-4 : Fréquences propres numériques CC/CO _{ep} et CCEM _{ep} pour les huit premiers modes	114
Table 5-5: Fréquences propres numériques CC/CO et CCEM pour les huit premiers modes ..	114
Table 5-6 : Paramètres utilisés pour les premiers modes et les modes supérieurs.....	117
Table 5-7 : Fréquences propres expérimentales CC/CO _{ep} et CCEM _{ep} pour les huit premiers modes	118
Table 5-8 : Erreur (%) expérimental/numérique pour les huit premiers modes.....	118

Table des Matières

<u>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GENERALE</u>	3
1.1 PIEZOELECTRICITE	4
1.2 COUPLAGE ELECTROMECHANIQUE	6
1.3 EQUIPOTENTIALITE	7
1.4 SIMULATION PAR ELEMENTS FINIS	8
1.4.1 RESOLUTION DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES	9
1.4.2 APPROCHE 2D	10
1.5 PLAN DU MEMOIRE	10
<u>CHAPITRE 2 : COUPLAGES ELECTROMECHANIQUES</u>	12
2.1 PROBLEMES DE VIBRATION LIBRE	12
2.2 COUPLAGE ELECTROMECHANIQUE EFFECTIF	14
2.3 AUTRES METHODES DE CALCUL DU COEFFICIENT DE COUPLAGE	15
2.3.1 EVALUATIONS APPROCHEES DU CCEM	15
2.3.2 NOUVELLE METHODE D'EVALUATION DU CCEM	16
2.4 APPLICATION	17
2.4.1 MODELISATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	18
2.4.2 RESULTATS NUMERIQUES DE REFERENCE	21
2.4.3 APPLICATION DES METHODES APPROCHEES D'EVALUATION DU CCEM	23
2.5 SYNTHESE	25
<u>CHAPITRE 3 : IMPORTANCE DE L'EQUIPOTENTIALITE DANS L'EVALUATION NUMERIQUE DU CCEM</u>	27
3.1 ANALYSE PAR EF 3D DE LA POUTRE LONGUE AVEC EQUIPOTENTIALITE	27
3.2 TESTS DE LA POUTRE COURTE	32
3.2.1 DESCRIPTION DE L'ESSAI (MONTAGE D'ACQUISITION)	32
3.2.2 ACQUISITIONS	34
3.3 CALCULS PAR EF 3D DU CCEM EFFECTIF DE LA POUTRE COURTE	37
3.3.1 RESULTATS NUMERIQUES PRELIMINAIRES	39
3.3.2 AUTRES METHODES D'EVALUATION DU CCEM DE LA POUTRE COURTE	41
3.4 RECALAGE ELECTROMECHANIQUE AVEC EQUIPOTENTIALITE	44
3.4.1 RECALAGES DE LA POUTRE LONGUE	44
3.4.2 RECALAGES DE LA POUTRE COURTE	52
3.5 CONCLUSION	56
<u>CHAPITRE 4 : SIMULATIONS 2D</u>	58
4.1 PIEZOELASTICITE PLANE	58
4.1.1 DEFORMATIONS PLANES	61
4.1.2 CONTRAINTES PLANES	63
4.2 SIMULATIONS EN DEFORMATIONS PLANES	65
4.2.1 CAS DE LA POUTRE LONGUE	66
4.2.2 CAS DE LA POUTRE COURTE	71
4.2.3 CONCLUSION PARTIELLE	76
4.3 SIMULATIONS EN CONTRAINTES PLANES	77
4.3.1 CAS DE LA POUTRE LONGUE	77

4.3.2 CAS DE LA POUTRE COURTE	82
4.3.3 CONCLUSION PARTIELLE	87
4.4 SYNTHÈSE DES SIMULATIONS EN 2D	87
4.4.1 CAS DE LA POUTRE LONGUE	87
4.4.2 CAS DE LA POUTRE COURTE	92
4.5 AUTRES METHODES DE CALCUL DU COEFFICIENT DE COUPLAGE	94
4.5.1 METHODE APPROCHEE D'EVALUATION DU CCEM	94
4.5.2 NOUVELLE METHODE D'EVALUATION DU CCEM	97
4.5.3 CONCLUSION PARTIELLE	100
4.6 SYNTHÈSE DES EVALUATIONS APPROCHEES EN 2D DU CCEM	100
4.7 CONCLUSION	102
<u>CHAPITRE 5 : EXTENSION AUX STRUCTURES COMPOSITES</u>	<u>104</u>
5.1 ESSAIS ET SIMULATION D'UNE PLAQUE COMPOSITE	104
5.1.1 PROTOCOLE EXPERIMENTAL	104
5.1.2 SIMULATION PAR EF	108
5.2 SIMULATION ET ESSAIS DE LA PLAQUE COMPOSITE INSTRUMENTEE	113
5.2.1 ANALYSE PAR EF	113
5.2.2 VALIDATION EXPERIMENTALE	115
5.3 DISCUSSIONS	119
<u>CHAPITRE 6 : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</u>	<u>120</u>
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	<u>123</u>
<u>ANNEXE 1: PROPRIETES DU PZT PIC255</u>	<u>126</u>
<u>ANNEXE 2: POSITIONS DE L'ACCELEROMETRE ET DU POT VIBRANT POUR LE MODELE EF DE LA PLAQUE COMPOSITE</u>	<u>131</u>
<u>ANNEXE 3: ERREUR SUR K^2</u>	<u>133</u>

Chapitre 1 : Introduction générale

Ces dernières années ont vu l'émergence de nombreux développements dans le domaine des structures dites *intelligentes*, c'est-à-dire des structures intégrant des capteurs et des actionneurs couplés à un ordinateur et capables de réagir aux stimulations extérieures. Parmi les nombreux types de matériaux qu'on peut trouver, les matériaux piézoélectriques présentent des caractéristiques remarquables. Grâce à leur aptitude de conversion électromécanique et à leur faible encombrement, l'utilisation de transducteurs piézoélectriques ouvre la porte à un vaste choix d'applications en dynamique des structures.

L'avantage de l'utilisation des matériaux piézoélectriques c'est leur comportement qui conduit à une relation de couplage entre les variables mécaniques et les variables électriques. Ils sont utilisés dans l'analyse modale expérimentale des structures dans le but de déterminer les paramètres fondamentaux représentatifs du comportement dynamique de la structure testée. Cette dernière doit être modélisée numériquement pour interpréter les données expérimentales et inversement, la modélisation a besoin des données expérimentales telles que, par exemple, les lois de comportement des matériaux, la connaissance des conditions limites réelles et des éventuelles perturbations externes possibles. Par conséquent, l'analyse modale expérimentale et la modélisation numérique sont deux disciplines complémentaires dans l'univers de la piézoélectricité. Ainsi, par exemple, pour optimiser au mieux la qualité expérimentale d'une analyse modale, il est préférable d'effectuer une analyse numérique préalable de la structure testée pour choisir le positionnement des transducteurs, notamment les patches piézoélectriques.

L'objectif principal de ce travail de recherche est de mettre en évidence et d'exploiter les propriétés des matériaux piézoélectriques, sous la forme de patches piézoélectriques dans le cadre de l'analyse modale expérimentale et de sa simulation numérique par éléments finis et d'étudier ainsi le couplage électromécanique effectif de ces structures piézoélectriques.

La première section de ce chapitre décrit le phénomène de la piézoélectricité en donnant un aperçu historique, les circonstances de sa découverte et en citant quelques matériaux piézoélectriques. Les équations d'un problème de dynamique pour un matériau piézoélectrique sont ensuite rappelées. Le coefficient de couplage électromécanique est traité dans la seconde section de ce chapitre ; dans le cas statique il correspond au facteur de couplage du matériau piézoélectrique et dans le cas dynamique il dépend des vibrations de la structure piézoélectrique. L'accent est mis sur les amortisseurs piézocéramiques shuntés. L'équipotentialité est étudiée dans la troisième section. La simulation par éléments finis est très utilisée dans cette thèse, elle est présentée dans la section 4. L'accent est mis sur les méthodes de résolution du problème aux valeurs propres, et des simulations en 2D. Un plan du mémoire clôture ce chapitre ; il comprend un petit résumé du contenu des différents chapitres du mémoire.

1.1 Piézoélectricité

Pierre et Jacques Curie ont été les premiers à démontrer expérimentalement, en 1880, le lien entre les phénomènes macroscopiques piézoélectriques et la structure cristallographique [1]. Ils ont découvert l'**effet piézoélectrique direct** qui se traduit par une tension électrique qui résulte de l'application d'une force mécanique sur des cristaux de quartz, de tourmaline, de topaze, de sucre et de sel de Rochelle. Ils n'ont pas toutefois prévu que ces cristaux exposeraient aussi l'**effet piézoélectrique inverse** qui correspond à une déformation en réponse à un champ électrique appliqué. Cette propriété a été déduite par Lippmann en 1881 et confirmée par les frères Curie.

Les matériaux piézoélectriques peuvent être présentés sous différentes formes tels que :

- Les monocristaux, c'est sous cette forme que se présentent les matériaux piézoélectriques naturels comme le quartz ou la tourmaline.
- Les céramiques, c'est la forme la plus répandue, principalement en raison de leur facilité de fabrication et des nombreuses propriétés qu'on peut obtenir en faisant varier la composition chimique, les paramètres de fabrication, etc.
- Les composites, ils ont l'avantage d'avoir un meilleur couplage électromécanique que les céramiques conventionnelles.
- Les polymères, ils ont l'avantage d'être très souples, ainsi leur processus de fabrication est facile et leur production est plus variée. Toutefois, leurs coefficients de couplage sont assez faibles.

Si on considère un problème local de piézoélectricité, l'association des variables primaires (S, E) , aux variables duales (T, D) et d'un matériau piézoélectrique permet d'obtenir les équations constitutives suivantes [2] :

$$\{T\} = [C^E]\{S\} - [e]^t \{E\} \quad (1.1)$$

$$\{D\} = [e]\{S\} + [\epsilon^s]\{E\} \quad (1.2)$$

Et en notation indicielle [2],

$$T_{ij} = C_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (1.3)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^s E_k \quad (1.4)$$

Avec $\{T\}$, $\{S\}$, $\{D\}$ et $\{E\}$ sont, respectivement, le vecteur des contraintes de Cauchy symétrique, de déformations linéaires, des déplacements électriques et de champs électriques. $[C^E]$, $[e]$ et $[\epsilon^s]$ sont, respectivement, la matrice d'élasticité à champ électrique constant, la matrice des constantes piézoélectriques en contrainte et la matrice de permittivité diélectrique à déformation constante. L'exposant t désigne l'opération transposée.

L'équation de mouvement d'un milieu piézoélectrique s'écrit [2] :

$$T_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1.5)$$

avec $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Dans le cas d'un matériau isolant, les charges électriques sont nulles et l'équation de Maxwell s'écrit [2] :

$$D_{i,i} = 0 \quad (1.6)$$

Dans l'hypothèse des petites déformations, les relations déplacements-déformations s'écrivent [2] :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.7)$$

Et le champ électrique E est relié au potentiel φ par la relation [2] :

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (1.8)$$

1.2 Couplage électromécanique

La caractérisation des cristaux et des céramiques piézoélectriques peut être effectuée par des tenseurs piézoélectriques, diélectriques et élastiques, en tenant compte de toutes les formes des lois de comportement. Les facteurs de couplage sont des coefficients sans dimensions qui sont utiles pour la description d'un matériau piézoélectrique particulier sous une configuration de contrainte et de champ électrique particuliers pour la conversion de l'énergie stockée sous l'action d'une action mécanique ou électrique. Les facteurs de couplage sont notamment constitués de combinaisons des coefficients piézoélectriques, diélectriques et élastiques. Comme ils sont sans dimensions, il est évident que les facteurs de couplages servent à fournir une comparaison utile entre les différents matériaux piézoélectriques indépendamment de la spécificité des valeurs de permittivité ou d'élasticité, dont les deux peuvent varier largement.

Le concept de l'amortissement piézoélectrique shunté (PSD) repose sur la transformation, via un transducteur piézocéramique collé à la structure vibrante, de l'énergie mécanique en une énergie électrique qui est dissipée par le composant résistif d'un circuit électronique de shunt [3]. L'efficacité de la conversion énergétique est reconnue mesurable par le coefficient de couplage électromécanique (CCEM) intrinsèque (matériau) [2, 4, 5, 6], et il a été démontré que la performance du PSD dépend particulièrement du coefficient de couplage électromécanique généralisé (effectif), [7-9] qui mesure la conversion d'énergie des patchs quand ils sont collés à, ou intégrés dans une structure d'accueil [10,11]. En outre, il a été montré que l'amortissement ajouté est proportionnel à ce paramètre [12,13]. Le circuit de shunt peut être résistif, résonant et capacitif, avec une capacité positive ou négative. De plus, la commutation (switch) entre les deux types de connexions électriques circuit ouvert (CO) et court-circuit (CC), ou entre le (CO) et des circuits résistifs ou résonants shuntés, peut aussi réduire les vibrations.

Au cours des trois dernières décennies, le concept PSD a fait l'objet d'intenses recherches [14-16]. Son évaluation expérimentale et son estimation ont été conduites sur des structures simples, telles que des barres, des poutres, des plaques et des anneaux. De loin, la poutre en flexion libre avec des patchs piézocéramiques symétriques (co-localisés) était la structure la plus expérimentée utilisant des circuits de shunt divers allant d'un circuit de résistance simple [7] jusqu'au plus complexe [16]. Dans le cas de patchs multiples, la direction de polarisation et les connexions électriques (le câblage) de leurs électrodes affectent l'état de déformation de structure. Ainsi, quand les patchs ont la même direction de polarisation, la connexion électrique parallèle est exigée ; tandis que quand ils ont des directions de polarisation opposées, la connexion électrique en série est nécessaire [17]. Dans les deux cas, des champs électriques opposés sont

produits dans les patchs pour que lorsque le patch inférieur s'allonge, le patch supérieur se contracte créant ainsi une flexion pure ascendante de la poutre en flexion libre.

1.3 Equipotentialité

Comme pour les structures élastiques, la détermination des caractéristiques modales (fréquences propres, amortissements, déformées) est un point clé pour mettre en évidence les performances d'une structure adaptative piézoélectrique. Cette extraction des modes propres est faite en circuit ouvert (CO) et en court circuit (CC). Les conditions limites électriques jouent un rôle très important puisqu'elles influent directement sur le résultat en termes de fréquence. Les patchs piézoélectriques peuvent être connectés en circuit ouvert (pas de courant électrique entre les électrodes) ou en circuit fermé (pas de différence de potentiels entre les électrodes). Les fréquences propres correspondant à ces conditions électriques peuvent être obtenues à partir des fonctions de réponse en fréquence en tension imposée [18] ou en charge imposée [18]. Elles peuvent aussi être obtenues à partir d'une mesure des pôles et zéros du montage mesurés sur un analyseur d'impédance [4].

La distinction entre les conditions limites électriques CC et CO est bien connue par la communauté d'électro-acoustique depuis le début des années soixante-dix [4,6] et [18,19], mais pas beaucoup par la communauté mécanique travaillant sur des structures adaptatives piézoélectriques [20]. Par conséquent, en fonction de la représentation de l'effet de couplage électromécanique, beaucoup d'éléments finis (EF), sans degrés de liberté électriques (DDL), ne permettent d'obtenir que l'une des configurations soit en CC soit en CO. Les premières résultent de la prise en compte de l'effet piézoélectrique via des charges électriques équivalentes, tandis que les dernières sont la conséquence de la condensation statique analytique ou numérique du potentiel électrique. Cette lacune est aussi vraie pour plusieurs solutions analytiques tridimensionnelles (3D) (voir par exemple [21,22] pour des fréquences en CO et [23] pour celles en CC). En effet, peu de travaux présentent les deux modes de fonctionnement et les fréquences associées (voir par exemple [24-27] et [28]).

Les EF piézoélectriques basés sur le potentiel électrique en tant que variable indépendante [28] sont bien appropriés pour l'extraction des propriétés modales en CC, tandis que celles en CO pourraient être obtenues après une condensation statique des DDL de la tension électrique [26]. Traditionnellement, aucune condition limite électrique n'est imposée pour des analyses par EF en CO. Cependant, la présence d'une électrode sur les faces des patchs piézoélectriques contraint les potentiels électriques nodaux à être identiques (pour la vibration libre en CO) et égaux à une constante et que la somme des charges nodales soit constante (nulle pour la vibration libre en CO) pour les nœuds de la surface d'électrodes (surface équipotentielle) [18,29]. Bien que

nécessaire, cet aspect est rarement mentionné dans la littérature. Les EF mixtes [30,31] ou hybrides [32-34] utilisent le déplacement ou la charge électrique comme DDL électrique. Toutefois, satisfaire la condition basée sur la tension électrique n'est pas mentionné actuellement dans la littérature bien que ce soit nécessaire. Ici aussi, la condensation statique des DDL charge/déplacement(s) électriques est généralement pratiquée [34]; donc il faudra faire attention à l'interprétation des propriétés modales résultantes. Une analyse de la littérature [28] indique que le principal inconvénient de la plupart des formulations EF piézoélectriques disponibles, c'est qu'ils n'ont pas appliqué la contrainte d'équipotentialité EP dans les analyses statique (détection) ou dynamique (vibration) en CO. En fait, c'est une pratique commune de la plupart des développeurs de méthodes numériques [20].

Cependant, une étude récente [35] a montré que la condition d'équipotentialité a un effet d'annulation de charge qui réduit le CCEM modal effectif. L'implémentation de cette contrainte nécessite au moins deux étapes d'assemblage : la première consiste à assembler les éléments d'électrodes sur lesquelles l'équipotentialité est appliquée, la deuxième consiste à assembler par la suite les éléments restants [11].

1.4 Simulation par éléments finis

La méthode des éléments finis est un outil mathématique découvert et développé par des ingénieurs et construit à l'aide de la formulation variationnelle. Plusieurs formulations sont envisageables comme les formulations en déplacements, mixtes, hybrides. La formulation largement utilisée dans les codes de commerce pour les matériaux piézoélectriques est la formulation en déplacement mécanique et potentiel électrique. Abaqus[®] et Ansys[®] sont les deux logiciels disponibles au laboratoire et qui ont la capacité de simuler des structures piézoélectriques. Ils ont donc été choisis pour les simulations présentées dans ce mémoire.

Les bancs d'essais réalisés expérimentalement au cours de cette thèse ont donc été modélisés dans Abaqus[®] et Ansys[®] dans le but de valider les différents concepts proposés. Ces deux logiciels fournissent une bibliothèque d'EF et une multitude d'opérations et de fonctions nécessaires pour simuler les structures étudiées. Le processus de simulation est semblable pour les deux logiciels : définition de la géométrie de la structure étudiée et ses propriétés matériaux, définition du maillage et le choix des types d'éléments utilisés et application des conditions limites nécessaires pour lancer l'analyse souhaitée.

Le choix du type d'élément dépend de plusieurs facteurs tels que les propriétés du matériau, la géométrie de la structure, le comportement dynamique du système physique (mécanique, piézoélectrique, acoustique, etc.).

Pour une modélisation en 3D, le choix s'est porté sur des éléments solides quadratiques (à 20 nœuds) pour les différents types de matériaux. Des éléments piézoélectriques couplés ont été choisis pour modéliser les patches piézoélectriques utilisés (voir **Table 1-1**). L'intégration réduite (IR) a été activée pour les éléments finis purement élastiques d'Abaqus[®] et Ansys[®]. D'une part ce choix permet d'éviter les problèmes de blocage en cisaillement et d'autre part ce choix s'imposait pour comparer les deux logiciels étant donné qu'il est imposé pour les éléments couplés d'Ansys[®].

Logiciel	Dimension	Poutre longue	Poutre courte	Plaque composite
Ansys [®]	3D	SOLID226	SOLID226	SOLID226
	2D (DP/CP)	PLANE223	PLANE223	-
Abaqus [®]	3D	C3D20RE	-	-
	2D (DP/CP)	-	-	-

Table 1-1 : Récapitulatif des éléments finis piézoélectriques d'Ansys[®] et Abaqus[®] utilisés pour les différentes structures étudiées

L'application des conditions limites électriques se fait différemment dans les deux logiciels : Abaqus[®] propose des équations de contraintes sous forme de relations cinématiques linéaires pour définir les câblages en CC et CO et pour la prise en compte de l'effet d'électrode ; alors que dans Ansys[®], les conditions limites électriques sont appliquées dans l'interface graphique ou en script en sélectionnant les nœuds des faces extérieures des électrodes pour définir le CC et le CO ainsi que l'équipotentialité.

1.4.1 Résolution du problème aux valeurs propres

Le choix du type d'analyse est primordial lors d'une simulation par éléments finis ; il dépend du problème étudié et des résultats souhaités. Pour l'étude du coefficient de couplage électromécanique d'une structure piézoélectrique, une analyse modale est requise pour extraire les fréquences propres qui permettront de calculer le couplage et d'identifier les modes. Chaque logiciel propose différents solveurs ou méthodes de résolution. Le choix s'est porté dans Abaqus[®] sur le solveur Subspace parce que c'est le seul solveur compatible avec des éléments piézoélectriques. Dans Ansys[®], seul le solveur Bloc Lanczos est recommandé pour les analyses modales dans le cas d'un couplage électromécanique. Le solveur Bloc Lanczos est utilisable pour un grand nombre de problèmes aux valeurs propres symétriques. Comparé au solveur par sous-espace, il présente un taux de convergence plus rapide.

1.4.2 Approche 2D

Plusieurs recherches ont été menées en 2D contraintes planes (CP) et 2D déformations planes (DP) plutôt qu'en espace tridimensionnel (3D), pour des raisons de simplicité et de rapidité. Les hypothèses cinématiques en déformations planes et en contraintes planes couvrent un large panel de problèmes académiques et industriels. Ces hypothèses permettent de réduire considérablement le nombre de degrés de libertés des modèles. Ces avantages ont incité à pousser les présentes recherches dans ce sens en modélisant cette fois dans Ansys[®] les structures étudiées en 2D-DP et 2D-CP et à comparer les résultats obtenus aux résultats 3D et expérimentaux correspondants. Des éléments plans à 8 nœuds ont été sélectionnés dans Ansys[®] (**Table 1-1**) en choisissant à chaque fois le comportement ; en contraintes planes ou en déformations planes tout en respectant les conditions mécaniques et électriques déjà appliquées en 3D.

1.5 Plan du mémoire

La thèse est organisée en six chapitres après celui-ci.

Le prochain chapitre décrit théoriquement le couplage électromécanique des structures piézoélectriques en passant en revue les différentes méthodes d'évaluation du coefficient de couplage électromécanique (CCEM). Ces méthodes sont alors évaluées par une modélisation numérique d'une poutre longue et mince munie de petits patches piézocéramiques déjà testé expérimentalement dans le cadre d'une thèse précédente [36].

Le troisième chapitre aborde l'effet de la prise en compte de l'équipotentialité sur l'évaluation numérique du CCEM. Cette condition est étudiée pour la structure présentée dans le chapitre 2 et une comparaison des résultats, sans et avec équipotentialité, est effectuée dans une première approche. Une corrélation expérimentale/numérique est effectuée avec un nouveau test expérimental sous la forme d'une poutre courte et épaisse munie de grands patches piézocéramiques. Cette corrélation a nécessité un recalage électromécanique du modèle EF afin d'approcher les résultats expérimentaux. Les autres méthodes d'évaluation du coefficient de couplage déjà citées dans le chapitre 2 sont appliquées pour les structures courte et épaisse et les différentes méthodes de recalage du modèle EF sont considérées pour finir par une discussion des résultats obtenus.

Le quatrième chapitre traite de la simulation numérique de la piézoélectricité plane. Un rappel des lois de comportement en 2D déformations planes et contraintes planes et en 3D est également introduit. La suite de ce chapitre concerne le recalage mécanique en 2D des modèles précédemment étudiés en 3D suivi d'une synthèse des résultats obtenus.

Le cinquième chapitre illustre l'extension de cette étude aux structures composites en expérimentant une plaque multicouche du type aéronautique. Les énergies de déformation modales de la plaque sont étudiées numériquement à fin d'optimiser la position du patch piézocéramiques à coller. Par la suite, la plaque instrumentée est testée expérimentalement et modélisée numériquement dans le but de déterminer le CCEM de cette structure.

Enfin, les conclusions de ce travail et les perspectives de recherches futures clôturent ce mémoire (chapitre 6).

Chapitre 2 : Couplages électromécaniques

Le problème de vibration libre est traité dans la première partie de ce chapitre suivi de l'étude du couplage électromécanique des structures piézoélectriques. Différentes méthodes de son évaluation sont présentées théoriquement dans un premier temps et appliquées par la suite à un modèle qui a été étudié auparavant expérimentalement. Les résultats obtenus numériquement par la méthode des éléments finis pour les différentes méthodes d'évaluation du coefficient de couplage sont comparés à l'expérience et une synthèse de tous les résultats clôture ce second chapitre.

2.1 Problèmes de vibration libre

Les équations constitutives piézoélectriques (1.1) et (1.2) décrites dans le chapitre précédent doivent tout d'abord être utilisées dans les formulations variationnelles correspondantes classiques (déplacement mécanique-potentiel électrique) [26,29] ; les approximations par éléments finis doivent par la suite être introduites pour obtenir les équations de mouvements discrétisées. Le problème de vibration libre harmonique discret peut être alors défini par la relation suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} K_m^E & K_{em}^{E'} \\ K_{em}^E & -K_e^{\epsilon^s} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

où $[K_m]$, $[K_{em}]$, $[K_e]$ et $[M]$ sont les matrices de rigidité mécanique (m), électromécanique (em) et électrique (e), et de masse. Les exposants des matrices de rigidité E et ϵ^s indique que les équations constitutives (1.1) et (1.2) sont utilisées. $\{U\}$ et $\{V\}$ sont les vecteurs des degrés de libertés (ddl) des déplacements mécaniques et potentiels électriques des électrodes. $\{Q\}$ est le vecteur des charges électriques

surfaiques, où la condition de charge constante, due à la présence d'électrodes, est également supposée remplie.

Quand les électrodes sont en CC, le vecteur des ddl potentiel électrique est nul et (2.1) se réduit à :

$$\begin{aligned} \left([K_m^E] - \omega^{cc^2} [M] \right) \{U^{cc}\} &= \{0\} \\ \{Q^{cc}\} &= -[K_{em}^E] \{U^{cc}\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où la première relation de (2.2) représente le problème des valeurs propres à résoudre afin d'obtenir les propriétés modales en CC (fréquences propres et déformées modales). Il est évident que, dans ce cas, le comportement piézoélectrique n'affecte que sous forme passive (augmentation de la rigidité et de la masse en raison des patches) les propriétés modales de la structure instrumentée. Il est alors prévisible que les fréquences propres en CC ne diffèrent que légèrement, de celles de la structure de base. La deuxième relation de (2.2) peut être utilisée pour la détermination des charges surfaiques produites. Les patches en circuit fermé (CC) peuvent alors être considérés comme des capteurs de charge [37,38].

Quand, les électrodes sont laissées ouvertes, le vecteur des charges surfaiques électriques est désormais considéré nul et (2.1) se réduit à :

$$\begin{aligned} \left([K_m^E] - \omega^2 [M] \right) \{U\} + [K_{em}^E]^t \{V\} &= \{0\} \\ [K_{em}^E] \{U\} - [K_e^{\epsilon^s}] \{V\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

A partir de cette équation, le vecteur des ddl électriques peut être extrait de la seconde relation et remplacé dans la première de sorte que (2.3) se transforme en :

$$\begin{aligned} \left([K_m^{co}] - \omega^{co^2} [M] \right) \{U^{co}\} &= \{0\} \\ \{V^{co}\} &= [K_{em}^{co}] \{U^{co}\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avec,

$$[K_m^{co}] = [K_m^E] + [K_{em}^E]^t [K_e^{\epsilon^s}]^{-1} [K_{em}^E], \quad [K_{em}^{co}] = [K_e^{\epsilon^s}]^{-1} [K_{em}^E] \quad (2.5)$$

La première relation de (2.4) représente le problème des valeurs propres à résoudre pour obtenir les propriétés modales en CO. La seconde relation de (2.4) peut être utilisée pour mesurer la tension générée et les patches en CO peuvent alors être considérés comme des capteurs de tension [37,38]. Comme on peut constater à partir de la première relation de (2.5), les effets piézoélectriques direct et inverse sont présents ;

on s'attend alors à une différence notable entre les fréquences propres en CO et celles de la structure de base pour les modes couplés. L'écart des fréquences propres en CO avec celles en CC peut alors mesurer le couplage électromécanique.

$$K^2 \approx \frac{\omega_{co}^2 - \omega_{cc}^2}{\omega_{cc}^2} \quad (2.6)$$

2.2 Couplage électromécanique effectif

Le CCEM est une mesure de l'efficacité avec laquelle l'énergie électrique est convertie en énergie mécanique et vice versa. Plusieurs méthodes statiques et dynamiques peuvent être trouvées dans la littérature pour son évaluation [4,6] et [19]. Les techniques utilisées sont expérimentales et numériques, elles utilisent les fréquences propres en CC et CO. Par conséquent, à des fréquences bien en dessous de la fréquence résonante de la structure piézoélectrique seule, le CCEM peut être calculé via les pulsations d'anti-résonance (ω_a) et de résonance (ω_r) extraites des FRFs d'impédance ou d'admittance électrique du dispositif expérimental piézoélectrique [4,6] :

$$K_{\text{exp}}^2 \approx \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2} \quad (2.7)$$

Il a été montré [4] en utilisant des analyses numériques du type EF, que la formule suivante s'applique pour un mode donné :

$$K_{\text{num}}^2 \approx \frac{\omega_{co}^2 - \omega_{cc}^2}{\omega_{cc}^2} \quad (2.8)$$

Le PSD ajouté peut être estimé pour les structures piézoélectriques en terme de ce paramètre pour un circuit de shunt résistif (PSD-R) et de résonance (PSD-RL), respectivement, par ces formules approchées [39] :

$$\xi_{\text{add}}^R \approx \frac{K_{\text{num}}^2}{4} \quad (2.9)$$

$$\xi_{\text{add}}^{RL} \approx \frac{K_{\text{num}}}{2} \quad (2.10)$$

Il a été également montré [4] que les deux formules (2.7) et (2.8) sont en fait liées par la relation (2.11) qui doit être prise en compte lors de la comparaison des résultats expérimentaux et numériques bien qu'ils ne doivent pas être trop différents :

$$K_{\text{exp}}^2 \approx \frac{K_{\text{num}}^2}{K_{\text{num}}^2 + 1} \quad (2.11)$$

Cette formule indique aussi que les deux définitions (2.7) et (2.8) sont équivalentes pour un faible CCEM, ie :

$$K_{\text{num}} \ll 1 \Rightarrow K_{\text{exp}} \approx K_{\text{num}} = K \quad (2.12)$$

Comme il a été démontré ci-dessus, en analysant les vibrations de structures adaptatives piézoélectriques, deux problèmes aux valeurs propres doivent être résolus: en CO et en CC. Il est alors nécessaire de trouver un paramètre qui prend en considération, de manière unifiée, les fréquences résultantes. Cela permettra la comparaison et la validation de nouveaux modèles piézoélectriques et d'évaluer l'adéquation de leurs représentation du couplage électromécanique. Le CCEM modal effectif a déjà été démontré un bon candidat à la dernière tâche (mesure du couplage) [10] ; en outre, il a été récemment utilisé comme un critère d'optimisation de position et de taille des patchs piézocéramiques [35], un indicateur de performance PSD [8, 9, 12] et un indicateur d'endommagement [11]. Il est proposé par la suite comme un comparateur de référence pour les vibrations libres.

2.3 Autres méthodes de calcul du coefficient de couplage

Le CCEM est évalué généralement avec les relations définies dans la section précédente, cependant, d'autres approximations sont proposées ci-après. La première méthode approchée fait appel au CCEM du matériau piézoélectrique et la seconde méthode est basée sur la condensation du champ électrique entre les lois (forme-e) du comportement piézoélectrique inverse (1.1) et direct (1.2).

2.3.1 Evaluations approchées du CCEM

Une piézocéramique peut être caractérisée par le CCEM de son matériau, noté k^2 . Comme l'étude a été effectuée en mode extension, c'est le facteur de couplage k_{31} qui est utilisé ci-après pour le calcul du CCEM. Pour la suite, on introduit les énergies suivantes :

- U_{cc} , l'énergie totale stockée dans la structure quand le patch est court-circuité.
- U_{co} , l'énergie totale stockée dans la structure quand le patch est en circuit ouvert.
- U_{poutre} , l'énergie de déformation totale de la poutre.

- U_{cc}^p et U_{co}^p , les énergies stockées dans le patch seul en CC et en CO.

Ces quantités sont reliées par les relations suivantes :

$$U_{cc}^p = (1 - k^2) U_{co}^p \quad (\text{définition de } k^2) \quad (2.13)$$

$$U_{cc} = U_{cc}^p + U_{poutre} \quad (2.14)$$

$$U_{co} = U_{co}^p + U_{poutre} \quad (2.15)$$

La formule utilisée pour calculer l'énergie numériquement est définie dans [17] par :

$$K_{num}^2 = \frac{U_{co} - U_{cc}}{U_{cc}} \quad (2.16)$$

En se basant sur cette relation et en supposant que les déformées modales sont identiques pour une poutre seule et une poutre instrumentée en CC, le CCEM peut s'écrire :

$$K_{num}^2 = \frac{U_{co} - U_{cc}}{U_{cc}} = \frac{U_{co}^p + U_{poutre} - (U_{cc}^p + U_{poutre})}{U_{cc}} = \frac{1 - k_{31}^2}{U_{cc}} \frac{U_{cc}^p - U_{cc}^p}{U_{cc}} = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{U_{cc}^p}{U_{cc}}$$

$$K_{num}^2 = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{U_{cc} - U_{poutre}}{U_{cc}} \quad (2.17)$$

Le coefficient de couplage électromécanique peut être donc approché par cette relation :

$$K_{poutre}^2 = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\omega_{cc}^2 - \omega_{poutre}^2}{\omega_{cc}^2} \quad (2.18)$$

Les résultats fournis par cette évaluation approchée seront discutés ultérieurement.

2.3.2 Nouvelle méthode d'évaluation du CCEM

Les équations (1.1) et (1.2) sont utilisées pour les éléments finis formulés en tension. Celles utilisées pour les EF en déplacements électriques ou formulés en charge électrique utilisent les lois de comportement suivantes :

$$\begin{Bmatrix} T \\ E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^D & -h^t \\ -h & \beta^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ D \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Où $[C^D]$, $[h]$ et $[\beta^s]$ sont respectivement la matrice élastique à déplacement électrique constant, la matrice piézoélectrique de charge et la matrice de perméabilité diélectrique à déformation constante. Ces constantes sont reliées à celles des relations (1.1) et (1.2) par la relation suivante [30] :

$$[C^D] = [C^E] + [e]^T [\epsilon^s]^{-1} [e], \quad [h] = [\epsilon^s]^{-1} [e], \quad [\beta^s] = [\epsilon^s]^{-1} \quad (2.20)$$

La première relation de (2.20) montre que l'effet piézoélectrique est présent pour la condition électrique CO. Il a un effet de rigidité qui aura une influence sur les fréquences propres en CO qui devraient être plus élevées que celles en CC.

Il est aussi intéressant de remarquer la ressemblance entre les deux premières relations de (2.20) et (2.5). Il est alors envisageable de penser que les propriétés modales en CO peuvent être simplement obtenues en résolvant le problème de vibrations libres en CC, comme celui de la première relation (2.2), mais en utilisant les propriétés élastiques en CO comme dans la première relation de (2.20).

Le coefficient de couplage est alors approché par la relation (2.21) avec ω_D provenant de l'analyse modale d'une poutre avec des patches purement élastiques en utilisant la matrice $[C^D]$, et ω_E provenant de l'analyse modale de la poutre instrumentée sans considérer les propriétés piézoélectriques en utilisant uniquement la matrice $[C^E]$.

$$K_D^2 = \frac{\omega_D^2 - \omega_E^2}{\omega_E^2} \quad (2.21)$$

2.4 Application

Deux structures ont été conçues et assemblées pour l'évaluation expérimentale du CCEM. Elles sont composées chacune d'une poutre en Aluminium avec deux patches piézocéramiques PZT PIC255 d'une épaisseur de 0.25 mm (achetés auprès de PI Ceramics) ; ces patches sont collés symétriquement avec une colle époxy conductrice sur les deux faces de la poutre près de l'encastrement (**Figure 2-1**) afin d'obtenir un CCEM effectif mesurable du moins pour les premiers modes de flexion. L'accent est mis sur les modes de flexion pure des deux poutres qui entraînent l'expansion et la contraction des patches sur leurs faces extérieures. Étant donné que les patches sont polarisés dans la direction de l'épaisseur et travaillent en mode d'extension, leur collage peut être fait de manière que leurs polarisations soient dans la même direction (polarisations identiques,

PI) ou vers l'extérieur (polarisations opposées, PO) [17]. L'évaluation expérimentale du CCEM a été conduite dans une étude précédente [17] et les résultats obtenus en PI et PO sont comparés ci-après aux résultats EF 3D sans la prise en compte de l'équipotentialité en CO.

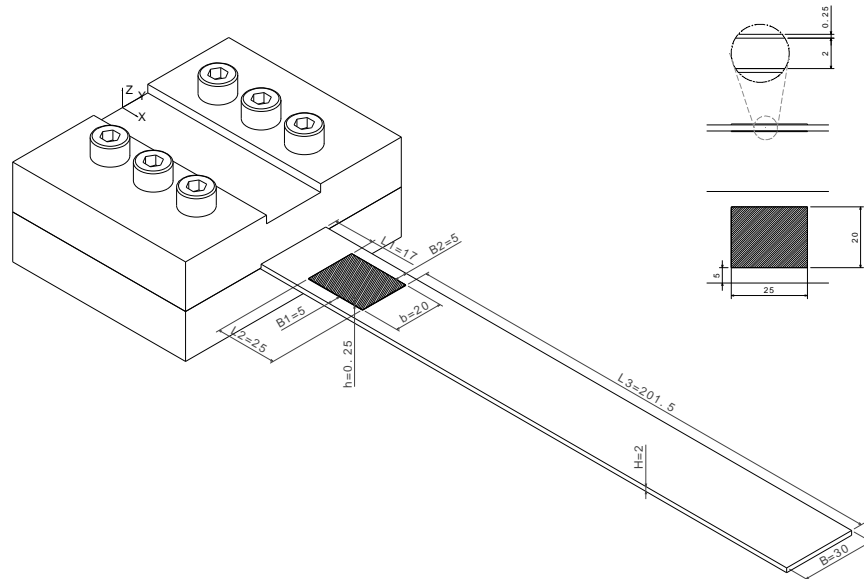


Figure 2-1: Poutre Aluminium encastée avec une paire de patches PZT PIC255 (dim en mm)

2.4.1 Modélisation par la méthode des éléments finis

Les poutres testées, comme indiqué dans la **Figure 2-2**, avec deux patches piézoélectriques collés symétriquement en PO et PI et connectés électriquement, respectivement en série et en parallèle, ont été modélisées en utilisant les codes EF commerciaux ABAQUS® et ANSYS®.

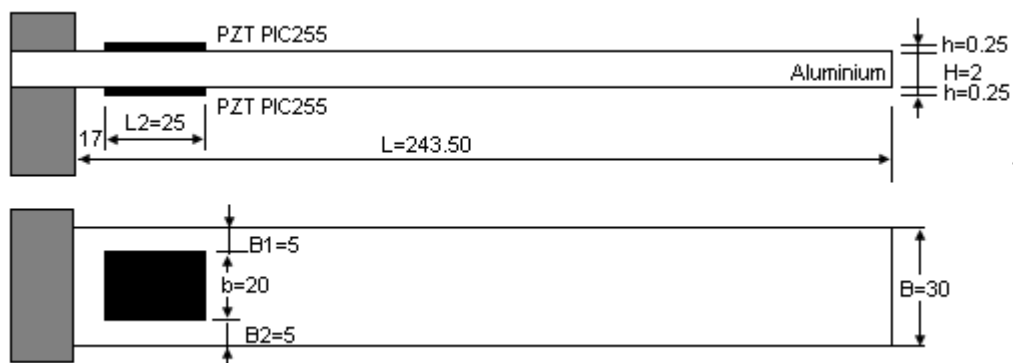


Figure 2-2 : Croquis de la poutre instrumentée (dimensions en mm)

Le premier problème classique rencontré est que le fabricant fournit une table de données incomplète du matériau PZT PIC255 [40]. Pour le surmonter, ces données ont été complétées pour la simulation à l'aide de la procédure décrite dans l'annexe A1 et sont présentées dans la **Table 2-1**, ainsi que les données de l'Aluminium. La seconde difficulté est de remplir les interfaces graphiques des propriétés des matériaux avec les bonnes données ; en effet Ansys[®] et Abaqus[®], n'utilisent pas les normes de l'IEEE pour les notations de la piézoélectricité [2] en ce qui concerne les constantes élastiques et piézoélectriques en cisaillement. De plus, Abaqus[®] fait appel à des notations à quatre indices pour les équations constitutives. Pour éviter d'éventuelles erreurs, l'emploi des constantes d'ingénieur est particulièrement recommandé.

Matériaux	Constantes	Notations	Valeurs	
PZT PIC255	Permittivité à déformation constante (nF m ⁻¹)	$\epsilon_{11}^s = \epsilon_{22}^s$	8.245	
		ϵ_{33}^s	7.122	
	Coefficients de couplage piézoélectrique (C m ⁻²)	$e_{31} = e_{32}$	-7.25	
		e_{33}	14.41	
		$e_{15} = e_{24}$	11.57	
	Module d'Young (GN m ⁻²)	$E_1 = E_2$	62.1	
		E_3	48.3	
		Coefficient de Poisson	ν_{12}	0.32
	Module de cisaillement (GN m ⁻²)		$\nu_{13} = \nu_{23}$	0.44
			G_{12}	23.5
		$G_{13} = G_{23}$	21	
	Masse Volumique (Kg m ⁻³)	ρ	7800	
Aluminium	Module d'Young (GN m ⁻²)	E	69	
	Coefficient de Poisson	ν	0.3	
	Masse Volumique (Kg m ⁻³)	ρ	2700	

Table 2-1 : Propriétés du PZT PIC255 et de l'Aluminium

La structure a été discrétisée de la même manière en utilisant des éléments solides quadratiques (20 nœuds) de sorte que le modèle EF résultant des deux logiciels a 885 éléments et 8896 nœuds (voir **Table 2-2**). Pour cela, les EF C3D20R et C3D20ER ont été utilisés, respectivement, pour la poutre en Aluminium et les patches piézo-céramiques dans Abaqus[®], tandis que dans Ansys[®], SOLID186 et SOLID226 ont été sélectionnés pour les composantes respectives (voir **Figure 2-3**). L'intégration réduite (IR) a été activée pour les EF élastiques dans Abaqus[®] et Ansys[®], car elle est activée par défaut pour les EF couplés dans Ansys[®].

Partie maillée	Paramètre (Figure 2-1)	Dimension (mm)	Nombre d'éléments	Taille de l'élément (mm)	Total
Poutre	L1	17	17	1	885 Eléments 8896 Nœuds
	L2	25	10	2.5	
	L3	217.5	20	Variable car biaisé	
	B	30	12	2.5	
	B1	5	2	2.5	
	B2	5	2	2.5	
	H	2	1	2	
Patch	L2	25	10	2.5	
	B	20	8	2.5	
	H	0.25	2	0.125	

Table 2-2 : Géométrie et discrétisation par EF de la poutre instrumentée

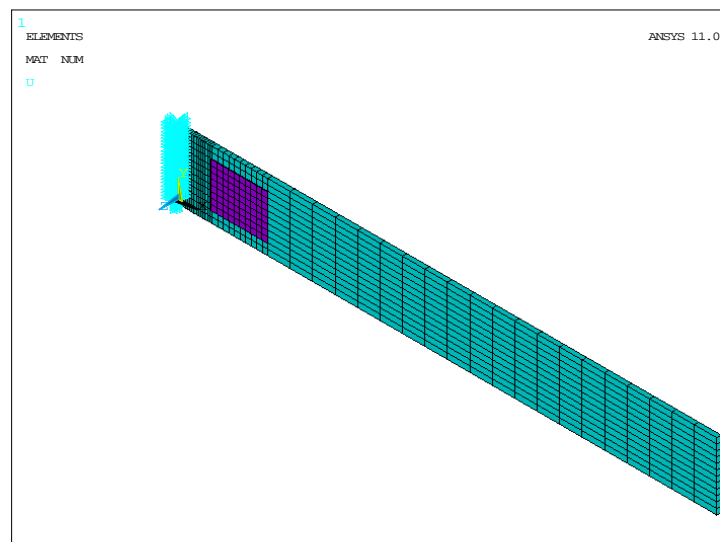


Figure 2-3 : Modèle EF Ansys® de la poutre instrumentée

Il n'est pas nécessaire que le maillage soit régulier et on a tendance à affiner le maillage près des endroits d'intérêts (par exemple aux endroits où l'on pense que la solution va beaucoup varier), cependant il faut veiller à avoir des éléments faiblement distordus (se rapprocher d'un polyèdre régulier). Plus ce maillage est fin, plus la solution que l'on obtient par la méthode des éléments finis sera précise et proche de la « vraie » solution de l'équation aux dérivées partielles.

Pour réaliser les polarisations identique PI (connexion parallèle) et opposée PO (connexion série) dans Ansys®, la technique de conservation ou d'inversion de l'orientation (polarisation) des patchs est utilisée. Il suffit de remplir la matrice piézoélectrique $[e]$, respectivement, par des valeurs positives ou négatives. Dans le cas d'une polarisation identique PI, les deux patchs ont la même orientation et donc la

même matrice piézoélectrique e . Pour la polarisation opposée PO, les orientations des patchs sont opposées et chaque patch a sa matrice piézoélectrique avec des signes opposés [39].

Dans Ansys[®], l'application des conditions électriques, CC et CO, est réalisée directement dans l'interface graphique en sélectionnant les noeuds des électrodes auxquels sont appliqués les conditions limites électriques. Par conséquent, pour la condition CC, il suffit de sélectionner les noeuds des quatre faces des patchs et d'appliquer un potentiel nul en utilisant la fonction Preprocessor /Loads /Define Loads /Apply /Electric /Boundary/On Nodes. Cependant, pour la configuration CO, aucune condition électrique n'est appliquée. La définition des polarisations est différente dans Abaqus[®] ; une première technique pour simuler les connexions électriques utilise un système de référentiel local pour chaque patch (voir **Figure 2-4**) et, par conséquent, une orientation. Pour cela, il est nécessaire de créer un "Datum CSYS" pour chaque patch et d'attribuer une orientation. Pour la PI, les deux repères locaux des patchs ont la même orientation et pour la PO, l'un des repères des patchs sera pivoté de 180° autour du premier axe par rapport au repère de l'autre patch (**Figure 2-4**). La seconde technique qui peut être utilisée pour définir les polarisations est celle décrite plus haut pour Ansys[®].

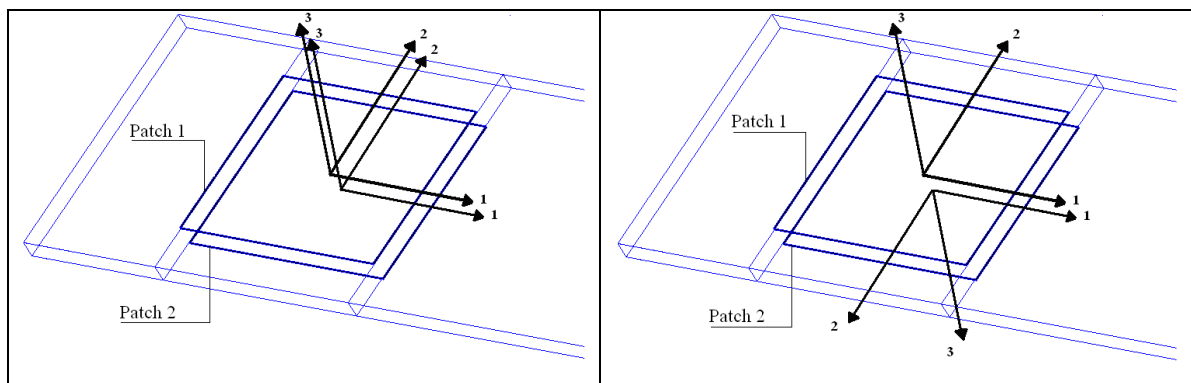


Figure 2-4 : Polarisations identiques (gauche) et opposées (droite)

Les conditions électriques CC et CO sont définies en utilisant des relations cinématiques linéaires via la commande « Constraints » dans Abaqus[®]. Ainsi des ensembles (sets) et des contraintes sont créés en fonction du degré de liberté électrique, DOF9, pour avoir les différents types de configurations.

2.4.2 Résultats numériques de référence

La simulation numérique du dispositif expérimental de la poutre (**Figure 2-2**) sans la prise en compte de l'équipotentialité en CO a abouti aux mêmes résultats numériques en PO et PI. Ainsi, l'orientation des patchs n'a pas d'influence sur le modèle EF ce qui n'est pas le cas des expériences (voir **Table 2-3**). Il est clair que les modèles EF 3D

affichent des fréquences propres plus élevées que les expériences pour les deux premiers modes de flexion ; ce qui se traduit par des erreurs relativement importantes. Le CCEM effectif (2.8) issu des calculs EF 3D est récapitulé pour les six premiers modes dans la **Table 2-4** et comparé au CCEM expérimental pour les deux premiers modes de flexion dans la **Table 2-5**. Cette comparaison est illustrée par un diagramme dans la **Figure 2-5** ; certes les résultats d'Ansys® et d'Abaqus® sont très proches pour les deux premiers modes, mais ils sont assez différents des CCEM (%) expérimentaux. Cette différence peut être réduite en ajoutant la condition d'équipotentialité en CO, voir chapitre suivant.

Connexion	Mode	Fréquences expérimentales (Hz)		Fréquences numériques (Hz) avec équipotentialité				Erreur (%)			
		CO	CC	CO _{ansys}	CC _{ansys}	CO _{abaqus}	CC _{abaqus}	CO _{ansys}	CC _{ansys}	CO _{abaqus}	CC _{abaqus}
Parallèle	1	26.18	26.09	29.463	29.291	29.465	29.295	12.54	12.27	12.55	12.28
	2	161.13	161.04	176.58	176.20	176.84	176.47	9.59	9.41	9.75	9.58
Série	1	26.64	26.56	29.463	29.291	29.465	29.295	10.60	10.28	10.60	10.30
	2	165.76	165.63	176.58	176.20	176.84	176.47	6.53	6.38	6.68	6.55

Table 2-3 : Comparaison des fréquences propres expérimentales et par EF 3D sans EP pour les deux premiers modes en connexion série et parallèle pour la poutre de la Figure 2-2

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Ansys®	f _{co} (Hz)	29.463	176.58	413.05	447.71	482.86	938.67
	f _{cc} (Hz)	29.291	176.20	412.41	447.69	482.65	937.63
	K ² (%)	1.18	0.43	0.31	0.01	0.09	0.22
	K (%)	10.85	6.57	5.57	0.95	3.09	4.66
Abaqus®	f _{co} (Hz)	29.465	176.84	413.22	450.72	484.01	942.19
	f _{cc} (Hz)	29.295	176.47	412.59	450.70	483.80	941.17
	K ² (%)	1.16	0.42	0.31	0.01	0.09	0.22
	K (%)	10.79	6.48	5.53	0.94	2.95	4.66

Table 2-4 : Fréquences propres en CO sans équipotentialité et CC et CCEM (%) effectif dans Ansys® et Abaqus® de la poutre de la Figure 2-2

	Mode	Ansys®	Abaqus®	Exp_série	Exp_parallèle
CCEM ² (%)	1	1.18	1.16	0.6	0.69
	2	0.43	0.42	0.16	0.11
CCEM (%)	1	10.85	10.76	7.77	8.31
	2	6.57	6.48	3.96	3.34

Table 2-5 : CCEM² (%) et CCEM (%) expérimentaux et par EF 3D sans EP

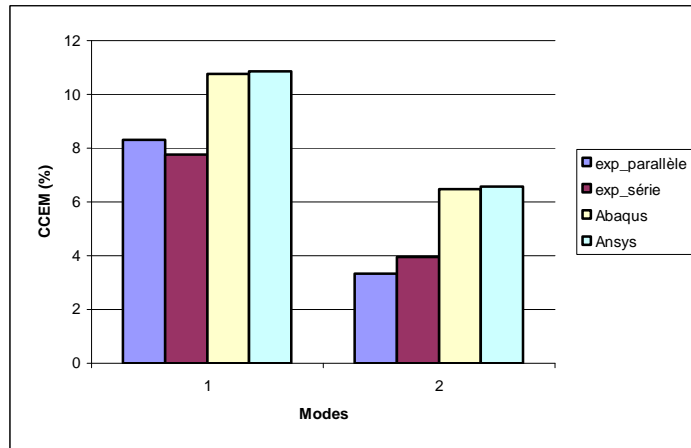


Figure 2-5 : Comparaison du CCEM (%) expérimental et par EF sans équipotentialité

2.4.3 Application des méthodes approchées d'évaluation du CCEM

Les deux méthodes approchées d'évaluation du CCEM sont appliquées à la poutre de la **Figure 2-2** afin de comparer leur précision par rapport aux résultats de la section précédente. Pour la première méthode, le CCEM est défini en fonction des fréquences propres de la poutre seule (nue) sans patchs piézoélectriques f_{poutre} (Hz) et des fréquences propres de la poutre instrumentée (instru) en CC, f_{cc} (Hz) (relation (2.18)). Pour la seconde méthode, l'évaluation du CCEM résulte de la condensation du champ électrique entre les lois (forme-e). Les patchs piézoélectriques sont modélisés avec des éléments purement élastiques (relation (2.21)). Ces deux méthodes sont évaluées à l'aide d'Ansys[®].

2.4.3.1 Méthode approchée d'évaluation du CCEM

La poutre en aluminium est modélisée sans patchs piézoélectriques et les fréquences propres résultantes de l'analyse modale par EF sont combinées avec les fréquences propres en CC pour approcher le CCEM pour les six premiers modes récapitulés dans la **Table 2-6**. Une comparaison des CCEM de la poutre nue et de la poutre instrumentée sans équipotentialité est réalisée graphiquement dans la **Figure 2-6**; le CCEM approché dépasse largement le CCEM expérimental de la poutre instrumentée pour les deux connexions et pour les deux premiers modes de flexion.

Mode	1	2	3	4	5	6
f_{poutre} (Hz)	27.756	173.62	408.86	430.23	485.98	952.18
f_{cc} (Hz)	29.291	176.20	412.41	447.69	482.65	937.63
K_{poutre}^2 (%)	1.42	0.41	0.24	1.07	-0.19 *	-0.44*
K_{poutre} (%)	11.94	6.37	4.89	10.33	-	-

* On note que ces valeurs sont négatives ce qui n'est pas réaliste

Table 2-6 : Fréquences propres et $\text{CCEM}_{\text{poutre}}$ pour la poutre de la Figure 2-2

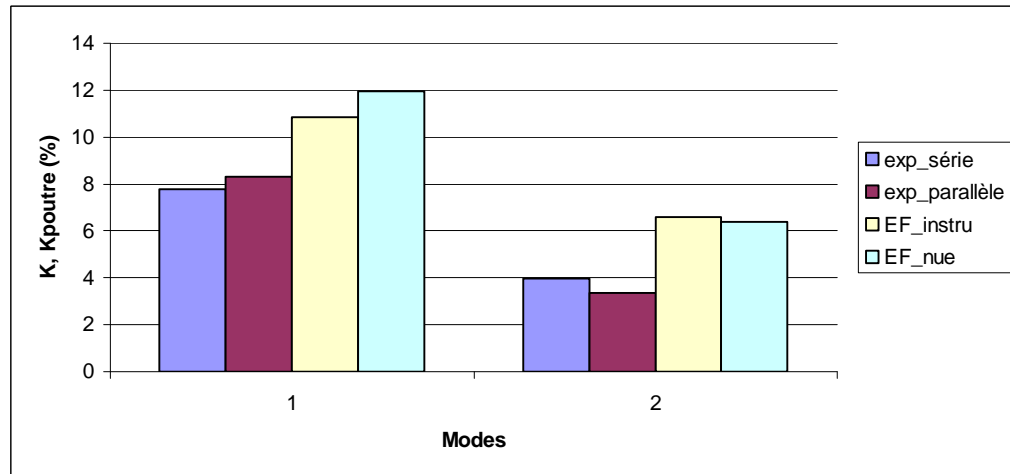


Figure 2-6 : Comparaison de K (%) et K_{poutre} (%) pour les deux premiers modes

2.4.3.2 Nouvelle méthode d'évaluation du CCEM

Les fréquences propres f_D (Hz) extraites des analyses modales avec la matrice C^D pour les patches en CO et les fréquences propres f_E (Hz), résultant des calculs par EF avec les propriétés purement élastiques des patches en CC, sont présentées dans la **Table 2-7** où le CCEM est défini par la relation (2.21). Ces fréquences sont comparées aux fréquences expérimentales en CO et CC pour les deux premiers modes en polarisation identique et opposée dans la **Table 2-8** ; on remarque qu'elles sont plus élevées que les fréquences expérimentales pour les deux modes et les deux connexions.

Mode	1	2	3	4	5	6
f_D (Hz)	29.453	176.56	413.07	454.14	482.87	938.66
f_E (Hz)	29.279	176.17	412.38	446.17	482.6	937.51
K_D^2 (%)	1.19	0.44	0.33	3.60	0.11	0.25
K_D (%)	10.92	6.66	5.79	18.99	3.35	4.95

Table 2-7 : Fréquences propres et $CCEM_D$ pour la poutre de la Figure 2-2

Connexion	Mode	Fréquences expérimentales (Hz)		Fréquences numériques (Hz)		Erreur (%)	
		f_{co}	f_{cc}	f_D	f_E	f_{co}/f_D	f_{cc}/f_E
Parallèle	1	26.18	26.09	29.453	29.279	12.50	12.22
	2	161.13	161.04	176.56	176.17	9.58	9.39
Série	1	26.64	26.56	29.453	29.279	10.56	10.24
	2	165.76	165.63	176.56	176.17	6.52	6.36

Table 2-8 : Comparaison des fréquences propres expérimentales et par EF 3D utilisant la matrice C^D pour les deux premiers modes en connexion série et parallèle pour la poutre de la Figure 2-2

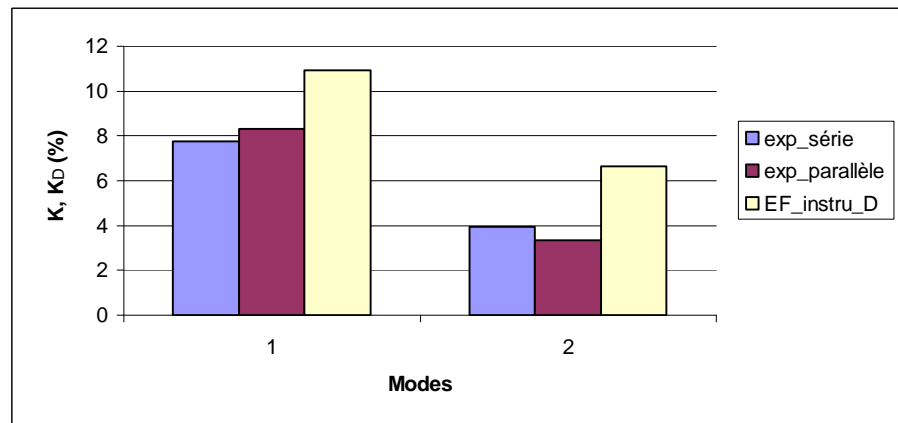


Figure 2-7 : Comparaison de K_{exp} (%) et K_D (%) pour les deux premiers modes

Le CCEM évalué par la relation (2.21) surestime le CCEM expérimental évalué par la méthode classique (2.8) en connexion série et parallèle pour les deux premiers modes de flexion et particulièrement pour le second mode où l'écart est plus important comme le montre la **Table 2-7**.

2.5 Synthèse

Une étude théorique du problème de vibration libre a introduit ce chapitre consacré au couplage électromécanique. Trois méthodes d'évaluation de ce coefficient ont été présentées, deux d'entre elles ont été déjà citées dans la littérature et la troisième est proposée ici comme nouvelle. L'application numérique de ces formules sur un exemple étudié expérimentalement a permis de les confronter. Toutefois, la condition électrique d'équipotentialité des électrodes n'a pas été appliquée en CO. Cette contrainte sera étudiée dans le chapitre suivant pour différentes structures. Une synthèse des trois méthodes d'évaluation numérique du CCEM, par Ansys[®], de la poutre longue instrumentée et du CCEM expérimental pour les deux polarisations est effectuée dans la **Figure 2-8**. Les deux méthodes approchées d'évaluation du CCEM amplifient l'écart entre les résultats numériques et l'expérience pour les présentes poutres. De ce fait, il est nécessaire d'étudier d'autres types de structures tels que les structures épaisses et d'étudier l'effet d'équipotentialité sur le couplage électromécanique.

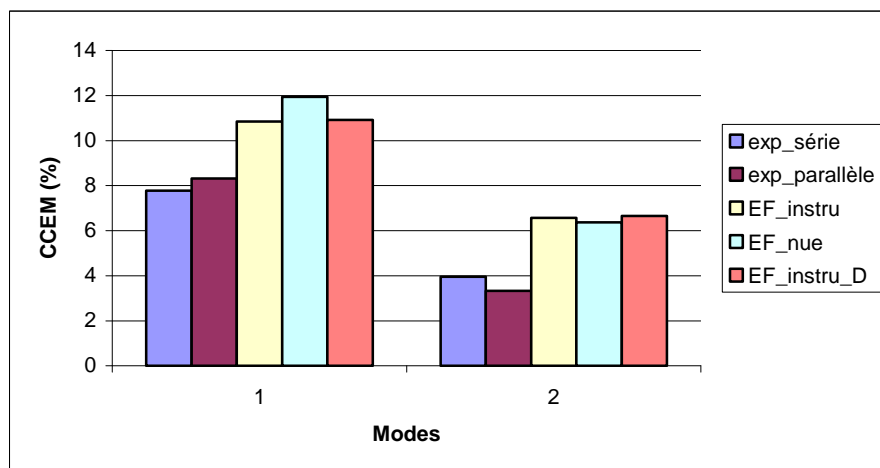


Figure 2-8 : Comparaison des différentes méthodes d'évaluation du CCEM pour la poutre de la Figure 2-2

Chapitre 3 : Importance de l'équipotentialité dans l'évaluation numérique du CCEM

On montre dans ce chapitre que la prise en compte de l'équipotentialité réduit le CCEM effectif si elle ne découple pas certains modes couplés sans équipotentialité. Le but de cette étude est de prouver que cette condition est nécessaire pour obtenir des résultats corrects vis-à-vis des mesures. Ainsi cette contrainte sera appliquée à la poutre mince et longue déjà étudiée dans le chapitre précédent et les résultats obtenus seront comparés aux précédents (sans équipotentielle).

3.1 Analyse par EF 3D de la poutre longue avec équipotentialité

Une étude par EF 3D sans la condition d'équipotentialité (EP) de la poutre « longue » (**Figure 2-2**) a été effectuée dans le chapitre précédent. Cependant, cette condition doit être appliquée aux électrodes en CO puisque c'est une condition physique des électrodes. En effet la présence d'une électrode impose un potentiel uniforme sur toute la face correspondante du patch. Des simulations par EF 3D de la poutre « longue » avec prise en compte de la condition d'équipotentialité ont été menées et une comparaison des résultats numériques obtenus sans et avec équipotentialité dans Ansys[®] et Abaqus[®] est fournie dans la **Table 3-1**. L'écart (%) entre les fréquences numériques avec et sans équipotentialité est faible sauf pour le 3^{ème} mode. On note aussi que la contrainte d'équipotentialité fait baisser légèrement les fréquences propres en CO. Par ailleurs cet écart (%) est quasi-identique pour les deux logiciels utilisés.

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Ansys®	f_{coep} (Hz)	29.462	176.55	412.41	447.69	482.69	938.21
	f_{co} (Hz)	29.463	176.58	413.05	447.71	482.86	938.67
Abaqus®	f_{coep} (Hz)	29.462	176.81	412.59	450.70	483.84	941.75
	f_{co} (Hz)	29.465	176.84	413.22	450.72	484.01	942.19
Ecart (%)	Ansys®	0.00	0.02	0.16	0.00	0.04	0.05
	Abaqus®	0.01	0.02	0.15	0.00	0.04	0.05

Table 3-1: Fréquences propres avec (f_{coep}) et sans (f_{co}) équipotentialité dans Ansys® et Abaqus®

Les écarts (%) entre le CCEM effectif sans et avec la prise en compte de l'équipotentialité sont illustrés dans la **Figure 3-1**. Cette contrainte d'équipotentialité a découpé les 3^{ème} et 4^{ème} modes et a baissé le couplage des autres modes, en particulier pour les 5^{ème} et 6^{ème} modes où l'écart (%) est relativement important.

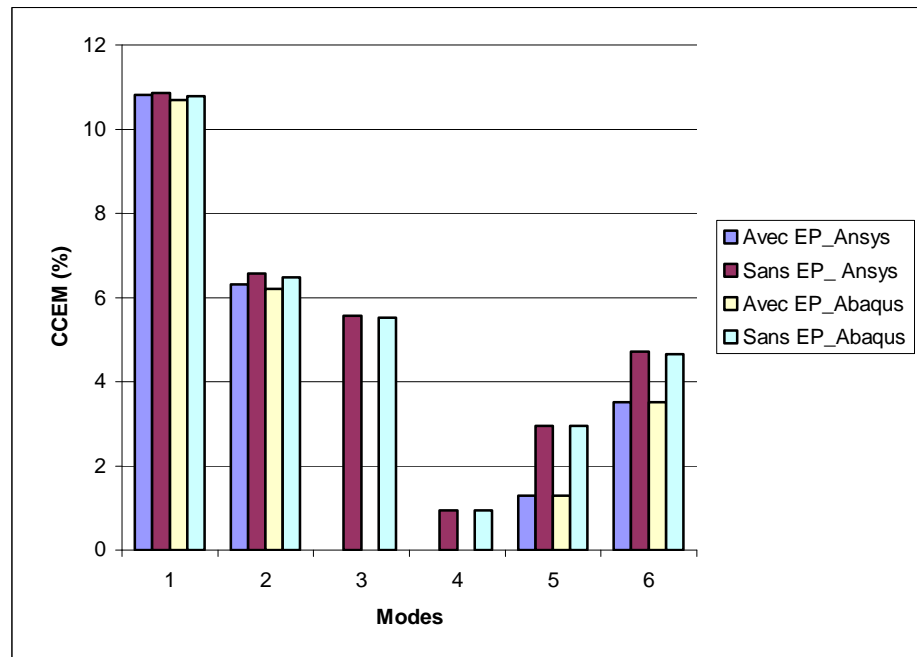


Figure 3-1: Comparaison des CCEM (%) avec et sans EP dans Ansys® et Abaqus®

Les déformées et le potentiel électrique sont illustrés dans les **Figure 3-3** et **Figure 3-4** pour les six premiers modes avec et sans équipotentialité pour la connexion parallèle (polarisations identiques) en CO dans Abaqus® et Ansys®. Pour les modes 3 et 4, lorsque l'équipotentialité n'est pas prise en compte, les potentiels électriques sont antisymétriques, le potentiel moyen est nul. Ce qui mène à un potentiel nul quand l'équipotentialité est appliquée, cf. colonne de gauche des **Figure 3-3** et **3-4**.

Connexion	Mode	Fréquences expérimentales (Hz)		Fréquences numériques (Hz) avec équipotentialité				Erreur (%)			
		CO	CC	CO _{ansys}	CC _{ansys}	CO _{abaqus}	CC _{abaqus}	CO _{ansys}	CC _{ansys}	CO _{abaqus}	CC _{abaqus}
Parallèle	1	26.18	26.09	29.462	29.291	29.462	29.295	12.54	12.27	12.54	12.28
	2	161.13	161.04	176.55	176.20	176.81	176.47	9.57	9.41	9.73	9.58
Série	1	26.64	26.56	29.462	29.291	29.462	29.295	10.59	10.281	10.59	10.30
	2	165.76	165.63	176.55	176.20	176.81	176.47	6.51	6.381	6.67	6.55

Table 3-2 : Comparaison des fréquences propres expérimentales et EF 3D avec EP pour les deux premiers modes en connexion série et parallèle de la poutre longue

L'erreur (%) en fréquence est plus importante en connexion parallèle qu'en série pour les deux premiers modes (voir **Table 3-2**) en CC et CO. La **Table 3-3** et la **Figure 3-2** illustrent des comparaisons entre l'expérience et le modèle numérique du CCEM² (%) et du CCEM (%) pour les deux premiers modes où les simulations surestiment les deux coefficients.

	Mode	Ansys®	Abaqus®	Exp_série	Exp_parallèle
CCEM ² (%)	1	1.17	1.14	0.6	0.69
	2	0.40	0.39	0.16	0.11
CCEM (%)	1	10.82	10.69	7.77	8.31
	2	6.31	6.21	3.96	3.34

Table 3-3 : CCEM² (%) et CCEM (%) expérimentaux et par EF 3D avec EP

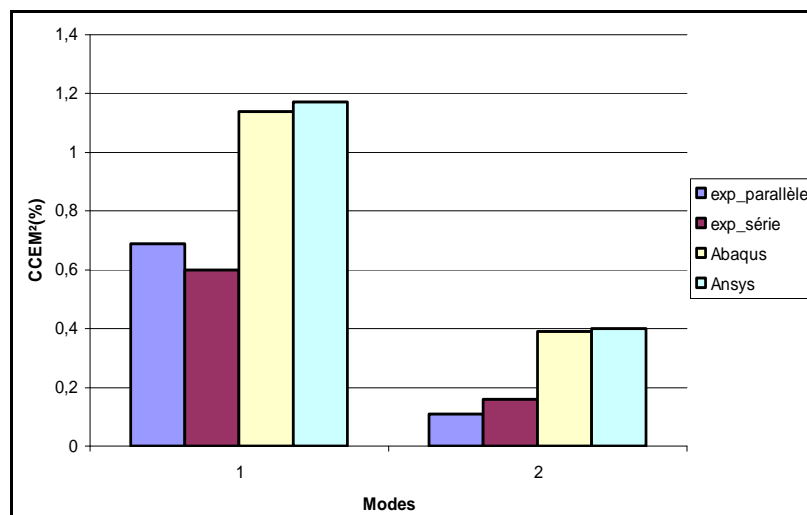


Figure 3-2 : Comparaison essais-calculs du CCEM² (%) avec l'équipotentialité

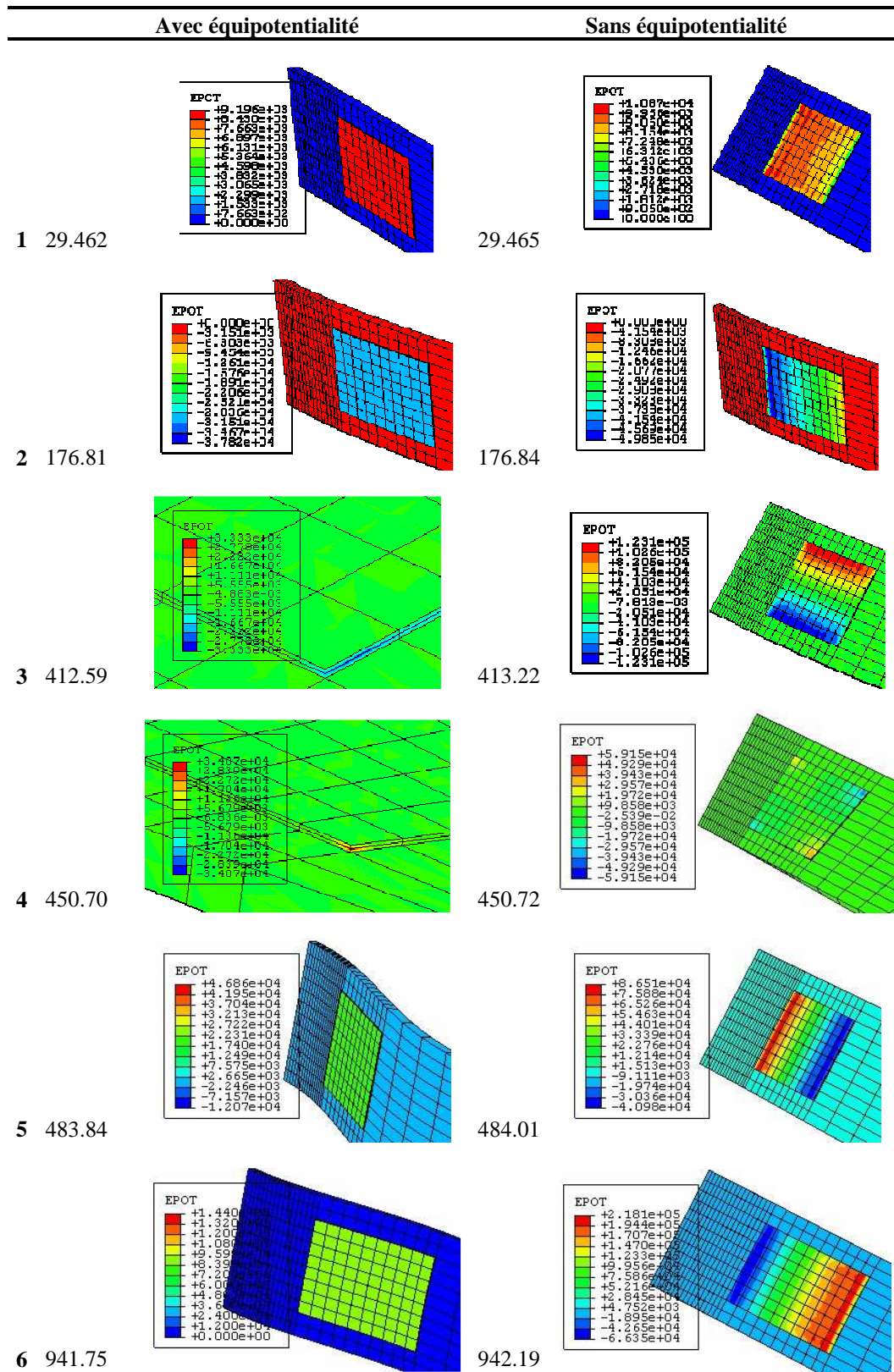


Figure 3-3 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique dans Abaqus® en CO avec et sans équipotentialité sur les faces externes des patches (polarisations identiques)

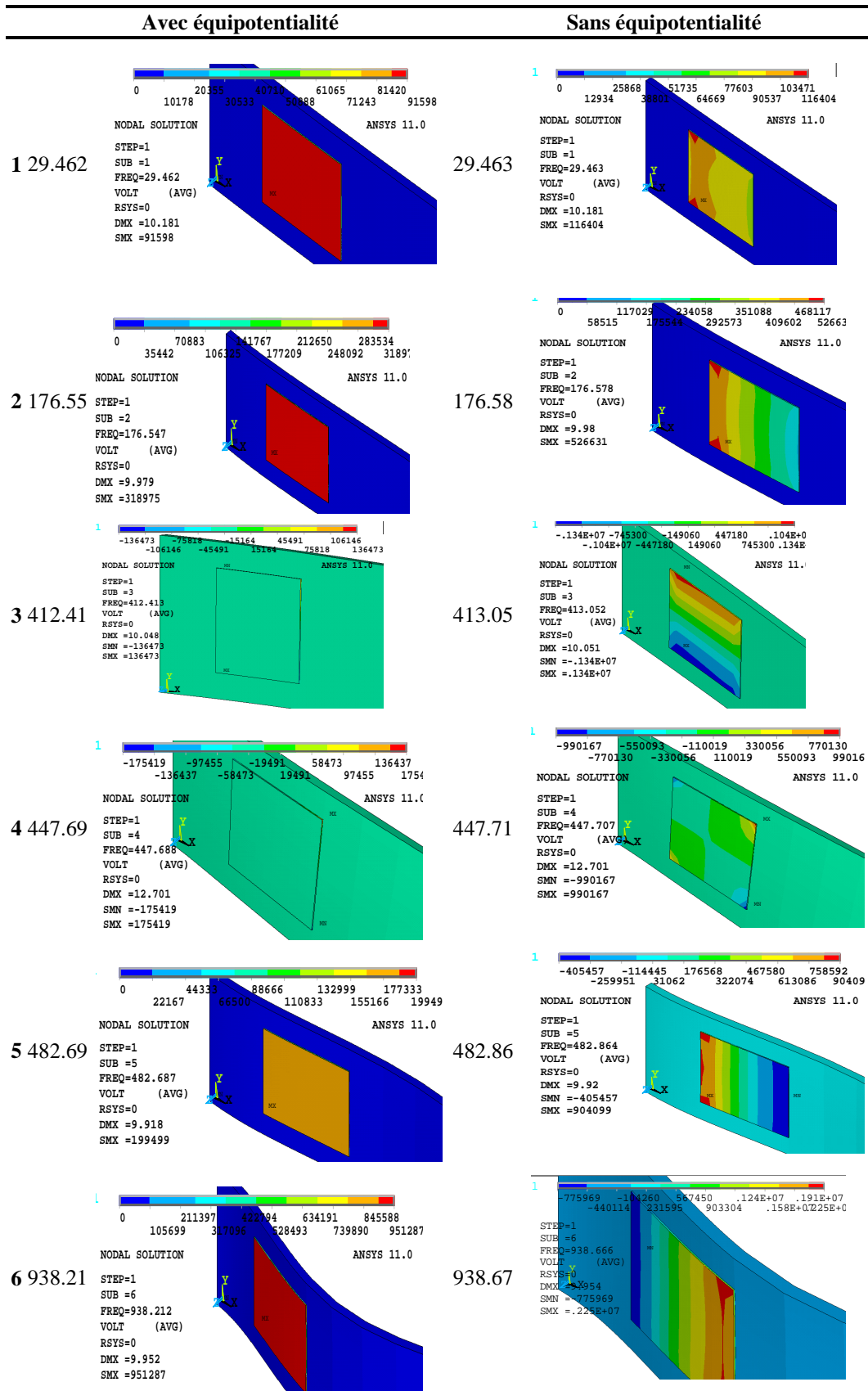


Figure 3-4 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique dans Ansys® en CO avec et sans équipotentialité sur les faces externes des patches (polarisations identiques)

3.2 Tests de la poutre courte

Ces comparaisons n'avaient porté jusqu'ici que sur les deux premiers modes de flexion de la poutre « longue ». Le dispositif expérimental n'a pas permis d'aller au-delà. Par contre les résultats numériques ont été présentés jusqu'au sixième mode. Un résultat intéressant de cette étude numérique est le fait que la prise en compte de l'effet d'électrode (qui impose un potentiel électrique uniforme sur toute la face du patch) conduit à minorer le coefficient de couplage électromécanique, voire à l'annuler dans le cas de certains modes. Il est donc très intéressant de valider ces résultats par une seconde campagne expérimentale et numérique. Pour pouvoir atteindre cet objectif, il était nécessaire de travailler sur une structure plus courte et plus rigide pour laquelle les moyens d'acquisition de mesure disponibles sont plus adaptés. D'autre part des patches de grande taille ont été choisis afin de maximiser la valeur du coefficient de couplage. Les essais ont été conduits sur une structure de type poutre courte et épaisse dont le comportement structural est un peu hybride entre celui d'une poutre et celui d'une plaque. Cette considération n'affecte pas les résultats qui suivent mais explique le fait que certains modes, comme le mode de torsion soit assez proche des modes de flexion. Cette structure se compose donc d'une poutre épaisse en Aluminium, de dimensions libres $79 \times 25 \times 3.9 \text{ mm}^3$, avec une seule paire de grands patches PZT PIC255, de dimensions $50 \times 25 \times 0.3 \text{ mm}^3$ (acheté auprès de PI Céramique [40]), collée symétriquement, dans la configuration PO, avec une colle époxy conductrice.

3.2.1 Description de l'essai (montage d'acquisition)

Le fait que la structure soit assez courte permet de travailler dans une bande de fréquence qui va de 400 à 6000 Hz. D'autre part, la poutre est assez épaisse. Enfin, la taille des patches est très importante par rapport à celle de la poutre ; un seul patch couvre environ 65% de la surface de la structure, ce qui permet d'une part de maximiser le coefficient de couplage et de mesurer divers modes tels que les flexions dans les plans x-y et x-z, et la torsion mais aussi de maximiser l'effet de l'équipotentialité qui est plus important pour les patches de grande taille. La géométrie de la poutre est donnée sur la **Figure 3-5**.

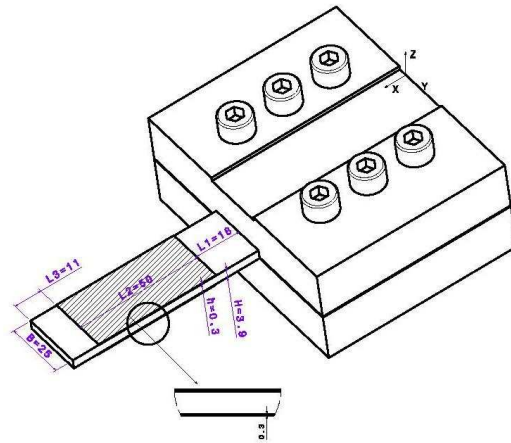


Figure 3-5 : Vue isométrique du dispositif expérimental (dimensions en mm)

Contrairement à l'étude précédente, les essais ont tous été effectués dans une seule configuration de collage : polarisation opposée, ce qui a conduit à un câblage électrique en série des deux patches (voir **Figure 3-6**). La poutre est excitée au moyen d'un pot vibrant dans la bande de fréquence [0 10] kHz. Le banc est alimenté par un amplificateur de courant (Bruel et Kajer type 2718) piloté par un générateur de signaux numériques (Agilent 33120A). Une mesure de vitesse est effectuée dans la bande de fréquence [0 10] kHz à l'extrémité de la structure au moyen d'un capteur à réductance variable. Les deux signaux, à la sortie de l'amplificateur et du capteur sont ensuite numérisés et transférés à un PC via une carte National Instrument (ref. NI9233). Le calcul des fonctions de réponse en fréquence est effectué à l'aide du logiciel 2ADS Studio développé au LISMMA. Les fonctions de transfert sont des fonctions H1 calculées à partir de la FFT des signaux pondérés par une fenêtre de Hanning. La fréquence d'échantillonnage est de 12.5 kHz, la résolution fréquentielle est de 0.096 Hz. Les coefficients d'amortissement sont calculés à l'aide de l'approche classique basée sur la mesure de la hauteur du pic à -3dB. Les causes d'amortissement sont réduites au minimum grâce à l'usage d'un capteur électromagnétique sans contact, un socle aussi rigide que possible, et des fils électriques aussi minces que possible (voir **Figure 3-7**).

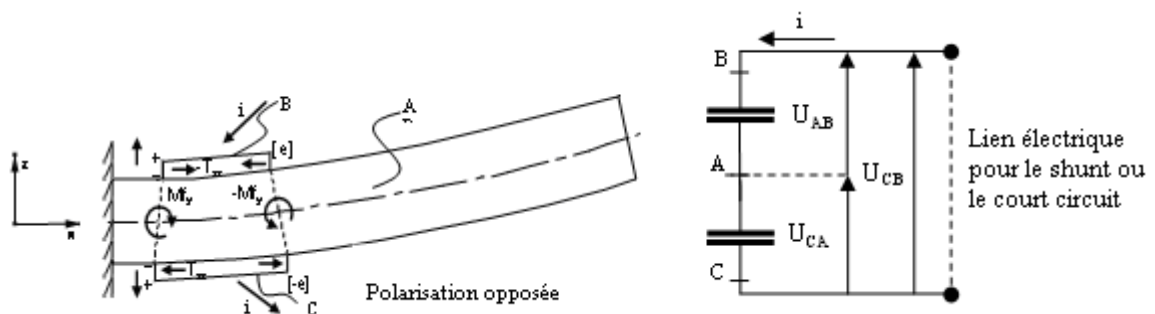


Figure 3-6 : Collage des patches en polarisations opposées [17]

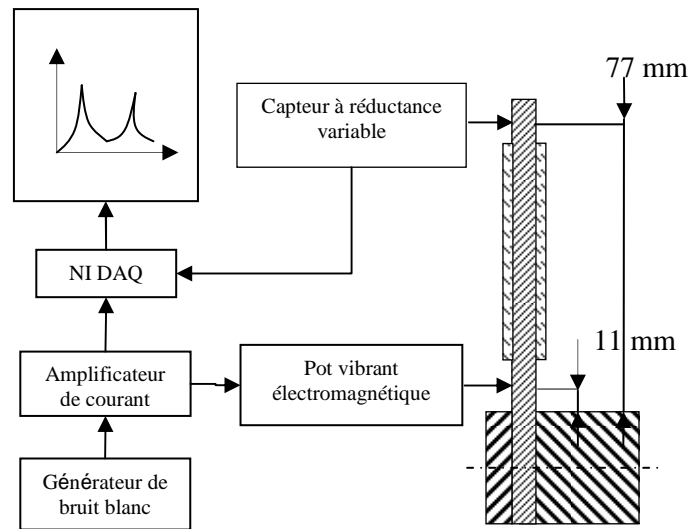


Figure 3-7 : Description de la chaîne d'acquisition

Une mesure préliminaire de la capacité des patches a été effectuée avec un LCR-mètre HP4284A à 100 Hz. Les capacités et résistances caractéristiques des patches et du montage sont présentées dans la **Table 3-4**. Les capacités seront utilisées plus tard pour le recalage électrique du modèle EF.

Fréquence (Hz)	Capacité (nF)			Résistance (kOhms)		
	patch gauche	patch droit	Poutre	patch gauche	patch droit	Poutre
100	50.4	46.74	25.01	1690	3000	5000

Table 3-4 : Capacités et résistances mesurées des patches et de la poutre

3.2.2 Acquisitions

Deux types d'expériences ont été effectués : dans les premières, les mesures ont été effectuées dans la direction Z, (cf. **Figure 3-5**). Elles ont permis d'accéder aux modes 1, 3 et 4 ; dans les deuxièmes, les mesures ont été effectuées dans la direction Y, (cf. **Figure 3-5**). Elles ont permis d'accéder au mode 2.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
f_{co} (Hz)	419.85	1448	1856.85	2989.8
ξ_{co} (%)	0.24	2.4	1.5	0.7
f_{cc} (Hz)	417.81	1448	1856.61	2955.43
ξ_{cc} (%)	0.26	2.4	1.5	0.74
K^2 (%)	0.98	0	0.03	2.34
K (%)	9.91	0	1.61	15.3

Table 3-5: Récapitulatif des fréquences, amortissements mesurés et CCEM dans les deux configurations CO et CC

Les résultats sont présentés mode par mode et systématiquement pour les deux configurations circuit ouvert et circuit fermé (**Figure 3-8** à **3-11**). Pour tous ces résultats, la fréquence propre et l'amortissement visqueux dans les deux configurations sont calculés. Ces résultats sont résumés dans la **Table 3-5**. Ils montrent qu'il est difficile de minimiser l'amortissement pour les modes 2 et 3 qui sont des modes de flexion dans le plan de la poutre et de torsion. Ce constat implique une difficulté quant à la précision de la mesure de la fréquence et impacte le calcul du coefficient de couplage notamment pour le mode 3.

Les résultats des mesures permettent de post-traiter le calcul du coefficient de couplage électromécanique (CCEM) à partir des fréquences CC et CO. La **Table 3-5** donne les résultats de la campagne d'essai. Le mode 1 et le mode 4 sont des modes de flexion dans la direction Z. Pour ces modes, le coefficient de couplage est assez élevé, ce qui s'explique par la taille des patches par rapport à celle de la poutre. Le mode 3 est un mode de torsion. Le coefficient de couplage électromécanique mesuré pour ce mode est très faible. Enfin le mode 2 est un mode de flexion suivant Y, il est totalement découplé.

Conformément à nos attentes, cette nouvelle campagne expérimentale a permis d'obtenir des coefficients de couplages plus élevés grâce à une géométrie de poutre plus courte et plus épaisse. D'autre part, d'après la **Figure 3-8** et la **Figure 3-11**, il est clair que les flexions dans la direction Z (1^{er} et 4^{ème} modes) sont couplées, avec des FRF en CC et CO bien espacées en particulier pour le 4^{ème} mode, tandis que la flexion dans la direction Y (dans le plan) (2^{ème} mode) et la torsion (3^{ème} mode) sont découplées puisque leurs FRF en CC et CO sont coïncidentes. Les fréquences propres en CC et CO des modes 1 à 4 et leurs amortissements modaux correspondants, ont été extraits respectivement de la **Figure 3-8** à la **Figure 3-11** et le CCEM effectif calculé avec la relation (2.8) sont récapitulés dans la **Table 3-5**. Cette dernière confirme les résultats précédents des **Figure 3-8** à **3-11** ; c'est-à-dire, les modes découplés sont fortement amortis, tandis que les modes couplés ont des coefficients d'amortissement modaux moins importants; il n'était pas possible de réduire davantage l'amortissement. Les modes de flexion dans la direction Z ont un couplage important, tandis que le mode de flexion dans la direction Y et le mode de torsion sont découplés. Expérimentalement, le

dernier mode avait une mauvaise précision de mesures ; cependant une autre campagne utilisant un capteur laser avait confirmé que ce mode est en fait découplé.

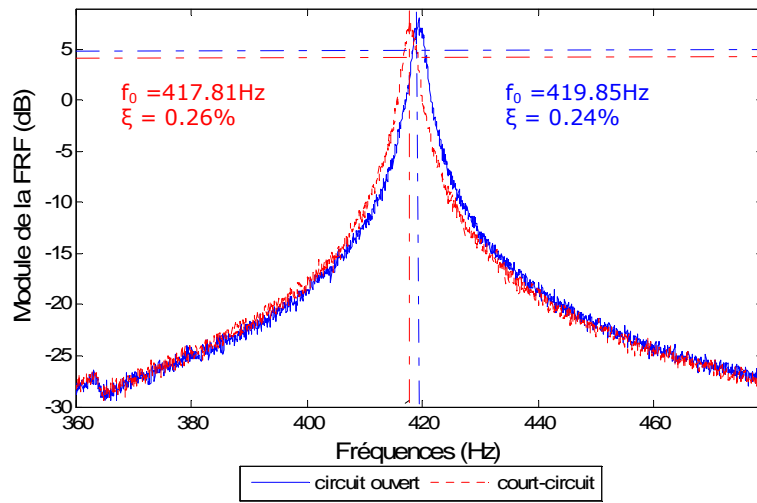


Figure 3-8: FRF pour le mode 1 en circuit ouvert et en court-circuit

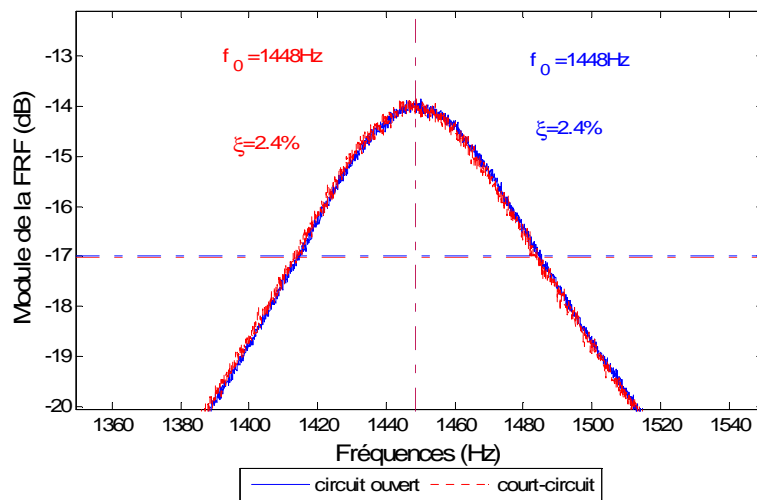


Figure 3-9 : FRF pour le mode 2 en circuit ouvert et en court-circuit

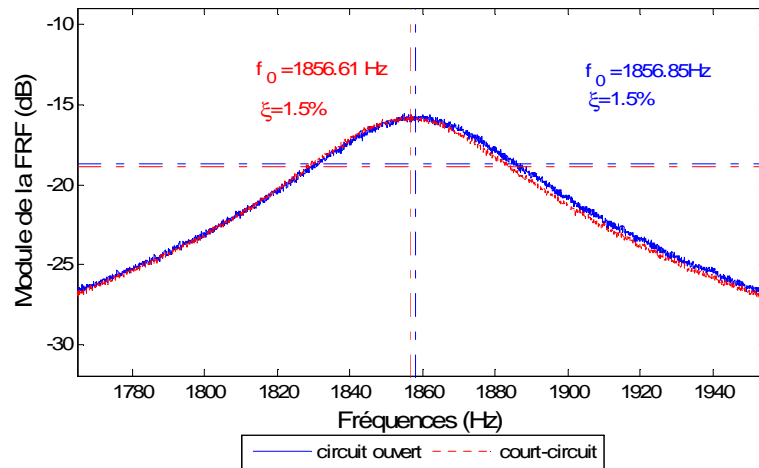


Figure 3-10 : FRF pour le mode 3 en circuit ouvert et en court-circuit

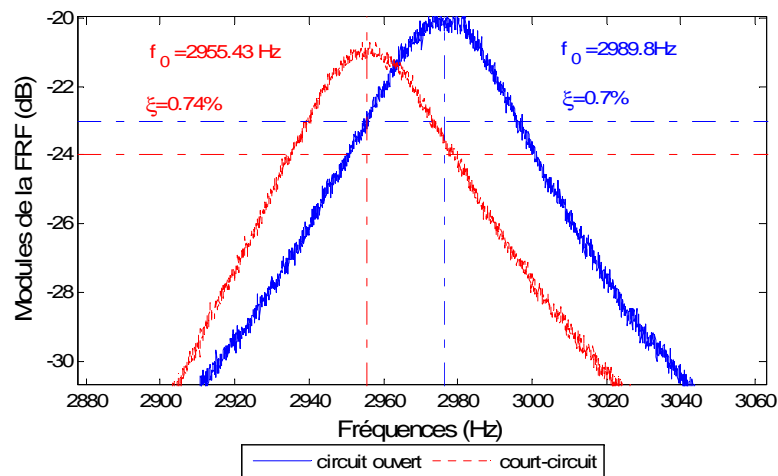


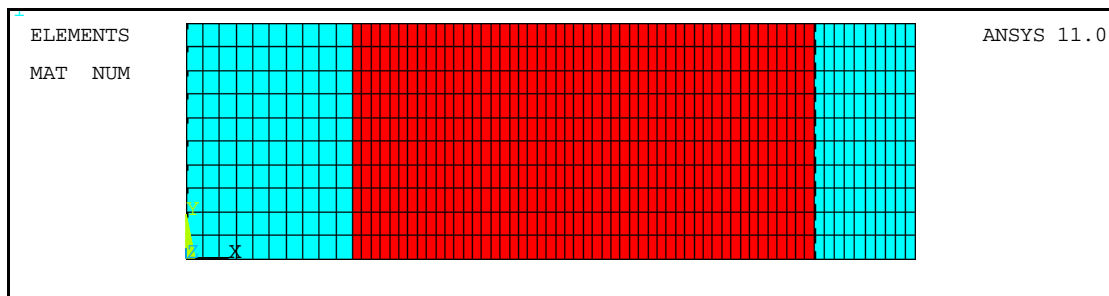
Figure 3-11 : FRF pour le mode 4 en circuit ouvert et en court-circuit

3.3 Calculs par EF 3D du CCEM effectif de la poutre courte

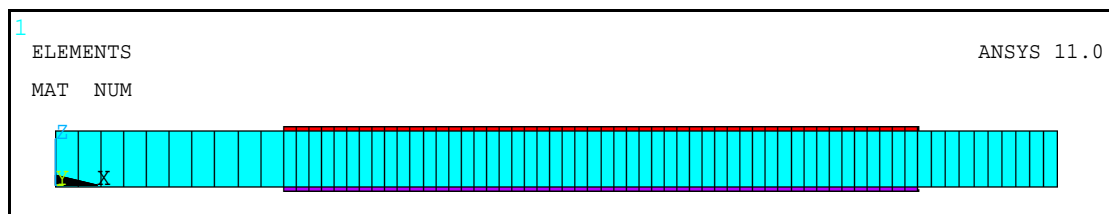
Le maillage de la structure adaptative encastree-libre, presentee dans la **Figure 3-5**, est realise dans Ansys[®] en utilisant des EF quadratiques a 20 noeuds, comme indique dans la **Table 3-6** et illustre dans la **Figure 3-12**. Les EF SOLID186 et SOLID226, ont ete selectionnes respectivement pour la structure elastique et les patches piezoceramiques. Le modele EF a 1700 elements et 9667 noeuds. L'option de l'integration reduite (IR) a ete activee pour l'EF elastique, car Ansys[®] l'utilise par defaut, pour les EF piezo-electriques couplees.

Partie maillée	Paramètre (Figure 3-5)	Dimension (mm)	Nombre d'éléments	Taille de l'élément (mm)	Total
Poutre	L1	18	10	1.8	1700 Eléments 9667 Nœuds
	L2	11	10	1	
	L3	50	50	1.1	
	B	25	10	2.5	
	H	3.9	1	3.9	
Patch	L2	50	50	1	
	B	25	10	2.5	
	H	0.3	1	0.3	

Table 3-6 : Géométrie et discrétisation par EF de la poutre de la Figure 3-5



(a)



(b)

Figure 3-12 : Vue de la structure maillée (a) dans le plan XY, (b) dans le plan XZ

L'application des conditions limites électriques, CC et CO, peut être réalisée dans ANSYS® dans l'interface graphique ou dans le script en sélectionnant les nœuds des électrodes sur lesquels les conditions limites électriques doivent être appliquées. En court circuit, un potentiel nul est appliqué à l'ensemble des nœuds sur les faces des électrodes et en CO, le plus commun est de n'appliquer aucune condition électrique. Cependant, pour des raisons physiques, la condition d'équipotentialité doit être ajoutée par le couplage des nœuds de chaque face des patchs. Les interfaces patch-poutre sont court-circuitées.

3.3.1 Résultats numériques préliminaires

Une simulation préliminaire par EF du modèle non amorti et non recalé est considérée en premier. Les résultats correspondant aux quatre premiers modes sont représentés dans la **Figure 3-13** pour la distribution du potentiel électrique sur les électrodes des patchs en CO avec et sans la prise en compte de l'équipotentialité et dans la **Table 3-7** pour les fréquences propres en CO avec équipotentialité et CC et le CCEM effectif défini par la relation (2.8).

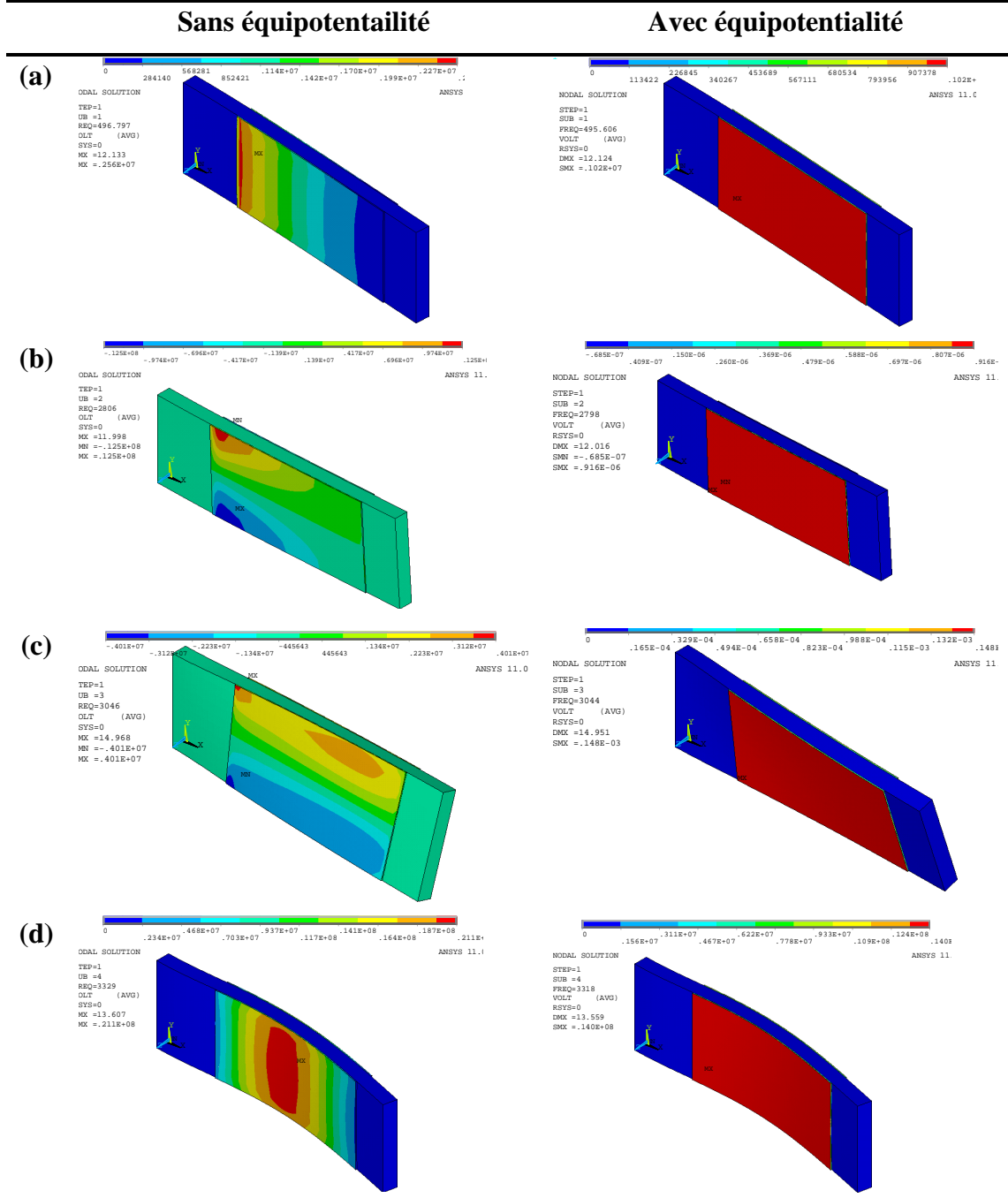


Figure 3-13 : Distribution du potentiel électrique sur les électrodes des patches pour les quatre 1^{er} modes sans et avec équipotentialité : (a) 1^{er} mode de flexion transverse (x-z), (b) 1^{er} mode de flexion dans le plan (x-y), (c) 1^{er} mode de torsion, (d) 2^{ème} mode de flexion transverse (x-z)

Mode (Type)	1 Flexion 1 (x-z)	2 Flexion 1 (x-y)	3 Torsion 1	4 Flexion 2 (x-z)
f_{coep} (Hz)	495.61	2797.9	3044.1	3317.7
f_{cc} (Hz)	493.07	2797.9	3044.1	3249
K^2 (%)	1.03	0	0	4.27
K (%)	10.16	0	0	20.67
Erreur K (%)	2.59	-	-	35.16

Table 3-7 : Fréquences propres et CCEM effectif (sans recalages) pour la poutre courte en PO

Il est évident que l'homogénéité de la distribution du potentiel électrique sur les électrodes des patches est respectée si l'équipotentialité est prise en compte (voir **Figure 3-13**) ; en plus, les fréquences propres numériques sont très différentes de celles mesurées, en particulier pour les trois premiers modes, contrairement au CCEM effectif numérique qui est satisfaisant, sauf pour le 4^{ème} mode. Le mode 3 est découplé numériquement (voir **Figure 3-14**). Les principales raisons causant cette différence, pourraient être la souplesse de l'encastrement expérimental comparée à la raideur de l'encastrement modélisé et la négligence de l'amortissement. Pour atteindre une meilleure corrélation essai/modèle EF, le CCEM sera recalé ultérieurement.

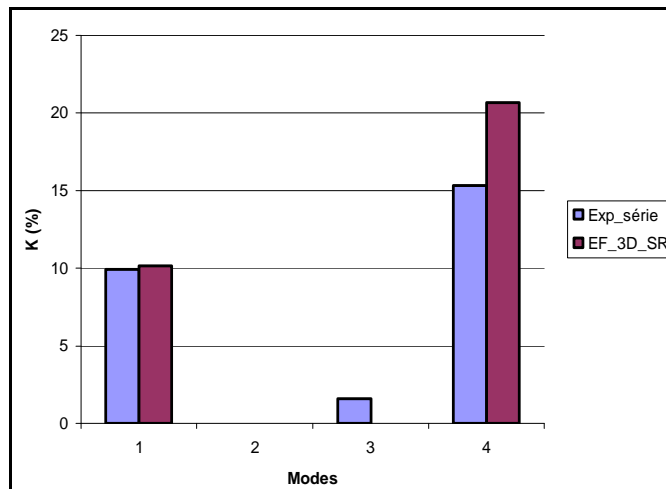


Figure 3-14 : Comparaison essais-EF 3D (sans recalages) du CCEM (%) effectif

3.3.2 Autres méthodes d'évaluation du CCEM de la poutre courte

Le CCEM effectif de la poutre courte est calculé de deux manières différentes. La première consiste à utiliser les fréquences de la poutre nue (sans patches piézoélectriques) et le CCEM des PZT, et la seconde consiste à utiliser les propriétés en CC et CO des patches et à les modéliser par des EF purement élastiques (voir section 2.3 du chapitre 2).

3.3.2.1 Méthode approchée d'évaluation du CCEM

La poutre courte « nue » est modélisée en 3D dans Ansys[®] en utilisant l'élément quadratique SOLID186. Les mêmes conditions limites mécaniques appliquées à la poutre instrumentée sont alors appliquées à la poutre « nue ». Les fréquences propres f_{poutre} sont extraites suite à l'analyse modale du modèle EF et présentées dans la **Table 3-8**. Le CCEM défini par la relation (2.18) est calculé pour les quatre premiers modes en fonction du CCEM en extension k_{31} , de la fréquence propre de la poutre instrumentée

en CC, f_{cc} , et de la fréquence propre de la poutre « nue » f_{poutre} . Les résultats obtenus sont comparés aux valeurs expérimentales mesurées dans la **Table 3-8**. Les erreurs relatives pour les fréquences et pour le CCEM sont également présentées.

	Mode	f_{cc} (Hz)	f_{poutre} (Hz)	K^2_{poutre} (%)	K_{poutre} (%)	K (%)
Expérience	Flexion 1 (x-z)	417.81	450.04	2.24	14.96	9.91
	Flexion 1 (x-y)	1448	1646.61	4.09	20.23	0
	Torsion 1	1856.61	2317.81	7.80	27.92	1.61
	Flexion 2 (x-z)	2955.43	3126.96	1.67	12.91	15.30
EF 3D sans recalages	Flexion 1 (x-z)	493.07	518.37	1.47	12.12	10.16
	Flexion 1 (x-y)	2797.9	3061.2	2.757	16.59	0
	Torsion 1	3044.1	3161.3	1.10	10.47	0
	Flexion 2 (x-z)	3249	3209.6	0.34	5.80	20.67
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1 (x-z)	18.01	15.18	34.32	18.95	2.59
	Flexion 1 (x-y)	93.22	85.91	32.77	18.01	-
	Torsion 1	63.96	36.39	85.95	62.51	-
	Flexion 2 (x-z)	9.93	2.64	79.82	55.08	35.16

Table 3-8 : Fréquences propres et CCEM sans recalage par la méthode approchée

L'histogramme de la **Figure 3-15** confirme les erreurs calculées dans la **Table 3-8**; les modes 2 et 3 sont couplés avec la méthode d'évaluation du CCEM (2.18) expérimentalement et en EF 3D. Le CCEM de la poutre « nue » est surestimé pour les trois premiers modes et il est moins important que le CCEM (2.8) pour le 4^{ème} mode.

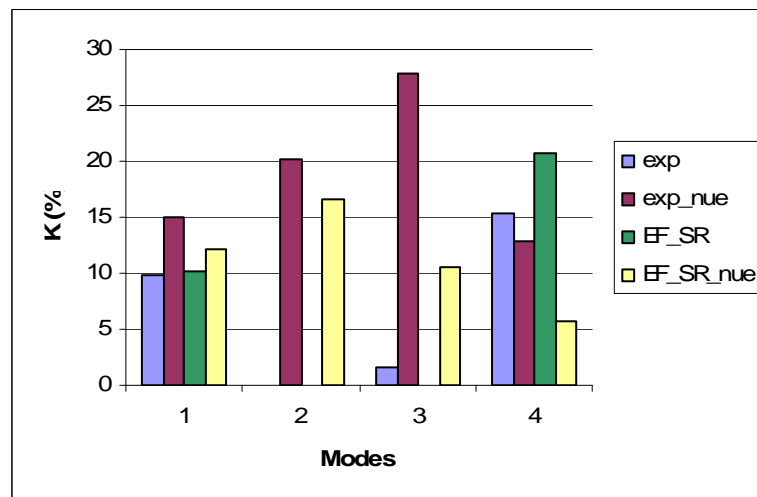


Figure 3-15 : Comparaison de K (%) et K_{poutre} (%) pour les quatre modes (sans recalage)

3.3.2.2 Nouvelle méthode d'évaluation du CCEM

Dans cette approche, le champ électrique est condensé entre les lois (forme-e) du comportement piézoélectrique inverse et direct pour aboutir à la relation (2.20). Les patchs sont maintenant considérés purement élastiques et l'élément fini SOLID 186 est utilisé lors de la modélisation de la structure dans Ansys® pour la poutre courte et les deux patchs. Les résultats de l'analyse modale sont présentés dans la **Table 3-9**. Les fréquences propres f_D (Hz) proviennent de la condensation du champ électrique en CO et correspondent à celles d'une structure purement élastique en utilisant la matrice C^D pour les patchs. La fréquence propre f_E (Hz) est équivalente à f_{CC} (Hz) pour la poutre instrumentée sans considérer le couplage électromécanique en utilisant seulement C^E pour les patchs. Le coefficient de couplage est ici défini par la relation (2.21).

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{CO} (Hz)	K_{exp}^2 (%)	K_{exp} (%)
Expérience	Flexion 1 (x-z)	417.81	419.85	0.98	9.91
	Flexion 1 (x-y)	1448	1448	0	0
	Torsion 1	1856.61	1856.85	0.03	1.61
	Flexion 2 (x-z)	2955.43	2989.8	2.34	15.30
	Mode	f_E (Hz)	f_D (Hz)	K_D^2 (%)	K_D (%)
EF 3D	Flexion 1 (x-z)	492.99	496.83	1.56	12.51
	Flexion 1 (x-y)	2797.8	2812.9	1.08	10.40
	Torsion 1	3043.8	3219.5	11.88	34.46
	Flexion 2 (x-z)	3248.7	3330.2	5.08	22.54
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1 (x-z)	18	18.33	59.34	26.23
	Flexion 1 (x-y)	93.22	94.26	-	-
	Torsion 1	63.94	73.38	-	-
	Flexion 2 (x-z)	9.92	11.38	117.16	47.36

Table 3-9 : Fréquences propres et CCEM sans recalage par la nouvelle méthode

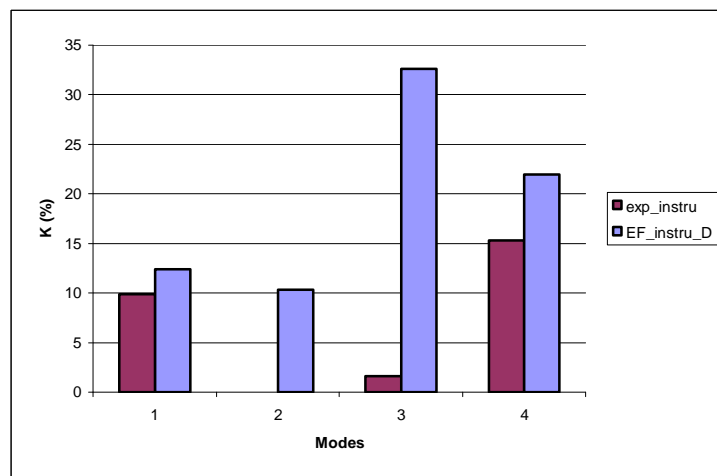


Figure 3-16 : Comparaison de K_{exp} (%) et K_D (%) pour les 4 modes (sans recalage)

La nouvelle approche d'évaluation du CCEM (2.21) a rendu les modes 2 et 3 couplés et augmenté considérablement la valeur du K_D (%), par EF 3D, des modes 1 et 4 vu que les erreurs pour ces deux modes sont relativement importantes (voir **Table 3-9** et **Figure 3-16**). On constate aussi un accroissement des fréquences propres, par EF 3D, particulièrement pour les modes 2 et 3. Cette différence des résultats constatée pour les trois méthodes d'évaluation du CCEM effectif incite à recalculer le modèle numérique.

3.4 Recalage électromécanique avec équipotentialité

Le modèle EF est recalé de trois façons : d'abord, mécaniquement, en assouplissant l'encastrement numérique en utilisant des ressorts linéaires dont les rigidités dans les trois directions de déplacements sont ajustées telle que les différences entre les fréquences propres expérimentales et numériques en CC soient réduites au minimum; ensuite, électriquement, en utilisant les capacités à déformation constante mesurées de chaque patch pour recalculer la permittivité à déformation constante; finalement, électromécaniquement en combinant les deux méthodes précédentes. Les trois recalages seront effectués avec la prise en compte de l'équipotentialité. Les deux structures, poutre longue et poutre courte, seront étudiées dans cette section.

3.4.1 Recalages de la poutre longue

La poutre longue a été jusqu'ici étudiée sans équipotentialité et sans recalages ; pour compléter cette étude, une évaluation du CCEM (2.8) avec les trois types de recalages s'avère nécessaire à fin d'approcher au mieux les essais et valider les résultats numériques trouvés.

3.4.1.1 Recalage mécanique

Le recalage mécanique (RM) a été effectué d'abord avec le logiciel Abaqus[®]. Pour recalculer le modèle numérique, il est nécessaire de bloquer seulement les deux translations dans le plan transverse. La translation dans la direction longitudinale de la poutre est libre. Un ressort est ajouté au DDL libre dont la raideur est distribuée sur toute la face en utilisant la fonction Spring / Dashpots d'Abaqus[®] (voir **Figure 3-17**). Cette modification permet de pivoter autour de l'axe Y; ainsi l'encastrement est moins raide et les fréquences propres sont plus basses.

Différentes raideurs nodales k_n ont été testées. L'objectif est d'approcher le plus précisément possible les premières fréquences propres en connexions série et parallèle. Les résultats obtenus sont récapitulés dans la **Table 3-10**.

Mode	Connexion parallèle				Connexion série				Erreur (%)					
	f_{cc} (Hz) Exp	f_{cc} (Hz) EF	RM	Erreur (%)	f_{cc} (Hz) Exp	f_{cc} (Hz) EF	RM	Erreur (%)						
	$k_1 = 2$ MN/m	$k_2 = 2.05$ MN/m	k_1	k_2	$k_3 = 2.45$ MN/m	$k_4 = 2.47$ MN/m	$k_5 = 2.48$ MN/m	$k_6 = 2.5$ MN/m	k_3	k_4	k_5	k_6		
1	26.09	26.027	26.092	0.24	0	26.56	26.534	26.552	26.562	26.58	0.1	0.030	0.08	
2	161.04	158.79	159.08	1.40	1.22	165.63	161.1	161.19	161.24	161.32	2.74	2.68	2.65	2.60

Table 3-10 : Fréquences propres avec RM pour les différentes raideurs nodales k_n testées dans Abaqus®

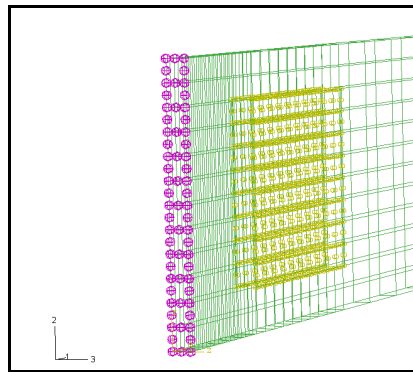


Figure 3-17 : Recalage mécanique dans Abaqus®

Les raideurs nodales sélectionnées sont respectivement k_2 et k_5 pour les connexions parallèles et séries, elles sont appliquées dans Abaqus® et Ansys®. Les résultats des CCEM (%) obtenus sont récapitulés dans la **Table 3-11** et comparés aux résultats EF 3D sans RM et aux expérimentaux dans la **Table 3-12**.

Connexion	Mode	Abaqus®			Ansys®		
		f _{COep} (Hz)	f _{cc} (Hz)	K _{ep} (%)	f _{COep} (Hz)	f _{cc} (Hz)	K _{ep} (%)
Parallèle k ₂ = 2.05 MN/m	1	26.209	26.092	9.48	26.208	26.089	9.56
	2	159.16	159.08	3.17	158.94	158.86	3.17
	3	333.56	333.56	0	333.44	333.44	0
	4	441.86	441.86	0	438.91	438.91	0
	5	444.01	443.9	2.23	443.01	442.9	2.23
	6	880.77	878.86	6.6	877.38	875.45	6.64
Série k ₅ = 2.48 MN/m	1	26.685	26.562	9.63	26.684	26.558	9.75
	2	161.34	161.24	3.52	161.12	161.01	3.70
	3	343.25	343.25	0	343.12	343.12	0
	4	442.42	442.42	0	439.47	439.47	0
	5	448.22	448.14	1.89	447.21	447.13	1.89
	6	886.41	884.64	6.33	883.01	881.22	6.38

Table 3-11 : Fréquences propres et CCEM avec RM dans Abaqus® et Ansys®

Logiciel	Mode	K (%)		K _{ep} (%)		Erreur (%)					
		Expérimental		EF 3D sans RM		EF 3D RM		RM /sans RM		RM/exp	
		Parallèle	Série	Parallèle	Série	Parallèle	Série	Parallèle	Série	Parallèle	Série
Abaqus®	1	8.31	7.77	10.69	10.69	9.48	9.63	11.32	9.92	14.08	23.94
	2	3.34	3.96	6.21	6.21	3.17	3.52	48.95	43.32	5.09	11.11
Ansys®	1	8.31	7.77	10.82	10.82	9.56	9.75	11.65	9.89	15.04	25.48
	2	3.34	3.96	6.31	6.31	3.17	3.70	49.76	41.36	5.09	6.57

Table 3-12 : Comparaison du CCEM (%) (avec RM) dans Abaqus® et Ansys® pour les deux premiers modes

Les écarts entre le CCEM (%) sans et avec recalage mécanique dans la **Table 3-12** sont relativement importants pour les deux types de connexions et particulièrement pour le second mode. Toutefois, l'écart est plus faible pour la connexion en parallèle pour le même mode entre le CCEM (%) expérimental et recalé. Les **Figure 3-18** et **Figure 3-19** illustrent ces écarts et montrent une réduction du CCEM (%) après recalage mécanique principalement pour le second mode dans Abaqus® et Ansys®.

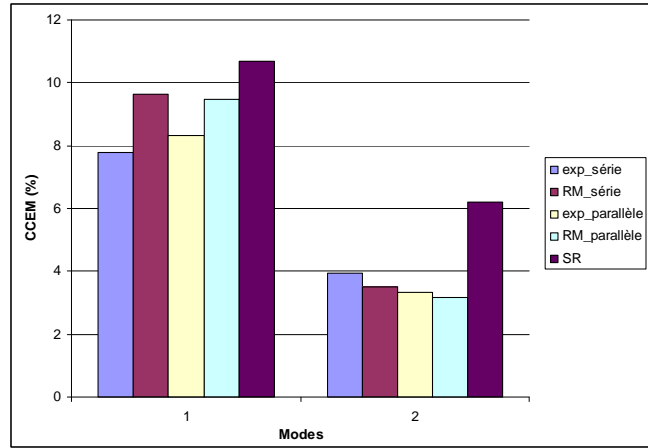


Figure 3-18 : Comparaison du CCEM (%) pour les deux premiers modes dans Abaqus®

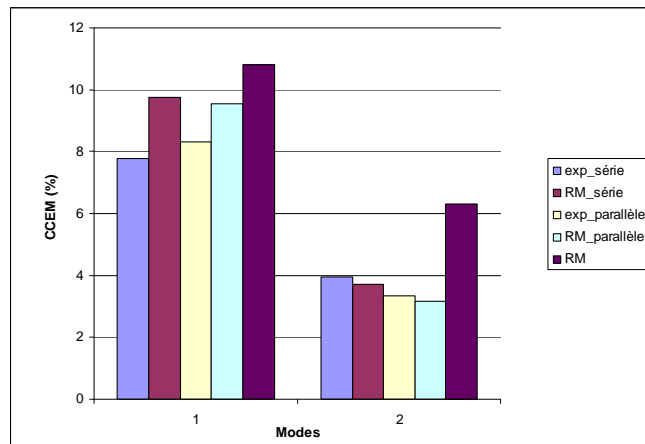


Figure 3-19 : Comparaison du CCEM (%) pour les deux premiers modes dans Ansys®

3.4.1.2 Recalage électrique

Le recalage électrique est obtenu par le calcul de la nouvelle constante de permittivité transverse à déformation constante ϵ_{33}^S en connexion série et parallèle en utilisant la capacité à déformation constante C_p^S mesurée [17] via la relation suivante:

$$\epsilon_{33}^S = \frac{C_p^S h}{A} \tag{3.1}$$

Avec A et h désignant respectivement l'aire d'une électrode et l'épaisseur d'un patch piézo-céramique. Les permittivités transverses à déformation constante pour les connexions parallèle et série sont présentées dans la **Table 3-13** et sont utilisées pour obtenir les fréquences propres (voir **Table 3-14**) avec la prise en compte de

l'équipotentialité pour les six premiers modes dans Ansys® et Abaqus® et le CCEM (%) recalés (Table 3-15).

Connexion électrique des patches	Côté de collage du patch sur la poutre	Capacité à déformation constante mesurée pour chaque patch (nF) [17]	Permittivité à déformation constante (3.1) pour chaque patch (nF/m)
Parallèle	Haut	17.9	8.95
	Bas	17.6	8.8
Série	Haut	23.0	11.5
	Bas	23.8	11.9

Table 3-13 : ϵ_{33}^S recalée pour la simulation par EF utilisant la capacité à déformation constante expérimentale C_p^S

Connexion (polarisation)	Mode	Fréquences propres EF 3D (Hz) avec équipotentialité			
		$f_{coepAnsys}$	$f_{ccAnsys}$	$f_{coepAbaqus}$	$f_{ccAbaqus}$
Parallèle (identique)	1	29.44	29.291	29.44	29.295
	2	176.5	176.2	176.76	176.47
	3	412.41	412.41	412.59	412.59
	4	447.69	447.69	450.7	450.7
	5	482.68	482.64	483.84	483.8
	6	938.14	937.63	941.67	941.17
Série (opposée)	1	29.414	29.291	29.415	29.295
	2	176.45	176.2	176.71	176.47
	3	412.41	412.41	412.59	412.59
	4	447.69	447.69	450.7	450.7
	5	482.68	482.64	483.83	483.8
	6	938.05	937.63	941.58	941.17

Table 3-14 : Fréquences propres numériques utilisant Ansys® et Abaqus® pour la connexion parallèle et série après recalage électrique

Mode	Ansys®			Abaqus®		
	K_{ep}^2 (%)	$K_{parallèle}^2$ (%)	$K_{série}^2$ (%)	K_{ep}^2 (%)	$K_{parallèle}^2$ (%)	$K_{série}^2$ (%)
1	1.17	1.02	0.84	1.14	0.99	0.83
2	0.40	0.34	0.28	0.40	0.33	0.27
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01
6	0.12	0.11	0.09	0.12	0.11	0.09
	K_{ep} (%)	$K_{parallèle}$ (%)	$K_{série}$ (%)	K_{ep} (%)	$K_{parallèle}$ (%)	$K_{série}$ (%)
1	10.82	10.10	9.18	10.69	9.96	9.10
2	6.31	5.84	5.33	6.21	5.74	5.22
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.11
6	3.52	3.30	2.99	3.51	3.26	2.95

Table 3-15 : Comparaison du CCEM² (%) et du CCEM (%) EF 3D dans Ansys® et Abaqus® entre K_{ep}^2 (%), K_{ep} (%) et K^2 (%), K' (%) recalés utilisant la capacité expérimentale (Table 3-13)

Les histogrammes illustrant le CCEM² (%) et le CCEM (%), respectivement dans la **Figure 3-20** et la **Figure 3-21**, montrent que le recalage électrique réduit le coefficient de couplage électromécanique en connexion série et parallèle pour les deux premiers et 6^{ème} modes calculés par Ansys® et Abaqus® ; cependant, ce recalage n'a pas influencé le 5^{ème} mode en connexion parallèle et série qui est resté quasi-constant (voir **Table 3-15**).

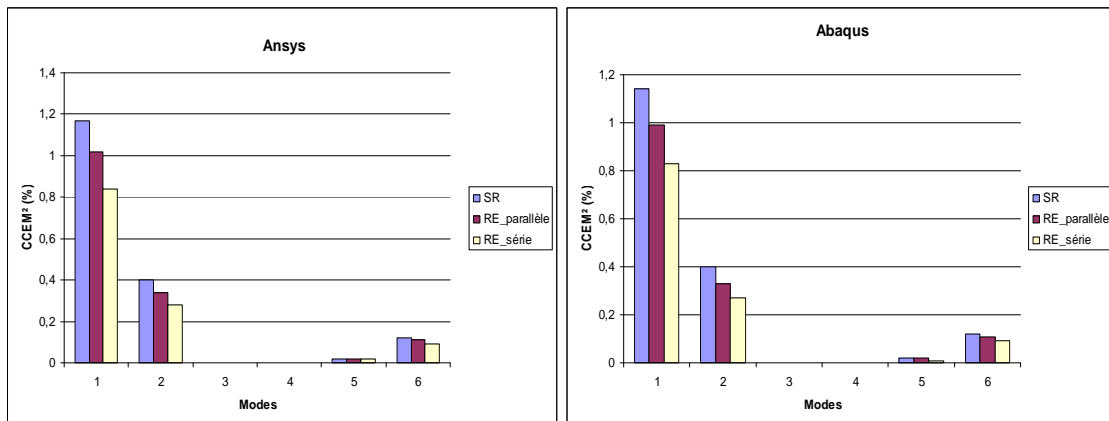


Figure 3-20 : CCEM² (%) recalé dans Ansys® et Abaqus® utilisant les capacités expérimentales (Table 3-13)

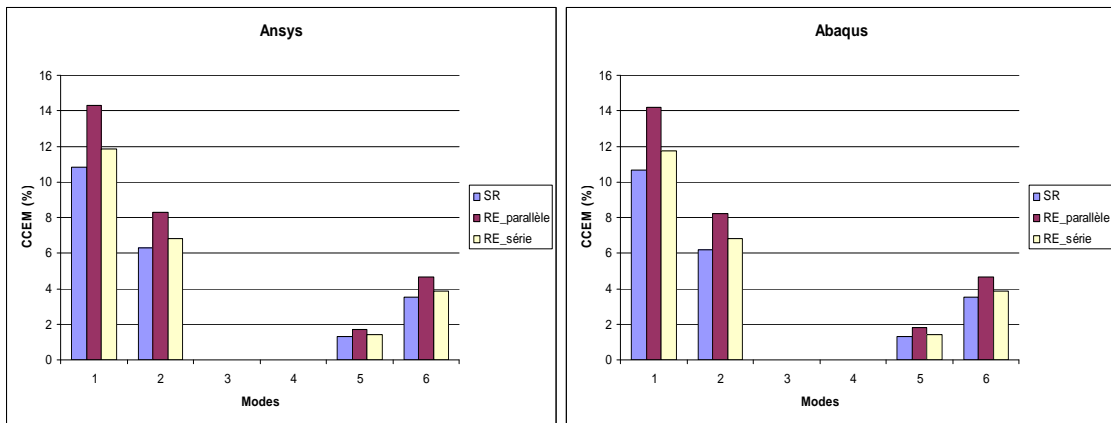


Figure 3-21 : CCEM (%) recalé dans Ansys® et Abaqus® utilisant les capacités expérimentales (Table 3-13)

Le CCEM (%) numérique, avec la prise en compte de l'équipotentialité en CO, recalé électriquement dans Ansys® et Abaqus® est ensuite comparé au CCEM (%) expérimental pour les deux connexions série et parallèle pour les deux premiers modes dans la Figure 3-22. Il dépasse le CCEM (%) expérimental pour les deux premiers modes.

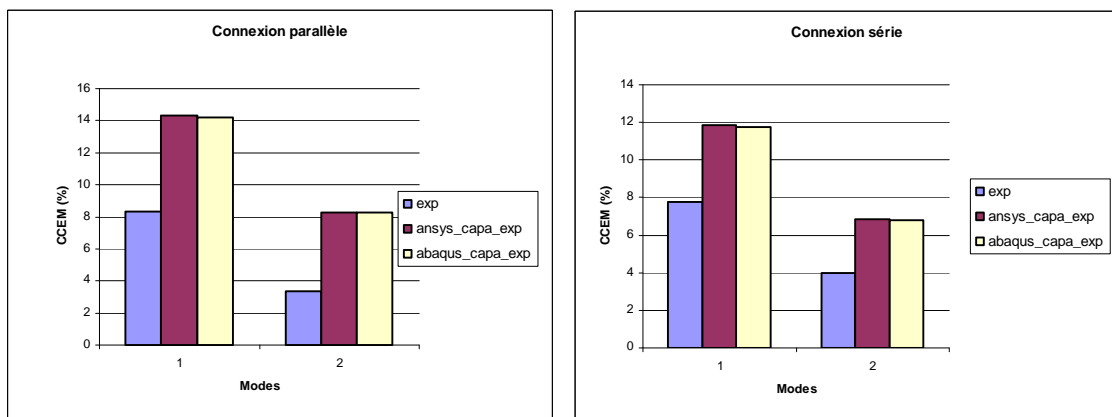


Figure 3-22 : Comparaison du CCEM (%) après RE en connexion parallèle et série pour les deux premiers modes

3.4.1.3 Recalage électromécanique

Les recalages mécaniques et électriques réalisés précédemment sont maintenant effectués simultanément dans les logiciels Ansys® et Abaqus® pour approcher au mieux les résultats expérimentaux et valider le modèle EF. Les résultats de ce recalage sont

présentés dans la **Table 3-16** et la **Table 3-17** respectivement pour les fréquences propres et le CCEM (%).

Connexion	Mode	Abaqus®			Ansys®		
		f_{coep} (Hz)	f_{cc} (Hz)	K_{ep} (%)	f_{coep} (Hz)	f_{cc} (Hz)	K_{ep} (%)
Parallèle $k_2 = 2.05$ MN/m $C_p^s = 17.9/17.6$ nF	1	26.194	26.092	8.85	26.174	26.088	8.13
	2	159.15	159.08	2.97	158.92	158.86	2.75
	3	333.56	333.56	0	333.44	333.44	0
	4	441.86	441.86	0	438.91	438.91	0
	5	443.99	443.9	2.02	442.98	442.9	1.91
	6	880.52	878.85	6.17	876.83	875.44	5.64
Série $k_5 = 2.48$ MN/m $C_p^s = 23/23.8$ nF	1	26.65	26.561	8.19	26.649	26.558	8.29
	2	161.31	161.24	2.95	161.09	161.01	3.15
	3	343.25	343.25	0	343.12	343.12	0
	4	442.42	442.42	0	439.47	439.47	0
	5	448.2	448.14	1.64	447.19	447.13	1.64
	6	885.91	884.63	5.38	882.51	881.22	5.41

Table 3-16 : Fréquences propres et CCEM (%) après recalage électromécanique dans Ansys® et Abaqus® en connexions série et parallèle

Mode	K (%)		K_{ep} (%) EF 3D avec REM				Erreur (%)			
	expérimental		Abaqus®		Ansys®		Abaqus®		Ansys®	
	PI	PO	PI	PO	PI	PO	PI	PO	PI	PO
1	8.31	7.77	8.85	8.19	8.13	8.29	6.50	5.41	2.17	6.69
2	3.34	3.96	2.97	2.95	2.75	3.15	11.08	25.5	17.66	20.45

Table 3-17 : Comparaison du CCEM (%) pour les deux premiers modes

Le CCEM (%) EF 3D après REM ne dépasse le CCEM (%) expérimental que pour le premier mode en connexion parallèle dans Abaqus®. Une amélioration notable de la corrélation essai/modèle peut être remarquée des **Table 3-17** et **Figure 3-23**.

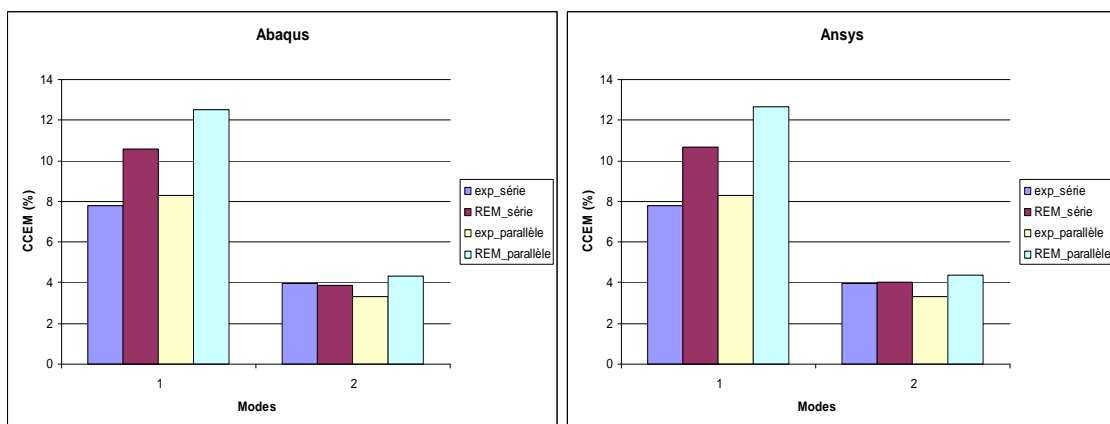


Figure 3-23 : Comparaison du CCEM (%) pour les deux 1^{er} modes dans Abaqus® et Ansys®

3.4.2 Recalages de la poutre courte

Les mêmes recalages effectués pour la poutre longue avec la prise en compte de l'équipotentialité, seront appliqués à la poutre courte en minimisant l'erreur (%) des fréquences en CC pour le recalage mécanique et en CO pour le recalage électrique afin d'approcher les valeurs expérimentales des CCEM pour les quatre modes.

3.4.2.1 Recalage mécanique

Le recalage mécanique du modèle EF de la poutre courte consiste à remplacer l'encastrement à l'extrémité de la poutre par des ressorts linéaires. Pour chaque nœud de la face sélectionnée, trois ressorts sont placés dans les trois directions x, y et z avec des raideurs différentes. Comme il y a 53 nœuds dans cette face, 159 ressorts sont placés au total. Les extrémités libres des ressorts sont encastrées (voir **Figure 3-24**).

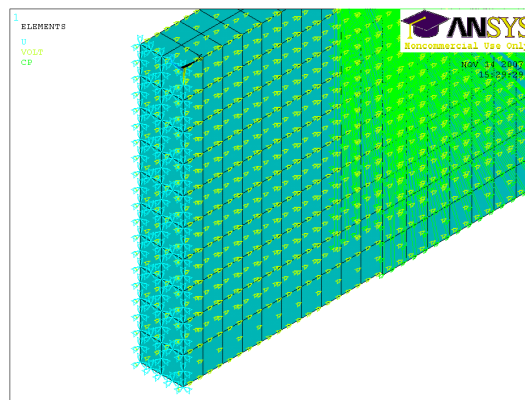


Figure 3-24 : Recalage mécanique de l'encastrement

Différentes raideurs des ressorts sont testées simultanément dans les trois directions pour approcher les fréquences propres expérimentales en CC. Les raideurs choisies suivant les directions x, y et z sont respectivement $2.7 \cdot 10^7$ N/m, $6.03 \cdot 10^4$ N/m et $1.3 \cdot 10^5$ N/m. Les résultats obtenus avec les raideurs sélectionnées, sont présentés dans la **Table 3-18**.

	Mode	f_{coep} (Hz)	f_{cc} (Hz)
Expérience	Flexion 1 (x-z)	419.85	417.81
	Flexion 1 (x-y)	1448	1448
	Torsion 1	1856.85	1856.61
	Flexion 2 (x-z)	2989.8	2955.43
EF 3D RM	Flexion 1 (x-z)	453.89	452.05
	Flexion 1 (x-y)	1448.2	1448.2
	Torsion 1	2032.6	2032.6
	Flexion 2 (x-z)	2743.7	2699.6
Erreur (%)	Flexion 1 (x-z)	8.11	8.20
	Flexion 1 (x-y)	0.01	0.01
	Torsion 1	9.46	9.48
	Flexion 2 (x-z)	8.23	8.66

Table 3-18 : Fréquences propres après recalage mécanique de la poutre courte dans les trois directions

Suite à ce recalage, il apparaît clairement que la modélisation expérimentale de l'encastrement est la principale source d'erreur étant donné que les fréquences propres en CC et CO_{ep} du modèle EF 3D sont maintenant raisonnablement proches des expérimentales (voir **Table 3-18**), mais légèrement au détriment du premier CCEM modal effectif (voir **Table 3-19** et **Figure 3-25**).

Mode	K_{exp} (%)	Ansys® 3D		Erreur (%)	
		K (%) sans RM	K (%) avec RM	SR/exp	RM/exp
Flexion 1 (x-z)	9.91	10.16	9.03	2.59	8.83
Flexion 1 (x-y)	0	0	0	-	-
Torsion 1	1.61	0	0	-	-
Flexion 2 (x-z)	15.30	20.67	18.15	35.16	18.66

Table 3-19 : Comparaison de K (%) après recalage mécanique du modèle EF 3D

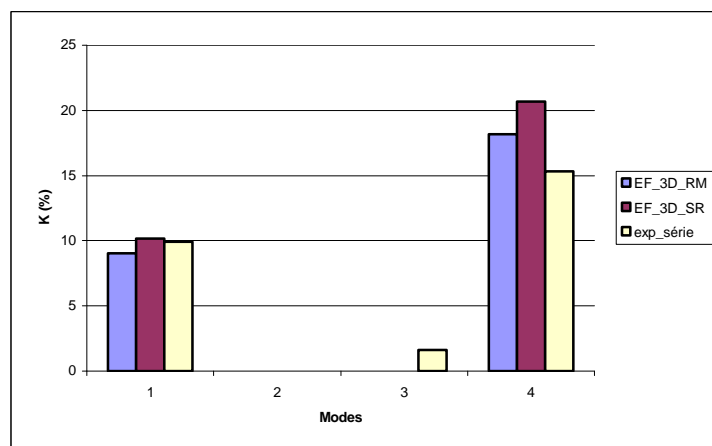


Figure 3-25 : Comparaison avec l'expérience de K (%) sans et après recalage mécanique du modèle EF 3D

3.4.2.2 Recalage électrique

Le recalage électrique du modèle EF 3D de la poutre courte est réalisé par la prise en compte de la constante de permittivité diélectrique calculée avec les capacités des patchs mesurées ((3.1), **Table 3-13**). Après l'utilisation des valeurs résultantes, les fréquences propres après recalage électrique (RE) sont alors obtenues et récapitulées dans la **Table 3-20**. Le CCEM effectif correspondant est comparé à l'expérimental dans la **Table 3-21**.

	Mode	f_{coep} (Hz)	f_{cc} (Hz)
Expérience	Flexion 1 (x-z)	419.85	417.81
	Flexion 1 (x-y)	1448	1448
	Torsion 1	1856.85	1856.61
	Flexion 2 (x-z)	2989.8	2955.43
EF 3D RE	Flexion 1 (x-z)	494.88	493.06
	Flexion 1 (x-y)	2797.9	2797.9
	Torsion 1	3044.1	3044.1
	Flexion 2 (x-z)	3297.7	3248.9
Erreur (%)	Flexion 1 (x-z)	17.87	18.01
	Flexion 1 (x-y)	93.22	93.22
	Torsion 1	63.94	63.96
	Flexion 2 (x-z)	10.30	9.93

Table 3-20 : Fréquences propres après recalage électrique de la poutre courte

Comme prévu, le RE affecte seulement, mais légèrement, les fréquences propres en CO des modes couplés et non pas celles en CC ; d'où, les CCEM des modes couplés uniquement sont aussi touchés et mieux qu'après le RM et particulièrement pour le 4^{ème} mode qui a un CCEM effectif important.

Mode	K_{exp} (%)	Ansys [®] 3D		Erreur (%)	
		K (%) sans RE	K (%) avec RE	SR/exp	RE/exp
Flexion 1 (x-z)	9.91	10.16	8.60	2.59	13.19
Flexion 1 (x-y)	0	0	0	-	-
Torsion 1	1.61	0	0	-	-
Flexion 2 (x-z)	15.30	20.67	17.40	35.16	13.74

Table 3-21 : Comparaison de K (%) après recalage électrique du modèle EF 3D

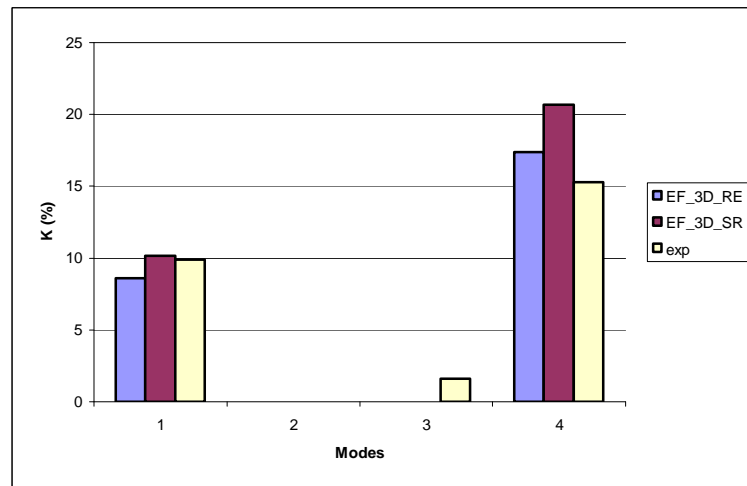


Figure 3-26 : Comparaison avec l'expérience de K (%) avant et après recalage électrique du modèle EF 3D

3.4.2.3 Recalage électromécanique

Le recalage électromécanique du modèle EF 3D est réalisé par la combinaison des deux méthodes, soit mécaniquement, par l'assouplissement de la rigidité de l'encastrement et électriquement, en utilisant les capacités des patches mesurées. Les fréquences propres demeurent avec une erreur raisonnablement acceptable de 9.5 %, sauf pour le 2^{ème} mode (avec seulement 0.01 % d'erreur) (voir **Table 3-22**). Les CCEM correspondants sont présentés dans la **Table 3-23**. De ces derniers, il peut être remarqué que le REM a entraîné une corrélation essai / modèle satisfaisante, en particulier pour le 4^{ème} mode, le plus couplé (avec une erreur de seulement 0.17%) mais aux dépens d'un CCEM moins précis pour le 1^{er} mode.

	Mode	f_{coep} (Hz)	f_{cc} (Hz)
Expérience	Flexion 1 (x-z)	419.85	417.81
	Flexion 1 (x-y)	1448	1448
	Torsion 1	1856.85	1856.61
	Flexion 2 (x-z)	2989.8	2955.43
EF 3D REM	Flexion 1 (x-z)	453.36	452.05
	Flexion 1 (x-y)	1448.2	1448.2
	Torsion 1	2032.6	2032.6
	Flexion 2 (x-z)	2731	2699.5
Erreur (%)	Flexion 1 (x-z)	7.98	8.20
	Flexion 1 (x-y)	0.01	0.01
	Torsion 1	9.46	9.48
	Flexion 2 (x-z)	8.66	8.66

Table 3-22 : Fréquences propres après recalage électromécanique de la poutre courte

Mode	K _{exp} (%)	Ansys® 3D		Erreur (%)	
		K (%) sans RE	K (%) avec REMSR/exp	REM/exp	
Flexion 1 (x-z)	9.91	10.16	7.62	2.59	23.10
Flexion 1 (x-y)	0	0	0	-	-
Torsion 1	1.61	0	0	-	-
Flexion 2 (x-z)	15.30	20.67	15.32	35.16	0.17

Table 3-23 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique du modèle EF 3D

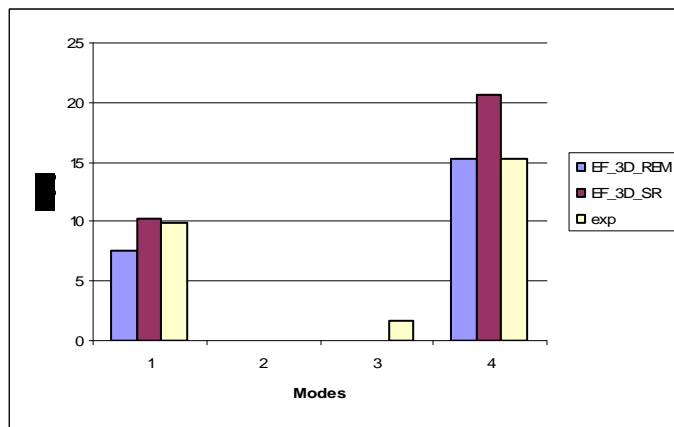


Figure 3-27 : Comparaison de CCEM (%) pour les quatre modes après recalage électromécanique du modèle EF

3.5 Conclusion

La poutre longue a été simulée numériquement dans Ansys® et Abaqus® pour évaluer le coefficient de couplage électromécanique par la méthode des éléments finis avec la prise en compte de l'équipotentialité des électrodes des patches. Les deux types de connexion, parallèle et série, ont été considérées pour le calcul des fréquences propres. Trois recalages ont été réalisés : mécanique, électrique et la combinaison des deux premiers recalages. De l'étude de cette structure on peut conclure que :

- Il est nécessaire d'appliquer l'équipotentialité pour la configuration en CO ; cette condition réduit le CCEM et l'annule pour certains modes.
- L'écart des résultats numériques entre Ansys® et Abaqus® est négligeable, il est ainsi possible d'utiliser l'un des deux logiciels pour ce type d'étude. Le recalage électromécanique du modèle numérique s'avère nécessaire dans les deux codes afin d'approcher les résultats expérimentaux. Le recalage mécanique est indispensable pour que les fréquences propres numériques en CC approchent mieux celles expérimentales ; cependant, le recalage électrique influence les

fréquences propres en CO et sa combinaison avec le recalage mécanique conduit à une corrélation satisfaisante du CCEM (%).

La seconde structure étudiée est différente de la poutre longue puisqu'elle est courte et épaisse et les patchs utilisés sont plus grands et couvrent 65% de la face de la poutre. Cette étude a permis de conclure que lors du recalage mécanique il est nécessaire de recalculer tous les modes retenus afin d'optimiser les résultats. Deux variantes de calcul du coefficient de couplage ont été étudiées : en utilisant les fréquences de la poutre nue et en considérant les patchs purement élastiques mais avec des propriétés modifiées. L'étude de cette structure a montré que :

- L'utilisation des fréquences de la poutre nue ne permet pas de voir le découplage des modes 2 et 3 obtenus expérimentalement par les mesures CC/CO.
- L'utilisation d'éléments élastiques pour les patchs permet d'avoir un coefficient de couplage proche de celui d'une poutre instrumentée avec des patchs piézoélectriques dont l'équipotentialité n'est pas prise en compte.

Ainsi, la meilleure méthode d'évaluation du coefficient de couplage électromécanique rest celle utilisant les fréquences propres en CO et CC. Cette méthode sera utilisée par la suite lors des prochaines études.

Chapitre 4 : Simulations 2D

Les études expérimentales de la poutre longue et de la poutre courte ont validé les modèles EF 3D et les résultats numériques obtenus après les trois types de recalage respectifs des deux structures. Dans une démarche de simplification à des modèles à vocation d'étude de pré-dimensionnement, des simulations par EF en 2D des deux poutres ont été effectuées. Les cas des déformations planes (DP) et des contraintes planes (CP) ont été étudiés. Pour cela, les lois de comportement piézoélectriques et leurs notations dans Ansys® en 3D et 2D contraintes planes et déformations planes seront rappelées. La formule classique (2.8) du CCEM sera utilisée pour évaluer le couplage des différents modes.

4.1 Piézoélasticité plane

L'association des variables primaires (S, E) aux variables duales (T, D) dans un milieu isotherme aboutit aux équations constitutives piézoélectriques en 3D suivantes écrites sous forme contrainte (forme-e) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^E & -\mathbf{e}^t \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\epsilon}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Les matrices d'élasticité, piézoélectrique et de permittivité peuvent être écrites d'une manière plus explicite selon la norme IEEE pour une polarisation transverse ($\vec{P} // \vec{z}$) :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{C}^E] &= \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^E & C_{23}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E \end{bmatrix}, \\
 [\mathbf{e}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } [\boldsymbol{\epsilon}^s] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^s & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^s \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Avec les vecteurs :

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \{E\} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \{S\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix}, \{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

L'ordre utilisé pour ces vecteurs est x, y, z, yz, xz, xy, selon la norme IEEE [2]. Cependant Ansys[®] les ordonne ainsi : x, y, z, xy, yz, xz. Il est alors nécessaire de convertir les matrices ci dessus lors de la définition des propriétés des matériaux dans Ansys[®] en commutant les lignes de données pour les termes de cisaillement ainsi : l'ordre 4, 5 et 6 suivant la norme IEEE devient 6, 4 et 5 pour Ansys[®].

Les lois de comportement 3D pour Ansys[®] s'écrivent pour la polarisation transverse ($\vec{P} // \vec{z}$) :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_6 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^E & C_{23}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_6 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_6 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \in_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \in_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \in_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Pour les analyses en déformations planes et contraintes planes, Ansys[®] impose le plan (x-y) comme étant le plan 2D ; la polarisation transverse est alors le long de l'axe y ($\vec{P} // \vec{y}$). Ainsi les relations (4.4) doivent être remplacées par les relations standards (avec la polarisation $\vec{P} // \vec{z}$), qui subiront une rotation de sorte que la direction de polarisation se trouve le long de l'axe matériau y, et les relations résultantes sont de nouveau réordonnées comme expliqué ci-dessus pour les notations d'Ansys[®]; ce qui conduit aux équations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_6 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{13}^E & C_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^E & C_{33}^E & C_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^E & C_{23}^E & C_{22}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_6 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & e_{33} & 0 \\ 0 & e_{32} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{33} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_6 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \in_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \in_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \in_{22}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

4.1.1 Déformations planes

Le comportement des patchs piézoélectriques en déformations planes (x-y), dont leurs faces supérieures et inférieures sont couvertes d'électrodes, est caractérisé par des déformations transverses négligeables :

$$S_3 = S_4 = S_5 = 0 \quad (4.6)$$

En substituant cette relation dans l'équation (4.5), cette dernière se réduit à :

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}^E S_1 + C_{13}^E S_2 - e_{31} E_2 \\ T_2 &= C_{13}^E S_1 + C_{33}^E S_2 - e_{33} E_2 \\ T_3 &= C_{12}^E S_1 + C_{23}^E S_2 - e_{32} E_2 \\ T_6 &= C_{55}^E S_6 - e_{15} E_1 \\ T_4 &= -e_{24} E_3 \\ T_5 &= 0 \\ D_1 &= e_{15} S_6 + \epsilon_{11}^S E_1 \\ D_2 &= e_{31} S_1 + e_{33} S_2 + \epsilon_{33}^S E_2 \\ D_3 &= \epsilon_{22}^S E_3 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si de plus $E_1 = E_3 = 0$, les lois de comportement (4.7) se réduisent davantage à :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{13}^E & 0 & -e_{31} \\ C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & C_{55}^E & 0 \\ e_{31} & e_{33} & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} T_3 = C_{12}^E S_1 + C_{23}^E S_2 - e_{32} E_2; & T_4 = T_5 = 0 \\ D_1 = e_{15} S_6; & D_3 = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

D'après la relation (4.9), la contrainte normale et le déplacement électrique axial sont non nuls, mais étant donné que leurs conjugués sont nuls, ils ne doivent pas contribuer à l'enthalpie électromécanique. Par conséquent, grâce aux équations (4.6, 4.9), l'équation variationnelle, en 2D, des vibrations libres (de pulsation ω) s'écrit (avec $I = 1, 2, 6$; $\alpha = 1, 2$) :

$$\int_{\Omega} \delta S_I T_I d\Omega - \int_{\Omega} \delta E_2 D_2 d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \delta u_{\alpha} \rho u_{\alpha} d\Omega = 0 \quad (4.10)$$

Avec :

$$S_\alpha = u_{\alpha,\alpha}, S_6 = u_{1,2} + u_{2,1}, u_\alpha = u_\alpha(x, y), E_2 = -\varphi_{,2} \quad (4.11)$$

Considérons le cas simple d'un potentiel électrique φ linéaire à travers l'épaisseur qui conduit à un champ électrique E_2 constant. Dans ce cas, le problème de vibrations libres en CC ($E_2 = 0$) se réduit à un problème élastique pur :

$$\int_{\Omega} \delta S_I T_I d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \delta u_\alpha \rho u_\alpha d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{13}^E & 0 \\ C_{13}^E & C_{33}^E & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

A partir des équations (4.12) et (4.13), on peut conclure que les fréquences propres en CC sont similaires à celles purement élastiques. Si on considère maintenant que le déplacement électrique transverse est uniforme, $D_2 = 0$ approche la condition électrique CO et le problème de vibration libre correspondant est similaire à (4.12) mais avec des constantes élastiques modifiées par la condition électrique CO à partir la relation (4.8) :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^D & C_{13}^D & 0 \\ C_{13}^D & C_{33}^D & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Avec :

$$C_{11}^D = C_{11}^E + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^s}, \quad C_{13}^D = C_{13}^E + \frac{e_{31}e_{33}}{\epsilon_{33}^s}, \quad C_{33}^D = C_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^s} \quad (4.15)$$

Puisque toutes les constantes élastiques en CC sont positives, e_{31} est négatif, e_{33} et ϵ_{33}^s sont positifs, C_{11}^D et C_{33}^D ont augmenté tandis que C_{13}^D a diminué. Par conséquent, les fréquences propres en CO devraient être plus élevés que celles en CC ; cependant, la rigidité de cisaillement dans le plan x-y, C_{55}^E , est inchangée par la condition CO et les modes de cisaillement dans le plan (torsion) devraient être découplés.

Il est essentiel de souligner que les interprétations précédentes sont strictement limitées aux hypothèses ci-dessus et ne tiennent pas compte de la condition d'équipotentialité puisque le problème des valeurs propres en CO de l'équation (4.12) n'a pas de variables électriques sur lesquelles cette condition doit être appliquée.

4.1.2 Contraintes planes

Le comportement des patches piézoélectriques en contraintes planes (x-y), dont leurs faces supérieures et inférieures sont couvertes d'électrodes, est caractérisé par des contraintes transverses négligeables :

$$T_3 = T_4 = T_5 = 0 \quad (4.16)$$

En substituant cette relation dans la relation (4.5), cette dernière s'écrit:

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}^E S_1 + C_{13}^E S_2 + C_{12}^E S_3 - e_{31} E_2 \\ T_2 &= C_{13}^E S_1 + C_{33}^E S_2 + C_{23}^E S_3 - e_{33} E_2 \\ 0 &= C_{12}^E S_1 + C_{23}^E S_2 + C_{22}^E S_3 - e_{32} E_2 \\ T_6 &= C_{55}^E S_6 - e_{15} E_1 \\ 0 &= C_{44}^E S_4 - e_{24} E_3 \\ 0 &= C_{66}^E S_5 \\ D_1 &= e_{15} S_6 + \epsilon_{11}^S E_1 \\ D_2 &= e_{31} S_1 + e_{33} S_2 + e_{32} S_3 + \epsilon_{33}^S E_2 \\ D_3 &= e_{24} S_4 + \epsilon_{22}^S E_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

En extrayant S_3 de la 3^{ème} relation de (4.17), on a :

$$S_3 = \frac{1}{C_{22}^E} \left[e_{32} E_2 - C_{12}^E S_1 - C_{23}^E S_2 \right] \quad (4.18)$$

En remplaçant cette dernière relation dans T_1 , T_2 et D_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(C_{11}^E - \frac{C_{12}^E{}^2}{C_{22}^E} \right) S_1 + \left(C_{13}^E - \frac{C_{12}^E C_{23}^E}{C_{22}^E} \right) S_2 - \left(e_{31} - e_{32} \frac{C_{12}^E}{C_{22}^E} \right) E_2 \\ T_2 &= \left(C_{13}^E - \frac{C_{12}^E C_{23}^E}{C_{22}^E} \right) S_1 + \left(C_{33}^E - \frac{C_{23}^E{}^2}{C_{22}^E} \right) S_2 - \left(e_{33} - e_{32} \frac{C_{23}^E}{C_{22}^E} \right) E_2 \\ T_6 &= C_{55}^E S_6 - e_{15} E_1 \\ 0 &= C_{44}^E S_4 - e_{24} E_3 \\ 0 &= C_{66}^E S_5 \\ D_1 &= e_{15} S_6 + \epsilon_{11}^S E_1 \\ D_2 &= \left(e_{31} - e_{32} \frac{C_{12}^E}{C_{22}^E} \right) S_1 + \left(e_{33} - e_{32} \frac{C_{23}^E}{C_{22}^E} \right) S_2 + \left(\epsilon_{33}^S + \frac{e_{32}^2}{C_{22}^E} \right) E_2 \\ D_3 &= e_{24} S_4 + \epsilon_{22}^S E_3 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si de plus $E_1 = E_3 = 0$, les relations précédentes se réduisent davantage à :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^E & \bar{C}_{13}^E & 0 & \bar{e}_{31}^- \\ \bar{C}_{13}^E & \bar{C}_{33}^E & 0 & \bar{e}_{33}^- \\ 0 & 0 & \bar{C}_{55}^E & 0 \\ \bar{e}_{31}^- & \bar{e}_{33}^- & 0 & \bar{\epsilon}_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ E_2 \end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{cases} T_3 = T_4 = T_5 = 0 \\ D_1 = e_{15} S_6; D_3 = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Avec :

$$\bar{C}_{11}^E = \left(C_{11}^E - \frac{C_{12}^{E^2}}{C_{22}^E} \right), \quad \bar{C}_{13}^E = \left(C_{13}^E - \frac{C_{12}^E C_{23}^E}{C_{22}^E} \right), \quad \bar{C}_{33}^E = \left(C_{33}^E - \frac{C_{23}^{E^2}}{C_{22}^E} \right), \quad \bar{C}_{55}^E = C_{55}^E \quad (4.21)$$

$$\bar{e}_{31}^- = \left(e_{31} - e_{32} \frac{C_{12}^E}{C_{22}^E} \right), \quad \bar{e}_{33}^- = \left(e_{33} - e_{32} \frac{C_{23}^E}{C_{22}^E} \right) \quad (4.22)$$

$$\bar{\epsilon}_{33}^S = \left(\epsilon_{33}^S + \frac{e_{32}^2}{C_{22}^E} \right)$$

La déformation normale et le déplacement électrique axial sont non nuls dans les relations (4.18) et (4.20), mais leurs conjugués sont nuls ; ils ne contribueront donc pas à l'enthalpie électromécanique. Usant des relations précédentes, l'équation variationnelle, en 2D, des vibrations libres s'écrit comme l'équation (4.12).

A noter que les constantes élastiques de la relation (4.21) sont différentes de celles en CO (relation (4.15)). Étant donné que toutes les constantes élastiques, de l'équation (4.21) sont positives, on peut remarquer que les constantes élastiques modifiées en contraintes planes sont inférieures à celles, de la relation (4.8), en déformations planes. On s'attend à ce que les fréquences propres en CC en contraintes planes soient inférieures à celles en déformations planes. D'autre part, puisque e_{31} et e_{32} sont négatifs alors que e_{33} est positif, la relation (4.22) indique que les constantes correspondantes modifiées ont, respectivement, baissé (\bar{e}_{31}^-) et augmenté (\bar{e}_{33}^-). De plus, puisque la constante diélectrique transverse est positive, la constante diélectrique modifiée en contraintes planes a augmenté comparée à celle modifiée en déformations planes (relation (4.8)).

Comme pour les déformations planes, considérons maintenant le cas simple d'un potentiel électrique φ linéaire à travers l'épaisseur qui conduit à $E_2 = 0$ comme condition électrique du type CC ; le problème des vibrations libres correspondant se réduit alors au cas purement élastique de la relation (4.12), mais avec les équations constitutives suivantes :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^E & \bar{C}_{13}^E & 0 \\ \bar{C}_{13}^E & \bar{C}_{33}^E & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Le même commentaire, que celui fait après la relation (4.13), est aussi valide ici. Si on considère maintenant que le déplacement électrique transverse est constant à travers l'épaisseur et uniforme dans le plan, $D_2 = 0$ approche la condition électrique CO et le problème des vibrations libres est le même que celui de l'équation (4.12) mais avec les constantes élastiques modifiées par cette condition électrique :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^D & \bar{C}_{13}^D & 0 \\ \bar{C}_{13}^D & \bar{C}_{33}^D & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Avec

$$\bar{C}_{11}^D = \bar{C}_{11}^E + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^S}, \quad \bar{C}_{13}^D = \bar{C}_{13}^E + \frac{e_{31}e_{33}}{\epsilon_{33}^S}, \quad \bar{C}_{33}^D = \bar{C}_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \quad (4.25)$$

Puisque toutes les constantes élastiques modifiées en CC ont diminué par les hypothèses des contraintes planes (voir le commentaire après (4.22)), \bar{e}_{31} a baissé, \bar{e}_{33} et $\bar{\epsilon}_{33}^S$ ont augmenté, toutes les constantes de (4.25) ont diminué par rapport à celles en DP (4.15). Par conséquent, les fréquences propres en CO en contraintes planes devraient être inférieures à celles en déformations planes. De plus, puisque les fréquences propres en CC en contraintes planes sont également inférieures à celles en déformations planes, on s'attend à ce que le CCEM effectif modal en contraintes planes soit inférieur à celui en déformations planes et probablement à celui en 3D. Il s'agit d'un résultat théorique très intéressant qui doit être confirmé par les simulations 2D suivantes des tests expérimentaux.

4.2 Simulations en déformations planes

Pour créer le modèle EF 2D, le même nombre d'éléments que le modèle EF 3D a été choisi dans le plan (XZ). Les mêmes conditions limites mécaniques et électriques ont été appliquées et l'équipotentialité a été prise en compte. Pour approcher les résultats expérimentaux, trois recalages ont été effectués : des ressorts ont remplacé l'encastrement, des permittivités électriques déduites des mesures des capacités ont été

utilisées et la combinaison des deux recalages précédents. Les résultats trouvés sont comparés aux résultats expérimentaux et à ceux en 3D. Les éléments 2D utilisés pour la poutre en aluminium et les patches en PZT PIC255 sont, respectivement, Plane 183 à 8 nœuds et Plane 223 à 8 nœuds (voir **Figure 4-1**).

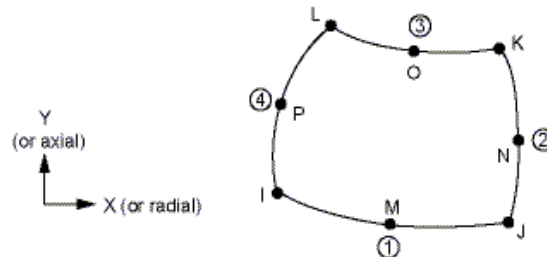


Figure 4-1 : Géométrie des éléments Plane 223 et Plane 183 à 8 nœuds d'Ansys®

Pour ces deux éléments plans, il est possible de choisir le comportement ; en déformations planes (DP) ou en contraintes planes (CP). Le maillage de la poutre longue comporte 87 éléments et 366 nœuds ; un aperçu de la structure maillée est présenté dans la **Figure 4-2**, alors que celui de la poutre courte comprend 170 éléments et 657 nœuds (voir **Figure 3-12-b**).

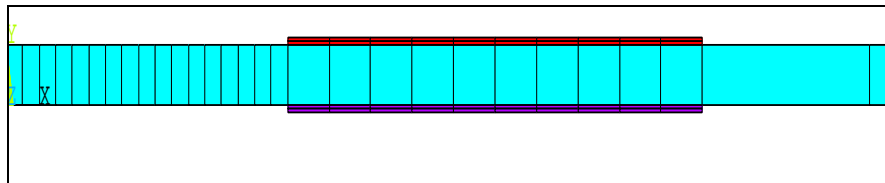


Figure 4-2 : Aperçu (zoom) du maillage de la poutre longue en 2D

Les fréquences propres en CO sont calculées en appliquant la condition de l'équipotentialité. Le CCEM (%) effectif est évalué avec la relation (2.8).

4.2.1 Cas de la poutre longue

Les déformées et le potentiel électrique sont présentés dans la **Figure 4-3** pour les modèles 2D en déformations planes et 3D pour les quatre premiers modes de flexion en appliquant l'équipotentialité sur les électrodes externes et des potentiels nuls aux interfaces (en 2D et 3D). On rappelle que les résultats numériques de la poutre longue en polarisations identiques et opposées sont identiques sans recalages.

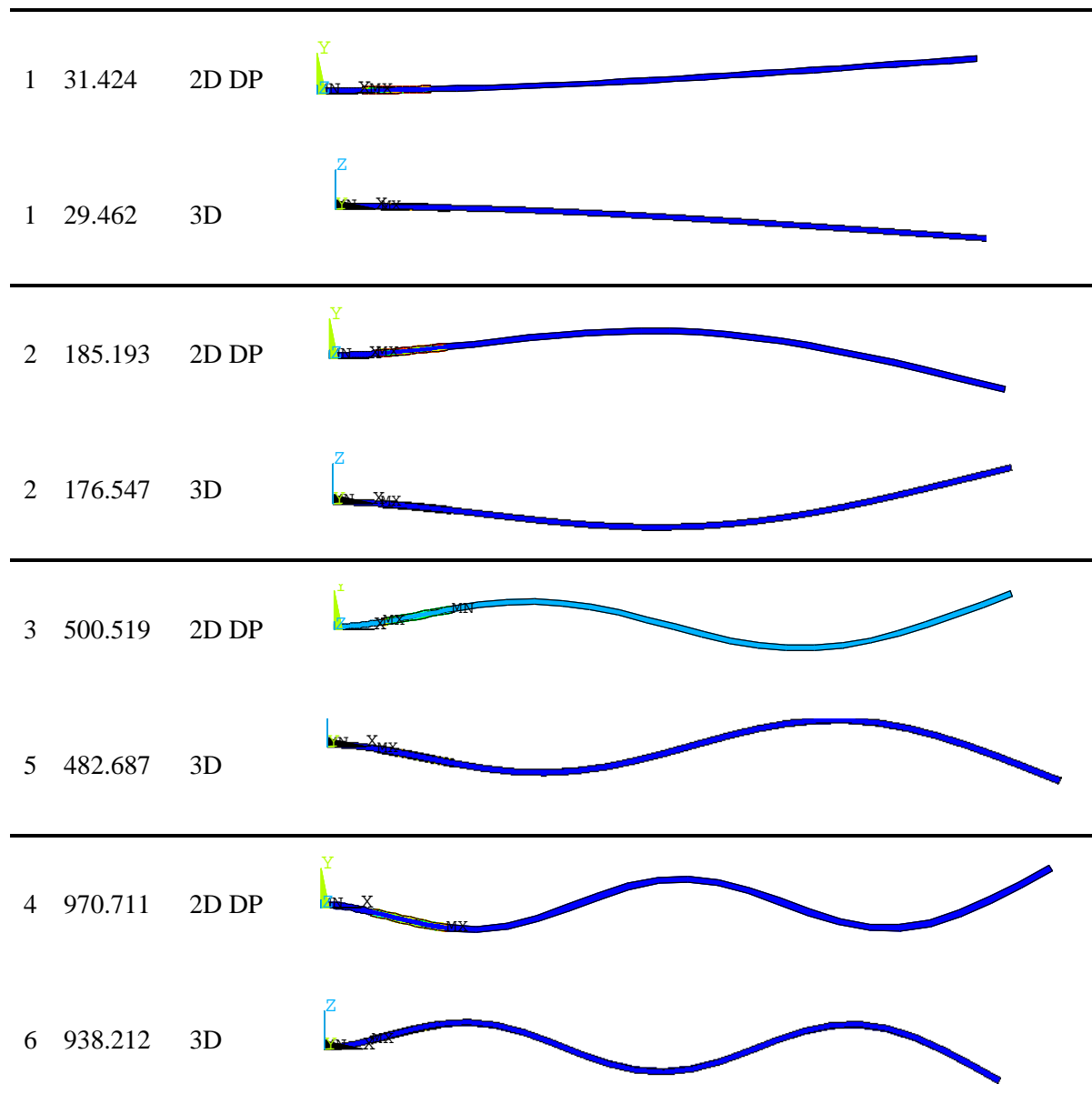


Figure 4-3: Visualisation des déformées et du potentiel électrique du modèle 2D en déformations planes et 3D dans Ansys® pour le cas du CO_{ep} en polarisations opposées

Les résultats obtenus sont comparés aux résultats du modèle EF 3D dans la **Table 4-1** avec les mêmes conditions limites mécaniques et électriques. Les 3^{ème} et 4^{ème} modes 2D correspondent respectivement aux 5^{ème} et 6^{ème} modes 3D (voir **Figure 4-3**).

	Flexion	3D	2D-DP	Ecart (%)
$f_{CO_{ep}}$ (Hz)	1	29.462	31.424	6.66
	2	176.55	185.19	4.89
	3	482.69	500.52	3.69
	4	938.21	970.71	3.46
f_{CC} (Hz)	1	29.291	30.992	5.81
	2	176.20	184.38	4.64
	3	482.65	500.48	3.69
	4	937.63	968.82	3.33
K_{ep}^2 (%)	1	1.17	2.81	-
	2	0.40	0.88	-
	3	0.02	0.02	3.56
	4	0.12	0.39	-
K_{ep} (%)	1	10.82	16.75	54.83
	2	6.31	9.38	48.80
	3	1.29	1.26	1.76
	4	3.52	6.25	77.64

Table 4-1 : Comparaison des résultats numériques sans recalages en 2D déformation plane et 3D

Le comportement en 2D-DP accroît les fréquences propres en CO_{ep} et CC par rapport au 3D. Les CCEM du 3^{ème} mode en 3D et 2D-DP sont très proches et cela se traduit par un écart acceptable par rapport à ceux des autres modes de flexion.

Comme la largeur des patches est égale à 2/3 de la largeur de la poutre en 3D, l'idée est de comparer le coefficient de couplage K_{ep} (%) en 3D au 2/3 du coefficient de couplage en 2D déformations planes (voir **Table 4-2**). L'écart relatif (référence 3D) est faible pour les deux premiers modes de flexion mais très important pour les modes 3 et 4. Il est clair que si le coefficient 2/3 est pris en compte dans le coefficient de couplage en 2D déformations planes, les résultats sont plus proches des coefficients de couplage en 3D que ceux sans le coefficient 2/3 en 2D. Toutefois, il est indispensable de recalculer le modèle 2D-DP.

Flexion	K_{ep} (%) 3D	2/3 K_{ep} (%) 2D	Ecart (%)
1	10.82	11.17	3.22
2	6.31	6.26	0.8
3	1.29	0.84	34.51
4	3.52	4.17	18.43

Table 4-2 : Comparaison numérique sans recalages entre 2/3 K (%) en 2D DP et K (%) en 3D

4.2.1.1 Recalage mécanique

Pour recalibrer le modèle mécaniquement en 2D dans Ansys[®], trois ressorts ont été appliqués dans la direction de l'axe X et trois autres selon Y, ce qui n'était pas le cas en 3D puisque les ressorts ont été appliqués uniquement dans la direction de la poutre. Les raideurs choisies pour les polarisations identiques et opposées sont présentées dans la **Table 4-3**.

Polarisations	Raideur k (GN/m)	
Identiques	X	1.18
	Y	5
Opposées	X	1.34
	Y	5

Table 4-3 : Raideurs des ressorts appliqués suivant x et y pour le recalage mécanique en 2D DP

Le recalage mécanique a été effectué par rapport aux deux premiers modes, les fréquences propres résultantes et les coefficients de couplage effectifs correspondants pour les deux configurations de polarisation en 2D déformations planes sont présentés dans la **Table 4-4**.

Polarisations (connexion)	Mode		Ansys [®] 2D-DP après RM			
	2D-DP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K^2 (%)	K_{2D-DP} (%)
Identiques (Parallèle)	1	1	26.362	26.104	1.99	14.09
	2	2	160.13	160.04	0.11	3.35
	3	5	450.09	449.42	0.30	5.46
	4	6	901.95	896.06	1.32	11.48
Opposées (Série)	1	1	26.843	26.571	2.06	14.34
	2	2	161.95	161.84	0.14	3.69
	3	5	453.01	452.44	0.25	5.02
	4	6	905.32	899.66	1.26	11.23

Table 4-4 : Fréquences propres et coefficients de couplage avec recalage mécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)

Les CCEM des modèles EF 2D-DP et 3D sont proches pour les deux types de polarisation et particulièrement pour le premier mode de flexion (voir **Table 4-5**).

Polarisations (connexion)	Mode		K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D avec RM	2/3 K_{ep} (%) 2D avec RM	Erreur (%) (réf exp) RM 2D /exp	Ecart (%) (réf 3D) RM 2D/ RM 3D
	2D-DP	3D					
Identiques (Parallèle)	1	1	8.31	9.56	9.40	13.07	1.74
	2	2	3.34	3.17	2.24	33.05	29.55
Opposées (Série)	1	1	7.77	9.75	9.56	23.08	1.94
	2	2	3.96	3.70	2.46	37.92	33.50

Table 4-5 : Comparaison de K (%) après recalage mécanique

4.2.1.2 Recalage électrique

Grâce à ce recalage, il est possible d'approcher les fréquences propres expérimentales en CO. Les mêmes permittivités transverses à déformations constantes ϵ_{33}^S pour les connexions série et parallèle utilisées pour le modèle 3D, sont appliquées pour le modèle 2D à déformations planes afin de calculer les fréquences propres et les CCEM recalés (voir **Table 4-6**).

Polarisations (connexion)	Mode		Ansys® 2D-DP après RE			
	2D-DP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K^2 (%)	K_{2D-DP} (%)
Identiques (Parallèle)	1	1	31.36	30.99	2.42	15.56
	2	2	185.08	184.38	0.76	8.72
	3	5	500.51	500.48	0.01	1.09
	4	6	970.45	968.82	0.34	5.80
Opposées (Série)	1	1	31.297	30.99	1.98	14.09
	2	2	184.95	184.38	0.62	7.87
	3	5	500.5	500.48	0.01	0.89
	4	6	970.15	968.82	0.27	5.24

Table 4-6 : Fréquences propres et coefficients de couplage avec recalage électrique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)

La **Table 4-7** indique que le 2/3 du coefficient de couplage recalé électriquement en 2D-DP est encore supérieur au coefficient de couplage expérimental pour les deux configurations de polarisation et en particulier pour le mode 2.

Polarisations (connexion)	Mode		K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D Avec RE	2/3 K_{ep} (%) 2D-DP avec RE	Erreur (%) (réf exp) RE 2D / exp	Ecart (%) (réf 3D) RE 2D / RE 3D
	2D-DP	3D					
Identiques (Parallèle)	1	1	8.31	10.10	10.37	24.84	2.72
	2	2	3.34	5.84	5.81	74.09	0.40
Opposées (Série)	1	1	7.77	9.18	9.39	24.84	2.37
	2	2	3.96	5.33	5.25	74.09	1.55

Table 4-7 : Comparaison de K (%) avec recalage électrique

4.2.1.3 Recalage électromécanique

Les deux recalages mécanique et électrique effectués précédemment sont combinés afin de mieux approcher les résultats expérimentaux. Les résultats de ce recalage électromécanique sont récapitulés dans la **Table 4-8**.

Polarisations (connexion)	Mode		Ansys® 2D-DP après REM			
	2D-DP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K^2 (%)	K_{2D-DP} (%)
Identiques (Parallèle)	1	1	26.327	26.104	1.72	13.10
	2	2	160.12	160.04	0.10	3.16
	3	5	450	449.42	0.26	5.08
	4	6	901.14	896.06	1.14	10.66
Opposées (Série)	1	1	26.764	26.57	1.47	12.11
	2	2	161.92	161.84	0.10	3.14
	3	5	452.84	452.44	0.18	4.21
	4	6	903.66	899.64	0.90	9.46

Table 4-8 : Fréquences propres et coefficients de couplage avec recalage électromécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)

Le recalage électromécanique a baissé considérablement le CCEM du modèle 2D-DP avec le facteur correcteur 2/3, approchant ainsi le CCEM mesuré et EF 3D pour le premier mode pour les deux polarisations mais il a accru largement l'écart entre les CCEM pour le second mode spécialement pour les PO (voir **Table 4-9**).

Polarisations (connexion)	Mode		K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D avec REM	2/3 K_{ep} (%) 2D avec REM	Erreur (%) (réf exp) REM 2D /exp	Ecart (%) (réf 3D) REM 2D/ REM 3D
	2D-DP	3D					
Identiques (Parallèle)	1	1	8.31	8.13	8.73	5.09	7.46
	2	2	3.34	2.75	2.11	36.88	23.30
Opposées (Série)	1	1	7.77	8.29	8.07	3.87	2.59
	2	2	3.96	3.15	2.10	47.06	33.50

Table 4-9 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique

4.2.2 Cas de la poutre courte

Les déformées et le potentiel électrique des quatre premiers modes en 2D-DP sont comparés à ceux des quatre modes correspondants en 3D. Les 3^{ème} et 4^{ème} modes en 2D-DP correspondent respectivement aux 5^{ème} et 8^{ème} modes en 3D. Au total, il y a trois modes de flexions dans le plan (XY) et un mode membrane (voir **Figure 4-4**). Les quatre autres modes en 3D qui n'apparaissent pas en 2D-DP sont les modes 2, 3, 6 et 7 présentés dans la **Figure 4-5**.

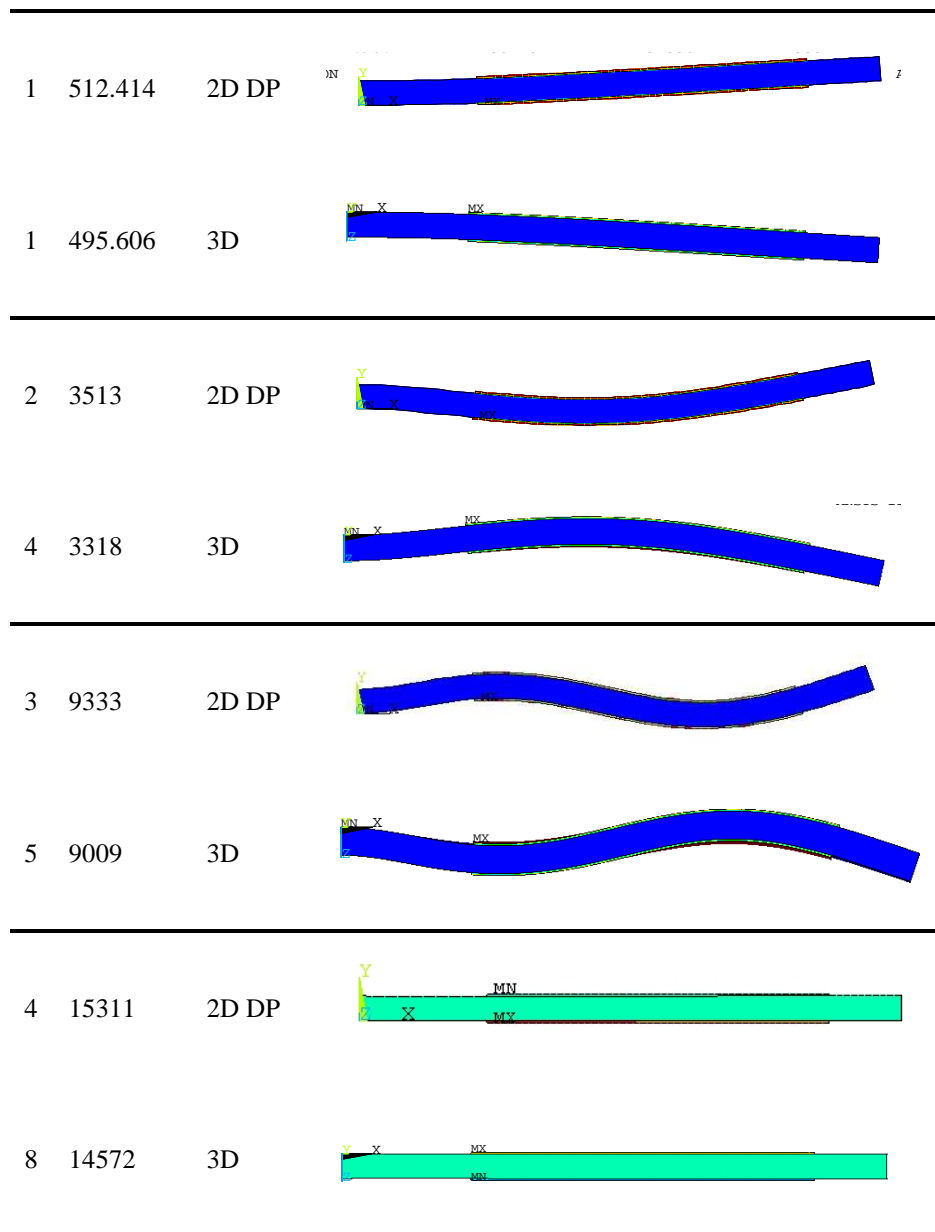


Figure 4-4 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique du modèle 2D en déformations planes et 3D dans Ansys® pour le cas du CO_{ep}

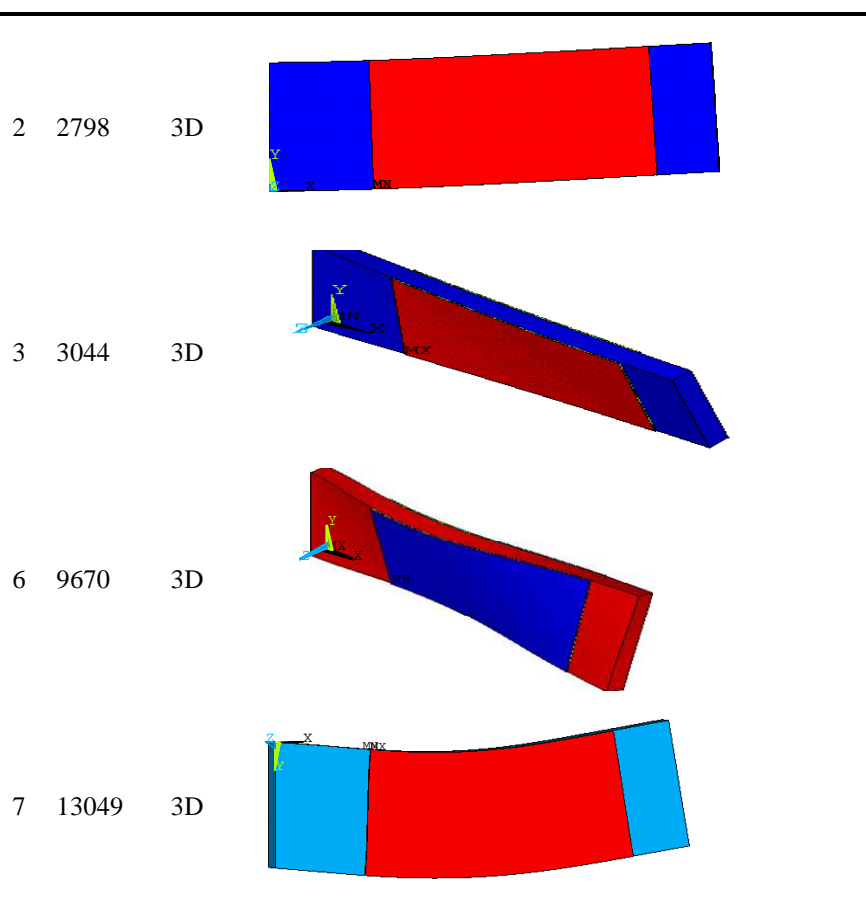


Figure 4-5 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique des modes 3D qui n'apparaissent pas en 2D dans Ansys® pour le cas du CO_{ep}

Le CCEM est calculé par la relation (2.8). Les résultats du modèle 2D-DP sans recalages sont comparés à ceux du modèle 3D dans la **Table 4-10**. Les mêmes conditions limites électriques et mécaniques sont appliquées aux deux modèles 2D-DP et 3D. Les écarts des fréquences propres en CC et CO sont acceptables mais ceux des CCEM plus importants. Le coefficient de couplage en 2D-DP affiche les valeurs les plus importantes pour les deux premiers modes de flexion dans le plan XY, il est donc indispensable de recalibrer le modèle électromécaniquement. Les mesures expérimentales ont permis de déterminer les fréquences propres des deux premiers modes, ainsi les paramètres de recalage mécanique et électriques seront identifiés uniquement par ces deux modes mais utilisés pour les 3^{ème} et 4^{ème} modes aussi.

	Modes 2D-DP	3D	3D	2D-DP	Ecart (%) (réf 3D)
f_{COep} (Hz)	1	1	495.61	513.41	3.59
	2	4	3317.7	3512.7	5.88
	3	5	9008.7	9333.3	3.60
	4	8	14572	15311	5.07
f_{CC} (Hz)	1	1	493.07	508.25	3.08
	2	4	3249	3370.7	3.75
	3	5	8995.9	9302	3.40
	4	8	14498	15152	4.51
K_{ep}^2 (%)	1	1	1.03	2.04	97.57
	2	4	4.27	8.60	-
	3	5	0.28	0.67	-
	4	8	1.02	2.11	-
K_{ep} (%)	1	1	10.16	14.29	40.56
	2	4	20.67	29.33	41.88
	3	5	5.34	8.21	53.85
	4	8	10.12	14.52	43.58

Table 4-10 : Comparaison des résultats numériques sans recalages en 2D déformations planes et 3D

4.2.2.1 Recalage mécanique

Pour ce recalage, trois ressorts sont appliqués selon la direction de l'axe X et trois autres selon l'axe Y. Les raideurs choisies pour ce recalage résultent de la minimisation entre les fréquences propres en CC et les fréquences expérimentales (voir **Table 4-11**) et elles sont évaluées à 6.2 GN/m et 0.89 GN/m pour les directions X et Y respectivement.

Mode	f_{CCexp} (Hz)	f_{CC} RM	Erreur (%)
1	417.81	417.81	0
2	2955.43	2951	0.15

Table 4-11 : Erreur des fréquences propres après recalage mécanique en 2D-DP pour les deux premiers modes

Les fréquences propres en 2D-DP recalées en CC et CO avec équipotentailité et les coefficients de couplage correspondants sont présentés pour les quatre premiers modes dans la **Table 4-12**.

Mode		Ansys [®] 2D-DP avec RM			
2D-DP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K_{2D-DP}^2 (%)	K_{2D-DP} (%)
1	1	420.58	417.81	1.33	11.53
2	4	3074.4	2951	8.54	29.22
3	5	8290.7	8233.8	1.39	11.78
4	8	12066	11996	1.17	10.82

Table 4-12 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage mécanique pour la poutre courte

Le coefficient de couplage en 2D-DP après le recalage mécanique est comparé à celui en 3D et à l'expérimental pour les deux premiers modes dans la **Table 4-13**. Le recalage du modèle 2D-DP a baissé le CCEM pour les deux premiers modes mais pas suffisamment puisque l'erreur (%) et l'écart demeurent importants. Cependant l'écart 2D-DP/3D a diminué pour le 1^{er} mode et la valeur du CCEM en 2D-DP est presque le double de l'expérimental pour le second mode.

Mode Exp	K _{exp} (%)		K _{ep} (%) 3D Avec RM	K _{ep} (%) 2D-DP avec RM	Erreur (%) RM 2D-DP /exp	Ecart (%) RM 2D-DP/ RM 3D	
	2D-DP	3D					
1	1	1	9.91	9.03	11.53	16.42	27.71
4	2	4	15.30	18.15	29.22	91.04	61

Table 4-13 : Comparaison de K (%) après recalage mécanique

4.2.2.2 Recalage électrique

Les fréquences propres en CO avec la prise en compte de l'équipotentialité sont recalées en utilisant les permittivités à déformations constantes expérimentales ϵ_{33}^S qui sont rappelées dans la **Table 4-14**.

Fréquence (Hz)	Patch	C_p^S (nF)	ϵ_{33r}^S
100	Gauche	50.4	1366.162
	Droit	46.74	1266.953

Table 4-14 : Permittivité relative à déformation constante ϵ_{33r}^S

Les fréquences propres et les coefficients de couplage recalés électriquement sont présentés dans la **Table 4-15**. Les deux premiers modes ainsi que le 4^{ème} sont très couplés comparés au 3^{ème} mode.

Mode 2D-DP	3D	Ansys [®] 2D-DP après RE			
		f _{COep} (Hz)	f _{CC} (Hz)	K ² (%)	K _{2D-DP} (%)
1	1	511.86	508.23	1.43	11.97
2	4	3468.4	3370.6	5.89	24.26
3	5	9322.9	9301.5	0.46	6.79
4	8	15261	15152	1.44	12.02

Table 4-15 : Fréquences propres et coefficients de couplage en 2D-DP avec recalage électrique pour la poutre courte

Seuls les modes 1 et 2 en 2D-DP sont comparés aux résultats expérimentaux et 3D après le recalage électrique dans la **Table 4-16**. Les deux premiers modes de flexion en

2D-DP ont un couplage plus important et spécialement pour le second mode qui affiche une erreur assez importante.

Mode			K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D avec RE	K_{ep} (%) 2D-DP avec RE	Erreur (%)	Ecart (%)
Exp	2D-DP	3D				(réf exp)	(réf 3D)
						RE 2D-DP /exp	RE 2D-DP/ RE 3D
1	1	1	9.91	8.60	11.97	20.86	39.22
4	2	4	15.30	17.40	24.26	58.64	39.47

Table 4-16 : Comparaison de K (%) après recalage électrique

4.2.2.3 Recalage électromécanique

Les deux recalages mécanique et électrique sont appliqués simultanément pour approcher au mieux les résultats expérimentaux. Les fréquences propres recalées sont présentées dans la **Table 4-17** et le CCEM après ce recalage est comparé à ceux expérimentaux et calculés par EF 3D dans la **Table 4-18**.

Mode		Ansys® 2D-DP après REM			
2D-DP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K^2 (%)	K_{2D-DP} (%)
1	1	419.75	417.8	0.94	9.67
2	4	3036.1	2950.9	5.86	24.20
3	5	8272.2	8233.4	0.94	9.72
4	8	12044	11996	0.80	8.95

Table 4-17 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électromécanique pour la poutre courte

Mode			K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D avec REM	K_{ep} (%) 2D-DP avec REM	Erreur (%)	Ecart (%)
Exp	2D-DP	3D				(réf exp)	(réf 3D)
						REM 2D-DP /exp	REM 2D-DP/ RE 3D
1	1	1	9.91	7.62	9.67	2.36	26.96
4	2	4	15.30	15.32	24.20	58.24	57.97

Table 4-18 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique

Grâce à ce recalage, le CCEM en 2D-DP est plus proche du CCEM expérimental pour le 1^{er} mode mais reste loin de celui du second mode.

4.2.3 Conclusion partielle

Il a été démontré dans cette section sur les déformations planes que le couplage électromécanique est sensible à la largeur des patches. Ce résultat est logique étant donné

que l'hypothèse des déformations planes est basée sur l'invariance géométrique dans cette direction. Or dans le cas de la poutre longue, cette invariance n'est pas respectée. Il a été aussi montré que corriger le CCEM par le rapport des largeurs patch/structure permet d'approcher les résultats expérimentaux pour la poutre longue.

4.3 Simulations en contraintes planes

Les modèles 2D utilisés pour étudier la poutre longue en PO et PI et la poutre courte en PO en déformations planes sont de nouveaux utilisés pour étudier leurs comportements en contraintes planes. Pour cela, il suffit juste de sélectionner l'option contrainte plane dans les éléments Plane183 et Plane223 pour modéliser, respectivement, la poutre en aluminium et les patchs en PZT PIC255. La poutre longue en contraintes planes sera étudiée en premier suivie de l'étude de la poutre courte avec les recalages des modèles numériques effectués dans Ansys®. La condition d'équipotentialité est appliquée en CO et la méthode Block Lanczos est utilisée en analyse modale pour extraire les valeurs propres. Le CCEM est calculé par (2.8).

4.3.1 Cas de la poutre longue

Les potentiel électrique et déformées de la poutre longue sont illustrés dans la **Figure 4-6** pour les quatre premiers modes de flexion dans les plans XY en 2D contraintes planes et XZ en 3D.

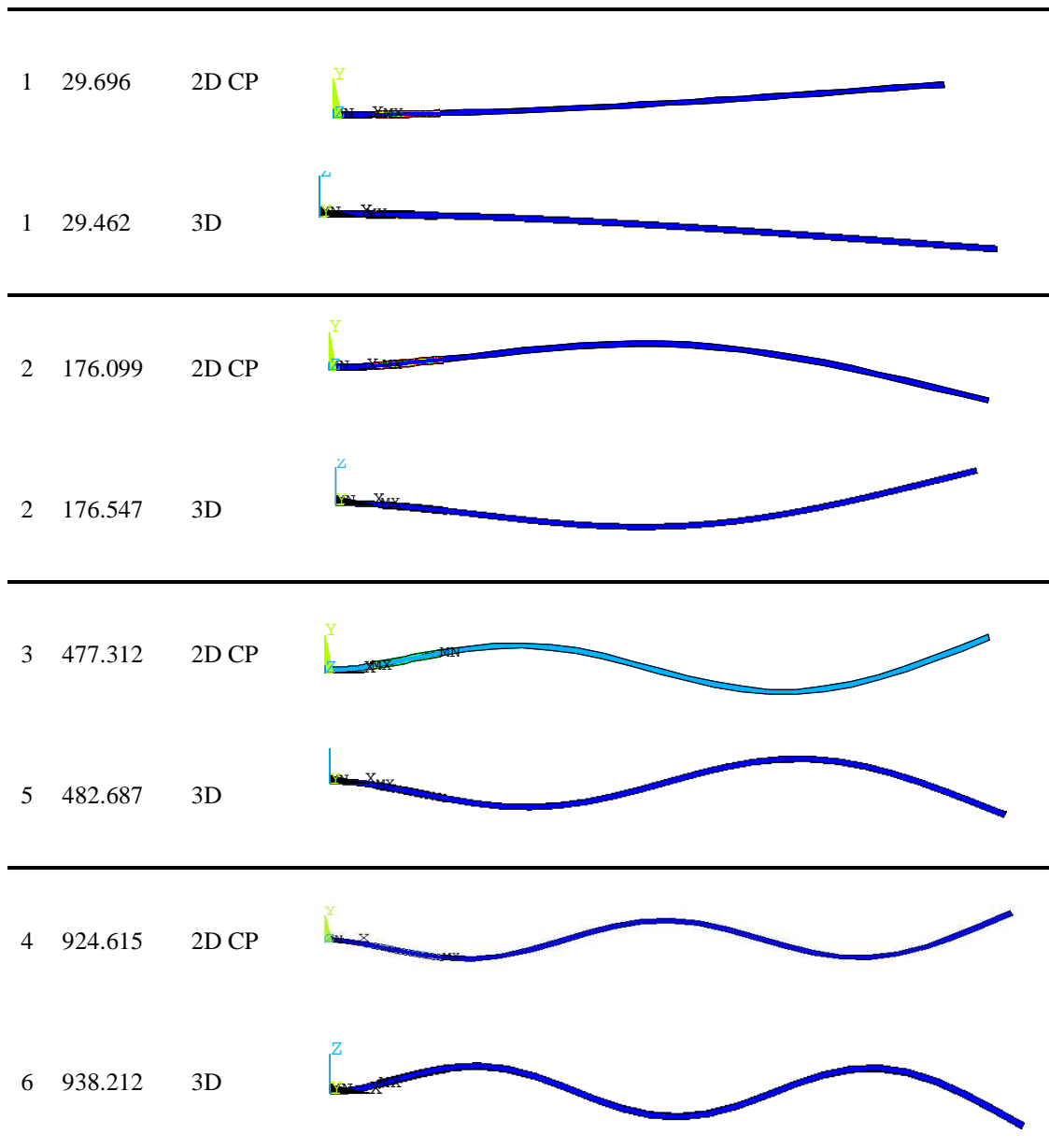


Figure 4-6 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique du modèle 2D contraintes planes et 3D pour le cas du CO_{ep} en polarisations opposées

Les fréquences propres calculées pour les deux conditions électriques CC et CO affichent un écart faible par rapport aux fréquences du modèle EF 3D surtout pour les deux premiers modes de flexion, (**Table 4-19**), on observe que le CCEM en 2D-CP est plus faible que celui en 3D pour les trois premiers modes.

	Flexion	3D	2D-CP	Ecart (%)
f_{COep} (Hz)	1	29.462	29.696	0.79
	2	176.55	176.1	0.25
	3	482.69	477.31	1.11
	4	938.21	924.62	1.45
f_{CC} (Hz)	1	29.291	29.533	0.83
	2	176.20	175.8	0.23
	3	482.65	477.3	1.11
	4	937.63	923.9	1.46
K_{ep}^2 (%)	1	1.17	1.11	5.13
	2	0.40	0.34	15
	3	0.02	0.00	-
	4	0.12	0.16	33.33
K_{ep} (%)	1	10.82	10.52	2.78
	2	6.31	5.84	7.32
	3	1.29	0.65	49.70
	4	3.52	3.95	12.24

Table 4-19 : Comparaison des résultats numériques sans recalages en 2D contraintes planes et 3D

4.3.1.1 Recalage mécanique

Des ressorts sont placés dans les directions X et Y, les raideurs respectives choisies pour le recalage mécanique sont présentées dans la **Table 4-20**. Les fréquences propres recalées et leurs coefficients de couplage pour les polarisations identiques et opposées en 2D contraintes planes sont présentés dans la **Table 4-21**.

Polarisations	Raideur k (GN/m)	
Identiques	X	1.58
	Y	5
Opposées	X	1.95
	Y	5

Table 4-20 : Raideurs des ressorts appliqués suivant x et y pour le recalage mécanique en 2D contraintes planes

Le CCEM après le recalage mécanique est élevé pour le 1^{er} et 4^{ème} mode pour les deux types de polarisations et il est plus faible pour les deux autres modes.

Polarisations (connexion)	Mode		Ansys® 2D-CP après RM			
	2D-CP	3D	f _{COep} (Hz)	f _{CC} (Hz)	K ² (%)	K _{2D-CP} (%)
Identiques (Parallèle)	1	1	26.249	26.136	0.87	9.31
	2	2	157.77	157.7	0.09	2.98
	3	5	437.59	437.44	0.07	2.62
	4	6	867.16	865.2	0.45	6.73
Opposées (Série)	1	1	26.814	26.693	0.91	9.53
	2	2	160.28	160.19	0.11	3.35
	3	5	442.21	442.1	0.05	2.23
	4	6	873	871.18	0.42	6.47

Table 4-21 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage mécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)

Les coefficients de couplage en 2D-CP pour les deux polarisations sont comparés aux coefficients de couplage expérimentaux et ceux recalés en 3D dans la **Table 4-22**. Après le recalage mécanique, l'erreur (%) entre les coefficients de couplage recalés en 2D-CP et les résultats expérimentaux est plus importante en polarisations opposées pour les deux modes. L'écart (%) entre les deux modèles recalés en 3D et 2D-CP est plus faible pour le mode 1 pour les deux configurations de polarisation.

Polarisations (connexion)	Mode		K _{exp} (%)	K _{ep} (%) 3D après RM	K _{ep} (%) 2D après RM	Erreur (%) (réf exp) RM 2D /exp	Ecart (%) (réf 3D) RM 2D/ RM 3D
	2D-CP	3D					
Identiques (Parallèle)	1	1	8.31	9.56	9.31	12.02	2.65
	2	2	3.34	3.17	2.98	10.78	6.12
Opposées (Série)	1	1	7.77	9.75	9.53	22.68	2.26
	2	2	3.96	3.70	3.35	15.34	9.32

Table 4-22 : Comparaison de K (%) avec recalage mécanique

Le coefficient de couplage en 2D-CP recalé en polarisations opposée et identique est plus important que le CCEM expérimental K_{exp} (%) et moins important que le CCEM recalé mécaniquement en 3D pour le 1^{er} mode ; cependant, il sous-estime les deux coefficients de couplage expérimental et par EF 3D pour le second mode de flexion.

4.3.1.2 Recalage électrique

Les mêmes permittivités relatives à déformation constante ϵ_{33r}^S utilisées dans le cas des déformations planes (**Table 4-14**), ont été utilisées pour le cas 2D contraintes planes pour les deux types de connexions. Les résultats obtenus sont présentés dans la **Table 4-23** et comparés aux autres résultats numériques et expérimentaux dans la **Table 4-24**.

Polarisations (connexion)	Mode		Ansys® 2D-CP après RE			
	2D-CP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K^2 (%)	K_{2D-CP} (%)
Identiques (Parallèle)	1	1	29.678	29.533	0.98	9.92
	2	2	176.07	175.8	0.31	5.54
	3	5	477.31	477.3	0.01	0.65
	4	6	924.54	923.9	0.14	3.72
Opposées (Série)	1	1	29.656	29.533	0.83	9.14
	2	2	176.03	175.8	0.26	5.12
	3	5	477.31	477.3	0.01	0.65
	4	6	924.44	923.9	0.12	3.42

Table 4-23 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électrique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)

L'erreur entre le modèle 2D-CP recalé électriquement et les résultats expérimentaux est plus importante pour le mode 2 en connexions série et parallèle. L'écart (%) entre le modèle 2D-CP et le modèle 3D après recalage électrique est très faible pour le mode 1 et est plus important pour le mode 2 (voir **Table 4-24**). Le CCEM en 2D-CP est plus élevé que le CCEM expérimental et moins élevé que le CCEM en 3D recalé pour les deux premiers modes.

Polarisations (connexion)	Mode		K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D après RE	K_{ep} (%) 2D après RE	Erreur (%) (réf exp) RE 2D /exp	Ecart (%) (réf 3D) RE 2D/ RE 3D
	2D-DP	3D					
Identiques (Parallèle)	1	1	8.31	10.10	9.92	19.39	1.76
	2	2	3.34	5.84	5.54	66.00	5.03
Opposées (Série)	1	1	7.77	9.18	9.14	17.58	0.41
	2	2	3.96	5.33	5.12	29.22	3.98

Table 4-24 : Comparaison de K (%) après recalage électrique

4.3.1.3 Recalage électromécanique

Le recalage électromécanique a été réalisé sur le modèle 2D-CP de la poutre longue pour approcher les résultats expérimentaux ; les résultats obtenus, après l'analyse modale, sont présentés dans la **Table 4-25**. Le CCEM effectif recalé est comparé à ceux du recalage en 3D et aux expériences dans la **Table 4-26**. L'erreur (%) entre le modèle 2D-CP recalé et l'expérience est acceptable pour le mode 1 mais pas pour le mode 2. Cependant, l'écart entre les deux modèles numériques en 3D et 2D-CP est très faible pour le mode 2 en connexion parallèle et pour le mode 1 en connexion série.

Polarisations (connexion)	Mode		Ansys® 2D-CP après REM			
	2D-CP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K^2 (%)	K_{2D-CP} (%)
Identiques (Parallèle)	1	1	26.237	26.136	0.77	8.80
	2	2	157.76	157.7	0.08	2.76
	3	5	437.58	437.44	0.06	2.53
	4	6	866.94	865.2	0.40	6.35
Opposées (Série)	1	1	26.784	26.693	0.68	8.26
	2	2	160.26	160.19	0.09	2.96
	3	5	442.18	442.1	0.04	1.90
	4	6	872.55	871.18	0.31	5.61

Table 4-25 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électromécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)

Polarisations (connexion)	Mode		K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D après REM	K_{ep} (%) 2D CP après REM	Erreur (%) (réf exp) REM 2D /exp	Ecart (%) (réf 3D) REM 2D/ REM 3D
	2D-CP	3D					
Identiques (Parallèle)	1	1	8.31	8.13	8.80	5.89	8.29
	2	2	3.34	2.75	2.76	17.40	0.37
Opposées (Série)	1	1	7.77	8.29	8.26	6.36	0.25
	2	2	3.96	3.15	2.96	25.34	6.22

Table 4-26 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique

La comparaison des CCEM en 2D-CP et 3D est plutôt satisfaisante.

4.3.2 Cas de la poutre courte

La **Figure 4-7** illustre les déformées et le potentiel électrique du modèle en 2D-CP pour les quatre premiers modes correspondants aux modes 1, 4, 5 et 8 de la poutre courte en 3D. Les modes 2, 3, 6 et 7 en 3D non obtenus en 2D-CP sont, respectivement, la flexion 1 dans le plan XY, la torsion 1, la torsion 2 et la flexion 2 dans le plan XY (voir **Figure 4-5**).

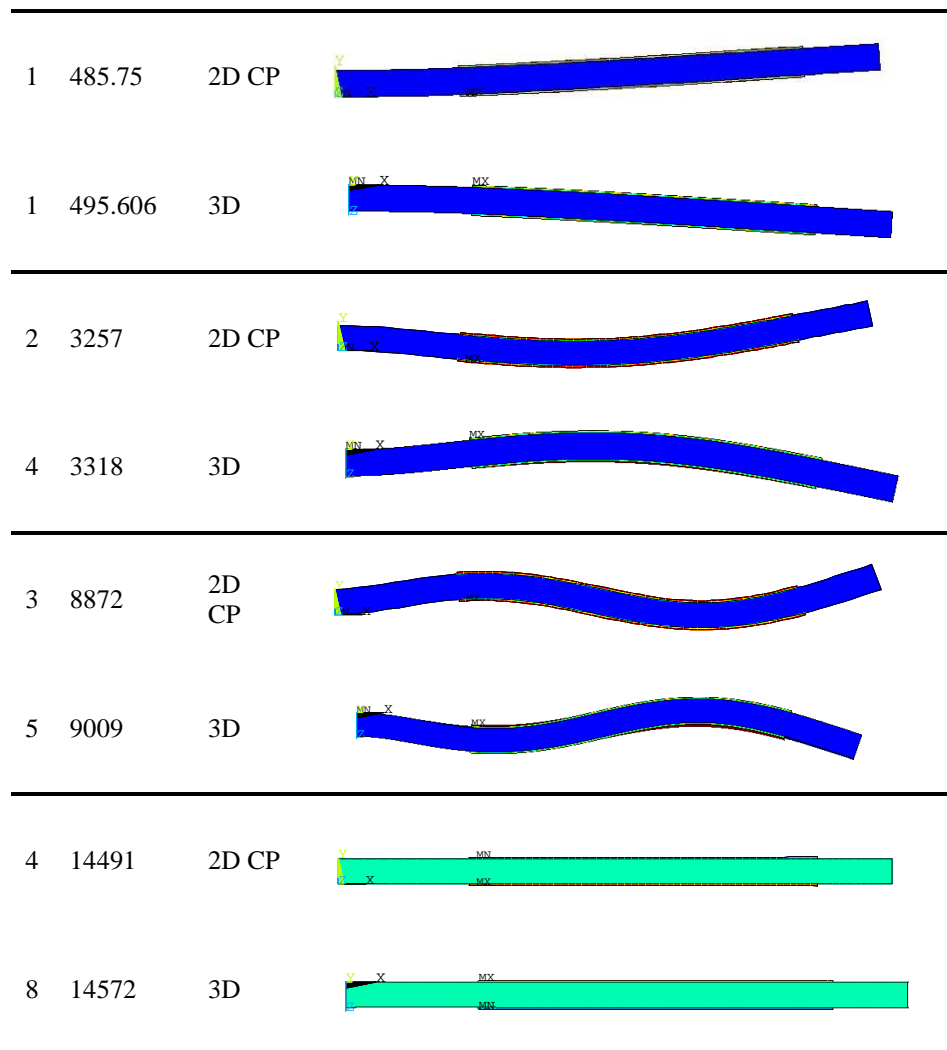


Figure 4-7 : Visualisation des déformées et du potentiel électrique du modèle 2D contraintes planes et 3D pour le cas du CO_{ep}

La **Table 4-27** indique que l'écart en fréquences affiche de faibles valeurs pour les quatre premiers modes en CC et CO_{ep} et particulièrement pour le 4^{ème} mode ; cependant, l'écart entre les CCEM est plus important pour tous les modes. Le recalage mécanique des fréquences propres en CC et le recalage électrique des fréquences propres en CO_{ep} seront considérés dans ce cas pour réduire l'écart avec le modèle EF 3D et les valeurs mesurées.

	Modes 2D-CP	3D	3D	2D-CP	Ecart (%) (réf 3D)
f_{COep} (Hz)	1	1	495.61	485.75	1.99
	2	4	3317.7	3257.2	1.82
	3	5	9008.7	8872.3	1.51
	4	8	14572	14491	0.56
f_{CC} (Hz)	1	1	493.07	483.86	1.87
	2	4	3249	3207.6	1.27
	3	5	8995.9	8861.6	1.49
	4	8	14498	14436	0.43
K_{ep}^2 (%)	1	1	1.03	0.78	24.27
	2	4	4.27	3.12	26.93
	3	5	0.28	0.24	14.29
	4	8	1.02	0.76	25.49
K_{ep} (%)	1	1	10.16	8.85	12.95
	2	4	20.67	17.65	14.60
	3	5	5.34	4.92	7.89
	4	8	10.12	8.74	13.63

Table 4-27 : Comparaison des résultats numériques sans recalages en 2D contraintes planes et 3D dans Ansys®

4.3.2.1 Recalage mécanique

Les raideurs des ressorts appliquées pour le modèle de la poutre courte en 2D-CP dans les directions x et y sont 7.79 GN/m et 90 GN/m. Les fréquences propres recalées en CC suites auxquelles ces raideurs sont fixées sont présentées dans la **Table 4-28**.

Mode	f_{CCexp} (Hz)	f_{CC} RM	Erreur (%)
1	417.81	417.84	0
2	2955.43	2910.6	1.52

Table 4-28 : Erreur des fréquences propres après recalage mécanique en 2D-CP pour les deux premiers modes

Le recalage mécanique est fait en CC, mais seules les fréquences propres en CC pour les deux premiers modes sont recalées. Les deux derniers modes recalés résultent du recalage des deux premiers (voir **Table 4-29**).

Mode		Ansys® 2D-CP après RM			
2D-CP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K^2 (%)	K_{2D-CP} (%)
1	1	419.03	417.84	0.57	7.55
2	4	2956.4	2910.6	3.17	17.81
3	5	8203.3	8187.3	0.39	6.25
4	8	12288	12257	0.51	7.12

Table 4-29: Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage mécanique pour la poutre courte

D'après la **Table 4-30**, l'erreur entre le coefficient de couplage en 2D-CP après le recalage mécanique et l'expérimental est très importante pour les deux modes. L'écart 2D/3D a augmenté pour le mode 1 après le recalage et a diminué sensiblement pour le mode 2. Le CCEM recalé en 2D-CP est moins élevé que les CCEM en 3D et expérimental pour le 1^{er} mode et plus important que l'expérimental pour le second mode.

Mode Exp	K _{exp} (%)		K _{ep} (%) 3D Avec RM	K _{ep} (%) 2D-DP avec RM	Erreur (%) (réf exp) RM 2D-DP /exp	Ecart (%) (réf 3D) RM 2D-DP/ RM 3D	
	2D-DP	3D					
1	1	1	9.91	9.03	7.55	23.76	16.38
4	2	4	15.30	18.15	17.81	16.44	1.87

Table 4-30 : Comparaison de K (%) après recalage mécanique

4.3.2.2 Recalage électrique

Les mêmes permittivités appliquées dans le cas des déformations planes lors du recalage électrique, sont appliquées dans le cas 2D-CP. Les fréquences propres des modes recalés et les coefficients de couplages correspondants sont présentés dans la **Table 4-31**.

Mode 2D-CP	3D	Ansys® 2D-CP après RE			
		f _{COep} (Hz)	f _{CC} (Hz)	K ² (%)	K _{2D-CP} (%)
1	1	485.29	483.86	0.59	7.69
2	4	3244.9	3207.6	2.34	15.29
3	5	8869.5	8861.5	0.18	4.25
4	8	14477	14436	0.57	7.54

Table 4-31 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électrique pour la poutre courte

Une comparaison entre les coefficients de couplage recalés électriquement en 2D-CP et leurs correspondants expérimentaux et en 3D est effectuée dans la **Table 4-32**. Les écarts 2D/3D ont diminué après le recalage électrique pour les deux premiers modes. L'erreur entre l'expérimental et le 2D-CP est quasi-nulle pour le second mode et assez élevée pour le premier. Le coefficient de couplage en 2D-CP après le recalage électrique sous-estime le coefficient de couplage expérimental et en 3D pour les deux modes. Cependant, il est plus proche du CCEM (%) expérimental du second mode que celui du premier.

Mode			K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D	K_{ep} (%) 2D-CP	Erreur (%)	Ecart (%)
Exp	2D-CP	3D		avec RE	avec RE	RE 2D-CP /exp	RE 2D-CP/ RE 3D
1	1	1	9.91	8.60	7.69	22.34	10.54
4	2	4	15.30	17.40	15.29	0	12.09

Table 4-32 : Comparaison de K (%) après recalage électrique

4.3.2.3 Recalage électromécanique

Après avoir recalé séparément le modèle 2D-CP électriquement et mécaniquement, les deux recalages sont appliqués simultanément et les résultats des analyses modales sont présentés dans la **Table 4-33** pour les quatre premiers modes. Le second mode a le CCEM le plus élevé tandis que les coefficients des trois autres modes sont plus faibles.

Mode		Ansys® 2D-CP après REM			
2D-CP	3D	f_{COep} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K^2 (%)	K_{2D-CP} (%)
1	1	418.74	417.84	0.43	6.57
2	4	2945	2910.6	2.38	15.42
3	5	8199.1	8187.2	0.29	5.39
4	8	12281	12257	0.39	6.26

Table 4-33 : Fréquences propres et coefficients de couplage après recalage électromécanique pour la poutre courte

Les coefficients de couplage recalés des deux premiers modes sont comparés aux coefficients de couplage expérimentaux et en 3D recalés dans la **Table 4-34**. L'écart entre le CCEM en 2D-CP et le CCEM en 3D après le recalage électromécanique est assez important pour le 1^{er} mode mais très faible pour le second. Cependant, l'erreur (%) 2D-CP /exp est importante pour le 1^{er} mode et satisfaisante pour le second.

Mode			K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 3D	K_{ep} (%) 2D-CP	Erreur (%)	Ecart (%)
Exp	2D-CP	3D		Avec REM	avec REM	(réf exp)	(réf 3D)
						REM 2D-CP /exp	REM 2D-CP/ REM 3D
1	1	1	9.91	7.62	6.57	33.71	13.80
4	2	4	15.30	15.32	15.42	0.82	0.64

Table 4-34 : Comparaison de K (%) après recalage électromécanique

4.3.3 Conclusion partielle

Les résultats obtenus suite à l'étude de la poutre longue en contraintes planes sont très satisfaisants puisqu'ils sont très proches des résultats expérimentaux et en 3D pour tous les modes. Ce constat s'applique aussi à la poutre courte ; les valeurs résultantes de son étude en CP sont acceptables pour les deux premiers modes de flexion.

4.4 Synthèse des simulations en 2D

Suite aux études présentées précédemment, une synthèse des résultats numériques en 2D-CP et 2D-DP vis-à-vis des simulations 3D et des expériences est nécessaire pour les deux structures longue et courte afin d'identifier le modèle EF 2D adéquat. La synthèse se déroule en deux étapes ; sans recalage et après recalage pour chacune des structures.

4.4.1 Cas de la poutre longue

Le comportement de la poutre longue a été étudié en 3D, 2D déformations planes et 2D contraintes planes, ces trois comportements sont comparés entre eux avant et après recalage électromécanique et avec les expériences.

4.4.1.1 Sans recalage

Les fréquences propres en CC et CO (avec EP) pour les quatre modes de flexion en 2D-DP/CP sans recalages sont comparées aux fréquences propres correspondantes en 3D dans la **Figure 4-8**.

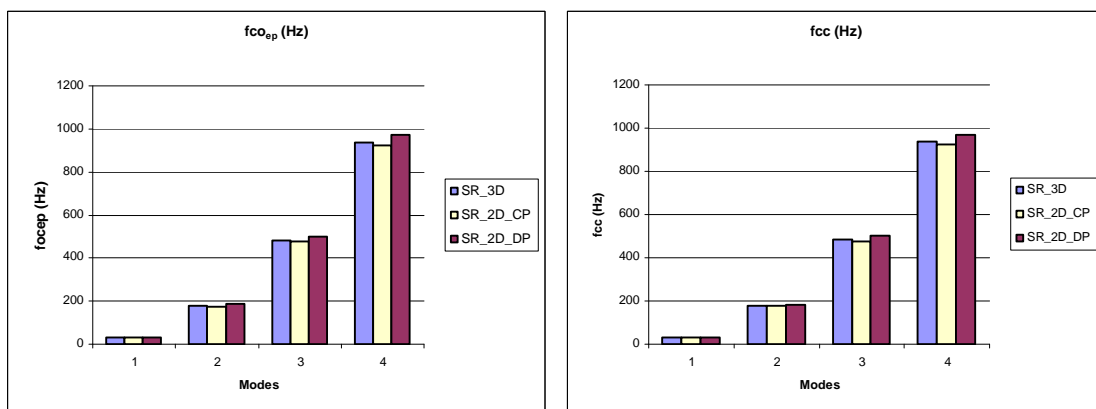


Figure 4-8 : Comparaison des fréquences propres sans recalages en 3D et 2D pour les quatre modes

D'après la **Figure 4-8**, les fréquences propres en 2D-CP sont plus proches de celles en 3D que celles en 2D-DP. Les fréquences propres en 2D-DP surestiment celles en 3D pour les quatre modes. Ce résultat très intéressant confirme les prédictions théoriques ci-dessus, c'est-à-dire, les résultats en 2D-DP sont supérieurs aux résultats en 2D-CP et surestiment ceux en 3D. Néanmoins, les résultats fréquentiels obtenus en 2D sont assez satisfaisants. Toutefois, après le post-traitement du CCEM effectif modal, comme le montre la **Figure 4-9**, il semble que les résultats en 2D-DP sont satisfaisants, (en particulier pour les deux premiers modes), seulement après la correction des valeurs obtenues par le ratio des largeurs patch/poutre (ici: $20/30 = 2/3$) puisque les modèles 2D ont les mêmes largeurs pour les patches et la poutre. Par conséquent, les calculs en déformations planes semblent être sensibles à la largeur du patch. Les résultats en contraintes planes sont acceptables, en particulier pour les deux premiers modes (assez couplées). Ainsi, de nouveau, les prédictions théoriques ci-dessus sont confirmées dans le sens où les résultats du CCEM en 2D-DP surestiment ceux en 3D et que ces derniers sont surestimés par les résultats en 2D-DP et sous-estimés par ceux en 2D-CP.

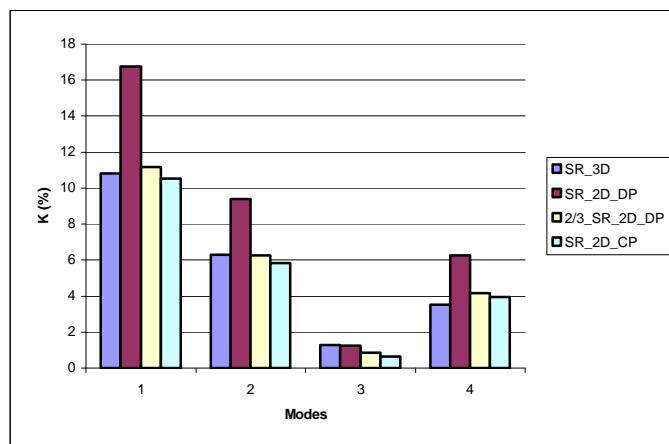


Figure 4-9 : Comparaison des coefficients de couplage sans recalages en 3D et 2D pour les quatre modes de flexion

4.4.1.2 Avec recalage électromécanique

Les **Figures 4-10** et **4-11** montrent qu'après le REM toutes les fréquences propres (3D, 2D-DP et 2D-CP) pour les deux connexions parallèle et série sont proches. D'autre part, les fréquences propres en CO_{ep} en 2D-DP surestiment celles en 2D-CP et en 3D en particulier pour les modes 3 et 4 pour les deux configurations de polarisation.

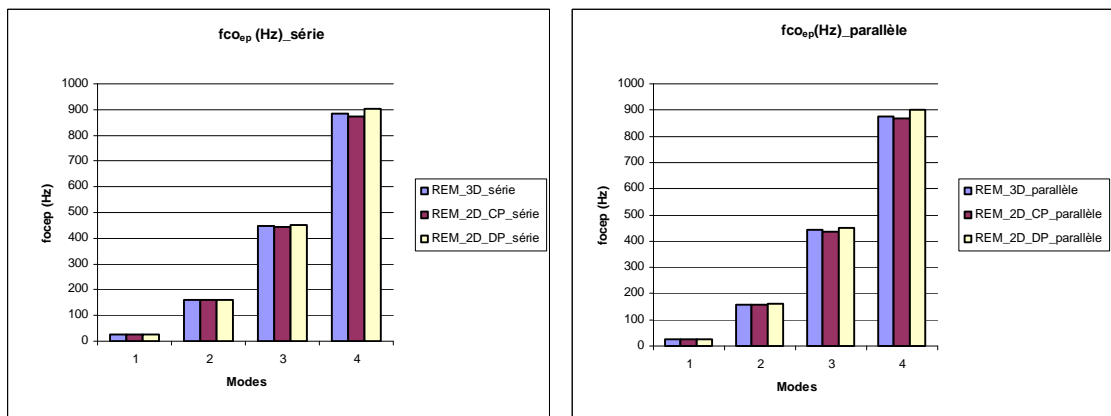


Figure 4-10 : Comparaison des fréquences propres en CO_{ep} après REM en 3D et 2D pour les quatre modes de flexion

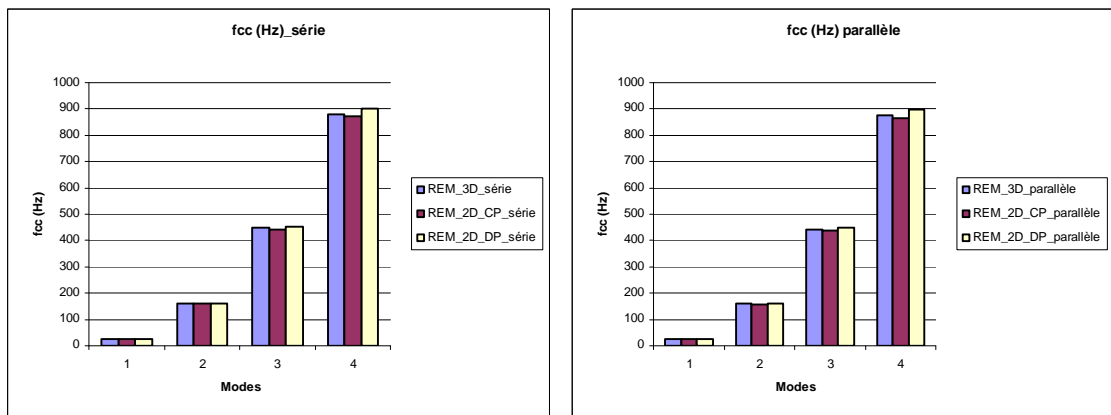


Figure 4-11 : Comparaison des fréquences propres en CC après REM en 3D et 2D pour les quatre modes de flexion

Polarisations (Connexion)	Mode		K_{exp} (%)	K_{ep} (%) 2D Après REM		Erreur (%) (réf exp)	
	2D	3D		2/3 DP	CP	REM 2D DP/exp	REM 2D CP/exp
Identiques (Parallèle)	1	1	8.31	8.73	8.80	5.09	5.89
	2	2	3.34	2.11	2.76	36.88	17.40
Opposées (Série)	1	1	7.77	8.07	8.26	3.87	6.36
	2	2	3.96	2.10	2.96	47.06	25.34

Table 4-35 : Comparaison des coefficients de couplage en 2D-DP et 2D-CP avec recalage électromécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)

Les erreurs (%) REM 2D DP/exp et REM 2D CP/exp présentées dans la **Table 4-35**, sont plus faibles pour le mode 1 pour les deux configurations de polarisations. Pour le mode 2, l'erreur (%) entre le 2D-DP recalé et l'expérience est plus importante que celle entre le 2D-CP recalé et l'expérience pour les connexions série et parallèle.

Les fréquences propres expérimentales et en 2D-CP et 2D-DP en CC (**Figure 4-12**) et en CO_{ep} (**Figure 4-13**) pour le 1^{er} mode sont quasi identiques en connexion série et parallèle. Pour le mode 2, les f_{CC} et f_{COep} en 2D-DP et 2D-CP sous-estiment l'expérience pour les deux configurations de polarisation.

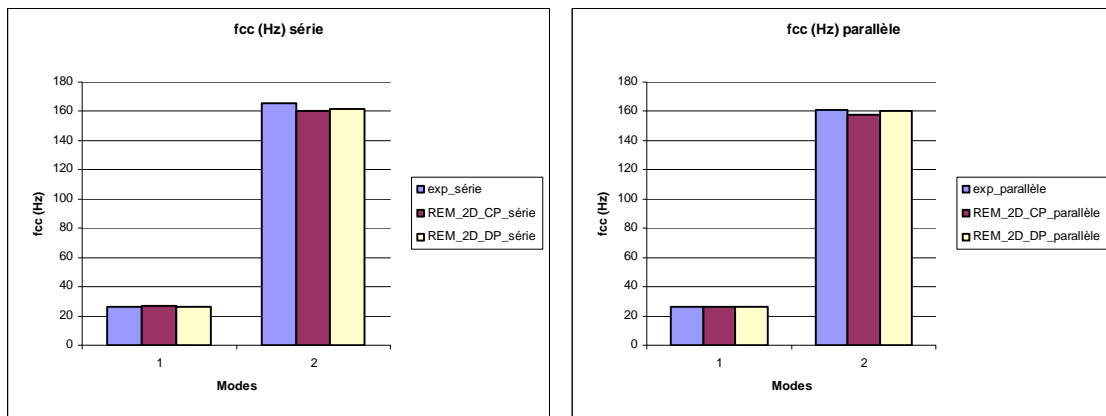


Figure 4-12 : Comparaison aux valeurs expérimentales des fréquences propres en CC après REM en 2D pour les deux premiers modes

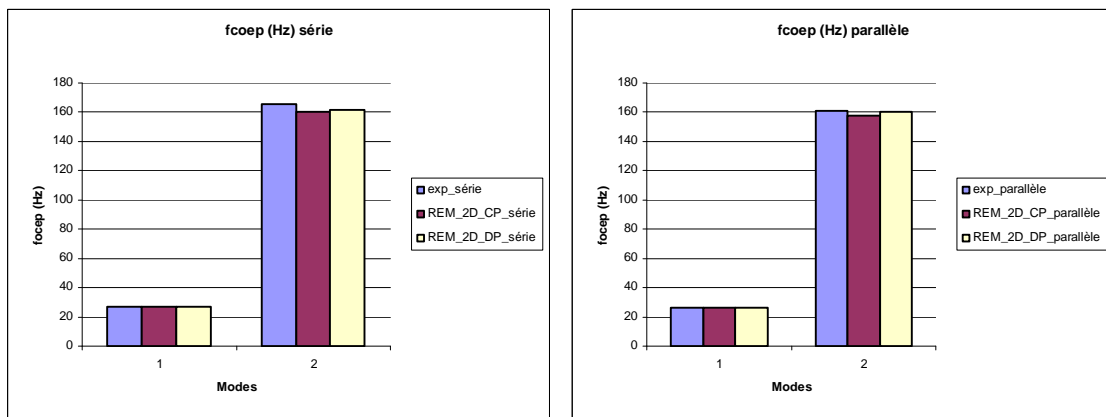


Figure 4-13 : Comparaison aux valeurs expérimentales des fréquences propres en CO_{ep} après REM en 2D pour les deux premiers modes

D'après la **Table 4-36**, le CCEM en 2D-CP après REM affiche des valeurs très proches de celui en 3D pour le 1^{er}, 2^{ème} et 4^{ème} mode pour les deux polarisations, cette proximité se traduit par des écarts relativement faibles. Cependant la valeur du 2/3 du CCEM en 2D-DP est proche de celui en 3D uniquement pour le premier mode ; les autres modes ont des CCEM plus distincts pour les deux polarisations.

Polarisations (Connexion)	Mode		K _{ep} (%) 3D après REM	K _{ep} (%) 2D après REM		Ecart (%)	
	2D	3D		2/3 DP	CP	REM 2D DP/ REM 3D	REM 2D CP/ REM 3D
Identiques (Parallèle)	1	1	8.13	8.73	8.80	7.46	8.29
	2	2	2.75	2.11	2.76	23.30	0.37
	3	5	1.91	3.39	2.53	77.49	32.46
	4	6	5.64	7.11	6.35	26.06	12.59
Opposées (Série)	1	1	8.29	8.07	8.26	2.59	0.25
	2	2	3.15	2.10	2.96	33.50	6.22
	3	5	1.64	2.81	1.90	71.34	15.85
	4	6	5.41	6.31	5.61	16.64	3.70

Table 4-36 : Comparaison des coefficients de couplage numériques avec recalage électromécanique pour la poutre longue en polarisations opposées (PO) et identiques (PI)

L'histogramme du CCEM dans le cas des polarisations opposées dans la **Figure 4-14** montre que les CCEM en 3D et 2D (DP et CP) après REM sont plus élevés que le CCEM expérimental pour le premier mode et plus faibles pour le second. Dans le cas de polarisations identiques, le CCEM en 3D a la valeur la plus proche de l'expérience pour le premier mode. Pour le second mode, les valeurs numériques du CCEM sont plus faibles que l'expérience.

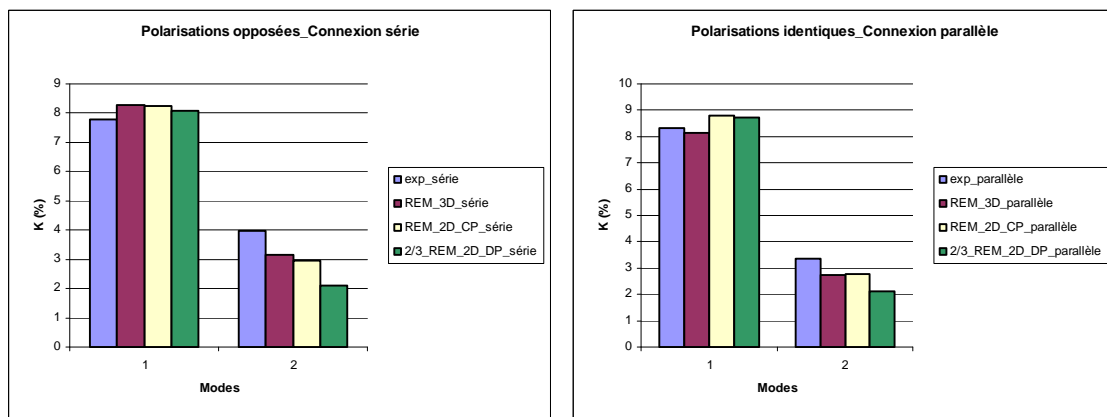


Figure 4-14 : Comparaison des coefficients de couplage avec recalage électromécanique en 3D et 2D pour les deux premiers modes

4.4.2 Cas de la poutre courte

Suite aux études numériques en 2D déformations planes et contraintes planes, une comparaison des résultats expérimentaux, 2D-DP et 2D-CP sans et avec recalage est réalisée ci après.

4.4.2.1 Sans recalages

Les coefficients de couplage sont comparés pour les deux premiers modes de flexion en 2D-DP et 2D-CP qui correspondent aux 1^{er} et 4^{ème} modes expérimentaux. Les résultats en 2D-CP sont plus proches que les résultats en 2D-DP des résultats expérimentaux pour les deux premiers modes (**Figure 4-15**).

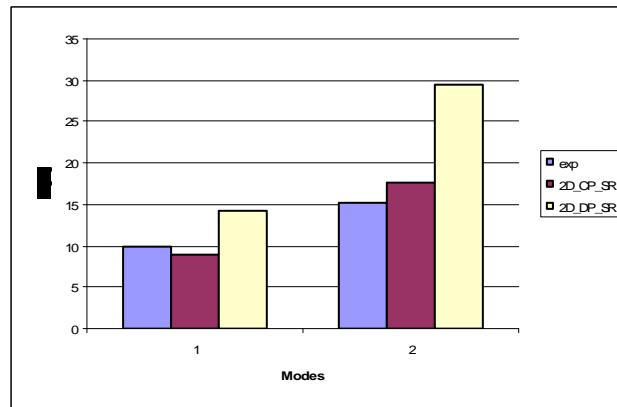


Figure 4-15 : Comparaison avec l'expérience des coefficients de couplage sans recalages en 2D pour les deux premiers modes de flexion

4.4.2.2 Après recalage

Les coefficients de couplage en 2D-DP et 2D-CP sont comparés ici pour les trois types de recalage : mécanique, électrique et électromécanique.

La **Figure 4-16** montre que le coefficient de couplage en 2D-DP est plus important que les coefficients de couplage expérimental et en 2D-CP pour les deux premiers modes de flexion après le recalage mécanique. Le coefficient de couplage en 2D-CP est plus faible que le CCEM (%) expérimental pour le 1^{er} mode et plus important pour le 2^{ème}.

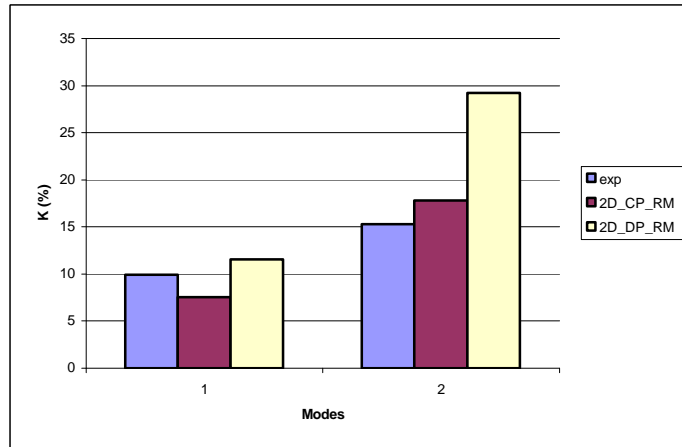


Figure 4-16 : Comparaison avec l'expérience des coefficients de couplage après recalage mécanique en 2D pour les deux premiers modes de flexion

D'après la **Figure 4-17**, le coefficient de couplage en 2D-CP est plus faible que l'expérimental et en 2D-DP pour les deux premiers modes de flexion.

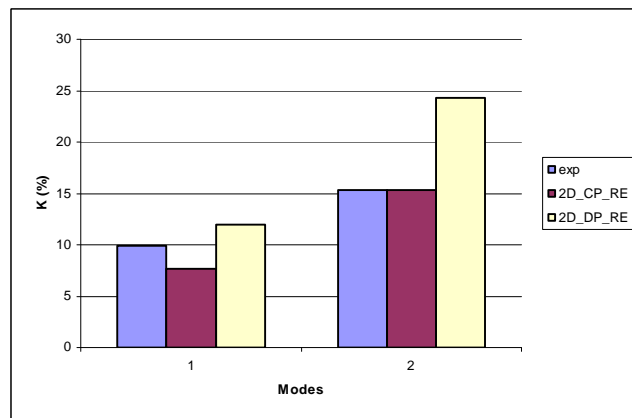


Figure 4-17 : Comparaison avec l'expérience des coefficients de couplage après recalage électrique en 2D pour les deux premiers modes de flexion

D'après la **Figure 4-18**, le recalage électromécanique a amélioré le coefficient de couplage en 2D-DP pour le mode 1 et celui pour le second mode en 2D-CP.

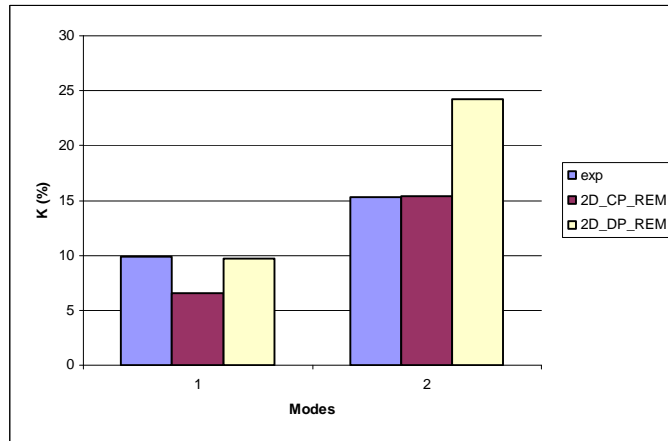


Figure 4-18 : Comparaison avec l'expérience des coefficients de couplage après recalage électromécanique en 2D pour les deux premiers modes de flexion

4.5 Autres méthodes de calcul du coefficient de couplage

Les deux méthodes étudiées dans le Chapitre 2 pour évaluer le coefficient de couplage sont appliquées pour la poutre courte en déformations planes et contraintes planes avant et après recalage mécanique. Les résultats de ces deux méthodes seront discutés à la fin de cette section. Pour la première méthode, les fréquences propres de la poutre nue et le CCEM des PZT définissent le K^2_{poutre} (%). Pour la seconde méthode, les propriétés en CC et CO des patches sont utilisées avec des EF élastiques pour les modéliser.

4.5.1 Méthode approchée d'évaluation du CCEM

Pour calculer les fréquences propres de la poutre nue, seule la poutre en aluminium est modélisée par EF élastique 2D Plane183. Le coefficient de couplage est calculé avec la formule (2.18). Cette approche de calcul du CCEM est étudiée pour les deux types de comportement en 2D : déformations planes et contraintes planes.

4.5.1.1 Déformations planes sans recalage

Les résultats de l'analyse modale de la poutre nue sont présentés dans la **Table 4-37** avec les fréquences propres de la poutre instrumentée en CC et le coefficient de couplage correspondant. Ces valeurs, calculées par Ansys[®], sont comparées à l'expérience pour les deux premiers modes de flexion dans la **Table 4-38**. Les erreurs sont assez importantes autant pour les fréquences propres que pour les CCEM puisqu'elles dépassent les 14% au meilleur des cas, sauf pour la fréquence propre de la poutre « nue » pour le second mode de flexion où l'erreur est de 6.13%.

Mode	f_{poutre} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K_{poutre}^2 (%)	K_{poutre} (%)
Flexion 1 (xy)	535.27	508.25	1.52	12.34
Flexion 2 (xy)	3318.6	3370.7	0.43	6.54
Flexion 3 (xy)	9137.8	9302	0.49	6.99
Membrane	16793	15152	3.19	17.85

Table 4-37 : Coefficients de couplage sans recalages en 2D déformations planes

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{poutre} (Hz)	K_{poutre}^2 (%)	K_{poutre} (%)	K (%)
Expérience	Flexion 1 (xz)	417.81	450.04	2.24	14.96	9.91
	Flexion 2 (xz)	2955.43	3126.96	1.67	12.91	15.30
EF 2D-DP SR	Flexion 1 (xy)	508.25	535.27	1.52	12.34	14.29
	Flexion 2 (xy)	3370.7	3318.6	0.43	6.54	29.33
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1	21.65	18.94	32.14	17.47	44.20
	Flexion 2	14.05	6.13	74.25	49.32	91.77

Table 4-38 : Fréquences propres et CCEM approché sans recalages (2D-DP)

4.5.1.2 Déformations planes avec recalage mécanique

La poutre courte instrumentée étant recalée en 2D-DP en CC, c'est au tour de la poutre courte nue d'être recalée. Pour cela, trois ressorts ont été placés selon X et trois autres selon Y avec les raideurs respectives $6.3 \cdot 10^9$ N/m et $7 \cdot 10^{11}$ N/m. Les fréquences propres recalées sont présentées dans la **Table 4-39** et comparées aux fréquences mesurées. Les erreurs signalées sont celles ayant servi aux choix des raideurs de recalage.

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{poutre} (Hz)
Expérience	Flexion 1 (xz)	417.81	450.04
	Flexion 2 (xz)	2955.43	3126.96
EF 2D-DP après RM	Flexion 1 (xy)	417.81	452.27
	Flexion 2 (xy)	2951	2922
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1	0	0.50
	Flexion 2	0.15	6.55

Table 4-39 : Fréquences propres après recalage mécanique (2D-DP)

La **Table 4-40** récapitule les CCEM numériques de la poutre nue avec et sans recalage mécanique et les CCEM expérimentaux classique et de la poutre « nue » pour les deux premiers modes. Une augmentation de l'erreur 2D-DP/ exp est observée pour les deux modes après le recalage mécanique. Les CCEM expérimental et numérique de la poutre courte nue sont devenus assez proches pour le 1^{er} mode mais le CCEM numérique en 2D-DP de la poutre nue est loin du CCEM expérimental classique.

Mode	Exp		EF 2D-DP		Erreur (%) (réf exp)	
	K_{exp} (%)	K_{poutre} (%)	K_{poutre} (%) Sans RM	K_{poutre} (%) Après RM	SR/exp	RM/exp
Flexion 1	9.91	14.96	12.34	15.48	24.60	56.30
Flexion 2	15.30	12.91	6.54	5.23	57.22	65.84

Table 4-40 : Comparaison du coefficient de couplage K_{poutre} (%) après recalage mécanique (2D-DP)

4.5.1.3 Contraintes planes sans recalage

Les fréquences propres de la poutre nue et de la poutre instrumentée en CC ainsi que le CCEM approché en 2D-CP sont présentés dans la **Table 4-41**.

Mode	f_{poutre} (Hz)	f_{CC} (Hz)	K_{poutre}^2 (%)	K_{poutre} (%)
Flexion 1 (xy)	510.05	483.86	1.55	12.46
Flexion 2 (xy)	3164.5	3207.6	0.37	6.10
Flexion 3 (xy)	8723.2	8861.6	0.43	6.58
Membrane	16009	14436	3.21	17.91

Table 4-41 : Coefficients de couplage sans recalages en 2D contraintes planes

En contraintes planes, l'erreur des fréquences, présentée dans la **Table 4-42**, est importante pour les deux premiers modes en CC et pour le 1^{er} mode pour la poutre courte « nue ». Elle est aussi importante pour le coefficient de couplage de la poutre nue.

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{poutre} (Hz)	K_{poutre}^2 (%)	K_{poutre} (%)	K (%)
Expérience	Flexion 1 (xz)	417.81	450.04	2.24	14.96	9.91
	Flexion 2 (xz)	2955.43	3126.96	1.67	12.91	15.30
EF 2D-CP SR	Flexion 1 (xy)	483.86	510.05	1.55	12.46	8.85
	Flexion 2 (xy)	3207.6	3164.5	0.37	6.10	17.65
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1	15.81	13.33	30.80	16.71	10.70
	Flexion 2	8.53	1.20	77.84	52.73	15.42

Table 4-42 : Fréquences propres et CCEM sans recalages (2D-CP)

4.5.1.4 Contraintes planes après recalage mécanique

En appliquant des ressorts comme dans le cas des déformations planes mais avec de nouvelles raideurs $8.2 \cdot 10^9$ N/m et $9 \cdot 10^{10}$ N/m, les fréquences propres en CC sont recalées et présentées dans la **Table 4-43**. Les écarts affichés sont ceux retenus pour la fixation des raideurs du recalage.

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{poutre} (Hz)
Expérience	Flexion 1 (xz)	417.81	450.04
	Flexion 2 (xz)	2955.43	3126.96
EF 2D-CP Après RM	Flexion 1 (xy)	417.84	450.89
	Flexion 2 (xy)	2910.6	2865.2
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1	0	0.19
	Flexion 2	1.52	8.37

Table 4-43 : Fréquences propres après recalage mécanique

En étudiant la corrélation essai/simulation EF en 2D-CP avant et après recalage mécanique, on note que l'erreur du CCEM entre la poutre nue en 2D-CP et l'expérimental reste relativement importante pour les deux modes (voir **Table 4-44**).

Mode	Exp		EF 2D-CP		Erreur (%) (réf exp)	
	K_{exp} (%)	K_{poutre} (%)	K_{poutre} (%) sans RM	K_{poutre} (%) après RM	SR/exp	RM/exp
Flexion 1	9.91	14.96	12.46	15.15	25.76	52.94
Flexion 2	15.30	12.91	6.10	6.57	60.09	57.02

Table 4-44 : Comparaison du coefficient de couplage K_{poutre} (%) après recalage mécanique

4.5.1.5 Conclusion partielle

Lors de l'évaluation du CCEM avec le facteur de couplage k_{31} et les fréquences propres de la poutre seule, les fréquences propres en déformations planes et contraintes planes après recalage mécanique sont très proches des expérimentales mais le CCEM correspondant affiche un écart plus important après l'application de ce recalage.

4.5.2 Nouvelle méthode d'évaluation du CCEM

Dans la nouvelle méthode d'évaluation du CCEM, la matrice piézoélectrique $[e]$ et la permittivité à déformation constante $[\epsilon^s]$ sont combinées simultanément avec la matrice d'élasticité $[C^E]$ des patches PZT pour aboutir à la relation (2.18). Le coefficient de couplage est défini alors en fonction de f_D qui provient de l'analyse modale d'une poutre avec des patches purement élastiques en utilisant la matrice $[C^D]$ et f_E qui provient de la poutre instrumentée sans considérer le couplage électromécanique en utilisant uniquement la matrice $[C^E]$. Le CCEM est ici calculé d'abord en déformations planes, puis en contraintes planes.

4.5.2.1 Déformations planes sans recalages

Les fréquences propres f_D et f_E et les coefficients de couplages en 2D-DP sont présentés dans la **Table 4-45** pour les quatre premiers modes. Les résultats des deux premiers modes de flexion sont comparés aux expérimentaux dans la **Table 4-46**. On note des erreurs importantes en particulier pour le premier mode. Toutefois, les erreurs des coefficients de couplages sont encore plus grandes.

Mode	f_D (Hz)	f_E (Hz)	K_D^2 (%)	K_D (%)
Flexion 1 (xy)	515.85	508.2	3.03	17.42
Flexion 2 (xy)	3533.3	3370.4	9.90	31.46
Flexion 3 (xy)	9733	9300.5	9.52	30.85
Membrane	15337	15152	2.46	15.67

Table 4-45 : Coefficients de couplage K_D (%) sans recalage (2D-DP)

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{CO} (Hz)	K_{exp} (%)
Expérience	Flexion 1 (xz)	417.81	419.85	9.91
	Flexion 2 (xz)	2955.43	2989.8	15.30
	Mode	f_E (Hz)	f_D (Hz)	K_D (%)
EF 2D-DP	Flexion 1 (xy)	508.2	515.85	17.42
	Flexion 2 (xy)	3370.4	3533.3	31.46
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1	21.64	22.87	75.80
	Flexion 2	14.04	18.18	105.72

Table 4-46 : Fréquences propres et CCEM sans recalages (2D-DP)

4.5.2.2 Déformations planes avec recalage mécanique

Pour recaler le modèle EF 2D-DP mécaniquement, les mêmes raideurs des ressorts appliqués pour la poutre instrumentée avec la matrice $[C^E]$, sont appliquées pour la poutre instrumentée avec la matrice $[C^D]$. Après le recalage mécanique, les fréquences en 2D-DP sont plus proches des valeurs expérimentales (voir **Table 4-47**).

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{CO} (Hz)
Expérience	Flexion 1 (xz)	417.81	419.85
	Flexion 2 (xz)	2955.43	2989.8
	Mode	f_E (Hz)	f_D (Hz)
EF 2D-DP RM	Flexion 1 (xy)	417.78	421.91
	Flexion 2 (xy)	2950.7	3091.1
Erreur (%)	Flexion 1	0	0.49
	Flexion 2	0.16	3.39

Table 4-47 : Fréquences propres après recalage mécanique (2D-DP)

La **Table 4-48** indique que les erreurs des coefficients de couplage 2D-DP/exp ont diminué après le recalage mécanique, mais restent importantes.

Mode	Exp	EF 2D-DP		Erreur (%)	
	K (%)	K _D (%) Sans RM	K _D (%) après RM	SR/exp	RM/exp
Flexion 1	9.91	17.42	14.10	75.80	42.28
Flexion 2	15.30	31.46	31.21	105.72	104.07

Table 4-48 : Comparaison avec l'expérience de K_D (%) après recalage mécanique (2D-DP)

4.5.2.3 Contraintes planes sans recalages

En 2D contraintes planes, les fréquences propres f_D et f_E sont calculées pour les trois premiers modes de flexions dans le plan (XY) et pour le mode membrane. Les coefficients de couplage correspondants sont présentés dans la **Table 4-49**. Les erreurs f_{CO}/f_D f_{CC}/f_E sont importantes pour les deux premiers modes de flexion, en particulier pour le mode 1 (voir **Table 4-50**). Cependant, celles des coefficients de couplage exp/2D-CP sont plus importantes pour le 2^{ème} mode que pour le premier.

Mode	f_D (Hz)	f_E (Hz)	K_D^2 (%)	K_D (%)
Flexion 1 (xy)	486.7	483.84	1.19	10.89
Flexion 2 (xy)	3264.3	3207.5	3.57	18.90
Flexion 3 (xy)	9015	8861.1	3.50	18.72
Membrane	14500	14436	0.89	9.43

Table 4-49 : Coefficients de couplage par K_D (%) sans recalage (2D-CP)

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{CO} (Hz)	K_{exp} (%)
Expérience	Flexion 1 (xz)	417.81	419.85	9.91
	Flexion 2 (xz)	2955.43	2989.8	15.30
	Mode	f_E (Hz)	f_D (Hz)	K_D (%)
EF 2D-CP	Flexion 1 (xy)	483.84	486.7	10.89
	Flexion 2 (xy)	3207.5	3264.3	18.90
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1	15.92	15.81	9.91
	Flexion 2	9.18	8.53	23.59

Table 4-50 : Fréquences propres et CCEM sans recalages (2D-CP)

4.5.2.4 Contraintes planes avec recalage mécanique

Le recalage mécanique a réduit considérablement les erreurs en fréquences pour les deux premiers modes (voir **Table 4-51**). Cependant, l'erreur entre les coefficients de couplage numérique et expérimental a augmenté après le recalage mécanique pour le second mode de flexion et a baissé pour le premier comme indiqué dans la **Table 4-52**.

	Mode	f_{CC} (Hz)	f_{CO} (Hz)
Expérience	Flexion 1 (xz)	417.81	419.85
	Flexion 2 (xz)	2955.43	2989.8
	Mode	f_E (Hz)	f_D (Hz)
EF 2D-CP RM	Flexion 1 (xy)	417.83	419.64
	Flexion 2 (xy)	2910.5	2962.4
Erreur (%) (réf exp)	Flexion 1	0	0.05
	Flexion 2	1.52	0.92

Table 4-51 : Fréquences propres après recalage mécanique (2D-CP)

Mode	Exp	EF 2D-CP		Erreur (%) (réf exp)	
	K (%)	K_D (%) sans RM	K_D (%) après RM	SR/exp	RM/exp
Flexion 1	9.91	10.89	9.32	9.91	5.94
Flexion 2	15.30	18.90	18.97	23.59	24.02

Table 4-52 : Comparaison du coefficient de couplage K_D (%) après recalage mécanique (2D-CP)

4.5.3 Conclusion partielle

La nouvelle méthode d'évaluation du CCEM en déformations planes et contraintes planes permet l'obtention de résultats satisfaisants pour les fréquences propres f_D et f_E et le CCEM correspondant, notamment après le recalage mécanique pour les deux premiers modes de flexion.

4.6 Synthèse des évaluations approchées en 2D du CCEM

Après avoir évalué les modèles EF en 2D-DP et 2D-CP séparément avec différentes méthodes de calcul du CCEM. Une comparaison de ces coefficients de couplage est effectuée pour les deux premiers modes de flexion après recalage mécanique avec les résultats expérimentaux dans la **Table 4-53**. La prise en compte de l'équipotentialité a réduit le coefficient de couplage en 2D-DP et 2D-CP. Les CCEM sans équipotentialité sont proches des CCEM des éléments purement élastiques avec les constantes modifiées $[C^D]$ en contraintes planes et déformations planes pour les deux

premiers modes de flexion. Les valeurs du CCEM de la poutre nue sont plus élevées que les CCEM de la poutre instrumentée avec les éléments piézoélectriques. Finalement, les résultats numériques en CP sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux en DP.

K (%)	Modes		Exp_instru (%)	EFPE_RM_Sep_instru (%)	EFPE_RM_ep_instru (%)	EFEL_RM_D_instru (%)	EFEL_PE_RM_nue (%)	Exp_nue (%)
	2D	Exp/3D						
DP	1	1	9.91	13.87	11.53	14.10	15.48	14.96
	2	4	15.30	31.14	29.22	31.21	5.23	12.91
CP	1	1	9.91	9.06	7.55	9.32	15.15	14.96
	2	4	15.30	18.89	17.81	18.97	6.57	12.91

Table 4-53 : Comparaison des coefficients de couplage après recalage mécanique

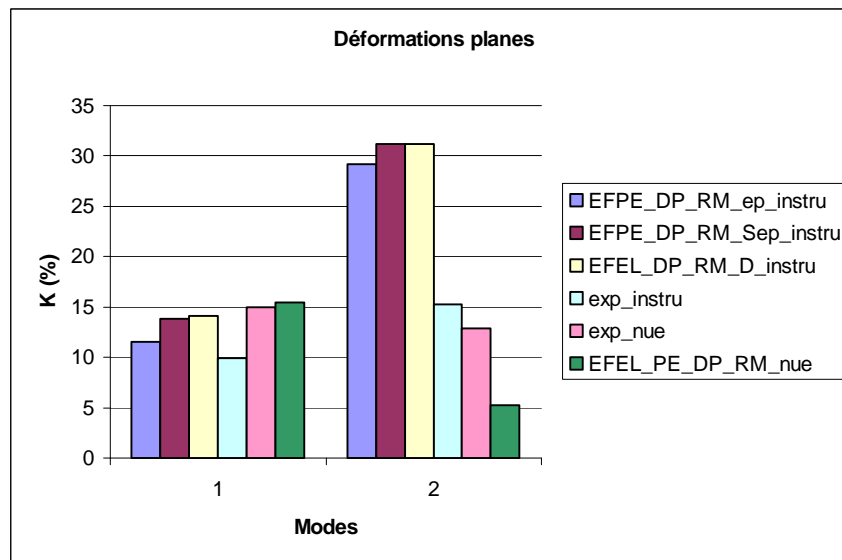


Figure 4-19 : Comparaison de K (%) pour les deux premiers modes après recalage mécanique en 2D-DP

La **Figure 4-19** montre que les CCEM numériques de la poutre instrumentée avec des éléments purement élastiques et des éléments piézoélectriques avec et sans équipotentialité en déformations planes après le recalage mécanique surestiment le CCEM expérimental de la poutre instrumentée pour les deux modes. Le CCEM numérique de la poutre instrumentée avec les éléments piézoélectriques avec la prise en compte de l'équipotentialité est le plus proche du CCEM expérimental en particulier pour le mode 1.

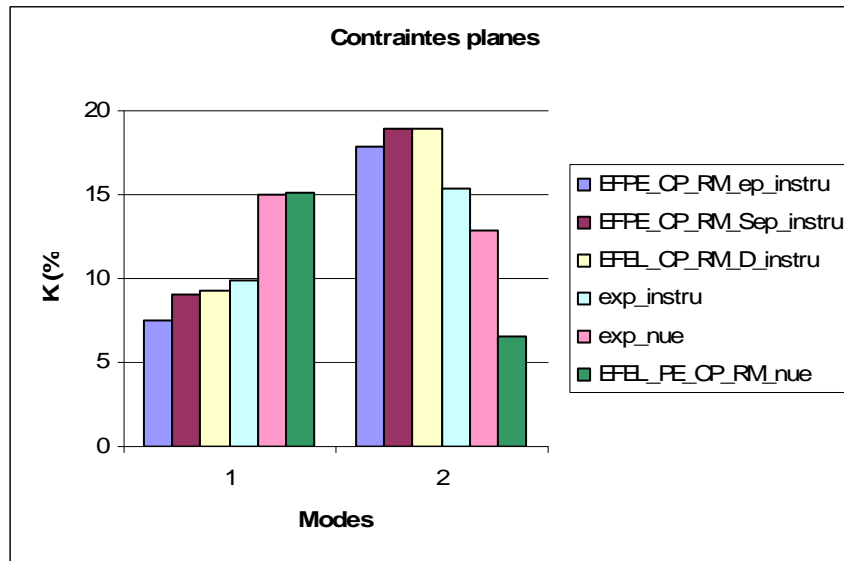


Figure 4-20 : Comparaison de K (%) pour les deux premiers modes après recalage mécanique en 2D-CP

En contraintes planes, les CCEM numériques de la poutre instrumentée avec des éléments purement élastiques et des éléments piézoélectriques avec et sans equipotentialité après le recalage mécanique sous-estiment le CCEM expérimental de la poutre instrumentée pour le mode 1 et le surestiment pour le mode 2 (voir **Figure 4-20**).

4.7 Conclusion

Les lois de comportement d'un matériau piézoélectrique dans un milieu tridimensionnel et bidimensionnel en déformations planes et contraintes planes ont été rappelées au début de ce chapitre suivies des simulations numériques dans Ansys® en 2D déformations planes et contraintes planes avec recalages mécanique, électrique et électromécanique de la poutre longue munie de patches piézoélectriques. La comparaison des résultats de la poutre longue obtenus sans recalages aux résultats expérimentaux et numériques en 3D a permis de conclure que :

- Le coefficient de couplage en 2D-CP est proche de celui en 3D. Ce résultat est conforme avec le fait que l'état de contraintes planes approche de près l'état de contrainte anti-plan caractéristique des poutres.
- Les résultats en 2D-DP sont sensibles à la largeur des patches. Le coefficient de couplage en 2D-DP nécessite un coefficient correcteur dépendant du ratio des largeurs patch/poutre.

Le même protocole d'identification et de recalage du modèle 3D a été appliqué aux modèles 2D-CP et 2D-DP. Ce recalage a permis d'approcher les résultats

expérimentaux (les deux premiers modes seulement) et numériques en 3D et a permis de conclure que :

- Les fréquences propres recalées en 2D-DP et 2D-CP sont très proches des fréquences expérimentales pour les deux premiers modes considérés.
- Les fréquences propres en 2D-CP et en 2D-DP en CO et CC sont très proches des fréquences propres en 3D pour les deux configurations de polarisation en particulier pour les deux premiers modes.
- Les coefficients de couplage en 2D-DP corrigés et 2D-CP recalés sont proches du coefficient de couplage en 3D en connexions série et parallèle.

Des simulations numériques de la poutre courte adaptative avec des éléments finis purement élastiques et piézoélectriques et de la poutre courte nue en 2D déformations planes et contraintes planes ont été effectuées dans quatre cas (sans recalages, avec recalage mécanique, électrique et électromécanique) pour différentes expressions du CCEM. Elles ont permis de conclure que :

- Les résultats en 2D-CP sont plus acceptables que les résultats en 2D-DP sans recalages, ces derniers surestiment les résultats en 3D qui sont bornés par les résultats en 2D-DP et 2D-CP.
- L'utilisation d'éléments purement élastiques pour les patchs permet d'approcher les résultats des éléments piézoélectriques sans équipotentialité pour les deux premiers modes de flexion en 2D-DP et 2D-CP.
- L'équipotentialité est indispensable en 2D comme en 3D pour approcher aux mieux les résultats expérimentaux.

Chapitre 5 : Extension aux structures composites

Suite aux précédentes études des structures métalliques, une plaque composite multicouche du type aéronautique est ici étudiée pour la validation des évaluations précédentes du CCEM. Une campagne de mesure a été conduite suivie de simulations numériques dans Ansys[®]. Elles concernent la plaque seule et la plaque instrumentée avec un grand patch piézocéramique centré. Les tests de la plaque seule visent la validation du modèle EF qui est utilisé par la suite dans la conception de la plaque instrumentée ; un grand patch piézocéramique a été positionné au centre de la plaque après analyse des énergies de déformation de la plaque seule pour les six premiers modes présents dans la bande de fréquences expérimentales [0 1] kHz.

5.1 Essais et simulation d'une plaque composite

5.1.1 Protocole expérimental

L'analyse modale expérimentale d'une plaque composite seule a été menée dans le but de valider la procédure de sa modélisation par EF. La plaque a été suspendue au moyen de deux fils pour s'approcher des conditions aux limites libres. Un pot vibrant est ensuite attaché à un côté de la plaque (**Figure 5-1**) pour son excitation, et un capteur laser a été utilisé pour mesurer son accélération à différents points de mesure (cf. gauche de la **Figure 5-2**) afin d'identifier non seulement les fréquences propres, mais aussi les déformées modales. Les coordonnées des points d'excitation et de détection sont indiquées à droite de la **Figure 5-2**.

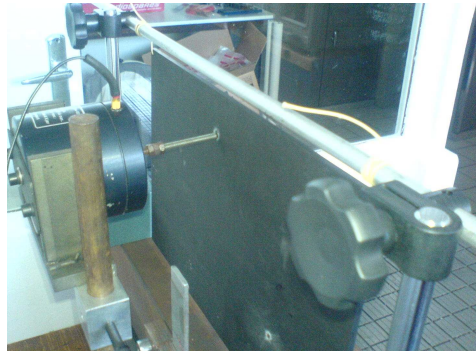


Figure 5-1 : Dispositif expérimental de la plaque composite

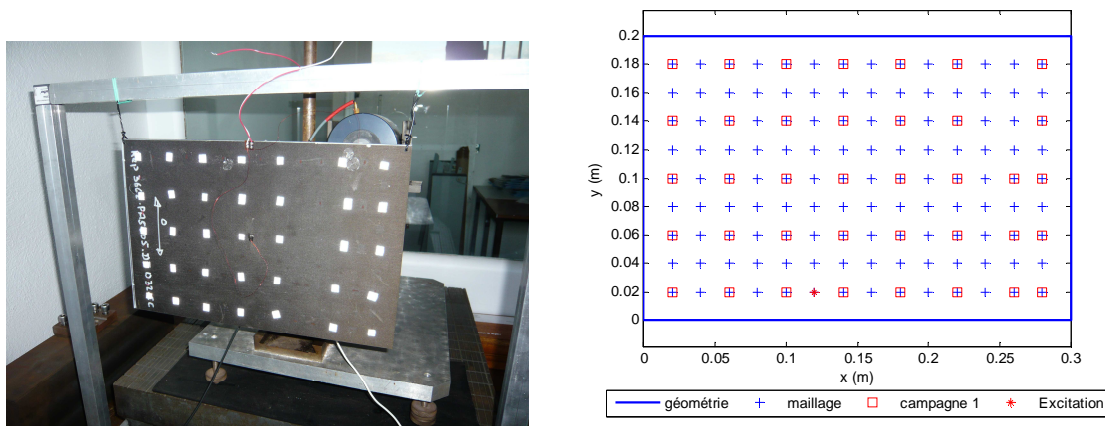


Figure 5-2 : Cibles réfléchissantes pour les mesures au laser (gauche) et coordonnées des points d'excitation/mesures (droite)

Un générateur de bruit blanc est utilisé pour piloter le pot vibrant dans la bande de fréquence [10 1200] Hz. Les deux signaux de sortie, du générateur et du capteur, sont numérisés et transférés à un PC via une carte d'acquisition National Instrument (NIDAQ). Les fonctions de réponse en fréquence (FRF) sont ensuite tracées dans le but d'extraire les fréquences propres. Un échantillon des FRF post-traitées est donné dans la **Figure 5-3** et les fréquences propres extraites pour les huit premiers modes sont répertoriées dans la **Table 5-1**. La **Figure 5-4** présente les déformations modales des huit premiers modes après le post-traitement des FRF de tous les points de mesure de la **Figure 5-2**.

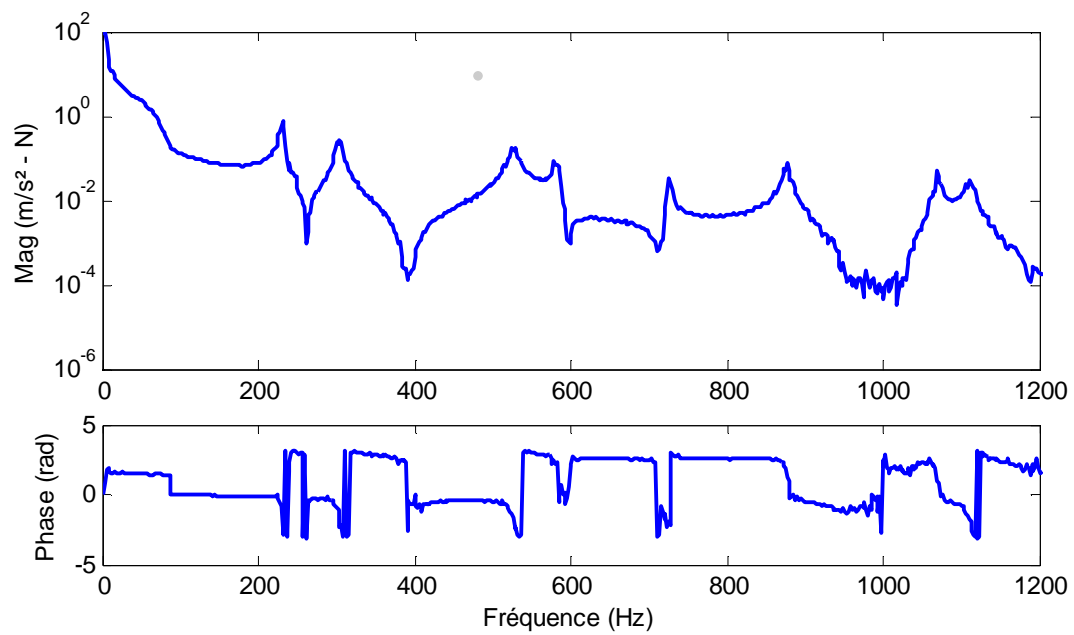


Figure 5-3 : Echantillon des FRF post-traitées (haut : module, bas : phase)

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
f (Hz)	228.95	301.35	524.04	580.07	727.3	874.6	1070.03	1108

Table 5-1 : Fréquences propres moyennées extraites des FRF post-traitées

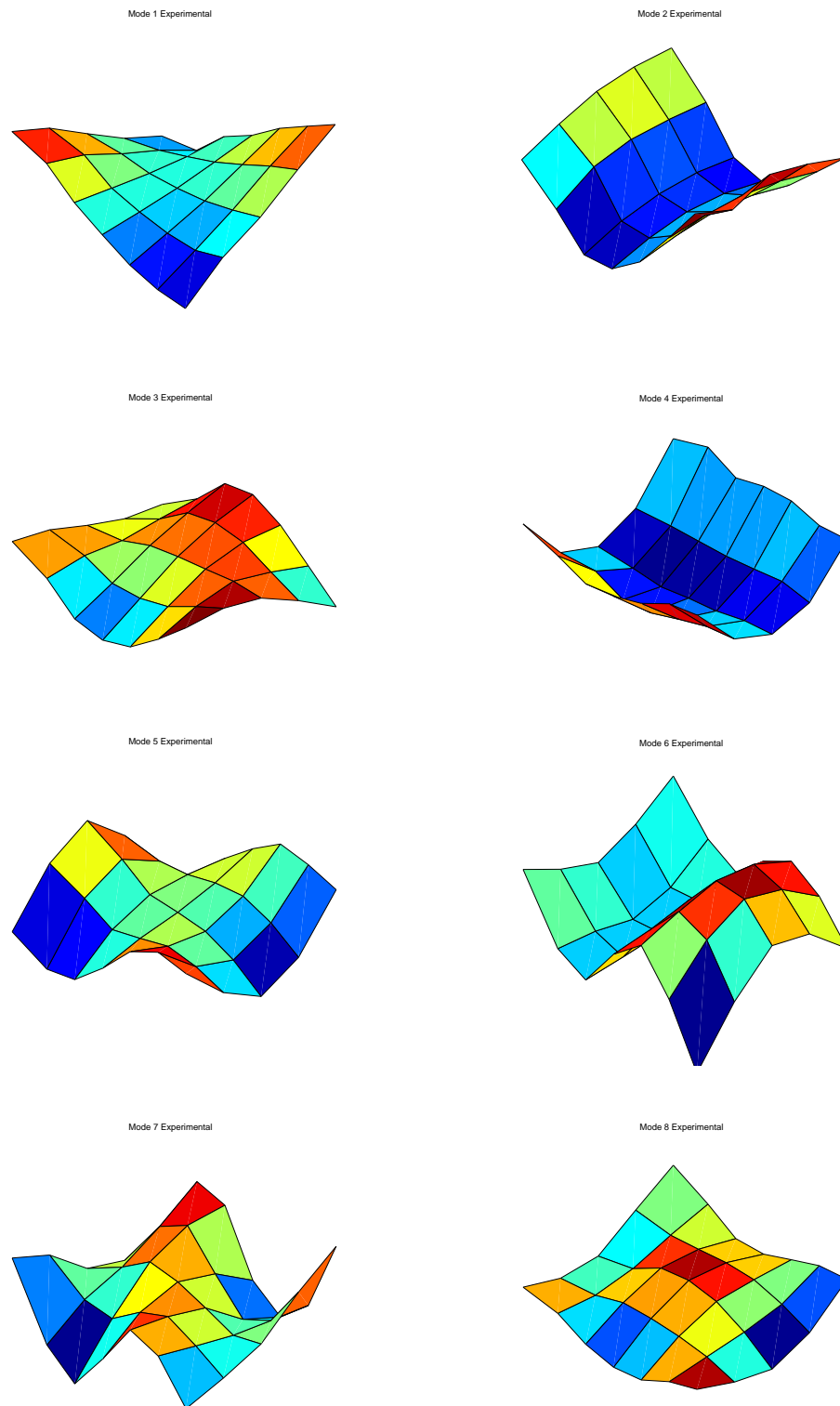


Figure 5-4 : Les huit premières déformées modales après le post-traitement des FRF de tous les points de mesures de la Figure 5-2

5.1.2 Simulation par EF

La plaque composite a une longueur de 300 mm, une largeur de 200.3 mm et une épaisseur de 4.2 mm. Elle est constituée d'un composite stratifié symétrique de 16 plis avec une séquence d'empilement $[90/45/0/-45]_{2S}$ (**Figure 5-5**) et une masse volumique mesurée de 1521 Kg/m^3 . Les propriétés des matériaux de ses plis sont complétées (**Table 5-2**) pour obtenir les données manquantes par rapport à la table de données 2D identifiées pour une plaque similaire de dimensions $300 \times 200 \times 4.13 \text{ mm}^3$ au moyen d'une procédure d'optimisation. Cette dernière est basée sur la minimisation de l'erreur entre les fréquences mesurées et numériques [41].

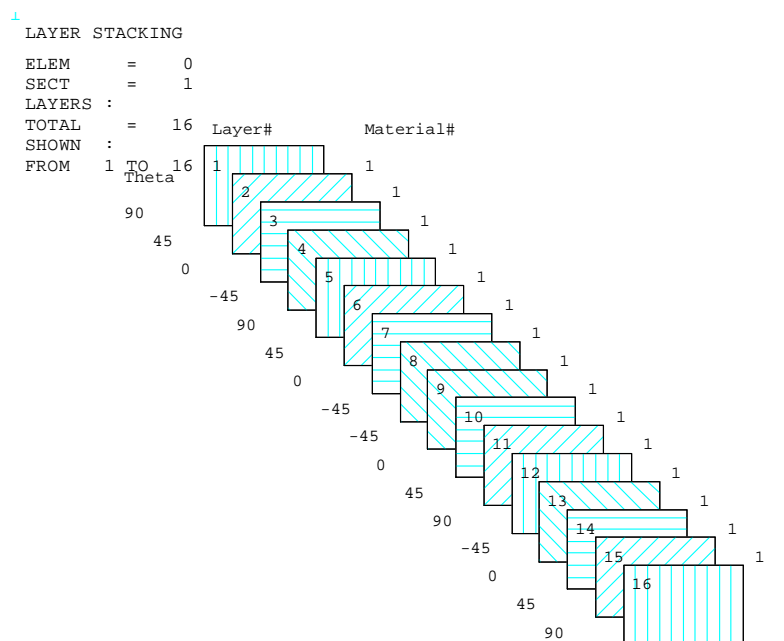


Figure 5-5 : Stratification de la plaque composite $[90/45/0/-45]_{2S}$

La plaque composite est simulée en utilisant l'EF multicouche SOLID191 3D à 20 nœuds du logiciel EF Ansys® (**Figure 5-6-a**). Le maillage EF a 17303 nœuds et 2400 éléments (**Figure 5-6-b**).

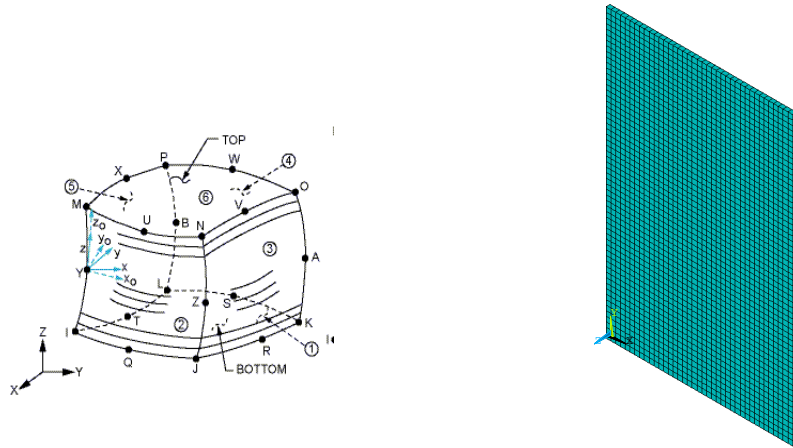


Figure 5-6 : (a) L'EF multicouche Solid191 ; (b) Maillage EF 3D de la plaque composite

Constantes	E_1 (GPa)	$E_2 = E_3$ (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}
Valeurs	129.8	10.9	5.7**	4.4**	3.2	0.37	0.55*

* Calculé à partir des données d'une autre plaque composite similaire [41] ** Ces valeurs doivent être égales en théorie

Table 5-2 : Données 3D complétées du matériau de la plaque composite

Les fréquences propres numériques ont été extraites à l'aide de la méthode Lanczos et sont présentées dans la **Table 5-3** pour les huit premiers modes et leurs erreurs correspondantes par rapport aux fréquences expérimentales (voir **Table 5-1**). Des erreurs acceptables sont obtenues pour la majorité des modes, sauf pour les 2^{ème}, 3^{ème} et 8^{ème} modes où elles dépassent 6% mais demeurent inférieures à 9%. Les déformées modales numériques correspondant à celles identifiées expérimentalement (voir **Figure 5-4**) sont présentées dans la **Figure 5-7**. Cette correspondance est confirmée par le calcul de la matrice de MAC présenté dans la **Figure 5-8**. Rappelons que la matrice de MAC (Modal Assurance Criterion) est la matrice de corrélation modale, elle est souvent utilisée pour la comparaison entre deux ensembles de modes propres. Les modes expérimentaux et numériques correspondent à ces deux ensembles dans le cas de la **Figure 5-8**. La diagonale de cette matrice a un MAC égal à 1 pour les huit premiers modes, ainsi les déformées modales numérique et expérimentale sont identiques pour chaque mode et la corrélation est alors parfaite.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
Type	(1,1)	(0,2)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(0,3)	(1,3)	(2,2)
f (Hz)	235.25	319.63	569.82	595.28	741.74	913.33	1098.3	1198.5
Erreur (%)	2.75	6.07	8.74	2.62	1.99	4.43	2.64	8.17

Table 5-3 : Fréquences numériques et leurs erreurs pour les huit premiers modes

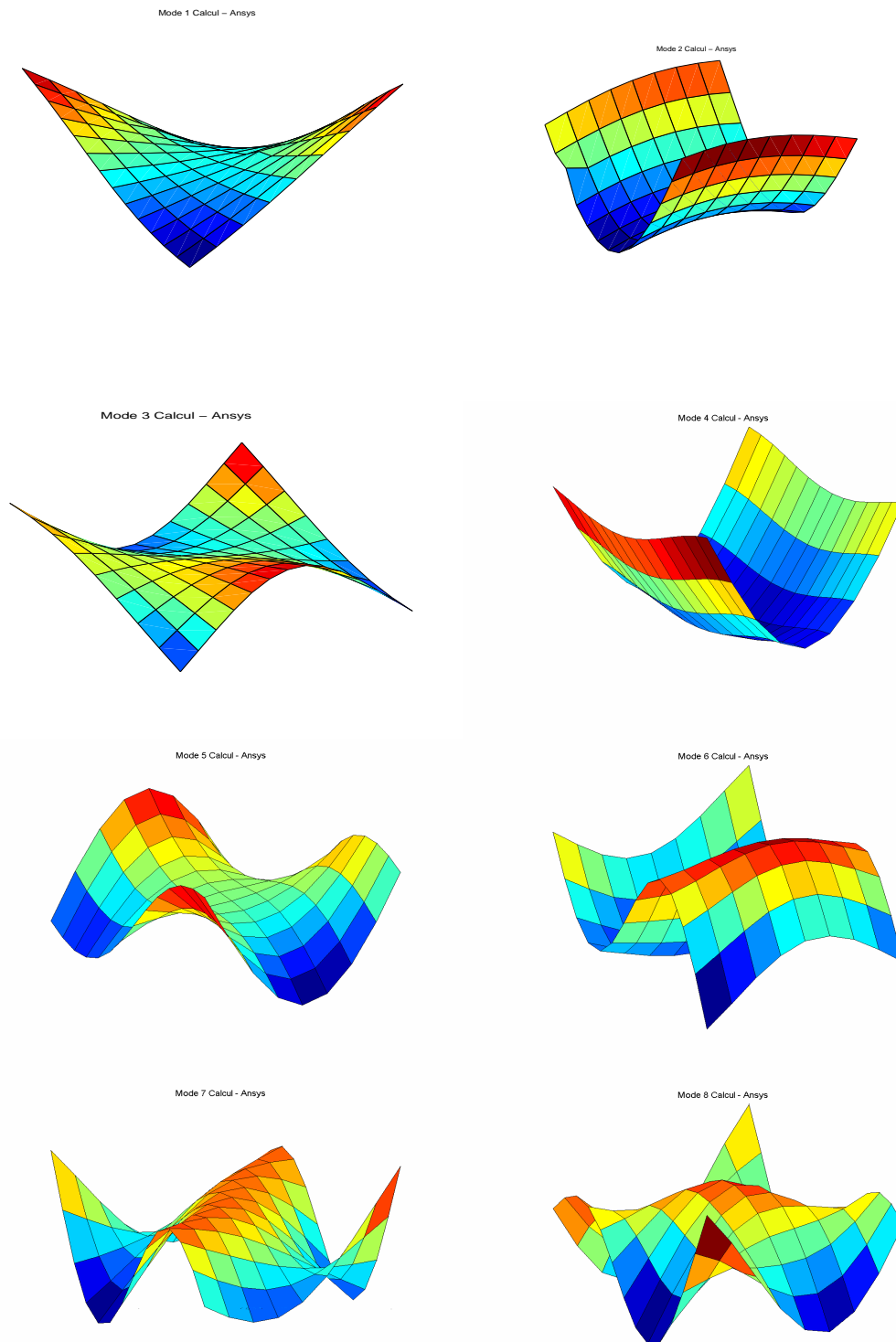


Figure 5-7 : Les huit premières déformées modales numériques correspondant aux déformées expérimentales identifiées dans la Figure 5-4

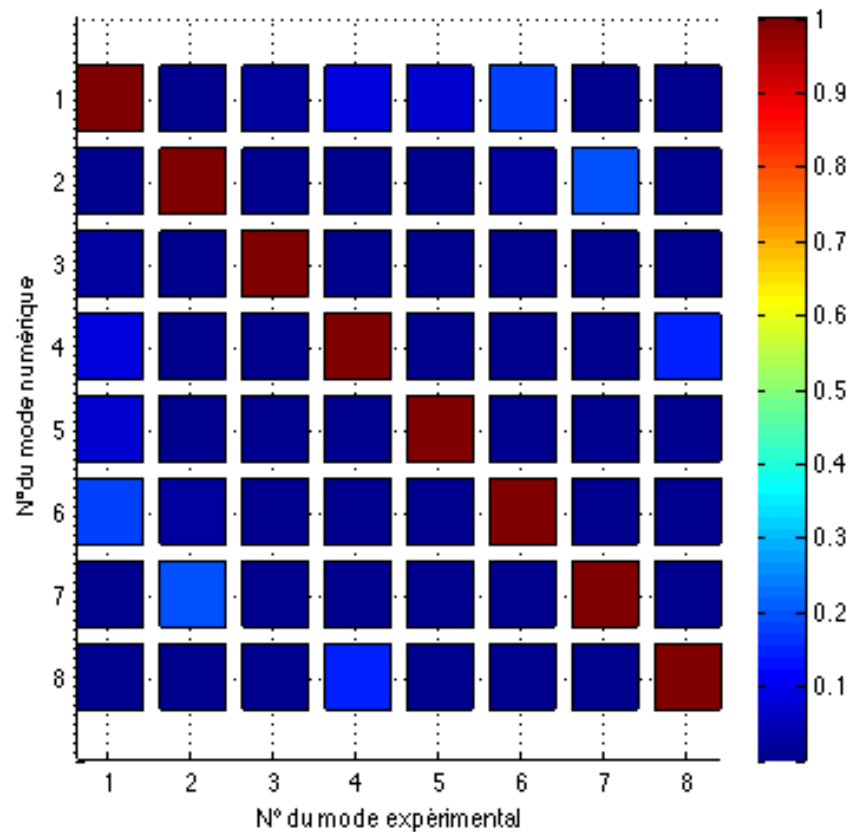
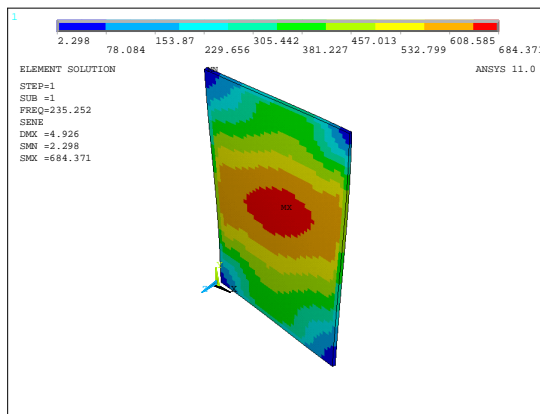
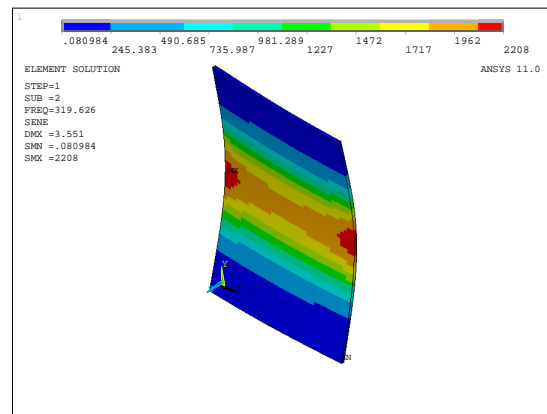


Figure 5-8 : Matrice de MAC pour les modes expérimentaux et numériques

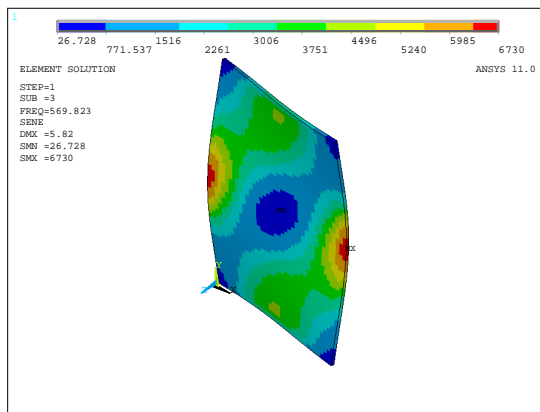
Une fois validée, le modèle EF est utilisé pour optimiser la position d'un grand patch PZT PIC255 (acheté auprès de PI Ceramic). À cet effet, les énergies de déformation modales des huit premiers modes ont été analysées (**Figure 5-9**). Le patch doit être collé sur la surface où l'énergie de déformation modale atteint son maximum pour un mode donné. Cela s'est avéré être le centre de la plaque pour les 1^{er}, 2^{ème} et 4^{ème} modes.



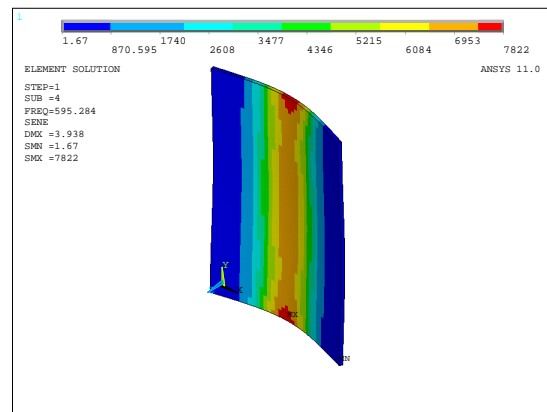
(a) 1^{er} mode



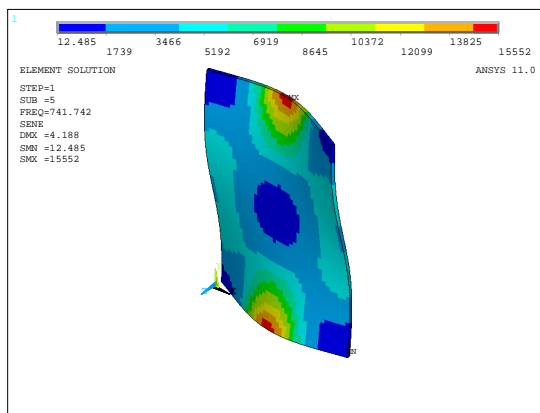
(b) 2^{ème} mode



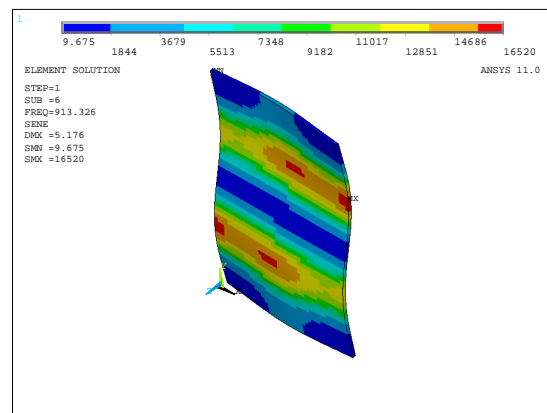
(c) 3^{ème} mode



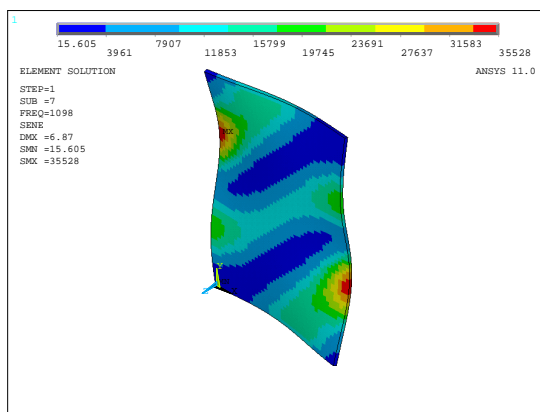
(d) 4^{ème} mode



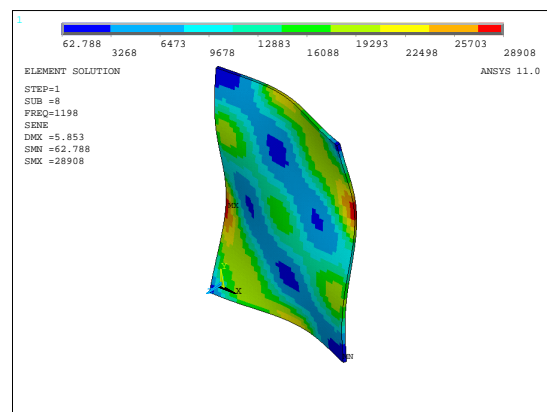
(e) 5^{ème} mode



(f) 6^{ème} mode



(g) 7^{ème} mode



(h) 8^{ème} mode

Figure 5-9 : Présentation des énergies de déformation modales des huit premiers modes

5.2 Simulation et essais de la plaque composite instrumentée

5.2.1 Analyse par EF

La plaque composite instrumentée avec un patch PZT PIC255 centré, de dimensions $50 \times 25 \times 0.3 \text{ mm}^3$, d'une masse volumique mesurée de 7720.3 Kg/m^3 et de propriétés de matériau comme dans la **Table 2-1**, est simulée numériquement avec des EF 3D à 20 nœuds dans Ansys®; le multicouche SOLID191 et le piézoélectrique SOLID226 sont sélectionnés, respectivement, pour la plaque et le patch PZT. Le maillage EF a 28280 nœuds et 4200 éléments (voir **Figure 5-10**).

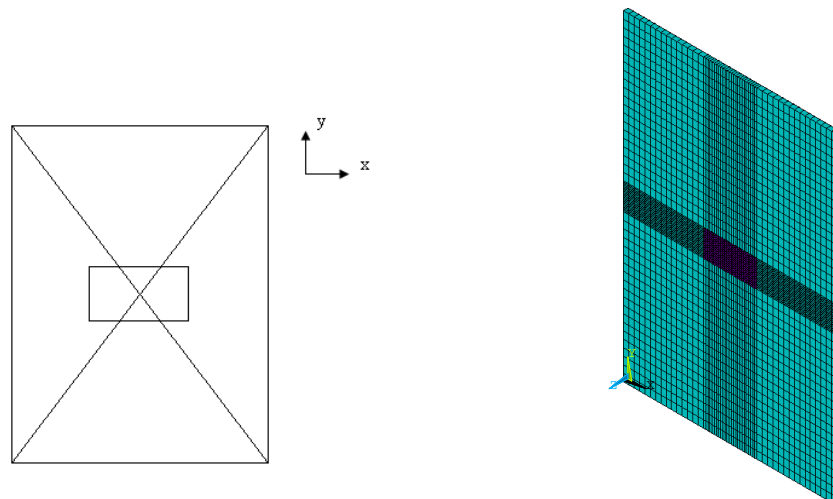


Figure 5-10 : (a) Position du PZT PIC255 ; (b) Modèle EF 3D de la plaque composite instrumentée

Des masses ponctuelles ont été ajoutées pour prendre en compte les masses du pot vibrant d'une valeur de 50g et de l'accéléromètre qui pèse 7.16g. Ces masses sont simulées par l'élément mass21 dans Ansys®; elles sont placées sur les nœuds correspondants aux endroits où sont positionnés le pot vibrant et l'accéléromètre. Le pot vibrant a été représenté par deux éléments mass21 comme le montre la **Figure 5-11**, alors que le maillage de l'accéléromètre contient 38 masses et donc 38 éléments mass21 (voir **Figure 5-12**). Les coordonnées des nœuds sélectionnés sont données dans l'Annexe 2. Les fréquences propres numériques ont été extraites en utilisant la méthode Lanczos pour les deux conditions limites électriques CC et CO (avec la condition d'équipotentialité) et sont présentées dans la **Table 5-4**. Le CCEM modal effectif est post-traité en utilisant la relation (2.8) (voir **Table 5-4**). On note que seuls les 3^{ème} et 8^{ème} modes ont un couplage important qui dépasse les 5%.

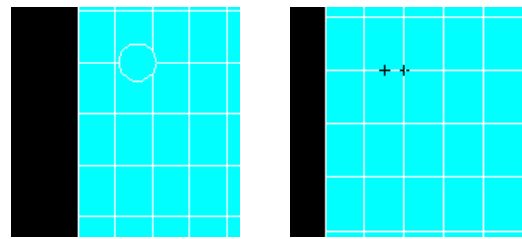


Figure 5-11 : Position et maillage du pot vibrant

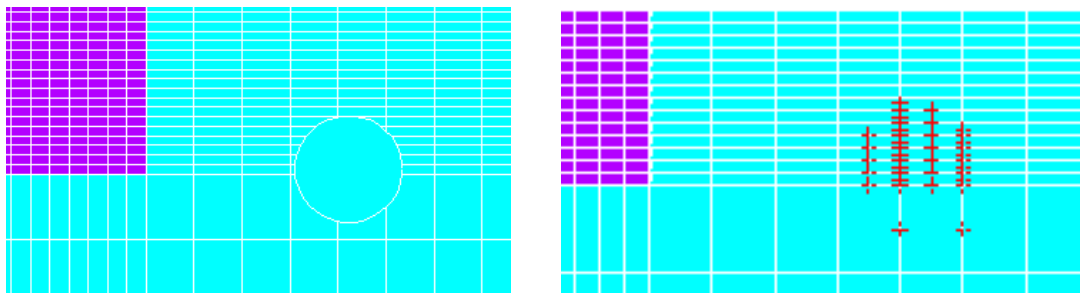


Figure 5-12 : Position et maillage de l'accéléromètre

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
Type	(1,1)	(0,2)	(2,0)	(1,2)	(2,1)	(0,3)	(1,3)	(2,2)
f_{CC} (Hz)	214.59	304.29	523.14	557.79	693,17	864,6	1063,6	1176,4
$f_{CO_{ep}}$ (Hz)	214.6	304.48	523.91	557.8	693.49	864.62	1064.2	1178.7
K^2 (%) (2.8)	0.00	0.12	0.29	0.00	0.09	0.00	0.11	0.39
K_{ep} (%)	0.97	3.53	5.43	0.60	3.04	0.68	3.36	6.26

Table 5-4 : Fréquences propres numériques CC/CO_{ep} et CCEM_{ep} pour les huit premiers modes

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
Type	(1,1)	(0,2)	(2,0)	(1,2)	(2,1)	(0,3)	(1,3)	(2,2)
f_{CC} (Hz)	214.59	304.29	523.14	557.79	693,17	864,6	1063,6	1176,4
f_{CO} (Hz)	214.6	304.49	523.93	557.83	693.51	864.65	1064.2	1178.7
K^2 (%) (2.8)	0.00	0.13	0.30	0.01	0.10	0.01	0.11	0.39
K (%)	0.97	3.63	5.5	1.2	3.13	1.08	3.36	6.26
Erreur K (%)	0	2.6	1.3	-	3.08	58.12	0	0

Table 5-5: Fréquences propres numériques CC/CO et CCEM pour les huit premiers modes

A titre de comparaison, l'équipotentialité n'a pas été prise en compte en CO dans la **Table 5-5**. Cette condition n'affecte pas les résultats des huit premiers modes, sauf pour les modes 4 et 6 où l'erreur dépasse les 58%. Cependant, le couplage pour ces deux derniers est toujours faible. Ce résultat est dû à la petitesse de la taille du patch par rapport aux dimensions de la plaque ; la surface de plaque est 48 fois plus grande que celle du patch. Ainsi le couplage électromécanique effectif est insensible à l'équipotentialité dans le cas de cette plaque.

Les modes pour lesquels le CCEM devait être le plus important au vue des résultats de l'analyse des énergies de déformation ne sont pas les plus couplés. Ceci s'explique en partie par le fait que les déformées modales avec et sans instrumentation sont assez différentes comme l'illustre la **Figure 5-13**. En effet la plaque est assez légère, le patch est de grande taille et les matériaux PZT sont rigides, ce qui modifie significativement le comportement modal et par conséquent la répartition d'énergie de déformation.

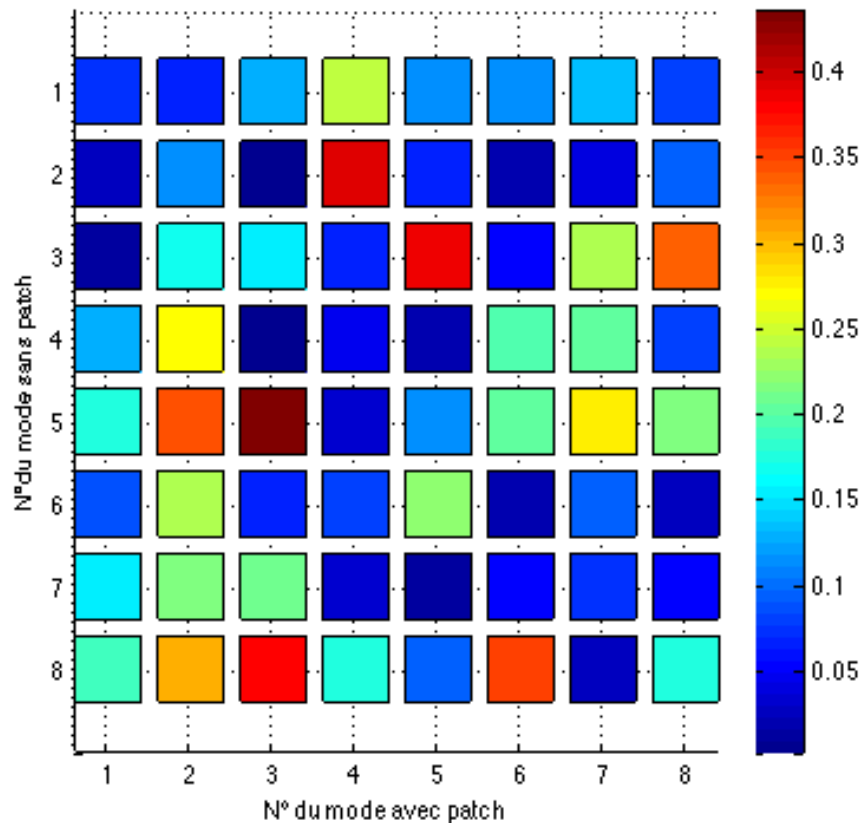


Figure 5-13 : Matrice de MAC pour les modes numériques de la plaque avec et sans patch

5.2.2 Validation expérimentale

La plaque a été testée en configuration libre-libre. Elle a donc été suspendue en position verticale. L'excitation est effectuée au moyen d'un pot vibrant. La mesure est effectuée grâce à un accéléromètre mono axe à la place du capteur Laser (voir **Figure 5-14**). La bande de fréquences d'intérêt se situe entre 100 Hz et 2000 Hz. Le signal d'excitation imposé est de type sinus glissant dans la bande d'intérêt sur une durée de 60 s. La résolution fréquentielle est un élément déterminant pour calculer le coefficient de couplage électromécanique (cf. Annexe 3). Cette résolution dépend directement de la fréquence d'échantillonnage et du nombre de points retenus sur un bloc d'acquisition.

D'autre part, pour une même précision sur le coefficient de couplage, cette résolution doit être bien meilleure pour les modes basses fréquences (BF) que pour les modes hautes fréquence (HF) (**Figure 5-15**). Nous avons donc choisi un ensemble de paramètres pour les premiers modes (BF) et un ensemble de paramètres pour les modes supérieurs (HF). Du coup, l'essai se déroule en deux temps ; la bande 150-600 Hz est d'abord étudiée et la bande 500–1500 Hz est ensuite traitée. L'erreur sur K^2 est proportionnelle à la résolution fréquentielle (cf. Annexe 3), elle est calculée à 200 Hz, qui présente la fréquence la plus proche de celle du 1^{er} mode, pour les premiers modes et à 2000 Hz, qui présente la fréquence la plus proche de celle du 8^{ème} mode, pour les modes supérieurs (voir **Table 5-6**).



Figure 5-14 : Dispositif expérimental de la plaque instrumentée

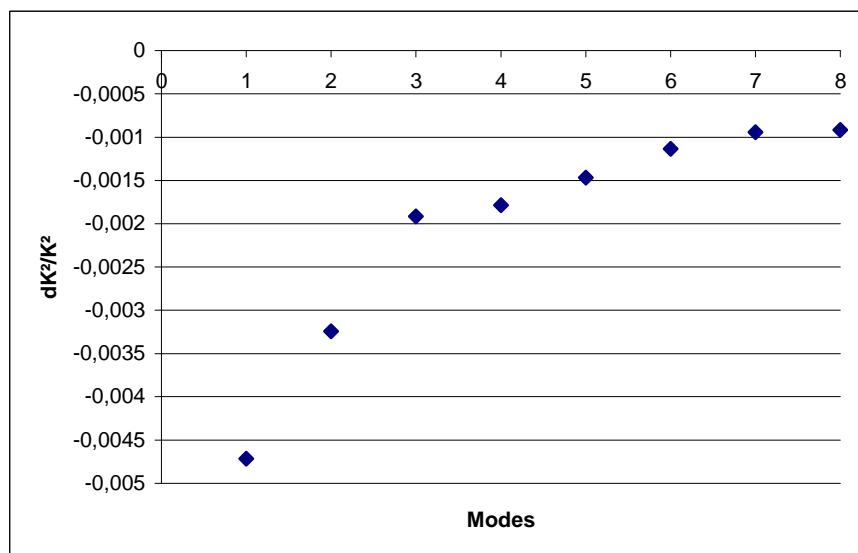


Figure 5-15 : Erreur sur K^2 pour les huit premiers modes expérimentaux

	Freq. Echant.	Nb Echant.	Res. Freq.	Erreur sur K^2	Fréquence
Modes BF	2000 Hz	65536	0.0305 Hz	-0.01525 %	à 200 Hz
Modes HF	3846 Hz	16384	0.2348 Hz	-0.01174 %	à 2000 Hz

Table 5-6 : Paramètres utilisés pour les premiers modes et les modes supérieurs

L'acquisition se fait à l'aide d'une carte National Instrument. Les Fonctions de Réponse en Fréquence sont construites grâce à la fonction H1 et avec une moyenne linéaire sur 100 blocs ; elles sont présentées dans les **Figure 5-16** et **Figure 5-17**. Neuf modes sont visibles dans la bande 150–1500 Hz. Les fréquences propres CC/CO ont été extraites des FRF correspondantes qui sont post-traitées des signaux mesurés et sont présentées dans la **Table 5-7**.

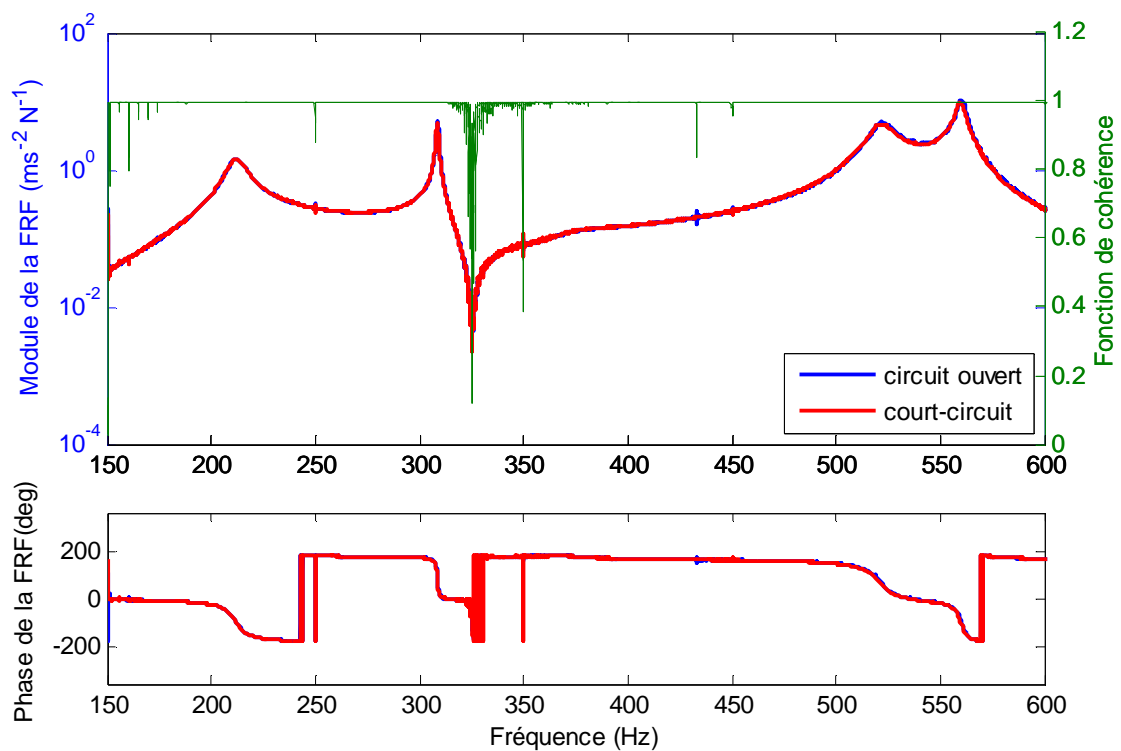


Figure 5-16 : Fonction de réponse en fréquence pour la bande 150 – 600 Hz

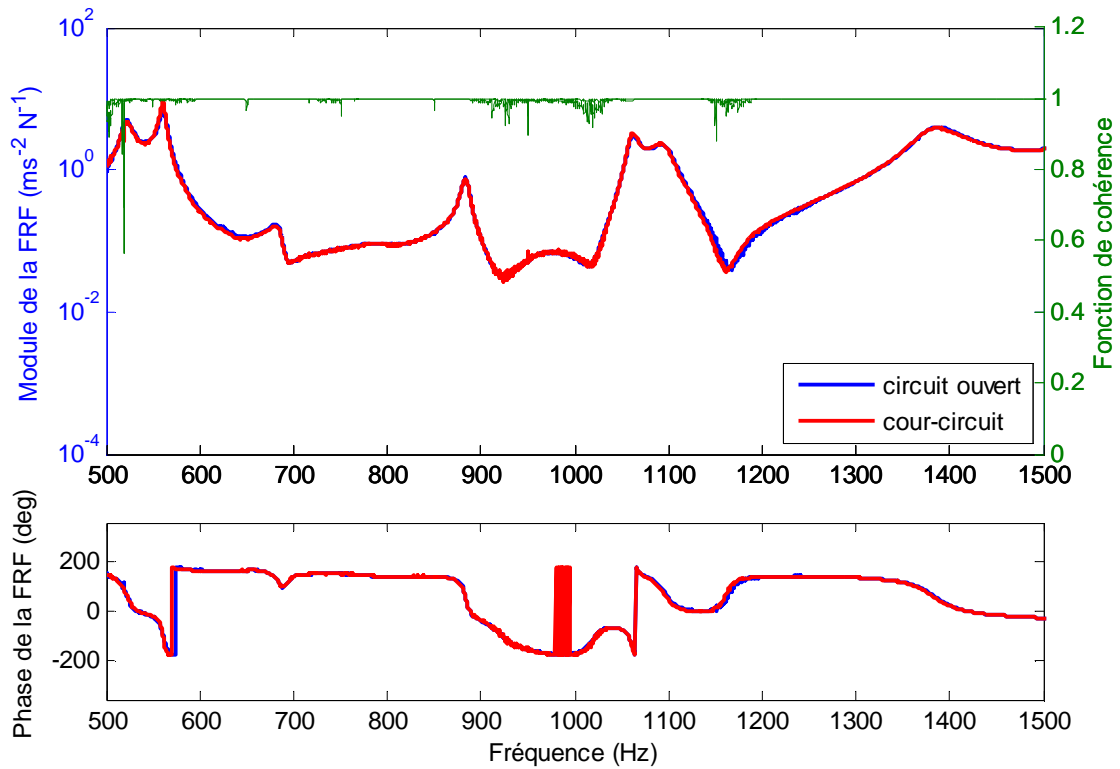


Figure 5-17 : Fonction de réponse en fréquence pour la bande 500 – 1500 Hz

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
Type	(1.1)	(0.2)	(2.0)	(1.2)	(2.1)	(0.3)	(1.3)	(2.2)
f_{CC} (Hz)	212.01	308.67	521.94	559.92	681.57	883.46	1062.00	1092.40
f_{COep} (Hz)	212.06	308.82	522.44	560.17	681.92	883.46	1062.60	1094.40
K^2 (%) (2.8)	0.05	0.10	0.19	0.09	0.10	0.00	0.11	0.37
K (%)	2.17	3.16	4.36	2.99	3.21	0.00	3.36	6.05

Table 5-7 : Fréquences propres expérimentales CC/CO_{ep} et CCEM_{ep} pour les huit premiers modes

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
Erreur f_{CC} (%)	1.22	1.42	0.23	0.38	1.70	2.13	0.15	7.69
Erreur f_{CO} (%)	1.20	1.41	0.28	0.42	1.70	2.13	0.15	7.70
Erreur K (%)	55.51	11.85	24.49	79.97	5.33	-	0.02	3.41

Table 5-8 : Erreur (%) expérimental/numérique pour les huit premiers modes

La comparaison des résultats numériques (**Table 5-4**) et expérimentaux (**Table 5-7**) indique que les fréquences propres expérimentales des modes impairs sont plus basses que les numériques et, inversement, les fréquences propres expérimentales des modes paires sont plus importantes que celles calculées par EF avec des erreurs raisonnables pour les sept premiers modes (**Table 5-8**) ne dépassant pas 2.13% mais plus élevée pour le 8^{ème} mode (7.7%).

Les modes 3 et 8 ont un couplage important ($>4\%$). Les modes 5 et 7 sont légèrement couplés ($K \approx 3\%$). Toutefois, les modes 1 et 4 légèrement couplés expérimentalement ($2\% < K < 3\%$) sont quasi-découplés numériquement ($<1\%$) avec une erreur (%) très importante ($>55\%$) inversement au mode 6, qui est légèrement couplé numériquement, est découplé expérimentalement (**Figure 5-18**).

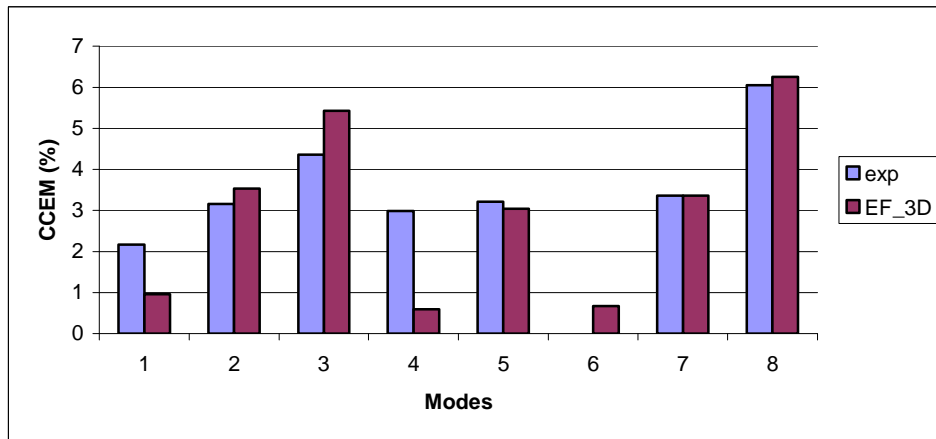


Figure 5-18 : Comparaison du $CCEM_{ep}$ (%) expérimental et numérique pour la plaque+patch pour les huit premiers modes

5.3 Discussions

La plaque composite a été étudiée expérimentalement et numériquement, avec et sans patch piézo-céramique PZT PIC255, pour l'évaluation du CCEM. Les expériences de la plaque seule ont été utilisées pour valider le modèle EF 3D qui a servi à optimiser la position du patch central et pour la conception de la configuration adaptative. Cette dernière a été ensuite analysée expérimentalement en CC et CO. Les fréquences obtenues ont été post-traitées afin d'obtenir le CCEM modal effectif. Le CCEM effectif modal dépend de la position du patch. La méthode utilisée pour déterminer le bon placement du patch est basée sur les énergies de déformations modales. Elle a conduit à une position centrale pour privilégier le couplage des modes 1, 2 et 4. Cependant les modes les plus couplés expérimentalement et par EF sont les modes 3 et 8. L'étude de l'énergie de déformation modale s'est avérée être une méthode non fiable dans le cas de la plaque et qu'il est indispensable de procéder autrement pour optimiser la position du patch. La comparaison des résultats obtenus avec et sans équipotentialité pour la plaque instrumentée a montré que, dans cette application, cette condition électrique a eu de l'influence sur le CCEM effectif du 4^{ème} et 6^{ème} mode. Ceci peut être dû à la taille du patch par rapport à celle de la plaque ce qui prouve la relation entre la taille des patch/structure étudiée et l'influence de l'équipotentialité sur le couplage électromécanique.

Chapitre 6 : Conclusions et Perspectives

Pour contrôler les vibrations d'une structure, il est possible de dissiper l'énergie électrique produite par un patch piézocéramique placé sur la structure. L'évaluation des performances amortissantes d'un patch piézocéramique shunté peut s'effectuer par l'évaluation numérique ou expérimentale du coefficient de couplage électromécanique effectif. Dans cette thèse, la corrélation entre des essais et des simulations numériques est présentée pour trois structures piézoélectriques. Dans un contexte d'analyse vibratoire, il a été choisi de déterminer le coefficient de couplage électromécanique pour chaque mode propre de structure. Il est déterminé en effectuant un calcul des fréquences et des modes propres des structures étudiées. Le travail proposé présente les « bonnes pratiques » de simulation pour déterminer le CCEM.

Trois méthodes d'évaluation du CCEM effectif ont été étudiées ; la première méthode propose de déterminer les fréquences propres dans deux configurations de conditions aux limites électriques : circuit ouvert et circuit fermé. Le CCEM est caractérisé par l'écart relatif entre les carrés de ces fréquences propres. Cette méthode est conditionnée par l'usage d'éléments finis basés sur une formulation piézoélectrique couplée. La seconde méthode fait intervenir le facteur de couplage du matériau, les fréquences propres de la structure non instrumentée ainsi que celles de la structure instrumentée en court-circuit. Cette méthode permet l'usage d'éléments finis classiques et piézoélectriques. La dernière méthode est basée sur la condensation statique du champ électrique des lois de comportement piézoélectriques. Cette condensation fait apparaître la possibilité de déterminer le CCEM à partir de modèles purement élastiques des patches piézocéramiques. L'étude montre que si la première méthode est la plus réaliste, la dernière peut fournir des approximations du CCEM dans les cas où des éléments finis piézoélectriques couplés ne sont pas disponibles.

Les structures instrumentées ont été modélisées par EF dans les codes commerciaux Ansys[®] et Abaqus[®]. Ces deux codes sont basés sur des formulations piézoélectriques en potentiels et proposent plusieurs éléments finis piézoélectriques solides 3D ou 2D plans.

Ce travail montre que l'usage de ces codes est satisfaisant pour la détermination du coefficient de couplage. La comparaison des résultats numériques obtenus montre que les deux codes donnent des valeurs numériques quasi identiques et très proches des résultats expérimentaux visés. Cependant les résultats d'Abaqus[®] pour la plaque composite nue n'ont pas été fiables vis-à-vis de ceux d'Ansys[®] et expérimentaux. Il a donc été écarté pour l'analyse de la plaque composite avec patch.

La comparaison des résultats expérimentaux et numériques fait apparaître des écarts qu'il est possible d'expliquer en invoquant la méconnaissance de certaines données matériaux ou encore la qualité imparfaite des conditions limites. Dans ces travaux, une méthode simple de recalage des liaisons mécaniques a été utilisée. Cette technique est basée sur l'introduction de souplesse dans des liaisons théoriquement infiniment rigides. Il est montré que le recalage mécanique a une grande influence sur la simulation du CCEM. D'autre part la mesure des caractéristiques diélectriques des patches fait apparaître des différences par rapport aux données théoriques. Une tentative de recalage électrique a été effectuée sur la base de cette constatation. L'intérêt de cette démarche quant à la précision du résultat semble être beaucoup moins important que le recalage mécanique.

Les fabricants de patches piézoélectriques appliquent une peinture conductrice sur les patches pour permettre leurs connexions électriques. Cette peinture homogénéise le potentiel électrique sur les faces des patches. Dans ce travail, l'impact de l'équipotentielle a été évalué : les deux poutres longue et courte ont été simulées sans et avec la prise en compte de l'équipotentialité sur les électrodes. Cette prise en compte est implicite en court circuit mais doit être spécifiée en circuit ouvert. Les résultats obtenus montrent que cette condition peut induire le découplage total de certains modes. Ce résultat est confirmé expérimentalement. Dans tous les cas, et plus généralement, la prise en compte de l'équipotentielle réduit la valeur simulée du coefficient de couplage électromécanique et permet de réduire l'écart avec les valeurs expérimentales.

Des simulations par EF en piezoélasticité plane ont été effectuées pour les deux poutres. Cette approche présente un grand intérêt dans les études d'ingénierie tant elle permet d'effectuer des simulations rapides lorsque les géométries sont simples. Les cas de contraintes planes et de déformations planes ont été étudiés. Il en résulte l'obtention de meilleurs résultats en 2D-CP qu'en 2D-DP. Il est montré que les solutions CP et DP encadrent les résultats 3D par le bas et le haut respectivement. Pour améliorer les résultats en déformations planes, un facteur correcteur dépendant du ratio des largeurs patch/poutre est nécessaire pour corriger le CCEM. D'où la sensibilité de ce dernier à la largeur des patches en 2D-DP.

L'énergie de déformation modale joue un rôle déterminant pour positionner le patch piézocéramique dans les phases de conception; Nous montrons toutefois dans l'étude

d'une plaque composite que la corrélation entre la valeur de cette énergie et le CCEM n'est pas toujours assurée et dépend grandement du fait que les modes de la structure instrumentée ne soient pas trop modifiés par rapport à ceux de la structure nue.

Certains points n'ont pas été traités dans ce mémoire et mériteraient certainement une étude ultérieure ; ils sont indiqués à titre de perspectives :

- Si la prise en compte de l'équipotentialité semble indispensable pour les structures étudiées. Il serait intéressant de vérifier que cette démarche est aussi importante dans le cas de structures complexes, en particulier lorsque la taille des patches est faible devant celle de la structure.
- La prise en compte de l'équipotentielle est aisée lorsque la méthode d'évaluation du CCEM est basée sur la détermination des fréquences circuit ouvert et court-circuit avec des EF piézoélectriques. Lorsque des éléments purement élastiques sont utilisés, il n'est pas possible de prendre en compte l'équipotentielle. Une méthode analytique d'intégration de cette condition aux limites pourrait être développée pour aboutir à une amélioration du résultat approché.
- La méthode de calcul du CCEM étant maintenant éprouvée, il semble pertinent de tester de nouvelles méthodes pour optimiser le placement des patches afin d'assurer efficacement le contrôle vibratoire. Les techniques d'optimisations paramétriques pourraient être envisagées.

Enfin pour clore ce chapitre, voici la liste de publications issue de ces travaux de recherche :

1. G. Chevallier, S. Ghorbel and A. Benjeddou, A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures. *Smart Mater. Struct.* 17 (2008) 065007.
2. G. Chevallier, S. Ghorbel, A. Benjeddou. Piezoceramic shunted damping concept: testing, modelling and correlation. *Méc. Indus.* (soumis).
3. S. Ghorbel, G. Chevallier and A. Benjeddou, Détermination expérimentale et numérique du coefficient de couplage électromécanique généralisé de structures piézoélectriques, XVIème Colloque Vibrations, Chocs & Bruit, Lyon, 10-12 juin, 2008.
4. A. Benjeddou, S. Ghorbel and G. Chevallier, On 2D plane strain/stress vibration analysis of piezoelectric structures, Third International Congress on Design and Modelling of Mechanical Systems, Hammamet, Tunisia, 16-18 March 2009.
5. A. Benjeddou, S. Ghorbel and G. Chevallier, On approximate evaluations of the modal effective electromechanical coupling coefficient, Ninth Moroccan Congress on Mechanics, Marrakech, 21-24 April 2009.

Bibliographie

- [1] <http://www.piezo.com/tech4history.html>
- [2] IEEE, IEEE Standards on piezoelectricity. ANS n° 176-187, (1988).
- [3] R. L. Forward, Electronic damping of vibrations in optical structures, *Appl. Opt.* 18, (1979) 690-697.
- [4] M. Naillon, R.H. Coursant, F. Besnier, Analyse de structures piézoélectriques par une méthode d'éléments finis. *Acta Electronica* 25 (1983) 341-362.
- [5] IRE, IRE Standards on piezoelectric crystals: determination of the elastic, piezoelectric, and dielectric constants. *Proc. IRE* 46 (1958) 764-778.
- [6] S.H. Chang, N.N. Rogacheva, C.C. Chou, Analysis methods for determining electromechanical coupling coefficients of piezoelectric elements. *IEEE Trans Ultras. Freq. Contr.* 42 (1995) 630-640.
- [7] N.W. Hagood, A.Von Flotow, Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *J. Sound Vib.*, 146 (1991) 243-268.
- [8] A. Benjeddou, J.A. Ranger-Vieillard, Use of shunted shear-mode piezoceramics for structural vibration passive damping. *Comput. Struct.* 84 (2006) 1415-1425.
- [9] A. Benjeddou, J.A. Ranger, Vibration damping using resonant shunted shear-mode piezoceramics, in: C.A. Mota Soares et al. (Eds.), *Proceedings of the Third European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Lisbon, June 2006.
- [10] J.F. Deü, A. Benjeddou, Free-vibration analysis of laminated plates with embedded shear-mode piezoceramic layers. *Int. J. Solids Struct.* 42 (2005) 2059-2088.
- [11] M.A. Al-Ajmi, A. Benjeddou, Damage indication in smart structures using modal effective electromechanical coupling coefficients. *Smart Mater. Struct.* 17 (2008) 35023.
- [12] A. Benjeddou, J.A. Ranger, Simple finite element modelling and performance evaluation of passive vibration damping using shunted piezoceramics, in: *Proceedings of the First International Congress on Design and Modelling of Mechanical Systems*, Hammamet, March 2005.
- [13] A. Preumont, *Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems*, Springer, Dordrecht, 2006.
- [14] G.A. Lesieutre, Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. *Shock Vibr. Dig.* 30 (1998) 187-195.
- [15] M. Ahmadian, A.P. DeGuilio, Recent advances in the use of piezoceramics for vibration suppression. *Shock Vibr. Dig.* 33 (2001) 15-22.
- [16] S.O.R. Moheimani, A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* 11 (2003) 482-494.

- [17] G. Chevallier, J.-A. Ranger, A. Benjeddou, H. Sebbah, Passive vibration damping using resistively shunted piezoceramics: an experimental performance evaluation. In proceedings of the second International Congress on Design and Modelling of Mechanical Systems, Monastir, Tunisia, 18-21 March 2007.
- [18] H. Allik and K. M. Webman, Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite elements. *J. Acoust. Soc. Am.* 56 (1974) 1782-1791.
- [19] R. Lerch, Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements. *IEEE Trans. Ultras., Ferro. Freq. Contr.* 37 (1990) 233-247.
- [20] A. Benjeddou, Modelling and simulation of adaptive structures and composites: current trends and future directions, In: Topping, B.H.V., Mota Soares, C.A. (Eds.), *Progress in Computational Structures Technology*, Chapter 10. Saxe-Coburg Publications, Stirling, United Kingdom (2004) 251-280.
- [21] W. Q. Chen, R. Q. Xu and H. J. Ding, On free vibration of a piezoelectric composite rectangular plate. *J. Sound Vib.* 218 (1998) 741-748.
- [22] H. J. Ding, W. Q. Chen and R. Q. Xu, New state space formulations for transversely isotropic piezoelectricity with application. *Mech. Res. Comm.* 27 (2000) 319-326.
- [23] S. S. Vel, R. C. Mewer and R. C. Batra, Analytical solution for the cylindrical bending vibration of piezoelectric composite plates. *Int. J. Solids Struct.* 41 (2004) 1625-1643.
- [24] P. Heyliger and S. Brooks, Free-vibration of piezoelectric laminates in cylindrical bending. *Comput. Struct.* 32 (1995) 2945-2960.
- [25] P. Heyliger and D. A. Saravanos, Exact free-vibration analysis of laminated plates with embedded piezoelectric layers. *J. Acoust. Soc. Am.* 98 (1995) 1547-1557.
- [26] D. A. Saravanos, P. R. Heyliger and D. A. Hopkins, Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. *Int. J. Solids Struct.* 34 (1997) 359-378.
- [27] P. Heyliger, Traction-free vibration of layered elastic and piezoelectric rectangular parallelepipeds. *J. Acoust. Soc. Am.* 107 (2000) 1235-1245
- [28] A. Benjeddou, Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Comput. Struct.* 76 (2000) 347-363.
- [29] J. Kim, V. V. Varadan and V. K. Varadan, Finite element modelling of structures including piezoelectric active devices. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 40 (1997) 817-832.
- [30] K. Y. Sze and Y. S. Pan, Hybrid finite element models for piezoelectric materials. *J. SoundVib.* 226 (1999) 519-547.
- [31] K. Y. Sze, L. Q. Yao and S. Yi, A hybrid ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part II – smart structure modelling. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 48 (2000) 565-582.

- [32] R. P. Thornburgh and A. Chattopadhyay, Simultaneous modelling of mechanical and electrical response of smart composite structures. *AIAA J.* 40 (2002) 1603-1610.
- [33] R. P. Thornburgh, A. Chattopadhyay and A. Ghoshal, Transient vibration of smart structures using a coupled piezoelectric-mechanical theory. *J. Sound Vib.* 274 (2004) 53-72.
- [34] R. Lammering and S. Mesecke-Rischmann, Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells. *Smart Mater. Struct.* 12 (2003) 904-913.
- [35] M. A. Trindade, A. Benjeddou, Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization. *Mech. Adv. Mater. Struct.* in press.
- [36] J.A. Ranger, Amortissement passif des vibrations par patches piezocéramiques shuntés, Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale Paris, 26 avril 2007.
- [37] J. A. Mitchell and J. N. Reddy, A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae. *Int. J. Solids Struct.* 32 (1995) 2345-67
- [38] J. N. Reddy, On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. *Eng. Struct.* 21 (1999) 568-93
- [39] G. Chevallier, S. Ghorbel and A. Benjeddou, A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures *Smart Mater. Struct.* 17 (2008) 065007
- [40] http://www.piceramic.com/deutsch/site/piezo_002.html.
- [41] A.L. Araújo, C.M. Mota Soares and C.A. Mota Soares, in Performance evaluation of new concepts, Délivrable D10 de contrat FP6-NMP3-CT-2005-013517 "CASSEM", September 2008.
- [42] A. Deraemaeker, S. Benelechi, A. Benjeddou, A. Preumont, Analytical and numerical computation of homogenized properties of MFCs: Application to a composite boom with MFC actuators and sensors, in: W. Ostachowicz, J. Holnicki-Szulc, C. A. Mota Soares (Eds.), *Proceedings of the Third ECCOMAS Thematic Conference on Smart Struct. Mater.*, Gdansk, July 2007.

Annexe 1: Propriétés du PZT PIC255

Pour compléter la liste des propriétés électromécaniques fournie par le fabricant du PZT PIC255, cette méthode simple est utilisée [42]. La matrice de souplesse à champ électrique constant $[s^E]$, la matrice piézoélectrique sous forme déformation $[d]$ et la matrice diélectrique à contrainte constante $[\epsilon^T]$ ont les formes respectives suivantes pour une polarisation dans l'épaisseur et avec les notations standards IEEE [2]:

$$\begin{aligned}
 [s^E] = & \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{23}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{bmatrix}, \quad [d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [\epsilon^T] = & \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix} \quad (A1.1)
 \end{aligned}$$

Pour un matériau piézocéramique (isotrope transverse), on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 s_{22}^E = s_{11}^E, \quad s_{23}^E = s_{13}^E, \quad s_{44}^E = s_{55}^E, \quad s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \\
 d_{32} = d_{31}, \quad d_{24} = d_{15}, \quad \epsilon_{22}^T = \epsilon_{11}^T \quad (A1.2)
 \end{aligned}$$

De plus, les expressions suivantes peuvent être déduites des expressions des facteurs de couplages statiques du matériau en cisaillement k_{15} et dans le plan k_p :

$$s_{55}^E = \frac{d_{15}^2}{\epsilon_{11}^T k_{15}^2}, \quad s_{12}^E = -s_{11}^E + \frac{2d_{31}^2}{k_p^2 \epsilon_{33}^T} \quad (A1.3)$$

Les modules d'Young et de cisaillement et les coefficients de Poisson peuvent être extraits des données du fabricant [40] et des expressions suivantes comme suit :

$$E_1^E = \frac{1}{s_{11}^E}, \quad E_2^E = \frac{1}{s_{22}^E}, \quad E_3^E = \frac{1}{s_{33}^E} \quad (\text{A1.4})$$

$$G_{23}^E = \frac{1}{s_{44}^E}, \quad G_{13}^E = \frac{1}{s_{55}^E}, \quad G_{12}^E = \frac{1}{s_{66}^E} \quad (\text{A1.5})$$

$$\begin{aligned} s_{13}^E &= -\nu_{13}^E s_{11}^E, \quad \text{avec } \nu_{13}^E \text{ supposé égal à } 0.436 \text{ pour PIC255} \\ \nu_{21}^E &= -s_{12}^E E_2^E, \quad \nu_{31}^E = -s_{13}^E E_3^E, \quad \nu_{32}^E = -s_{23}^E E_3^E \\ \nu_{12}^E &= E_1^E \frac{\nu_{21}^E}{E_2^E}, \quad \nu_{23}^E = E_2^E \frac{\nu_{32}^E}{E_3^E} \end{aligned} \quad (\text{A1.6})$$

Dans les notations standards IEEE [2], la matrice de rigidité $[C^E]$, la matrice piézoélectrique sous forme contrainte $[e]$ et la matrice de permittivité à déformation constante $[\epsilon^S]$, pour une direction de polarisation selon l'épaisseur sont respectivement :

$$\begin{aligned} [C^E] &= \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^E & C_{23}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E \end{bmatrix}, \quad [e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\epsilon^S] &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

Où la matrice de rigidité C^E est obtenue en inversant la matrice de souplesse :

$$[C^E] = [s^E]^{-1} \quad (\text{A1.8})$$

Et la matrice piézoélectrique sous forme contrainte est déduite de l'expression :

$$[e] = [d] [C^E] \quad (\text{A1.9})$$

La matrice diélectrique à déformation constante est alors obtenue de cette relation :

$$[\epsilon^S] = [\epsilon^T] - [d][e]^t \quad (\text{A1.10})$$

où l'exposant t désigne une matrice transposée.

Pour le matériau PZT PIC255, les propriétés fournies par son fabricant (PI Ceramic) sont celles présentées dans la **Table A.1.1** et complétées par les relations (A.1.1-A.1.10).

Notations	Valeurs
ρ	7800 kg/m ³
S_{11}^E	16.1 10 ⁻¹² m ² /N
S_{33}^E	20.7 10 ⁻¹² m ² /N
$\epsilon_{11}^T / \epsilon_0$	1650
$\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	1750
k_{31}	0.35
k_{33}	0.69
k_{15}	0.66
k_p	0.62
d_{31}	-180 10 ⁻¹² C/N
d_{33}	400 10 ⁻¹² C/N
d_{15}	550 10 ⁻¹² C/N

Table A.1.1: Propriétés utiles du PZT PIC255 (extraites de celles fournies par PI Ceramic)

Avec les notations d'Ansys[®] (différentes de la norme), ces matrices deviennent pour le PIC255 :

- La matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} D_{11}^E & D_{12}^E & D_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ D_{12}^E & D_{22}^E & D_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ D_{13}^E & D_{23}^E & D_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{66}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55}^E \end{bmatrix} \quad (A1.11)$$

$$= \begin{bmatrix} 105.2 & 58.3 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 58.3 & 105.2 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 55.4 & 55.4 & 85.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.0 \end{bmatrix} 10^9 \text{ N/m}^2$$

- La matrice piézoélectrique sous forme contrainte :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.57 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.57 & 0 \\ -7.25 & -7.25 & 14.41 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Cm}^{-2} \quad (A1.12)$$

Et la matrice diélectrique relative à déformation constante :

$$\begin{bmatrix} EP11 & 0 & 0 \\ 0 & EP22 & 0 \\ 0 & 0 & EP33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 931.22 & 0 & 0 \\ 0 & 931.22 & 0 \\ 0 & 0 & 804.38 \end{bmatrix} \quad (A1.13)$$

Avec les notations d'Abaqus[®], les valeurs de C_{44} et C_{66} dans la matrice $[C^E]$ sont inversées (la convention n'est pas la même que la norme) :

$$\begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ D_{1122} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{1133} & D_{2233} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2323} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.2 & 58.3 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 58.3 & 105.2 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 55.4 & 55.4 & 85.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.0 \end{bmatrix} 10^9 \text{ N/m}^2 \quad (\text{A.14})$$

- La matrice de piézoélectricité sous forme déformation :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{223} \\ d_{331} & d_{322} & d_{333} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 550 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 550 \\ -180 & -180 & 400 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-12} \text{ C/N} \quad (\text{A.15})$$

- La matrice diélectrique à déformation constante :

$$\begin{bmatrix} D_{11}^{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.245 & 0 & 0 \\ 0 & 8.245 & 0 \\ 0 & 0 & 7.122 \end{bmatrix} \text{ nF/m} \quad (\text{A.16})$$

Annexe 2: Positions de l'accéléromètre et du pot vibrant pour le modèle EF de la plaque composite

	Nœud	X	Y	Z
Pot vibrant	1204	0.1002E01	0.55E01	0.42E02
	1177	0.7515E02	0.55E01	0.42E02
Accéléromètre	6910	0.14268	0.1375	0.42E02
	6911	0.14519	0.1375	0.42E02
	6912	0.14769	0.1375	0.42E02
	6913	0.15020	0.1375	0.42E02
	7164	0.14519	0.13406	0.42E02
	7222	0.15020	0.13406	0.42E02
	16627	0.14268	0.13850	0.42E02
	16628	0.14268	0.13950	0.42E02
	16629	0.14269	0.14050	0.42E02
	16630	0.14269	0.14150	0.42E02
	16651	0.14519	0.138	0.42E02
	16652	0.14519	0.1385	0.42E02
	16653	0.14519	0.139	0.42E02
	16654	0.14519	0.1395	0.42E02
	16655	0.14519	0.14	0.42E02
	16656	0.14519	0.1405	0.42E02
	16657	0.14519	0.141	0.42E02
	16658	0.14519	0.1415	0.42E02
	16659	0.14519	0.142	0.42E02
	16660	0.14519	0.1425	0.42E02
16661	0.14519	0.143	0.42E02	
16662	0.14519	0.1435	0.42E02	
16663	0.14519	0.144	0.42E02	
16700	0.14769	0.1385	0.42E02	

16701	0.14769	0.1395	0.42E02
16702	0.14769	0.1405	0.42E02
16703	0.14769	0.1415	0.42E02
16704	0.14769	0.1425	0.42E02
16705	0.14769	0.1435	0.42E02
16724	0.1502	0.138	0.42E02
16725	0.1502	0.1385	0.42E02
16726	0.1502	0.139	0.42E02
16727	0.1502	0.1395	0.42E02
16728	0.1502	0.14	0.42E02
16729	0.1502	0.1405	0.42E02
16730	0.1502	0.141	0.42E02
16731	0.1502	0.1415	0.42E02
16732	0.1502	0.142	0.42E02

Annexe 3: Erreur sur K^2

L'expression de K^2 donnée par (2.8) s'écrit :

$$K^2 = \frac{f_{co}^2 - f_{cc}^2}{f_{cc}^2} = \frac{f_{co}^2}{f_{cc}^2} - 1 \quad (\text{A.3.1})$$

En dérivant l'expression de K^2 par rapport à f_{cc} et f_{co} , dK^2 s'écrit :

$$dK^2 = \frac{\partial K^2}{\partial f_{cc}} df_{cc} + \frac{\partial K^2}{\partial f_{co}} df_{co} = -\frac{2f_{co}^2}{f_{cc}^3} df_{cc} + \frac{2f_{co}}{f_{cc}^2} df_{co} = \frac{2f_{co}}{f_{cc}^2} \left(df_{co} - \frac{f_{co}}{f_{cc}} df_{cc} \right) \quad (\text{A.3.2})$$

L'erreur relative sur K^2 est définie par la relation :

$$\frac{dK^2}{K^2} = \frac{2f_{co}}{f_{cc}^2} \left(df_{co} - \frac{f_{co}}{f_{cc}} df_{cc} \right) \frac{f_{cc}^2}{f_{co}^2 - f_{cc}^2} = \left(df_{co} - \frac{f_{co}}{f_{cc}} df_{cc} \right) \frac{2f_{co}}{f_{co}^2 - f_{cc}^2} \quad (\text{A.3.3})$$

En supposant que $df_{cc} \approx df_{co} = df$, l'erreur relative sur K^2 se réduit à (pour $f_{cc} \neq f_{co}$) :

$$\frac{dK^2}{K^2} = -\frac{2f_{co}}{f_{cc}(f_{co} + f_{cc})} df \quad (\text{A.3.4})$$

Pour un couplage faible, $f_{cc} \approx f_{co} = f$, l'erreur sur K^2 (pour $f_{cc} \neq f_{co}$) peut donc être approchée par :

$$\frac{dK^2}{K^2} = -\frac{df}{f} \text{ ou encore } \frac{\Delta K^2}{K^2} = -\frac{\Delta f}{f} \quad (\text{A.3.5})$$

Avec :

Δf et f correspondant, respectivement, à la résolution fréquentielle et à la première ou la dernière fréquence des bandes de fréquences étudiées.