



**HAL**  
open science

# Reconstruction et prévision déterministe de houle à partir de données mesurées

Elise Blondel-Couprie

► **To cite this version:**

Elise Blondel-Couprie. Reconstruction et prévision déterministe de houle à partir de données mesurées. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2009. Français. NNT : . tel-00449343

**HAL Id: tel-00449343**

**<https://theses.hal.science/tel-00449343>**

Submitted on 21 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Centrale de Nantes

**ÉCOLE DOCTORALE  
SCIENCES POUR L'INGENIEUR, GEOSCIENCES & ARCHITECTURE**

*Année 2009*

N° B.U. :

**Thèse de DOCTORAT**

Spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES TRANSFERTS

Présentée et soutenue publiquement par :

**ÉLISE BLONDEL-COUPRIE**

le 29 octobre 2009  
à l'École Centrale de Nantes

**RECONSTRUCTION ET PREVISION DETERMINISTE DE HOULE  
A PARTIR DE DONNEES MESUREES**

**JURY**

Président :	M. René HUIJSMANS	Professeur, Technical University of Delft (Pays-Bas)
Rapporteurs :	M. Bernard MOLIN M. Olivier THUAL	Professeur Associé, École Centrale de Marseille Professeur, Institut National Polytechnique de Toulouse
Examineurs :	M. Félicien BONNEFOY M. Loïc BOUDET M. Pierre FERRANT	Maître de Conférences, École Centrale de Nantes Adjoint Scientifique du Directeur Technique, DGA (BEC) Professeur, École Centrale de Nantes

---

Directeur de thèse : Pierre FERRANT  
Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'École Centrale de Nantes  
Co-encadrant : Félicien BONNEFOY  
Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'École Centrale de Nantes

N° ED 498-64



# Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier Messieurs Gérard Delhommeau et Alain Clément, directeurs successifs du Laboratoire de Mécaniques des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes, de m'avoir accueillie au sein de l'établissement.*

*Je remercie également Monsieur Bertrand Alessandrini, responsable de l'équipe Hydrodynamique et Génie Océanique du laboratoire, qui m'a ouvert les portes de la recherche en hydrodynamique lors de mon stage de Master, et qui m'a ensuite permis de poursuivre ma voie au sein de cette équipe dynamique.*

*Je tiens ensuite à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur René Huijsmans, Professeur à l'Université Technique de Delft, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse et pour l'intérêt porté à mes travaux de recherche, ainsi qu'à Messieurs Bernard Molin, Professeur Associé à l'École Centrale de Marseille, et Olivier Thual, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, pour avoir rédigé des rapports critiques très enrichissants sur ce mémoire de thèse, m'ouvrant par là même de nouvelles pistes d'exploration pertinentes. J'adresse également tous mes remerciements à Monsieur Loïc Boudet, Adjoint Scientifique du Directeur Technique du Bassin d'Essais des Carènes de Val-de-Reuil, mon correspondant scientifique DGA, pour avoir bien voulu faire partie du jury et pour avoir soutenu et suivi mon travail.*

*Ma plus grande gratitude s'adresse à Messieurs Pierre Ferrant, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, et Félicien Bonnefoy, Maître de Conférences dans ce même établissement, qui ont dirigé et encadré cette thèse tout au long de ces trois années.*

*Merci Pierre, pour m'avoir encouragée et soutenue dans les moments (nombreux) de doute (je pense qu'il y en aura encore), et pour avoir donné un nouveau souffle à mes travaux, parfois enlisés, en me proposant de nouvelles pistes de recherche. Merci aussi de m'avoir fait participer à plusieurs conférences internationales, me permettant ainsi d'avoir un nouvel aperçu des nombreuses problématiques au combien intéressantes de l'hydrodynamique, d'échanger divers points de vue scientifiques avec de nouveaux chercheurs, et bien sûr de rencontrer enfin DKP Yue...*

*Mille mercis Félicien, pour m'avoir permis de faire de ce travail ce qu'il est aujourd'hui. Merci de ton attention, de ton investissement constant, de tes conseils avisés et de ton soutien moral (il en a fallu !). Un grand merci aussi pour avoir digéré ma prose (hips !), en relisant chaque paragraphe de ce manuscrit avec une si grande méticulosité, bien que je m'obstine à conserver quelques tournures de ma façon (les « C'est... », les phrases de cinq lignes dont je suis une spécialiste, les « en termes de », et j'en passe). Je m'arrête là parce qu'aucune phrase de cinq et même de six lignes ne suffirait à te remercier assez pour tout ce que tu m'as apporté. Je conclurais juste par ces quelques mots : Vive Quicksilver et les sweat à capuches!*

## REMERCIEMENTS

---

*Mes remerciements s'adressent également à toute l'équipe des doctorants et post-docs, qui contribuent tous les jours au soleil de notre univers de travail quand il pleut des trombes d'eau bretonnes dehors (pas tout à fait les mêmes que chez moi, dans le Nord), à l'équipe enseignante, dont j'ai eu le privilège de faire partie dans le cadre de mon monitorat et auprès de qui j'ai effectué mes premiers pas dans l'enseignement, aux ingénieurs de recherche et aux techniciens du bassin qui, eux aussi, malgré le froid polaire qui les entoure ont un beau soleil à l'intérieur, et plus largement à toute l'équipe hydrodynamique, dont je ne citerais pas tous les membres de peur d'en oublier.*

*Je terminerais en remerciant ma famille et mes proches qui ont de près ou de loin participé à cette grande épopée et à qui je dois beaucoup.*

*Brice, merci pour tous les jours.*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 0 État de l’art des modèles de prévision de houle</b>	<b>3</b>
<b>0.1 De l’observation des vagues</b> .....	<b>3</b>
0.1.1 Caractérisation des vagues .....	3
0.1.2 Histoire de l’observation océanique .....	5
0.1.3 Techniques de mesure actuellement opérationnelles .....	5
0.1.3.1 Les systèmes de mesure par contact.....	6
0.1.3.2 Les systèmes de mesure par télédétection.....	7
0.1.3.3 Bilan.....	9
<b>0.2 ... à la prévision</b> .....	<b>10</b>
0.2.1 Évolution de la prévision de houle .....	10
0.2.2 Principe des modèles de prévision actuels .....	11
0.2.2.1 Structure générale .....	11
0.2.2.2 Paramétrisation des termes sources.....	12
0.2.2.3 Exploitation des modèles .....	14
0.2.3 Vers la prévision déterministe de houle .....	15
0.2.3.1 Un besoin de nouvelles prévisions.....	15
0.2.3.2 Les points clé d’un modèle de prévision déterministe .....	16
<b>Chapitre 1 Modélisation de la houle</b>	<b>19</b>
<b>1.1 Formulation du problème</b> .....	<b>19</b>
1.1.1 Hypothèses et équations générales .....	19
1.1.2 Résolution par méthode spectrale.....	22
1.1.2.1 Caractérisation de l’approche spectrale .....	22
1.1.2.2 Application au problème de prévision déterministe.....	23
<b>1.2 Approches faiblement non-linéaires</b> .....	<b>24</b>
1.2.1 Modèle linéaire.....	24
1.2.2 Modèle au second ordre de perturbation .....	26
1.2.3 Modèle au second ordre étendu.....	29
<b>1.3 Approches fortement non-linéaires</b> .....	<b>30</b>
1.3.1 Méthodes spectrales actuellement opérationnelles.....	30
1.3.2 Application au problème de propagation de houle.....	31

1.3.3	Modèle High-Order Spectral .....	32
1.3.4	Artefacts numériques de la méthode HOS.....	37
1.3.4.1	Traitement anti-repliement .....	37
1.3.4.2	Intégration en temps .....	39
1.3.4.3	Amélioration apportées à l'intégration temporelle.....	41
<b>Chapitre 2</b>	<b>Domaine de prévision accessible</b>	<b>49</b>
<b>2.1</b>	<b>Définition du domaine de prévision .....</b>	<b>50</b>
2.1.1	Cadre de l'étude.....	50
2.1.2	Première approche.....	52
2.1.3	Tracé de la zone de prévision .....	53
2.1.3.1	Zone bidimensionnelle .....	53
2.1.3.2	Zone tridimensionnelle.....	55
2.1.4	Erreur commise en dehors de la zone de prévision .....	59
<b>2.2</b>	<b>Influence de divers paramètres sur la zone de prévision .....</b>	<b>63</b>
2.2.1	Objectif de l'étude .....	63
2.2.2	Influence du temps de mesure $T$ .....	63
2.2.3	Paramètres pouvant modifier la vitesse de groupe des ondes.....	64
2.2.3.1	Influence de la largeur de la bande fréquentielle du spectre de houle.....	64
2.2.3.2	Influence de la profondeur $h$ .....	65
2.2.3.3	Influence d'un courant de vitesse $U_c$ .....	67
2.2.3.4	Influence des non-linéarités.....	69
2.2.4	Influence du mouvement du capteur.....	70
2.2.5	Bilan .....	73
<b>2.3</b>	<b>Association de sondes.....</b>	<b>73</b>
2.3.1	Etude bidimensionnelle .....	73
2.3.1.1	Zone de prévision issue de la combinaison de deux sondes.....	73
2.3.1.2	Extension de la zone de prévision .....	75
2.3.1.3	Amélioration de la prévision .....	77
2.3.2	Extension au cas tridimensionnel .....	78
2.3.2.1	Zone combinée issue de l'association de plusieurs sondes .....	78
2.3.2.2	Choix du nombre et de la position des sondes .....	80
<b>Chapitre 3</b>	<b>Assimilation de données</b>	<b>83</b>
<b>3.1</b>	<b>Principe des méthodes d'assimilation de données .....</b>	<b>84</b>
3.1.1	Formalisme de l'assimilation de données.....	86
3.1.1.1	Terminologie .....	86
3.1.1.2	Modélisation des erreurs .....	87
3.1.2	Les méthodes séquentielles .....	88
3.1.3	Les méthodes variationnelles.....	90
3.1.4	Vers de nouveaux modèles hybrides .....	91
3.1.5	Conclusion : choix de la méthode variationnelle.....	92
<b>3.2</b>	<b>Formulation du problème d'assimilation de données variationnelle.....</b>	<b>92</b>

3.2.1	Formulation générale du problème de minimisation .....	92
3.2.1.1	Définition de la fonction coût .....	92
3.2.1.2	Minimisation et conditions d'optimalité .....	93
3.2.2	Application à notre cas d'étude .....	94
3.2.2.1	Vecteur contrôle .....	94
3.2.2.2	Première estimation des paramètres de contrôle .....	95
3.2.2.3	Opérateur d'observation .....	95
3.2.2.4	Fonction coût .....	96
3.2.2.5	Synthèse : points clé de la méthode d'assimilation de données .....	98
<b>3.3</b>	<b>Stratégie d'optimisation à l'ordre deux.....</b>	<b>99</b>
3.3.1	Principe de la méthode de Duncan & Drake .....	99
3.3.2	Stabilité numérique .....	101
<b>3.4</b>	<b>Méthodes d'optimisation classiques.....</b>	<b>104</b>
3.4.1	Classification des méthodes .....	104
3.4.2	Méthodes avec gradient.....	105
3.4.2.1	Choix de la direction de descente.....	105
3.4.2.2	Évaluation du pas de descente.....	108
3.4.2.3	Méthode des Gradients-Conjugués .....	110
3.4.2.4	Méthode Quasi-Newton .....	112
3.4.3	Méthodes directes.....	114
3.4.3.1	Présentation.....	114
3.4.3.2	Méthode directionnelle de Rosenbrock.....	116
3.4.3.3	Méthode Simplexe .....	119
3.4.4	Application à notre problème .....	124
3.4.4.1	Calcul du gradient de la fonctionnelle dans le cas d'un modèle de houle analytique à l'ordre deux.....	125
3.4.4.2	Méthodes de calcul envisagées dans le cas du modèle de houle HOS d'ordre élevé .....	126
3.4.5	Synthèse .....	130

## Chapitre 4 Prédiction déterministe de signaux de houle unidirectionnels 131

<b>4.1</b>	<b>Initialisation du modèle de prédiction.....</b>	<b>132</b>
4.1.1	Génération d'un champ de vagues artificiel .....	132
4.1.1.1	Introduction.....	132
4.1.1.2	Signal sonde synthétique généré au second ordre.....	133
4.1.1.3	Signal sonde synthétique généré à un ordre de non-linéarité élevé à l'aide du HOS.....	133
4.1.1.4	Bilan.....	136
4.1.2	Prétraitement des signaux de sonde.....	137
4.1.2.1	Périodisation du signal .....	137
4.1.2.2	Troncature du spectre du signal .....	138
4.1.3	Choix des paramètres du modèle de prédiction .....	138
<b>4.2</b>	<b>Prédiction de signaux synthétiques numériques .....</b>	<b>139</b>
4.2.1	Calculs réalisées .....	139

4.2.1.1	Simulations numériques .....	139
4.2.1.2	Définitions des erreurs.....	140
4.2.1.3	Exemple : prévision à l'aide d'un modèle linéaire .....	141
4.2.2	Prévision au second ordre de perturbation.....	144
4.2.2.1	Assimilation des données du signal sonde à l'ordre deux .....	144
4.2.2.2	Prévision de champs de vagues non-linéaires .....	146
4.2.2.3	Performances du modèle de prévision au second ordre étendu.....	152
4.2.3	Prévision au troisième ordre de perturbation.....	160
4.2.3.1	Principe de l'assimilation de données à l'ordre trois.....	160
4.2.3.2	Test sur un cas de houle régulière de Stokes d'ordre trois .....	162
4.2.3.3	Test de la méthode d'assimilation d'ordre $M=3$ sur des cas de houles irrégulières.....	168
4.2.3.4	Validation du modèle sur un grand nombre de cas de houles irrégulières ...	191
<b>4.3</b>	<b>Prévision de signaux expérimentaux.....</b>	<b>195</b>
4.3.1	Dispositif expérimental et houles générées .....	196
4.3.2	Traitement des signaux expérimentaux .....	198
4.3.3	Initialisation du modèle de prévision.....	199
4.3.4	Résultats obtenus .....	200

**Conclusion et perspectives** **207**

**Annexes** **211**

<b>Annexe A</b>	<b>Solution partielle au second ordre en régime stationnaire.....</b>	<b>211</b>
<b>Annexe B</b>	<b>Intégration analytique de la partie linéaire des conditions de surface libre .....</b>	<b>215</b>
<b>Annexe C</b>	<b>Méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5(4).....</b>	<b>219</b>
<b>Annexe D</b>	<b>Différentiation et modèle adjoint .....</b>	<b>221</b>

**Bibliographie** **223**

# Table des illustrations

Figure 0.1 :	Repérage d'une vague en « zéro up-crossing » de hauteur $H_i$ et de période $T_i$ .	3
Figure 0.2 :	Exemple de spectre directionnel de houle calculé à partir de mesures in-situ aux Minquiers le 25 août 2007 à 14h00. On distingue sur ce spectre la mer de vent en pointillés et la houle en trait plein.	4
Figure 0.3 :	Principe général des modèles de houle actuels.	12
Figure 0.4 :	Exemple d'ajustement des termes sources pour reproduire une croissance donnée des vagues vers le large : a) Croissance des vagues à parti de la côte, b) Termes source à 40km de la côte, c) Croissance des vagues vers le large obtenue avec le modèle et observée. Données du SHOM.	13
Figure 0.5 :	Prévisions à 24h sur l'Océan Atlantique fournies par le modèle WaveWatchIII pour le 28 mars 2009 concernant : a) la répartition de la hauteur significative, b) la répartition de la période de pic, c) le champ de vent. Données provenant du site de prévision WaveWatch.	15
Figure 0.6 :	Étapes clé d'un processus de prévision déterministe.	17
Figure 1.1 :	Domaine d'étude et système de coordonnées.	20
Figure 1.2 :	Corrélation entre le spectre correspondant à la fonction de transfert en tangage et les spectres de houle rencontrés pour différentes vitesses d'avance du navire $V_0 < V_1 < V_2$ .	26
Figure 1.3 :	Importance du repliement suivant le taux de décroissance (ou de croissance) modale; a) Cas où la décroissance/croissance est forte, b) Cas où la décroissance/croissance est faible.	37
Figure 1.4 :	Évolution du nombre d'opérations effectuées en fonction de l'ordre HOS $M$ et du traitement anti-repliement utilisé.	39
Figure 1.5 :	Évolution du pas de temps pour une méthode d'intégration temporelle classique et une méthode utilisant l'intégration linéaire de la partie analytique des CSL. La tolérance sur l'erreur de troncature est fixée à $10^{-7}$ .	40
Figure 1.6 :	Comparaison de l'évolution des erreurs de troncature au cours de l'avance temporelle des CSL pour une méthode classique et pour la méthode préconisée par Fructus et al. Le pas de temps est fixé à $3 \cdot 10^{-2}$ .	40
Figure 1.7 :	Erreur sur $\eta$ pour différentes méthodes RKF à temps de calcul identique. Simulation : temps CPU # 2min, $ka=0.3$ , 1000T.	45
Figure 1.8 :	Influence du correcteur PI sur le nombre de pas de temps rejetés et le nombre de pas total. Simulation : RKF5(4) de Cash & Karp, $ka=0.4$ , $M=11$ , $N=9$ , $Tol=10^{-7}$ , 500T.	46
Figure 1.9 :	Influence du correcteur PI sur l'erreur en $\eta$ . Simulation : RKF 5(4) de Cash & Karp, $ka=0.4$ , $M=11$ , $N=9$ , $Tol=10^{-7}$ , 1000T.	46
Figure 2.1 :	Spectre de JONSWAP pour une houle 2D caractérisée par $H_s=2m$ et $T_p=8s$ .	51
Figure 2.2 :	Zone bidimensionnelle issue de la mesure en une sonde située en $x = x_s$ pendant une période de $T$ secondes : a) Détermination graphique du domaine, b) Définition de la	

	zone de prédiction à proprement parler (traits rouges), de la zone de reconstruction (points bleus) et de la zone de rétropection (tirets noirs). ....	54
Figure 2.3 :	Zone de prévision à un instant donné $t_d$ d'un paquet d'ondes se propageant suivant la direction $\theta$ : a) Représentation bidimensionnelle, b) Tracé dans le plan $(x,y)$ de propagation. ....	55
Figure 2.4 :	Zone de prévision à l'instant $t_d$ pour un champ de vagues multidirectionnel d'étalement angulaire $[\theta_1, \theta_2]$ . ....	56
Figure 2.5 :	Zones de reconstruction à différents instants : a) $t=0$ , b) $t=T=204.8s$ , c) $t=T/2=102.4s$ . ....	57
Figure 2.6 :	Zones de rétropection telles que : a) $t=-11.9s$ et $ x_2/x_1  < \cos(\theta_2 - \theta_1)$ , b) $t=-17.8s$ et $ x_2/x_1  > \cos(\theta_2 - \theta_1)$ . ....	58
Figure 2.7 :	Zones de prévision telles que : a) $t=222.6s$ et $ x_2/x_1  < \cos(\theta_2 - \theta_1)$ , b) $t=420.5s$ et $ x_2/x_1  > \cos(\theta_2 - \theta_1)$ . ....	58
Figure 2.8 :	Évolution de la zone de prévision provenant de la mesure en une sonde située à l'origine d'un champ tridimensionnel. ....	59
Figure 2.9 :	Portion des ondes composant le champ de vagues passant par un point extérieur au domaine et mesurées par la sonde. ....	60
Figure 2.10 :	a) Erreur théorique de prévision pour un champ 2D caractérisé par un spectre de JONSWAP, b) Zoom et tracé des coupes à l'instant $t = 230s$ et en un point donné $x = 200m$ . ....	61
Figure 2.11 :	Étude de l'évolution de l'erreur de prévision : a) À $t=230s$ , b) À $x=200m$ . ....	61
Figure 2.12 :	Évolution de l'erreur théorique sur le champ de vagues calculé pour une houle multidirectionnelle caractérisée par un spectre de JONSWAP directionnel en $\cos^2$ . L'erreur est représentée dans le plan horizontal $(x,y)$ de propagation à différents instants $t$ de rétropection, de reconstruction ou de prédiction. ....	62
Figure 2.13 :	Influence de la largeur de la bande de fréquence utilisée sur la taille de la zone de prévision. ....	65
Figure 2.14 :	Évolution de la vitesse de groupe pour différentes valeurs de la profondeur $h$ . ....	66
Figure 2.15 :	Tracé des zones de prévision correspondant à des cas de profondeur $h$ différents : a) Zones, b) Zoom. ....	67
Figure 2.16 :	Influence d'un courant de vitesse $U_c$ sur la taille de la zone de prévision. ....	68
Figure 2.17 :	Domaines de prévision associés à des vitesses de sonde différentes. En rouge, on a représenté la trajectoire des sondes pour les cas traités. ....	72
Figure 2.18 :	Association de deux sondes de mesure situées en $x_1$ et $x_2$ : a) Cas où les zones sont disjointes, b) Cas où les zones de prévision se recoupent, c) Cas où les zones sont contiguës. La zone issue de la combinaison des données des deux sondes est représentée en pointillés rouges. ....	74
Figure 2.19 :	Zones individuelles de quatre sondes de mesure (traits pleins bleus) et zone combinée obtenue en associant les données des différentes sondes (pointillés rouge). ....	76
Figure 2.20 :	Distinction entre les composantes de houle passant par un point P appartenant à l'extension de la zone de prévision mesurées par la sonde 1 (en noir), par la sonde 2 (en bleu) et par les deux sondes (rayé noir et bleu). ....	76
Figure 2.21 :	Utilisation d'une sonde annexe 2 pour aider à la reconstruction du champ de vagues issu des mesures à la sonde principale 1. La zone de recouvrement est représentée en bleu clair. ....	77
Figure 2.22 :	Zones individuelles (traits pleins bleus) et zones combinées (pointillés rouges), à divers instants, provenant de la combinaison des zones de trois sondes. ....	79

Figure 2.23 : Réseaux de sondes couramment utilisés : a) Triangle équilatéral de trois sondes, b) Réseau de quatre sondes en étoile, c) Système de cinq sondes formant un pentagone tronqué.....	80
Figure 2.24 : Réseau de sondes (points) et co-matrices associées (croix) : a) Réseau de quatre sondes, b) Réseau de cinq sondes.....	81
Figure 2.25 : Réseaux de sept sondes : a) Réseau irrégulier, b) Réseau régulier.....	82
Figure 3.1 : Principe général des différentes méthodes d'assimilation de données : a) Méthode séquentielle intermittente, b) Méthode séquentielle continue, c) Méthode non-séquentielle intermittente, d) Méthode non-séquentielle continue.....	85
Figure 3.2 : Schéma de principe de l'assimilation de données séquentielle.....	88
Figure 3.3 : Schéma de principe de l'assimilation non-séquentielle.....	90
Figure 3.4 : Schéma de principe de la méthode d'assimilation de données de houle unidirectionnelle.....	98
Figure 3.5 : Représentation matricielle des interactions entre ondes d'ordre deux.....	100
Figure 3.6 : Mise en évidence du problème de stabilité de la méthode de Duncan & Drake. Spectres en amplitude des élévations de surface libre mesurées et issus de la décomposition premier plus second ordre: a) À l'itération initiale, b) Après 50 itérations, c) Mise en évidence des effets perturbateurs de certaines composantes second ordre.....	101
Figure 3.7 : Élévation de surface libre mesurée et reconstruite après 50 itérations du processus.....	102
Figure 3.8 : Évolution de l'erreur d'assimilation au cours des itérations du processus de Duncan & Drake pour différentes valeurs de la fréquence de coupure $\omega_c$ .....	103
Figure 3.9 : Déroulement d'une étape du processus d'optimisation de Rosenbrock dans le cas simple où seules deux variables sont optimisées.....	117
Figure 3.10 : Transformations du simplexe au cours du processus de minimisation de Nelder & Mead pour un problème à deux variables d'optimisation : a) Simplexe initial, b) Réflexion, c) Expansion, d) Contraction dans le cas où $f(P_{Nvar}) < f(P_r) < f(P_{Nvar+1})$ , e) Contraction dans le cas où $f(P_r) > f(P_{Nvar+1})$ , f) Réduction dans le cas où $f(P_r) > f(P_{Nvar+1})$ , g) Réduction dans le cas où $f(P_r) < f(P_{Nvar+1})$ .....	122
Figure 3.11 : Illustration du processus d'optimisation par méthode Simplexe.....	123
Figure 3.12 : Principales étapes du processus de différentiation avec calcul de l'adjoint.....	128
Figure 4.1 : Principales étapes du processus de prévision déterministe.....	132
Figure 4.2 : Schéma de principe de la création d'un signal sonde artificiel.....	132
Figure 4.3 : Signaux de houle artificiels : a) Signal 2 <sup>nd</sup> ordre, b) Signal d'ordre M = 4.....	136
Figure 4.4 : Fenêtrage du signal sonde.....	137
Figure 4.5 : Domaines de reconstruction et de prévision et zone spatiale de calcul à l'instant t.....	140
Figure 4.6 : Convergence des simulations de Monte-Carlo. Évolution des erreurs de reconstruction et de prévision linéaires en fonction du nombre de simulations pour différents cas de cambrure : a) $\varepsilon = 0.5\%$ , b) $\varepsilon = 1\%$ , c) $\varepsilon = 2\%$ , d) $\varepsilon = 3\%$ , e) $\varepsilon = 4\%$ .....	143
Figure 4.7 : Schéma de principe de la méthode de prévision à l'ordre deux.....	144
Figure 4.8 : Comparaison des différentes méthodes d'optimisation des ondes libres.....	145
Figure 4.9 : Prévision par un modèle 2 <sup>nd</sup> ordre de champs de vagues d'ordre 2 à partir d'un signal sonde de période T=205.6s : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, b) Erreur moyenne de reconstruction, c) Erreur moyenne de prévision.....	147
Figure 4.10 : Prévision par un modèle 2 <sup>nd</sup> ordre de champs de vagues d'ordre M=3 à partir d'un signal sonde de période T=410.4s : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, b) Erreur moyenne de reconstruction, c) Erreur moyenne de prévision.....	148

Figure 4.11 : Prévision par un modèle au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu de champs de vagues d'ordre $M=3$ à partir d'un signal sonde de période $T=410.4s$ : a) Erreur moyenne de reconstruction, b) Erreur moyenne de prévision. ....	149
Figure 4.12 : Champ de vagues synthétique de cambrure $\varepsilon = 2\%$ .....	150
Figure 4.13 : Erreur en chaque point du domaine de calcul sur l'élévation de surface libre d'un champ de vagues de cambrure 2% pour les modèles de prévision : a) linéaire, b) 2 <sup>nd</sup> ordre, c) 2 <sup>nd</sup> ordre étendu. La zone de prévision est représentée en blanc. ....	150
Figure 4.14 : Élévation de surface libre à l'instant de prévision $t = 430s$ . Comparaison entre les solutions données par un modèle de prévision linéaire, 2 <sup>nd</sup> ordre et 2 <sup>nd</sup> ordre étendu sur : a) La totalité de la zone spatiale de prévision à $t = 430s$ , b) Zoom sur une portion de la zone.....	151
Figure 4.15 : Rapidité de calcul de la méthode d'ordre 2 étendu pour une reconstruction à $t = T/2$ en fonction des paramètres $(Tol_1, Tol_2)$ . Les signaux de sonde étudiés ont une période de $T = 410.4$ et sont a) d'ordre deux, b) d'ordre $M = 3$ . ....	155
Figure 4.16 : Précision de la méthode d'ordre deux étendu pour l'étude de champs synthétiques d'ordre deux (à gauche) et d'ordre $M = 3$ (à droite) : a) et d) Erreurs d'assimilation, b) et d) Erreurs moyennes de reconstruction, c) et e) Erreurs moyennes de prévision. ....	155
Figure 4.17 : Erreurs obtenues par le modèle de prévision au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu pour différents cas de houle d'ordre $M = 3$ en utilisant un intervalle fréquentiel $[\omega_1, \omega_v]$ déterminé de manière automatique ou fixé à $[0.36rad.s, 1.06rad/s]$ . Le calcul s'effectue sur la totalité des domaines de prévision théoriques associés aux fréquences $\omega_1$ et $\omega_v$ considérées. ....	157
Figure 4.18 : Carte des erreurs de calcul obtenues par le modèle de prévision au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu sur différents cas de houle pour des intervalles fréquentiels déterminés de manière automatique (a), b), c), d)) ou fixés à $[0.36rad/s, 1.06rad/s]$ (e), f), g), h).....	158
Figure 4.19 : Comparaison des erreurs présentées par Wu aux erreurs obtenues par le modèle de prévision d'ordre 2 étendu utilisant des fréquences $\omega_1, \omega_v$ déterminées de manière automatique ou fixées à $[0.36rad.s, 1.06rad/s]$ : a) Erreur sur la totalité du domaine de prévision théorique associé aux fréquences fixes, b) Distinction entre erreurs de reconstruction et erreurs de prévision. ....	159
Figure 4.20 : Schéma de principe de la méthode de prévision à l'ordre $M=3$ utilisant le HOS. ....	161
Figure 4.21 : Schéma de principe du processus de reconstruction du signal sonde à l'ordre $M$ en utilisant la méthode HOS initialisée par les champs $(\eta(x, t_{ini}), \phi^s(x, t_{ini}))$ calculés au 2 <sup>nd</sup> ordre.....	162
Figure 4.22 : Spectre en amplitude du signal de Stokes d'ordre 3 de caractéristiques $A_r=2m$ et $T_r=8s$ . ....	163
Figure 4.23 : Comparaison entre l'élévation de surface libre obtenue par simulation HOS à l'ordre $M = 3$ et la solution de référence de Stokes : a) Signaux obtenus, b) Erreur absolue. ....	164
Figure 4.24 : Erreur d'assimilation au cours du processus de Duncan & Drake (4 itérations) puis au passage à l'optimisation d'ordre $M=3$ par la méthode de Rosenbrock (1 <sup>ère</sup> itération)..	165
Figure 4.25 : Évolution de l'erreur entre le signal sonde de Stokes et les signaux reconstruits par le HOS à l'ordre $M = 3$ à partir d'une initialisation au 2 <sup>nd</sup> ordre ou au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu..	166
Figure 4.26 : Spectre en amplitude de l'élévations de surface libre : a) à $t=0$ après calcul au 2 <sup>nd</sup> ordre ou au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu pour initialiser le HOS, b) à $t=T$ après simulation HOS.....	166
Figure 4.27 : Zoom sur le signal sonde de référence et les signaux reconstruits à l'aide du HOS à la première itération du processus de Rosenbrock.....	167
Figure 4.28 : Erreur sur le signal sonde obtenu par l'assimilation de données à l'ordre $M=3$ (avec initialisation du HOS au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu) : a) Comparaison avec l'erreur induite par la	

	propagation HOS elle-même, b) Comparaison avec l'erreur obtenue par l'assimilation d'ordre 2. ....	167
Figure 4.29 :	Évolution de l'erreur d'assimilation au cours du processus de minimisation (Duncan & Drake puis Rosenbrock) pour les différents cas de houle traités. Les signaux de sonde d'ordre $M=3$ sont reconstruits à l'aide du HOS initialisé par un champ au 2 <sup>nd</sup> ordre ou au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu.....	169
Figure 4.30 :	Répartition de l'erreur $\varepsilon_r$ sur $[0, T]$ pour les différentes cambrures étudiées, à la dernière itération du processus de Duncan & Drake et à la première itération de la méthode de Rosenbrock où le HOS d'ordre $M = 3$ est initialisée par un champ d'ordre 2 ou d'ordre 2 étendu. ....	170
Figure 4.31 :	Comparaison, pour un champ de vagues de cambrure 2%, des erreurs absolues après convergence des algorithmes de Duncan & Drake à l'ordre 2 et de Rosenbrock à l'ordre $M=3$ . ....	170
Figure 4.32 :	Comparaison des résultats fournis par les modèles linéaire, d'ordre 2 étendu et d'ordre $M=3$ avec initialisation au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu pour la prévision de champs de vagues synthétiques d'ordre $M=3$ à partir de signaux sonde de période $T=410.4s$ : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.....	171
Figure 4.33 :	Schéma de principe de l'assimilation des données de deux sondes.....	172
Figure 4.34 :	Évolution de l'erreur pour une assimilation à une ou deux sondes. ....	173
Figure 4.35 :	Erreur moyenne commise sur l'élévation de surface libre à chaque instant de calcul de l'intervalle $[0, t_{max}]$ dans le cas où l'assimilation a été réalisée à partir d'une ou de deux sondes. Les instants caractéristiques $t_2^1 *$ , $t_2^1$ et $T$ sont représentés par des verticales. ....	174
Figure 4.36 :	Comparaison des erreurs moyennes dans le domaine de prévision de la sonde principale pour une assimilation à une ou deux sondes : a) Erreur moyenne de reconstruction, b) Erreur moyenne de prévision.....	175
Figure 4.37 :	Comparaison des erreurs moyennes dans la zone de recouvrement pour une assimilation à une ou deux sondes : a) Erreur moyenne de reconstruction, b) Erreur moyenne de prévision. ....	176
Figure 4.38 :	Erreur en tout point du domaine de calcul pour un cas de cambrure $\varepsilon = 3\%$ dans le cas d'une assimilation : a) à une sonde, b) à deux sondes. Les zones de prévision sont représentées en blanc. Sur la figure b), les instants $t_2^1 *$ et $t_2^1$ sont marqués par des horizontales pointillées.....	176
Figure 4.39 :	Évolution de l'erreur au cours du processus de minimisation dans le cas où le HOS est initialisé au second ordre étendu à $t_{ini} = 0$ et $t_{ini} = T$ . ....	178
Figure 4.40 :	Prévision de champs de vagues d'ordre $M=3$ à partir de signaux de sonde de période $T=410.4s$ par les modèles linéaire, d'ordre 2 étendu et d'ordre $M=3$ avec initialisation du HOS au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu à $t_{ini} = 0$ ou $t_{ini} = T$ lors de l'assimilation de données : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision. ....	179
Figure 4.41 :	Fonctions poids adjointes au calcul de l'erreur d'assimilation.....	180
Figure 4.42 :	Résultats fournis par le modèle d'ordre $M=3$ avec initialisation du HOS à $t_{ini} = T$ lors de l'assimilation de données et utilisation de différentes fonctions poids dans le calcul de l'erreur d'assimilation. Comparaison avec les résultats obtenus par les modèles d'ordre 1, 2 étendu et $M=3$ avec initialisation du HOS à $t_{ini}=0$ . a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.....	181

Figure 4.43 : Erreurs de calcul en tout point du domaine de simulation pour une houle de cambrure $\varepsilon = 3\%$ obtenues par les modèles d'ordre 2 étendu et d'ordre $M=3$ avec initialisation du HOS, lors de l'assimilation de données, à $t_{ini} = 0$ ou à $t_{ini} = T$ , avec ou sans fonction poids. Les bornes inférieures des fonctions poids sont représentées par des lignes pointillées horizontales. ....	182
Figure 4.44 : Mise en parallèle des erreurs commises sur le signal sonde au terme de l'assimilation d'ordre deux à chaque instant de $[0,T]$ et à la première évaluation du signal sonde à l'ordre $M = 3$ à partir d'une initialisation du HOS au même instant. ....	185
Figure 4.45 : Évolution de l'erreur au cours l'assimilation de données à l'ordre deux puis à l'ordre $M = 3$ lorsque le HOS est initialisé à $t_{ini} = 0$ , $t_{ini} = T$ , $t_{ini} = t_{min2}$ et $t_{ini} = t_{min3}$ .....	187
Figure 4.46 : Comparaison des résultats fournis par les modèles de prévision linéaire, d'ordre deux étendu et d'ordre $M = 3$ avec initialisation du HOS à $t_{ini} = 0$ , $t_{ini} = T$ , $t_{ini} = t_{min2}$ et $t_{ini} = t_{min3}$ lors de l'assimilation de données : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision. ....	188
Figure 4.47 : Résultats obtenus par le modèle d'ordre $M = 3$ à partir d'une assimilation de données reposant sur l'initialisation du HOS à $t_{ini} = t_{min3}$ et l'utilisation de la fonction polynôme d'ordre trois définie sur $[0,T]$ . Comparaison avec les résultats fournis par les modèles de prévision linéaire et d'ordre deux étendu. a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision. ....	189
Figure 4.48 : Erreurs en tout point du domaine de calcul obtenues par le modèle de prévision d'ordre 1, d'ordre 2 étendu et d'ordre $M = 3$ (avec initialisation du HOS à $t_{min3}$ et fonction poids lors de l'assimilation de données) pour des champs de vagues de cambrure $\varepsilon=0.5\%$ et $\varepsilon=4\%$ . ....	191
Figure 4.49 : Comparaison des résultats fournis par les modèles de prévision linéaire, d'ordre deux étendu et d'ordre $M = 3$ . Dans ce dernier cas l'assimilation de données repose sur l'initialisation du HOS à $t_{ini} = t_{min3}$ et l'utilisation de la fonction polynôme d'ordre trois définie sur $[0,T]$ . a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision. .	192
Figure 4.50 : Comparaison des performances du modèle d'ordre $M = 3$ aux performances du modèle de prévision développé par Wu. L'intervalle fréquentiel d'étude du signal sonde est déterminé de manière automatique ou fixé à $[0.36rad.s,1.06rad/s]$ : a) Erreur sur la totalité du domaine de prévision associé aux fréquences fixes, b) Erreurs de reconstruction et de prévision. ....	194
Figure 4.51 : Dispositif expérimental.....	196
Figure 4.52 : Schéma de montage d'une sonde.....	197
Figure 4.53 : Photo du montage réalisé dans le bassin d'essai de traction de l'ECN.....	197
Figure 4.54 : Traitement du bruitage du signal mesuré à la sonde $S_1$ dans le cas d'une houle de caractéristiques $T_p = 2s$ et $H_s = 3cm$ .....	199
Figure 4.55 : Condition sur la taille minimale du domine de simulation HOS. ....	200
Figure 4.56 : Zone de prévision et position des sondes pour un champ de vagues de cambrure $\varepsilon = 0.5\%$ . La sonde $S_1$ est marquée par un point rouge et les huit autres sondes de validation par des points bleus. Les zones temporelles de prévision associées à chacune de ces sondes sont représentées en pointillés verts. ....	201
Figure 4.57 : Erreur d'assimilation pour les modèles de prévision d'ordre deux et $M = 3$ .....	202

---

Figure 4.58 : Erreur de reconstruction et de prévision calculées par les modèles de prévision linéaire, d'ordre 2 et 2 étendu et d'ordre $M = 3$ à chaque sonde de validation pour différentes cambrures.....	203
Figure 4.59 : a) Reconstruction et prévision du signal à la dernière sonde $S_9$ pour une houle de cambrure $\varepsilon = 4\%$ . b) Zoom sur la zone de prévision. Les domaines de reconstruction et de prévision sont délimités par des droites verticales.....	204



# Liste des tableaux

Tableau 1.1 : Évolution des ressources en mémoire en fonction de l'ordre HOS $M$ et du traitement anti-repliement appliqué ( $N=1024 \times 512$ ). .....	39
Tableau 1.2 : Influence du coefficient de sécurité $s_c$ sur la rapidité des calculs. Simulation : RKF5(4) de Cash & Karp, $ka=0.4$ , $M=11$ , $N=9$ , $Tol=10^{-7}$ , $100T$ . .....	47
Tableau 2.1 : Influence de la troncature en fréquences sur $t_{max}$ et $x_{max}$ . .....	65
Tableau 2.2 : Influence de la profondeur sur les vitesses de groupe correspondant aux fréquences extrêmes $\omega_l$ et $\omega_v$ . .....	66
Tableau 4.1 : Paramètres des simulations numériques réalisées. .....	140
Tableau 4.2 : Caractéristiques des champs de vagues étudiés. .....	156
Tableau 4.3 : Comparaison des résultats obtenues par l'assimilation de données d'ordre $M = 3$ pour, une initialisation du HOS au 2 <sup>nd</sup> ordre étendu à $t_{ini} = 0$ , $t_{ini} = T$ et $t_{ini} = t_{min2}$ . Erreurs de reconstruction et de prévision associées. .....	184
Tableau 4.4 : Position des sondes. .....	196
Tableau 4.5 : Caractéristiques des houles générées. .....	198
Tableau 4.6 : Période de prévision et éloignement des sondes de validations à la sonde $S_1$ en termes de période de pic et de longueur d'onde. .....	201



## Sigles et acronymes utilisés

3D-Var	3Dimensional Variational assimilation
4D-Var	4Dimensional Variational assimilation
BDM	Bayesian Directional Method
ADCP	Acoustic Doppler Current Profiler
ARGOS	Advanced Research and Global Observation Satellite
ASAR	Advanced Synthetic Aperture Radar
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
CCSL	Conditions Cinématique de Surface Libre
CDSL	Conditions Dynamique de Surface Libre
CERSAT	Centre d'Exploitation et de Recherche Satellitaire
CFL	Courant-Friedrichs-Levy
CNES	Centre National d'Études Spatiales
CODAR	COastal raDAR
CORIOLIS	Programme coopératif d'observation opérationnelle pour l'océanographie
CPU	Central Processing Unit
CREST	Modèle numérique de représentation de l'état de mer développé par le SHOM
CSL	Conditions de Surface Libre
DFP	Davidon-Fletcher-Powell
DHWM	Directional Hybrid Wave Model
DIA	Discrete Interactions Approximation
DNO	Dirichlet-Neumann Operator
DSWP	Deterministic Sea Wave Prediction
ECMWF	European Center for Medium-Range Weather Forecasts
ECN	Ecole Centrale Nantes
ENVISAT	ENVironnement SATellite
ERS	European Remote Sensing
ESA	European Space Agency
FFT	Fast Fourier Transform
FPSO	Floating Production, Storage and Offloading
FT	Fourier Transform
GlobWave	Projet de trois ans initié par l'ESA et financé par le CNES pour faciliter l'accès aux données satellitaires aux utilisateurs du monde entier
GPS	Global Positioning System
HF	Haute Fréquence ou High Frequency
HGO	Hydrodynamique et Génie Océanique
HOS	High-Order Spectral

HWM	Hybrid Wave Model
iBFGS	Inverse Broyden-Fletcher-Godfoard-Shanno
IFREMER	Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la MER
IFT	Inverse Fourier Transform
INRIA	Institut National de Recherche en Informatique et Automatique
JASON	Joint Altimetry Satellite Oceanography Network
JONSWAP	Joint North Sea Wave Project
ℓ-BFGS	Limited Broyden-Fletcher-Godfoard-Shanno
LMF	Laboratoire de Mécanique des Fluides
MINQ3	Méthode de minimisation de type Quasi-Newton développée par l'INRIA
MAPLE	MAThematical PLEasure
MEM	Maximum Entropy Method
MLM	Maximum Likelihood Method
MP	Multi Pas
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NDBC	National Data Buoy Center
OMM	Organisation Météorologique Mondiale
ONR	Office of Naval Research
OWME-JIP	Onboard Wave and Motion Estimation Joint Industry Project
PI	Proportionnel Intégral
PREVIMER	Système de l'Ifremer pour la prévision et le suivi de la circulation et de l'environnement côtiers.
RAO	Response Amplitude Operator
RK	Runge-Kutta
RKF	Runge-Kutta-Fehlberg
RSO	Radar à Synthèse d'Ouverture
SAR	Synthetic Aperture Radar
SEEK	Singular Evolutive Extended Kalman
SEM-REV	Site d'Expérimentation en Mer pour la Récupération de l'Énergie des Vagues
SENTINELLE	Famille de satellites destinés à remplacer ENVISAT
SHOM	Service Hydrographique et Océanographique de la Marine
SR1	Formule de Rang 1
SWAN	Simulating Waves Nearshore
TOGA	Tropical Ocean and Global Atmosphere
TOPEX-POSEIDON	Ocean TOPography EXperiment
VHF	Very High Frequency
WAM	WAve Model
WAMDI	WAve Model Development and Implementation
WaMoS	Wave Monitoring System
WERA	WELlen RADar
WOCE	World Ocean Circulation Experiment

# Introduction générale

La prévision des états de mer est un domaine d'une extrême importance pour la planification des opérations en mer, pour des raisons évidentes liées à la sécurité des personnels et des matériels mis en oeuvre. Dans le domaine de l'offshore pétrolier en particulier, les opérations d'extraction ont été progressivement transférées dans les régions d'eaux profondes où les conditions de mer peuvent être extrêmes et les plages de mer calmes et sécuritaires très réduites. De telles prévisions sont donc devenues indispensables au bon déroulement des diverses phases du cycle d'exploitation, qu'il s'agisse de simples opérations de maintenance ou de ravitaillement, ou d'opérations plus délicates telles que la récupération et le largage d'engins, ou le transfert du pétrole vers les navires container.

Les prévisions actuelles sont données par les modèles dits de « troisième génération », dont les plus connus sont le modèle WAM et ses dérivées SWAN et WaveWatch, qui simulent la génération de la houle par le vent, puis sa propagation sur de grandes distances. Ces modèles reposent sur des processus stochastiques de description de l'état de mer, et ne prédisent pas de façon déterministe l'évolution de la houle, mais seulement celle de données spectrales dont on tire des grandeurs statistiques caractéristiques, comme la hauteur et la période des vagues, moyennées sur des périodes de l'ordre de grandeur de la durée conventionnelle d'un état de mer (environ trois heures).

Si les modèles actuels semblent être bien adaptés à la planification des opérations de moyenne ou de longue durée, comme le routage sur une longue distance, la création de modèles de prévision déterministes à court terme pourrait considérablement accroître l'efficacité des opérations de courte durée qui nécessitent une connaissance précise de l'état de la mer sur un site d'intérêt pendant une période donnée. La sécurité des procédures délicates, telles que les opérations de secours en mer, de décollage ou d'atterrissage d'hélicoptères sur les plateformes, ou plus largement de toute opération où la prévision précise des mouvements d'une structure marine amarrée et/ou positionnée dynamiquement est cruciale, pourrait ainsi être grandement améliorée.

L'objectif de ce travail de thèse est donc de mettre au point un nouveau modèle de prévision basé sur la simulation déterministe non-linéaire de l'évolution des champs de vagues, en tirant parti des récentes avancées technologiques réalisées dans le domaine des capteurs offshore, permettant aujourd'hui d'avoir accès aux états de mer dans un laps de temps très proche du temps réel, ainsi que des progrès accomplis en matière de simulation numérique non-linéaire. Les modèles de houle dont nous disposons à l'heure actuelle sont en effet de plus en plus performants en termes de précision et de temps de calcul et font des modèles de prévision déterministes une alternative plausible aux modèles spectraux.

Au Chapitre 0 nous commençons par rappeler la genèse des modèles de prévision avant de faire un état des lieux des modèles couramment utilisés aujourd'hui et de leur principe de fonctionnement général. Nous montrons ensuite les limites de ces modèles qui ont conduit à envisager le développement d'un modèle de prévision déterministe. La mise au point d'un tel modèle repose sur

trois étapes fondamentales : i) le choix d'un modèle de propagation de la houle performant permettant de représenter au mieux la physique du champ de vagues en présence, afin de simuler l'évolution à court terme d'une solution initiale prédéterminée, ii) l'évaluation de la zone spatio-temporelle de prévision disponible en fonction des caractéristiques de la houle en présence et des conditions de mesure, et iii) la recherche d'une estimation optimale du champ de vagues non-linéaire courant à partir des données recueillies sur site permettant d'initialiser au mieux le modèle de propagation.

La méthode de simulation constitue le premier élément critique de la mise en œuvre de notre modèle de prévision. Diverses approches ont été envisagées et sont présentées au Chapitre 1. Nous avons tout d'abord considéré les modèles faiblement non-linéaires au premier et au second ordre de perturbation (Zhang *et al* [168], 1999) qui permettent une représentation à court terme satisfaisante de la déformée de la surface libre de houles faiblement à moyennement cambrées. Mais ces méthodes sont mises en défaut en ce qui concerne la cinématique proche de la surface libre, et elles ignorent l'influence des effets d'ordre supérieur sur les vitesses de propagation des composantes de houle, dont la prise en compte est indispensable à une prévision fiable de l'évolution d'un système de vagues au delà du très court terme (Bonnetoy [18], 2005). Nous nous sommes donc dans un second temps tournés vers l'utilisation d'un modèle de simulation d'ordre élevé beaucoup mieux adapté à la représentation de houles moyennement à fortement non-linéaires, la méthode HOS (High Order Spectral) dont une version est développée par l'équipe HGO (Hydrodynamique et Génie Océanique) du LMF (Laboratoire de Mécanique des Fluides) depuis 2002 (Le Touzé [98], 2003, Bonnetoy [18], 2005, Ducrozet [48], 2008).

Le Chapitre 2 est quant à lui consacré à l'étude théorique de la zone spatio-temporelle accessible par un calcul déterministe. Une zone de reconstruction limitant la validité du champ reconstruit sur la période de mesure du capteur, et une zone de prévision ont été définies, qui dépendent de la position du ou des capteurs, ainsi que des caractéristiques de la houle mesurée. L'erreur commise en dehors de ces zones a été également été quantifiée. Nous avons finalement étudié l'influence de divers paramètres naturels (influence du fond, des non-linéarités, du courant, etc...) ou fonctionnels (déplacement et nombre de capteurs, période de mesure) sur l'étendue de ces zones, le but étant de trouver une solution pratique simple pour accroître la taille du domaine prévisible.

La dernière phase clé de la mise au point du modèle de prévision présentée au Chapitre 3 est la recherche d'une condition initiale optimale au modèle de propagation de houle. La qualité de la prévision est étroitement liée à la précision de la condition initiale introduite au modèle de houle que l'on détermine par une procédure dite « d'assimilation de données ». L'assimilation de données permet de combiner données mesurées in-situ et modélisation physique et de déterminer une estimation du champ de vagues en présence de meilleure qualité que celle que l'on pourrait obtenir à partir des observations ou du modèle numérique uniquement. Une approche de type optimisation a été utilisée afin de minimiser une fonctionnelle représentative de l'écart modèle/données sur la zone de mesure. Les divers algorithmes que nous avons envisagés sont explicités dans ce chapitre.

Le Chapitre 4 regroupe finalement l'ensemble des résultats que nous avons obtenus. Les prévisions fournies par un modèle classique linéaire sont comparées aux champs prédits par des modèles d'ordre supérieur, d'ordre deux puis d'ordre deux étendu dans un premier temps, et d'ordre trois utilisant le HOS dans un second temps. Les performances de ces modèles ont été testées sur des champs de vagues bidimensionnels synthétiques générés à l'aide d'un modèle de houle, et sur des houles expérimentales mesurées dans le bassin de traction de l'ECN (École Centrale de Nantes).

# Chapitre 0

## État de l'art des modèles de prévision de houle

### 0.1 De l'observation des vagues...

#### 0.1.1 Caractérisation des vagues

L'irrégularité des vagues a jusqu'à très récemment été difficilement appréhendée par les océanologues. Jusqu'à la fin de la Seconde Guerre Mondiale, on caractérisait un état de mer en terme de vague la plus haute. Ce n'est qu'au début des années 1945 que les modèles de prévision ont commencé à prendre en compte le caractère variable des vagues. Deux approches ont alors été envisagées pour exploiter les enregistrements expérimentaux : l'analyse « vague par vague » et l'analyse spectrale.

La première consiste à faire une étude statistique des vagues, c'est-à-dire à analyser les caractéristiques individuelles des vagues relevées dans un intervalle de temps donné. Par convention, une vague est définie comme la portion de surface libre  $\eta$  délimitée par les instants auxquels la surface libre passe par le niveau moyen en montant (« zero up-crossing ») ou en descendant (« zero down-crossing »). On détermine ainsi sur l'intervalle de temps échantillonné un ensemble de  $N$  vagues de hauteurs crêtes à creux  $H_i$  et de périodes  $T_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) dont on peut déduire des valeurs moyennes, maximales ou d'autres grandeurs statistiques (cf Figure 0.1).

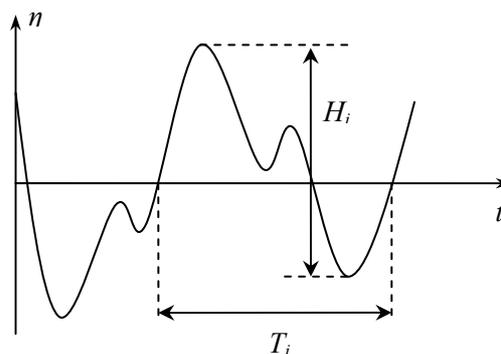


Figure 0.1 : Repérage d'une vague en « zéro up-crossing » de hauteur  $H_i$  et de période  $T_i$ .

Une distribution statistique couramment utilisée est celle de la hauteur des vagues qu'on résume souvent à la hauteur moyenne du tiers des vagues les plus hautes  $H_{1/3}$  (correspondant à la valeur estimée visuellement par les marins), ou à la hauteur maximale  $H_{\max}$  qui dépend de la longueur de l'enregistrement étudié.

Dans la deuxième approche, l'analyse spectrale, on considère la houle comme la superposition d'un grand nombre d'ondes sinusoïdales dont on connaît les caractéristiques. On étudie alors la densité spectrale d'énergie de la houle  $E(f,\theta)$  (souvent appelée spectre de houle par abus de langage) qui représente la répartition de l'énergie des vagues sur un ensemble de fréquences et de directions. Alors que les vagues sont très irrégulières, la densité spectrale varie peu (pour un enregistrement assez long), ce qui se prête particulièrement à la modélisation numérique et à la prévision. Les progrès informatiques réalisés ces dernières décennies, ont rendu l'analyse spectrale beaucoup plus accessible, et à l'heure actuelle, tous les modèles de prévision existant utilisent cette approche. On a en outre remarqué que la hauteur  $H_{1/3}$  était liée au moment d'ordre zéro de la densité spectrale par la relation (0.1). Lorsqu'elle est déterminée à partir du spectre de houle,  $H_{1/3}$  est appelée hauteur significative et est couramment notée  $H_s$ .

$$H_{1/3} \approx 4 \sqrt{\int_0^{\infty} E(f) df} \quad (0.1)$$

La Figure 0.2 donne un exemple de densité spectrale directionnelle d'énergie de la houle calculée par PREVIMER, l'organisme de prévisions côtières affilié à l'IFREMER (Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la MER), destiné à produire des prévisions pour le grand public à partir de données issues de mesures sur site et de télédétection. De l'analyse de ce spectre, sont déduites la hauteur significative  $H_s$  et la période de pic  $T_p$  des vagues, ainsi que la direction principale de propagation des vagues (différente pour la mer de vent et la houle) et l'étalement angulaire.

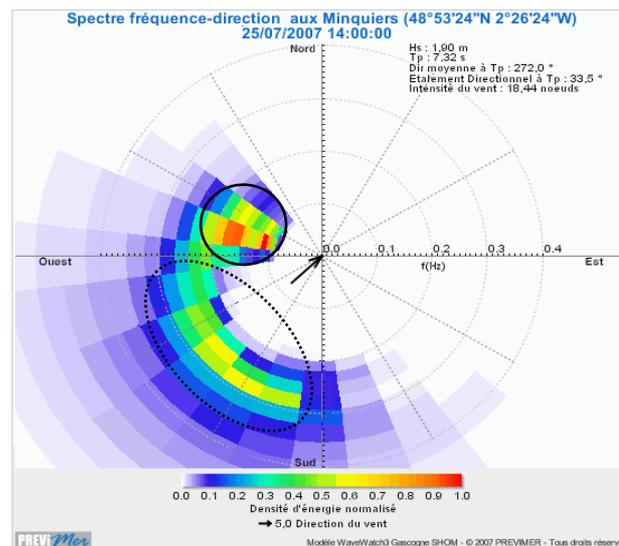


Figure 0.2 : Exemple de spectre directionnel de houle calculé à partir de mesures in-situ aux Minquiers le 25 août 2007 à 14h00. On distingue sur ce spectre la mer de vent en pointillés et la houle en trait plein.

## 0.1.2 Histoire de l'observation océanique

La toute première carte de courants marins a été établie par Franklin en 1777 afin de suivre le Gulf Stream et écourter la traversée des navires courrier entre Londres et New York. Entre les années 1840 et 1850, Maury trace les premières cartes mondiales de vents et de courants, bientôt suivi par l'expédition anglaise Challenger (1872), qui pendant quatre ans sillonne les mers en effectuant des relevés de bathymétrie, de température et de courants. Par la suite, l'OMM (Organisation Météorologique Mondiale) a été chargée de collecter les données météorologiques dérivées d'observations visuelles de hauteurs, de périodes et de directions des vagues réalisées par les marins, ou des informations sur les vitesses de vent. Pendant longtemps, ces données statistiques locales et ponctuelles ont été les seules sources de mesure disponibles.

Au siècle dernier, de nombreux progrès ont été faits dans les techniques de mesure océanographiques mettant à la disposition des océanographes des instruments de mesure de plus en plus performants. Malgré tout, les opérations d'installation de bouées fixes ou dérivantes étant très coûteuses et difficiles à mettre en place sur de très grandes étendues comme l'océan, et les zones d'eaux profondes restant par ailleurs très difficiles d'accès, les données in situ issues de tels capteurs sont peu nombreuses et inégalement réparties dans l'espace (à la fois horizontal et vertical en profondeur) et dans le temps. C'est avec l'émergence des techniques de mesure satellitaires dès les années 1970 que ce manque de données a pu être comblé de manière spectaculaire en fournissant des observations réparties sur toute la surface du globe avec une fréquence de quelques jours seulement.

Les premiers altimètres ont été embarqués à bord des satellites américains Skylab, Goos 3 et Seasat dès 1978, puis Geosat en 1985. Les premiers satellites européens ERS-1 et ERS-2 ont été mis sur orbite en 1991 et 1996 par L'ESA (European Space Agency) et ont été rejoints en 2002 par le satellite de surveillance des ressources terrestres ENVISAT. Ce dernier sera bientôt remplacé par une nouvelle génération de satellites appelée SENTINELLE. On peut finalement citer les missions altimétriques franco-américaines TOPEX-POSEIDON (1992) et JASON 1 et 2 (2001, 2008) conjointement mises en place par le CNES (Centre National d'Études Spatiales) et la NASA (National Aeronautics and Space Administration).

Ces missions d'observation s'inscrivent dans d'importants programmes nationaux (en France, JASON pour les mesures satellitaires et CORIOLIS pour les mesures in situ) et internationaux, comme WOCE (World Ocean Circulation Experiment, 1990-2002) ou TOGA (Tropical Ocean and Global Atmosphere, 1994-2000). En 2007, le projet GlobWave a été initié par l'ESA dans le but de diffuser les données océanographiques recueillies par les altimètres, les radars SAR, ou autres techniques de mesures. Il s'agit de fournir aux utilisateurs de plus en plus nombreux et divers (énergies renouvelables, aménagement des zones côtières,...) un aperçu global des données existantes ainsi que de leur qualité et de leur disponibilité. Par ailleurs, la combinaison des données provenant de ces différentes sources permettrait d'améliorer les modèles numériques de prévision.

## 0.1.3 Techniques de mesure actuellement opérationnelles

On peut distinguer les différents systèmes de mesure suivant qu'ils effectuent des relevés directement sur le site d'intérêt en contact avec l'océan, ou à distance par télédétection. Parmi les premiers, on trouve des capteurs fixes ou dérivant à la surface de l'eau tels que les perches à houle ou les bouées accélérométriques, et des capteurs immergés comme les houlomètres à pression ou les courantomètres. Les seconds regroupent les radars terrestres, fixes ou embarqués sur des navires

océanographes, qui fournissent des indications concernant la hauteur, la période et la direction des vagues, et les radars satellitaires, qui permettent d'obtenir depuis l'espace un nombre important de données liées à la topographie de la surface de l'océan, à la température, au vent de surface ou encore à l'activité biologique.

### 0.1.3.1 Les systèmes de mesure par contact

Les capteurs sur site peuvent être des systèmes embarqués ou remorqués par des navires océanographiques (courantomètres acoustiques tels que l'ADCP Acoustic Doppler Current Profiler, thermosalinomètres), des systèmes eulériens (mouillages, bouées ancrées), ou des systèmes lagrangiens (flotteurs ou bouées équipées dérivant au gré des courants, à profondeur ou à densité fixée). Ils permettent par des mesures de résistivité (sonde à houle), d'accélération (bouées), de pression (houlographe à pression) ou de vitesses (courantomètre), de déterminer l'évolution de la surface libre au biais de fonctions de transfert.

Nous ne nous attarderons pas sur l'ensemble de ces capteurs, mais uniquement sur les systèmes de mesure permettant de caractériser l'élévation de surface libre qui nous intéresse plus particulièrement pour la prévision de houle. Ces systèmes se répartissent en deux catégories : les capteurs unidirectionnels et les capteurs directionnels qui comme leur nom l'indique donnent des indications sur la directionnalité des vagues. Notons que l'association de capteurs unidirectionnels en réseau peut également conduire à la détermination du spectre directionnel de la houle.

Les capteurs unidirectionnels les plus répandus sont les perches ou sondes à houle, très largement utilisées en laboratoire, et les bouées omnidirectionnelles (WaveRider de Datawell par exemple) pour les mesures en mer. Les premiers mesurent une variation de résistance ou de capacité liée à la portion immergée de la sonde. Les seconds mesurent une accélération verticale dont la double intégration permet de revenir à l'élévation de surface libre.

Les houlographes directionnels ne mesurent pas directement la direction de vagues mais trois grandeurs différentes selon les systèmes (pressions, courants ou accélérations) qui permettent, sous diverses hypothèses, de restituer les principaux paramètres directionnels. En plus du pilonnement  $z$ , les bouées directionnelles mesurent soit les accélérations dans les deux directions horizontales  $x$  et  $y$  (qui par intégration permettent de trouver les déplacements horizontaux), ou les deux composantes  $\partial z/\partial x$  et  $\partial z/\partial y$  de la pente locale de la surface représentant le tangage et le roulis. La première technique est plutôt employée par les bouées de faible dimension (commercialisées par Oceanor et Datawell par exemple) qui utilisent également la localisation par GPS (Global Positioning System) pour avoir accès à la position précise de la bouée. La seconde technique est celle des premiers prototypes de Longuet-Higgins (1963, [102]) actuellement utilisée par les bouées de grande dimension, comme les bouées de 3m de diamètre du National Data Buoy Center (NDBC) aux États-Unis.

Pour les deux méthodes, les covariances des trois signaux permettent de déterminer les quatre premiers coefficients de Fourier du spectre directionnel de la houle, aussi appelés moments angulaires (d'où une estimation imparfaite du spectre directionnel). D'autres méthodes statistiques plus élaborées, comme la méthode du Maximum de Vraisemblance ou Maximum Likelihood Method en anglais (MLM), ou la Méthode du Maximum d'Entropie (MEM) du Maximum d'Entropie, permettent d'obtenir une estimation plus précise du spectre directionnel que la détermination des premiers moments angulaires.

Les mesures fournies par les capteurs directionnels, comme la bouée Directional WaveRider de Datawell, sont tout à fait satisfaisantes. Les erreurs moyennes de mesure sont de 0,5% sur la hauteur significative, de 0.5° sur la direction de propagation. Ce n'est que lorsqu'on requiert d'avantage de détails sur la forme du spectre (séparation entre ondes incidentes et réfléchies, présence de plusieurs trains de vagues, ...) que les réseaux de capteurs deviennent utiles.

L'inconvénient principal des capteurs in situ est donc le caractère local des mesures. On constate par exemple que les bouées ont tendance à sous-estimer la taille des vagues les plus hautes (il est en effet peu probable que ces vagues passent par la bouée de manière systématique) et sont donc fortement susceptibles de manquer les vagues extrêmes. Cela est d'autant plus vrai que leur coût de mise en œuvre et de maintenance reste prohibitif, et limite leur utilisation sur quelques sites d'intérêt seulement. Les données in situ restent donc trop peu nombreuses et ont conduit les océanographes, météorologues et industriels à se tourner vers des capteurs de télémessure permettant de couvrir de plus vastes zones spatiales et d'obtenir ainsi des données représentatives d'un état de mer global.

### 0.1.3.2 Les systèmes de mesure par télédétection

Les propriétés diélectriques de l'eau de mer font de l'océan une source importante d'échos dans tous les domaines radar, des ondes décimétriques au micro-ondes. Un radar mesure la puissance électromagnétique émise ou réfléchi par une source, qui peut être d'origine naturelle dans le cas où l'on mesure le rayonnement émis par un corps (détection passive) ou artificielle lorsque le radar émet lui-même une onde avant d'en enregistrer l'écho (détection active). La majorité des radars de détection océanique sont des capteurs actifs. Ils ont l'avantage de pouvoir prendre des mesures de jour ou de nuit et en présence d'une couverture nuageuse et peuvent également utiliser des longueurs d'onde qui ne sont pas produites en quantité suffisante par le Soleil telles que les hyperfréquences.

C'est le phénomène de résonance de Bragg qui explique en grande partie le lien entre les ondes radar et les vagues (sauf pour les faibles incidences de visée où des réflexions miroir apparaissent) : la résonance entre les rugosités à la surface de l'océan (ondes capillaires) et l'onde électromagnétique incidente, qui ont des longueurs d'ondes comparables, sont à l'origine de l'onde réfléchi. L'amplitude de ces ondes et l'angle d'incidence local étant modulés par les ondes les plus longues sous l'effet d'interactions hydrodynamiques, les ondes longues (la houle) deviennent visibles par le radar.

#### La télémessure satellitaire

Un des grands succès des mesures depuis l'espace est l'altimétrie satellitaire qui fournit des mesures précises du niveau de la mer, de la hauteur significative des vagues, de la vitesse du vent à la surface, et de divers paramètres concernant les glaces de surface.

La mesure altimétrique de la hauteur significative  $H_s$  est actuellement la seule mesure disponible de manière globale et utilisée pour la prévision de houle par assimilation de données. Elle est déterminée à partir des échos des altimètres radar rétro-diffusés par la surface de la mer (un altimètre peut être vu comme un radar à visée verticale) : lorsqu'une vague survient, la surface

réfléchi s'étend et la puissance reçue par l'altimètre augmente avec le temps. La précision est bien meilleure lorsque les vagues sont de grande amplitude puisque les échos s'étalent dans le temps ; la résolution d'un altimètre est environ de 50cm.

Les informations relatives à la période et à la direction de propagation des vagues ne peuvent pas être déterminées à partir d'un altimètre et requièrent l'utilisation de radars à visée latérale permettant de mesurer les ondes réfléchies dans la direction azimutale. Si les réflexions dans la direction de visée sont facilement dissociables par le temps d'aller/retour des ondes au capteur, la séparation des échos azimutaux arrivant simultanément au capteur est plus complexe. La technique La technique d'ouverture synthétique permet de remédier à ce problème en utilisant une méthode basée sur le principe de décalage Doppler des échos en fonction de leur position en azimut (un écho qui vient « de l'avant » possède une fréquence plus élevée qu'un écho venant « de l'arrière »).

Les radars à synthèse d'ouverture (RSO, ou SAR, Synthetic Aperture Radar, en anglais) produisent en mode vagues des images de 5km×5km à intervalles réguliers dont on tire les spectres de houle par inversion (plus exactement par une transformée de Fourier de la section efficace radar normalisée). De nouvelles approches consistant à étudier séparément la mer de vent et la houle (Collard *et al*, [35]) permettent aujourd'hui de s'affranchir de la méthode traditionnelle de calcul des spectres de vagues requérant la donnée initiale d'une ébauche de ces spectres généralement issues d'un modèle numérique.

L'ambiguïté de 180° concernant la direction de propagation des vagues, liée au caractère symétrique des images par rapport à l'origine, a fait l'objet de nombreux développements et peut maintenant être résolue à partir de ces images en utilisant le fait que le radar possède un temps d'intégration (ie les images mesurées ne sont pas des instantanés). À partir de séquences consécutives de l'enregistrement, on est capable de recréer plusieurs images de la surface décalées de quelques dixièmes de secondes, ce qui permet de déterminer la direction de propagation mais aussi d'améliorer la qualité des spectres de vagues par corrélation entre vues.

L'étalonnage et la validation des mesures satellitaires par SAR sont actuellement en cours par le CERSAT (Centre d'Exploitation et de Recherche Satellitaire) de l'IFREMER sur le radar ASAR (Advanced Synthetic Aperture Radar) du satellite ENVISAT. Il s'agit de comparer les spectres de vagues dominantes obtenus aux spectres directionnels issus des modèles de prévision de vagues comme WAM (WAVE Model) et aux spectres mesurés in-situ par des bouées. L'estimation actuelle des erreurs d'incertitude est de l'ordre de 1s pour la période de pic et de 15° pour la direction de propagation du pic spectral (la hauteur  $H_s$  obtenue à partir du spectre est beaucoup moins précise que celle obtenue par altimétrie et n'est pas utilisée).

Notons pour terminer que l'utilisation du SAR reste pour l'instant limitée aux systèmes de vagues longues car les composantes spectrales de faible longueur d'onde se déplaçant dans la direction azimutale ne sont pas vues par le radar SAR. L'énergie totale de la houle est alors inconnue.

Remarque : Les satellites contiennent généralement d'autres capteurs, comme un diffusiomètre, radar actif conçu pour mesurer la direction et l'intensité du vent sur l'océan, et un ou plusieurs radiomètres multicanaux allant du violet au proche infrarouge permettant par télédétection passive d'accéder à des informations liées à la température de surface, ou à l'activité biologique (quantité de phytoplancton,...).

## Les radars terrestres

Si les radars d'observations de l'océan les plus connus sont les radars précités opérant dans le domaine des longueurs d'onde centimétriques et embarqués sur les satellites ou les avions, il existe également toute une gamme d'instruments « terrestres », implantés sur la côte, en pleine mer sur des plateformes offshore fixes ou embarqués sur des navires, permettant d'accéder au spectre des vagues. Ces quarante dernières années ont en effet été l'objet de nombreuses études visant à convertir les radars marins standards, principalement utilisés pour détecter les obstacles (navires ou autres), en radars capables de mesurer un état de mer. L'idée est d'utiliser le fouillis de mer, principal obstacle à la détection des navires, comme source de mesure de l'état de mer.

Les radars actuellement opérationnels fonctionnent soit en hautes ou très hautes fréquences (HF ou VHF), soit dans le domaine des micro-ondes (bande X). Dans le premier cas, l'angle d'incidence est extrêmement rasant et les ondes se propagent le long de la courbure terrestre. La détection n'est alors pas limitée par l'horizon radioélectrique et la distance couverte par le radar peut aller jusqu'à plusieurs centaines de kilomètres depuis le capteur. Les deux systèmes HF les plus connus sont le CODAR (COastal raDAR) aux États-Unis et le WERA (Wellen RAdar) en Allemagne. Les radars en bande X ont une incidence rasante mais plus importante que les radars HF; la distance de capture est alors inférieure à 10km. Le système opérationnel de prévision de houle WaMos II (Wave Monitoring system) dont il sera question par la suite (1.2.1) utilise ce type de capteur.

Dans les deux cas, le processus de réflexion semble bien décrit par la théorie de Bragg. Afin de réduire le bruit de mesure et d'estimer la direction de propagation des vagues, on utilise une séquence de plusieurs images. Ces systèmes de mesure permettent d'obtenir un spectre directionnel de distribution de l'énergie tout à fait acceptable, mais sont en défaut en ce qui concerne la détermination du facteur de proportionnalité entre le spectre de l'image radar et le spectre de l'élévation de la surface libre. On peut alors avoir recours à une mesure complémentaire (altimètre, tangage / roulis d'un bateau) de manière à obtenir ce gain indépendamment. Finalement, la résolution des radars terrestres est d'environ de 1m pour la hauteur significative, 1s pour la période de pic et 5° pour la direction principale de propagation.

### 0.1.3.3 Bilan

Au vu des divers éléments précités et plus particulièrement de la comparaison de la résolution des divers capteurs, il semble que la mesure in situ par contact reste aujourd'hui encore le meilleur moyen d'obtenir des informations précises à proximité d'une zone géographique déterminée. En outre, contrairement aux techniques de mesure de télédétection qui ne concernent que la surface de l'océan et pour lesquelles les profondeurs sont inaccessibles, les bouées et autres capteurs par contact, pouvant être immergés, permettent d'établir des profils verticaux de température, de pression, de salinité, de courants et de divers paramètres physico-chimiques ou biologiques. Grâce à l'émergence des satellites les données in-situ sont désormais accessibles en temps direct via le système ARGOS (Advanced Research and Global Observation Satellite).

L'intérêt des capteurs de télédétection, et en particulier des radars satellitaires, est leur grande couverture spatiale qui permet de pallier le manque de données locales et de mettre à la disposition des

océanographes un jeu de données globales et quasiment continues. Mais la complexité des mécanismes de réflexion radar fait que leur interprétation n'est que depuis très récemment d'assez bonne qualité pour que les données puissent être utilisées dans des modèles de prévision opérationnelle. Les radars satellitaires doivent encore faire l'objet de nombreuses calibrations et validations avant de pouvoir fournir des données de qualité comparables aux capteurs terrestres. La précision obtenue par les télémètres sur les grandeurs caractéristiques d'un état de mer reste actuellement moins bonne que la précision obtenue par mesure locale.

Notons pour conclure que les techniques de représentation spectrale de l'état de mer utilisée par les différents capteurs ont des limites : elle ne permettent pas de discerner les effets non-linéaires. Les méthodes d'analyse non-stationnaires sont le sujet de recherches actives en particulier pour étudier les événements transitoires non-linéaires comme les vagues scélérates qui sont indétectables par une analyse classique de variances et de covariances.

## 0.2 ... à la prévision

### 0.2.1 Évolution de la prévision de houle

Faisant suite aux études sur la propagation de la houle de Rayleigh et Boussinesq au XIX<sup>ème</sup> siècle et à celles de Rossby dans les années 1940 [132], les premiers modèles de prévision sont apparus au cours de la Seconde Guerre Mondiale, dans le but d'aider au débarquement Allié en Afrique du Nord puis en Normandie. Sverdrup et Munk ont ainsi développé une théorie basée sur l'étude de la hauteur significative de la houle en la reliant à l'amplitude des vagues dans un modèle de houle régulière. Elle fut publiée ultérieurement par le service hydrographique de la marine des États-Unis [141].

En 1955, Pierson *et al* [125] ouvrent une nouvelle ère dans l'histoire de la modélisation et de la prévision des vagues en introduisant le concept de spectre et de processus stochastiques pour décrire un état de mer et sa dynamique. Depuis de nombreux progrès ont été faits dans la modélisation du spectre de houle et des processus physiques intervenant dans la propagation des vagues, notamment en ce qui concerne l'apport et la dissipation d'énergie.

Les premiers modèles de prévision utilisant le principe de Phillips et Miles (1957, [122] et [108]) sur la croissance linéaire des vagues et le principe de saturation universelle de Phillips (Pierson & Moskowitz, 1964, [126]), selon lequel l'énergie des vagues à une fréquence donnée est limitée par un niveau de saturation, ont ainsi été rapidement remplacés par les modèles dits de « deuxième génération » basés sur les travaux de Phillips (1960, [123]) qui montre que la croissance des vagues est largement dominée par les interactions non-linéaires entre les vagues. On doit à Hasselmann (1962, [73]) et à Zakharov (1968, [163]) la quantification de ces effets pour un spectre de houle aléatoire, qui proposent simultanément (malgré des publications décalées) deux théories complémentaires mais de formalismes différents (cartésien pour Hasselmann et Hamiltonien pour Zakharov). La paramétrisation des interactions non-linéaires entre les vagues a encore été affinée par la suite, ce qui a donné naissance aux modèles les plus aboutis à l'heure actuelle dits de « troisième génération ». On peut par exemple citer le modèle fondateur WAM (WAVE Model) développé par le groupe américain WAMDI (WAVE Model Development and Implementation) dès 1988 [152], et ses variations, le modèle néerlandais SWAN (Simulating Waves Nearshore, Holthuijsen, 1989, [78], 1993, [79]) ou le modèle WaveWatch, initialement néerlandais puis américain, développé par Tolman depuis 1991

[144]. Trois versions de ce modèle sont aujourd'hui disponibles dont la dernière est WaveWatchIII (2002, [145]).

## 0.2.2 Principe des modèles de prévision actuels

### 0.2.2.1 Structure générale

La grande majorité des modèles de prévision opérationnels existants sont basés sur l'équation d'évolution des densités spectrales d'énergie de la houle  $E(\mathbf{k})$  souvent écrite sous la forme de l'équation de transport eulérienne (0.2). Ils sont de ce fait appelés modèles spectraux, à ne pas confondre avec les modélisations spectrales que nous allons présenter au Chapitre 1 qui elles reposent sur une décomposition des quantités d'intérêt dans l'espace spectral.  $\mathbf{k}(f, \theta)$  est le vecteur nombre d'onde,  $\mathbf{C}_g$  est le vecteur vitesse de groupe orientée suivant la direction des vagues, qui représente la vitesse à laquelle l'énergie des vagues est transportée, et  $\mathbf{C}_k$  est le vecteur vitesse de changement d'orientation des vagues, causé par les variations de profondeur, ou uniquement par la courbure de la Terre, en pleine mer et en l'absence de courant.

$$\frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{C}_g E) + \nabla_{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{C}_k E) = S(\mathbf{k}) \quad (0.2)$$

Le terme  $S(\mathbf{k})$  regroupe plusieurs termes « sources » ou « puits » d'énergie qui modélisent les apports ou les dissipations d'énergie par les processus physiques intervenant dans la propagation des vagues. Pour plus de simplicité, nous les regrouperons sous le nom de termes « sources », une source pouvant être négative. Dans la majorité des modèles de prévision,  $S(\mathbf{k})$  se décompose en trois termes :  $S_{in}(\mathbf{k})$  représente l'énergie apportée aux vagues par le vent,  $S_{disp}(\mathbf{k})$  la dissipation d'énergie due au déferlement, et  $S_{nl}(\mathbf{k})$  les transferts d'énergie entre les vagues par interactions non-linéaires.

$$S(\mathbf{k}) = S_{in}(\mathbf{k}) + S_{disp}(\mathbf{k}) + S_{nl}(\mathbf{k}) \quad (0.3)$$

Il peut arriver que d'autres termes sources soient ajoutés aux trois composantes principales citées ci-dessus. Près des côtes, où la profondeur est relativement faible (de 10cm à 10m), le fond peut avoir une influence non négligeable sur la dissipation d'énergie des vagues. Pour tenir compte de ces effets, on ajoute donc parfois un terme  $S_b(\mathbf{k})$  de dissipation d'énergie par frottement sur le fond, voire un terme  $S_{bds}(\mathbf{k})$  de dissipation qui tient compte de la nature du fond (la dissipation peut se faire à l'intérieur des sédiments et sera différente s'il s'agit de vase ou de sable grossier). Par ailleurs, à ces profondeurs, les changements de topographie se font à des échelles supérieures à la longueur d'onde et cela influence l'évolution des vagues. On représente alors ces modifications par un terme de réflexion/diffusion  $S_{bscat}(\mathbf{k})$  qui fait actuellement l'objet de recherches au Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM). La Figure 0.3 représente le schéma de principe d'un modèle de prévision spectral classique.

On peut également expliquer qualitativement l'équation (0.2) de la manière suivante : le terme  $S_{in}(\mathbf{k})$  d'apport d'énergie par le vent génère un spectre de houle dont le pic est tel que la vitesse de phase est de l'ordre de la vitesse du vent. Cette énergie est ensuite redistribuée par les interactions non-linéaires, vers les grandes longueurs d'ondes d'une part qui sont peu dissipées, ce qui a pour effet

d'augmenter la période du pic et l'énergie totale du spectre de houle, et vers les petites longueurs d'ondes d'autre part où l'énergie est fortement dissipée par la viscosité et le déferlement. Au final, la densité spectrale d'énergie des vagues  $E(\mathbf{k})$  décroît généralement comme  $\mathbf{k}^{-4}$  selon la théorie de Hasselmann (1962, [73]).

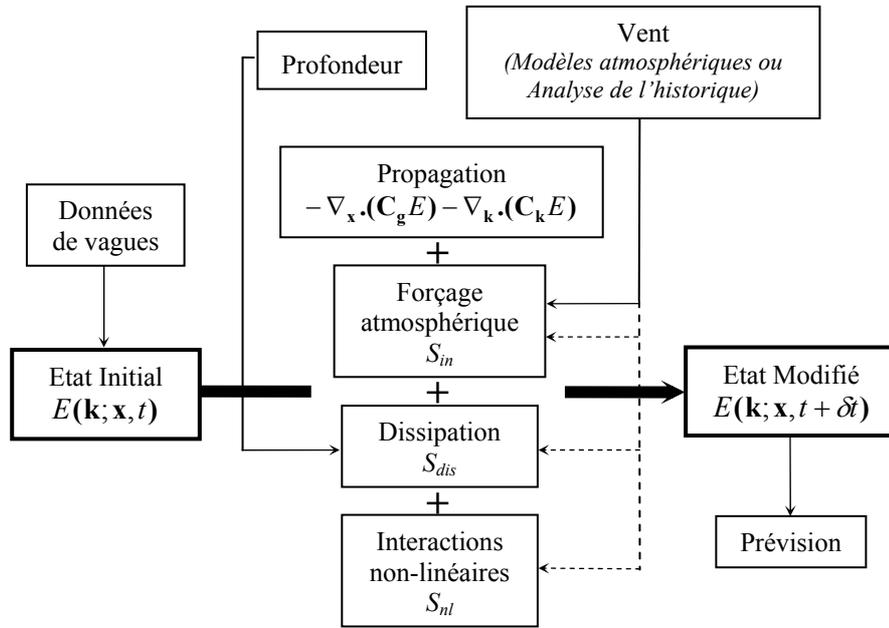


Figure 0.3 : Principe général des modèles de houle actuels.

Il existe deux grandes approches pour résoudre l'intégration de l'équation de propagation (0.2) sur un nombre donné de modes et de directions :

- la résolution globale par méthode itérative, utilisée notamment dans le modèle SWAN,
- la séparation des équations en advection puis intégration des termes source de manière séquentielle, comme réalisé dans les modèles WAM et WaveWatch III.

### 0.2.2.2 Paramétrisation des termes sources

Les modèles de prévision se répartissent actuellement en différentes catégories selon la représentation du terme source  $S_{nl}$  adoptée, qui est la plus délicate à appréhender. Les modèles de « troisième génération » utilisent pratiquement tous à l'heure actuelle l'approximation dite des interactions discrètes (Discrete Interactions Approximation, DIA) développée par Klaus et Suzanne Hasselmann dans les années 1980 [74]. Le SHOM, puis par la suite l'Office of Naval Research (ONR) aux Etats-Unis et le Rijkswaterstaat aux Pays-Bas co-financent la mise au point de nouvelles méthodes de calcul plus fines et plus rapides de ce terme.

Les modèles utilisant la DIA font un ajustement des autres termes  $S_{in}$  et  $S_{disp}$  de manière à ce que l'équation (0.2) reproduise les observations de la croissance des vagues sous l'action du vent (Kahma et Calkoen, 1992, [86]). Il existe de nombreuses manières de procéder à cet ajustement, mais en pratique, la modélisation du terme  $S_{in}$  d'apport d'énergie par le vent étant assez bien maîtrisée, c'est

essentiellement la source  $S_{disp}$  de dissipation par déferlement qui est ajustée.

Pour le calcul du terme  $S_{in}$  les modèles numériques utilisent en général une formule du type (0.4) où le taux de croissance  $\beta$  dépend de la direction du vent par rapport à la direction des vagues. Ce coefficient est ajusté empiriquement pour reproduire soit des observations très difficiles à réaliser de flux de quantité de mouvements turbulents du vent au dessus des vagues (il s'agit notamment des mesures effectuées dans la baie d'Abaco aux Bahamas par Snyder *et al* en 1981 [138], utilisées dans le modèle WAM cycle 3), soit des simulations numériques de couplage vent-vagues à très haute résolution au dessus des vagues (c'est le modèle utilisé par Makin et Chalikov, 1979, [104] [105]).

$$S_{in}(\mathbf{k}) = \beta E(\mathbf{k}) \quad (0.4)$$

Le déferlement, qui est le puits d'énergie le plus important de la mer du vent et de la houle, est encore assez mal compris. On sait qu'il aboutit à la formation de paquets d'écume dont le front se propage à une vitesse proche de la vitesse de phase des vagues. Cette écume exerce une pression sur la face avant des vagues et produit donc un effort qui s'oppose à la propagation des vagues et diminue leur énergie. Komen *et al* (1994, [92]) et Melville (1996, [107]) ont tous deux réalisé des études sur l'effet du déferlement et la modélisation du terme  $S_{disp}$  dans les modèles de propagation.

En pratique,  $S_{disp}$  est souvent considéré comme étant une fonction linéaire (0.5) où la fonction  $f_{disp}$  est ajustée à l'aide des coefficients de Komen *et al* (1984, [91]) de manière à ce que l'équation (0.2) reproduise la croissance observée des vagues sous l'effet du vent.

$$S_{disp}(\mathbf{k}) = -\omega f_{disp} E(\mathbf{k}) \quad (0.5)$$

La Figure 0.4 représente un exemple de combinaison des divers termes sources précités et la croissance des vagues obtenue.

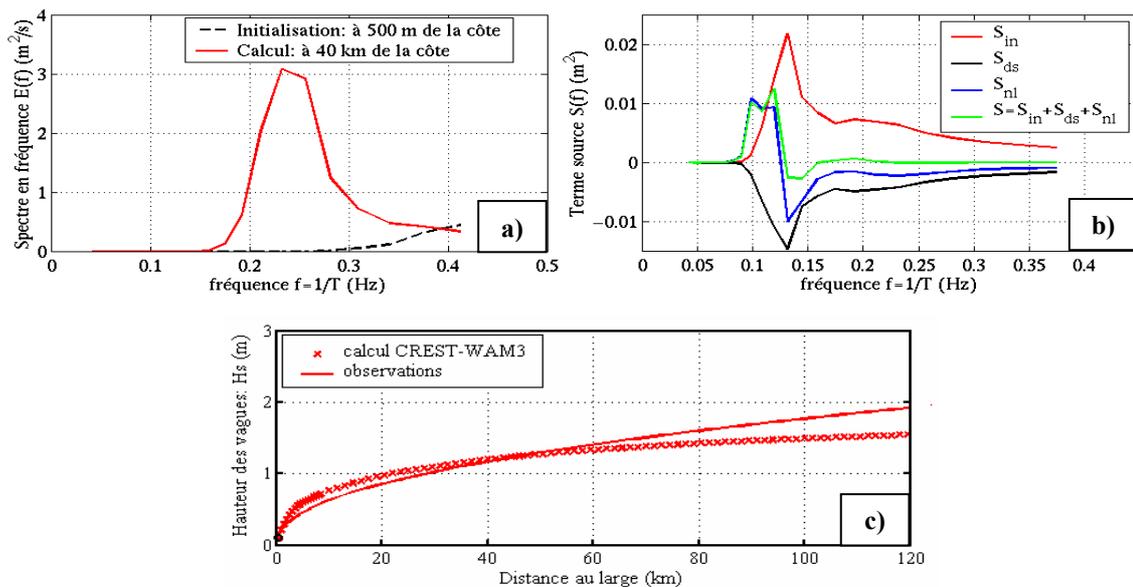


Figure 0.4 : Exemple d'ajustement des termes sources pour reproduire une croissance donnée des vagues vers le large : a) Croissance des vagues à parti de la côte, b) Termes source à 40km de la côte, c) Croissance des vagues vers le large obtenue avec le modèle et observée. Données du SHOM.

Le calcul a été réalisé avec le modèle CREST, développé au SHOM, avec un vent de terre de 36km/h soufflant vers le large, en utilisant la DIA pour le calcul des interactions non-linéaires, les paramètres de Hasselmann pour l'évaluation de  $S_{in}$  (reposant les observations de la baie d'Abaco) et ceux de Komen pour l'évaluation du terme  $S_{disp}$ .

On constate que le terme source total  $S$ , en vert sur la Figure 0.4.b), est toujours positif à 40km de la côte aux basses fréquences, ce qui signifie que de l'énergie est ajoutée au champ de vagues qui se propage vers le large. Le résultat est que la hauteur des vagues augmente vers le large. Par ailleurs,  $S$  est positif pour les fréquences au dessous du pic (qui est de 0,25Hz suivant la Figure 0.4.a)) et négatif pour les fréquences au-dessus, ce qui induit une « migration » du pic vers les basses fréquences : la période moyenne des vagues augmente. Ce phénomène est essentiellement dû aux interactions non-linéaires représentées en bleu sur la Figure 0.4.b). Au final, on constate que la hauteur et la période moyenne des vagues augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la côte, cela d'autant plus vite que le vent est fort, ce qui est en parfait accord avec les observations (cf Figure 0.4.c)).

### 0.2.2.3 Exploitation des modèles

En pratique, la qualité des champs de vent fournis par les modèles atmosphériques ou par une analyse manuelle de l'historique des observations de vent est déterminante. Les modèles de prévision sont actuellement améliorés en ajoutant au processus décrit ci-dessus une assimilation de mesures de hauteurs significatives  $H_s$  par des altimètres comme TOPEX-POSEIDON (Ocean TOPography EXperiment) ou ERS-1 et 2 (European Remote Sensing satellite system) et plus récemment JASON (Joint Altimetry Satellite Oceanography Network) et ENVISAT (ENVironnement SATellite). Une étude est en cours concernant l'assimilation de spectres issus d'images radar, aussi appelées images SAR (Synthetic Aperture Radar), qui devraient apporter une description plus fine des états de vent, une correction des énergies et la direction calculée des vagues. Ces données devraient également permettre de diminuer le nombre de mesures sur site à effectuer.

Les modèles décrits dans ce chapitre donnent en général des estimations de grandeurs statistiques moyennes issues de la densité d'énergie spectrale  $E(\mathbf{k})$ , telles que la hauteur significative des vagues  $H_s$ , leur période moyenne  $T_z$  ou  $T_p$ , leur direction moyenne, et, le cas échéant, leur différenciation en houle et mer du vent. Les modèles WAM ou WaveWatch donnent ainsi des prévisions utiles jusqu'à des échéances d'une semaine.

Ces résultats peuvent être utilisés pour établir des bases de données de hauteurs et périodes de vagues sur de grandes échelles spatiales et/ou temporelles, ou sur un site particulier à la demande d'un exploitant. On fait également appel aux modèles numériques pour pallier l'insuffisance des données expérimentales, soit parce qu'elles ne sont pas assez nombreuses, soit parce qu'elles ont été recueillies trop loin de la zone considérée ou pendant un laps de temps trop court pour les rendre représentatives. Des données issues de simulations rétrospectives de courte durée ont pour objet la vérification ou l'analyse de conditions extrêmes, telles que les tempêtes ayant occasionné de graves dommages sur les côtes ou en mer. Les modèles de vagues sont par ailleurs utilisés par les météorologistes à l'intérieur des modèles de circulation atmosphérique pour corriger les champs de vent ou, directement couplés aux modèles atmosphériques, pour modifier la rugosité des océans et les flux d'énergie cinétique turbulente à la surface. Enfin, d'autres grandeurs sont calculées par les modèles, comme la vitesse d'agitation au fond des océans qui permet de suivre la dynamique sédimentaire, ou la variance de pression au second ordre, qui donne des indications sur la géophysique interne des océans comme la détection de microséismes.

La Figure 0.5 présente un aperçu des données fournies par le modèle WaveWatchIII. Il s'agit

des prévisions météorologiques à 24h sur l'Océan Atlantique concernant la hauteur significative et à la période de pic des vagues, ainsi que le champ de vent.

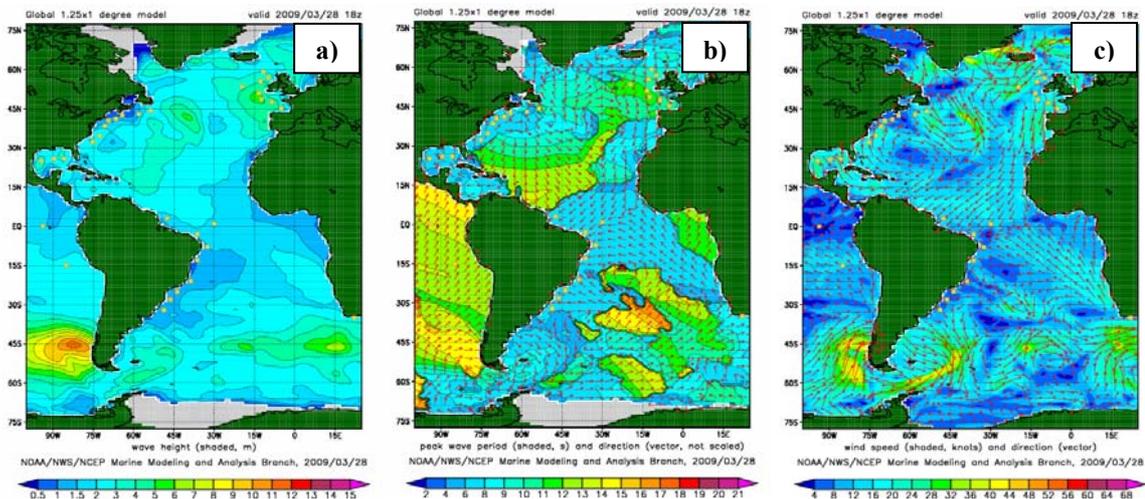


Figure 0.5 : Prévisions à 24h sur l'Océan Atlantique fournies par le modèle WaveWatchIII pour le 28 mars 2009 concernant : a) la répartition de la hauteur significative, b) la répartition de la période de pic, c) le champ de vent. Données provenant du site de prévision WaveWatch.

## 0.2.3 Vers la prévision déterministe de houle

### 0.2.3.1 Un besoin de nouvelles prévisions

Malgré leur succès dans la prévision à grandes échelles et les nets progrès accomplis depuis les trente dernières années, les modèles de houle que nous avons présentés ci-dessus sont mis en défaut lorsqu'il s'agit de donner une prévision précise d'un état de mer à court terme. Comme nous l'avons fait remarquer, ces modèles ne procurent que des données stochastiques moyennées sur des durées de l'ordre de quelques heures, et ne considérant que l'évolution du spectre, ils ne conservent pas l'information sur les phases des ondes qui sont aléatoirement distribuées entre 0 et  $2\pi$  suivant une loi uniforme (ils sont dits moyennés en phase ou « phase averaged »). On sait pourtant que des états de mer très différents peuvent avoir la même description spectrale si les phases des vagues ne sont pas précisées (Funke & Mansard, 1981, [60]).

Les trop nombreuses approximations faites dans le calcul des termes sources, l'utilisation d'une équation d'évolution linéaire et les hypothèses de stationnarité et d'homogénéité des phases, sont autant de facteurs limitant l'utilisation des modèles de prévision actuels. C'est particulièrement vrai pour des états de mer dominés par la houle et non par des vagues de vent. Par exemple, la connaissance à court terme des périodes de mer calme, qui sont le résultat de combinaisons complexes entre les différentes composantes de la houle s'annulant mutuellement, n'est pas accessible par les modèles que nous connaissons aujourd'hui. La prévision de ces périodes pourrait permettre une nette amélioration des opérations de récupération ou de lancement d'engins depuis une plateforme, ou des opérations de connexion entre un navire citerne et un système flottant de type FPSO (Floating Production, Storage and Offloading). A l'autre extrême, l'apparition des vagues scélérates, dont on

répertorie pourtant bon nombre d'événements souvent catastrophiques pour les navires, les structures offshore, et bien entendu le personnel humain embarqué, n'est pas non plus prédite.

La nécessité de prévoir l'état de mer de façon précise à court terme a donc poussé les chercheurs à développer de nouveaux modèles de prévision dits « déterministes » ou « phase resolved », par opposition aux modèles « phase averaged », car ils conservent l'information sur les phases des composantes de houle. Leur développement est lié aux progrès fulgurants réalisés ces dernières années dans le domaine de la simulation numérique de vagues non-linéaires et à l'amélioration des performances informatiques. Les modèles de houle déterministes sont ainsi devenus une alternative aux modèles évoqués précédemment.

C'est l'équipe de Morris *et al* (1992 [109], 1998 [110]) qui en 1992 suggère qu'il est possible de faire de la prévision de houle irrégulière de manière déterministe à l'aide d'un modèle de propagation linéaire. La notion de « zone de prévision », sur laquelle nous reviendrons au chapitre suivant, est alors introduite pour la toute première fois. Les derniers travaux concernant ce modèle sont dus à Edgar *et al* (2000, [50]) et Belmont *et al* (2001, [8]) qui s'attachent à trouver la meilleure façon de périodiser un signal mesuré de manière à effectuer des Transformées de Fourier. Les modèles linéaires de Clauss *et al* (2007, [33] et 2008, [34]) et le modèle international OWME-JIP (Onboard Wave and Motion Estimation Joint Industry Project) (Naaijen & Huijsmans, 2008, [111]) ont par la suite été développés dans le but de prévoir les mouvements d'un navire soumis à la houle.

Des approches reposant sur une modélisation non-linéaire de la houle ont également vu le jour, comme celle de Zhang *et al* qui développent un modèle de prévision déterministe au second ordre de non-linéarité, le Hybrid Wave Model (HWM, 1996, [167]) en houle monodirectionnelle, puis plus récemment le Directional Hybrid Wave Model (DHWM, 1999, [168]) en trois dimensions. Comme leurs noms l'indiquent, ces modèles utilisent une méthode hybride pour le calcul des interactions non-linéaires entre les composantes de la houle au second ordre de perturbation, associant couplage modal et modulation de phase.

Enfin très récemment, Yue *et al* [161] et Wu [160] sont à l'origine d'une méthode de prévision déterministe encore plus performante dans la mesure où les interactions non-linéaires entre les vagues sont calculées jusqu'à un ordre choisi  $M$  supérieur à deux qui est ajusté en fonction de la précision souhaitée de la prévision.

De plus amples détails sur ces différentes approches seront donnés dans au Chapitre 1.

### **0.2.3.2 Les points clé d'un modèle de prévision déterministe**

Le processus de prévision déterministe débute avec la collecte de mesures expérimentales, comme l'élévation de la surface libre, au large de la zone où la prévision est requise. Il peut s'agir de données recueillies par un capteur fixe, comme une ou plusieurs bouées ancrées au sol, ou par un capteur mobile, comme un radar embarqué sur un navire. La première phase consiste alors à intégrer ces données au modèle de prévision de manière à recréer un champ vérifiant les conditions de mesure. Il s'agit de la phase d'assimilation de données qui sera décrite au Chapitre 3. Le champ reconstruit est ensuite propagé par le modèle jusqu'au site de prévision.

La phase d'assimilation de donnée est déterminante pour la qualité de la prévision fournie. En effet, les mesures expérimentales disponibles ne donnant que des informations peu nombreuses et restreintes sur l'état de la mer, le champ reconstruit par le modèle ne peut être exactement le même que le champ original. Or il est impératif que le champ introduit comme condition initiale dans le

modèle de propagation soit le plus proche possible de la réalité, sans quoi la prévision sera de qualité moindre.

C'est pourquoi le modèle de houle choisi doit être représentatif des conditions de houle étudiées et caractériser au mieux les phénomènes physiques intervenant dans la dynamique des vagues, de manière à pouvoir reproduire précisément les observations et à propager le champ reconstruit de façon réaliste. Un modèle de houle linéaire sera adapté à la description de petits états de mer, tandis que des modèles prenant en compte les interactions non-linéaires entre les vagues devront être employés pour les houles de plus forte cambrure, plus complexes à simuler.

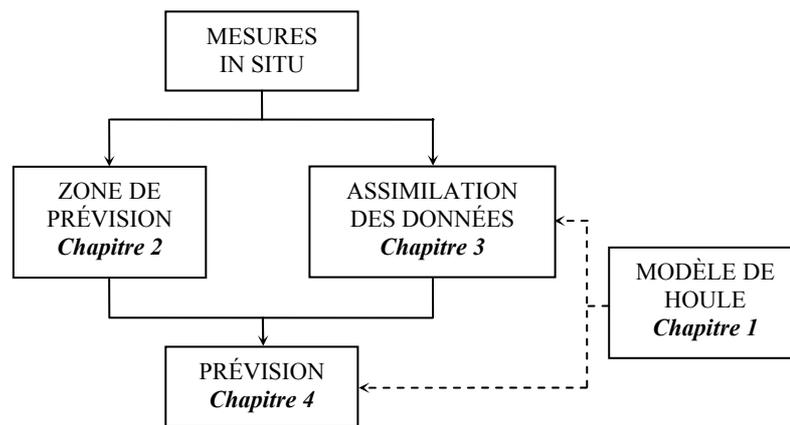


Figure 0.6 : Étapes clé d'un processus de prévision déterministe.

Par ailleurs, il est impératif de vérifier la faisabilité des prévisions. Ainsi Pierson *et al* [125] montrent dès 1955 qu'une prévision en un point donné  $(x,t)$  est déterminée par les vagues de vitesses de groupe telles, qu'elles arrivent au point  $x$  à l'instant  $t$ . Cette constatation permet de définir une zone spatio-temporelle à l'intérieur de laquelle la reconstruction du champ de vagues à partir des mesures et sa prévision sont possibles.



# Chapitre 1

## Modélisation de la houle

La prévision de houle est étroitement liée au modèle choisi pour représenter le phénomène physique de la propagation des vagues. En effet, la prévision est d'autant plus exacte que le modèle est proche de la réalité, et l'efficacité de l'algorithme de prévision dépend de la rapidité de la méthode numérique implémentée.

Ce premier chapitre a pour but de poser le cadre théorique de l'étude des vagues et de présenter les différentes méthodes utilisées pour résoudre le problème de propagation de la houle. Nous commençons dans une première partie par établir les équations régissant notre problème ainsi que le principe de résolution par méthode spectrale. Les parties 1.2 et 1.3 sont consacrées à la description des diverses méthodes spectrales, plus ou moins fines et complexes, utilisées dans notre modèle de prévision.

### 1.1 Formulation du problème

#### 1.1.1 Hypothèses et équations générales

Les vagues sont des oscillations de l'interface air/eau générées par le vent et maintenues par un échange entre énergie cinétique et énergie gravitationnelle. L'objet de cette partie est la mise en équation de la propagation de ces ondes de gravité en théorie potentielle. Après avoir rappelé le cadre et les hypothèses de notre étude, nous établirons les équations ainsi que les conditions aux limites régissant le problème de la propagation de houle.

#### Définition du domaine d'étude

On considère un domaine de fluide  $D$  ouvert représentant une portion de l'océan. On choisit comme système de coordonnées un système cartésien  $(O,x,y,z)$  dont l'origine  $O$  est placée à l'une des extrémités du domaine. Les dimensions du domaine  $D$  sont alors  $L_x$  suivant l'axe  $(O_x)$ ,  $L_y$  suivant l'axe  $(O_y)$  et  $h$  suivant l'axe  $(O_z)$ . L'axe  $(O_z)$  est orienté suivant la verticale ascendante et le plan  $z = 0$  correspond au niveau du fluide au repos. On considère enfin le vecteur bidimensionnel  $\mathbf{x}$  de coordonnées  $(x,y)$  dans le plan horizontal. On notera  $\nabla_3$  le gradient tridimensionnel et  $\nabla$  le gradient par rapport aux coordonnées horizontales  $(x,y)$ .

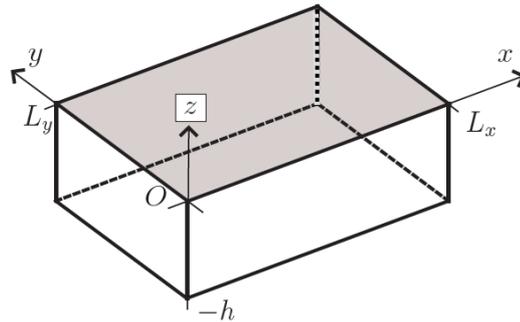


Figure 1.1 : Domaine d'étude et système de coordonnées.

## Hypothèses considérées

Dans le cadre de cette étude, on fait les hypothèses suivantes :

- Le fluide considéré, qui est toujours de l'eau dans nos simulations, est considéré comme parfait, c'est-à-dire non visqueux.
- Les variations de la masse volumique de l'eau étant très faibles par rapport aux échelles spatio-temporelles mises en jeu dans le cas d'ondes de gravité, on fait l'hypothèse d'écoulement incompressible.
- On suppose que l'on se place loin des zones de déferlement; l'observation montrant que les vagues « naturelles » sont effectivement irrotationnelles, on considère que l'écoulement est irrotationnel (cette hypothèse n'est nécessaire qu'à un seul instant puisque tout champ initialement irrotationnel reste irrotationnel).
- Les effets de tension de surface sont négligés (on ne tient pas compte des ondes capillaires, les vagues sont uniquement entretenues par la gravité et le vent n'a aucun effet sur elles).
- On considère finalement que la profondeur  $h$  est constante, et l'on ignore les effets du fond sur la propagation des vagues.

## Équations générales

Les champs volumiques, les champs de vitesse et de pression sont décrits dans un formalisme eulérien. Les équations qui régissent l'écoulement sont l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité), l'équation de conservation de la quantité de mouvement, auxquelles on adjoint des conditions aux limites.

Fort de l'hypothèse d'écoulement irrotationnel, la vitesse  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t)$  au sein du fluide peut s'exprimer à l'aide d'un potentiel des vitesses  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$  tel que :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, z, t) \quad \text{dans } D \quad (1.1)$$

L'écoulement étant par ailleurs supposé incompressible, la vitesse  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t)$  est de divergence nulle. L'équation de continuité devient alors l'équation de Laplace pour le potentiel  $\phi$  :

$$\Delta\phi(\mathbf{x}, z, t) = 0 \quad \text{dans } D \quad (1.2)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement quant à elle peut s'écrire sous la forme d'un gradient nul pour un écoulement incompressible irrotationnel, dont l'intégration en espace donne la relation de Bernoulli instationnaire :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gz + \frac{P}{\rho} = B(t) \quad \text{dans } D \quad (1.3)$$

où  $B(t)$  est une fonction qui ne dépend que du temps, appelée constante de Bernoulli, que l'on inclut en général dans le potentiel  $\phi$  en posant :

$$\phi'(t) = \phi(t) + \int B(t)dt \quad (1.4)$$

En supposant que l'on se situe loin des zones de déferlement, la surface libre peut être repérée par une grandeur univoque  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ . Si l'on réécrit l'équation précédente (1.3) en la position de la surface libre en supposant que la pression est continue à l'interface entre le fluide et l'air et est égale à la pression atmosphérique extérieure (les effets de tension superficielle sont négligés), on obtient la condition dynamique de surface libre (CDSL) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g\eta = 0 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

Pour clore le problème, on adjoint à cette équation une condition cinématique de surface libre (CCSL) qui traduit l'imperméabilité de la surface libre (en tout point de la surface libre, les vitesses normales du fluide et de la surface libre sont égales) :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \quad (1.6)$$

$\mathbf{n}$  est un vecteur normal à la surface libre et  $\mathbf{U}$  représente la vitesse de la surface libre qui peut être calculée à partir de la dérivée particulaire de la position de la surface libre comme suit :

$$\mathbf{U} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ U_z \end{array} \right| = \frac{D}{Dt} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \eta(\mathbf{x}, t) \end{array} \right| = \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \right) \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \eta(\mathbf{x}, t) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\eta \\ \mathbf{u} \cdot \nabla\eta \end{array} \right| \quad (1.7)$$

$\mathbf{n}$  a pour composantes  $(-\partial\eta/\partial x, -\partial\eta/\partial y, 1)$  dans la base  $(x, y, z)$ , ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \nabla_3\phi(\mathbf{x}, \eta, t) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

D'où la condition cinématique de surface libre (CCSL) :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (1.8)$$

Les équations (1.5) et (1.8) forment les conditions de surface libre (CSL).

## Conditions aux limites

Dans le cadre de notre travail, nous nous concentrons sur la prévision de houle en pleine mer. Le domaine simulé  $D$  est donc supposé infini dans les deux directions horizontale  $x$  et  $y$ . Au fond, suivant l'axe vertical  $z$ , on fait l'hypothèse d'un glissement entre les particules fluides et le sol :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h$$

Les conditions sur les parois latérales dépendent du modèle de houle utilisé. Dans le cadre de la méthode numérique HOS (High-Order Spectral) que nous présentons au paragraphe 1.3.3, on supposera par exemple que le domaine  $D$  est périodique dans les directions  $(O_x)$  et  $(O_y)$ , ce qui donne les conditions :

$$\begin{cases} \phi(x=0, y) = \phi(x=L_x, y) \\ \eta(x=0, y) = \eta(x=L_x, y) \\ \phi(x, y=0) = \phi(x, y=L_y) \\ \eta(x, y=0) = \eta(x, y=L_y) \end{cases}$$

## Bilan

Finalement, l'élévation  $\eta(\mathbf{x}, t)$  et le potentiel  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$  doivent vérifier le système d'équations :

$$\begin{cases} \Delta \phi(\mathbf{x}, z, t) = 0 & \text{dans } D \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi \cdot \nabla \eta & \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 & \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 & \text{en } z = -h \\ \text{conditions sur les parois latérales} \end{cases} \quad (1.9)$$

## 1.1.2 Résolution par méthode spectrale

### 1.1.2.1 Caractérisation de l'approche spectrale

On appelle méthode spectrale toute méthode reposant sur une décomposition en fréquences des différentes quantités mises en jeu. La décomposition peut se faire mathématiquement sous la forme d'une intégrale ou de manière discrète au moyen de séries s'appuyant sur des bases de fonctions globales de l'espace de définition de la quantité considérée, qui vérifient des propriétés de convergence rapide.

C'est le caractère global des méthodes spectrales qui les différencient principalement des

autres techniques numériques utilisées dans les applications pratiques de résolution des équations aux dérivées partielles d'un problème aux limites, comme les différences finies, les éléments finis et les volumes finis, qui sont elles des méthodes locales. En effet, les méthodes locales sont basées sur le principe que la dérivée est une quantité définie localement qui ne peut être calculée en un point donné qu'à partir des valeurs prises dans le voisinage proche de ce point. Autrement dit, l'information à une extrémité du domaine de calcul n'a aucune influence sur l'autre extrémité. Cette caractéristique fait de ces techniques des outils de choix pour la résolution de problèmes de géométries complexes.

En revanche, la géométrie du domaine en dehors du point étudié a une importance capitale pour les méthodes spectrales qui reposent sur un changement d'espace entre l'espace physique du domaine de calcul et l'espace des fonctions décrivant la quantité considérée, aussi appelé espace spectral. Ces fonctions devant vérifier des propriétés étroitement liées à la simplicité et à la régularité du domaine de calcul (elles doivent être définies sur tout l'espace de calcul, connues analytiquement, être régulières de manière à être différenciées exactement, et former une base de représentation convergente des fonctions de l'espace physique), leur utilisation est limitée aux domaines de formes simples, à l'instar des méthodes locales évoquées précédemment. Cependant, dans le cas de géométries très simples (sphères, cylindre, parallélépipède), les méthodes spectrales ont un niveau de précision bien supérieur à toutes les autres méthodes.

Par ailleurs, dans le contexte de résolution d'équations aux dérivées partielles dépendant du temps, ces méthodes présentent l'atout majeur d'avoir des propriétés de convergence rapide, voire exponentielle, avec le nombre de modes utilisés si les fonctions utilisées sont bien régulières. Ainsi, dans un espace à plusieurs dimensions, une discrétisation relativement grossière pourra être suffisante pour atteindre d'excellents niveaux de précision, tout en limitant le coût du calcul en temps et en mémoire de stockage.

### 1.1.2.2 Application au problème de prévision déterministe

Différentes approches spectrales ont été utilisées au cours de ce travail de thèse pour reconstruire un champ de vagues à partir de données mesurées et simuler son évolution jusqu'à la zone spatio-temporelle de prévision désirée. Selon les caractéristiques de la houle étudiée, notamment la cambrure des vagues, des modèles plus ou moins complexes ont été implémentés.

En effet, pour des houles à faible cambrure où les phénomènes non-linéaires sont réduits, une approche faiblement non-linéaire au premier ou au second ordre de perturbation peut suffire à donner une représentation réaliste du phénomène physiques de propagation, évitant ainsi un surcoût inutile en temps de calcul associé à un modèle plus complexe. En revanche, lorsque la cambrure des vagues augmente, les phénomènes non-linéaires résultant de l'interaction entre les vagues ne peuvent plus être négligés et un modèle tenant compte de ces effets est nécessaire pour reconstruire et prévoir la houle de manière précise. Le modèle d'ordre élevé HOS (High-Order Spectral), développé au Laboratoire de Mécanique des Fluides depuis 2002, a donc été employé pour simuler des houles complexes.

Dans cette section, nous présentons les différents modèles spectraux implémentés ainsi que leurs applications déjà existantes dans le domaine de la prévision déterministe. Nous commencerons par décrire les modèles faiblement non-linéaires au premier et au second ordre de perturbation, ainsi qu'une extension du modèle au second ordre auquel nous avons associé une équation de dispersion non-linéaire d'ordre trois. Dans une seconde partie nous expliciterons la formulation HOS ainsi que les techniques numériques implémentées pour assurer son bon fonctionnement, notamment la technique d'anti-repliement employée ainsi que la méthode d'intégration temporelle, à laquelle nous avons apportée une amélioration au cours de cette thèse.

## 1.2 Approches faiblement non-linéaires

### 1.2.1 Modèle linéaire

#### Principe

L'approche la plus simple et la plus utilisée dans le domaine de la prévision déterministe pour décrire l'état de mer est l'approche linéaire. Elle consiste à décomposer l'élévation de surface libre dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^N \underline{a}_n \exp(i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x})) \right) \quad (1.10)$$

Chaque composante de Fourier issue d'une FT temporelle, de fréquence  $f_n = n\Delta f = \omega_n / 2\pi$  et d'amplitude complexe  $\underline{a}_n$  où  $n \in \mathbb{N}$ , est associée à un nombre d'onde  $\mathbf{k}_n$  par la relation de dispersion linéaire  $\omega_n^2 = g|\mathbf{k}_n| \tan(|\mathbf{k}_n|h)$ . Chaque onde linéaire, aussi appelée onde libre, est considérée comme étant indépendante, c'est-à-dire qu'elle évolue selon ses propres vitesse et direction sans interagir avec les autres composantes.

#### Application à la prévision

Pour un problème en deux dimensions, une simple Transformée de Fourier (FT) permet de passer d'un signal mesuré par une sonde située en  $x_p$  aux amplitudes et phases de l'espace spectral. Pour reconstruire l'élévation de surface libre sur tout l'espace d'étude à partir du signal sonde reconstruit, il suffit alors d'appliquer un déphasage  $-k_{nx}(x_p - x)$  à chaque composante modale calculée à l'instant de prévisions souhaité  $t$ , puis d'effectuer la sommation sur l'ensemble des modes.

Plusieurs modèles de prévision linéaire existent à l'heure actuelle et sont essentiellement destinés à l'aide à la manoeuvrabilité des navires et à l'industrie pétrolière. De manière pratique, il s'agit de prévoir les réponses en mouvement de corps flottant à la surface à une houle donnée. Dans le cas d'un navire ou d'une plate forme pétrolière, on recherchera plutôt les périodes de calme au cours desquelles les mouvements sont de faible amplitude, pour faciliter la récupération d'engins, le transfert de personnel ou de carburant.

La première approche déterministe linéaire est due à l'équipe de Morris *et al* (1992 [109], 1998 [110]) (DSWP, Deterministic Sea Wave Prediction). La contribution de cette équipe au problème de la prévision déterministe est majeure car elle introduit la notion de « zone de prévision » délimitant la zone spatio-temporelle prévisible de manière déterministe. Selon Morris *et al*, cette zone dépend de la vitesse de phase des ondes mesurées, mais Wu *et al* (2004, [160]) montre à juste titre que ce sont plutôt les vitesses de groupe qui sont en jeu (cf Chapitre 2).

Edgard *et al* (2000, [50]) et plus récemment Belmont *et al* (2006, [8]) s'intéressent particulièrement au traitement des signaux de houle mesurés ou générés avec le modèle linéaire. Leurs travaux reposent sur la recherche de solutions permettant de limiter les effets de fenêtrage dus au fait que l'on cherche à décrire un champ de vagues, par nature non périodique, par une structure spectrale périodique. Le but étant de conserver une bonne précision de la forme de la surface libre aux extrémités du domaine, les approches classiques de fenêtrage (ref Parzen 1967, [118]) ont été rejetées.

La solution de Edgar *et al* (2000, [50]) consiste à trouver les points extrêmes du domaine où la surface libre et sa pente sont les plus proches, de manière à rendre le signal étudié le plus périodique possible pour la recherche des coefficients de Fourier. Mais cette méthode induit une diminution des informations disponibles et par suite une diminution de la zone de prévision accessible (cf Chapitre 2). Belmont *et al* (2006, [8]) proposent alors une autre méthode qui utilise des fonctions de convolution dans l'espace physique pour introduire le déphasage approprié à la prévision souhaitée.

En 2006, un projet international le OWME-JIP a été lancé dans le but de développer un modèle pratique de prévision à 60 secondes environ, à partir de mesures radar, des périodes où les mouvements des navires sont réduits.

Cette étude étant focalisée sur la recherche de périodes calmes, ce n'est pas tant la détermination de la surface libre à proprement parler qui est recherchée, mais plutôt la prévision de l'enveloppe de la houle, sur laquelle les calculs de précision sont effectués. Une version bidimensionnelle du modèle a été validée expérimentalement par Naaijen & Huijsmans (2008, [111]) d'après des essais réalisés dans le bassin de houle de l'Université de Delft : une sonde fixe étant utilisée pour mesurer l'élévation de surface libre générée par le batteur, on a comparé l'enveloppe de la houle prévue par le modèle à l'enveloppe issue des relevés de plusieurs autres sondes, ainsi que les réponses en tangage et roulis d'un navire-maquette.

Plusieurs cas de houle caractérisés par des spectres de JONSWAP (Joint North Sea Wave Project) ont été testés et on constate que bien que les erreurs sur l'enveloppe de la surface libre sont relativement élevées, les erreurs sur les mouvements du bateau sont beaucoup plus modérées. En effet, dans certains cas où les fréquences communes au spectre de houle et au spectre caractéristique de la fonction de transfert du mouvement étudié (appelée RAO, Response Amplitude Operator) se situent dans les basses fréquences, la RAO agit comme un filtre et l'erreur en mouvement du navire s'en trouve diminuée.

Le modèle de prévision de houle WAVE FORECAST, initié par Clauss *et al* (2007, [33]), inclut également un module de prévision à court terme des mouvements d'un navire à partir de mesures radar analysées par le système WaMoS II (Wave Monitoring System). Cette étude semble être plus avancée que la précédente dans la mesure où elle prend en compte la vitesse d'avance du bateau, ainsi que l'angle d'attaque de la houle sur le bâtiment pour la version tridimensionnelle la plus récente (Clauss *et al*, 2008, [34]).

Un premier objectif est en effet de pouvoir déterminer la vitesse et la direction d'avance optimales à adopter de manière à éviter les paquets de vagues critiques pouvant provoquer des mouvements de tangage ou de roulis dangereux.

Le second objectif est basé sur la constatation que le spectre de houle vu par le navire est différent selon sa vitesse d'avance. Ainsi une vitesse croissante fait qu'une houle de face apparaît plus cambrée et de longueurs d'ondes plus courtes, alors qu'une houle arrière devient plus lisse et plus longue. Il s'agit donc d'adapter la vitesse d'avance du navire pour modifier le spectre de houle rencontré et ainsi atténuer les spectres critiques et la réponse en mouvements du navire (Figure 1.2).

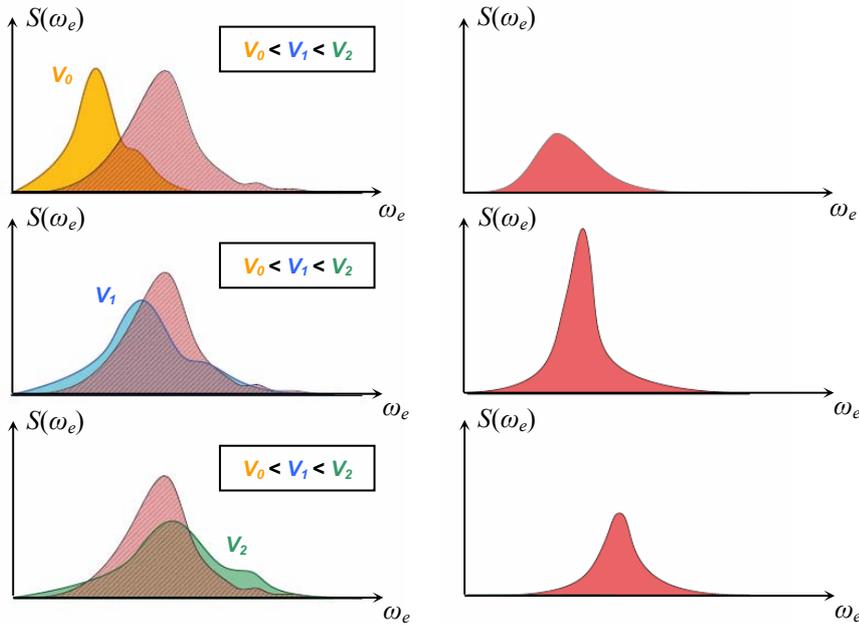


Figure 1.2 : Corrélation entre le spectre correspondant à la fonction de transfert en tangage et les spectres de houle rencontrés pour différentes vitesses d'avance du navire  $V_0 < V_1 < V_2$ .

## 1.2.2 Modèle au second ordre de perturbation

### Principe

Dans ce modèle, on prend en compte les interactions non-linéaires entre les vagues deux à deux. L'élévation de surface libre est décomposée en une élévation linéaire notée  $\eta^{(1)}(\mathbf{x}, t)$  et une élévation second ordre liée au sens des perturbations, notée  $\eta^{(2)}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \eta^{(2)}(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon^3) \quad (1.11)$$

L'élévation linéaire se calcule à partir des ondes libres comme écrit en (1.10). L'approche la plus courante pour le calcul des coefficients du second ordre, résultant de l'interaction entre les ondes deux à deux, est la méthode de couplage modal qui consiste à considérer la superposition de deux trains d'ondes monochromatiques. Cette méthode initiée par Phillips (1960, [123]), Longuet-Higgins (1962, [100]) et Hasselmann (1962, [73]) pour des problèmes en profondeur infinie a été étendue par Dalzell (1999, [41]) en profondeur finie.

Une autre technique est employée par Zhang *et al* (1993, [165]) qui montre que la méthode conventionnelle de couplage modal peut converger parfois difficilement lors du calcul des interactions entre deux ondes de fréquences éloignées. Il préconise alors l'utilisation d'une méthode de modulation de phase dérivée de celle de Phillips, Longuet-Higgins et Hasselmann et étendue par Hong (1993, [81]) à l'étude de l'interaction de deux ondes directionnelles en eaux profondes. Cette approche suppose le découpage du spectre de houle en bandes de fréquences. Le calcul des interactions entre les ondes d'une même bande ou de bandes jointives se fait par une méthode de couplage modal, et entre les ondes de bandes disjointes, par modulation de phase.

Plutôt que de considérer des couplages entre composantes, la méthode de modulation de phase considère que la conséquence des interactions entre les vagues est la modulation des ondes courtes (hautes fréquences) par les ondes longues (basses fréquences) et se traduit directement dans la solution des ondes courtes. L'influence sur l'élévation et le potentiel de surface libre des ondes longues est d'ordre trois au moins et elle est négligée [165].

La méthode de modulation de phase fait l'hypothèse que la profondeur est grande comparé aux ondes courtes. Ces dernières peuvent donc être approximées par des ondes d'eau profonde. La séparation du spectre en bandes de hautes et basses fréquences se fait de manière à vérifier cette hypothèse (Zhang & Chen, 1998, [166]).

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons utilisé une méthode classique de couplage modal. Nous n'avons observé aucun problème de convergence lors de nos calculs. L'élévation second ordre est reconstruite à partir des amplitudes complexes élémentaires  $\underline{a}_n$  du premier ordre suivant l'expression générale (1.12). Dans cette équation,  $\underline{a}_n^+ = \underline{a}_n$ ,  $\underline{a}_n^-$  est le conjugué de  $\underline{a}_n$  et  $G_{mn}^\pm$  représente les termes de couplage que l'on calcule à partir des formules données en Annexe A.

$$\eta^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^N \sum_{m=1}^N G_{mn}^\pm \underline{a}_m \underline{a}_n^\pm \exp(i((\omega_m \pm \omega_n)t - (\mathbf{k}_m \pm \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{x})) \right) \quad (1.12)$$

On peut également décomposer l'élévation au second ordre en quatre élévations :

$$\eta^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \eta_{Cst}(\mathbf{x}, t) + \eta_{Stokes}(\mathbf{x}, t) + \eta_{Sum}(\mathbf{x}, t) + \eta_{Diff}(\mathbf{x}, t) \quad (1.13)$$

Les deux premières composantes,  $\eta_{Cst}(\mathbf{x}, t)$  le terme constant et  $\eta_{Stokes}(\mathbf{x}, t)$  le terme de Stokes, représentent les interactions des ondes élémentaires au premier ordre avec elles-mêmes, et les deux derniers termes  $\eta_{Sum}(\mathbf{x}, t)$  et  $\eta_{Diff}(\mathbf{x}, t)$  représentent les interactions somme et différence entre deux ondes différentes. Les expressions mathématiques des différentes élévations et des termes de couplage correspondants sont données en Annexe A.

On remarquera que la difficulté principale de l'approche au second ordre réside dans le fait que le calcul des effets de couplage se fait à partir des ondes linéaires, mais qu'il faut auparavant avoir découpé l'élévation des effets du second ordre pour pouvoir avoir les ondes libres.

Une solution à ce problème consiste à utiliser une technique itérative comme celle de Duncan & Drake (1995, [49]), où à chaque étape  $q$  du processus, on découple l'élévation linéaire des effets du second ordre calculés à l'étape précédente ( $q-1$ ). Une nouvelle estimation de l'élévation au second ordre peut alors être reconstruite suivant l'équation (1.12). Nous reviendrons plus en détails sur cette approche itérative au Chapitre 3.

Dans le cadre de la méthode hybride de Zhang *et al* associant couplage modal et modulation de phase, le découplage des ondes libres se fait suivant une méthode assez complexe sur laquelle nous ne nous étendrons pas ici. Le lecteur peut toutefois se reporter à l'article [165] pour plus de détails.

## Application à la prévision

Comme pour le modèle de prévision linéaire, la première étape consiste à trouver les amplitudes complexes modales du signal sonde mesuré, ce qui se fait en deux dimensions par une FT.

Il faut ensuite découpler le signal mesuré des effets du second ordre, en utilisant par exemple la décomposition de Duncan & Drake (1995, [49]). L'élévation peut alors être reconstruite au second ordre à partir de l'équation (1.12) en appliquant comme précédemment un déphasage à chaque composante modale calculée à l'instant de prévisions souhaité  $t$ .

Les seuls modèles de prévision déterministes existant à l'heure actuelle sont les modèles de Zhang *et al*, le modèle HWM (1996, [167]) pour une houle unidirectionnelle et le modèle DHWM (1999, [168]) pour une houle multidirectionnelle, tous deux basés sur la méthode de calcul hybride des interactions non-linéaires évoquée précédemment. Dans le cas de la méthode tridimensionnelle, une méthode de maximum de vraisemblance étendue (EMLM, Isobe *et al*, 1984, [83]) est utilisée pour déterminer la distribution des amplitudes des ondes en fonction de la direction, ce pour chaque fréquence issue des mesures expérimentales (7 directions au maximum pour chaque fréquence). La méthode ne donnant pas accès aux phases des différentes composantes, une seconde étape consiste à déterminer les phases initiales en ajustant la quantité reconstruite (qui peut être l'élévation de surface libre ou une autre grandeur caractéristique) à la mesure. Ce processus se fait en minimisant l'erreur à la mesure calculée au sens des moindres carrés. Une fois les amplitudes, phases et directions du signal mesuré connues, la phase de découplage des ondes libres peut commencer. Le signal reconstruit découplé des effets du second ordre est alors réintroduit à la EMLM et le processus itératif se poursuit jusqu'à atteindre la précision souhaitée sur la mesure. La prévision est ensuite directement obtenue à partir des ondes libres trouvées en utilisant la méthode hybride pour le calcul des interactions non-linéaires.

Les deux méthodes HWM et DHWM ont fait l'objet de validations expérimentales concernant la reconstruction et la prévision de la surface libre du champ de vagues ou de ses propriétés cinématiques. La méthode monodirectionnelle HWM, testée sur différents cas de houles générées en bassin à partir de spectres de JONSWAP, donne des résultats tout à fait satisfaisants pour la prévision de la forme de la surface libre et des composantes de vitesse (Spell *et al*, 1996, [139]). L'amélioration de la qualité des prévisions par rapport à l'approche linéaire classique ou à ses deux extensions pour le calcul des composantes de vitesses, la méthode de « stretching » de Wheeler (1970, [155]) et la méthode d'« extrapolation » linéaire (Forristall & Rodenbush, 1986, [57]), est d'autant plus probante que la cambrure de la houle est importante. La méthode multidirectionnelle DHWM a quant à elle été validée pour la prévision de houle synthétique en bassin et de houle réelle en pleine mer, à partir de mesures de l'élévation de la surface libre ou de mesures de pression, ces dernière étant les plus fréquemment utilisées (Zhang *et al*, 1999, [169]). Les champs de vagues générés en bassin sont mieux prédits que les champs de vagues réels dont les mesures sont détériorées par les divers bruitages des capteurs, et les calculs sont plus précis lorsqu'ils sont initialisés par des mesures de surface libre, plutôt que par des mesures de pression ou de vitesse. On constate également que la qualité de la reconstruction est améliorée lorsque l'on utilise d'avantage de composantes directionnelles pour chaque fréquence (on dispose alors de plus de degrés de liberté pour minimiser l'erreur à la mesure lors de la recherche des phases initiales) mais que l'impact sur la qualité de la prévision est cependant très modéré. Le nombre de sondes de mesure utilisé a en revanche peu d'influence sur les résultats.

### Remarque

De la même manière que pour l'élévation de surface libre, il est également possible de reconstruire le potentiel des vitesses au second ordre de perturbation en le décomposant en un potentiel linéaire et un potentiel second ordre. Comme nous le verrons plus tard, l'élévation de surface libre et le potentiel des vitesses pris en  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$  reconstruits au second ordre de perturbation, au même instant

et sur tout le domaine de calcul, seront utilisé comme condition initiale au modèle de houle HOS pour une simulation d'ordre élevé.

Deux solutions ont été envisagées pour le calcul du potentiel surfacique au second ordre  $\phi^s(\mathbf{x}, t)$  réécrit comme suit :

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \eta, t) = \phi^{s(1)}(\mathbf{x}, t) + \phi^{s(2)}(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon^3) \quad (1.14)$$

En première approximation, nous avons négligé la contribution du potentiel second ordre et nous avons calculé  $\phi^s(\mathbf{x}, t)$  comme le potentiel linéaire pris en  $z = \eta^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ , soit :

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi^{(1)}(\mathbf{x}, z = \eta^{(1)}(\mathbf{x}, t), t) + o(\varepsilon^3) \quad (1.15)$$

que l'on calcule à partir de l'expression suivante :

$$\phi^{(1)}(\mathbf{x}, z, t) = \text{Re} \left( \sum_{n=1}^N \underline{b}_n \exp(i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x})) \frac{\cosh(|\mathbf{k}_n|(z+h))}{\cosh(|\mathbf{k}_n|h)} \right) \quad (1.16)$$

Les amplitudes complexes linéaires du potentiel  $\underline{b}_n$  peuvent être déterminées à partir des amplitudes linéaires de l'élévation de surface libre par  $\underline{b}_n = (ig/\omega_n)\underline{a}_n$  d'après la condition dynamique de surface libre au premier ordre.

Mais nous avons constaté que l'approche rigoureuse au second ordre donne de bien meilleurs résultats que l'approximation précédente et qu'il est donc nécessaire de prendre en compte la contribution du potentiel second ordre. En effectuant un développement en série de Taylor limité au second ordre autour de  $z = 0$  de l'équation (1.14) on a comme expression pour le potentiel surfacique :

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi^{(1)}(\mathbf{x}, z = 0, t) + \eta^{(1)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, z = 0, t) + \phi^{(2)}(\mathbf{x}, z = 0, t) + o(\varepsilon^3) \quad (1.17)$$

où le premier terme représente la contribution linéaire et les deux derniers termes la contribution du second ordre. Le calcul de  $\phi^{(2)}(\mathbf{x}, z=0, t)$  se fait à partir des amplitudes complexes linéaires  $\underline{a}_n$  découplées en utilisant les formules de couplage modal données en Annexe A.

Tout comme pour l'élévation de surface libre, on reconstruit le potentiel surfacique en un point quelconque et à un instant donné en appliquant un déphasage aux amplitudes  $\underline{a}_n$  que l'on calcule à l'instant voulu, avant d'appliquer les formules de couplage modal.

### 1.2.3 Modèle au second ordre étendu

Il s'agit d'un modèle se situant à la limite entre le second et le troisième ordre de perturbation : plutôt que de suivre la relation de dispersion linéaire comme c'était le cas pour le modèle au second ordre, on force les fréquences des ondes libres (ou les nombres d'ondes) à vérifier une relation de dispersion au troisième ordre de perturbation. Cette relation résulte de l'étude théorique des interactions résonnantes d'ordre 3, et plus particulièrement des interactions produisant une modification de la vitesse de phase des ondes.

Suivant les travaux de Phillips (1960, [123]), qui donne la condition de résonance (1.18) pour que trois ondes en interaction donnent naissance à une quatrième onde par transfert d'énergie, Longuet-Higgins & Phillips (1962, [101]) montrent que dans le cas où la quatrième onde est en quadrature avec l'une des ondes primaires (par exemple  $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1$ ), le résultat de l'interaction n'est plus un transfert d'énergie mais une modification de la vitesse de phase de l'onde  $\mathbf{k}_1$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_4 &= \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 \\ (\text{ou } \omega_4 &= \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Selon cette étude, le cas le plus fréquent d'interactions résonnantes induisant une modification de la vitesse de phase correspond donc au jeu de nombres d'ondes :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_4 &= \mathbf{k}_1 \text{ et } \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 \\ (\text{ou } \omega_4 &= \omega_1 \text{ et } \omega_2 = \omega_3) \end{aligned} \quad (1.19)$$

La généralisation de ces interactions à un spectre de houle unidirectionnelle de  $n$  fréquences  $f_n$  conduit, en profondeur infinie et pour la fréquence  $n$ , à la modification du nombre d'onde suivante :

$$k'_n = k_n \left( 1 - k_n^2 |a_n|^2 + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p < n}}^N \frac{\omega_p}{\omega_n} k_n k_p |a_p|^2 + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p > n}}^N \frac{\omega_p}{\omega_n} k_n^2 |a_p|^2 \right) \quad (1.20)$$

On remarquera que contrairement à Longuet-Higgins & Phillips qui se placent à longueur d'onde fixée, on suppose ici que c'est la fréquence qui est fixe, ce qui modifie d'un facteur deux la formule originale. Ce facteur est égal au rapport de la vitesse de groupe sur la vitesse de phase qui vaut bien deux en profondeur infinie (Bredmose, 2002, [20]).

L'équation (1.20) montre que les nombres d'onde dépendent non seulement des fréquences comme dans le cas linéaire, mais également des amplitudes des ondes libres mises en jeu. Par ailleurs, on constate que le terme de Stokes  $k_n^3 |a_n|^2$  représentant les interactions de l'onde  $n$  avec elle-même sera négligeable par rapport à la somme des interactions de l'onde  $n$  avec les autres ondes.

## 1.3 Approches fortement non-linéaires

### 1.3.1 Méthodes spectrales actuellement opérationnelles

Historiquement, les méthodes spectrales ont connu un essor important suite à l'implémentation du premier algorithme de résolution des Transformées de Fourier rapide (FFTs) proposé par Cooley & Tuckey en 1965 [37].

La première méthode ayant vu le jour est la Méthode de Couplage Modal dite « Mode Coupling Method » développée par Phillips (1960, [123]), Longuet-Higgins (1962, [100]) et Hasselmann (1962, [73]) dans le but d'étudier les interactions faiblement non-linéaires entre les vagues. L'élévation de la surface libre et le potentiel des vitesses sont décomposés en série de Fourier sur la base de fonctions sinusoïdales et les non-linéarités sont vues comme des couplages entre les

différentes composantes modales d'un champ de vagues initialement linéaire (ie de composantes indépendantes). En 1968, Zakharov [163] établit l'équation d'évolution des modes lors des interactions résonnantes entre quatre vagues, donnant ainsi accès à l'évolution temporelle de la surface libre par exemple. En 1984, Stiassnie & Shemer [142] portent ce développement aux interactions résonnantes de quintets de composantes modales et en 1994, Krasitskii [93] introduit la prise en compte des interactions non-résonnantes ce qui constitue l'ultime évolution de la méthode « Mode Coupling » dont une application numérique peut être trouvée dans Annekov et Shira (2001,[2]).

D'autres méthodes simulant le problème non-linéaire complet ont par la suite été élaborées, comme la Méthode « Directe », qui ne passe pas par un développement en ordre de perturbations comme précédemment, mais où les conditions de surface libre sont résolues directement sur la position instantanée de la surface libre. Cette méthode présente l'inconvénient de ne pas pouvoir utiliser les FFTs et a donc un coût de calcul beaucoup plus important que les autres méthodes. Elle a donc principalement été utilisée par ses créateurs Fenton & Rienecker (1982, [53]) et plus récemment par Johannesson et Swan (date, [84]) qui en proposent une version améliorée.

La Méthode « High-Order Spectral » (HOS) d'ordre élevé due à West et al (1987, [154]) et Dommermuth et Yue (1987, [45]) et la Méthode du « Dirichlet-Neumann Operator » (DNO) développée par Craig & Sulem (1993, [40]) et reprise par Bateman *et al* (2001, [6], 2003, [7]), sont des méthodes pseudo-spectrales très similaires (Le Touzé 2003, [98]) et reposent toutes les deux sur la formulation surfacique des CSL introduite par Zakharov [163] sous leur forme complètement non-linéaire, ainsi que sur l'utilisation de FFTs pour leur résolution.

On peut également citer la Méthode du «  $\sigma$ -Transform », technique volumique dont la version la plus récente due à Chern *et al* (1999, [28] et [29]) repose sur l'utilisation de la transformation  $\sigma$  (Phillips, 1957, [121]) pour ramener à tout instant le problème à un domaine de géométrie fixe. Si cette approche présente des avantages théoriques en termes de stabilité et de taux de convergence, la discrétisation volumique du domaine induit un temps de calcul beaucoup plus important que les méthodes surfaciques HOS et DNO.

Enfin, une Méthode « Mixte » alliant une solution pseudo-spectrale classique de type Zakharov surfacique [163] à une résolution intégrale sur les zones de la surface libre où les non-linéarités sont importantes a été initiée par Clamond & Grue en 2001 [30] deux dimensions et récemment adaptée aux problèmes tridimensionnels par Fructus *et al* (2005, [59]). Elle a pour but d'améliorer la simulation des champs de vagues fortement non-linéaires en conservant de bonnes propriétés de stabilité par rapport aux méthodes pseudo-spectrales classiques HOS/DNO. Cependant, dans l'état actuel des choses, les cas de houle traités avec cette méthode ne sont pas plus cambrés que les cas habituellement simulés avec les modèles HOS ou DNO; en revanche, les temps de calcul annoncés se révèlent être bien supérieurs à ceux des méthodes HOS ou DNO.

Nous limiterons ici cette description non exhaustive, mais pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux ouvrages de référence de Canuto *et al* (1988, [25]) ou de Fornberg (1995, [56]), plus spécialement dédié aux méthodes pseudo-spectrales, dont la méthode HOS que nous avons utilisée et qui est présentée au paragraphe 1.3.3 fait partie, ainsi qu'à la thèse de Le Touzé (2003, [98]) qui fait une analyse poussée des différentes méthodes spectrales précitées.

## 1.3.2 Application au problème de propagation de houle

Une fonction  $f$  peut être a priori être décomposée de manière discrète en séries tel que (1.21) où les fonctions  $\psi_n(x)$  sont des fonctions trigonométriques, des polynômes de Legendre ou de

Tchebychev, selon la géométrie du domaine de définition de  $f$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n \psi_n(x) \quad (1.21)$$

Dans notre cas où le domaine d'étude  $D$  est parallélépipédique, les fonctions utilisées sont simplement des fonctions trigonométriques dont la forme exacte est déterminée par les conditions aux limites aux bords du domaine. En milieu ouvert, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.1.1, on considère des conditions de périodicité aux extrémités du domaine suivant les axes ( $O_x$ ) et ( $O_y$ ) et d'une condition d'adhérence au fond en  $z = -h$ . Les fonctions de base les plus appropriées pour décrire l'espace  $D$  sont donc des fonctions exponentielles.

Ainsi, le système constitué des équations de Laplace pour le potentiel des vitesses  $\phi$ , des équations de périodicité pour ce même potentiel ainsi que de la condition au fond (cf système d'équations (1.9)) peut être résolu de manière implicite si l'on exprime  $\phi$  sous la forme :

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{\phi}(t) \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}) \frac{\cosh(\mathbf{k}_{ij}(z+h))}{\cosh(\mathbf{k}_{ij}h)} \quad (1.22)$$

où  $\mathbf{k}_{ij} = \left( \frac{i 2\pi}{L_x}, \frac{j 2\pi}{L_y} \right)$  est le nombre d'onde dans l'espace horizontal et où les fonctions de base sont  $\psi_{ij}(\mathbf{x}) = \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x})$ . De la même manière, l'élévation de surface libre peut se mettre sous la forme :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{\eta}(t) \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.23)$$

La propriété de convergence rapide de l'approche spectrale mentionnée précédemment permet de tronquer cette décomposition à un nombre fini de modes  $N_x$  et  $N_y$  suivant les directions  $x$  et  $y$ . Par ailleurs, l'utilisation d'une base de fonctions exponentielles orthogonales autorise l'utilisation des FFTs pour passer de l'espace physique des fonctions décrites  $\eta(\mathbf{x}, t)$  et  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$  à l'espace modal des amplitudes  $A_{ij}^{\phi}(t)$  et  $A_{ij}^{\eta}(t)$ , ce qui accélère considérablement les calculs. Alors qu'une inversion directe requiert un temps CPU (Central Processor Unit) évoluant en  $N^2$  où  $N = N_x N_y$ , une inversion par FFTs a un coût beaucoup plus raisonnable qui varie en  $M \log N$ .

### 1.3.3 Modèle High-Order Spectral

#### Origines de la méthode

S'il est en théorie possible de développer les quantités en séries d'ordre de perturbation élevé et de prendre en compte un grand nombre de modes, la pratique montre que leur utilisation est limitée par l'accroissement de la complexité des équations mises en jeu avec l'ordre de non-linéarité et le nombre de modes. Dans la plupart des cas, les développements se limitent à l'ordre 3 ou 4 sur un nombre de modes très limité ( $O(10)$ ). Par ailleurs, avant les travaux de Kraitskii en 1994 [93], l'effet des interactions non-résonantes entre les ondes sur le spectre de houle étaient négligés et seules les

interactions résonantes étaient prises en compte.

En 1987, Dommermuth & Yue [45] et West *et al* [154], mettent au point une nouvelle technique de résolution spectrale d'ordre élevée, la méthode dite High-order Spectral (HOS), qui repose sur la formulation Hamiltonienne de Zakharov (1968, [163]) des CSL au moyen d'un potentiel de vitesse surfacique  $\phi^s(\mathbf{x}, t)$ . Bien qu'ayant vu le jour dans deux équipes distinctes, ces méthodes reposent toutes deux sur l'idée originelle de Watson & West en 1975 [153] de développer la seule quantité non surfacique des équations  $\partial\phi/\partial z$  en série de Taylor autour  $z = 0$  (cf 0).

La méthode HOS présente de nombreux avantages qui en font une des méthodes spectrales les plus utilisées aujourd'hui en hydrodynamique. Tout d'abord, les CSL sont considérées comme étant complètement non-linéaires, ce qui lève la restriction aux faibles non-linéarités puisqu'il est possible d'effectuer des développements à un ordre quelconque  $M$ . Le modèle autorise également la prise en compte d'un grand nombre de modes  $N$  ( $O(10^3)$ ), chaque mode étant libre au sens où il évolue à sa propre vitesse. Les modes interagissent entre eux jusqu'à l'ordre  $M$  en suivant les CSL non-linéaires qui sont traitées de manière pseudo-spectrale. La méthode converge très rapidement avec  $N$  et  $M$  (de manière exponentielle aux faibles cambrures) et ne se dégrade qu'à l'ordre deux pour les vagues les plus cambrées. Par ailleurs, contrairement à la méthode de couplage modal, aucune hypothèse n'est faite quant à la nature des interactions modales ; en particulier, les interactions non-résonantes dont Watson & West démontrent la contribution au renforcement des interactions résonantes, sont prises en compte. Finalement, l'utilisation des FFTs pour la résolution pseudo-spectrale itérative aux nœuds de discrétisation de la surface libre rend la méthode extrêmement attractive en terme de temps de calcul. Ainsi le coût global d'un calcul passe d'un ordre évoluant en  $O(N^2)$  pour une résolution directe des FTs à un ordre en  $O(MN \log N)$  à chaque pas de temps.

## Formalisme

La méthode HOS est basée sur les CSL (1.9)b et (1.9)c réécrites dans le formalisme Hamiltonien proposée par Zakharov (1968, [163]) utilisant un potentiel surfacique  $\phi^s(\mathbf{x}, t)$  défini par :

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t) \quad (1.24)$$

On obtient ainsi les nouvelles CSL qui donnent l'évolution temporelle de l'élévation de surface libre  $\eta(\mathbf{x}, t)$  et du potentiel surfacique  $\phi^s(\mathbf{x}, t)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla \phi^s \cdot \nabla \eta + (1 + |\nabla \eta|^2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \end{cases} \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (1.25)$$

$\eta$  et  $\phi^s$  étant connus à un instant  $t$ , la seule quantité demeurant inconnue au moment d'avancer en temps les équations (1.25) est la vitesse verticale de la surface libre  $W(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) (\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$

qui ne s'exprime pas explicitement en fonction de  $\eta$  et de  $\phi^s$ . Hormis ce terme, les quantités du membre de droite du système (1.25) sont très facilement calculables (les dérivées spatiales sont obtenues par un aller-retour rapide dans l'espace spectral où elles sont explicites) et il est possible d'estimer les quantités surfaciques  $\eta$  et  $\phi^s$  à l'instant suivant  $t + \Delta t$ .

La formulation des CSL en termes de quantités surfaciques permet une simplification importante du problème initialement formulé pour un domaine tridimensionnel de fluide  $D$  (Figure 1.1) puisque la résolution s'effectue désormais sur la surface libre elle-même. La dimension verticale  $z$  disparaît du problème et le développement en quantités spectrales se fait sur  $\eta(\mathbf{x},t)$  et  $\phi^s(\mathbf{x},t)$  sur la base de fonctions exponentielles caractéristiques du domaine ouvert  $D$  :

$$\begin{aligned}\eta(\mathbf{x},t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{\eta}(t) \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}) \\ \phi^s(\mathbf{x},t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{\phi^s}(t) \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x})\end{aligned}\quad (1.26)$$

En ce qui concerne le calcul de la vitesse verticale  $W$ , une procédure idéale consiste à résoudre un problème de Dirichlet pour le potentiel  $\phi$  (ie vérifiant l'équation de Laplace sur  $D$  et des conditions aux limites de Neuman au fond et de Dirichlet à la surface libre  $\phi(\mathbf{x},z=\eta,t) = \phi^s(\mathbf{x},t)$ ), puis de dériver le potentiel par rapport  $z$ . Cependant, la condition de Dirichlet exprimée en la position de la surface libre rend complexe la résolution d'un tel problème. L'idée de Watson & West (1975, [153]) pour remédier à cette difficulté est de réécrire le potentiel, et par suite la vitesse verticale, en série de Taylor autour de  $z = 0$  :

$$\phi(\mathbf{x},\eta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n}(\mathbf{x},0,t) = \phi^s(\mathbf{x},t) \quad (1.27)$$

$$W(\mathbf{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^{n+1} \phi}{\partial z^{n+1}}(\mathbf{x},0,t) \quad (1.28)$$

La méthode HOS consiste alors à approximer le potentiel  $\phi(\mathbf{x},z=0,t)$  et la vitesse verticale  $W(\mathbf{x},t)$  par un schéma d'ordre élevé. Pour cela, ces quantités sont développées en séries de puissances de  $\eta$  tronquées, en pratique, à une valeur finie notée  $M$  qui est l'ordre de non-linéarité de la méthode HOS :

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},z=0,t) &= \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(\mathbf{x},z=0,t) \\ W(\mathbf{x},t) &= \sum_{m=1}^M W^{(m)}(\mathbf{x},t)\end{aligned}\quad (1.29)$$

En combinant les équations (1.27) et (1.29), on obtient le système triangulaire (1.30) en identifiant les termes par ordre en  $\eta$  :

$$\left\{ \begin{aligned}\phi^{(1)}(\mathbf{x},0,t) &= \phi^s(\mathbf{x},t) \\ \phi^{(2)}(\mathbf{x},0,t) &= -\eta(\mathbf{x},t) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x},0,t) \\ \phi^{(3)}(\mathbf{x},0,t) &= -\eta(\mathbf{x},t) \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x},0,t) - \frac{\eta^2(\mathbf{x},t)}{2} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x},0,t) \\ &\dots = \dots \\ \phi^{(m)}(\mathbf{x},0,t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k(\mathbf{x},t)}{k!} \frac{\partial^k \phi^{(m-k)}}{\partial z^k}(\mathbf{x},0,t) \quad \text{pour } m \geq 1\end{aligned}\right. \quad (1.30)$$

On se ramène ainsi à la résolution de  $M$  problèmes de Dirichlet pour les potentiels  $\phi^{(m)}$  exprimés en  $z = 0$  et l'on s'affranchit du problème initial complexe de Dirichlet pour le potentiel  $\phi$  exprimé en la position de la surface libre  $z = \eta$ . Chaque équation de (1.30) est résolue de manière successive à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale itérative, où les potentiels  $\phi^{(m)}$  sont décomposés sur des fonctions de base, comme indiqué au paragraphe 1.3.2 :

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{(m)}(t) \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}) \frac{\cosh(|\mathbf{k}_{ij}|(z+h))}{\cosh(|\mathbf{k}_{ij}|h)} \quad (1.31)$$

Les amplitudes modales  $A_{ij}^{(m)}(t)$  ainsi déterminées sont ensuite injectées dans un deuxième système triangulaire (1.32), obtenu par la combinaison des équations (1.28) et (1.29), qui permet de trouver les différents ordres de la vitesse verticale  $W^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ . En sommant les différentes composantes d'ordre  $m$ , on peut finalement calculer la vitesse verticale à l'ordre souhaité.

$$\left\{ \begin{array}{l} W^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) \\ W^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) \\ W^{(3)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) + \frac{\eta^2(\mathbf{x}, t)}{2!} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) \\ \dots = \dots \\ W^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k(\mathbf{x}, t)}{k!} \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x}, 0, t) \quad \text{pour } m > 1 \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Remarquons que la différence principale entre les formulations HOS de Dommermuth & Yue (1987, [45]) et de West *et al* (1987, [154]) réside dans le choix de l'ordre de troncature du développement de la vitesse verticale  $W$ . En effet, West *et al* soulignent que pour conserver la nature Hamiltonienne du système, la vitesse verticale doit être tronquée à un ordre consistant en  $\eta$  (ou en  $\nabla \eta$ ) dans les différents termes des CSL où elle intervient. Le système constitué des CSL reste alors homogène à l'ordre HOS choisi  $M$ , contrairement à la formulation de Dommermuth & Yue qui ne respecte pas cette homogénéité. Soit  $W_M$  le développement de la vitesse verticale tronqué à l'ordre  $M$  :

$$W_M(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}(\mathbf{x}, t) \quad (1.33)$$

En suivant West *et al*, nous réécrivons donc les termes  $(1 + |\nabla \eta|^2)W$  de la CCSL et  $(1 + |\nabla \eta|^2)W^2$  de la CDSL afin garder la consistance en ordre :

$$(1 + |\nabla \eta|^2)W \approx W_M + |\nabla \eta|^2 W_{M-2} \quad (1.34)$$

$$(1 + |\nabla \eta|^2)W^2 \approx (W^2)_M + |\nabla \eta|^2 (W^2)_{M-2} \quad (1.35)$$

## Application à la prévision déterministe

Il n'existe à l'heure actuelle qu'un seul modèle de prévision déterministe basé sur l'utilisation de la méthode HOS développé par Wu au cours de sa thèse (2004, [160]). Peu de détails concernant ce modèle sont disponibles, hormis quelques publications internes de Yue & Liu faisant état de l'avancement des travaux de recherche de l'équipe. La parution d'un article dans le *Journal of Fluid Mechanics*, coécrit par Wu, Liu, Kim et Yue, est attendue depuis 2005.

La formulation HOS implémentée par Wu est celle de Dommermuth & Yue à laquelle quelques apports ont été faits, notamment la prise en compte d'un courant colinéaire aux vagues, du déferlement, des effets du vent et de la friction due au fond. On notera cependant que les deux derniers effets ne sont pas inclus dans la version HOS utilisée dans le modèle de prévision.

En ce qui concerne le courant, un modèle au premier ordre est utilisé qui tient compte de l'effet d'un courant colinéaire aux vagues (dans le même sens ou opposé à la propagation de la houle), mais pas de l'effet retour des vagues sur le courant qui est négligé. Le courant est considéré comme étant irrotationnel, de vitesse variable, mais dont la composante horizontale varie peu avec la direction verticale. De manière pratique, la prise en compte du courant se fait en ajoutant la à la vitesse du fluide zone de prévision vitesse de groupe  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t)$  vitesse du courant  $\mathbf{U}_c(\mathbf{x}, z, t)$  :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t) = \mathbf{U}_c(\mathbf{x}, z, t) + \nabla\phi(\mathbf{x}, z, t) \quad (1.36)$$

Le déferlement répété du à la cambrure importante de la houle et le déferlement local résultant de la combinaisons d'ondes en phases à un point et un instant donnés sont modélisés par deux types de lissage différents. Le premier type de déferlement ayant principalement pour effet une dissipation de l'énergie des ondes courtes, un simple filtre passe bas est utilisé. Dans le cas d'un déferlement localisé, la dissipation d'énergie s'étend à tout le spectre de houle et un filtrage des hautes fréquences ne suffit plus. La technique employée par Wu est alors un filtrage local dans l'espace physique où toute vague dont la cambrure dépasse une certaine valeur est lissée.

L'influence du vent est représentée par une distribution de pression à la surface libre, ce qui modifie la CDSL. Dans ce cas, la pression est uniquement fonction de la cambrure de la houle et de la vitesse du vent, ce qui ne tient pas compte du caractère stochastique du vent mais peut donner des résultats réalistes à grande échelle.

Enfin l'effet de friction au fond est inclus dans un modèle de viscosité semblable au modèle de Ursell concernant la dissipation visqueuse dans la strate de fluide située près du sol qui se traduit par l'ajout de termes d'amortissement dans les équations d'évolution des CSL.

En ce qui concerne la prévision à proprement parler, un modèle bidimensionnel et un modèle tridimensionnel utilisant une méthode du maximum de vraisemblance pour déterminer la direction des ondes à partir de mesures à différentes sondes ont été développés. Ces modèles ont été testés avec une méthode HOS à l'ordre trois sur des cas de houle synthétiques dans un premier temps, puis sur des cas de houle générés en bassin (une houle de type « Bull's Eye » a été créée pour le test du modèle tridimensionnel en faisant focaliser un groupe de vagues en un point), les cambrures étudiées étant inférieures à 0.25. Les résultats concernant la prévision de l'élévation de surface libre, de la vitesse et des efforts exercés par la houle sur un obstacle, dans le cas bidimensionnel et de l'élévation de surface libre en trois dimensions sont effectivement plus précis que ceux donnés par un modèle linéaire ou second ordre, surtout à plus forte cambrure.

On notera également l'émergence d'un nouveau travail de thèse par Aragh (2008, [3]) dont le but est également le développement d'un modèle de prévision déterministe reposant sur les équations HOS mais tronquées au troisième ordre de perturbation. Les travaux de Aragh se sont jusqu'à présent

essentiellement portés sur la mise au point d'un modèle d'assimilation de données radar utilisant une méthode d'optimisation basée sur un calcul de gradient par méthode adjointe (cf Chapitre 3).

## 1.3.4 Artefacts numériques de la méthode HOS

### 1.3.4.1 Traitement anti-repliement

Le problème de repliement inhérent aux méthodes spectrales vient de la formulation des quantités en séries de Fourier discrètes sur un nombre fini  $N$  de modes dans l'espace spectral correspondant à  $N$  nœuds de collocation dans l'espace physique. Les fonctions d'interpolation utilisées sont  $N$ -périodiques, ce qui signifie que les modes  $n$  et  $n \pm Np$ ,  $p \in \mathbb{N}$  sont indissociables aux nœuds de collocation, ce qui pose problème lors du calcul du produit de deux fonctions.

Le produit de deux fonctions dans l'espace physique est traité par passage dans l'espace de Fourier discret. Chaque quantité étant développée en série de Fourier discrète tronquée à l'ordre  $N$ , le calcul de l'amplitude résultante va faire apparaître des termes d'ordre supérieur à  $N$  jusqu'à  $2N$  qui, n'apparaissant pas dans le développement en série de la quantité résultante, vont se « replier » sur les ordres inférieurs, l'ordre  $|n| > N$  se repliant sur l'ordre  $n \pm 2N$  comme on l'a vu précédemment.

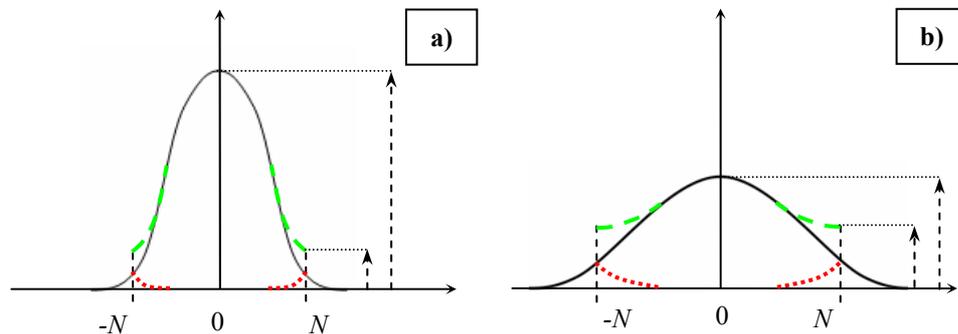


Figure 1.3 : Importance du repliement suivant le taux de décroissance (ou de croissance) modale; a) Cas où la décroissance/croissance est forte, b) Cas où la décroissance/croissance est faible.

Le repliement peut avoir des conséquences catastrophiques dans la mesure où son importance est directement liée au taux de décroissance modale (ou de croissance puisqu'il y a symétrie). Plus la pente de décroissance (ou de croissance) des amplitudes est forte, moins l'influence des termes repliés est importante par rapport aux modes principaux (cf Figure 1.3.a)). En revanche, dès que la pente des modes diminue (dans le cas d'une houle cambrée par exemple), l'importance relative du repliement par rapport aux modes principaux augmente et se propage vers les modes longs comme le montre la Figure 1.3.b). En résumé, le repliement augmente la difficulté.

Il existe deux méthodes principales pour éviter le repliement des modes, que l'on appelle méthodes d'anti-repliement, la méthode du remplissage par des zéros ou « zero padding » et la méthode de translation de phase ou « phase shifting », toutes deux rappelées par Canuto *et al* [25]. La méthode la plus couramment utilisée et la plus simple à mettre en œuvre est le « zero padding ». Elle consiste à augmenter de manière fictive le nombre de modes utilisés dans la décomposition spectrale à

un nombre  $2\mathcal{M}$ , les amplitudes ajoutées entre  $2N$  et  $2\mathcal{M}$  étant prises à zéro. Lors d'un produit entre deux quantités, les termes d'ordre  $|n| > 2\mathcal{M}$  vont se replier sur les ordres  $n \pm 2\mathcal{M}$ . La clé est alors de trouver  $\mathcal{M}$  tel que ce repliement se fasse en dehors de l'intervalle  $[-N, N]$ .

Dans le cas d'un produit de deux fonctions à une dimension, la valeur limite de  $\mathcal{M}$  telle que le repliement ne perturbe pas les modes principaux est  $\mathcal{M} > 2N/3$ , obtenue de manière à ce que le dernier mode non nul  $2N$  se replie avant le mode  $-N$ . Cette règle est dite « des trois moitiés ». Cependant, comme dans la majorité des cas, l'algorithme simple de Cooley & Tuckey (1965, [37]) implémenté pour le calcul des FFTs requiert que le nombre de modes choisi soit un multiple de deux, on prend plutôt  $\mathcal{M} = 2N$ , ce qui donne la règle « des quatre moitiés ».

Pour les produits d'ordre  $M$  intervenant dans la formulation HOS, deux techniques différentes basées sur le « zero padding » ont été utilisées par Dommermuth & Yue et West *et al.* La méthode employée par Dommermuth & Yue est une méthode d'anti-repliement partiel. Elle consiste à développer un produit multiple en une succession de produits simples auxquels la règle des quatre moitiés est appliquée. Cette approche est simple et peu coûteuse en temps de calcul, mais elle manque de précision au sens où certains termes sont omis qui pourraient avoir une signification non négligeable <sup>1</sup>.

West *et al* en revanche appliquent une méthode d'anti-repliement complet basée sur la méthode des trois moitiés à l'ordre 1 étendue à un produit d'ordre  $M$ . La valeur limite pour  $\mathcal{M}$  est alors  $\mathcal{M} > (M+1)N / 2$ , ce qui donne la règle « des  $(M+1)$  moitiés ». Cette méthode correspond au traitement exact et rigoureux du problème de repliement et tous les termes sont pris en compte contrairement à la technique d'anti-repliement partiel (les résultats donnés par West *et al* s'avèrent d'ailleurs beaucoup plus précis que ceux de Dommermuth & Yue, surtout à forte cambrure). Cependant, pour des produits d'ordre élevés, le coût de cette méthode en temps de calcul et en mémoire de stockage devient rapidement prohibitif.

L'approche que nous avons adoptée est un intermédiaire entre les deux approches précédentes qui garantit une meilleure précision que l'anti-repliement partiel tout en étant moins gourmande en mémoire et en temps de calcul que le traitement complet. Le principe de cet anti-repliement intermédiaire est de décomposer un produit d'ordre  $M$  en produits d'ordre  $p$  que l'on traite de manière complète par la méthode des  $(p+1)$  moitiés. Le point clé de cette méthode réside dans le choix de l'entier  $p$  en fonction du nombre de modes  $N$  utilisés.

La validation de cette nouvelle approche a été faite dans les thèses de Bonnefoy (2005, [18]) et de Ducrozet (2007, [48]) qui montrent que la précision des calculs est bien de l'ordre de celle d'un traitement complet. Le gain en temps de calcul est considérable lorsque l'ordre des produits augmente (comme on peut le voir en Figure 1.4, on passe d'un coût de calcul évoluant en  $O(M^3)$  dans le cas d'un traitement complet à une évolution en  $O(M^2)$  pour un traitement intermédiaire), de même que le gain en mémoire de stockage (cf Tableau 1.1).

---

<sup>1</sup> On considère par exemple le produit d'ordre trois  $f^3$  que l'on décompose en  $(f \times f) \times f$  de manière à traiter chaque produit simple par la méthode des quatre moitiés. Le traitement du premier produit  $(f \times f)$  conduit à la suppression des modes compris dans les intervalles  $[-2N, -N-1] \cup [N+1, 2N]$ , de même lorsque l'on traite le deuxième produit  $f^2 \times f$ . Or les modes issus du premier produit contenus dans  $[-2N, -N-1]$  multipliés par les modes appartenant  $[0, N]$  contribuent au calcul des modes appartenant à l'intervalle  $[1, N]$  du second produit. De même les modes issus du premier produit inclus dans  $[N+1, 2N]$  multipliés par les modes  $[-N, 0]$  ont une influence sur les modes  $[0, N]$  du produit final. Ces contributions sont omises dans le traitement partiel.

Ordre HOS \ Anti-repliement	$M=4$	$M=5$	$M=7$	$M=10$	$M=15$	$M=25$	$M=50$
	Aucun	1	1.07	1.21	1.42	1.76	2.46
Intermédiaire ( $p = 4$ )	2.17	2.34	2.69	3.21	4.08	5.81	9.98
Complet	2.17	2.76	4.17	6.79	12.6	29.3	97.8

Tableau 1.1 : Évolution des ressources en mémoire en fonction de l'ordre HOS  $M$  et du traitement anti-repliement appliqué ( $N=1024 \times 512$ ).

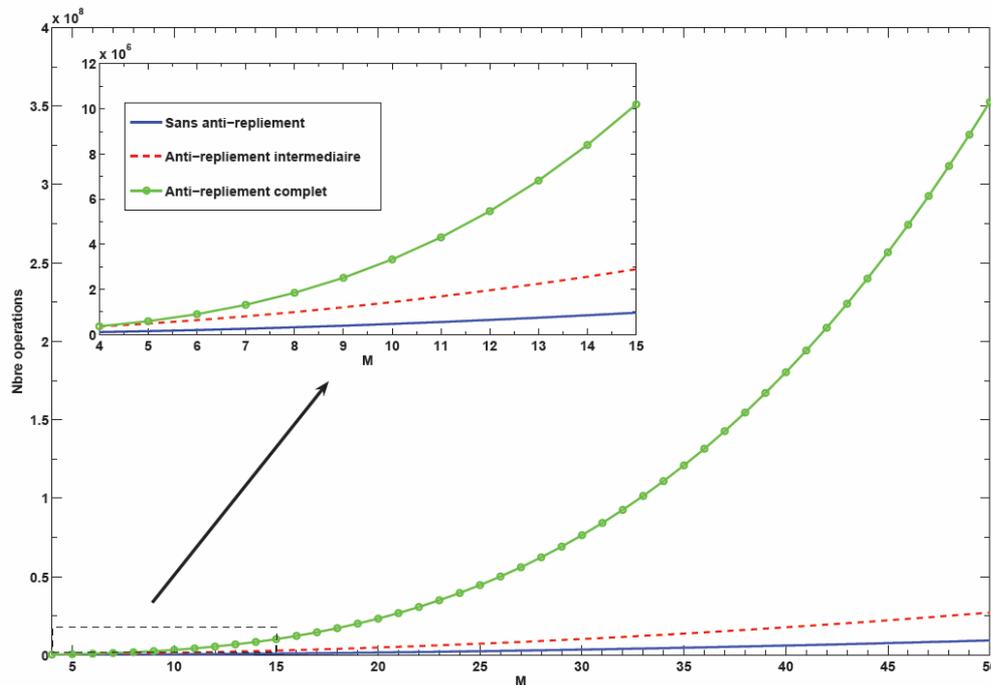


Figure 1.4 : Évolution du nombre d'opérations effectuées en fonction de l'ordre HOS  $M$  et du traitement anti-repliement utilisé.

### 1.3.4.2 Intégration en temps

L'avance en temps des CSL (1.9)b et (1.9)c, qui repose sur l'estimation de l'élévation et du potentiel de surface libre dans l'espace physique, est transposée à une avance en temps des amplitudes de ces quantités dans l'espace de Fourier. Ce passage dans l'espace modal nous permet d'utiliser la méthode préconisée par Fructus *et al* (2005, [59]), basée sur une technique de variation de la constante. Elle consiste à décomposer les CSL en une partie linéaire et une partie non-linéaire afin d'intégrer analytiquement la partie linéaire des équations avant d'avancer en temps les amplitudes modales de l'élévation et du potentiel de surface libre par une méthode Runge-Kutta (RK) à pas de temps adaptatifs. De plus amples détails sont donnés en Annexe B.

Le traitement préliminaire de la partie linéaire des CSL apporte une amélioration considérable des performances du modèle numérique : le temps de calcul est divisé par dix voire cent par rapport à

une avance en temps classique et la méthode requiert moins de mémoire de stockage. Par ailleurs, le schéma temporel devient linéairement inconditionnellement stable et exact, ce qui contribue à renforcer la robustesse et la précision du processus (Fructus *et al* , 2005, [59]). Le lecteur pourra se référer à la thèse de Ducrozet (2007, [48]) pour plus de détails concernant la validation de la méthode.

Les figures suivantes comparent les performances de la méthode d’avance temporelle implémentée aux performances d’une méthode usuelle, en terme de temps de calcul et de précision, Le cas test considéré est la propagation d’une houle régulière de cambrure modérée  $ka = 0.2$  en milieu ouvert.

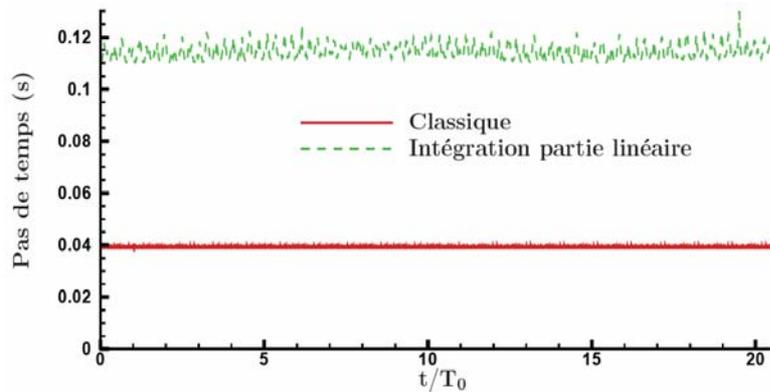


Figure 1.5 : Évolution du pas de temps pour une méthode d’intégration temporelle classique et une méthode utilisant l’intégration linéaire de la partie analytique des CSL. La tolérance sur l’erreur de troncature est fixée à  $10^{-7}$ .

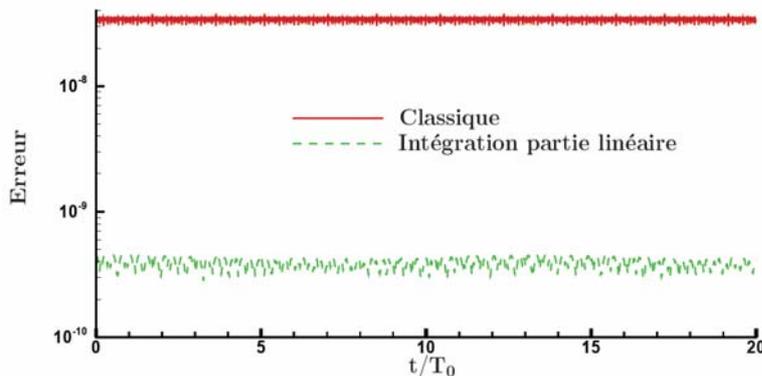


Figure 1.6 : Comparaison de l’évolution des erreurs de troncature au cours de l’avance temporelle des CSL pour une méthode classique et pour la méthode préconisée par Fructus *et al*. Le pas de temps est fixé à  $3 \cdot 10^{-2}$ .

La Figure 1.5 présente l’évolution du pas de temps utilisé dans l’avance en temps Runge-Kutta à pas de temps adaptatif pour une tolérance fixée sur l’erreur de troncature (cf 1.3.4.3). On constate que les pas de temps utilisés dans la nouvelle approche sont environ trois fois supérieurs aux pas de temps classiques, ce qui accélère fortement le processus d’intégration. Le gain en précision est

également important, comme le montre la Figure 1.6 où l'on a représenté l'évolution de l'erreur de troncature utilisée dans la méthode Runge-Kutta pour évaluer le nouveau pas de temps (1.3.4.3). Pour un pas de temps fixé, cette erreur est en effet drastiquement réduite dans le nouveau processus (d'un facteur 85 dans ce cas précis).

Le choix d'une technique d'avance temporelle de type Runge-Kutta plutôt qu'une technique multi-pas (MP), souvent plus précise et plus souvent employée vient d'une part du caractère assez raide de notre problème. Contrairement aux méthodes MP dont le domaine de stabilité est petit et borné et qui sont donc difficilement utilisables pour les problèmes raides, la stabilité des méthodes RK augmente avec l'ordre de troncature. Par ailleurs, la mise à jour des grandeurs se fait sur la base de quantités passées pour les MP, ce qui semble peu consistant pour les problèmes raides, alors que les méthodes RK « vont de l'avant ».

Les approches RK présentent d'autres avantages sur les méthodes d'avance MP, notamment en terme de temps de mémoire de stockage, plus faible pour les RK à ordre de troncature identique, et en terme de temps de calcul. En effet, même si la résolution par méthode RK demande plus d'efforts de calcul que la résolution par MP, les pas de temps autorisés sont plus importants, surtout pour les problèmes très raides, ce qui donne un temps de calcul global plus faible. Pour finir, les techniques RK peuvent être interrompues et reprises à un instant quelconque sans affecter le résultat.

L'intérêt d'une méthode à pas de temps variables est enfin de permettre une adaptation du schéma à la physique du problème mis en jeu. On peut ainsi affiner le pas lors du traitement de phénomènes délicats ou au contraire accélérer le processus sur les zones d'intérêt moindre. Le temps requis pour l'avance en temps est donc diminué, même si la procédure d'adaptation nécessite un investissement supplémentaire. La stabilité du schéma est également améliorée et on limite l'accumulation des erreurs.

### 1.3.4.3 Amélioration apportées à l'intégration temporelle

Dans le cadre de cette thèse, nous avons apporté de nouvelles améliorations à l'intégration temporelle des conditions de surface libre régissant le modèle HOS. Nous avons tout d'abord recherché la méthode embarquée de type Runge-Kutta-Fehlberg la plus adaptée à notre problème, de manière à obtenir un compromis entre précision du résultat avancé en temps et coût en temps de calcul. Nous avons ensuite ajouté une correction de type proportionnelle intégrale à l'évaluation du pas de temps suivant qui permet de diminuer le nombre de pas rejetés lors de l'avance en temps et donc de réduire encore le temps CPU. Finalement, un facteur de sécurité optimal pour le calcul des pas de temps a été mis en évidence, permettant d'augmenter la taille des pas de temps tout en limitant le nombre de rejets.

#### Principe général de l'avance en temps de Runge-Kutta

Soit  $y(t)$  la fonction que l'on désire avancer en temps et dont on connaît la dérivée temporelle  $dy/dt = f(y,t)$  ainsi que la condition initiale  $y(t=0)$ . Il s'agit d'un problème de Cauchy que l'on peut mettre sous la forme discrète  $y_{n+1} = y_n + ph$  où  $y_n = y(t_n)$ ,  $y_{n+1} = y(t_n+h)$  et où  $y_0$  est connue. Les différentes techniques d'avance en temps se distinguent par leur manière de calculer la pente  $p$ .

Les méthodes de type Runge-Kutta d'ordre  $N_{RK}$  utilisent  $s$  points intermédiaires entre les points  $t$  et  $t + h$  pour évaluer la pente  $p$  de la fonction  $y$ . L'idée est que l'on peut obtenir une estimation de l'incrément  $y_{n+1} - y_n$  de la manière suivante :

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{i=1}^s b_i k_i + O(h^{N_{RK}+1}) \quad (1.37)$$

où la fonction  $k_i$  est définie par l'équation (1.38) :

$$k_i = f(Y_i, t + hc_i), \quad 0 < c_i < 1 \quad \text{avec} \quad Y_i = y_i + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{ij} Y_j \quad (1.38)$$

En d'autres termes, on estime la pente de la fonction  $y$  aux  $s$  points de l'intervalle  $[y_i, y_{i+1}]$ , puis on calcule une pente moyenne  $\sum_{k=1}^s b_k k_k$  qui sert alors à évaluer l'incrément par la méthode d'Euler. Les coefficients  $b_i$ ,  $c_i$  et les poids  $a_{ij}$  sont déterminés en imposant que le schéma (1.37) soit équivalent à celui qui est associé à la méthode des séries entières d'ordre  $s$ .

Plus l'ordre de la méthode est élevé, plus l'intégration temporelle est donc précise et stable, mais plus elle requiert d'évaluations de la fonction  $f$ . Cependant, comme nous le verrons plus loin, dans le cadre d'une méthode à pas de temps adaptatif, comme l'erreur de troncature diminue avec l'ordre de la méthode RK ( $err \approx Ch^{1/s}$ ), le nombre de pas rejetés diminue avec l'ordre de la méthode RK et les calculs sont accélérés.

La méthode la plus souvent utilisée est la méthode RK d'ordre quatre, notée RK4, où  $s = 4$  et où l'on obtient directement une approximation de  $y_{n+1}$  par la formule :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5) \quad (1.39)$$

### Pas de temps variable : méthodes « embarquées » de Runge-Kutta-Fehlberg

Le schéma précédent implique l'utilisation d'un pas de temps constant, ce qui s'avère souvent inefficace pour la résolution d'un problème physique réaliste. En effet, la complexité du calcul évolue au cours du temps et il est parfois nécessaire d'affiner la résolution lors du traitement d'événements délicats, comme le passage d'une vague fortement cambrée. A l'inverse, il peut être utile d'augmenter la taille des pas de temps lorsque la physique mise en jeu ne revêt aucune difficulté. L'idée est donc d'adapter le pas de temps au problème au cours de l'intégration en temps.

L'idée de Fehlberg (1969, [52]) pour adapter les méthodes Runge-Kutta repose sur la constatation que l'utilisation des mêmes fonctions  $k_i$  pour approximer la quantité actualisée  $y_{n+1}$  mais avec des coefficients  $b_i$  différents peut conduire, pour une méthode d'ordre  $N_{RK}$ , à une nouvelle estimation de la quantité, d'ordre  $(N_{RK} - 1)$  cette fois. La différence entre les deux estimations de  $y_{n+1}$  à l'ordre  $N_{RK}$  et  $(N_{RK} - 1)$  est prise comme évaluation de l'erreur de troncature et est utilisée pour ajuster le pas de temps suivant. On obtient une méthode de Runge-Kutta-Fehlberg dite « embarquée » que l'on note RKF  $N_{RK} (N_{RK} - 1)$ , l'ordre  $(N_{RK} - 1)$  étant imbriqué dans l'ordre  $N_{RK}$ .

Il est également possible d'associer une approximation d'ordre  $N_{RK}$  de la quantité  $y_{n+1}$  à une approximation d'ordre  $(N_{RK} - 1)$  pour obtenir une nouvelle estimation de  $y_{n+1}$  à l'ordre  $(N_{RK} - 1)$ . Cela donne une méthode RKF  $(N_{RK} - 1) N_{RK}$ , où cette fois, c'est l'ordre  $N_{RK}$  qui est imbriqué dans l'ordre  $(N_{RK} - 1)$ .

Citons l'exemple de la méthode RKF5(4) que nous avons implémentée pour avancer en temps les CSL dans la formulation HOS. La méthode RK5 classique où  $s = 6$  donne l'approximation de  $y_{n+1}$  :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b_i k_i + O(h_n^6) \quad (1.40)$$

Fehlberg montre qu'il existe un jeu de coefficients  $b_i^*$  tel que la nouvelle estimation  $y_{n+1}^*$  est d'ordre 4:

$$y_{n+1}^* = y_n^* + h_n \sum_{i=1}^6 b_i^* k_i + O(h_n^5) \quad (1.41)$$

L'erreur de troncature à l'ordre 5 est alors approximée par la différence entre les deux évaluations (1.40) et (1.41) :

$$err_n = |y_{n+1}^* - y_{n+1}| = h_n \sum_{i=1}^6 |b_i - b_i^*| |k_i| \quad (1.42)$$

L'évaluation de cette erreur permet de trouver le pas de temps optimal  $h_{n+1}$  à utiliser lors de l'itération suivante. En effet, tout comme  $err_n$  évolue comme  $Ch_n^5$ , l'erreur à l'itération suivante  $err_{n+1}$  doit être de l'ordre de  $Ch_{n+1}^5$  et inférieure à une tolérance  $Tol$  fixée. Cela nous donne une condition sur la taille maximale du pas de temps  $h_{n+1}$  à laquelle on adjoint un coefficient de sécurité  $s_c$  tel que  $0 < s_c < 1$  car l'estimation de l'erreur n'est pas exacte :

$$h_{n+1} \approx s_c h_n \left( \frac{Tol}{err_n} \right)^{1/5} \quad (1.43)$$

Ainsi, si l'erreur  $err_n$  obtenue à la fin de l'itération précédente est plus grande que la tolérance fixée, le pas de temps est diminué et l'itération recommence. Si, au contraire, l'erreur est inférieure au paramètre de tolérance, on peut poursuivre l'intégration en temps avec un pas de temps  $h_{n+1}$  plus grand.

### Condition de stabilité

Au cours de l'avance en temps, il convient de s'assurer que la solution ne tend pas à diverger. On définit un domaine de stabilité, c'est-à-dire un ensemble de pas de temps pour lesquels une petite erreur ne tend pas à croître. La condition sur le pas de temps dépend en général du pas d'espace.

Une analyse de stabilité linéaire de la méthode RKF5(4) utilisée pour avancer en temps une équation aux dérivées partielles de type  $\partial y / \partial t = \partial y / \partial x$  couplée à une formulation spectrale des inconnues donne la condition de stabilité à respecter (Fornberg, 1995, [56]) :

$$h \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \Delta x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{L}{N} \quad (1.44)$$

Le pas de temps maximal dépend donc de la longueur d'onde du mode le plus long et le plus rapide  $|\mathbf{k}_M| = L/\pi N$ . Cette dépendance en  $1/N$  est également retrouvée par West *et al* (1987, [154]) qui parlent de condition de Courant-Friedrichs-Lévy (CFL)  $h < c\Delta x$  où  $c$  est la vitesse de advection dans l'écoulement. En revanche, Dommermuth & Yue (1987, [45]) affichent une évolution du pas de temps limite en  $1/N^{1/2}$  obtenue par une analyse de stabilité de Von Neuman de l'avance en temps CSL linéarisées. Des tests numériques réalisés avec les différents pas de temps cités ci-dessus montrent que la condition de Fornberg (1995, [56]) est la plus adaptée à notre problème.

## Adjonction au modèle d'un correcteur Proportionnel-Intégral (PI)

Lors de certaines simulations, il arrive que le nombre de pas de temps rejetés (lorsque l'erreur de troncature est supérieure à la tolérance fixée comme vu précédemment) devienne important. Il est alors nécessaire de reprendre les itérations concernées avec un pas de temps plus petit, ce qui ralentit l'avance en temps et peut également nuire à la stabilité de la méthode.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons donc ajouté au modèle d'intégration temporelle présenté ci-dessus une technique de stabilisation empruntée à la résolution des équations raides et adaptée aux problèmes faiblement raides. Il s'agit d'un contrôle du pas de temps de type proportionnel-intégral (PI), suggérée par Clamond & Fructus (2006, [31]) dans la note sur l'intégration temporelle de la méthode spectrale DNO. Ce contrôle permet une diminution du coût de calcul en limitant le nombre de rejets tout en améliorant la stabilité de l'ensemble de la procédure d'intégration. La méthode consiste à utiliser, en plus de l'erreur de troncature trouvée à l'itération courante  $err_n$ , l'erreur trouvée à l'itération précédente  $err_{n-1}$ , pour évaluer le pas de temps optimal à utiliser lors de l'itération suivante (Hairer & Wanner 2002, [72]). Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont donnés par Gustafsson (1991, [71]) pour une méthode RKF d'ordre  $N_{RK}$ :  $\alpha = 0.7 / N_{RK}$  et  $\beta = 0.4 / N_{RK}$ .

$$h_{n+1} \approx s_c h_n \left( \frac{Tol}{err_n} \right)^\alpha \left( \frac{err_{n-1}}{Tol} \right)^\beta \quad (1.45)$$

## Test de la méthode

Comme pour les précédents tests du schéma d'avance en temps des CSL utilisé dans le modèle HOS, les simulations que nous avons menées pour tester l'efficacité du correcteur PI ont été réalisées en houle régulière bidimensionnelle. La solution de Fenton & Rienecker (1982, [53]) est entrée comme donnée initiale au code HOS, pour diverses cambrures ( $ka=0.2$ ,  $ka=0.3$ ,  $ka=0.4$ ). Les simulations ont été réalisées à des ordres de non-linéarité élevés ( $M = 9$  et  $M = 11$ ), sur un nombre de modes  $N_x = 9$ , durant 100 à 500 périodes pour la plus forte cambrure et 1000 à 2000 périodes pour les autres cambrures.

A chaque période, on calcule l'erreur sur l'élévation et le potentiel de surface libre par rapport à la solution de référence de Fenton & Rienecker, de manière à juger de la précision de la méthode, ainsi que le nombre de pas de temps rejetés pour tester l'efficacité et la stabilité du processus. A la fin de chaque simulation, on évalue le nombre total de pas de temps utilisés ainsi que le temps mis pour avancer en temps les quantités du nombre de périodes souhaité.

### Test 1 : Sélection du schéma RKF optimal

Nous avons tout d'abord testé divers schémas de type Runge-Kutta-Fehlberg embarqués de manière à sélectionner le plus adapté à notre problème. Jusqu'ici, le schéma RKF3(4) était utilisé pour l'avance en temps. Des schémas d'ordre trois, quatre et cinq ont été testés, notamment les schémas RK5(4) et RK4(5) utilisant les coefficients  $b_i$  et  $b_i^*$  de Fehlberg, et ceux de Cash & Karp.

Sur la Figure 1.7, nous avons représenté l'évolution de l'erreur commise sur l'élévation de surface libre en fonction du nombre de périodes parcouru, pour les schémas les plus caractéristiques que nous avons testés. De manière à sélectionner le schéma le plus précis et le plus efficace, nous avons comparé les résultats trouvés par les différentes méthodes pour un même temps de calcul. Pour se faire, nous avons adapté le paramètre de tolérance sur l'erreur de troncature pour chaque méthode,

de sorte que l'avance sur 1000 périodes se fasse en un laps de temps identique.

On constate effectivement que plus l'ordre de la méthode RK est élevé, plus elle est précise (les méthodes de type  $RKF_{N_{RK}}(N_{RK}-1)$  donnent de meilleurs résultats que les méthodes  $RK(N_{RK}-1)_{N_{RK}}$  qui vont moins loin en ordre). La méthode  $RKF5(4)$  décrite précédemment, avec les coefficients  $b_i$  et  $b_i^*$  de Cash & Karp (1990, [26]) que l'on donne en Annexe C, apparaît comme la plus précise pour un même temps de calcul. Les coefficients initialement donnés par Fehlberg (1969, [52]) donnent des résultats beaucoup moins bons.

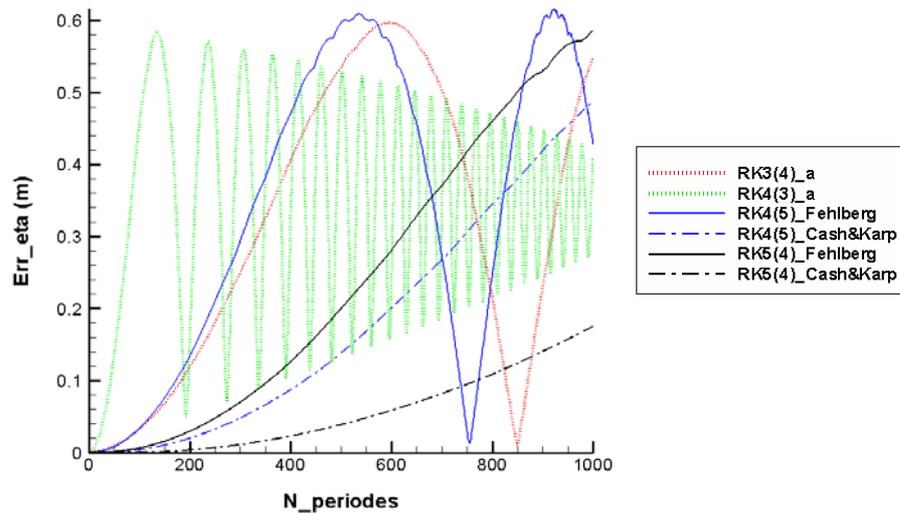


Figure 1.7 : Erreur sur  $\eta$  pour différentes méthodes RKF à temps de calcul identique.  
Simulation : temps CPU # 2min,  $ka=0.3$ , 1000T.

### Test 2 : Influence du correcteur PI

Nous avons ensuite testé l'influence du contrôle PI sur la précision et le temps de calcul de l'avance en temps pour la méthode  $RKF5(4)$  sélectionnée.

La Figure 1.8 représente le nombre de pas de temps rejetés ainsi que le nombre de pas de temps acceptés à chaque période (la somme des deux donnant le nombre de pas de temps total utilisé par période). Les calculs ont été effectués sur 500 périodes pour un cas de houle complexe de cambrure  $ka = 0.4$  qui occasionne de nombreux rejets au cours de la simulation. Les résultats sont très probants : le nombre de pas de temps rejetés est diminué de 80% environ lorsque le correcteur PI est utilisé pour calculer la taille des pas de temps.

On remarquera que les pas de temps évalués par cette méthode étant plus petits, la diminution du nombre de pas de temps total est moindre (elle est de 20% environ). Au final, le gain de temps total apporté par le correcteur PI est de l'ordre de 20%, ce qui est vraiment très intéressant pour nos simulations, d'autant plus si elles se font sur de longues durées.

L'influence du correcteur PI sur la précision de la solution est moins flagrante. Sur le cas de houle de cambrure  $ka = 0.4$ , l'apport du correcteur est négligeable. En revanche, sur un cas de houle moins cambrée où  $ka = 0.3$ , on constate une légère diminution de l'erreur sur l'élévation de surface libre, comme le montre la Figure 1.9.

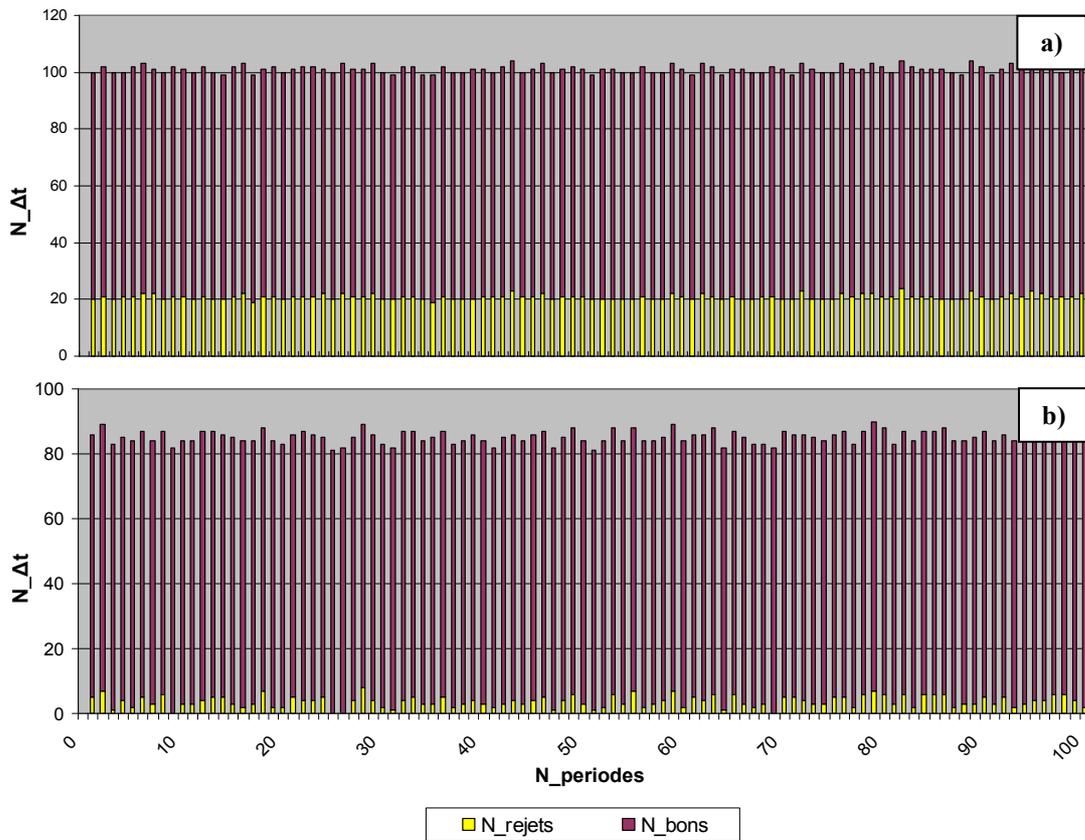


Figure 1.8 : Influence du correcteur PI sur le nombre de pas de temps rejetés et le nombre de pas total. Simulation : RKF5(4) de Cash & Karp,  $ka=0.4$ ,  $M=11$ ,  $N=9$ ,  $Tol=10^{-7}$ ,  $500T$ .

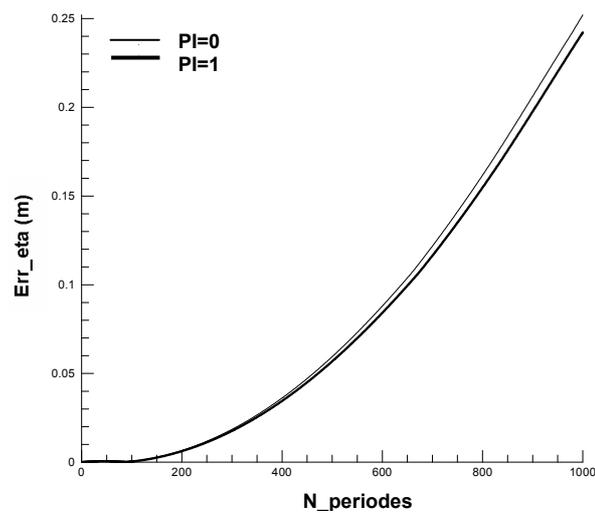


Figure 1.9 : Influence du correcteur PI sur l'erreur en  $\eta$ . Simulation : RKF 5(4) de Cash & Karp,  $ka=0.4$ ,  $M=11$ ,  $N=9$ ,  $Tol=10^{-7}$ ,  $1000T$

Test 3 : Choix du coefficient de sécurité  $s_c$ 

Au cours de ces essais, nous avons mis en évidence qu'il y avait un coefficient de sécurité optimal  $s_c$  à utiliser lors du calcul du pas de temps pour l'itération suivante, compris entre 0.9 et 1. En effet, plus le coefficient de sécurité est faible, plus les pas de temps sont de taille réduite et donc peu susceptibles d'être rejetés. En revanche, les calculs vont nécessiter d'avantage de pas de temps et, en définitive, le gain en temps est limité. Si au contraire le coefficient  $s_c$  est très proche de 1, les pas de temps sont plus grands, ce qui va accélérer la simulation à condition qu'il n'y ait pas de rejets. L'objectif de l'étude a donc été de déterminer le coefficient de sécurité permettant d'équilibrer taille et nombre des pas de temps d'une part et le nombre de rejets d'autre part.

Pour ce test, nous nous sommes à nouveau placés dans une configuration défavorable de houle cambrée à  $ka = 0.4$  et nous avons étudié l'impact de la variation de  $s_c$  sur le temps de calcul et le nombre de rejets. Le Tableau 1.2 présente les résultats obtenus pour une simulation de 100 périodes. Il apparaît qu'un coefficient de sécurité optimal est  $s_c = 0.94$ . La valeur est à adapter à chaque simulation mais nous avons trouvé qu'une valeur  $s_c = 0.95$  semble convenir pour la plupart de nos applications. C'est donc cette valeur que nous avons retenue.

Nous remarquerons qu'en ce qui concerne la précision de la solution, nous n'avons constaté aucune différence entre les cas testés.

$s_c$	N rejets	N total	t CPU
0.9	90	8811	45''
0.92	89	8637	44''
0.94	95	8475	43''
0.96	104	8616	43''
0.97	686	8827	45''
0.98	1400	9493	49''
1.00	4001	11970	1'02''

Tableau 1.2 : Influence du coefficient de sécurité  $s_c$  sur la rapidité des calculs.  
Simulation : RKF5(4) de Cash & Karp,  $ka=0.4$ ,  $M=11$ ,  $N=9$ ,  $Tol=10^{-7}$ , 100T.

**Bilan**

Finalement, la méthode d'intégration temporelle optimale que nous avons mis en évidence lors des différentes études réalisées pour l'intégration de la partie non-linéaire des CSL repose sur :

- l'utilisation d'une méthode embarquée de type Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5(4) utilisant les coefficients de Cash & Karp, beaucoup plus précise que la méthode 4(3) implémentée jusque là,
- l'ajout d'un correcteur PI qui permet de calculer le pas de temps optimal à l'itération suivante en fonction de l'erreur à l'itération courante et à l'itération précédente, de manière à limiter les rejets et accélérer la procédure,
- le choix d'un coefficient de sécurité optimal  $s_c = 0.95$  qui diminue également le temps de calcul,
- et enfin une condition sur le pas de temps maximal assurant la stabilité de la méthode.



# Chapitre 2

## Domaine de prévision accessible

On peut aisément concevoir de manière intuitive que la prévision issue de données recueillies par un ou plusieurs capteurs est possible dans un espace limité, lié à la quantité d'informations mesurées, et donc au temps de mesure, à la distance des capteurs par rapport au site de prévision souhaité, et de manière évidente à l'état de la mer.

Par ailleurs, l'étape fondamentale du processus de prévision déterministe est la reconstruction, à l'aide d'un modèle de houle choisi, des conditions initiales optimales à introduire au modèle de propagation. Il s'agit de simuler numériquement un champ de houle qui soit le plus proche possible du champ mesuré in situ. Comme les informations recueillies expérimentalement sont limitées et souvent bruitées ou endommagées, le champ reconstruit ne pourra jamais être exactement identique au champ original. Il est donc très important de déterminer où et quand le champ simulé est le plus conforme aux mesures avant de l'introduire dans le modèle de propagation pour obtenir une prévision. Cela définit une zone de reconstruction qui limite le domaine spatio-temporel dans lequel la procédure d'assimilation des données peut être effectuée.

Ces constatations montrent la nécessité de déterminer les zones de reconstruction et de prévision avant d'entamer toute étape du processus de prévision déterministe.

Dans ce chapitre, nous commençons par définir ce domaine en fonction des paramètres de mesure et des conditions caractérisant l'état de mer étudié, ainsi que l'erreur commise en dehors de cette zone. L'étude est réalisée pour un champ de vagues uni- ou multidirectionnel caractérisé par un spectre fréquentiel donné, mesuré dans un premier temps par une seule sonde fixe.

Puis, l'objectif majeur étant de pouvoir obtenir une prévision de longue durée, assez loin de la zone de mesure, tout en conservant une précision optimale de la solution, nous montrons ensuite comment adapter cette zone à un problème spécifique. Il est dans certains cas utile d'augmenter le temps de prévision maximal au risque de dégrader la qualité de la prévision, dans le cas pratique de la prédétermination de la trajectoire optimale d'un navire par exemple, alors que d'autres opérations plus délicates, comme la récupération d'un engin, requièrent une précision optimale du champ de vague mais à plus court terme. Pour cela, nous étudions l'influence de divers paramètres sur la taille du domaine et mettons en évidence les paramètres fonctionnels qui permettent d'étendre la zone aisément.

Dans une dernière partie, nous analysons l'effet de l'association de sondes sur la qualité de la prévision d'une part et sur la taille de la zone accessible d'autre part.

## 2.1 Définition du domaine de prévision

Avant toute chose, précisons quelques aspects de terminologie. La zone que nous appelons « zone de prévision » décrit l'ensemble du domaine spatio-temporel accessible par un calcul déterministe. Elle comprend donc non seulement un sous domaine de prévision à proprement parler qui correspond aux instants ultérieurs à la période de mesure, mais également un sous domaine de « reconstruction » délimité en temps par la période de mesure, ainsi qu'un sous domaine de « rétrospection » lorsque le temps est inférieur au début de la période de mesure.

Par la suite, le terme de zone de prévision pourra faire référence au sous domaine de prévision ainsi qu'à la totalité du domaine où le champ de vagues peut être déterminé par le calcul.

### 2.1.1 Cadre de l'étude

Dans cette partie, nous cherchons à déterminer la zone de prévision issue de la mesure de l'élévation de surface libre donnée par une unique sonde fixe placée dans un champ de vagues linéaire caractérisé, par exemple, par un spectre de JONSWAP (Hasselaman *et al* 1973, [73]). (Tout autre spectre pourrait bien entendu être utilisé pour les besoins d'une étude spécifique.)

L'énergie du spectre est supposée être limitée en fréquences, de limites basse et haute  $f_l$  et  $f_v$ , et l'étalement angulaire pour les cas tridimensionnels est borné par l'intervalle  $[\theta_1, \theta_2]$ . En pratique, on détermine ces bornes fréquentielles de manière à conserver uniquement les composantes d'énergie significative du spectre de houle. Une procédure de troncature est appliquée au spectre considéré afin d'éliminer les fréquences contenant moins de  $a\%$  de la densité d'énergie spectrale au pic. Nous reviendrons plus en détails sur cette procédure aux paragraphes 2.2.3.1 puis 4.1.2.2 lors de l'étude de spectres de houle synthétiques ou expérimentaux.

La mesure se fait sur une période de  $T$  secondes et l'on considère qu'elle est parfaite, c'est-à-dire que l'on ne prend pas en comptes le bruitage inhérent à tout relevé expérimental. Dans un premier temps, nous considérons un champ de vagues en profondeur infinie et sans présence de courant. L'effet de la tension de surface, du vent et de la friction du sol sont une nouvelle fois ignorés.

Nous rappelons que le spectre en fréquence de JONSWAP s'écrit de la manière suivante :

$$S_J(f) = \alpha \frac{f_p^4}{2\pi f^5} H_s^2 \exp\left(-\frac{5}{4}\left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right) \gamma^{\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{f-f_p}{\sigma_p}\right)^2\right)} \quad (2.1)$$

où  $H_s$  est la hauteur significative de la houle considérée et  $f_p$  la fréquence de pic. Le paramètre  $\alpha$  est tel que le moment d'ordre zéro du spectre soit :

$$m_0 = \int S_J(f) df = \frac{H_s^2}{16} \quad (2.2)$$

et les paramètres  $\sigma$  et  $\gamma$  ont pour valeurs :

$$\gamma = 3.3 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma = 0.07 & \text{pour } f < f_p \\ \sigma = 0.09 & \text{pour } f > f_p \end{cases} \quad (2.3)$$

L'allure du spectre de JONSWAP pour une houle unidirectionnelle hauteur significative  $H_s = 2\text{m}$  et une période de pic  $T_p = 8\text{s}$  est donnée en Figure 2.1.

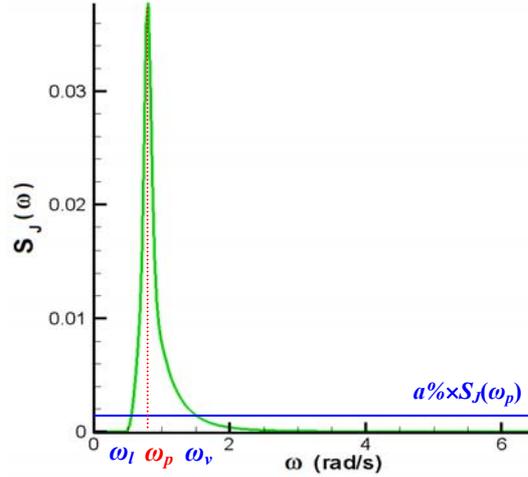


Figure 2.1 : Spectre de JONSWAP pour une houle 2D caractérisée par  $H_s=2\text{m}$  et  $T_p=8\text{s}$ .

Le spectre directionnel  $S_j(f, \theta)$  correspondant est obtenu en multipliant le spectre en fréquence par la fonction de distribution directionnelle  $D(f, \theta)$  :

$$S_j(f, \theta) = S_j(f) D(f, \theta) \quad (2.4)$$

$D(f, \theta)$  est périodique de période  $2\pi$  et possède les propriétés d'une fonction de distribution de probabilités :

$$\int_0^{2\pi} D(f, \theta) d\theta = 1 \quad \text{et} \quad D(f, \theta) \geq 0 \quad (2.5)$$

Pour notre étude, nous avons choisi la fonction de distribution directionnelle en cosinus telle que :

$$D(f, \theta) = \begin{cases} N(s) \cos^s(\theta) & , |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 & , |\theta| > \pi/2 \end{cases} \quad , s \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

où  $N(s)$  est un facteur de normalisation tel que (2.5) soit vérifiée.

$$N(s) = \begin{cases} \frac{(2^p p!)^2}{\pi(2p)!} & , \text{pour } s = 2p \\ \frac{(2p+1)!}{2(2^p p!)^2} & , \text{pour } s = 2p+1 \end{cases} \quad , p \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

Dans notre cas, le paramètre de directionnalité  $s$  est pris égal à deux, ce qui correspond à une mer de vent fortement étalée.

## 2.1.2 Première approche

Une analyse intuitive nous permet de déterminer que de la zone de prévision issue de la mesure en une sonde dépend uniquement de la période de mesure  $T$ , de la vitesse de l'onde la plus lente et de l'onde la plus rapide présentes dans le champ de vagues, ainsi que de l'étalement angulaire dans le cas d'un champ de vagues en trois dimensions.

En effet, le champ de vagues en un point donné  $(\mathbf{x}, t)$  dépend de l'ensemble des composantes de la houle passant par ce point. On ne peut donc calculer une prévision en  $(\mathbf{x}, t)$  que si toutes les vagues passant par ce point sont connues, c'est-à-dire qu'elles ont été mesurées par la sonde. Ainsi la zone de prévision est déterminée par la vitesse de l'onde la plus lente et de l'onde la plus rapide passant par la sonde au début ou à la fin de la période de mesure, selon la position du point considéré par rapport à la sonde (cf 0).

Morris *et al* (1992, [109]) qui sont les premiers à introduire la notion de zone de prévision pour les modèles déterministes, suggèrent que les vitesses déterminantes sont les vitesses de phase  $C\varphi_l$  et  $C\varphi_v$ , à laquelle les ondes les plus rapides et les plus lentes se déplacent. Cependant, comme l'indiquent Pierson *et al* (1955, [125]), puis Wu dans sa thèse (2004, [160]), il semble plus exact de considérer la vitesse de groupe des ondes qui correspond à la vitesse de transport de l'énergie du spectre de houle (cf équation (0.2)) et à la vitesse de déplacement du train de vagues.

Prenons en effet le cas d'une onde plane monochromatique dans la direction  $x$  telle que :

$$\eta(x, t) = \text{Re}(A_0 \exp(i(k_0 x - \omega(k_0)t))) \quad (2.8)$$

dont le spectre est la somme de distributions de dirac (2.9) et la vitesse de phase  $C\varphi = \omega(k_0)/k_0$ .

$$\frac{A_0 \delta(k - k_0) + A_0 \delta(k + k_0)}{2} \quad (2.9)$$

Puis considérons un paquet d'ondes étroit dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire un ensemble d'ondes de fréquences angulaires  $\omega$  proches de  $\omega_0 = \omega(k_0)$  et dont les nombres d'ondes sont proches de  $k_0$  tels que :

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega \quad \text{et} \quad k = k_0 + \delta k \quad (2.10)$$

Le spectre correspondant peut par exemple être un spectre de JONSWAP, où 95% de l'énergie est concentrée dans une plage de fréquences angulaires large de 0.1rad/s environ dans le cas où  $\gamma = 3.3$ . La vitesse de phase d'une onde est  $C\varphi = \omega(k)/k$  et la vitesse de groupe est  $Cg \approx \partial\omega(k_0)/\partial k$  si bien que :

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \text{Re} \left( \int_0^\infty A(k) \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk \right) \\ &= \text{Re} \left( \exp(ik_0(x - C\varphi t)) \int_0^\infty A(k_0 + \delta k) \exp(i\delta k(x - Cg t)) dk \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

A l'instant initial  $t = 0$ , le paquet d'ondes a pour onde porteuse l'onde  $k_0$  et pour enveloppe la fonction  $F(x)$ , ce qui s'écrit comme (2.12) et à un instant quelconque  $t$ , l'élévation de surface libre est telle que (2.13).

$$\eta(x,0) = \operatorname{Re} \left( \exp(ik_0 x) \int_0^{\infty} A(k_0 + \delta k) \exp(i \delta k x) dk \right) = \operatorname{Re}(\exp(ik_0 x) F(x)) \quad (2.12)$$

$$\eta(x,t) = \operatorname{Re}(\exp(ik_0(x - Cg t)) F(x - Cg t)) \quad (2.13)$$

Cela indique bien que l'enveloppe du paquet d'ondes se déplace bien à la vitesse de groupe  $Cg$ . C'est donc la vitesse de groupe et non la vitesse de phase qu'il faut prendre en compte pour établir les limites de la zone de prévision.

Un autre moyen d'envisager le problème, peut être plus probant, est de prendre l'exemple d'une houle linéaire bidimensionnelle se propageant en profondeur infinie. Dans le cadre de la théorie linéaire en eaux profondes, la relation de dispersion en profondeur infinie  $\omega^2 = gk$  nous permet de trouver les vitesses de groupe et de phase  $Cg$  et  $C\varphi$  :

$$Cg = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g}{2\omega} \quad \text{et} \quad C\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} \quad (2.14)$$

La vitesse de groupe étant deux fois plus lente que la vitesse de phase, aucune houle n'est observée au point  $x_{obs} = C\varphi \cdot t_{obs}$  puisque les vagues n'ont parcouru que la moitié du chemin et se situent à l'instant d'observation  $t_{obs}$  au point  $x_{obs}/2$ .

## 2.1.3 Tracé de la zone de prévision

Nous ne présentons ici qu'une étude géométrique du domaine de prévision. Une analyse mathématique peut être trouvée dans le rapport de thèse de Wu (2004, [160]). Nous supposons dans cette étude que la sonde de mesure est placée au point  $\mathbf{x}_s$  de coordonnées  $(x_s, y_s)$  dans le plan horizontal

### 2.1.3.1 Zone bidimensionnelle

Nous avons vu au paragraphe précédent que la zone de prévision dépend des vitesses de groupe de l'onde la plus lente  $Cg_l$  et de l'onde la plus rapide  $Cg_v$ , et donc du choix des fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  bornant l'intervalle fréquentiel d'étude du spectre de houle. Nous rappelons en effet que ces fréquences sont déterminées en pratique, pour chaque cas de houle traitée, de manière à s'affranchir des composantes fréquentielles d'énergie négligeable (procédure détaillée aux paragraphes 2.2.3.1 puis 4.1.2.2).

Pour déterminer si un point quelconque  $(x,t)$  est inclus dans le domaine, il suffit de calculer si les ondes de vitesses extrêmes  $Cg_l$  et  $Cg_v$  passant par  $x$  en  $t$  ont bien été mesurées par la sonde, c'est-à-dire qu'elles sont bien passées par la sonde à des instants compris dans l'intervalle de mesure  $[0, T]$ .

Dans le cas où le point  $x$  se situe en aval de la sonde ( $x > x_s$ ), la zone est déterminée par l'onde  $Cg_l$  passant par la sonde au début de la période de mesure  $t = 0$  et par l'onde  $Cg_v$  passant par la sonde à  $t = T$ . En amont de la sonde en revanche ( $x < x_s$ ), les vitesses déterminantes sont celles de l'onde la plus rapide mesurée par la sonde en  $t = 0$  et de l'onde la plus lente passant par la sonde à  $t = T$ . On peut donc définir la zone de prédiction par les inégalités (2.15) :

$$\begin{cases} \frac{x - x_s}{Cg_l} \leq t \leq T + \frac{x - x_s}{Cg_v} & , \text{ pour } x > x_s \\ \frac{x - x_s}{Cg_v} \leq t \leq T + \frac{x - x_s}{Cg_l} & , \text{ pour } x < x_s \end{cases} \quad (2.15)$$

Une interprétation graphique est également possible comme représenté en Figure 2.2.a) : le point  $P_{int}$  est bien situé à l'intérieur du domaine car la composante la plus lente et la composante la plus rapide sont bien mesurées par la sonde ; en revanche, le point  $P_{ext}$  ne peut pas être calculé correctement car l'onde rapide de vitesse de groupe  $Cg_v$  passe par la sonde après la fin de la période  $T$  et n'est donc pas mesurée.

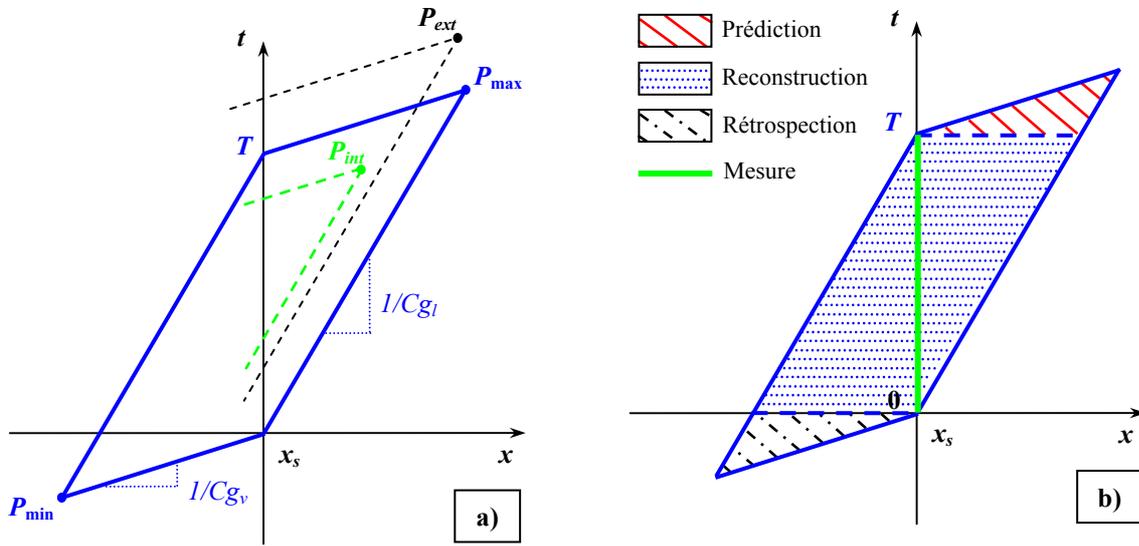


Figure 2.2 : Zone bidimensionnelle issue de la mesure en une sonde située en  $x = x_s$  pendant une période de  $T$  secondes : a) Détermination graphique du domaine, b) Définition de la zone de prédiction à proprement parler (traits rouges), de la zone de reconstruction (points bleus) et de la zone de rétropection (tirets noirs).

Le domaine est borné par un point de prévision maximale  $P_{max}$  et un point de rétropection minimale  $P_{min}$  dont les coordonnées sont exprimées en fonction des vitesses  $Cg_l$  et  $Cg_v$  ou des fréquences angulaires  $\omega_l = g/2Cg_v$  et  $\omega_v = g/2Cg_l$  en profondeur infinie :

$$\begin{cases} x_{max} = x_s + T \frac{Cg_l Cg_v}{Cg_v - Cg_l} & , \quad t_{max} = T \left( 1 + \frac{Cg_l}{Cg_v - Cg_l} \right) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} x_{min} = x_s - T \frac{Cg_l Cg_v}{Cg_v - Cg_l} & , \quad t_{min} = -T \frac{Cg_l}{Cg_v - Cg_l} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} x_{max} = x_s + T \frac{g}{2(\omega_v - \omega_l)} & , \quad t_{max} = T \left( 1 + \frac{\omega_l}{\omega_v - \omega_l} \right) \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} x_{min} = x_s - T \frac{g}{2(\omega_v - \omega_l)} & , \quad t_{min} = -T \frac{\omega_l}{\omega_v - \omega_l} \end{cases} \quad (2.19)$$

Finalement, la zone de prévision (qui est, comme nous l'avons précisé au tout début, la zone accessible par un calcul déterministe), peut être décomposée en trois sous-domaines (cf Figure 2.2.b)) : un domaine de reconstruction dans lequel l'assimilation de données pourra être effectuée, un domaine de prévision à proprement parler, et un domaine de rétrospection correspondant aux instants précédant la mesure. Ce dernier domaine ne fera pas l'objet de notre étude dans le cadre de ce travail. Ces différents sous-domaines sont définis par les inégalités suivantes :

- domaine de reconstruction :  $(t-T)Cg_l \leq x-x_s \leq tCg_l$  , pour  $t \in [0, T]$
- domaine de prévision :  $(t-T)Cg_v \leq x-x_s \leq tCg_l$  , pour  $t \in [T, t_{\max}]$
- domaine de rétrospection :  $(t-T)Cg_l \leq x-x_s \leq tCg_v$  , pour  $t \in [t_{\min}, 0]$

### 2.1.3.2 Zone tridimensionnelle

On considère un champ de vagues se propageant dans l'intervalle angulaire  $[\theta_1, \theta_2]$ . Ce champ peut être décomposé en un ensemble de paquets de vagues se propageant suivant différentes directions comprises entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  et dont les ondes les plus rapides et les plus lentes ont les mêmes vitesses de groupe  $Cg_v$  et  $Cg_l$ . Il est donc possible traiter chaque paquet de vagues individuellement comme étant un champ unidirectionnel dont la zone de prévision a été déterminée précédemment.

Considérons le paquet d'ondes se propageant suivant la direction  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . La zone de prévision associée à ce paquet d'ondes est identique, quelque soit  $\theta$ , à la zone définie au paragraphe 2.1.3.2. On appelle  $[x_1, x_2]$  l'intervalle de prévision spatial disponible à un instant  $t_d$  donné, comme représenté sur la Figure 2.3.a). Alors la zone de prévision dans le plan horizontal  $(x, y)$  de propagation du paquet d'ondes correspondant au segment  $[x_1, x_2]$  en deux dimensions est la bande de largeur  $|x_1 - x_2|$  orthogonale à la direction de propagation  $\theta$  (voir Figure 2.3.b)).

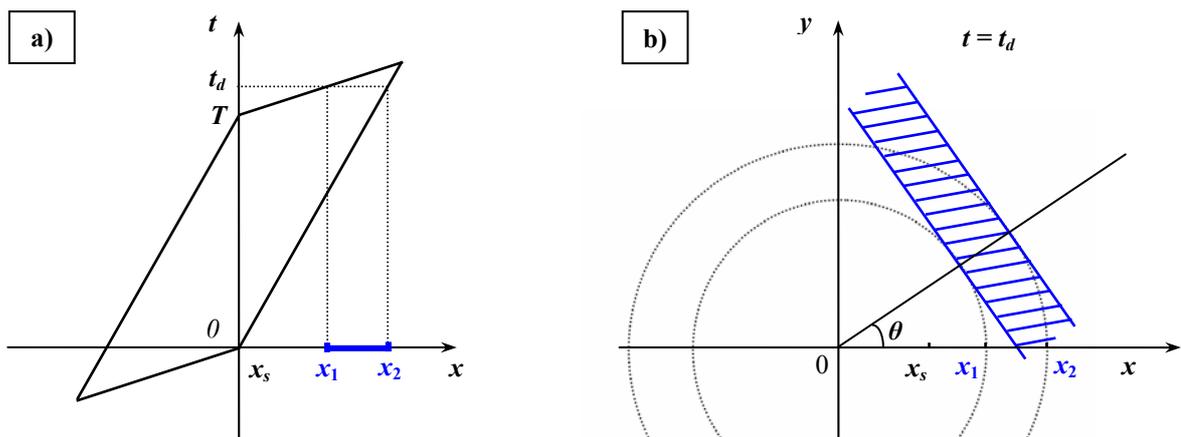


Figure 2.3 : Zone de prévision à un instant donné  $t_d$  d'un paquet d'ondes se propageant suivant la direction  $\theta$  : a) Représentation bidimensionnelle, b) Tracé dans le plan  $(x, y)$  de propagation.

Pour un champ de vagues d'étalement angulaire  $[\theta_1, \theta_2]$ , la zone de prévision dans le plan  $(x, y)$  est donc incluse dans le losange résultant de l'intersection des bandes de prévision aux directions

limites  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . En prenant en compte une infinité de paquets d'ondes se propageant selon une infinité de directions comprises entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on obtient la zone de prévision pour un champ multidirectionnel à l'instant  $t = t_d$  représentée sur la Figure 2.4.

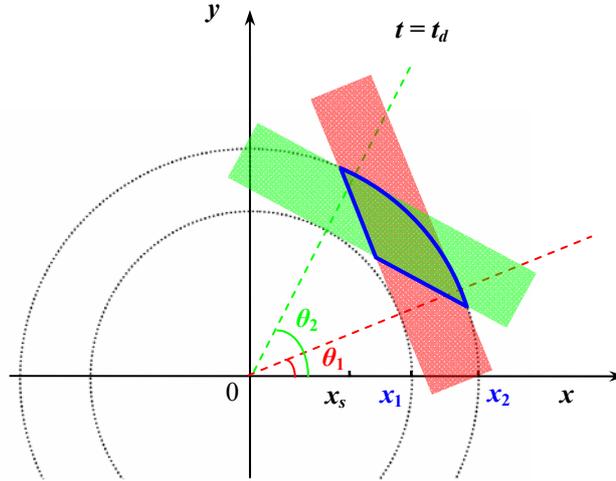


Figure 2.4 : Zone de prévision à l'instant  $t_d$  pour un champ de vagues multidirectionnel d'étalement angulaire  $[\theta_1, \theta_2]$ .

Suivant l'instant  $t$  considéré (rétrospection, reconstruction ou prédiction) et l'étalement angulaire de la houle, le domaine de prévision d'une houle multidirectionnelle pourra avoir différentes formes, comme on peut le voir sur la Figure 2.5, la Figure 2.6 et la Figure 2.7. Le champ de vagues étudié est un champ tridimensionnel de hauteur significative  $H_s = 2\text{m}$  et de période de pic  $T_p = 8\text{s}$ , caractérisé par un spectre directionnel de JONSWAP (2.1.1). Il se propage dans l'intervalle angulaire  $[-30^\circ, 30^\circ]$  et a pour fréquences angulaires limites  $0.49\text{rad/s}$  et  $3.31\text{rad/s}$ . Le champ est mesuré par une sonde située à l'origine du domaine pendant  $T = 204.8\text{s}$ . L'instant maximal de prévision  $t_{\max}$  est de  $445.2\text{s}$  et le temps minimal de rétrospection est  $t_{\min} = -35.8\text{s}$ .

Les équations mathématiques correspondant aux différents cas de figure sont données dans Wu (2004, [160]). Nous ne les rappelons pas ici car nous avons préféré utiliser une analyse identique à celle menée en deux dimensions pour déterminer la zone de prévision, beaucoup plus rapide et moins lourde en calculs que le calcul mathématique du domaine. À un instant donné, pour chaque direction de propagation discrète nous avons sélectionné les points du domaine d'étude tels que l'onde la plus lente et l'onde la plus rapide les traversant ont toutes deux été mesurées par la sonde.

Pour un paquet d'onde se propageant suivant la direction  $\theta$ , on note :

$$\begin{aligned} t_l(M) &= t_d - \frac{(x - x_s) \cos \theta + (y - y_s) \sin \theta}{Cg_l} \\ t_v(M) &= t_d - \frac{(x - x_s) \cos \theta + (y - y_s) \sin \theta}{Cg_v} \end{aligned} \quad (2.20)$$

les temps mis par l'onde la plus lente et la plus rapide pour aller de la sonde située en  $\mathbf{x}_s$  au point  $M$  de coordonnées  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Si  $t_l(M)$  et  $t_v(M)$  sont tous deux compris dans l'intervalle de mesure  $[0, T]$ , le point  $M$  appartient bien au domaine de prévision.

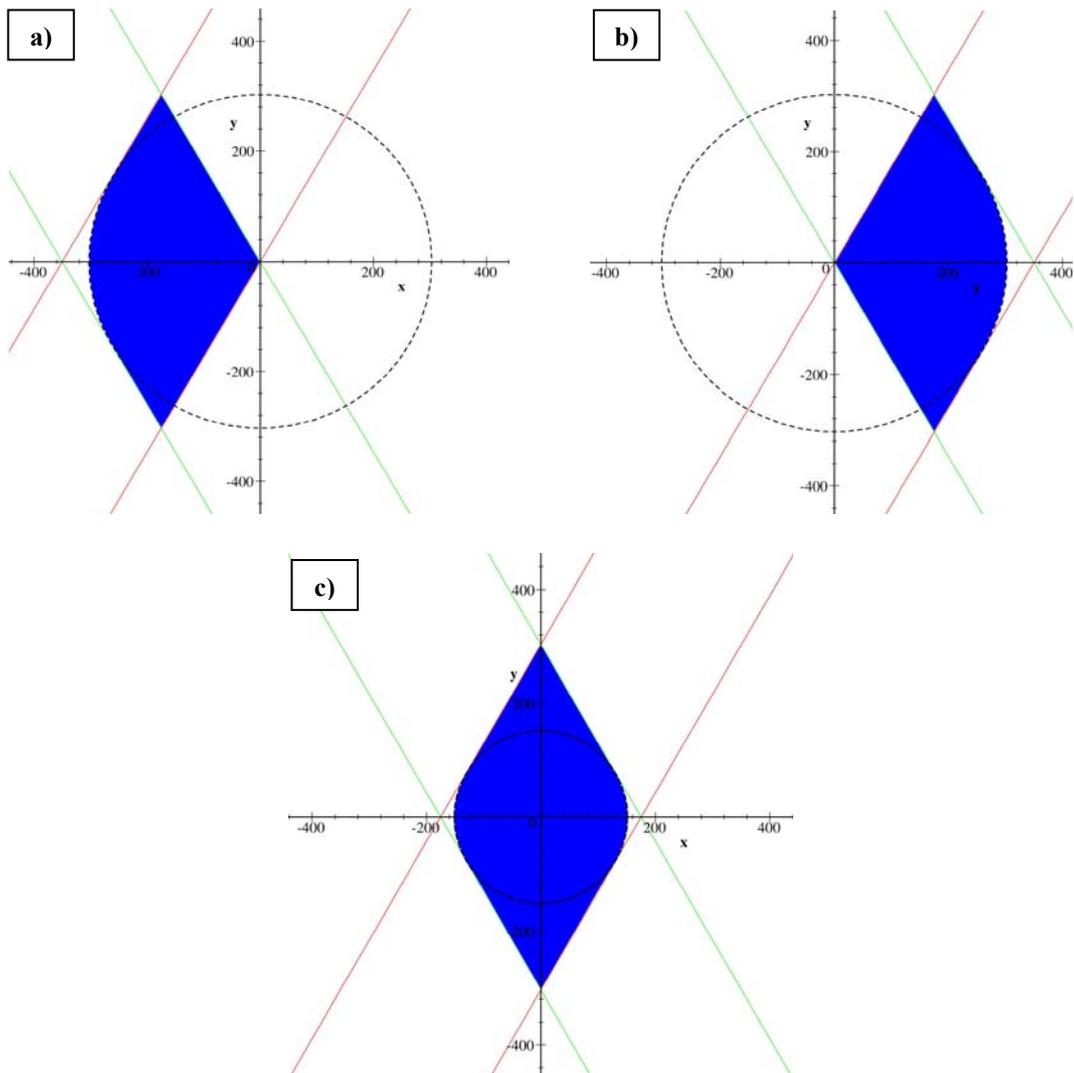


Figure 2.5 : Zones de reconstruction à différents instants :  
 a)  $t=0$ , b)  $t=T=204.8s$ , c)  $t=T/2=102.4s$ .

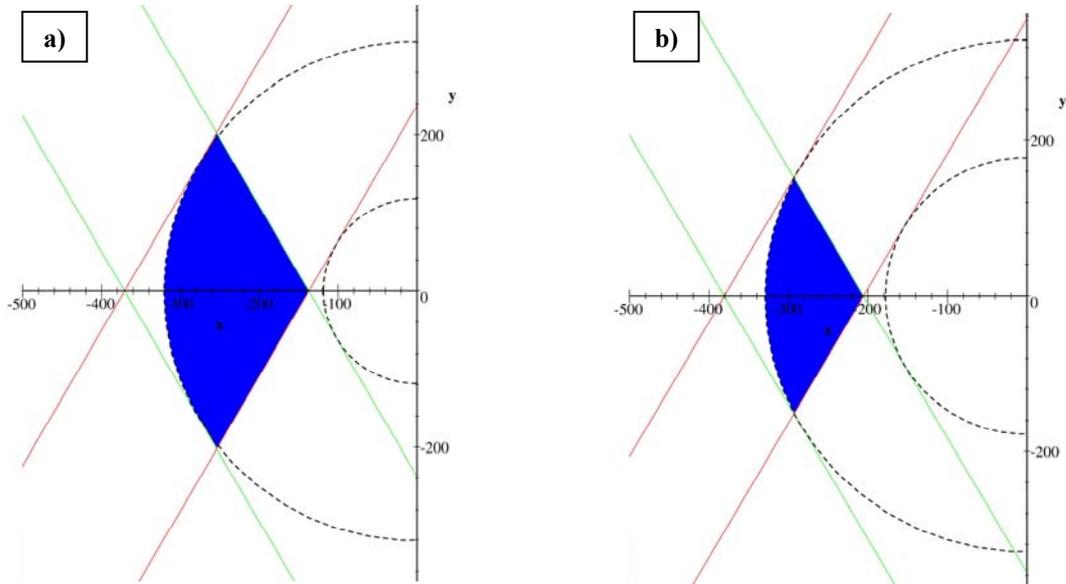


Figure 2.6: Zones de rétrospection telles que :  
 a)  $t = -11.9s$  et  $|x_2/x_1| < \cos(\theta_2 - \theta_1)$ , b)  $t = -17.8s$  et  $|x_2/x_1| > \cos(\theta_2 - \theta_1)$

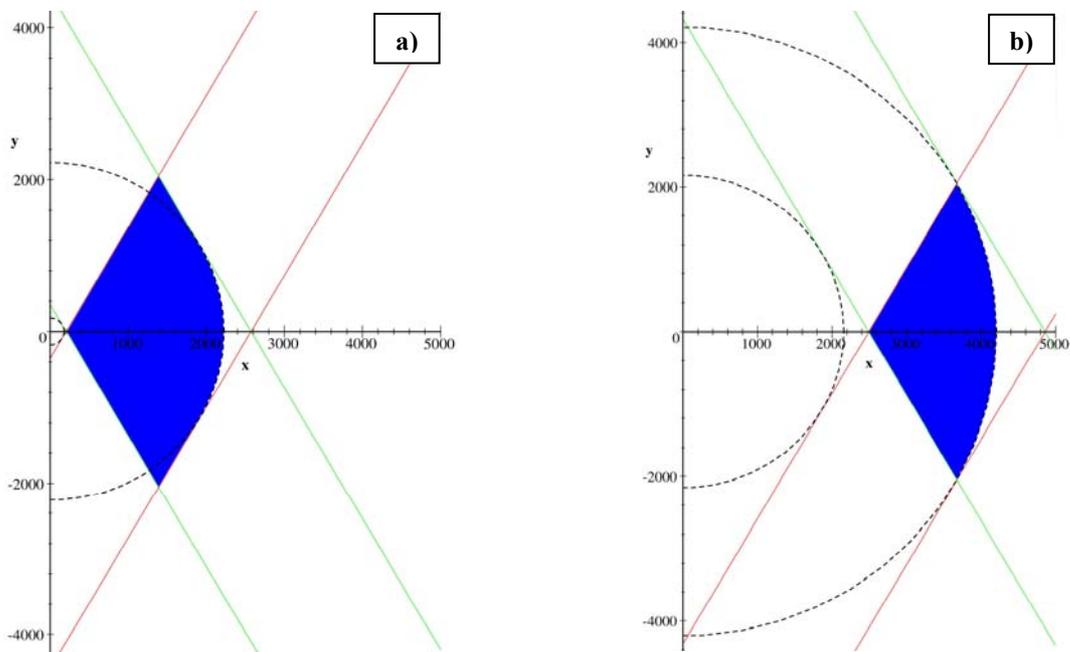


Figure 2.7: Zones de prévision telles que :  
 a)  $t = 222.6s$  et  $|x_2/x_1| < \cos(\theta_2 - \theta_1)$ , b)  $t = 420.5s$  et  $|x_2/x_1| > \cos(\theta_2 - \theta_1)$

La Figure 2.8 donne une représentation de la zone de prévision globale pour le même champ de vagues dans l'espace tridimensionnel  $(x,y,t)$  entre les instants  $t_{\min}$  et  $t_{\max}$ .

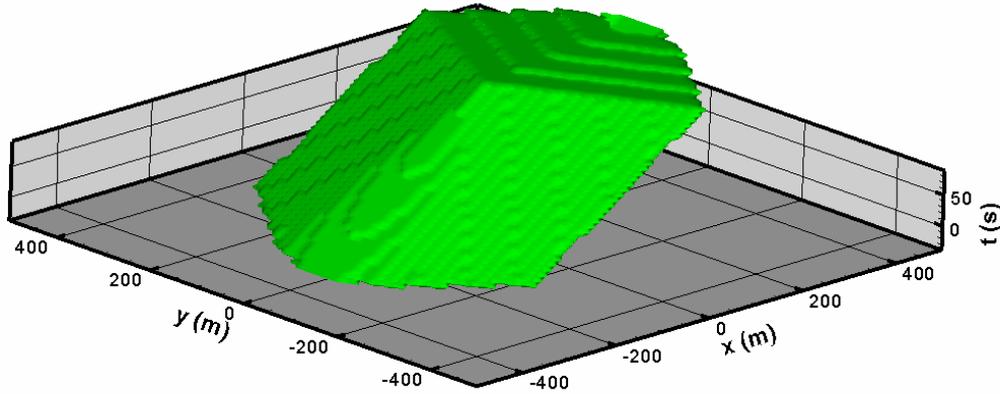


Figure 2.8 : Évolution de la zone de prévision provenant de la mesure en une sonde située à l'origine d'un champ tridimensionnel.

## 2.1.4 Erreur commise en dehors de la zone de prévision

Une fois la zone de prévision déterminée, il peut être intéressant d'avoir une estimation théorique de l'erreur de calcul effectuée à l'extérieur du domaine ainsi que son évolution au fur et à mesure que l'on s'écarte du domaine. En effet, si cette erreur est raisonnable, on peut envisager d'exploiter la prévision du champ de vagues en dehors de la zone. On agrandit ainsi la zone couverte par la prévision dans une certaine limite de validité connue.

Si l'on se place en un point  $P_{ext}$  situé à l'extérieur de la zone de prévision, parmi toutes les ondes constituant le champ de vagues, certaines ondes passant par  $P_{ext}$  vont avoir au préalable été mesurées par la sonde et d'autres non (Figure 2.9). Suivant la fraction d'ondes captées par la sonde, l'erreur commise sera plus ou moins importante. On définit alors l'erreur de prévision comme le rapport entre la quantité d'énergie spectrale inconnue sur la quantité d'énergie inconnue.

Dans le cas d'un champ de vagues unidirectionnel, l'erreur est évaluée de manière suivante :

$$\varepsilon_{ext\ 2D} = \left( 1 - \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega}{\int_{\omega_l}^{\omega_v} S(\omega) d\omega} \right)^{1/2} \quad (2.21)$$

où les ondes de vitesses de groupe comprises dans l'intervalle  $[Cg_1, Cg_2] \subset [Cg_l, Cg_v]$  (ie de fréquences angulaires appartenant à  $[\omega_1, \omega_2]$  telles que  $\omega_1 = g/2Cg_2$  et  $\omega_2 = g/2Cg_1$  en profondeur infinie), ont été mesurées par la sonde.

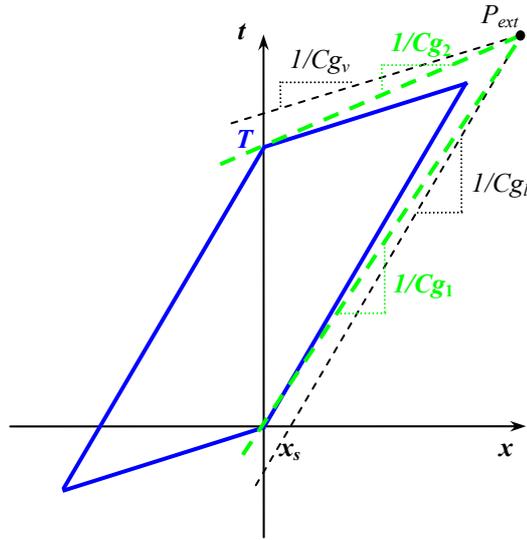


Figure 2.9 : Portion des ondes composant le champ de vagues passant par un point extérieur au domaine et mesurées par la sonde.

Pour une houle multidirectionnelle, les fréquences angulaires mesurées par la sonde dépendent de la direction de propagation du paquet d'ondes considéré. Il faut donc déterminer pour chaque direction de propagation discrète comprise dans  $[\theta_1, \theta_2]$  les fréquences  $\omega_1(\theta)$  et  $\omega_2(\theta)$ , puis sommer l'énergie sur l'ensemble des directions :

$$\varepsilon_{ext\ 3D} = \left( 1 - \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\omega_1(\theta)}^{\omega_2(\theta)} S(\omega, \theta) d\omega d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega, \theta) d\omega d\theta} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

En Figure Figure 2.10.a), on a représenté l'erreur de prévision théorique à l'extérieur du domaine de prévision d'un champ de vagues unidirectionnel de hauteur significative  $H_s = 2\text{m}$  et de période de pic  $T_p = 8\text{s}$ , caractérisé par un spectre de JONSWAP (2.2.1). Ce champ a pour fréquences angulaires minimale et maximale  $\omega_l = 0.49\text{rad/s}$  et  $\omega_v = 3.31\text{rad/s}$ , et il est mesuré par une sonde située en  $x = 0\text{m}$  pendant  $T = 204.8\text{s}$ . On constate que l'erreur évolue progressivement de zéro à l'intérieur de la zone de prévision vers un en dehors de la zone, de manière symétrique par rapport à la position de la sonde.

En effectuant une coupe à un instant  $t$  ou à une position  $x$  donnée (Figure 2.10.b)), on constate de l'erreur n'évolue pas de manière symétrique de part et d'autre de la zone de prévision. Ceci est du au caractère non symétrique du spectre de JONSWAP par rapport à la fréquence de pic (cf Figure 2.1). Comme on le constate sur la Figure 2.11.a) et la Figure 2.11.b), la pente de la courbe caractéristique du spectre est en effet plus importante aux faibles fréquences. L'énergie variant moins aux hautes fréquences, le risque de ne pas mesurer des ondes courtes est moins important que pour les ondes longues où l'énergie évolue rapidement. Cela se traduit sur les figures par une augmentation plus brutale de l'erreur lorsque l'on s'éloigne de la zone vers les hautes fréquences que lorsque l'on s'éloigne vers les basses fréquences.

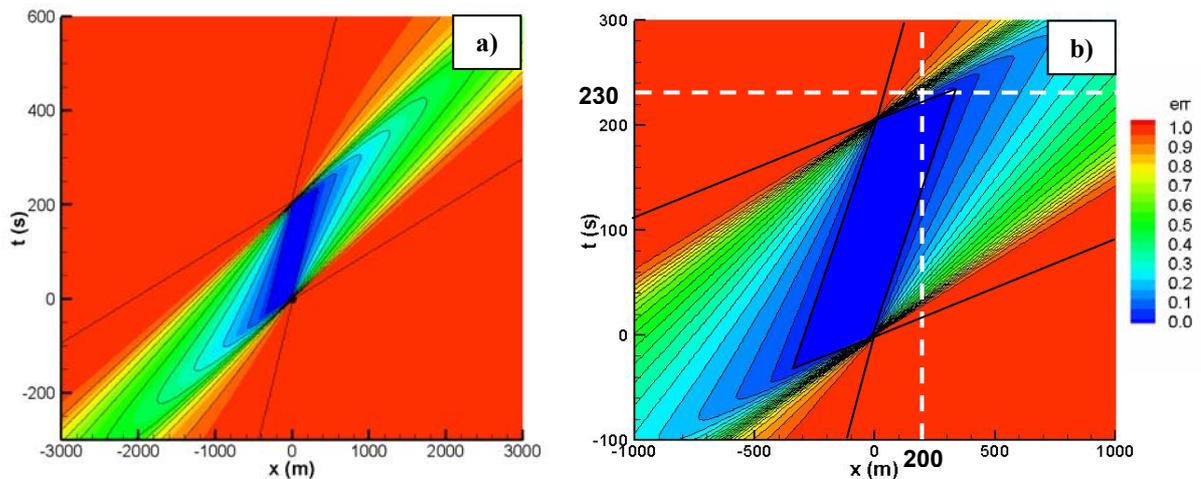


Figure 2.10 : a) Erreur théorique de prévision pour un champ 2D caractérisé par un spectre de JONSWAP, b) Zoom et tracé des coupes à l'instant  $t = 230s$  et en un point donné  $x = 200m$ .

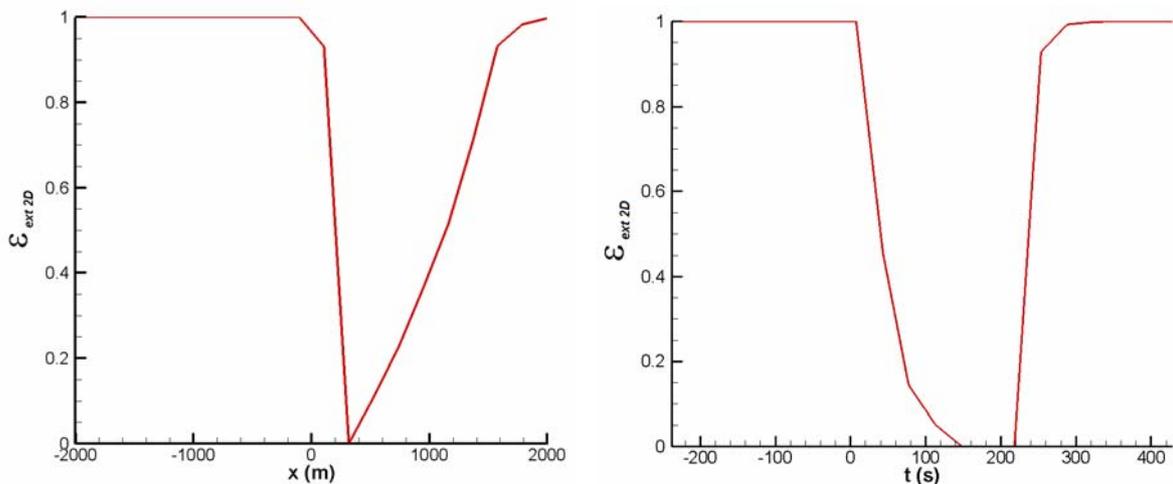


Figure 2.11 : Étude de l'évolution de l'erreur de prévision : a) À  $t=230s$ , b) À  $x=200m$ .

En conclusion, il y a de fortes probabilités pour que la solution obtenue par le calcul reste acceptable à l'extérieur du domaine de prévision lorsque l'on se déplace vers les hautes fréquences. C'est ce que l'on observe sur la Figure 2.10 où l'erreur reste inférieure à 20% à 500m en aval de la sonde vers les hautes fréquences. La zone prévisible pourra donc être étendue dans une certaine limite de validité.

Par ailleurs, il faut bien noter que l'évolution de l'erreur dépend des caractéristiques du spectre de houle considéré. Dans le cas d'un spectre de Pierson-Moskowitz par exemple, pour lequel l'énergie est plus étalée autour du pic, l'erreur théorique évoluera de manière moins drastique en dehors de la zone de prévision vers les hautes fréquences.

Dans le cas d'une houle multidirectionnelle ayant les mêmes caractéristiques que le champ de vagues unidirectionnel précédent, de fonction de directionnalité en  $\cos^2$  et d'étalement angulaire

$[-30^\circ, 30^\circ]$ , on obtient la représentation de l'erreur théorique de prévision dans le plan  $(x,y)$  donnée en Figure 2.12 à différents instants  $t$  compris entre les instants de prévision minimal et maximal. On remarque la symétrie des zones de rétrospéction par rapport aux zones de reproduction, de même que la symétrie des zones de reconstruction à  $t = 0$  et à  $t = T$ . La zone de reconstruction à  $t = T/2$  est quand à elle symétrique par rapport à la position de la sonde.

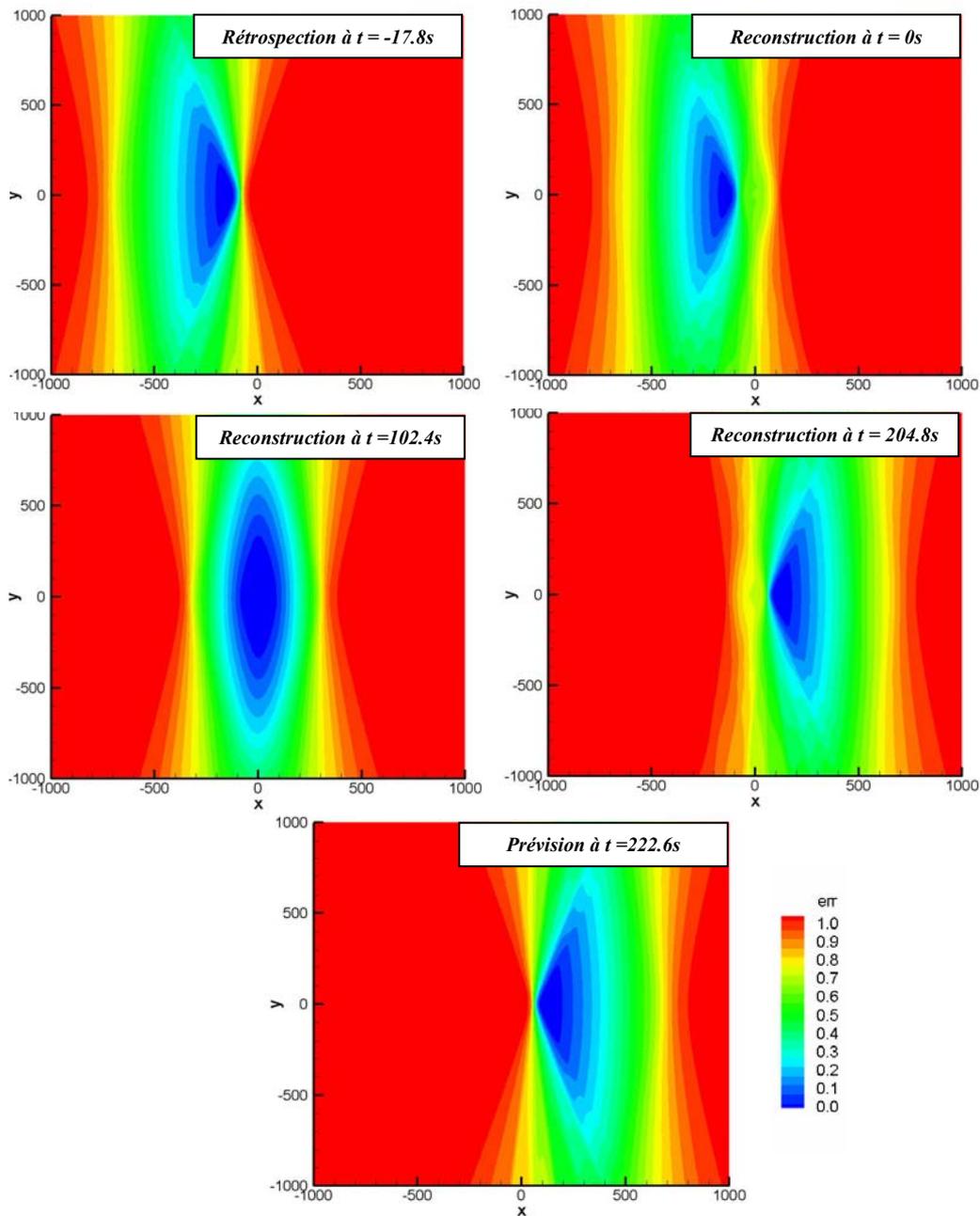


Figure 2.12 : Évolution de l'erreur théorique sur le champ de vagues calculé pour une houle multidirectionnelle caractérisée par un spectre de JONSWAP directionnel en  $\cos^2$ . L'erreur est représentée dans le plan horizontal  $(x,y)$  de propagation à différents instants  $t$  de rétrospéction, de reconstruction ou de prédiction.

## 2.2 Influence de divers paramètres sur la zone de prévision

### 2.2.1 Objectif de l'étude

Les paramètres les plus importants pour les consommateurs de prévisions de houle sont la période de prévision maximale disponible associée à une zone de prévision spatiale choisie, l'étendue de la prévision, et bien sûr la précision de la solution, l'ensemble étant fortement lié au temps de calcul qui détermine le temps de prévision effectif ( $t_{pred\_effectif} = t_{pred} - t_{CPU}$ ).

Selon les cas de figure, certains paramètres vont primer devant les autres. Par exemple, les opérations de sauvetage en mer ou les opérations de transfert de pétrole vers les navires container, exigent une connaissance extrêmement précise de l'état de la mer, ce qui va impliquer de calculs poussés, et donc coûteux en temps de calcul, et implicitement limiter le temps et la zone spatiale de prévision maximale. Dans d'autres cas, ce sera plutôt une prévision à long terme et moins affinée qui sera requise, et l'on pourra se contenter d'une solution légèrement dégradée mais sur de plus grands intervalles spatio-temporels, comme la prévision à long terme de la trajectoire d'un navire.

Dans ce chapitre, il s'agit de déterminer les paramètres du modèle de prévision qui vont pouvoir être modifiés par un opérateur pour adapter la prévision à la situation d'étude. Par ailleurs, il est également important de mettre en évidence les facteurs naturels ayant un impact sur le domaine de prévision. Intuitivement, on pressent en effet que la bathymétrie ou le courant vont avoir une influence sur la vitesse de propagation des ondes et donc modifier la zone de prévision qui en dépend. Même si ces paramètres ne peuvent pas être contrôlés, la connaissance de leur effet pourra permettre d'affiner la zone d'investigation.

Les études suivantes ont été réalisées sur un cas de houle bidimensionnelle se propageant suivant la direction ( $O_x$ ). Cependant, la zone de prévision en trois dimensions peut être considérée comme étant une intersection de cas de zones 2D, les résultats mis en évidence dans cette partie restent valables pour une houle multidirectionnelle. Le champ considéré est caractérisé par un spectre de JONSWAP de hauteur significative  $H_s = 2\text{m}$ , de période de pic  $T_p = 8\text{s}$ , et de fréquences angulaires minimale et maximale  $\omega_l = 0.49\text{rad/s}$  et  $\omega_v = 3.31\text{rad/s}$ . La mesure est effectuée par une sonde située à l'origine du domaine d'étude ( $x = 0\text{m}$ ) pendant  $T = 204.8\text{s}$ .

### 2.2.2 Influence du temps de mesure $T$

De manière évidente, plus on augmente le temps de mesure, plus on augmente la taille de la zone de prévision. Si l'on rappelle les expressions en deux dimensions (2.18) de l'instant de prévision maximal  $t_{\max} = T \left( 1 + \frac{\omega_l}{\omega_v - \omega_l} \right)$  et de la coordonnée maximale  $x_{\max} = x_s + \frac{Tg}{2(\omega_v - \omega_l)}$  accessible, on constate effectivement que la période  $T$  augmente l'étendue du domaine.

Toutefois, l'accroissement du temps de capture induit également une augmentation du temps de calcul (il y a d'avantage de données à assimiler). Au final, le gain sur l'intervalle de prévision effectif est donc moins prononcé.

### 2.2.3 Paramètres pouvant modifier la vitesse de groupe des ondes

Comme nous l'avons montré au paragraphe 2.1, le domaine de prévision correspondant à une houle donnée mesurée par une sonde fixe est déterminée par la durée  $T$  de capture et par la vitesse de groupe de l'onde la plus lente  $Cg_l$  et de l'onde la plus rapide  $Cg_v$ , relevées par le capteur. Tout paramètre ayant une influence sur la vitesse de groupe des ondes va donc modifier la zone de prévision.

#### 2.2.3.1 Influence de la largeur de la bande fréquentielle du spectre de houle

En réécrivant (2.18) sous la forme (2.23) ci-dessous, on constate que lorsque la bande de fréquence du spectre de houle est étroite, c'est-à-dire lorsque  $\omega_l / \omega_v \rightarrow 1$ , le temps de prévision maximal et donc la coordonnée maximale associée sont importants.

$$t_{\max} = \frac{T}{1 - \frac{\omega_l}{\omega_v}} \quad (2.23)$$

Une manière simple d'étendre le domaine de prévision est alors de commencer le processus de prévision en tronquant le spectre étudié de manière à écarter les très basses et les très hautes fréquences où la densité d'énergie est négligeable devant l'énergie contenue à la fréquence de pic. Cette procédure revient à utiliser moins de données en entrée, ce qui a pour avantage de diminuer le temps de calcul (et ainsi d'augmenter la période maximale de prévision effective), mais elle induit forcément une diminution de la précision du champ reconstruit à la fin de la phase d'assimilation de données (on diminue le nombre de variables d'optimisation), et par suite du champ prédit. C'est pourquoi il est nécessaire de trouver un compromis entre précision et rapidité de calcul, en remarquant toutefois qu'il est possible d'éliminer un nombre non négligeable de fréquences sans affecter la qualité de la solution, surtout les très hautes fréquences qui contiennent très peu d'énergie (cf Figure 2.1).

Le tableau Tableau 2.1 et la Figure 2.13 montrent l'évolution du temps de prévision maximal et de la zone de prévision lorsque le spectre de houle est tronqué de manière à éliminer les fréquences contenant moins de  $a$  % de la densité d'énergie spectrale au pic (cf Figure 2.1). Comme on peut le constater, lorsqu'on diminue la taille de la bande de fréquence (ie lorsqu'on augmente  $a$ ), la vitesse de groupe de l'onde la plus lente diminue légèrement alors que la vitesse de l'onde la plus rapide croît de façon plus importante, ce qui provoque une forte augmentation de la zone de prévision.

En pratique, la manière dont nous sélectionnons la bande de fréquence est étroitement liée à la méthode d'assimilation de données implémentée pour la reconstruction du champ de vagues au second ordre de perturbation. En effet, la qualité de la procédure de découplage des ondes libres de Duncan & Drake (1995, [49]) que nous avons sélectionnée (Chapitres 3 et 4) dépend de la recherche d'une fréquence de coupure aux hautes fréquences nécessaire à la stabilité du processus itératif. Comme cette fréquence de coupure est forcément comprise dans l'intervalle de fréquences  $[\omega_l, \omega_v]$ , il faut prendre garde à ne pas réduire  $\omega_v$  trop drastiquement, ce qui aurait pour effet de limiter la recherche de la fréquence de coupure et pourrait nuire considérablement à la qualité du découplage. Nous reviendrons plus en détails sur la méthode de Duncan & Drake et sur le choix de la fréquence de coupure au Chapitre 3.

$a$ (%)	$\omega_l$ (rad/s)	$\omega_h$ (rad/s)	$\omega_l/\omega_h$	$t_{\max}$ (s)	$x_{\max}$ (m)
1	0.51	2.05	0.25	272.62	652.30
2	0.53	1.74	0.30	294.51	830.20
3	0.55	1.6	0.34	312.08	956.71
4	0.56	1.5	0.37	326.81	1068.66
5	0.57	1.43	0.40	340.54	1168.07

Tableau 2.1 : Influence de la troncature en fréquences sur  $t_{\max}$  et  $x_{\max}$ .

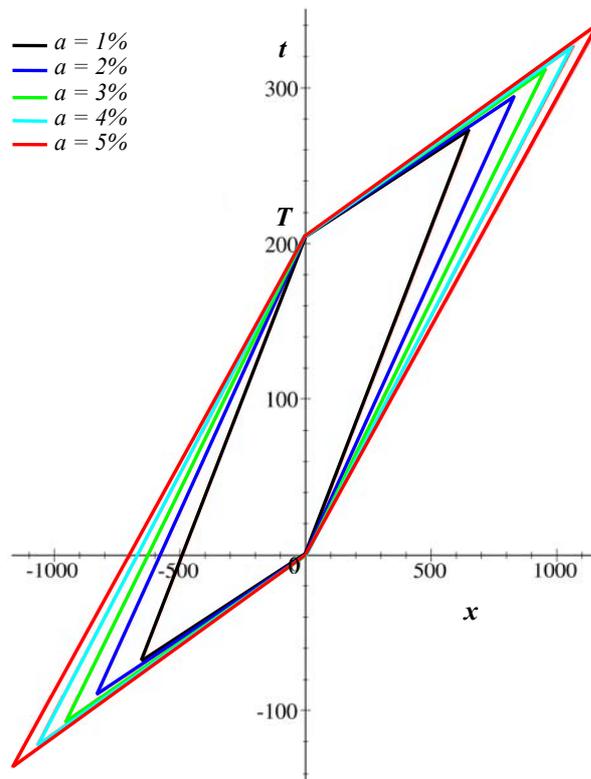


Figure 2.13 : Influence de la largeur de la bande de fréquence utilisée sur la taille de la zone de prévision.

### 2.2.3.2 Influence de la profondeur $h$

Dans les études précédentes, nous nous sommes placés en profondeur infinie pour plus de simplicité. Mais dans le cas où la profondeur  $h$  est finie, la vitesse de groupe des vagues devient dépendante de  $h$ . En effet, la relation de dispersion en profondeur finie s'écrit  $\omega_n^2 = gk_n \tanh(k_n h)$  ce qui donne la vitesse de groupe de l'onde  $n$  :

$$Cg_n = \frac{\partial \omega_n}{\partial k_n} = \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{k_n} \left( 1 + \frac{2k_n h}{\sinh(k_n h)} \right) \quad (2.24)$$

Sur la Figure 2.14, on a représenté l'évolution de la vitesse de groupe en fonction de la fréquence angulaire  $\omega$  pour différentes valeurs de la profondeur  $h$ . On constate en premier lieu que lorsque  $h$  diminue, la vitesse de groupe aux faibles fréquences diminue et s'éloigne de la vitesse de groupe en profondeur infinie. Aux hautes fréquences en revanche, la profondeur ne joue aucun rôle sur la vitesse de groupe et les différentes courbes sont confondues.

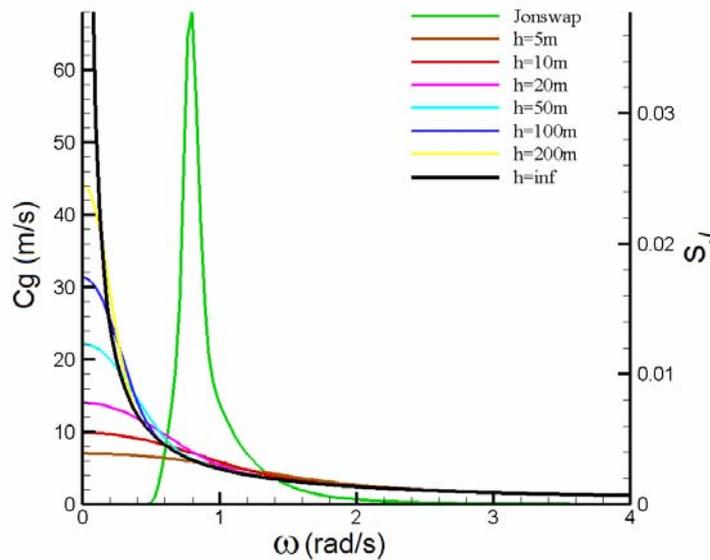


Figure 2.14 : Évolution de la vitesse de groupe pour différentes valeurs de la profondeur  $h$ .

Toutefois, on remarque également que l'influence de la profondeur sur la vitesse de groupe n'est pas monotone. Si l'on considère par exemple les vitesses de groupe correspondant aux fréquences de coupure  $\omega_l$  et  $\omega_v$ , prises à 5% de l'énergie au pic spectral, on constate d'après le Tableau 2.2 que les vitesses de groupe correspondant à l'onde la plus rapide (fréquence  $\omega_l$ ) ne sont pas échelonnées en fonction de  $h$ . La vitesse de groupe de l'onde la plus lente est en revanche identique pour toute profondeur car on a vu qu'à haute fréquence, les différents cas de figure sont indissociables.

$h$ (m)	$Cg_l$ (m/s)	$Cg_v$ (m/s)
5	1.48	6.58
10	1.48	8.75
20	1.48	10.90
50	1.48	11.88
100	1.48	10.53
200	1.48	10.00
$\infty$	1.48	9.99

Tableau 2.2 : Influence de la profondeur sur les vitesses de groupe correspondant aux fréquences extrêmes  $\omega_l$  et  $\omega_v$ .

L'impact de la profondeur  $h$  sur la forme de la zone de prévision n'est donc pas monotone. Sur la Figure 2.15.a) et plus nettement sur le zoom en Figure 2.15.b), on voit par exemple que le domaine de prévision pour une profondeur  $h = 200\text{m}$  (qui est confondu avec le cas où la profondeur est infinie) est plus réduite que la zone à  $h = 5\text{m}$  mais plus grande que le domaine correspondant à  $h = 50\text{m}$ .

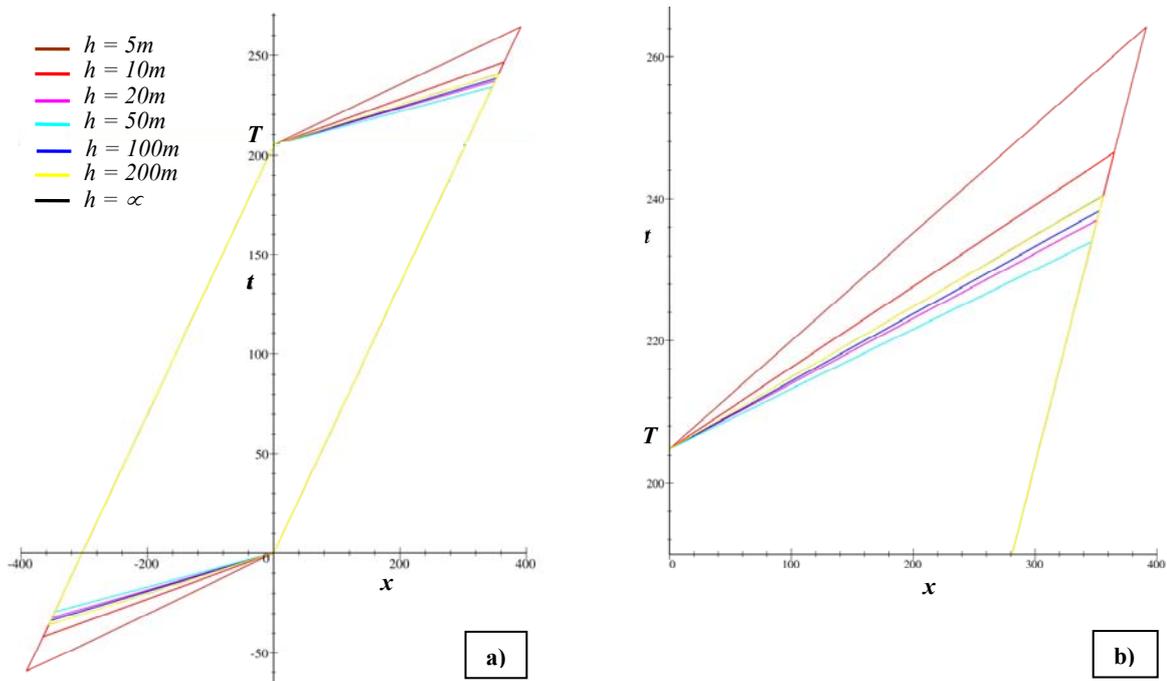


Figure 2.15 : Tracé des zones de prévision correspondant à des cas de profondeur  $h$  différents : a) Zones, b) Zoom.

### 2.2.3.3 Influence d'un courant de vitesse $U_c$

Dans cette partie, nous analysons l'effet sur le domaine de prévision d'un courant uniforme de vitesse  $U_c \mathbf{x}$  pouvant se propager dans la même direction que la houle ( $U_c > 0$ ) ou dans le sens opposé à la propagation des vagues ( $U_c < 0$ ). De manière intuitive, on pressent en effet que les vagues vont être accélérées par un courant ayant la même direction qu'elles, ou ralenties par un courant opposé à leur propagation, ce qui modifie la zone de prévision.

Au dessus d'un fond plat et sans frottement au fond, les vagues en présence d'un courant Eulérien uniforme  $U_c$  sont les mêmes, dans le référentiel se déplaçant avec le courant, que celles sans courant dans un référentiel attaché au fond. L'effet du courant est donc seulement d'induire un décalage Doppler de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

En présence d'un tel courant, la relation de dispersion pour l'onde  $n \in \mathbb{N}$  prend la forme (2.25) en profondeur infinie :

$$(\omega_n - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{U}_c)^2 = g |\mathbf{k}_n| \quad (2.25)$$

Pour une houle monodirectionnelle, la vitesse de groupe devient :

$$Cg_n = \frac{\partial \omega_n}{\partial k_n} = \frac{g}{2} \frac{1}{\omega_n - k_n U_c} + U_c \quad (2.26)$$

Dans le cas où le courant est dirigé dans le sens de propagation de la houle, c'est-à-dire  $U_c > 0$ , la vitesse de groupe est augmentée par rapport au cas sans courant. Il en résulte une diminution des pentes en  $1/Cg$  de la zone de prévision, ce qui a pour effet d'accroître l'étendue du domaine. À l'inverse, si le courant s'oppose à la propagation des vagues, la zone de prévision est amoindrie.

Sur la Figure 2.16, on a comparé la zone de prévision associée au cas de houle bidimensionnel sans courant, aux domaines obtenus lorsqu'un courant uniforme opposé ou non à la houle est pris en compte. On constate effectivement que la zone la plus étendue correspond au cas où le courant est dirigé dans la même direction que les vagues.

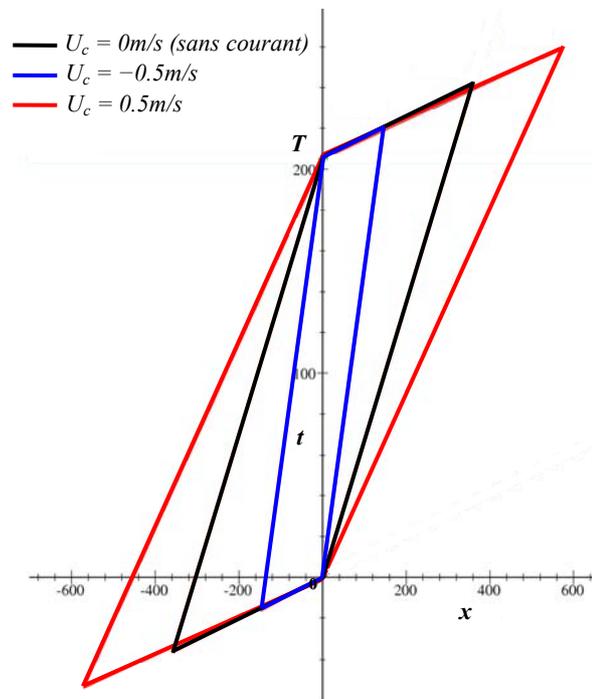


Figure 2.16 : Influence d'un courant de vitesse  $U_c$  sur la taille de la zone de prévision.

Cette figure montre également que l'impact du courant sur la vitesse de groupe de l'onde la plus lente  $Cg_l$  est beaucoup plus important que sur la vitesse de l'onde la plus rapide qui est pratiquement inchangée pour les trois cas de figure considérés. La prévision devient impossible dans le cas limite où  $Cg_l = 0$ , c'est-à-dire lorsqu'un courant opposé à la houle est tellement important qu'il bloque la propagation des ondes courtes. Dans ce cas, même si ces ondes sont mesurées par la sonde, elles ne se propagent pas, et toute prédiction s'en trouve faussée. Ces conditions se rencontrent principalement près des côtes, dans les raz par exemple, où les courants sont souvent très forts.

Pour un courant s'opposant à la propagation de la houle, le cas limite où l'onde la plus courte de pulsation  $\omega_v$  est bloquée et où la prévision devient impossible est défini par (2.27). Tant que la

fréquence angulaire  $\omega_v$ , reste inférieure à la valeur limite ci-dessous, la prévision est possible.

$$Cg_l = 0 \Leftrightarrow \omega_v = -\frac{g}{4U_c} \quad (2.27)$$

Dans ce paragraphe, nous avons analysé le cas simple de l'effet d'un courant uniforme sur l'étendue du domaine de prévision. Dans le cas plus réaliste d'un courant variable, la vitesse de groupe des ondes (2.26) va dépendre de la vitesse locale du courant  $U_c(x,t)$ . La trajectoire des vagues ne va donc plus être une droite dans le plan  $(x,t)$ , mais une courbe plus complexe.

Si par ailleurs, nous ajoutons à notre modèle la prise en compte des interactions non-linéaires entre les vagues, la vitesse de groupe va également dépendre des amplitudes et des nombres d'ondes des différentes composantes. La propagation de la houle est alors encore plus délicate à interpréter.

### 2.2.3.4 Influence des non-linéarités

Jusqu'à présent, pour plus de simplicité, nous avons fait l'étude d'un champ unidirectionnel linéaire, négligeant ainsi les interactions qui existent entre les différentes composantes de la houle. L'objectif de l'étude présentée ici n'est pas de fournir une équation du domaine de prévision tenant compte des non-linéarités présentes dans la réalité, mais plutôt de déterminer l'effet général de ces interactions sur la taille du domaine. Une étude linéaire simplifiée pourra alors donner une estimation de zone de prévision minimale ou maximale disponible, suivant que l'impact global des non-linéarités est d'augmenter ou de diminuer l'étendue du domaine. Pour effectuer cette analyse, nous considérons les interactions linéaires jusqu'à l'ordre trois.

La prise en compte des non-linéarités introduit des modifications dans la relation de dispersion : si l'on considère une seule onde non-linéaire  $n$ , sa fréquence angulaire  $\omega_n$  ne va plus dépendre uniquement du nombre d'onde  $\mathbf{k}_n$ , mais également de l'amplitude complexe de l'onde  $\underline{a}_n$  ; si l'onde  $n$  entre en interaction avec une autre onde non-linéaire  $m$ , sa pulsation devient en plus fonction de l'amplitude  $\underline{a}_m$  et du nombre d'onde  $\mathbf{k}_m$  de la deuxième onde. En deux dimensions et en profondeur infinie, la pulsation d'une onde  $n$  est modifiée par la présence des interactions non-linéaires de l'onde avec elle-même et de l'onde avec les  $N-1$  autres ondes du champ de la manière suivante :

$$\omega_n' = \omega_n \left( 1 + \frac{1}{2} |\mathbf{k}_n|^2 |\underline{a}_n|^2 + \sum_{\substack{p=1 \\ p < n}}^N \left( \frac{|\mathbf{k}_n|}{|\mathbf{k}_p|} \right)^{1/2} |\mathbf{k}_p|^2 |\underline{a}_p|^2 + \sum_{\substack{p=1 \\ p > n}}^N \left( \frac{|\mathbf{k}_n|}{|\mathbf{k}_p|} \right)^{3/2} |\mathbf{k}_p|^2 |\underline{a}_p|^2 \right) \quad (2.28)$$

Il s'agit de la même expression que celle rappelée au paragraphe 1.2.3 lors de l'introduction du modèle de houle à l'ordre deux associée à une relation de dispersion non-linéaire d'ordre trois, sauf que cette fois, c'est la modification de la pulsation qui est quantifiée et non celle du nombre d'onde. Tout comme au Chapitre 1, un facteur correctif 1/2 a été ajouté à l'équation originelle de Longuet-Higgins & Phillips (1962, [101]) en suivant Bredmose, (2002, [20]).

On peut déduire de (2.28) l'expression de la vitesse de groupe modifiée dans le cas unidirectionnel qui nous concerne :

$$Cg_n = \frac{\partial \omega_n}{\partial k_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{g}{k_n} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{5}{4} k_n^2 |a_n|^2 + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p < n}}^N \left( \frac{k_n}{k_p} \right)^{1/2} k_p^2 |a_p|^2 + 4 \sum_{\substack{p=1 \\ p > n}}^N \left( \frac{k_n}{k_p} \right)^{3/2} k_p^2 |a_p|^2 \right\} \quad (2.29)$$

Le terme correctif apporté par la prise en compte des interactions d'ordre trois est positif. Les interactions non-linéaires ont donc pour effet d'augmenter la vitesse de groupe.

$$\Delta Cg_n = \left( \frac{g}{k_n} \right)^{1/2} \left\{ \frac{5}{4} k_n^2 |a_n|^2 + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p < n}}^N \left( \frac{k_n}{k_p} \right)^{1/2} k_p^2 |a_p|^2 + 4 \sum_{\substack{p=1 \\ p > n}}^N \left( \frac{k_n}{k_p} \right)^{3/2} k_p^2 |a_p|^2 \right\} \quad (2.30)$$

Plus particulièrement, la modification de la vitesse de groupe de l'onde la plus lente repérée par  $n = 1$  et de l'onde la plus rapide repérée par  $n = N$  est :

$$\Delta Cg_l = \Delta Cg_1 = g^{1/2} \left\{ \frac{5}{4} \frac{k_1^2 |a_1|^2}{k_1^{1/2}} + 2 \sum_{p=2}^N \frac{k_1}{k_p^{3/2}} k_p^2 |a_p|^2 \right\} \quad (2.31)$$

$$\Delta Cg_v = \Delta Cg_N = g^{1/2} \left\{ \frac{5}{4} \frac{k_N^2 |a_N|^2}{k_N^{1/2}} + 4 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{k_p^{1/2}} k_p^2 |a_p|^2 \right\} \quad (2.32)$$

En calculant la différence entre ces termes, on constate que  $\Delta Cg_l > \Delta Cg_v$ , ce qui signifie que l'onde la plus lente est d'avantage accélérée par les interactions non-linéaires que ne l'est l'onde la plus rapide. Rapporté à l'allure de la zone de prévision, cela signifie que la pente en  $1/Cg_v$ , diminue moins que la pente  $1/Cg_l$ . En conséquence, la taille du domaine de prévision est accrue par les non-linéarités. Par ailleurs, plus la cambrure ( $ka$ ) de la houle est importante, plus le terme correctif (2.30) de la vitesse de groupe est élevé, surtout pour les ondes longues, et donc plus la taille de la zone augmente.

En conclusion, cette étude nous indique que l'analyse linéaire simplifiée adoptée jusqu'ici permet d'obtenir une minimisation de la zone de prévision. Ce domaine est plus étendu dans la réalité du fait des interactions non-linéaires entre les vagues, et ce de manière d'autant plus importante que la houle en présence est cambrée. On prendra toutefois garde au fait qu'à très forte cambrure, de nouveaux phénomènes physiques entrent en jeu, notamment le déferlement des vagues, qui entraîne une dissipation d'énergie et donc une modification de la vitesse des ondes. On ne peut alors pas s'avancer quant à l'augmentation de la taille du domaine de prévision.

## 2.2.4 Influence du mouvement du capteur

Dans les applications pratiques, il est courant que les capteurs soient mobiles, notamment dans le cas de radars embarqués sur un navire. Il peut donc être intéressant de connaître l'influence du déplacement d'une sonde sur le domaine de prévision.

Considérons le cas simple en houle unidirectionnelle d'une sonde se déplaçant à une vitesse constante  $U_s \mathbf{x}$  telle que sa position à un instant  $t$  donné soit repérée par la coordonnée  $x_s(t) = x_0 + U_s t$  où

$x_0$  est la position de référence à  $t = 0$ . Le capteur peut se déplacer dans le sens de propagation de la houle ( $U_s > 0$ ) ou dans le sens opposé ( $U_s < 0$ ).

Contrairement aux études précédentes, la vitesse de groupe des vagues n'est pas modifiée par la mise en mouvement de la sonde. Quelque soit sa position, la sonde mesure en effet exactement les mêmes composantes de houle, de fréquences comprises dans l'intervalle  $[\omega_l, \omega_v]$ . Ce qui va ici modifier la forme de la zone de prévision, c'est l'écartement de la sonde par rapport à sa position initiale. Alors que précédemment le capteur restait invariablement en  $x_0$ , il se trouve à  $t = T$  en  $x_s(T) = x_0 + U_s T$ . Cela a pour conséquence de modifier le domaine de prévision : suivant la valeur de la vitesse et la direction d'avance par rapport à la direction de propagation des vagues, la zone pourra être réduite ou au contraire étendue.

En premier lieu, supposons que la sonde suit la propagation des vagues (ie  $U_s > 0$ ). Il existe trois cas de figure différents représentés en Figure 2.17:

- Si sa vitesse est comprise entre les vitesses de groupe de l'onde la plus lente et de l'onde la plus rapide ( $Cg_l < U_s < Cg_v$ ), cela signifie qu'elle se déplace à la même vitesse qu'une des composantes de la houle qui ne pourra donc pas être mesurée. Toute prévision est alors impossible puisqu'une onde est inconnue.
- Dans le cas où  $U_s < Cg_l$ , la taille du domaine diminue lorsque la vitesse  $U_s$  augmente.
- Si  $U_s > Cg_v$ , la zone de prévision augmente avec la valeur de la vitesse de la sonde et à une position donnée de la sonde  $x_s(t)$ , il est possible de prévoir le champ de vagues aux instants antérieurs et ultérieurs à l'instant de passage de la sonde en  $x_s(t)$

Supposons maintenant que la sonde se déplace dans la direction opposée à la propagation de la houle (ie  $U_s < 0$ ). Alors il n'existe aucune restriction sur la valeur de la vitesse de la sonde et la zone est fortement étendue, même pour une faible valeur de la vitesse  $U_s$ .

Les équations caractérisant les domaines peuvent être regroupées en deux types :

Si  $U_s < 0$  ou  $0 < U_s < Cg_l$ , on retrouve les équations classiques du domaine :

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{Cg_l} \leq t \leq T + \frac{x - x_s(T)}{Cg_v} & , \text{ pour } x > x_s(t) \\ \frac{x - x_0}{Cg_v} \leq t \leq T + \frac{x - x_s(T)}{Cg_l} & , \text{ pour } x < x_s(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

Si  $U_s > Cg_v$ , en revanche, la forme de la zone change :

$$\begin{cases} T + \frac{x - x_s(T)}{Cg_v} \leq t \leq \frac{x - x_0}{Cg_l} & , \text{ pour } x > x_s(t) \\ T + \frac{x - x_s(T)}{Cg_l} \leq t \leq \frac{x - x_0}{Cg_v} & , \text{ pour } x < x_s(t) \end{cases} \quad (2.34)$$

On notera finalement, que dans le cas plus général d'un capteur se déplaçant à une vitesse non uniforme, il est toujours possible de déterminer la zone de prévision si la trajectoire de la sonde est connue.

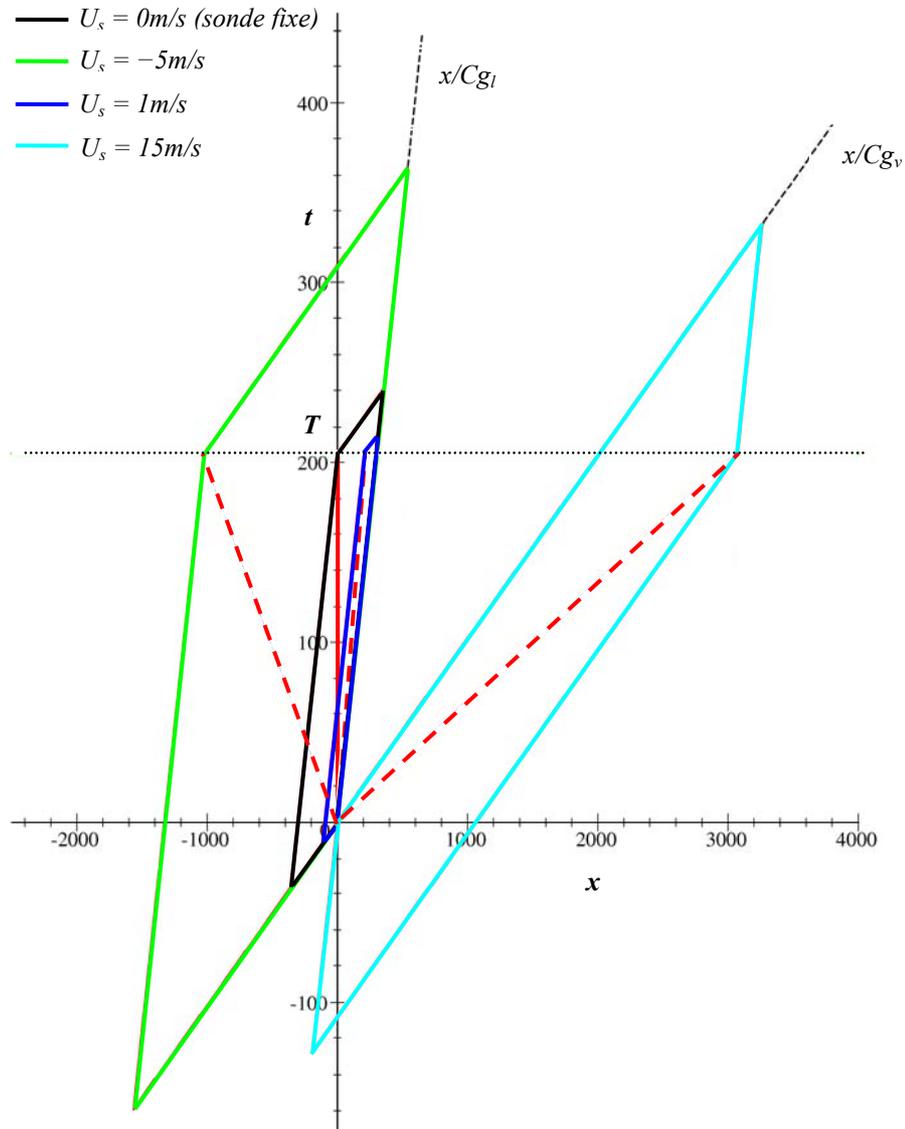


Figure 2.17 : Domaines de prévision associés à des vitesses de sonde différentes. En rouge, on a représenté la trajectoire des sondes pour les cas traités.

## 2.2.5 Bilan

Dans ce paragraphe, nous avons mis en évidence les divers paramètres pouvant avoir une influence sur la taille de la zone de prévision. Certains facteurs naturels, comme la bathymétrie, la présence ou non d'un courant et les non-linéarités plus ou moins prononcées, jouent un rôle important sur l'étendue du domaine mais ne peuvent être modifiés par un opérateur. Les études précédentes ont cependant permis de déterminer leur impact global sur la forme de la zone de prévision, de manière à pouvoir affiner sa géométrie à partir d'un modèle simplifié.

D'autres paramètres vont pouvoir être ajustés par l'utilisateur en fonction du type de prévision requis (résultat précis, prévision à long terme où à longue distance...). Il s'agit notamment de la période de mesure, de la largeur de la bande de fréquences du spectre de houle prises en compte, et de la vitesse de déplacement de la sonde dans le cas d'un capteur embarqué.

L'efficacité de la prévision dépend enfin des performances du modèle de prévision à proprement parler puisque le temps de calcul peut devenir un facteur limitant la période de prévision et donc l'étendue de la zone de prévision disponible.

## 2.3 Association de sondes

Un autre moyen d'étendre la zone de prévision est bien entendu d'utiliser plusieurs capteurs. Chaque capteur donnant accès à un domaine de prévision propre, l'association de diverses sondes permet d'effectuer une prévision dans le domaine spatio-temporel regroupant l'ensemble des zones de prévision. Cette procédure a pour avantage d'augmenter la taille de la zone tout en conservant une plage de capture raisonnable pour chaque sonde (ce qui évite les surcoûts en temps de calcul comme nous l'avons fait remarquer au paragraphe 2.2.2). Elle est par ailleurs d'autant plus attrayante que plusieurs sondes sont souvent utilisées lors des campagnes de mesure en bassin pour relever le champ de vague, notamment dans le cas d'une houle réelle multidirectionnelle, où trois sondes à houle sont au minimum requises pour déterminer la directionnalité du champ de vagues. En mer en revanche, les bouées directionnelles, de type Datawell par exemple, permettent directement d'obtenir la directionnalité du champ de vagues à partir de la mesure du pilonnement, du tangage et du roulis en un seul point.

Plusieurs sondes peuvent également être utilisées dans le but d'améliorer la qualité de la prévision. Il est pour cela nécessaire que les zones de prévision des sondes considérées se recoupent ; le champ de vagues obtenu à partir des données fournies par une sonde  $s_1$  pourra alors être affiné en utilisant les données issues d'autres sonde  $s_i$  dans la zone de recouvrement des zones 1 à  $i$ .

Nous considérons dans ce paragraphe que les différentes sondes ont une même période de mesure de  $T$  secondes.

### 2.3.1 Etude bidimensionnelle

#### 2.3.1.1 Zone de prévision issue de la combinaison de deux sondes

Considérons un champ de vagues unidirectionnel mesuré par deux sondes localisées en  $x_1$  et  $x_2$  pendant  $T$  secondes. Trois cas représentés sur la Figure 2.18 sont alors envisageables selon

l'écartement  $|x_1 - x_2|$  entre les sondes et la distance  $Cg_l T$  parcourue par l'onde la plus lente pendant la mesure.

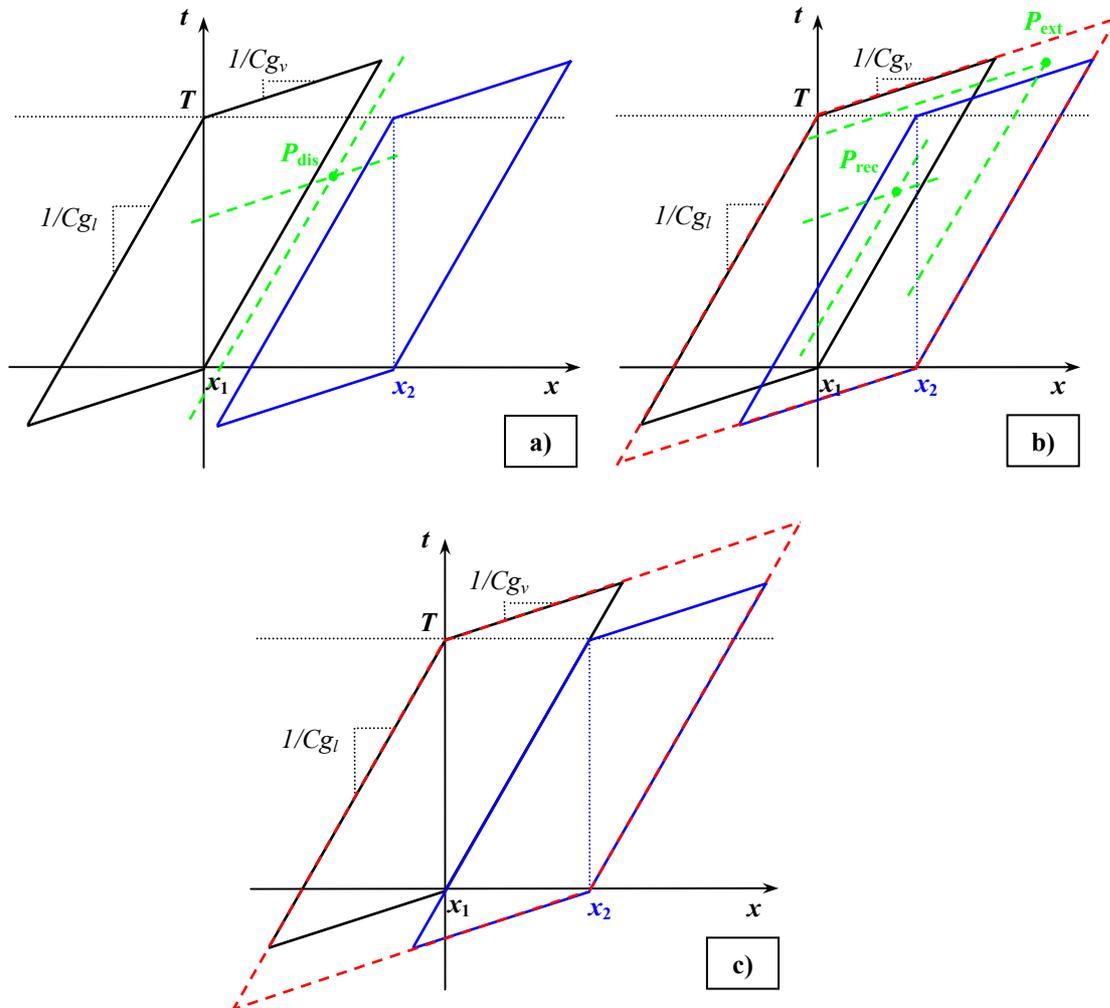


Figure 2.18 : Association de deux sondes de mesure situées en  $x_1$  et  $x_2$  : a) Cas où les zones sont disjointes, b) Cas où les zones de prévision se recourent, c) Cas où les zones sont contiguës. La zone issue de la combinaison des données des deux sondes est représentée en pointillés rouges.

- Si  $x_2 - x_1 > Cg_l T$ , comme représenté sur la Figure 2.18.a), les zones de prévision issues des deux sondes sont disjointes. La prévision est alors possible à l'intérieur de la zone 1 et de la zone 2, mais le champ de vagues ne peut pas être calculé en un point situé à l'extérieur de ces zones. Les composantes de la houle passant par un point  $P$  en dehors des zones 1 et 2 ne sont en effet pas toutes mesurées par l'une ou l'autre sonde. Sur l'exemple représenté en Figure 2.18.a), on constate que les ondes rapides sont captées par la sonde 1, mais que les ondes les plus lentes ne sont mesurées par aucune des deux sondes.
- Si  $x_2 - x_1 < Cg_l T$ , les zones de prévision se recourent (cf Figure 2.18.b)). Les ondes passant par les points de la zone de recouvrement sont mesurées à la fois par la sonde 1 et par la sonde 2 ; le champ de vagues en ces points est donc surdéterminé. Par ailleurs, on constate qu'il est possible

- d'étendre la prévision à l'extérieur des domaines 1 et 2. Les points accessibles sont tels que les composantes de la houle les traversant ont été mesurées soit par la sonde 1, soit par la sonde 2. Le point de prévision extrême correspond au cas où l'onde la plus lente est mesurée par la sonde 2 et l'onde la plus rapide par la sonde 1. La zone de prévision totale obtenue par l'association des deux sondes est donc supérieure à la somme des zones individuelles 1 et 2. Dans cette configuration, non seulement l'intervalle spatial de prévision à un instant donné  $t$  est étendu, mais la capacité de prévision elle-même est accrue (le calcul est possible à des instants et des positions plus éloignés).
- Si  $x_2 - x_1 = Cg_l T$ , les zones 1 et 2 sont contiguës. Les composantes du champ de vagues passant par les points de l'un des domaines sont uniquement mesurées par la sonde associée (cf Figure 2.18.c)). De même que précédemment, la houle peut être calculée dans une zone extérieure proche des domaines 1 et 2. Le domaine de prévision global obtenu est alors le domaine le plus grand rendu accessible par la combinaison des données recueillies aux deux sondes : sa taille est multipliée par deux.

En conclusion, la distance parcourue par l'onde la plus lente pendant la durée de capture de la sonde fournit une indication sur le choix de la distance maximale inter-sondes permettant d'obtenir le domaine de prévision le plus étendu.

### 2.3.1.2 Extension de la zone de prévision

Si l'objectif est d'obtenir la zone de prévision maximale en utilisant les données recueillies par les différentes sondes utilisées, il est nécessaire de positionner les sondes de telle sorte que leurs domaines de prévision soient contigus. La sonde  $n \in \mathbb{N}$  doit être placée en  $x_n = nCg_l T + x_1$ . La combinaison de  $N_s$  sondes permet alors multiplier la taille de la zone de prévision par  $N_s$ . L'équation de la nouvelle zone est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{x - x_{N_s}}{Cg_l} \leq t \leq T + \frac{x - x_1}{Cg_v} & , \text{ pour } x > \frac{(T-t)x_{N_s} + x_0 t}{T} \\ \frac{x - x_{N_s}}{Cg_v} \leq t \leq T + \frac{x - x_1}{Cg_l} & , \text{ pour } x < \frac{(T-t)x_{N_s} + x_0 t}{T} \end{cases} \quad (2.35)$$

et les points de prévision maximal et minimal ont pour coordonnées :

$$x_{\max} = \frac{Cg_l Cg_v}{Cg_v - Cg_l} \left( -\frac{x_1}{Cg_v} + \frac{x_{N_s}}{Cg_l} + T \right) , \quad t_{\max} = \frac{Cg_v}{Cg_v - Cg_l} \left( \frac{x_{N_s} - x_1}{Cg_v} + T \right) \quad (2.36)$$

$$x_{\min} = \frac{Cg_l Cg_v}{Cg_v - Cg_l} \left( \frac{x_1}{Cg_l} - \frac{x_{N_s}}{Cg_v} - T \right) , \quad t_{\min} = \frac{Cg_v}{Cg_v - Cg_l} \left( \frac{x_1 - x_{N_s}}{Cg_l} - T \right) \quad (2.37)$$

La Figure 2.19 montre la zone obtenue lorsque quatre sondes sont utilisées pour mesurer, pendant  $T = 204.8s$ , un champ unidirectionnel caractérisé par un spectre de JONSWAP de hauteur significative  $H_s = 2m$ , de période de pic  $T_p = 8s$ , et de fréquences angulaires minimale et maximale  $\omega_l = 0.49rad/s$  et  $\omega_v = 3.31rad/s$ . La sonde 1 est placée à l'origine du domaine de calcul. La zone de prévision combinée des quatre capteurs est quatre fois plus étendue que la somme des zones de prévision individuelles des différentes sondes.

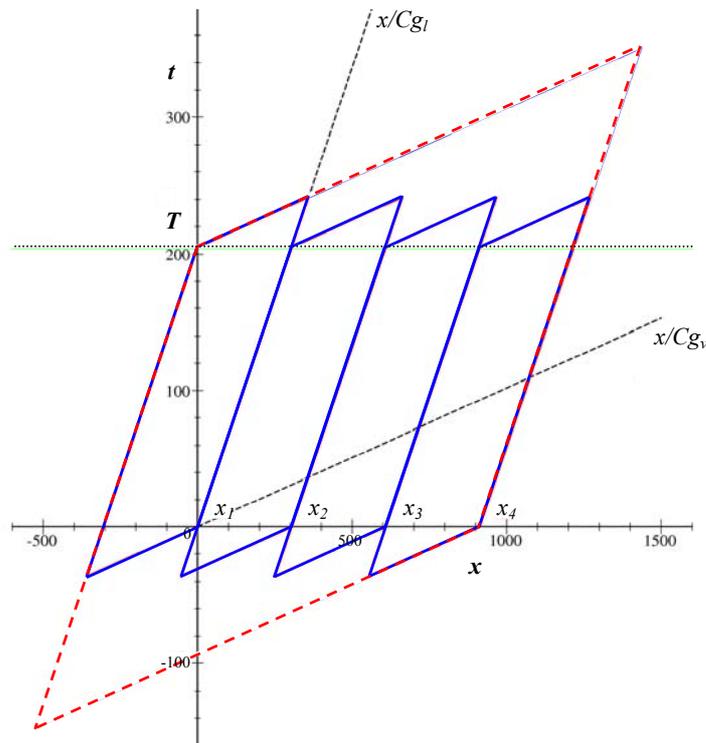


Figure 2.19 : Zones individuelles de quatre sondes de mesure (traits pleins bleus) et zone combinée obtenue en associant les données des différentes sondes (pointillés rouge).

De manière pratique, dans le cas de l'association de deux sondes, le champ de vagues en un point quelconque  $P$  de coordonnées  $(x_p, t_p)$  appartenant à l'extension du domaine de prévision est obtenu en distinguant les données fournies par les sondes.

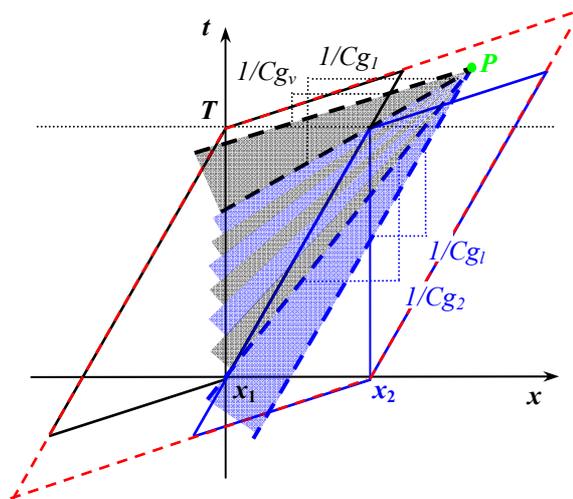


Figure 2.20 : Distinction entre les composantes de houle passant par un point  $P$  appartenant à l'extension de la zone de prévision mesurées par la sonde 1 (en noir), par la sonde 2 (en bleu) et par les deux sondes (rayé noir et bleu).

Comme représenté sur la Figure 2.20, les ondes passant par le point  $P$  de fréquences comprises entre  $[\omega_2, \omega_h]$  auront au préalable été mesurées par la sonde 1 uniquement, les composantes de fréquence appartenant à l'intervalle  $[\omega_b, \omega_1[$  auront été captées par la sonde 2 seulement et les fréquences  $[\omega_1, \omega_2]$  auront été mesurées par les deux sondes. Les fréquences limites  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dépendent de la position du point  $P$  et sont déterminées à partir des vitesses de groupe limites  $Cg_1$  et  $Cg_2$  par la relation de dispersion linéaire en profondeur infinie :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{g}{2Cg_1} = \frac{g}{2} \left( \frac{t_p - T}{x_p - x_2} \right) \\ \omega_2 = \frac{g}{2Cg_2} = \frac{g}{2} \left( \frac{t_p}{x_p - x_1} \right) \end{cases} \quad (2.38)$$

### 2.3.1.3 Amélioration de la prévision

L'association de plusieurs sondes peut également aider à accélérer et à améliorer le processus d'assimilation des données issues d'une sonde principale. Il s'agit dans ce cas d'utiliser les données fournies par une ou plusieurs sondes annexes pour affiner la reconstruction du champ de vagues dans la zone couverte par l'ensemble des sondes. La qualité de la prévision obtenue n'en sera alors que meilleure puisqu'elle est intimement liée au champ reconstruit qui initialise le modèle de propagation.

Considérons deux sondes mesurant un champ de vagues unidirectionnel pendant une période  $T$ . Si les domaines issus des deux sondes se recoupent (deuxième cas du 2.3.1,  $|x_2 - x_1| < Cg_1 T$ ), il est possible d'exprimer le champ de vagues reconstruit par l'assimilation des données à la sonde principale 1 en la position de la sonde annexe 2. On peut alors comparer les signaux reconstruits et mesurés à la sonde 2, mais uniquement dans l'intervalle de temps où le champ reconstruit est valable, c'est-à-dire entre les instants  $t_2^1$  et  $t_2^2$  de reconstruction disponibles en  $x_2$  appartenant au domaine 1 (cf Figure 2.21).

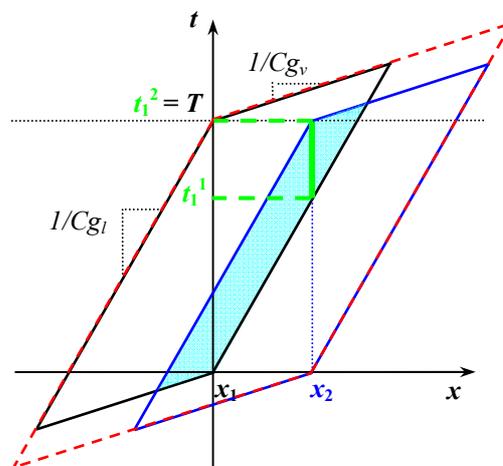


Figure 2.21 : Utilisation d'une sonde annexe 2 pour aider à la reconstruction du champ de vagues issu des mesures à la sonde principale 1. La zone de recouvrement est représentée en bleu clair.

Plutôt que d'optimiser la reconstruction du champ de vagues en se basant sur l'erreur sur le signal à la sonde 1 uniquement, on calcule l'erreur moyenne faite sur les signaux mesurés aux deux sondes, entre les instants  $[0, T]$  pour le signal principal 1 et entre les instants  $[t_2^1, t_2^2]$  pour le signal annexe 2. Nous reviendrons plus en détail sur ce point au Chapitre 4.

Cette procédure permet au final d'améliorer la qualité du champ reconstruit dans la zone couverte par les deux sondes ainsi que la qualité du champ prédit, dans la zone de recouvrement, mais également sur l'ensemble de la zone de prévision combinée des deux sondes. Bien que la sonde annexe puisse se situer en amont ou en aval de la sonde principale, il est préférable d'utiliser des données plus récentes tenant compte des caractéristiques de la propagation de la houle étudiée pour aider à la reconstruction du champ de vagues à la sonde principale. La sonde annexe sera donc placée en aval de la sonde principale.

## 2.3.2 Extension au cas tridimensionnel

De la même manière que dans le cas bidimensionnel, les données recueillies par plusieurs sondes peuvent être combinées pour élargir le domaine de prévision accessible. La détermination de la directionnalité d'un champ de vagues multidirectionnel en bassin nécessite par ailleurs l'utilisation d'au moins trois sondes. Plus le nombre de sondes est important, meilleure est la résolution angulaire obtenue et par là même, la qualité de la reconstruction et de la prévision du champ de vagues. Nous verrons plus bas que la performance d'un réseau de sondes n'est pas uniquement lié au nombre de capteurs mis en jeu, mais également à leur disposition. En pratique, on se contente en général d'un nombre raisonnable de sondes compris entre trois et dix.

### 2.3.2.1 Zone combinée issue de l'association de plusieurs sondes

La théorie tridimensionnelle de détermination du domaine combiné, issu de l'association de divers capteurs, est beaucoup plus complexe que la théorie en deux dimensions présentée au paragraphe précédent. Dans la mesure où une étude numérique simple nous permet d'avoir très facilement accès à la zone de prévision combinée tridimensionnelle, nous n'avons pas jugé utile ici de développer les aspects théoriques calculatoires complexes. Le principe de la méthode utilisée est identique à la méthode évoquée au 2.1.3.2 : une composante de houle passant par un point  $P$  a effectivement été mesurée par l'une des sondes si l'instant de passage de l'onde par la sonde est compris dans l'intervalle de capture de la sonde.

En Figure 2.22, on a représenté la zone obtenue en combinant les données mesurées par un réseau de trois sondes. Le champ étudié est caractérisé par un spectre directionnel de JONSWAP en  $\cos^2$ , de hauteur significative  $H_s = 2\text{m}$  et de période de pic  $T_p = 8\text{s}$ , de fréquences angulaires limites  $0.49\text{rad/s}$  et  $3.31\text{rad/s}$  et se propageant dans l'intervalle angulaire  $[-30^\circ, 30^\circ]$ . La période de mesure des sondes est identique et vaut  $T = 204.8\text{s}$ . La zone est tracée pour différents instants de rétrospection, reconstruction et prévision.

On constate par exemple que les zones individuelles à un instant donné ne doivent pas forcément être contiguës pour que la prévision en dehors de ces zones soit possible. Par ailleurs, à un instant de prévision éloigné, bien que les zones de chaque sonde soient de taille réduite, la zone combinée est elle très étendue, ce qui présente un avantage considérable, dans le sens où un nombre réduit de sondes peut suffire pour couvrir une plage de prévision tout à fait acceptable.

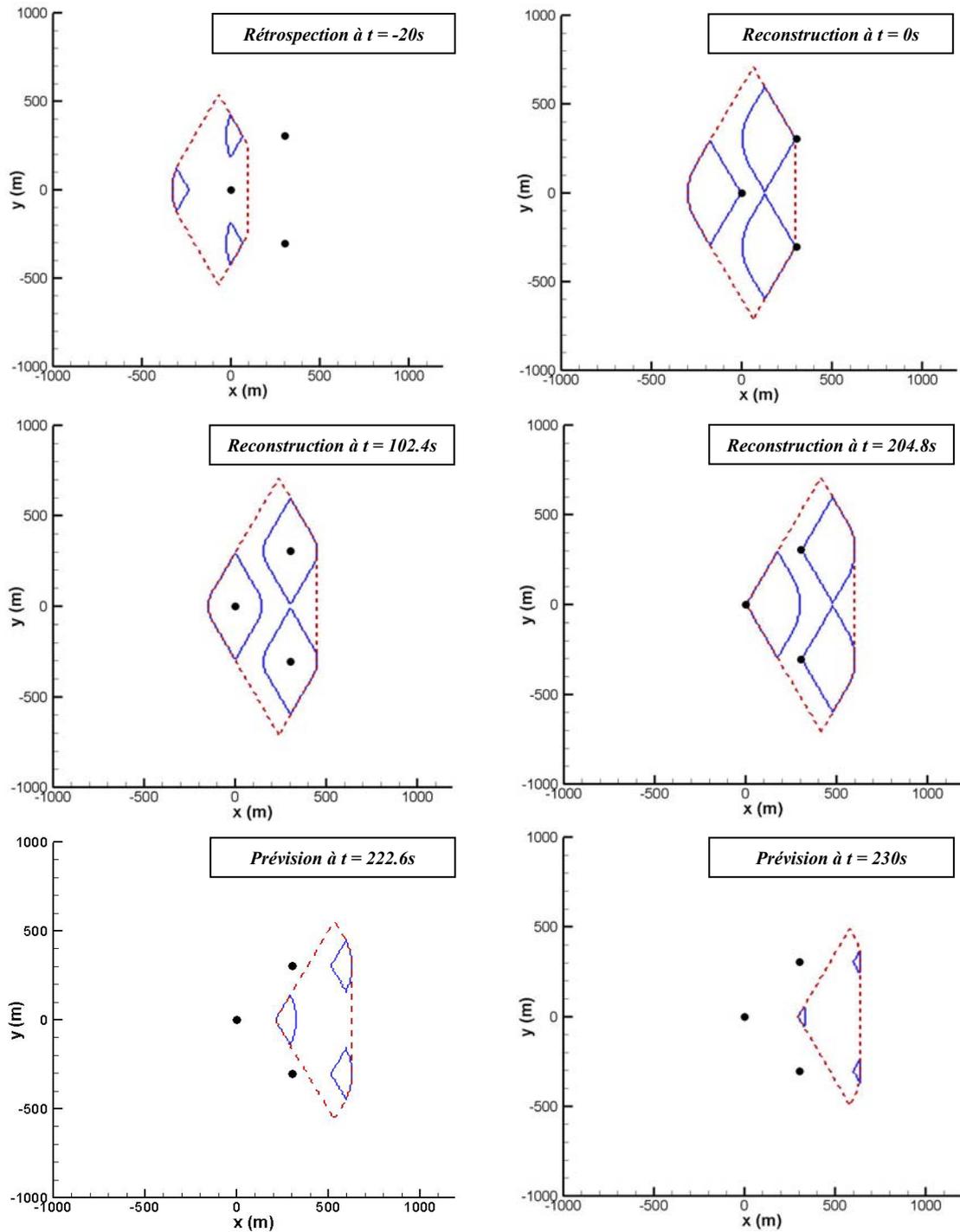


Figure 2.22 : Zones individuelles (traits pleins bleus) et zones combinées (pointillés rouges), à divers instants, provenant de la combinaison des zones de trois sondes.

### 2.3.2.2 Choix du nombre et de la position des sondes

Nous présentons ici une analyse relative au choix des réseaux de sondes à utiliser lors de la mesure d'une houle multidirectionnelle en bassin, où plusieurs sondes à houle sont requises pour retrouver la directionnalité des champs de vagues générés. (En mer, on utilise en général des bouées multidirectionnelles qui donnent directement la direction de la houle à partir d'une mesure ponctuelle.) Cette étude a pour but de préparer la campagne d'essais que nous réaliserons afin d'effectuer une première validation du modèle numérique multidirectionnel. Des essais en houle unidirectionnelle ont déjà été effectués pour valider le modèle 2D et seront présentés au Chapitre 4.

Un nombre élevé de sondes ne suffit pas toujours à obtenir une bonne estimation de la directionnalité du spectre de la houle considérée. Young (1994,[162]) montre par exemple que si sept sondes renvoient en général une bonne approximation de la distribution directionnelle d'un champ de vagues, la direction principale est beaucoup mieux résolue par un réseau de six sondes. La géométrie du système ainsi que la distance séparant les sondes par rapport à la longueur d'onde des vagues mesurées sont également très importantes.

Diverses études ont été réalisées qui mettent en évidence les critères permettant d'obtenir la meilleure estimation du spectre directionnel de la houle en utilisant le minimum d'éléments. Goda (1981, [67]) résume ainsi les caractéristiques principales du réseau de sondes optimal :

- Les paires de sondes ne doivent pas se situer à une distance vectorielle identique à celle existant entre les différentes sondes,
- La distance vectorielle entre les sondes doit être distribuée de manière uniforme, dans un étalement le plus large possible,
- La distance de séparation  $l$  entre deux sondes doit être inférieure au quart ou à la moitié de la plus petite longueur d'onde des composantes du champ de vagues étudié. Supposons par exemple que la fréquence maximale de la houle analysée est  $\omega_N = N\omega_p$  où  $\omega_p$  est la fréquence de pic, alors la distance minimale est  $l < \pi/2|\mathbf{k}_N|$  ou  $l < \pi g/2N^2\omega_p^2$  en profondeur infinie.

Suivant ces principes, Barber (1961, [5]) montre que le réseau optimal pour un groupe de trois sondes est un triangle équilatéral (Figure 2.23.a) et que quatre sondes sont idéalement réparties en étoile (Figure 2.23.b)). Un réseau constitué de cinq sondes formant un pentagone tronqué (Figure 2.23.c)) est également très utilisé pour la mesure des houles directionnelles irrégulières en bassin (Benoît & Teisson, 1994, [11], Bonnefoy, 2005, [18]).

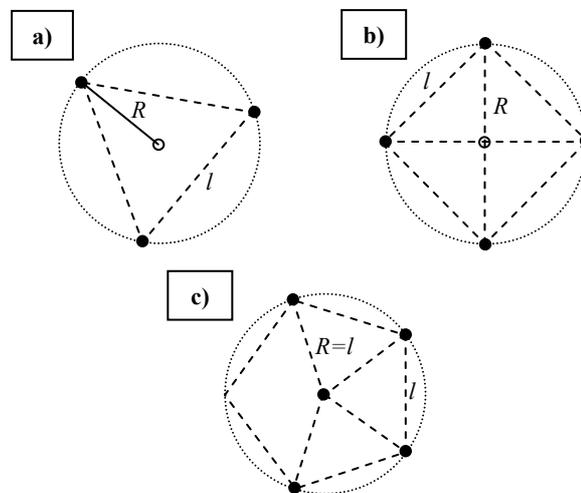


Figure 2.23 : Réseaux de sondes couramment utilisés : a) Triangle équilatéral de trois sondes, b) Réseau de quatre sondes en étoile, c) Système de cinq sondes formant un pentagone tronqué.

De manière plus générale, Davis & Regier (1977, [42]) montrent que le paramètre décisif dans le choix de la répartition géométrique des sondes, qui forment une matrice dans l'espace  $(x,y)$ , est la matrice des co-valeurs (ou co-matrice) définie par (2.39) représentant le décalage entre les sondes pour une direction donnée  $\mathbf{k}$ .

$$\xi_{mn} = \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n)}{|\mathbf{k}|} \quad (2.39)$$

Cette quantité a en effet une influence directe sur le spectre croisé à partir duquel on détermine le spectre directionnel du champ de vagues analysé et est défini par l'expression (2.40) où  $H_m(f,\theta)$  est la fonction de transfert entre l'élévation de surface libre et le signal effectivement mesuré par la sonde (pression, vitesse, ...) et où le symbole « \* » représente la quantité conjuguée dans la mesure où la fonction  $H_m$  est complexe dans le cas général :

$$G_{mn} = \int_0^{2\pi} H_m(f,\theta) H_n^*(f,\theta) \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)) S(f,\theta) d\theta \quad , \text{ pour } m = 1..N, m < n \quad (2.40)$$

Young (1994, [162]) ajoute que le réseau de sondes est optimal si les décalages de la co-matrice sont répartis de façon impaire et dense en espace et en direction (cf Figure 2.24).

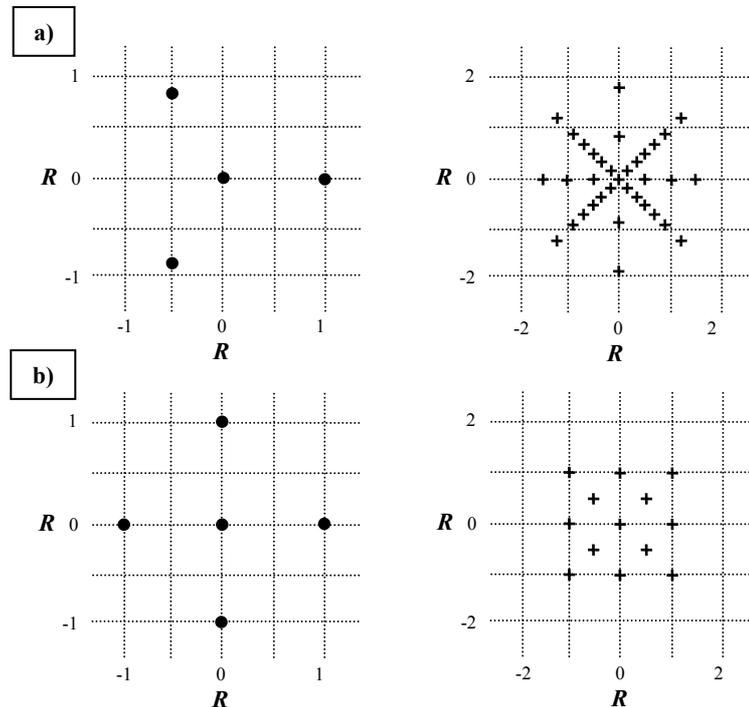


Figure 2.24 : Réseau de sondes (points) et co-matrices associées (croix) : a) Réseau de quatre sondes, b) Réseau de cinq sondes.

Il indique alors que le rapport  $\lambda_p/R$  entre la longueur d'onde au pic du spectre du champ de vagues et la distance séparant deux sondes est à ajuster de façon à avoir le réseau de sondes le plus adapté à la houle étudiée. Si  $1 < \lambda_p/R < 10$ , la directionnalité obtenue à l'aide du réseau est proche de

la réalité. En revanche si  $\lambda_p/R$  tend vers 1, où des effets de repliement spatial interviennent, ou si  $\lambda_p/R$  devient trop grand, ce qui complique l'inversion de la matrice  $G_{mn}$  du spectre croisé, la qualité de la décomposition angulaire obtenue est rapidement amoindrie. En outre, même si un réseau comprenant un nombre élevé de sondes permet de créer un nombre important de décalages, certains peuvent être redondants et le système n'est pas forcément plus performant qu'un réseau utilisant moins de sondes. Enfin Young met en évidence que dans certains cas de figure, l'utilisation d'un réseau irrégulier (ie où la distance entre les sondes varie) permet d'accroître la précision du résultat. Il montre ainsi qu'un réseau irrégulier de sept sondes constitué d'une sonde centrale, de trois éléments situés sur le cercle de rayon  $R/2$  et de trois éléments sur le cercle de rayon  $R$  est plus performant que le réseau régulier correspondant (cf Figure 2.25).

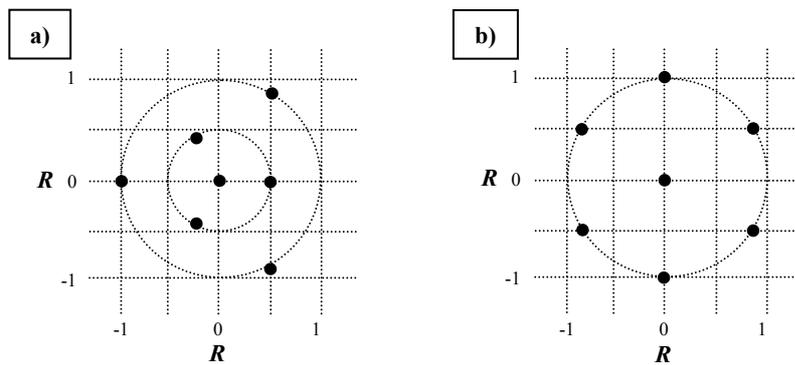


Figure 2.25 : Réseaux de sept sondes : a) Réseau irrégulier, b) Réseau régulier.

# Chapitre 3

## Assimilation de données

Comme le résumant bien Le Dimet & Blum (2002, [97]) « *l'assimilation de données est l'ensemble des techniques qui permettent de combiner de façon optimale (dans un sens à définir) l'information mathématique contenue dans les processus décrits par le modèle, et l'information physique provenant des observations, en vue de reconstituer l'état de l'écoulement* ». Dans notre cas, il s'agit de combiner les données recueillies sur site avec le modèle de houle choisi (Chapitre 1), de manière à obtenir la meilleure approximation du champ de vagues mesuré et prédire ensuite son évolution avec ce même modèle de houle.

L'assimilation de données représente la phase clé du processus de prévision. La précision du champ de vagues prédit est en effet fortement dépendante des conditions initiales reconstruites que l'on introduit dans le modèle de propagation. Cette étape se doit donc d'être très précise (plus le champ reconstruit sera proche du champ mesuré, plus la prévision sera réaliste), mais également efficace et rapide dans la mesure où tout gain sur le temps de calcul pris par l'assimilation de données est gagné sur la période de prévision disponible (cf Chapitre 2). Par ailleurs, il est évident que la prévision doit parvenir assez en avance à l'utilisateur pour que les opérations en mer, de positionnement d'un navire par exemple, puissent être effectuées avant que le champ de vagues ne parvienne jusqu'à la structure concernée.

Ce chapitre a pour objectif de présenter la méthode d'assimilation de donnée développée au cours de ce travail de thèse de manière à obtenir en un temps optimal l'estimation du champ de vagues la plus proche possible des données mesurées à partir d'un modèle de houle prédéterminé. Après avoir rappelé les différentes techniques d'assimilation de données existant à l'heure actuelle, nous détaillerons la méthode que nous avons sélectionnée, ainsi que les diverses procédures d'optimisation envisagées afin de minimiser l'écart entre la solution reconstruite par le modèle et la mesure, en fonction du modèle de propagation de la houle. Comme nous le verrons, les méthodes diffèrent en fonction du modèle de propagation de houle utilisé.

## 3.1 Principe des méthodes d'assimilation de données

Les méthodes d'assimilation de données peuvent être divisées en deux grandes classes, les méthodes séquentielles et les méthodes non-séquentielles, communément appelées méthodes variationnelles.

Les méthodes séquentielles, sont des méthodes de filtrage, basées sur l'estimation statistique optimale. Dans ces méthodes, les données sont assimilées « au fur et à mesure » : il s'agit de corriger la trajectoire du modèle chaque fois qu'une observation est disponible. L'état corrigé sert ensuite de condition initiale ou de condition aux limites au modèle pour effectuer une prévision jusqu'au pas de temps suivant où l'on dispose de nouvelles données.

Le principal inconvénient de ces méthodes est que la correction n'agit que localement sur l'état analysé : toute observation réalisée à un instant donné  $t_{obs}$  n'a d'influence que sur les instants ultérieurs à  $t_{obs}$  et n'est pas utilisée pour la solution aux instants précédant  $t_{obs}$ . Par ailleurs, les méthodes séquentielles ne respectent pas la dynamique du modèle qui est perturbé et requiert en général un certain laps de temps pour retrouver sa dynamique propre.

Les méthodes non-séquentielles sont des méthodes de lissage qui reposent sur la théorie du contrôle optimal. Contrairement aux méthodes séquentielles, toutes les données disponibles sur la période d'observation sont utilisées pour faire avancer le processus. L'objectif est de déterminer un état initial (ie au début de la fenêtre temporelle de mesure) dont la trajectoire donnée par le modèle sera la plus proche possible des observations. La dynamique du modèle est donc ici bien respectée. Afin de quantifier les écarts par rapport aux données, on définit une fonctionnelle, ou fonction coût, qui est minimisée à l'aide d'un algorithme d'optimisation.

Des abus de langage en météorologie et en océanographie ont conduit à un syncrétisme des méthodes non-séquentielles et des méthodes variationnelles dont la spécificité est de minimiser une fonctionnelle quadratique. Ce sont plus particulièrement ces méthodes qui feront l'objet de notre attention dans les paragraphes suivant.

Une autre distinction peut être faite entre les différentes méthodes d'assimilation suivant qu'elles sont intermittentes ou continues en temps. Les méthodes intermittentes utilisent les observations sur de courtes périodes, ce qui est très avantageux d'un point de vue pratique. Les méthodes continues quant à elles considèrent de longues périodes d'observation et la correction de l'état analysé est beaucoup plus lisse en temps, ce qui est plus réaliste du point de vue physique.

La Figure 3.1 résume les différentes situations que nous venons d'évoquer.

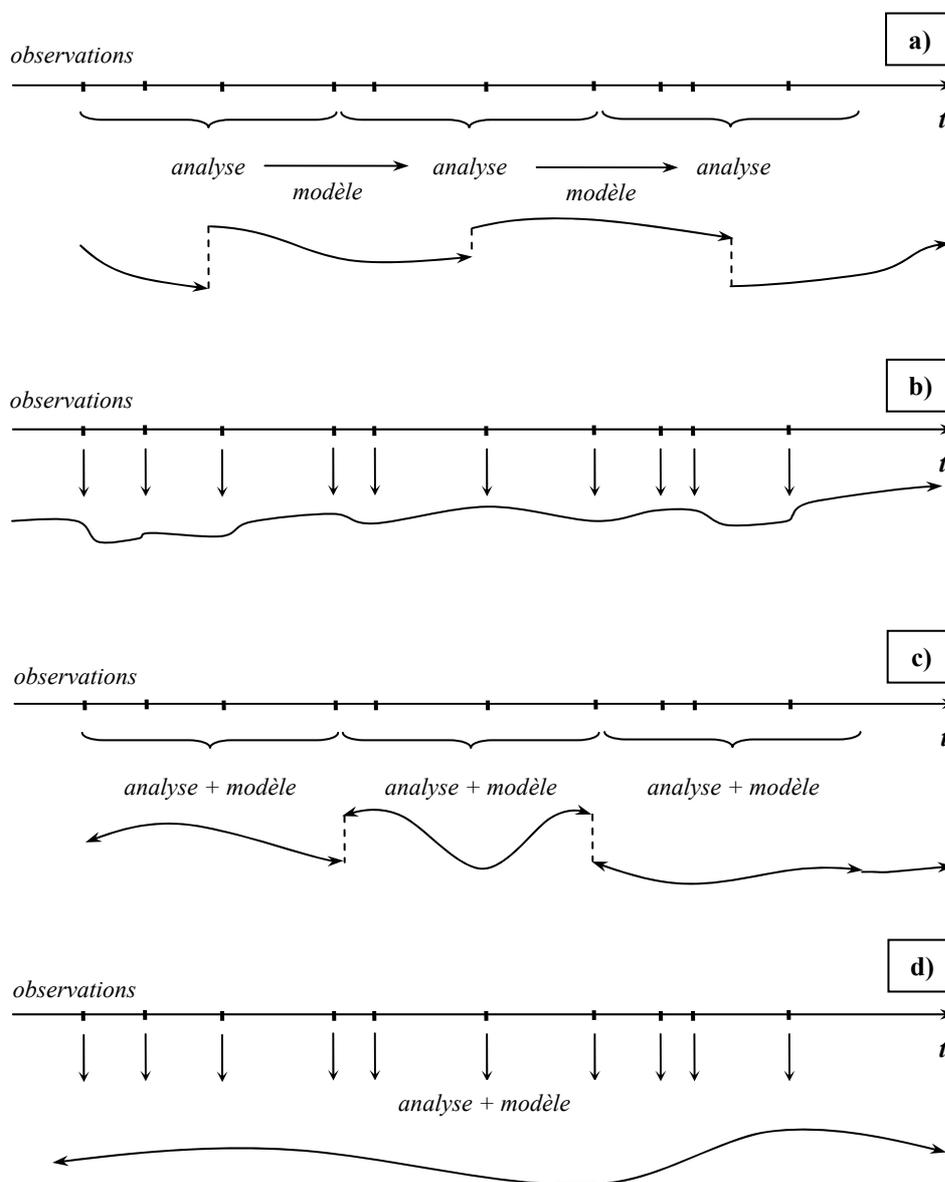


Figure 3.1 : Principe général des différentes méthodes d'assimilation de données : a) Méthode séquentielle intermittente, b) Méthode séquentielle continue, c) Méthode non-séquentielle intermittente, d) Méthode non-séquentielle continue.

### 3.1.1 Formalisme de l'assimilation de données

L'assimilation de données est une technique mathématique d'optimisation permettant de combiner au mieux des informations issues de l'observation et de la simulation numérique d'un système physique afin d'en améliorer la description. Usuellement, le modèle fournit un état simulé ou « état d'ébauche » de l'état vrai (qui est inconnu) du système. L'assimilation de données peut être employée afin de reconstruire un état dit « état analysé » plus proche de l'état vrai du système que celui décrit par le modèle ou les observations, ou pour corriger des paramètres modèle de manière à produire un état analysé plus réaliste. Les méthodes d'assimilation de données utilisent les informations sur le système en prenant en compte leurs erreurs, représentées respectivement par des covariances d'erreur d'ébauche et d'observation.

#### 3.1.1.1 Terminologie

##### Vecteur d'état et variable de contrôle

La première étape dans la formulation mathématique du problème d'analyse est la définition de l'espace de travail. Les données représentatives de l'état du modèle numérique sont regroupées dans un vecteur appelé « vecteur d'état » que l'on note  $\mathbf{y}$ . Le lien entre les composantes du vecteur  $\mathbf{y}$  et l'état réel du système physique considéré dépend du choix de la discrétisation du système (le plus souvent réalisée par différences finies, éléments finis ou par une méthode spectrale), ce qui est mathématiquement équivalent au choix d'une base.

Il faut bien distinguer l'état vrai du système des observations et de sa représentation par le vecteur d'état. On appelle « état réel » ou « true state » en anglais la meilleure estimation de la réalité qu'il est possible d'obtenir à l'instant d'analyse que l'on représente par le vecteur d'état  $\mathbf{y}_t$ .

Une autre valeur importante du vecteur état est l'estimation initiale de l'état réel avant analyse appelée « ébauche » ou « background » en anglais et notée  $\mathbf{y}_b$ . La plupart des modèles d'assimilation disposent d'une ébauche qui peut être issue d'un processus d'assimilation antérieur ou d'un modèle de prévision. L'information supplémentaire apportée par l'ébauche est susceptible d'améliorer significativement l'analyse dans la mesure où l'approximation de l'état du système à partir d'un petit nombre de variables est un problème souvent mal posé.

Finalement, « l'état analysé » que l'on recherche est noté  $\mathbf{y}_a$  et le problème d'analyse peut être formulé de la manière suivante : à partir d'une première ébauche du système  $\mathbf{y}_b$ , trouver l'état  $\mathbf{y}_a$  le plus proche possible de l'état réel  $\mathbf{y}_t$ .

Notons que la procédure d'analyse ne s'effectue pas toujours sur la totalité de l'espace des variables d'état, pour des raisons évidentes de temps de calcul, mais également parce que la prise en compte de certaines variables d'état est très complexe. L'analyse se fait alors dans un sous-espace appelé « espace des variables de contrôle », espace de correction de l'ébauche et le problème est reformulé de telle manière que l'on ne recherche pas  $\mathbf{y}_a$  directement mais la correction  $\delta\mathbf{y} = \mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b$  ou « incrément d'analyse » tel que l'état analysé  $\mathbf{y}_a$  soit le plus proche possible de l'état réel  $\mathbf{y}_t$ .

##### Observations

La procédure d'analyse nécessite de pouvoir comparer le vecteur d'état du système aux observations dont nous disposons et qui sont regroupées dans un « vecteur des observations » noté  $\check{\mathbf{y}}$ .

En pratique, les observations sont beaucoup moins nombreuses que les variables du modèle de telle sorte que le vecteur  $\mathbf{y}$  ne peut pas être vu comme une valeur particulière de  $\mathbf{y}$ . La comparaison entre observations et variables modèle se fait donc par le biais d'une fonction, définie de l'espace des variables du modèle à l'espace des observations, appelée « opérateur d'observation » et notée  $C$ . Cet opérateur, éventuellement non-linéaire, génère la valeur  $C(\mathbf{y})$  qui serait exactement égale à  $\tilde{\mathbf{y}}$  si les observations et l'état du modèle étaient parfaites.

L'élément essentiel de l'assimilation de données est la comparaison entre les observations et le vecteur d'état. L'étude de l'écart entre les observations  $\tilde{\mathbf{y}}$  et leur équivalent modèle  $C(\mathbf{y})$  aux points d'observation permet en effet de juger de la qualité de l'assimilation de données. Le vecteur  $\tilde{\mathbf{y}} - C(\mathbf{y})$  est appliqué « innovation » lorsque le vecteur d'état est l'ébauche  $\mathbf{y}_b$  et « résidu d'analyse » lorsque qu'il s'agit de l'état analysé  $\mathbf{y}_a$ .

### 3.1.1.2 Modélisation des erreurs

La qualité de l'assimilation de données dépend de la représentation des erreurs commises sur l'ébauche, les observations, et finalement l'état analysé par rapport à l'état réel. Ces erreurs vectorielles sont notées  $\boldsymbol{\varepsilon}^b$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^o$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^a$  respectivement et sont définies par les relations (3.1). L'erreur d'ébauche est la différence entre la première estimation de l'état du modèle et l'état réel ; elle n'inclut pas l'erreur de discrétisation. L'erreur d'observation est définie comme la différence entre les observations et les équivalents modèle de l'état réel. Elle contient l'erreur due aux imprécisions de l'appareil de mesure et l'erreur liée à l'opérateur d'observation  $C$ . L'erreur d'analyse quant à elle représente l'écart entre l'état analysé et l'état réel ; c'est cette erreur qu'il s'agit de minimiser.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{y}_b - \mathbf{y}_t \\ \boldsymbol{\varepsilon}_o = \tilde{\mathbf{y}} - C(\mathbf{y}_o) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a = \mathbf{y}_a - \mathbf{y}_t \end{cases} \quad (3.1)$$

Généralement mal connues, les erreurs doivent être modélisées. La précision de la modélisation est cruciale pour l'efficacité du processus d'assimilation ; on peut alors utiliser des éléments statistiques tels que les moyennes  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_o$  et  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_a$  de ces erreurs, et leurs matrices de covariance notées  $\overline{\mathbf{B}}$ ,  $\overline{\mathbf{R}}$  et  $\overline{\mathbf{A}}$  (dans le cas d'une seule variable, les matrices de covariance sont équivalentes aux variances).

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{R}} = \overline{(\boldsymbol{\varepsilon}_o - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_o)(\boldsymbol{\varepsilon}_o - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_o)^T} \\ \overline{\mathbf{B}} = \overline{(\boldsymbol{\varepsilon}_b - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b)(\boldsymbol{\varepsilon}_b - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b)^T} \\ \overline{\mathbf{A}} = \overline{(\boldsymbol{\varepsilon}_a - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_a)(\boldsymbol{\varepsilon}_a - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_a)^T} \end{cases} \quad (3.2)$$

La trace de la matrice d'erreur d'analyse définit une estimation de l'erreur de l'état analysé qui est utilisée comme objet de minimisation par le processus d'assimilation de données.

$$Tr(\overline{\mathbf{A}}) = \overline{\|\boldsymbol{\varepsilon}_a - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\|^2} \quad (3.3)$$

Remarque : Une autre erreur appelée « erreur modèle », et liée au fait que le modèle est une

approximation de la réalité physique, est parfois prise en compte :

$$\eta^i = \mathbf{y}_t^{i+1} - M_{od}(\mathbf{y}_t^i) \quad (3.4)$$

$M_{od}$  représente le modèle et  $\mathbf{y}_t^i$  l'état réel discrétisé à un instant donné. L'erreur modèle peut également être modélisée par une matrice de covariance. Cependant, dans notre cas nous considérons que le modèle est parfait et nous négligeons cette erreur.

### 3.1.2 Les méthodes séquentielles

#### Principe

L'approche séquentielle repose sur la théorie de l'estimation optimale de De mey & Ménard (1989, [46]). La technique la plus répandue est le Filtre de Kalman (1960, [87]), également détaillé dans Gelb (1974, [63]), dont les autres méthodes ne sont finalement que des dérivées.

En pratique, la méthode consiste à ajuster la trajectoire des variables du modèle à chaque observation disponible de manière à minimiser la variance de l'erreur d'analyse (cf Figure 3.2). L'ajustement se fait en deux étapes, l'analyse et la prévision :

- à l'instant  $t$  : on dispose d'un ensemble d'observations prises à ou jusqu'à l'instant  $t$  et d'une ébauche. On calcule l'innovation  $\hat{\mathbf{y}}^i - C(\mathbf{y}_b^i)$  qui permet, via une matrice de gain  $\bar{\mathbf{K}}^i$  dépendant des covariances d'erreur définies au 3.1.1.1 et obtenue de telle sorte que l'erreur d'analyse soit minimale, de déterminer l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{y}_a$  et par suite l'état d'analyse  $\mathbf{y}_a^i = \mathbf{y}_b^i + \delta\mathbf{y}_a^i$  à  $t$ . Le modèle est alors intégré de cet état d'analyse jusqu'à l'instant suivant  $t+1$ .
- à l'instant  $t+1$  : l'état prédit par le modèle et les observations à  $t$  devient la nouvelle ébauche que l'on corrige en minimisant l'erreur d'analyse et le cycle recommence.

Le processus est répété jusqu'à ce que toutes les observations aient été utilisées.

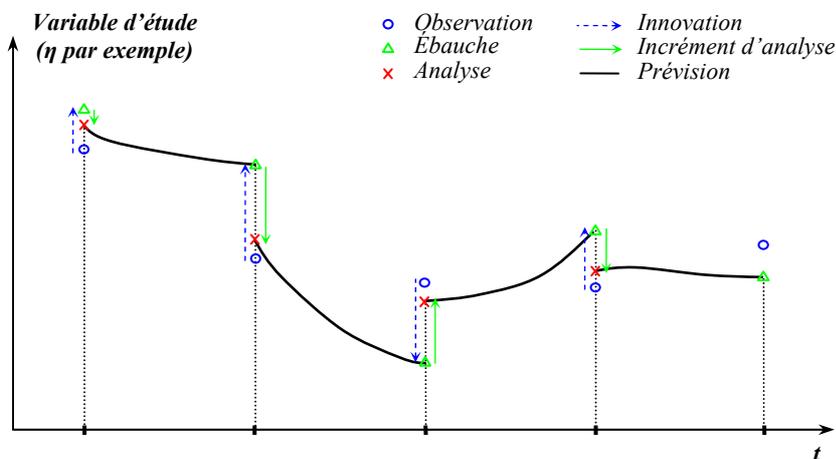


Figure 3.2 : Schéma de principe de l'assimilation de données séquentielle.

Cette méthode présente l'avantage de fournir directement une estimation de la matrice de covariance de l'erreur d'analyse en tenant compte de sa propagation liée à la dynamique du modèle. Mais elle n'est optimale que dans le cas de modèles linéaires et requiert une connaissance de l'incertitude sur les mesures et sur l'état prédit par le modèle sous la forme de matrices de covariance d'erreur qui sont difficiles à exprimer et jouent un rôle fondamental dans l'analyse. Par ailleurs, la méthode du Filtre de Kalman est très coûteuse en temps de calcul et en mémoire de stockage : pour un problème de  $N_{\text{var}}$  variables de contrôle, la méthode nécessite  $2N_{\text{var}}$  intégrations du modèle et les matrices de covariance sont de taille  $N_{\text{var}} \times N_{\text{var}}$ . Cela pose de gros problèmes pour les applications en météorologie ou en océanographie où le nombre de variables va de  $10^6$  à  $10^8$ .

Toutes ces difficultés ont conduit au développement de nouvelles approches qui sont soit des simplifications du Filtre de Kalman telle que l'Interpolation Optimale, ou des extensions de cette méthode comme le Filtre de Kalman Étendu (Ghil & Manalotte-Rizzoli, 1991, [65]). Cette dernière étend le Filtre de Kalman aux modèles non-linéaires en utilisant une linéarisation à chaque pas de temps et n'est alors pas forcément optimale. On peut également citer le Filtre de Kalman d'Ensemble (Evensen, 1994, [51]) qui utilise une méthode de Monte Carlo pour évaluer les matrices de covariance d'erreur de prévision, ou encore le Nudging (Hoke & Anthes, 1976, [76]) qui fait des appels Newtoniens aux observations. Enfin des méthodes de réduction d'ordre ont vu le jour afin de diminuer le coût du filtrage, en terme de temps CPU et de mémoire de stockage, en projetant les matrices de covariance d'erreur sur des espaces de dimension réduite. On citera par exemple le filtre SEEK (Singular Evolutive Extended Kalman) proposé par Pham *et al* (1998, [120]).

## Applications

Une synthèse des différentes méthodes actuellement utilisées ainsi que de leurs applications pratiques peut être trouvée dans l'ouvrage de Courtier *et al* (1987, [38]).

C'est en météorologie que l'on trouve les premières applications des méthodes d'assimilation séquentielles. Elles ont été introduites par Jones en 1960 [85]. Le Filtre de Kalman est ensuite appliqué par Ghil *et al* (1981, [64]) à des modèles linéaires de type Shallow-Water, ce qui constitue la première pierre de la démocratisation de la méthode en météorologie. De nombreuses études ont ensuite suivi.

On a également cherché à développer de telles méthodes dans les différents domaines de l'océanographie pour répondre aux besoins de prévisions des métiers de la navigation, de la défense ou même de la pêche. Mais les fortes non-linéarités rencontrées en océanographie font que l'on ne peut pas garantir l'optimalité de la méthode. De plus, comme nous l'avons indiqué précédemment, la taille du vecteur de contrôle ainsi que la difficulté à spécifier les statistiques d'erreurs ont été un frein dans l'utilisation des méthodes séquentielles. Les améliorations mentionnées ci-dessus ont facilité les applications aux problèmes complexes. De nombreuses études ont ainsi été réalisées ces dernières années et certaines d'entre elles ont été testées sur des cas réels (Cañizares, 1999 [23] et 2001, [24], Verlaan, 1998, [149], Pham, 2000, [119],...)

Les méthodes séquentielles sont enfin utilisées dans de nouveaux domaines comme l'hydrologie, principalement pour l'assimilation de données d'humidité de surface du sol relevées par télédétection (François *et al*, 2003, [58], Boegh *et al*, 2004, [17]), ou même l'agronomie où les mécanismes ne sont pas régis par des équations aux dérivées partielles (on pourra se référer à la thèse de Lauvernet (2005, [95]) pour une bibliographie complète de ces applications).

### 3.1.3 Les méthodes variationnelles

#### Principe

Les méthodes non-séquentielles traitent le problème d'assimilation comme un problème d'optimisation, en considérant que le modèle est exact. Elles consistent à minimiser une fonctionnelle mesurant l'écart entre les données observées et les solutions données par le modèle. Pour la majorité des méthodes, cette fonctionnelle est quadratique; ces méthodes sont appelées méthodes variationnelles et font l'objet de l'étude qui suit.

Les méthodes variationnelles, introduites par Sasaki en 1958 en météorologie [133] avec le 3D-Var, consistent à optimiser certains paramètres du modèle ou ses conditions initiales, afin d'obtenir la meilleure cohérence entre les observations et leur équivalent modèle sur toute la période d'observation appelée période d'assimilation. Les états ajustés dépendent de toutes les données et le modèle est vu comme une contrainte.

Le schéma de principe des méthodes variationnelles est donné en Figure 3.3. Le vecteur innovation  $\mathbf{y}^i - C^i(M_{od}^i(\mathbf{y}_b))$ , où  $M_{od}$  représente le modèle de propagation, est calculé à chaque instant d'observation disponible et permet de déterminer l'incrément d'analyse à l'instant initial. Comme pour les méthodes séquentielles on obtient une nouvelle ébauche (pour la fenêtre temporelle suivante) en intégrant le modèle à partir de l'état initial analysé.

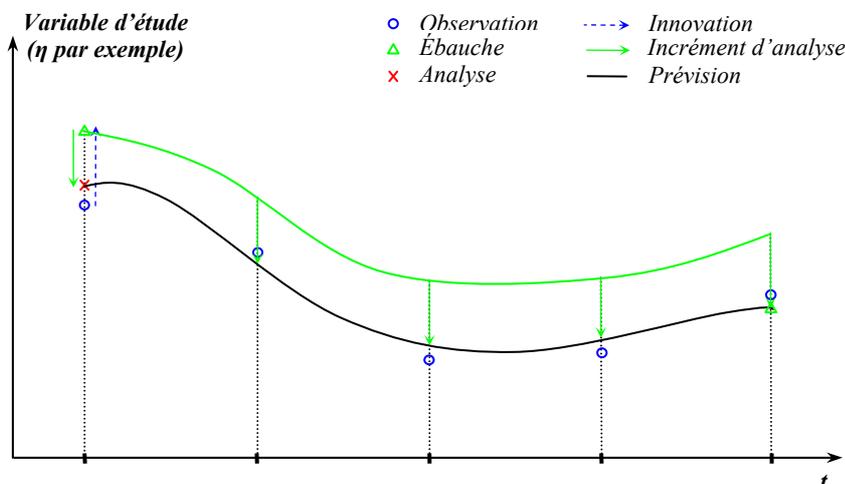


Figure 3.3 : Schéma de principe de l'assimilation non-séquentielle.

Les méthodes variationnelles ne supposent aucune linéarité du modèle et sont donc très bien adaptées aux problèmes complexes rencontrés en océanographie, et plus particulièrement à la prévision non-linéaire déterministe de houle qui est l'objet de notre étude. Les principales méthodes sont le 3D-Var en trois dimensions et son équivalent en quatre dimensions (espace et temps), le 4D-Var. Le 3D-Var a pour but d'obtenir à un instant  $t$  donné l'état optimal qui minimise la fonction coût par rapport à toutes les observations dont on dispose sur la période d'assimilation et à laquelle appartient  $t$ . Il s'agit du cas non-séquentiel intermittent représenté à la Figure 3.1.c). Le 4D-Var est une simple extension de la méthode 3D-Var à la dimension temporelle dans les observations. Son principe est celui des méthodes non-séquentielles continues décrites en Figure 3.1.b). L'avantage est

que l'on prend en compte l'évolution dynamique du modèle comme donnée supplémentaire pour l'assimilation. C'est cette méthode que nous avons choisie d'appliquer.

## Applications

Les organismes météorologiques sont nombreux à utiliser les méthodes variationnelles dans leurs modèles de prévision. L'organisme européen ECMWF (European Center for Medium-Range Weather Forecasts) utilise ainsi dès 1996 le 3D-Var, rapidement supplanté par le 4D-Var en 1997 [156]. En France, le 4D-Var a remplacé en 2000 le 3D-Var utilisé dans les algorithmes de Météo France depuis 1997 (Gauthier & Thépaut, 2001, [62]). On peut notamment se reporter à l'article de Gauthier (2003, [61]) qui donne les techniques d'implémentation du 4D-Var en météorologie.

Les méthodes variationnelles sont également très bien adaptées aux problèmes rencontrés en océanographie, comme nous l'avons montré précédemment. Leurs utilisations sont donc très nombreuses dans les modèles de prévision et nous ne pouvons les citer toutes. Ces méthodes sont par exemple employées dans les modèles de prévision océanique. On pourra se référer à Benett & Thorebirt (1992, [9], Köhl & Willebrand (2003, [90]) ou encore à Ngodock (2003, [113]) qui applique la théorie de l'adjoint au modèle de circulation pour le calcul du gradient de la fonctionnelle à minimiser. On citera également les travaux de thèse de Nodet (2005, [115]) traitant de l'assimilation de données lagrangiennes issues de bouées dérivantes, utilisant également la technique de l'adjoint. On notera que cette procédure de calcul de gradient a fait l'objet de nombreuses études qui montrent son efficacité (Courtier *et al*, 1994, [38]).

L'hydrologie est un autre domaine dans lequel les méthodes d'assimilation variationnelles sont très usitées. Le rapport de thèse récent de Honorat (2007, [80]), relate l'application de telles méthodes à l'assimilation de données lagrangiennes, avec utilisation de l'adjoint là encore, dans un modèle d'hydraulique fluviale.

Enfin des secteurs tels que l'agronomie se lancent dans les méthodes d'assimilation non-séquentielles : la thèse de Lauvernet (2005, [95]) est un exemple des travaux de recherche récents dans le domaine de l'assimilation de données de télédétection dans les modèles de fonctionnement de la végétation. La méthode de calcul de gradient par méthode adjointe est une nouvelle fois employée.

### 3.1.4 Vers de nouveaux modèles hybrides

Des modèles hybrides couplant méthodes séquentielles et méthodes variationnelles d'assimilation de données ont également vu le jour depuis quelques années. Il s'agit de tirer parti des avantages des deux méthodes en combinant les covariances d'erreur d'analyse et de prévision données par les filtres, au lissage du 4D-Var réduit qui a pour avantage d'être totalement insensible aux incertitudes sur les mesures de départ. On citera notamment Versé *et al* (2000, [151]) ou Robert (2004, [130]) qui combinent les méthodes SEEK et 4D-Var, ou Zhang *et al* (2007, [164]), qui associent Filtre de Kalman d'Ensemble et 4D-Var.

Nous interrompons ici notre présentation des différentes méthodes d'assimilation de données. Pour une analyse plus détaillée, nous invitons le lecteur à consulter les articles de synthèse suivant : Bouttier & Courtier (1999, [19]), Benett (1992, [9]) et Ghil & Manalotte-Rizzoli (1991, [65]).

### 3.1.5 Conclusion : choix de la méthode variationnelle

Si les méthodes non-séquentielles et séquentielles vont tendre vers un même résultat à la fin de la période d'assimilation pour un modèle linéaire (pourvu que les erreurs modèle soient connues), il n'en va pas de même pour les problèmes non-linéaires et de grande dimension qui nous intéressent particulièrement. L'assimilation variationnelle, qui s'applique très bien aux modèles non-linéaires et aux grands nombres de paramètres de contrôle, se révèle être l'outil le plus adapté au problème de prévision de houle non-linéaire.

Cependant, ces méthodes soulèvent un problème majeur. Il s'agit en effet de minimiser une fonctionnelle par rapport aux variables de contrôle du modèle, ce qui requiert l'utilisation d'une méthode d'optimisation. Deux types de techniques sont envisageables : les méthodes dites indirectes qui nécessitent le calcul du gradient de la fonctionnelle par rapport aux paramètres de contrôle, très souvent utilisées en optimisation, et les méthodes directes dont la progression ne repose pas sur un calcul de gradient. La dimension du vecteur de contrôle pour notre problème étant très contraignante, la solution est soit d'utiliser une méthode sans gradient, soit de développer une technique de calcul du gradient de la fonctionnelle à un coût raisonnable. Les équations adjointes, qui permettent d'obtenir une évaluation du gradient à moindre coût, sont alors une alternative très intéressante, bien qu'extrêmement complexe à mettre en œuvre (Le Dimet, 1980, [96]).

En résumé, le problème d'assimilation des données recueillies en mer au modèle de houle choisi (Chapitre 1) se formule de la manière suivante : supposant parfait le modèle de houle et disposant d'une fenêtre temporelle  $[0, T]$  d'observations en un point du domaine d'étude (dans notre cas, il s'agira de l'élévation de surface libre  $\tilde{\eta}^s(t)$ ,  $t = 0..T$ , mesurée par une ou plusieurs sondes placées en des points fixes  $\mathbf{x}_s$  du domaine), trouver l'état initial qui, inséré dans le modèle de houle, donnera la trajectoire la plus proche des mesures expérimentales. Le champ reconstruit à partir de cet état analysé pourra alors servir de condition initiale à ce même modèle de houle pour être propagé et l'on obtiendra une prévision déterministe du champ de vagues dans la zone de prévision théorique prédéterminée.

## 3.2 Formulation du problème d'assimilation de données variationnelle

Cette partie a pour but de poser les bases la méthode d'assimilation variationnelle que nous avons développée. Nous commencerons par définir la fonction coût et le problème de minimisation dans un cadre général puis nous expliciterons les divers paramètres de notre méthode, les variables de contrôle, l'opérateur d'observation et la fonctionnelle à minimiser. Nous terminerons par une sythèse des principaux points clés du processus adopté.

### 3.2.1 Formulation générale du problème de minimisation

#### 3.2.1.1 Définition de la fonction coût

L'assimilation variationnelle de données consiste à identifier les variables de contrôle qui minimisent une fonctionnelle mesurant l'écart entre la variable d'état  $\mathbf{y}$ , qui décrit l'état du système à

un instant donné, et les observations du système physique au même instant  $\tilde{\mathbf{y}}$ . On considère que les observations appartiennent à l'espace  $L^2(0, T, \mathcal{O})$  où  $\mathcal{O}$  est un espace de Hilbert que l'on appelle espace des observations et où  $[0, T]$  est la période d'assimilation.  $\mathcal{O}$  n'est pas forcément identique à l'espace des variables d'état noté  $\mathcal{V}$ . Rappelons que  $C$  est l'opérateur, éventuellement non-linéaire, de projection de l'espace des variables d'état à l'espace des observations,  $C : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{O}$ . On note  $\mathbf{p}$  le vecteur des paramètres de contrôle ou vecteur de contrôle défini dans  $\mathcal{P}$ , de sorte que l'on a  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{p}, t)$ .

L'objectif de la méthode consiste à trouver les variables de contrôle  $\mathbf{p}$  minimisant la fonctionnelle  $J(\mathbf{y})$  quadratique en  $\mathbf{y}$  définie par (3.5) prenant en compte l'écart aux observations  $J_o(\mathbf{y})$  et éventuellement à l'ébauche  $J_b(\mathbf{y})$ , et pouvant également contenir un terme  $J_c(\mathbf{y})$  représentant une contrainte filtrée.

$$J(\mathbf{y}) = J_o(\mathbf{y}) + J_b(\mathbf{y}) + J_c(\mathbf{y}) \quad (3.5)$$

Dans la plupart des cas, on se limite à la prise en compte des erreurs d'observation et d'ébauche et  $J$  prend la forme suivante :

$$J(\mathbf{y}) = J(\mathbf{p}, \mathbf{y}(\mathbf{p})) = \frac{1}{2} \int_0^T \|C(\mathbf{y}(\mathbf{p}, t)) - \tilde{\mathbf{y}}(t)\|_{\mathcal{O}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \mathbf{y}(\mathbf{p}_b)\|_{\mathcal{F}}^2 \quad (3.6)$$

où  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  sont les normes respectives des espaces de définition de  $\tilde{\mathbf{y}}$  et de  $\mathbf{p}$  qui peuvent par exemple considérer les matrices de covariance d'erreur d'observation et d'ébauche  $\overline{\mathbf{R}}$  et  $\overline{\mathbf{B}}$  définies au paragraphe 3.1.1.1. Pour plus de simplicité, on notera  $J(\mathbf{p}, \mathbf{y}(\mathbf{p})) = j(\mathbf{p})$ .

### 3.2.1.2 Minimisation et conditions d'optimalité

Il s'agit maintenant de trouver la valeur du vecteur de contrôle optimal  $\mathbf{p}$  qui minimise la fonction coût  $j(\mathbf{p})$ . On cherche à résoudre le problème suivant : trouver  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$  tel que pour tout  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ ,  $j(\mathbf{p}^*) < j(\mathbf{p})$ , ce qui se note également sous la forme ci-dessous,

$$j(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} j(\mathbf{p}) \quad (3.7)$$

Les conditions d'optimalité pour résoudre (3.7) sont du premier et du second ordre, nécessaires (CN) ou suffisantes (CS) :

- CN<sub>1</sub> : Si  $j$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et dérivable en  $\mathbf{p}^*$  a un minimum local en  $\mathbf{p}^*$ , alors  $\nabla j(\mathbf{p}^*) = 0$ .
- CS<sub>1</sub> : Si  $j$  est convexe, alors la condition  $\nabla j(\mathbf{p}^*) = 0$  est suffisante pour que  $\mathbf{p}^*$  soit un minimum global de  $j$  sur  $\mathbb{R}^n$ .
- CN<sub>2</sub> : Soit une fonction  $j$   $C^1$  dans un voisinage de  $\mathbf{p}^*$  et deux fois dérivable en  $\mathbf{p}^*$ , si  $\mathbf{p}^*$  est un minimum local de  $j$  sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\nabla j(\mathbf{p}^*) = 0$  et  $\nabla^2 j(\mathbf{p}^*)$  est semi-définie positive.
- CS<sub>2</sub> : Si la fonction  $j$  est  $C^1$  dans un voisinage de  $\mathbf{p}^*$  et deux fois dérivable en  $\mathbf{p}^*$  et si  $\nabla j(\mathbf{p}^*) = 0$  et  $\nabla^2 j(\mathbf{p}^*)$  est définie positive, alors  $\mathbf{p}^*$  est un minimum local de  $j$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

$\nabla^2 j(\mathbf{p})$  représente la matrice Hésienne ou Hésien de la fonction  $j$  que l'on notera dans la suite  $\overline{\mathbf{H}}(j)$

et qui est définie de la manière suivante à condition que toutes les dérivées partielles secondes de  $j$  existent :

$$\bar{\mathbf{H}}_{ij}(j) = \frac{\partial^2 j}{\partial p_i \partial p_j} \quad (3.8)$$

### 3.2.2 Application à notre cas d'étude

Dans notre cas, les observations sont la ou les élévations de surface libre  $\tilde{\eta}^s(t)$  mesurées par une ou plusieurs sondes localisées aux points  $\mathbf{x}_s(x_s, y_s)$  durant une période  $[0, T]$ . Nous supposons en effet que les différentes sondes mesurent le champ de vagues pendant une même durée.

Notre problème consiste à déterminer la meilleure estimation des paramètres de contrôle tels que l'élévation  $\eta(\mathbf{x}_s, t \in [0, T])$  reconstruite en combinant modèle de houle et observations soit la plus proche possible des signaux mesurés. Les paramètres de contrôle trouvés permettront alors de calculer un champ de vagues initial pour modèle de prévision.

Les paragraphes suivants définissent les paramètres de contrôle, l'opérateur d'observation et la fonction coût utilisés par notre procédure d'assimilation de données.

#### 3.2.2.1 Vecteur contrôle

L'assimilation des données issues d'observations en une ou plusieurs sondes repose sur la description de la ou des élévations de surface libre mesurées en une superposition d'ondes libres. Ces paramètres sont en effet à la base de tout modèle de houle comme nous l'avons vu au Chapitre 1 : il est possible de reconstruire le champ de vagues au premier ou au second ordre de perturbation à partir des formules analytiques (1.10) et (1.12) rappelées au paragraphe 1.2, ou à un ordre supérieur en utilisant le modèle numérique HOS initialisé par un champ second ordre. Le vecteur de contrôle  $\mathbf{p}$  se compose donc dans cette étude des paramètres des ondes libres décrivant l'état de mer.

Dans le cas d'une houle monodirectionnelle composée d'une superposition de  $N$  ondes, la  $n^{\text{ième}}$  composante  $\eta_n(x, t)$  est caractérisée par son amplitude complexe  $\underline{a}_n = (|\underline{a}_n|, \varphi_n)$  et sa fréquence angulaire  $\omega_n$ , ce qui donne le vecteur  $\mathbf{p} = \{|\underline{a}_n|, \varphi_n, \omega_n, n=1..N\}$ . En houle directionnelle, si l'on prend en compte  $N_\theta$  directions de propagation et  $N$  ondes évoluant suivant chacune de ces directions, la  $n^{\text{ième}}$  composante directionnelle se propageant suivant la direction  $\theta_m$  et notée  $\eta_{mn}(\mathbf{x}, t)$  est caractérisée par son amplitude complexe  $\underline{a}_{mn} = (|\underline{a}_{mn}|, \varphi_{mn})$  et sa fréquence angulaire  $\omega_n$ . Le vecteur contrôle vaut donc  $\mathbf{p} = \{|\underline{a}_{mn}|, \varphi_{mn}, \omega_n, \theta_n, n=1..N, m=1..N_\theta\}$ .

Théoriquement, tous les paramètres, amplitudes, phases, fréquences angulaires et directions de propagation en houle tridimensionnelle, peuvent être ajustés. Afin de limiter le nombre de paramètres d'optimisation, seules les amplitudes et les phases sont optimisées de manière totalement libre. Les fréquences angulaires sont fixées aux valeurs déterminées à partir des instants d'échantillonnage du signal mesuré. Dans le cas d'une houle multidirectionnelle, non étudié dans le cadre de ce travail, les directions de propagation pourront également être ajustées, mais dans une plage angulaire réduite uniquement.

### 3.2.2.2 Première estimation des paramètres de contrôle

Considérons l'assimilation des données issues d'une seule sonde. Dans le cas où la houle étudiée est bidimensionnelle, la décomposition de l'élévation de surface libre en une superposition d'ondes libres se fait à l'aide d'une simple Transformée de Fourier Inverse (IFT).

Si en revanche, le champ de vagues est multidirectionnel, un processus plus complexe doit être employé afin de déterminer la directionnalité du spectre de houle. Les classes de méthodes couramment utilisées sont la Méthode du Maximum de Vraisemblance, ou Maximum Likelihood Method en anglais (MLM), la Méthode du Maximum d'Entropie (MEM), ou la Méthode d'Estimation Bayésienne (Bayesian Directional Method, BDM). Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous sommes uniquement penchés sur l'étude de champs de houle unidirectionnels. Nous n'entrerons donc pas dans le détail des méthodes citées précédemment, mais le lecteur désireux d'avoir de plus amples informations à leur sujet peut se référer à l'article de Benoît & Goasguen (1999, [10]) ou au mémoire de thèse de Bonnefoy (2005, [18]) qui décrivent tous deux les principes généraux de ces différentes approches.

Dans tous les cas, ces méthodes ne prennent en compte qu'un nombre fini  $N$  de composantes et négligent les effets non-linéaires. Il n'est donc pas possible de reproduire le signal sonde et plus largement le champ de vagues sur tout le domaine spatio-temporel d'étude de manière précise dès la première estimation des ondes libres. Ces paramètres doivent être ajustés par une procédure d'optimisation.

### 3.2.2.3 Opérateur d'observation

La fonction  $C$  permettant le passage de l'espace des variables d'état à l'espace des observations est différente suivant l'ordre du modèle de prévision (ie l'ordre du modèle de houle considéré). Considérons que l'on souhaite obtenir une estimation du signal sonde mesuré en une sonde quelconque  $s$  localisée en  $\mathbf{x}_s(x_s, y_s)$  durant une période de  $T$  secondes.

Dans le cas d'un modèle linéaire, d'ordre deux ou deux étendu, le signal sonde modèle, représentant l'état du système, est obtenu directement à partir des variables de contrôle caractérisant les ondes libres en utilisant les formules analytiques données au Chapitre 1. Pour une houle unidirectionnelle, la fonction  $C$  a la forme (3.9) à l'ordre 1, et (3.10) à l'ordre deux ou deux étendu. Les termes de couplage  $G_{mn}^\pm$  sont donnés en Annexe A.

$$C(\mathbf{p}, t) = C^{(1)}(\mathbf{p}, t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^N |a_n| \exp(i(\omega_n t + \varphi_n)) \right) \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} C(\mathbf{p}, t) = C^{(1)}(\mathbf{p}, t) + C^{(2)}(\mathbf{p}, t) \\ C^{(2)}(\mathbf{p}, t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^N G_{mn}^\pm |a_m| |a_n| \exp(i(\omega_m \pm \omega_n)t + (\varphi_m \pm \varphi_n)) \right) \end{cases} \quad (3.10)$$

Remarquons que ces expressions ne font pas intervenir le terme  $k_r x_s$ , les amplitudes complexes étant en effet directement liées à l'élévation de surface libre en la position de la sonde et prenant déjà ce terme en compte. Il en résulte que les fonctions d'observation d'ordre deux et d'ordre deux étendu sont identiques, l'unique différence entre les deux modèles provenant de l'expression des nombres d'ondes

que l'on obtient à partir des pulsations par une relation de dispersion linéaire à l'ordre deux, et par une relation de dispersion non-linéaire d'ordre trois dans le cas d'un modèle d'ordre deux étendu.

Si le modèle choisi est le modèle HOS d'ordre  $M > 2$ , le calcul de l'élévation de surface libre modèle n'est pas direct. Dans un premier temps, on reconstruit l'élévation et le potentiel de surface libre au second ordre ou au second ordre étendu sur tout le domaine de simulation à un instant d'initialisation  $t_{ini}$  pouvant être le début de la période de mesure  $t_{ini} = 0$  ou tout autre instant compris dans l'intervalle  $[0, T]$ . Ces deux grandeurs sont ensuite propagées par le modèle HOS à l'ordre  $M$  sur l'ensemble de la période d'assimilation  $[0, T]$ . Dans le cas où  $t_{ini} > 0$ , l'élévation et le potentiel seront propagés de  $t_{ini}$  à  $T$ , puis propagés en sens inverse de  $t_{ini}$  à  $0$ . À chaque pas de temps de la simulation HOS, on relève la valeur de l'élévation au point de localisation de la sonde, ce qui nous donne le signal de sonde reconstruit avec le modèle d'ordre  $M$  sur toute la période de mesure  $[0, T]$ . La fonction  $C$  prend donc la forme :

$$C(\mathbf{p}, t) = HOS(\eta^{2nd}(\mathbf{p}, t_{ini})) \quad (3.11)$$

où  $\eta^{2nd}(\mathbf{p}, t_{ini})$  est l'élévation de surface libre obtenue à l'ordre deux ou deux étendu sur tout le domaine spatial d'étude à l'instant  $t_{ini}$  à partir des équations (1.11) et (1.12) et de la relation de dispersion adéquate.

Dans le cas d'une houle multidirectionnelle, l'écriture de la fonction  $C$  est plus complexe et nous nous limiterons à son expression à l'ordre 1 :

$$C(\mathbf{p}, t) = \text{Re} \left( \sum_{m=1}^{N_\theta} \sum_{n=1}^N |a_{mn}| \exp(i(\omega_n t + \varphi_{mn})) \right) \quad (3.12)$$

### 3.2.2.4 Fonction coût

Dans le cadre de ce travail nous considérons en première approximation que les erreurs d'ébauche sont nulles et que le modèle de propagation est parfait. La fonction coût prend donc uniquement en compte l'erreur  $J_o$  portant sur les observations. Nous l'appellerons dans toute la suite de ce rapport erreur d'assimilation et la noterons  $\varepsilon_{ass}$ . Nous noterons également  $\eta(\mathbf{x}_s, t) = C(\mathbf{p}, t)$  le signal sonde reconstruit (ou état du système) à l'instant  $t$  à l'aide du modèle de houle d'ordre  $M$  via la fonction d'observation  $C$  définie précédemment.

### Cas où les observations proviennent de la mesure en une seule sonde

Supposons dans un premier temps que nous disposons d'une unique sonde localisée en  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  donnant accès à l'élévation de surface libre en ce point  $\tilde{\eta}^0(t)$  pendant une période de mesure de  $T$  secondes. L'erreur d'assimilation  $\varepsilon_{ass}$  mesurant l'écart sur tout l'intervalle d'observation entre le signal reconstruit par le modèle d'ordre  $M$  et la mesure est définie par (3.13).

La fonction  $W(\mathbf{x}_0, t)$  est une fonction poids ayant pour but d'accroître l'importance de la qualité de la reconstruction des pics et des creux des vagues  $\langle \tilde{\eta}^0 \rangle$  est l'élévation de surface libre moyenne sur la période de mesure  $[0, T]$  au point  $\mathbf{x}_0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{ass} = \left\{ \int_0^T W(\mathbf{x}_0, t) [\eta(\mathbf{x}_0, t) - \tilde{\eta}^0(t)]^2 dt \right\}^{1/2} \\ W(\mathbf{x}_0, t) = \frac{(\tilde{\eta}^0(t) - \langle \tilde{\eta}^0 \rangle)^2}{\int_0^T (\tilde{\eta}^0(t) - \langle \tilde{\eta}^0 \rangle)^2 dt} \\ \langle \tilde{\eta}^0 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\eta}^0(t) dt \end{array} \right. \quad (3.13)$$

### Cas où les observations proviennent de mesures en plusieurs sondes

On suppose maintenant que  $N_s$  sondes localisées aux points de coordonnées  $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s)$  mesurent le champ de vagues. Bien que chaque sonde ait une période d'acquisition propre, l'erreur commise sur les signaux de sondes n'est pas évaluée en chaque sonde sur la totalité de sa période de mesure. En effet, comme nous l'avons vu au Chapitre 2 dans le cas d'une association de plusieurs capteurs, seules les données fournies par la sonde principale sont utilisées sur toute la période d'observation. Les données provenant des sondes annexes servent à améliorer la qualité du signal reconstruit à la sonde principale et ne sont considérées que dans l'intervalle de temps inclus dans la zone de prévision de cette sonde.

Si l'on note  $[t_1^s, t_2^s]$  l'intervalle de temps disponible à la sonde  $s$  et  $[0, T]$  l'intervalle d'acquisition de la sonde principale, alors  $[t_1^s, t_2^s] = [0, T]$  s'il s'agit de la sonde principale, et  $[t_1^s, t_2^s] \subset [0, T]$  si la sonde  $s$  est une sonde annexe. On remarquera que dans le cas où toutes les sondes ont une même période de mesure de  $T$  secondes,  $t_2^s = T$  quelque soit la sonde considérée. L'erreur d'assimilation est définie de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{ass} = \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \left\{ \int_{t_1^s}^{t_2^s} W(\mathbf{x}_s, t) [\eta(\mathbf{x}_s, t) - \tilde{\eta}^s(t)]^2 dt \right\}^{1/2} \\ W(\mathbf{x}_s, t) = \frac{(\tilde{\eta}^s(t) - \langle \tilde{\eta}^s \rangle)^2}{\int_{t_1^s}^{t_2^s} (\tilde{\eta}^s(t) - \langle \tilde{\eta}^s \rangle)^2 dt} \\ \langle \tilde{\eta}^s \rangle = \frac{1}{t_2^s - t_1^s} \int_{t_1^s}^{t_2^s} \tilde{\eta}^s(t) dt \end{array} \right. \quad (3.14)$$

où la fonction  $W(\mathbf{x}_s, t)$  vérifie la condition de normalisation (3.15).

$$\frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \int_{t_1^s}^{t_2^s} W(\mathbf{x}_s, t) dt = 1 \quad (3.15)$$

### 3.2.2.5 Synthèse : points clé de la méthode d'assimilation de données

La Figure 3.4 récapitule les points clés du processus d'assimilation de données variationnelle que nous avons développé, dans le cas de champs de vagues unidirectionnels qui ont fait l'objet de notre étude dans le cadre de cette thèse.

Après avoir obtenu une première estimation des variables de contrôle  $\mathbf{p}$  caractérisant les ondes libres (par IFT pour une houle unidirectionnelle), le ou les signaux de sondes sont reconstruits à l'aide du modèle de houle choisi. Ce calcul se fait à partir des paramètres de contrôle via la fonction  $C(\mathbf{p}, t)$  qui dépend de l'ordre  $M$  du modèle de prévision. Le calcul est direct dans le cas du modèle linéaire et des modèles au second ordre de perturbation, et passe par une simulation numérique lorsque l'on utilise un modèle de houle HOS d'ordre  $M > 2$ .

Une fois estimé l'état du système, on calcule l'erreur d'assimilation caractérisant dans notre cas uniquement l'écart aux observations. On considère en effet en première approximation que l'erreur d'ébauche et l'erreur modèle sont nulles. Si l'erreur est inférieure au paramètre de tolérance fixé, le processus d'assimilation stoppe, sinon l'ajustement des variables de contrôle se poursuit.

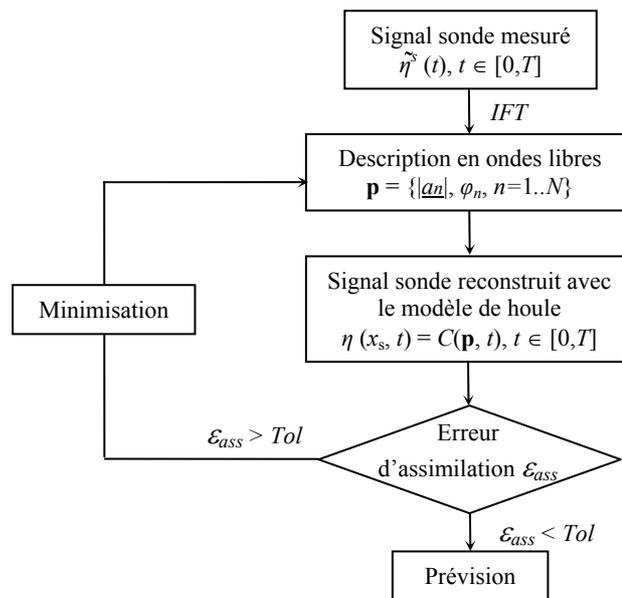


Figure 3.4 : Schéma de principe de la méthode d'assimilation de données de houle unidirectionnelle.

Remarquons que le modèle de houle choisi doit être le plus approprié au cas de houle étudié, de sorte que la méthode d'assimilation de données soit la plus performante en terme de précision et de temps de calcul. En effet, un modèle linéaire peut suffire à décrire les petits états de mer, mais dès que la cambrure devient importante, un modèle d'ordre supérieur doit être utilisé afin de prendre en compte les effets non-linéaires résultant des interactions entre les différentes composantes de la houle et de représenter au mieux la physique du champ de vagues. Par ailleurs, il est peu judicieux de commencer l'assimilation de données à partir d'un modèle d'ordre élevé si le champ de vagues est faiblement cambré et bien représenté par un modèle faiblement non-linéaire.

Afin d'éviter les surcoûts en calculs associés à un modèle complexe non-linéaire et à adapter au mieux le modèle à la houle en présence, on commence utiliser un modèle faiblement non-linéaire d'ordre un ou deux. Si la précision est suffisante, c'est-à-dire si l'erreur d'assimilation est inférieure à

la tolérance que l'on s'est fixée, le champ de vagues est reconstruit sur tout le domaine d'étude à partir des paramètres de contrôle optimisés puis est propagé à l'aide du même modèle de houle. Si l'erreur d'assimilation est trop importante, on part des données assimilées à l'ordre courant puis on poursuit l'assimilation en utilisant le modèle d'ordre juste supérieur. La gradation de l'ordre du modèle peut ainsi continuer jusqu'à ce que la précision requise soit obtenue. Dans le cadre de ce travail, nous sommes limités au cas  $M = 3$ .

Le paragraphe suivant présente les différentes méthodes que nous avons envisagées pour l'ajustement des ondes libres en fonction de l'ordre du modèle de houle choisi.

Notons que dans le cas où le modèle linéaire est utilisé, le signal sonde reconstruit est directement obtenu par un aller et retour dans l'espace de Fourier. Aucun ajustement des variables de contrôle n'est réalisé puisque l'erreur sur le signal de la sonde est sinon nulle, du moins négligeable (ce qui ne signifie en aucun cas que le champ reconstruit sur le domaine de reconstruction est parfaitement en accord avec le champ réel). L'assimilation de données à proprement parler où les variables de contrôle sont ajustées commence avec le modèle de propagation d'ordre deux.

### 3.3 Stratégie d'optimisation à l'ordre deux

Avant d'entrer dans le détail des méthodes d'optimisation classiques permettant de résoudre le problème de minimisation décrit au paragraphe précédent, nous présentons ici une méthode spécifique au modèle de houle au second ordre qui a pour but de déterminer les ondes libres en les découplant des effets non-linéaires au second ordre de perturbation. Cette méthode a été développée par Duncan & Drake en 1995 [49]. Il s'agit d'une méthode d'optimisation de point fixe où un processus itératif de type  $u_{n+1} = f(u_n)$  guide la recherche vers l'optimum.

#### 3.3.1 Principe de la méthode de Duncan & Drake

Au Chapitre 1, lors de l'introduction du modèle de houle au second ordre de perturbation, nous avons évoqué la difficulté que représente la décomposition de l'élévation de la surface libre en une élévation linéaire et une élévation second ordre (équation (1.11)). En effet, pour pouvoir découpler l'élévation linéaire des effets du second ordre, il faut au préalable avoir calculé ces effets. Or les termes de couplage sont fonction des caractéristiques des ondes libres (équation (1.12)).

Une solution pour briser ce cercle est d'utiliser une technique itérative comme celle proposée par Duncan & Drake. À chaque étape du processus, on estime l'élévation linéaire découplée des effets non-linéaires d'ordre deux calculés à l'étape précédente. On calcule alors une nouvelle approximation de l'élévation second ordre à partir des amplitudes et phases des ondes libres ainsi déterminées, en utilisant une méthode de couplage modal.

Ce processus peut être appliqué sur les amplitudes complexes. On optimise alors directement les paramètres de contrôle  $\mathbf{p}$  représentant les amplitudes linéaires en les découplant des effets d'ordre deux. En notant  $q$  l'étape courante, et en supposant qu'à tout instant  $t \in [0, T]$  on a :

$$\tilde{\eta}^s(t) = \eta_q^{(1)}(x_s, t) + \eta_q^{(2)}(x_s, t) + o(\varepsilon^3) \quad (3.16)$$

où  $\tilde{\eta}^s(t)$  est l'élévation mesurée à la sonde  $s$ , et  $\eta_q^{(1)}(x, t)$  et  $\eta_q^{(2)}(x, t)$  les estimations au premier et au

second ordre de perturbation à l'itération  $q$ , le schéma de la méthode est le suivant :

Étape 0 : On suppose pour initialiser le processus que la composante au second ordre est nulle.

$$\mathbf{p}_0 = \{ \underline{a}_n^s, n = 1..N_{\text{var}} \}$$

Étape  $q$  : 
$$\mathbf{p}_q = IFFT(\tilde{\eta}^s(t) - C^{(2)}(\mathbf{p}_{q-1}, t)) \quad (3.17)$$

$C^{(2)}(\mathbf{p}, t)$  est la composante au second ordre de la fonction d'observation définie en (3.10). Elle permet de passer des amplitudes linéaires à la composante d'ordre deux de l'élevation de surface libre en la position de la sonde  $\eta^{(2)}(x_s, t)$ . Nous attirons l'attention sur le fait que la méthode est identique pour un modèle de houle d'ordre deux ou d'ordre deux étendu. La fonction  $C^{(2)}(\mathbf{p}, t)$  a en effet la même expression dans les deux cas (cf 3.2.2.3).

Des améliorations ont été apportées par rapport à la méthode de Duncan & Drake originale. Tout d'abord, notre version de la méthode inclut l'ensemble des interactions non-linéaires d'ordre deux calculées en profondeur finie ou infinie, alors que le schéma d'origine ne prend en compte que les interactions somme entre les ondes, et ce uniquement en profondeur infinie (cf Annexe A).

D'autre part, la méthode implémentée dans le cadre de ce travail n'exclut aucune interaction triadique entre les modes contrairement à la technique de Duncan & Drake qui effectuent le calcul des interactions entre les modes d'énergie significative uniquement, supposant que les amplitudes linéaires  $\underline{a}_n^{(1)}$  sont négligeables pour  $n \geq N/2$  où  $N$  est le nombre de modes pris en compte. Seules les

interactions  $\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{N-n+1}$  sont comptabilisées, ce qui représente le triangle supérieur gauche de la matrice

des interactions représentée en la Figure 3.5. Notons que les interactions  $\sum_{n=2}^{N/2-1} \sum_{m=N-m+2}^N + \sum_{n=N/2}^N \sum_{m=N-m+2}^{N/2-1}$

(en vert sur sur la Figure 3.5) ne sont pas incluses dans le calcul, bien que leur énergie ne soit pas forcément négligeable.

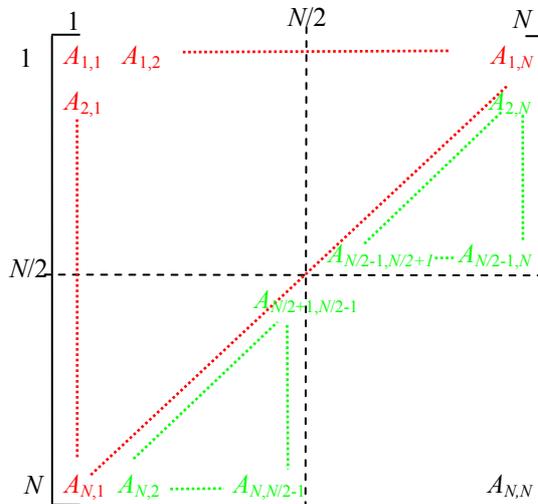


Figure 3.5 : Représentation matricielle des interactions entre ondes d'ordre deux.

### 3.3.2 Stabilité numérique

Comme constaté par Duncan & Drake, le schéma itératif présenté ci-dessus présente un problème de stabilité aux hautes fréquences ( $\omega > 2\text{rad/s}$ ). À ces fréquences, les amplitudes  $|\tilde{a}_n^s|$  du signal mesuré sont très faibles (on se rappelle la forme du spectre de JONSWAP représenté en Figure 2.1). En suivant l'équation (3.17), les amplitudes linéaires  $a_n^{(1)}$  prennent donc une valeur très proche de l'opposé des amplitudes second ordre  $-a_n^{(2)}$ , ce qui conduit à l'itération suivante à une estimation des amplitudes second ordre égale et opposée aux amplitudes linéaires. Les composantes linéaires et second ordre créées au fur et à mesure des itérations sont de même module et en opposition de phase. Elles sont complètement irréalistes et font de surcroît diverger la solution.

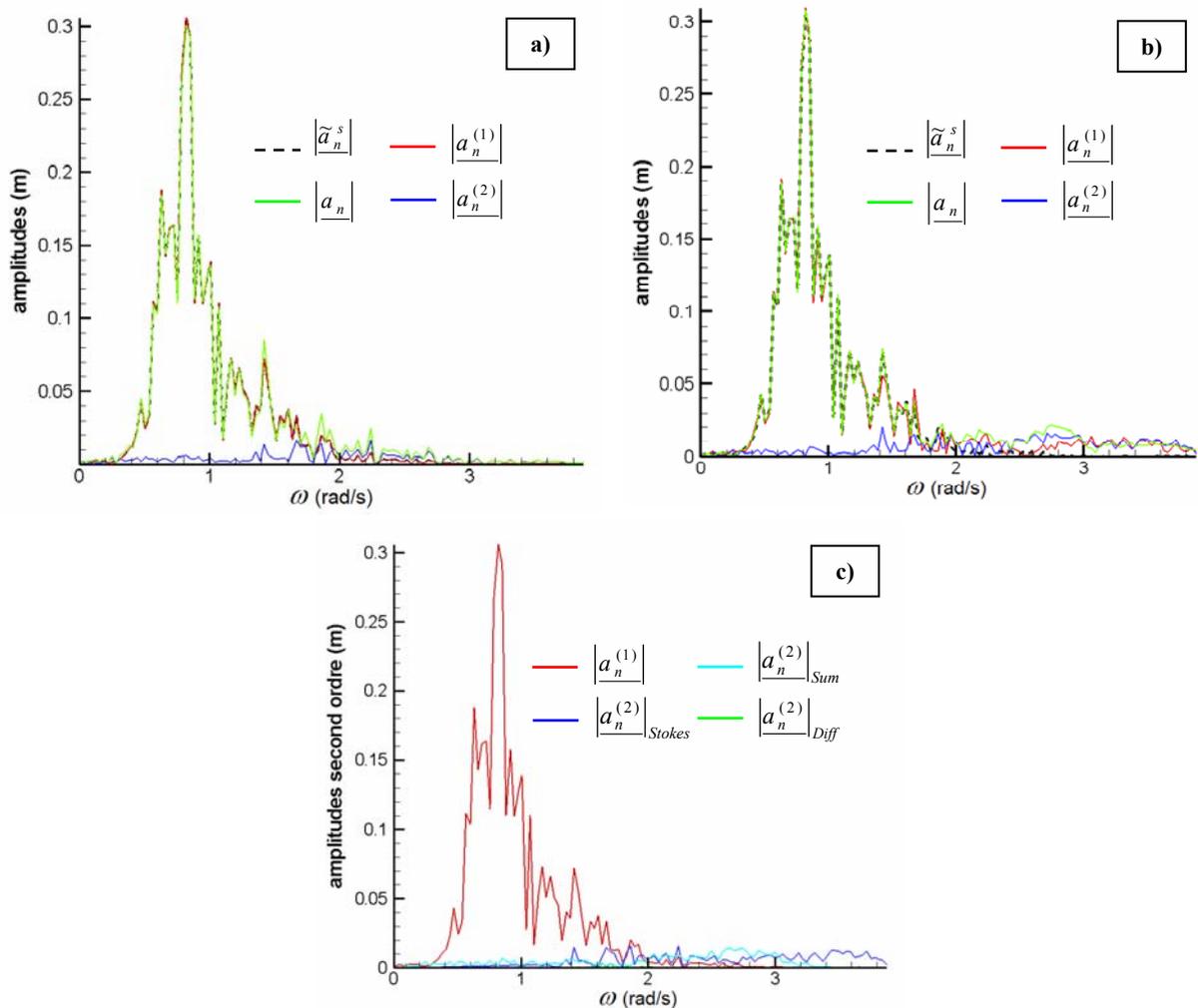


Figure 3.6 : Mise en évidence du problème de stabilité de la méthode de Duncan & Drake. Spectres en amplitude des élévations de surface libre mesurées et issus de la décomposition premier plus second ordre: a) À l'itération initiale, b) Après 50 itérations, c) Mise en évidence des effets perturbateurs de certaines composantes second ordre.

Pour illustrer ce phénomène, nous avons appliqué le processus de découplage à un signal synthétique de houle bidimensionnelle, généré à l'aide du code HOS à l'ordre  $M = 4$  en profondeur infinie. Le champ de vagues est caractérisé par un spectre de JONSWAP tel que  $H_s = 2\text{m}$  et  $T_p = 8\text{s}$ . On a relevé l'élévation de la surface libre au centre du domaine de calcul pendant  $T = 204.8\text{s}$ .

La Figure 3.6.a) représente le spectre en amplitudes  $\tilde{a}_n^s$  obtenu en effectuant une IFT sur le signal sonde, les amplitudes des élévations au premier et au second ordre de perturbation  $a_n^{(1)}$  et  $a_n^{(2)}$ , ainsi que les amplitudes du signal sonde reconstruit au second ordre à la première itération du processus de découplage  $a_n$ . Après 50 itérations, on constate sur la Figure 3.6.b) que les amplitudes linéaires et second ordre correspondant aux hautes fréquences sont devenues beaucoup trop importantes. La solution reconstruite est alors très mauvaise et fortement perturbée par ces hautes fréquences (cf Figure 3.7). Parmi les composantes des amplitudes second ordre, ce sont essentiellement les modes somme et différence qui sont en cause (cf Figure 3.6.c)). Le terme de Stokes a une influence négligeable (le terme constant est ici nul car la houle étudiée est en profondeur infinie).

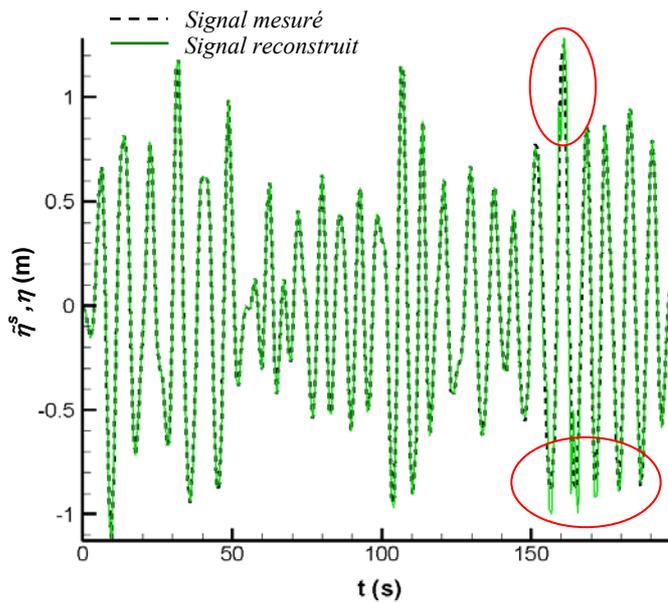


Figure 3.7 : Élévation de surface libre mesurée et reconstruite après 50 itérations du processus.

Pour remédier à ce problème, Duncan & Drake proposent d'imposer une fréquence de coupure  $\omega_c$  au de là de laquelle on force les amplitudes linéaires à prendre la valeur zéro. De cette manière, les amplitudes second ordre prennent la valeur des amplitudes mesurées (équation (3.17)). Duncan & Drake suggèrent, plutôt que de choisir  $\omega_c$  arbitrairement, d'imposer les conditions énoncées précédemment aux fréquences où les amplitudes second ordre sont supérieures aux amplitudes mesurées :

$$\begin{cases} a_n^{(1)} = 0 \\ a_n^{(2)} = \tilde{a}_n^s \end{cases}, \text{ pour tout } n \text{ tel que } |a_n^{(2)}| > |\tilde{a}_n^s| \quad (3.18)$$

Cependant, en pratique, la nature fortement irrégulière des spectres en amplitude fait que la fréquence de coupure trouvée est souvent trop faible. En d'autres termes, on ignore les modes linéaires dont l'énergie est non négligeable et qui permettraient un contrôle des hautes fréquences. Le signal reconstruit est alors perturbé par de petites oscillations aux crêtes et au creux dues à ces hautes fréquences non maîtrisées. Par ailleurs, on s'aperçoit qu'une modification de quelques dixièmes de radians par seconde de la fréquence de coupure influe sur la qualité du signal reconstruit et que la fréquence de coupure optimale, pour laquelle l'erreur d'assimilation après convergence du processus itératif est minimale, peut être très différente selon les cas de figure étudiés.

La Figure 3.8 montre l'évolution de l'erreur d'assimilation  $\varepsilon_{ass}$  définie en (3.14) au cours de la procédure de découplage de Duncan & Drake pour différentes valeurs de  $\omega_c$ . Le signal sonde étudié est le même signal synthétique que précédemment. La fréquence de coupure optimale donnant la plus faible erreur d'assimilation après convergence de la méthode est  $\omega_c = 3.28$  rad/s. On constate effectivement qu'une trop forte troncature des hautes fréquences entraîne une erreur importante sur le signal mesuré (cas où  $\omega_c < 2.49$  rad/s). Mais la réponse du processus reste très aléatoire suivant la fréquence de coupure imposée. La différence entre les élévations de surface libre mesurées et reconstruites provient essentiellement de la qualité de la reproduction des crêtes et des creux.

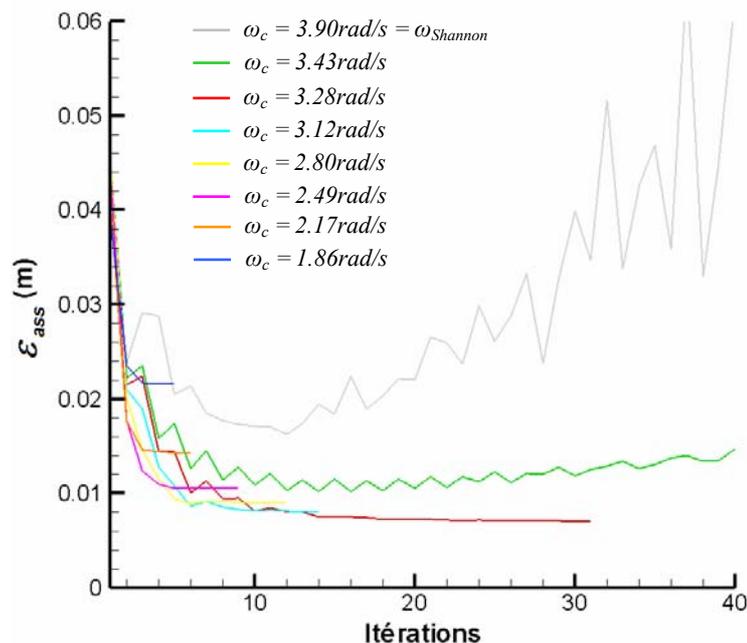


Figure 3.8 : Évolution de l'erreur d'assimilation au cours des itérations du processus de Duncan & Drake pour différentes valeurs de la fréquence de coupure  $\omega_c$ .

Puisqu'il apparaît difficile de dégager un critère idéal pour le choix de la fréquence de coupure  $\omega_c$ , et que plusieurs tests ont montré que sa valeur est étroitement liée au cas de houle traité, nous avons décidé d'utiliser une méthode d'optimisation pour rechercher la fréquence  $\omega_c$  optimale, c'est-à-dire la fréquence donnant l'erreur d'assimilation minimale.

Cette procédure permet d'éviter de tester toutes les fréquences du panel envisageable compris entre la fréquence de pic du spectre et la fréquence de Shannon, et bien qu'elle soit beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que la méthode proposée par Duncan & Drake, elle permet de s'assurer

que le signal reconstruit est bien optimal.

La méthode d'optimisation choisie est la méthode Simplexe de Nelder & Mead (1965, [112]), dont nous allons détailler les grandes lignes au paragraphe suivant. C'est une méthode d'implémentation aisée que nous avons pu facilement adapter à la recherche d'un optimum entier correspondant à l'indice de discrétisation de la fréquence angulaire testée. Pour être sûrs de ne pas aboutir à un minimum local, nous appliquons plusieurs fois la procédure de Nelder & Mead à partir de différentes valeurs initiales de fréquence de coupure, et nous sélectionnons parmi les différents minima trouvés l'optimum donnant l'erreur sur le signal sonde la plus faible. Même si la multiplication des recherches augmente le nombre de fréquences testées, la procédure reste au final bien moins coûteuse que celle consistant à tester toutes les fréquences à partir de la fréquence de pic.

## **3.4 Méthodes d'optimisation classiques**

Dans ce paragraphe, nous présentons les différentes techniques d'optimisation que nous avons envisagées pour résoudre le problème de minimisation défini au 3.2.1.2. L'objectif est de décrire leurs principales caractéristiques afin de dégager les atouts et inconvénients de chaque approche et fournir les arguments qui ont guidé notre choix.

### **3.4.1 Classification des méthodes**

Il existe de nombreuses méthodes numériques permettant de résoudre le problème d'optimisation défini précédemment. Elles font appel à différentes stratégies dont la performance dépend du cas d'étude. On distingue deux grandes classes de méthodes d'optimisation, les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. Ces techniques se différencient par les informations qu'elles utilisent pour progresser ainsi que par la logique de leur progression.

Les méthodes déterministes utilisent les informations acquises sur la fonctionnelle à chaque étape du processus. À l'intérieur de cette catégorie, on distingue les méthodes qui utilisent uniquement les informations concernant la valeur de la fonctionnelle (méthodes directes) ou de ses dérivées premières ou au secondes (méthodes indirectes). Comme nous l'avons vu au 3.2.1.2, la dérivée première et le gradient de la fonctionnelle jouent en effet un rôle important dans la recherche d'un minimum. Les méthodes basées sur l'évaluation des dérivées de la fonction coût ont en général une meilleure vitesse de convergence, mais elles sont limitées par l'hypothèse de dérivabilité et sont très sensibles au bruitage d'erreur qui apparaît lorsque la fonction est calculée à partir de procédés numériques complexes.

Les méthodes stochastiques n'utilisent pas ces données et font intervenir des lois de probabilité dans leur progression. Elles sont souvent plus lentes que les méthodes déterministes, mais elles permettent de trouver le minimum global de la fonctionnelle d'éviter les minima locaux vers lesquels les méthodes déterministes tendent.

Les connaissances théoriques des différentes méthodes d'optimisation sont très disparates. Les propriétés de convergence globale et de vitesse de convergence des méthodes déterministes indirectes basées sur le calcul des dérivées de la fonctionnelle sont bien connues (Nocedal 1991, [114]). En revanche, les analyses théoriques sur les méthodes déterministes sans gradient sont peu nombreuses (Wright, 1995, [159], Tozcon, 1989, [146]). Quant aux méthodes stochastiques, on ne dispose à l'heure actuelle que de résultats théoriques généraux de nature statistique.

Les techniques d'optimisation que nous avons employées pour trouver les caractéristiques ondes libres minimisant l'erreur d'assimilation sont déterministes. Nous avons testé des méthodes indirectes reposant sur le calcul du gradient de la fonction coût par rapport aux variables d'optimisation (méthode Quasi-Newton et méthode des Gradients Conjugués) et des méthodes directes basées sur les informations de la fonctionnelle uniquement (méthode Simplexe de Nelder & Mead et méthode directionnelle de Rosenbrock). Nous allons détailler les principaux traits caractéristiques de ces techniques dans les paragraphes suivants.

## 3.4.2 Méthodes avec gradient

Les méthodes avec gradient sont employées lorsque la fonctionnelle que l'on cherche à optimiser est différentiable, ou tout au moins lorsqu'on la considère comme telle. Elles utilisent les informations fournies par les dérivées partielles de la fonction coût pour calculer les itérés du processus, dans le but de limiter le nombre total d'évaluations de la fonction.

Les algorithmes de minimisation appartenant à cette classe de méthodes consistent à chaque itération en une succession de trois étapes :

- le choix d'un modèle local,
- le choix d'une direction de descente,
- le choix d'une longueur de descente.

Les différentes méthodes se distinguent par la manière de choisir la direction et la longueur de descente. Certains algorithmes effectuent les deux dernières étapes simultanément. Il s'agit des méthodes dites « à région de confiance », dont il ne sera pas fait état par la suite.

Parmi toutes les méthodes existant, nous nous sommes intéressés aux méthodes les plus performantes, la méthode du premier ordre utilisant le gradient de la fonction coût dite des Gradients Conjugués, ainsi que la méthode Quasi-Newton d'ordre deux qui requiert non seulement le calcul du gradient mais également l'évaluation du Hessien de la fonctionnelle (3.13).

### 3.4.2.1 Choix de la direction de descente

#### Définition

Pour résoudre le problème de minimisation introduit au 3.2.1.2, les méthodes indirectes utilisent une direction de descente appelée  $\mathbf{d}$  définie par :

$$\mathbf{d} \text{ direction de descente de } f \text{ en } \mathbf{p} \in \mathcal{P} \text{ si : } \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{d} < 0 \quad (3.19)$$

Si  $\mathbf{d}$  est une direction de descente, alors la fonction  $f$  est décroissante autour de  $\mathbf{p}$  dans la direction  $\mathbf{d}$ . En effet :

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \frac{f(\mathbf{p} + \alpha \mathbf{d}) - f(\mathbf{p})}{\alpha} = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{d} < 0 \Rightarrow f(\mathbf{p} + \alpha \mathbf{d}) < f(\mathbf{p}) \quad (3.20)$$

Ainsi la méthode itérative telle que le nouveau vecteur des paramètres de contrôle  $\mathbf{p}^{q+1}$  est défini à partir du vecteur  $\mathbf{p}^q$  à l'itération précédente par l'équation (3.21), va converger vers le minimum de  $f$ .

$$\mathbf{p}_{q+1} = \mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q \quad (3.21)$$

$\alpha_q$  est le pas de descente à l'itération  $q$ .

### Calcul de la direction de descente

Il existe trois grandes catégories de méthodes pour calculer la direction de descente, utilisant différentes informations sur la fonctionnelle. La première catégorie est constituée des méthodes dites du premier ordre car seules les informations relatives au gradient de la fonction coût sont utilisées. Il s'agit notamment de l'algorithme de Plus Grande Pente et de la méthode des Gradients Conjugués. La seconde rassemble les techniques du second ordre qui se basent sur l'évaluation du gradient et du Hessien de la fonctionnelle pour actualiser la direction de descente. La principale méthode appartenant à cette catégorie est la méthode de Newton. La troisième catégorie regroupe des méthodes que l'on peut qualifier de pseudo-second ordre car elles utilisent une approximation du Hessien de la fonction ou de son inverse, calculée à partir d'informations du premier ordre. Ces méthodes sont une alternative efficace à la méthode de Newton lorsque le calcul Hessien de la fonctionnelle est très lourd. Elles sont appelées méthodes Quasi-Newton.

Nous ne donnons dans cette partie qu'une description succincte des techniques de calcul de la direction de descente des divers algorithmes cités précédemment, mais une analyse plus détaillée des méthodes que nous avons testées sera présentée dans les paragraphes suivants. En ce qui concerne les autres algorithmes, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Gilbert (2008, [66]).

### Méthodes du premier ordre

Les méthodes du premier ordre consistent à approximer localement la fonctionnelle par le modèle d'ordre 1 :

$$f(\mathbf{p}_q + \mathbf{d}_q) = f(\mathbf{p}_q) + \nabla f(\mathbf{p}_q) \cdot \mathbf{d}_q + o(\|\mathbf{d}_q\|) \quad (3.22)$$

La méthode de Plus Grande Pente (ou méthode du Gradient), utilisée par Cauchy dès le XIX<sup>e</sup> siècle (1847, [27]), repose sur le constat que la diminution la plus importante de la fonction  $f$  approximée par (3.23) est obtenue lorsque le produit scalaire  $\nabla f(\mathbf{p}_q) \cdot \mathbf{d}_q$  est minimal, c'est-à-dire lorsque les deux vecteurs sont colinéaires et de sens opposés. La « plus grande pente » est donc définie comme l'opposé du gradient de la fonction  $f$  par rapport aux variables d'optimisation :

$$\mathbf{d}_q = -\nabla f(\mathbf{p}_q) \quad (3.23)$$

Si cette approche semble très séduisante par sa simplicité de mise en œuvre, son faible besoin de mémoire de stockage et son adaptabilité aux géométries « pauvres », elle possède de nombreux inconvénients. Le premier est que les directions de recherche ainsi calculées sont orthogonales entre elles, ce qui ne constitue pas un panel de directions optimal pour une recherche efficace. Par ailleurs, à l'approche du minimum où les effets du second ordre du développement de Taylor de  $f$  jouent un rôle important, la vitesse de convergence diminue de par le fait que l'algorithme ignore la courbure décrite par le Hessien de la fonctionnelle. Cela peut alors, dans certains cas, conduire à un nombre infini d'itérations.

La méthode des Gradients Conjugués, peut être vue comme une légère modification de l'algorithme du Gradient puisque la direction de recherche est déterminée par :

$$\mathbf{d}_q = \begin{cases} -\nabla f(\mathbf{p}_0) & \text{si } q = 0 \\ -\nabla f(\mathbf{p}_q) + \beta_q \mathbf{d}_{q-1} & \text{si } q \geq 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

Diverses expressions existent pour le scalaire  $\beta_q$  qui confèrent à l'algorithme des propriétés différentes (Fletcher & Reeves, 1964, [55], Polak & Ribière, 1969, [127], Hestenes & Stiefel, 1952, [75], Fletcher, 1987, [54], Dai & Yuan, 1996, [43]). Les formes de  $\beta_q$  seront explicitées au chapitre 3.4.2.3.

### Méthodes du second ordre

Au second ordre, on considère le développement à l'ordre 1 du gradient où pour plus de simplicité nous notons  $\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q)$  le Hessien de  $f$  en  $\mathbf{p}_q$  :

$$\nabla f(\mathbf{p}_q + \mathbf{d}_q) = \nabla f(\mathbf{p}_q) + \overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q) \cdot \mathbf{d}_q + o(\|\mathbf{d}_q\|) \quad (3.25)$$

La méthode de Newton, qui est à l'origine des méthodes d'ordre deux, consiste à trouver un point qui annule le gradient de la fonction coût. Alors si  $\mathbf{p}_q + \mathbf{d}_q$  est un minimum,  $\nabla f(\mathbf{p}_q + \mathbf{d}_q)$  est nul et la direction de descente  $\mathbf{d}_q$  est donnée par :

$$\mathbf{d}_q = -\left(\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q)\right)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q) \quad (3.26)$$

Il faut évidemment que la fonctionnelle soit deux fois dérivable et que le Hessien  $\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q)$  de  $f$  en l'itéré courant soit inversible pour que cette définition ait un sens. Notons que pour que  $\mathbf{p}^*$  soit un minimum, il faut que le Hessien  $\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}^*)$  de la fonction en  $\mathbf{p}^*$  soit défini positif. Alors pour  $\mathbf{p}_q$  proche de  $\mathbf{p}^*$ ,  $\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q)$  est également défini positif et  $\mathbf{d}_q$  est bien une direction de descente :

$$\nabla f(\mathbf{p}_q) \cdot \mathbf{d}_q = \nabla f(\mathbf{p}_q) \cdot \left(-\left(\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q)\right)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q)\right) = -\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q) \cdot \left(\left(\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q)\right)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q)\right)^2 < 0 \quad (3.27)$$

Cette méthode est théoriquement plus rapide que la méthode du Gradient, mais l'inversion du Hessien nécessite la résolution d'un système de dimension  $O(N_{\text{var}}^3)$  et son stockage une capacité en mémoire de  $N_{\text{var}}(N_{\text{var}}-1)/2$ . En pratique, la méthode se montre instable ; elle diverge notamment si le Hessien n'est pas défini positif et ne converge que dans le cas où le minimum est proche du vecteur initial, ou si la fonctionnelle est définie positive.

Les méthodes Quasi-Newton, ont été développées pour pallier ces différents problèmes. Elles consistent à approximer le Hessien lorsque son calcul devient trop coûteux à l'aide de matrices dites de Quasi-Newton notées  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ .

$$\mathbf{d}_q = -\overline{\overline{\mathbf{M}}}_q^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q) \quad (3.28)$$

Pour cela, on commence par définir une matrice initiale définie positive (généralement la matrice identité) que l'on met à jour à chaque itération afin d'approcher de mieux en mieux le Hessien ou son inverse. Afin de faciliter la résolution du système matriciel de Newton, on utilise le plus souvent des formules de mise à jour qui préservent la définie positivité de la matrice de Quasi-Newton. C'est notamment le cas de la mise à jour BFGS de Broyden (1970, [22]), Fletcher (1970, [54]), Godfarb (1970, [68]), et Shanno (1970, [134]), qui sera explicitée au paragraphe 3.4.2.4.

### 3.4.2.2 Évaluation du pas de descente

Il s'agit maintenant de déterminer le pas de descente optimal  $\alpha_q > 0$  le long de la direction de descente  $\mathbf{d}_q$ . Comme nous l'avons vu, la méthode la plus efficace est celle de Newton. Cependant cette approche ne se révèle efficace que lorsque le point de départ est proche de l'optimum. De plus, elle ne garantit pas la convergence vers un minimum, même local. C'est pourquoi les algorithmes précédents sont couplés à une procédure de « recherche linéaire » qualifiée de inexacte (Gilbert, 2008, [66]) dont les deux principaux objectifs sont de réaliser une réduction suffisante de  $f$  le long de la direction de descente, notamment pour assurer le succès des méthodes de type Quasi-Newton, tout en évitant que le pas  $\alpha_q$  ne devienne « trop petit », c'est-à-dire trop proche de zéro, ce qui entraînerait une convergence des itérés vers un point non stationnaire. Il est enfin préférable que la recherche se fasse en un nombre minimal d'évaluations de la fonction coût.

#### Méthodes du premier ordre

Il existe de nombreuses méthodes itératives permettant de résoudre le problème de minimisation unidimensionnelle. Les méthodes les plus simples consistent à choisir un pas de descente constant ou à effectuer une recherche itérative en subdivisant l'intervalle initial encadrant  $\alpha_q$  par la méthode de la Section Dorée (plus communément appelée « Golden Search Method») ou par une recherche dichotomique. La méthode de Brent (1973, [21]) repose sur ce principe : elle alterne méthode de la Section Dorée et interpolation parabolique lorsque la fonction a un comportement parabolique à l'approche du minimum. L'interpolation est réalisée entre trois points encadrants le minimum courant obtenus aux itérations précédentes.

Nous avons utilisé cette méthode pour la recherche linéaire associée à l'algorithme des Gradients Conjugués présentée au paragraphe suivant.

#### Méthodes du second ordre

D'autres techniques plus évoluées sont généralement employées pour déterminer le pas de descente des méthodes de Newton ou de Quasi-Newton. Elles utilisent des conditions particulières assurant la satisfaction des objectifs précités de décroissance suffisante et de pas minimum qui reposent sur le calcul du gradient de la fonction coût.

La condition d'Armijo (1966, [4]) ou condition de décroissance linéaire consiste à imposer que la fonction  $f$  décroisse au moins d'une portion  $\omega_1 \in ]0,1[$  du taux de décroissance initial  $\nabla f \cdot \mathbf{d}$  du modèle linéaire. Cela se traduit par l'inégalité :

$$f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q) \leq f(\mathbf{p}_q) + \omega_1 \alpha_q (\nabla f(\mathbf{p}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q$$

En pratique, la constante  $\omega_1$  est prise très petite (généralement  $\omega_1 = 10^{-4}$ ), de manière à satisfaire l'inégalité le plus facilement possible. Cette condition est dangereuse car le pas initial, généralement pris égal au pas de Newton, peut s'avérer trop petit, et conduire à une fausse convergence comme nous l'avons fait remarqué précédemment. On adjoint donc à cette condition un mécanisme supplémentaire qui empêche le pas de descente de prendre des valeurs trop faibles.

Wolfe (1969 et 1971, [158]) préconise ainsi de déterminer le pas de descente  $\alpha_q$  de telle manière que les conditions suivantes soient réalisées :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q) \leq f(\mathbf{p}_q) + \omega_1 \alpha_q (\nabla f(\mathbf{p}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \\ (\nabla f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \geq \omega_2 (\nabla f(\mathbf{p}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \end{array} \right. \quad (3.29)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q) \leq f(\mathbf{p}_q) + \omega_1 \alpha_q (\nabla f(\mathbf{p}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \\ (\nabla f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \geq \omega_2 (\nabla f(\mathbf{p}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

pour un couple de scalaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$  choisis tels que  $0 < \omega_1 < \omega_2 < 1$ . Typiquement, on prend  $\omega_1 = 10^{-4}$  et  $\omega_2 = 0.99$ . La première inégalité n'est autre que la condition de décroissance linéaire d'Armijo, tandis que le rôle de la seconde est d'empêcher  $\alpha_q$  d'être trop petit. Il arrive que certains algorithmes d'optimisation requièrent une condition plus restrictive que la condition (3.30). Dans ce cas, on utilise les conditions de Wolfe dites « fortes » où la condition (3.30) est remplacée par :

$$\left| (\nabla f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \right| \geq \left| (\nabla f(\mathbf{p}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \right| \omega_2 \quad (3.31)$$

Le calcul du gradient étant souvent coûteux, Goldstein (1967, [70]) préfère vérifier la condition de courbure au sens faible en approximant par différences finies le gradient intervenant dans la condition). On obtient alors la nouvelle inégalité :

$$f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q) \geq f(\mathbf{p}_q) + \omega_2 \alpha_q (\nabla f(\mathbf{p}_q))^T \cdot \mathbf{d}_q \quad (3.32)$$

En pratique, nous n'utilisons pas cette deuxième condition dans notre algorithme de recherche linéaire. Dans notre modèle Quasi-Newton, nous avons en effet implémenté une technique dite de « rebroussement » (ou « backtracking » en anglais) permettant de réduire progressivement le pas de descente dans laquelle nous avons introduit un paramètre de tolérance sur le pas minimal.

La méthode de rebroussement tire son nom du fait que lorsque le pas initial n'est pas acceptable, on rebrousse chemin en essayant des pas de plus en plus petits. La version la plus simple de cette technique consiste à prendre  $\alpha_q = \tau^{i_q}$  où  $\tau$  est une constante appartenant à  $]0, 1[$  et  $i_q$  le plus petit entier naturel tel que (3.29) soit vérifiée. Le fait de prendre pour  $\alpha_q$  le plus grand réel dans  $\{1, \tau, \tau^2, \dots\}$  permettant de vérifier (3.29) garantit que ce pas ne sera pas trop petit.

Cette version simplifiée est très souvent améliorée de manière à tenir compte de la valeur de la fonctionnelle calculée au point  $\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q$  pour estimer le pas de descente vérifiant (3.29). De manière générale et dans la version que nous avons implémentée, le pas  $\alpha_{q+1}$  est obtenu par interpolation parabolique ou cubique à partir des valeurs de  $f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q)$  et du gradient  $\nabla f(\mathbf{p}_q)$ . La procédure que nous avons suivie pour la détermination du pas de descente est décrite ci-dessous. On utilise une fonction  $g$  définie par (3.33) :

$$\begin{aligned} g(\alpha_q) &= f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q) \\ g'(\alpha_q) &= \nabla f(\mathbf{p}_q + \alpha_q \mathbf{d}_q) \cdot \mathbf{d}_q \end{aligned} \quad (3.33)$$

À chaque itération, on s'assure que le pas de descente est bien compris dans un intervalle de tolérance  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ .

Étape 0 : Le pas initial est toujours pris égal au pas de Newton :  $\alpha_0=1$ .

Étape 1 : Si ce pas n'est pas acceptable, le pas  $\alpha_1$  pris comme le minimum de l'interpolation parabolique de la fonction  $g$  obtenue à partir des valeurs disponibles  $g(0)$ ,  $g'(0)$  et  $g(1)$  :

$$\alpha_1 = -\frac{g'(0)}{2[g(1) - g(0) - g'(0)]} = -\frac{\mathbf{d}_0}{2[f(\mathbf{p}_q + \mathbf{d}_q) - f(\mathbf{p}_q) + \mathbf{d}_0]} \quad (3.34)$$

Étape  $q$  : Pour les itérations suivantes, on interpole la fonction  $g$  de manière cubique en  $\alpha_q$  en utilisant les valeurs obtenues aux itérations précédentes  $g(\alpha_{q-1})$  et  $g(\alpha_{q-2})$ . Le minimum de l'interpolation cubique est alors :

$$\alpha_{q+1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ag'(\alpha_q)}}{3a} \quad (3.35)$$

où les valeurs de  $a$  et de  $b$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_{q-1} - \alpha_{q-2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{q-1}^2} & \frac{1}{\alpha_{q-2}^2} \\ -\frac{\alpha_{q-2}}{\alpha_{q-1}^2} & \frac{\alpha_{q-1}}{\alpha_{q-2}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\alpha_{q-1}) - g'(\alpha_q)\alpha_{q-1} - g(\alpha_q) \\ g(\alpha_{q-2}) - g'(\alpha_q)\alpha_{q-2} - g(\alpha_q) \end{pmatrix}$$

### 3.4.2.3 Méthode des Gradients-Conjugués

#### Définition des directions conjuguées

Un théorème de Fletcher & Reeves, qui sont à l'origine de la méthode des Gradients Conjugués, montre qu'une séquence de  $N_{\text{var}}$  minimisations linéaires dans chacune des  $N_{\text{var}}$  directions de recherche conjuguées minimise une fonctionnelle quadratique de  $N_{\text{var}}$  variables, indiquant ainsi une des origines du mal fonctionnement de la méthode du Gradient qui est que les directions de recherche doivent être conjuguées et non orthogonales.

On peut considérer la notion de conjugaison comme une généralisation de la notion d'orthogonalité. En effet, deux directions  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  appartenant à l'espace  $\mathbb{R}^n$  sont dites conjuguées par rapport à une matrice définie positive  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  si :

$$\mathbf{u}^T \cdot \overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.36)$$

Dans le cas d'une matrice identité, les deux directions seraient orthogonales. La notion de conjugaison équivaut donc à la notion d'orthogonalité pour le produit scalaire associé à  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ .

Un ensemble de  $n$  vecteurs conjugués linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^n$  décrit un espace  $n$ -dimensionnel, chaque point de l'espace pouvant être exprimé comme une combinaison linéaire des  $n$  vecteurs conjugués. Bien que la matrice  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  ne définisse pas un ensemble unique de vecteurs

conjugués, on peut leur associer un ensemble de  $n$  directions conjuguées en utilisant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt décrite au paragraphe 3.4.3.2.

### Calcul de la direction de descente

L'algorithme des Gradients Conjugués est un cas particulier de la méthode des Directions Conjuguées (Gilbert, 2008, [66]) où les directions de recherche successives sont conjuguées par rapport au Hessien de la fonctionnelle. L'utilité des directions conjuguées vient du fait qu'elles peuvent être déterminées implicitement sans passer par le calcul du Hessien. Bien entendu, lorsque toutes les directions sont déterminées, une information équivalente au Hessien est obtenue. Cependant, une minimisation importante de la fonction peut avoir été accomplie au cours du calcul.

Les directions de descente sont calculées à partir de l'évaluation du gradient le long de la direction de descente à l'itération précédente. Ce procédé trouve son origine dans l'étude des fonctions quadratiques. Considérons une fonctionnelle quadratique de Hessien  $\overline{\mathbf{H}}$  où  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{y}$  représentent la différence entre deux points  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  et l'évaluation du gradient en ces points :

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{y} &= \nabla f(\mathbf{p}_2) - \nabla f(\mathbf{p}_1)\end{aligned}\quad (3.37)$$

Alors on montre aisément que  $\mathbf{s} = \overline{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{y}$ , (il suffit pour cela d'écrire que si  $\mathbf{p}^*$  est un minimum de  $f$  alors  $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}_1 - \overline{\mathbf{H}}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2 - \overline{\mathbf{H}}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{p}_2)$ ), ce qui signifie que toute direction orthogonale à  $\mathbf{y}$  est conjuguée à  $\mathbf{s}$  d'après la définition (3.36). Ce constat suggère un moyen simple de déterminer les directions de descente aux itérations successives : la première direction de descente étant prise égale à la plus grande pente, on obtient la direction de descente  $\mathbf{d}_q$  l'itération  $q$  conjuguée à la direction  $\mathbf{d}_{q-1}$  prenant la combinaison linéaire des vecteurs disponibles à cette itération,  $\nabla f(\mathbf{p}_q)$  et  $\mathbf{d}_{q-1}$ .

$$\mathbf{d}_q = \begin{cases} -\nabla f(\mathbf{p}_0) & \text{si } q = 0 \\ -\nabla f(\mathbf{p}_q) + \beta_q \mathbf{d}_{q-1} & \text{si } q \geq 1 \end{cases}\quad (3.38)$$

La condition de conjugaison donne le paramètre  $\beta_q^{FR}$  de Fletcher & Reeves (1964, [55]) :

$$\beta_q^{FR} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{p}_q)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{p}_{q-1})\|^2}\quad (3.39)$$

Dans le cas de fonctions non quadratiques, les erreurs d'arrondi dues à la non orthogonalité des gradients sont accumulées à chaque itération. On préfère alors utiliser le paramètre de Polak & Ribière (1969, [127]) défini par (3.40) qui permet un meilleur contrôle de ces erreurs. On notera qu'il est strictement équivalent au paramètre de Fletcher & Reeves lorsque la fonctionnelle est quadratique.

$$\beta_q^{PR} = \frac{(\nabla f(\mathbf{p}_q) - \nabla f(\mathbf{p}_{q-1}))^T \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q)}{\|\nabla f(\mathbf{p}_{q-1})\|^2}\quad (3.40)$$

Les paramètres  $\beta_q^{FR}$  et  $\beta_q^{PR}$  sont les plus couramment employés lors du calcul de la nouvelle direction de recherche. Il existe cependant d'autres expressions pour le scalaire  $\beta_q$ , qui utilisent en plus

du gradient de la fonctionnelle les directions de recherche à l'itération courante et/ou précédente. Ci-dessous, on donne les expressions des paramètres de Hesteness & Stiefel (1952, [75])  $\beta_q^{HS}$ , de Fletcher (1987, [54])  $\beta_q^F$  et de Dai & Yuan (1996, [43])  $\beta_q^{DY}$  :

$$\beta_q^{HS} = \frac{(\nabla f(\mathbf{p}_q) - \nabla f(\mathbf{p}_{q-1}))^T \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q)}{(\nabla f(\mathbf{p}_q) - \nabla f(\mathbf{p}_{q-1}))^T \cdot (\mathbf{d}_q - \mathbf{d}_{q-1})} \quad (3.41)$$

$$\beta_q^F = -\frac{(\nabla f(\mathbf{p}_q) - \nabla f(\mathbf{p}_{q-1}))^T \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q)}{\nabla f(\mathbf{p}_{q-1})^T \cdot \mathbf{d}_q} \quad (3.42)$$

$$\beta_q^{DY} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{p}_q)\|^2}{(\nabla f(\mathbf{p}_q) - \nabla f(\mathbf{p}_{q-1}))^T \cdot \mathbf{d}_q} \quad (3.43)$$

Les performances de l'ensemble de ces paramètres, de même que le paramètre  $\beta_q^{GP} = 0$  qui donne la direction de plus grande pente, ont été testées dans notre algorithme d'optimisation des Gradients Conjugués. Les résultats sont présentés au Chapitre 4.

### 3.4.2.4 Méthode Quasi-Newton

#### Principe

Les méthodes de type Quasi-Newton ont vu le jour pour pallier le principal inconvénient des méthodes de Newton qui réside dans le fait que la direction de descente  $\mathbf{d}_q$  définie par (3.44) n'est valable que dans le cas d'un Hessien défini positif. En effet, si le Hessien est nul, l'extremum est repoussé à l'infini, et s'il est négatif, on se dirige vers un maximum de la fonctionnelle.

$$\mathbf{d}_q = -(\overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_q))^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q) \quad (3.44)$$

Dans le cas où le Hessien calculé lors d'une itération n'est pas défini positif, une solution est de prendre  $\overline{\overline{\mathbf{H}}}_q = \overline{\overline{\mathbf{I}}}$  la matrice unité. Dans ce cas, le pas de Newton devient un pas de plus grande pente d'une longueur arbitraire. L'approche Quasi-Newton est plus fine car elle consiste à approcher au mieux le Hessien de la fonctionnelle par une matrice définie positive. La direction de descente est alors de la forme (3.45) :

$$\mathbf{d}_q = -\overline{\overline{\mathbf{M}}}_q^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{p}_q) \quad (3.45)$$

où  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}_q$  est l'estimation du Hessien à l'itération  $q$  appelée matrice de Quasi-Newton :

Les matrices  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}_q$  sont générées par des formules de mise à jour qui n'utilisent que les dérivées premières de la fonctionnelle. C'est là le deuxième avantage des méthodes Quasi-Newton par rapport à la méthode de Newton : les matrices générées sont non seulement définies positives, mais elles permettent également d'éviter le calcul du Hessien ou de son inverse qui peut parfois être très lourd.

L'idée générale des formules de mise à jour est de chercher la matrice  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}_{q+1}$  la plus proche du Hessien à partir de  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}_q$  telle que :

- l'écart entre  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}_{q+1}$  et  $\overline{\overline{\mathbf{M}}}_q$  soit minimisé,
- $\overline{\overline{\mathbf{M}}}_{q+1}$  soit symétrique
- l'équation de Quasi-Newton soit vérifiée :  $\nabla f(\mathbf{p}_q) - \nabla f(\mathbf{p}_{q+1}) = \overline{\overline{\mathbf{M}}}_{q+1} \cdot (\mathbf{p}_q - \mathbf{p}_{q+1})$

Notons que l'estimation peut concerner le Hessien  $\overline{\overline{\mathbf{H}}}_q$  mais également directement son inverse notée  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_q$ , plutôt utilisée en optimisation sans contraintes. On s'affranchit alors d'une résolution matricielle à chaque itération. Dans notre algorithme Quasi-Newton nous utilisons l'estimation de l'inverse du Hessien  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}$ .

### Mise à jour de la matrice de Quasi-Newton

Il existe différentes classes de formules de mise à jour préservant ou non la définie positivité de la matrice de Quasi-Newton. La plus connue est la sous-classe convexe de Broyden où les estimations du Hessien et de son inverse sont obtenues à partir des formules générales :

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}}_{q+1} = \frac{1}{\gamma_q} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{M}}}_q + \frac{\gamma_q \mathbf{y}_q \cdot \mathbf{y}_q^T}{\rho_q \mathbf{s}_q^T \cdot \mathbf{y}_q} - \frac{\overline{\overline{\mathbf{M}}}_q \mathbf{s}_q \mathbf{s}_q^T \overline{\overline{\mathbf{M}}}_q}{\mathbf{s}_q^T \overline{\overline{\mathbf{M}}}_q \mathbf{s}_q} + \frac{\beta}{\mathbf{s}_q^T \overline{\overline{\mathbf{M}}}_q \mathbf{s}_q} \left( \frac{\mathbf{s}_q^T \overline{\overline{\mathbf{M}}}_q \mathbf{s}_q}{\mathbf{s}_q^T \cdot \mathbf{y}_q} - \overline{\overline{\mathbf{M}}}_q \mathbf{s}_q \right) \left( \frac{\mathbf{s}_q^T \overline{\overline{\mathbf{M}}}_q \mathbf{s}_q}{\mathbf{s}_q^T \cdot \mathbf{y}_q} - \overline{\overline{\mathbf{M}}}_q \mathbf{s}_q \right)^T \right\} \quad (3.46)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{B}}}_{q+1} = \gamma_q \left\{ \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q + \frac{\rho_q \mathbf{s}_q \cdot \mathbf{s}_q^T}{\gamma_q \mathbf{s}_q^T \cdot \mathbf{y}_q} - \frac{\overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q \mathbf{y}_q^T \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q}{\mathbf{y}_q^T \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q} + \frac{\eta}{\mathbf{y}_q^T \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q} \left( \frac{\mathbf{y}_q^T \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q}{\mathbf{s}_q^T \cdot \mathbf{y}_q} - \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q \right) \left( \frac{\mathbf{y}_q^T \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q}{\mathbf{s}_q^T \cdot \mathbf{y}_q} - \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q \right)^T \right\} \quad (3.47)$$

où  $\eta\beta \left( \frac{\mathbf{y}_q^T \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q}{\mathbf{s}_q^T \cdot \mathbf{y}_q} \cdot \frac{\mathbf{s}_q^T \overline{\overline{\mathbf{H}}}_q \mathbf{s}_q}{\mathbf{s}_q^T \cdot \mathbf{y}_q} - 1 \right) + \eta + \beta = 1$  ,  $\mathbf{s}_q = \mathbf{p}_{q+1} - \mathbf{p}_q$  et  $\mathbf{y}_q = \nabla f(\mathbf{p}_{q+1}) - \nabla f(\mathbf{p}_q)$

La sous-classe convexe correspond à des valeurs des scalaires  $\beta$  et  $\eta$  comprises dans  $[0,1]$ . Les formules les plus populaires appartenant à cette sous-classe sont celle de Davidon-Fletcher-Powell (DFP), qui fut la première proposée, et pour laquelle  $\beta = 1$  (ou  $\eta = 0$ ), et celle de Broyden-Fletcher-Godfoard-Shanno (BFGS) où  $\beta = 0$  (ou  $\eta = 1$ ). Ce sont les formules de mise à jour les plus efficaces en moyenne.

On peut également citer d'autres mises à jour telles que celle de Fletcher ( $\eta < 0$ ) ou la formule de Rang 1 SR1 ( $\eta = [1 - \mathbf{y}_q^T \overline{\overline{\mathbf{B}}}_q \mathbf{y}_q / \mathbf{s}_q^T \mathbf{y}_q]^{-1}$ ). Toutes deux ne préservent pas la définie positivité de la matrice de Quasi-Newton contrairement aux deux premières mises à jour. (Le caractère défini positif est assuré si la condition de courbure  $\mathbf{y}_q \cdot \mathbf{s}_q > 0$  est satisfaite; on vérifie donc à chaque itération que le produit est suffisamment positif).

Les paramètres  $\gamma_q$  et  $\rho_q$  intervenant dans les expressions précédentes sont des scalaires positifs qui ont été ajoutés à la formule originale de Broyden afin de pouvoir traiter les problèmes mal conditionnés pour lesquels les algorithmes se révèlent très lents car la matrice initiale est très différente du Hessien. Le paramètre  $\rho_q$  a été introduit par Biggs (1971, [12]) afin de stabiliser la procédure dans le cas de problèmes fortement non quadratiques.  $\gamma_q$  est un paramètre d'échelle dû à

Oren & Luenberger (1974, [116]). Les différentes heuristiques pour le choix des différents paramètres  $\eta$ ,  $\rho_q$  et  $\gamma_q$  sont répertoriées dans les articles de Lukšan (1990, [103]) qui a procédé à une analyse numérique exhaustive des différentes mises à jour.

La formule de mise à jour que nous avons choisi d'implémenter dans notre algorithme Quasi-Newton est celle de BFGS pour l'inverse du Hessien souvent appelée BFGS inverse et notée iBFGS, à laquelle nous avons adjoint la mise à l'échelle initiale de Shanno & Phua (1978, [135]). Cette dernière consiste à mettre à l'échelle la matrice estimation de l'inverse du Hessien chaque fois qu'elle est réinitialisée à la matrice identité, ce qui arrive soit à la première itération, soit lorsque la direction de recherche est presque orthogonale au gradient. La formule de Shanno & Phua donne le rapport  $\gamma_q/\rho_q$  :

$$\frac{\gamma_q}{\rho_q} = \frac{\mathbf{s}_q \cdot \mathbf{y}_q}{\mathbf{y}_q \mathbf{B}_q \mathbf{y}_q} \quad (3.48)$$

En ce qui concerne nos applications, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser de facteur de stabilisation. Le paramètre  $\rho_q$  a donc été pris égal à 1 tout au long de la procédure.

### Remarque

Lorsque le nombre de variables d'optimisation est important, il arrive que la mémoire soit insuffisante pour stocker la matrice de Quasi-Newton. On sauvegarde alors les  $m$  paires de vecteurs  $(\mathbf{s}_q, \mathbf{y}_q)$  les plus récents à partir desquels il est possible de calculer le produit de la matrice de Quasi-Newton avec un vecteur quelconque. La méthode est qualifiée de BFGS à mémoire limitée et est souvent notée  $\ell$ -BFGS (Gilbert, 2008, [66]). Les matrices ainsi créées sont également très efficaces pour former des préconditionneurs utilisés lors de la résolution du système de Newton par une méthode itérative. Parmi les développements en cours, on peut citer la méthode MINQ3 développée par l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique). Notre problème ne faisant pas intervenir un nombre de variables justifiant l'utilisation des formules  $\ell$ -BFGS, nous nous sommes contentés des formules de mise à jour classiques présentées ci-dessus.

## 3.4.3 Méthodes directes

### 3.4.3.1 Présentation

Les méthodes directes sont utilisées lorsque la fonctionnelle n'est pas dérivable (dans le cas d'une fonction discontinue par exemple), lorsque le calcul du gradient n'est pas possible ou est délicat et fait intervenir un processus numérique coûteux, ou lorsque la fonction coût est irrégulière et qu'elle présente de nombreux extrema locaux. Ce sont des méthodes extrêmement flexibles et attrayantes que l'on peut appliquer sur de nombreux cas de figure, là où les méthodes avec gradient sont difficiles ou impossibles à mettre en œuvre.

Mais disposant de moins d'information que les méthodes indirectes, puisque le gradient n'est pas évalué lors de la progression vers l'optimum, les méthodes sans gradient sont en général moins efficaces en termes de nombre d'itérations que les méthodes avec gradient lorsque celles-ci peuvent être utilisées. Lorsque les deux approches sont possibles, une méthode Quasi-Newton est presque toujours plus rapide qu'une méthode directe pour un même résultat. Leur principale limitation vient

également du fait qu'elles sont fortement dépendantes du nombre de variables d'optimisation (le nombre d'évaluations de la fonction coût requis jusqu'à la convergence est au moins proportionnel à  $N_{\text{var}}$ ).

Toutefois, certaines de ces méthodes ont une structure algorithmique adaptée à l'utilisation d'architectures parallèles. Elles ont en effet recours à des évaluations simultanées et indépendantes de la fonctionnelle. Ces techniques peuvent alors se révéler aussi efficaces en terme de temps de calcul que les méthodes indirectes.

Finalement, les méthodes directes présentent de multiples atouts et connaissent un franc succès auprès de leurs utilisateurs, essentiellement grâce à leur simplicité et à leur réussite pratique. Malgré tout, elles sont souvent décriées par la communauté mathématique car il n'existe pas à l'heure actuelle de preuves de leur convergence. Seules quelques études théoriques ont vu le jour concernant l'utilisation de la méthode Simplexe pour des espaces de faibles dimensions, ou de la méthode directionnelle de Powell dans le cas d'une fonctionnelle quadratique (Powell, 1964, [128]). Mais il existe une volonté réelle d'attester de la fiabilité des méthodes directes ; ainsi récemment Torczon (1991, [147], 1997, [148]) a mis en évidence des propriétés de convergence globale pour les méthodes de type Simplexe.

Parmi les méthodes sans gradient, on distingue différents types de méthodes déterministes et stochastiques. Les principales familles de méthodes déterministes sont :

- Les méthodes directionnelles, qui consistent à minimiser la fonctionnelle successivement dans une famille de  $N_{\text{var}}$  directions. On citera notamment la méthode de Rosenbrock datant de 1960 [131], modifiée par Swann en 1964 [143] et revisitée par Palmer en 1968 [117] ou la méthode de Hooke & Jeeves (1961, [82]).
- Les méthodes de type Simplexe, où la fonction coût est évaluée sur un ensemble de  $(N_{\text{var}} + 1)$  vecteurs des variables de contrôle formant un polygone ou simplexe dans l'espace  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$ . En fonction des résultats obtenus, le simplexe est déplacé et/ou déformé dans l'espace des variables de contrôle afin d'encadrer le minimum. Cette approche a été initiée par Spendley, Hext & Himsworth en 1962 [140] et a été étendue par Nelder & Mead en 1965 [112] dont l'algorithme est aujourd'hui le plus utilisé. La méthode Simplexe a finalement été retouchée par Dennis & Torczon en 1991 [47], qui l'utilisent dans une architecture parallèle.
- Les méthodes d'interpolation, qui effectuent une interpolation locale de la fonctionnelle en différents vecteurs des paramètres de contrôle puis minimisent localement cette interpolation dans une région de confiance. Le résultat permet de faire une mise à jour des supports d'interpolation dans une procédure itérative (Winfield, 1973, [157] , Powell, 1994, [128], Conn, Scheinberg & Toint, 1995, [36] Marazzi & Nocedal, 2002, [106]).

En ce qui concerne les méthodes stochastiques, on trouve :

- Les algorithmes génétiques, mimant le processus d'évolution Darwinienne qui tend à produire des individus les plus adaptés à un environnement donné. Elles ont été développées par Holland en 1975 [77] puis popularisées par Golberg en 1989 [69].
- Les algorithmes du recuit simulé (ou « simulated annealing »), qui reposent sur une analogie avec les phénomènes de cristallisation intervenant en métallurgie (alternance de cycles de refroidissement et de réchauffe, le recuit, qui tend à minimiser l'énergie du matériau), initié par Aarts & Korst en 1989 [1].
- Les algorithmes d'essaim, dont le principe est de suivre le comportement d'un insecte dans un essaim qui tente de trouver la meilleure source de nourriture, compte tenu de sa mémoire et des communications venant des autres insectes de l'essaim (Kennedy & Essart, 1995, [88]).

Cette liste est non exhaustive et pour plus d'informations, on peut consulter le rapport de Lewis *et al* (2000, [99]) qui fait un récapitulatif des différentes méthodes directes et de leurs utilisations. Le rapport de Clarich & Desideri (2002, [32]) traite plus particulièrement des applications de ces méthodes dans le domaine de l'hydrodynamique et de la recherche de paramètres aérodynamiques optimaux.

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons implémenté les méthodes directes déterministes de Rosenbrock et de Nelder & Mead dont nous allons maintenant détailler les points clé.

### 3.4.3.2 Méthode directionnelle de Rosenbrock

#### Introduction

L'algorithme proposé par Rosenbrock en 1960 [131] fait partie de la classe des méthodes directionnelles. Ces méthodes tentent d'accélérer le processus d'optimisation en organisant la recherche autour d'un ensemble de directions judicieusement choisies, formant une base de l'espace des variables de contrôle, qui s'adaptent localement à la fonctionnelle tout au long du processus. Les différentes méthodes directionnelles se distinguent par le choix des directions de recherche utilisées.

La méthode la plus simple appartenant à cette famille de méthode est la recherche par modification d'un seul paramètre. Dans cette méthode, les directions sont les  $N_{\text{var}}$  vecteurs de base de l'espace  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$  et restent inchangées au cours de la recherche. À chaque étape de la procédure d'optimisation, une minimisation unidimensionnelle est réalisée suivant chacune des  $N_{\text{var}}$  directions ; on effectue ainsi plusieurs étapes jusqu'à convergence du processus vers un minimum. Bien entendu, une fois un minimum trouvé pour une variable d'optimisation donnée, il est probable qu'il ne le sera plus pour une autre variable et le processus devra être repris. Cependant, la méthode converge en général pour la plupart des fonctions. Dans les cas particuliers où la fonctionnelle a une dérivée seconde plus importante dans certaines directions (vallée étroite), un grand nombre de cycles et nécessaire pour se déplacer vers l'optimum et l'algorithme a un comportement oscillatoire peu efficace.

Ces constatations ont suggéré le développement de méthodes où les directions de recherche ne sont plus figées aux vecteurs de base de  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$ , mais sont réactualisées de manière à tenir compte de l'historique du processus. On prend soin de choisir un jeu de directions linéairement indépendantes de telle sorte que la minimisation suivant l'une d'entre elles ne soit pas parasitée par la même opération dans une autre direction ; on se prémunit ainsi d'une boucle interminable sur le jeu de directions.

#### Principe de la méthode de Rosenbrock

Rosenbrock est le premier à proposer une méthode à directions de recherche adaptatives dont le but original était de résoudre le problème de minimisation de sa célèbre fonction « banane » qui présente un minimum situé dans une vallée très étroite et courbe de la forme du fruit.

La méthode de Rosenbrock procède par étapes. Chacune d'entre elles consiste en une série d'explorations suivant un ensemble de directions ( $\zeta_i^q$ ),  $i=1..N_{\text{var}}$ , fixes pour une étape donnée  $q$ , mais réactualisées d'étape en étape afin de prendre en compte les résultats obtenus au cours des recherches précédentes. Une étape se déroule de la manière suivante, où  $f$  représente la fonction coût :

- Étape 0 : On initialise les directions de recherche ( $\zeta_i^0$ ),  $i=1..N_{\text{var}}$ , par les vecteurs de base de  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$ .
- Étape  $q$  : Un essai de minimisation des  $N_{\text{var}}$  variables est réalisé suivant chaque direction de recherche  $\zeta_i^q$  alternativement, jusqu'à ce qu'au moins un succès et un échec soient rencontrés dans chaque direction. Un essai consiste à se déplacer du point courant  $\mathbf{p}^q$ , vecteur des variables de contrôle à l'étape  $q$ , d'une distance  $e_i$  dans la direction  $\zeta_i^q$ .
- Si  $f(\mathbf{p}^q + e_i \zeta_i^q) < f(\mathbf{p}^q)$ , l'essai est un succès et l'on augmente le déplacement  $e_i$  d'un facteur  $\alpha > 1$  pour le prochain test.
  - Si en revanche  $f(\mathbf{p}^q + e_i \zeta_i^q) > f(\mathbf{p}^q)$ , l'essai est un échec et  $e_i$  est multiplié par un facteur  $-1 < \beta < 0$  de manière à explorer la direction opposée lors de l'essai suivant.

On remarquera que le processus converge forcément puisqu'en cas d'échecs successifs,  $e_i$  devient si petit que la valeur de la fonctionnelle  $f$  ne varie presque plus.

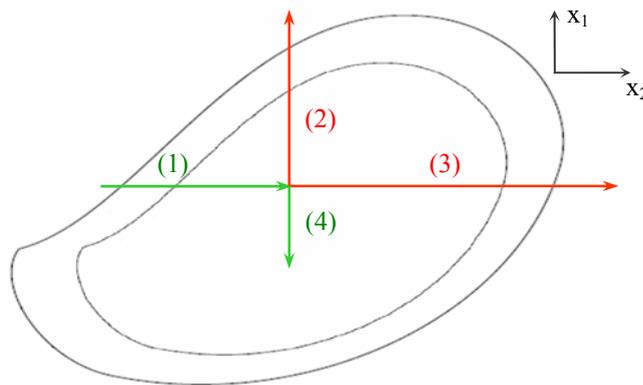


Figure 3.9 : Déroulement d'une étape du processus d'optimisation de Rosenbrock dans le cas simple où seules deux variables sont optimisées.

La Figure 3.9 illustre le déroulement d'une étape du processus de Rosenbrock appliqué à la minimisation d'une fonctionnelle dépendant de deux variables. Les directions de recherche  $x_1$  et  $x_2$  sont orthogonales. L'étape comporte quatre essais indexés (1) à (4) et donc quatre évaluations de la fonctionnelle. Les déplacements effectués à chaque essai sont représentés par des flèches, de couleur verte lorsque l'essai réussit et rouge dans le cas contraire.

Après un succès dans la première direction  $x_1$  et un échec dans la direction orthogonale  $x_2$ , on tente un nouvel essai dans la direction  $x_1$  en multipliant le déplacement précédent par deux, puis un essai dans la direction  $(-x_2)$  égal à la moitié du déplacement du test précédent. Le premier échoue tandis que le second réussit, ce qui termine l'étape, un succès et un échec ayant été trouvés dans chaque direction d'exploration.

### Mise à jour des directions de recherche

Les directions de recherche sont ensuite mises à jour en tenant compte des déplacements effectués durant les essais de minimisation, et plus particulièrement en favorisant la direction du

déplacement total qui correspond à la direction d'amélioration trouvée. Soit  $d_i$  la somme des déplacements  $e_i$  ayant conduit à un succès dans la direction  $\zeta_i^q$ , on définit le vecteur  $\mathbf{A}_i$  correspondant à la somme des déplacements effectués dans les directions  $\zeta_j^q, j \geq i$  par :

$$\mathbf{A}_i = \sum_{j=i}^{N_{\text{var}}} d_j \zeta_j^q \quad (3.49)$$

On calcule alors la nouvelle base des directions de recherche qui privilégie le déplacement  $\mathbf{A}_i$  représentant le déplacement total réalisé à l'étape  $q$ .

Les nouveaux vecteurs doivent être orthogonaux et unitaires. Ils sont déterminés à partir d'une procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir des vecteurs  $\mathbf{A}_i$  :  $\zeta_1^{q+1}$  est obtenu par projection de  $\mathbf{A}_1$  dans le sous espace orthogonal à  $\zeta_1^{q+1}$  et ainsi de suite pour les autres composantes :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 \\ \zeta_1^{q+1} = \frac{\mathbf{B}_1}{|\mathbf{B}_1|} \\ \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 - (\mathbf{A}_2 \cdot \zeta_1^{q+1}) \zeta_1^{q+1} \\ \zeta_2^{q+1} = \frac{\mathbf{B}_2}{|\mathbf{B}_2|} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{N_{\text{var}}} = \mathbf{A}_{N_{\text{var}}} - \sum_{j=1}^{N_{\text{var}}-1} (\mathbf{A}_{N_{\text{var}}} \cdot \zeta_j^{q+1}) \zeta_j^{q+1} \\ \zeta_{N_{\text{var}}}^{q+1} = \frac{\mathbf{B}_{N_{\text{var}}}}{|\mathbf{B}_{N_{\text{var}}}|} \end{cases} \quad (3.50)$$

La famille  $(\zeta_i^{q+1}), i=1..N_{\text{var}}$ , constitue bien une base de  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$  puisque les vecteurs  $\mathbf{A}_i$  sont linéairement indépendants lorsque  $d_i \neq 0$  à l'étape  $q$  pour tout  $i$ .

Grâce à cette mise à jour, le processus s'adapte localement à la topologie de la fonctionnelle et la vitesse de convergence est bien supérieure à celle des méthodes où les directions de recherche sont fixes.

### Amélioration de Palmer pour la mise à jour des directions de recherche

Swann (1964, [143]), également à l'origine d'une méthode de minimisation multidirectionnelle reposant sur un principe identique à l'algorithme de Rosenbrock, montre que la procédure de mise à jour des directions de recherche de Rosenbrock s'interrompt si l'une des distances  $d_i$  représentant la somme de tous les « bons » déplacements  $e_i$  réalisés dans la direction  $\zeta_i$  est nulle. En effet, si par exemple  $d_p = 0$  où  $1 \leq p \leq N_{\text{var}}$ , alors  $\zeta_{p+1}$  est indéterminé et la boucle s'arrête (si  $d_p = 0$ , alors  $\mathbf{A}_p = \mathbf{A}_{p+1}$  et  $\mathbf{B}_{p+1} = \mathbf{0}$ ).

Dans son article, Rosenbrock élude la difficulté en assurant qu'aucune distance  $d_i$  ne peut être nulle. Cependant, il s'avère que un ou plusieurs  $d_i$  peuvent s'annuler. Pour éviter le problème décrit entre parenthèses, Swann réorganise les vecteurs  $\mathbf{A}_i$  de manière à placer les vecteurs dont les déplacements  $d_i$  sont nuls ou presque à la fin de la liste. Il applique alors la procédure de mise à jour

sur les premiers vecteurs  $\mathbf{A}_i$  uniquement, pour lesquels  $d_i \neq 0$ , les autres directions restant inchangées. Les nouvelles directions créées sont orthogonales lorsque les  $d_i$  concernés sont exactement nuls, et lorsque les  $d_i$  sont presque nuls, le manque d'orthogonalité est très petit (le produit scalaire a une valeur inférieure à  $10^{-6}$ ).

Palmer (1968, [117]) propose une autre approche pour résoudre le problème. Il montre que  $\mathbf{B}_{p+1}$  est proportionnel à  $d_p$  de sorte que lorsque l'on calcule leur quotient pour trouver la direction  $\zeta_{p+1}$ , la direction reste déterminée pour  $d_p = 0$ , sous réserve que la condition (3.51) est vérifiée. Dans ce cas,  $\zeta_{p+1}^{q+1} = \zeta_p^q$ .

$$\sum_{j=p+1}^{N_{\text{var}}} d_j^2 = |\mathbf{A}_{p+1}| \neq 0 \quad (3.51)$$

En plus de traiter le cas où une ou plusieurs distances  $d_i$  sont nulles, la méthode de Palmer apporte un avantage supplémentaire à la solution de Swann en terme de rapidité de calcul et de mémoire de stockage : le nombre d'additions et de soustractions, ainsi que l'espace de stockage sont réduits d'un facteur  $N_{\text{var}}$  et le nombre de multiplications d'un facteur  $N_{\text{var}}/2$ .

La mise à jour des directions de recherche de Palmer est celle que nous avons adoptée ; elle se fait de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \geq i}}^{N_{\text{var}}} d_j \zeta_i^q \\ t_i = |\mathbf{A}_i|^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \geq i}}^{N_{\text{var}}} d_j^2 \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\zeta_{i+1}^{q+1} = \frac{d_{i-1} \mathbf{A}_i - t_i \zeta_{i-1}^q}{\sqrt{t_i \times t_{i-1}}}$$

### 3.4.3.3 Méthode Simplexe

#### Historique de la méthode Simplexe

L'algorithme original de la méthode Simplexe est du à Spendley, Hext & Himmsworth en 1962 [140]. Les chercheurs étaient motivés par le fait que toutes les méthodes directes connues jusqu'alors nécessitaient entre  $2N_{\text{var}}$  et  $2^{N_{\text{var}}}$  évaluations de la fonction coût par itération pour aboutir au minimum. Selon eux, le processus ne devait pas prendre plus de  $N_{\text{var}}+1$  évaluations pour identifier une direction de recherche. En effet, les  $N_{\text{var}}+1$  points issus des évaluations de la fonctionnelle définissent une base de l'espace  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$ , et  $N_{\text{var}}+1$  évaluations sont requises pour le calcul du gradient de la fonctionnelle par différences finies. Parallèlement, les  $N_{\text{var}}+1$  points mis en jeu forment un polygone ou simplexe dans l'espace des variables de contrôle  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$ , d'où le nom de la méthode. L'idée originelle de Spendley, Hext & Himmsworth est de construire un simplexe non dégénéré dans  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$  (ie qui enveloppe un volume fini de dimension  $N_{\text{var}}$ ) pour déplacer le simplexe et conduire la recherche du minimum.

La méthode Simplexe a été généralisée par Nelder & Mead en 1965 [112] qui optimisent la recherche de l'optimum en faisant varier la taille du simplexe par des opérations d'expansion ou de

contraction. Plutôt que de déplacer le simplexe d'une longueur constante au cours de la recherche de l'optimum, comme dans la méthode originale de Spendley, Hext & Himmsworth, le simplexe est adapté à la topologie locale. Cela permet d'améliorer la robustesse et la rapidité de l'algorithme. La méthode Simplexe de Nelder & Mead est actuellement la méthode d'optimisation directe la plus utilisée à l'heure actuelle.

La variante la plus récente de l'algorithme Simplexe est celle de Torczon (Torczon, 1989, [146], Dennis & Torczon, 1991,[47]), conçue pour une utilisation sur architecture parallèle. Les  $N_{\text{var}}$  évaluations à chaque itération sont assurées par  $N_{\text{var}}$  processeurs, ce qui ramène le coût de calcul à une opération par itération. Mais jusqu'à présent, il n'existe pas de preuve concernant la supériorité de la méthode en terme de vitesse de convergence par rapport à la version de Nelder & Mead.

La méthode Simplexe est une méthode pour laquelle on a maintenant de solides preuves théoriques de convergence pour les fonctionnelles convexes (Shekarforoush, Berthod & Zerubia, 1995, [136]) ou vers un point stationnaire pour les fonctionnelles réelles (Lagarias, Reeds, Wright, 1998, [94]). Mais des interrogations persistent en ce qui concerne son comportement dans les espaces de dimension importante (Kinnon, 1998, [89]).

### **Principe de la méthode Simplexe de Nelder & Mead**

L'idée est d'encadrer un volume d'espace et de le faire se déplacer autour de l'optimum trouvé, sa taille pouvant varier au cours du processus. À chaque itération, on retient ainsi  $N_{\text{var}}+1$  points appelés  $P_i$ ,  $i=1..N_{\text{var}}+1$ , qui peuvent être vus comme les sommets d'un simplexe, et qui encadrent le minimum courant. La comparaison des valeurs de la fonctionnelle aux différents points du simplexe guide la recherche du minimum.

À chaque étape, on remplace le « plus mauvais point », c'est-à-dire le point maximisant la fonctionnelle dans le cas où l'on cherche un minimum, par le meilleur point possible. Pour trouver le point optimal de remplacement, Nelder & Mead commencent par reprendre la méthode suggérée par Spendley, Hext & Himmsworth : une réflexion du plus mauvais point est réalisée par rapport au plan formé par les  $N_{\text{var}}$  autres points. Nelder & Mead ajoutent ensuite des transformations d'expansion ou de contraction du simplexe selon la valeur de la fonctionnelle au point trouvé. Si la direction du centroïde du simplexe vers le point réfléchi semble prometteuse, on réalise alors une extension du simplexe dans cette nouvelle direction. Dans le cas contraire, on considère que le simplexe est trop grand et il est contracté le long de l'axe du plus mauvais point vers le centroïde, voire même suivant toutes les directions vers le meilleur point.

### **Déroulement d'une itération**

Le processus d'optimisation de la méthode Simplexe de Nelder & Mead décompose le déplacement du simplexe en quatre mouvements : la réflexion, l'expansion, la contraction et la réduction. La Figure 3.10 donne une représentation géométrique de ces différentes opérations dans le cas simple d'un problème à deux variables d'optimisation où le simplexe appartient au plan bidimensionnel  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Ci-dessous nous décrivons les différentes transformations du simplexe pouvant survenir lors de la recherche du minimum ; de même que précédemment, on note  $f$  la fonction coût.

*Initialisation* : Dans une première étape, on commence par construire un simplexe non dégénéré et on évalue la valeur de la fonctionnelle à chacun de ses sommets. Nous reviendrons plus en détails sur le simplexe initial ultérieurement.

*Classement des points* : Cette étape consiste à identifier le point  $P_j$  qui maximise  $f$  et à réordonner les points de telle sorte que :  $f(P_1) < f(P_2) < \dots < f(P_{N_{\text{var}}+1})$  où  $P_1$  représente le « meilleur point » minimisant la fonctionnelle, et  $P_{N_{\text{var}}+1}$  le moins bon.

*Réflexion* : On effectue ensuite la réflexion du plus mauvais point  $P_{N_{\text{var}}+1}$  par rapport au plan défini par les  $N_{\text{var}}$  autres points du simplexe (cf Figure 3.10.b)). Le point réfléchi  $P_r$  est tel que :

$$P_r = C + \alpha(C - P_{N_{\text{var}}+1}) , C = \frac{1}{N_{\text{var}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{var}}} P_i \quad (3.53)$$

où  $C$  est le centroïde des  $N_{\text{var}}$  meilleurs points du simplexe et où  $\alpha$  est un coefficient de réflexion positif, en général pris égal à 1. En stoppant le processus à cette étape, on retrouve l'algorithme initial de Spendley, Hext & Himmsworth.

Si  $f(P_1) < f(P_r) < f(P_{N_{\text{var}}})$ , le point réfléchi est meilleur que le plus mauvais point ; on remplace donc  $P_{N_{\text{var}}+1}$  par  $P_r$ .

*Expansion* : Lorsque le mouvement de réflexion est particulièrement réussi, c'est-à-dire lorsque  $f(P_r) < f(P_1)$ , le point réfléchi devient le meilleur point, et l'on considère que la direction reliant  $P_r$  au centroïde du simplexe est une bonne direction de prospection. On tente d'allonger le simplexe dans cette direction (Figure 3.10.c)) en créant le point d'extension  $P_e$  défini de la manière suivante où  $\gamma$  est le coefficient d'extension supérieur à 1 ( $\gamma=2$  dans la plupart des cas) :

$$P_e = \gamma P_r + (1 - \gamma)C \quad (3.54)$$

Si  $f(P_e) < f(P_r)$ , l'expansion a réussi puisque le point étendu est encore meilleur que le point réfléchi et donc *a fortiori* que le meilleur point de l'itération précédente, et l'on remplace  $P_{N_{\text{var}}+1}$  par  $P_e$ .

Si, en revanche,  $f(P_e) \geq f(P_r)$ , l'expansion a échoué et le point réfléchi est conservé comme substitut de  $P_{N_{\text{var}}+1}$ .

*Contraction* : Dans le cas où le mouvement de réflexion échoue (ie  $f(P_r) > f(P_{N_{\text{var}}})$ ), on considère qu'il faut contracter le simplexe.

Lorsque  $f(P_r) > f(P_{N_{\text{var}}+1})$ , le point réfléchi est encore moins bon que le plus mauvais point de l'itération précédente ; on essaye alors de contracter le simplexe de manière à favoriser les déplacements orthogonalement au mouvement de réflexion (Figure 3.10.d)). Le point contracté est alors défini par l'expression ci-dessous,  $\beta$  étant le coefficient de contraction tel que  $0 < \beta < 1$ , souvent pris égal à  $1/2$  :

$$P_c = \beta P_{N_{\text{var}}+1} + (1 - \beta)C \quad (3.55)$$

Si  $f(P_{N_{\text{var}}}) < f(P_r) < f(P_{N_{\text{var}}+1})$ , on tente de contracter le simplexe dans la direction liant  $P_{N_{\text{var}}}$  au centroïde (Figure 3.10.e)) :

$$P_c = \beta P_r + (1 - \beta)C \quad (3.56)$$

**Réduction** : Le point contracté remplace alors le plus mauvais point à moins que  $f(P_c) > f(P_{N_{var}+1})$ . Dans ce cas le simplexe n'est pas encore assez réduit et on décide de le réduire de moitié en le contractant suivant toutes les directions vers le meilleur point  $P_1$ .

Dans le cas représenté en Figure 3.10.f) où  $f(P_r) > f(P_{N_{var}+1})$ , le nouveau simplexe est défini par les points :

$$P'_i = \frac{P_i + P_1}{2}, i > 1 \tag{3.57}$$

Si  $f(P_r) < f(P_{N_{var}+1})$ , le point réfléchi remplace le plus mauvais point et le simplexe subit la même réduction que dans le cas précédent (Figure 3.10.g)).

La procédure se poursuit jusqu'à ce que la condition de convergence soit vérifiée,  $|f(P_{N_{var}+1}) - f(P_1)| < Tol$ , où  $Tol$  est un paramètre de tolérance fixé.

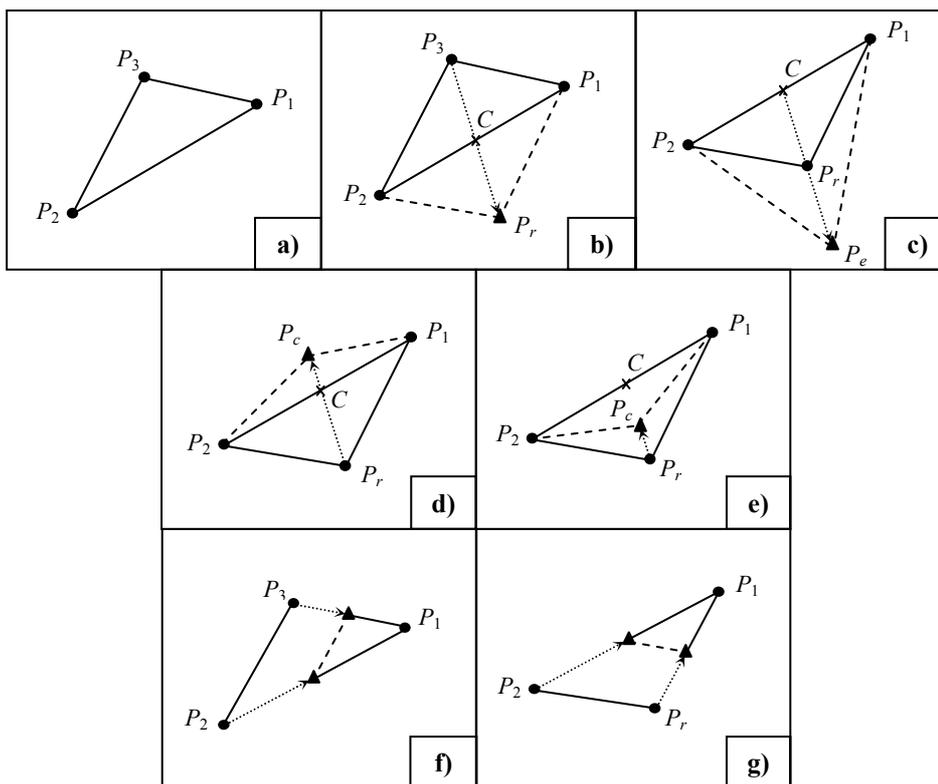


Figure 3.10 : Transformations du simplexe au cours du processus de minimisation de Nelder & Mead pour un problème à deux variables d'optimisation :

- a) Simplexe initial, b) Réflexion, c) Expansion,
- d) Contraction dans le cas où  $f(P_{N_{var}}) < f(P_r) < f(P_{N_{var}+1})$ , e) Contraction dans le cas où  $f(P_r) > f(P_{N_{var}+1})$ , f) Réduction dans le cas où  $f(P_r) > f(P_{N_{var}+1})$ , g) Réduction dans le cas où  $f(P_r) < f(P_{N_{var}+1})$ .

En Figure 3.11, on a représenté l'évolution du simplexe au cours du processus d'optimisation dans le cas d'un problème à deux variables d'optimisation. Après huit transformations, la méthode a convergé vers le minimum.

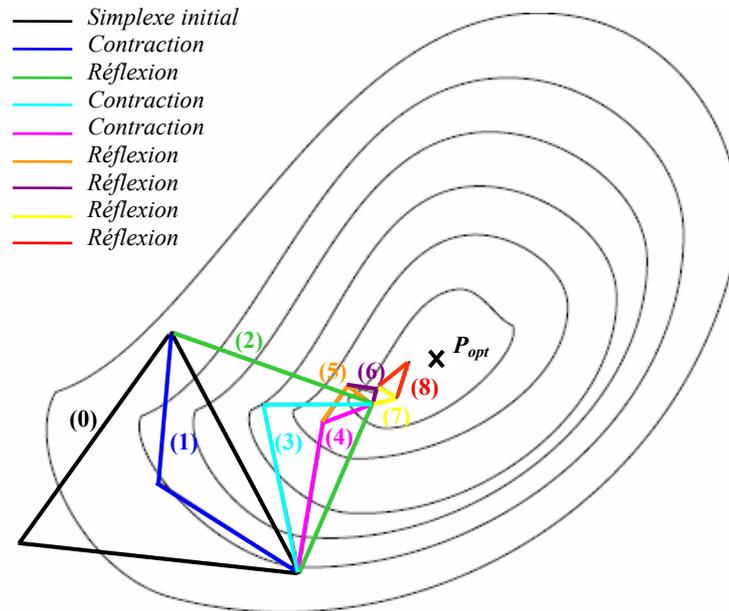


Figure 3.11 : Illustration du processus d'optimisation par méthode Simplexe.

Des variantes de la méthode présentée ci-dessus avec des coefficients  $(\alpha, \gamma, \beta)$  différents des coefficients classiques  $(1, 2, 1/2)$  sont parfois utilisées. Il existe également une autre approche qui consiste à tenter une interpolation quadratique le long de la plus mauvaise direction (liant  $P_{N_{\text{var}}+1}$  à  $C$ ) dès que les points  $P_{N_{\text{var}}+1}$ ,  $P_r$ ,  $P_e$  et/ou  $P_c$  ont été déterminés. L'inconvénient de cette technique est qu'elle peut conduire à un simplexe dégénéré. En outre, si le plus mauvais point est remplacé par un point se situant trop près du centroïde, le simplexe risque de se replier en hyperplan (de dimension  $N_{\text{var}}-1$ ), empêchant ainsi la poursuite du processus. Il faut donc vérifier à chaque itération la forme du simplexe afin de s'assurer une convergence correcte. (Une solution consiste à prendre  $N_{\text{var}}+2$  points au lieu de  $N_{\text{var}}+1$  points à chaque itération, mais cette astuce diminue l'efficacité de la méthode.)

### Choix du simplexe initial

Le simplexe comporte  $N_{\text{var}}+1$  sommets  $\{P_1, P_2, \dots, P_{N_{\text{var}}+1}\}$  stockés dans une matrice  $\overline{\mathbf{P}}$  de dimension  $N_{\text{var}} \times N_{\text{var}}+1$  et classés à chaque itération du meilleur au plus mauvais selon la valeur prise par la fonctionnelle en ces points (de  $\overline{\mathbf{P}}(:,1)$  à  $\overline{\mathbf{P}}(:, N_{\text{var}}+1)$ ). L'hypothèse initiale est que le meilleur point est constitué par la première estimation des paramètres de contrôle représentée par le vecteur  $\mathbf{P}_{\text{ini}}$  (L. Pfeffer et Stanford). On définit alors les  $N_{\text{var}}$  autres sommets du simplexe de départ à partir du sommet initial. Deux méthodes peuvent être envisagées.

La première consiste à déplacer le simplexe unitaire de dimension  $N_{\text{var}}$  (ie la matrice unité de dimension  $N_{\text{var}}$ ) de l'origine jusqu'au point initial. Le simplexe initial a alors pour sommets les points

suivants, regroupés dans la matrice  $\bar{\mathbf{P}}$  :

$$\bar{\mathbf{P}}(i, l) = \mathbf{P}_{\text{ini}} \quad , \quad \text{pour } i = 1..N_{\text{var}}$$

$$\bar{\mathbf{P}}(i, j) = \begin{cases} \bar{\mathbf{P}}(i, j-1) + 1 & \text{si } i = j-1 \\ \bar{\mathbf{P}}(i, j-1) & \text{si } i \neq j-1 \end{cases} \quad , \quad \text{pour } \begin{cases} i = 1..N_{\text{var}} \\ j = 2..N_{\text{var}} + 1 \end{cases} \quad (3.58)$$

Une deuxième méthode proposée par Pfeffer a été employée dans la version de l'algorithme Simplexe que nous avons implémentée. Les  $N_{\text{var}}$  autres points du simplexe sont obtenus en déplaçant le point initial selon chaque vecteur de base de  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$  tour à tour, de 5% de la coordonnée correspondante si elle est non nulle, et de 0.0025 sinon :

$$\bar{\mathbf{P}}(i, l) = \mathbf{P}_{\text{ini}} \quad , \quad \text{pour } i = 1..N_{\text{var}}$$

$$\bar{\mathbf{P}}(i, j) = \begin{cases} (1 + 0.05)\bar{\mathbf{P}}(i, 1) & \text{si } \bar{\mathbf{P}}(i, 1) \neq 0 \\ 0.0025 & \text{si } \bar{\mathbf{P}}(i, 1) = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{pour } \begin{cases} i = 1..N_{\text{var}} \\ j = i + 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

Cette méthode génère un simplexe dont les arêtes ont une longueur et une direction particulières suivant les différentes directions qui dépendent du point initial. Si la solution optimale est dans la même direction, alors ce simplexe peut accélérer le processus d'optimisation. Le risque de cette approche est que le polygone initial soit très plat (ie d'angles aigus) si la direction correspondant à la coordonnée initiale est orthogonale à la direction qui mène à l'optimum. Il faudra alors plus de temps au processus pour aboutir au minimum, si toutefois il n'échoue pas. Notons que les valeurs des déplacements initiaux peuvent être ajustés de manière à éviter l'échec.

### Remarques

Les avantages de la méthode Simplexe par rapport aux méthodes directionnelles sont multiples. Tout d'abord, comme on utilise toujours le plus grand pas possible pour explorer une direction de recherche, la méthode est peu sensible aux minima locaux ou aux bruitages causés par d'éventuelles erreurs d'arrondi ou des erreurs statistiques. En outre, chaque direction de recherche est une direction « intelligente », en comparaison à la méthode de Rosenbrock par exemple, où une seule direction principale est « intelligente », les autres servant surtout à explorer l'espace le long d'axes orthogonaux de manière à déterminer le nouvel axe principal.

### 3.4.4 Application à notre problème

Les méthodes d'optimisation basées sur le gradient de la fonctionnelle sont particulièrement intéressantes de par leur rapidité de convergence, leur faible dépendance par rapport au nombre de variables d'optimisation et leur capacité de prise en compte de contraintes complexes. Ce sont en outre des méthodes dont on a des preuves théoriques de convergence, contrairement aux méthodes directes, comme nous l'avons souligné précédemment.

Cependant, leur mise en œuvre nécessite le calcul du gradient de la fonctionnelle étudiée par rapport aux variables d'optimisation, ce qui peut se révéler une opération délicate et coûteuse en temps

de calcul dans le cas où la fonction n'est pas connue analytiquement, et si son évaluation passe par une simulation numérique.

Dans notre problème de minimisation de l'erreur d'assimilation, la fonctionnelle est connue explicitement si un modèle de houle analytique au second ordre de perturbation est utilisé. Une méthode d'optimisation avec gradient est donc facilement utilisable dans ce cas de figure. En revanche, pour les ordres de non-linéarité supérieurs, l'évaluation de la fonction passe par une simulation HOS, comme vu au paragraphe 3.2.2.3. Comme nous allons le voir, des méthodes indirectes ont été envisagées pour le calcul du gradient de la fonctionnelle, mais trop complexes ou coûteuses en temps de calcul, elles ont été mises à l'écart et on a préféré employer les méthodes d'optimisation directes présentées au paragraphe 3.4.3.

### 3.4.4.1 Calcul du gradient de la fonctionnelle dans le cas d'un modèle de houle analytique à l'ordre deux

Rappelons l'expression de l'erreur d'assimilation mesurant l'écart entre l'élévation de la surface libre relevée par la sonde et l'élévation reconstruite à l'aide du modèle de houle. Pour plus de simplicité, nous nous plaçons dans le cas où une seule sonde localisée en  $\mathbf{x}_0$  mesure le champ de vagues pendant une période de  $T$  secondes :

$$\varepsilon_{ass} = \left\{ \int_0^T W(\mathbf{x}_0, t) [\eta(\mathbf{x}_0, t) - \tilde{\eta}^0(t)]^2 dt \right\}^{1/2}$$

La fonction poids  $W(\mathbf{x}_0, t)$  étant indépendante des variables d'optimisation  $(\mathbf{p})_i$  (ayant pour valeur soit le module de l'amplitude linéaire complexe  $|a_i^{(1)}|$  de l'onde  $i$ , soit la phase correspondante  $\varphi_i^{(1)}$ ), seule l'élévation de la surface libre calculée au second ordre varie. Le gradient de la fonctionnelle  $\varepsilon_{ass}$  par rapport aux variables d'optimisation a donc pour expression :

$$\nabla \varepsilon_{ass} = \varepsilon_{ass}^{-1} \int_0^T W(\mathbf{x}_0, t) [\eta(\mathbf{x}_0, t) - \tilde{\eta}^0(t)] \nabla \eta(\mathbf{x}_0, t) dt \quad (3.60)$$

La  $i^{\text{ème}}$  composante  $(\nabla \varepsilon_{ass})_i$  prend une valeur différente si la variable d'optimisation considérée est une amplitude ou une phase. En décomposant l'élévation au second ordre en profondeur infinie comme la somme d'un terme constant, d'un terme de Stokes et de termes somme et différence (comme décrit en Annexe A), puis en dérivant chaque composante par rapport aux amplitudes puis aux phases linéaires, on obtient les expressions des dérivées partielles en fonction de la variable considérée :

Si  $(\mathbf{p})_i = |a_i^{(1)}|$ , on obtient :

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{x}_0, t)}{\partial |a_i|} = 2 \left( G_{ii}^c |a_i| + G_{ii}^s |a_i| \cos(2\theta_i) \right) + \frac{1}{g} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N_{var}} G_{ij}^+ |a_j| \cos(\theta_i + \theta_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N_{var}} G_{ij}^- |a_j| \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \quad (3.61)$$

Si  $(\mathbf{p})_i = \varphi_i^{(1)}$ , la dérivée partielle de l'erreur d'assimilation s'écrit :

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \varphi_i} = 0 - 2G_{ii}^s |a_i|^2 \sin(2\theta_i) - \frac{1}{g} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N_{\text{var}}} G_{ij}^+ |a_i| |a_j| \sin(\theta_i + \theta_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N_{\text{var}}} G_{ij}^- |a_i| |a_j| \sin(\theta_i - \theta_j) \right) \quad (3.62)$$

où  $\theta_i$  représente la fonction de phase de l'onde  $i$ . Les termes de couplage  $G_{ij}$  sont rappelés dans l'Annexe A.

### 3.4.4.2 Méthodes de calcul envisagées dans le cas du modèle de houle HOS d'ordre élevé

Outre la méthode de différentiation symbolique peu pertinente dans notre cas de figure, deux grands types de méthodes peuvent être utilisées pour évaluer le gradient de l'erreur d'assimilation : la différentiation en mode direct, comprenant les différences finies et la différentiation automatique en mode direct, et la différentiation basée sur la résolution d'un système adjoint, qui peut également se faire par différentiation automatique, en mode inverse cette fois.

#### Calcul symbolique

La méthode de différentiation symbolique est celle que l'on peut trouver dans certains logiciels de calcul, comme le logiciel MAPLE (MAThematical PLEasure). Elle nécessite que la fonction que l'on souhaite dériver soit symboliquement représentée par des fonctions mathématiques. Ceci exclut toutes les instructions conditionnelles, les boucles ou encore les appels à des sous-routines, ce qui est totalement incompatible avec l'implémentation de la méthode HOS. Il s'agit d'une automatisation de la dérivation qui peut se faire « à la main » et qui est donc peu adaptée aux problèmes où le vecteur des paramètres de contrôle est de grande dimension.

#### Approximation par différences finies

La méthode la plus simple pour évaluer le gradient de la fonctionnelle  $f$  est d'approximer les dérivées partielles de la fonction en analysant l'effet de petites perturbations  $\delta p_i$  sur la valeur de  $f$ . On peut utiliser un schéma décentré :

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{f(p_i + \delta p_i) - f(p_i)}{\delta p_i}, \quad i = 1 \dots N_{\text{var}} \quad (3.63)$$

ou un schéma centré, plus précis, mais plus coûteux car requérant deux fois plus d'évaluations de la fonctionnelle :

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{f(p_i + \delta p_i) - f(p_i - \delta p_i)}{2\delta p_i}, \quad i = 1 \dots N_{\text{var}} \quad (3.64)$$

Cette approche est particulièrement simple à mettre en œuvre puisqu'elle consiste en une succession d'évaluations de la fonctionnelle et ne requiert pas la réécriture du code de calcul. Son utilisation est toutefois très limitée puisque le nombre d'évaluations est proportionnel au nombre de variables d'optimisation du problème :  $N_{\text{var}}+1$  évaluations de  $f$  sont nécessaires dans le cas d'une approximation décentrée et  $2N_{\text{var}}$  évaluations dans le cas d'un schéma centré. L'approximation par différences finies est donc à éviter lorsque le nombre de paramètres d'optimisation est élevé, ou lorsque le calcul de la fonctionnelle a un coût trop important.

Par ailleurs, la précision de l'approximation est fortement dépendante du paramètre de perturbation  $\delta p_i$  : le calcul (3.63) ou (3.64) doit se faire pour un paramètre de taille réduite, proche de zéro, pour éviter d'obtenir des valeurs complètement erronées. Il doit ensuite être ajusté pour le problème considéré afin d'optimiser la précision du résultat : on constate en effet qu'un  $\delta p_i$  trop faible peut générer un cumul d'erreurs d'arrondis, et qu'une valeur trop importante conduit à des erreurs de troncature, et donc à une mauvaise estimation du gradient. Le choix du paramètre de perturbation est donc généralement très délicat et plusieurs valeurs doivent être testées.

Finalement, la technique d'approximation du gradient par différences finies est fort coûteuse, d'autant plus que chaque évaluation de la fonctionnelle requiert dans notre cas une simulation HOS entre 0 et  $T$  (cf 3.2.2), et fournit des résultats dont la précision n'est pas maîtrisée. Nous avons donc préféré écarter cette méthode de calcul.

## Méthode adjointe

La méthode adjointe fait partie des méthodes de différentiation inverses qui consistent non pas à évaluer l'impact de petites perturbations des variables d'entrée sur les variables de sortie, mais à déterminer l'origine de perturbations des variables de sortie. Il faut pour cela déterminer à partir du modèle initial direct de fonction  $C$ , calculant la prévision du modèle associée à un jeu de variables d'entrée (équation (3.65)), le « modèle linéaire tangent » et le « modèle adjoint ».

La linéarisation du modèle autour d'un vecteur de contrôle initial  $p_0$  définit le modèle linéaire tangent qui est représenté par la matrice jacobienne  $J_c(p_0)$  de la fonction  $C$ . Il représente l'évolution linéaire de l'influence de petites perturbations des variables d'entrée  $\delta p$  sur les variations des variables de sorties  $\delta y$  (équation (3.66)). Le modèle adjoint, lui aussi linéaire, est représenté par l'adjoint du jacobien  $J_c^*(p_0)$ . Il réalise un calcul en mode inverse en évaluant l'influence des paramètres de contrôle sur une perturbation donnée des variables de sortie (équation (3.67)).

$$C: p \mapsto y \quad \text{équation directe} \quad (3.65)$$

$$J_c: \delta p \mapsto \delta y \quad \text{équation tangente} \quad (3.66)$$

$$J_c^*: \delta y \mapsto p^* \quad \text{équation adjointe} \quad (3.67)$$

Dans notre cas de figure, on cherche à évaluer le gradient de l'erreur d'assimilation par rapport aux variables de contrôle représentées par le vecteur  $\mathbf{p}$ . En considérant une seule sonde de mesure  $s$  et en appelant  $C$  la fonction permettant de passer des ondes libres à l'élévation de surface libre reconstruite à l'ordre  $M$  en la position de la sonde, on montre que :

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_{\text{ass}}(\mathbf{p}_0) = \int_0^T J_c^*(\mathbf{p}_0)(C_t(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t)) dt \quad (3.68)$$

où  $\mathbf{p}_0$  est un vecteur de paramètres de contrôle donné. Dans le cas d'observations discrètes le gradient prend la forme :

$$\nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{ass}(\mathbf{p}_0) = \sum_{n=1}^{N_{obs}} J_c^*(\mathbf{p}_0)(C_n(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t_n)) \quad (3.69)$$

La différence  $C_n(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t)$  ou  $C_n(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t_n)$  dans le cas discret peut être considérée comme un forçage du modèle adjoint. Les détails du calcul sont donnés en Annexe D.

La procédure de calcul de gradient par méthode adjointe consiste donc dans un premier temps en une intégration du modèle direct de 0 à  $T$ , ce qui nous permet de comparer la solution obtenue avec le modèle, aux observations. Cette perturbation est introduite dans un second temps comme un forçage sur l'écart modèle/observations à chaque instant  $t$  au modèle adjoint, qui simule l'évolution du modèle en sens inverse. Dans le cas d'observations discrètes, le forçage se fait à chaque pas de temps de la simulation inverse aux instants  $t_n$  auxquels les observations sont disponibles. La Figure 3.12 illustre les principales étapes du processus de calcul du gradient par méthode adjointe que nous venons de décrire.

La difficulté de la méthode réside dans l'écriture des équations linéaires tangentes et adjointes. Dans notre cas de figure, la fonction  $C$  est la composée d'une fonction effectuant le calcul du champ initial au second ordre initialisant le modèle HOS, et de la simulation HOS sur toute la période de mesure. La première pouvant être différenciée analytiquement (3.4.4.1), seule l'évaluation HOS requiert une approche par méthode adjointe. Le gradient de l'erreur d'assimilation peut ensuite être obtenu en composant les gradients des deux fonctions.  $C$  représente donc uniquement les équations HOS.

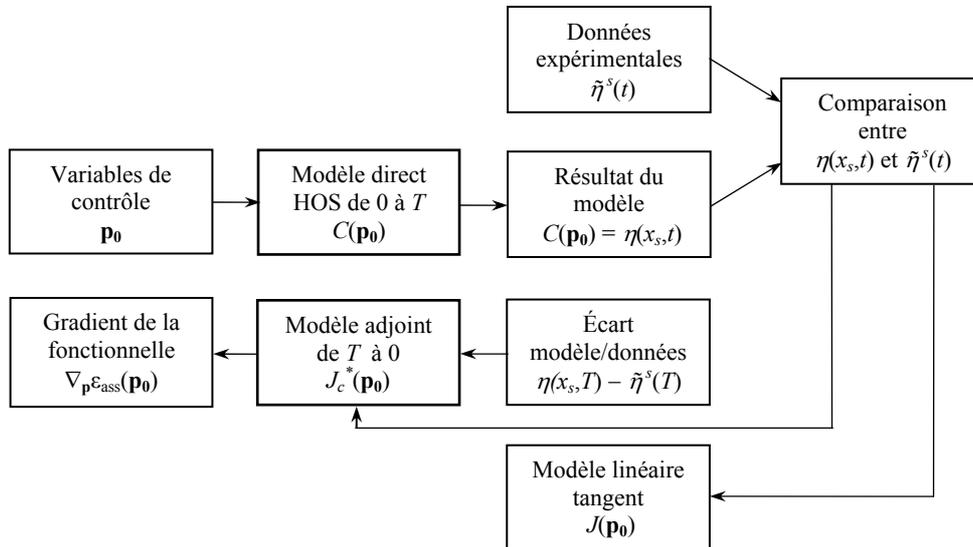


Figure 3.12 : Principales étapes du processus de différentiation avec calcul de l'adjoint.

Il s'agit de réécrire les équations d'avance (CCLS et CDSL) de la manière suivante :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = C(\mathbf{X}(t)) \quad (3.70)$$

où le vecteur  $\mathbf{X}$  représente les variables  $(\eta(t), \phi(t))$ . Ces équations sont différentes selon l'ordre de non-linéarité  $M$  voulu, ce qui signifie que la fonction  $C$  doit être calculée pour chaque ordre choisi. L'utilisation de cette méthode représente donc un travail d'implémentation très conséquent dès que l'on veut employer un nouvel ordre de non-linéarité  $M$ . Ceci est d'autant plus vrai, que l'écriture de la vitesse verticale intervenant dans les équations du modèle HOS en fonction des grandeurs  $(\eta(t), \phi(t))$  passe par la résolution de deux systèmes triangulaires (cf 1.3.3). Par ailleurs, plus l'ordre de non-linéarité est élevé, plus les équations régissant l'évolution HOS de la houle sont complexes et plus les modèles linéaires tangent et surtout sont difficiles à obtenir.

Aragh (2008, [3]), qui s'est intéressé au même problème que le notre et qui utilise les équations de propagation HOS à l'ordre 3, s'est ainsi limité à l'écriture des modèles linéaires tangent et adjoint à l'ordre 1. Le gradient de la fonction coût est donc calculé à partir d'un modèle simplifié, d'ordre de non-linéarité inférieur à l'ordre du modèle réellement utilisé pour propager la houle, ce qui détériore la précision de la solution par rapport au modèle non-linéaire considéré. L'intérêt de la méthode adjointe d'obtenir des dérivées exactes, ou tout au moins une approximation très précise du gradient, est alors moindre.

En conclusion, bien que la méthode de différentiation par calcul de l'adjoint permette théoriquement d'obtenir des résultats d'une excellente précision pour un faible coût de calcul, la complexité et le coût de mise en œuvre de la procédure pour notre modèle HOS ont été rédhibitoires.

## Différenciation automatique

Le procédé de différentiation automatique consiste à générer, à partir d'un code de calcul évaluant une fonction  $f$ , un nouveau programme qui évalue les valeurs exactes (aux erreurs d'arrondi près) des dérivées partielles analytiques de la fonction. Cette méthode n'impose pas que la fonction soit représentée exclusivement par des expressions mathématiques comme dans le cas du calcul symbolique, mais uniquement qu'elle soit représentée par un code informatique. Cela permet la présence des instructions symboliques et offre un gain en temps de calcul considérable.

La méthode repose sur la représentation de chaque ligne du code de calcul par une fonction élémentaire, le code global étant vu comme la composition de  $n$  fonctions, si  $n$  est le nombre de lignes du code. La différentiation automatique consiste alors à appliquer la dérivation composée à chaque fonction élémentaire, c'est-à-dire à chaque ligne du code. Les formules de composition peuvent être appliquées de deux manières différentes, que l'on appelle modes de différentiation automatique, en « mode direct » et en « mode inverse ».

La différentiation directe est la plus simple et la plus intuitive. Elle consiste à évaluer les effets de perturbations des variables d'entrée en suivant l'ordre des instructions du code original. Le code est différencié ligne par ligne, générant ainsi ce que l'on appelle le « code tangent ». Les dérivées obtenues sont plus précises et moins chaotiques que les dérivées obtenues par différences finies. Cependant, comme la perturbation de chaque variable d'entrée sur les variables de sortie doit être estimée, le calcul direct nécessite un nombre d'évaluations proportionnel au nombre de variables d'entrée (plus précisément, pour un nombre  $N_{\text{var}}$  de variables de différentiation, le calcul direct nécessite  $4N_{\text{var}}$  évaluations de la fonction, ce qui est beaucoup plus important que pour un calcul par différences finies). Ce mode de différentiation est donc à proscrire lorsque  $N_{\text{var}}$  est supérieur à quelques dizaines et convient plutôt au calcul de la dérivée d'un grand nombre de variables de sortie par rapport à un petit nombre de variables d'entrée.

Le mode de différentiation inverse est plus complexe, mais beaucoup plus adapté au calcul de gradient. Il s'agit d'évaluer les origines des perturbations des variables de sortie. Il faut pour cela

dualiser chaque ligne du code de calcul représentant la fonction mais dans l'ordre inverse à celui de son exécution, ce qui crée le code adjoint. Le mode inverse est particulièrement bien adapté aux problèmes à grande dimension d'entrée par rapport au nombre de sorties. Le coût de calcul de l'adjoint est en effet au maximum égal à cinq fois le temps nécessaire à l'évaluation de la fonction, et ce quelque soit le nombre de variables d'entrée considérées. Gilbert (2008, [66]) montre même en 2002 que le mode inverse permet toujours de calculer le gradient d'une fonction pour un coût équivalent au calcul de la fonction. Cette approche bénéficie des mêmes avantages que les méthodes standard basées sur le calcul de l'adjoint en terme de précision et de rapidité, mais elle pose des problèmes de taille mémoire. Contrairement au code tangent qui utilise les données actualisées, le code adjoint requiert à chaque pas de temps le stockage de toutes les valeurs des variables intervenant dans le calcul, ainsi que les valeurs de passage des éventuels algorithmes itératifs internes.

Au vu de ces constatations et des conclusions précédentes concernant le calcul de gradient en mode adjoint, la différentiation automatique n'a pas été appliquée à notre problème.

### 3.4.5 Synthèse

Finalement, dans le cas d'un modèle de houle analytique à l'ordre deux, où le gradient de la fonction coût est connu explicitement en fonction des variables d'optimisation que sont les amplitudes et phases des ondes libre, les méthodes avec gradient sont faciles à mettre en oeuvre et peuvent être testées et comparées aux méthodes directes applicables dans tous les cas, ainsi qu'à la procédure de découplage de Duncan & Drake décrite au paragraphe 3.3.

En revanche, si l'état de mer considéré requiert un modèle de houle d'ordre élevé utilisant le code numérique HOS, les techniques de calcul de gradient n'apparaissent pas adaptées. L'évaluation par différences finies est coûteuse en temps de calcul et sa précision est fortement dépendante du pas de discrétisation qui est délicat à trouver. Le calcul par méthode adjointe est complexe à mettre en oeuvre et fait appel à un effort d'implémentation considérable. Enfin les procédés de différentiation automatique semblent présenter de nombreux avantages, surtout en mode inverse, mais leur utilisation est plutôt limitée à des problèmes simples et n'est pas adaptée à la formulation HOS. Pour le modèle de houle HOS, les méthodes d'optimisation avec gradient sont donc délaissées au profit des méthodes directes qui utilisent uniquement les valeurs de la fonctionnelle pour progresser vers l'optimum.

# Chapitre 4

## Prévision déterministe de signaux de houle unidirectionnels

Les principes théoriques de notre modèle de prévision étant posés, nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus en appliquant des modèles de prévision d'ordres différents à divers signaux de houle non-linéaires unidirectionnels, générés de manière artificielle à l'aide d'un code numérique dans un premier temps, puis issus de mesures expérimentales réalisées dans le bassin de traction de l'École Centrale de Nantes dans un second temps.

La première partie de ce chapitre décrit la procédure d'initialisation du modèle de prévision. Nous présentons la méthode employée pour générer un signal sonde non-linéaire artificiel à partir d'un modèle de houle au second ordre de perturbation ou à l'aide du modèle HOS à l'ordre  $M$ , puis le prétraitement qui est appliqué au signal sonde, qu'il soit synthétique ou réel, avant d'être introduit dans l'algorithme d'assimilation de données. Le choix des paramètres du modèle de prévision est également détaillé.

Dans la seconde partie, nous décrivons les tests qui nous ont permis de dégager la méthode de prévision la plus performante en termes de précision et de temps de calcul pour chaque modèle de houle utilisé. Un soin particulier a été apporté au développement de l'algorithme d'assimilation de données qui est l'étape clé du processus de prévision. Pour cela, les méthodes de minimisation de l'erreur d'assimilation décrites au Chapitre 3, associées aux différents modèles de houle détaillés au Chapitre 1, ont été testées sur des signaux de sondes synthétiques d'ordre de non-linéarité variable, afin de sélectionner la méthode la plus adaptée à l'ordre du modèle de prévision choisi. La capacité des modèles de prévision non-linéaires au second ordre, au second ordre étendu et à l'ordre trois à reconstruire et à prédire des champs de vagues synthétiques ont été comparées entre elles, ainsi qu'aux résultats fournis par une approche linéaire classique. Notons que la reconstruction et la prévision ne se font de manière déterministe qu'à l'intérieur des zones de reconstruction et de prévision définies au Chapitre 2. Les résultats clé sont présentés dans les sections 4.2.2.2 et 4.2.2.3 en ce qui concerne le modèle de prévision d'ordre deux étendu, et au paragraphe 4.2.3.3 pour le modèle d'ordre  $M = 3$  utilisant le HOS.

Nous avons pris le parti de ne pas séparer, dans cette partie, la présentation des résultats de l'assimilation de données et la présentation des champs reconstruits et prédits, dans la mesure où nous avons constaté que les résultats de l'assimilation des données ne laissaient rien présager de la qualité de la reconstruction et de la prévision.

Les modèles de prévision ont finalement été appliqués dans une troisième partie à la prévision de signaux expérimentaux obtenus lors d'une campagne de mesures réalisée en mai 2009 au sein des infrastructures de l'École Centrale de Nantes. Les différents résultats sont présentés en 4.3.3.

Le schéma de principe représenté en Figure 4.1 récapitule les étapes clés de la méthode de prévision déterministe. Chaque bloc sera détaillé dans les différentes parties de ce chapitre.

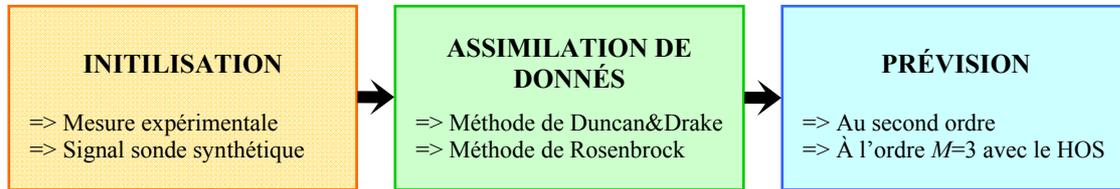


Figure 4.1 : Principales étapes du processus de prévision déterministe.

## 4.1 Initialisation du modèle de prévision

### 4.1.1 Génération d'un champ de vagues artificiel

#### 4.1.1.1 Introduction

Il s'agit ici de créer un champ de vagues synthétique dont nous utilisons dans un premier temps l'élévation de surface libre simulée sur une période de  $T$  secondes en un point donné afin d'initialiser le modèle de prévision, et dans un second temps l'évolution temporelle de l'élévation sur tout le domaine d'étude, plus particulièrement dans les zones de reconstruction et de prévision, comme référence pour tester la précision des résultats donnés par le modèle.

Deux procédures ont été envisagées à différents ordres de non-linéarité. Souhaitant tout d'abord réaliser une validation élémentaire de notre méthode de prévision d'ordre deux, nous avons créé des signaux de sonde au second ordre de perturbation. Pour tester nos modèles sur des cas de houle d'ordre de non-linéarité plus élevés, nous avons ensuite généré de nouveaux signaux à l'aide du modèle numérique HOS à l'ordre  $M > 2$ .

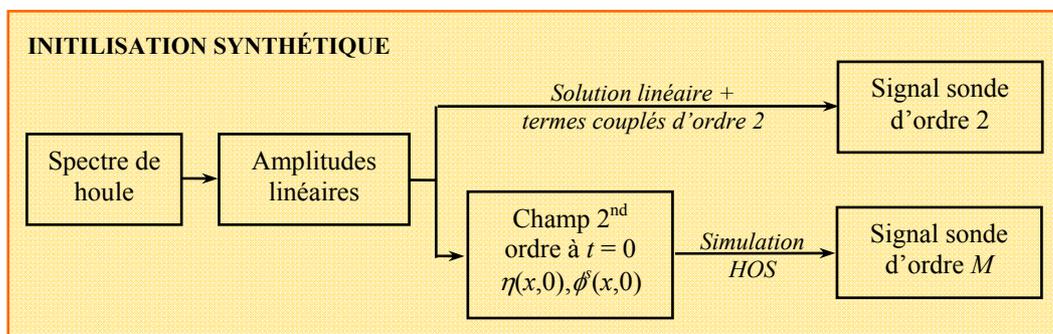


Figure 4.2 : Schéma de principe de la création d'un signal sonde artificiel.

Les signaux synthétiques sont caractérisés par un spectre de type JONSWAP dont nous rappelons ci-dessous la forme en introduisant la densité d'énergie  $S'_j$  (énergie normalisée par  $\rho g$ ) :

$$\begin{cases} S_J(f) = \alpha S'_J(f) \\ S'_J(f) = \frac{f_p^4}{2\pi f^5} H_s^2 \exp\left(-\frac{5}{4}\left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right) \gamma^{\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{f-f_p}{\sigma_p}\right)^2\right)} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\gamma = 3.3 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma = 0.07 \text{ pour } f < f_p \\ \sigma = 0.09 \text{ pour } f > f_p \end{cases}$$

#### 4.1.1.2 Signal sonde synthétique généré au second ordre

La méthode que nous avons utilisée pour créer un champ de vagues au second ordre commence dans un premier temps par le choix d'une hauteur significative  $H_s$  et d'une période de pic  $T_p$  définissant la cambrure  $\varepsilon$  de la houle :

$$\varepsilon = \frac{H_s}{\lambda_p} = \frac{2\pi}{g} \frac{H_s}{T_p^2} \approx \frac{H_s}{1.56T_p^2} \quad (4.2)$$

On évalue alors la répartition de la densité spectrale d'énergie  $S'_J$  d'après l'expression (4.1) et l'on calcule le paramètre  $\alpha$  tel que (4.3) soit vérifiée. Les amplitudes linéaires  $|a_n|$  du champ de vagues sont alors obtenues d'après la relation (4.4) et les phases  $\varphi_n$  sont distribuées de manière aléatoire dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  suivant une loi uniforme.

$$\int S_J(f) df = \frac{H_s^2}{16} \Leftrightarrow \alpha = \frac{H_s^2}{16 \int S'_J(f) df} \quad (4.3)$$

$$|a_n| = \sqrt{2S_J(f_n)\Delta f} \quad (4.4)$$

On applique finalement les formules de couplage modal décrites au Chapitre 1 et en Annexe A, afin de générer un champ de vagues d'ordre deux en tout point du domaine d'étude, sur une période suffisamment longue pour englober l'ensemble des instants de prévision accessibles. Ce champ servira de référence aux résultats de nos simulations de prévision.

L'élévation de surface libre au point choisi pour l'emplacement de la sonde  $x_s$ , que l'on relève pendant une période de  $T$  secondes définie au préalable, permet de générer le signal sonde artificiel qui sera par la suite assimilé au modèle de houle afin d'initialiser la prévision.

#### 4.1.1.3 Signal sonde synthétique généré à un ordre de non-linéarité élevé à l'aide du HOS

##### Principe de la méthode de génération

Le principe de la génération de champs de vagues non-linéaires à l'aide de la méthode HOS repose sur l'introduction d'un champ initial au modèle numérique qui propage ensuite son évolution

au cours du temps. Le choix de la condition initiale est primordial car il va déterminer le caractère réaliste ou non du champ de vagues simulé. L'initialisation se doit donc d'être bien adaptée à notre modèle de houle complètement non-linéaire.

La condition que nous avons utilisée est celle mise en place par Ducrozet ([48], 2007) qui réalise des simulations océaniques en milieu ouvert afin d'étudier l'occurrence et les caractéristiques des vagues scélérates au cours de la simulation. Le champ initial est, comme précédemment, défini à partir d'un spectre de houle de type JONSWAP, et la donnée des paramètres caractéristiques  $H_s$  et  $T_p$ .

On relie les amplitudes complexes des FT de l'élévation et du potentiel de surface libre  $A^\eta(k,t)$  et  $A^{\phi^s}(k,t)$  au spectre de houle  $S_J(f)$  de la façon suivante. L'énergie portée par la composante  $k$  est contenue dans la bande spectrale  $[k, k+\Delta k]$  où  $\Delta k$  est le pas de discrétisation de l'espace modal ( $\Delta k = 2\pi/L$  où  $L$  est la longueur du domaine de simulation). On peut donc écrire en théorie linéaire :

$$\frac{1}{2} |A^\eta(k,t)|^2 = S_J(f) \Delta f \quad (4.5)$$

La fréquence  $f$  est liée au nombre d'onde  $k$  du mode considéré par la relation de dispersion linéaire ce qui donne :

$$\Delta f = \frac{df}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} \Delta k = \frac{1}{2\pi} \frac{g}{2\omega} \Delta k \quad (4.6)$$

On obtient finalement l'amplitude modale de l'élévation de surface libre à l'instant initial  $t = 0$  (4.7) dont on déduit l'amplitude modale du potentiel de surface libre par l'expression (4.8) en théorie linéaire. Les phases associées aux différents modes sont aléatoirement distribuées entre 0 et  $2\pi$ .

$$|A^\eta(k,0)|^2 = \frac{g}{2\pi\omega} S_J(f) \Delta k \quad (4.7)$$

$$\underline{A^{\phi^s}(k,0)} = i \frac{g}{\omega(k)} \underline{A^\eta(k,0)} \quad (4.8)$$

Les amplitudes  $A^\eta(k,0)$  et  $A^{\phi^s}(k,0)$  étant déterminées, on revient aux grandeurs physiques par une IFT. On obtient finalement le champ de vagues initial  $\eta(x,0)$  et  $\phi^s(x,0)$  qui est introduit dans le HOS pour être propagé.

À chaque pas de temps de la simulation, on enregistre le champ calculé qui servira de comparaison au champ prédit par les différents modèles, et durant une période de  $T$  secondes, on relève également l'élévation de surface libre en la position choisie pour la sonde afin de créer le signal sonde artificiel.

### Ajustement de l'énergie du spectre de houle

Si l'on veut retrouver l'énergie du spectre de houle initial qui vaut  $E_0 = H_s^2/16$ , il est nécessaire de prendre en compte un nombre suffisant de modes dans la description spectrale des quantités. En effet, on a :

$$E \approx \sum_n \frac{1}{2} |A^\eta(k_n,0)|^2 \quad (4.9)$$

En calculant l'énergie à  $t = 0$  à partir des amplitudes obtenues à partir de la méthode linéaire précédente, on s'aperçoit cependant qu'un nombre important de modes ne suffit pas à assurer le niveau d'énergie  $E_0$  du spectre. Un traitement est donc nécessaire afin d'ajuster les amplitudes  $A^n(k_n, 0)$  pour éviter toute déperdition d'énergie. La solution que nous avons retenue est une méthode itérative qui ajuste les amplitudes  $A^n(k_n, 0)$  en jouant sur le paramètre  $\alpha$  du spectre de houle.

A chaque itération  $q$ , on calcule l'énergie  $E_q$  par l'équation (4.9) puis on compare la valeur obtenue à la valeur initiale  $E_0$ . Si,  $E_q < E_0$ , on augmente l'énergie courante de la différence  $|E_0 - E_q|$ . Dans le cas contraire, on diminue  $E_q$  de la même quantité. On évalue alors le nouveau paramètre  $\alpha_{q+1}$  tel que :

$$\alpha_{q+1} = \frac{E_q}{\int S'_J(f)df} \quad (4.10)$$

que l'on utilise à l'itération suivante pour calculer le nouveau spectre de houle et déterminer les amplitudes  $A^n(k_n, 0)$  puis le champ de vagues initial réactualisés. La procédure se poursuit tant que l'énergie trouvée diffère de l'énergie initiale  $E_0$  d'une valeur supérieure à un paramètre de tolérance fixé.

### Adéquation de la méthode d'initialisation au modèle non-linéaire HOS

Dans la méthode décrite précédemment, les composantes du spectre sont linéairement superposées entre elles et aucune interaction non-linéaire n'est prise en compte. L'introduction d'un champ de vagues reconstruit de manière linéaire dans un modèle de houle complètement non-linéaire tel que le HOS peut éventuellement conduire à des instabilités numériques.

Dommermuth ([44], 2000) montre en effet que la simulation de vagues non-linéaires peut, lorsqu'elle est initialisée de manière linéaire, engendrer la création de composantes hautes fréquences non physiques qui perdurent au cours de la simulation et parasitent le champ de vagues. Dommermuth indique toutefois que de telles simulations sont possibles si l'on respecte une période d'ajustement au cours de laquelle la houle devient complètement non-linéaire. Il préconise pour cela l'utilisation d'un schéma de relaxation où les termes non-linéaires des équations d'évolution du modèle HOS sont ajustés progressivement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} - W^{(0)} = \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{T_a} \right)^n \right] \right\} nl_1 \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} + g\eta = \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{T_a} \right)^n \right] \right\} nl_2 \end{cases} \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (4.11)$$

Les fonctions  $nl_1$  et  $nl_2$  représentent les termes non-linéaires et ont les expressions suivantes où le terme de vitesse verticale non-linéaire  $W_M^{non-lin}$  à l'ordre  $M$  est défini en Annexe B :

$$\begin{cases} nl_1 = W_M^{non-lin} - \nabla \phi^s \cdot \nabla \eta + |\nabla \eta|^2 W_{M-2} \\ nl_2 = -\frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} \left( (W^2)_M + |\nabla \eta|^2 (W^2)_{M-2} \right) \end{cases} \quad (4.12)$$

$n$  et  $T_a$ , la période d'ajustement, sont des paramètres à adapter au cas de houle simulé. Dommermuth compare diverses solutions pour leur choix, tout en s'assurant que  $T_a$  est supérieure à la période de la plus longue composante de houle afin de prévenir la création de composantes parasites à haute fréquence. Le couple ( $T_a = 10T_p$ ,  $n = 4$ ) apparaît comme le plus judicieux.

Nous avons également testé une manière plus simple de traiter ce problème, qui consiste à intégrer au modèle HOS à  $t = 0$ , non pas un champ linéaire, mais un champ calculé au second ordre de perturbation à partir des amplitudes linéaires trouvées par la méthode présentée à la section précédente.

Dans les deux cas, lors de la génération du champ de vagues non-linéaire, nous avons laissé s'écouler la moitié de durée de la simulation totale avant de commencer à enregistrer le champ de vagues afin de s'assurer de sa totale non-linéarité à l'ordre  $M$  choisi. Les tests effectués n'ont montré aucune différence notable pour nos applications, entre les simulations initialisées par une houle linéaire avec ajustement non-linéaire progressif, et par un champ de vagues au second ordre de perturbation.

#### 4.1.1.4 Bilan

La Figure 4.3 représente deux signaux de houle synthétiques obtenus par les méthodes détaillées précédemment. Les signaux ont une longueur temporelle de  $T = 405$ s et sont tous deux caractérisés par un spectre de JONSWAP de une hauteur significative  $H_s = 2$ m et une période de pic  $T_p = 8$ s.

La Figure 4.3.a) montre le résultat de la méthode de génération analytique au second ordre de perturbation présentée au 4.1.1.2. Le signal représenté sur la Figure 4.3.b) est quant à lui issu de la méthode non-linéaire à l'ordre  $M = 4$  utilisant le HOS avec une initialisation linéaire suivie de la procédure d'ajustement de Dommermuth (cf 4.1.1.3). Les deux méthodes n'étant pas équivalentes en termes de non-linéarité, elles produisent des champs de vagues et donc des signaux de sonde différents malgré un spectre spécifié identique. On peut par exemple le constater au niveau des groupes de vagues.

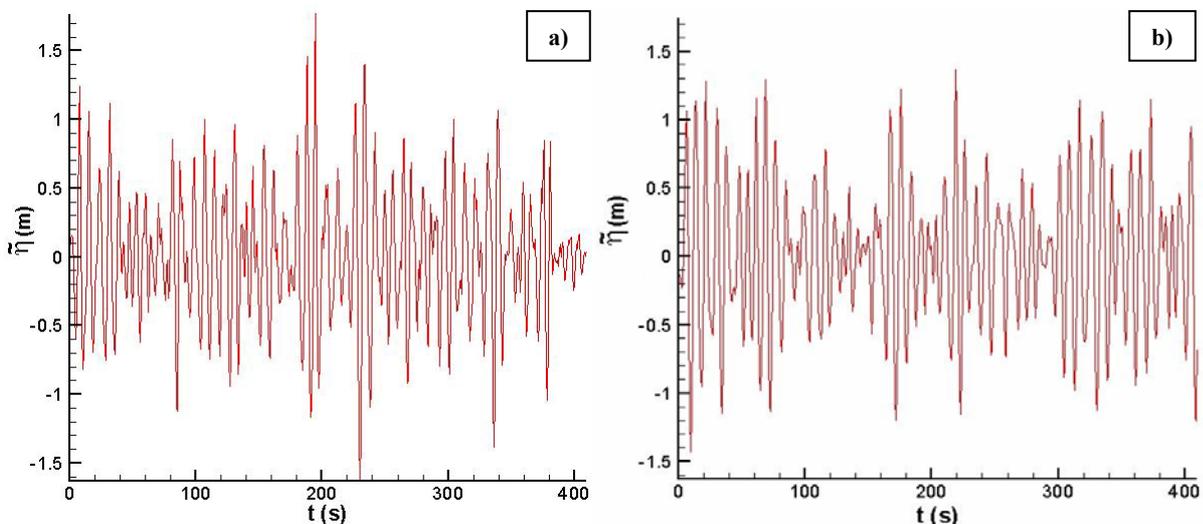


Figure 4.3 : Signaux de houle artificiels : a) Signal 2<sup>nd</sup> ordre, b) Signal d'ordre  $M = 4$ .

## 4.1.2 Prétraitement des signaux de sonde

Dans cette partie, nous présentons les opérations que nous réalisons sur les signaux de sonde étudiés, qu'ils soient d'origine numérique ou expérimentale, avant d'entamer le processus d'assimilation des données.

### 4.1.2.1 Périodisation du signal

La première opération que nous réalisons sur le signal de sonde, qu'il soit synthétique ou réel, est de le rendre périodique de manière à ce que les FFT représentent une bonne approximation de la FT du signal. On rappelle en effet que le calcul de la FT se fait théoriquement sur un temps infini alors que nous ne disposons que d'un signal de longueur temporelle finie. Pour « simuler » un temps infini, l'algorithme de la FFT périodise continûment l'échantillon initial. Lorsque l'échantillon correspond à un nombre entier de périodes, le signal dupliqué correspond au vrai signal temporel et la FFT calculée est égale à la FT du signal. Dans le cas contraire, les transitions entre échantillons dupliqués sont discontinues et la FFT ne représente plus correctement la FT du signal.

La solution à ce problème consiste à forcer le signal analysé à prendre la valeur zéro en ses extrémités. Il faut pour cela multiplier l'enregistrement temporel par une fonction fenêtre, tout en prenant soin de limiter l'impact de la fenêtre sur la totalité du signal. Diverses fonctions peuvent être utilisées, comme la fenêtre de Hanning, la fenêtre de Hann, etc... Dans notre cas, nous avons choisi de multiplier le signal sonde par une fonction trapézoïdale. La longueur temporelle de la rampe correspondant à la portion de signal ajustée est choisie inférieure à la période de pic du signal (cf Figure 4.4).

Bien entendu, lors de l'assimilation de données, seuls les points situés à l'intérieur de l'intervalle temporel  $[T_r, T-T_r]$  où  $T_r$  représente la longueur temporelle des rampes de la fenêtre, seront incorporées au modèle de houle.

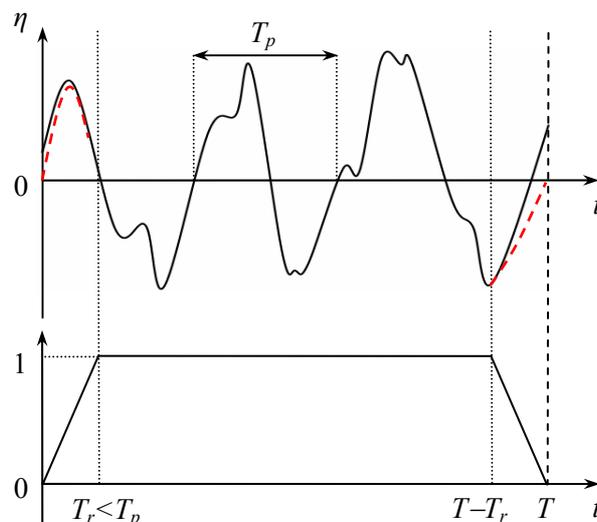


Figure 4.4 : Fenêtrage du signal sonde.

### 4.1.2.2 Troncature du spectre du signal

L'étape suivante a pour but de limiter la description spectrale du signal aux modes d'énergie significative compris entre les fréquences  $[\omega_l, \omega_v]$ , de manière à réduire le nombre de modes dans les calculs et accélérer l'ensemble de l'algorithme de prévision, sans toutefois perdre en précision. Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, cette procédure permet également d'augmenter la durée de prévision maximale (plus le rapport  $\omega_l / \omega_v$  augmente, plus la durée de prévision augmente). Les champs de vagues réels que nous étudions étant des champs classiques bien représentés par un spectre de JONSWAP par exemple, et les champs artificiels étant générés à partir de ce même type de spectre, on peut aisément éliminer un nombre important de très basses et de très hautes fréquences sans affecter la qualité de la prévision.

Dans le cas où la procédure de Duncan & Drake (cf Chapitre 3) est utilisée pour assimiler les données du signal sonde au modèle d'ordre deux, il faut cependant prendre garde à conserver un panel de hautes fréquences suffisamment important pour ne pas perturber la recherche de la fréquence de coupure nécessaire au bon fonctionnement du processus de découplage des ondes libres. Par ailleurs, il est impératif que le nombre de fréquences retenues permette une bonne description spectrale, sans que surviennent des problèmes de repliement dus à un nombre insuffisant de modes.

Dans la pratique, nous procédons de la manière suivante : nous commençons par choisir la fréquence minimale  $\omega_l$  où l'énergie vaut 5% de l'énergie au pic du spectre du signal, et la fréquence maximale  $\omega_v$  telle que la période de prévision maximale soit au minimum de 60 secondes, sans toutefois que le niveau d'énergie correspondant soit supérieur à 3% de l'énergie au pic afin de conserver un jeu de hautes fréquences suffisant. On rappelle que l'instant de prévision limite est obtenu à partir de l'étude théorique de la zone de prévision présentée au Chapitre 2 par l'expression  $t_{\max} = T / (1 - \omega_l / \omega_v)$ .

### 4.1.3 Choix des paramètres du modèle de prévision

Soit  $N_t$  le nombre d'observations discrètes du signal sonde de durée  $T$  secondes faisant l'objet de notre étude. Nous avons pris soin de réduire  $N_t$  au premier entier pouvant s'écrire comme un produit de multiples de 2, 3, 4 et 5, afin bénéficier au mieux des propriétés des FFT utilisées.

Soit la  $L$  longueur du domaine spatial de calcul, prise égale à un nombre entier de longueurs d'ondes de pic :

$$L = \kappa \lambda_p = \kappa \frac{T_p^2 g}{2\pi} \quad (4.13)$$

Il s'agit de déterminer l'étendue minimale du domaine spatial ainsi que le nombre de modes spatial  $N_x$  à utiliser lors des calculs en fonction de  $N_t$  et des caractéristiques du champ de vagues.

En ce qui concerne la longueur  $L$  du domaine, elle doit être suffisamment grande pour englober l'ensemble du domaine de prévision, ce qui se traduit par l'inégalité  $x_{\max} < L$ , où  $x_{\max}$  est la coordonnée de l'extrémité de la zone de prévision définie par (2.15). Cette condition nous donne le nombre minimal de périodes de pic que doit comprendre le domaine :

$$\kappa > \frac{2\pi}{\omega_v - \omega_l} \frac{T}{T_p^2} \quad (4.14)$$

Le nombre de modes  $N_x$  s'obtient en exprimant le nombre d'onde maximal de deux manières différentes : à partir de sa simple définition d'une part ( $k_j = 2\pi j/L$ ), et à partir de la relation de dispersion linéaire d'autre part, en fonction de la pulsation maximale. L'égalité entre les deux expressions obtenues nous donne :

$$N_x = 2\kappa \left( \frac{N_t}{2} \right)^2 \left( \frac{T_p}{T} \right)^2 \quad (4.15)$$

En pratique, nous choisissons l'entier  $\kappa$  et le nombre de modes  $N_x$  en adéquation avec l'utilisation des algorithmes de FFT, puis nous nous assurons que les conditions (4.14) et (4.15) sont vérifiées.

## 4.2 Prévision de signaux synthétiques numériques

Avant de pouvoir prévoir l'évolution de champs de vagues au réel, il est nécessaire d'optimiser le modèle de prévision en étudiant des signaux synthétiques, qui ont l'avantage d'être très rapidement calculés quelles que soient les caractéristiques de la houle souhaitée, ajustables à souhait et non bruités.

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus concernant la prévision de champs de vagues synthétiques générés au second ordre de perturbation ou à un ordre plus élevé à partir des procédures décrites au paragraphe précédent. Nous détaillons les tests ayant permis de sélectionner les algorithmes de minimisation présentés au Chapitre 3 associés aux processus d'assimilation des données d'ordre deux puis trois. Le choix des différentes méthodes d'assimilation étant fortement lié aux résultats de la reconstruction et de la prévision (nous verrons en effet qu'un signal sonde de bonne qualité n'implique pas forcément une prévision optimale et inversement), nous présentons dans le même temps les champs de vagues reconstruits et prédits à l'issue de cette étape cruciale. Les champs sont comparés entre eux et aux résultats fournis par un modèle linéaire.

### 4.2.1 Calculs réalisés

#### 4.2.1.1 Simulations numériques

Les champs de vagues synthétiques générés au second ordre ou à l'ordre  $M > 2$  à l'aide du HOS sont caractérisés par un spectre de JONSWAP de période de pic  $T_p = 8s$ , valeur standard pour une houle océanique, et par des hauteurs significatives variables afin de tester le code de prévision sur des cas de cambrures différentes. Des champs de vagues de hauteurs  $H_s = \{0.5m, 1m, 2m, 3m, 4m, 4.5m\}$  ont été générés, ce qui correspond à des cambrures  $\varepsilon = \{0.5\%, 1\%, 2\%, 3\%, 4\%, 4.5\%\}$  d'après la définition (4.2) de la cambrure.

Le signal sonde est créé à partir de la mesure de l'élévation de surface libre à chaque pas de temps de la simulation pendant une période  $T = 205.6s$  ou  $T = 410.4s$ , la sonde numérique étant localisée au milieu du domaine spatial de simulation.

Le nombre de modes temporels associés au signal sonde  $N_t$ , la taille du domaine spatial de simulation  $L$ , ainsi que le nombre de modes spatial  $N_x$ , sont calculés en fonction du modèle numérique de génération de la houle et de manière à vérifier les conditions énoncées au 4.1.3. Les paramètres

correspondant aux différents cas de figure sont répertoriés dans le Tableau 4.1.

Afin que les prévisions obtenues pour chaque cas de houle ( $H_s, T_p$ ) testé soient significatives, on génère un nombre important de champs de vagues de cambrures identiques, mais à partir de jeux de phases différents tirés de manière aléatoire (cf 4.1.1). Il s'agit d'une méthode de type Monte-Carlo visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires. Cette procédure permet d'éviter de tirer des conclusions sur un cas spécifique non représentatif de la majorité.

	CHAMP 2 <sup>nd</sup> ORDRE		CHAMP D'ORDRE $M$	
	205.6s	410.4s	205.6s	410.4s
$T$	205.6s	410.4s	205.6s	410.4s
$N_t$	257	513	257	513
$L$	$10 \lambda_p$	$20 \lambda_p$	$15 \lambda_p$	$20 \lambda_p$
$N_x$	512	1024	256	512

Tableau 4.1 : Paramètres des simulations numériques réalisées.

#### 4.2.1.2 Définitions des erreurs

Dans la suite de ce rapport de thèse, nous allons être amenés à étudier les erreurs de prévision obtenues avec les différents modèles de prévision. Nous allons distinguer erreur de reconstruction et erreur de prévision à proprement parler. Elles sont définies ici pour un seul calcul. Dans le cas des simulations de Monte-Carlo, l'erreur globale est la moyenne des erreurs trouvées pour chaque jeu de phase tiré de manière aléatoire.

L'erreur de reconstruction est l'erreur entre l'élévation de surface libre  $\eta(x,t)$  reconstruite à la fin de l'assimilation de données sur toute la zone de reconstruction ( $t \in [0, T]$ ) et le champ l'élévation synthétique initiale  $\tilde{\eta}(x,t)$ . Cette erreur, notée  $\varepsilon_{rec}$ , est calculée comme la moyenne des erreurs en chaque point de la zone à partir de l'équation (4.16) où,  $D_x(t)$  est la portion spatiale de la zone de reconstruction correspondant à l'instant  $t$ , comme représenté sur la Figure 4.5.

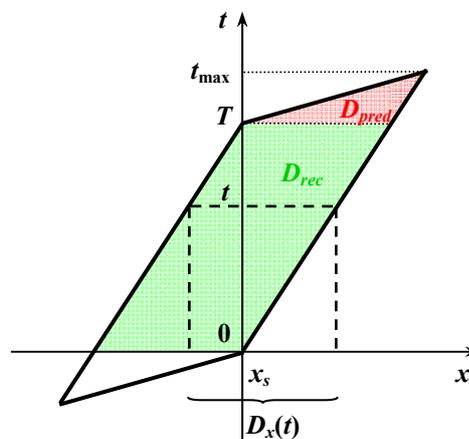


Figure 4.5 : Domaines de reconstruction et de prévision et zone spatiale de calcul à l'instant  $t$ .

De la même manière, on définit l'erreur de prévision  $\varepsilon_{pred}$  comme la moyenne des erreurs en tout point appartenant à la zone de prévision par (4.17).

$$\varepsilon_{rec} = \frac{1}{T} \int_{t \in [0, T]} \frac{\int_{x \in D_x(t)} |\eta(x, t) - \tilde{\eta}(x, t)| dx}{\int_{x \in D_x(t)} |\tilde{\eta}(x, t)| dx} dt \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{pred} = \frac{1}{t_{max} - T} \int_{t \in [T, t_{max}]} \frac{\int_{x \in D_x(t)} |\eta(x, t) - \tilde{\eta}(x, t)| dx}{\int_{x \in D_x(t)} |\tilde{\eta}(x, t)| dx} dt \quad (4.17)$$

Notons que ces expressions diffèrent de l'erreur de calcul définie par Wu ([160], 2004) dans sa thèse qui s'écrit de manière générique (4.18). La différence provient du fait que nous normalisons notre erreur spatiale moyenne à un instant  $t$  par la quantité  $\int_{D_x(t)} |\eta(x, t)| dx / D_x(t)$  qui représente la moyenne de la valeur absolue de l'élévation de surface libre sur l'intervalle  $D_x(t)$ , alors que Wu utilise la moitié de la hauteur significative  $H_s/2$  comme facteur de normalisation.

$$\varepsilon_D = \frac{\int_{(x,t) \in D_{x,t}} |\eta(x, t) - \tilde{\eta}(x, t)| dx dt}{\int_{(x,t) \in D_{x,t}} D(x, t) dx dt} \frac{1}{H_s / 2} \quad (4.18)$$

La hauteur significative étant calculée à partir du tiers des vagues les plus hautes, comme nous l'avons vu au Chapitre 0, elle est supérieure à la moyenne de la valeur absolue de l'élévation de surface libre qui inclut toutes les vagues. Dans nos calculs, on trouve que la hauteur significative est en moyenne quatre fois supérieure à l'élévation de surface libre moyenne. La manière dont nous procédons pour le calcul des erreurs de reconstruction et de prévision à partir des expressions (4.16) et (4.17) est donc certes plus contraignante que la méthode adoptée par Wu, car les erreurs trouvées sont au moins deux fois plus importantes que les erreurs rapportées dans sa thèse, mais elle semble plus judicieuse.

Nous reviendrons plus en détails aux paragraphes 4.2.2.3 et 4.2.3.4 sur la comparaison des erreurs de prévision fournies par notre modèle de prévision avec les erreurs présentées par Wu sur des cas de houle identiques.

### 4.2.1.3 Exemple : prévision à l'aide d'un modèle linéaire

Ci-dessous nous avons représenté l'évolution de l'erreur de reconstruction et de prévision, obtenues par un modèle de prévision linéaire sur des champs de vagues d'ordre de non-linéarité  $M = 3$  générés à l'aide du HOS, en fonction du nombre de simulations effectuées dans le cadre de la méthode Monte-Carlo. Les signaux de sonde synthétiques utilisés ont une durée temporelle  $T = 204.6s$ .

En notant  $N_s$  le nombre de simulations réalisées sur des jeux de phases différents tirés de manière aléatoire, et en définissant les erreurs moyennes de reconstruction et de prévision par (4.19) où  $\varepsilon_{rec}(i)$  et  $\varepsilon_{pred}(i)$  sont les erreurs à la simulation  $i$  d'expressions (4.16) et (4.17), on obtient les schémas de convergence représentés en Figure 4.6.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{rec}(N_s) = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathcal{E}_{rec}(i) \\ \mathcal{E}_{pred}(N_s) = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathcal{E}_{pred}(i) \end{cases} \quad (4.19)$$

On constate que 200 simulations suffisent pour obtenir une estimation stable de l'erreur de reconstruction, alors que le calcul de l'erreur de prévision requiert un nombre plus important de simulations pour converger. Cela indique que la dispersion des erreurs de prévision est importante et justifie l'emploi des simulations de Monte Carlo.

Par ailleurs, on observe également sur ces figures que les erreurs de reconstruction et de prévision croissent avec la cambrure. On remarquera en effet que les échelles verticales diffèrent sur chaque sous figure. Le modèle linéaire est donc peu approprié à la prévision des champs de vagues de moyenne à forte cambrure. Le traitement de tels cas de houle nécessite l'utilisation de modèles de prévision d'ordre de non-linéarité plus élevés, auxquels nous allons nous intéresser dans la suite de ce chapitre.

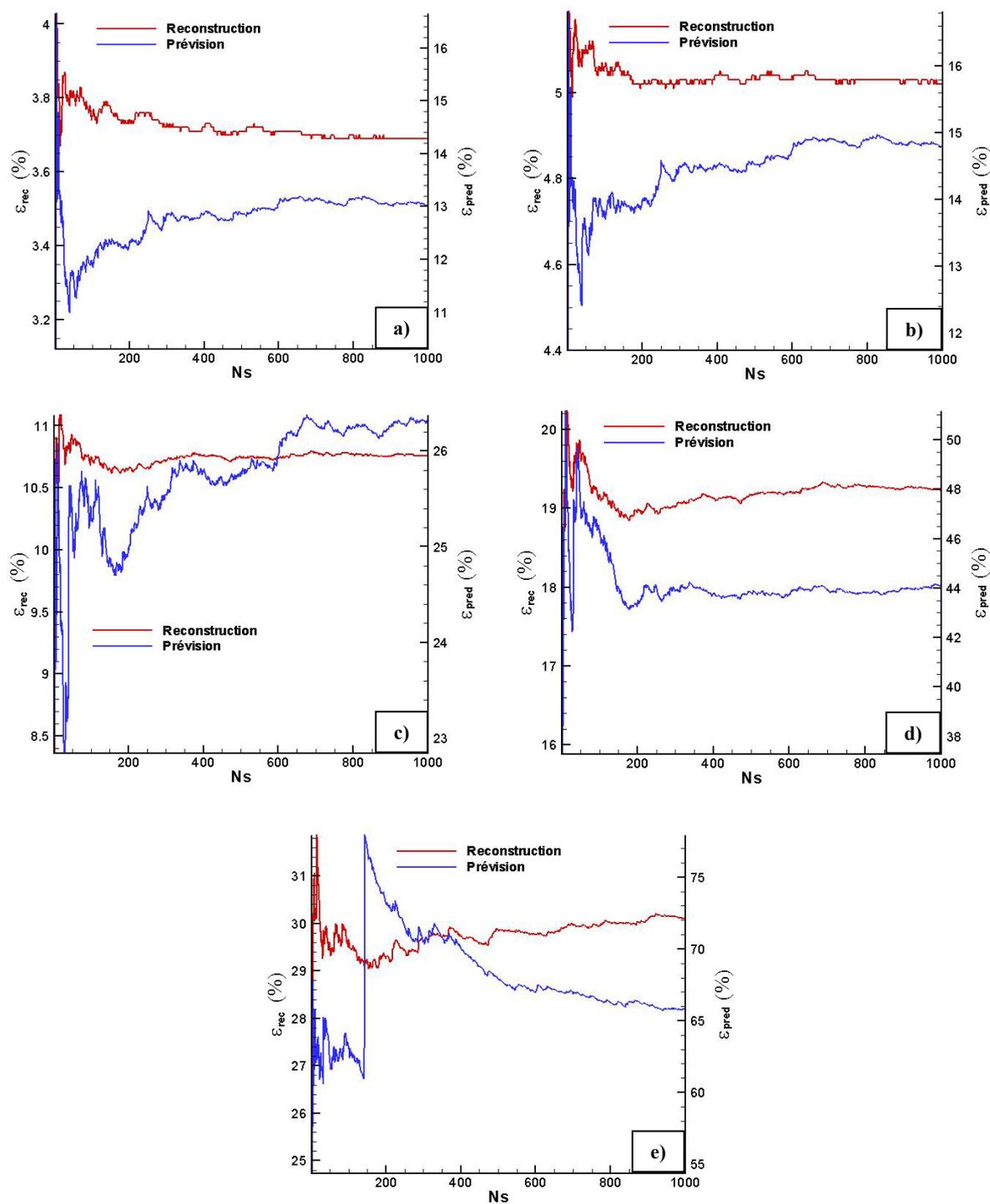


Figure 4.6 : Convergence des simulations de Monte-Carlo. Évolution des erreurs de reconstruction et de prévision linéaires en fonction du nombre de simulations pour différents cas de cambrure : a)  $\epsilon = 0.5\%$ , b)  $\epsilon = 1\%$ , c)  $\epsilon = 2\%$ , d)  $\epsilon = 3\%$ , e)  $\epsilon = 4\%$ .

## 4.2.2 Prévision au second ordre de perturbation

Rappelons brièvement les étapes de la procédure de prévision à l'ordre deux (cf Figure 4.7). Dans un premier temps, nous employons une méthode d'assimilation afin d'intégrer les données du signal sonde au modèle de houle d'ordre deux (cf 1.2.2) ou d'ordre deux étendu (cf 1.2.3) : les amplitudes complexes modales du signal sonde sont obtenues par une FT puis optimisées afin d'être découplées des effets du second ordre. Le passage des paramètres des ondes libres à l'élévation d'ordre deux reconstruite en la position de la sonde  $x_s$  se fait au moyen de la fonction  $C(\mathbf{p}, t)$  définie en (3.10), et dont l'expression est identique dans le cas d'un modèle de houle d'ordre deux ou deux étendu (cf 3.2.2.3). La méthode d'assimilation de données est donc la même pour les deux modèles.

Une fois l'erreur d'assimilation minimisée, l'élévation de surface libre est reconstruite à partir des ondes libres optimisées en utilisant les équations de couplage modal au second ordre ou au second ordre étendu (1.12), en un point  $(x, t)$  des zones de reconstruction et de prévision. Un déphasage  $k(x_s - x)$  est appliqué à chaque composante modale exprimée en la position de la sonde  $x_s$  de manière à obtenir le champ de vagues en un point  $x$  quelconque du domaine de calcul.

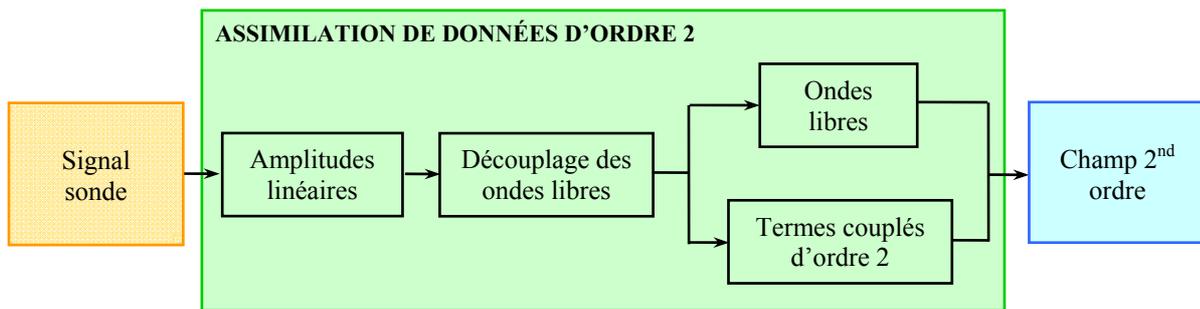


Figure 4.7 : Schéma de principe de la méthode de prévision à l'ordre deux.

### 4.2.2.1 Assimilation des données du signal sonde à l'ordre deux

Comme nous l'avons vu au Chapitre 3, différentes solutions peuvent être envisagées pour optimiser les ondes libres à partir desquelles le champ de vagues est reconstruit. Nous avons en premier lieu évoqué une méthode spécifique au modèle de prévision second ordre, la méthode itérative de découplage de Duncan & Drake ([49], 1995), qui permet de dissocier les ondes libres des effets du second ordre. Puis de manière plus générale, nous avons envisagé l'utilisation des méthodes d'optimisation classiques afin de minimiser, par rapport aux ondes libres, l'erreur entre le signal sonde reconstruit avec le modèle de houle second ordre et le signal sonde artificiel. Le modèle au second ordre étant analytique, l'expression du gradient de l'erreur est explicite et il nous est possible d'utiliser les méthodes d'optimisation indirectes, dont l'évolution repose à la fois sur la fonctionnelle à minimiser et sur la connaissance de son gradient, de même que les méthodes directes requérant uniquement des informations sur la fonctionnelle.

Nous avons donc comparé entre elles la méthode de Duncan & Drake, les méthodes indirectes des Gradients-Conjugués et de Quasi-Newton avec mise à jour iBFGS, ainsi que les méthodes directes du Simplexe de Nelder & Mead ([112], 1965) et de Rosenbrock ([131], 1960) avec réactualisation des directions de recherche de Palmer ([117], 1968). L'analyse de la vitesse de convergence et de la

précision des signaux reconstruits pour différents cas de houle a permis de sélectionner la méthode la plus adaptée au modèle de houle d'ordre deux.

La Figure 4.8 montre l'évolution de l'erreur d'assimilation  $\varepsilon_{ass}$  définie en (3.14) en fonction du nombre d'évaluations de la fonctionnelle, au cours des différents processus d'ajustement des ondes libres. Le signal étudié est d'ordre  $M = 4$  et de cambrure  $\varepsilon = 4\%$  ; il a été généré à partir d'un seul jeu de phases à l'aide du modèle HOS. Les résultats que nous présentons ci-dessous restent toutefois valables pour tous les cas de houle que nous avons étudiés.

On constate en premier lieu que l'approche de Duncan & Drake est nettement plus performante que les méthodes de minimisation classiques. Elle ne nécessite en effet qu'un nombre très réduit d'itérations ( $< 20$ ) et l'erreur sur le signal sonde initial est beaucoup plus faible que celles obtenues par les autres algorithmes. Cela peut se comprendre dans la mesure où la méthode de Duncan & Drake a été spécialement créée dans le but de résoudre le problème de la détermination des ondes libres pour un modèle de houle au second ordre de perturbation, alors que les autres méthodes sont des algorithmes d'optimisation génériques s'appliquant à toutes sortes d'études.

En ce qui concerne les méthodes directes, la méthode Simplexe évolue très lentement et l'erreur d'assimilation est pratiquement inchangée au bout de 500 évaluations de la fonction coût. La méthode directionnelle de Rosenbrock, en revanche, évolue plus rapidement bien que la convergence ne soit pas atteinte au 500<sup>ième</sup> calcul (à titre indicatif, il faut dans le cas le plus contraignant d'une houle très cambrée attendre au maximum 3000 évaluations de la fonctionnelle pour que le processus converge). Le signal sonde obtenu est toutefois plus précis que le signal optimisé par les méthodes indirectes. En effet, bien qu'ayant une vitesse de convergence plus rapide, les méthodes avec calcul avec gradient descendent moins bas que les méthodes de minimisation directes. On peut déjà faire ce constat après les 500 calculs représentés en Figure 4.8, alors que la méthode de Rosenbrock n'a pas encore complètement convergé.

Pour finir, la comparaison des deux méthodes indirectes indique que la méthode Quasi-Newton avec mise à jour iBFGS est plus performante que la méthode des Gradients-Conjugués qui requiert 30% d'évaluations supplémentaires pour un résultat moins précis.

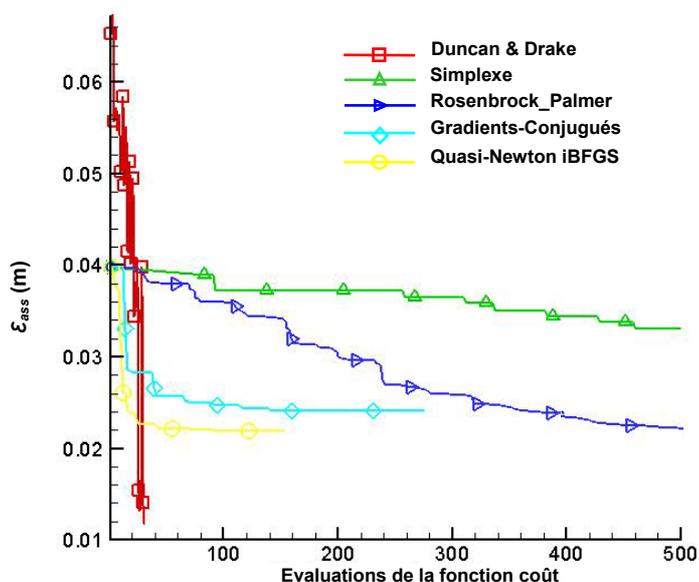


Figure 4.8 : Comparaison des différentes méthodes d'optimisation des ondes libres.

L'analyse précédente nous permet de tirer diverses conclusions. Tout d'abord, le schéma itératif de Duncan & Drake est très clairement le plus adapté à l'assimilation des données au second ordre. C'est donc cet algorithme que nous avons retenu.

La comparaison des performances des différentes méthodes d'optimisation des ondes libres pour l'assimilation second ordre fournit par ailleurs des indications sur la méthode à employer lors d'une assimilation d'ordre élevé. Le découplage de Duncan & Drake n'étant pas adapté aux modèles non-linéaires d'ordres différents de l'ordre deux, et les méthodes de minimisation basées sur l'évaluation du gradient de la fonctionnelle n'étant pas applicables, car trop coûteuses en temps de calcul ou complexes à mettre en œuvre dans la mesure où l'expression du gradient n'est pas analytique, les seules méthodes pouvant être utilisées sont les méthodes d'optimisation directes. Au vu de la très faible évolution de la méthode Simplexe au cours du processus de minimisation, la méthode directionnelle de Rosenbrock semble la plus appropriée à l'assimilation d'ordre  $M$ .

Nous noterons que l'abandon des méthodes avec calcul de gradient n'est pas forcément pénalisant puisque le signal sonde assimilé par la méthode de Rosenbrock semble plus précis que le signal sonde issu des optimisations indirectes, pour une assimilation au second ordre en tout cas.

#### 4.2.2.2 Prévision de champs de vagues non-linéaires

##### Validation sur une houle synthétique d'ordre deux

Avant toute chose, nous avons tenu à vérifier que le modèle de prévision au second ordre l'ordre deux était bien validé sur des cas de champs de vagues synthétique d'ordre deux. La Figure 4.9 présente les résultats obtenus par le modèle pour la prévision de houles de cambrures variées  $\varepsilon$  (définie par (4.2)) à partir de signaux de sonde artificiels de durée  $T = 205.6$ s. Ils sont issus de simulations de Monte-Carlo sur  $N_s = 1000$  jeux de phases aléatoires différents.

Si l'on s'intéresse tout d'abord à la période de prévision maximale théorique disponible  $t_{\max} - T$ , on constate qu'elle diminue avec la cambrure (cf Figure 4.9.a)). Ce phénomène provient du choix des fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  pour l'étude du signal sonde, et plus particulièrement de la fréquence maximale  $\omega_v$ . En effet, plus la cambrure du champ de vagues considéré augmente, plus l'énergie du spectre caractéristique du signal sonde croît aux hautes fréquences. La fréquence  $\omega_v$  déterminée lors de la procédure de troncature 4.1.2.2 prend alors une valeur plus importante, alors que la fréquence  $\omega_l$  reste pratiquement inchangée. Il en résulte que l'instant maximal calculé à partir de l'expression (2.23) diminue.

En ce qui concerne la précision des résultats, on remarque sur la Figure 4.9.b) que l'erreur d'assimilation est inférieure à  $3.10^{-5}$ m quelque soit la cambrure considérée. Cela traduit une excellente reconstruction du signal sonde et valide le processus itératif de Duncan & Drake pour l'optimisation des ondes libres au second ordre. Ce résultat semble assez logique dans la mesure où la méthode est spécialement formulée à cet effet.

Quant aux erreurs moyennes de reconstruction (cf Figure 4.9.c)) et de prévision (cf Figure 4.9.d)), elles sont inférieures à 0.01%, et négligeables par rapport aux erreurs obtenues par le modèle de prévision linéaire, qui augmentent de manière presque constante avec la cambrure de la houle pour atteindre  $\varepsilon_{rec} = 18\%$  et  $\varepsilon_{pred} = 23\%$  lorsque la cambrure est de 4.5%.

En conclusion, le modèle au second ordre est parfaitement validé pour la prévision de houles du même ordre de non-linéarité, même à forte cambrure.

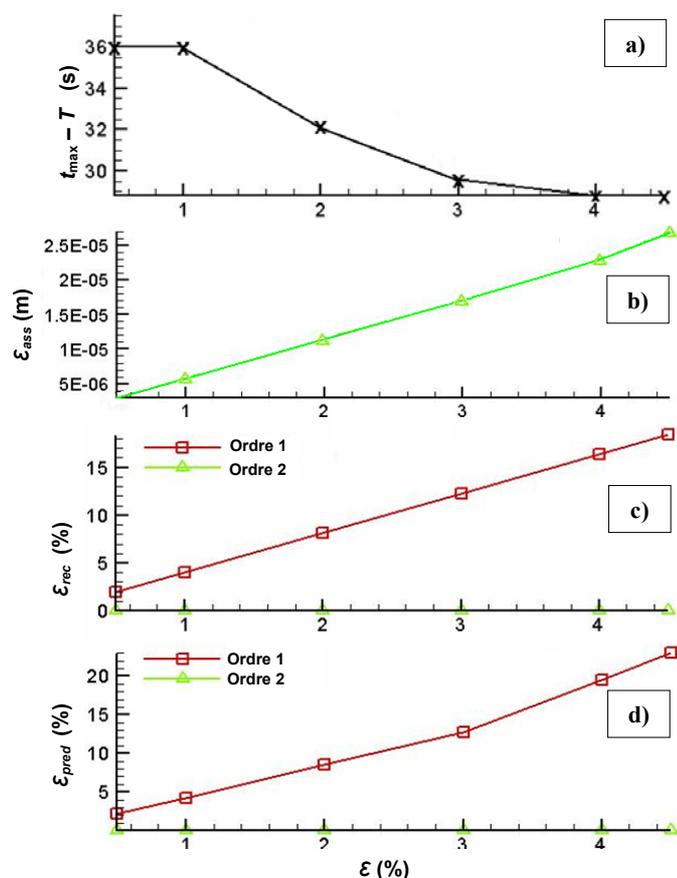


Figure 4.9 : Prédiction par un modèle 2<sup>nd</sup> ordre de champs de vagues d'ordre 2 à partir d'un signal sonde de période  $T=205.6s$  : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, b) Erreur moyenne de reconstruction, c) Erreur moyenne de prévision.

### Prédiction de champs de vagues d'ordre de non-linéarité élevé

Il s'agit maintenant de tester le modèle second ordre sur des cas de houle d'ordre de non-linéarité supérieur à deux. Les résultats présentés en Figure 4.10 ont été obtenus par le modèle à partir de signaux de sondes synthétiques de période  $T = 410.4s$ , générés en HOS à l'ordre  $M = 3$ . Une fois encore  $N_s = 1000$  jeux de phases ont été testés.

Sur la Figure 4.10.a), on remarque tout d'abord que les périodes de prévision maximales associées aux différentes cambrures testées sont supérieures aux périodes auxquelles nous avons accès lorsque les calculs se font à partir d'un signal sonde de longueur temporelle plus faible (cf. Figure 4.9.a)). On se rappelle en effet la relation (2.23), liant le temps de prévision maximal à la période du signal sonde, qui indique effectivement que plus la période  $T$  est longue, plus l'instant  $t_{\max}$  est important, pour un rapport identique entre les fréquences maximales et minimales des composantes de houle étudiées. La variation du quotient  $\omega_r / \omega_l$  étant limitée, on observe bien que l'instant de prévision maximal évolue comme la longueur temporelle du signal sonde.

En ce qui concerne les erreurs de reconstruction et de prévision moyennes, on constate que le second ordre n'apporte pas d'amélioration notable à la précision des champs de vagues calculés par rapport au modèle linéaire. L'erreur de reconstruction est certes légèrement plus faible lorsque le modèle de prévision au second ordre est utilisé (cf Figure 4.10.c)), mais les erreurs de prévision sont

en revanche identiques pour les deux approches (cf Figure 4.10.d)).

Ces résultats peuvent d'une part s'expliquer par le fait que l'erreur sur le signal sonde reste importante après l'assimilation de données comme on peut le voir en Figure 4.10.b). Le schéma de Duncan & Drake ne considère en effet que les interactions non-linéaires d'ordre deux et ne prend pas en compte l'influence des non-linéarités d'ordre supérieur qui devraient elles aussi être découplées des ondes linéaires.

Par ailleurs, lorsque le champ est calculé à un instant  $t$  donné par le modèle de houle au second ordre, les non-linéarités d'ordre supérieur à deux, dont l'effet augmente avec le temps, sont ignorées. Ce phénomène explique que la précision du champ de vagues prédit par le modèle soit dégradée par rapport à la reconstruction.

Cette dernière remarque nous a conduit à tester le modèle au second ordre étendu présenté au Chapitre 2 qui allie équations de couplage modal classique à l'ordre deux et relation de dispersion non-linéaire à l'ordre trois.

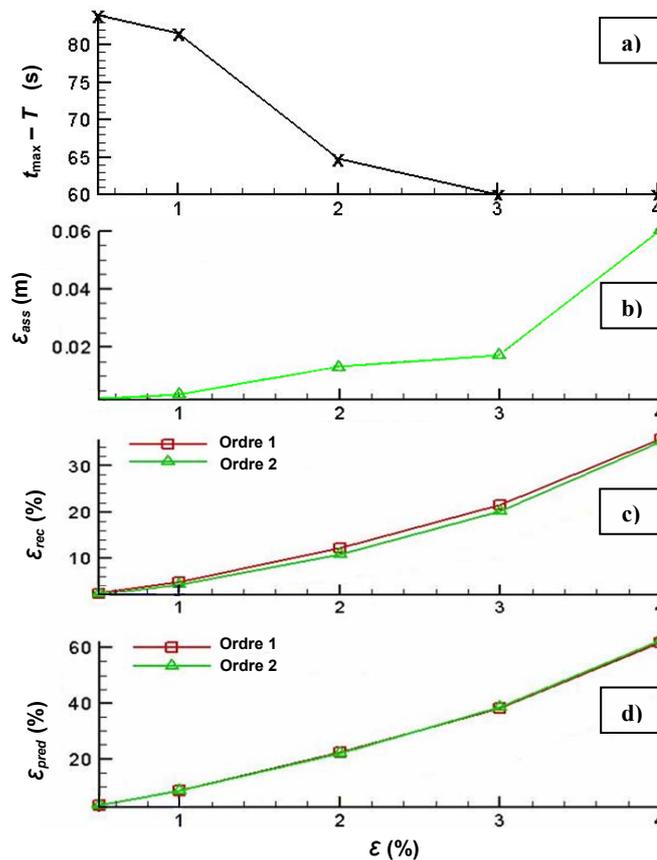


Figure 4.10 : Prévision par un modèle 2<sup>nd</sup> ordre de champs de vagues d'ordre  $M=3$  à partir d'un signal sonde de période  $T=410.4s$  : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.

### Modèle au second ordre étendu

Le modèle de prévision au second ordre étendu est testé sur les mêmes cas de houle que précédemment. Les périodes de prévision restent inchangées, de même que les résultats de

l'assimilation de données : le calcul des amplitudes au second ordre étendu, effectué à chaque itération du processus de Duncan & Drake pour le découplage des ondes libres, concerne en effet les amplitudes du signal sonde et ne fait pas intervenir les nombres d'onde, seuls paramètres modifiés par rapport au modèle de houle classique à l'ordre 2. La Figure 4.11 présente les erreurs de reconstruction et de prévision obtenues.

On constate que les résultats sont nettement améliorés par rapport au modèle précédent et donc a fortiori par rapport au modèle linéaire. Les champs calculés sont beaucoup plus proches des champs synthétiques originaux, surtout à faible cambrure ( $\varepsilon < 2\%$ ) où les erreurs de reconstruction et de prévision sont respectivement inférieures à 5% et 10%.

L'amélioration est également notable à forte cambrure puisque les erreurs sont divisées par un facteur deux. Elles demeurent cependant assez élevées surtout dans le cas  $\varepsilon = 4\%$  où l'erreur de reconstruction est de l'ordre de 25% et où l'erreur de prévision atteint presque 40%.

On peut donc en conclure que le modèle au second ordre étendu est très bien adapté à la prévision de houles non-linéaires de cambrures faibles à modérées pour lesquelles la plus-value apportée par le nouveau modèle est très nette. En revanche, ce modèle n'est pas suffisant pour représenter la physique non-linéaire intervenant dans la propagation des champs de vagues de forte cambrure. Un modèle d'ordre supérieur tenant compte de ces effets doit être utilisé.

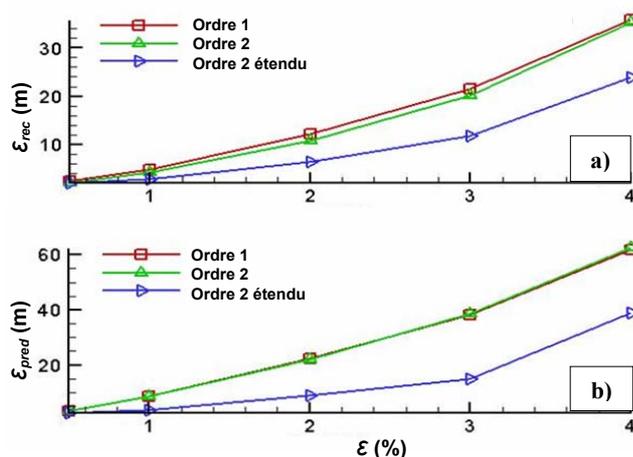


Figure 4.11 : Prédiction par un modèle au 2<sup>nd</sup> ordre étendu de champs de vagues d'ordre  $M=3$  à partir d'un signal sonde de période  $T=410.4s$  : a) Erreur moyenne de reconstruction, b) Erreur moyenne de prévision.

Sur les figures suivantes, on compare de manière plus approfondie les résultats obtenus par les différents modèles de prévision sur un cas particulier de houle (ie généré à partir d'un seul jeu de phases à l'aide du HOS) de cambrure modérée  $\varepsilon = 2\%$ . Le champ de vagues synthétique est représenté sur la Figure 4.12.

Nous attirons l'attention sur le fait que, notre domaine de calcul étant périodique, il arrive que les ondes rapides passent plusieurs fois dans le domaine. Les zones d'erreur importante peuvent donc correspondre au même paquet de vagues qui se propage et traverse le domaine de calcul à différents endroits. Lors de l'évaluation des erreurs moyennes de reconstruction et de prévision, il est donc possible que l'erreur relative à la reproduction d'un paquet d'ondes donné soit comptée à plusieurs reprises.

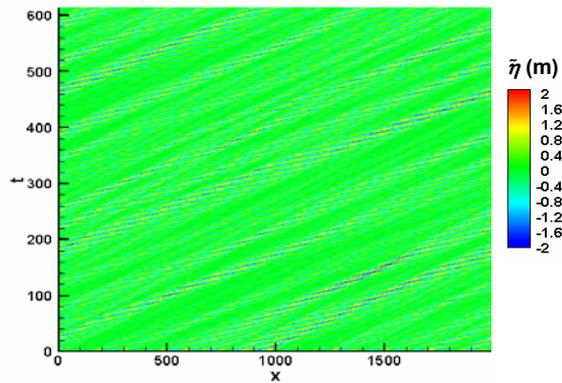


Figure 4.12 : Champ de vagues synthétique de cambrure  $\varepsilon = 2\%$ .

La Figure 4.13 compare les erreurs commises sur le calcul de l'élévation de surface libre en tout point du domaine d'étude par le modèle de prévision linéaire (Figure 4.13.a)), le modèle au second ordre (Figure 4.13.b)) et le modèle au second ordre étendu (Figure 4.13.c)). Le domaine spatio-temporel théorique accessible par un calcul déterministe tel que nous l'avons défini au Chapitre 2, comprenant la zone de reconstruction et la zone de prévision, est également représenté à titre de référence sur les différentes figures par un contour blanc.

On constate que l'apport du modèle second ordre n'est effectivement pas significatif. En revanche, le gain en précision obtenu à l'aide du modèle au second ordre étendu est bien visible, et se fait d'une part à l'intérieur du domaine de prévision, mais également à l'extérieur du domaine. Ce sont essentiellement la reconstruction et la prévision des ondes courtes à hautes fréquences qui sont améliorées, comme nous l'avons pressenti lors de l'étude théorique 2.1.4. Ceci indique que la méthode de prévision à l'ordre deux étendu va permettre de calculer le champ de vagues à l'extérieur de la zone théorique de calcul, dans une limite de validité tout à fait acceptable puisque les erreurs point à point sont inférieures à 10%.

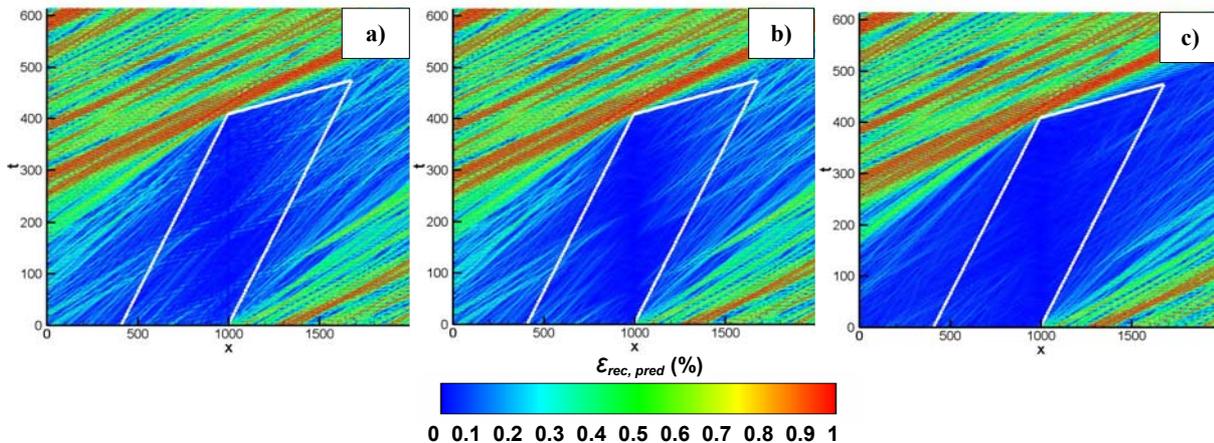


Figure 4.13 : Erreur en chaque point du domaine de calcul sur l'élévation de surface libre d'un champ de vagues de cambrure 2% pour les modèles de prévision : a) linéaire, b) 2<sup>nd</sup> ordre, c) 2<sup>nd</sup> ordre étendu. La zone de prévision est représentée en blanc.

Sur la Figure 4.14 nous nous sommes intéressés à la forme de la surface libre reproduite par les trois modèles précédents à un instant donné  $t = 430s$  de l'intervalle de prévision disponible [410.4s, 474.40s], pour le même cas de houle. La surface libre calculée par les trois différents modèles est représentée en Figure 4.14.a) sur toute la zone spatiale de prévision correspondant à l'instant considéré, et en Figure 4.14.b) sur une portion de cette zone.

D'après ces figures, on remarque que les pics et les creux de l'élévation de surface libre sont mieux reproduits par le modèle de prévision au second ordre étendu que par les deux autres modèles : les creux sont plus profonds et les crêtes plus élevées. Par ailleurs, on voit très nettement sur le zoom en Figure 4.14.b) que la solution second ordre étendu est parfaitement en phase avec le champ synthétique initial, alors que les élévations calculées au premier et au second ordre sont déphasées par rapport à la référence. Une étude de la surface libre reproduite à différents instants montre que ce déphasage augmente avec le temps. On en conclut qu'il est primordial de tenir compte des vitesses de phase non-linéaires effectivement modélisées dans le modèle d'ordre deux étendu.

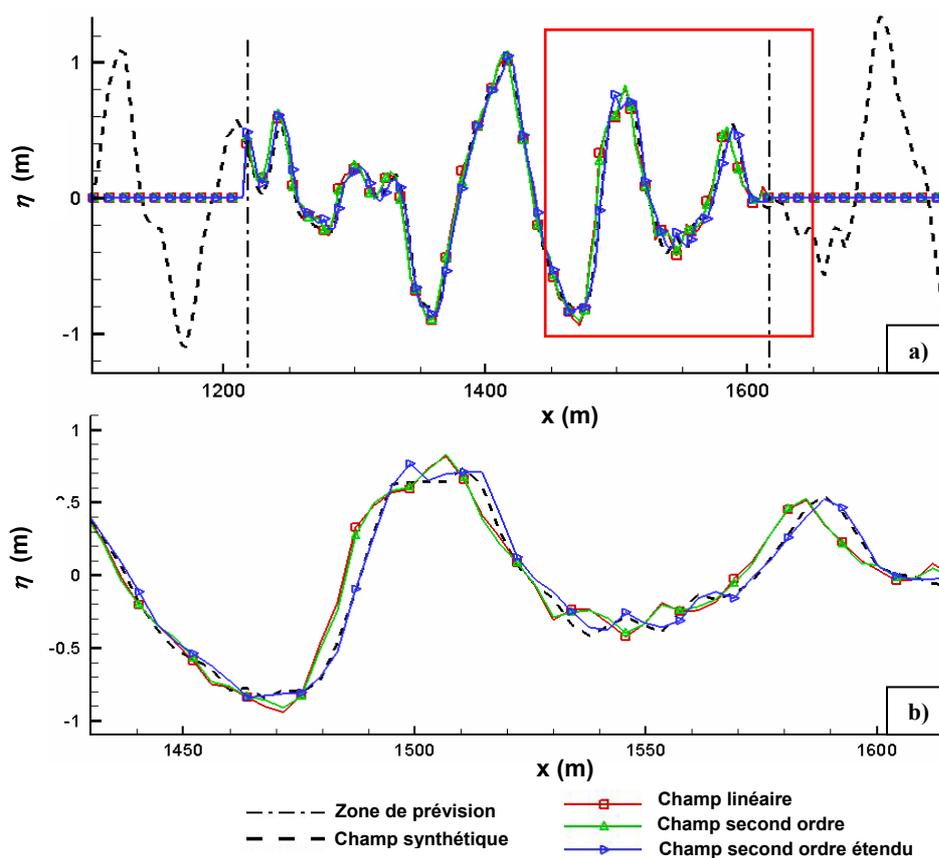


Figure 4.14 : Élévation de surface libre à l'instant de prévision  $t = 430s$ . Comparaison entre les solutions données par un modèle de prévision linéaire, 2<sup>nd</sup> ordre et 2<sup>nd</sup> ordre étendu sur : a) La totalité de la zone spatiale de prévision à  $t = 430s$ , b) Zoom sur une portion de la zone.

### 4.2.2.3 Performances du modèle de prévision au second ordre étendu

Nous présentons dans cette section une analyse des performances du modèle de prévision au second ordre étendu. Une première étude concerne l'efficacité et la précision du modèle par rapport à l'approche linéaire. Dans une seconde partie nous confrontons notre modèle de prévision au modèle développé par Wu ([160], 2004) au cours de sa thèse, en comparant les erreurs de prévision obtenues par les deux modèles pour des cas de houle identiques.

#### Efficacité et précision de la méthode par rapport à l'approche linéaire

Contrairement au modèle de prévision linéaire où toute prévision se calcule de manière quasi instantanée (les ondes libres sont directement obtenues par une FT du signal sonde et ne sont pas optimisées), les modèles au second ordre et au second ordre étendu requièrent une procédure d'ajustement des ondes libres, puis le calcul des termes de couplage nécessaires à la reproduction de l'élévation de surface libre au second ordre en un point donné  $(x,t)$ . L'objectif de cette étude est donc de déterminer si le gain en précision observé lors de l'utilisation d'un modèle de prévision au second ordre étendu ne se fait pas au détriment du temps de calcul nécessaire à l'obtention d'une telle prévision.

Au second ordre, l'opération la plus coûteuse en temps de calcul est la procédure d'ajustement des ondes libres. La procédure de découplage de Duncan & Drake, explicitée au 3.3.1 pour une fréquence de coupure donnée  $\omega_c$ , requiert en effet un calcul de couplage modal à chaque itération afin d'évaluer l'élévation à l'ordre deux en la position de la sonde. Comme nous utilisons une méthode d'optimisation pour déterminer la fréquence de coupure optimale au cas de figure étudié (la méthode Simplexe de Nelder & Mead est appliquée à trois reprises pour trois initialisations différentes), la procédure d'ajustement des ondes libres est répétée pour chaque fréquence  $\omega_c$  testée.

Deux critères influent sur l'efficacité du processus de Duncan & Drake : un critère d'interruption de l'algorithme dans le cas où l'erreur d'assimilation devient inférieure à un paramètre  $Tol_1$ , et le critère de convergence de la méthode lorsque l'erreur sur le signal sonde à l'itération  $q-1$  et l'erreur à l'itération courante  $q$  diffèrent de moins d'une valeur notée  $Tol_2$ . Pour diminuer le temps de calcul requis par le découplage de Duncan & Drake, il suffit de relaxer les paramètres  $Tol_1$  et  $Tol_2$ . Le risque encouru est alors de diminuer la précision du signal sonde reconstruit et par la même la précision de la prévision future. Il s'agit donc de trouver un compromis entre diminution du temps de calcul et précision de la méthode d'assimilation de données, qui peut varier suivant les cas de houle étudiés.

Les tests présentés ci-dessous ont été réalisés pour des champs synthétiques de cambrures différentes générés à l'ordre deux ou à l'ordre  $M = 3$  avec le HOS, à partir de signaux de sondes de périodes  $T = 205.6s$  et  $T = 410.4s$ .

#### Tests réalisés

Afin de déterminer l'influence des paramètres  $Tol_1$  et  $Tol_2$  sur la rapidité de la procédure d'assimilation de données, nous avons comparé le temps mis par le modèle au second ordre étendu pour calculer un champ de vagues à un instant donné  $t$  sur toute la zone spatiale de prévision correspondant à cet instant, au temps requis par le modèle linéaire.

Nous avons considéré le temps mis par le modèle pour effectuer un calcul de reconstruction ( $t \in [0, T]$ ) et un calcul de prévision ( $t \in [T, t_{\max}]$ ) pour une houle synthétique générée à partir d'un jeu de

phases donné. Ces temps diffèrent de par la taille l'intervalle spatial de calcul au temps  $t$ . En effet, quelque soit l'instant de reconstruction, la taille de la zone spatiale est inchangée et le calcul de l'élévation de surface libre se fait sur un même nombre de points de l'espace. En revanche, lorsque l'on s'intéresse à un instant  $t \in [T, t_{\max}]$ , plus on se rapproche de l'instant de prévision maximal  $t_{\max}$ , plus l'intervalle spatial est réduit. L'évaluation du champ de vagues se fait donc sur un nombre de points de plus en plus faible et le temps requis pour le calcul diminue.

Deux périodes de mesure de la sonde ont été considérées. En effet, la période  $T$  a une influence directe sur le temps de calcul puisqu'elle détermine la résolution fréquentielle  $\Delta\omega = 1/T$ , et par conséquent sur le nombre de fréquences comprises dans l'intervalle d'étude  $[\omega_l, \omega_r]$ .

Notons enfin que chaque calcul a été reproduit plusieurs fois sur un seul processeur Intel® Core™ 2 CPU T7200 (2GHz), et que les temps CPU correspondants ont été moyennés sur l'ensemble des tests réalisés.

En ce qui concerne l'impact des paramètres  $Tol_1$  et  $Tol_2$  sur la précision des résultats, nous ne nous sommes pas limités à l'évaluation des erreurs moyennes de calcul à un instant donné, mais nous avons évalué les erreurs  $\varepsilon_{rec}$  et  $\varepsilon_{pred}$  définies au 4.2.1.2 moyennées sur la totalité des domaines de reconstruction et de prévision théoriques.

Par souci de clarté, nous ne présentons pas dans le cadre de ce rapport de thèse la totalité des résultats obtenus. Seuls les temps CPU et les erreurs de calcul relatifs aux champs de vagues d'ordre deux ou  $M = 3$  mesurés pendant une période de  $T = 410.4s$  sont reportés dans les figures suivantes.

### Résultats

Lors des calculs, nous observons comme prévu que la procédure d'ajustement des ondes libres est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que l'évaluation du champ de vagues à l'instant  $t$  choisi. Elle occupe environ 99.5% du temps CPU total, que le champ étudié soit d'ordre deux ou d'ordre  $M = 3$ . En revanche, les temps requis pour effectuer un calcul de reconstruction ou de prévision sont quasiment identiques. Nous constatons également une nette augmentation des temps de calcul avec la période de mesure : les temps sont environ multipliés par un facteur dix lorsque la période, et donc le nombre de composantes fréquentielles considérées, sont multipliés par deux.

Sur la Figure 4.15, nous avons représenté les temps CPU requis par le modèle d'ordre deux étendu lors d'un calcul de reconstruction à  $t = T/2$  pour différentes valeurs des paramètres  $Tol_1$  et  $Tol_2$ , dans le cas d'un champ synthétique d'ordre deux (cf Figure 4.15.a)) et d'ordre  $M = 3$  (cf Figure 4.15.b)).

On constate que les temps de calcul sont supérieurs lorsque le champ étudié est d'ordre deux. Cette différence provient de la procédure de troncature du spectre en amplitudes des signaux de sonde. Le spectre du signal second ordre contient en effet beaucoup plus d'énergie aux hautes fréquences. La fréquence maximale tronquée  $\omega_r$  est donc plus importante dans le cas second ordre que dans le cas  $M = 3$ , ce qui est de ce fait également le cas de la fréquence de coupure  $\omega_c$  utilisée lors du découplage de Duncan & Drake. Même si la procédure d'ajustement des ondes libres nécessite un nombre équivalent d'itérations dans les deux cas, le calcul des termes de couplage pour la reconstruction du signal sonde à l'ordre deux est au final plus lourd dans le cas second ordre puisque s'effectuant sur un plus grand nombre de composantes fréquentielles.

On remarque par ailleurs que la relaxation des paramètres  $Tol_1$  et  $Tol_2$  induit bien une diminution des temps de calcul, mais que la relaxation maximale n'entraîne pas nécessairement un

temps de calcul minimal. Le couple ( $Tol_1 = 10^{-3}, Tol_2 = 10^{-3}$ ) semble assez bien approprié à la majorité des cas de houle traités. Les temps de calcul restent néanmoins bien supérieurs aux temps requis par le modèle de prévision linéaire.

L'étude parallèle de la Figure 4.15 et de la Figure 4.16, qui montre l'évolution des erreurs d'assimilation, de reconstruction et de prévision pour les deux types de champs synthétiques étudiés, indique que l'influence sur la rapidité et la précision de la procédure itérative de Duncan & Drake des paramètres  $Tol_1$  et  $Tol_2$  intervenant dans les critères d'arrêt et de convergence de l'algorithme, est plus prononcée lors de l'étude du champ second ordre.

Dans ce cas, la méthode de découplage fonctionne de manière optimale et l'erreur d'assimilation après convergence est très faible de l'ordre de  $10^{-6}$ m (cf 4.2.2.2). On peut donc relâcher les contraintes sur les valeurs de  $Tol_1$  et  $Tol_2$  tout en gardant une très bonne précision du signal sonde reconstruit et par la même des champs de vagues reconstruits et prédits. Le couple  $Tol_1 = 10^{-3}$  et  $Tol_2 = 10^{-3}$  apparaît alors comme un bon compromis entre précision et gain de temps : le temps de calcul est divisé par deux dans la majorité des cas de figure et par six dans le cas à forte cambrure  $\varepsilon = 3\%$ . Les erreurs sur le signal sonde restent tout à fait acceptables puisqu'elles sont de l'ordre de  $10^{-3}$ m /  $10^{-4}$ m et les erreurs moyennes de reconstruction et de prévision sont pratiquement inchangées par rapport au cas  $Tol_1 = 10^{-6}$  et  $Tol_2 = 10^{-7}$ .

Dans le cas où le champ de vagues étudié est d'ordre supérieur, la modification des paramètres n'entraîne pas de modification significative sur la précision des calculs étant donné que la méthode de Duncan & Drake converge rapidement sans descendre à de très faibles valeurs d'erreur comme précédemment. Les valeurs de  $Tol_1$  et de  $Tol_2$  peuvent donc être augmentées sans risque pour diminuer le temps CPU. L'utilisation des valeurs  $Tol_1 = 10^{-3}$  et  $Tol_2 = 10^{-3}$  est également recommandée dans ce cas de figure ; elle permet une diminution des temps de calcul par deux voire par sept pour le cas de houle de forte cambrure  $\varepsilon = 3\%$ .

En conclusion, la comparaison des performances des modèle de prévision au second ordre étendu et au premier ordre, où les calculs sont pratiquement instantanés (CPU < 0.1s) mais les erreurs de calcul importantes, montre que l'augmentation du temps de calcul requis pour une prévision au second ordre étendu est bien contrebalancée par la très nette amélioration de la précision des champs reproduits. Cette constatation est d'autant plus vraie que les calculs ont été réalisés ici sur un seul processeur ne faisant pas partie des plus actuels, et que l'utilisation des nouvelles générations de processeurs permettrait une nette diminution des temps indiqués dans ce travail de thèse, ou plus encore, l'utilisation de plusieurs processeurs associés en parallèle.

A titre indicatif, les temps de calcul sont par exemple divisés par quatre sur un processeur Intel® Xeon™ CPU (3.73GHz), ce qui donne pour les valeurs  $Tol_1 = 10^{-3}$  et  $Tol_2 = 10^{-3}$  des temps de calcul allant de quelques dixièmes de secondes, pour un cas de houle faiblement cambré mesuré par une sonde durant  $T = 204.6$ s, à 60s pour le cas de houle le plus complexe que nous avons étudié, non-linéaire d'ordre  $M = 3$  et de cambrure  $\varepsilon = 3\%$ , mesuré par une sonde pendant 410.4s. Ces valeurs sont à comparer aux temps de prévision maximaux  $t_{max}$ , qui vont de 240s environ dans le cas d'un signal sonde de période  $T = 204.6$ s, à 480s en moyenne pour  $T = 410.4$ s, lorsque les fréquences limites  $\omega_l$  et  $\omega_v$  sont déterminées comme en 4.1.2.2.

Notons que l'utilisation d'autres critères de choix de ces fréquences, conduisant en particulier à prendre une valeur plus faible de  $\omega_v$ , permettrait à la fois d'augmenter l'instant de prévision maximal, mais également de diminuer les temps CPU puisque réduisant le nombre de composantes fréquentielles prises en compte dans les calculs. Le risque est alors de dégrader la reproduction des champs de vagues, comme nous l'avons vu au paragraphe 4.2.2.1.

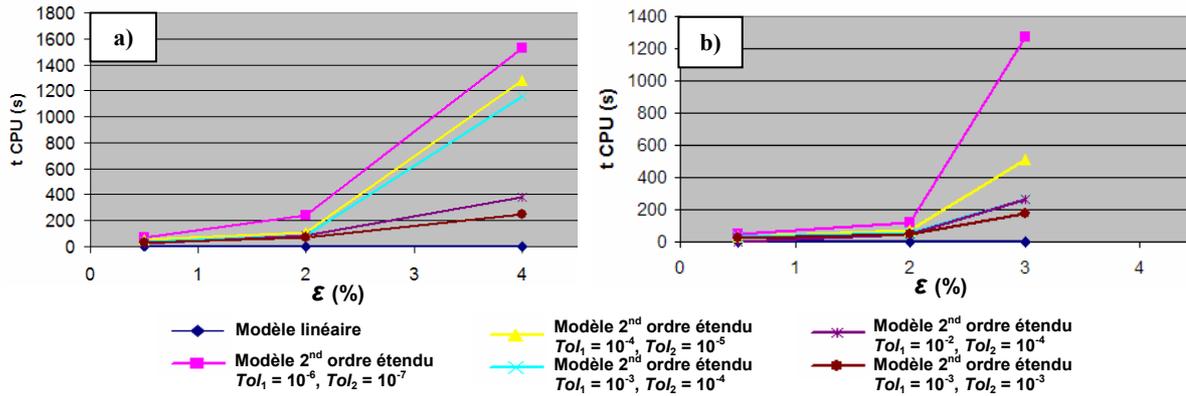


Figure 4.15 : Rapidité de calcul de la méthode d'ordre 2 étendu pour une reconstruction à  $t = T/2$  en fonction des paramètres ( $Tol_1, Tol_2$ ). Les signaux de sonde étudiés ont une période de  $T = 410.4$  et sont a) d'ordre deux, b) d'ordre  $M = 3$ .

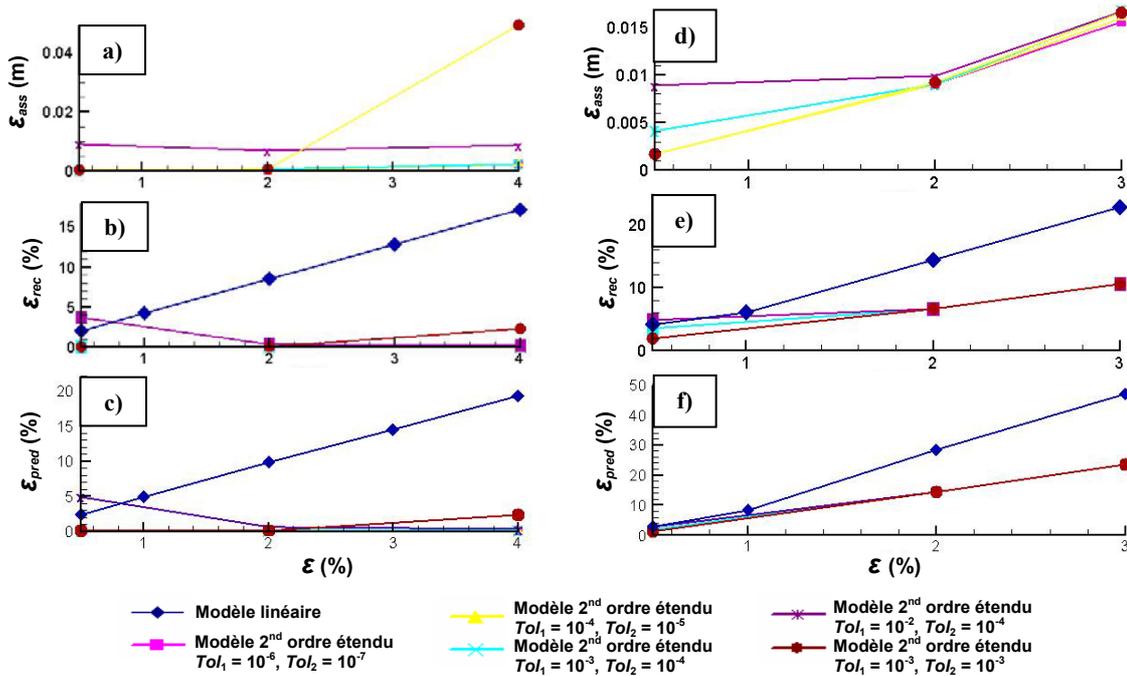


Figure 4.16 : Précision de la méthode d'ordre deux étendu pour l'étude de champs synthétiques d'ordre deux (à gauche) et d'ordre  $M = 3$  (à droite) : a) et d) Erreurs d'assimilation, b) et d) Erreurs moyennes de reconstruction, c) et e) Erreurs moyennes de prévision.

### Confrontation de la méthode à un modèle de prévision existant

Finalement, le modèle au second ordre étendu a été testé sur les cas de houle présentés par Wu dans son rapport de thèse ([160], 2004). Comme nous l'avons souligné au Chapitre 1, Wu est à l'origine d'un modèle de prévision basé sur l'utilisation du modèle numérique HOS d'ordre  $M$  variable selon le cas de houle étudié. Les résultats auxquels nous comparons nos erreurs de prévision sont issus

de simulations dont l'ordre n'a pas été précisé dans le manuscrit. On peut cependant supposer que le modèle de prévision utilisé par Wu est d'ordre trois au moins.

Afin de pouvoir comparer nos résultats respectifs, nous avons repris l'expression (4.18) de l'erreur de calcul  $\varepsilon_D$  telle que définie par Wu, que nous évaluons sur la totalité du domaine de prévision comprenant les zones de rétropection, de reconstruction et de prévision à proprement parler.

### Tests réalisés

Les champs de vagues synthétiques faisant l'objet de notre étude sont générés à l'aide du HOS à l'ordre  $M = 3$  sur un domaine de calcul de longueur spatiale  $L = 20\lambda_p$ . Leurs caractéristiques sont répertoriées dans le Tableau 4.2. Les signaux de sonde sont relevés au centre du domaine de calcul pendant une période  $T = 300s$ .

Deux cas de houles de fortes cambrures n'ont pu être testés ( $\varepsilon = 5.2\%$  et  $\varepsilon = 6.0\%$ ), les simulations HOS de ayant été interrompues lors de la création des signaux de sonde, suite à l'apparition de non-linéarités trop importantes. Wu, qui utilise également une technique de génération basée sur l'utilisation de la méthode HOS, ne rencontre pas ce problème car sa version du code inclut un filtrage de la surface libre lorsque la cambrure locale des vagues dépasse une valeur limite (cf Chapitre 1).

$H_s$ (m)	$T_p$ (s)	$\varepsilon$ (%)
0.48	12	0.2
3.75	12	1.7
6.26	12	2.8
7.82	12	3.5

Tableau 4.2 : Caractéristiques des champs de vagues étudiés.

Lors de nos calculs, nous avons considéré  $N_t = 250$  modes temporels pour le signal sonde ainsi que  $N_x = 512$  modes spatiaux pour le calcul du champ de vagues sur tout le domaine d'étude. En ce qui concerne le choix de la bande fréquentielle d'étude sur le signal sonde, nous avons tout d'abord repris la méthode de troncature spectrale décrite au 4.1.2.2. Puis nous avons effectué une deuxième série de calculs en utilisant les valeurs  $\omega_l$  et  $\omega_v$  préconisées par Wu qui sont fixées quelque soit le champ de vague considéré à  $\omega_l = 0.36\text{rad/s}$  et  $\omega_v = 1.06\text{rad/s}$ .

Comme dans les études précédentes, les résultats présentés sont issus de simulations de Monte Carlo réalisées sur  $N_s = 1000$  jeux de phases aléatoires différents pour chaque cambrure testée.

### Résultats obtenus par notre modèle de prévision

Dans un premier temps, comparons les résultats que nous donne notre modèle de prévision lorsque nous utilisons la procédure de prétraitement des signaux de sonde d'une part, et lorsque nous fixons ces valeurs à  $\omega_l = 0.36\text{rad/s}$  et  $\omega_v = 1.06\text{rad/s}$  d'autre part.

Les simulations montrent que les fréquences minimales  $\omega_l$  obtenues par la méthode de troncature des spectres des signaux de sonde sont extrêmement proches de  $0.36\text{rad/s}$ . En revanche, les fréquences maximales  $\omega_v$  sont de l'ordre de  $1.9\text{rad/s}$  et sont donc bien supérieures à la valeur de

1.06rad/s utilisée par Wu. Ceci est dû à la procédure de troncature spectrale en elle-même qui conserve un panel de hautes fréquences suffisant pour la recherche de la fréquence de coupure optimale  $\omega_c$  requise lors de la procédure de Duncan & Drake (cf section 3.3.2).

Les zones de prévision théoriques associées à ces fréquences sont donc moins étendues que la zone calculée à partir des fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  de Wu : les temps de prévision maximaux  $t_{\max}$  sont environ de 340s lorsque notre méthode est appliquée, et de 454.3s lorsque les valeurs  $\omega_l$  et  $\omega_v$  sont fixées à 0.36rad/s et 1.06rad/s. On le constate par exemple sur la Figure 4.18, où l'on a représenté l'erreur de calcul en tout point du domaine d'intérêt ( $t > 0$ ) pour des cas particuliers de houles générées à l'aide d'un seul jeu de phases par la méthode HOS.

Dans le cas où les valeurs  $\omega_l$  et  $\omega_v$  ont été déterminées de manière automatique par la procédure de troncature (Figures a), b), c), d)), les zones de prévision sont environ deux fois plus petites que dans le cas où les valeurs ont été prises égales à 0.36rad/s et 1.06rad/s (Figures e), f), g), h)).

Si l'on évalue l'erreur  $\varepsilon_D$  moyennée sur la totalité du domaine de prévision, on obtient donc des valeurs plus faibles en utilisant notre modèle de prévision original qu'en se basant sur l'intervalle fréquentiel [0.36rad.s,1.06rad/s] (cf Figure 4.17).

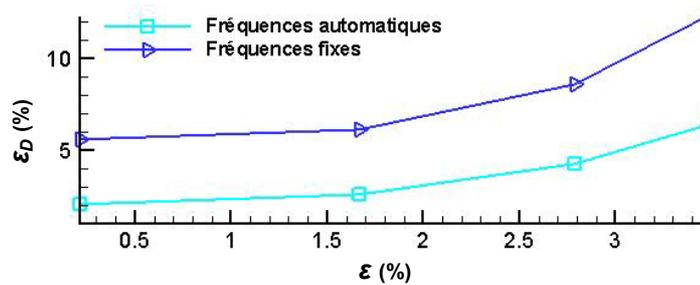


Figure 4.17 : Erreurs obtenues par le modèle de prévision au 2<sup>nd</sup> ordre étendu pour différents cas de houle d'ordre  $M = 3$  en utilisant un intervalle fréquentiel  $[\omega_l, \omega_v]$  déterminé de manière automatique ou fixé à [0.36rad.s,1.06rad/s]. Le calcul s'effectue sur la totalité des domaines de prévision théoriques associés aux fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  considérées.

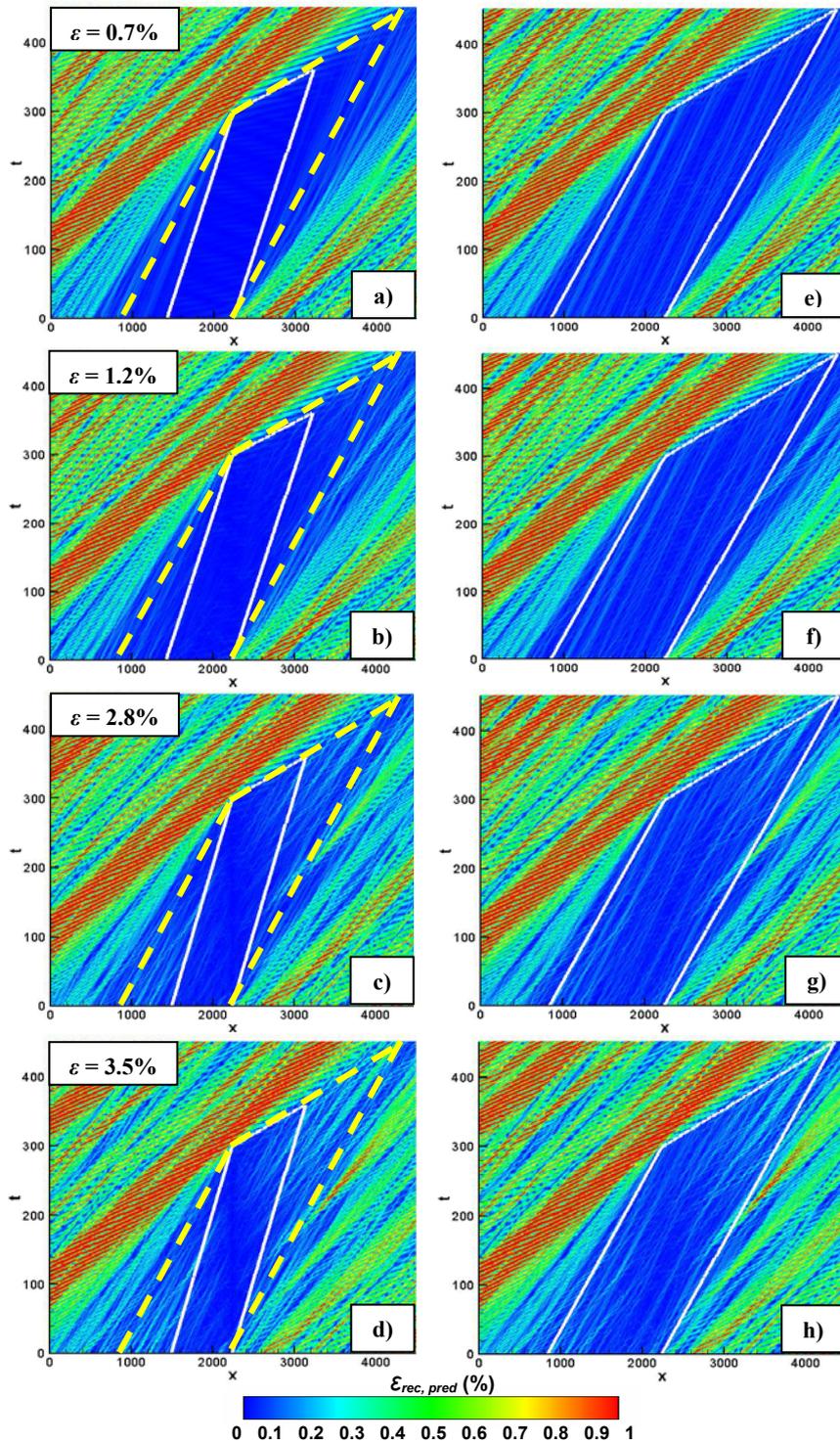


Figure 4.18 : Carte des erreurs de calcul obtenues par le modèle de prévision au 2<sup>nd</sup> ordre étendu sur différents cas de houle pour des intervalles fréquentiels déterminés de manière automatique (a), b), c), d)) ou fixés à  $[0.36 \text{ rad/s}, 1.06 \text{ rad/s}]$  (e), f), g), h)).

Comparaison aux résultats présentés par Wu

On constate sur la Figure 4.18 que l'erreur à l'intérieur des zones de prévision associées aux fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  obtenues par notre méthode sont plus faibles que les erreurs que l'on trouve dans les mêmes zones en utilisant les valeurs préconisées par Wu. Cette différence provient du fait que nos fréquences  $\omega_v$  étant supérieures à 1.06rad/s, nous disposons d'un nombre de fréquences et donc d'un jeu de variables d'optimisation plus important. Le signal sonde est donc susceptible d'être mieux reconstruit avec notre bande fréquentielle  $[\omega_l, \omega_v]$ , et par suite les champs prédit et reconstruits sont plus proches des champs initiaux à l'intérieur de la zone de prévision associée à ces fréquences.

Il nous a donc semblé judicieux de comparer les erreurs de prévision présentées par Wu dans son manuscrit aux erreurs trouvées par notre modèle de prévision lorsque les fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  sont fixées à 0.36rad/s et 1.06rad/s, ou lorsqu'elles sont calculées par la procédure de prétraitement 4.1.2.2. Dans les deux cas de figure, les erreurs sont calculées sur la zone de prévision associée à l'intervalle fréquentiel [0.36rad.s, 1.06rad/s].

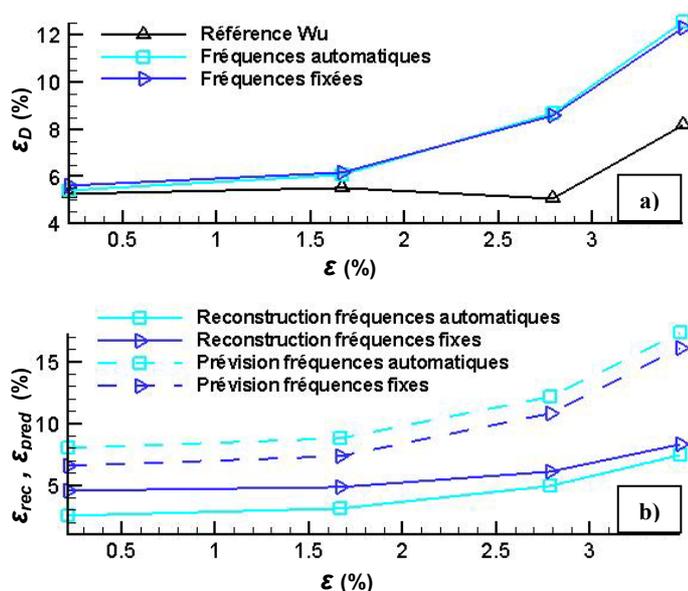


Figure 4.19 : Comparaison des erreurs présentées par Wu aux erreurs obtenues par le modèle de prévision d'ordre 2 étendu utilisant des fréquences  $\omega_l$ ,  $\omega_v$  déterminées de manière automatique ou fixées à [0.36rad.s, 1.06rad/s] : a) Erreur sur la totalité du domaine de prévision théorique associé aux fréquences fixes, b) Distinction entre erreurs de reconstruction et erreurs de prévision.

À faible cambrure ( $\varepsilon = 0.2\%$  et  $\varepsilon = 1.7\%$ ), on constate sur la Figure 4.19.a) que les erreurs  $\varepsilon_D$  sont équivalentes aux erreurs rapportées par Wu, quelles que soient les fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  utilisées. On note une légère amélioration de la précision apportée par l'utilisation des fréquences obtenues par notre méthode. La raison première est que le champ de vagues est bien mieux reconstruit avec un panel fréquentiel plus important que lorsque la fréquence maximale  $\omega_v$  est prise à 1.06rad/s (cf Figure 4.19.b)). Malgré tout, les erreurs de prévision sont plus importantes avec nos fréquences et au final les résultats des deux méthodes sont sensiblement identiques.

À plus forte cambrure ( $\varepsilon = 2.8\%$  et  $\varepsilon = 3.5\%$ ), les erreurs fournies par notre modèle de prévision sont environ 30% plus élevées que les résultats obtenus par Wu. Si l'on observe la Figure 4.19.b), on constate que ce résultat provient majoritairement d'une mauvaise prévision des champs de vagues, les erreurs de reconstruction ne subissant qu'une faible augmentation avec la cambrure. À nouveau, aucune amélioration n'est apportée par l'utilisation d'un intervalle fréquentiel  $[\omega_l, \omega_h]$  plus étendu du fait d'une dégradation de la prévision.

Nous soulevons une interrogation quant à la pertinence de l'erreur rapportée par Wu pour le cas de cambrure  $\varepsilon = 2.8\%$  qui est étonnamment moins élevée que les erreurs obtenues à plus faible cambrure.

En conclusion, notre modèle d'ordre deux étendu semble tout à fait adapté à la prévision de champs de vagues de faible à moyenne cambrure puisque les résultats obtenus sont du même ordre de grandeur que les erreurs fournies par le modèle de Wu qui, nous le rappelons, est d'ordre trois au moins. En revanche, lorsque la cambrure devient significative, la propagation de la houle est moins bien appréhendée par un modèle faiblement non-linéaire ce qui induit des erreurs de prévision plus importantes, bien que restant tout à fait acceptables. Il faut alors se tourner vers un modèle de prévision d'ordre plus élevé, ce qui fait l'objet de la partie suivante.

### 4.2.3 Prévision au troisième ordre de perturbation

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus par un modèle de prévision d'ordre trois utilisant le HOS. Nous commençons par rappeler les points clé de la méthode d'assimilation de données à l'ordre trois avant de détailler les différentes améliorations apportées à la méthode originale. Les performances du modèle d'ordre trois sont finalement évaluées dans une dernière partie : on compare les résultats obtenus par nos différents modèles entre eux, mais également aux résultats issus d'un modèle de prévision existant, le modèle de Wu ([160], 2004), dont il a déjà été question au 0.

#### 4.2.3.1 Principe de l'assimilation de données à l'ordre trois

La méthode de prévision d'ordre trois est utilisée à la suite d'un modèle d'ordre deux (ou d'ordre deux étendu), lorsque celui-ci n'est plus apte à représenter la physique du champ de vagues étudié. Nous rappelons en effet que nous préférons commencer par utiliser un modèle de houle faiblement non-linéaire de manière à éviter les surcoûts en temps de calcul associés aux modèles d'ordre élevés lorsque ceux-ci ne sont pas nécessaires.

En pratique, cela signifie que la méthode d'assimilation d'ordre deux n'a pas reconstruit le signal sonde de manière suffisamment précise pour que les données assimilées permettent une bonne initialisation du modèle de prévision à proprement parler. Au terme de la technique itérative de Duncan & Drake, si l'erreur sur le signal sonde reconstruit à partir des ondes libres découplées des effets du second ordre reste supérieure au paramètre de tolérance fixé, on initie la procédure d'assimilation d'ordre trois en prenant comme condition initiale les ondes libres optimisées à l'ordre deux.

La Figure 4.20 représente les principales étapes de la méthode de prévision d'ordre trois.

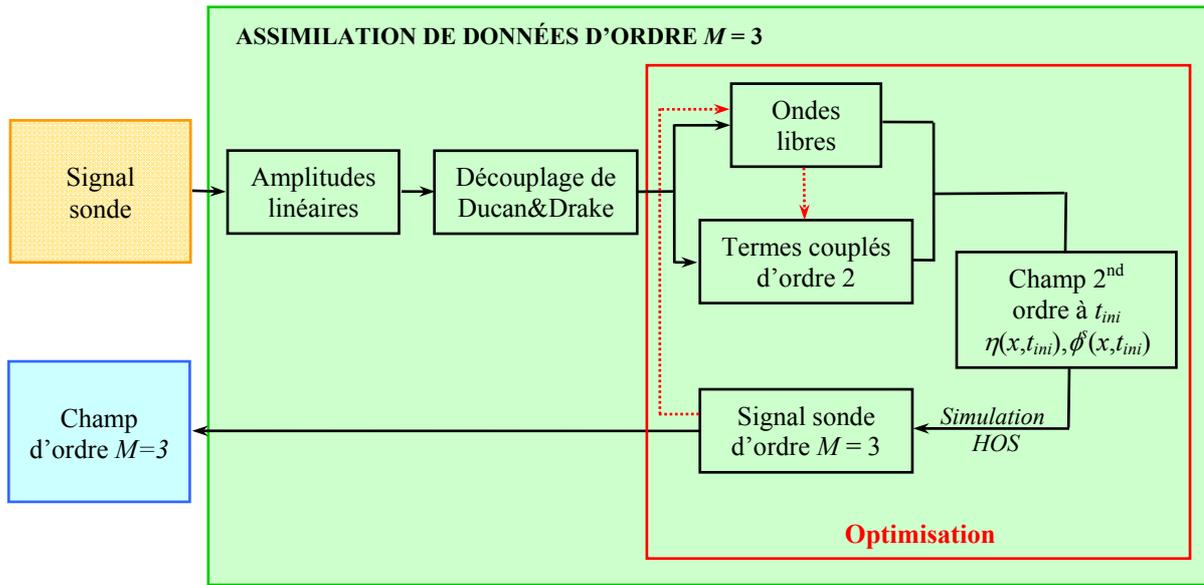


Figure 4.20 : Schéma de principe de la méthode de prévision à l'ordre  $M=3$  utilisant le HOS.

L'évaluation du signal sonde à l'ordre trois (ou à un ordre quelconque  $M$ ) à l'aide du modèle numérique HOS n'est pas directe comme au second ordre, où l'expression de l'élévation de surface libre en un point  $(x, t)$  est explicite. L'initialisation des équations (1.25) régissant le HOS requiert la donnée de l'élévation et du potentiel de surface libre à un instant noté  $t_{ini}$  sur l'ensemble du domaine spatial de calcul. Ces quantités sont ensuite avancées en temps et l'on obtient l'estimation du signal sonde à l'ordre  $M$  en relevant la valeur de l'élévation de la surface libre en la position  $x_p$  de la sonde à chaque pas de temps de la simulation.

À chaque itération de l'algorithme d'optimisation, l'élévation et le potentiel de surface libre sont calculés à  $t_{ini}$  et en tout point  $x \in [0, L]$  au second ordre de perturbation à partir des ondes libres optimisées à l'itération précédente en utilisant les équations de couplage modal (1.12). Un déphasage  $k(x_p - x)$  est appliqué à chaque composante modale du signal sonde de manière à obtenir le champ de vagues en tout point  $x$  du domaine de calcul.

L'instant d'initialisation  $t_{ini}$  peut être pris à  $t_{ini} = 0$ , le début de la période de mesure du signal, mais également à  $t_{ini} = T$ , la fin de la période de mesure, ou à tout instant appartenant à l'intervalle  $[0, T]$ . Dans le cas général d'une initialisation à un instant quelconque de la période d'assimilation, l'élévation et le potentiel de surface libre sont propagés de  $t_{ini}$  à  $T$ , puis rétropropagés de  $t_{ini}$  à  $0$ , afin d'obtenir l'élévation de surface libre sur toute la période de mesure.

La Figure 4.21 illustre la reconstruction d'un signal sonde d'ordre  $M = 3$  à l'aide du HOS initialisé à  $t_{ini}$  par un champ d'ordre deux.

En ce qui concerne l'optimisation des ondes libres, nous avons montré au Chapitre 3 que les méthodes directes, reposant uniquement sur les valeurs de l'erreur d'assimilation et non sur la connaissance de son gradient, sont les plus adaptées au problème de minimisation à l'ordre  $M$  faisant intervenir le HOS. En effet, contrairement au modèle second ordre où l'erreur d'assimilation et par suite son gradient peuvent être exprimés de manière analytique, l'estimation du gradient à l'ordre  $M$  devient un processus très complexe à mettre en œuvre, ou simple mais coûteux en temps de calcul puisque nécessitant un très grand nombre d'évaluations de la fonctionnelle (cf section 3.4.4.2).

Les deux méthodes que nous avons envisagées sont la méthode directionnelle de Rosenbrock ([131], 1960) et la méthode Simplexe de Nelder & Mead ([112], 1965) décrites au 3.4.3. Cependant, au vu des résultats obtenus par la méthode Simplexe lors de l'assimilation à l'ordre deux (cf Figure 4.8), nous avons écarté cette technique et nous avons préféré utiliser la méthode de Rosenbrock dans nos simulations, combinée à la mise à jour des directions de recherche de Palmer ([117], 1968).

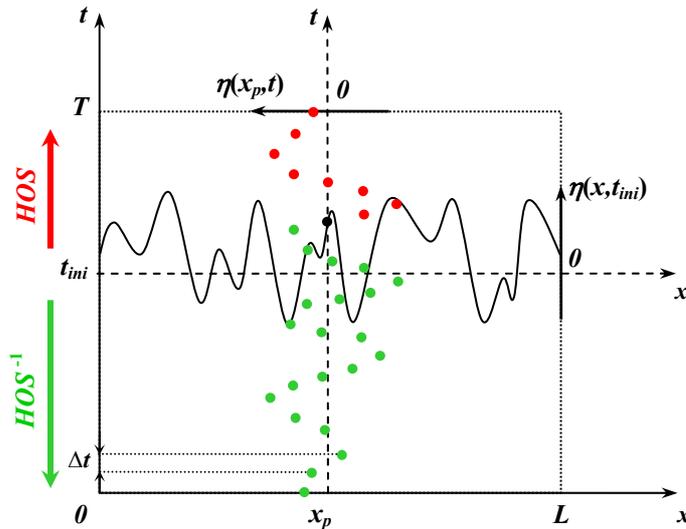


Figure 4.21 : Schéma de principe du processus de reconstruction du signal sonde à l'ordre  $M$  en utilisant la méthode HOS initialisée par les champs  $(\eta(x, t_{ini}), \phi^s(x, t_{ini}))$  calculés au 2<sup>nd</sup> ordre.

Les parties 4.2.3.2 et 4.2.3.3 présentent les différentes étapes qui ont conduit à la création d'une méthode d'assimilation de données d'ordre trois performante. Nous avons tout d'abord réalisé une étude en houle régulière d'ordre trois, puis une étude plus poussée sur divers cas de houle irrégulière. Les champs de vagues synthétiques initiaux ont été générés à partir d'un jeu de phases uniquement car de nombreux tests ont été effectués et la méthode de Monte-Carlo aurait été beaucoup trop coûteuse en temps de calcul pour être appliquée. En revanche, la validation de la méthode présentée à la section 4.2.3.4 a été réalisée sur un nombre important de jeux de phases.

#### 4.2.3.2 Test sur un cas de houle régulière de Stokes d'ordre trois

Dans un premier temps, nous avons voulu tester l'aptitude de la méthode d'assimilation de données à l'ordre  $M = 3$  à reconstruire un simple signal de sonde synthétique stationnaire du troisième ordre en profondeur infinie, avant de passer à l'étude de signaux non-linéaires plus complexes. Pour éviter toute confusion, on parlera de houle au troisième ordre pour désigner la houle de Stokes (4.20) et de houle d'ordre  $M = 3$  pour désigner la houle HOS. On rappelle que ces deux modèles ne sont pas équivalents. Le champ considéré est caractérisé par une amplitude  $A_r = 2\text{m}$ , et une période  $T_r = 8\text{s}$ .

### Modèle de Stokes d'ordre trois

L'élévation et le potentiel de surface libre sont définis à l'ordre trois par les formules de Stokes où  $\xi_r$  est la fonction de phase telle que  $\xi_r = \omega_r t - k'_r x$  et où  $k'_r = (1 - (A_r k_r)^2) k_r$  :

$$\begin{cases} \eta_r(x, t) = \left(1 - \frac{3}{8}(A_r k_r)^2\right) A_r \cos(\xi_r) + \frac{1}{2} A_r^2 k_r \cos(2\xi_r) + \frac{3}{8} A_r^3 k_r^2 \cos(3\xi_r) \\ \phi_r^s(x, t) = \frac{g A_r}{\omega_r} \exp(k'_r \eta(x, t)) \sin(\xi_r) \end{cases} \quad (4.20)$$

Afin que l'énergie du spectre de houle se répartisse uniquement sur les trois modes considérés ( $k, 2k, 3k$ ), la longueur spatiale  $L$  du domaine d'étude doit être égale à un nombre entier  $\kappa$  de longueurs d'onde de pic, comme suggéré en (4.13). L'emploi des FT requiert par ailleurs que le signal sonde soit périodique ; ceci est facilement réalisable dans le cas d'un signal stationnaire puisqu'il suffit de prendre une période de mesure  $T$  égale à un nombre entier de périodes de pic  $T_p$ . Pour ces tests, nous avons donc pris comme paramètres :  $\kappa = 30$ ,  $N_x = 300$  et  $N_t = 260$  (sachant que le pas de discrétisation temporel est de 0.8s, cela nous donne une période  $T$  égale à 325 périodes de pic). La Figure 4.22 représente le spectre en amplitude du signal sonde généré.

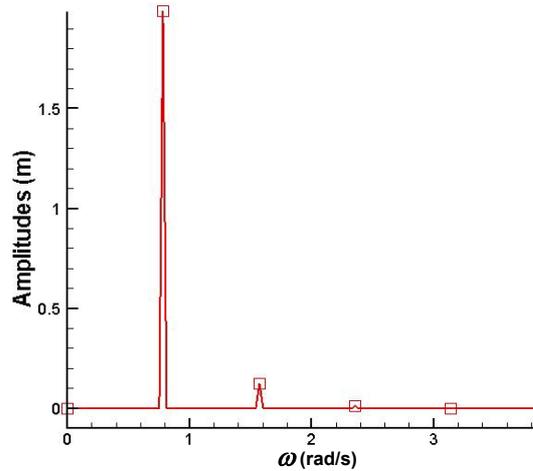


Figure 4.22 : Spectre en amplitude du signal de Stokes d'ordre 3 de caractéristiques  $A_r = 2m$  et  $T_r = 8s$ .

### Propagation du signal par le HOS d'ordre $M = 3$

Tout d'abord, nous avons évalué l'aptitude du modèle HOS d'ordre  $M = 3$  à propager la houle régulière décrite précédemment durant une période équivalente à la longueur temporelle du signal sonde  $T$ . Ce test a pour but de déterminer les limites du modèle numérique à d'ordre  $M = 3$ , et d'obtenir une estimation de l'erreur minimale pouvant être obtenue par l'assimilation de données.

Pour se faire, le modèle est initialisé à partir de l'élévation et du potentiel de surface libre stationnaires au troisième ordre calculés en tout point du domaine d'étude à l'instant  $t_{ini} = 0$ , puis on simule l'évolution de ces quantités pendant  $T$  secondes à l'aide du modèle HOS d'ordre  $M = 3$ , en relevant l'élévation de la surface libre en la position  $x_p$  du capteur fictif utilisé pour créer le signal

sonde. On génère ainsi un signal que l'on compare à l'élévation  $\eta_r(x_p, t \in [0, T])$  directement obtenue par l'équation de Stokes (4.20).

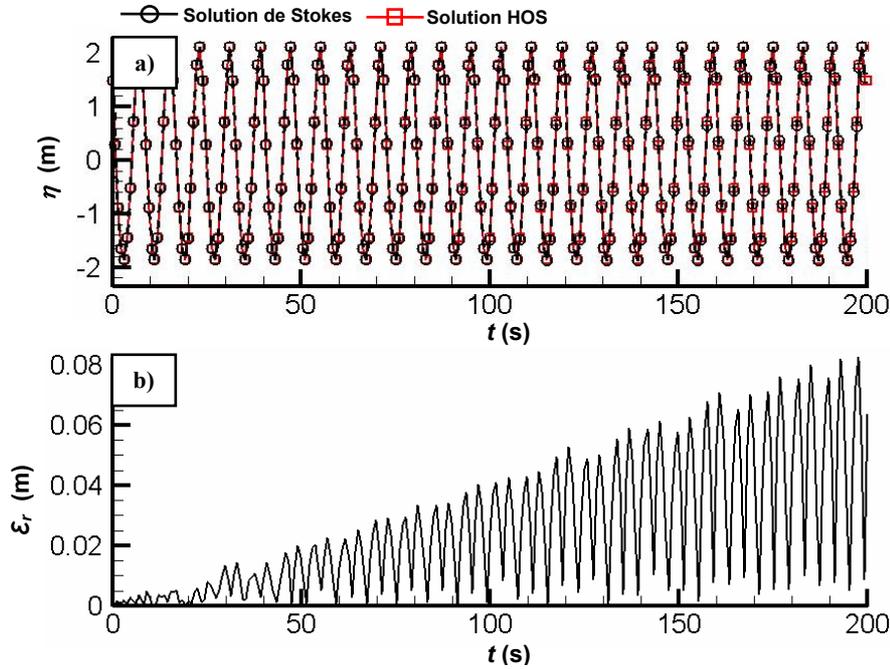


Figure 4.23 : Comparaison entre l'élévation de surface libre obtenue par simulation HOS à l'ordre  $M = 3$  et la solution de référence de Stokes : a) Signaux obtenus, b) Erreur absolue.

Sur la Figure 4.23.b), on remarque que l'erreur absolue  $\varepsilon_r$  entre les deux signaux, définie à l'instant  $t$  par (4.21), augmente avec le temps et évolue de manière oscillatoire. Cette erreur provient d'un déphasage entre l'élévation propagée par le HOS et l'élévation de Stokes, comme l'indique la Figure 4.23.a) représentant les deux signaux sur l'intervalle  $[0, T]$ . Le retard de la solution HOS prend de plus en plus d'ampleur avec le temps mais reste toutefois très faible, bien que le calcul de l'erreur tel que défini en (4.21) laisse croire à un écart important.

$$\varepsilon_r(t) = |\eta(x_p, t) - \eta_r(x_p, t)| \quad (4.21)$$

Bonnefoy ([18], 2005), qui a réalisé des travaux de validation de la méthode HOS sur des cas de houles stationnaires non-linéaires au cours de sa thèse, constate ce même retard du champ HOS par rapport à la solution de référence de Rienecker & Fenton ([129], 1981). Il montre que le déphasage décroît de manière exponentielle avec l'ordre HOS  $M$  et le nombre  $N_x$  de modes utilisés, et que son apparition est retardée par l'augmentation des mêmes paramètres. D'autres études dues à Dommermuth & Yue ([45], 1987), Skandrani *et al* ([137], 1996) ou Clamond & Grue ([30], 2004), indiquent des résultats similaires. Pour propager correctement la solution stationnaire de Stokes à l'ordre trois avec le HOS et obtenir une parfaite concordance entre l'élévation simulée et l'élévation de Stokes, il faudrait donc utiliser un ordre  $M$  de non-linéarité beaucoup plus élevé, et prendre en compte un nombre de modes plus important.

Toutefois, l'objectif étant ici de tester la méthode d'assimilation de données d'ordre  $M = 3$ , nous nous limiterons à l'utilisation des équations HOS à  $M = 3$ . Nous pouvons donc dès à présent affirmer que l'erreur obtenue après l'assimilation de données ne pourra être inférieure à l'erreur obtenue dans cette étude.

### Assimilation de données à l'aide du HOS d'ordre $M = 3$

Nous présentons maintenant les résultats obtenus par l'assimilation de données à l'ordre  $M = 3$  en commençant par ajuster les ondes libres à l'aide de la méthode d'ordre deux de Duncan & Drake, puis en injectant les paramètres obtenus dans le modèle d'optimisation de Rosenbrock. Le signal sonde est calculé à l'ordre  $M = 3$  à partir d'une simulation HOS initialisée par une élévation et un potentiel de surface libre au second ordre ou second ordre étendu. Nous souhaitons en effet évaluer l'impact du modèle choisi pour l'initialisation du modèle numérique sur la précision du signal sonde reconstruit. Remarquons que la longueur du domaine d'étude est telle que  $L = \kappa\lambda_p$  lorsque l'on utilise le modèle classique d'ordre deux, et vaut  $L = \kappa\lambda'_p$  dans le cas du modèle d'ordre deux étendu, où  $\lambda'_p$  est la longueur d'onde associée au nombre d'onde  $k'_p$  d'ordre trois.

La Figure 4.24 montre l'évolution de l'erreur d'assimilation  $\varepsilon_{ass}$  lors de la procédure de Duncan & Drake (quatre itérations), et lors du passage à la première itération de l'optimisation de Rosenbrock. On note qu'elle augmente de manière drastique lorsque le modèle HOS est initialisé par un champ de vagues d'ordre deux : l'erreur entre le tout premier signal sonde calculé à l'ordre trois par le HOS est environ dix fois plus importante que l'erreur obtenue à la fin de l'assimilation au second ordre. En revanche lorsque le modèle est initialisé par un champ au second ordre étendu, le saut d'erreur est bien moindre.

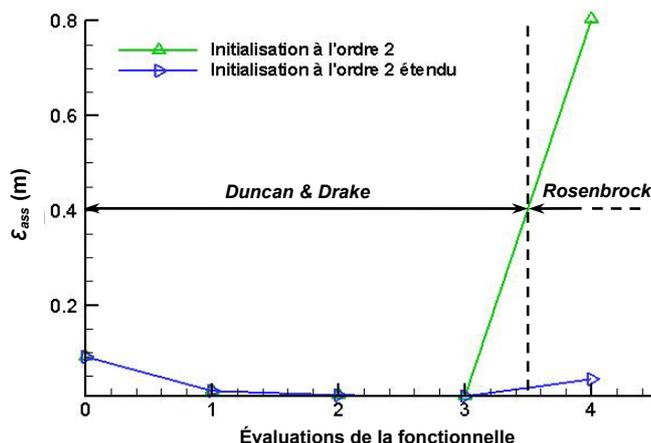


Figure 4.24 : Erreur d'assimilation au cours du processus de Duncan & Drake (4 itérations) puis au passage à l'optimisation d'ordre  $M=3$  par la méthode de Rosenbrock (1<sup>ère</sup> itération).

Si l'on s'intéresse à l'évolution de l'erreur absolue  $\varepsilon_r$  entre les signaux reconstruits et le signal référence de Stokes sur la période de mesure (cf Figure 4.25), on constate effectivement une croissance significative de cette erreur au cours du temps lorsque le modèle classique d'ordre deux est utilisé pour l'initialisation du HOS. Lorsque le modèle d'ordre deux étendu est employé, l'erreur sur le signal synthétique de référence croît certes, mais beaucoup plus modérément.

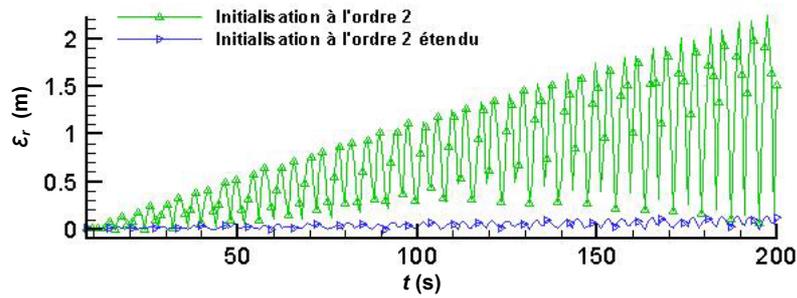


Figure 4.25 : Évolution de l'erreur entre le signal sonde de Stokes et les signaux reconstruits par le HOS à l'ordre  $M = 3$  à partir d'une initialisation au 2<sup>nd</sup> ordre ou au 2<sup>nd</sup> ordre étendu.

Ce phénomène vient du fait que le modèle d'ordre deux étendu permet un meilleur transfert de l'énergie du spectre du champ de vagues vers les modes d'ordre deux et trois. On constate en effet sur la Figure 4.26.a) qu'à l'instant initial  $t = 0$ , le pic d'ordre un du spectre issu de la FT spatiale de l'élévation reconstruite au second ordre étendu est moins important que le pic d'ordre un de l'élévation calculée à l'ordre deux. La relation de dispersion non-linéaire d'ordre trois utilisée dans ce modèle fait que l'énergie du spectre s'est déjà en partie reportée sur les modes d'ordre deux et trois. Au cours de la simulation HOS, les interactions non-linéaires entre ces modes vont provoquer une croissance plus importante de leur énergie si bien qu'au terme du calcul, le champ obtenu est plus proche d'un champ d'ordre trois que le champ obtenu à partir d'une initialisation d'ordre deux classique (cf Figure 4.26.b)).

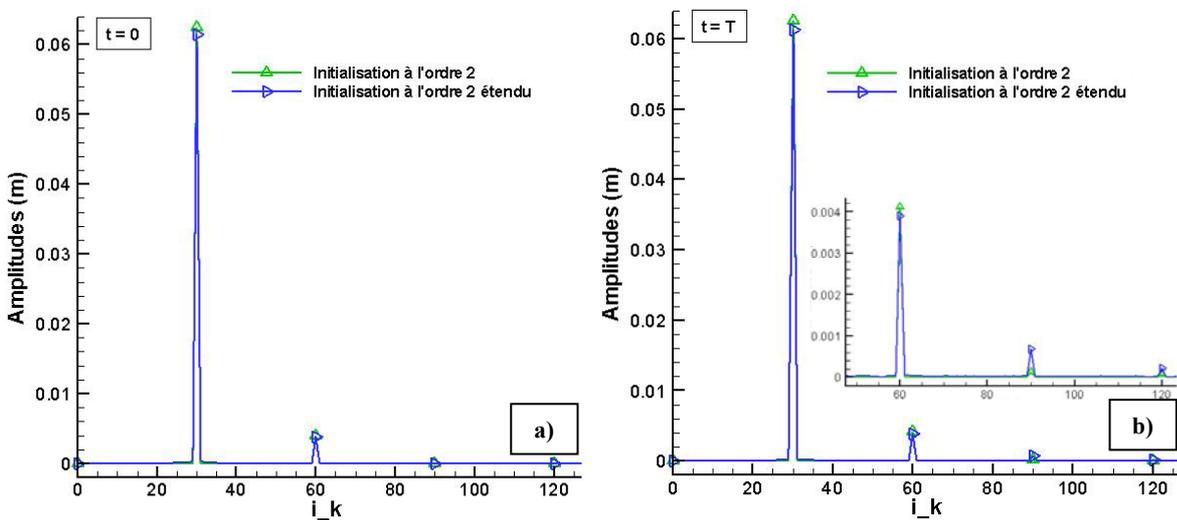


Figure 4.26 : Spectre en amplitude de l'élévations de surface libre : a) à  $t=0$  après calcul au 2<sup>nd</sup> ordre ou au 2<sup>nd</sup> ordre étendu pour initialiser le HOS, b) à  $t=T$  après simulation HOS.

L'impact sur le signal sonde calculé lors de cette première itération est l'apparition d'un déphasage par rapport à la référence de Stokes, qui augmente plus rapidement lorsque l'initialisation se fait à l'ordre deux, que lorsqu'elle a lieu à l'ordre deux étendu. On l'observe bien sur la Figure 4.27

qui compare les signaux reconstruits à l'aide du HOS à partir d'un champ initial d'ordre deux et d'ordre deux étendu au signal de Stokes de référence sur une portion de la période de mesure.

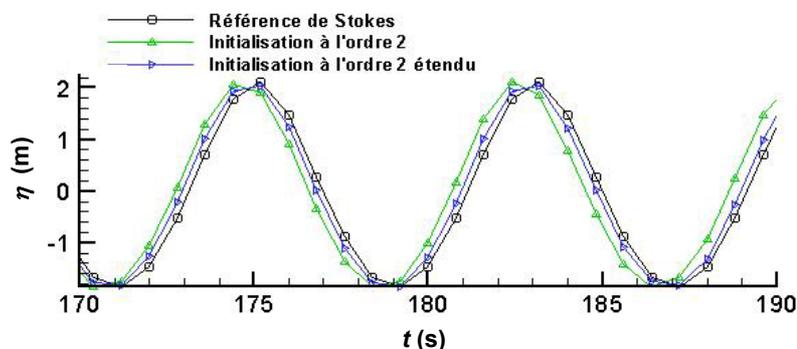


Figure 4.27 : Zoom sur le signal sonde de référence et les signaux reconstruits à l'aide du HOS à la première itération du processus de Rosenbrock.

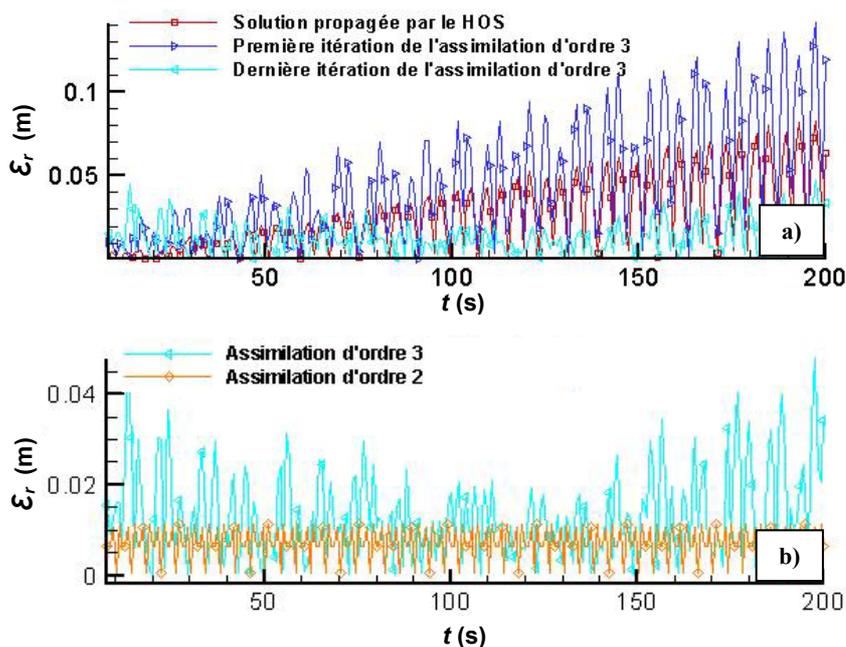


Figure 4.28 : Erreur sur le signal sonde obtenue par l'assimilation de données à l'ordre  $M=3$  (avec initialisation du HOS au 2<sup>nd</sup> ordre étendu) : a) Comparaison avec l'erreur induite par la propagation HOS elle-même, b) Comparaison avec l'erreur obtenue par l'assimilation d'ordre 2.

Finalement, à l'issue de l'optimisation de Rosenbrock, l'erreur  $\varepsilon_r$  entre le signal stationnaire de Stokes et le signal sonde numérique obtenu par le HOS à partir d'une solution d'ordre deux étendu est du même ordre de grandeur que l'erreur induite par la propagation HOS du signal stationnaire trouvée lors de notre première étude, ce qui atteste de l'efficacité de la méthode (cf Figure 4.28.a)). Le processus d'assimilation semble avoir réparti l'erreur sur l'intervalle  $[0, T]$ .

Cependant, comme le montre la Figure 4.28.b) sur laquelle on a comparé la précision des signaux de sonde issus d'une assimilation d'ordre deux uniquement, puis d'ordre trois, le signal sonde est mieux reconstruit par l'assimilation de Duncan & Drake. Cela signifie que l'optimisation de Rosenbrock n'est pas parvenue à réduire le saut d'erreur survenu lors de passage à l'assimilation d'ordre trois. Nous reviendrons plus en détails sur ce point lors des études en houle irrégulière où l'écart entre les solutions assimilées à l'ordre deux et à l'ordre trois est beaucoup plus important.

En conclusion, nous retiendrons de cette analyse en houle régulière qu'il est préférable d'utiliser le modèle de houle d'ordre deux étendu pour calculer l'élévation et le potentiel de surface libre introduits comme conditions initiales aux équations HOS. La relation de dispersion non-linéaire d'ordre trois permet en effet une meilleure adéquation de la solution second ordre et du modèle numérique d'ordre  $M = 3$ .

### 4.2.3.3 Test de la méthode d'assimilation d'ordre $M=3$ sur des cas de houles irrégulières

#### Premiers essais

##### Reconstruction du signal sonde à l'ordre $M = 3$ à l'aide du HOS initialisé à l'ordre 2 à $t_{ini} = 0$

En premier lieu, nous avons voulu appliquer la méthode d'assimilation de données décrite précédemment à la reconstruction de signaux de sonde irréguliers. À chaque itération du processus de Rosenbrock, un champ de vagues calculé au second ordre ou au second ordre étendu à partir des ondes libres ajustées, est introduit à l'instant d'initialisation  $t_{ini} = 0$  dans le modèle HOS pour être propagé jusqu'à  $t = T$  de manière à obtenir le signal sonde à l'ordre HOS  $M = 3$ .

Les champs de vagues faisant l'objet de notre étude sont générés à l'ordre  $M = 3$  par le HOS pour diverses valeurs de cambrure, et les signaux de sonde sont enregistrés pendant  $T = 410.4s$ . On rappelle que les paramètres utilisés dans nos simulations sont explicités dans le Tableau 4.1.

Sur la Figure 4.29 nous avons représenté l'évolution de l'erreur d'assimilation au cours du processus d'ajustement des ondes libres pour les différents cas de houle traités. Le modèle de propagation HOS est initialisé par un champ d'ordre deux ou d'ordre deux étendu.

Le premier constat est que tout comme dans le cas d'une houle régulière, on observe un saut d'erreur au passage à l'optimisation de Rosenbrock. Cette fois cependant, le saut est beaucoup plus important et n'est pas compensé après convergence de la procédure de minimisation, quelque soit le modèle de houle utilisé pour l'initialisation du HOS, bien que le nombre d'itérations accomplies soit très important (environ 3000 itérations dans le cas de ces simulations).

On remarque par ailleurs sur ces exemples que le modèle d'ordre deux étendu ne permet pas d'améliorer de manière significative la qualité du signal sonde reconstruit à l'ordre  $M = 3$ , ni par conséquent la vitesse de convergence de l'assimilation de données. À faible cambrure, le saut d'erreur à la première évaluation du signal sonde d'ordre  $M = 3$  est identique pour les deux initialisations, et à forte cambrure, nous ne pouvons pas tirer de conclusion générale quant à l'effet de l'une ou l'autre initialisation sur la précision des calculs. Nous avons en effet constaté sur les différents tests réalisés que le second ordre étendu peut provoquer une légère détérioration de la solution (cf Figure 4.29.d)), ou même une diminution du saut d'erreur à la première itération de l'algorithme de Rosenbrock mais une erreur après convergence légèrement plus importante que dans le cas d'une initialisation d'ordre

deux classique.

Dans la majorité des cas de figure étudiés cependant, l'initialisation d'ordre deux étendu s'avère ne pas modifier ou améliorer la qualité de la solution reconstruite à l'ordre  $M = 3$ . Nous avons donc préféré utiliser le modèle au second ordre étendu pour l'ensemble de nos simulations.

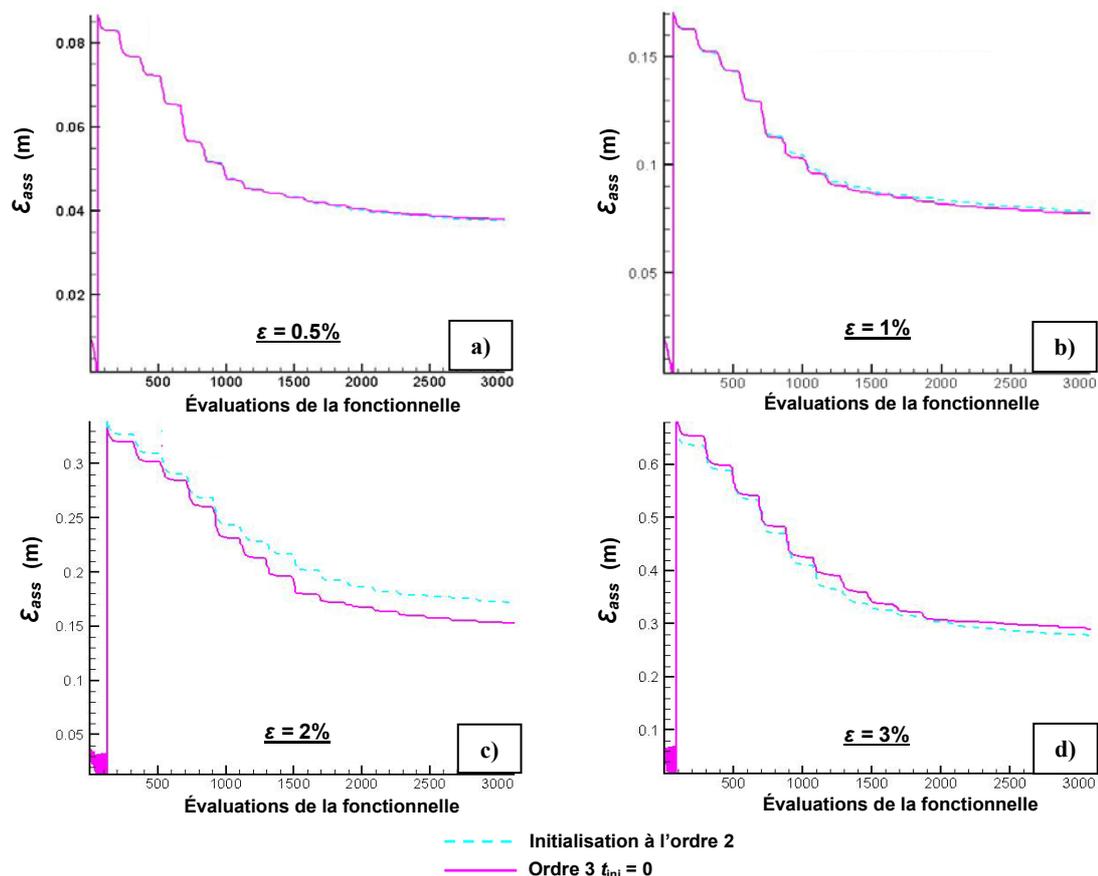


Figure 4.29 : Évolution de l'erreur d'assimilation au cours du processus de minimisation (Duncan & Drake puis Rosenbrock) pour les différents cas de houle traités. Les signaux de sonde d'ordre  $M=3$  sont reconstruits à l'aide du HOS initialisé par un champ au 2<sup>nd</sup> ordre ou au 2<sup>nd</sup> ordre étendu.

Si l'on s'intéresse plus précisément à la répartition de l'erreur absolue  $\epsilon_r$  entre les signaux de sonde synthétique et reconstruits sur la période d'assimilation  $[0, T]$ , on observe à la première évaluation du signal sonde d'ordre  $M = 3$  qu'elle augmente avec le temps, comme nous l'avons déjà remarqué dans le cas de la houle régulière de Stokes (cf Figure 4.30). Aux instants proches de l'instant d'initialisation  $t_{ini} = 0$ , la solution est très proche du signal original, surtout à faible et moyenne cambrure, et l'erreur d'assimilation est de l'ordre de l'erreur obtenue après convergence du processus de Duncan & Drake à l'ordre deux. L'écart s'accroît ensuite progressivement jusqu'à atteindre des valeurs importantes dès le quart de la période de mesure. L'évolution de l'erreur a alors un comportement fortement oscillatoire. Au terme de l'assimilation de données d'ordre  $M = 3$ , l'erreur sur le signal sonde s'est répartie sur l'intervalle  $[0, T]$ , comme le montre par exemple la Figure 4.31 pour le cas de cambrure  $\epsilon = 2\%$ .

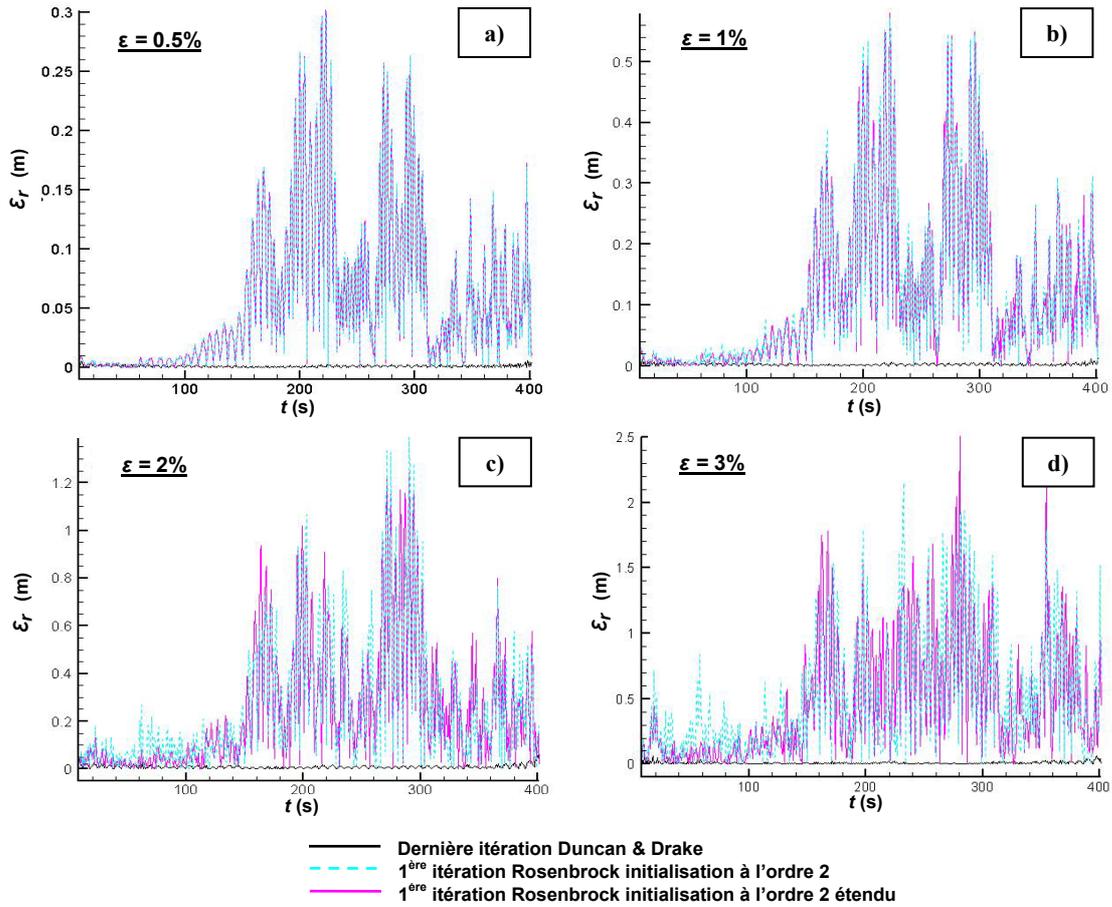


Figure 4.30 : Répartition de l'erreur  $\varepsilon_r$  sur  $[0, T]$  pour les différentes cambrures étudiées, à la dernière itération du processus de Duncan & Drake et à la première itération de la méthode de Rosenbrock où le HOS d'ordre  $M = 3$  est initialisée par un champ d'ordre 2 ou d'ordre 2 étendu.

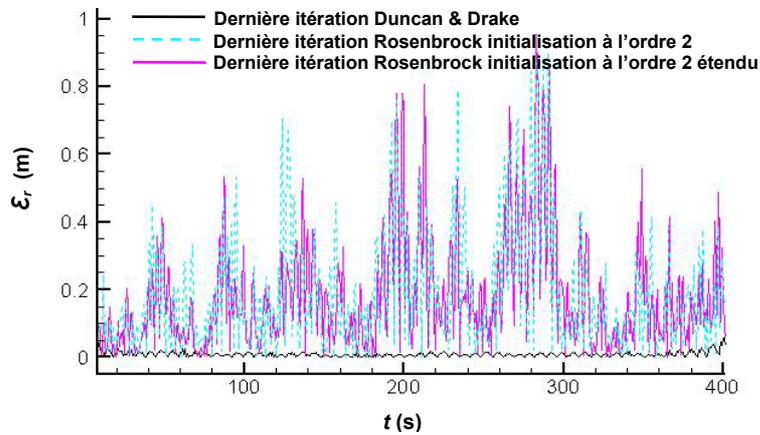


Figure 4.31 : Comparaison, pour un champ de vagues de cambrure 2%, des erreurs absolues après convergence des algorithmes de Duncan & Drake à l'ordre 2 et de Rosenbrock à l'ordre  $M=3$ .

Il semble donc que la source des erreurs ne provienne pas de la non-adéquation de la solution d'ordre deux et des CSL non-linéaires d'ordre  $M = 3$  régissant la méthode HOS à l'instant initial  $t_{ini} = 0$ . Si tel était le cas, l'utilisation du modèle d'ordre deux étendu aurait en effet contribué à faciliter le passage au troisième ordre. Or on constate sur la Figure 4.30.c) ou la Figure 4.30.d) que l'ordre deux étendu semble détériorer la solution aux premiers instants de la simulation HOS. D'autre part, la propagation HOS aurait eu tendance à améliorer la solution au fur et à mesure de la simulation, ce qui n'est pas le cas.

Au final, les erreurs de reconstruction et de prévision obtenues en utilisant le modèle de prévision d'ordre  $M = 3$  sont beaucoup plus élevées que les erreurs trouvées à l'ordre deux étendu, et de manière plus alarmante encore, que les erreurs trouvées par le modèle linéaire (cf Figure 4.32.c) et Figure 4.32.d)).

On note toutefois que l'écart entre les solutions aux différents ordres est moins prononcé aux fortes cambrures, et que les champs prédits sont de meilleure qualité que les champs reconstruits. Cela conforte l'idée que le modèle HOS est bien adapté à la modélisation de la physique des champs de vagues non-linéaires car il tient compte de l'augmentation de l'effet des non-linéarités avec la cambrure et le temps de propagation.

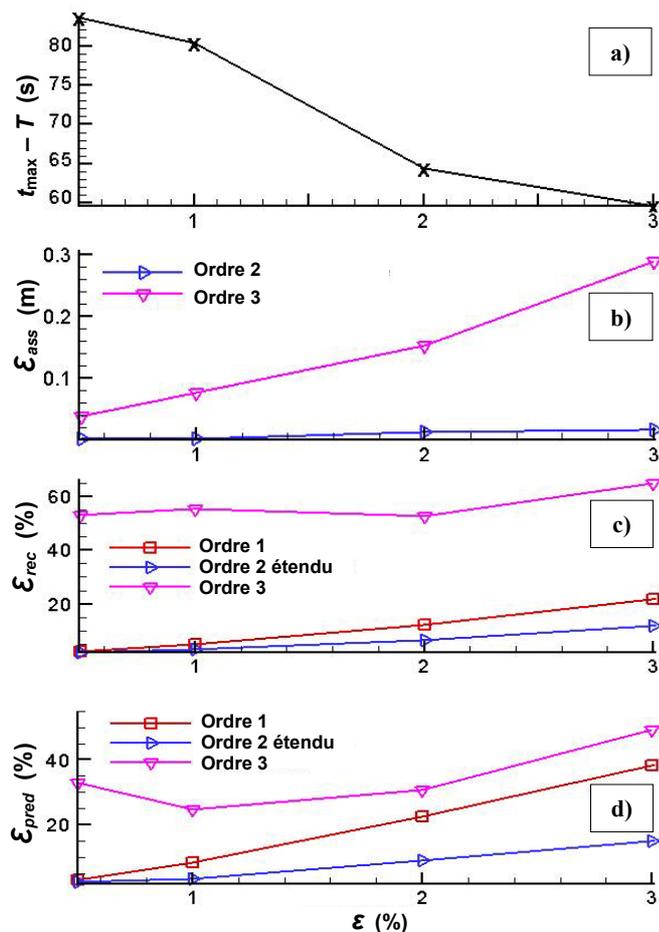


Figure 4.32 : Comparaison des résultats fournis par les modèles linéaire, d'ordre 2 étendu et d'ordre  $M=3$  avec initialisation au 2<sup>nd</sup> ordre étendu pour la prévision de champs de vagues synthétiques d'ordre  $M=3$  à partir de signaux sonde de période  $T=410.4s$  : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.

*Ajout d'une sonde*

Afin d'améliorer la qualité de la propagation du champ de vagues d'ordre deux étendu entré comme solution au modèle HOS à chaque itération de l'assimilation d'ordre  $M = 3$ , nous avons utilisé les données provenant d'un deuxième signal sonde artificiel. Nous bénéficions ainsi d'une nouvelle estimation de l'erreur commise sur la reconstruction du champ de vagues à l'ordre  $M = 3$ .

L'idée est de placer une sonde annexe (indexée 2) en aval de la première (appelée sonde principale) de manière à disposer de données « actuelles » qui, combinées pour le calcul de l'erreur d'assimilation aux données déjà employées, permettrait de corriger la propagation de la houle. Par ce biais, nous espérons, non seulement améliorer le calcul du champ de vagues dans la zone de recouvrement des deux sondes (cf Figure 4.33), mais également et surtout dans la toute la zone de prévision associée à la sonde principale.

Nous rappelons que dans le cas où l'on associe deux sondes pour la mesure du champ de vagues (les sondes ayant une même période de capture  $T$  et des domaines de prévision se recoupant), les données de la sonde annexe ne peuvent être comparées aux données reconstruites que dans la zone spatio-temporelle commune aux deux sondes. Dans le cas d'une houle unidirectionnelle, seules les données de la sonde annexe appartenant à l'intervalle temporel  $[t_2^1, t_2^2 = T]$  inclus dans le domaine de prévision de la sonde principale sont utilisées (cf Figure 4.33). Le calcul de l'erreur d'assimilation se fait alors à partir de l'expression (3.14) vue au Chapitre 3.

Dans le cadre de cette étude, la sonde principale est toujours localisée au centre du domaine spatial de simulation ( $x_1 = L/2$ ), et la sonde annexe est placée en  $x_2 = 2L/3$ , de telle sorte que les domaines de prévision 1 et 2 se recouvrent environ de moitié.

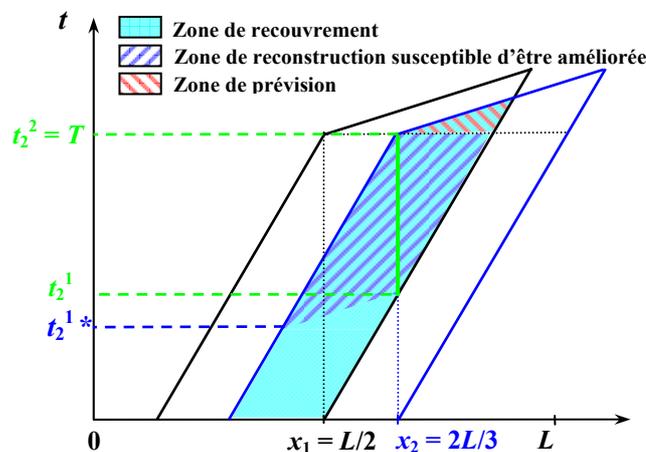


Figure 4.33 : Schéma de principe de l'assimilation des données de deux sondes.

En ce qui concerne l'assimilation des données tout d'abord, nous avons comparé sur la Figure 4.34 l'évolution de l'erreur  $\epsilon_{ass}$  au cours de l'optimisation, dans le cas où seule la sonde principale est utilisée, et lorsqu'une sonde annexe lui est adjointe. On constate que le saut d'erreur augmente au passage de l'ordre deux à l'ordre  $M = 3$  lorsque l'on associe les données des deux sondes. Cela peut sembler cohérent dans la mesure où l'on « cumule » deux erreurs d'assimilation. À faible cambrure l'écart initial est finalement rattrapé par le processus de minimisation, mais l'erreur convergée reste supérieure à l'erreur trouvée dans le cas d'une seule sonde. À forte cambrure en revanche, la

différence persiste au terme de l'assimilation des données, ce qui tend à montrer que l'utilisation d'une sonde annexe n'apporte aucune amélioration à la reconstruction du signal sonde principal. Cependant, ce constat se référant uniquement à la reconstruction de l'élévation de surface libre en en deux points donnés de l'espace ne permet pas de conclure quant à l'effet de la deuxième sonde sur la reconstruction et la prévision du champ de vagues.

Si l'on s'intéresse à l'évolution de l'erreur d'assimilation des données de chaque sonde individuellement (calculée sur tout l'intervalle de mesure  $[0, T]$  pour la sonde principale et sur l'intervalle  $[t_1^1, T]$  pour la sonde annexe), on s'aperçoit en premier lieu que les erreurs à la sonde principale dans le cas d'une ou de deux sondes sont équivalentes aux premières itérations de l'assimilation d'ordre  $M = 3$ , mais que l'erreur provenant de l'assimilation des données des deux sondes dépasse rapidement l'erreur d'assimilation des seules données de la sonde principale. L'utilisation de deux sondes semble donc détériorer la reconstruction du signal sonde principal au profit de la reconstruction du signal sonde annexe. En effet, si l'erreur d'assimilation à la sonde annexe, bien qu'évaluée sur un intervalle temporel plus petit, est tout d'abord bien supérieure à l'erreur à la sonde principale (occasionnant ainsi le saut d'erreur mentionné plus haut), elle est bien diminuée par l'assimilation combinée des données des deux sondes. Aux faibles cambrures, l'erreur à la sonde annexe devient même inférieure à l'erreur à la sonde principale. La propagation du champ de vagues apparaît donc améliorée par l'ajout d'une sonde annexe.

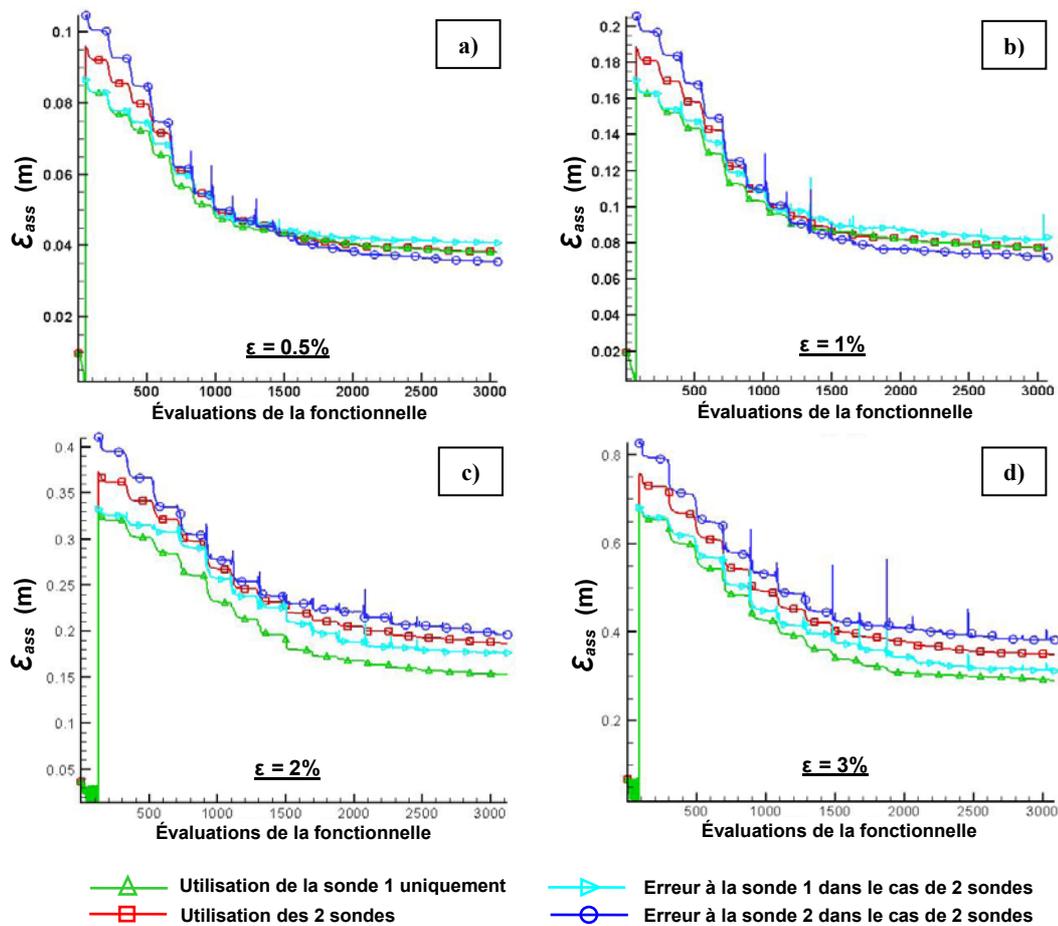


Figure 4.34 : Évolution de l'erreur pour une assimilation à une ou deux sondes.

Intéressons nous maintenant à l'effet d'une sonde annexe sur la reconstruction et à la prévision des champs de vagues. Les remarques précédentes s'appliquent en effet uniquement à la reproduction des signaux des deux sondes et ne concernent que deux points de la zone de reconstruction de la sonde principale. Nous cherchons notamment à vérifier que la qualité de la solution est effectivement améliorée dans les zones de reconstruction (pour  $t \geq t_2^{1*}$ ) et de prévision communes aux deux sondes (zones striées sur la Figure 4.33), et éventuellement dans toute la zone de prévision correspondant à la sonde principale.

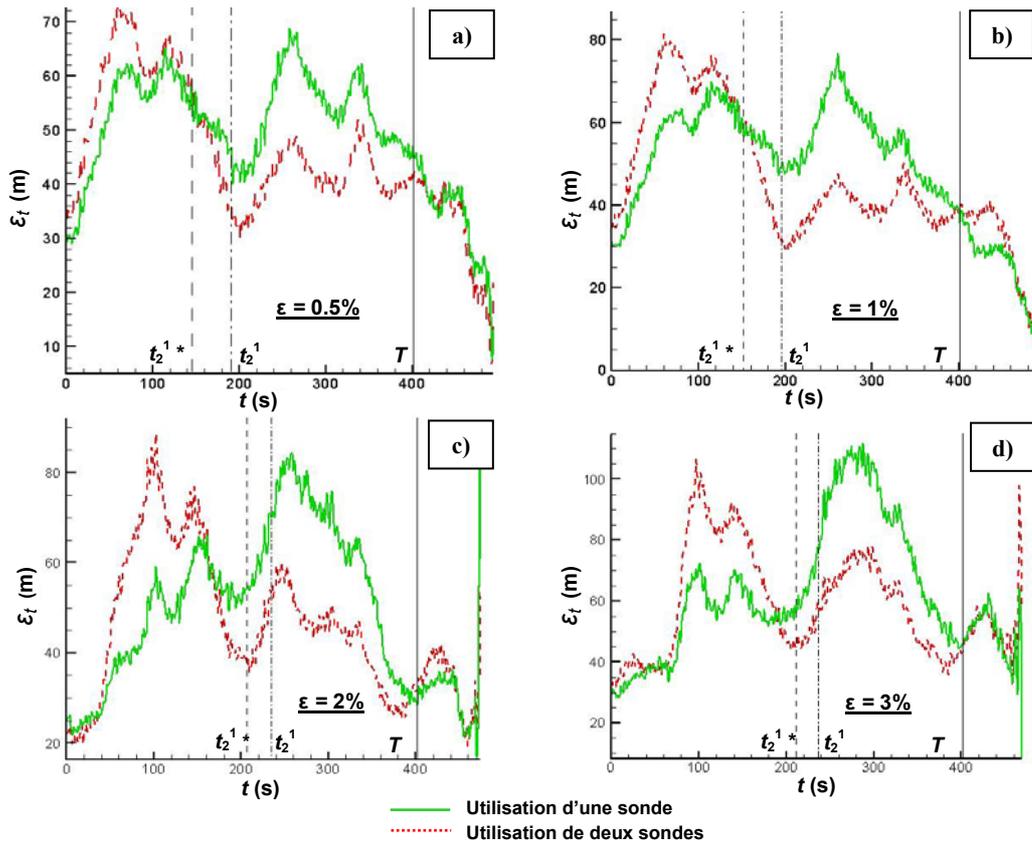


Figure 4.35 : Erreur moyenne commise sur l'élévation de surface libre à chaque instant de calcul de l'intervalle  $[0, t_{\max}]$  dans le cas où l'assimilation a été réalisée à partir d'une ou de deux sondes. Les instants caractéristiques  $t_2^{1*}$ ,  $t_2^1$  et  $T$  sont représentés par des verticales.

Sur la Figure 4.35, nous avons représenté l'erreur sur l'élévation de surface libre synthétique, évaluée à chaque instant  $t \in [0, t_{\max}]$  sur la zone spatiale de calcul à cet instant. Cette erreur est notée  $\varepsilon_t$  et définie par (4.22). Elle est calculée dans le cas où seules les données de la sonde principale sont utilisées, et dans le cas où l'on leur adjoint les données de la sonde annexe. Sur la Figure 4.35, nous avons également mis en valeur les instants caractéristiques  $t_2^{1*}$ ,  $t_2^1$  et  $T$  par des verticales pointillées.

$$\varepsilon_t = \frac{1}{D_x(t)} \int_{t \in [T, t_{\max}]} \frac{\int_{x \in D_x(t)} |\eta(x, t) - \tilde{\eta}(x, t)| dx}{\int_{x \in D_x(t)} |\tilde{\eta}(x, t)| dx} dt \quad (4.22)$$

Comme escompté, la solution calculée à partir de l'assimilation combinée des deux sondes est plus précise que la solution issue de l'assimilation des seules données de la sonde principale dans l'intervalle de temps  $[t_2^1, T]$  où les données de la sonde annexe ont été assimilées. L'effet de la sonde annexe se fait sentir dès  $t_2^1 *$  qui correspond à l'instant minimal de la zone reconstruction en la position de la sonde annexe associée à la période  $[t_2^1, T]$ , et même aux instants antérieurs à  $t_2^1 *$  pour les fortes cambrures (cf Figure 4.35.b) et Figure 4.35.c)). Cette amélioration se fait toutefois au détriment de la qualité des champs reconstruits aux instants antérieurs, comme on peut le constater sur les différents cas testés. Finalement, l'erreur de reconstruction  $\varepsilon_{rec}$  moyennée sur toute la zone de reconstruction de la sonde principale est environ 5% plus faible dans le cas où l'on a utilisé deux sondes (cf Figure 4.36.a)).

Quant à la précision des champs prédits par le modèle, on ne constate pas de différence notable entre les solutions provenant de l'assimilation d'une ou de deux sondes. C'est également ce que montre la Figure 4.36.b) sur laquelle on a représenté l'erreur de prévision  $\varepsilon_{pred}$  moyennée sur la zone de prévision de la sonde principale.

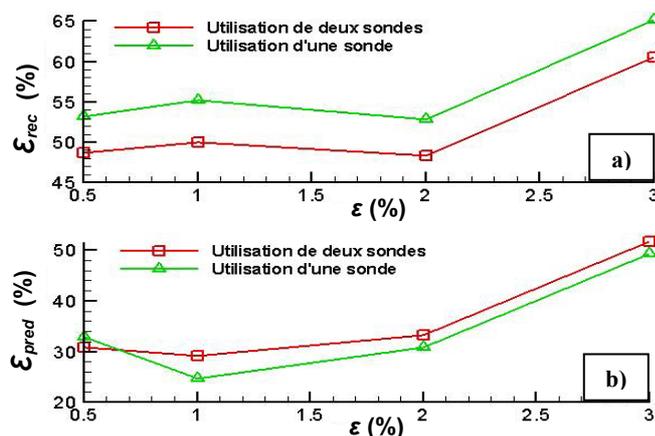


Figure 4.36 : Comparaison des erreurs moyennes dans le domaine de prévision de la sonde principale pour une assimilation à une ou deux sondes : a) Erreur moyenne de reconstruction, b) Erreur moyenne de prévision.

Notons à titre de remarque que les fortes variations d'erreurs (pics ou creux) apparaissant parfois lors du calcul de l'erreur aux tous derniers instants de prévision sur la Figure 4.35 sont dus au fait qu'à ces instants la taille de la zone de prévision est très réduite et que le calcul s'effectue sur quelques points de l'espace seulement. Les erreurs  $\varepsilon_i$  à ces instants ne sont donc absolument pas représentatives et ont été supprimées du calcul de l'erreur moyenne  $\varepsilon_{pred}$ .

Pour clore cette étude, nous avons voulu analyser précisément l'effet de l'ajout de nouvelles données à l'assimilation sur la qualité des champs de vagues évalués par le modèle de prévision d'ordre  $M = 3$  dans la zone de recouvrement des domaines de prévision des deux sondes. La Figure 4.37 représente les erreurs de reconstruction et de prévision moyennes  $\varepsilon_{rec}$  et  $\varepsilon_{pred}$  calculées sur les portions de recouvrement des zones de reconstruction et de prévision de la sonde principale, dans le cas d'une assimilation à une ou deux sondes. Il apparaît que la reconstruction est améliorée par l'ajout de la sonde annexe quelque soit la cambrure de la houle considérée. Les champs prédits sont quant à eux mieux calculés par l'assimilation à deux sondes à forte cambrure ( $\varepsilon = 3\%$ ), mais pour les autres

cas testés, on ne constate pas de différence notable. Ceci provient probablement de la petitesse de la zone de prédiction couverte par les deux sondes.

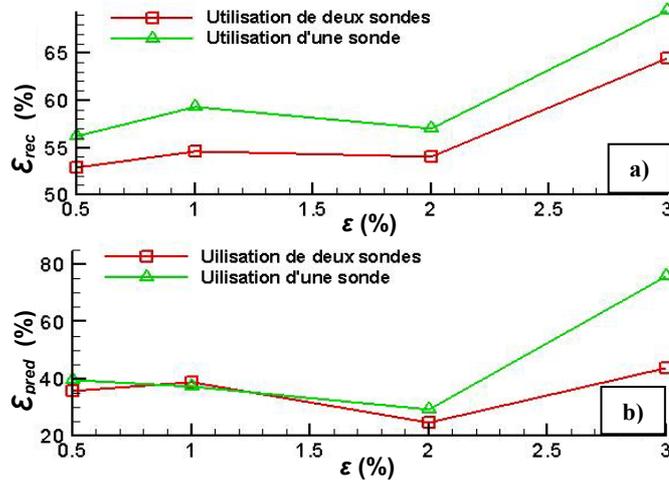


Figure 4.37 : Comparaison des erreurs moyennes dans la zone de recouvrement pour une assimilation à une ou deux sondes : a) Erreur moyenne de reconstruction, b) Erreur moyenne de prédiction.

Sur la Figure 4.38, nous avons tracé la carte de l'erreur commise sur l'élévation de surface libre synthétique en chaque point du domaine de calcul pour le cas de cambrure  $\epsilon = 3\%$ . On retrouve bien les constats précédents : l'utilisation de deux sondes permet d'améliorer la qualité des champs calculés par le modèle aux instants postérieurs à  $t_2^1$ , et particulièrement à l'intérieur de la zone de recouvrement. Ailleurs, la précision de la solution est amoindrie.

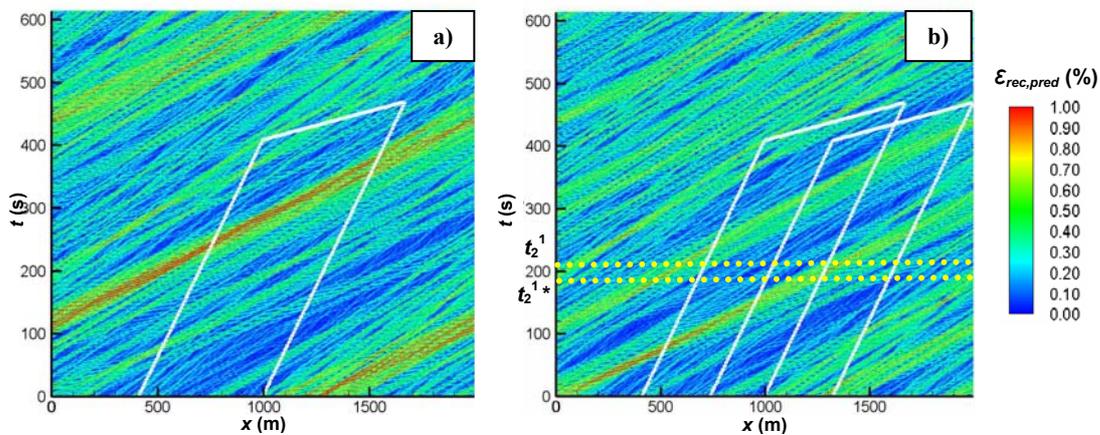


Figure 4.38 : Erreur en tout point du domaine de calcul pour un cas de cambrure  $\epsilon = 3\%$  dans le cas d'une assimilation : a) à une sonde, b) à deux sondes. Les zones de prédiction sont représentées en blanc. Sur la figure b), les instants  $t_2^1$  et  $t_2^{1*}$  sont marqués par des horizontales pointillées.

En conclusion, l'utilisation d'une sonde annexe pour aider à l'assimilation des données de la sonde principale permet d'améliorer la qualité de la solution évaluée par le modèle de prévision mais essentiellement au sein de la zone de recouvrement des deux sondes et non sur la totalité du domaine de prévision de la sonde principale comme nous l'avions espéré. Par ailleurs, c'est surtout la précision des champs reconstruits et non des champs prédits qui est accrue. L'assimilation des données « actuelles » de la sonde annexe ne semble donc pas contribuer à l'ajustement de la propagation des vagues par le modèle de houle.

### Améliorations apportées à la méthode d'assimilation

Jusqu'à présent nous avons toujours procédé de la même manière pour reconstruire le signal sonde d'ordre  $M = 3$  : le champ d'ordre deux étendu est introduit dans le modèle HOS à  $t_{ini} = 0$ , début de la période de mesure de la sonde, pour être propagé à l'ordre  $M = 3$  jusqu'à  $T$ , fin de la période. Au cours de la simulation, on relève l'élévation de surface libre au point de localisation de la sonde, ce qui nous donne le signal sonde d'ordre  $M = 3$  sur  $[0, T]$ .

Mais comme nous l'avons précisé au paragraphe 4.2.3.1, l'instant d'initialisation du modèle HOS par le champ d'ordre deux étendu peut être tout instant  $t$  compris dans l'intervalle de mesure  $[0, T]$ . Dans ce cas, le champ de vagues est propagé de  $t_{ini}$  à  $T$  puis rétropropagé de  $t_{ini}$  à 0 pour obtenir le signal sonde d'ordre  $M = 3$ . Les solutions initiales d'ordre deux étendu, et par suite les champs simulés d'ordre  $M = 3$  et le signal sonde correspondant, sont susceptibles d'être très différents selon l'instant d'initialisation utilisé. Il est donc tout à fait probable que certains instants d'initialisation permettent d'obtenir de meilleurs résultats.

Dans cette partie nous présentons les diverses étapes qui ont conduit à la mise en évidence d'un instant d'initialisation optimal du modèle numérique HOS au cours de la phase d'assimilation de données par l'élévation et le potentiel de surface libre calculés à l'ordre deux étendu. Ce travail a permis de diminuer considérablement le saut d'erreur lors de la première évaluation du signal sonde à l'ordre  $M = 3$  à l'aide du HOS et par suite d'améliorer nettement la qualité des champs reconstruits et prédits.

Les différents tests présentés dans cette section ont été réalisés sur les mêmes champs synthétiques d'ordre  $M = 3$  générés à l'aide du HOS que les champs étudiés précédemment. On considère également des signaux de sonde de longueur temporelle  $T = 410.4$ s. Les paramètres des simulations sont eux aussi inchangés.

#### Première tentative : $t_{ini} = T$

Dans un premier temps, nous avons souhaité optimiser le calcul du champ reconstruit (et donc du signal sonde) aux instants les plus proches possible de la période de prévision à proprement parler  $[T, t_{max}]$  afin que la solution prédite soit des plus précises. Comme l'erreur d'assimilation semble augmenter avec le temps (cf Figure 4.30) nous avons choisi d'initialiser le modèle HOS par un champ de vagues d'ordre deux étendu calculé à  $t_{ini} = T$ . Le signal sonde d'ordre  $M = 3$  est alors obtenu par une simulation HOS en sens inverse, de  $t = T$  à  $t = 0$ . Une fois le processus de minimisation convergé, le champ est reconstruit à  $t = T$  puis introduit dans le modèle de propagation jusqu'à la zone de prévision.

La Figure 4.39 indique que cette nouvelle approche ne permet pas d'améliorer la précision de la méthode d'assimilation de données. Le saut d'erreur au passage à l'assimilation d'ordre  $M = 3$  est en effet accentué par le changement d'instant d'initialisation : l'écart par rapport au cas où  $t_{ini} = 0$  est

particulièrement important à faible cambrure (cf Figure 4.39.a) et Figure 4.39.b)) et n'est pas rattrapé à l'issue de l'optimisation.

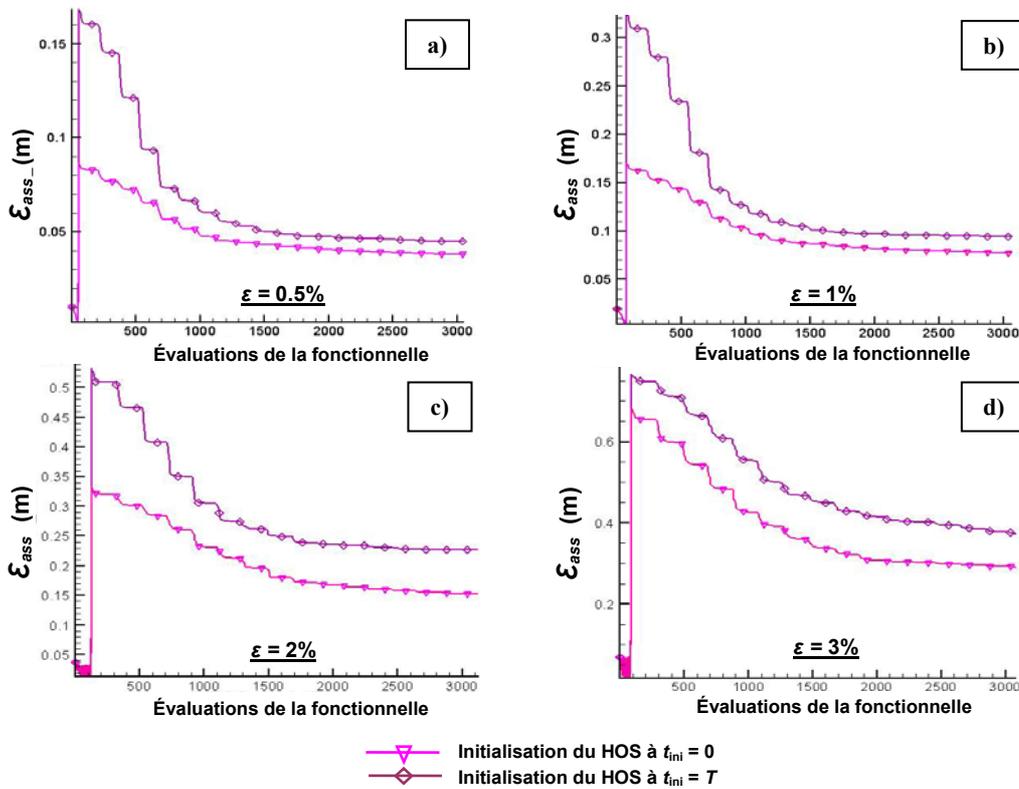


Figure 4.39 : Évolution de l'erreur au cours du processus de minimisation dans le cas où le HOS est initialisé au second ordre étendu à  $t_{ini} = 0$  et  $t_{ini} = T$ .

En conséquence, les champs reconstruits résultant de cette nouvelle assimilation de données sont encore moins précis que les champs obtenus par l'assimilation de donnée à  $t_{ini} = 0$  (cf Figure 4.40.c)). L'erreur moyenne de reconstruction atteint même 80% dans le cas à forte cambrure  $\epsilon = 3\%$ .

Il semble néanmoins que la prévision soit moins affectée par le changement d'instant d'initialisation. La Figure 4.40.d) montre en effet que pour certaines cambrures ( $\epsilon = 0.5\%$  et  $\epsilon = 2\%$ ) les erreurs moyennes de prévision pour  $t_{ini} = 0$  et  $t_{ini} = T$  sont identiques. Dans les autres cas, la perte en précision est de l'ordre de 10% ce qui est presque deux fois moins important que la perte en précision sur les champs reconstruits.

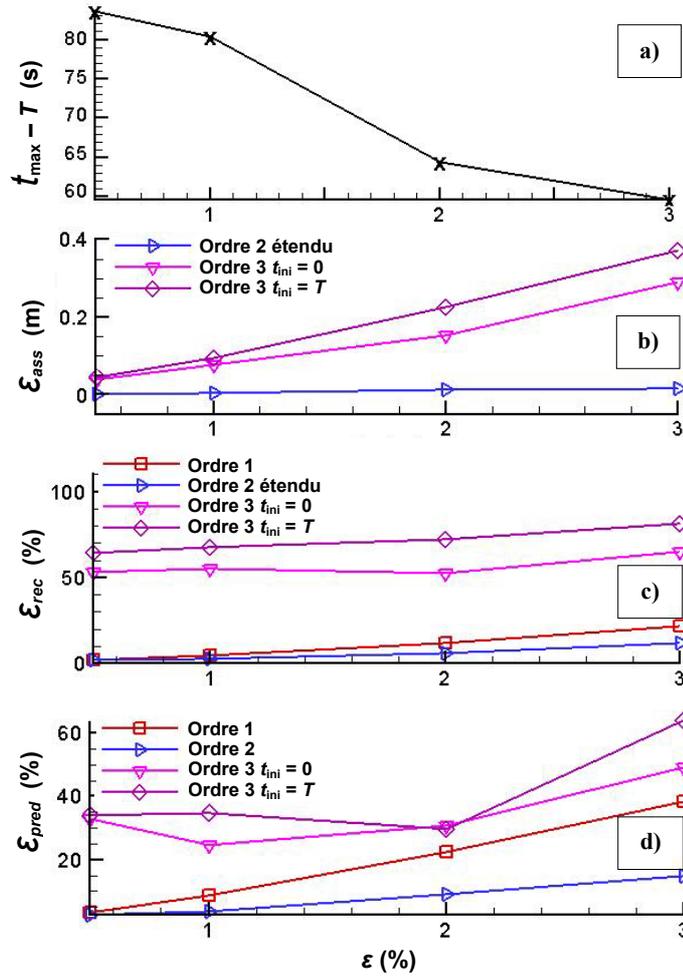


Figure 4.40 : Prédiction de champs de vagues d'ordre  $M=3$  à partir de signaux de sonde de période  $T=410.4s$  par les modèles linéaire, d'ordre 2 étendu et d'ordre  $M=3$  avec initialisation du HOS au 2<sup>nd</sup> ordre étendu à  $t_{\text{ini}} = 0$  ou  $t_{\text{ini}} = T$  lors de l'assimilation de données : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.

Ajout d'une fonction poids dans le calcul de l'erreur d'assimilation pour  $t_{\text{ini}} = T$

Toujours dans le but d'améliorer la qualité de l'assimilation de données près de la zone de prévision ( $t > T$ ), nous avons adjoint une fonction poids au calcul de l'erreur d'assimilation  $\varepsilon_{\text{ass}}$ . Des fonctions polynomiales d'ordre trois ainsi des fonctions créneaux de portées temporelles diverses ont été envisagées (cf Figure 4.41). L'erreur d'assimilation est alors calculée selon comme suit dans le cas d'un champ de vagues mesuré en une sonde localisée en  $\mathbf{x}_0$  :

$$\varepsilon_{\text{ass}} = \left\{ \int_0^T F_p(t) \times W(\mathbf{x}_0, t) [C^M(\mathbf{p}, t) - \tilde{\eta}^0(t)]^2 dt \right\}^{1/2} \quad (4.23)$$

où  $F_p$  représente la fonction poids considérée. L'expression de la fonction d'observation  $C$  est donnée

en (3.11) pour  $M > 3$  et la fonction  $W(\mathbf{x}_0, t)$  est explicitée en (3.13).

Nous avons tout d'abord considéré une fonction polynôme s'exerçant sur toute la période d'assimilation. Puis, souhaitant optimiser la propagation de la houle par le modèle d'ordre  $M = 3$  sur une longueur temporelle équivalente à la longueur de la zone de prévision, nous avons réduit l'étendue de nos fonctions poids à la longueur  $t_{\max} - T$ . D'autres tests ont finalement été réalisés afin de déterminer la fonction poids la plus adaptée à notre problème en divisant puis en multipliant cette longueur par deux.

Comme l'introduction d'une fonction poids dans le calcul de l'erreur d'optimisation revient à optimiser les ondes libres de fréquences angulaires comprises dans un intervalle  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}^*] \subset [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ , nous nous sommes au préalable assurés que les fréquences de pic  $\omega_p$  des divers signaux de sonde étudiés sont bien incluses dans l'intervalle fréquentiel le plus restreint envisagé correspondant à une longueur d'action de la fonction poids de  $(t_{\max} - T)/2$ . Au vu de la forme du spectre de JONSWAP caractérisant nos champs de vagues synthétiques, où la fréquence de pic se situe assez loin de la fréquence maximale (cf Figure 2.1), cette condition s'est aisément vérifiée.

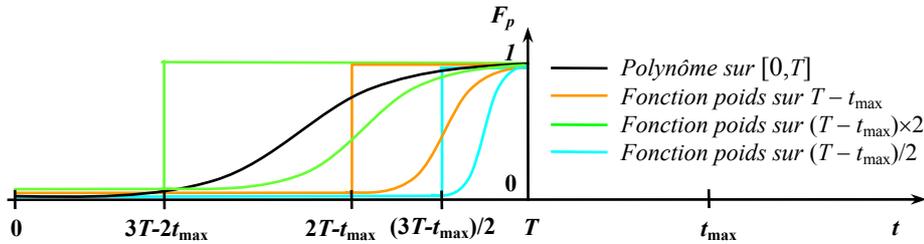


Figure 4.41 : Fonctions poids adjointes au calcul de l'erreur d'assimilation.

Sur la Figure 4.42.b), on constate sans surprise que les erreurs sur les signaux de sonde obtenues après convergence de l'assimilation de données sont moins importantes lorsqu'une fonction poids est utilisée dans le calcul de l'erreur. En effet, l'optimisation se concentre sur un intervalle temporel réduit, ce qui accélère le processus. Ainsi, dans le cas où la fonction poids s'exerce sur une portion de la période d'assimilation seulement, les erreurs sont réduites de manière significative et sont de l'ordre des erreurs obtenues par la méthode d'ajustement de Duncan & Drake à l'ordre deux. Mais lorsque l'on utilise la fonction polynôme définie sur tout l'intervalle  $[0, T]$ , les erreurs sont à peine plus faibles que celles trouvées par la méthode d'assimilation classique sans fonction poids.

Nous attirons l'attention sur le fait que l'utilisation d'une fonction poids associée à l'initialisation du HOS à  $t_{ini} = T$  dans l'assimilation des données permet de traiter les cas de houle à forte cambrure, notamment le cas  $\varepsilon = 4\%$  que nous étions jusqu'à présent dans l'incapacité d'étudier à l'aide du modèle de prévision d'ordre  $M = 3$ . En effet, à cette cambrure, la simulation HOS sur toute la période de mesure permettant d'obtenir le signal sonde d'ordre  $M = 3$  n'arrive pas à son terme ( $t = 0$  dans ce cas). Elle s'interrompt car les non-linéarités deviennent trop importantes et ne sont plus maîtrisées. L'ajout d'une fonction poids localisée sur le début de la période de simulation (près de  $T$ ) remédie à ce problème.

L'impact de la fonction poids sur la reconstruction est variable (cf Figure 4.42.c)). Dans le cas d'une fonction localisée sur une partie de la période d'assimilation, le calcul du signal sonde est optimisé sur l'intervalle temporel d'action de la fonction mais pas en dehors de cet intervalle où aucun contrôle de sa qualité n'est effectué. La reconstruction des champs de vagues est alors détériorée. Lorsqu'on l'utilise une fonction répartie sur tout l'intervalle  $[0, T]$ , la précision des champs

reconstruits est équivalente au cas sans fonction poids, voire meilleure aux fortes cambrures.

La prévision des différents cas de houle étudiés est en revanche très nettement améliorée par l'utilisation de fonctions poids agissant sur la fin de la période de mesure, comme on peut le voir sur la Figure 4.42.d) : les erreurs moyennes de prévision sont égales aux erreurs obtenues par le modèle de prévision d'ordre deux étendu aux faibles cambrures, et inférieures à celles-ci pour les champs de vagues de fortes cambrures. On note toutefois que les résultats issus de l'assimilation de données reposant sur l'utilisation des fonctions poids de taille  $(t_{\max}-T)\times 2$ , et plus particulièrement de la fonction de type créneau, restent peu précis à faible cambrure. Tout comme la fonction polynôme, la portée de ces fonctions est trop importante pour assurer un calcul optimal des champs de vagues autour de  $t = T$ .

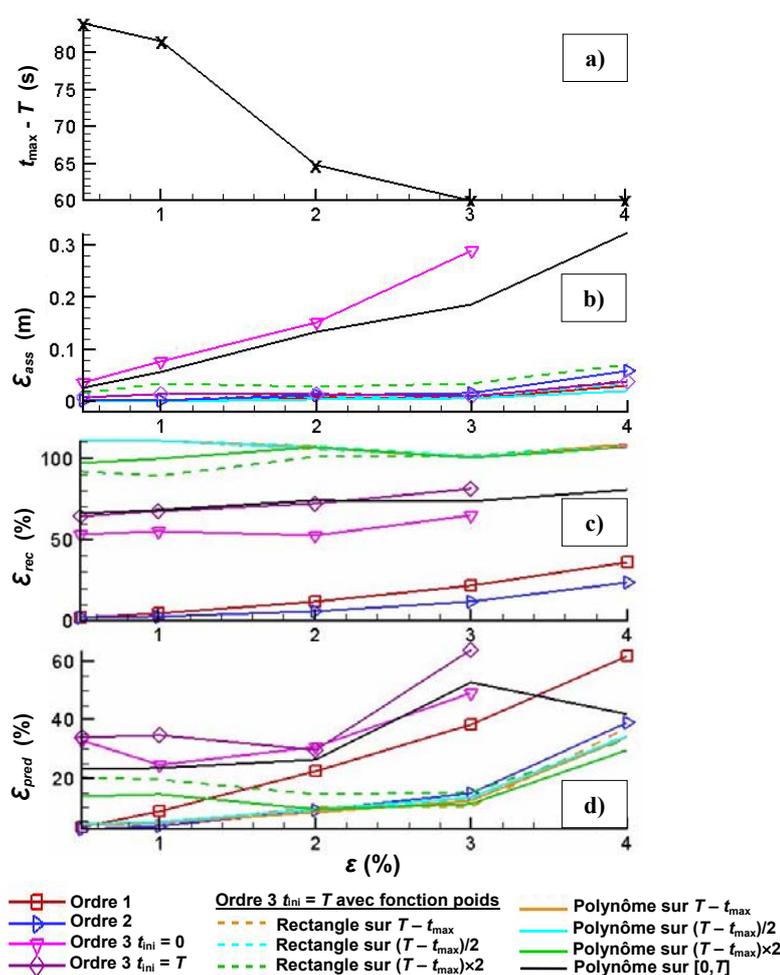


Figure 4.42 : Résultats fournis par le modèle d'ordre  $M=3$  avec initialisation du HOS à  $t_{\text{ini}} = T$  lors de l'assimilation de données et utilisation de différentes fonctions poids dans le calcul de l'erreur d'assimilation. Comparaison avec les résultats obtenus par les modèles d'ordre 1, 2 étendu et  $M=3$  avec initialisation du HOS à  $t_{\text{ini}}=0$ . a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.

Sur la Figure 4.43, nous nous sommes spécifiquement intéressés aux résultats obtenus pour la reconstruction et la prévision d'une houle de cambrure  $\varepsilon = 3\%$ . La figure compare l'erreur en tout

point du domaine de calcul obtenues par le modèle d'ordre  $M = 3$  avec initialisation du HOS à  $t_{ini} = 0$  et  $t_{ini} = T$  sans fonction poids, et à  $t_{ini} = T$  avec fonction poids, aux résultats fournis par le modèle d'ordre deux étendu. Des lignes pointillées jaunes représentent la borne inférieure des intervalles temporels d'action des fonctions poids.

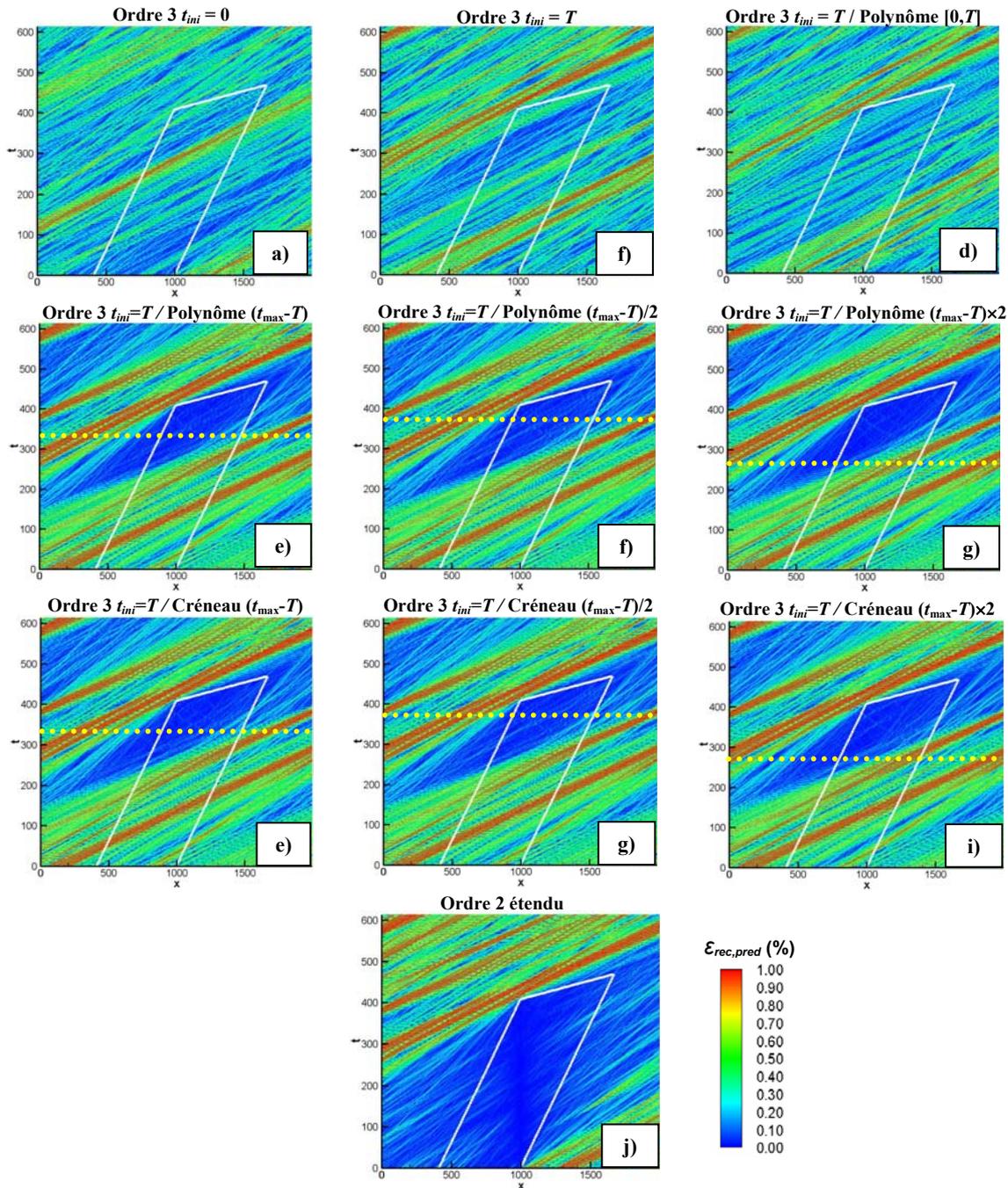


Figure 4.43 : Erreurs de calcul en tout point du domaine de simulation pour une houle de cambrure  $\varepsilon = 3\%$  obtenues par les modèles d'ordre 2 étendu et d'ordre  $M=3$  avec initialisation du HOS, lors de l'assimilation de données, à  $t_{ini} = 0$  ou à  $t_{ini} = T$ , avec ou sans fonction poids. Les bornes inférieures des fonctions poids sont représentées par des lignes pointillées horizontales.

On retrouve les remarques énoncées précédemment : les fonctions poids localisées sur une petite portion de la période d'assimilation permettent d'améliorer de manière significative la reconstruction et la prédiction du champ de vagues autour de  $t = T$ . Cette amélioration se fait non seulement dans la zone de prévision de la sonde, mais également en dehors de la zone (la zone de très faible erreur rappelle l'allure de la carte d'erreur obtenue à l'aide du modèle d'ordre deux étendu, pour une période d'assimilation correspondant à la zone temporelle d'action de la fonction poids). Ailleurs en revanche, la précision du calcul est amoindrie. Notons que sur ce cas de cambrure, il n'existe pas de différence notable entre les résultats fournis par ces fonctions poids. En ce qui concerne la fonction polynomiale définie sur  $[0, T]$ , l'amélioration est moindre par rapport au cas sans fonction poids, mais existe néanmoins.

On remarquera pour finir que la précision des champs de vagues est également bien accrue loin de la zone de prévision. Elle est même meilleure dans ces zones éloignées que ne l'est la précision obtenue à l'aide du modèle d'ordre deux étendu. Les vagues qui restent mal prédites sont en fait les vagues dont la reconstruction a été détériorée par l'assimilation de données avec fonction poids et qui traversent à nouveau le domaine par périodicité.

### Recherche de l'instant optimal d'initialisation du HOS

Constant que la modification de l'instant d'initialisation du modèle HOS peut induire une très nette différence dans la qualité du signal sonde d'ordre  $M = 3$  reconstruit à la première itération du processus de Rosenbrock (cf Figure 4.39), nous avons émis l'hypothèse qu'il existait un instant  $t_{ini}$  optimal minimisant le saut d'erreur au passage de l'assimilation d'ordre deux à l'assimilation d'ordre  $M = 3$ .

Dans un premier temps, nous avons supposé que l'augmentation drastique de l'erreur d'assimilation à la première évaluation du signal sonde d'ordre  $M = 3$  était liée à une mauvaise reconstruction du signal sonde à l'instant  $t_{ini}$ . En effet, le champ d'ordre deux étendu qui initialise la première simulation HOS est obtenu à l'instant  $t_{ini}$  en tout point  $x$  du domaine à partir d'un déphasage de la quantité  $k(x - x_p)$  des ondes libres caractérisant le signal sonde d'ordre deux à  $t_{ini}$  (dont on calcule ensuite les interactions par les formules de couplage modal). Si la précision du signal sonde reproduit est médiocre en cet instant (et cela est probable dans la mesure où il s'agit de l'élévation un seul instant), le champ de vagues reconstruit à  $t_{ini}$  a de fortes chances d'être à son tour de piètre qualité. Le HOS, initialisé par un tel champ, ne peut vraisemblablement pas générer un signal d'ordre  $M = 3$  proche de la réalité.

Nous avons donc choisi comme instant d'initialisation l'instant  $t_{min2}$  où l'erreur entre le signal sonde reconstruit après la procédure d'ajustement de Duncan & Drake à l'ordre deux et le signal synthétique est minimale. Le Tableau 4.3 compare les résultats que nous avons obtenus par cette méthode aux résultats présentés précédemment dans le cas où  $t_{ini} = 0$  et  $t_{ini} = T$ , sans fonction poids. Nous avons adopté les notations suivantes :  $\varepsilon_{ass-2}(t)$  et  $\varepsilon_{ass-2}$  sont l'erreur à l'instant  $t$  et l'erreur moyenne commises sur le signal sonde synthétique au terme de l'assimilation d'ordre deux.  $\varepsilon_{ass-ini3}$  et  $\varepsilon_{ass-3}$  sont les erreurs moyennes sur le signal sonde à la première et à la dernière itération de la procédure d'assimilation d'ordre  $M = 3$ . Pour chaque cambrure, les cases grisées du tableau correspondent aux valeurs les plus faibles parmi  $t_{ini} = 0$ ,  $t_{ini} = T$  et  $t = t_{min2}$ .

Force est de constater que le saut d'erreur au passage à l'optimisation de Rosenbrock est bien diminué lorsque l'on initialise le HOS à  $t_{ini} = t_{min2}$ , quelque soit la cambrure considérée. L'erreur obtenue après convergence de l'algorithme est également minimale pour cet instant d'initialisation, sauf dans le cas de cambrure  $\varepsilon = 3\%$  où l'erreur d'assimilation la plus faible est obtenue pour  $t_{ini} = 0$ .

Cela signifie donc a priori que la minimisation du saut d'erreur (si tant est qu'il est effectivement minimisé) n'engendre pas forcément un résultat convergé optimal.

En ce qui concerne les erreurs moyennes de reconstruction et de prévision obtenues par la suite, il s'avère qu'une plus faible erreur sur le signal sonde ne conduit pas forcément à une reconstruction plus précise (cf cas de cambrure  $\varepsilon = 3\%$ ). Cela provient du fait que l'information donnée par l'erreur d'assimilation à un instant  $t$  est relative à un point précis et ne s'applique pas forcément, à ce même instant, à tous les points du domaine de calcul. De même, l'erreur de prévision la plus faible n'est pas associée à une erreur d'assimilation minimale dans tous les cas (cf cas de cambrure  $\varepsilon = 2\%$ ).

On remarque pour finir que ce nouvel instant d'initialisation permet de traiter le cas de forte cambrure  $\varepsilon = 4\%$  sans avoir recours à l'utilisation d'une fonction poids dans le calcul de l'erreur d'assimilation. En effet, la simulation HOS initialisée au second ordre étendu à  $t_{ini} = t_{min2}$  ne stoppe pas ; les non-linéarités semblent mieux maîtrisées. Bien que la précision du champ de vagues reconstruit, et plus encore du champ prédit, soit très mauvaise à cette cambrure, ce constat est très intéressant puisqu'il suggère que la qualité de la solution initiale introduite au HOS est cruciale au bon déroulement de la simulation, et qu'il existe donc un ou plusieurs instants d'initialisation pour lesquels les simulations aux fortes cambrures sont contrôlées.

$\varepsilon$ (%)	$t_{ini}$ (s)		$\varepsilon_{ass-2}(t_{ini})$ (m) $\times 10^{-3}$	$\varepsilon_{ass-2}$ (m) $\times 10^{-3}$	$\varepsilon_{ass-ini3}$ (m) $\times 10^{-2}$	$\varepsilon_{ass-3}$ (m) $\times 10^{-2}$	$\varepsilon_{rec}$ (%)	$\varepsilon_{pred}$ (%)
0.5	0	0	5.25	1.71	8.66	3.80	53.2	32.94
	$T$	410.4	5.00		16.8	4.48	64.26	34.11
	$t_{min2}$	236	0.005		3.27	1.31	18.4	10.88
1	0	0	4.37	3.41	17.0	7.75	55.26	24.64
	$T$	410.4	14.2		32.6	9.40	67.75	34.63
	$t_{min2}$	220.8	0.009		3.11	1.04	8.5	6.71
2	0	0	13.4	13.4	33.3	15.3	52.83	30.83
	$T$	410.4	36.8		53.3	22.7	72.56	29.83
	$t_{min2}$	44.8	0.029		25.8	14.9	47.06	32.66
3	0	0	79.1	17.3	68.1	29.0	65.17	49.24
	$T$	410.4	3.47		76.6	37.2	81.79	63.98
	$t_{min2}$	109.6	0.03		48.2	33.5	62.69	52.54
4	0	0	38.3	60.3				
	$T$	410.4	60.8					
	$t_{min2}$	151.2	0.94		100	56.4	90.32	152.39

Tableau 4.3 : Comparaison des résultats obtenues par l'assimilation de données d'ordre  $M = 3$  pour, une initialisation du HOS au 2<sup>nd</sup> ordre étendu à  $t_{ini} = 0$ ,  $t_{ini} = T$  et  $t_{ini} = t_{min2}$ . Erreurs de reconstruction et de prévision associées.

L'initialisation à l'instant  $t_{min2}$  minimisant l'erreur d'assimilation au second ordre apporte donc un progrès certain, mais n'est pas encore tout à fait optimale. Les résultats les moins concluants correspondant aux cas de fortes cambrures étant liés à des instants  $t_{min2}$  assez éloignés de la fin de la période de mesure ( $t_{min2} < T/2$ ), nous avons tenté de forcer la recherche de l'instant  $t_{min2}$  dans un intervalle temporel proche de  $T$ , soit  $[2T - t_{max}, T]$ , afin de limiter la détérioration éventuelle du champ

de vagues lors de sa propagation par le HOS sur une longue période. À nouveau, les résultats, que nous ne présentons pas ici, n'ont pas indiqué de relation parfaitement établie entre l'amélioration des erreurs d'assimilation au premier calcul HOS et après convergence de la méthode d'optimisation, et les erreurs de reconstruction et de prévision des champs de vagues de forte cambrure.

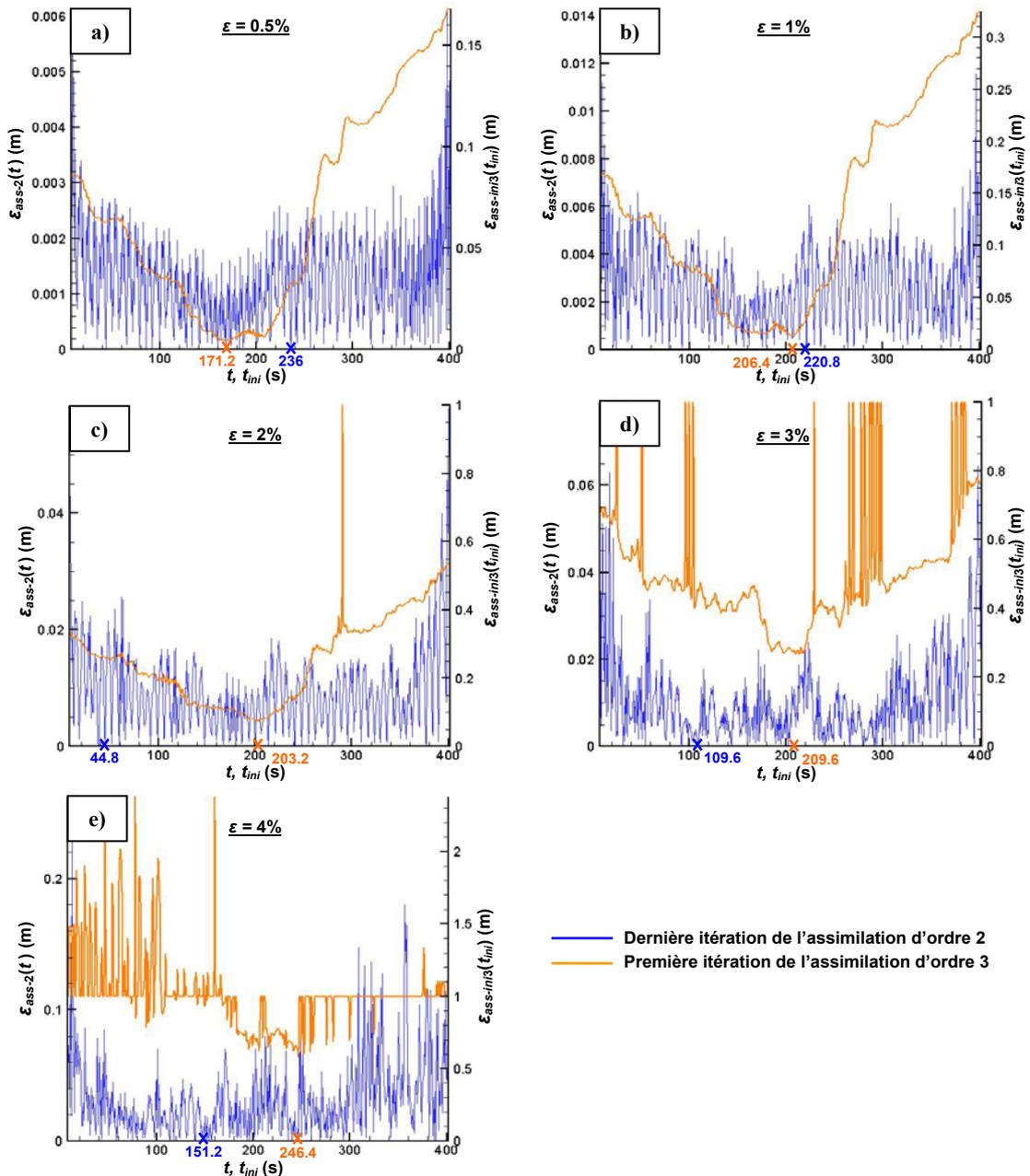


Figure 4.44 : Mise en parallèle des erreurs commises sur le signal sonde au terme de l'assimilation d'ordre deux à chaque instant de  $[0, T]$  et à la première évaluation du signal sonde à l'ordre  $M = 3$  à partir d'une initialisation du HOS au même instant.

Ces différents constats nous ont conduits à vérifier que l'instant  $t_{\min 2}$  correspond effectivement à l'instant auquel l'erreur à la première évaluation du signal sonde à l'ordre  $M = 3$  est minimale. Nous avons ainsi testé chaque instant de la période d'assimilation comme instant d'initialisation du HOS par le champ de vagues d'ordre deux étendu, et comparé les résultats obtenus au premier calcul d'erreur sur le signal sonde à l'ordre  $M = 3$ . Sur la Figure 4.44, nous avons représenté, pour chaque cas de cambrure testée, l'erreur  $\varepsilon_{ass-2}(t)$  commise sur le signal sonde après assimilation d'ordre deux pour tout instant  $t \in [0, T]$  et l'erreur moyenne  $\varepsilon_{ass-ini3}$  à la première itération de l'optimisation d'ordre  $M = 3$  après initialisation du HOS aux mêmes instants.

On remarque en premier lieu que l'évolution de l'erreur  $\varepsilon_{ass-ini3}$  est très régulière avec une très nette tendance à diminuer autour de  $t = 200s$  pour ce cas de houle (ie généré à partir d'un jeu de phases particulier), ce qui correspond à la moitié de la période d'assimilation environ. Contrairement à notre première intuition, l'instant minimisant l'erreur sur le signal sonde d'ordre deux ne correspond pas à l'instant d'initialisation du HOS retournant l'erreur la plus faible sur le signal sonde d'ordre  $M = 3$ .

Sur cette figure, les pics d'erreur  $\varepsilon_{ass-ini3}$  représentent les interruptions de la simulation HOS du fait de non-linéarités trop importantes. On s'aperçoit qu'à moyenne cambrure,  $\varepsilon = 2\%$  ou  $\varepsilon = 3\%$ , il existe également des instants d'initialisation provoquant un arrêt des simulations HOS, ce dont nous n'avons pas conscience jusqu'alors (cf Figure 4.44.c) et Figure 4.44.d)). Ces instants deviennent plus nombreux avec l'augmentation de la cambrure, et ne sont pas forcément liés à une moins bonne reconstruction du signal sonde à l'ordre deux à ces instants. À forte cambrure  $\varepsilon = 4\%$ , on note que les instants permettant une bonne maîtrise des interactions non-linéaires entre les vagues et le bon déroulement des simulations HOS, sont beaucoup plus nombreux qu'escompté. (Remarque : les mêmes simulations ont été réalisées en initialisant le HOS par un champ d'ordre deux classique. Les simulations HOS ont été stoppées dans tous les cas de figure, ce qui montre une nouvelle fois l'intérêt de l'initialisation au second ordre étendu.)

Notons  $t_{\min 3}$  l'instant d'initialisation du HOS minimisant le saut d'erreur au passage à l'assimilation d'ordre  $M = 3$ . La Figure 4.45 présente l'évolution de l'erreur  $\varepsilon_{ass}$  au cours de la minimisation de Rosenbrock dans le cas où la solution d'ordre deux étendue est introduite dans le modèle numérique à  $t_{ini} = 0$ ,  $t_{ini} = T$ ,  $t_{ini} = t_{\min 2}$  où  $t_{ini} = t_{\min 3}$ . Pour  $t_{ini} = t_{\min 3}$ , on a comptabilisé les évaluations de l'erreur  $\varepsilon_{ass-ini3}$  à chaque instant de la période de mesure dans le nombre total d'évaluations de l'erreur d'assimilation. Cette étape nécessaire à la détermination de  $t_{\min 3}$  correspond à la plage de  $N_t = 512$  évaluations de l'erreur  $\varepsilon_{ass}$  précédant l'optimisation d'ordre  $M = 3$ .

Sur la Figure 4.45 on observe que l'initialisation à  $t_{ini} = t_{\min 3}$  provoque une très nette diminution de l'erreur à la première évaluation du signal sonde à l'ordre  $M = 3$ . Par suite, l'erreur convergée à l'issue de l'optimisation est également bien inférieure aux erreurs obtenues à partir des initialisations précédentes. Toutefois, cette erreur reste supérieure, ou égale dans les cas de faible cambrure, à l'erreur d'assimilation à l'ordre deux. On peut en effet se reporter à la Figure 4.46.b) sur laquelle nous avons comparé les erreurs d'assimilation à l'ordre deux et à l'ordre  $M = 3$  avec les différents types d'initialisation. D'autre part, à moins de poursuivre jusqu'à son terme la procédure de minimisation de Rosenbrock pour chaque instant d'initialisation appartenant à la période de mesure, nous ne pouvons être certains que l'erreur d'assimilation convergée pour  $t_{ini} = t_{\min 3}$  est minimale.

Cependant, cette nouvelle technique d'initialisation apporte des résultats très prometteurs quant à la qualité des champs reconstruits et surtout prédits par le modèle d'ordre  $M = 3$ . La Figure 4.46.c) montre que les erreurs de reconstruction sont bien diminuées par rapport aux erreurs obtenues avec une initialisation à  $t_{ini} = 0$ ,  $t_{ini} = T$  ou  $t_{ini} = t_{\min 2}$ , surtout aux fortes cambrures. Bien qu'elles soient de l'ordre des erreurs de reconstruction fournies par le modèle de prévision linéaire et donc supérieures aux erreurs que nous trouvons à l'aide du modèle d'ordre deux étendu (ce qui est tout à fait logique puisque les erreurs sur les signaux de sonde sont plus importantes à l'ordre

$M = 3$ ), l'utilisation du modèle de propagation HOS à l'ordre  $M = 3$  permet d'avoir des prévisions d'aussi bonne qualité qu'au second ordre étendu : sur la Figure 4.46.d), on constate que les erreurs à l'ordre deux étendu et à l'ordre  $M = 3$  avec initialisation à  $t_{ini} = t_{min3}$  sont pratiquement identiques quelque soit la cambrure du champ de vagues considéré.

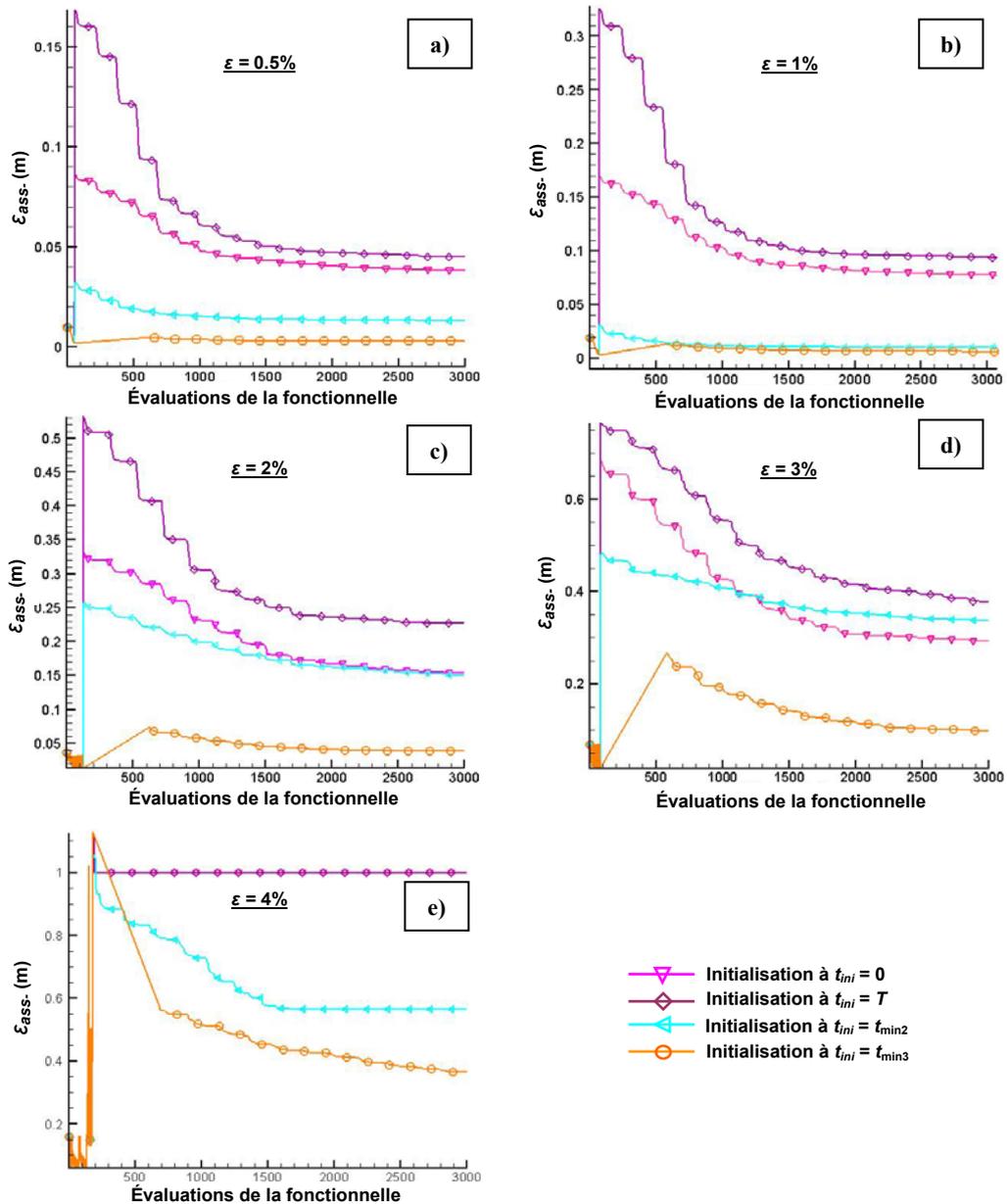


Figure 4.45 : Évolution de l'erreur au cours l'assimilation de données à l'ordre deux puis à l'ordre  $M = 3$  lorsque le HOS est initialisé à  $t_{ini} = 0$ ,  $t_{ini} = T$ ,  $t_{ini} = t_{min2}$  et  $t_{ini} = t_{min3}$ .

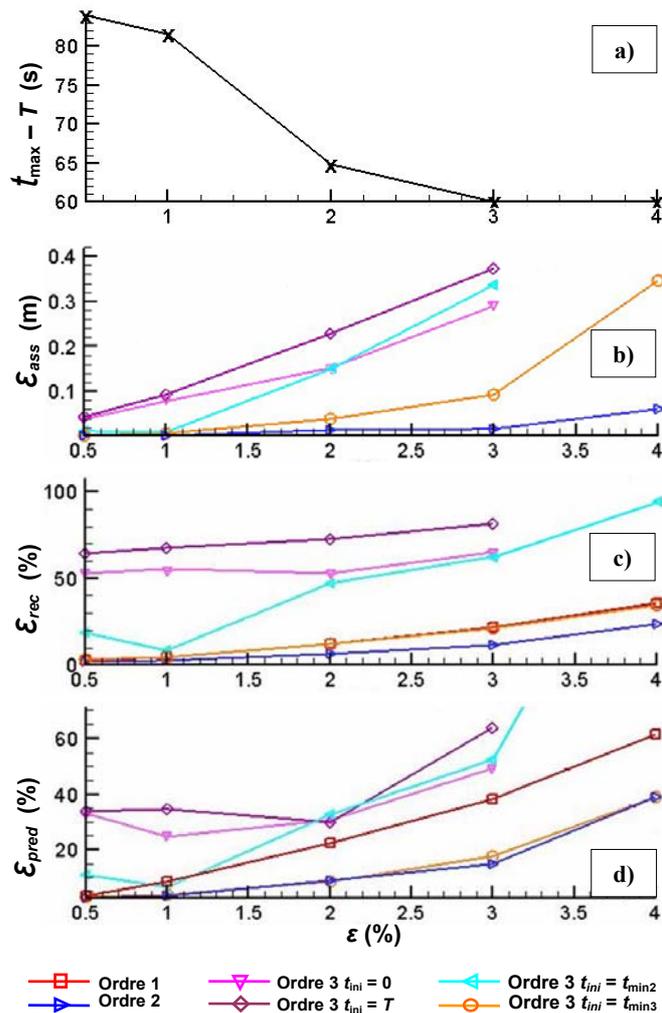


Figure 4.46 : Comparaison des résultats fournis par les modèles de prévision linéaire, d'ordre deux étendu et d'ordre  $M = 3$  avec initialisation du HOS à  $t_{\text{ini}} = 0$ ,  $t_{\text{ini}} = T$ ,  $t_{\text{ini}} = t_{\text{min}2}$  et  $t_{\text{ini}} = t_{\text{min}3}$  lors de l'assimilation de données : a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.

### Bilan : Méthode d'assimilation optimale à l'ordre $M = 3$

Forts des études précédentes, nous présentons pour conclure la méthode d'assimilation à l'ordre  $M = 3$  la plus performante mise en place au cours de ce travail de thèse. Elle consiste, à l'issue de l'assimilation d'ordre deux lorsque celle-ci n'a pas permis d'obtenir un signal sonde suffisamment précis, à poursuivre l'optimisation des ondes libres par la méthode directionnelle de Rosenbrock ([131], 1960) (avec mise à jour des directions de recherche de Palmer ([117], 1968)). Le signal sonde est alors reconstruit à chaque itération de l'algorithme à l'ordre  $M = 3$  à l'aide du modèle numérique de propagation HOS.

Ce dernier est initialisé à un instant  $t_{\text{ini}}$  par un champ de vagues d'ordre deux étendu (1.2.3) reconstruit à chaque itération à partir des ondes libres optimisées à l'itération précédente. L'ordre deux étendu permet en effet une meilleure maîtrise des non-linéarités par rapport au modèle au second ordre classique. Nous avons par ailleurs montré que l'instant d'initialisation joue un rôle crucial dans

l'évolution de l'erreur sur le signal sonde au passage à l'assimilation d'ordre  $M = 3$ , et par suite sur le résultat convergé de l'assimilation d'ordre  $M = 3$ . Il doit donc être judicieusement choisi afin d'assurer une reconstruction et plus une prévision optimale du champ de vagues étudié.

L'instant d'initialisation  $t_{\min 3}$  qui minimise le saut d'erreur au passage à l'optimisation de Rosenbrock à l'ordre  $M = 3$  fournit des résultats très concluants. Les erreurs sur le signal sonde sont bien diminuées par rapport aux erreurs obtenues par une initialisation du HOS à d'autres instants de la période d'assimilation. Les erreurs de prévision sont alors du même ordre de grandeur que les erreurs fournies par le modèle de prévision d'ordre deux étendu, modèle le plus performant dont nous disposons jusqu'alors.

Au vu de l'amélioration significative de la prévision des champs de vagues constatée lors de la tentative d'initialisation du HOS à  $t_{ini} = T$  par l'adjonction dans le calcul de l'erreur d'assimilation d'une fonction poids, nous avons également tenté d'utiliser une telle fonction poids lors de l'assimilation de données avec initialisation du HOS à  $t_{\min 3}$ .

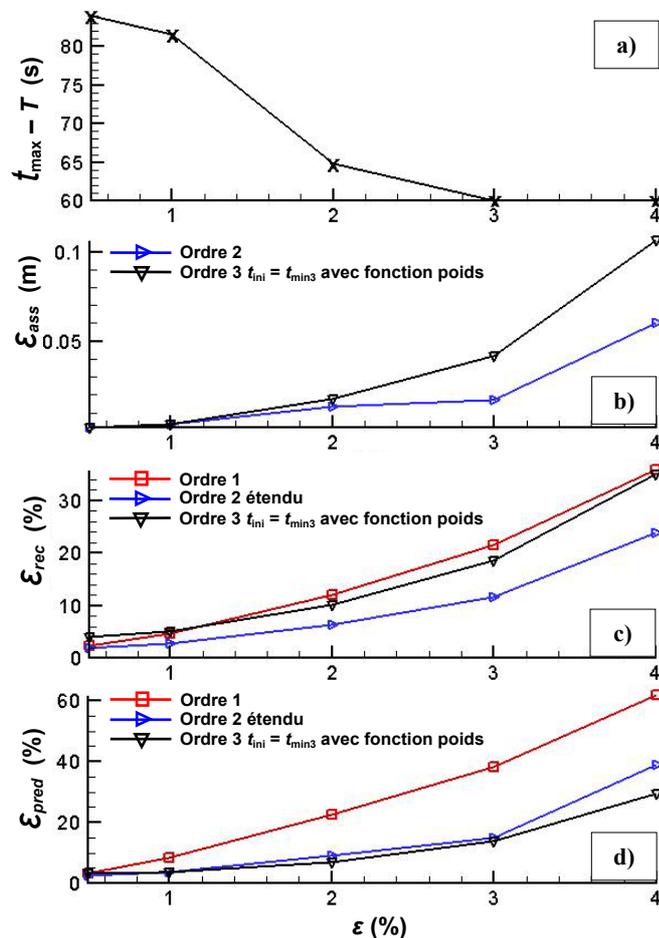


Figure 4.47 : Résultats obtenus par le modèle d'ordre  $M = 3$  à partir d'une assimilation de données reposant sur l'initialisation du HOS à  $t_{ini} = t_{\min 3}$  et l'utilisation de la fonction polynôme d'ordre trois définie sur  $[0, T]$ . Comparaison avec les résultats fournis par les modèles de prévision linéaire et d'ordre deux étendu. a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation, c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.

Les résultats présentés sur la Figure 4.47 indiquent que la prévision des différents cas de houle étudiés est une nouvelle fois accrue par l'utilisation d'une fonction poids dans le calcul de l'erreur sur le signal sonde. Les erreurs de prévisions sont maintenant plus faibles que les erreurs obtenues par le modèle de prévision d'ordre deux étendu, surtout aux moyennes et fortes cambrures pour lesquelles le modèle d'ordre  $M = 3$  a été spécifiquement mis en place (pour  $\varepsilon = 4\%$ , un gain de précision de 5% est obtenu). Tout comme nous l'avons observé dans le cas de l'initialisation du HOS à  $t_{ini} = T$ , cette amélioration se fait au détriment de la reconstruction du signal sonde et des champs de vagues en général, ce qui a une importance moindre dans la mesure où la qualité de la prévision importe avant tout.

La fonction poids utilisée ici est une fonction polynomiale d'ordre trois définie sur toute la période d'assimilation. Les fonctions évoquées précédemment ont elles aussi été testées. Les fonctions les moins étendues (ie de taille  $(t_{max} - T)/2$  définies sur  $[(3T - t_{max})/2, T]$ ) donnent des prévisions légèrement moins bonnes que celles fournies par le modèle de prévision d'ordre deux étendu à faible cambrure,  $\varepsilon = 0.5\%$  et  $\varepsilon = 1\%$ . À forte cambrure, les erreurs de prévision sont inférieures aux erreurs trouvées par le modèle d'ordre deux étendu, quelle que soit la fonction poids utilisée. Nous avons opté pour la fonction polynôme définie sur l'intégralité de la période d'assimilation car elle permet cette fois d'obtenir de bons résultats pour toute cambrure.

La Figure 4.48 compare les erreurs commises sur l'élévation de surface libre en tout point du domaine d'étude par les modèles de prévision linéaire, d'ordre deux étendu, et d'ordre  $M = 3$  avec initialisation du HOS à  $t_{min3}$  lors de l'assimilation de données, et utilisation d'une fonction poids dans le calcul de l'erreur d'assimilation. Deux cas de cambrures ont été représentés, un cas de faible cambrure  $\varepsilon = 0.5\%$ , et un cas de forte cambrure  $\varepsilon = 4\%$  qui nous intéresse particulièrement dans cette étude puisque les houles cambrées fortement non-linéaires sont à l'origine du développement des modèles de prévision d'ordre élevé.

Dans le cas du champ de vagues de cambrure  $\varepsilon = 0.5\%$ , on ne constate pas de différence notable entre les résultats fournis par les différents modèles à l'intérieur de la zone de prévision (représentée par un contour blanc). En dehors de la zone de prévision, les modèles d'ordre un et deux étendu montrent des erreurs tout à fait similaires, ce qui laisserait à penser que le modèle de prévision linéaire est tout à fait suffisant pour traiter un cas de houle de faible cambrure (cf Figure 4.48.a) et Figure 4.48.b)).

En revanche la Figure 4.48.c) montre que l'apport de l'ordre  $M = 3$  est considérable en dehors de la zone de prévision où les erreurs de calcul sont nulles sur la majorité du domaine et inférieures à 20% pour les paquets de vagues les moins bien reproduits, alors qu'elles atteignent 100% pour les autres modèles de prévision. (Notons à nouveau que les paquets de vagues les moins bien reproduits apparaissent deux fois du fait de la périodicité du domaine de calcul.)

Bien que l'ordre  $M = 3$  n'apporte pas d'amélioration particulière à la reproduction du champ de vagues à l'intérieur de la zone de prévision, il permet d'étendre considérablement la zone théorique de calcul, ce qui représente un atout considérable.

En ce qui concerne la houle fortement cambrée, on constate dès l'ordre deux étendu l'intérêt des modèles de propagation non-linéaires (cf Figure 4.48.d) et Figure 4.48.e)). Le modèle d'ordre  $M = 3$  apporte encore plus de précision à la prévision du champ de vagues à l'intérieur de la zone théorique de prévision, et de manière plus importante encore à l'extérieur du domaine. Là encore, le modèle d'ordre  $M = 3$  nous autorise à prévoir le champ de vagues sur une zone plus importante que la zone de prévision théorique, dans une certaine limite d'erreur. L'extension du domaine est particulièrement réalisable en espace plutôt qu'en temps puisque les erreurs à des distances plus importantes de la sonde restent inférieures à 20% pour des instants proches de l'instant de prévision maximal.

Remarquons que la reconstruction du champ de vagues est également améliorée mais uniquement aux instants ultérieurs à la moitié de la période de mesure environ du fait de l'utilisation de la fonction poids dans l'assimilation de données. L'erreur de reconstruction moyenne est au final moins bonne qu'à l'ordre deux étendu (cf Figure 4.47.c), mais cela n'a guère d'importance puisque c'est la qualité de la prévision qui fait l'objet de notre intérêt.

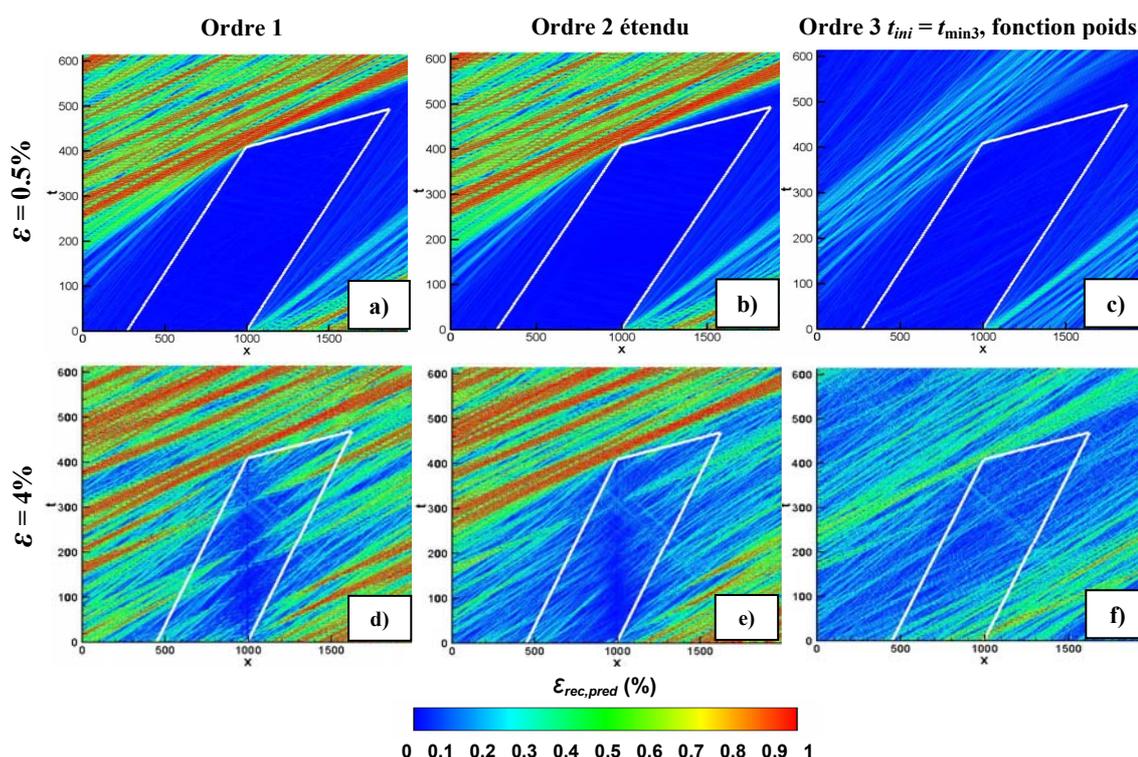


Figure 4.48 : Erreurs en tout point du domaine de calcul obtenues par le modèle de prévision d'ordre 1, d'ordre 2 étendu et d'ordre  $M = 3$  (avec initialisation du HOS à  $t_{\min 3}$  et fonction poids lors de l'assimilation de données) pour des champs de vagues de cambrure  $\varepsilon = 0.5\%$  et  $\varepsilon = 4\%$ .

#### 4.2.3.4 Validation du modèle sur un grand nombre de cas de houles irrégulières

Pour clore cette troisième partie consacrée au développement d'un modèle de prévision d'ordre  $M = 3$  basé sur l'utilisation du modèle numérique HOS, nous présentons les résultats obtenus par le modèle pour la prévision d'un grand nombre de champs de vagues non-linéaires. La méthode d'assimilation de données mise au point à la section précédente est employée.

Dans un premier temps, nous comparons la précision du modèle à la précision des modèles d'ordre un et d'ordre deux étendu étudiés en 0. Puis tout comme pour le modèle d'ordre deux étendu, nous confrontons dans une seconde partie la qualité des champs de vagues reproduits par notre modèle aux résultats fournis par le modèle de prévision de Wu. Nous terminerons cette analyse en présentant les diverses pistes d'exploration ou études en cours permettant d'améliorer encore les performances du modèle d'ordre  $M = 3$ .

**Mise en évidence du gain en précision apporté par le modèle d'ordre  $M = 3$**

Les résultats présentés en Figure 4.49 sont issus de simulations de Monte-Carlo réalisées sur  $N_s = 500$  cas de houles différents générés à l'ordre  $M = 3$  à l'aide du HOS. Ils confirment effectivement l'amélioration de la prévision des champs de vagues constatée lors de l'étude d'un unique cas de houle (ie créé à partir d'un seul jeu de phases), et sont même encore plus concluants quant à l'utilité d'un modèle d'ordre élevé pour la prévision de vagues de forte cambrure, mais également de moyenne ou de faible cambrure.

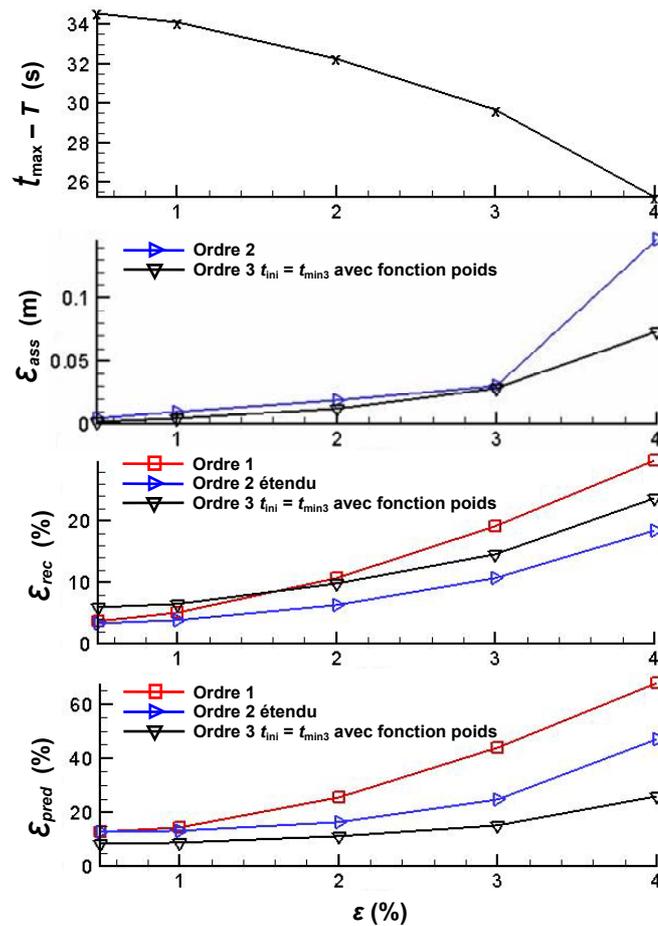


Figure 4.49 : Comparaison des résultats fournis par les modèles de prévision linéaire, d'ordre deux étendu et d'ordre  $M = 3$ . Dans ce dernier cas l'assimilation de données repose sur l'initialisation du HOS à  $t_{ini} = t_{min3}$  et l'utilisation de la fonction polynôme d'ordre trois définie sur  $[0, T]$ .

- a) Période de prévision maximale, b) Erreur sur le signal sonde après assimilation,
- c) Erreur moyenne de reconstruction, d) Erreur moyenne de prévision.

En ce qui concerne l'erreur commise sur le signal sonde au terme de la procédure d'assimilation de données, on constate sur la Figure 4.49.b) que l'erreur après optimisation à l'ordre  $M = 3$  est légèrement plus faible ou équivalente à l'erreur d'assimilation à l'ordre deux à faible cambrure. À forte cambrure  $\varepsilon = 4\%$ , on observe une nette diminution de l'erreur qui est réduite de moitié par l'assimilation d'ordre trois. Toutefois, comme nous avons utilisé une fonction poids dans le

calcul de l'erreur, cette donnée n'est pas représentative de la qualité des champs de vagues effectivement reproduits.

La Figure 4.49.c) indique ainsi que les champs de vagues reconstruits par le modèle d'ordre  $M = 3$  après assimilation de données sont de moins bonne qualité que les champs obtenus à l'aide du modèle d'ordre deux, voire du modèle linéaire à faible cambrure. Ceci est dû à l'utilisation d'une fonction poids dans l'assimilation de donnée comme nous l'avons constaté à la section précédente (cf Figure 4.43 par exemple).

En revanche, la prévision est bien améliorée par l'ordre  $M = 3$ , surtout à forte cambrure où le gain en précision est environ de 40% par rapport au modèle d'ordre deux étendu et de 60% par rapport au modèle linéaire (cf Figure 4.49.d)). La précision est également accrue à faible et moyenne cambrure où le gain en précision par rapport au modèle d'ordre deux étendu varie entre 5% et 10%. Au final, les erreurs de prévision sont inférieures à 10% pour les houles de petite et moyenne cambrure et inférieures à 20% pour les fortes cambrures.

### Confrontation de la méthode au modèle de prévision de Wu

Comme nous l'avons fait pour le modèle d'ordre deux étendu au paragraphe 4.2.2.3, nous présentons dans cette section une comparaison des résultats fournis par le modèle de prévision d'ordre  $M = 3$  aux erreurs présentées par Wu dans son rapport de thèse sur les cas de houle détaillés dans le Tableau 4.2. Les erreurs annoncées ont été moyennées sur  $N_s = 100$  jeux de phases différents. À nouveau, les fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  bornant l'intervalle d'étude du signal sonde ont été déterminées de manière automatique par la procédure de troncature spectrale décrite au 4.1.2.2 d'une part, et prises égales aux valeurs préconisées par Wu  $\omega_l = 0.36 \text{ rad/s}$  et  $\omega_v = 1.06 \text{ rad/s}$ .

Sur la Figure 4.50.a) nous avons représenté l'erreur moyenne  $\varepsilon_D$  commise sur l'élévation de surface libre définie par Wu par (4.18). Nous rappelons que cette erreur est évaluée sur l'ensemble du domaine de prévision comprenant les zones de rétrospection, de reconstruction et de prévision associées aux fréquences fixes  $\omega_l = 0.36 \text{ rad/s}$  et  $\omega_v = 1.06 \text{ rad/s}$ . Sur la Figure 4.50.b), nous avons distingué erreur de reconstruction et erreur de prévision à proprement parler.

Cette fois, on observe une réelle différence entre les résultats fournis par le modèle d'ordre  $M = 3$  lorsque les fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_v$  sont déterminées de manière automatique et lorsqu'elles sont fixées. Le modèle de prévision original utilisant ses propres fréquences semble en effet être plus précis du fait d'une meilleure reconstruction des champs de vagues alors que la prévision est de qualité identique quelle que soit la méthode envisagée (cf Figure 4.50.b)). On constate cependant que l'écart entre nos deux modèles diminue lorsque la cambrure de la houle considérée augmente ; en effet, les erreurs de reconstruction croissent plus rapidement avec la cambrure lorsque les fréquences sont déterminées par la procédure de prétraitement du signal sonde. Ainsi les erreurs  $\varepsilon_D$  obtenues par les deux modèles sont similaires pour le cas de cambrure  $\varepsilon = 3.5\%$ .

Finalement, le modèle d'ordre  $M = 3$  associé à l'intervalle fréquentiel  $[\omega_l, \omega_v]$  automatique permet d'obtenir des erreurs  $\varepsilon_D$  identiques à 0.5% près aux erreurs annoncées par Wu pour les cas de cambrure  $\varepsilon = 0.2\%$  et  $\varepsilon = 1.7\%$ . En ce qui concerne le cas de cambrure  $\varepsilon = 2.8\%$ , nous émettons les mêmes réserves sur la valeur présentée par Wu que lors de l'étude des performances du modèle d'ordre deux étendu, plus faible que les erreurs obtenues aux très petites cambrures. Nous indiquerons uniquement que l'ordre  $M = 3$  apporte une amélioration de la précision de 30% environ par rapport au modèle d'ordre deux étendu. Quant à l'erreur de calcul à  $\varepsilon = 3.5\%$ , elle est 25% plus faible que l'erreur obtenue à l'aide du modèle d'ordre deux étendu et n'est plus que 10% plus élevée que l'erreur rapportée par Wu.

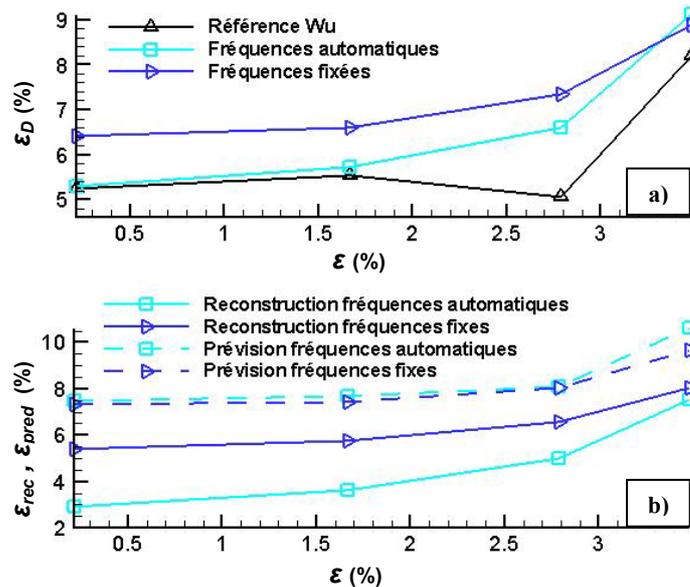


Figure 4.50 : Comparaison des performances du modèle d'ordre  $M = 3$  aux performances du modèle de prévision développé par Wu. L'intervalle fréquentiel d'étude du signal sonde est déterminé de manière automatique ou fixé à  $[0.36\text{rad.s}, 1.06\text{rad/s}]$  : a) Erreur sur la totalité du domaine de prévision associé aux fréquences fixes, b) Erreurs de reconstruction et de prévision.

Cette comparaison nous assure donc une nouvelle fois de la nécessité d'un modèle de houle d'ordre élevé pour décrire et prévoir les états de mer de moyenne cambrure. L'ordre  $M = 3$  fournit des résultats très encourageants puisque les erreurs de calcul sont très proches des erreurs obtenues par Wu dont le modèle de prévision est, nous le rappelons, d'ordre  $M$  non précisé mais dans tous les cas supérieur à trois.

## Conclusion et perspectives

L'utilisation du modèle de houle d'ordre  $M = 3$  permet certes d'améliorer la qualité des champs de vagues prédits, mais il reste à l'heure actuelle peu performant en termes de temps de calcul. À l'heure actuelle, le gain en précision obtenu par rapport à un calcul à l'ordre deux étendu ne compense pas l'augmentation drastique des temps CPU d'un facteur 25 environ. Il n'est donc pas encore applicable à un dispositif de prévision opérationnel et reste en cours de développement.

L'étape du processus de prévision la plus coûteuse en temps de calcul est l'assimilation de données. En effet, à l'ordre  $M = 3$  chaque évaluation de l'erreur d'assimilation nécessite tout d'abord le calcul de l'élévation et du potentiel de surface libre à l'ordre deux étendu à l'instant  $t_{ini}$ , puis une simulation HOS sur toute la période de mesure. L'évaluation du champ de vagues au second ordre étendu est extrêmement rapide, mais sa propagation par le HOS à l'ordre  $M = 3$  sur  $[0, T]$  est beaucoup plus longue (à titre indicatif, une telle simulation sur une période  $T = 410.4\text{s}$  dure environ 10s sur un processeur Intel® Core™ 2 CPU T7200 2GHz). Or, comme nous avons pu l'observer au 4.2.3.3 sur les divers cas d'étude (cf Figure 4.45 par exemple), la procédure de Rosenbrock requiert au moins 3000 évaluations de l'erreur d'assimilation pour converger. Les coûts de calcul sont donc actuellement réellement prohibitifs.

Diverses solutions ont été envisagées dans le but d'accélérer la reproduction du signal sonde : il s'agit trouver l'ordre optimal de traitement des ondes libres par la procédure de minimisation. Nous rappelons en effet que la méthode de Rosenbrock consiste à ajuster les variables les unes après les autres (cf Chapitre 3) ; il est donc fortement probable que l'ordre l'optimisation préalable de certaines fréquences permette d'accélérer la vitesse de convergence et améliore éventuellement la solution convergée. Actuellement, les ondes libres sont optimisées par ordre de fréquences croissantes, de  $\omega_l$  à  $\omega_v$ .

On peut tout d'abord considérer que les fréquences à traiter en premier lieu sont celles qui contiennent l'essentiel de l'énergie du spectre du signal sonde, soit les fréquences proches de la fréquence de pic  $\omega_p$ . Une première méthode consisterait donc à commencer par optimiser les variables de pic ( $\underline{a}_p, \varphi_p$ ), puis à poursuivre par l'ajustement des fréquences d'énergie de moins en moins importante jusqu'aux limites fixées  $\omega_l$  et  $\omega_v$ . On pourrait par ailleurs tenter d'optimiser uniquement les fréquences les plus énergétiques dans un intervalle restreint autour du pic spectral.

Une seconde hypothèse est que les ondes les plus longues doivent être optimisées avant les ondes les plus courtes. En effet, les ondes courtes étant portées par les ondes longues, elles ne peuvent vraisemblablement pas être bien résolues si les ondes longues ne sont pas ajustées au préalable. Le traitement initial des ondes libres de fréquences comprises dans l'intervalle  $[\omega_l, \omega_p]$  pourrait donc permettre d'accélérer et d'améliorer l'assimilation des données.

La dernière solution que nous avons envisagée consiste à calculer la FT de l'erreur d'assimilation à chaque itération de la procédure de Rosenbrock afin de déterminer les fréquences les moins bien résolues. On commencera alors par optimiser les ondes libres correspondant à ces fréquences avant de d'ajuster progressivement les autres variables.

### 4.3 Prévision de signaux expérimentaux

Les modèles déterministes bidimensionnels développés dans le cadre de cette thèse ont tout d'abord été testés pour la prévision de houles non-linéaires synthétiques générés à l'aide du modèle numérique HOS. Il s'agissait de pouvoir améliorer leurs performances en utilisant des signaux de sondes facilement calculables et modulables, en se délestant des complications inhérentes à l'utilisation de signaux expérimentaux, telles que l'imprécision des capteurs et des mesures, le bruitage des signaux, etc...

Cependant, les études présentées dans la partie 4.2 ne permettent pas de valider nos modèles au réel et nous avons testé leur capacité à prédire des champs de vagues « réels » générés en bassin. Les résultats que nous allons détailler dans les sections suivantes ont été obtenus à partir de l'étude de signaux expérimentaux obtenus lors d'une campagne d'essais réalisée au sein des infrastructures de l'ECN les 6 et 7 mai 2009.

Le dispositif de mesure est constitué de neuf sondes à houle réparties dans le bassin de traction mesurant le champ de vagues irrégulier généré par le batteur. La sonde la plus proche du batteur est utilisée comme sonde de mesure, et les huit sondes aval comme sondes de validation de la prévision sur toute la zone de prévision théorique disponible.

### 4.3.1 Dispositif expérimental et houles générées

#### Dispositif

Les essais ont été réalisés dans le bassin de traction de l'ECN qui est, de par ses dimensions ( $L148m \times \ell 4m \times P3m$ ), particulièrement bien adapté à la génération de houles bidimensionnelles. Le bassin est muni d'un batteur qui permet de générer des houles de 0.6m de hauteur crête à creux et est habituellement utilisé pour tester la résistance à l'avancement de carènes de navires remorquées par un chariot de traction.

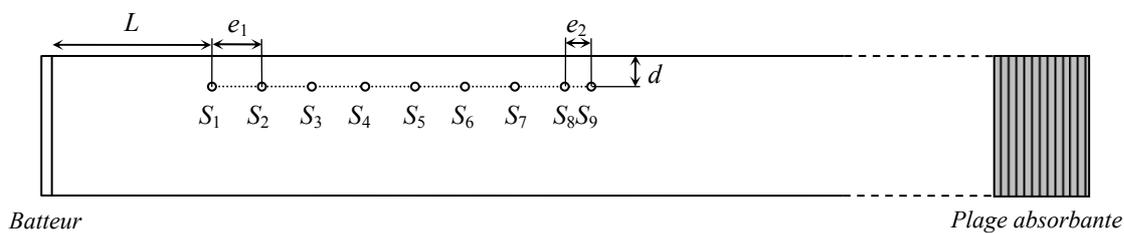


Figure 4.51 : Dispositif expérimental.

Comme nous l'avons précisé précédemment, neuf capteurs ont été répartis dans le bassin sur une distance totale de 50m environ comme le montre la Figure 4.51. Il s'agit de sondes à houles dont la longueur a été réglée à 60cm de manière à capturer la surface libre des diverses houles générées (35cm au-dessus de la surface libre, 25cm en dessous). La première sonde est située à une distance  $L = 18m$  du batteur. Les suivantes sont régulièrement espacées de  $e_1 = 6m$  environ de manière à couvrir la totalité de la zone de prévision disponible, hormis la dernière sonde qui se situe plus près de sa voisine pour des raisons pratiques. Notons que les dernières sondes se situent parfois en dehors de la zone de prévision théorique selon la durée de mesure  $T$  considérée à la sonde  $S_1$ . Le Tableau 4.4 récapitule la position exacte des sondes par rapport au batteur.

Sonde	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$
Écartement $e$ (m)	0	5.903	5.776	6.065	5.997	5.94	5.098	6.152	3.897
Distance au batteur (m)	17.223	23.086	28.822	34.847	40.784	46.684	51.742	57.854	61.711
Distance au mur $d$ (m)	93	93	92.5	93	93.4	92.3	93.5	92.5	57

Tableau 4.4 : Position des sondes.

Les sondes sont déportées de  $d = 1m$  à l'intérieur du bassin grâce à des barres horizontales perpendiculaires au bord et fixées à l'aide d'un serre-joint (cf Figure 4.52). La rigidité du montage proposé n'est certes pas exceptionnelle mais elle est suffisante pour les houles testées. Des lignes d'eau sont finalement disposées en aval des sondes afin d'améliorer l'absorption et de diminuer le

temps de retour au calme de retour au calme de la surface libre entre deux essais. La Figure 4.53 montre une photo d'une partie du dispositif expérimental réalisé.

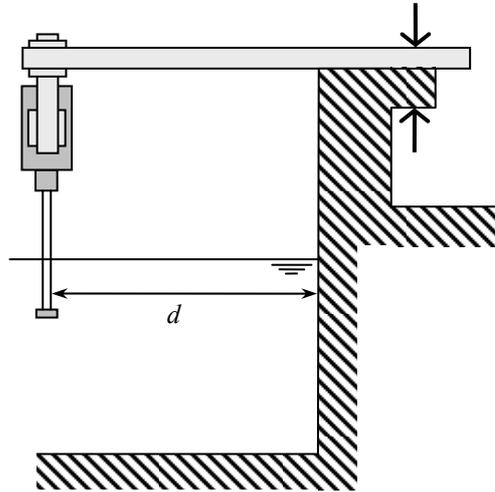


Figure 4.52 : Schéma de montage d'une sonde.

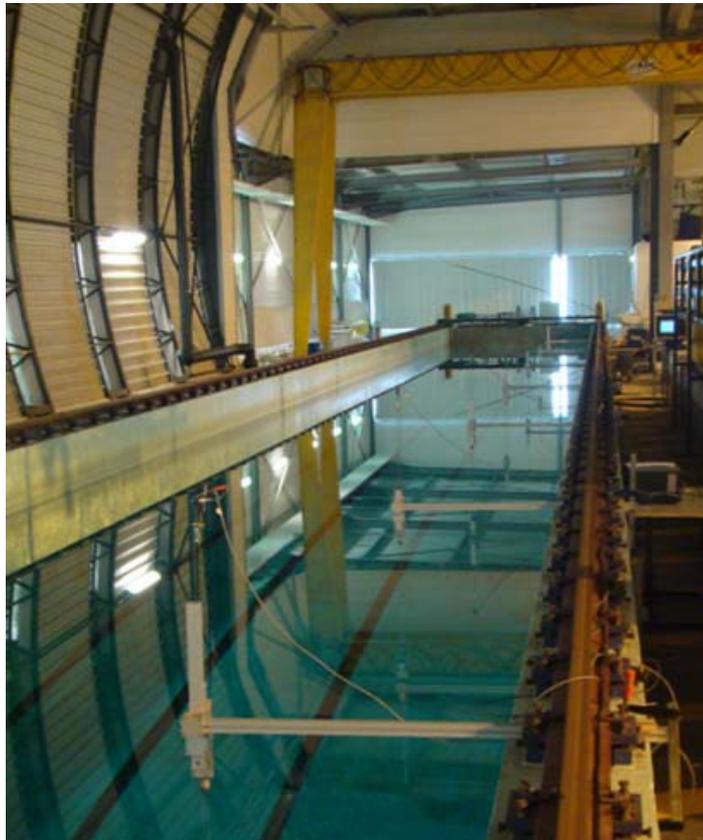


Figure 4.53 : Photo du montage réalisé dans le bassin d'essai de traction de l'ECN.

## Houles générées

Les houles générées sont des houles irrégulières de spectre caractéristique JONSWAP (2.1) où le paramètre  $\gamma$  est pris à égal à 3.3 comme pour la génération de champs de vagues synthétiques. Deux périodes de pic ont été testées :  $T_p = 2s$  et  $T_p = 3s$ . Les hauteurs significatives sont reportées dans le Tableau 4.5.

$T_p$ (s)	$H_s$ (cm)				
2	3	6	12	19	25
3	3	6	12	19	25

Tableau 4.5 : Caractéristiques des houles générées.

En ce qui concerne la durée de capture, elle a été choisie de telle sorte que chaque sonde mesure l'élévation de surface libre pendant une période correspondant au temps de prévision maximal accessible  $t_{\max}$  calculé pour une période de mesure de  $T = 52.1s$  et  $T = 102.2s$  à la sonde  $S_1$ . Cette durée a été fixée à 240s à compter du démarrage du batteur pour tous les cas tests. Elle comprend la période de prévision maximale  $t_{\max}$ , mais également le temps de propagation jusqu'aux sondes et le temps d'établissement de la houle.

En effet, nous avons constaté qu'au démarrage du batteur le volet fait un mouvement brusque de plus ou moins grande amplitude qui provoque une série de vagues semblables à la réponse impulsionnelle ou indicielle du batteur. Il est donc impératif d'attendre que ces vagues se dissipent avant de démarrer l'acquisition aux différentes sondes. Les plus courtes sont très lentes et les plus longues vont jusqu'à la plage et se réfléchissent en partie. Nous attendons donc trois à quatre minutes avant de faire le zéro des sondes.

Nous indiquerons pour conclure que les vagues générées ne sont localement pas bidimensionnelles dans une zone proche du batteur. À forte cambrure par exemple, on observe un déferlement localisé au centre. Il semble que le mode évanescent, ayant un ventre au centre et sur les bords du bassin, soit excité, la source d'excitation pouvant être la flexion transverse du volet ou éventuellement les fuites au niveau de ses joints latéraux.

### 4.3.2 Traitement des signaux expérimentaux

Lors de l'analyse des signaux relevés aux différentes sondes, nous avons tout d'abord constaté la présence de pics parasites sur certains signaux, comme le montre la Figure 4.54 pour le cas de houle  $T_p = 2s$ ,  $H_s = 3cm$ . Ces bruits, très probablement liés à l'utilisation du pont roulant équipant le bassin de traction pendant certains essais, sont indépendants des expériences réalisées et doivent être découplés des mesures correspondantes.

Une procédure de filtrage s'est avérée inadaptée. En effet, on observe des oscillations résiduelles à la fréquence de coupure. La méthode retenue consiste à repérer les pics en comparant l'incrément entre deux points successifs à une valeur seuil (fixée à 0.3V dans notre cas), puis à bloquer la valeur parasite à la valeur du point précédent. Le pic couvre éventuellement plusieurs points

successifs (trois maximum) et le signal corrigé présente un palier (cf Figure 4.54).

Un dernier filtrage à 5Hz a été appliqué à l'ensemble des signaux expérimentaux afin de supprimer les vibrations des sondes et le bruit de mesure.

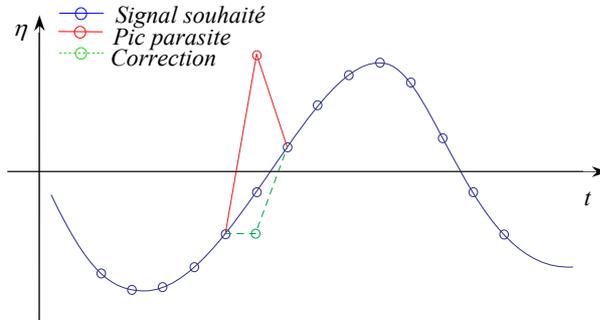


Figure 4.54 : Traitement du bruitage du signal mesuré à la sonde  $S_1$  dans le cas d'une houle de caractéristiques  $T_p = 2s$  et  $H_s = 3cm$ .

Les données ont finalement été sous-échantillonnées de 100Hz à 5Hz de manière à limiter le nombre de modes pour les calculs tout en conservant l'essentiel de l'énergie du spectre du champ de vagues considéré.

### 4.3.3 Initialisation du modèle de prévision

Le signal servant d'entrée au modèle de prévision est une portion de l'élévation de surface libre mesurée à la sonde  $S_1$  de durée  $T$ . Pour plus de simplicité, nous l'appellerons signal sonde  $S_1$  bien que ne faisant référence qu'à une portion de la mesure expérimentale.

D'un point de vue expérimental, il faut s'assurer que l'onde la plus lente générée par le batteur soit bien capturée par la sonde  $S_1$ . Si l'on note  $t_1$  le temps de parcours de l'onde de vitesse de groupe  $Cg_l$  depuis le batteur jusqu'à  $S_1$ , on obtient la condition (4.24) sur  $\omega_v$  où  $L$  est la distance séparant la première sonde du batteur :

$$t_1 \geq \frac{L}{Cg_l} \Leftrightarrow \omega_v \leq g \frac{t_1}{2L} \quad (4.24)$$

D'un point de vue numérique la sonde  $S_1$  est fictivement placée au centre du domaine spatial de calcul. La longueur  $L_x$  du domaine lié à l'utilisation de la méthode HOS est choisie telle que l'onde la plus rapide ne traverse qu'une seule fois la zone théorique de prévision associée au signal sonde  $S_1$ . On s'affranchit ainsi du calcul répété de l'erreur correspondant à un même paquet de vagues pénétrant plusieurs fois le domaine par périodicité, procédure que nous n'avons pas appliquée lors de l'étude de houles synthétiques. Le cas limite pour que cette condition soit vérifiée est que l'onde de vitesse de groupe  $Cg_v$  passant par la sonde  $S_1$  au début de la période de mesure  $t = 0$  atteigne la limite du domaine à l'instant  $t = T/2$  (cf Figure 4.55). On en déduit la condition (4.25) sur la taille du domaine  $L_x$  ou sur la fréquence minimale  $\omega_l$ .

$$L_x \geq TCg_v \Leftrightarrow \omega_l \geq g \frac{T}{2L_x} \quad (4.25)$$

Afin de ne pas réduire trop drastiquement l'intervalle  $[\omega_l, \omega_v]$  et risquer de négliger des composantes fréquentielles d'énergie conséquente, divers tests ont été réalisés sur les valeurs de  $L_x$  et de  $t_1$ .

Nous avons constaté que plus la longueur spatiale  $L_x$  augmente, plus la reconstruction du signal à la sonde  $S_1$  est précise. Cela semble tout à fait logique puisque l'on prend en compte d'avantage de basses fréquences. Dans le cas où l'on considère une portion du signal sonde  $S_1$  de période  $T = 102.2s$ , la valeur  $L_x = 500m$  donne des résultats tout à fait satisfaisants, (sachant que l'on place la sonde  $S_1$  au milieu du domaine et que les sondes de validation sont réparties sur 50m environ). Des longueurs de domaine supérieures ne permettent pas d'améliorer la précision des calculs mais en accroissent le coût.

Concernant le choix de l'instant initial  $t_1$ , nous ne pouvons pas tirer de conclusion aussi nette. Il semble en effet que des instants plus grands ne permettent pas d'améliorer la reproduction du signal à la sonde  $S_1$  dans tous les cas, bien que les fréquences maximales  $\omega_v$  soient autorisées à prendre des valeurs plus importantes. Mais il faut cependant noter que la modification de  $t_1$  entraîne la modification du signal sonde lui-même. L'instant que nous avons finalement choisi est  $t_1 = 30s$  qui donne pour un signal sonde  $S_1$  de longueur  $T = 102.2s$  la fréquence  $f_v = 1.3Hz$  correspondant à la limite fréquentielle du batteur de 1,5Hz environ.

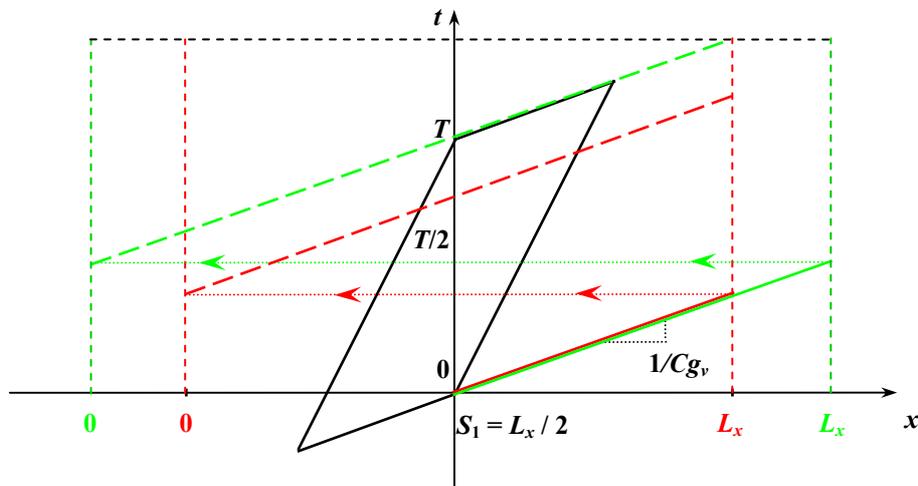


Figure 4.55 : Condition sur la taille minimale du domaine de simulation HOS.

#### 4.3.4 Résultats obtenus

Ci-dessous nous présentons les résultats que nous obtenons pour la prévision de signaux de période de pic  $T_p = 2s$  en utilisant les modèles décrits précédemment d'ordre un et deux, d'ordre deux étendu et d'ordre  $M = 3$  avec initialisation du HOS à  $t_{ini} = t_{min3}$  et l'utilisation de la fonction polynôme d'ordre trois définie sur  $[0, T]$ . On considère comme signal d'entrée au modèle une portion du signal  $S_1$

de période  $T = 102.2\text{s}$ . L'élévation de surface libre a été calculée par chaque modèle de prévision paramétré en profondeur finie (avec  $h = 3\text{m}$ ) en la position exacte des huit sondes de validation.

### Domaine de prévision et position des sondes de validation

La Figure 4.56 montre la répartition des différentes sondes ainsi que leur zone temporelle de prévision pour un champ de vagues de période de pic  $T_p = 2\text{s}$  et de hauteur significative  $H_s = 3\text{m}$  (ie de cambrure  $\varepsilon = 0.5\%$ ). On retrouve la même configuration pour les autres cas de cambrure car les valeurs de  $\omega_l$  et de  $\omega_v$  déterminant la zone de prévision sont prises égales aux valeurs limites données par les conditions (4.24) et (4.25) dans tous les cas traités.

Le Tableau 4.6 donne une idée du nombre de périodes de pic sur lesquelles s'effectue le calcul de l'erreur de prévision à chaque sonde de validation ainsi que l'éloignement de ces différentes sondes à la sonde de mesure  $S_1$  en termes de nombre de longueur d'onde.

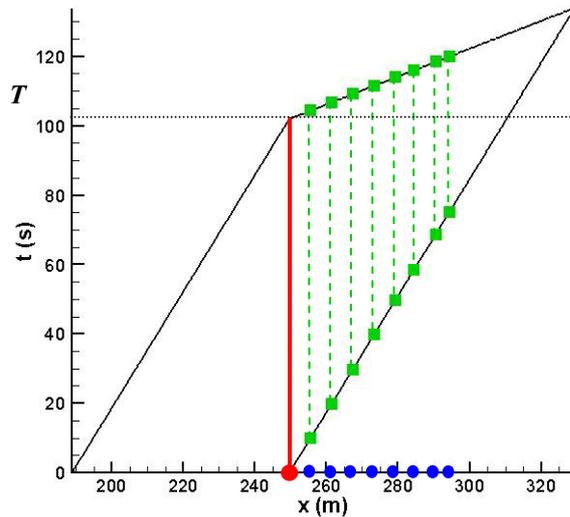


Figure 4.56 : Zone de prévision et position des sondes pour un champ de vagues de cambrure  $\varepsilon = 0.5\%$ . La sonde  $S_1$  est marquée par un point rouge et les huit autres sondes de validation par des points bleus. Les zones temporelles de prévision associées à chacune de ces sondes sont représentées en pointillés verts.

Sonde	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$
$\Delta t_{pred} / T_p$	1.1	2.2	3.5	4.7	5.9	6.9	8.1	8.9
Distance à $S_1 / \lambda_p$	0.9	1.9	2.9	3.8	4.7	5.5	6.5	7.1

Tableau 4.6 : Période de prévision et éloignement des sondes de validations à la sonde  $S_1$  en termes de période de pic et de longueur d'onde.

## Reconstruction du signal sonde $S_1$

En ce qui concerne l'assimilation de données, nous rappelons que nous utilisons la méthode de découplage des ondes libres de Duncan & Drake pour le modèle de prévision d'ordre deux (ou deux étendu) et la procédure de Rosenbrock à l'ordre  $M = 3$  où le modèle HOS est initialisé à l'instant  $t_{\min 3}$  défini au chapitre 4.2.3.3 qui minimise le saut d'erreur observé au passage de l'optimisation des ondes libres à l'ordre deux à l'optimisation à l'ordre  $M = 3$ .

On constate sur la Figure 4.57 une légère amélioration des résultats fournis par le modèle d'ordre  $M = 3$  pour les différentes cambrures testées par rapport aux modèles d'ordre deux.

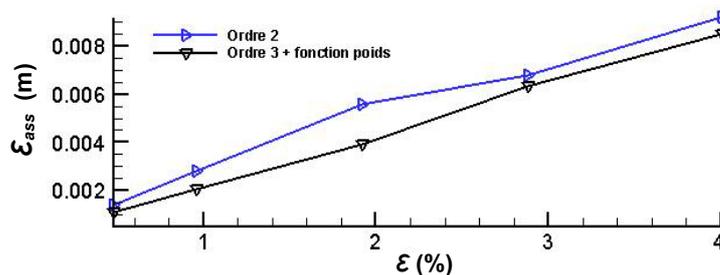


Figure 4.57 : Erreur d'assimilation pour les modèles de prévision d'ordre deux et  $M = 3$ .

## Reconstruction et prévision des signaux aux sondes de validation

La Figure 4.58 présente les erreurs commises par les différents modèles sur la reproduction de l'élévation de surface libre aux sondes de validation. Pour chaque cas de cambrure testée, nous avons distingué erreur de reconstruction ( $t < T$ ) et erreur de prévision ( $t > T$ ).

On remarque en premier lieu que les résultats fournis par les modèles d'ordre un et deux sont tout à fait similaires. Tout comme nous l'avons noté lors de l'étude des champs de vagues synthétiques au paragraphe 4.2.2, l'ordre deux n'apporte aucun gain notable en précision.

Le modèle d'ordre deux étendu permet en revanche une nette amélioration de la reconstruction et de la prévision des champs de vagues dès la cambrure  $\epsilon = 1\%$ . La réduction des erreurs de reconstruction est très nette et particulièrement accrue lorsque l'on s'éloigne de la sonde  $S_1$ . La qualité des signaux prédits par le modèle est visible à partir de la sonde  $S_6$  pour les faibles et moyennes cambrures. Pour le cas de forte cambrure  $\epsilon = 4\%$ , le gain en précision est immédiat dès la sonde  $S_2$ . Seul le cas de cambrure  $\epsilon = 3\%$  montre une légère dégradation des résultats aux sondes intermédiaires  $S_4$ ,  $S_5$ , et  $S_6$  où l'erreur de prévision est supérieure aux erreurs trouvées aux ordres un et deux. Un gain en précision de 20% à 50% est toutefois apporté sur la prévision de ces signaux aux deux dernières sondes de validation.

Finalement, l'étude des résultats fournis par le modèle d'ordre  $M = 3$  montre que son utilisation semble n'être adaptée qu'à la prévision de houles de forte cambrure. Les erreurs de reconstruction et de prévision sont en effet beaucoup plus importantes aux cambrures  $\epsilon = 0.5\%$  et  $\epsilon = 1\%$  que les erreurs fournies par les autres modèles. À moyenne cambrure  $\epsilon = 2\%$ , les erreurs de reconstruction sont plus faibles que les erreurs d'ordre un et deux dès la sonde  $S_4$ , mais il faut attendre de s'éloigner d'avantage de la sonde de mesure jusqu'à la sonde  $S_7$  pour qu'elles deviennent également inférieures aux erreurs d'ordre deux étendu. La prévision reste en revanche moins bonne que la prévision à l'ordre deux étendu. L'intérêt de l'ordre  $M = 3$  apparaît aux fortes cambrures  $\epsilon = 3\%$  et

$\varepsilon = 4\%$ , pour lesquelles l'amélioration de la qualité des signaux reconstruits et prédits est notable dès la sonde  $S_4$ . Le gain en précision croît avec la cambrure et la distance à la sonde de mesure. On note une réduction maximale des erreurs de reconstruction et de prévision de 30% et 50% environ pour la dernière sonde de validation  $S_9$ .

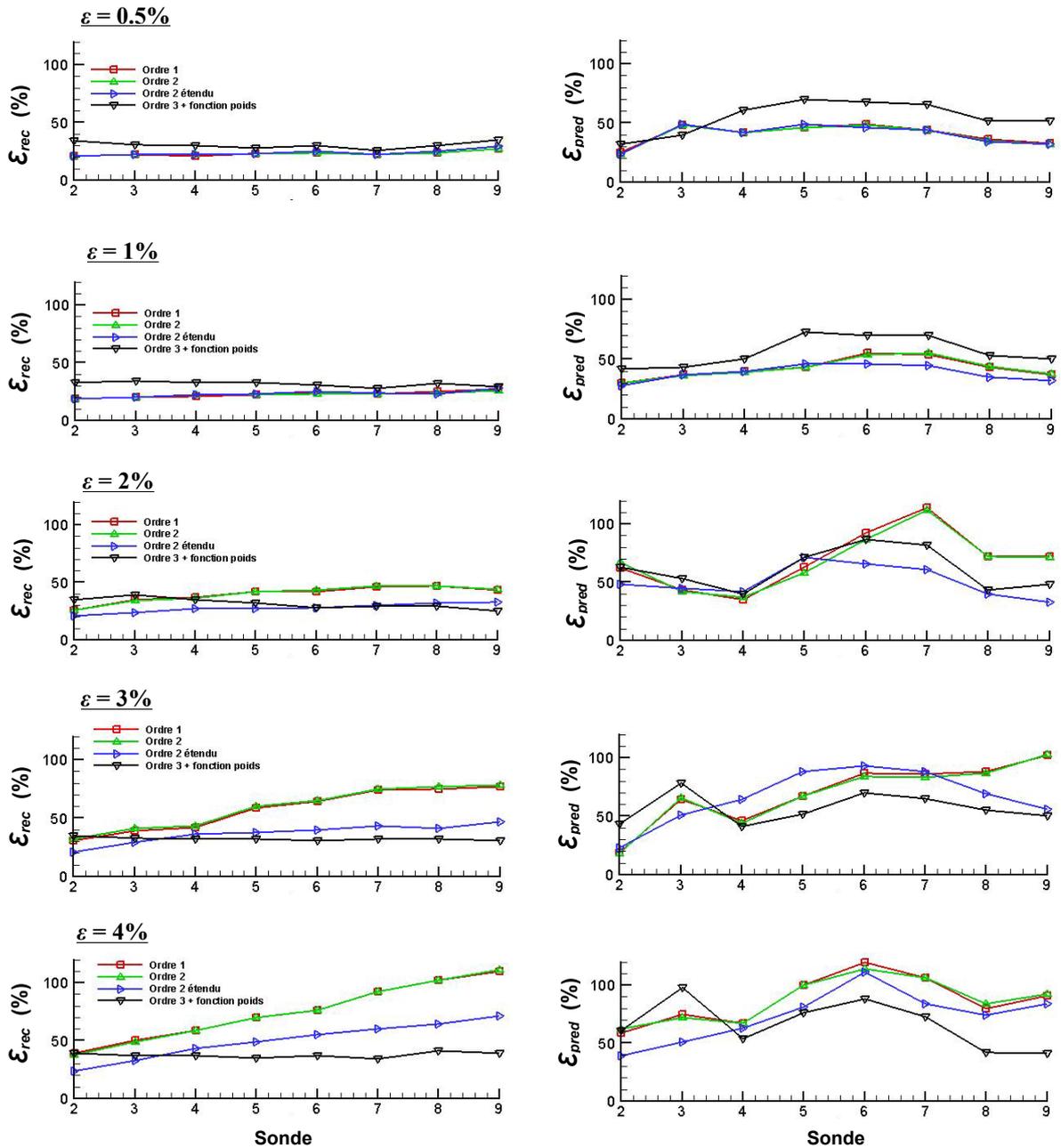


Figure 4.58 : Erreur de reconstruction et de prévision calculées par les modèles de prévision linéaire, d'ordre 2 et 2 étendu et d'ordre  $M = 3$  à chaque sonde de validation pour différentes cambrures.

Sur la Figure 4.59 nous avons représenté l'élévation de surface libre à la sonde  $S_9$  mesurée et calculée par les modèles de prévision linéaire au second ordre étendu et à l'ordre  $M = 3$  pour ce cas de forte cambrure  $\varepsilon = 4\%$ . La Figure 4.59.a) montre les signaux sur toute la zone temporelle de calcul associée à cette sonde et la Figure 4.59.b) fait un zoom sur la zone de prévision à proprement parler.

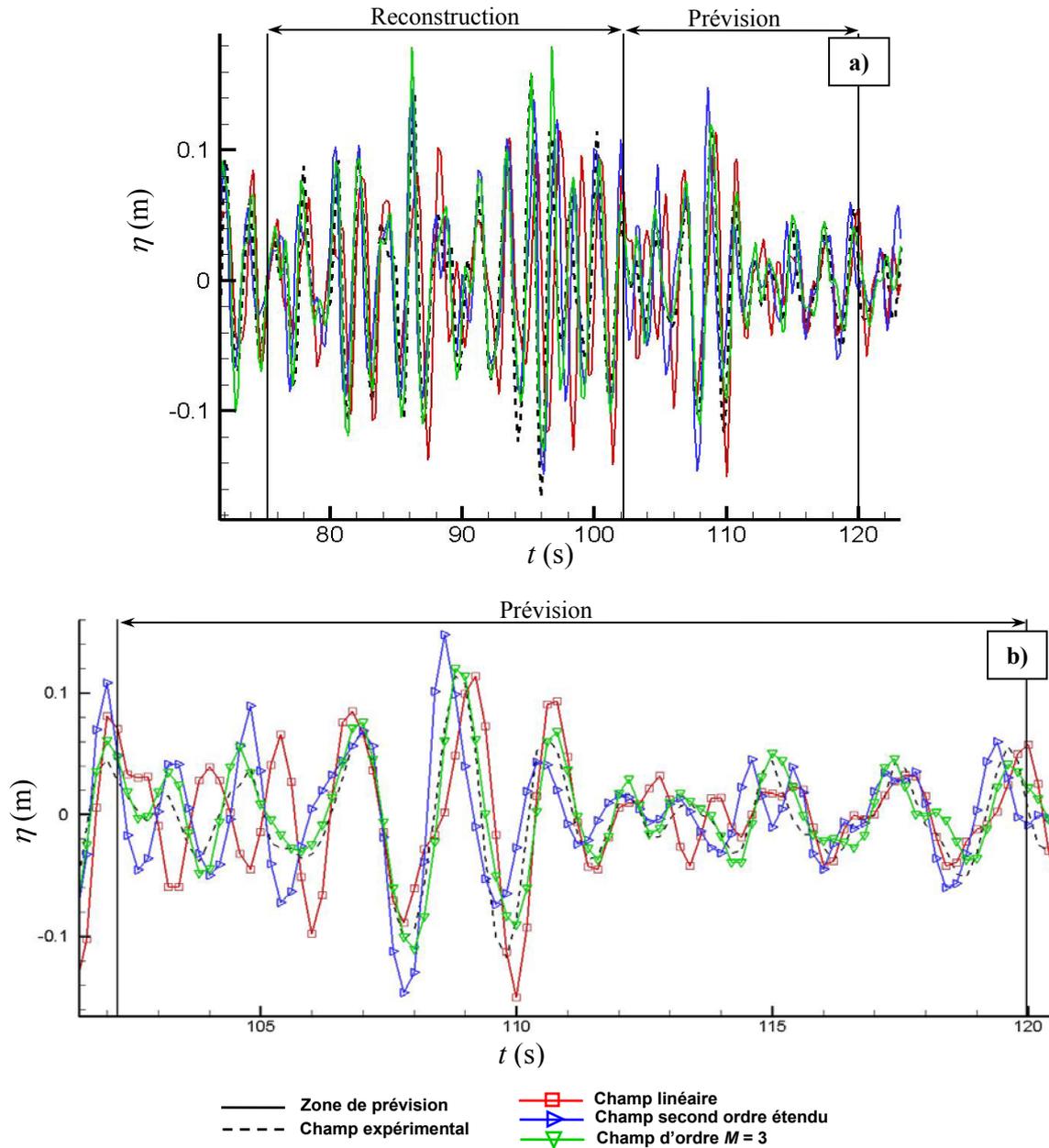


Figure 4.59 : a) Reconstruction et prévision du signal à la dernière sonde  $S_9$  pour une houle de cambrure  $\varepsilon = 4\%$ . b) Zoom sur la zone de prévision. Les domaines de reconstruction et de prévision sont délimités par des droites verticales.

La seconde figure permet de constater très nettement l'amélioration de la prévision apportée par le modèle d'ordre  $M = 3$ . Alors que les signaux d'ordre un et deux étendu sont déphasés par

rapport au signal mesuré, voire en opposition de phase à certains instants, le signal d'ordre  $M = 3$  est bien en phase avec la mesure. Les pics et les creux sont par ailleurs beaucoup mieux reproduits de même que les oscillations rapides que les modèles linéaire et d'ordre deux étendu ont plus de difficultés à capturer.

On remarque également sur cette figure que le signal d'ordre  $M = 3$  est bien meilleur que ce que laissait présager le calcul de  $\varepsilon_{pred}$  présenté en Figure 4.58 qui fait apparaître une erreur de prévision de l'ordre de 50% (cas  $\varepsilon = 4\%$ , sonde  $S_9$ ). L'obtention d'une telle valeur provient de l'expression de notre estimateur d'erreur quadratique qui est extrêmement sensible au déphasage du signal prédit par rapport à la mesure : un faible déphasage induit une erreur importante bien que les amplitudes soient correctement reproduites (cf Figure 4.59.b)). Cela signifie que l'estimateur que nous utilisons mésestime la précision de la prévision. Il semble donc judicieux pour la suite de séparer l'erreur sur les phases et l'erreur sur les amplitudes afin d'obtenir une meilleure représentation de la qualité de nos calculs.

## Bilan

Rappelons tout d'abord que les résultats présentés se rapportent à des champs de vagues générés par le batteur en utilisant un seul jeu de phases prédéfini. Les conclusions que nous avons énoncées n'ont donc pas de valeur générale comme dans le cas des simulations de Monte Carlo, et il est possible que la houle expérimentale générée soit particulièrement difficile à traiter (on pourra se reporter à la Figure 4.6 pour juger de la disparité des résultats de reconstruction et de prévision suivant le jeu de phases utilisé pour créer les champs de vagues artificiels).

Le Tableau 4.6 indique par ailleurs que les erreurs de prévision aux premières sondes de validation sont calculées sur un faible nombre de périodes de pic. Cela pourrait expliquer le caractère irrégulier de l'évolution de ces erreurs en fonction de l'éloignement à la sonde de mesure (notamment le pic d'erreur à la sonde  $S_3$ ), alors que les erreurs de reconstruction, qui sont elles évaluées sur soixante périodes de pic, croissent de manière beaucoup plus régulière avec la distance.

La conclusion de cette validation expérimentale de nos modèles de prévision est que dans le cadre de ces essais (un jeu de phases), le modèle de prévision d'ordre deux étendu semble plus à même de prévoir l'évolution de houles de faible et de moyenne cambrure que le modèle d'ordre  $M = 3$ . Lorsque la cambrure devient importante, le modèle d'ordre  $M = 3$  permet en revanche d'améliorer significativement la précision des champs prédits, ce de manière d'autant plus importante que la distance à la sonde de mesure augmente.

Une validation poussée sur un nombre plus conséquent de cas de champs de vagues générés par le batteur à partir de jeux de phases différents est requise afin de pouvoir juger de manière plus représentative de la qualité de nos résultats. De même, l'influence de paramètres expérimentaux, comme la présence d'un courant de retour lié à la génération de houle en milieu fermé, ou la réflexion des modes propres du bassin qui ne sont pas atténués par la plage absorbante, n'est pas abordée dans le cadre de ce travail et peut être une source d'écart entre les mesures et nos prévisions.



# Conclusion et perspectives

L'objectif de ce travail de thèse était le développement d'un modèle de prévision déterministe assurant un calcul à court terme précis de champs de vagues non-linéaires, afin de pallier le manque de données ponctuelles non accessibles à l'heure actuelle par les modèles de prévision spectraux disponibles. Il s'agissait plus particulièrement d'associer un modèle de propagation de houle tenant compte des divers processus physiques qui interviennent dans l'évolution de la houle, à une méthode d'assimilation efficace des données recueillies sur site par un ou plusieurs capteurs.

## Bilan

La première partie de ce rapport de thèse présente les différents modèles envisagés pour propager la solution initiale reconstruite à partir des données assimilées. Rappelons qu'un modèle donné est à la fois utilisé dans la phase d'assimilation et dans la phase de prévision à proprement parler. Les modèles faiblement non-linéaires classiques au premier et au second ordre ont été considérés, et nous avons également mis au point un modèle dit au second ordre « étendu » combinant les équations classiques de couplage modal d'ordre deux et une équation de dispersion non-linéaire d'ordre trois. Afin de tenir compte des interactions non-linéaires entre les composantes de la houle, dont l'importance croît avec la cambrure de la houle en présence et du temps de propagation, il nous a finalement semblé judicieux d'utiliser un modèle d'ordre élevé, le modèle HOS, qui allie efficacité et précision. Quelques améliorations ont été apportées à la version de la méthode développée par l'équipe HGO depuis 2002 afin d'accroître encore les performances du modèle numérique en termes de temps de calcul. Nous avons notamment sélectionné une méthode d'avance en temps adaptée aux équations d'évolution du HOS, et nous avons limité le nombre de pas de temps rejetés lors des simulations par l'ajout d'un correcteur de type proportionnel intégral.

La seconde partie est dédiée à la définition du domaine de prévision auquel nous avons accès par un calcul déterministe. Elle reprend une étude réalisée par Wu au cours de sa thèse. La recherche préalable de cette zone est primordiale car elle permet de fixer les limites de validité de nos estimations. L'analyse théorique que nous avons réalisée repose sur l'étude simplifiée d'un champ de vagues linéaire caractérisé par un spectre de houle typique, qu'une ou plusieurs sondes viennent mesurer pendant une période de capture donnée.

Nous montrons que la zone de prévision est totalement déterminée par la période de mesure et par les vitesses de groupe de l'onde la plus rapide et de l'onde la plus lente considérées. Le calcul théorique de l'erreur de prévision commise à l'extérieur de ce domaine indique que nos estimations

restent acceptables lorsque l'on se déplace vers les hautes fréquences, dans une certaine limite de validité qui dépend du spectre caractérisant le champ de vagues courant.

Nous mettons finalement en évidence l'influence de certains paramètres sur l'étendue de la zone de prévision, des facteurs « naturels » tels que la bathymétrie, l'intensité et la direction du courant ou encore l'importance des non-linéarités, ou des paramètres fonctionnels pouvant être ajustés par un opérateur afin d'adapter la taille du domaine au type de prévision requis (précision de l'estimation ou étendue spatio-temporelle de la prévision). Quelques moyens simples d'extension du domaine de prévision ont été trouvés comme l'augmentation de la période de mesure et du nombre de composantes de houle prises en compte dans les calculs, et l'utilisation combinée des données de plusieurs sondes. Dans le cas de capteurs embarqués on montre en outre qu'un déplacement opposé au sens de propagation des vagues induit une augmentation de la zone disponible.

Le Chapitre 3 fait un inventaire des différentes méthodes d'optimisation considérées pour ajuster les paramètres du modèle de prévision aux données mesurées in situ lors de la phase d'assimilation. Rappelons qu'il s'agit d'une étape cruciale dans le processus de prévision puisque la qualité du champ de vague reconstruit par l'assimilation de données et initialisant le modèle de houle détermine en grande partie la précision de la prévision future. Les grandeurs optimisées sont les amplitudes et phases des ondes libres caractérisant le champ de vagues.

Dans le cas d'une assimilation de données utilisant le modèle de houle d'ordre deux, nous avons tout d'abord implémenté la méthode de Duncan & Drake permettant de découpler les composantes linéaires des effets du second ordre. Dans le cas plus général d'un modèle de propagation HOS d'ordre  $M$  nous avons envisagé l'utilisation des méthodes d'optimisation classiques basées ou non sur le calcul du gradient de la fonctionnelle à minimiser, soit l'erreur commise sur le signal sonde après calcul. Après diverses considérations liées à la précision et à la vitesse de convergence des différents algorithmes, nous avons écarté les méthodes avec gradient dans le cas d'une assimilation de données d'ordre élevée reposant sur le HOS, et nous sommes limités à l'utilisation des méthodes sans gradient de Rosenbrock (avec mise à jour des directions de recherche de Palmer) et la méthode Simplexe de Nelder & Mead. En ce qui concerne l'assimilation d'ordre deux en revanche, aucune restriction n'a été émise et les méthodes indirectes des Gradients-Conjugués ainsi que la méthode iBFGS de type Quasi-Newton ont également été considérées.

Le dernier chapitre de ce rapport rassemble la totalité des résultats que nous avons obtenus à l'aide des différents modèles de prévision implémentés, à l'ordre un, à l'ordre deux et deux étendu, et à l'ordre HOS  $M = 3$ . Ces modèles ont tout d'abord été testés pour la prévision de champs de vagues bidimensionnels artificiels générés à l'aide des modèles de houle précités, afin de pouvoir les optimiser sur des cas simples de houle. Nous nous sommes ensuite intéressés à la prévision de houles bidimensionnelles expérimentales obtenues lors d'une campagne d'essais réalisée en mai 2009 dans le bassin de traction de l'ECN.

Après avoir sélectionné la méthode de Duncan & Drake pour l'ajustement des ondes libres au second ordre de perturbation, nous mettons en avant l'amélioration apportée par le modèle au second ordre et plus encore par le modèle au second ordre étendu sur la précision des champs prédits par rapport à l'approche linéaire. Le gain en précision apporté par l'ordre deux étendu est particulièrement important dans le cas de champs de vagues de moyenne et de forte cambrure pour lesquels les erreurs de prévision sont environ deux fois plus faibles que les erreurs linéaires, ce pour un surcoût en temps de calcul tout à fait raisonnable. Notons que la précision des champs de vagues est à la fois accrue à l'intérieur de la zone de prévision, mais également en dehors de cette zone. La confrontation du modèle d'ordre deux étendu au modèle de prévision de Wu d'ordre supérieur ou égal à trois est par ailleurs tout à fait encourageante.

En ce qui concerne le modèle de prévision d'ordre  $M = 3$  utilisant le modèle numérique HOS, un effort particulier a été fourni pour optimiser la procédure d'assimilation de données reposant sur la méthode de minimisation de Rosenbrock. Il s'agissait de déterminer le champ d'ordre deux étendu entré comme condition initiale au modèle HOS (que l'on calcule à partir des ondes libres optimisées à l'ordre deux par la procédure de Duncan & Drake) permettant d'obtenir un signal sonde d'ordre  $M = 3$  proche du signal synthétique, et par suite une prévision de qualité.

Il s'avère que l'instant de reconstruction du champ de vagues d'ordre deux étendu, dont l'évolution est simulée par le HOS sur la totalité de la période de mesure pour obtenir le signal sonde, joue un rôle crucial dans la précision du résultat. Un instant optimal minimisant l'erreur d'assimilation a ainsi été défini. Nous avons par ailleurs mis en évidence l'utilité d'une fonction poids dans le calcul de l'erreur d'assimilation sur la qualité des champs prédits.

Finalement, les résultats fournis par le modèle d'ordre  $M = 3$  montrent une diminution des erreurs de prévision particulièrement intéressante aux fortes cambrures où un gain de l'ordre de 40% est obtenu par rapport au modèle d'ordre deux étendu, et de 60% par rapport au modèle linéaire. On constate en outre que l'amélioration de la qualité des champs de vagues calculés est encore plus nette à l'extérieur de la zone de prévision.

Une nouvelle confrontation avec les résultats présentés par Wu dans son rapport de thèse montre l'intérêt de la procédure automatique que nous avons mise en place pour choix de l'intervalle fréquentiel d'étude du signal sonde : les erreurs obtenues sont en effet réduites de 25% par rapport au cas où les bornes fréquentielles fixes préconisées par Wu sont utilisées. On constate au final un écart maximal de 10% aux fortes cambrures des résultats fournis par notre modèle d'ordre  $M = 3$  avec le modèle de Wu qui nous le rappelons est d'ordre non précisé mais supérieur à 3.

La validation expérimentale de nos différents modèles qui clôt le Chapitre 4 montre que le modèle d'ordre deux étendu est bien adapté à la prévision de houles de faible et de moyenne cambrure où le gain en précision est de l'ordre de 20% par rapport à un modèle linéaire ou d'ordre deux classique. Le modèle d'ordre  $M = 3$  est quant à lui plutôt adapté à la prévision de champs de vagues de forte cambrure : les erreurs de prévision sont en effet diminuées de 25% pour les premières sondes de validation, à 50% pour les sondes les plus éloignées de la sonde de mesure par rapport aux approches précitées.

## Perspectives

Dans un premier temps nous souhaitons poursuivre l'amélioration des performances de notre modèle de prévision bidimensionnel basé sur l'utilisation du modèle de houle HOS. En effet, bien que le modèle d'ordre  $M = 3$  soit, dans l'état actuel de nos investigations, le modèle permettant d'obtenir les prévisions les plus précises, ses faibles performances en termes de temps de calcul limitent encore son utilisation.

La prochaine étape de ces travaux de recherche sera donc orientée vers l'amélioration de la vitesse de convergence de la procédure d'assimilation de données qui est majoritairement responsable des forts temps CPU observés. Nous envisageons pour cela la réalisation de nouveaux tests de la méthode de minimisation de Rosenbrock en modifiant l'ordre de traitement des variables de contrôle, et l'utilisation d'un nouvel estimateur de l'erreur d'assimilation en distinguant par exemple l'erreur sur les amplitudes et l'erreur sur les phases ou en prenant en compte des erreurs d'observation et/ou d'ébauche dans le calcul. Une fois le modèle d'ordre  $M = 3$  rendu opérationnel au réel, nous pourrions passer aux ordres HOS supérieurs et améliorer encore la précision des champs prédits.

Une nouvelle campagne d'essais en bassin pourra être réalisée afin de valider les modèles de prévision unidirectionnels sur un grand nombre de cas de champs de vagues (générés par le batteur à

partir de jeux de phases différents), nos premières comparaisons expérimentales n'ayant été réalisées que sur un seul cas de houle. Les effets de paramètres expérimentaux sur la qualité de nos mesures, tels que la présence d'un courant de retour ou le parasitage causé par la réflexion des modes longs et plus particulièrement des modes propres du bassin, pourront également être quantifiés.

Les modèles unidirectionnels pourront finalement être testés au réel à partir de mesures de champs de vagues effectuées par les bouées Datawell récemment acquises par le LMF dans le cadre du projet SEM-REV (Site d'Expérimentation en Mer pour la Récupération de l'Énergie des Vagues) implanté au Croisic. Nous considérerons en première approximation que la houle incidente provenant du large est unidirectionnelle.

Il s'agira ensuite de passer au développement de modèles de prévision multidirectionnels en suivant la même procédure de validation que dans le cas unidirectionnel, sur des champs de vagues synthétiques dans un premier temps, puis expérimentaux et enfin réels. La partie clé de ce travail résidera dans la recherche des spectres directionnels des houles considérées. Quelques méthodes ont d'ailleurs déjà été évoquées au paragraphe 3.2.2.2 du Chapitre 3 afin de déterminer la directionnalité d'un spectre de houle donné.

Notons qu'en ce qui concerne l'aspect de modélisation de la houle à proprement parler, de nouveaux développements du modèle HOS sont en cours au sein de l'équipe HGO pour affiner la représentation de l'état de mer et pourront être inclus dans nos modèles. La thèse d'Yves Pérignon en particulier a pour objectif d'inclure la prise en compte du forçage dû au vent et les effets de dissipation d'énergie dus au déferlement dans l'évolution non-linéaire de l'état de mer.

À terme nous espérons aboutir à la mise en oeuvre effective d'un système de prévision opérationnel, dont les applications pourront être très variées, comme l'adéquation du parcours d'un navire en fonction de critères de mouvements ou d'accélération, qui intéresse particulièrement la DGA pour ses opérations de laravage ou de récupération d'engins, ou la prévision de la houle arrivant sur le site SEM-REV afin d'orienter au mieux les système houlo-moteurs et optimiser leur rendement.

Le modèle de prévision d'ordre deux étendu présente d'ores et déjà les qualités de précision et de temps de calcul requises pour une utilisation pratique, dans le cas de houles faiblement et moyennement cambrées notamment. Il est donc dès à présent possible de coupler ce modèle à un modèle non-linéaire de tenue à la mer afin de pouvoir prévoir les mouvements d'une structure évoluant au large.

# Annexe A

## Solution partielle au second ordre en régime stationnaire

### A.1 Solution pour l'élévation de surface libre

Dans ce modèle, on prend en compte les interactions non-linéaires entre les vagues deux à deux. L'élévation de surface libre est alors décomposée en une élévation linéaire notée  $\eta^{(1)}(\mathbf{x}, t)$  et une élévation second ordre liée au sens des perturbations, notée  $\eta^{(2)}(\mathbf{x}, t)$ .

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \eta^{(2)}(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon^3) \quad (\text{A.1})$$

L'élévation linéaire se calcule à partir des ondes libres où chaque composante de Fourier, de fréquence  $f_n = n\Delta f = \omega_n / 2\pi$  et d'amplitude complexe  $\underline{a}_n$  où  $n \in \mathbb{N}$ , est associée à un nombre d'onde  $\mathbf{k}_n$  par la relation de dispersion linéaire  $\omega_n^2 = g|\mathbf{k}_n| \tan(|\mathbf{k}_n|h)$ .

$$\eta^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left( \sum_{n=1}^N \underline{a}_n \exp(i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x})) \right) = \sum_{n=1}^N |\underline{a}_n| \cos(\xi_n) \quad (\text{A.2})$$

$\varphi_n$  est la phase de l'amplitude complexe  $\underline{a}_n$  et  $\xi_n$  la fonction de phase de l'onde  $n$  telle que :

$$\xi_n = \omega_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \varphi_n \quad (\text{A.3})$$

Dans le cadre de la méthode classique de couplage modal, l'élévation second ordre est reconstruite à partir des amplitudes complexes élémentaires  $\underline{a}_n$  du premier ordre suivant l'expression générale :

$$\eta^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^N \sum_{m=1}^N G_{mn}^{\pm} |\underline{a}_m| |\underline{a}_n^{\pm}| \cos(\xi_m \pm \xi_n) \quad (\text{A.4})$$

où  $\underline{a}_n^+ = \underline{a}_n$ , où  $\underline{a}_n^-$  est le conjugué de  $\underline{a}_n$ , et où  $G_{mn}^{\pm}$  représente les termes de couplage. On distingue dans le calcul quatre élévations :  $\eta_{Cst}(\mathbf{x}, t)$  le terme constant et  $\eta_{Stokes}(\mathbf{x}, t)$  le terme de Stokes, qui représentent les interactions des ondes élémentaires au premier ordre avec elles-mêmes (termes diagonaux de (A.4)), et  $\eta_{Sum}(\mathbf{x}, t)$  et  $\eta_{Diff}(\mathbf{x}, t)$  qui représentent les interactions somme et différence entre

deux ondes différentes.

$$\eta^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \eta_{Cst}(\mathbf{x}, t) + \eta_{Stokes}(\mathbf{x}, t) + \eta_{Sum}(\mathbf{x}, t) + \eta_{Diff}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.5})$$

Les expressions mathématiques des différentes élévations de (A.5) sont :

$$\begin{aligned} \eta_{Cst}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^N G_{nn}^c |a_n|^2 \\ \eta_{Stokes}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^N G_{nn}^s |a_n|^2 \cos(2\xi_n) \\ \eta_{Sum}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^N G_{mn}^\pm |a_m| |a_n| \cos(\xi_m \pm \xi_n) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Les termes de couplage  $G_{mn}$  correspondant sont donnés en profondeur finie  $h$  par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} G_{nn}^c &= -\frac{|\mathbf{k}_n|}{4T_n(1+S_n^2)} \\ G_{nn}^s &= \frac{|\mathbf{k}_n|}{4T_n} \left( 2 + \frac{3}{S_n^2} \right) \\ G_{mn}^\pm &= \frac{(\omega_m + \omega_n)^2}{2g} \mp \frac{\omega_m \omega_n}{2g} \left( 1 \mp \frac{\cos(\xi_m - \xi_n)}{T_m T_n} \right) \left( \frac{(\omega_m \pm \omega_n)^2 + g|\mathbf{k}_m \pm \mathbf{k}_n| \tanh(|\mathbf{k}_m \pm \mathbf{k}_n|h)}{D_{mn}^\pm} \right) \\ &\quad + \frac{(\omega_m \pm \omega_n)}{2g D_{mn}^\pm} \left( \frac{\omega_m^3}{S_m^3} \pm \frac{\omega_n^3}{S_n^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$\begin{aligned} T_m &= \tanh(|\mathbf{k}_m|h) \\ S_m &= \sinh(|\mathbf{k}_m|h) \\ D_{mn}^\pm &= (\omega_m \pm \omega_n)^2 - g|\mathbf{k}_m \pm \mathbf{k}_n| \tanh(|\mathbf{k}_m \pm \mathbf{k}_n|h) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Solution pour le potentiel de surface libre

De la même manière, le potentiel de surface libre peut être décomposé en un potentiel linéaire et un potentiel second ordre

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \phi^{(1)}(\mathbf{x}, z, t) + \phi^{(2)}(\mathbf{x}, z, t) + o(\varepsilon^3) \quad (\text{A.9})$$

Le potentiel linéaire est calculé par la formule (A.10) à partir des amplitudes complexes du potentiel

$\underline{b}_n$  qui peuvent être déterminées à partir des amplitudes linéaires de l'élévation de surface libre d'après la condition dynamique de surface libre au premier ordre :  $\underline{b}_n = (ig / \omega_n) \underline{a}_n$ .

$$\phi^{(1)}(\mathbf{x}, z, t) = \sum_n |\underline{b}_n| \frac{\cosh(|\mathbf{k}_n|(z+h))}{\cosh(|\mathbf{k}_n|h)} \cos(\xi_n) = \sum_n \frac{g}{\omega_n} |\underline{a}_n| \frac{\cosh(|\mathbf{k}_n|(z+h))}{\cosh(|\mathbf{k}_n|h)} \cos(\xi_n + \pi) \quad (\text{A.10})$$

Les interactions entre les ondes au second ordre se regroupent dans trois composantes, un potentiel de Stokes, un potentiel somme et un potentiel différence :

$$\phi^{(2)}(\mathbf{x}, z, t) = \phi_{Stokes}(\mathbf{x}, z, t) + \phi_{Sum}(\mathbf{x}, z, t) + \phi_{Diff}(\mathbf{x}, z, t) \quad (\text{A.11})$$

dont les expressions sont :

$$\begin{aligned} \phi_{Stokes}(\mathbf{x}, z, t) &= \sum_{n=1}^N H_{nn}^s |\underline{a}_n|^2 \frac{\cosh(2|\mathbf{k}_n|(z+h))}{\sinh^4(|\mathbf{k}_n|h)} \cos(2\xi_n + \pi) \\ \phi_{Sum}^{Diff}(\mathbf{x}, z, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^N H_{mn}^{\pm} |\underline{a}_m| |\underline{a}_n| \frac{\cosh(|\mathbf{k}_m \pm \mathbf{k}_n|(z+h))}{\cosh(|\mathbf{k}_m \pm \mathbf{k}_n|h)} \cos(\xi_m \pm \xi_n + \frac{\pi \pm \pi}{2}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

avec :

$$\begin{aligned} H_{nn}^s &= \frac{3\omega_n}{8} \\ H_{mn}^{\pm} &= \mp \frac{\omega_m \omega_n (\omega_m \pm \omega_n)}{2g} \left( 1 \mp \frac{\cos(\xi_m - \xi_n)}{T_m T_n} \right) + \frac{1}{2D_{mn}^{\pm}} \left( \frac{\omega_m^3}{S_m^3} \pm \frac{\omega_n^3}{S_n^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$T_m$ ,  $S_m$  et  $D_{mn}^{\pm}$  sont inchangés par rapport au paragraphe précédent.



# Annexe B

## Intégration analytique de la partie linéaire des conditions de surface libre

### B.1 Réécriture des conditions de surface libre

Les conditions de surface libre (CSL) sont réécrites dans l'espace de Fourier de manière à distinguer les termes linéaires des termes non-linéaires. Nous rappelons que les quantités mises en jeu se décomposent dans l'espace spectral sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \eta(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{\eta}(t) \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}) \\
 \phi^s(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{\phi^s}(t) \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}) \\
 W(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^W(t) \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

On décompose la vitesse verticale à l'ordre HOS  $M$  en une vitesse linéaire notée  $W_M^{lin}$  et une vitesse non-linéaire  $W_M^{non-lin}$  :

$$\begin{aligned}
 W_M(\mathbf{x}, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k(\mathbf{x}, t)}{k!} \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x}, 0, t) \\
 W_M^{lin}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) = \frac{\partial \phi^s}{\partial z}(\mathbf{x}, t) \\
 W_M^{non-lin}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{m=2}^M \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k(\mathbf{x}, t)}{k!} \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x}, 0, t)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

En effectuant une transformée de Fourier rapide des CSL suivant  $x$  puis suivant  $y$ , notée  $FFT_{xy}$ , on obtient les équations d'évolution des amplitudes spectrales :

$$\begin{aligned}\frac{dA_{ij}^\eta}{dt} &= A_{ij}^{W_M^{lin}} + FFT_{xy} \left( W_M^{non-lin} - \nabla \phi^S \cdot \nabla \eta + |\nabla \eta|^2 W_{M-2} \right) \\ \frac{dA_{ij}^{\phi^S}}{dt} &= -gA_{ij}^\eta + FFT_{xy} \left( -\frac{1}{2} |\nabla \phi^S|^2 + \frac{1}{2} \left( (W^2)_M + |\nabla \eta|^2 (W^2)_{M-2} \right) \right)\end{aligned}\quad (B.3)$$

L'amplitude modale de la composante linéaire de la vitesse verticale est obtenue à partir de l'amplitude du potentiel surfacique par dérivation dans l'espace spectral :

$$A_{ij}^{W_M^{lin}} = |\mathbf{k}_{ij}| \tanh(|\mathbf{k}_{ij}|h) A_{ij}^{\phi^S} \quad (B.4)$$

ce qui nous permet d'écrire la décomposition des CSL en une partie linéaire et une partie non-linéaire :

$$\frac{dA_{ij}^\eta}{dt} - |\mathbf{k}_{ij}| \tanh(|\mathbf{k}_{ij}|h) A_{ij}^{\phi^S} = NL_1 \quad (B.5)$$

$$\frac{dA_{ij}^{\phi^S}}{dt} + gA_{ij}^\eta = NL_2 \quad (B.6)$$

où les composantes non-linéaires  $NL_1$  et  $NL_2$  regroupées dans le second membre sont :

$$\begin{aligned}NL_1 &= FFT_{xy} \left( W_M^{non-lin} - \nabla \phi^S \cdot \nabla \eta + |\nabla \eta|^2 W_{M-2} \right) \\ NL_2 &= FFT_{xy} \left( -\frac{1}{2} |\nabla \phi^S|^2 + \frac{1}{2} \left( (W^2)_M + |\nabla \eta|^2 (W^2)_{M-2} \right) \right)\end{aligned}\quad (B.7)$$

On peut également écrire ces équations sous forme matricielle pour plus de simplicité, en remarquant que d'après la relation de dispersion linéaire,  $|\mathbf{k}_{ij}| \tanh(|\mathbf{k}_{ij}|h) = g\omega_{ij}$ , et en multipliant les (B.5) et (B.6) respectivement par  $g$  et  $\omega_{ij}$  :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}(t) + \overline{\mathbf{B}}(t) \cdot \mathbf{A}(t) = \mathbf{N}(t) \quad (B.8)$$

où

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} gA_{ij}^\eta \\ \omega_{ij} A_{ij}^{\phi^S} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ij} \\ \omega_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}(t) = \begin{pmatrix} gNL_1 \\ \omega_{ij} NL_2 \end{pmatrix} \quad (B.9)$$

A cette équation, il faut ajouter la condition initiale :  $\mathbf{A}(t=0) = \mathbf{A}_0$ .

## B.2 Résolution analytique de la partie linéaire

La partie linéaire des équations contenue dans le premier membre de l'équation vectorielle (B.8) est résolue de manière analytique afin d'éviter les instabilités linéaires. Le schéma temporel devient donc linéairement exact et inconditionnellement stable, ce qui présente un atout majeur pour la

robustesse, la rapidité et la précision de la méthode. Il s'agit de résoudre l'équation sans second membre :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}(t) + \overline{\overline{\mathbf{B}}}(t).\mathbf{A}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

La matrice  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}(t)$  étant antisymétrique, elle est diagonalisable et peut être écrite sous la forme du produit :

$$\overline{\overline{\mathbf{B}}}(t) = \overline{\overline{\mathbf{P}}}\overline{\overline{\mathbf{D}}}(t)\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{-1} \quad (\text{B.11})$$

avec :

$$\overline{\overline{\mathbf{P}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{\mathbf{P}}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{\mathbf{D}}}(t) = \begin{pmatrix} i\omega_{ij} & 0 \\ 0 & -i\omega_{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

La solution de l'équation (B.10) s'exprime alors à partir de la condition initiale  $\mathbf{A}_0$  par :

$$\mathbf{A}(t) = \overline{\overline{\mathbf{P}}}\exp(-\overline{\overline{\mathbf{D}}}.t)\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{-1}\mathbf{A}_0 \quad (\text{B.13})$$

où :

$$\overline{\overline{\mathbf{P}}}\exp(-\overline{\overline{\mathbf{D}}}.t)\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_{ij}t) & \sin(\omega_{ij}t) \\ -\sin(\omega_{ij}t) & \cos(\omega_{ij}t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

## B.3 Solution complète

Il nous faut maintenant résoudre l'équation non-linéaire complète (B.8). On utilise pour cela la méthode de variation de la constante. En posant :

$$\mathbf{A}(t) = \overline{\overline{\mathbf{P}}}\exp(-\overline{\overline{\mathbf{D}}}.t)\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{-1}\mathbf{C}(t) \Leftrightarrow \mathbf{C}(t) = \overline{\overline{\mathbf{P}}}\exp(\overline{\overline{\mathbf{D}}}.t)\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{-1}\mathbf{A}(t) \quad (\text{B.15})$$

et en insérant l'expression de  $\mathbf{C}(t)$  dans le système (B.8), on obtient :

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt}(t) = \overline{\overline{\mathbf{P}}}\exp(\overline{\overline{\mathbf{D}}}.t)\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{N}(t) \quad (\text{B.16})$$

Cette nouvelle équation est avancée en temps à l'aide d'une méthode de type Runge-Kutta-Fehlberg (RKF) qui nous donne  $\mathbf{C}(t+\Delta t)$  et l'on revient aux quantités d'intérêt en utilisant l'équation (B.15) pour obtenir l'avance en temps des amplitudes modales de l'élévation et du potentiel :

$$\mathbf{A}(t + \Delta t) = \overline{\mathbf{P}} \exp\left(-\overline{\mathbf{D}}.(t + \Delta t)\right)\overline{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{C}(t + \Delta t) \quad (\text{B.17})$$

L'intégration en temps se poursuit en injectant le vecteur actualisé  $\mathbf{A}(t + \Delta t)$  dans l'équation (B.13) qui sera suivi par une nouvelle intégration de l'équation (B.16) à l'aide de la méthode RKF.

## Annexe C

# Méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5(4)

Il s'agit de résoudre l'équation différentielle suivante :  $dy/dt = f(y,t)$  où la fonction  $f(y,t)$  ainsi que la condition initiale  $y(t=0)$  sont connues. L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 5 suppose que la quantité intégrée  $y_{n+1}$  peut se mettre sous la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b_i k_i + O(h_n^6) \quad (\text{C.1})$$

Par ailleurs, Fehlberg montre qu'il existe un jeu de coefficients  $b_i^*$  tels que la nouvelle estimation  $y_{n+1}^*$  soit d'ordre 4:

$$y_{n+1}^* = y_n^* + h_n \sum_{i=1}^6 b_i^* k_i + O(h_n^5) \quad (\text{C.2})$$

Les fonctions  $k_i$  sont obtenues à partir des expressions :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n, t_n) \\ k_2 &= f(y_n + h a_{21} k_1, t_n + h c_2) \\ k_3 &= f(y_n + h (a_{31} k_1 + a_{32} k_2), t_n + h c_3) \\ k_4 &= f(y_n + h (a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3), t_n + h c_4) \\ k_5 &= f(y_n + h (a_{51} k_1 + a_{52} k_2 + a_{53} k_3 + a_{54} k_4), t_n + h c_5) \\ k_6 &= f(y_n + h (a_{61} k_1 + a_{62} k_2 + a_{63} k_3 + a_{64} k_4 + a_{65} k_5), t_n + h c_6) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

et les coefficients  $a_{ij}$ ,  $c_i$ ,  $b_i$  et  $b_i^*$  de Cash & Karp sont donnés sous forme matricielle par le tableau de Butcher :

ANNEXE C – MÉTHODE DE RÉOLUTION DES EDP DE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG D'ORDRE 5(4)

$c_i$	$a_{ij}$					$b_i$	$b_i^*$
						$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{275648}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$

# Annexe D

## Différentiation et modèle adjoint

On définit l'adjoint d'un opérateur linéaire  $A$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ , l'opérateur  $A^*$  tel que pour tout  $(x, y) \in (\mathcal{E} \times \mathcal{F})$  :

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathcal{F}} = \langle x, A^*y \rangle_{\mathcal{E}} \quad (\text{D.1})$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$  représente le produit scalaire dans l'espace  $\mathcal{G}$ . En dimension finie,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont deux espaces de Hilbert, et l'existence et l'unicité de l'adjoint sont données par le théorème de Rietz.

Dans notre problème, nous considérons la fonction  $C$  qui, au vecteur des variables de contrôle  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$  fait correspondre l'élévation de surface libre reconstruite à l'ordre  $M$  avec le modèle HOS en la position d'une sonde  $s$ .

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^{N_{\text{var}}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\mapsto C(\mathbf{p}) = \eta(x_s, t) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

L'objectif est de calculer le gradient  $\nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\text{ass}}(\mathbf{p}_0)$  de l'erreur d'assimilation par rapport aux paramètres de contrôle, pris en un vecteur de contrôle  $\mathbf{p}_0$ , où  $\varepsilon_{\text{ass}}$  mesure l'écart entre l'élévation de surface libre reconstruite avec le modèle et l'élévation mesurée par la sonde. Dans le cas simplifié où le champ de vagues est mesuré par une seule sonde, notre fonctionnelle peut s'écrire sous la forme du produit scalaire :

$$\varepsilon_{\text{ass}} = \frac{1}{2} \int_0^T \langle C_t(\mathbf{p}) - \tilde{\eta}^0(t), C_t(\mathbf{p}) - \tilde{\eta}^s(t) \rangle dt \quad (\text{D.3})$$

où  $\tilde{\eta}^s(t)$  est l'élévation mesurée en  $x_s$  et où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire dans  $\mathbb{R}$ . Notons que dans le cas d'observations discrètes,  $C$  devient une fonction de  $\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$  dans  $\mathbb{R}^{N_{\text{obs}}}$  où  $N_{\text{obs}}$  est le nombre d'observations discrètes disponibles aux instants  $t_n, n = 1.. N_{\text{obs}}$  :

$$\varepsilon_{\text{ass}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{\text{obs}}} \langle C_n(\mathbf{p}) - \tilde{\eta}^s(t_n), C_n(\mathbf{p}) - \tilde{\eta}^s(t_n) \rangle \quad (\text{D.4})$$

À partir du développement en série de Taylor de  $\varepsilon_{\text{ass}}(\mathbf{p})$  à l'ordre 1 en  $\mathbf{p}_0$ , on déduit qu'une variation d'ordre 1 de  $\varepsilon_{\text{ass}}$  peut s'écrire, à partir du gradient de l'erreur et de la perturbation d'ordre 1 des variables d'optimisation, sous la forme d'un produit scalaire :

$$\varepsilon_{ass}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{ass}(\mathbf{p}_0) + \langle \nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{ass}(\mathbf{p}_0), \delta \mathbf{p} \rangle + o(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|) \quad (\text{D.5})$$

$$\delta \varepsilon_{ass} = \langle \nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{ass}(\mathbf{p}_0), \delta \mathbf{p} \rangle \quad (\text{D.6})$$

En supposant que  $C$  est suffisamment régulière, on approximer sa variation à l'ordre 1 par :

$$\delta C = J(\mathbf{p}_0) \cdot \delta \mathbf{p} \quad (\text{D.7})$$

où  $J$  représente le Jacobien de  $C$  obtenu en dérivant  $C$  par rapport à  $\mathbf{p}$ . Cette équation est appelée équation linéaire tangente ( $J$  représente ici l'opérateur tangent) et décrit l'évolution linéaire des petites perturbations.

En différentiant (D.3) et en introduisant (D.7) dans l'expression trouvée en utilisant les propriétés de symétrie du produit scalaire, on obtient :

$$\delta \varepsilon_{ass} = \int_0^T \langle C_t(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t), J(\mathbf{p}_0) \delta \mathbf{p} \rangle dt \quad (\text{D.8})$$

qui s'écrit également à partir de l'adjoint  $J^*$  de  $J$  en utilisant la définition (D.1):

$$\delta \varepsilon_{ass} = \int_0^T \langle J^*(\mathbf{p}_0)(C_t(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t)), \delta \mathbf{p} \rangle dt \quad (\text{D.9})$$

En identifiant les expressions de  $\delta \varepsilon_{ass}$  (D.6) et (D.9), on en déduit l'expression du gradient recherché :

$$\nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{ass}(\mathbf{p}_0) = \int_0^T J^*(\mathbf{p}_0)(C_t(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t)) dt \quad (\text{D.10})$$

ou dans le cas d'observations discrètes :

$$\nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{ass}(\mathbf{p}_0) = \sum_{n=1}^{N_{obs}} J^*(\mathbf{p}_0)(C_n(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t_n)) \quad (\text{D.11})$$

La différence  $C_t(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t)$  ou  $C_n(\mathbf{p}_0) - \tilde{\eta}^s(t_n)$  dans le cas discret peut être considérée comme un forçage du modèle adjoint.

Nous rappelons que dans le cas où la propagation de la houle est réalisée à l'aide du code HOS,  $C$  est la composée de deux fonctions :

- la reconstruction au second ordre à un instant donné du champ de vagues qui initialise le modèle HOS,
- la simulation numérique de l'évolution de la houle sur toute la période de mesure  $[0, T]$ , au cours de laquelle l'élévation en la position de la sonde est relevée à chaque pas de temps.

La fonction permettant le calcul du champ initial au second ordre pouvant être différenciée analytiquement, seule l'évaluation HOS requiert une approche par méthode adjointe pour l'évaluation du gradient de la fonctionnelle.

# Bibliographie

- [1] Aarts E.H.L. & Korst K., Simulated annealing and Boltzmann machines, John Wiley, 1989.
- [2] Annakov S.Y. & Shrira V.I., Numerical modelling of water-wave evolution based on the Zakharov equation, *J. Fluid Mech.*, 449:341-371, 2001.
- [3] Aragh S., Nwogu O., Lysenga D., Improved Estimation of Ocean Wave Fields from Marine Radars using Data Assimilation Techniques, *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference*, Vancouver, BC, Canada, 2008.
- [4] Armijo L., Minimization of Functions having Lipschitz Continuous First Partial Derivatives, *Pacific Journal of Mathematics*, 16(1):1-3, 1966.
- [5] Barber N.F., The directional resolving power of an array of wave detectors, *Ocean Wave Spectra*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall Inc., 137-150, 1961.
- [6] Bateman W.J.D, Swan C. & Taylor P.H., On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves, *J. Comput. Phys.*, 174:277-305, 2001.
- [7] Bateman W.J.D, Swan C. & Taylor P.H., On the calculation of the water particle kinematics arising in a directionally spread wavefield, *J. Comput. Phys.*, 186:70-92, 2003.
- [8] Belmont M.R., Horwood J.M.K, Thurley R.W.F., Baker J., Filters for linear sea-wave prediction, *Oc. Eng.*, 33:2332-2351, 2006.
- [9] Benett A.F., Thorburn M.A., The generalized inverse of the non-linear quasigeostrophic ocean circulation model, *J. Phys. Ocean.*, 22:213-230, 1992.
- [10] Benoît M. & Goasguen G., Comparative evaluation of directional wave analysis techniques applied to field measurements, *Proc. of the 9<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE*, vol II, 87-94, Brest, June 1999.
- [11] Benoît M. & Teisson C., Laboratory comparison of directional wave measurement systems and analysis techniques, *Proc. of the 24<sup>th</sup> International Offshore on Polar Engineering Conference*, Kobe, ASCE, 42:56, 1994.
- [12] Biggs M.C., Minimizaton algorithms making use of non-quadratic properties of the objective function, *J. of the Institute of Mathematics and its Applications*, 8:315-327, 1971.

- [13] Blondel E., Ducrozet G., Bonnefoy F. & Ferrant P., Deterministic reconstruction and prediction of non-linear wave systems, *Proc. of the 23<sup>rd</sup> Int. Work. on Water Waves and Floating Bodies*, Korea, 2008.
- [14] Blondel E., Ducrozet G., Bonnefoy F. & Ferrant P., Deterministic reconstruction and prediction of a non-linear wave field using probe data, *Proc. of the 27<sup>th</sup> Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Portugal, 2008.
- [15] Blondel E., Ducrozet G., Bonnefoy F. & Ferrant P., Extreme Wave Characterization and Prediction using an Advanced Higher-Order Spectral (HOS) Model, *Proc. of the 27th Symp. On Naval Hydrodynamics*, Korea, 2008.
- [16] Blondel E., Bonnefoy F. & Ferrant P., Deterministic Non-Linear Wave Prediction using Probe Data, *Ocean Engineering* (submitted to *Ocean Engineering Journal*, 2009).
- [17] Boegh E., Thorsen M., Butts M.B., Hansen S., Christiansen J.S., Abrahamsen P., Hasager C.B., Jensen N.O., Keur, P., Van der Refsgaard J.C., Schelde K., Soegaard H., Thomsen A., Incorporating remote sensing data in physically based distributed agro-hydrological modelling, *J. of Hydrology*, 287:279-299, 2004.
- [18] Bonnefoy F., Modélisation expérimentale et numérique des états de mer complexes, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, 2005.
- [19] Boutier F. & Courtier P., Data assimilation concepts and methods, *Metorological Training Course Lecture Series*, March 1999.
- [20] Bredmose H., Deterministic modelling of water waves in the frequency domain, PhD Thesis, Danmarks Tekniske Universitet, Lyngby, Danmark, 2002.
- [21] Brent R.P., Algorithms for minimization without derivatives, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc, Chapter 5, 1973.
- [22] Broyden C.G., The convergence of a class of double-rank minimzation algorithms 2 : The new algorithm, *J. of Math. and its Applications*, 6:222-231, 1970.
- [23] Cañizares R., On the application of data assimilation in regional coastal models, PhD Thesis, TU Delft, 1998.
- [24] Cañizares R., Madsen D., Jensen H., Vested H.J., Developments in operational shelf sea modelling in Danish waters, *Estuar. Coast. Shelf Sc.*, 53(4):595-605, 2001.
- [25] Canuto C., Hussaini M.Y., Quateroni A. & Zhang T.A., Spectral methods in fluid dynamics, *Springer*, New York, États-Unis, 1998.
- [26] Cash J.R. & Karp A.H., *ACM transactions on Mathematical Software*, Vol. 16, 201-222, 1990.
- [27] Cauchy A., Méthode générale pour la résolution de systèmes d'équations simultanées, *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 536-538, 1847.

- 
- [28] Chern M.J., Borthwick A.G.L. & Eatok Taylor R., A pseudospectral  $\sigma$ -transformation model of 2D nonlinear waves, *J. Fluids and Struct.*, 13:607-630, 1999.
- [29] Chern M.J., Borthwick A.G.L. & Eatok Taylor R., Simulation of non-linear free surface motions in a cylindrical domain using a Chebyshev-Fourier spectral collocation method, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 36:465-493, 1999.
- [30] Clamond D. & Grue J., A fast method for fully nonlinear water-waves computations, *J. Fluid Mech.*, 447:337-355, 2001.
- [31] Clamond D. & Fructus D., A note on time integrators in water wave simulations, *Kluwer Academic Publishers*, Pays-Bas, 2006.
- [32] Clarich A. Desideri J.A., Self-adaptive parameterisation for aerodynamic optimum-shape design, Rapport de recherche de l'INRIA, Sophia Antipolis, 23 p, Mars 2002
- [33] Clauss G., Kosleck S., Testa D., Stück R., Forecast of critical wave groups from surface elevation snapshots, *Proc. of the ASME 26<sup>th</sup> Int. Conf. on Offshore Mech. and Artic Eng.*, San Diego, USA, June 2007.
- [34] Clauss G., Kosleck S., Testa D., Hessner K., Forecast of critical situations in short-crested seas, *Proc. of the ASME 26<sup>th</sup> Int. Conf. on Offshore Mech. and Artic Eng.*, Estoril, Portugal, June 2008.
- [35] Collard F., Arddhuin F., Chapron B., Extraction of coastal ocean wave fields from SAR images, *J<sup>al</sup> of Oceanic Eng.*, Vol30, 3:526-533, 2005.
- [36] Conn A., Scheinberg K., and Toint Ph.L., Recent progress in unconstrained nonlinear optimization without derivatives, *Mathematical Programming*, 79 :397-414, 1997.
- [37] Cooley J.W. & Tuckey J.W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comput.*, 19:297-301, 1965.
- [38] Courtier P., Derber J., Errico R., Louis J-F., Vukicevic T., Important litterature on the use of the adjoint variational methods and the Kalman filter in meteorology, *Tellus*, 45A, 342-357, 1987.
- [39] Courtier P., Thépaut J-N., Hollingsworth, A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach, *Q. J. R. Meteorological. Soc.*, 120:1367-1388, 1994.
- [40] Craig W. & Sulem C., Numerical simulation of gravity waves, *J. Comput. Phys.*, 108:73-83, 1993.
- [41] Dalzell J.F., A note on finite depth second order wave-wave interactions, *App. Ocean Res.*, 21:105-111, 1999.
- [42] Davis R.E. & Regier L.A., Methods for estimating directional wave spectra from multi-element arrays, *J. Marins Res.*, 35:453-477, 1977.

- [43] Dai Y.H. & Yuan, Y., Convergence properties of the Fletcher-Reeves method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 16:155-164, 1996.
- [44] Dommermuth D.G., The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme, *Wave Motion*, 32: 307-317, 2000.
- [45] Dommermuth D.G. & Yue D.K.P, A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 184:267:288, 1987.
- [46] De Mey P. & Ménard Y., Synoptic analysis and dynamical adjustment of GEOS 3 and Seasat altimeter Eddy fields in the Northwest Atlantic, *J. Geophys. Res.*, 94:6221-6230, May 1989.
- [47] Dennis J.E. & Torczon V., Direct search methods on parallel machines, *SIAM J. of Opt.*, 4:448-474, 1991.
- [48] Ducrozet G., Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectrale, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.
- [49] Duncan P.E., Drake K.R., A note on simulation and analysis of irregular non-linear waves, *App. Ocean Res.*, 17:1-8, 1995.
- [50] Edgar D.R., Horwood J.M.K, Thurley R., Belmont M.R., The effects of parameters on the maximum prediction time possible in short term forecasting of the sea surface shape, *International Shipbuilding Process*, 47, 451:287-302, 2000.
- [51] Evensen G., Sequential data assimilation with a non-linear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics, *J. Geophys. Res.*, 99(C5), 10:143-162, 1994.
- [52] Fehlberg E., Low-order classical Runge-Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems, NASA Technical Report 315, 1969.
- [53] Fenton J.D. & Rienecker M.M., A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: application to solitary-wave interactions, *J. Fluid Mech.*, 118:441-443, 1982.
- [54] Fletcher R., Practical methods of optimization, (2nd ed.), *Wiley-Interscience*, New York, NY, 1987.
- [55] Fletcher R. & Reeves C.M., Function minimization by conjugate gradients, *Comp. J.*, 7(2):149-154, 1964.
- [56] Fornberg B., A practical guide to pseudospectral methods, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, Royaume-Uni, 1995.
- [57] Forristall G.Z. & Rodenbush G., An empirical model for random directional wave kinematics near free surface, *Proc. Of the 18<sup>th</sup> Annual Offshore Tech. Conf.*, OTC 5097, Houston, TX, 1986.

- 
- [58] François C., Quesney A., Ottlé C., Sequential assimilation of ERS-1 SAR data into a coupled land surface hydrological model using extended Kalman filter, *J. of Hydrometeorology*, 4(2):473-487, 2003.
- [59] Fructus D., Clamond D., Grue J. & Kristiansen Ø., An efficient model for tree-dimensional surface wave simulations - Part I: Free space problem, *J. Comp. Phys.*, 205:665-685, 2005.
- [60] Funke E.R., Mansard E.P.D., On the meaning of phase spectra, *Proc. of the Int. Symp. on Hydrodynamics in Ocean Engineering*, The Norwegian Institute of Technology, Norvège, 49-69, 1981.
- [61] Gauthier P., Operational implementation of variational data assimilation, *Data Assimilation for the Earth System*, NATO Science Series IV, Earth and Environmental Sciences, 26:167-176, 2003.
- [62] Gauthier P., Thepaut J-N., Impact of the digital filter as a weak constraint in the operational 4D-Var assimilation system of Météo-France, *Monthly Weather Review*, 129:2089-2102, 2001.
- [63] Gelb A., *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, MA, 1974.
- [64] Ghil M., Cohn S.E., Tavanzis J., Bube K., Isaacson E., *Dynamical Meteorological: Data Assimilation Methods*, Chapter Application of estimation theory to numerical weather prediction, *Spring Verlag*, 139-224, 1981.
- [65] Ghil M. & Manalotte-Rizzoli P., Data assimilation in meteorology and oceanography, *Adv. In Geophys.*, 33:141-266, 1991.
- [66] Gilbert J-C., *Éléments d'optimisation différentiable, Théorie et algorithmes*, 733p, 2008.
- [67] Goda Y., Simulation in examination of directional resolution, *Directional wave spectra*, Wiegel RL Editor, ASCE, 387-407, 1981.
- [68] Godfarb D., A family of variable metric methods derived by variational means, *Math. of Comp.*, 24:23-26, 1970.
- [69] Goldberg D.E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison Wesley Company Inc., 1989.
- [70] Goldstein A.A., *Constructive Real Analysis*, Harper and Row, London, 1967.
- [71] Gustafsson K., Control theoretic techniques for stepsize selection in explicit Runge-Kutta methods, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Volume 17, Issue 4, 533-554, 1991.
- [72] Hairer E. & Wanner G., *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential Algebraic Problems*, *Series Comp. Mah.* 14, Springer-Verlag, 1996.
- [73] Hasselmann K., On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum, Part 1: General theory, *J. Fluid Mech.*, 12:481-501, 1962.

- [74] Hasselmann S., and Hasselmann K., Computations and parametrizations of the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part I: A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral, *J. Phys. Oceanogr.*, 15:1369-77, 1985.
- [75] Hestenes M.R. & Stiefel E., Method of conjugate gradient for solving linear systems, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 49:409-436, 1952.
- [76] Hoke J.E. & Anthes R.A., The initialisation of numerical models by a dynamical initialization technique, *Mon. Weather Rev.*, 194:1551-1556, 1976.
- [77] Holland J., Adaptation in natural and artificial systems, *University of Michigan Press*, 1975.
- [78] Holthuijsen L.H., Booij N. and Herbers T.H.C., A prediction model for stationary, short-crested waves in shallow water with ambient currents, *Coastal Engineering*, 13:23-54, 1989.
- [79] Holthuijsen L.H., Booij N. and Ris R.C., A spectral wave model for the coastal zone, *Proc. of the 2<sup>nd</sup> Int. Symposium on Ocean Wave Measurement and Analysis*, New Orleans, USA, 630-641, 1993.
- [80] Honorat M., Assimilation de données lagrangiennes par la simulation numérique en hydraulique fluviale, Thèse de Doctorat, INP Grenoble, 2007.
- [81] Hong K., Non linear interactions between directional dual component water waves in deep water, PhD Thesis, Texas A&M Univ., 1993.
- [82] Hooke R. & Jeeves T.A., Direct search solution of numerical and statistical problems, *J. Ass. Comput. Mach.*, 8:212-29, 1961.
- [83] Isobe M., Kondo K., Horikawa K., Extension of MLM for estimating directional wave spectrum, *Proc. of the Symposium on Description and Modelling of Directional Seas*, Paper No. A-6, Technical University of Denmark, 1-15, 1984.
- [84] Johannessen T.B. & Swan C., Nonlinear transient water waves - Part I: A numerical method of computation with comparisons to 2-D laboratory data, *Appl. Ocean Res.*, 19:293-308, 1997.
- [85] Jones R.H., Optimal estimation of initial conditions for numerical predictions, *J. of the Atmos. Sc.*, 22:658-663, 1965.
- [86] Kahma K.K. & Calkoen C.J., Reconciling discrepancies in the observed growth of wind-generated waves, *J. of Phys. Oceanography*, 22:1389-1405, 1992.
- [87] Kalman R.E., A new approach for linear filtering and prediction problems, *J. of Basic Engineering*, 82(D):35-45, 1960.
- [88] Kennedy J. and Eberhart R.C.. Particle swarm optimization. *1995 IEEE International Conference on neural networks*, Perth, Australia, 1995.

- 
- [89] McKinnon K.I.M., Convergence of the Nelder-Mead simplex method to a nonstationary point, *SIAM J. on Opt.*, 9:148-158, 1998.
- [90] Köhl A., Willebrand J., Variational assimilation of SSH variability from TOPEX-POSEIDON and ERS 1 into an eddy-permitting model of the North Atlantic, *J. Geophys. Res.*, 108(C3), 3092, 2003.
- [91] Komen G. J., Hasselmann K. and Hasselmann S., On the existence of a fully developed windsea spectrum, *J. Phys. Oceanogr.*, 14:1271-1285, 1984.
- [92] Komen G.J., et al., Dynamics and Modelling of Ocean Waves, *Cambridge University press*, Cambridge, 532 p, 1994.
- [93] Krasitskii V.P., On reduced Hamiltonian equations in the nonlinear theory of water surface waves, *J. Fluid Mech.*, 272:1-20, 1994.
- [94] Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H. & Wright P.E., Convergence properties of the Nelder & Mead Simplex method in low dimensions, *SIAM J. on Opt.*, 9:112-147, 1998.
- [95] Lauvernet C., Assimilation variationnelle d'observations de télédétection dans les modèles de fonctionnement de la végétation : utilisation du modèle adjoint et prise en compte des contraintes spatiales, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 2006.
- [96] Le Dimet K-X., Une étude générale d'analyse objective et variationnelle des champs météorologiques, Rapport scientifique 28, LAMP, Clermond-Ferrand, 1980.
- [97] Le Dimet F.X. & Blum J., Assimilation de données pour les fluides géophysiques, *Matapli*, 67:33-55, 2002.
- [98] Le Touzé D., Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d'écoulements à surface libre instationnaires, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2003.
- [99] Lewis R.M., Torczon V., & Trosset M.W.. Direct search methods: then and now, *J. of Comp. and App. Math.*, 124(1-2):191-207, 2000.
- [100] Longuet-Higgins M.S., Resonant interactions between two trains of gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 12:321-332, 1962.
- [101] Longuet-Higgins M.S. & Phillips O.M., Phase velocity effects in tertiary wave interactions, *J. Fluid Mech.*, 12:333-336, 1962.
- [102] Longuet-Higgins M.S., Cartwright D.E., & Smith N.D., Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a oating buoy. Ocean Wave Spectra, proceedings of a conference, Easton, Maryland, National Academy of Sciences, Prentice-Hall, 111-136, 1963.
- [103] Lukšan L., Computational experience with improved variable metric updates for unconstrained minimization, *Kybernetika*, 26:415-431, 1990.

- [104] Makin V.K. & Chalikov D.V., Numerical simulation of wind waves, *Meteorologia i Hidrologia*, 10:72-80 (Engl. transl.: *Sov. Met. Hydrol.*, 10:61-68), 1979a.
- [105] Makin V.K. & Chalikov D.V., Numerical modeling of air flow structure above waves, *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Atmos. Ocean. Phys.*, 15, No.3, 292-299 (Engl. transl.: *Izv. Atm. Oc. Phys.*, 15, No.3, 199-204), 1979b.
- [106] Marazzi M. & Nocedal J., Wedge trust region methods for derivative free optimization, *Mathematical Programming*, 91(2) :289.305, 2002.
- [107] Melville W. K., The role of surface-wave breaking in air sea interaction, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 28:279-321, 1996.
- [108] Miles J. W., On the generation of surface waves by shear flows., *J. Fluid Mech.*, 3:185-204, 1957.
- [109] Morris E.L., Zienkiewicz H.K., Pourzanjani M.M.A., Flower JO., Belmont M.R., Techniques for sea-state prediction, *Proc. of the 2<sup>nd</sup> Intern. Conf. on Manoeuvring and Control of Marine Craft*, Southampton, 547-571, July 1992.
- [110] Morris E.L., Zienkiewicz H.K., Belmont M.R., Short-term forecasting of the sea-state, *Intern. Shipbuilding Progress*, Vol. 45, No. 444, 383-400, 1998.
- [111] Naaijen P. & Huijsmans R., Real time wave forecasting for real time ship motion predictions, *Proc. of the ASME 27<sup>th</sup> Int. Conf. on Offshore Mech. and Artic Eng.*, Estoril, Portugal, June 2008.
- [112] Nelder J. & Mead R., A simplex method for function minimization, *The Comp. J.*, 7:308-313, 1965.
- [113] Ngodock H.E., Assimilation de données et analyse de sensibilité – Une application à la circulation océanique, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, et Université de Yanoundé, 2001.
- [114] Nocedal J., Theory of algorithms for unconstrained optimization, *Acta Numerica*, 1:199–242, 1991.
- [115] Nodet M., Modélisation mathématique et assimilation de données lagrangiennes pour l'océanographie, Thèse de Doctorat, Université de Sophia Antipolis, 2005.
- [116] Oren S.S. & Luenberger D.G., Self scaling variable metric (SSVM) algorithms : Part 1 – Criteria and sufficient conditions for scaling a class of algorithms and Part 2 – Implementation and experiments, *Management Science*, 20:845-862 and 863-874, 1974.
- [117] Palmer J.R., An improved procedure for orthogonalising the search vectors in Rosenbrock's and Swann's direct search optimization methods, *The Comp. J.*, 12(1):69-71, 1968.
- [118] Parzen E., Time Series Analysis Papers, Holden-Day, Oakland, CA, 1967.

- 
- [119] Pham D.T., Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly non-linear systems, *Mon. Weather. Rev.*, 129(5), 1194-1207, 2000.
- [120] Pham D.T., Verron J., Roubaud M.C., A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography, *Inverse Problems*, 14:979-997, 1998.
- [121] Phillips N.A., A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, *J. Meteorology*, 14:184-185, 1957.
- [122] Phillips O. M., On the generation of waves by turbulent wind., *J. Fluid Mech.*, 2:415-417, 1957.
- [123] Phillips O.M., On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude, *J. Fluid Mech.*, 9:193-217, 1960.
- [124] Phillips O.M., The dynamics of the upper ocean, *Cambridge University Press*, London, 336p, 1977.
- [125] Pierson W.J.Jr., Neumann G. and James R.W., Practical Methods for Observing and Forecasting Ocean Waves by Means of Spectra and Statistics, *US Navy Hydrographic Office Pub. No. 603*, 1955.
- [126] Pierson W.J.Jr. & Moskowitz L., A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii., *J. Geophys. Res.*, 69(24) :5181-5190, 1964.
- [127] Polak E. & Ribière G., Note sur la convergence des méthodes directionnelles conjuguées, *Revue française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 16 :35-43, 1969.
- [128] Powell M., An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *The Comp. J.*, 7:155-162, 1964.
- [129] Rienecker M.M. & Fenton J.D., A Fourier approximation for steady water waves, *J. Fluid Mech.*, 104:119-137, 1981.
- [130] Robert C., Développement et comparaison de méthodes d'assimilation de données de rang réduit dans un modèle de circulation océanique : application à l'Océan Pacifique Tropical, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 2004.
- [131] Rosenbrock H.H., An automatic method for finding the greatest or least value of a function *Comp. J.*, 3: 175-84, 1960.
- [132] Rossby C-G., Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action, *J. Marine Research*, Vol 2, No1, 38-55, 1939.
- [133] Sasaki Y.K., An objective analysis based on the variational method, *J. Meteo. Soc.*, 36:77-88, 1958.

- [134] Shanno D.F., Conditionning of Quasi-Newton methods for function minimization, *Math. of Comp.*, 24:641-656, 1970.
- [135] Shanno D.F. & Phua K.J., Matrix conditioning and non-linear optimization, *Mathematical Programming*, 14:144-160, 1978.
- [136] Shekarforoush H., Berthod M. & Zerubia J., Direct Search Generalized Simplex Algorithm for Optimizing Non-linear Functions, Rapport de Recherche de l'INRIA No2535, 1995.
- [137] Skandrani C., Kharif C., Poitevin J., Nonlinear evolution of water surface waves: the frequency down shift phenomenon, *Contemporary Mathematics*, 200:157-171, 1996.
- [138] Snyder R.L., Dobson F.W., Elliot J.A. and Long R.B., Array measurement of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 102:1-59, 1981.
- [139] Spell C.A., Zhang J., Randall R.E., Hybrid wave model for unidirectional irregular waves – Part II: Comparison with laboratory measurements, *App. Ocean Res.*, 18:93-110, 1996.
- [140] Spendley W., Hext G.R. & Himsforth F.R., Sequential application of simplex designs in optimization and evolution of any operation. *Technometrics*, 4:441-461, 1962.
- [141] Sverdrup H. U. & Munk W. H., Wind, sea, and swell: theory of relations for forecasting, U. S. Navy Hydrographic Office Technical Report No. 601, 1947.
- [142] Stiassnie M. & Shemer L., On modifications of Zakharov equation for surface gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 143:47-67, 1984.
- [143] Swann W.H., Report on the development of a new direct search method of optimization, ICI Ltd., Central Instrument Laboratory Research, Note 64/3, 1964.
- [144] Tolman H. L., A third generation model for wind on slowly varying, unsteady and inhomogeneous depth and currents, *J. Phys. Oceanogr.*, 21:766-781, 1991.
- [145] Tolman H. L., Validation of WAVEWATCH III version 1.15 for a global domain, NOAA / NWS / NCEP / OMB Technical Note No. 213, 33 p , 2002b.
- [146] Torczon V., Multi-Directional Search: A Direct Search Algorithm for Parallel Machines, PhD thesis, Houston, TX, USA, 1989.
- [147] Torczon V., On the convergence of the multidirectional search algorithms, *SIAM J. of Opt.*, 1:123-145, 1991.
- [148] Torczon V., On the convergence of pattern search algorithms, *SIAM J. of Opt.*, 7:1-25, 1997.
- [149] Verlaan M., Efficient Kalman filtering algorithms for hydrodynamic models, PhD Thesis, TU Delft, 1998.

- 
- [150] Verlaan M., Heeminck A.W., Non-linearity in data assimilation applications: a practical method for analysis, *Mon. Weather. Rev.*, vol. 129, 6 :1578-1589, 2001.
- [151] Versee F., Pham D.T., Verron J., 4D-Var/SEEK : a consistent hybrid variational smoothing data assimilation method, Thème 4 – Simulation et optimisation de systèmes complexes, Projet IDOPT, Rapport de Recherche 3902, 21p, INRIA.
- [152] WAMDI Group (13 authors, including Cardone V.J. and Greenwood J.A.), The WAM model - a third generation ocean wave prediction model, *J. of Phys. Oceanog.*, 18:1775-1810, 1988.
- [153] Watson K.H. & West B.J., A transport equation of nonlinear ocean surface wave interactions, *J. Fluid Mech.*, 70:815-826, 1975.
- [154] West B.J., Brueckner K.A., Janda R.S., Milder M. & Milton R.L., A new numerical method for surface hydrodynamics, *J. Geophys. Res.*, 92:11803-11824, 1987.
- [155] Wheeler J.D., Method for calculating forces produced by irregular waves, *J. Petroleum Tech.*, 119-37, 1970.
- [156] White P.W., Part II: Data assimilation, IFS Documentation CY23r4, ECMWF Research Department, 2002.
- [157] Wienfield, D., Function minimization by interpolation in a data table. *Journal of the Institute of Mathematic Applications*, 12: 339-347, 1973.
- [158] Wolfe P., Convergence Conditions for Ascent Methods, *SIAM Review*, 11:226–235, 1969 and 13 :185–188, 1971.
- [159] Wright M., Direct search methods : Once scorned, now respectable. in *Numerical Analysis* (D.F. Griffiths and G.A.Watson, eds.), Pitman Research Notes in Mathematics, 191–208, Addison Wesley Longman Limited, 1995.
- [160] Wu G., Direct simulation and deterministic prediction of large-scale nonlinear ocean wave-field, PhD Thesis, M.I.T, 2004.
- [161] Yue D.K.P., Wu G., Liu Y., Numerical Reconstruction of Nonlinear Irregular Wave-Field Using Single or Multiple Probe Data, *Proc. of the 15<sup>th</sup> International Workshop on Water Waves & Floating Bodies*, Israel, February 2000.
- [162] Young I.R., On the measurement of directional wave spectra. *Appl.Ocean Res.*, 16:283–294, 1994.
- [163] Zakharov V. E., Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2:190-194, 1968.
- [164] Zhang F., Zhang M., Hansen J., EnKF4dVar : Coupling Ensemble Kalman filter with 4D-Variational data assimilation, *Geophys. Res. Abstracts*, Vol 9, 11525, 2007.

- [165] Zhang J., Hong K., Yue D.K.P., Effects of wavelength ratio on wave modelling, *J. Fluid Mech.*, 248:107-134, 1993.
- [166] Zhang J., Chen L., On interactions between intermediate-depth long waves and deep-water short waves, *Oc. Eng.*, 25, 6:395-423, 1998.
- [167] Zhang J., Lianxiang C., Mao Y., Robert E.R., Hybrid wave model for unidirectional irregular waves – Part I: Theory and numerical scheme, *App. Ocean Res.*, 18:77-92, 1996.
- [168] Zhang, J., Yang, J., Wen, J., Prislun, I., Hong, K., Deterministic wave model for short crested ocean waves – Part I: Theory and numerical scheme, *App. Ocean Res.*, 21:167-188, 1999.
- [169] Zhang, J., Prislun, I., Yang, J., Wen, J., Deterministic wave model for short crested ocean waves – Part II: Comparison with laboratory and field measurements, *App. Ocean Res.*, 21:189-206, 1999.



# RECONSTRUCTION ET PREVISION DETERMINISTE DE HOULE A PARTIR DE DONNEES MESUREES

## Résumé

La prévision des états de mer est un domaine d'une extrême importance pour la planification des opérations en mer, pour des raisons évidentes de sécurité des personnels et des matériels mis en oeuvre. Les modèles de prévision actuels reposent sur une description stochastique de l'état de mer et ne prédisent pas de façon déterministe l'évolution de la houle, mais seulement celle des données spectrales dont on tire des grandeurs statistiques moyennes caractéristiques d'un état de mer. Face au besoin réel de données précises à court terme, un modèle de prévision déterministe a été développé dans le but d'améliorer l'efficacité des opérations offshore requérant une connaissance précise de la houle sur un site d'intérêt.

Après avoir réalisé une étude théorique permettant de déterminer la zone spatio-temporelle de prévision disponible en fonction des caractéristiques du champ de vagues courant et des conditions de mesure, nous avons élaboré deux procédures d'assimilation de données variationnelles afin de combiner au mieux les mesures recueillies sur site et le modèle de propagation de houle choisi. Ce modèle est d'ordre deux dans le cas de houles faiblement à moyennement cambrées, ou d'ordre élevé reposant sur le modèle numérique High-Order Spectral (HOS) pour les houles cambrées non-linéaires.

Les modèles à l'ordre deux étendu et à l'ordre HOS  $M=3$  ont été validés pour la prévision de houles 2D synthétiques et expérimentales : les erreurs moyennes de prévision obtenues sont au moins divisées par deux par rapport à une approche linéaire, l'amélioration étant d'autant plus probante que la cambrure de la houle et l'ordre du modèle sont élevés.

**Mots-clés :** Prévision déterministe, High-Order Spectral, Propagation de houle non-linéaire, Assimilation de données.

# DETERMINISTIC RECONSTRUCTION AND PREDICTION OF OCEAN WAVE FIELDS USING PROBE DATA

## Abstract

Wave prediction is a crucial task for offshore operations from an obvious security point of view regarding working people and technical equipments or structures. The prediction tools available since now are based on a stochastic description of the sea state and are not able to predict deterministically the wave fields evolution. Only averaged statistical data representative of the sea state can be obtained from the known spectral quantities. To face the growing need of accurate short term predictions, a deterministic prediction model has been developed in order to improve the efficiency of the sea operations which require a precise knowledge of the sea surface on a specific region of interest.

After achieving a theoretical study to determine the available time-space predictable domain depending on the current sea state and on the measurement conditions, we created two data assimilation process to combine the measured observations to the physics-based model. This model is a second order model for low to moderate steeped fields, or a high-order model for high crested seas, namely the High-Order Spectral numerical method.

The extended second order model and the third order model using the HOS have been validated for the prediction of 2D synthetic and basin wave fields: the averaged prediction errors we obtain are more than two times less than the errors returned by a linear approach. The improvement is also more important that the steepness and the order of the prediction model are high.

**Key-Words :** Deterministic prediction, High-Order Spectral, Non-linear ocean waves propagation, Data assimilation.