



**HAL**  
open science

# Étude des vagues extrêmes en eaux peu profondes

Julien Chambarel

► **To cite this version:**

Julien Chambarel. Étude des vagues extrêmes en eaux peu profondes. Physique [physics]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2009. Français. NNT: . tel-00448656

**HAL Id: tel-00448656**

**<https://theses.hal.science/tel-00448656>**

Submitted on 19 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE PROVENCE - AIX-MARSEILLE I

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'Université de Provence**

Spécialité : **Mécanique et Energétique**

préparée au laboratoire **Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors  
Equilibre**

dans le cadre de l'École Doctorale **Sciences pour l'ingénieur - Mécanique,  
Physique, Micro et Nanoélectronique**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Julien CHAMBAREL**

le 5 novembre 2009

Titre:

**Etude des vagues extrêmes en eaux peu profondes**

Directeur de thèse: **Christian KHARIF**

### Jury

M. Abid	MCF, Université de Provence	(Examineur)
H. Branger	CR1, CNRS	(Examineur)
P. Ferrant	Pr., Ecole Centrale Nantes	(Président)
C. Kharif	Pr., Ecole Centrale Marseille	(Directeur)
M. Manna	Pr., Université de Montpellier II	(Rapporteur)
E. Pelinovsky	Pr., Nizhny Novgorod State Technical University	(Rapporteur)





UNIVERSITÉ DE PROVENCE - AIX-MARSEILLE I

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'Université de Provence**

Spécialité : **Mécanique et Energétique**

préparée au laboratoire **Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre**

dans le cadre de l'École Doctorale **Sciences pour l'ingénieur - Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Julien CHAMBAREL**

le 5 novembre 2009

Titre:

**Etude des vagues extrêmes en eaux peu profondes**

Directeur de thèse: **Christian KHARIF**

### Jury

M. Abid	MCF, Université de Provence	(Examineur)
H. Branger	CR1, CNRS	(Examineur)
P. Ferrant	Pr., Ecole Centrale Nantes	(Président)
C. Kharif	Pr., Ecole Centrale Marseille	(Directeur)
M. Manna	Pr., Université de Montpellier II	(Rapporteur)
E. Pelinovsky	Pr., Nizhny Novgorod State Technical University	(Rapporteur)



**Extreme waves in shallow water**



**Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre**  
*IRPHE - UMR 6594*  
*Technopôle de Château-Gombert 49, rue Joliot Curie*  
*B.P. 146 13384 Marseille Cedex 13, France*



# Résumé

L'objectif de ces travaux est d'étudier la dynamique de différents types de vagues extrêmes en eau peu profonde et plus particulièrement les tsunamis et les vagues scélérates.

Pour modélisation et analyse, les simulations numériques sont réalisées à l'aide d'une méthode d'intégrales de frontières appelée BIEM (Boundary Integral Equation Method).

Dans un premier temps nous considérons numériquement la dynamique des ondes solitaires, modèles simples pour les vagues de tsunamis dont la phase appelée "runup" sera l'objet d'un développement particulier. Afin de valider le modèle BIEM, nous confrontons les résultats numériques d'une onde solitaire déferlante avec une approche expérimentale. Une méthode de génération numérique de ces ondes est ensuite développée. Enfin une étude complète sur la collision frontale de deux ondes solitaires de Tanaka est effectuée. Un nouveau phénomène est alors découvert, puis exploré, la formation d'un jet résiduel en chute libre apparaissant à partir d'une valeur critique du paramètre de non linéarité  $a/h$ .

Nous considérons ensuite numériquement la génération de vagues scélérates en eau peu profonde par focalisation d'énergie due à la nature dispersive des vagues. Ce travail s'attache à étudier entre autres l'influence du vent sur la dynamique de ces vagues. Le mécanisme d'abri proposé par Jeffreys est modifié par l'introduction d'un seuil de pente pour lequel un décollement aérien au-dessus des vagues apparaît. Ces vagues sont alors amplifiées et leur durée de vie est significativement augmentée. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus en eau profonde.



# Abstract

The main objective of these investigations is to study the dynamics of various types of extreme waves in shallow water, more particularly tsunami waves and freak waves.

For modelling and analyze, a series of numerical simulations is realized using a Boundary Integral Equation Method.

First we consider numerically the dynamics of the solitary waves, simple model to simulate a tsunami wave, where the runup will be more particularly developed. We present some comparisons of a breaking solitary wave on a sloping beach with an experimental approach, to validate the BIEM model. A method of numerical generation of these waves is then developed. Finally a full study on the head-on collision of two Tanaka solitary waves is performed. A new phenomenon is discovered and then presented, the residual falling jet formation appearing from a threshold value of the nonlinearity parameter  $a/h$ .

We consider then numerically the generation of freak waves in shallow water by energy focusing due to the dispersive nature of water waves. This work attempts to study among others the influence of wind on the dynamics of these waves. The sheltering mechanism proposed by Jeffreys is modified by introducing a threshold in local slope above which air flow separation occurs over steep waves crests. These waves are then amplified and their lifetime is significantly increased. These results are similar to those obtained in deep water.



# Remerciements

Une thèse est une expérience unique dans laquelle il nous est donné de côtoyer de nombreuses personnes exceptionnelles. Ainsi, je souhaite remercier celles qui m'ont tant apporté, que ce soit sur le plan professionnel ou sur le plan personnel.

Tout d'abord j'aimerais remercier mon directeur de thèse, Christian Kharif, avec qui j'ai pris un immense plaisir à travailler. Son approche de la physique et sa culture scientifique ont sans aucun doute contribué à l'avancement et à la qualité des travaux présents dans ce manuscrit. Il m'a accordé une grande autonomie qui m'a permis de progresser tout au long de cette thèse, tout en étant très présent dans les périodes de doute qui jonchent le parcours d'un doctorant. Je souhaite donc lui exprimer ma gratitude pour son respect et son soutien durant ces trois années.

La recherche est également un travail d'équipe, ainsi je voudrais remercier les différents membres de l'équipe IOA (Interactions Océan-Atmosphère), et plus particulièrement Hubert Branger et Olivier Kimmoun qui m'ont fait bénéficier de leurs "expériences". Leurs résultats expérimentaux tiennent une place importante dans ce rapport et contribuent certainement à la qualité de celui-ci. Je tiens à remercier tout particulièrement un ancien membre de cette équipe, Julien Touboul, avec qui j'ai eu la chance de partager une année commune de thèse au laboratoire. Les nombreux conseils de ce jeune chercheur déjà chevronné m'ont apporté énormément notamment dans l'apprentissage du numérique.

J'ai eu la chance au cours de cette thèse de côtoyer de grands spécialistes, et plus particulièrement Efim Pelinovsky, sommité dans le domaine des vagues extrêmes. Il me tient à coeur de le remercier pour ses conseils scientifiques, mais aussi pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Je remercie les doctorants qui contribuent à la bonne ambiance régnant dans ce laboratoire, et avec qui l'interaction scientifique permet souvent de résoudre ses problèmes. Je remercie également les techniciens qui nous apportent d'excellentes conditions de travail.

Je remercie d'une façon générale tous les membres du laboratoire IRPHE. Je n'oublie pas de remercier tout particulièrement Lucienne Bazzali, pour son professionnalisme, son apport incontestable au bon fonctionnement du laboratoire, et surtout pour sa bonne humeur et sa gentillesse.

Enfin je souhaite remercier les membres du jury, Malek Abid, Hubert Branger et Pierre Ferrant, d'avoir accepté d'être présents en qualité d'examineurs de ma thèse,

## REMERCIEMENTS

---

Miguel Manna et Efim Pelinovsky, d'avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux. J'ai été extrêmement honoré de la présence de ces éminents experts du domaine. Ma famille et mes amis m'ont été d'un immense soutien. Ils n'ont jamais cessé de m'encourager dans les moments difficiles, et de me féliciter dans les moments de succès, je les en remercie infiniment.

Ma dernière pensée se tourne naturellement vers mon père, André Chambarel, Professeur des Universités. Pour m'avoir transmis sa passion et son savoir-faire, pour m'avoir accompagné tout au long de mon cursus scientifique, ma réussite est aujourd'hui la sienne.

# Table des matières

Résumé . . . . .	vii
Abstract . . . . .	ix
Remerciements . . . . .	xi
Table des matières . . . . .	xiii
Table des figures . . . . .	xv
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Equations générales et méthodes numériques</b>	<b>7</b>
1 Equations générales . . . . .	7
2 Ecoulements potentiels . . . . .	9
2.1 Hypothèses et équations . . . . .	9
2.2 Conditions aux limites . . . . .	9
Condition de surface libre . . . . .	10
Condition de fond . . . . .	11
Conditions latérales . . . . .	11
2.3 Problème à résoudre . . . . .	11
3 Boundary Integral Equation Method . . . . .	12
Formulation en intégrale de frontière . . . . .	12
Modèle numérique . . . . .	13
<b>2 Dynamique des ondes solitaires : "Runup"</b>	<b>17</b>
1 Runup d'une onde solitaire sur une plage inclinée . . . . .	17
1.1 Dispositif expérimental . . . . .	17
1.2 Comparaison de l'expérience avec la simulation numérique . . . . .	18
2 Génération d'une onde solitaire dans un canal numérique . . . . .	21
3 Collision frontale de deux ondes solitaires . . . . .	27
3.1 Chambarel J., Kharif C., Touboul J., Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation, <i>Nonlin.</i> <i>Processes Geophys.</i> , 16, p. 111-122, 2009 . . . . .	29
3.2 Dynamique de la formation du jet résiduel . . . . .	42
Calcul de la pression dans le fluide . . . . .	42
Calcul de la vitesse verticale dans le fluide . . . . .	48
3.3 Instabilité au voisinage du maximum de "runup" . . . . .	52

	Gravité apparente . . . . .	55
	Relation de dispersion des perturbations . . . . .	61
	Perturbation numérique : ensemencement . . . . .	62
4	Conclusion . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Dynamique des vagues extrêmes générées par focalisation dispersive en eau peu profonde avec et sans vent</b>	<b>67</b>
1	Mécanismes de génération d'une vague scélérate . . . . .	67
1.1	Interaction vagues-courant . . . . .	67
1.2	Focalisation dispersive . . . . .	68
1.3	Focalisation géométrique . . . . .	68
1.4	Instabilité modulationnelle . . . . .	69
1.5	Collision de solitons . . . . .	69
2	Focalisation spatio-temporelle . . . . .	72
2.1	Focalisation à partir d'un batteur numérique de type piston . . . . .	72
2.2	Equation de Korteweg de Vries et méthode inverse . . . . .	74
3	L'effet du vent sur la dynamique des vagues . . . . .	76
3.1	Etat de l'art . . . . .	76
3.2	Mécanisme d'abri de Jeffreys modifié . . . . .	77
4	Vagues extrêmes avec et sans vent . . . . .	80
4.1	Chambarel J., Kharif C., Kimmoun O., Focusing wave group in shallow water in the presence of wind, <i>Discrete and Continuous Dynamical System series S</i> , In Press . . . . .	80
4.2	Chambarel J., Kharif C., Kimmoun O., Generation of two- dimensional steep water waves on finite depth with and without wind, <i>Eur. J. Mech. B/ Fluids</i> , submitted . . . . .	91
5	Conclusion . . . . .	123
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>125</b>
	<b>Annexe 1 L'onde solitaire</b>	<b>131</b>
	<b>Annexe 2 Les vagues scélérates</b>	<b>139</b>
	<b>Annexe 3 Problème instationnaire et résolution</b>	<b>141</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>

# Table des figures

1	Photo de Phuket prise pendant le raz de marée du 26 décembre 2004 (gauche) ; Images satellites de Sumatra avant et après le passage du tsunami. . . . .	2
2	Image d'une vague scélérate (BBC) (gauche) ; Dégâts causés par une vague scélérate (droite) . . . . .	3
3	Marée de tempête suite à l'ouragan Katrina en 2005 (gauche) ; Schéma d'une marée de tempête (droite) . . . . .	4
1.1	Géométrie du problème. . . . .	10
2.1	Vue de côté du dispositif expérimental. . . . .	18
2.2	Comparaisons des signaux de sondes à vagues situées à $1.95\text{ m}$ , $6.35\text{ m}$ , $10.55\text{ m}$ et $12.38\text{ m}$ . (— simulation), (o expérience). . . . .	19
2.3	Comparaisons des profils de surfaces libres entre l'expérience et le BIEM. En traits pleins blancs le BIEM, en gris l'expérience. . . . .	20
2.4	Position du batteur numérique piston (gauche) et sa vitesse (droite) en fonction du temps obtenues à l'aide d'une solution de l'équation de KdV. . . . .	22
2.5	Comparaison de profils d'ondes solitaires générées par un batteur numérique piston à l'aide d'une solution de l'équation de KdV. Apparition d'une queue dispersive pour différentes précisions de troncature. . . . .	24
2.6	Comparaison d'une onde solitaire générée par un batteur numérique piston à l'aide d'une solution de l'équation de KdV (ligne pleine) avec une onde solitaire calculée numériquement par la méthode de Tanaka (1986) (ligne en pointillés). . . . .	25
2.7	Evolution à différents instants de la pression (pointillés) et de son gradient (trait plein) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude $a/h = 0.4$ . . . . .	43
2.8	Evolution à différents instants de la pression (pointillés) et de son gradient (trait plein) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude $a/h = 0.5$ . . . . .	44

2.9	Evolution à différents instants de la pression (pointillés) et de son gradient (trait plein) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude $a/h = 0.7$ . . . . .	45
2.10	Evolution à différents instants de la pression (pointillés) et de son gradient (trait plein) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude $a/h = 0.6$ . . . . .	46
2.11	Gradient de pression dans le fluide (pointillés) au centre de la collision de deux solitons d'amplitude $a/h = 0.7$ . . . . .	47
2.12	Evolution à différents instants de la vitesse verticale (pointillés) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude $a/h = 0.4$	49
2.13	Evolution à différents instants de la vitesse verticale (pointillés) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude $a/h = 0.7$	50
2.14	Evolution à différents instants de la vitesse verticale (pointillés) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude $a/h = 0.6$	51
2.15	Apparition d'oscillations de la surface libre au moment du runup maximum pour $a/h = 0.7$ . . . . .	53
2.16	Figure 6 issue de l'article de Longuet-Higgins & Cleaver (1994) . . . . .	54
2.17	Evolution à différents instants de la gravité apparente $g' = a_n - g_n$ (pointillés) à la surface libre pour $a/h = 0.2$ . . . . .	56
2.18	Evolution à différents instants de la gravité apparente $g' = a_n - g_n$ (pointillés) à la surface libre pour $a/h = 0.5$ . . . . .	57
2.19	Evolution à différents instants de la gravité apparente $g' = a_n - g_n$ (pointillés) à la surface libre pour $a/h = 0.7$ . . . . .	58
2.20	Evolution à différents instants de la gravité apparente $g' = a_n - g_n$ (pointillés) à la surface libre pour $a/h = 0.6$ . . . . .	59
2.21	Gravité apparente $g' = a_n - g_n$ (pointillés) à la surface libre à deux instants proches du maximum de runup pour $a/h = 0.7$ . . . . .	60
2.22	Ensemencement de petites perturbations lors de la phase de runup dans le cas d'ondes solitaires d'amplitude $a/h = 0.7$ à différents instants. En pointillés le cas sans perturbation, en trait plein le cas perturbé. . . . .	63
3.1	Evolution aux temps longs de solitons d'enveloppe, conduisant à la formation de vagues scélérates. Figure extraite de Clamond et al. (2006)	71
3.2	Formation d'un point de focalisation dans le plan $(x, t)$ (les lignes caractéristiques sont définies par $dx/dt = C_g$ ). . . . .	73
3.3	Solution de l'équation (3.8) $k = f(k)$ en utilisant la méthode du point fixe. . . . .	74
3.4	Evolution de la gaussienne dans l'équation de KdV. . . . .	75
3.5	Déphasage entre la pression et la surface libre selon Jeffreys ( $\eta$ est la surface libre, $P$ la pression). . . . .	79
3.6	Comparaison de la solution de Tanaka avec celle de KdV. Tanaka en trait plein, KdV en pointillés. . . . .	135

Vagues extrêmes en eaux peu profondes



# Introduction

## Les vagues extrêmes

Il existe plusieurs types de vagues extrêmes, les plus connues sont les tsunamis. En effet depuis le tsunami géant qui est survenu dans l'océan Indien le 26 décembre 2004, ce phénomène suscite un intérêt particulier. Mais les vagues dites scélérates ainsi que les marées de tempêtes sont aussi des vagues extrêmes, certes moins médiatisées, mais tout aussi meurtrières.

## Les tsunamis

Le tsunami est une onde océanique due au déplacement brutal d'une grande masse d'eau, qui se propage et provoque un raz de marée, (le terme tsunami signifiant "vague de port" en japonais). Ce phénomène se décompose en trois phases, (i) la génération, (ii) la propagation et (iii) l'amplification et l'inondation (runup en anglais). Un tsunami n'est pas en général créé par le vent comme la houle, mais par d'autres mécanismes naturels de grande ampleur tels les séismes, les glissements de terrain sous-marins ou sub-aériens, les éruptions volcaniques ou encore la chute d'astéroïdes. Il existe cependant des météo tsunamis, phénomènes de seiche dus à de fortes perturbations atmosphériques.

Les tsunamis sont généralement engendrés par des tremblements de terre sous-marins puissants (magnitude  $> 7$ ) et très peu profonds (profondeur  $< 50$  km). L'intensité du tsunami dépendra à la fois de la magnitude du séisme et de la géométrie du fond marin.

Quasi imperceptible au large, pas plus haut que les vagues de la houle, le tsunami, qui, là où les eaux sont profondes, voyage à la vitesse d'un avion (sa vitesse est généralement comprise entre 500 et 700 km/h mais peut excéder 800 km/h), peut atteindre plusieurs dizaines de mètres de hauteur à l'approche des côtes. Il peut avoir une longueur d'onde de plusieurs centaines de kilomètres.

Si les tsunamis en Métropole et dans les DOM-TOM de l'océan Atlantique ou de l'océan Indien sont assez rares, ils ont eu néanmoins des effets catastrophiques dans le passé. 24 événements sont recensés sur nos côtes depuis 4000 ans. Le tsunami de Nice en 1979 (3 mètres de haut) a provoqué la mort de plusieurs personnes. Au moins 12 tsunamis sont connus pour la Guadeloupe, dont le dernier date du 21 novembre

2004 (1 mètre de haut). Mais le tsunami du 26 décembre 2004 dans l'océan Indien est sans doute le plus meurtrier de l'Histoire avec plus de 285 000 morts. Il a pour origine un séisme de magnitude 9.3 au large de l'Indonésie. L'onde a traversé l'océan d'Est en Ouest allant jusqu'à inonder les côtes africaines. Le niveau de toutes les mers du monde en a été modifié. Depuis cette évènement catastrophique, les pays situés en bordure d'océans et de mers sont conduits à évaluer les risques d'une telle onde.

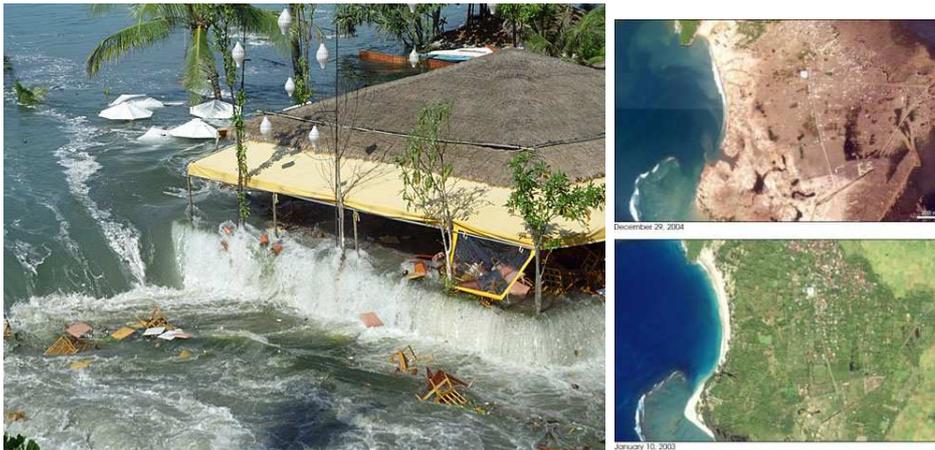


FIG. 1 – Photo de Phuket prise pendant le raz de marée du 26 décembre 2004 (gauche) ; Images satellites de Sumatra avant et après le passage du tsunami.

## Les vagues scélérates

Il existe aussi un autre type de vagues pouvant être meurtrières, ce sont les vagues scélérates ("Rogue" ou "Freak" wave en anglais). Ce sont des vagues océaniques très hautes, longtemps considérées comme très rares, voire légendaires. Nous savons aujourd'hui qu'elles apparaissent pratiquement au cours de toutes les fortes tempêtes. Les vagues scélérates semblaient appartenir au "folklore" maritime pendant des siècles. Mais de multiples témoignages de marins faisant allusion à des murs d'eau venus de nulle part sont venus confirmer leur existence.

On parle de vagues scélérates pour des hauteurs crête-creux de plus de 2 fois la hauteur significative des vagues d'un état de mer donné. Elles atteignent parfois plus de 30 mètres et exercent des pressions gigantesques. Nombreux sont les accidents recensés au cours de ces dernières années. Parmi les faits de vagues scélérates, nous pouvons citer quelques exemples.

En janvier 1995, la plate-forme pétrolière de Draupner en mer du Nord a mesuré une vague de 25.6 mètres alors que la hauteur significative de l'eau était de 10.8 mètres.

En février 1995, le paquebot Queen Elizabeth II a rencontré une vague scélérate de 29 mètres de haut au cours d'un ouragan au large de Terre-Neuve dans l'Atlantique nord. Le Commandant Ronald Warwick, en charge à l'époque du paquebot, l'a décrite comme un immense mur d'eau : " On aurait dit que nous foncions tout droit dans les falaises blanches de Douvres ".

En février 2001, deux paquebots de croisière construits pour affronter les mers polaires, le Bremen et le Caledonian Star (de 89 m de long), ont été très gravement endommagés. Les vitres de leurs ponts supérieurs ont explosé sous l'effet d'une vague scélérate de 30 mètres de haut dans l'Atlantique sud ; le premier bateau s'est retrouvé à la dérive pendant deux heures à cause de l'avarie momentanée de son système de navigation et de propulsion.

Différents phénomènes peuvent être à l'origine d'une vague scélérate. Elle peut être issue d'une interaction entre les vagues et un courant, comme c'est souvent le cas le long des côtes sud-africaines avec le courant des Aiguilles. Elle peut aussi être générée par focalisation spatio-temporelle ou par focalisation géométrique (cas tridimensionnel). Nous pouvons aussi citer les mers croisées, ou les mers de vent associées à la houle. Enfin l'instabilité modulationnelle (instabilité de Benjamin-Feir : Benjamin & Feir (1967)), ou encore la collision de deux ondes solitaires sont responsables de la formation de ce type de vagues.



FIG. 2 – Image d'une vague scélérate (BBC) (gauche) ; Dégâts causés par une vague scélérate (droite)

## Les marées de tempête

Une onde de tempête ou marée de tempête est une brusque inondation causée par le vent et les basses pressions ; elle est souvent associée aux ouragans, aux cyclones ou aux typhons. L'onde de tempête est l'aspect le plus meurtrier d'un ouragan, responsable de 90 % des décès qui en découlent.

Les vents violents qui accompagnent un ouragan soufflent sur la surface de la mer autour du coeur cyclonique créant ainsi un courant très fort par frottement,

normalement compensé en profondeur par un contre-courant, au-delà de 50 à 60 mètres de fond. Lorsque le cyclone arrive au niveau du plateau continental ou tout près des terres, ce contre-courant n'existe plus, seul le courant de surface reste fortement établi. Il y a donc une poussée mécanique naturelle de l'eau de surface et son accumulation vers les rivages est d'autant plus importante que le plateau continental est marqué. Ces vents poussent l'eau rapidement, provoquant la formation d'une énorme vague. Dans le même temps, la dépression causée par le cyclone provoque la hausse du niveau de l'eau dans les zones de plus basse pression et des puits dans les zones de plus haute pression. C'est l'intumescence ou effet de baromètre inversé. Ceci accentue la vague géante générée par le vent. La "surcote" est maximale dans la partie où tous les effets se conjuguent. Ce "pic" peut durer quelques dizaines de minutes, deux heures au maximum.

Dans les zones où existe un grand plateau continental, c'est-à-dire où la mer reste peu profonde sur des kilomètres au large, les cyclones intenses peuvent provoquer une marée de tempête de 5, 6, voire 7 mètres. Et les victimes se comptent alors par milliers. Ce fut le cas en Chine en 1881, au Bangladesh en 1970, lorsque des typhons ont tué à chaque fois plus de 300 000 personnes surprises par la montée subite des eaux.

La plus forte marée de tempête signalée s'est produite en 1899 avec le cyclone Mahina qui frappa Bathurst Bay, en Australie, avec une marée de 13 mètres. La plus importante aux États-Unis fut de plus de 10 mètres avec l'ouragan Katrina en 2005 dans la baie de Saint-Louis.

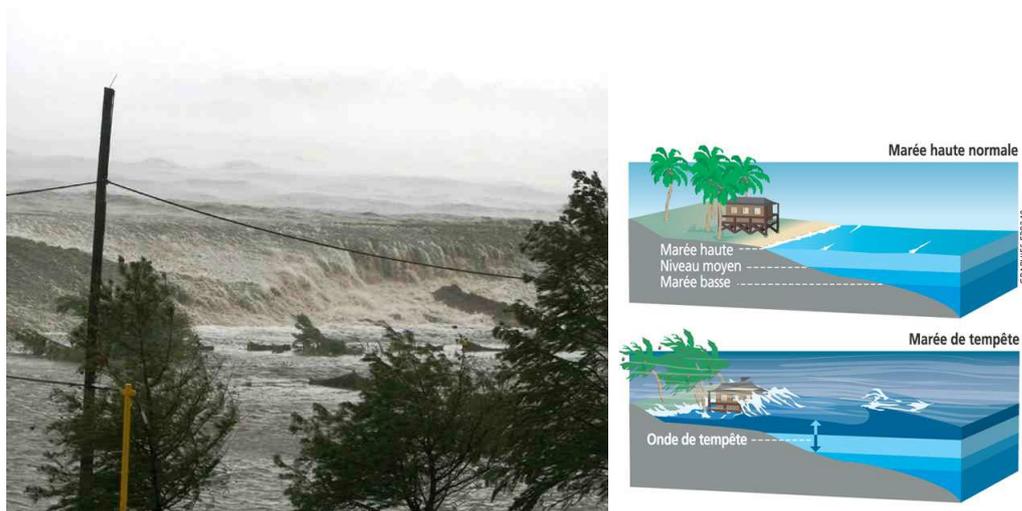


FIG. 3 – Marée de tempête suite à l'ouragan Katrina en 2005 (gauche); Schéma d'une marée de tempête (droite)

Les vagues extrêmes sont donc des vagues destructrices et meurtrières. Dans cette logique, il est nécessaire d'essayer de mieux comprendre leur dynamique, afin de mieux les prévoir. Les modes de génération de ce type de vagues sont aujourd'hui globalement compris. Il en est de même pour leur propagation. C'est la phase d'inondation appelée "runup" en anglais qui reste encore un sujet largement ouvert, ainsi que la phase d'interaction avec des structures, ou encore le déferlement. Les travaux présentés ici porteront plus précisément sur les tsunamis et les vagues scélérates; ils se basent sur une approche numérique des problèmes dus à ces vagues extrêmes.

La première partie du manuscrit consiste à présenter l'outil numérique qui nous a permis de simuler les vagues considérées. Cet outil se base sur la théorie potentielle. Il s'agit d'une méthode à intégrales de frontière appelée Boundary Integral Equation Method (BIEM).

La seconde partie du manuscrit présente des travaux réalisés sur l'étude de la dynamique des ondes solitaires. Les ondes solitaires sont en effet le plus souvent utilisées pour modéliser une vague de tsunami. Nous proposons une étude sur le phénomène de "runup" d'une onde solitaire. Nous commenterons donc des simulations consistant à modéliser le déferlement d'une vague de tsunami sur une plage inclinée, ainsi que des comparaisons effectuées dans ce cas avec des expériences. Cette partie présente également une étude sur la collision de deux ondes solitaires, applicable aussi bien aux vagues de tsunami qu'aux vagues scélérates. La collision de deux ondes solitaires dans le cas symétrique est en effet équivalente à la collision d'une seule onde sur un mur vertical (cas d'un tsunami). Nous avons vu également que la collision de deux ondes solitaires pouvait être à l'origine de la formation d'une vague scélérate. Ces travaux complètent l'étude plus générale de l'interaction d'ondes solitaires de grandes amplitudes. L'étude de la collision de deux ondes solitaires est en effet un sujet que de nombreux auteurs ont traité. Cependant ils n'ont jamais traité dans leur intégralité les cas extrêmes. Nous complétons donc ici les études précédentes et allons au-delà de ce qui a été réalisé sur ce sujet.

Une troisième partie est, elle, consacrée à l'étude des vagues extrêmes, pouvant être des vagues scélérates, générées par focalisation dispersive. Plusieurs méthodes de génération de telles vagues en eau peu profonde sont présentées. De nombreuses études sur ce sujet ont certes déjà été menées, mais essentiellement en eau profonde ou intermédiaire. Ici nous insistons sur le caractère "eau peu profonde", c'est-à-dire nous traitons d'évènements se produisant près des côtes. Nous nous intéressons entre autres à l'interaction entre le vent et les vagues extrêmes, mais aussi à l'impact de ce type de vague sur certaines structures.



# Chapitre 1

## Equations générales et méthodes numériques

### 1 Equations générales

Dans cette section, nous rappellerons les bases de la mécanique des fluides. Ainsi nous partirons des équations les plus générales puis nous reprendrons les hypothèses qui nous permettent de simplifier ces équations.

Mécanique des fluides signifie "étude du mouvement des fluides". En mécanique des fluides, l'approche requiert un caractère macroscopique (un petit élément de volume contient un nombre infinitésimal de molécules), le fluide est alors assimilé à un milieu continu.

La description mathématique de l'état d'un fluide en mouvement se fait au moyen de fonctions déterminant la distribution de la vitesse du fluide  $\mathbf{v}$ , et de deux quelconques de ses grandeurs thermodynamiques, habituellement la pression  $p$  et la densité  $\rho$  du fluide. Ces cinq variables (trois composantes pour la vitesse) déterminent complètement l'état d'un fluide en mouvement.

Nous commencerons par écrire l'équation exprimant la loi de conservation de la matière :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

qui est l'équation de continuité.  $t$  représente le temps,  $\rho$  la densité du fluide et  $\mathbf{v}$  sa vitesse.

Ensuite, nous écrivons l'équation décrivant le mouvement d'un fluide visqueux :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right] = -\mathbf{grad} p - \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \mathbf{grad} \cdot \text{div} \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

où  $\mu$  et  $\zeta$  sont les coefficients de viscosité ( $\mu$  viscosité dynamique),  $\mathbf{g}$  représente la force de gravité et  $p$  la pression.  $\Delta = \text{div}(\mathbf{grad})$  est l'opérateur Laplacien.

Si l'on considère le fluide comme incompressible,  $\rho$  est alors constant et ces équations deviennent :

$$\mathit{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p - \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1.4)$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique. Cette équation 1.4 est appelée équation de Navier-Stokes.

## 2 Ecoulements potentiels

### 2.1 Hypothèses et équations

Nous supposons maintenant que le fluide est soumis à un mouvement irrotationnel, qu'il est non-visqueux, en plus de l'hypothèse d'incompressibilité. Sous ces conditions la vitesse du fluide est un gradient car son rotationnel est nul, c'est-à-dire qu'elle dérive d'un potentiel scalaire  $\phi$  :

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi. \quad (1.5)$$

En introduisant ce potentiel dans l'équation 1.3, on constate que celui-ci est régi par l'équation de Laplace :

$$\Delta \phi = 0. \quad (1.6)$$

Sous les mêmes hypothèses, les équations du mouvement se réécrivent :

$$\frac{\partial(\mathbf{grad} \phi)}{\partial t} + (\mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad})(\mathbf{grad} \phi) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p - \mathbf{g}. \quad (1.7)$$

Elles peuvent être intégrées en espace :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \phi)^2 = -\frac{p}{\rho} - gz + C(t), \quad (1.8)$$

où  $z$  est la coordonnée verticale du problème,  $C(t)$  désigne une constante spatiale d'intégration. Cette constante d'intégration peut être incluse dans le potentiel des vitesses. Cette équation est l'équation de Bernoulli.

Nous obtenons ainsi les équations de la mécanique des fluides en théorie potentielle.

L'équation de Laplace doit être résolue à chaque instant dans le domaine fluide. Il nous faut désormais définir la géométrie du problème et les conditions aux limites. La dépendance en temps est introduite via les conditions aux limites.

### 2.2 Conditions aux limites

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, nous devons définir des conditions aux limites dans le domaine fluide. Le domaine considéré comprend la surface libre, deux conditions latérales et une condition de fond (figure 1.1). Les conditions aux limites doivent être fixées sur chacune de ces surfaces. Plusieurs conditions peuvent être utilisées en fonction du problème physique considéré.

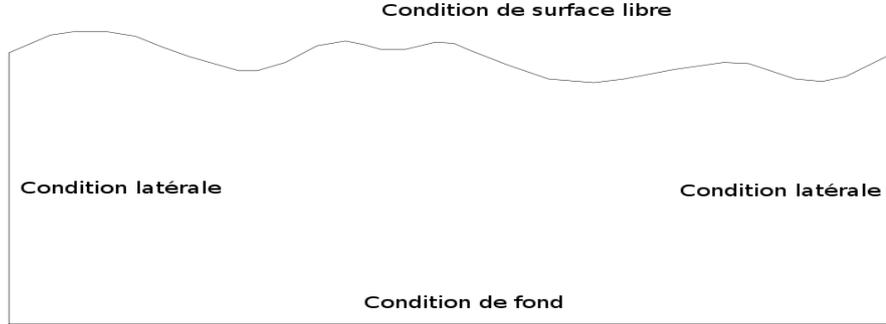


FIG. 1.1 – Géométrie du problème.

### Condition de surface libre

La condition de surface libre est d'une grande importance pour les problèmes de vagues. A partir de l'équation de Bernoulli et de la continuité de la pression à l'interface, on peut obtenir la condition suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \phi)^2 + g\eta = -\frac{p_a}{\rho} \quad \text{sur } z = \eta(x, t), \quad (1.9)$$

où  $p_a$  est la pression atmosphérique,  $\eta$  l'élévation de la surface libre et  $x$  et  $z$  les coordonnées spatiales respectivement horizontale et verticale. Cette condition est connue comme étant la condition dynamique. Notons qu'en présence de tension de surface, cette condition dynamique se réécrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \phi)^2 + g\eta - \frac{\sigma}{R} = -\frac{p_a}{\rho} \quad \text{sur } z = \eta(x, t), \quad (1.10)$$

avec  $\sigma$  le coefficient de tension de surface et  $R$  le rayon de courbure de la surface libre.

La position de la surface libre n'est pas connue a priori, une seconde condition de surface libre est donc nécessaire. La condition cinématique veut que chaque particule de la surface libre reste à la surface libre. Cette condition correspond à une condition d'imperméabilité. Le problème cinématique peut s'écrire du point de vue eulérien ou lagrangien. Dans la description eulérienne, l'évolution de la surface libre est donnée par l'équation suivante

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{sur } z = \eta(x, t), \quad (1.11)$$

tandis que dans la description lagrangienne, la condition cinématique s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1.12)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.13)$$

où  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad}$  est la dérivée particulaire. Ces formulations sont équivalentes, même si elles engendrent des propriétés différentes pour la méthode.

### Condition de fond

En fonction du problème à résoudre, nous pouvons considérer deux cas pour la condition de fond. En profondeur infinie la condition de fond est

$$\mathbf{grad} \phi \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad z \rightarrow -\infty, \quad (1.14)$$

alors qu'en profondeur finie elle s'écrit

$$\mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad z = -h(x), \quad (1.15)$$

où  $z = -h(x)$  est l'équation de fond, et  $\mathbf{n}$  et le vecteur unitaire normal extérieur au domaine.

### Conditions latérales

Le choix de la condition latérale dépend également du problème physique considéré. Nous considérons ici une géométrie fermée où les surfaces latérales sont traitées comme des parois solides et imperméables. La condition d'imperméabilité s'écrit

$$\mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{V}$  représente la vitesse du mur. Cette vitesse de mur peut être prise égale à 0 dans le cas de parois immobiles, ou peut obéir à une loi temporelle pour simuler un batteur.

## 2.3 Problème à résoudre

Nous considérons donc un fluide incompressible et non-visqueux, et un écoulement irrotationnel à surface libre. Le système dynamique à résoudre est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{pour } h < z \leq \eta(x, t) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 & \text{sur } z = \eta(x, t), \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \phi)^2 + g\eta = -\frac{p_a}{\rho} & \text{sur } z = \eta(x, t), \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} & \text{sur les parois solides.} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

### 3 Boundary Integral Equation Method

Cette section décrit une méthode numérique initialement introduite par Longuet-Higgins & Cokelet (1976) pour résoudre le système vu précédemment. Cette méthode a été utilisée par Vinje & Brevig (1981) pour simuler le problème du déferlement. La méthode BIEM est une méthode dite "Mixed Euler-Lagrange", permettant une description lagrangienne de la surface libre. La surface libre, correspondant à une condition aux limites de Dirichlet, sera dénotée  $\partial\Omega_D$ . Les parois solides correspondent à une condition de Neumann et seront dénotées  $\partial\Omega_N$ .

#### Formulation en intégrale de frontière

Le problème décrit précédemment peut se réécrire comme le système

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans le domaine fluide } \Omega, \\ \phi & \text{connu sur } \partial\Omega_D, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} & \text{connu sur } \partial\Omega_N, \end{cases} \quad (1.18)$$

à chaque pas de temps. L'équation de Laplace, grâce au théorème de Stokes, peut être ramenée à une intégrale de frontière. L'intégrale obtenue est connue sous le nom de seconde identité de Green

$$\int_{\partial\Omega} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl = c(Q)\phi(Q), \quad (1.19)$$

pour les points  $P$  et  $Q$  appartenant au domaine  $\Omega$ . Ici (en 2D) la fonction de Green est définie par

$$G(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \ln(|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|) \quad (1.20)$$

et le vecteur normal  $\mathbf{n}$  est dirigé vers l'extérieur du domaine fluide. L'angle  $c(Q)$  est défini comme

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } Q \text{ est hors du domaine,} \\ \alpha & \text{si } Q \text{ est sur la frontière du domaine,} \\ -2\pi & \text{si } Q \text{ est à l'intérieur du domaine,} \end{cases} \quad (1.21)$$

pour le cas bidimensionnel, et où  $\alpha$  est l'angle intérieur relatif au domaine fluide au point  $Q$ . En appliquant cette représentation à tous les points  $Q$  le long des frontières du domaine fluide  $\partial\Omega$ , nous obtenons les équations nécessaires à la résolution du problème. Il en résulte le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \alpha\phi(Q) - \int_{\partial\Omega_D} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl + \int_{\partial\Omega_N} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl &= \\ \int_{\partial\Omega_N} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl - \int_{\partial\Omega_D} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl & \end{aligned} \quad (1.22)$$

lorsque  $Q$  appartient à la frontière de Dirichlet  $\partial\Omega_D$ , et

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_D} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl - \int_{\partial\Omega_N} \frac{\partial \phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl = & \quad (1.23) \\ \alpha \phi(Q) - \int_{\partial\Omega_N} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl + \int_{\partial\Omega_D} \frac{\partial \phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl \end{aligned}$$

lorsque  $Q$  appartient à la frontière de Neumann  $\partial\Omega_N$ . Les inconnues sont  $\partial\phi/\partial n$  sur  $\partial\Omega_D$  et  $\phi$  sur  $\partial\Omega_N$ . Pour résoudre numériquement ce système, un système d'équations algébriques pour un nombre fini d'inconnues est dérivé en discrétisant les frontières du domaine.

### Modèle numérique

La méthode utilisée ici est similaire à celle développée par Greco (2001) et Faltinsen et al. (2002). Les équations 1.22 et 1.23 sont résolues numériquement. Les frontières du domaine sont discrétisées en introduisant  $N_N$  éléments sur la frontière de Neumann, et  $N_D$  sur la frontière de Dirichlet. Les équations intégrales de frontières 1.22 et 1.23 sont alors discrétisées aux extrémités de ces éléments. Les intégrales sont approximées par des intégrales le long de chaque élément où la variation de  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial n$  est supposée linéaire. Nous obtenons donc pour chaque point  $i$  de la frontière de Dirichlet

$$\begin{aligned} \alpha \phi_i - \sum_{j=1}^{N_D} \int_j \phi \frac{\partial G}{\partial n}(i, j) ds + \sum_{j=1}^{N_N} \int_j \frac{\partial \phi}{\partial n} G(i, j) ds = & \quad (1.24) \\ \sum_{j=1}^{N_N} \int_j \phi \frac{\partial G}{\partial n}(i, j) ds - \sum_{j=1}^{N_D} \int_j \frac{\partial \phi}{\partial n} G(i, j) ds \end{aligned}$$

et pour chaque point  $i$  de la frontière de Neumann

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_D} \int_j \phi \frac{\partial G}{\partial n}(i, j) ds - \sum_{j=1}^{N_N} \int_j \frac{\partial \phi}{\partial n} G(i, j) ds = & \quad (1.25) \\ \alpha \phi_i - \sum_{j=1}^{N_N} \int_j \phi \frac{\partial G}{\partial n}(i, j) ds + \sum_{j=1}^{N_D} \int_j \frac{\partial \phi}{\partial n} G(i, j) ds. \end{aligned}$$

En définissant les coordonnées locales d'un élément d'intégration  $(\xi, \vartheta)$ , la fonction de Green et sa dérivée normale deviennent

$$G(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \ln(\sqrt{\xi^2 + \vartheta^2}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{\vartheta}{\xi^2 + \vartheta^2}. \quad (1.26)$$

Alors les équations 1.24 et 1.25 peuvent se réécrire respectivement

$$\begin{aligned}
 \alpha\phi_i &= \sum_{j=1}^{N_D} \left\{ \phi_{j+1} \frac{I_4 - \xi_j I_2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \phi_j \frac{I_2 \xi_{j+1} - I_4}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} + \sum_{j=1}^{N_N} \left\{ \psi_{j+1} \frac{I_3 - \xi_j I_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \psi_j \frac{I_1 \xi_{j+1} - I_3}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^{N_N} \left\{ \phi_{j+1} \frac{I_4 - \xi_j I_2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \phi_j \frac{I_2 \xi_{j+1} - I_4}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} - \sum_{j=1}^{N_D} \left\{ \psi_{j+1} \frac{I_3 - \xi_j I_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \psi_j \frac{I_1 \xi_{j+1} - I_3}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\},
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

et

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{N_D} \left\{ \phi_{j+1} \frac{I_4 - \xi_j I_2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \phi_j \frac{I_2 \xi_{j+1} - I_4}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} - \sum_{j=1}^{N_N} \left\{ \psi_{j+1} \frac{I_3 - \xi_j I_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \psi_j \frac{I_1 \xi_{j+1} - I_3}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} \\
 = \alpha\phi_i &= \sum_{j=1}^{N_N} \left\{ \phi_{j+1} \frac{I_4 - \xi_j I_2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \phi_j \frac{I_2 \xi_{j+1} - I_4}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} + \sum_{j=1}^{N_D} \left\{ \psi_{j+1} \frac{I_3 - \xi_j I_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \psi_j \frac{I_1 \xi_{j+1} - I_3}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

où  $\psi = \partial\phi/\partial n$ , et  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  sont

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \ln(\sqrt{x^2 + \vartheta^2}) dx \\
 &= \frac{1}{2} \xi_2 \ln(\xi_2^2 + \vartheta^2) - \xi_2 + \vartheta \arctan\left(\frac{\xi_2}{\vartheta}\right) - \\
 &\quad \frac{1}{2} \xi_1 \ln(\xi_1^2 + \vartheta^2) + \xi_1 - \vartheta \arctan\left(\frac{\xi_1}{\vartheta}\right) \\
 I_2 &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\vartheta}{x^2 + \vartheta^2} dx \\
 &= \arctan\left(\frac{\xi_2}{\vartheta}\right) - \arctan\left(\frac{\xi_1}{\vartheta}\right) \\
 I_3 &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} x \cdot \ln(\sqrt{x^2 + \vartheta^2}) dx \\
 &= \frac{1}{4} \xi_2^2 \ln(\xi_2^2 + \vartheta^2) + \frac{1}{4} \vartheta^2 \ln(\xi_2^2 + \vartheta^2) - \frac{1}{4} \xi_2^2 - \\
 &\quad \frac{1}{4} \xi_1^2 \ln(\xi_1^2 + \vartheta^2) - \frac{1}{4} \vartheta^2 \ln(\xi_1^2 + \vartheta^2) + \frac{1}{4} \xi_1^2 \\
 I_4 &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{x \cdot \vartheta}{x^2 + \vartheta^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \vartheta \ln(\xi_2^2 + \vartheta^2) - \frac{1}{2} \vartheta \ln(\xi_1^2 + \vartheta^2)
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Nous obtenons un système linéaire de  $N_N+N_D+2$  équations à  $N_N+N_D+2$  inconnues. Dans les équations 1.27 et 1.28, toutes les inconnues sont dans le membre de droite. Lorsque l'on réécrit les termes connus de l'équation 1.27  $f_i$  et les termes connus de l'équation 1.28  $g_i$ , alors le système peut s'écrire comme

$$\begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial n_i \\ \phi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\phi$  et sa dérivée normale peuvent être calculés sur toutes les frontières.



# Chapitre 2

## Dynamique des ondes solitaires : "Runup"

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la dynamique des ondes solitaires. Dans un premier temps, nous étudions le déferlement d'une onde solitaire sur une plage inclinée, ce qui peut modéliser le déferlement d'une vague de tsunami sur une côte. Nous effectuons des comparaisons avec une étude expérimentale menée sur le sujet. Ceci nous permet de tester la validité du code BIEM dans le cas extrême qu'est le déferlement d'une onde solitaire. Nous présentons ensuite d'autres méthodes de génération d'ondes solitaires dans un canal numérique. La dernière partie traite de l'étude numérique de la collision de deux ondes solitaires, sujet souvent approché depuis les années 70. Nous complétons en effet les précédentes études menées, et allons jusqu'aux cas extrêmes jamais traités auparavant.

### 1 Runup d'une onde solitaire sur une plage inclinée

#### 1.1 Dispositif expérimental

Une étude expérimentale a été menée à Marseille dans le canal à houle de l'Ecole Centrale afin d'étudier le runup de houles régulières et irrégulières, et d'ondes solitaires (Branger & Kimmoun (2006)). La figure 2.1 présente le dispositif expérimental. La longueur du canal est  $17\text{ m}$  et sa largeur  $0.65\text{ m}$ . Deux profondeurs sont utilisées,  $0.652\text{ m}$  et  $0.6345\text{ m}$  au niveau du batteur. Une plage inclinée longue de  $13\text{ m}$  environ et de pente  $1/15$  est posée à  $4\text{ m}$  du batteur. Des sondes à vagues sont disposées le long du canal respectivement à  $1.95\text{ m}$ ,  $6.35\text{ m}$ ,  $10.55\text{ m}$ ,  $12.38\text{ m}$ ,  $12.75\text{ m}$  et  $13.10\text{ m}$ . Une sonde à runup est installée sur la plage. Le canal est équipé d'un batteur de type volet, dont l'axe de rotation est situé  $0.4\text{ m}$  sous le fond. Nous effectuons des prises de vue à l'aide d'une caméra PIV après avoir ensemencé l'eau avec de la fluorescéine, au niveau du déferlement des vagues sur la plage.

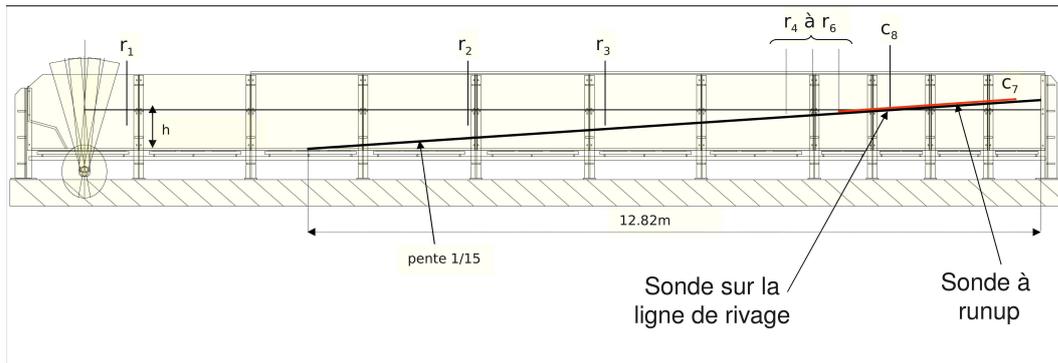


FIG. 2.1 – Vue de côté du dispositif expérimental.

## 1.2 Comparaison de l'expérience avec la simulation numérique

L'objectif de cette section est de tester la capacité du code BIEM à simuler des ondes solitaires dans des cas extrêmes, notamment en cas de déferlement.

Le canal à houle de l'Ecole Centrale de Marseille est entièrement modélisé, de la plage inclinée jusqu'à son batteur à géométrie si particulière. En effet il s'agit d'un batteur à volet dont l'axe de rotation se situe sous le niveau du fond. A partir des données expérimentales, nous disposons du signal temporel du batteur, c'est-à-dire de l'angle qu'il prend à chaque instant. Ainsi nous pouvons reproduire intégralement les expériences menées dans ce canal.

Nous nous intéressons ici aux cas des ondes solitaires. Le paramètre de non linéarité  $a/h$  obtenu expérimentalement est de l'ordre de 0.1. La difficulté se trouvera donc au niveau du déferlement sur la plage de l'onde solitaire.

Le cas présenté ici est un soliton ayant une amplitude normalisée  $a/h = 0.125$ , la profondeur d'eau utilisée est  $h = 0.652\text{ m}$ . Les simulations numériques reproduisant l'expérience sont réalisées avec le code BIEM décrit dans le chapitre 1. Nous utilisons 900 mailles pour discrétiser les frontières, dont 500 sur la surface libre, et le pas de temps choisi est  $dt = 5.10^{-4}$ . Dans ce cas la condition CFL est satisfaite (condition CFL voir Annexe 3). Nous disposons également des sondes numériques le long du canal telles qu'elles le sont dans l'expérience. La figure 2.2 montre la comparaison entre les sondes expérimentales et les sondes numériques respectivement aux abscisses  $1.95\text{ m}$ ,  $6.35\text{ m}$ ,  $10.55\text{ m}$  et  $12.38\text{ m}$ . Les résultats numériques sont représentés par un trait plein, les résultats expérimentaux par des cercles. Nous constatons un excellent accord du numérique avec l'expérience. En d'autres termes, la génération ainsi que la propagation du soliton sont bien modélisées. Aucun déphasage n'est constaté.

La figure 2.3 représente différents profils comparatifs entre l'expérience et le numérique au moment du déferlement du soliton sur la plage inclinée. La surface

libre numérique est représentée par un trait blanc, celle-ci est directement introduite sur l'image PIV issue de l'expérience. Là encore les résultats s'avèrent satisfaisants. La dernière image correspond à l'arrêt du code. En effet, le BIEM ne peut pas simuler un déferlement dans son intégralité, la méthode prenant fin au moment de la reconnexion de la surface libre. La notion de "contour" n'a alors plus de sens. D'autres méthodes sont plus adaptées pour traiter du déferlement telle la méthode VOF (Volume Of Fluid, exemple : Chen et al. (1999)) capable de résoudre les équations de Navier-Stokes en diphasique.

Certains cas de déferlement sont moins bien modélisés, notamment au niveau de la crête du jet plongeant, lorsque les courbures deviennent importantes. Il est alors judicieux d'introduire la tension de surface afin de corriger les écarts observés. Nous verrons dans le chapitre 3 l'influence de la tension de surface sur une vague déferlante. Nous avons constaté dans cette section la capacité de la méthode BIEM à modéliser des cas complexes d'ondes solitaires, jusqu'au déferlement. En effet les résultats obtenus sont jugés très satisfaisants.

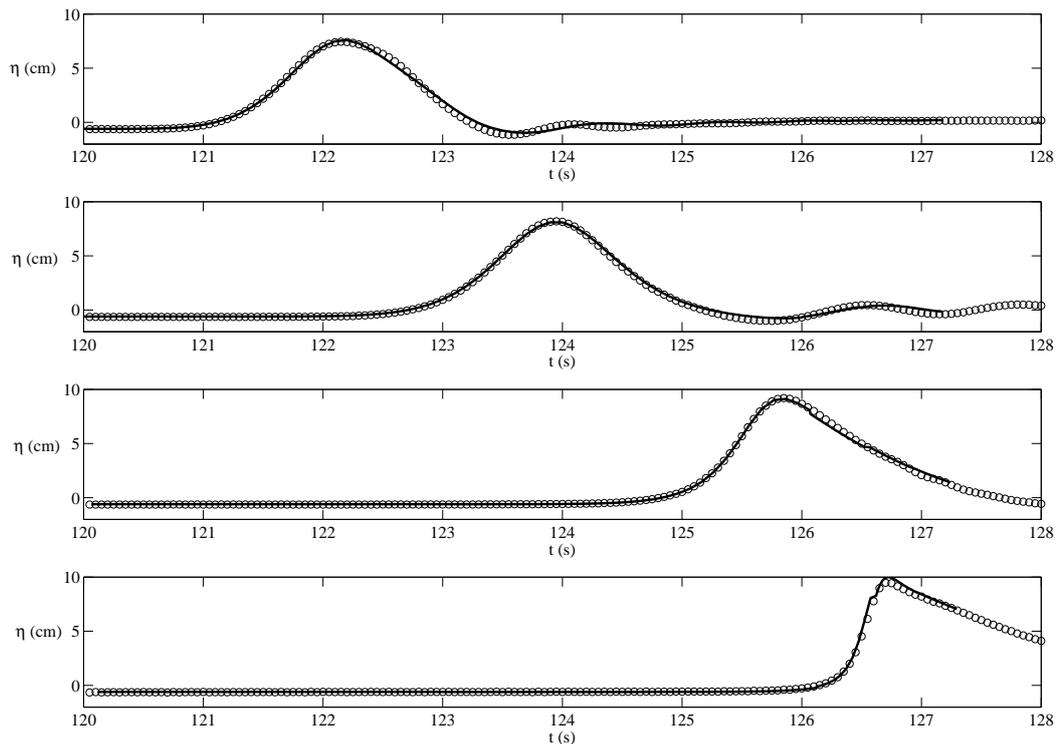


FIG. 2.2 – Comparaisons des signaux de sondes à vagues situées à 1.95 m, 6.35 m, 10.55 m et 12.38 m. (— simulation), (o expérience).

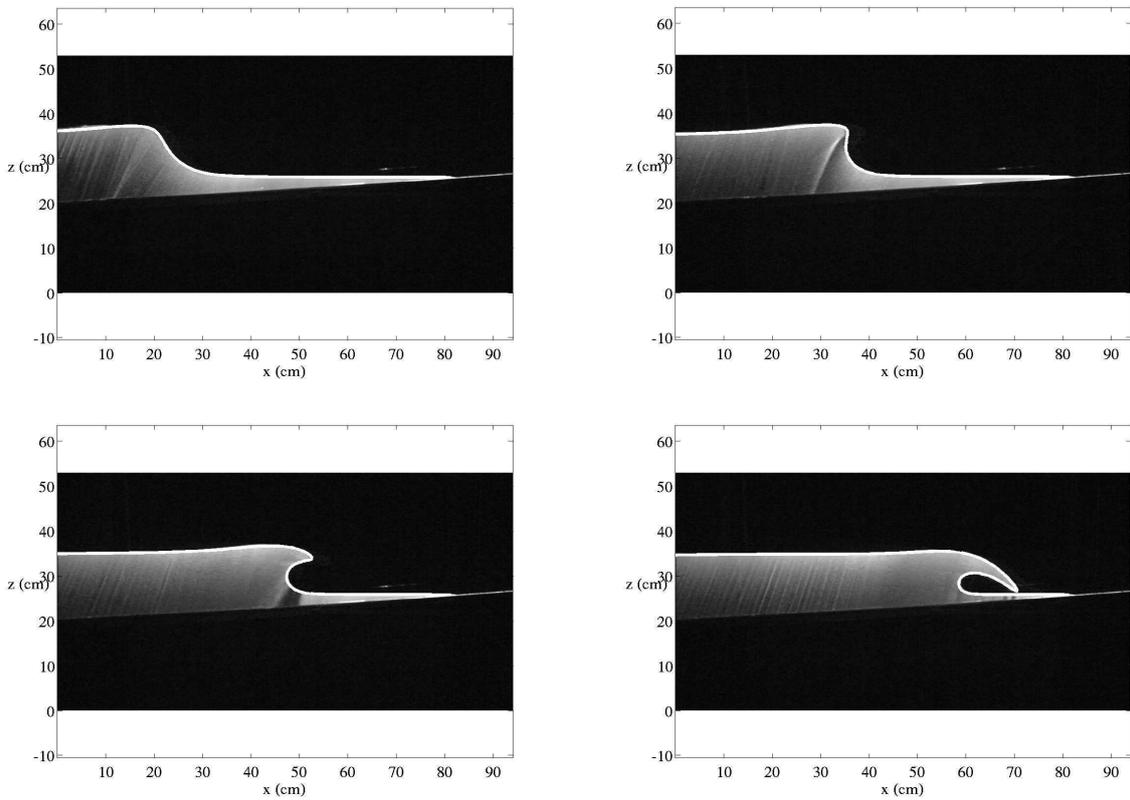


FIG. 2.3 – Comparaisons des profils de surfaces libres entre l'expérience et le BIEM. En traits pleins blancs le BIEM, en gris l'expérience.

## 2 Génération d'une onde solitaire dans un canal numérique

Dans la section précédente nous avons généré puis modélisé une onde solitaire à partir d'expériences menées dans le canal à houle de l'Ecole Centrale de Marseille. Nous souhaitons étudier des cas plus simples de génération d'ondes solitaires, et ainsi mieux contrôler certains paramètres, notamment le paramètre de non linéarité  $a/h$  qui représente l'amplitude normalisée de l'onde solitaire.

L'objectif de cette section est donc de générer une onde solitaire dans un canal numérique quelconque. On cherche la loi régissant le mouvement à imposer à un batteur de type piston pour générer une telle onde.

Pour cela, on considère l'équation de la conservation de la masse en eau peu profonde

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(\eta + h)] = 0 \quad (2.1)$$

où  $\eta$  est l'élévation,  $u$  la vitesse, et  $h$  la profondeur d'eau considérée. En eau peu profonde, dans le cadre de l'hypothèse de la pression hydrostatique, on montre que la composante horizontale de la vitesse  $u$  est indépendante de l'ordonnée  $z$  et donc  $u = u(x, t)$ . Effectuons le changement de variable suivant

$$\eta(x, t) = \xi(X) \quad X = x - ct \quad (2.2)$$

$$u(x, t) = U(X). \quad (2.3)$$

En appliquant ce changement de variable sur les opérateurs de l'équation on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial X} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -c \frac{\partial}{\partial X}. \quad (2.5)$$

L'équation de conservation de la masse devient alors

$$-c \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} [U(\xi + h)] = 0. \quad (2.6)$$

L'intégration par rapport à  $X$  est triviale

$$-c\xi + U(\xi + h) = C^{te}. \quad (2.7)$$

L'onde solitaire possède en théorie une longueur d'onde infinie. On suppose que son élévation et sa vitesse s'annulent à l'infini

$$\left. \begin{array}{l} \xi \rightarrow 0 \\ U \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad \text{lorsque} \quad X \rightarrow \pm\infty \quad (2.8)$$

On en déduit que la constante d'intégration  $C^{te}$  est nulle. Il en résulte

$$U = \frac{c\xi}{\xi + h}. \quad (2.9)$$

Par le changement de variable inverse on obtient finalement

$$u = \frac{c\eta}{\eta + h}. \quad (2.10)$$

Nous pouvons maintenant obtenir la génération d'un soliton à partir de la théorie de Korteweg de Vries (KdV), en remplaçant simplement  $\eta$  par la solution analytique du soliton de l'équation KdV (voir Annexe 1). Il nous suffit d'intégrer le système suivant

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c a \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\kappa}{h}(x - ct) \right]}{a \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\kappa}{h}(x - ct) \right] + h}. \quad (2.11)$$

Nous effectuons l'intégration numériquement par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (voir Annexe 3), on obtient ainsi la loi régissant la position que doit prendre le batteur au cours du temps (figure 2.4 à gauche). Sa vitesse est donnée par  $dx/dt$  (figure 2.4 à droite).

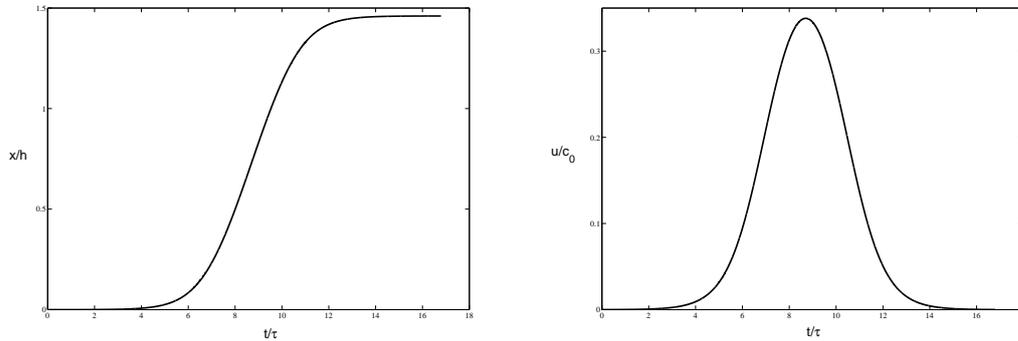


FIG. 2.4 – Position du batteur numérique piston (gauche) et sa vitesse (droite) en fonction du temps obtenues à l'aide d'une solution de l'équation de KdV.

Nous pouvons également utiliser la solution de l'onde solitaire à un ordre supérieur (Laitone (1960))

$$\frac{\eta(x)}{h} = \frac{a}{h} \operatorname{sech}^2 \alpha X - \frac{3}{4} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \alpha X (1 - \operatorname{sech}^2 \alpha X) + O \left( \frac{a}{h} \right)^3 \quad (2.12)$$

avec

$$\alpha X = \frac{x}{h} \left( \frac{3a}{4h} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{5a}{8h} \right) + O \left( \frac{a}{h} \right)^{\frac{5}{2}} \quad (2.13)$$

afin d'accroître la précision du signal.

Cependant nous ne disposons pas d'une fenêtre spatiale infinie. Nous devons donc effectuer une troncature du signal obtenu.

Il est à noter qu'une forme analytique du mouvement d'un batteur à piston est donnée par Grilli & Svendsen (1990)

$$x_p = \frac{a}{\kappa} \left[ \tanh \frac{\kappa}{h} (ct - x_p - \lambda) + \tanh \frac{\kappa}{h} \lambda \right] \quad (2.14)$$

avec

$$\kappa = \sqrt{\frac{3a}{4h}} \quad (2.15)$$

et

$$\text{pour } \eta > 0.001a \quad \text{on a } \frac{\lambda}{h} = \frac{3.8}{\kappa} \quad (2.16)$$

$$3.8 = \text{arcosh} \left[ \left( \frac{1}{0.001} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.17)$$

La précision de leur troncature est  $\delta\eta = 10^{-3}$ .

La génération d'un soliton par un batteur numérique engendre des trains d'ondes (queue dispersive) non désirés mais inévitables. Plusieurs essais ont été effectués pour différentes précisions de troncature. La précision n'a cependant pas d'effet sur la queue dispersive, celle-ci restant de l'ordre de 2% de l'amplitude du soliton (voir figure 2.5).

Les solitons obtenus par cette méthode (en utilisant des solutions de KdV) sont comparés avec des solitons générés à partir des équations exactes obtenues par Tanaka (1986). L'accord est parfait mise à part la queue dispersive comme le montre la figure 2.6, avec en trait plein la solution numérique générée par le batteur, et en trait discontinu la solution exacte de Tanaka (1986). En effet les équations complètes génèrent naturellement une solution exacte malgré l'approximation faite avec l'hypothèse de KdV lors de sa génération.

Nous pouvons donc utiliser la solution exacte de Tanaka dans l'équation différentielle de la formule du batteur afin d'augmenter la précision de la génération d'un soliton via un batteur de type piston, et réduire la queue dispersive qui se propage à l'arrière du soliton. L'amplitude du train d'ondes avec cette méthode est désormais de l'ordre de 1 % de l'amplitude du soliton.

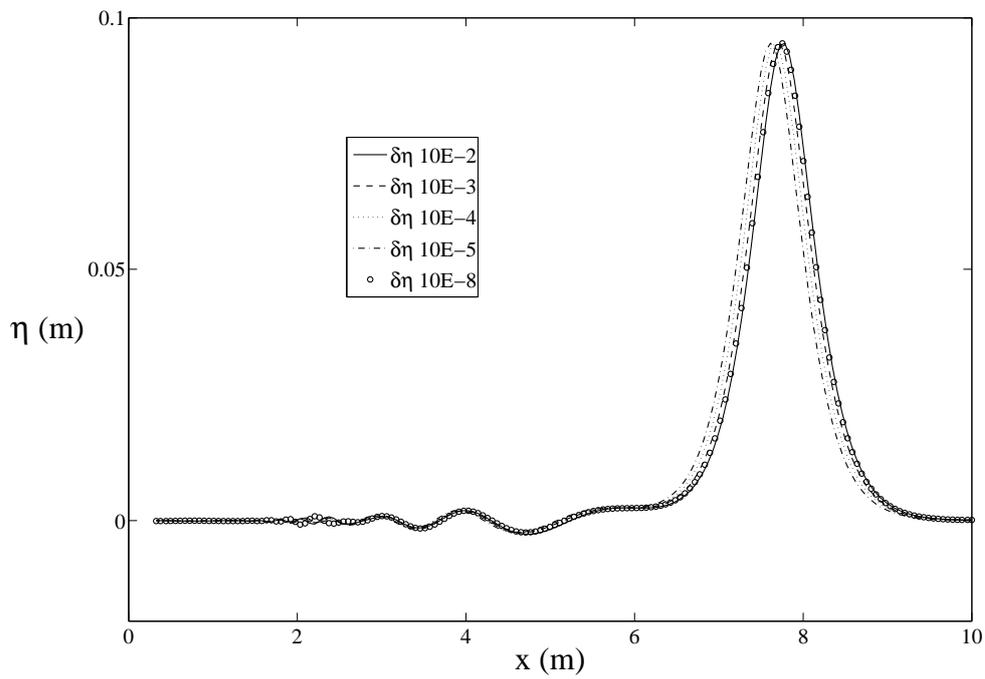


FIG. 2.5 – Comparaison de profils d'ondes solitaires générées par un batteur numérique piston à l'aide d'une solution de l'équation de KdV. Apparition d'une queue dispersive pour différentes précisions de troncature.

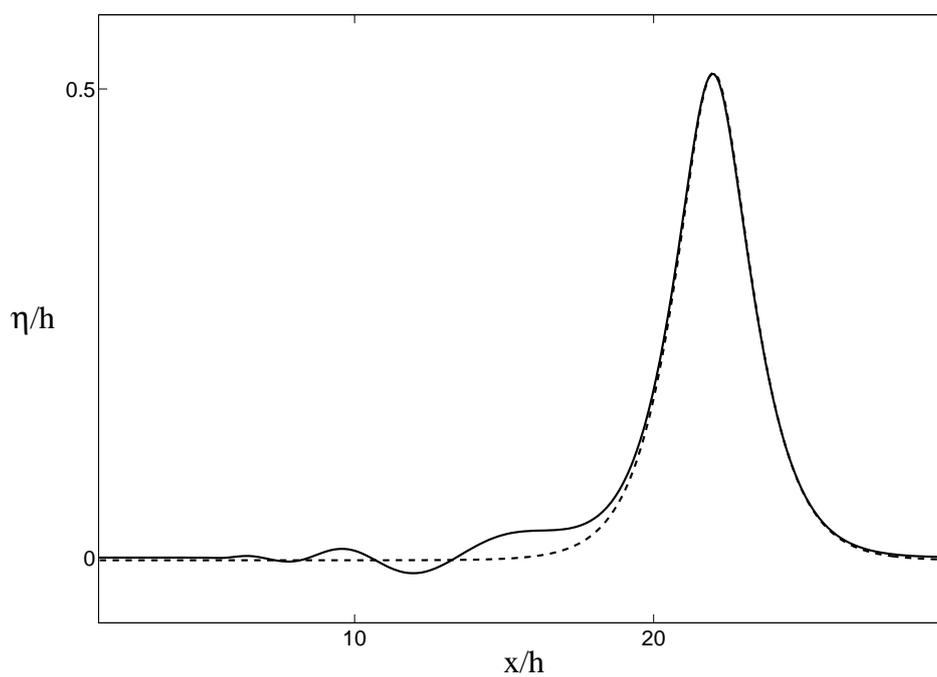


FIG. 2.6 – Comparaison d'une onde solitaire générée par un batteur numérique piston à l'aide d'une solution de l'équation de KdV (ligne pleine) avec une onde solitaire calculée numériquement par la méthode de Tanaka (1986) (ligne en pointillés).

Nous avons vu dans cette section que le code BIEM génère une onde solitaire de Tanaka suivie d'une queue dispersive. Par conséquent nous pouvons utiliser directement une onde solitaire de Tanaka comme condition initiale dans la suite de notre étude sur la dynamique des ondes solitaires. Cette méthode nous permet de nous affranchir de la queue dispersive générée par le batteur numérique. De plus les temps de calcul seront réduits puisque toute la phase de génération de l'onde solitaire ne sera plus modélisée.

Les intérêts du passage d'une condition aux limites à une condition initiale sont donc multiples : nous optimisons les temps de calcul, et nous augmentons la précision dans la génération de l'onde solitaire.

### 3 Collision frontale de deux ondes solitaires

Le problème de la collision de deux ondes solitaires provient initialement de l'étude du runup sur un mur vertical. En effet, en l'absence de viscosité et dans le cas symétrique, les deux problèmes deviennent équivalents. De nombreux travaux ont été effectués sur ce problème, tant analytiquement, numériquement qu'expérimentalement, notamment sur le calcul du maximum de runup, le déphasage des ondes après collision ou encore sur le temps de résidence de la crête à la paroi durant la phase "runup".

Parmi les études théoriques menées sur le sujet, nous pouvons citer Su & Gardner (1969), Byatt-Smith (1971), Oikawa & Yajima (1973), Temperville (1979), Su & Mirie (1980), Power & Chwang (1984), Bona & Chen (1998) ou Pelinovsky et al. (1999). Nous pouvons également citer les études numériques telles celles de Chan & Street (1970), Mirie & Su (1982), Fenton & Rienecker (1982), Cooker et al. (1997) ou Craig et al. (2006). Maxworthy (1976) a, lui, mené des expériences sur le sujet. Byatt-Smith (1971), Su & Mirie (1980), Mirie & Su (1982), Bona & Chen (1998) et Craig et al. (2006) ont étudié le cas asymétrique qui consiste en la collision de deux ondes solitaires d'amplitudes différentes.

Maxworthy (1976) a mené des expériences sur la collision frontale de deux ondes solitaires. Il a montré que le maximum de runup atteint une amplitude supérieure à deux fois l'amplitude initiale. Il a mis en évidence le fait que les vagues subissent un retard durant leur interaction, entraînant un déphasage spatial des ondes par rapport au cas où il n'y a pas d'interaction (ou de réflexion à la paroi, voir figure 4 de la section 3.1). Il a obtenu des résultats en accord qualitatif avec les différentes théories, mais non quantitatif. Il a en effet affirmé que ce déphasage est indépendant de l'amplitude initiale des vagues, contrairement à ce qui est prédit dans la théorie. Les résultats sont obtenus pour des amplitudes allant jusqu'à  $a/h = 0.5$

Temperville (1979) via une étude théorique, est venu contredire Maxworthy (1976). Il a en effet obtenu une formulation asymptotique pour le déphasage à partir d'une formulation lagrangienne des équations. Il a montré qu'il est difficile de conclure à l'existence d'un déphasage constant. Ceci a été confirmé par Fenton & Rienecker (1982) qui ont souligné la sensibilité des résultats en fonction de la position des mesures.

Su & Mirie (1980) ont considéré la collision entre deux ondes solitaires. Ils ont utilisé une méthode de perturbations pour calculer les effets de la collision. Le principal résultat qui ressort de leur étude est que les ondes issues de la collision conservent leurs identités initiales (formes et vitesses) au troisième ordre (ordre de leur précision). Cependant, ils ont montré que la collision engendre un déphasage des ondes (i.e. une onde est en retard par rapport à sa position quand l'interaction est ignorée), mais également l'apparition d'un train d'ondes secondaires, chaque

train d'ondes secondaires se propageant derrière l'onde solitaire. L'amplitude de ce train d'ondes diminue au cours du temps à cause de la dispersion. Ils ont également calculé l'amplitude du maximum de runup durant la collision. Leurs résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux existants. Leur étude théorique a été menée pour des amplitudes allant jusqu'à  $a/h = 0.6$ .

Power & Chwang (1984) ont étudié la réflexion d'une onde solitaire sur un mur vertical en résolvant les équations de Boussinesq tant sur le plan analytique que sur le plan numérique. La solution analytique est obtenue par le biais d'une technique de raccordement asymptotique, tandis que la solution numérique est basée sur un schéma aux différences finies. Ils ont calculé l'amplitude du maximum de runup ainsi que le temps auquel il est atteint. Ils ont trouvé également que l'onde incidente ne se réfléchit pas immédiatement comme le prédit la théorie linéaire. De plus ils ont montré à leur tour que l'onde subit un retard de phase durant la collision. Ce déphasage s'est trouvé être inversement proportionnel à la racine carrée de l'amplitude initiale de l'onde. Leurs résultats analytiques et numériques sont en accord, et ils ont trouvé également un bon accord avec les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature. Tous les résultats correspondent à des amplitudes allant jusqu'à  $a/h = 0.5$ .

Cooker et al. (1997) ont également étudié la réflexion d'une onde solitaire sur un mur vertical. Pour calculer l'écoulement du fluide potentiel décrit par les équations d'Euler, leur approche numérique est basée sur une méthode d'intégrales de frontière. Ils ont calculé le temps de résidence, c'est-à-dire le temps où la crête reste en contact avec le mur, notion introduite pour la première fois par Temperville (1979). Ils ont montré que le temps de résidence fournit une caractérisation sans équivoque du déphasage de l'onde. Ils ont comparé leurs résultats sur le temps d'attachement et de détachement de la crête avec les formules asymptotiques de Su & Mirie (1980). D'autres résultats sur cet écoulement ont été obtenus, notamment sur le maximum de runup ou encore les forces instantanées s'exerçant sur le mur. Leurs résultats numériques sur le temps de résidence sont en accord avec les mesures prises à partir d'un film sur la réflexion d'une onde solitaire sur un mur issu des expériences de Maxworthy (1976). Les résultats sont obtenus ici pour des amplitudes  $a/h = 0.6$ .

Toutes les études présentées ci-dessus n'ont concerné que la collision d'ondes solitaires d'amplitudes  $a/h$  inférieures ou égales à 0.6. Nous proposons ici de compléter ces travaux aux cas d'amplitudes  $a/h$  couvrant toute la gamme admissible  $[0, 0.8332]$ .

### 3.1 Chambarel J., Kharif C., Touboul J., Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation, *Nonlin. Processes Geophys.*, 16, p. 111-122, 2009

Nous étudions dans ce chapitre la collision frontale de deux ondes solitaires d'amplitudes égales ou différentes. Le cas classique où les deux amplitudes sont égales est équivalent à la réflexion d'une seule onde sur un mur vertical lorsque la viscosité est négligée. Par symétrie nous considérerons parfois le milieu de la collision comme un mur. Nous avons réalisé une série d'expériences numériques en utilisant la méthode BIEM en profondeur finie, pour étudier durant la collision le maximum de runup, le temps de résidence des crêtes sur "le mur", le déphasage des ondes après la collision, les accélérations de la surface libre ou encore les forces générées par la collision s'exerçant sur "le mur". Nous faisons évoluer le paramètre de non linéarité  $a/h$ , en lui donnant toutes les valeurs possibles (et admises par la théorie), où  $a$  est l'amplitude du soliton considéré, et  $h$  la profondeur d'eau. Nous prenons comme conditions initiales des ondes solitaires calculées numériquement à partir des équations complètes par la méthode de Tanaka (1986). Les travaux présentés étendent de précédentes études notamment sur le runup, le temps de résidence et le déphasage. De surcroît, un nouveau phénomène est découvert et présenté, la formation d'un jet résiduel en chute libre apparaissant à partir d'une certaine valeur critique du paramètre de non linéarité  $a/h$ .

# Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation

J. Chambarel, C. Kharif, and J. Touboul

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre, Marseille, France

Received: 30 October 2008 – Revised: 30 January 2009 – Accepted: 30 January 2009 – Published: 17 February 2009

**Abstract.** The head-on collision of two equal and two unequal steep solitary waves is investigated numerically. The former case is equivalent to the reflection of one solitary wave by a vertical wall when viscosity is neglected. We have performed a series of numerical simulations based on a Boundary Integral Equation Method (BIEM) on finite depth to investigate during the collision the maximum runup, phase shift, wall residence time and acceleration field for arbitrary values of the non-linearity parameter  $a/h$ , where  $a$  is the amplitude of initial solitary waves and  $h$  the constant water depth. The initial solitary waves are calculated numerically from the fully nonlinear equations. The present work extends previous results on the runup and wall residence time calculation to the collision of very steep counter propagating solitary waves. Furthermore, a new phenomenon corresponding to the occurrence of a residual jet is found for wave amplitudes larger than a threshold value.

## 1 Introduction

In this paper we investigate the head-on collision of two equal and two unequal solitary waves which are computed by using the algorithm developed by Tanaka (1986). The symmetric case is equivalent, in the absence of viscosity, to the reflection of one solitary wave by a vertical wall. A lot of works considered analytically, numerically and experimentally this problem, calculating namely the maximum run-up amplitude, phase shift due to the collision and wall residence time. An exhaustive review of this problem is given below. In order to check the validity of their numerical method Chan and Street (1970) considered the run-up of a solitary wave on a vertical wall and compared their results with available

experimental data. Byatt-Smith (1971) calculated analytically to second-order approximation the interaction of two solitary waves going in opposite directions. Later on, Byatt-Smith (1988) investigated the head-on collision of two equal solitary waves or the reflection of a solitary wave by a vertical wall. Using a perturbation expansion of the Euler equation, he derived interaction equations and showed analytically that the amplitude of the solitary wave after reflection is reduced. The change is shown to be of fifth-order in wave amplitude. This loss of amplitude is due to the presence of the third-order dispersive tail. Oikawa and Yajima (1973) used a singular perturbation method developed to second-order to study the interaction between two solitary waves which propagate in opposite directions. They provided an estimate of the phase shifts in the collision process of the two solitary waves. Maxworthy (1976) conducted experiments on the head collision of two solitary waves. He found that some of the theories are in qualitative but not quantitative agreement with his experimental results. Namely, he claimed that the phase shift is independent of initial amplitude in contrast with available theoretical results. Within the framework of the Lagrangian formulation of the equations, Temperville (1979) investigated the reflection of a solitary wave on a rigid wall. Namely, he derived the leading-order asymptotic formula for the phase shift between the incident wave and the reflected wave and found it was difficult to conclude, as Maxworthy did, that there is a constant phase shift. This disagreement is partially explained by Fenton and Rienecker (1982) who emphasized the sensitivity of the results to the measurement locations. Within the framework of the shallow water wave equations, Pelinovsky et al. (1999) derived an analytic expression of the maximum run-up amplitude of tsunami waves. Su and Mirie (1980) found analytically that the wave emerging from the collision of two solitary waves preserve their original identities to the third order of accuracy. Furthermore, the collision generates secondary wave groups (the dispersive tail) trailing behind their primary



Correspondence to: J. Chambarel  
(chambarel@irphe.univ-mrs.fr)

solitary waves. They calculated the maximum run-up amplitude of the two colliding waves up to third-order. In a numerical study based on the approximate equations derived by Su and Gardner (1969), Mirie and Su (1982) checked the phase shifts and maximum amplitude of a collision with a corresponding perturbation calculation and compared with experiments. They found a wave train trailing behind each of emerging solitary waves from the head-on collision. The properties of the wave train were in agreement with those of the perturbation solution. After the collision, the solitary waves recover almost all of their original amplitude for the length of time in the numerical simulation. They showed the difference persists (2% of their original value) and accounts for the energy residing in the wave train. Fenton and Rienecker (1982) developed a numerical method based on a Fourier decomposition for solving nonlinear water wave problems, namely solitary wave interactions. They investigated the maximum run-up at the wall and the phase shift during the interaction. The first to report on the wall residence time which is the time the wave crest remains attached to the wall, was Temperville (1979). Later on, Power and Chwang (1984) confirmed his results through an Eulerian approach. They considered the reflection of a solitary wave by solving the Boussinesq equations analytically as well as numerically. Cooker et al. (1997) using a Boundary Integral Equation Method (BIEM) for solving the fully nonlinear equations, showed that the wall residence time provides an unambiguous characterization of the phase shift incurred during the reflection. Bona and Chen (1998) as did Power and Chwang (1984) considered a Boussinesq system to study the head-on collision of solitary waves. More recently, Craig et al. (2006) considered the fully nonlinear equations to study numerically the run-up, phase lag, and generation of a residual from the head-on collision of two solitary waves. In addition to the symmetric case, they investigated the asymmetric case corresponding to two counter propagating solitary waves of different amplitudes. Note that Byatt-Smith (1971), Su and Mirie (1980), Mirie and Su (1982) and Bona and Chen (1998) considered the asymmetric case too.

Among the fully nonlinear water wave equations, Cooker et al. (1997) and Chan and Street (1970) considered waves with normalized amplitude  $a/h$  up to 0.70. The latter authors were only concerned with the maximum run-up whereas Cooker and co-authors investigated more deeply the interaction. Nevertheless, none of them discussed about a new phenomenon peculiar to head-on collision of very steep solitary waves: the formation of a residual thin jet. This jet is observed for the first time during the collision of the two counter propagating solitary waves

In Sect. 2 we present the mathematical statement of the water wave problem, and we describe briefly the numerical method. Section 3 is devoted to the maximum runup, phase shift, wall residence time and acceleration field for arbitrary amplitude of the two incident solitons, up to  $a/h=0.80$ . In this section, we discussed the generation of a residual jet

when the initial amplitude of the counter propagating solitary waves is very large. The second part of the Sect. 3 reports on the collision of two solitary waves of different amplitudes. During the formation of the residual jet, the curvature becomes important and surface tension effect may be taken into account.

## 2 Mathematical formulation and numerical method

### 2.1 Basic equations

The problem is solved by assuming that the fluid is inviscid, incompressible, and the motion irrotational. Hence the velocity field is given by  $\mathbf{u}=\nabla\phi$  where the velocity potential  $\phi(x,z,t)$  satisfies the Laplace's equation which is solved in a domain bounded by the free surface, a horizontal solid bottom and two vertical solid walls located at the ends of the numerical domain. The horizontal and vertical coordinates are  $x$  and  $z$  respectively whereas  $t$  is time. The still-water level lies at  $z=0$ , and the horizontal impermeable bed lies at  $z=-h$ . The dynamic free surface condition states that the pressure at the surface,  $z=\eta(x,t)$ , is equal to 0. Assuming the free surface to be impermeable, the problem to be solved is the Laplace equation with the kinematic, dynamic and bottom conditions.

$$\begin{cases} \Delta\phi=0 & \text{for } -h < z < \eta(x,t), \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 & \text{on } z = \eta(x,t), \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + g\eta - \frac{\sigma}{\rho R_c} = 0 & \text{on } z = \eta(x,t), \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{on } z = -h, \end{cases} \quad (1)$$

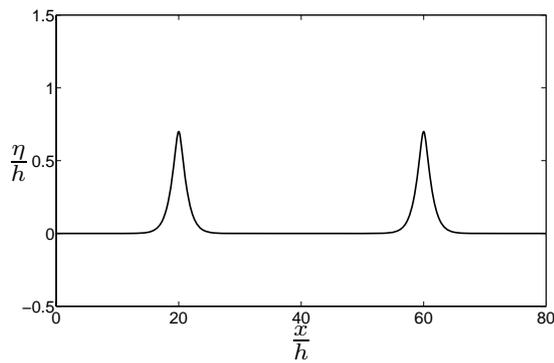
where  $g$  is the acceleration due to gravity,  $\rho_\omega$  is the water density,  $\sigma$  is the surface tension coefficient and  $R_c$  is the radius of curvature. During the formation of the residual jet, the curvature becomes important and surface tension effect may be taken into account.

### 2.2 Numerical method

A Boundary Integral Equation Method (BIEM) is used to solve the system of Eq. (1) with a mixed Euler Lagrange (MEL) time marching scheme. For more details about this numerical method see the papers by Touboul et al. (2006) and Touboul and Kharif (2009).

The Green's second identity is used to solve Laplace's equation for the velocity potential

$$\begin{aligned} c(Q)\phi(Q) &= \int_{\partial\Omega} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl, \end{aligned} \quad (2)$$



**Fig. 1.** Initial condition : Free surface elevation as a function of abscissa.

where  $G$  is the free space Green’s function. The fluid domain boundary  $\partial\Omega$  is  $\partial\Omega_F \cup \partial\Omega_B$ , the union of the free surface  $\partial\Omega_F$  and solid boundaries  $\partial\Omega_B$ . The unit normal vector  $\mathbf{n}$  points outside the fluid domain. The unknowns are  $\partial\phi/\partial n$  on  $\partial\Omega_F$  and  $\phi$  on  $\partial\Omega_B$ . Let  $P$  and  $Q$  denote two points of the domain and  $c(Q)$  is the angle between two consecutive panels defined as follows

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & \text{if } Q \text{ is outside the fluid domain,} \\ \alpha & \text{if } Q \text{ is on the boundary,} \\ -2\pi & \text{if } Q \text{ is inside the fluid domain,} \end{cases} \quad (3)$$

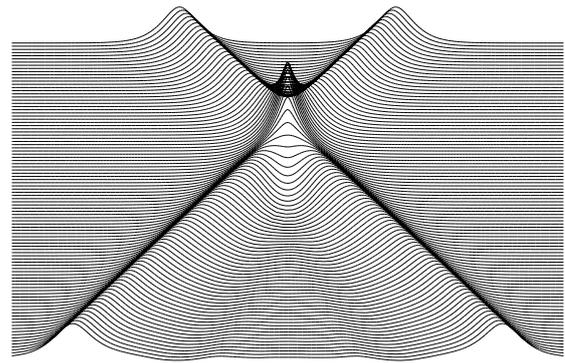
where  $\alpha$  is the inner angle relative to the fluid domain at point  $Q$  along the boundary.

Time stepping is performed using a fourth order Runge & Kutta scheme, with a constant time step.

The velocity and acceleration fields are calculated using a finite-difference method.

### 2.3 Initial conditions

We consider a rectangular wave tank of length  $L$  and constant depth  $h$  with two vertical solid walls located at its ends. The horizontal length of the domain,  $L$ , is assumed to be large enough to avoid any perturbation generated from the vertical walls during the computational time of the simulations on the solitary wave collision occurring in the middle of the tank. We impose the impermeability condition on the vertical walls and horizontal bottom. Hence, the boundary conditions are  $\partial\phi/\partial n=0$  on the walls and bottom. The initial free surface is represented by two solitary waves computed without approximation with the method of Tanaka. The free surface elevation is shown in Fig. 1 for two waves of equal amplitude (symmetric case) travelling in opposite directions. The asymmetric case corresponding to the collision of two waves of unequal amplitudes is also considered.



**Fig. 2.** Free surface profiles at different instants of time for initial amplitude  $a/h=0.5$  (from top to bottom).

## 3 Numerical simulations and discussion

### 3.1 Head-on collision of two solitons of equal amplitude or reflection of high-amplitude solitary wave

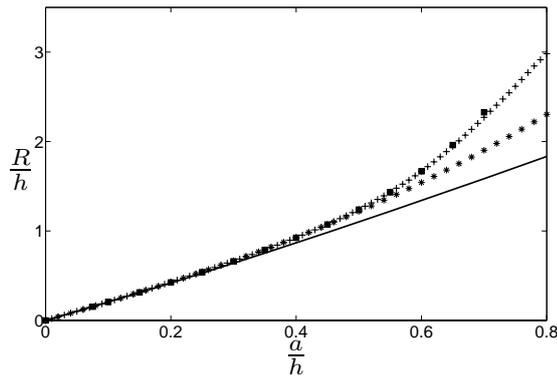
#### 3.1.1 Run-up

During the wave collision (the runup) the amplitude reaches a value larger than the sum of the amplitudes of the incident solitary waves. After the collision the waves separate into two solitary waves. The collision leaves imprints on the colliding waves with phase shifts and reduced amplitude and shedding a dispersive tail. The temporal evolution of the profile of the free surface corresponding to the head-on collision of solitary waves of amplitude  $a/h=0.50$  is given in Fig. 2. We can observe the dispersive tail when the waves separate after the collision.

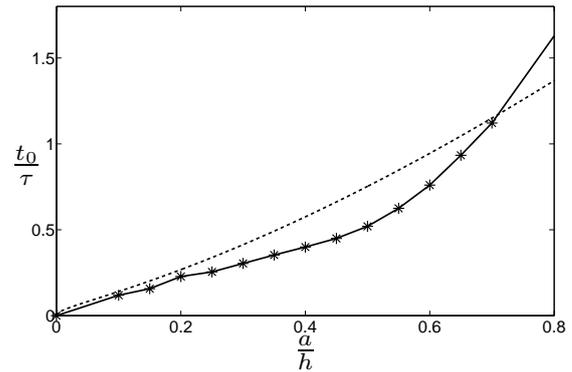
The maximum surface elevation defines the maximum value of the runup. The normalized maximum runup,  $R/h$ , corresponding to the collision of two solitary waves of equal amplitudes is plotted in Fig. 3 as a function of the normalized amplitude of two incident solitons,  $a/h$ . Our results are in very good agreement with those of Cooker et al. (1997) and extend previous studies to higher values of  $a/h$ . Within the framework of the fully nonlinear water wave problem, the latter authors investigated the collision of a solitary wave with a vertical wall by using a Boundary Integral Equation Method. In addition, in Fig. 3 are plotted the curves corresponding to analytical results found in the papers by Su and Mirie (1980) and Pelinovsky et al. (1999) respectively. The former authors obtained to third-order the following expression

$$\frac{R}{h} = 2\frac{a}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{h}\right)^3. \quad (4)$$

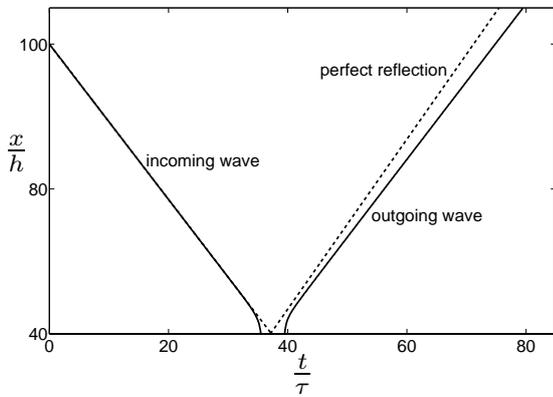
In the first-order of approximation they considered two independent moving solitary waves which satisfy the KdV equation. Figure 3 shows that the analytical expression derived



**Fig. 3.** Normalized maximum runup for a collision of two solitary waves as a function of  $a/h$ , + present results, \* Su and Mirie (1980), -- Pelinovsky et al. (1999), ■ Cooker et al. (1997).



**Fig. 5.** Normalized time at maximum runup as a function of normalized incident wave amplitude  $a/h$ ; — present results, \* Cooker et al. (1997), - - - Su and Mirie (1980).



**Fig. 4.** Schematic diagram of the wave crest trajectory.

by Su and Mirie (1980) gives results which are in excellent agreement with the numerical results up to  $a/h=0.50$ .

Pelinovsky et al. (1999) used a different approach. They considered the Riemann invariants of the hyperbolic equations of the nonlinear shallow water wave equations to obtain

$$\frac{R}{h} = 4 \left( 1 + \frac{a}{h} - \sqrt{1 + \frac{a}{h}} \right). \quad (5)$$

Let  $t_0$  be the time of maximum runup at the wall. The time origin is chosen to be the time when the crest of the solitary wave meets the vertical wall within the framework of a perfect reflection (see Fig. 4). Cooker et al. (1997) derived an analytical solution for  $t_0$  using Su & Mirie’s solution for elevation at second-order of approximation during the runup

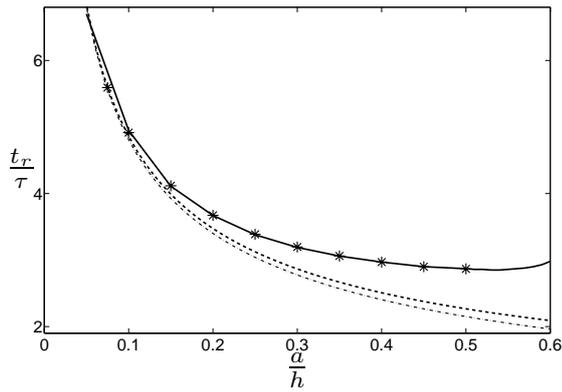
$$\frac{t_0}{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \left( \frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{43}{8} \left( \frac{a}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + O \left( \left( \frac{a}{h} \right)^2 \right). \quad (6)$$

We calculated this maximum runup time numerically and compared our results with the analytical solution and with the numerical results of Cooker et al. (1997) (Fig. 5). We can observe that the analytical solution is close to the fully nonlinear solution for small values of the amplitude ( $a/h \leq 0.20$ ) but more amazing for a value of the normalized amplitude near 0.70.

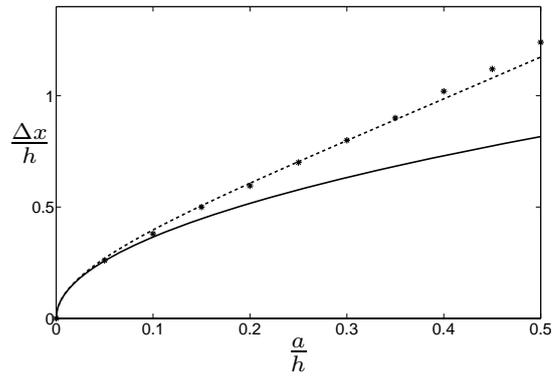
### 3.1.2 Residence time

The trajectories of the incident wave crest (incoming wave) and reflected wave crest (outgoing wave) is schematically described in the plan  $(x/h, t/\tau)$  where  $\tau = \sqrt{g/h}$  (see Fig. 4). Note the increase of the phase velocity in the vicinity of the vertical wall. Due to the nonlinear interaction between the reflected wave and the wall (or nonlinear interaction between the right- and left-going solitary waves), the phase velocity of the reflected (or outgoing) wave is less than that of the incoming wave. The wave crest lingers at the wall during reflection for a period of time denoted  $t_r$ . Let  $t_a$  and  $t_d$  be the attachment time and detachment time respectively at which the incident wave crest reaches and leaves the vertical wall. Hence, the wall residence time is  $t_r = t_d - t_a$ . This period of time is an alternative measure of the effects of the wall on the wave or the effect of the nonlinear interaction between the two solitary waves on their phase. Temperville (1979) was the first to report the leading-order asymptotic formula for the wall residence time. His result was independently confirmed by Power and Chwang (1984). The wall residence time may be written in the following form

$$\frac{t_r}{\tau} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) \left( \frac{a}{h} \right)^{-\frac{1}{2}} + O \left( \left( \frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (7)$$



**Fig. 6.** Normalized wall residence time  $t_r$  as a function of normalized amplitude  $a/h$ , — present results, \* Cooker et al. (1997), - - - Power and Chwang (1984), - . - Su and Mirie (1980).



**Fig. 7.** Normalized phase shift as a function of  $a/h$ , \* Present results, - - - Su and Mirie (1980), — Oikawa and Yajima (1973).

From the results of Su and Mirie (1980) we can obtain the residence time to third-order :

$$\frac{t_r}{\tau} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) \left( \frac{a}{h} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \ln \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) \left( \frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

The comparison of our results with previous analytical and numerical works are given in Fig. 6. We have extended beyond  $a/h=0.50$  the numerical results obtained by Cooker et al. (1997). For high values of the normalized amplitude  $a/h$ , the residence time at the wall becomes independent of the amplitude of the incoming wave. Due to the occurrence of a residual jet (see Fig. 16, top) observed for  $a/h$  greater than approximately 0.60, it is not easy to define and calculate  $t_r$ . The weak increase of the residence time in the vicinity of  $a/h=0.60$  corresponds to the beginning of the formation of the residual jet.

### 3.1.3 Phase shift

The two solitary waves suffer from a phase shift during the collision process. Similarly, a solitary wave undergoes a phase shift due to the reflection by a vertical wall. Conventionally, the phase shift is the displacement  $\Delta x$ , the difference in location between the wave crest (solid line in Fig. 4) and the crest of a wave which is supposed to be perfectly reflected (dashed line in Fig. 4) with no change in phase velocity. The phase shift is computed at an instant of time much larger than  $t_d$  to consider a wave travelling unaffected by the presence of the wall.

Oikawa and Yajima (1973) explicitly computed the spatial phase shift  $\Delta x$  incurred after reflection from the wall, namely:

$$\frac{\Delta x}{h} = \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{a}{h}. \quad (9)$$

The improved formulae for the phase shift found by Su and Mirie (1980) is :

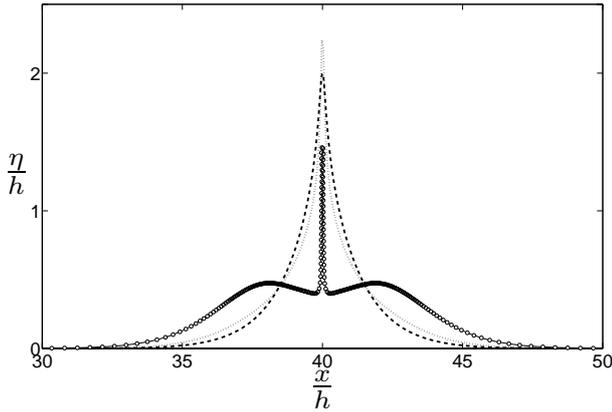
$$\frac{\Delta x}{h} = \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{a}{h} \left( 1 + \frac{7a}{8h} \right). \quad (10)$$

We compare our numerical results with these analytical formulations. The comparison is given in Fig. 7. For  $a/h \leq 0.50$ , we can observe that the analytical expression derived by Su and Mirie (1980) is in excellent agreement with the numerical result.

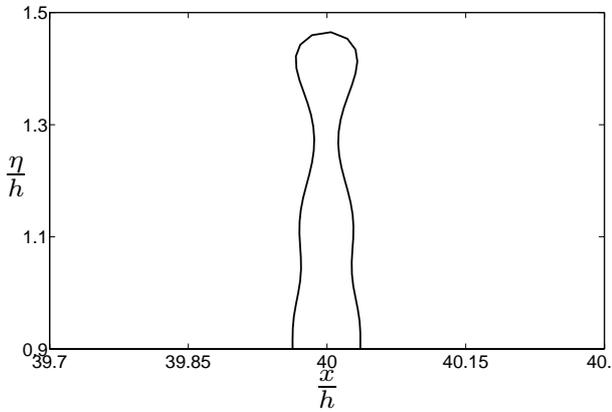
### 3.1.4 Accelerations and residual jet formation

When the amplitude of the two incident solitons is increased above a threshold value a new phenomenon occurs: the formation of a residual jet. The occurrence of this jet is shown in Fig. 8 during the rundown for incident solitary wave amplitude  $a/h=0.70$ . At  $t/\tau=18$  where  $\tau=\sqrt{g/h}$ , the waves start to separate and leave a residual jet. This jet does not occur in the case corresponding to Fig. 2. From our numerical simulations we found that the residual jet occurs above a threshold value of the normalized amplitude  $(a/h)_c=0.60$ . Figure 10 shows the ephemeral occurrence of a tiny residual jet for incident wave amplitude  $a/h=0.60$ . For  $a/h>0.60$ , we have a residual jet formation whereas it is not the case for smaller values.

Figure 9 shows an enlargement of the jet at  $t/\tau=18$  corresponding to Fig. 8. The free surface presents undulations which have occurred at the maximum of runup for values of the amplitude of the incident solitons larger than the threshold value,  $(a/h)_c$ , defined previously. Maxworthy (1976) observed experimentally at large initial amplitudes that the vertical accelerations tend to create a jet-like flow at the

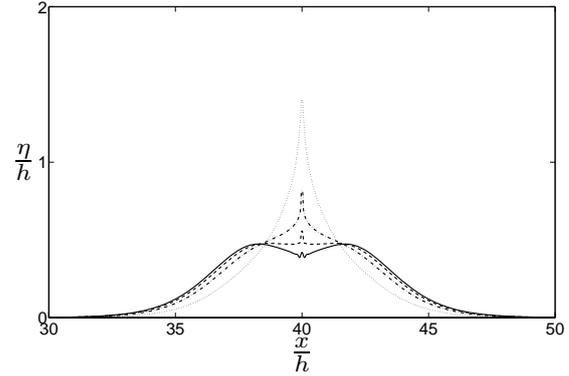


**Fig. 8.** Rundown for initial amplitude  $a/h=0.70$  : Residual jet formation;  $\cdots t/\tau=16$ ;  $--- t/\tau=17$ ;  $- - - t/\tau=18$ ;  $- \cdot - t/\tau=18.4$ .



**Fig. 9.** Residual jet at the free surface for initial amplitude  $a/h=0.70$  at  $t/\tau=18$ .

wave crest which breaks down into individual drops (Fig. 7 in his paper). We suppose we are describing the same phenomenon. Figure 9 shows the initial formation of drops. The drop formation depends on the characteristic time scale of the instability which develops at the free surface of the residual jet. Does interface reconnection occur before the disappearance of the residual falling jet? To answer this question, the breakup of the jet may be studied using VOF methods (see for instance the paper by Chen et al., 1999). The present numerical Boundary Integral Equation Method cannot capture interface reconnection. However, the first step is to consider, within the framework of potential water waves, the stability analysis of this unsteady and non-periodic flow which is at the top of our agenda for further research. In Figs. 11–16 are plotted the profiles of the surface elevation, vertical and horizontal components of the particle acceleration at the free surface during the runup and rundown at several instants of time for different values of the initial amplitude of the solitary waves. For  $a/h=0.50$  or  $0.70$  the head-on collision oc-



**Fig. 10.** Rundown for initial amplitude  $a/h=0.60$  : Residual jet ;  $\cdots t/\tau=17.5$ ;  $- \cdot - t/\tau=18.1$ ;  $--- t/\tau=18.3$ ;  $- t/\tau=18.4$ .

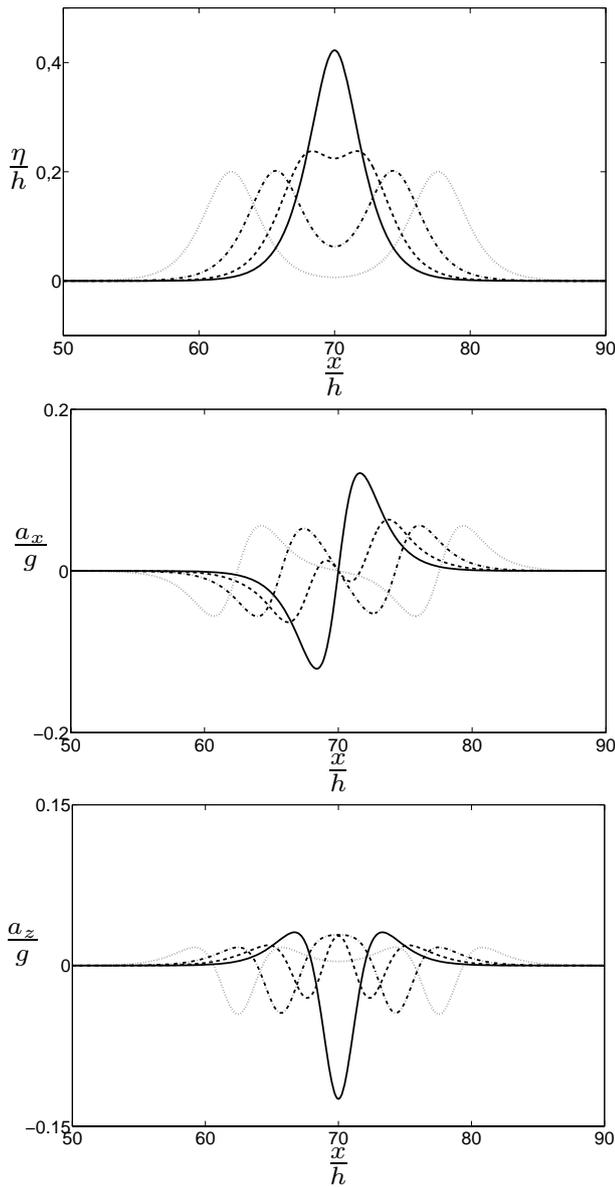
curs at  $x/h=40$  (middle of the tank) whereas for  $a/h=0.20$  we have used a longer wave tank. Hence the collision takes place at  $x/h=70$  (middle of the tank).

The maximum of the absolute value of the vertical acceleration  $a_z$  is obtained at the crest of the free surface at the end of the runup or the beginning of the rundown. This value increases with the amplitude  $a/h$  up to a limit,  $g$ , the acceleration due to gravity, as it is shown in Fig. 17.

For initial amplitudes less than  $a/h=0.60$ , the intensity of the vertical acceleration is always less than gravity whereas for larger amplitudes the maximum of the ratio  $a_z/g$  saturates to the value  $-1$ . For  $a/h$  larger than  $0.60$  it is observed during the rundown that accelerations at the crest and in its vicinity remain equal to  $-g$  (see Fig. 16, bottom).

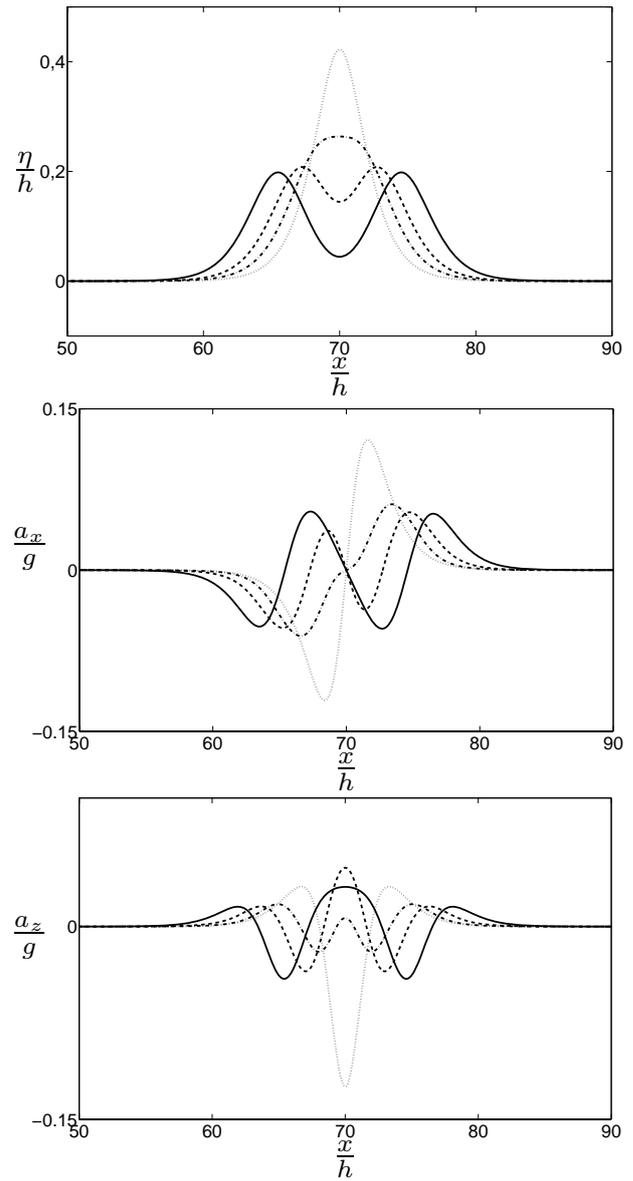
During the rundown, when the waves separate after the collision a new phenomenon occurs: the formation of a residual jet. This is shown in Fig. 16 (top) for  $a/h=0.70$ . The residual jet formation does not occur for collisions corresponding to  $a/h=0.20$  or  $a/h=0.50$ . We found that the residual jet formation starts when the normalized amplitude of two incident solitons is larger than  $0.60$ . The formation of the residual jet occurs when the crest acceleration is  $-g$ . This means that the jet is in freefall. We may expect that the residual jet is due to the Rayleigh-Taylor instability. For more details on this mechanism see the paper by Taylor (1950). As mentioned previously, the mechanism of generation of this jet is an open question which will be more deeply investigated in a future research.

During the formation of the residual jet the crest curvature becomes important. Hence we may wonder what is the effect of surface tension on the formation and evolution of the residual jet. We consider the surface tension effect on the dynamics of the collision. The relative strength of gravity effects to capillary effects is measured through the Bond number  $Bo=\rho gh^2/\sigma$ . For the present case, the water density is  $\rho=10^3 kg.m^{-3}$ , the acceleration due to gravity is  $g=9.80 m.s^{-2}$ , the water depth is  $h=1 m$  and the surface



**Fig. 11.** Runup for soliton amplitude  $a/h=0.2$ . Free surface elevation and horizontal and vertical accelerations (from top to bottom) at several instants of time.  $\cdots t/\tau=25$ ,  $-\cdot-t/\tau=28$ ,  $---t/\tau=30$ ,  $-t/\tau=32$ .

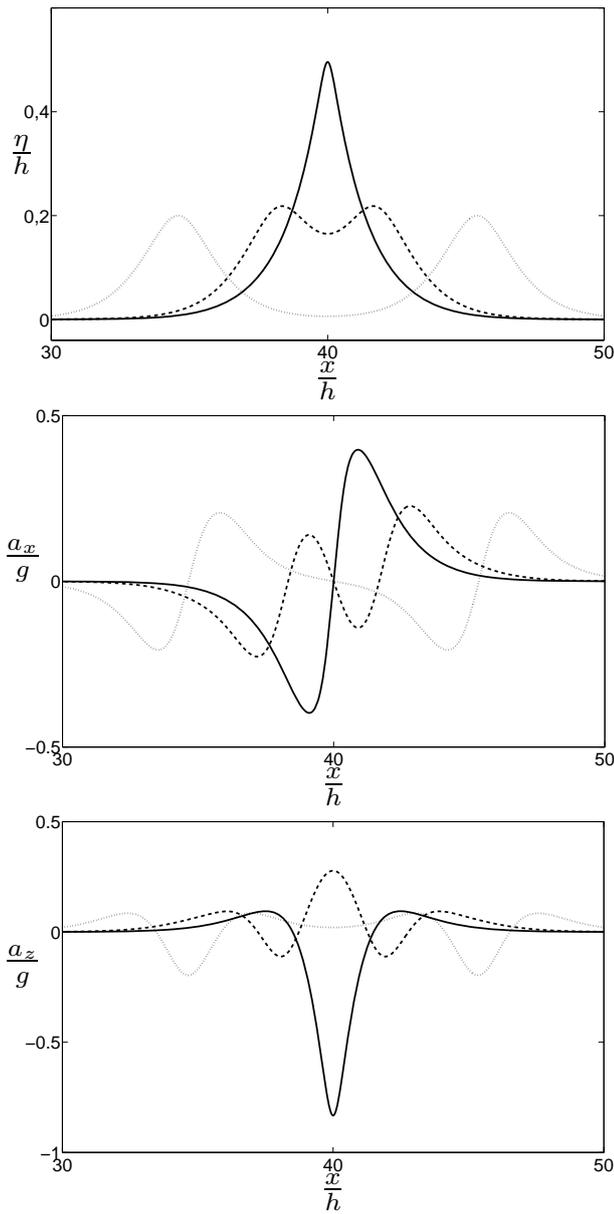
tension coefficient is  $\sigma=74 \times 10^3 \text{ N.m}^{-1}$ . The Bond number in our dimensionless system is  $Bo=1.32 \times 10^6$ . We can conclude that gravity forces are globally dominant. Nevertheless, surface tension effect cannot be neglected locally where the free surface curvature is important. Capillarity starts to play a role on the dynamics of the residual jet during the rundown as it is shown in Fig. 18. Surface tension which has a stabilizing effect does not avoid the formation of the residual jet. This feature lead us to believe that the occurrence of the residual jet is not an numerical artefact of the present method.



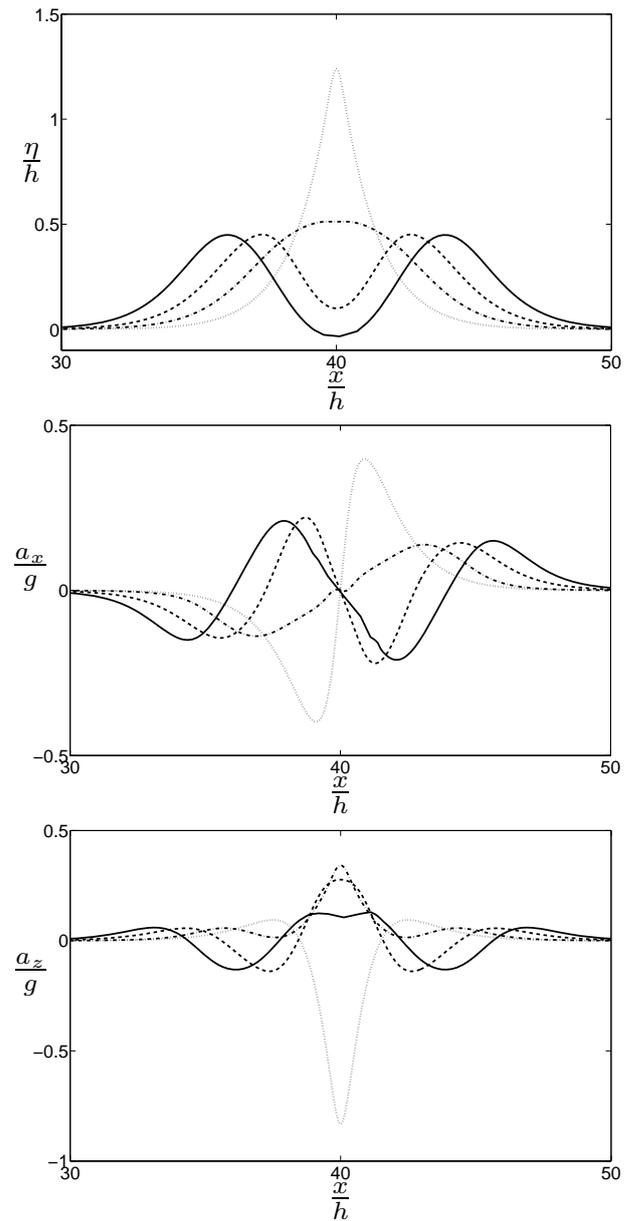
**Fig. 12.** Rundown for soliton amplitude  $a/h=0.2$ . Free surface elevation and horizontal and vertical accelerations (from top to bottom) at several instants of time.  $\cdots t/\tau=32$ ,  $-\cdot-t/\tau=34$ ,  $---t/\tau=35$ ,  $-t/\tau=36.5$ .

### 3.1.5 Instantaneous wall force

The head-on collision of two equal solitary waves is equivalent to the reflexion of one solitary wave by a vertical wall. Following Cooker et al. (1997) we have computed the instantaneous wall force up to  $a/h=0.8$ . The wall is assumed to be located in the middle of the numerical tank where the collision of the two solitary waves occurs. Figure 19 shows the instantaneous wall force  $F_w$  during the runup as a function of time relative to  $t_0$ . To compute the wall force, the pressure



**Fig. 13.** Runup for soliton amplitude  $a/h=0.5$ . Free surface elevation and horizontal and vertical accelerations (from top to bottom) at several instants of time.  $\cdots t/\tau=12$ ,  $---t/\tau=15$ ,  $-t/\tau=17$ .



**Fig. 14.** Rundown for soliton amplitude  $a/h=0.5$ . Free surface elevation and horizontal and vertical accelerations (from top to bottom) at several instants of time.  $\cdots t/\tau=17$ ,  $---t/\tau=18.5$ ,  $---t/\tau=19.5$ ,  $-t/\tau=20.5$ .

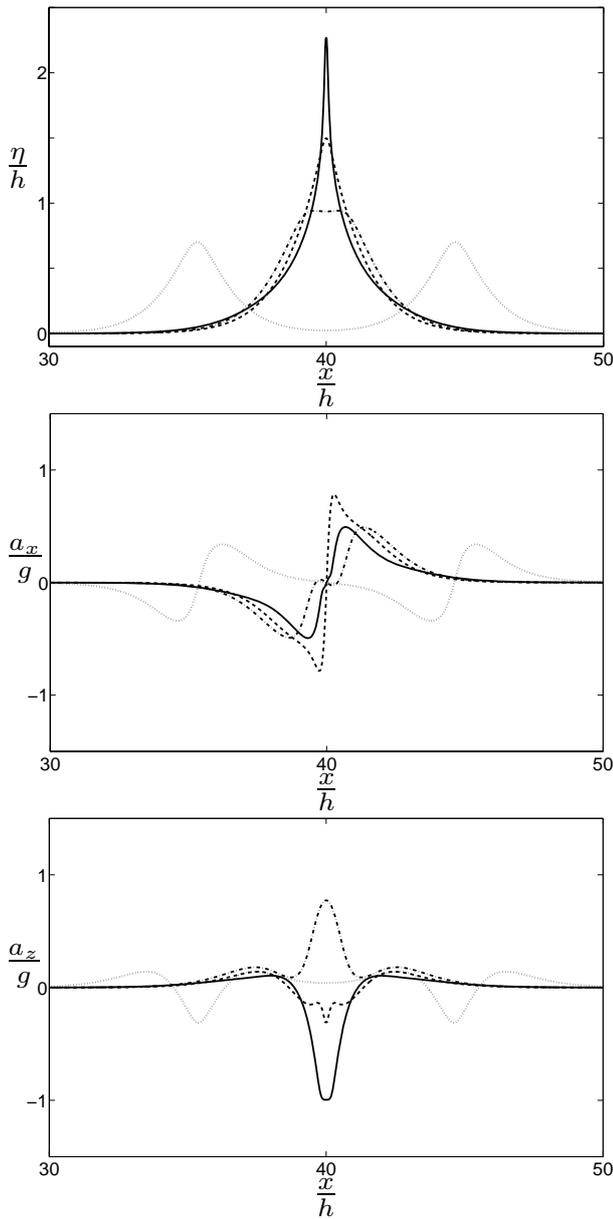
$P(z)$  along the vertical wall is determined by using Bernoulli equation :

$$\frac{P(z)}{\rho} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - gz. \quad (11)$$

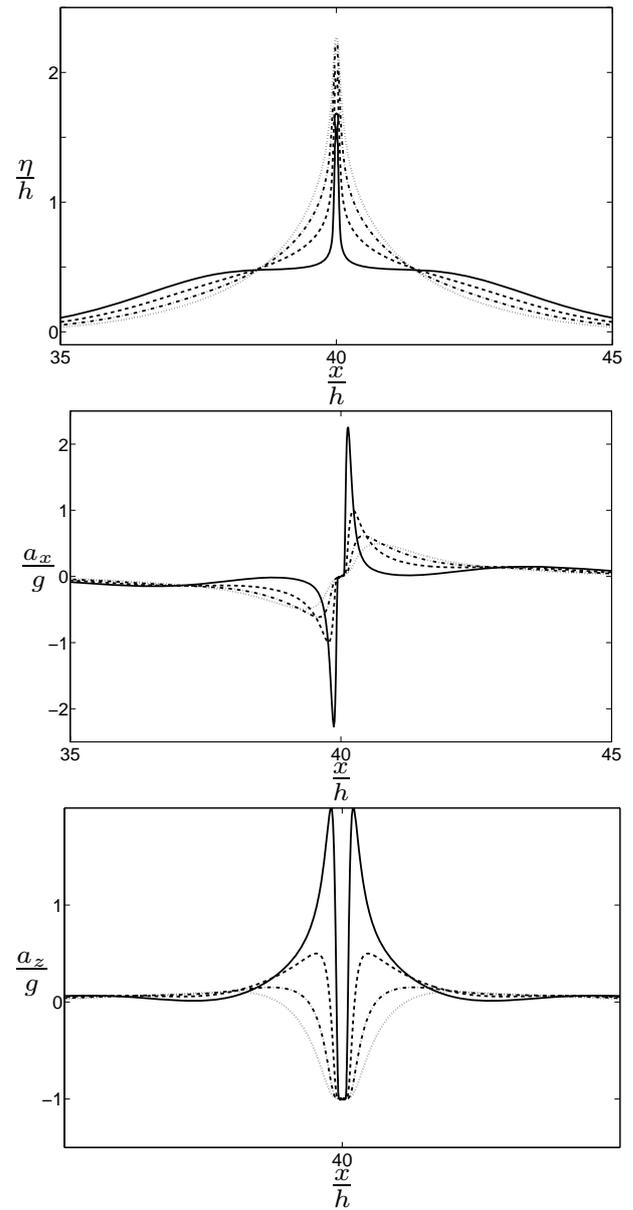
Hence, the wall force is given by :

$$F_w = \int_{-h}^{\eta} P(z) dz. \quad (12)$$

Our results are in very good agreement with those of Cooker et al. (1997) as shown in Fig. 19. For  $a/h < 0.3$  the maximum force occurs at maximum runup, the pressure in



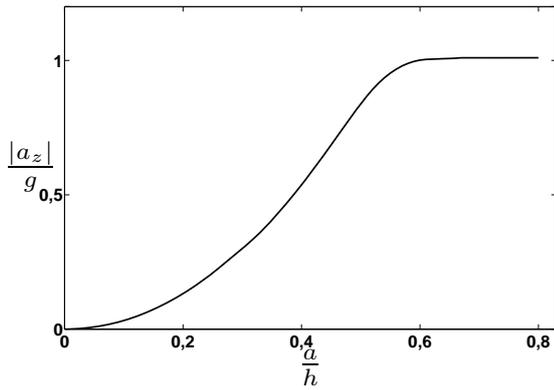
**Fig. 15.** Runup for soliton amplitude  $a/h=0.7$ . Free surface elevation and horizontal and vertical accelerations (from top to bottom) at several instants of time.  $\cdots t/\tau=12$ ,  $-\cdot-t/\tau=15$ ,  $---t/\tau=15.5$ ,  $-t/\tau=16.35$ .



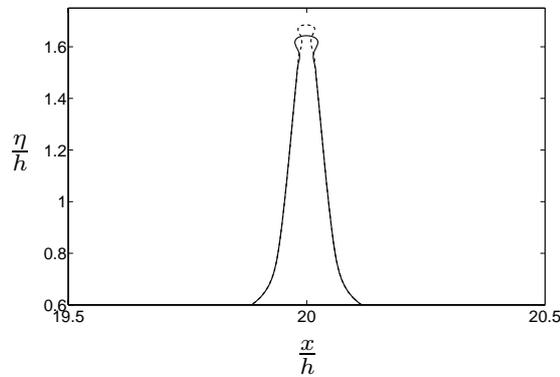
**Fig. 16.** Rundown for soliton amplitude  $a/h=0.7$ . Free surface elevation and horizontal and vertical accelerations (from top to bottom) at several instants of time.  $\cdots t/\tau=16.35$ ,  $-\cdot-t/\tau=16.55$ ,  $---t/\tau=16.75$ ,  $-t/\tau=16.95$ .

the fluid is like in hydrostatic case. For  $a/h > 0.4$  the vertical acceleration of the free surface is significant during the runup. As discussed by Cooker et al. (1997) the maximum force is obtained before maximum runup because the upsurging wave forms a narrow jet. For large  $a/h$  values, a second maximum force occurs because there is another increase in the fluid pressure. For their case  $a/h=0.7$  Cooker et al. (1997) were not sure whether there is also a second peak past  $(t-t_0)/\tau=0$ . Our computations confirm that there is indeed

a second peak for the case  $a/h=0.7$ . We have extended the calculation of the wall force to  $a/h=0.8$  and obtained a similar behaviour. We plot in Fig. 20 the maximum instantaneous force  $(F_w)_m$  as function of  $a/h$ . Our results are in agreement with those of Cooker et al. (1997).



**Fig. 17.** Evolution of the maximum of vertical acceleration as a function of  $a/h$ .

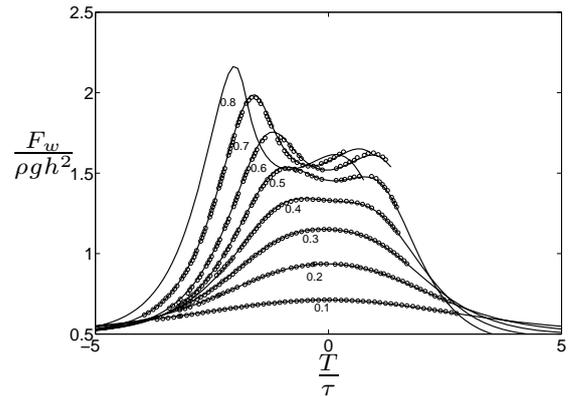


**Fig. 18.** Residual falling jet for initial amplitude  $a/h=0.69$  with and without surface tension: jet with surface tension (solid line), jet without surface tension (dashed line).

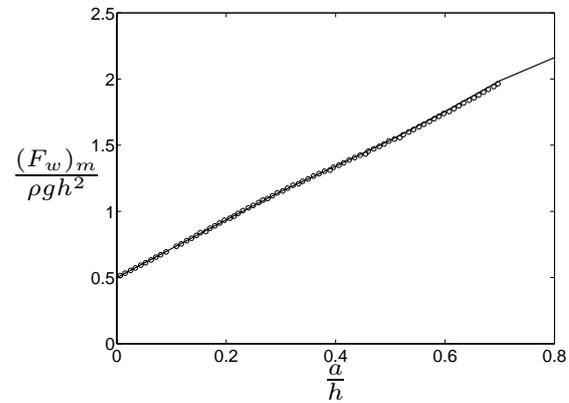
### 3.2 Head-on collision of two unequal amplitude solitary waves

In this section we consider the collision of two solitary waves with different amplitudes  $a_r/h$  and  $a_l/h$ . Indices  $r$  and  $l$  denote waves propagating from left to right and from right to left, respectively.

Figures 21 and 22 show free surface profiles at several instant of time for two numerical experiments corresponding to  $(a_r/h, a_l/h)=(0.40, 0.10)$  and  $(a_r/h, a_l/h)=(0.70, 0.80)$ , respectively. During the maximum of runup the wave presents an asymmetric profile. This asymmetry increases with the wave amplitude of the two solitons. For large values of the amplitude, an oblique residual jet develops during the rundown as shown in Fig. 22. Similarly to the symmetric case the solitons suffer from phase shift. A comparison between the analytical results obtained by Su and Mirie (1980) and presents results is given in Table 1. In the table are given for several value on the two initial solitary waves the max-



**Fig. 19.** Instantaneous wall force as function of time relative to  $t_0$  ( $T=t-t_0$ ) for selected values of  $a/h$ .  $\circ$  Cooker et al. (1997); — present results.



**Fig. 20.** Maximum instantaneous force plotted as function of  $a/h$ .  $\circ$  Cooker et al. (1997); — present results.

imum runup,  $R/h$ , phase shifts due to the collision of the two solitons,  $\Delta x_r/h$  and  $\Delta x_l/h$  computed numerically and the corresponding analytical results derived by Su and Mirie (1980),  $R_{SM}/h$ ,  $\Delta x_{rSM}/h$  and  $\Delta x_{lSM}/h$ :

$$\frac{R_{SM}}{h} = \frac{a_r}{h} + \frac{a_l}{h} + \frac{1}{2} \frac{a_r a_l}{h^2} + \frac{3}{8} \frac{a_r a_l}{h^2} \left( \frac{a_r}{h} + \frac{a_l}{h} \right), \quad (13)$$

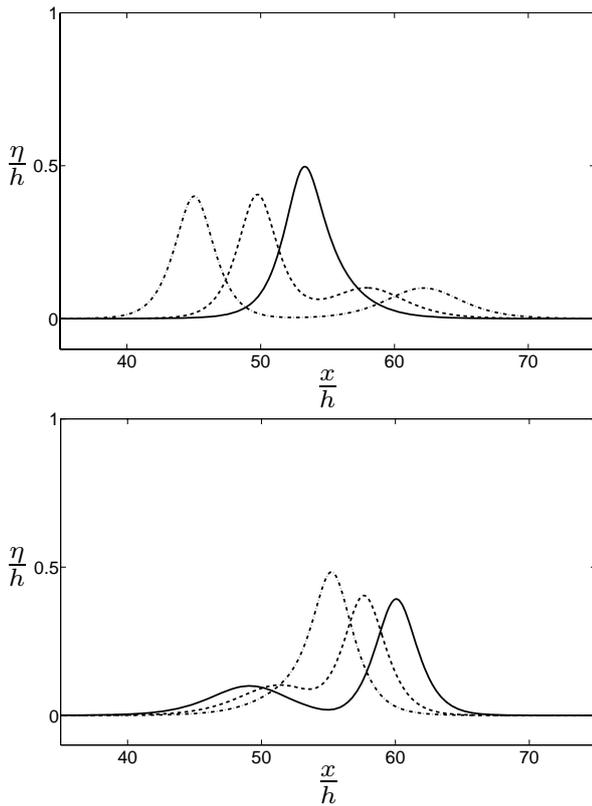
$$\frac{\Delta x_{rSM}}{h} = \left( \frac{1}{3} \frac{a_l}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{a_l}{h} + \frac{3}{4} \frac{a_r}{h} \right), \quad (14)$$

$$\frac{\Delta x_{lSM}}{h} = - \left( \frac{1}{3} \frac{a_r}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{a_r}{h} + \frac{3}{4} \frac{a_l}{h} \right). \quad (15)$$

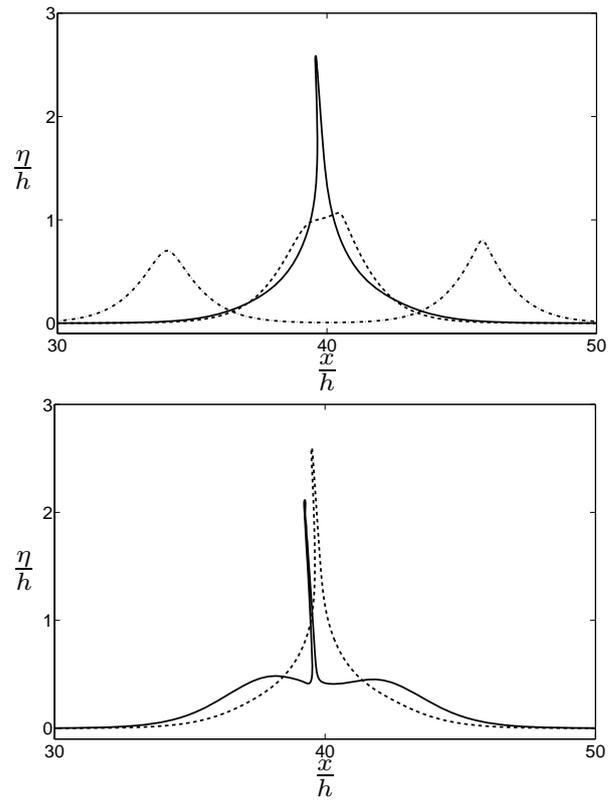
For the runup, we found an excellent agreement between our numerical results and those obtained from Su and Mirie's analytical expression whereas for phase shifts the deviation is larger.

**Table 1.** Comparison between present and Su and Mirie (1980) results for the maximum runup and phase shifts for several values of the amplitudes of the two solitary waves.

$a_r/h$	$a_l/h$	$R/h$	$R_{SM}/h$	$\Delta x_r/h$	$\Delta x_{rSM}/h$	$\Delta x_l/h$	$ \Delta x_{lSM} /h$
0.40	0.10	0.5239	0.5275	0.4401	0.4108	0.2152	0.2396
0.40	0.30	0.7867	0.7915	0.5000	0.4656	0.4353	0.4230
0.50	0.25	0.8422	0.8477	0.5627	0.5103	0.3894	0.4059
0.60	0.20	0.8903	0.8960	0.6100	0.5478	0.3469	0.3808
0.80	0.70	2.6013	2.0950	–	0.8391	–	0.8151



**Fig. 21.** Free surface elevation corresponding to counter propagating solitary waves with amplitudes  $a_r/h=0.40$  and  $a_l/h=0.10$  at several instants of time. (Top)  $-\cdot-t/\tau=17$ ,  $---t/\tau=21$ ,  $-t/\tau=24$ . (Bottom)  $-\cdot-t/\tau=26$ ,  $---t/\tau=28$ ,  $-t/\tau=30$ .



**Fig. 22.** Free surface elevation corresponding to counter propagating solitary waves with amplitudes  $a_r/h=0.70$  and  $a_l/h=0.80$  at several instants of time. (Top)  $-\cdot-t/\tau=11$ ,  $---t/\tau=15$ ,  $-t/\tau=16.65$ . (Bottom)  $---t/\tau=16.95$ ,  $-t/\tau=17.95$ .

#### 4 Conclusions

The present paper has extended the previous results of the literature on the maximum runup, wall residence time and phase shift, to very high values of the amplitude of two identical counter propagating solitons. We used the classical Boundary Integral Equation Method considering when necessary surface tension effects. We observe the same results with and without surface tension. Moreover, the particle acceleration at the free surface has been computed. A new phenomenon has been discovered corresponding to

the occurrence of a thin residual jet when the normalized amplitude of the solitons is larger than 0.60. We believe that the jet observed experimentally by Maxworthy (1976) is the same phenomenon. The mechanism of generation of this jet is still an open problem. We also computed the instantaneous force on the symmetric axis of the collision. The asymmetric case corresponding to two counter propagating solitary waves of different amplitudes has been investigated, too. Numerical computations of the maximum runup and phase shifts have been compared with analytical results provided by Su and Mirie (1980). Like the symmetric case, a thin

residual jet occurs for high values of the amplitude. Note that the residual jet is now oblique. Additional stability analysis and experiments are needed to confirm the present findings.

Edited by: I. Didenkulova

Reviewed by: two anonymous referees

## References

- Bona, J. L. and Chen, M.: A Boussinesq system for two-way propagation of nonlinear dispersive waves, *Physica D.*, 116, 191–224, 1998.
- Byatt-Smith, J. G. B.: An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation., *J. Fluid Mech.*, 49, 625–633, 1971.
- Byatt-Smith, J. G. B.: The reflection of a solitary wave by a vertical wall, *J. Fluid Mech.*, 197, 503–521, 1988.
- Chan, R. K. C. and Street, R. L.: A computer study of finite-amplitude water waves., *J. Computat. Phys.*, 6, 68–94, 1970.
- Chen, G., Kharif, C., Zaleski, S., and Li, J.: Two-dimensional Navier–Stokes simulation of breaking waves., *Phys. Fluids*, 11, 121–133, 1999.
- Cooker, M. J., Weidman, P. D., and Bale, D. S.: Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall, *J. Fluid Mech.*, 342, 141–158, 1997.
- Craig, W., Guyenne, P., Hammack, J., Henderson, D., and Sulem, C.: Solitary wave interactions., *Phys. Fluids*, 18, 1–25, 2006.
- Fenton, J. D. and Rienecker, M. M.: A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems : application to solitary-wave interactions., *J. Fluid Mech.*, 118, 411–443, 1982.
- Maxworthy, T.: Experiments on collisions between solitary waves., *J. Fluid Mech.*, 76, 177–185, 1976.
- Mirie, R. M. and Su, C. H.: Collisions between two solitary waves. Part 2. A numerical study., *J. Fluid. Mech.*, 115, 475–492, 1982.
- Oikawa, M. and Yajima, N.: Interactions of solitary waves - a perturbation approach to nonlinear systems., *J. Phys. Soc. Japan*, 34, 1093–1099, 1973.
- Pelinovsky, E., Troshina, E., Golinko, V., Osipenko, N., and Petrukhin, N.: Runup of tsunami waves on a vertical wall in a basin of complex topography., *Phys. Chem. Earth (B)*, 24, 431–436, 1999.
- Power, H. and Chwang, A. T.: On reflection of a planar at a vertical wall., *Wave Motion*, 6, 183–195, 1984.
- Su, C. H. and Gardner, C. S.: Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation., *J. Math. Phys.*, 10, 536–539, 1969.
- Su, C. H. and Mirie, R. M.: On head-on collisions between two solitary waves., *J. Fluid Mech.*, 98, 509–525, 1980.
- Tanaka, M.: The stability of solitary waves., *Phys. Fluids*, 29, 650–655, 1986.
- Taylor, S. G.: The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes, *Proc. Roy. Soc. London*, 201, 192–196, 1950.
- Temperville, A.: Interaction of solitary waves in shallow water theory., *Arch. Mech.*, 31, 177–184, 1979.
- Touboul, J. and Kharif, C.: Two-dimensional direct numerical simulations of the dynamics of rogue waves under wind action (Ed. Q. W. Ma), The world Scientific Publishing Co, 2009.
- Touboul, J., Giovanangeli, J. P., Kharif, C., and Pelinovsky, E.: Freak waves under the action of wind: Experiments and simulations, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 25(5), 662–676, 2006.

### 3.2 Dynamique de la formation du jet résiduel

Afin de mieux comprendre le phénomène de formation de ce jet résiduel, nous nous sommes intéressés à la dynamique du fluide à l'intérieur de celui-ci. Cependant, la difficulté majeure de cette approche réside dans la méthode numérique utilisée. En effet nous avons vu que la méthode BIEM telle que nous l'avons écrite nous permet d'obtenir des solutions uniquement sur le contour du domaine. Il nous faut donc réécrire l'équation intégrale 1.19, en changeant la valeur de l'angle interne  $c(Q)$  (éq. 1.21) en prenant  $c(Q) = -2\pi$

$$\int_{\partial\Omega} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl = c(Q) \phi(Q). \quad (2.18)$$

On discrétise la colonne d'eau pour une abscisse donnée (nous prendrons ici le centre de la collision), puis on résout cette équation dans le fluide sur ce maillage. Il en résulte la valeur du potentiel des vitesses sur la colonne d'eau.

#### Calcul de la pression dans le fluide

Nous pouvons grâce à cette méthode obtenir des données inaccessibles précédemment, telles la vitesse du fluide, ou encore sa pression. Nous allons d'ailleurs dans un premier temps, calculer la pression dans le fluide, mais également le gradient de pression. Etant donné que nous avons formulé l'hypothèse qu'une instabilité de Rayleigh-Taylor pouvait être responsable de la formation du jet résiduel, il est intéressant d'observer le comportement du gradient de pression, en l'occurrence les variations de son signe. Le changement de signe du gradient de pression traduit le fait que l'accélération particulaire excède celle de la gravité comme on peut le démontrer à partir des équations d'Euler

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \mathbf{g} \quad (2.19)$$

avec  $\mathbf{g} = (0, -g)^t$ ,  $g > 0$ .

La pression dans le fluide est déterminée en utilisant l'équation de Bernoulli

$$\frac{P(z)}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \phi)^2 - gz \quad (2.20)$$

de la même façon qu'elle l'a été pour le calcul des forces dans la section 3.1.

Nous présentons sur une même figure les profils de pression et de son gradient sur l'axe de symétrie de la collision ainsi que les profils de surface libre correspondants. Chaque figure est composée de quatre profils à différents instants pour une même valeur du paramètre  $a/h$ . La pression est représentée en pointillés, son gradient l'est en trait plein. Le profil *a*) correspond à un instant avant la collision, le profil *b*) correspond à un instant durant la collision ("runup"), le profil *c*) correspond au maximum de runup et le profil *d*) à la phase de rundown. Nous rappelons ici que la pression atmosphérique est prise égale à 0.

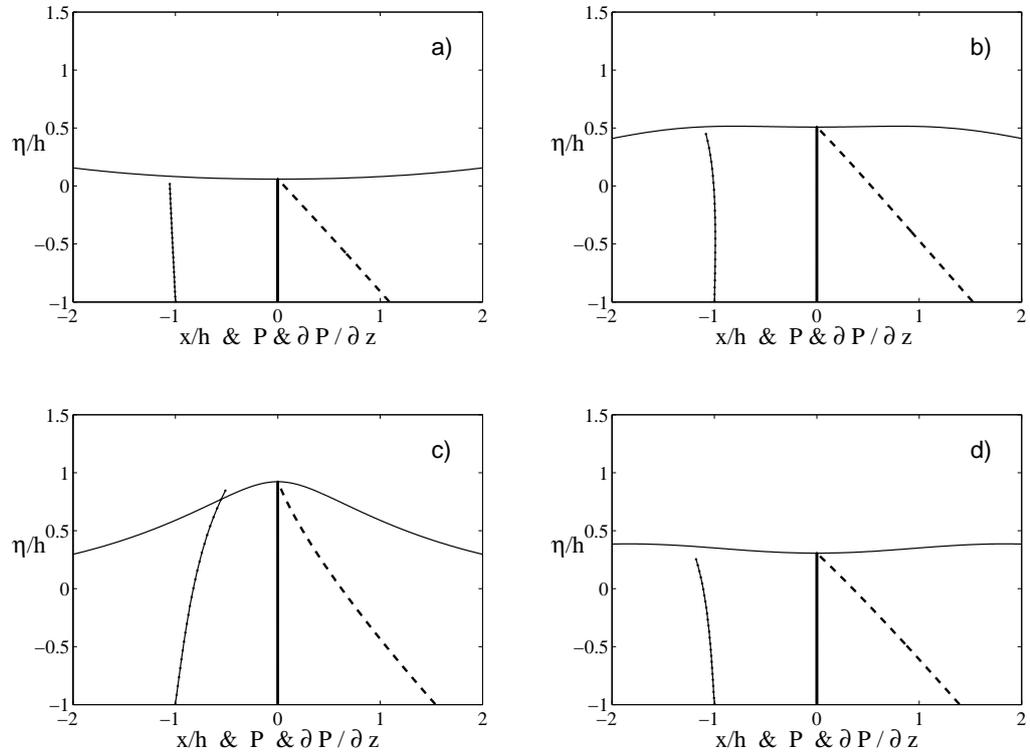


FIG. 2.7 – Evolution à différents instants de la pression (pointillés) et de son gradient (trait plein) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude  $a/h = 0.4$

La figure 2.7 représente l'évolution à différents instants de la pression et de son gradient en fonction de  $z$  pour des ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.4$ . La pression se comporte dans ce cas de façon quasi hydrostatique durant l'intégralité du runup. En effet le gradient de pression ne subit pas d'importantes variations. Ce résultat est attendu lorsque l'on se trouve en eau peu profonde dans des cas de vagues faiblement non linéaires.

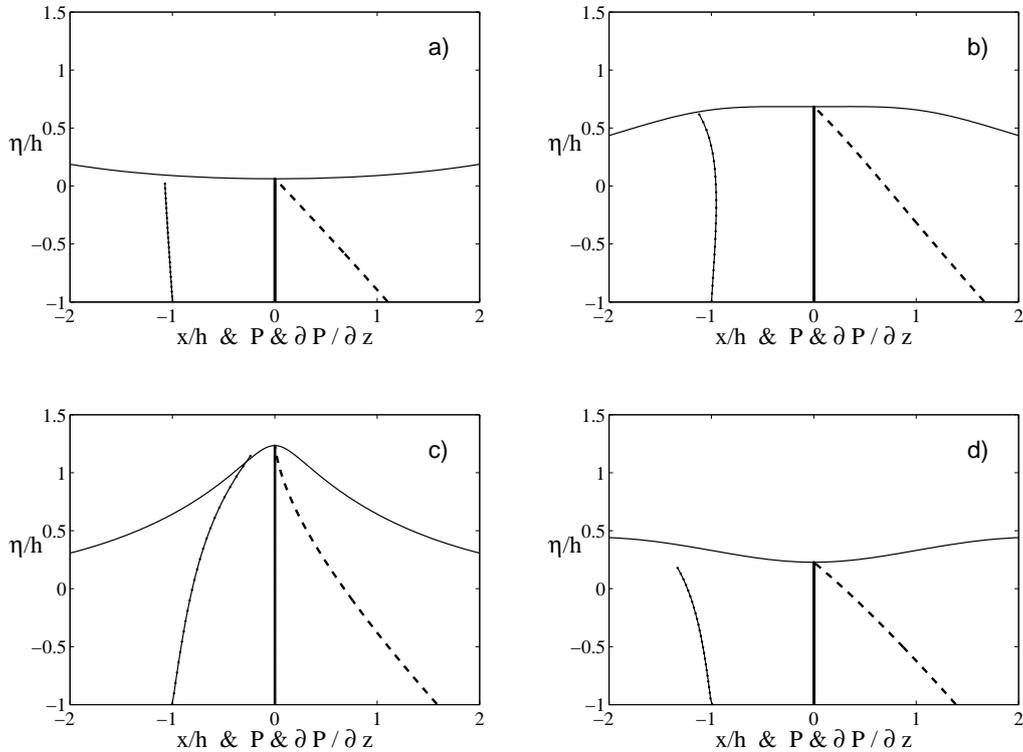


FIG. 2.8 – Evolution à différents instants de la pression (pointillés) et de son gradient (trait plein) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude  $a/h = 0.5$

La figure 2.8 montre l'évolution à différents instants de la pression et de son gradient en fonction de  $z$  dans le cas de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.5$ . Ce cas plus fortement non linéaire ne présente pas la formation de jet résiduel. Rappelons que le seuil de formation de ce jet est  $a/h = 0.6$  (section 3.1). La variation du gradient de pression dans le fluide devient plus importante que dans le cas précédent. On observe que la valeur de celui-ci tend vers 0 à l'approche de la surface libre à l'instant correspondant au maximum de runup (profil  $c$ ). Il est intéressant de noter que l'annulation du gradient de pression traduit le fait que l'accélération verticale devient égale à celle de la gravité, par conséquent que le fluide est en chute libre.

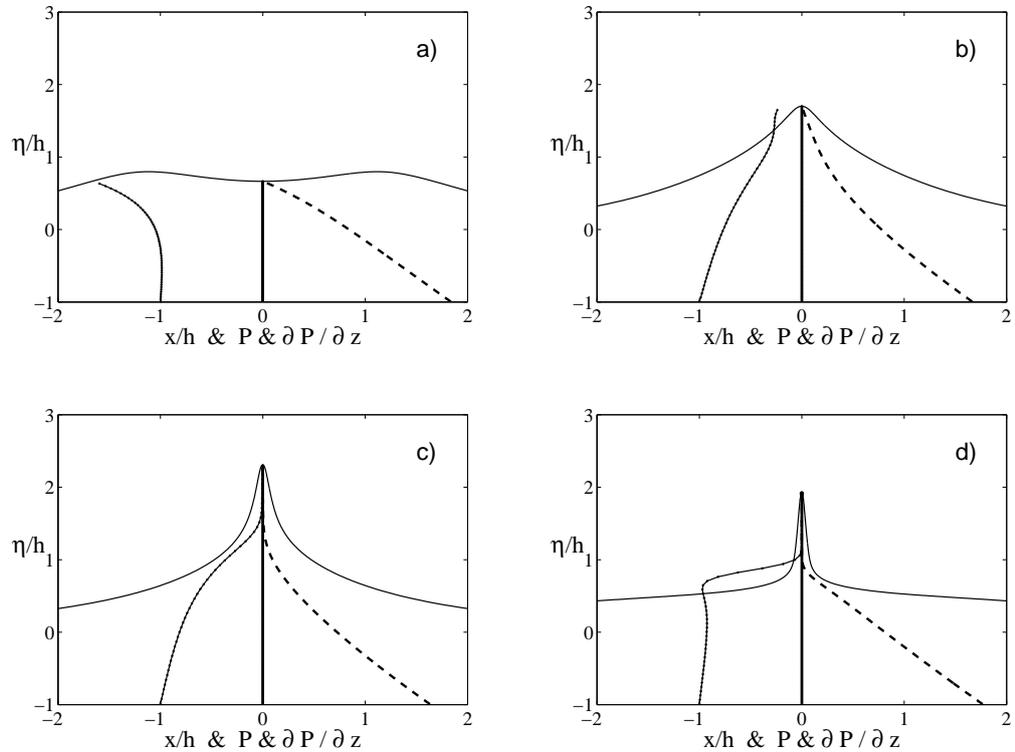


FIG. 2.9 – Evolution à différents instants de la pression (pointillés) et de son gradient (trait plein) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude  $a/h = 0.7$

Plaçons-nous dans un cas où la formation du jet résiduel est pleinement développée, par exemple lors de la collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.7$  représentée par la figure 2.9. Nous constatons que le gradient de pression s'annule cette fois et reste nul sur toute la hauteur du jet résiduel alors formé (profil *c*). La pression dans le jet est alors constante et nulle par continuité de la pression à la surface libre (en effet la pression atmosphérique est fixée à 0). Ce résultat reste cohérent avec le fait que le jet résiduel est en chute libre comme cela a été montré dans la section 3.1.

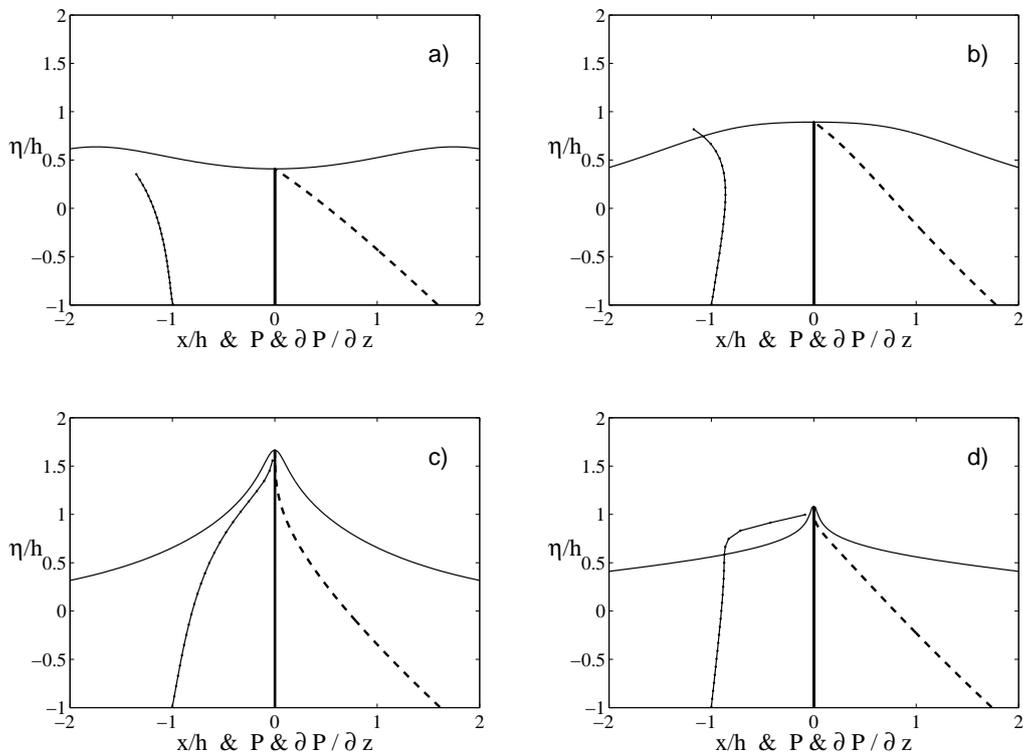


FIG. 2.10 – Evolution à différents instants de la pression (pointillés) et de son gradient (trait plein) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude  $a/h = 0.6$

Le résultat précédent est confirmé par la figure 2.10 qui représente l'évolution à différents instants de la pression et de son gradient en fonction de  $z$  pour deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.6$ , cas limite pour la formation du jet résiduel. Le gradient de pression s'annule également mais de façon plus brève. Le jet résiduel dans ce cas n'est pas complètement développé, il est de faible amplitude, et par conséquent éphémère.

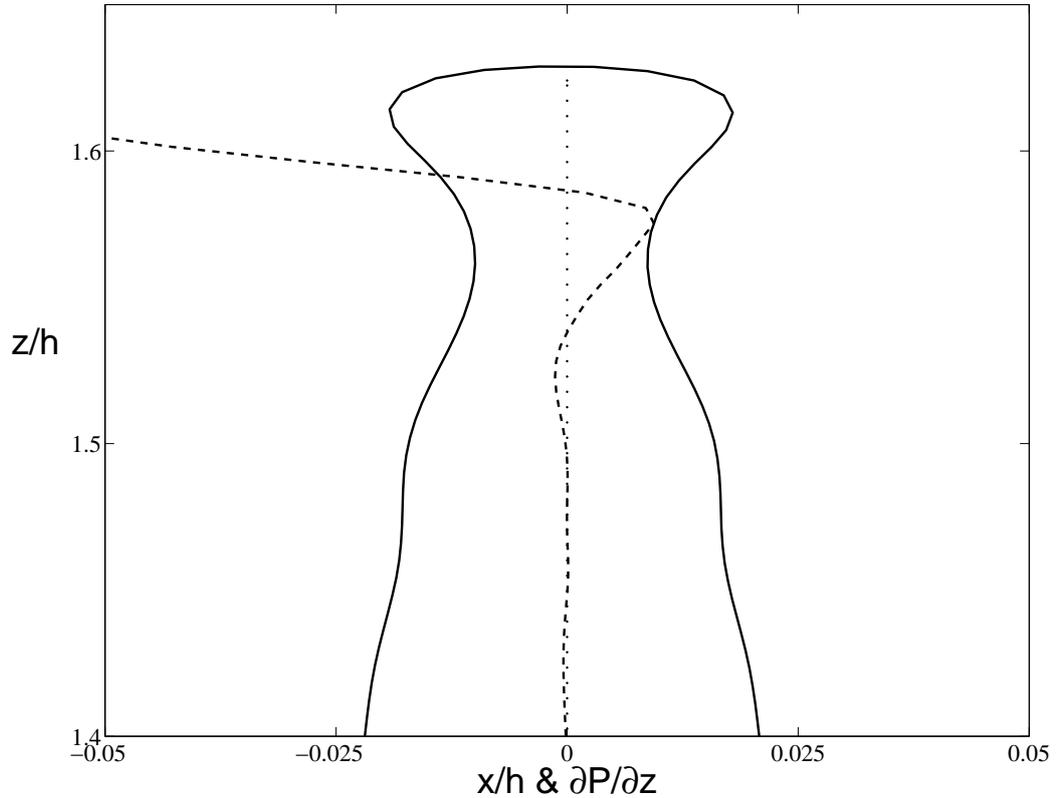


FIG. 2.11 – Gradient de pression dans le fluide (pointillés) au centre de la collision de deux solitons d'amplitude  $a/h = 0.7$

Cependant, le gradient de pression n'est pas strictement constant et nul. En effet, nous observons des oscillations d'amplitude relativement faible, de l'ordre  $10^{-2}$  autour de 0, le gradient de pression devenant par là-même localement positif. C'est ce que nous pouvons constater sur la figure 2.11 qui représente le profil du gradient de pression dans le fluide au niveau de la crête du jet pour la collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.7$ . L'accélération devient alors localement plus importante que la gravité. Cette configuration peut alors entraîner des instabilités de type Rayleigh-Taylor, comme nous l'avons supposé précédemment.

### Calcul de la vitesse verticale dans le fluide

La résolution du problème à l'intérieur du fluide nous donne accès à la valeur du potentiel des vitesses qui nous a permis de calculer la pression. Par conséquent nous sommes également en mesure de calculer les vitesses dans le fluide. C'est ce que nous faisons dans cette section. Dans le cas de deux ondes solitaires d'égales amplitudes, le problème de la collision de deux ondes solitaires est équivalent à l'impact d'une seule onde solitaire sur un mur vertical. On en déduit ainsi simplement que la vitesse horizontale dans le fluide sur l'axe de collision est nulle. Nous nous intéressons donc au comportement de la vitesse verticale sur l'axe de collision.

De même que pour la pression, les figures représentent les profils de vitesse sur la hauteur du fluide le long de l'axe de symétrie de la collision. Chaque figure présente les profils de vitesse à différents instants pour une même valeur du paramètre de non linéarité  $a/h$ . Sur chaque figure le profil *c*) correspond à l'instant de maximum de runup. Les profils *a*) et *b*) correspondent à des instants durant le runup, le profil *d*) correspond à un instant durant le rundown.

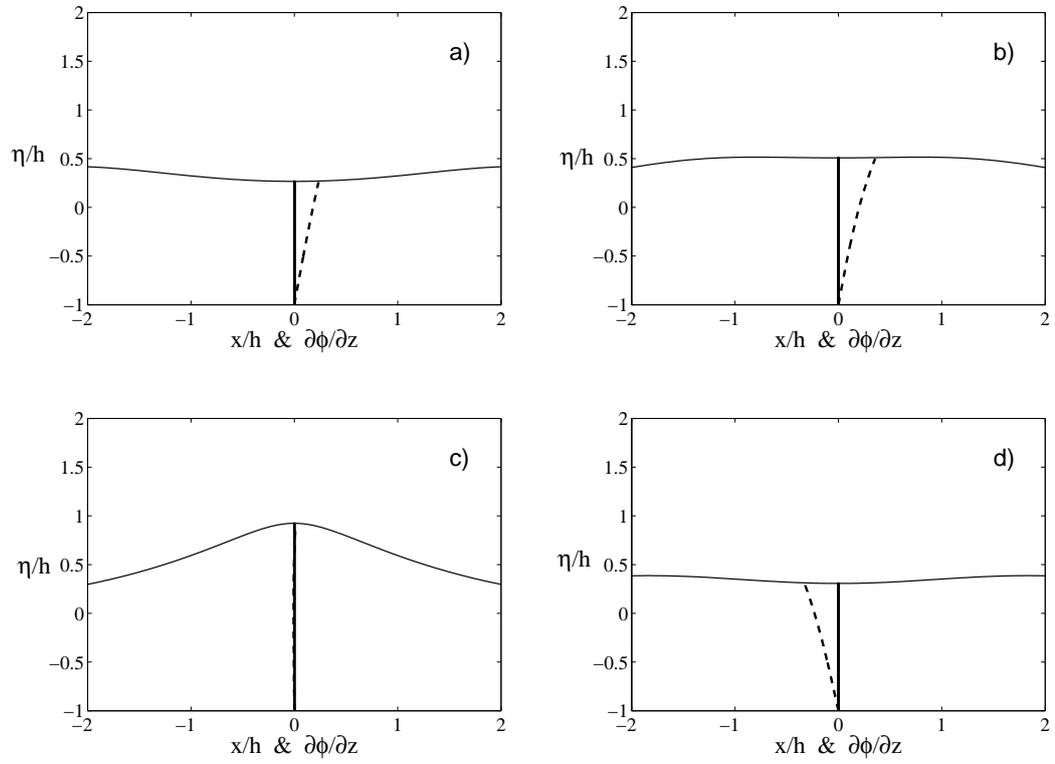


FIG. 2.12 – Evolution à différents instants de la vitesse verticale (pointillés) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude  $a/h = 0.4$

La figure 2.12 représente l'évolution à différents instants de la vitesse verticale en fonction de  $z$  pour la collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.4$ . Il s'agit toujours d'un cas classique sans présence de jet résiduel. On constate que la vitesse de toutes les particules fluides sur la hauteur s'annule au moment du maximum de runup (profil *c*). Les profils de vitesse évoluent quasi linéairement avec la hauteur.

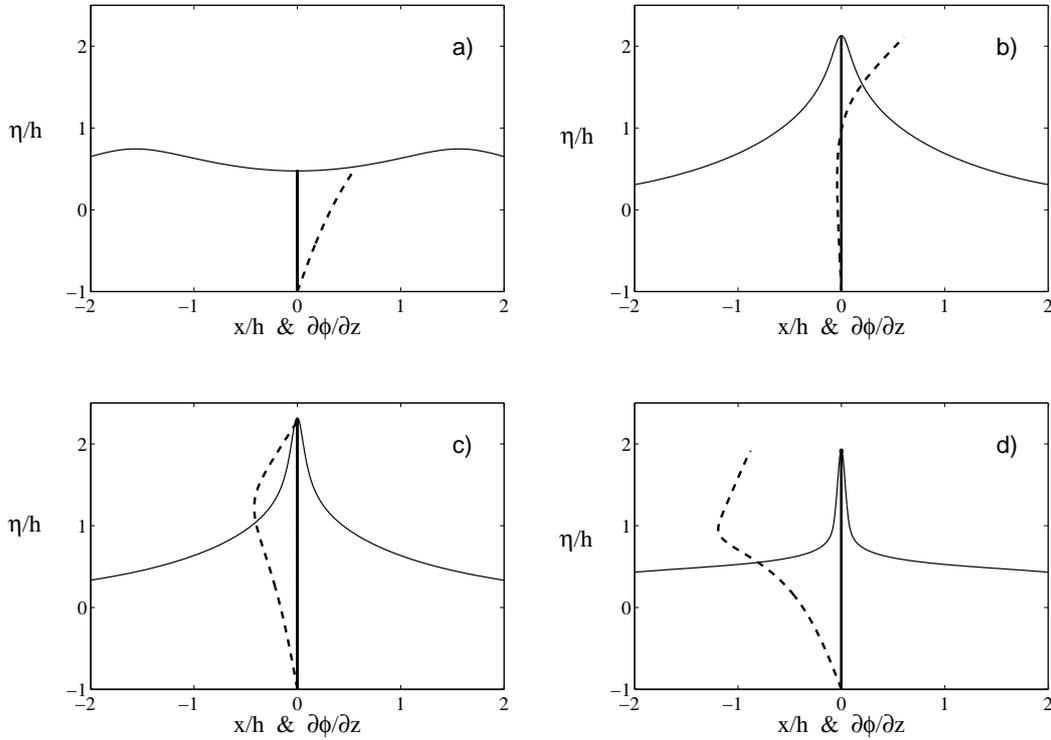


FIG. 2.13 – Evolution à différents instants de la vitesse verticale (pointillés) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude  $a/h = 0.7$

Nous augmentons la non linéarité en augmentant l'amplitude  $a/h$  des ondes solitaires. La figure 2.13 représente l'évolution à différents instants de la vitesse verticale en fonction de  $z$  pour la collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.7$ . C'est un cas fortement non linéaire où la formation du jet résiduel est complètement développée. Nous constatons que sur le profil *b*), c'est-à-dire avant l'atteinte du maximum de runup, la vitesse s'annule à mi-hauteur de la crête. Les vitesses au-dessus de ce point sont positives, c'est-à-dire que les particules fluides sont toujours en mouvement ascendant, et les vitesses sont négatives en-dessous de ce point, c'est-à-dire que ces particules fluides ont débuté leur mouvement descendant. Ce phénomène explique l'étirement du jet puisque le mouvement des particules fluides s'oppose. Il s'agit d'une configuration que l'on ne retrouve pas dans des cas faiblement non linéaires comme nous avons pu le voir dans le cas  $a/h = 0.4$ . La vitesse verticale admet ensuite un minimum durant la phase de rundown, contribuant encore à l'étirement du jet résiduel.

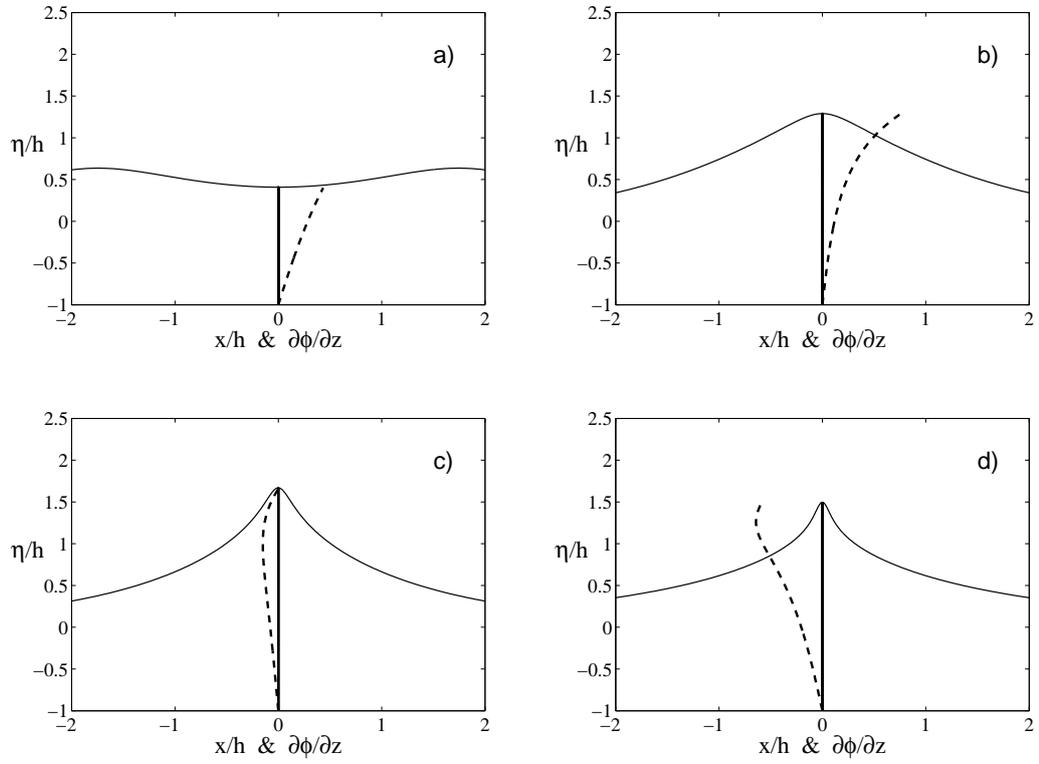


FIG. 2.14 – Evolution à différents instants de la vitesse verticale (pointillés) dans le fluide au centre de la collision de deux solitons d'amplitude  $a/h = 0.6$

La figure 2.14 représente l'évolution à différents instants de la vitesse verticale en fonction de  $z$  pour la collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.6$ , ce qui est le cas limite de la formation du jet résiduel. De la même façon que pour le cas  $a/h = 0.7$ , la vitesse verticale s'annule à mi-hauteur de la crête. On en déduit qu'il y a également étirement du jet, mais de façon plus brève. Nous constatons que la vitesse verticale admet un minimum lors de la phase de rundown tout comme dans le cas  $a/h = 0.7$ .

Pour qu'il y ait formation du jet résiduel, il faut que la vitesse verticale admette un minimum dans le fluide durant le rundown. Ce minimum doit être également durable. En effet nous avons observé des cas sans jet résiduel (entre  $a/h = 0.55$  et  $a/h = 0.6$ ) où la vitesse verticale admettait un minimum dans le fluide au moment du runup maximum, mais celui-ci disparaissait assez rapidement lorsque la phase de rundown commençait.

### 3.3 Instabilité au voisinage du maximum de "runup"

Dans la figure 9 de la section 3.1, nous observons l'apparition de vaguelettes au moment du maximum de runup pour des amplitudes  $a/h > 0.6$ . Dans cette sous-section nous nous intéressons au phénomène de génération de ces ondulations. D'où viennent ces perturbations? Sont-elles liées à la formation du jet? Sont-elles la manifestation d'une instabilité?

Longuet-Higgins & Cleaver (1994) et Longuet-Higgins et al. (1994) ont étudié les instabilités de crêtes des ondes de Stokes très cambrées en profondeur infinie. Ces instabilités sont la manifestation d'instabilités de type superharmonique. Plus tard Longuet-Higgins & Tanaka (1997) ont considéré l'instabilité de crêtes des ondes de Stokes et des ondes solitaires et ont trouvé des résultats similaires pour les deux types de vagues. Cette instabilité est une instabilité de l'écoulement interne et elle se développe pour des échelles de longueur de l'ordre du rayon de courbure de la crête. Dans leurs études sur les ondes de Stokes, Longuet-Higgins & Cleaver (1994) ont montré que le taux de croissance de cette instabilité est inversement proportionnel à  $\sqrt{R_c}$ , où  $R_c$  est le rayon de courbure de la crête. La similarité de la figure 2.15 avec la figure 6 de Longuet-Higgins & Cleaver (1994) (figure 2.16) peut nous suggérer que ces ondulations sont dues à une instabilité de crête. Pour les ondes solitaires, Longuet-Higgins & Tanaka (1997) ont trouvé des instabilités de crête pour des rayons de courbure  $R_c/h = 0.291$ . Dans notre cas, pour la collision de deux solitons de  $a/h = 0.6$ , cas pour lequel les ondulations à la surface et le jet résiduel font leur apparition, nous trouvons des rayons de courbure durant le runup allant jusqu'à  $R_c/h = 0.02$ . Cette valeur correspond dans Longuet-Higgins & Tanaka (1997) au rayon de courbure d'une onde solitaire d'amplitude  $a/h = 0.827$ , valeur très proche de la valeur critique pour un soliton de Tanaka qui est  $a/h = 0.8332$ . Jusqu'à maintenant, l'instabilité de crête n'a été étudiée que pour des ondes de gravité progressives de formes permanentes, alors que le mouvement dû à la collision de deux ondes solitaires n'est pas de forme permanente. Il est donc difficile d'interpréter les grandeurs obtenues pour le rayon de courbure, et d'affirmer que les ondulations observées à la surface correspondent à une instabilité de crête.

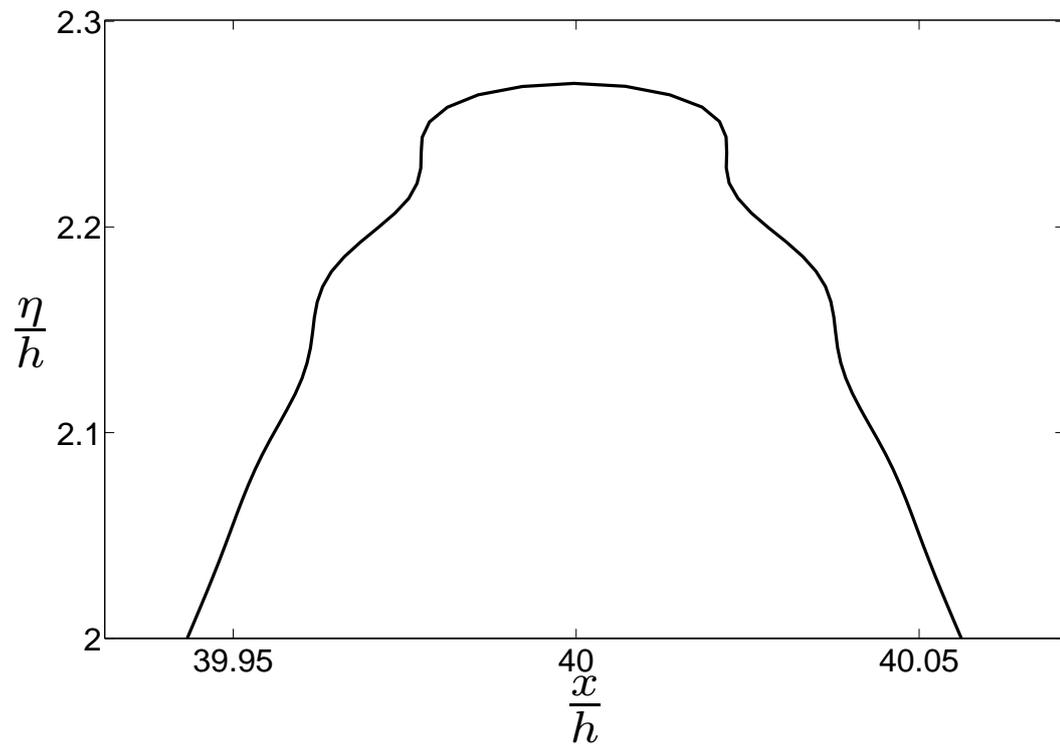


FIG. 2.15 – Apparition d'oscillations de la surface libre au moment du runup maximum pour  $a/h = 0.7$ .

*M. S. Longuet-Higgins and R. P. Cleaver*

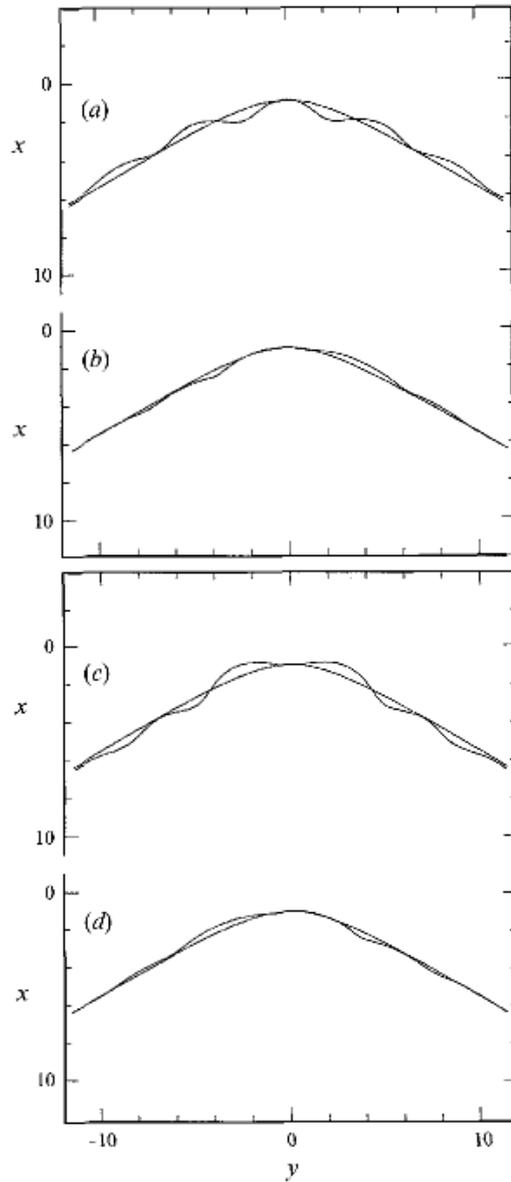


FIGURE 6. Profiles of the neutrally stable mode  $\sigma = 0.26359$  at four different phases. (a)  $\sigma t = 0$ , (b)  $\sigma t = \frac{1}{2}\pi$ , (c)  $\sigma t = \pi$ , (d)  $\sigma t = 2\pi$ .

FIG. 2.16 – Figure 6 issue de l'article de Longuet-Higgins & Cleaver (1994)

### Gravité apparente

Dans le repère accéléré, lié à la surface, la gravité effective ou apparente est  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}$  où  $\mathbf{g}$  est la gravité terrestre et  $\mathbf{a}$  l'accélération de l'eau à la surface (accélération orbitale). Dans le cas où la tension superficielle est ignorée  $\mathbf{g}'$  est normale à la surface. Puisque  $\mathbf{a} - \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P$ , on en déduit que  $\mathbf{g}'$  est orthogonal à la surface libre qui est une isobare ( $P = C^{ste}$ ). Ainsi la surface libre, dans ce nouveau référentiel, est une horizontale effective ou apparente. Notons que dans le repère accéléré, Henyey et al. (1988) ont montré que la relation de dispersion de perturbations à la surface libre, de fréquence  $\omega$  et de nombre d'onde  $k$ , est donnée par

$$(\omega - kU)^2 = g' \cdot k \quad (2.21)$$

où  $g' = (\mathbf{a} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}$  et  $U$  est la vitesse du fluide le long de la surface ou vitesse orbitale à la surface. La nouvelle fréquence dans le repère mobile diffère de l'ancienne fréquence par effet Doppler.

On écrit  $\mathbf{g}' = -g' \mathbf{n}$  (par analogie avec  $\mathbf{g} = -g \mathbf{z}$ ), où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à la surface défini dans le chapitre 1. Alors

$$g' \mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{g} \quad (2.22)$$

soit

$$g' = a_n - g_n \quad (2.23)$$

où  $a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$  et  $g_n = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ .

Nous avons donc

$$g_n = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-\eta_x}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Donc

$$g_n = \frac{-g}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \quad (2.25)$$

où  $g$  est la gravité. Nous pouvons donc comparer l'accélération normale  $a_n$  de la surface libre avec  $g_n$ .

Les figures 2.17 à 2.21 décrivent l'évolution le long de la surface libre de la gravité apparente à différents instants et pour plusieurs valeurs de l'amplitude  $a/h$ . Les profils *a)* *b)* *c)* *d)* et les profils *e)* *f)* correspondent respectivement à des instants durant la phase de runup et rundown.

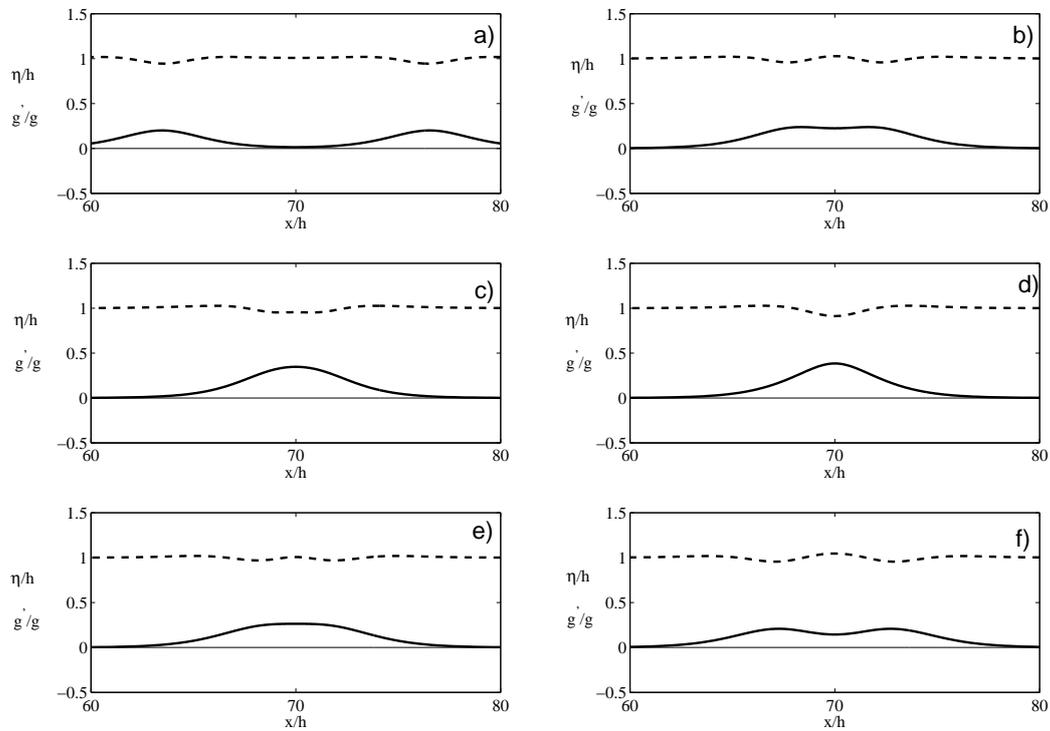


FIG. 2.17 – Evolution à différents instants de la gravité apparente  $g' = a_n - g_n$  (pointillés) à la surface libre pour  $a/h = 0.2$

La figure 2.17 décrit l'évolution à différents instants de  $g'$  le long de la surface libre dans le cas d'une collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.2$ . Il n'y a pas dans ce cas formation de jet résiduel. Ici  $g'$  ne change jamais de signe durant la collision. Les accélérations dans les cas faiblement non linéaires restent globalement petites.

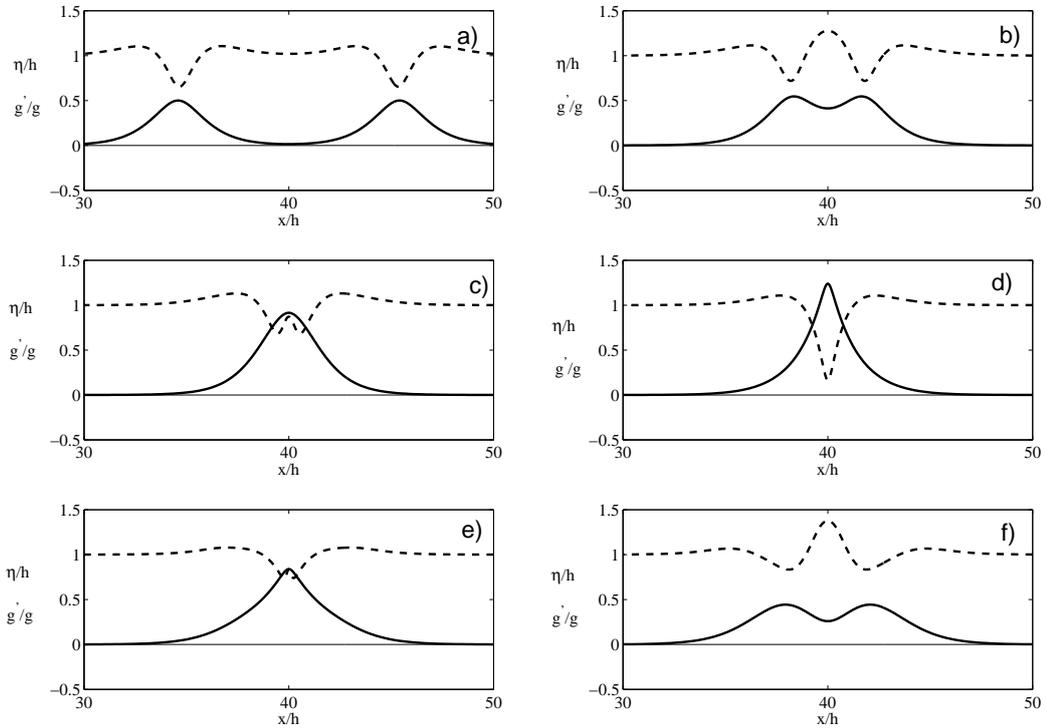


FIG. 2.18 – Evolution à différents instants de la gravité apparente  $g' = a_n - g_n$  (pointillés) à la surface libre pour  $a/h = 0.5$

Considérons maintenant un cas où la non linéarité est plus importante, comme par exemple le cas d'une collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.5$ . La figure 2.18 nous donne l'évolution à différents instants de la gravité effective  $g'$  à la surface libre. Nous sommes également ici dans un cas sans formation du jet résiduel. Nous constatons que  $g'$  ne change jamais de signe comme pour le cas  $a/h = 0.2$ . Cependant on peut voir que sur le profil *d*) de la figure 2.18, à un moment proche du maximum de runup,  $g'$  se rapproche de 0 au niveau de la crête de la collision.

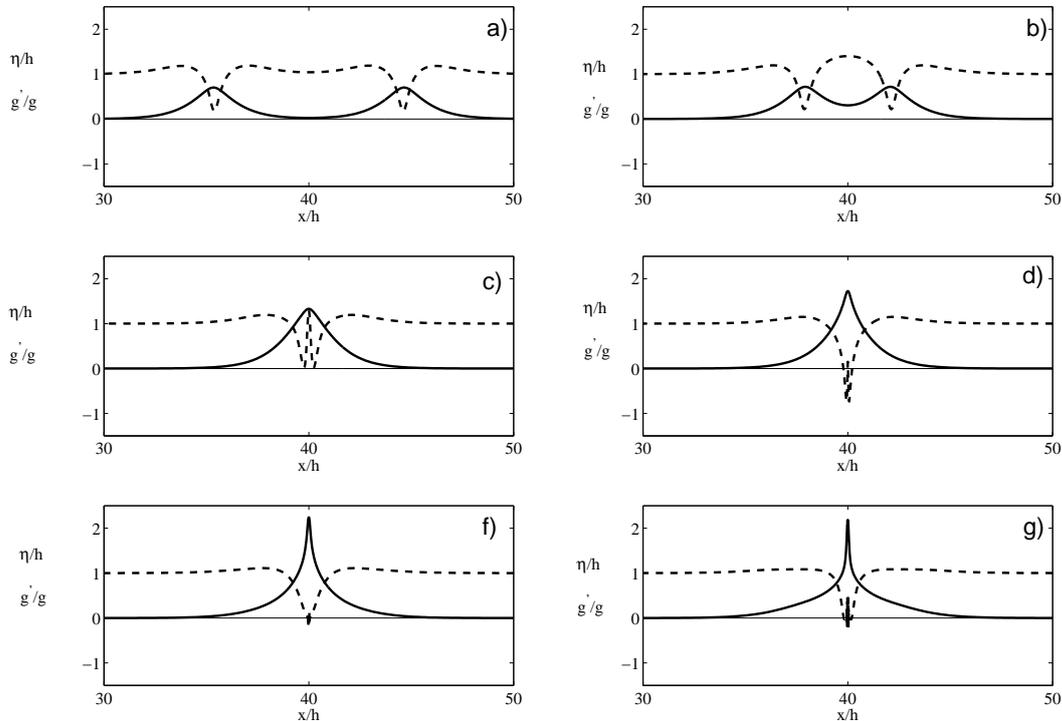


FIG. 2.19 – Evolution à différents instants de la gravité apparente  $g' = a_n - g_n$  (pointillés) à la surface libre pour  $a/h = 0.7$

Etudions alors un cas où la formation du jet résiduel est avérée. Sur la figure 2.19, nous est présentée l'évolution à différents instants de la gravité effective  $g'$  à la surface libre lors de la collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.7$ . Nous observons sur le profil *d)* de la figure 2.19 que  $g'$  change cette fois-ci de signe, à un instant précédent le runup maximum. Il se produit ensuite la formation du jet résiduel, avec des oscillations de l'accélération normale au niveau de la crête du jet. On observe sur la figure 2.21 les oscillations de la gravité effective autour de la crête durant le rundown. Ces profils sont des agrandissements des profils *d)* et *e)* de la figure 2.19.

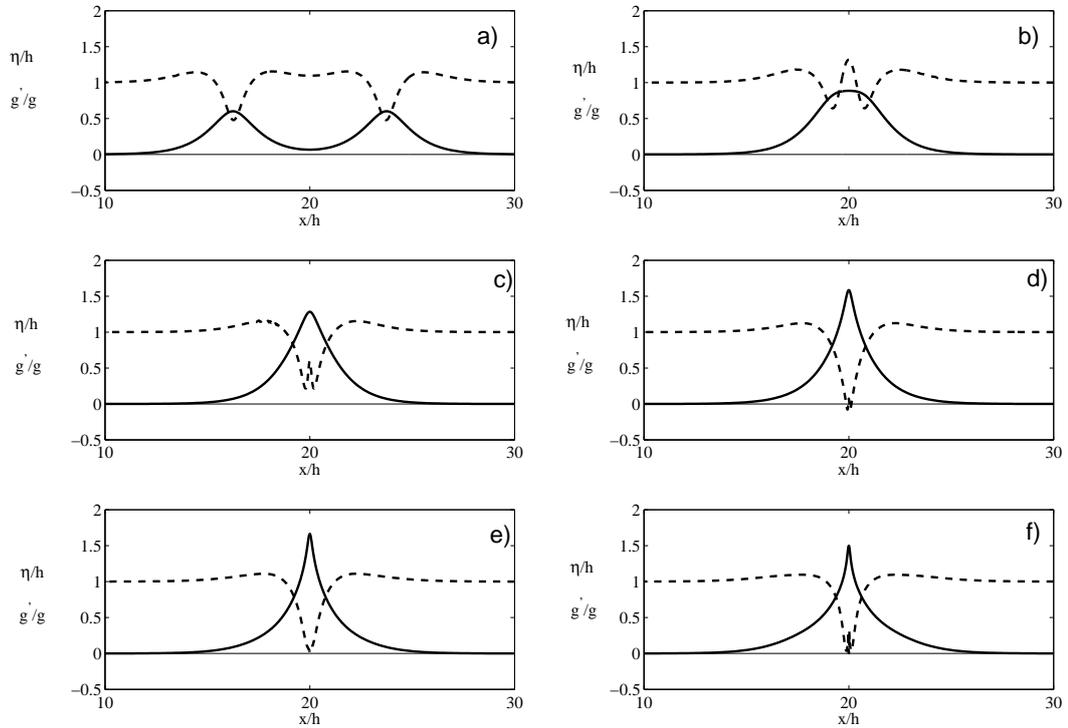


FIG. 2.20 – Evolution à différents instants de la gravité apparente  $g' = a_n - g_n$  (pointillés) à la surface libre pour  $a/h = 0.6$

Nous nous plaçons maintenant dans le cas critique de la formation du jet résiduel, c'est-à-dire dans le cas d'ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.6$ . La figure 2.20 présente l'évolution à différents instants de  $g'$  à la surface libre dans ce cas. On peut voir sur le profil *d)* de cette figure que  $g'$  tend vers 0 et change même de signe à un instant proche du maximum de runup. Survient ensuite la formation d'un jet résiduel, avec également quelques oscillations de l'accélération verticale à la crête de la collision.

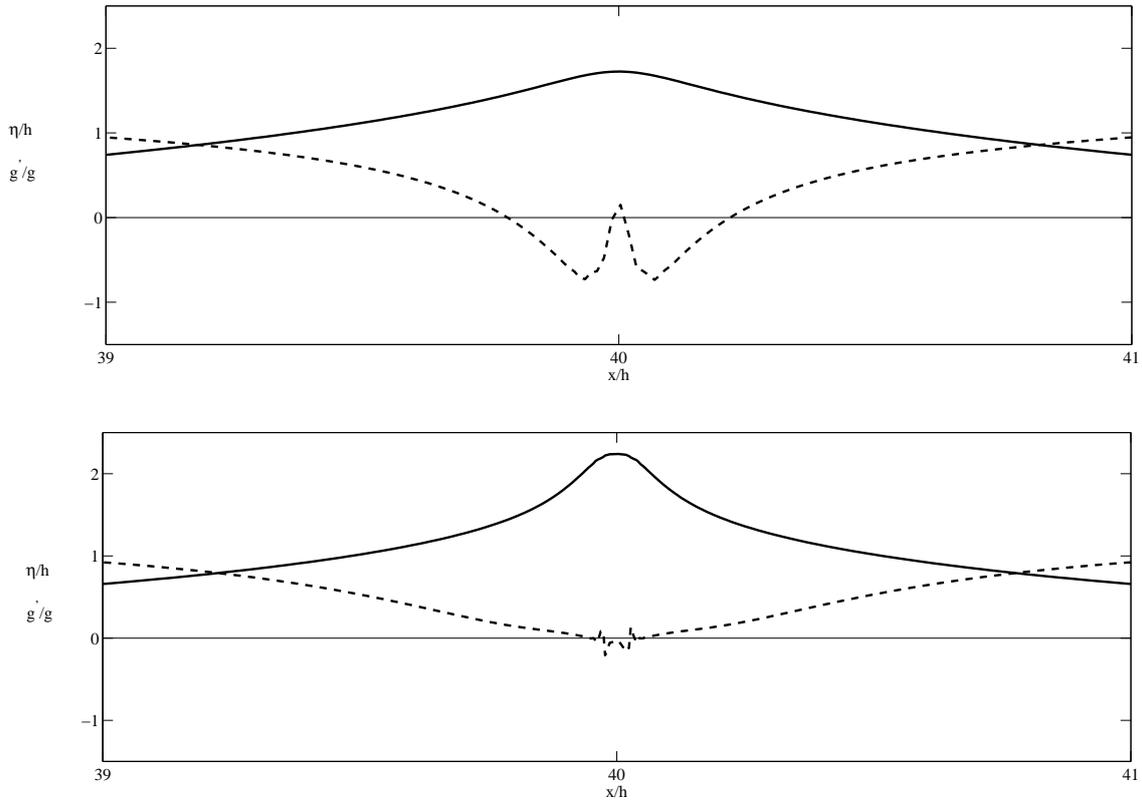


FIG. 2.21 – Gravité apparente  $g' = a_n - g_n$  (pointillés) à la surface libre à deux instants proches du maximum de runup pour  $a/h = 0.7$

Nous avons vu ici qu'il existe une corrélation entre les accélérations mesurées à la surface libre et les perturbations apparaissant lors de la formation du jet résiduel, comme il peut en exister lors d'une instabilité de type Rayleigh-Taylor. Les ondulations apparaissant le long de la surface libre dans les cas de formation du jet résiduel sont susceptibles d'être des instabilités de type Rayleigh-Taylor. Rappelons que l'instabilité de Rayleigh-Taylor est une instabilité de l'interface séparant deux fluides de densités différentes, par exemple lorsque la gravité affecte deux fluides, le plus dense se trouvant sur le moins dense. L'équilibre est instable et toute perturbation va s'amplifier et libérer de l'énergie potentielle. C'est la configuration découverte par Lord Rayleigh en 1883. Plus tard, en 1950, Taylor a montré que cette situation est équivalente au cas de deux fluides accélérés, comme lorsque l'on projette un verre d'eau vers le sol avec une accélération supérieure à celle de la gravité. Mais ces configurations sont simples, avec des accélérations uniformes sur les interfaces.

### Relation de dispersion des perturbations

On considère localement les perturbations pouvant se développer à la surface libre de l'écoulement de base au voisinage du maximum de runup comme des ondes planes dont l'amplitude, la fréquence et le nombre d'onde varient lentement spatialement et temporellement. De plus, on suppose que leurs échelles caractéristiques de temps et d'espace sont petites devant celles de l'écoulement de base. Sous ces conditions et à partir d'une méthode de type WKB, Henyey et al. (1988) ont montré que la relation de dispersion linéaire d'ondes courtes voyageant à la surface libre d'une onde longue dans le repère lié à la surface libre est donnée par l'équation 2.21 (la tension de surface a été négligée).

Sous les mêmes conditions Kharif (1990) a montré que l'étude de la propagation d'ondes courtes à la surface d'une onde longue de type Stokes d'amplitude arbitraire pouvait se ramener à une analyse de stabilité superharmonique linéaire. Longuet-Higgins (1987) a également étudié ce problème.

Nous avons vu dans la section précédente que la gravité apparente peut changer de signe, ce qui peut être à l'origine des perturbations observées (figure 2.15). Nous exprimons dans cette section la relation de dispersion linéaire d'ondes courtes pouvant apparaître à la surface libre de l'onde de base au voisinage du maximum de runup.

Lorsque l'on réécrit les équations dans le repère mobile, celles-ci s'expriment en fonction de cette gravité apparente. On peut ainsi obtenir la nouvelle relation de dispersion linéaire dans le repère accéléré.

Plaçons-nous dans le repère lié à la surface libre et réécrivons les conditions cinématique et dynamique

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial \phi'}{\partial n} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + g' \eta' = 0, \quad (2.27)$$

où  $g'$  est la gravité apparente et  $n$  la coordonnée normale. Dans notre cas les perturbations apparaissent à un instant proche du maximum de runup, le courant en surface est négligeable, ce qui nous permet d'ignorer son effet sur la cinématique des perturbations.

On cherche des solutions pour les perturbations de la forme

$$\eta' = a e^{i(kn - \omega t)} \quad (2.28)$$

$$\phi' = b e^{i(kn - \omega t)} e^{kn} \quad (2.29)$$

afin de réécrire la relation de dispersion linéaire dans ce repère. Nous supposons que les perturbations ne subissent pas l'effet du fond et qu'elles satisfont les conditions citées précédemment. En injectant ces solutions dans les conditions ci-dessus on

obtient le système suivant

$$-i\omega a - kb = 0 \quad (2.30)$$

$$g'a - i\omega b = 0 \quad (2.31)$$

Afin d'obtenir une solution unique pour ce système, on en annule le déterminant

$$\omega^2 = g'k. \quad (2.32)$$

Dans la figure 2.21, on observe que la gravité apparente devient négative au voisinage de la crête. Ce cas correspond à une situation instable puisque  $\omega$  devient purement complexe. Dans ce cas on peut écrire

$$\omega = \pm i \sqrt{\left(-a_n - \frac{g}{\sqrt{1+\eta_x^2}}\right) k}. \quad (2.33)$$

Soulignons que  $a_n$  est négatif avec  $|a_n| > \frac{g}{\sqrt{1+\eta_x^2}}$ .

$$\omega \approx \pm i \sqrt{-a_n k}. \quad (2.34)$$

car  $\eta_x$  est très grand de part et d'autre de la crête au maximum de runup. Le taux d'instabilité est approximativement

$$\sigma \approx \sqrt{-a_n k}. \quad (2.35)$$

### Perturbation numérique : ensemencement

Nous avons observé, lors de la formation du jet résiduel, des oscillations à la surface libre peu avant le maximum de runup. Il s'agit d'un moment critique puisque la gravité apparente change de signe comme nous l'avons vu précédemment. Le calcul précédent montre que la situation est instable. Nous proposons donc ici d'ensemencer la surface libre par une perturbation de faible amplitude et d'analyser une éventuelle amplification de celle-ci.

Nous perturbons la condition initiale avec une fonction sinusoïdale de la forme suivante

$$\eta_p = \sum_{k_p=m}^n a_p \cos(k_p(x - x_c)) \quad (2.36)$$

$$\phi_p = \sum_{k_p=m}^n a_p \sqrt{\frac{g}{k_p}} \sin(k_p(x - x_c)) \quad (2.37)$$

Il s'agit ici de la superposition de plusieurs perturbations de différentes amplitudes  $a_p$  et de différents nombres d'onde  $k_p$ . Afin d'ajuster ces paramètres, nous nous basons

sur les longueurs des oscillations observées le long de la surface libre au moment de la formation du jet résiduel (figure 2.15). Les amplitudes  $a_p$  sont de l'ordre de  $10^{-3}$  et les nombres d'onde sont compris entre  $m = 20$  et  $n = 70$ .

La condition initiale s'écrit donc

$$\begin{cases} \eta_0 = \eta + \eta_p \\ \phi_0 = \phi + \phi_p \end{cases} \quad (2.38)$$

avec  $\eta_p \ll \eta$  et  $\phi_p \ll \phi$ . La figure 2.22 nous montre les effets de cette perturbation à un instant proche de la formation du jet résiduel lors de la collision de deux ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.7$ , avec en pointillés le cas sans perturbation, en trait plein le cas perturbé, et  $x_c = 20$  (la perturbation est centrée sur l'axe de symétrie de la collision).

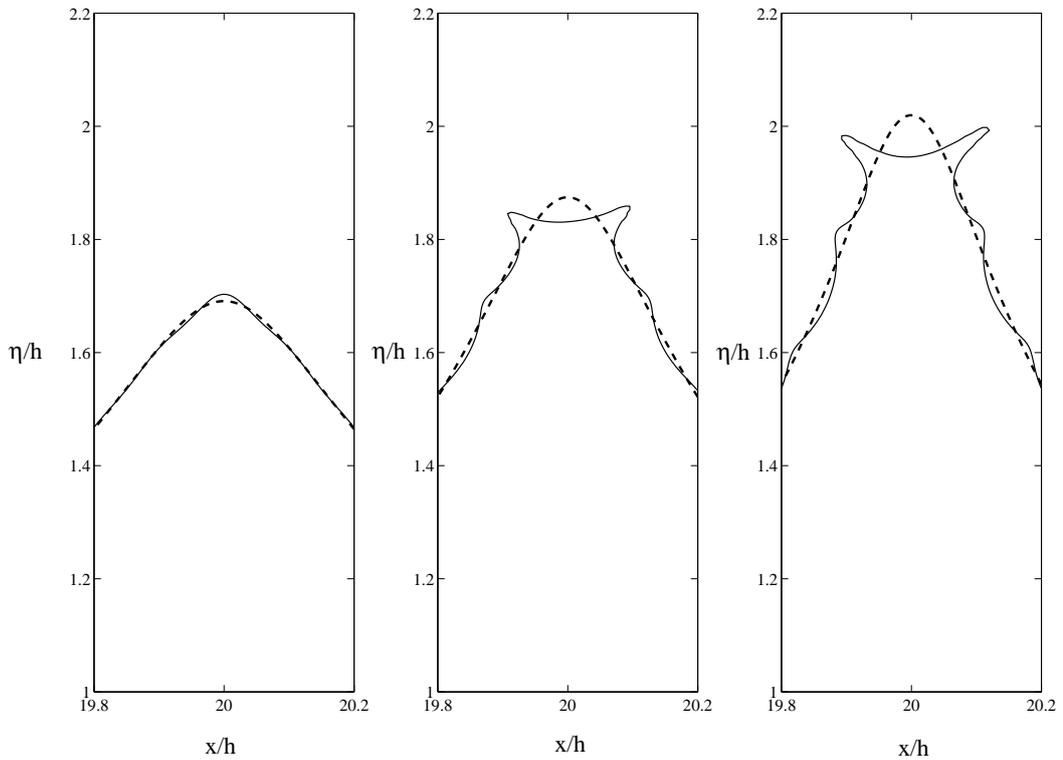


FIG. 2.22 – Ensemencement de petites perturbations lors de la phase de runup dans le cas d'ondes solitaires d'amplitude  $a/h = 0.7$  à différents instants. En pointillés le cas sans perturbation, en trait plein le cas perturbé.

On constate sur la figure 2.22 que les perturbations ajoutées sont amplifiées dans la direction normale à l'écoulement. L'amplification a lieu lorsque la gravité

apparente devient négative comme nous l'avons vu précédemment.

Ce dernier résultat confirme la théorie de l'instabilité de type Rayleigh-Taylor.

Notons que ces perturbations sont explosives comme le montre la figure 2.22. Nous montrons en effet que la fréquence est purement complexe dans la section précédente, et que, par conséquent, les perturbations ne se propagent pas.

## 4 Conclusion

Dans le cadre de cette étude sur la dynamique des ondes solitaires, nous avons dans un premier temps validé le modèle numérique BIEM dans le but de l'utiliser dans des configurations extrêmes. Des comparaisons ont été effectuées avec des travaux expérimentaux visant à étudier le runup et le déferlement d'une onde solitaire sur une plage inclinée. L'intégralité de l'expérience menée dans le canal à houle de l'Ecole Centrale de Marseille a été modélisée puis reproduite, jusqu'au batteur à géométrie si particulière dont dispose ce canal. Les résultats obtenus sont très satisfaisants. La génération et la propagation de l'onde solitaire sont parfaitement reproduites par le code puisqu'aucun déphasage n'est observé sur les mesures issues des sondes à vagues disposées dans le canal. La phase, plus critique, du déferlement et du runup est également modélisée avec succès.

Nous avons ensuite proposé une méthode de génération d'une onde solitaire à l'aide d'un batteur de type piston. Cette méthode génère une onde solitaire de Tanaka suivie d'une queue dispersive initialement non désirée. Pour s'affranchir de cette queue dispersive, et dans le but d'optimiser les temps de calcul, nous n'utilisons plus de batteur par la suite mais directement une onde solitaire de Tanaka comme condition initiale de surface libre.

Dans l'étude principale de ce chapitre portant sur la collision frontale de deux ondes solitaires de Tanaka, les thèmes "classiques" du sujet ont été repris puis complétés, comme l'amplitude maximum de runup, le temps de résidence des crêtes à la "paroi" ou encore le déphasage généré par l'interaction non linéaire des deux ondes. Les travaux menés par les précédents auteurs considéraient généralement des ondes solitaires d'amplitudes allant jusqu'à  $a/h = 0.5$ , voire  $0.6$  dans certains cas. Nous sommes allés au-delà et avons considéré toute la gamme de  $a/h$  possibles, c'est-à-dire jusqu'à  $a/h = 0.8332$ . Le maximum de runup s'élève à plus de deux fois l'amplitude initiale comme le prédit la théorie linéaire et les précédentes études, et même à plus de trois fois pour des amplitudes extrêmes.

Un nouveau phénomène est ensuite découvert et présenté, la formation d'un jet résiduel en chute libre apparaissant à partir d'une certaine valeur critique du paramètre de non linéarité  $a/h$ . Nous essayons de donner quelques éléments de réponses quant à la formation de ce jet, et aux oscillations de la surface libre apparaissant le long de celui-ci.

Nous étudions dans un premier temps la dynamique dans le fluide sur l'axe de symétrie de la collision, et calculons la pression et son gradient ainsi que la vitesse verticale du fluide. La pression et son gradient s'annulent dans le jet résiduel, ce qui confirme que le jet est en chute libre. Le gradient de pression connaît cependant des oscillations sur la hauteur du jet.

La vitesse verticale des particules fluides sur l'axe de symétrie de la collision évolue linéairement avec la hauteur dans les cas classiques. Ce n'est plus le cas en présence de jet résiduel. On peut s'apercevoir que durant la phase de runup, la vitesse

s'annule à mi-hauteur de la crête. Au-dessus de ce point les particules fluides ont donc une trajectoire ascendante, et en dessous de ce point elles ont une trajectoire descendante. Le profil de vitesse en fonction de  $z$  admet un minimum, celui-ci se maintient durant le rundown et provoque l'étirement du jet résiduel.

Nous avons ensuite mis en évidence le caractère instable de l'écoulement en se plaçant dans le repère accéléré lié à la surface libre. La gravité effective ou apparente  $g' = a_n - g_n$  s'annule et change de signe à l'approche du maximum de runup dans les cas où se produit la formation du jet résiduel. Cette instabilité se manifeste par des petites ondulations de la surface libre au moment du maximum de runup, ondulations qui persistent ensuite le long du jet résiduel. En effectuant une analyse de stabilité linéaire dans ce repère, nous mettons en évidence un taux de croissance. La présence d'une instabilité est confirmée par la croissance de perturbations ajoutées artificiellement dans l'écoulement.

La collision de deux ondes solitaires devient un écoulement instable au-delà d'une valeur critique du paramètre de non linéarité  $a/h$ . Cette instabilité est de type Rayleigh-Taylor étant donné la corrélation entre la croissance des perturbations et le changement de signe de la gravité apparente.

# Chapitre 3

## Dynamique des vagues extrêmes générées par focalisation dispersive en eau peu profonde avec et sans vent

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la génération de vagues scélérates en eau peu profonde. Dans un premier temps, nous présentons les différents mécanismes de génération de vagues scélérates, puis nous décrivons plus particulièrement le mécanisme de focalisation dispersive. Un des objectifs de ce chapitre est de compléter les précédentes études sur l'interaction vent-vague développées dans le cadre de l'eau profonde.

### 1 Mécanismes de génération d'une vague scélérate

Il existe de nombreux témoignages concernant les vagues scélérates. Il s'avère que les lieux d'apparition de ces vagues sont très variés. On en trouve en effet au beau milieu des océans, près des côtes, en présence de forts courants, ou non, sous l'action de vents violents ou non. Il n'y a donc pas de corrélation directe entre un phénomène météorologique particulier et la formation de ces vagues. De nombreux mécanismes physiques à l'origine des vagues scélérates ont été présentés dans la littérature. Ces mécanismes ont été décrits par Kharif & Pelinovsky (2003) et Kharif et al. (2009).

#### 1.1 Interaction vagues-courant

Les premiers événements recensés l'ont été dans le courant des Aiguilles, le long de la côte Est de l'Afrique du Sud. Il s'agit d'une zone très fréquentée, notamment par la marine commerciale. Les récits de Mallory (1974) témoignent de nombreux accidents dans cette zone.

Smith (1976) a suggéré que ces vagues géantes se forment aux endroits où les groupes d'ondes sont bloqués par le courant opposé. Wu & Yao (2004) l'ont confirmé dans leurs travaux expérimentaux. En utilisant une approche linéaire plus globale Lavrenov (1998) a montré que la transformation des vagues par le courant conduit à la focalisation de rayons, formant des caustiques pouvant justifier l'apparition de telles vagues. White & Fornberg (1998) ont étudié l'interaction vagues-courant d'un point de vue statistique. Ils ont montré qu'une distribution aléatoire de courants conduit à la formation de vagues scélérates. La distribution de probabilité s'avère universelle, c'est-à-dire indépendante de la statistique du courant.

## 1.2 Focalisation dispersive

En théorie linéaire, un champ de vagues donné peut être interprété comme une somme de groupes d'ondes sinusoïdales monochromatiques. La géométrie du groupe d'ondes peut alors engendrer une interaction constructive de ses composantes. La focalisation est due au caractère dispersif des vagues. Ainsi les vagues de grandes longueurs d'ondes se propagent plus vite que celles de plus courtes longueurs d'ondes. Il peut alors se produire ce qu'on appelle une focalisation spatio-temporelle ou focalisation dispersive. En effet les ondes les plus longues se propagent plus vite et absorbent les plus courtes, engendrant une vague d'amplitude beaucoup plus élevée. Baldock et al. (1996) ont étudié expérimentalement le comportement de vagues fortement non linéaires, obtenues par focalisation dispersive. Plus tard, Johannessen & Swan (2003) ont reproduit numériquement ces expériences, obtenant ainsi plus de précisions sur l'écart avec la théorie linéaire. Dans le cadre des vagues scélérates, Pelinovsky et al. (2000) ont étudié ce phénomène dans le cadre de la théorie de l'eau peu profonde. Enfin Slunyaev et al. (2002) ont considéré le problème tridimensionnel en profondeur finie à partir du système d'équations de Davey-Stewartson.

## 1.3 Focalisation géométrique

La focalisation spatio-temporelle peut s'étendre au cas tridimensionnel, on parle alors de focalisation géométrique. Johannessen & Swan (2001) ont étudié la focalisation géométrique de trains de vagues en un point de l'espace. Ils ont ainsi étendu les études de Baldock et al. (1996) sur les groupes d'ondes non linéaires au cas tridimensionnel. Ensuite Bateman et al. (2001) ont effectué des comparaisons avec les expériences de Johannessen & Swan (2001) et ont montré l'importance de l'interaction vague-vague non linéaire au sein de ces groupes. Fochesato et al. (2007) ont réalisé une étude détaillée sur le rôle de la non linéarité sur la forme de ces vagues, obtenues numériquement par focalisation géométrique. Leur focalisation est obtenue à partir de trains de vagues propagés dans un faisceau de directions différentes. C'est un phénomène que l'on retrouve dans la nature. Whitham (1974) a étudié l'évolution du front d'onde en fonction de la bathymétrie. Il a montré que la

topographie courbe les rayons de propagation de la houle, conduisant à la formation de caustiques. En milieu naturel, les interactions entre champs de vagues deviennent beaucoup plus complexes, et peuvent conduire à la formation de nombreux points de focalisation, comme l'ont illustré Kharif & Pelinovsky (2003). Ce phénomène peut justifier la formation de vagues scélérates.

## 1.4 Instabilité modulationnelle

Un autre phénomène peut être à l'origine de vagues scélérates à savoir un mécanisme correspondant à la modulation de groupes d'ondes. On peut en effet citer l'instabilité modulationnelle mise en évidence par Benjamin & Feir (1967). Cette instabilité, qui porte désormais leurs noms, correspond à la modulation progressive d'un train d'ondes de Stokes. En pratique, la modulation est due à l'échange d'énergie entre la composante fondamentale du spectre et les nombres d'ondes voisins (satellites). Ce résultat est en accord avec de précédents travaux menés par Lighthill (1965) et Zakharov (1966), Zakharov (1968), qui ont prédit cette instabilité. Un train de vagues soumis à cette instabilité présente un cycle de modulation-démodulation, c'est la récurrence de Fermi-Pasta-Ulam. De nombreux auteurs ont suggéré qu'au maximum de cette récurrence, une vague scélérate peut se former, tels Henderson et al. (1999), Dysthe & Trulsen (1999), Osborne et al. (2000), Calini & Schober (2002), Slunyaev et al. (2002), ou encore Dyachenko & Zakharov (2005).

Dans le cas bidimensionnel, pour  $kh < 1.363$ , l'instabilité modulationnelle disparaît. Notons que dans le cas tridimensionnel, il existe des instabilités modulationnelles qui se propagent dans des directions obliques à la direction de propagation de la porteuse.

## 1.5 Collision de solitons

Nous avons vu dans le chapitre 2 que la collision de deux ondes solitaires de même amplitude peut générer une onde de plus de deux fois l'amplitude initiale. Ce mécanisme peut donc être à l'origine de la formation d'une vague scélérate en eau peu profonde.

Nous avons vu que l'équation de Korteweg de Vries est parfaitement adaptée aux ondes solitaires. La généralisation de cette équation au cas faiblement tridimensionnel existe, c'est l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP). Cette équation permet de représenter la collision de deux ondes solitaires se propageant dans des directions différentes. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left( 1 + \frac{3\eta}{2h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = -\frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

Une solution tridimensionnelle est obtenue par Onkuma & Wadati (1983). Peterson et al. (2003) et Soomere & Engelbrecht (2005) ont suggéré que les solutions à N-

solitons de l'équation KP expliquent très bien la formation de vagues scélérates tridimensionnelles en eau peu profonde. Ces vagues d'amplitudes extrêmes ont une durée de vie infinie et se propagent à vitesse constante. Cependant cette approche ne s'applique qu'aux zones côtières.

Dans le cadre de solitons d'enveloppe, Clamond et al. (2006) ont proposé un autre mécanisme de formation de vagues scélérates basé sur la collision de groupes d'ondes limités au cas bidimensionnel. La figure 3.1 présente l'évolution à long terme de groupe de vagues dont l'enveloppe n'est pas solution de l'équation non linéaire de Schrödinger. Des solitons d'enveloppe se propagent à des vitesses différentes et peuvent entrer en collision. Le groupe de vagues initial évolue d'abord en donnant naissance à une vague d'amplitude extrême. Il se forme alors deux groupes distincts. Ces groupes se propagent à des vitesses différentes puis entre en collision, formant ainsi une seconde vague extrême. Un troisième groupe se forme alors. Les résultats laissent supposer que d'autres collisions se produiront, donnant naissance à d'autres vagues scélérates. Cette approche permet de décrire un autre mécanisme de génération de vagues scélérates valable en profondeur infinie.

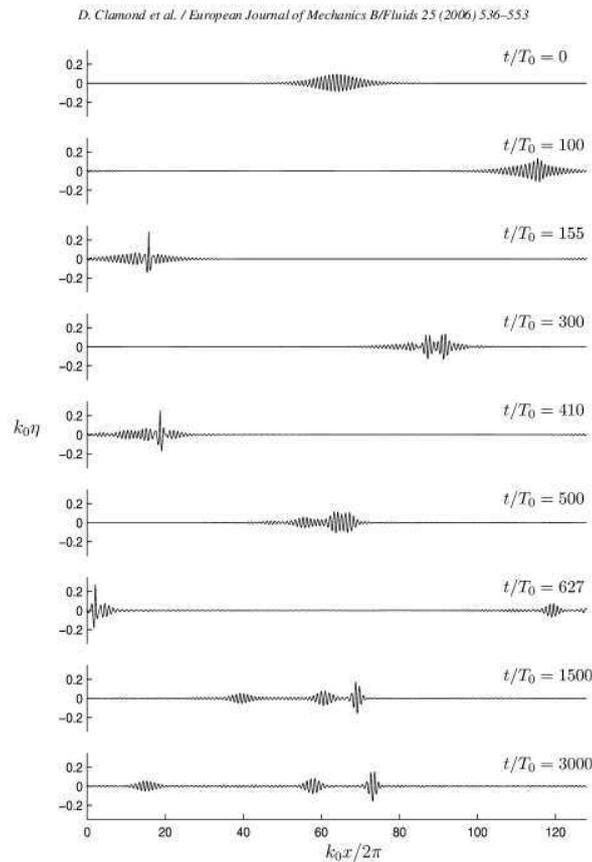


Fig. 1. Evolution of the free surface. Fully nonlinear simulation (CG model).

FIG. 3.1 – Evolution aux temps longs de solitons d’enveloppe, conduisant à la formation de vagues scélérates. Figure extraite de Clamond et al. (2006)

## 2 Focalisation spatio-temporelle

Nous présentons dans cette section deux processus de production d'une vague extrême en eau peu profonde basés sur la nature dispersive des vagues. Dans le premier cas la vague extrême est obtenue en utilisant un batteur numérique de type piston, dans le second nous utilisons une méthode inverse à partir de l'équation de Korteweg de Vries pour obtenir une condition initiale de surface libre menant à une vague extrême.

### 2.1 Focalisation à partir d'un batteur numérique de type piston

La focalisation spatio-temporelle due à la nature dispersive des vagues est un mécanisme classique qui engendre une concentration de l'énergie des vagues dans un domaine réduit. Considérons un train d'ondes avançant un autre train d'ondes plus longues. Les ondes longues, ayant par conséquent des vitesses de groupe plus élevées, vont dépasser les courtes durant leur propagation. Une vague de grande amplitude peut en résulter de par la superposition de toutes les ondes à un instant et en un point de l'espace donnés (point de focalisation). Ensuite, les ondes longues seront devant les courtes, et l'amplitude du train d'ondes décroît, c'est le phénomène de défocalisation.

On cherche ici un signal de la forme  $s(t) = A \sin(\omega(t).t)$  à imposer à un batteur numérique de type piston. L'objectif est donc de déterminer la fréquence  $\omega(t)$  dépendante du temps.

L'évolution spatiale et temporelle de la fréquence intrinsèque  $\omega$  est donnée par l'équation suivante

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + C_g \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

et donc

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

où  $d/dt = \partial/\partial t + C_g \partial/\partial x$ .

L'équation précédente est vraie le long des lignes caractéristiques définies par  $dx/dt = C_g$  où  $C_g$  est la vitesse de groupe des vagues. Cette équation traduit le fait que la fréquence est constante le long des caractéristiques. Finalement nous pouvons décrire le phénomène de focalisation dispersive dans le plan  $(x, t)$  comme sur la figure 3.2. Le point de focalisation est donné par  $x = X_f$  à l'instant  $t = T_f$ . Nous pouvons exprimer la distribution initiale de la vitesse de groupe en fonction de  $X_f$  et de  $T_f$

$$C_g = \frac{X_f}{T_f - t}. \quad (3.4)$$

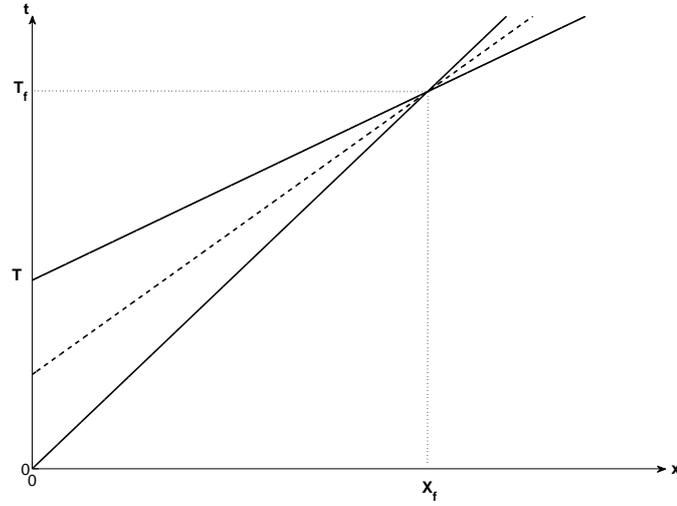


FIG. 3.2 – Formation d'un point de focalisation dans le plan  $(x, t)$  (les lignes caractéristiques sont définies par  $dx/dt = C_g$ ).

où  $t$  est le temps. En utilisant la relation de dispersion linéaire  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$  on obtient

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right], \quad (3.5)$$

où  $k$  désigne le nombre d'onde et  $h$  la profondeur d'eau. Alors

$$\frac{X_f}{T_f - t} = \frac{\omega}{k} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right]. \quad (3.6)$$

De cette façon nous obtenons une première expression de la fréquence  $\omega$  comme une fonction du temps

$$\omega = 2k \frac{X_f}{T_f - t} / \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right). \quad (3.7)$$

Cependant, dans cette expression, le nombre d'onde  $k$  est également dépendant du temps. Il nous faut donc déterminer  $k$  à chaque instant. En effet si  $k$  est connu à chaque instant, alors  $\omega$  peut être calculé à son tour. En utilisant à nouveau la relation de dispersion linéaire, on injecte  $\omega$  dans l'équation précédente, il en résulte

$$k = \frac{g}{4} \left( \frac{T_f - t}{X_f} \right)^2 \tanh(kh) \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right]^2 = f(k). \quad (3.8)$$

L'étape suivante est la résolution de cette équation en utilisant la méthode du point fixe à chaque instant comme illustré par la figure 3.3.

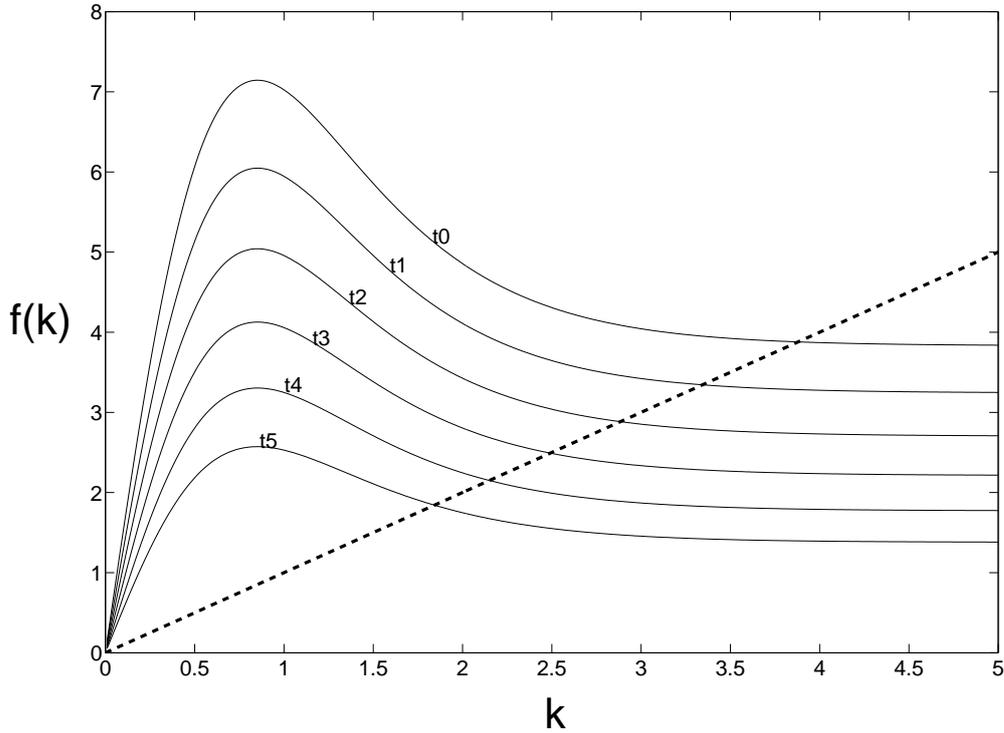


FIG. 3.3 – Solution de l'équation (3.8)  $k = f(k)$  en utilisant la méthode du point fixe.

La fréquence  $\omega$  est maintenant connue à chaque instant. De surcroît cette méthode nous permet de contrôler le paramètre  $kh$  à chaque instant, et de savoir s'il satisfait à la condition d'eau peu profonde ( $kh \leq 1$ ).

## 2.2 Equation de Korteweg de Vries et méthode inverse

La seconde méthode se base sur l'équation de Korteweg de Vries. Il s'agit d'une méthode déjà utilisée par Pelinovsky et al. (2000), que nous décrivons ici.

L'équation de Korteweg de Vries s'écrit de la façon suivante

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (3.9)$$

où  $c_0 = \sqrt{gh}$ .

Cette équation universelle qui décrit l'évolution spatio-temporelle de vagues faiblement non linéaires et faiblement dispersives en eau peu profonde est invariante en espace et en temps c'est-à-dire est invariante sous la transformation  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow -t$ . Nous pouvons alors choisir un profil de vague extrême comme condition initiale de l'équation KdV, et calculer  $\eta(x, t)$  pour tout instant  $T$ . De par l'invariance

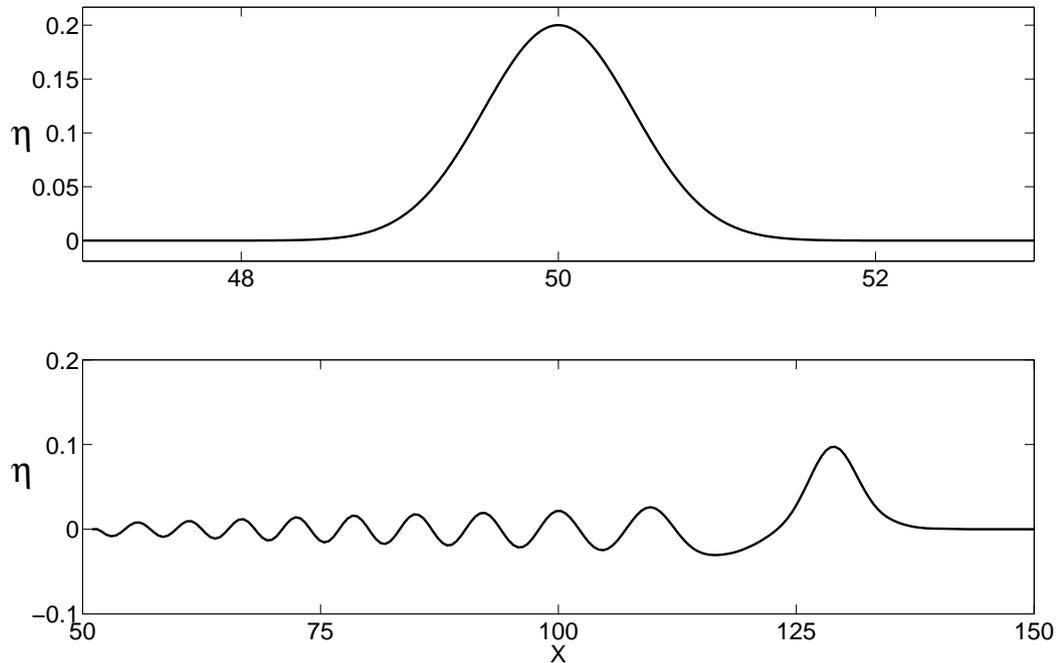


FIG. 3.4 – Evolution de la gaussienne dans l'équation de KdV.

de l'équation  $x \rightarrow -x$ , la condition initiale  $\eta(x, T)$  évolue jusqu'à la formation de la vague extrême. Nous proposons donc de choisir notre profil de vague extrême comme étant un profil gaussien

$$\eta(x, 0) = A \exp(-K^2 x^2) \quad (3.10)$$

où  $A$  est l'amplitude de la vague et  $K^{-1}$  sa largeur initiale (à mi-hauteur). L'évolution de cette condition initiale pour l'équation KdV est donnée par la figure 3.4. Par transformation inverse, le train d'ondes généré reformera la gaussienne.

Le profil  $\eta(x, T)$  obtenu par l'équation KdV, avec le potentiel des vitesses  $\phi(x, T)$  correspondant, sera ensuite utilisé comme condition initiale pour des simulations numériques effectuées avec la méthode BIEM dans la section 4 de ce chapitre.

## 3 L'effet du vent sur la dynamique des vagues

### 3.1 Etat de l'art

La question de l'interaction entre le vent et les vagues reste une question ouverte depuis de nombreuses années. De nombreux chercheurs ont étudié ce problème au cours du dernier siècle et différentes théories ont émergé. Parmi les modèles simples citons ceux de Jeffreys (1924), Phillips (1957) et Miles (1957). Néanmoins il existe des approches numériques plus réalistes qui prennent en compte le caractère turbulent de la couche limite au-dessus des vagues que l'on ne discutera pas dans le cadre de cette étude.

Les premiers travaux avançant une théorie probante quant à la formation des vagues sous l'action du vent sont dus à Kelvin (1871) et Helmholtz (1868), qui ont d'ailleurs donné leurs noms à l'instabilité de l'interface entre deux fluides cisailés. Ils ont considéré en effet le problème de deux fluides superposés en configuration stable au sens de Rayleigh-Taylor et dont l'interface est soumise à un cisaillement lié à la différence de vitesse entre les deux fluides. La théorie qu'ils ont avancée permet d'expliquer un mécanisme à seuil pour la génération des vagues par le vent, mais ne reproduit pas quantitativement les seuils observés dans la nature.

Ensuite Jeffreys (1924) (1925) a remis en cause le caractère irrotationnel de l'air pour décrire l'interaction vent-vagues. Il est alors le premier à suggérer que le mouvement irrégulier du fluide léger au-dessus de l'interface peut être à l'origine de la génération et de l'amplification des oscillations à l'interface. Par analogie avec les tourbillons observés dans le sillage d'une sphère, il suppose l'existence de décollements aériens au-dessus des crêtes des vagues. Mais il a été mis en évidence expérimentalement qu'aucun décollement de l'écoulement aérien n'avait lieu au-dessus de surfaces rigides présentant des déformations de faibles amplitudes (Stanton 1932). Cette théorie a été alors abandonnée, dans la mesure où elle ne pouvait expliquer le phénomène de génération des vagues par le vent. Jeffreys (1924) a supposé qu'il y a décollement aérien quelle que soit la cambrure des vagues. Cette hypothèse a été remise en cause car le décollement de l'air n'a lieu que pour des vagues cambrées.

De récents travaux de Kharif et al. (2008) ont démontré expérimentalement que pour des vitesses de vent supérieures à  $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  les vagues très cambrées sont accompagnées d'un décollement aérien. Nous pouvons donc considérer que la pente locale présentée par les vagues est un critère de formation du tourbillon, au même titre que la vitesse de vent. C'est pourquoi nous utiliserons le mécanisme d'abri de Jeffreys modifié, c'est-à-dire avec un critère sur la pente locale des vagues, pour modéliser le vent au-dessus de nos vagues extrêmes.

Phillips (1957) a proposé une approche différente. Il conserve cependant les hypothèses de Jeffreys c'est-à-dire que l'eau relève de la théorie potentielle.

Il montre en effet que la génération des vagues par le vent s'explique par un phénomène de résonance entre des fluctuations de pression aléatoires générées par la turbulence et les vagues formées par ces fluctuations. Cependant cette théorie n'est valide que sous l'hypothèse de vagues très faiblement non linéaires c'est-à-dire qu'elle ne s'applique que pour les premiers instants de vie des vagues de vent.

A la même époque, Miles (1957) reprend certains travaux antérieurs. Il conserve aussi l'hypothèse d'irrotationalité pour l'eau. Comme l'a fait Jeffreys (1924) il estime l'effet de la viscosité comme une perturbation du mouvement non-visqueux. Il suppose également qu'il faut un déphasage entre les fluctuations de pression et celles de l'interface pour qu'il existe un transfert d'énergie du vent aux vagues. En ce qui concerne l'air, il estime que l'écoulement est non-visqueux et incompressible. La viscosité est introduite a posteriori en supposant que l'écoulement moyen de l'air présente un profil cisailé. Le modèle de Miles s'applique à des trains d'ondes monochromatiques et de faibles amplitudes.

### 3.2 Mécanisme d'abri de Jeffreys modifié

Nous décrivons dans cette section le mécanisme d'abri de Jeffreys que nous utiliserons par la suite dans notre étude sur l'influence du vent sur des vagues extrêmes.

On considère ici les fluctuations de pression qui s'exercent sur l'eau dues à l'écoulement de l'air au-dessus des vagues. Jeffreys (1925) a montré que de telles variations pouvaient produire un transfert d'énergie du vent aux vagues

$$\frac{dE}{dt} = - \int \int_{S(t)} P \frac{\partial \eta}{\partial t} dS \quad (3.11)$$

où  $P$  est la pression,  $\eta$  l'élévation de l'interface,  $S(t)$  l'aire de l'interface considérée et  $E$  l'énergie des vagues contenues dans cette surface.

Le travail des forces de pression est non nul quand les fluctuations de pression et  $\partial \eta / \partial t$  sont corrélés ou encore lorsque la pression et la pente des vagues sont en phase. Pour qu'il existe un flux d'énergie du vent aux vagues, un déphasage est nécessaire entre la pression fluctuante et l'élévation de la surface libre.

Jeffreys (1924) a proposé le premier mécanisme plausible pour expliquer ce déphasage (voir figure 3.5). Il a supposé que ce transfert est uniquement dû à la traînée de forme associée au décollement apparaissant au voisinage des crêtes, côté face sous le vent. A partir d'une analyse dimensionnelle, il a montré que la pression peut être représentée par

$$P = \rho_a s (U_\infty - c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.12)$$

où  $\rho_a$  est la densité de l'air,  $s$  est le coefficient d'abri,  $U_\infty$  représente la vitesse du vent et  $c$  la vitesse de phase des vagues.

En écrivant  $\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t)$  on obtient

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho_a s (U_\infty - c)^2 a^2 k^2 c. \quad (3.13)$$

L'énergie totale des vagues par unité de surface est

$$E = \frac{1}{2} \rho_w g a^2 \quad (3.14)$$

donc

$$\frac{dE}{dt} = \rho_w g a \frac{da}{dt} \quad (3.15)$$

et

$$\rho_w g a \frac{da}{dt} = \frac{1}{2} \rho_a s (U_\infty - c)^2 a^2 k^2 c. \quad (3.16)$$

On en déduit l'amplification des vagues

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\rho_a s}{\rho_w g} (U_\infty - c)^2 a k^2 c. \quad (3.17)$$

C'est une augmentation exponentielle de l'amplitude, le transfert d'énergie est également exponentiel.

Le mécanisme proposé par Jeffreys est d'autant plus efficace que l'écart entre la vitesse du vent et la vitesse de phase des vagues augmente. Pour une vague voyageant à la vitesse  $U_\infty$  il n'y a pas de transfert d'énergie.

Contrairement à Jeffreys qui suppose qu'il y a décollement au-dessus de toutes les vagues, nous considérerons que l'écoulement séparé dans l'air n'existe qu'au voisinage de crêtes suffisamment cambrées. Ceci nous conduit à introduire un seuil sur les pentes des vagues au-dessus duquel le décollement apparaît.

$$\begin{cases} p_a = \rho_a s (U_\infty - c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} & \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \geq \frac{\partial \eta}{\partial x}_{crit} \\ p_a = 0 & \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| < \frac{\partial \eta}{\partial x}_{crit} \end{cases} \quad (3.18)$$

C'est ainsi que nous définissons le mécanisme d'abri de Jeffreys modifié.

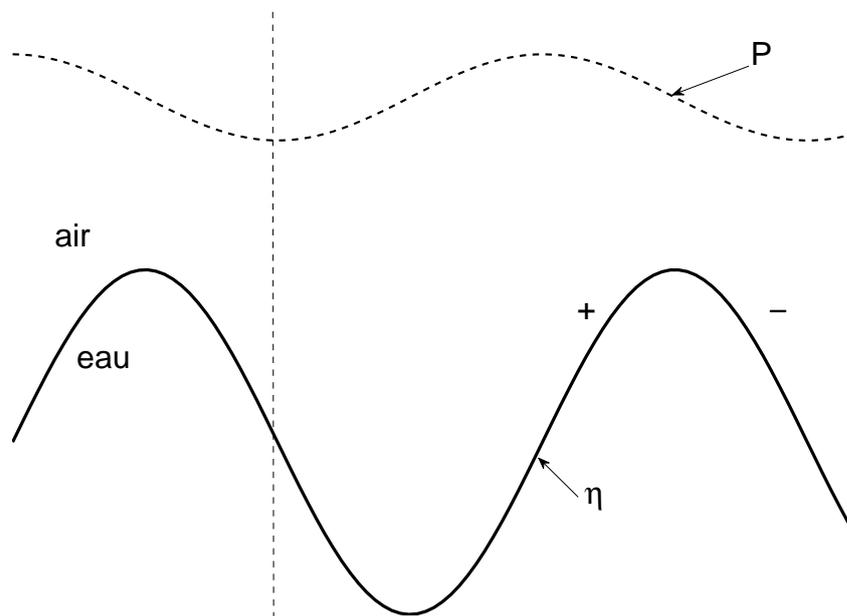


FIG. 3.5 – Déphasage entre la pression et la surface libre selon Jeffreys ( $\eta$  est la surface libre,  $P$  la pression).

## 4 Vagues extrêmes générées par focalisation dispersive avec et sans vent

Dans cette section, nous nous intéressons à la génération de vagues scélérates par focalisation dispersive en eau peu profonde. Nous étudions également leur comportement sous l'action du vent. Nous traitons de plus des cas de vagues scélérates déferlantes. Des comparaisons avec des études expérimentales sont effectuées, notamment dans le cas de l'impact d'une vague déferlante sur un mur vertical.

### 4.1 Chambarel J., Kharif C., Kimmoun O., Focusing wave group in shallow water in the presence of wind, *Discrete and Continuous Dynamical System series S*, In Press

L'influence du vent sur des vagues extrêmes en eau peu profonde est étudiée numériquement. Une série de simulations numériques utilisant une distribution de pression sur la crête des vagues les plus cambrées grâce au mécanisme d'abri de Jeffreys modifié, montre que le vent soufflant sur une vague extrême générée par focalisation dispersive accroît sa durée de vie et augmente son amplitude maximale. Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus en eau profonde. Cependant, ces vagues extrêmes en eau peu profonde sont moins instables en présence de vent que celles en eau profonde.

## FOCUSING WAVE GROUP IN SHALLOW WATER IN THE PRESENCE OF WIND

JULIEN CHAMBAREL

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre  
Technopôle de Château-Gombert 49, rue Joliot Curie - B.P. 146  
13384 Marseille Cedex 13, France

CHRISTIAN KHARIF AND OLIVIER KIMMOUN

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre  
Technopôle de Château-Gombert 49, rue Joliot Curie - B.P. 146  
13384 Marseille Cedex 13, France

**ABSTRACT.** The influence of wind on extreme wave events in shallow water is investigated numerically. A series of numerical simulations using a pressure distribution over the steep crests given by the modified Jeffreys' sheltering theory shows that wind blowing over a strongly modulated wave group due to the dispersive focusing of a chirped long wave packet increases the time duration and maximal amplitude of the extreme wave event. These results are coherent with those obtained within the framework of deep water. However, steep wave events are less unstable to wind perturbation in shallow water than in deep water.

**1. Introduction.** Extreme wave events are due to the focusing of wave energy into a small area. The main physical mechanisms which may produce extreme wave events are described and discussed in detail in [1]. Extreme wave occurrence on currents is a well-understood problem that can explain the formation of rogue waves when wind waves or swells are propagating against a current. Geometrical or spatial focusing may result in large amplitude waves. The spatio-temporal focusing due to the dispersive nature of water waves is a classic mechanism yielding wave energy concentration in a small area. Nonlinear uniform wave trains suffer an instability known as the Benjamin-Feir instability, which produces growing modulations of the envelope that evolve into short groups of steep waves. A uniform wave train under modulational instability transforms into a system of envelope that may collide to give rise to huge wave events.

Most of the studies have considered the extreme wave occurrence without including the direct effect of the wind on their dynamics. To our knowledge, there are few published results about this coupling. Among the recent papers on wind forcing on large amplitude deep water waves, one can cite [2], [3] and [4]. Within the framework of extreme wave events due to the spatio-temporal focusing and Benjamin-Feir instability, the two latter papers have shown experimentally and numerically that wind sustains steep waves which then evolve into breaking waves. More specifically, wind increases both the amplitude and life-time of steep wave events. Wind effect play a significant role in the persistence of extreme wave events. Until now there is

---

*Key words and phrases.* steep wave group, shallow water, wind.

no investigation on wind effect on the formation of extreme wave events in shallow water. Within the framework of one-dimensional propagation it is well known that the Benjamin-Feir instability stabilizes when  $kh$  becomes less than 1.363, where  $k$  and  $h$  are the wavenumber and depth respectively. Hence we shall use the spatio-temporal wave focusing (or dispersive focusing) for generating extreme wave events. The purpose of the present study is to extend the results of [3] and [4] obtained in deep water to extreme wave events with wind forcing in shallow water. Note that rogue occurrence in shallow water is discussed in [1], but without considering wind/wave coupling.

In Sect. 2 the mathematical statement of the water wave problem is presented as well as the wind modelling based on the sheltering mechanism. The numerical method is briefly described, too. An inverse method is used to determine the initial conditions. Sect. 3 reports on numerical simulations of extreme wave events due to dispersive focusing in the presence of wind and a discussion is given.

**2. Mathematical formulation.** The problem is solved by assuming that the fluid is inviscid, incompressible, and the motion irrotational. Hence the velocity field is given by  $\mathbf{u} = \nabla\phi$  where the velocity potential  $\phi(x, z, t)$  satisfies the Laplace's equation which is solved in a domain bounded by the free surface, a horizontal solid bottom and two vertical solid walls located at the ends of the numerical domain. The horizontal and vertical coordinates are  $x$  and  $z$  respectively whereas  $t$  is time. The still-water level lies at  $z = 0$ , and the horizontal impermeable bed lies at  $z = -h$ . The dynamic free surface condition states that the pressure at the surface,  $z = \eta(x, t)$ , is equal to the atmospheric pressure  $p_a$ . Assuming the free surface to be impermeable, the problem to be solved is the Laplace equation with the kinematic, dynamic and bottom conditions.

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{for } -h < z < \eta(x, t), \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 & \text{on } z = \eta(x, t), \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + g\eta = -\frac{p_a}{\rho_\omega} & \text{on } z = \eta(x, t), \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{on } z = -h, \end{cases} \quad (1)$$

where  $g$  is the acceleration due to gravity and  $\rho_\omega$  is the water density.

A Boundary Integral Equation Method (BIEM) is used to solve the system of equations (1) with a mixed Euler Lagrange (MEL) time marching scheme. For more details about this numerical method see the paper by [3].

The Green's second identity is used to solve Laplace's equation for the velocity potential

$$\begin{aligned} c(Q)\phi(Q) &= \int_{\partial\Omega} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl, \end{aligned} \quad (2)$$

where  $G$  is the free space Green's function. The fluid domain boundary  $\partial\Omega$  is  $\partial\Omega_F \cup \partial\Omega_B$ , the union of the free surface  $\partial\Omega_F$  and solid boundaries  $\partial\Omega_B$ . The unit normal vector  $\mathbf{n}$  points outside the fluid domain. The unknowns are  $\partial\phi/\partial n$  on  $\partial\Omega_F$

and  $\phi$  on  $\partial\Omega_B$ . Let  $P$ ,  $Q$  and  $c(Q)$  denote two points of the domain and the angle between two consecutive panels respectively. The angle  $c(Q)$  is defined as follows

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & \text{if } Q \text{ is outside the fluid domain,} \\ \alpha & \text{if } Q \text{ is on the boundary,} \\ -2\pi & \text{if } Q \text{ is inside the fluid domain,} \end{cases} \quad (3)$$

where  $\alpha$  is the inner angle relative to the fluid domain at point  $Q$  along the boundary. Time stepping is performed using a fourth order Runge & Kutta scheme, with a constant time step.

Extreme wave events that are due to spatio-temporal focusing phenomenon can be described as follows. If initially wave packets are located in front of longer wave packets having larger group velocities, then during the stage of evolution, longer waves will overtake shorter waves. A large-amplitude wave can occur at some fixed time because of superposition of all the waves merging at a given location (the focus point). Afterwards, the longer waves will be in front of the shorter waves, and the amplitude of the wave train will decrease. In shallow water the waves are weakly dispersive, hence to obtain a steep wave event during a relatively short period of time it is necessary to use amplitude modulated wave train too. Longer wave packets should have larger amplitude (see figure 2). This focusing-defocusing cycle was described by [5] within the framework of the shallow water theory. Later, [6] used the Davey-Stewartson system for three-dimensional water waves propagating in finite depth. More recently, this technique was also used in the experiments on extreme waves conducted by [3] and [4].

The initial conditions  $(\eta(x, 0), \phi(x, \eta, 0))$  of the system of equation (1) evolving into an extreme wave are obtained by using the KdV equation and an inverse method described in the next section.

**2.1. The Korteweg de Vries equation and inverse method.** The Korteweg-de Vries equation is an approximate equation which may be derived from the fully nonlinear equations (1) by using a multiple scale method. The dependent variables  $\eta$  and  $\phi$  are expanded as a power series of  $a/h$  with  $(kh)^2 = \mathcal{O}(a/h)$ , where  $a$  is a measure of the wave amplitude,  $k$  the wavenumber and  $h$  the water depth. The KdV equation which describes the leading-order contribution to the surface wave is

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0\left(1 + \frac{3\eta}{2h}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0 \quad (4)$$

where  $c_0 = \sqrt{gh}$ .

This universal equation describes the spatio-temporal evolution of weakly nonlinear and weakly dispersive waves. This equation is invariant under the transformation  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow -t$ . Hence, we can choose the expected extreme wave event as the initial condition for equation (4) and calculate  $\eta(x, t)$  for any time  $T$ . Due to invariance of equation (4) by reversal of abscissa, the initial condition  $\eta(x, T)$  evolves to the expected steep wave event. [5] used this inverse method with KdV equation to study the rogue wave formation in shallow water. Following [5] we choose as initial condition representing the expected steep wave event the following Gaussian impulse

$$\eta(x, 0) = A \exp(-K^2 x^2) \quad (5)$$

where  $A$  is the amplitude and  $K^{-1}$  is the initial width of the wave.

The evolution of this initial condition for equation (4) is given in figure 1 with

$A = 0.20\text{ m}$ ,  $K^{-1} = 1.8\text{ m}$  and the depth  $h = 1\text{ m}$ . A pseudo-spectral method is used to compute numerically the surface elevation at different instants of time. At time  $T$ , a soliton is formed ahead of dispersive wave train. As expected, the soliton with the modulated wave train ahead turns into the Gaussian impulse under the inverse transformation.

The profile  $\eta(x, T)$  obtained from the KdV equation with the corresponding potential  $\phi(x, T)$  is then used as initial condition for numerical simulations of the fully nonlinear equation (1) (see figure 2).

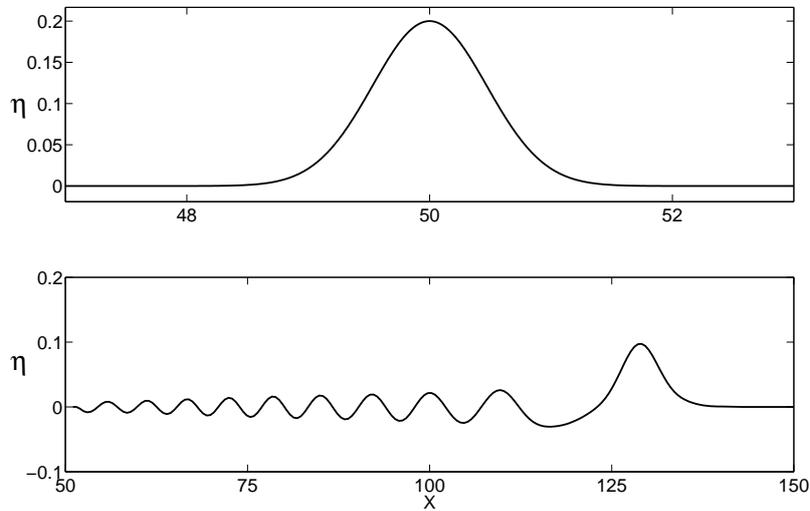


FIGURE 1. Evolution of an initial Gaussian impulse into soliton and dispersive wave train within the framework of the KdV equation ( $\eta$  and  $x$  are given in  $m$ )

**2.2. Wind modelling : the modified Jeffreys' sheltering theory.** [4] demonstrated experimentally for a wind velocity  $U = 4\text{ m/s}$  that steep wave events occurring in water wave groups are accompanied by air flow separation. Furthermore, it was suggested that a significant wind effect takes place when the steep wave event occurs. The focusing stage was almost independent of the wind velocity. Deviations were observed only in the vicinity of the focus point where the waves become steep. This observation reinforced the idea that separation of the air flow in the lee of the wave crests is responsible for the growth and persistence of steep waves. The Jeffreys' sheltering mechanism which was introduced by [7] could be modified and used as wind modelling. Since air flow separation occurs only over steep waves, the Jeffreys' sheltering mechanism has to be applied locally in time and space and not permanently over the whole wave field. It is well known that this mechanism cannot be applied continuously over water waves. This mechanism is working only when air flow separation occurs over steep waves ([8], [9]).

Following [7], the pressure at the interface  $z = \eta(x, t)$  is related to the local wave

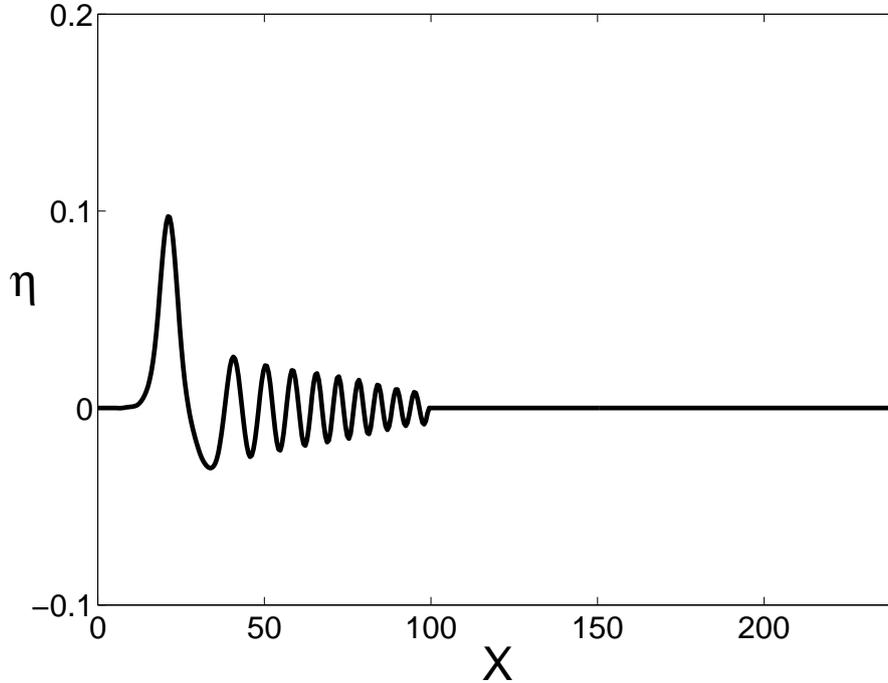


FIGURE 2. Initial surface elevation for equation (1) ( $\eta$  and  $x$  are given in  $m$ )

slope according to the following expression

$$p_a = \rho_a s (U - c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (6)$$

where the constant,  $s$  is termed the sheltering coefficient,  $U$  is the wind speed,  $c$  is the wave phase velocity and  $\rho_a$  is atmospheric density. The sheltering coefficient is  $s = 0.5$ . We assume that this value which was obtained by [4] from experimental data in deep water, holds in shallow water too. In order to apply the relation (6) for only steep waves we introduce a threshold value for the slope  $(\partial \eta / \partial x)_c$ . When the local slope of the waves becomes larger than this critical value, the pressure is given by equation (6) otherwise the pressure at the interface,  $p_a$ , is taken equal to a constant which is chosen equal to zero without loss of generality. This means that wind forcing is applied locally in time and space. When the critical value is low, the transfer of energy from the wind to the waves yields to wave breaking and when it is too high this transfer becomes negligible to influence the wave dynamics. Our main purpose is to show that the application of the modified Jeffreys mechanism could explain simply some features of the interaction between wind and strongly modulated water wave groups in shallow water.

Figure 3 shows the pressure distribution at the interface in the vicinity of the crest, given by equation (6) during the occurrence of the steep wave event.

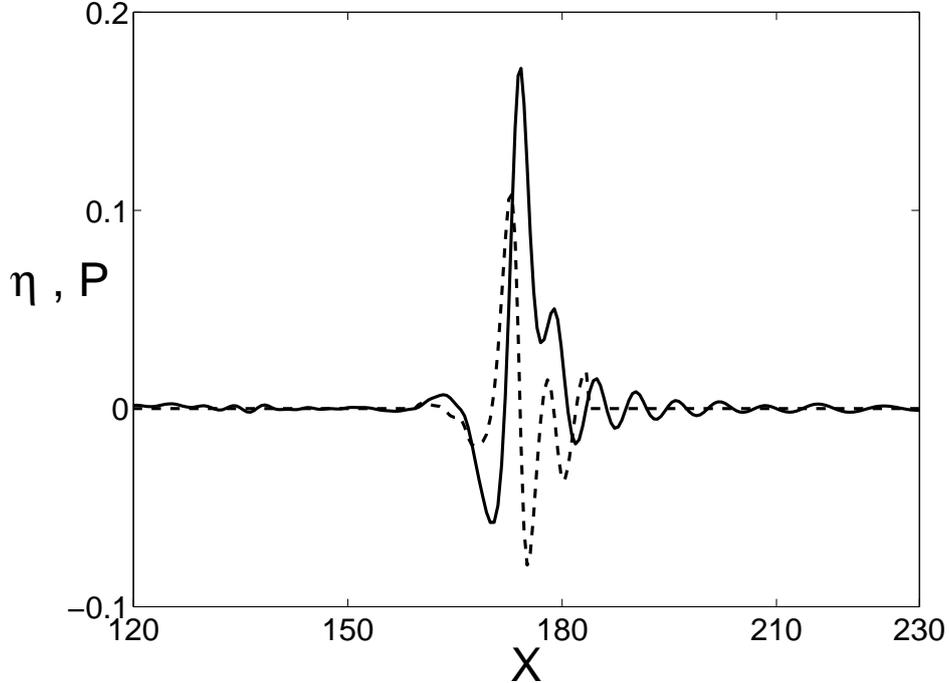


FIGURE 3. Pressure at the interface (dashed line) and surface elevation (solid line) as a function of  $x$  during the occurrence of the steep wave event ( $\eta$  and  $x$  are given in  $m$  and  $P = p_a$  in  $10^{-1} Pa$ )

**3. Numerical simulations, validation, results and discussion.** In this section we consider numerical simulations of the fully nonlinear equations by using the Boundary Integral Equation Method.

**3.1. Validation : comparison with experiment.** To demonstrate the efficiency of the present numerical method (BIEM) used to solve the system of equation (1), a comparison between numerical results and experimental data has been done in the absence of wind.

The number of meshes to discretize the boundary is 1100, 600 of them on the water surface. The time integration is performed using a RK4 scheme, with a constant time step of 0.001 s. To avoid numerical instability, the grid spacing  $\Delta x$  and time increment  $\Delta t$  have been chosen to satisfy the following Courant criterion derived from the linearized surface conditions

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{8\Delta x}{\pi g} \quad (7)$$

The experimental simulation on the focusing phenomenon has been conducted in the wave tank of Ecole Centrale Marseille. The tank is 17 m long and 0.65 m width. The water depth in front of the wavemaker was about 0.35 m. The generation of the focalized wave follows from a given focal point and a given spectrum. The chosen

spectrum was a Ricker (the second derivative of a Gaussian function) :

$$R(\omega) = A_r \sqrt{\pi} T_r e^{-\omega^2 T_r^2 / 4} \left( 1 - a_r \left( \frac{1}{4} \omega^2 T_r^2 - \frac{1}{2} \right) \right)$$

with  $A_r$  the amplitude of the focalized wave and  $a_r$  and  $T_r$  parameters to adjust the peak pulsation and the narrowness of the signal. To characterize the wave field, water elevation was measured with four resistive wave gauges. The setup of the Ricker and the distance of gauges from the wavemaker are given in the following tables:

$A_r$ (m)	$a_r$	$T_r$	focal point (m)	wave gauge $n^o$	1	2	3	4
0.1	-0.7	0.23	7.75	distance (m)	1.7	5.73	7	7.46

Table 1 : Ricker setup

Table 2 : location of gauges

Figure 4 shows the experimental and computed surface elevation  $\eta(t)$  at  $x = 1, 7 m$ ,  $x = 5.73 m$ ,  $x = 7 m$  and  $x = 7.46 m$ . The agreement between the experimental data and the numerical results is satisfactory. We observe a very good agreement for the phase while some deviations occur for the elevation. This comparison demonstrates the efficiency of the numerical model to simulate realistically the formation of steep wave event in shallow water.

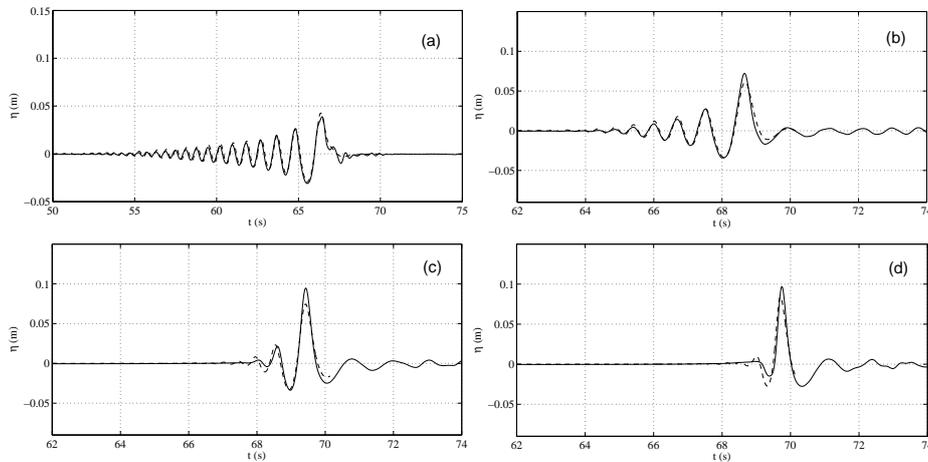


FIGURE 4. Time evolution of the experimental (solid line) and numerical (dashed line) surface elevation at several fetches:(a)  $x = 1, 7 m$ , (b)  $x = 5.73 m$ , (c)  $x = 7 m$  and (d)  $x = 7.46 m$ .

**3.2. Extreme wave event in the presence of wind.** We consider now the time evolution of the initial wave train plotted in figure 2. The number of meshes to discretize the boundary is 2000, 1000 of them on the water surface and the time step is  $0.05 s$ . The length of the numerical tank is  $800 m$  and depth is  $h = 1 m$ . The focusing and defocusing stages of the wave train without wind effect ( $U = 0 m/s$ ) is shown in figure 6 in the plane  $(x, t)$ . At the maximum of modulation the profile of

the steep wave event does not fit exactly with the expected Gaussian impulse (see figure 5). The theoretical value of the normalized amplitude is 0.20 whereas the maximal value of the normalized amplitude of the numerical simulation is 0.175. This disagreement is easily explained. We have used as initial condition for the fully nonlinear system (1) the profile resulting from the KdV equation which is a weakly nonlinear model. The deviation between fully nonlinear and weakly nonlinear is due to higher-order terms which are not considered in the KdV equation. Our main purpose was to obtain a large wave due the dispersive focusing of an initial wave group frequency and amplitude modulated.

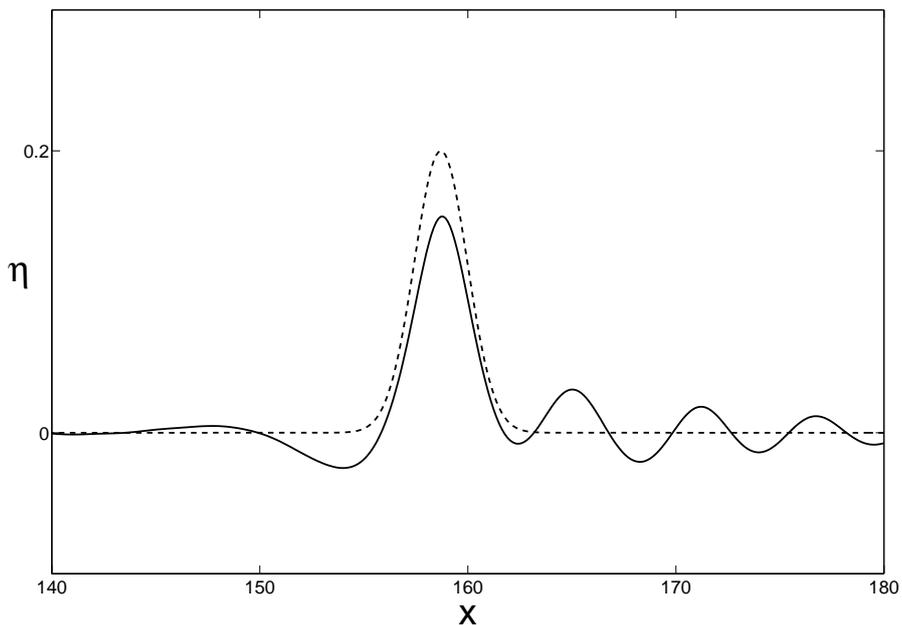


FIGURE 5. Comparison between the expected Gaussian impulse of KdV model (dashed line) with the steep wave event from numerical simulation (solid line)

The question is how do extreme wave events due to dispersive focusing under wind action evolve? How are the amplification and time duration of these waves under wind effect modified? Are these effects similar or different from those observed in the case of extreme wave events due to the spatio-temporal focusing in deep water? For each value of the wind velocity, the amplification factor  $A(t, U)$  of the group of waves between initial instant of time and time  $t$  is defined as follows

$$A(t, U) = \frac{\eta_{\max}(t, U)}{\eta_{\text{ref}}} \quad (8)$$

where  $\eta_{\text{ref}}$  is the maximal wave amplitude of the initial wave group.

Figure 7 gives the amplification factor as a function of time for various values of the wind velocity, equal to  $0 \text{ m/s}$ ,  $8 \text{ m/s}$ ,  $16 \text{ m/s}$ ,  $20 \text{ m/s}$  and  $30 \text{ m/s}$ . The critical slope of the modified Jeffreys mechanism is  $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.25$ . The curves corresponding to  $U = 0 \text{ m/s}$  and  $U = 8 \text{ m/s}$  are almost identical. Larger wind velocities are

needed to influence the dynamics of the steep wave events. In deep water [3] and [4] observed significant influence of wind on extreme wave events for weaker values of the wind speed. In relation to deep water, larger values of the wind velocity are needed in shallow water to influence significantly the behaviour of the steep wave events. This means that steep wave events are more stable to wind perturbation in shallow water than in deep water. Figure 7 shows as well that the effect of the wind is threefold: it increases the amplification factor and lifetime of the steep wave event, and shifts downstream the focus point which corresponds to the maximum value of  $A(t, U)$ . For  $U = 30 \text{ m/s}$ , the defocusing is stopped by the breaking of the wave. Before the focus point, the slope of the waves is less than the threshold value imposed to produce air flow separation on leeward side of the crests. This feature was observed experimentally by [4] (see their figure 5) in deep water. The effect of the wind on the extreme wave event wave is to shift the focusing point downstream, and to increase its amplitude and duration. It is also interesting to emphasize that the amplitude and lifetime of the steep wave increases with wind velocity.

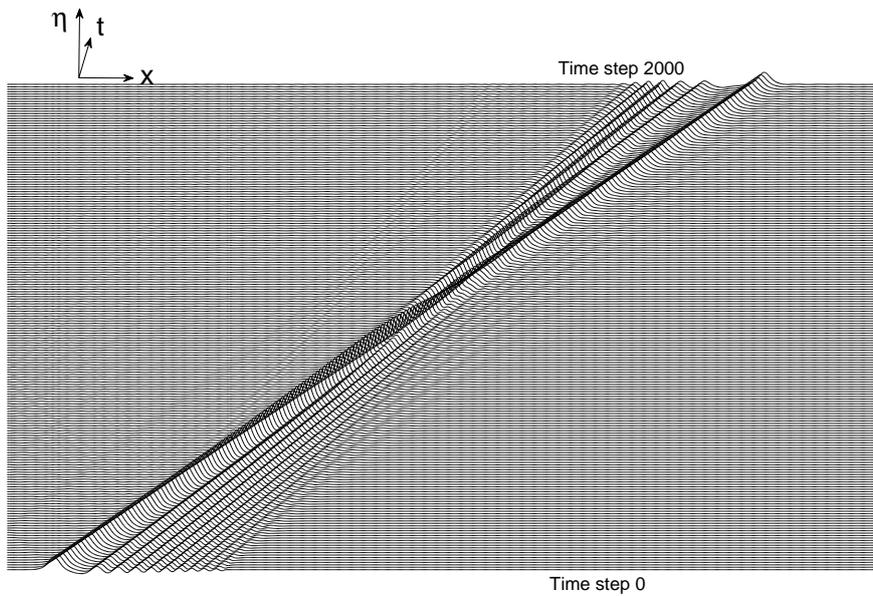


FIGURE 6. Spatio-temporal evolution of the focusing and defocusing wave group in the absence of wind (from bottom to top)

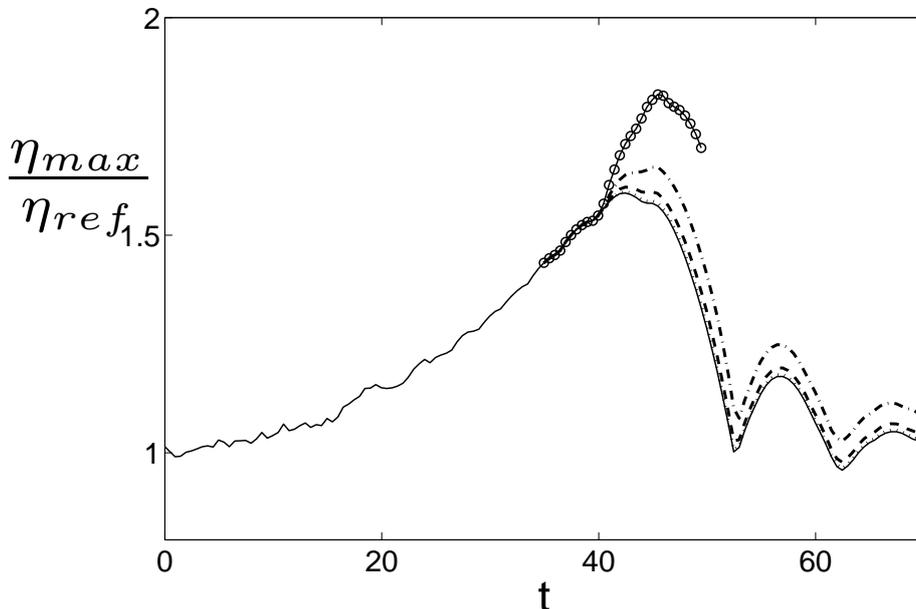


FIGURE 7. Evolution of the amplification factor  $A(t, U) = \eta_{\max}/\eta_{\text{ref}}$  as a function of time, for several values of the wind speed.  $U = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (solid line),  $U = 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (dotted line),  $U = 16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (dashed line),  $U = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (dot-dashed line),  $U = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (open circle)

#### REFERENCES

- [1] J. Kharif, E. Pelinovsky and A. Slunyaev, “Rogue waves in the ocean” edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [2] M.L. Banner and J. Song, *On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. Part II: Influence of wind forcing and surface shear*, J. Phys. Oceanogr., **32** (2002), 2559–2570.
- [3] J. Touboul, J.P. Giovanangeli, C. Kharif and E. Pelinovsky, *Freak waves under the action of wind: experiments and simulations*, Eur. J. Mech. B/Fluids, **25** (2006), 662–676.
- [4] C. Kharif, J.P. Giovanangeli, J. Touboul, L. Grare and E. Pelinovsky, *Influence of wind on extreme wave events: experimental and numerical approaches*, J. Fluid Mech., **594** (2008), 209–247.
- [5] E. Pelinovsky, T. Talipova and C. Kharif, *Nonlinear dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water*, Phys. D, **147** (2000), 83–94.
- [6] A. Slunyaev, C. Kharif, E. Pelinovsky and T. Talipova, *Nonlinear wave focusing on water of finite depth*, Phys. D, **173** (2002), 77–96.
- [7] H. Jeffreys, *On the formation of wave by wind*, Proc. R. Soc. Lond. A, **107** (1925), 189–206.
- [8] M.L. Banner and W.K. Melville, *On the separation of air flow over water waves*, J. Fluid Mech., **77** (1976), 825–842.
- [9] S. Kawai, *Structure of air flow separation over wind wave crests*, Boundary-Layer Met., **23** (1982), 503–521.

Received xxxx 20xx; revised xxxx 20xx.

E-mail address: kharif@irphe.univ-mrs.fr

E-mail address: chambarel@irphe.univ-mrs.fr

E-mail address: kimmoun@irphe.univ-mrs.fr

#### **4.2 Chambarel J., Kharif C., Kimmoun O., Generation of two-dimensional steep water waves on finite depth with and without wind, *Eur. J. Mech. B/ Fluids*, submitted**

Dans ce chapitre, nous étudions numériquement l'influence du vent sur des vagues extrêmes et sur des vagues déferlantes générées par focalisation dispersive en eau peu profonde. La dynamique d'un train d'ondes se propageant sans vent est comparée à celle d'un train d'ondes en présence de vent. Le vent est introduit numériquement en utilisant le mécanisme d'abri de Jeffreys modifié. Le vent a pour effet d'augmenter l'amplitude de l'onde focalisée ainsi que sa durée de vie. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus en eau profonde. Cependant, ces vagues extrêmes en eau peu profonde sont moins instables en présence de vent que celles en eau profonde.

De plus nous effectuons des comparaisons avec des données expérimentales sur une vague déferlante en l'absence de vent. Nous introduisons ensuite numériquement du vent sur cette vague déferlante. Le vent accélère le déferlement après avoir amplifié la vague.

Le second problème considéré dans cette section est l'impact d'une vague déferlante sur un mur vertical. De nombreuses structures côtières telles que les digues peuvent être endommagées lorsqu'elles sont soumises à de puissantes vagues durant les tempêtes. Par conséquent la prédiction de la charge exercée par ces vagues est cruciale dans l'optique de la conception des structures côtières concernées. De plus, il est connu que lorsqu'une vague déferle directement sur un mur, les pressions subies par celui-ci sont beaucoup plus fortes que pour une vague non déferlante.

La pression exercée par une vague déferlante est donc calculée numériquement puis comparée avec des données expérimentales. Les résultats obtenus sont en parfait accord avec l'expérience.

# Generation of two-dimensional steep water waves on finite depth with and without wind

J. Chambarel, C. Kharif, O. Kimmoun

*Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre  
Technopôle de Château-Gombert 49, rue Joliot Curie - B.P. 146  
13384 Marseille Cedex 13, France*

---

## Abstract

This paper reports on a series of numerical simulations designed to investigate the action of wind on steep waves and breaking waves generated through the mechanism of dispersive focusing on finite depth. The dynamics of the wave packet propagating without wind at the free surface are compared to the dynamics of the packet propagating in the presence of wind. Wind is introduced in the numerical wave tank by means of a pressure term, corresponding to the modified Jeffreys' sheltering mechanism. The wind blowing over a strongly modulated wave group due to the dispersive focusing of an initial long wave packet increases the duration and maximal amplitude of the steep wave event. These results are coherent with those obtained within the framework of deep water. However, steep wave events are less unstable to wind perturbation in shallow water than in deep water.

Furthermore, a comparison between experimental and numerical wave breaking is presented in the absence of wind. The numerical simulations show that the wind speeds up the wave breaking and amplifies slightly the wave height. The wall pressure during the run up of the steep wave event on a vertical wall is also investigated and a comparison between experimental and numerical results is provided.

*Key words:* dispersive focusing, steep wave train, breaking wave, shallow water, wind, Jeffreys sheltering mechanism

---

## 1. Introduction

Extreme wave events are due to the focusing of wave energy into a small area. The main physical mechanisms which may produce extreme wave

events are described and discussed in detail in Kharif *et al.* 2009 [1]. Extreme wave occurrence on currents is a well-understood problem that can explain the formation of rogue waves when wind waves or swells are propagating against a current. Geometrical or spatial focusing may result in large amplitude waves. The spatio-temporal wave focusing due to the dispersive nature of water waves is a classic mechanism yielding wave energy concentration in a small area. Nonlinear uniform wave trains suffer an instability known as the Benjamin-Feir instability, which produces growing modulations of the envelope that evolve into short groups of steep waves. A uniform wave train under modulational instability transforms into a system of envelope that may collide to give rise to huge wave events. Most of the studies have considered the extreme wave occurrence without including the direct effect of the wind on their dynamics. To our knowledge, there are few published results about this coupling. Among the recent papers on wind forcing on large amplitude deep water waves, one can cite Banner and Song 2002 [2], Touboul *et al.* 2006 [3] and Kharif *et al.* 2008 [4]. Ma and Yan 2008 [5] presented preliminary simulations of wind effects on two- and three-dimensional freak waves on finite depth. Recently, Yan and Ma 2009 [6] investigated numerically wind effects on two-dimensional breaking solitary waves on a sloping beach. Within the framework of extreme wave events due to the spatio-temporal focusing and Benjamin-Feir instability, Touboul *et al.* 2006 [3] and Kharif *et al.* 2008 [4] have shown experimentally and numerically that wind sustains steep waves which then evolve into breaking waves. More specifically, wind increases both the amplitude and life-time of steep wave events. Wind effect plays a significant role in the persistence of extreme wave events. Until now there has been no investigation on wind effect on the formation of extreme wave events in shallow water apart from the papers by Chambarel *et al.* [7] and Yan and Ma 2009 [6]. Note that Chambarel *et al.* [7] considered only one kind of focusing by using an inverse method and extended previous results of Touboul *et al.* 2006 [3] and Kharif *et al.* 2008 [4] obtained in deep water to extreme wave events with wind forcing in shallow water. Within the framework of one-dimensional propagation it is well known that the Benjamin-Feir instability stabilizes when  $kh$  becomes less than 1.363, where  $k$  and  $h$  are the wavenumber and depth respectively. Hence we shall use two different kinds of spatio-temporal wave focusing (or dispersive focusing) for generating extreme wave events. One of the purposes of the present study is to extend and complete the paper by Chambarel *et al.* [7]. Note that rogue occurrence in shallow water is discussed in Kharif *et al.* 2009 [1] too, but without con-

sidering wind/wave coupling.

The second problem considered is breaking wave impact on a vertical wall. Coastal structures such as vertical breakwaters or sea walls have been damaged when subjected to steep storm waves (Oumeraci, 1994 [8]). Therefore, accurate prediction of the most severe wave loading is crucial to the design of many types of coastal structures and it is well known that when a wave breaks directly onto a vertical wall, impact pressures are produced which can be extremely large in comparison to the pressures exerted by non-breaking waves. The fundamental role of the extreme impact pressures that are impulsively exerted on sea walls has been underlined by both experimental (e.g. Chan and Melville, 1988 [9]; Kirkgöz, 1990 [10], Kirkgöz 1991 [11]; Hattori *et al.*, 1994 [12]; Bullock *et al.*, 2007 [13]) and theoretical (e.g. Cooker and Peregrine, 1992 [14]; Peregrine, 2003 [15]) studies. In addition, numerous numerical models based on potential theory have been developed to provide a reliable tool for the estimation of wave shape and impact pressure (e.g. Cooker and Peregrine 1990 [16]; Zhang *et al.* 1996 [17]).

In section 2 the mathematical statement of the water wave problem is presented as well as the numerical method. Section 3 reports on two different ways used to generate steep water wave groups in finite depth. The wind modelling based on a modified sheltering mechanism is described in section 4. Results of numerical simulations and validations are presented for both steep non breaking waves and breaking waves in section 5. In this section the pressure and wall force exerted by a breaking wave is computed numerically and compared with experimental data.

## 2. Mathematical formulation and numerical method

### 2.1. Basic equations

The problem is solved by assuming that the fluid is inviscid, incompressible, and the motion irrotational. Hence the velocity field is given by  $\mathbf{u} = \nabla\phi$  where the velocity potential  $\phi(x, z, t)$  satisfies the Laplace's equation.

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{for } -h < z < \eta(x, t) \quad (1)$$

where  $\Delta$  is the Laplacian. The horizontal and vertical coordinates are  $x$  and  $z$  respectively whereas  $t$  is time. The still-water level lies at  $z = 0$ , and the horizontal impermeable bed lies at  $z = -h$ .

The Laplace equation (1) is solved within a domain bounded by the water

surface and solid boundaries of the numerical tank. The boundary conditions are defined below.

The impermeability condition writes

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{on } \partial\Omega_S, \quad (2)$$

where  $\partial\Omega_S$  corresponds to solid boundaries,  $\mathbf{v}$  is the velocity of the solid boundaries, set equal to zero on the horizontal bottom and downstream wall of the wave tank and equal to the velocity of the piston or flap at any point of the wavemaker, and  $\mathbf{n}$  is the unit normal vector to the boundaries.

A Lagrangian description of the water surface is used

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad (4)$$

where  $D/Dt = \partial/\partial t + \nabla\phi \cdot \nabla$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$  is the gradient operator. The dynamic boundary condition states that the pressure at the surface is equal to the atmospheric pressure  $p_a$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - g\eta + \frac{\sigma}{R} - 2\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{p_a}{\rho_w} \quad \text{on } z = \eta(x, t), \quad (5)$$

where  $\sigma$  is the surface tension coefficient,  $R$  the local curvature at the free surface,  $\nu$  the viscosity coefficient,  $g$  is the acceleration due to gravity and  $\rho_w$  is the water density. The term  $2\nu\partial^2\phi/\partial z^2$  is similar to the dissipative term used by Ruvinsky *et al.* (1991) [18].

## 2.2. Boundary Integral Equation Method

The system to solve is equations (1), (3), (4) and (5) with the boundary conditions prescribed by equation (2). A Boundary Integral Equation Method (BIEM) is used to solve this system of equations with a mixed Euler Lagrange (MEL) time marching scheme. For more details about this numerical method see the paper by Touboul *et al.* [3].

The Green's second identity is used to solve Laplace's equation for the velocity potential

$$\begin{aligned} c(Q)\phi(Q) &= \int_{\partial\Omega} \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) dl \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P) G(P, Q) dl, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $G$  is the free space Green's function. The fluid domain boundary  $\partial\Omega$  is  $\partial\Omega_F \cup \partial\Omega_S$ , the union of the free surface  $\partial\Omega_F$  and solid boundaries  $\partial\Omega_S$ . The unit normal vector  $\mathbf{n}$  points outside the fluid domain. The unknowns are  $\partial\phi/\partial n$  on  $\partial\Omega_F$  and  $\phi$  on  $\partial\Omega_S$ . Let  $P$ ,  $Q$  and  $c(Q)$  denote two points of the domain and the angle between two consecutive panels respectively. The angle  $c(Q)$  is defined as follows

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & \text{if } Q \text{ is outside the fluid domain,} \\ \alpha & \text{if } Q \text{ is on the boundary,} \\ -2\pi & \text{if } Q \text{ is inside the fluid domain,} \end{cases} \quad (7)$$

where  $\alpha$  is the inner angle relative to the fluid domain at point  $Q$  along the boundary.

Time stepping is performed using a fourth order Runge & Kutta scheme, with a constant time step.

### 3. Generation of steep water waves

In this section, two ways for producing steep wave events in finite depth are presented. They are both based on the dispersive nature of water waves. In the first case the steep wave events are obtained by using a numerical wave tank equipped with a piston-like wavemaker whereas in the second an inverse method is utilized to define an initial profile evolving to large waves.

#### 3.1. Dispersive focusing

Geometrical or spatial focusing may result in large amplitude and steep waves. The spatio-temporal wave focusing due to the dispersive nature of water waves is a classic mechanism yielding wave energy concentration in a small area. Hence, we shall use the spatio-temporal wave focusing (or dispersive focusing) for generating steep wave events. Note that it is easier to generate a steep wave event through this mechanism in deep water than in shallow water. Extreme wave events due to spatio-temporal focusing phenomenon can be described as follows. In the case of dispersive wave propagation, if short wave groups are located ahead of longer wave trains, one observes that long waves will catch up the shorter because they have a larger group velocity. A large-amplitude wave can occur at some fixed time because of superposition of all the waves merging at a given location (the focus point). Afterwards, the longer waves will be in front of the shorter

waves, and the amplitude of the wave train will decrease.

A linear approach of the problem would lead to consider sea surface as a superposition of linear waves of frequencies  $\omega(x, t)$ . Following Whitham (1974) [19], Ostrovsky and Potapov (1999) [20] and Brown (2001) [21], the spatio-temporal evolution of these components is governing by the following hyperbolic equation :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + C_g \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

and hence

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad (9)$$

where  $d/dt = \partial/\partial t + C_g \partial/\partial x$ .

Equation (9) is true along the characteristic lines defined by  $dx/dt = C_g(\omega)$  where  $C_g(\omega)$  is the group velocity. This equation means that the frequency is constant along the characteristics. Finally we can describe the dispersive focusing phenomenon in the  $(x, t)$ -plane as shown in figure 1. A wave train is generated at  $x = 0$  during  $t = T$  and focus at  $x = X_f$  and  $t = T_f$ . The straight lines correspond to different values of the wave group velocity. The question is: In what way should be modulated the initial wave train for all the characteristics originated from a given temporal interval  $[0, T]$  to converge at one point  $x = X_f$  at  $t = T_f$ ? This point defines the space and time of the focusing. What is the frequency to impose to the wavemaker located at  $x = 0$ ?

This method called inverse Fourier transform is classical in deep water (see Kharif *et al.* (2008) [4]), but in shallow water we cannot derive the time dependence of the frequency explicitly.

We can express the wave group velocity as a function of  $T_f$  and  $X_f$

$$C_g = \frac{X_f}{T_f - t}, \quad (10)$$

where  $t$  is the time. Then we use the linear dispersion relation for gravity waves

$$\omega^2 = gk \tanh(kh), \quad (11)$$

to write

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right], \quad (12)$$

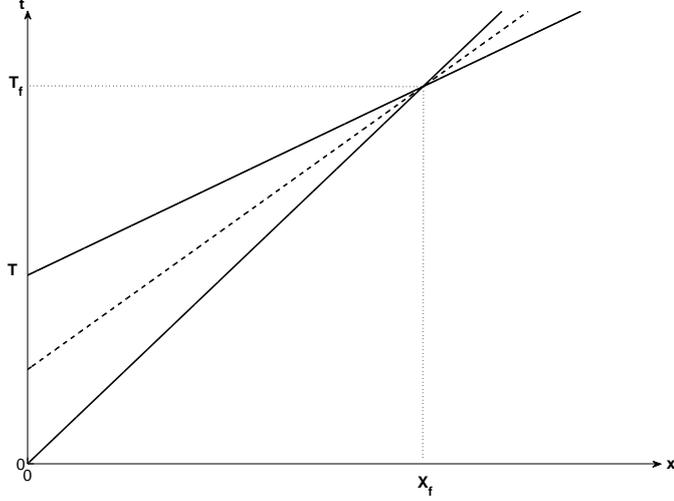


Figure 1: Description the dispersive focusing phenomenon in the  $(x, t)$ -plane. Characteristic lines defined by  $dx/dt = C_g(\omega)$ .

where  $k$  is the wavenumber and  $h$  the water depth. So

$$\frac{X_f}{T_f - t} = \frac{\omega}{k} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right]. \quad (13)$$

Now we obtain a first expression of  $\omega$  as a function of time

$$\omega = 2k \frac{X_f}{T_f - t} / \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right). \quad (14)$$

But in this expression,  $k$  is also a function of time. So if  $k$  is known at each time step,  $\omega$  may be calculated too. Using the linear dispersion relation, we can incorporate the expression of  $\omega$  into equation (11)

$$k = \frac{g}{4} \left( \frac{T_f - t}{X_f} \right)^2 \tanh(kh) \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right]^2 = f(k). \quad (15)$$

The next step is to solve equation (15) by using the fixed point method at each time step as shown in figure 2. Now using equation (14) the frequency  $\omega$  may be known at each time. Futhermore, this method allows us to check

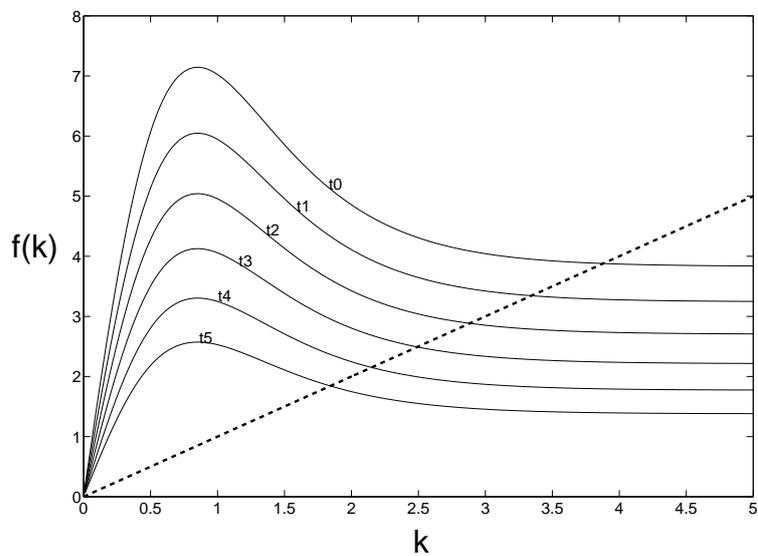


Figure 2: Solution of equation (15)  $k = f(k)$  using the fixed point method.

if the value of the parameter  $kh$ , at every time step, satisfies the shallow water condition ( $kh \lesssim 1$ ). The signal imposed to the displacement of the piston-like wavemaker in the numerical wave tank is  $s(t) = A \sin(\omega(t).t)$ .

### 3.2. Korteweg de Vries equation and inverse method

The Korteweg-de Vries equation is an approximate equation which may be derived from the fully nonlinear system of equations by using a multiple scale method. The dependent variables  $\eta$  and  $\phi$  are expanded as a power series of  $a/h$  with  $(kh)^2 = \mathcal{O}(a/h)$ , where  $a$  is a measure of the wave amplitude and  $k$  the wavenumber. The KdV equation which describes the leading-order contribution to the surface wave is

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3\eta}{2h}\right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (16)$$

where  $c_0 = \sqrt{gh}$ . Note that equation (16) holds for gravity waves only. This universal equation which describes the spatio-temporal evolution of weakly nonlinear and weakly dispersive waves is invariant under the transformation  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow -t$ . Hence, we can choose the expected steep wave event as the initial condition for equation (16) and calculate  $\eta(x, t)$  for any time  $T$ . Due to invariance of equation (4) by reversal of abscissa, the initial condition  $\eta(x, T)$  evolves to the expected steep wave event. Pelinovsky *et al.* [22] used this inverse method with KdV equation to study the rogue wave formation in shallow water. Following Pelinovsky *et al.* [22] we choose as initial condition representing the expected steep wave event the following Gaussian impulse

$$\eta(x, 0) = A \exp(-K^2 x^2), \quad (17)$$

where  $A$  is the amplitude and  $K^{-1}$  is the initial width of the wave.

The evolution of this initial condition for equation (16) is given in figure 3. A pseudo-spectral method is used to compute numerically the surface elevation at different times (Fornberg (1998) [23]). At time  $T$ , a soliton is formed ahead of dispersive wave train. As expected, the soliton with the modulated wave train ahead turns into the Gaussian impulse under the inverse transformation. The profile  $\eta(x, T)$  obtained from the KdV equation with the corresponding potential  $\phi(x, T)$  is then used as initial condition for numerical simulations of the fully nonlinear equation (see figure 4). The potential is obtained integrating the linear dynamic condition  $\partial \phi / \partial t = -g\eta$ .

The dispersive wave focusing method which is linear is applicable for any value of the depth and corresponds to a boundary value problem (when a wavemaker is used for generating steep wave events). Hence this method is more appropriate than the inverse Korteweg de Vries method for comparison with experimental data.

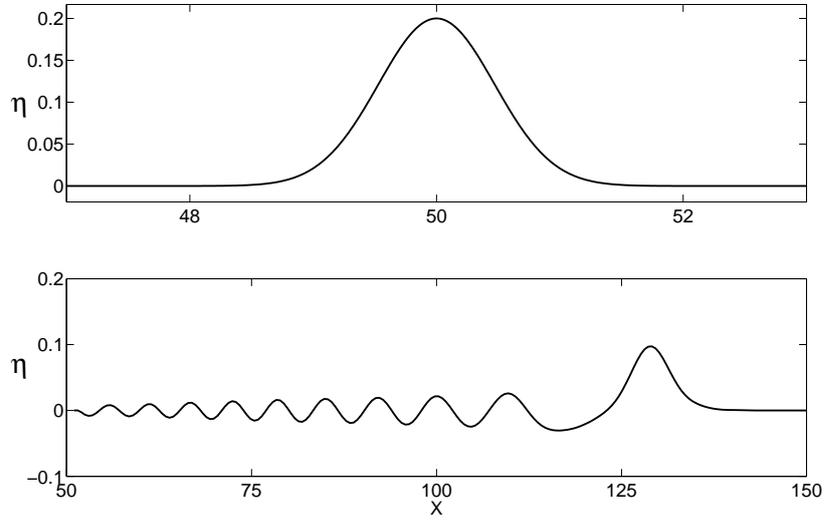


Figure 3: Evolution of an initial Gaussian impulse (top) into soliton and dispersive wave train (bottom) within the framework of the KdV equation ( $\eta$  and  $x$  are given in  $m$ ).

The inverse KdV method which is weakly nonlinear is restricted to shallow water problem (i.e. small values of  $kh$ ) and corresponds to initial value problems.

The choice between the two methods will depend upon the conditions under which the problem is considered.

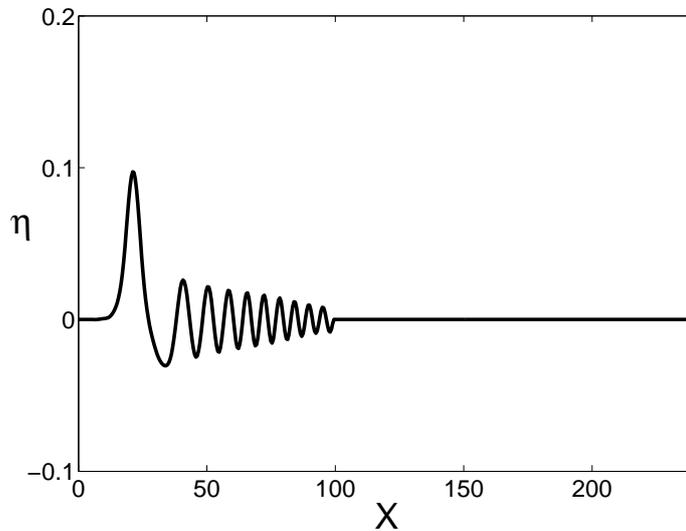


Figure 4: Initial surface elevation from KdV equation (16) for equations (1), (2), (3), (4) and (5), ( $\eta$  and  $x$  are given in  $m$ ).

#### 4. Wind modelling

Within the framework of deep water, Kharif *et al.* [4] demonstrated experimentally for a wind velocity  $U = 4 \text{ m} \cdot \text{s}$  that steep wave events occurring in water wave groups are accompanied by air flow separation. Furthermore, it was suggested that a significant wind effect takes place when the steep wave event occurs. The focusing stage was almost independent of the wind velocity. Deviations were observed only in the vicinity of the focus point where the waves become steep. This observation reinforced the idea that separation of the air flow in the lee of the wave crests is responsible for the growth and persistence of steep waves. The Jeffreys' sheltering mechanism which was introduced by Jeffreys [24] can be modified and used as wind modelling. Since air flow separation occurs only over steep waves, the Jeffreys' sheltering mechanism has to be applied locally in time and space and not permanently over the whole wave field. It is well known that this mechanism cannot be applied continuously over water waves. It is only working when air flow separation occurs over steep waves (Banner and Melville [25], Kawai [26]). Note that the Jeffreys' sheltering mechanism is a relevant mechanism for shallow water where the waves are generally steeper than in deep water.

Following Jeffreys [24], the pressure at the interface  $z = \eta(x, t)$  is related to the local wave slope according to the following expression

$$p_a = \rho_a s (U - c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (18)$$

where the constant,  $s$  is called the sheltering coefficient,  $U$  is the wind speed,  $c$  is the wave phase velocity and  $\rho_a$  is atmospheric density. Kharif *et al.* [4] obtained an experimental value  $s = 0.5$  for deep water waves. We assume that it also holds for shallow water. In order to apply the relation (18) for only steep waves we introduce a threshold value for the slope  $(\partial \eta / \partial x)_c$ . When the local slope of the waves becomes larger than this critical value, the pressure is given by equation (18) otherwise the pressure at the interface,  $p_a$ , is taken equal to a constant which is chosen equal to zero without loss of generality. This means that wind forcing is applied locally in time and space. When the critical value is low, the transfer of energy from the wind to the waves yields to wave breaking and when it is too high this transfer becomes negligible as far as wave dynamics are concerned. Our main purpose is to show that the application of the modified Jeffreys mechanism could explain simply some features of the interaction between wind and strongly modulated water wave groups in shallow water.

Figure 5 shows the pressure distribution at the interface in the vicinity of the crest given by equation (18), during the occurrence of a steep wave event.

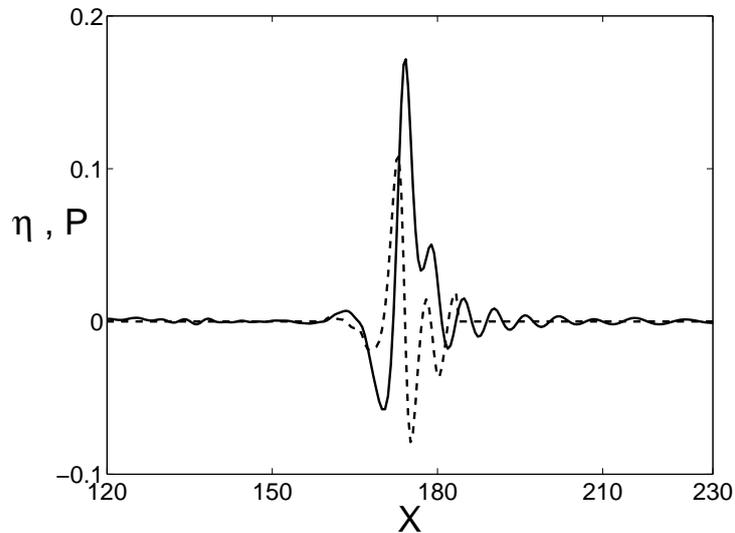


Figure 5: Pressure at the interface (dashed line) and surface elevation (solid line) as a function of  $x$  during the occurrence of a steep wave event ( $\eta$  and  $x$  are given in  $m$  and  $P = p_a$  in  $10^{-1}Pa$ ).

## 5. Numerical simulations and validation

### 5.1. Comparison with experiment without wind (Ricker Spectrum)

To demonstrate the efficiency of the present numerical method (BIEM) used to solve the system of equations (1), (3), (4) and (5) with the boundary conditions prescribed by equation (2), a comparison between numerical results and experimental data has been done without wind.

#### 5.1.1. Propagation of a breaking wave

The experimental simulation on the focusing phenomenon has been conducted in the wave tank of Ecole Centrale Marseille. The tank is  $17 m$  long and  $0.65 m$  width. The water depth in front of the wavemaker is about  $0.35 m$ . The generation of a large wave at a given focal point follows from the focusing of waves corresponding to a given spectrum. The chosen spectrum is a Ricker spectrum (the second derivative of a Gaussian function):

$$R(\omega) = A_r \sqrt{\pi} T_r e^{-\omega^2 T_r^2 / 4} \left( 1 - a_r \left( \frac{1}{4} \omega^2 T_r^2 - \frac{1}{2} \right) \right),$$

with  $A_r$  the amplitude of the steep wave event and  $a_r$  and  $T_r$  parameters to adjust the peak pulsation and the narrowness of the signal. A flap-type

wavemaker is used to generate the focused wave. The motion of the wavemaker is calculated directly from the spectrum based on the sum of linear components as

$$\eta = \sum_{i=1}^N a_i \cos(k_i x - \omega_i t)$$

with the use of the linear dispersion relation  $\omega_i^2 = gk_i \tanh(k_i h)$ . The spectrum is discretized with 4096\*8 modes. The wavemaker motion is then deduced using the linear transfert function of the wavemaker.

$$C_0 = \sinh(kh) \left( \sinh(kh) + \frac{2}{k(h+l)} \frac{1 - \cosh(kh)}{kh + \sinh(kh) \cosh(kh)} \right)$$

In this expression  $l$  corresponds to the distance from the bottom to the hinge of the wavemaker. In our case,  $l = 0.5m$  corresponds to the hinge below the bottom.

To characterize the wave field, water elevation was measured with six resistive wave gauges. The setup of the Ricker spectrum and the distance of gauges from the wavemaker are given in the following tables:

$A_r$ (m)	$a_r$	$T_r$	focal point (m)
0.1	-0.7	0.23	7.75

*Table 1 : Ricker spectrum setup*

wave gauge $n^o$	1	2	3	4	5	6
distance (m)	1.7	5.37	5.73	6.09	7	7.46

*Table 2 : location of gauges*

We run a series of numerical simulations and compare the results with experimental data. We compute exactly the wave tank of Ecole Centrale Marseille. We use a numerical flap-type wavemaker identical to the experimental wavemaker. From the experimental data, we have computed the angle of the wavemaker at every time step. To discretize the boundary the number of meshes is about 1100, 660 of them on the free surface. The time step is  $10^{-4} s$ . Figure 6 shows the experimental and computed surface elevation  $\eta(t)$  at  $x = 1,7 m$ ,  $x = 5.37 m$ ,  $x = 5.73 m$ ,  $x = 6.09 m$ ,  $x = 7 m$  and

$x = 7.46 m$ . The agreement between experimental data and numerical results is satisfactory. We observe a good agreement for the phase and for the elevation despite small deviations in amplitude at  $x = 1,7 m$  and phase at  $x = 7.46 m$ . Since we are considering near breaking and breaking waves,

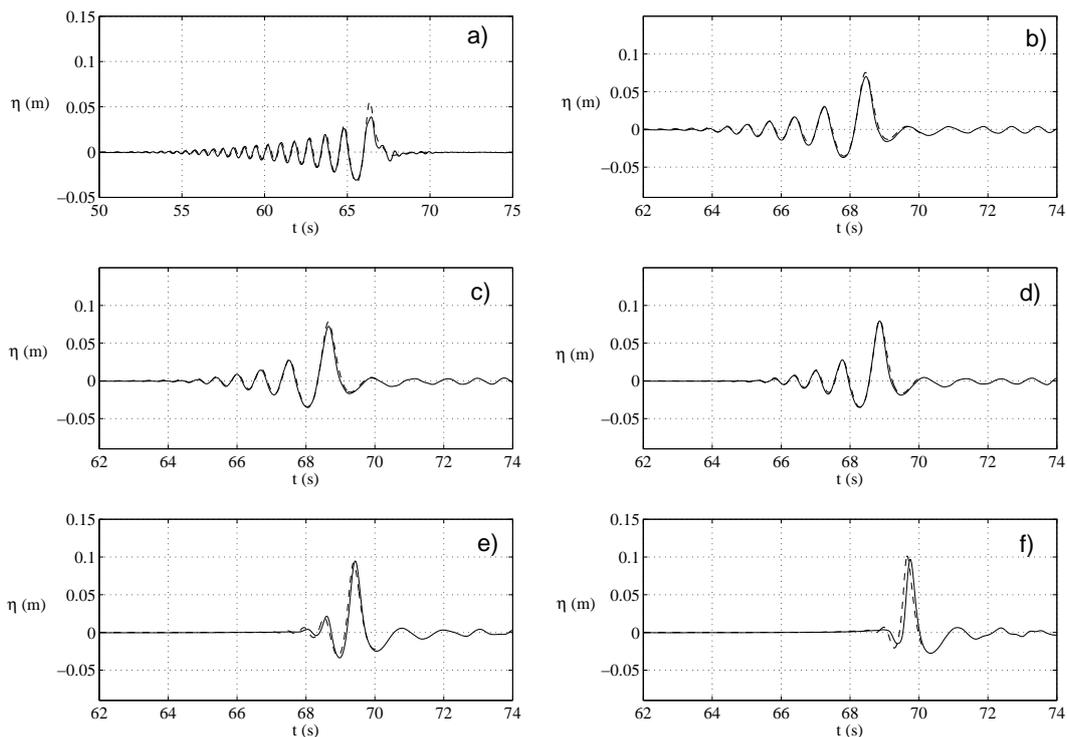


Figure 6: Time evolution of the experimental (solid line) and numerical (dashed line) surface elevation at several fetches: (a)  $x = 1,7 m$ , (b)  $x = 5.37 m$ , (c)  $x = 5.73 m$ , (d)  $x = 6.09 m$ , (e)  $x = 7 m$  and (f)  $x = 7.46 m$ .

for which small scales are generated and surface curvature becomes important, surface tension cannot be neglected. In this experiment since we are considering a breaking wave, surface tension effect is included in the dynamical boundary condition of the fully nonlinear system. Furthermore we have introduced viscous effect. Figures 7 and 8 show the comparisons between numerical and experimental results. The experiments correspond to dashed

lines whereas solid lines correspond to numerical simulations. In figure 7 the numerical experiment corresponds to the case  $\sigma = 0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  and  $\nu = 0 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$  whereas in figure 8 surface tension and viscous effects have been introduced ( $\sigma = 73.10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  and  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ).

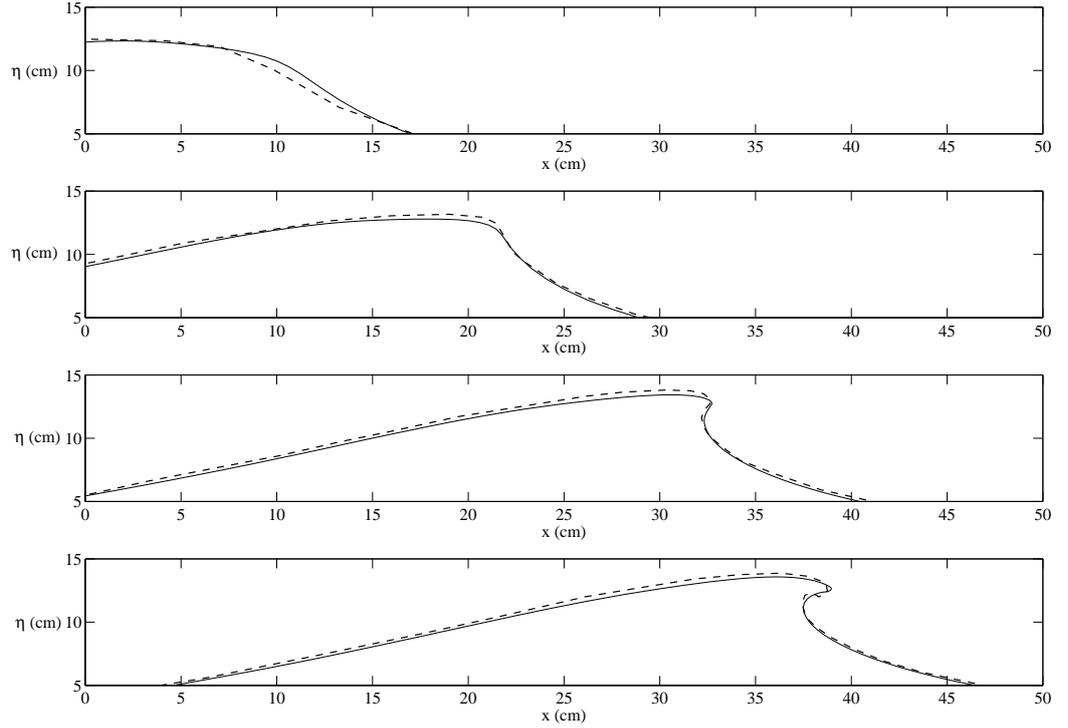


Figure 7: Spatio-temporal evolution of a breaking wave: comparison between experimental data (dashed line) and numerical results (BIEM) without surface tension and viscosity (solid line). From top to bottom:  $t = 2.19 \text{ s}$ ,  $t = 2.27 \text{ s}$ ,  $t = 2.34 \text{ s}$ ,  $t = 2.37 \text{ s}$ .

As we can see the shape of the experimental and numerical breaking jets are quite similar when surface tension and viscosity are taken into account whereas it is not the case for pure gravity waves. The importance of surface tension effect is emphasized when curvature is large, namely in the vicinity of the jet. The tip of the jet is thickened in the presence of surface tension. The number of elements has been optimized here. The number of element is

sufficient since our numerical experiment fit quite well the tank experiment. Furthermore if there are too many elements this can generate singularities (small divisors) in the crest vicinity where particles accumulate during the breaking.

This comparison demonstrates the efficiency of the numerical model used to simulate realistically the formation of a steep wave event in shallow water.

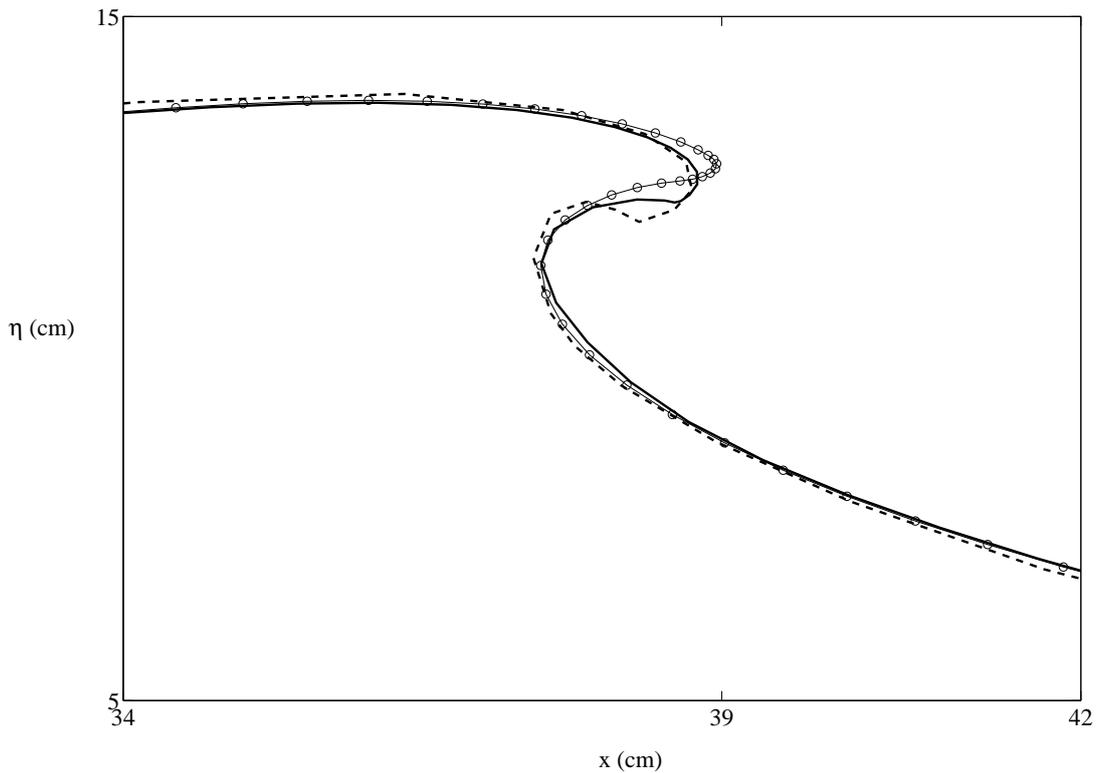


Figure 8: Comparison between experimental data (dashed line) and numerical results (BIEM), model with surface tension and viscosity (solid line), and without surface tension and viscosity (open circles).

### 5.1.2. Wall pressure exerted by a breaking wave

In this subsection we consider the pressure exerted on a vertical wall by a breaking wave in shallow water. To generate the breaking wave, the

method of subsection 5.1 based on the ricker spectrum is used. We carry out a comparison with experiment too. The wave tank is  $15.5\text{ m}$  long and the water depth  $h$  is  $0.7\text{ m}$ . The components focus and the wave breaks just before the wall located at  $x = 0$  as shown in figure 9. The numerical results are shown in solid line, and experimental data in dashed line. In this figure the abscissa origin is taken at the vertical wall. To discretize the boundary the number of meshes is 1000, 500 of them at the free surface, and 100 on the vertical wall. The time step is  $10^{-4}\text{ s}$ .

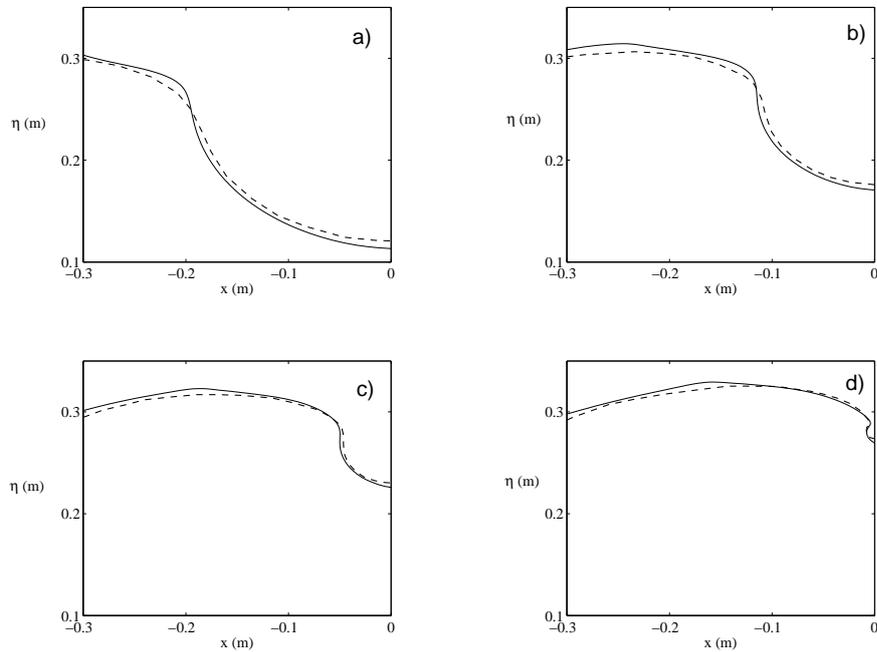


Figure 9: Breaking wave on a vertical wall located at  $x = 0$  at several times ( *a*)  $t = 2.009\text{ s}$ , *b*)  $t = 2.0231\text{ s}$ , *c*)  $t = 2.0394\text{ s}$ , *d*)  $t = 2.0403\text{ s}$  ). Comparison with experimental data (dashed line).

We compute the wall pressure  $P(z)$  where  $z$  is the vertical coordinate by using the Bernoulli equation. Note that the surface tension is not neglected at the free surface. In the presence of surface tension the dynamic condition states that there is a jump of pressure at the surface due to capillary effect.

However, in the present case at the point where the free surface meets the wall, the curvature radius is large enough to make the term  $\sigma/R$  very small. The wall pressure is computed in the case of the breaking wave presented in figure 9. Figure 10 shows the profiles of the pressure  $P(z)$  at the vertical wall and the corresponding elevation of the free surface  $z = \eta(x)$  at several times during the breaking. Prior to the impact of the jet on the wall (figure 10 right) one can observe an inversion of the vertical pressure gradient beneath the crest. This means that the vertical subsurface acceleration becomes greater than gravity. Using a PIV system Grue and Jensen [27] measured particle acceleration in overturning waves in deep water. They found that overturning events present vertical acceleration up to  $1.5g$  in the front face of the wave, at the base below the overturning jet. Note that in their experiments there was no wall.

The wall force due to the wave is given by

$$F_w = \int_{-h}^{\eta} P(z) dz. \quad (19)$$

Figure 11 shows the time evolution of the wall force and of the maximum pressure at the wall. At  $t = 0$  s the force is mainly due to the hydrostatic pressure. At  $t = 1.3$  s the wall force decreases. Indeed the arrival of a breaking wave over a wall causes a withdrawal of water at the wall and a reduction of the wetted wall surface. So during this rundown the integral of the pressure decreases. Then the runoff starts at  $t = 1.7$  s when the breaking wave approaches. The consequence is the increasing of the wall force. The maximum of pressure evolves in the same way that the wall force.

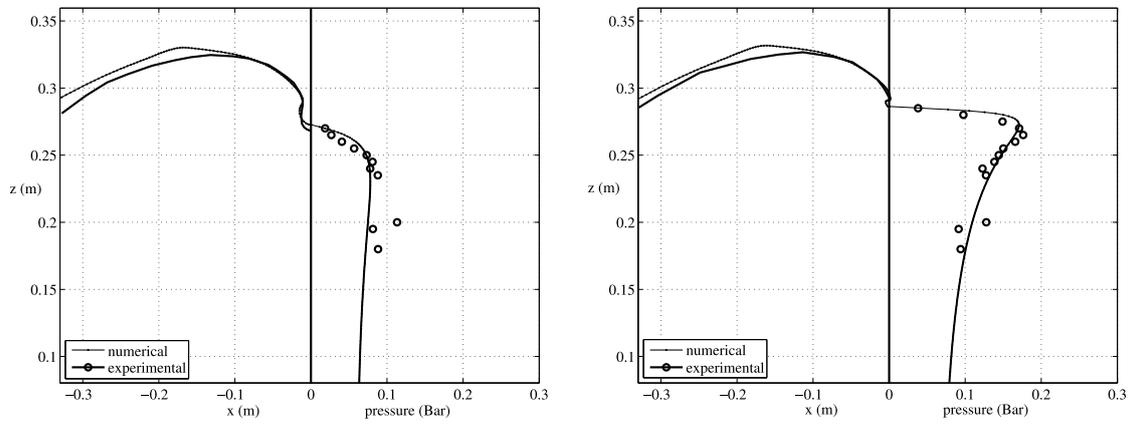


Figure 10: Pressure at the wall during the impact. Comparison with experiment (open circles).  $t = 2.05$  s (left) and  $t = 2.052$  s (right).

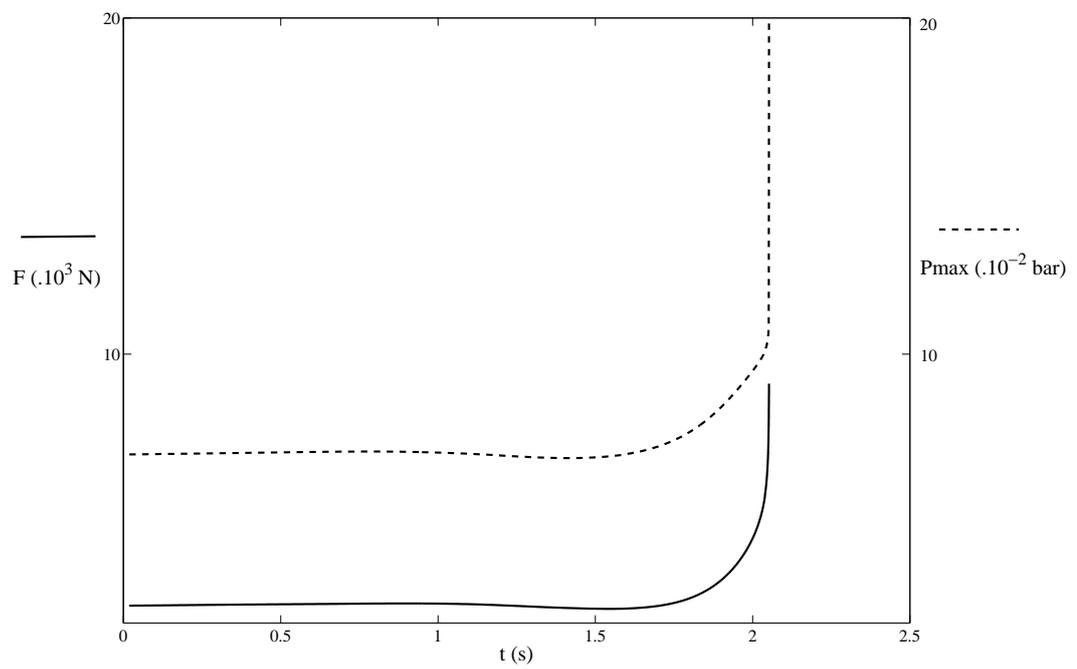


Figure 11: Evolution of the wall force (solid line) and maximum pressure (dashed line) during the time.

## 5.2. Steep waves under the action of wind

The question is how do steep wave events due to dispersive focusing under wind action evolve? How are the amplification and time duration of these waves under wind effect modified? Are these effects similar or different from those observed in the case of extreme wave events due to the spatio-temporal focusing in deep water?

### 5.2.1. Dispersive focusing

The main objective of the present subsection is to study the influence of wind on a steep wave event generated by a dispersive focusing wavetrain in shallow water. The wavetrain is generated in a numerical wave tank, and energy focusing is obtained by using the method developed in subsection 3.1. We use a piston-type wavemaker with a horizontal motion. The equation of the displacement of the wavemaker is  $s(t) = A\sin(\omega(t).t)$ , with  $\omega(t)$  determined as in the previous subsection 3.1. The amplitude of the displacement is  $A = 0.05 \text{ m}$ . The frequency  $\omega$  is computed using the method developed in subsection 3.1 and setting  $0.5 < kh < 1$ . The number of meshes to discretize the boundary is 2000, 1200 of them on the water surface, and the time step is  $0.05 \text{ s}$ . The length of the tank is  $400 \text{ m}$  and depth  $1 \text{ m}$ . Figure 12a)-d) shows the evolution of the modulated wave train in the absence of wind for different times.

The previous wavetrain is now submitted to the influence of wind through the modified Jeffreys' sheltering mechanism described in section 4. The maximum value for the slope  $\partial\eta/\partial x$  of the focused wave is 0.114. The threshold value for the slope  $(\partial\eta/\partial x)_c$  is 0.11 and the wind velocity is  $U = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . In figure 12e)-h) the influence of wind on the steep wave event is shown at the same time step than a)-d) respectively. One may observe that wind amplifies the surface elevation during the formation of steep waves.

In order to better understand the role of wind, we define the amplification factor  $A(t, U)$  of the group of waves between initial time and time  $t$  as follows

$$A(t, U) = \frac{\eta_{\max}(t, U)}{\eta_{\text{ref}}}, \quad (20)$$

where  $\eta_{\text{ref}}$  is the maximal wave amplitude of the initial wave group.  $\eta_{\max}(t, U)$  is the maximal wave amplitude of the wave group at each time.

In figure 13 the amplification factor as a function of time is plotted for various values of the wind velocity equal to  $U = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,

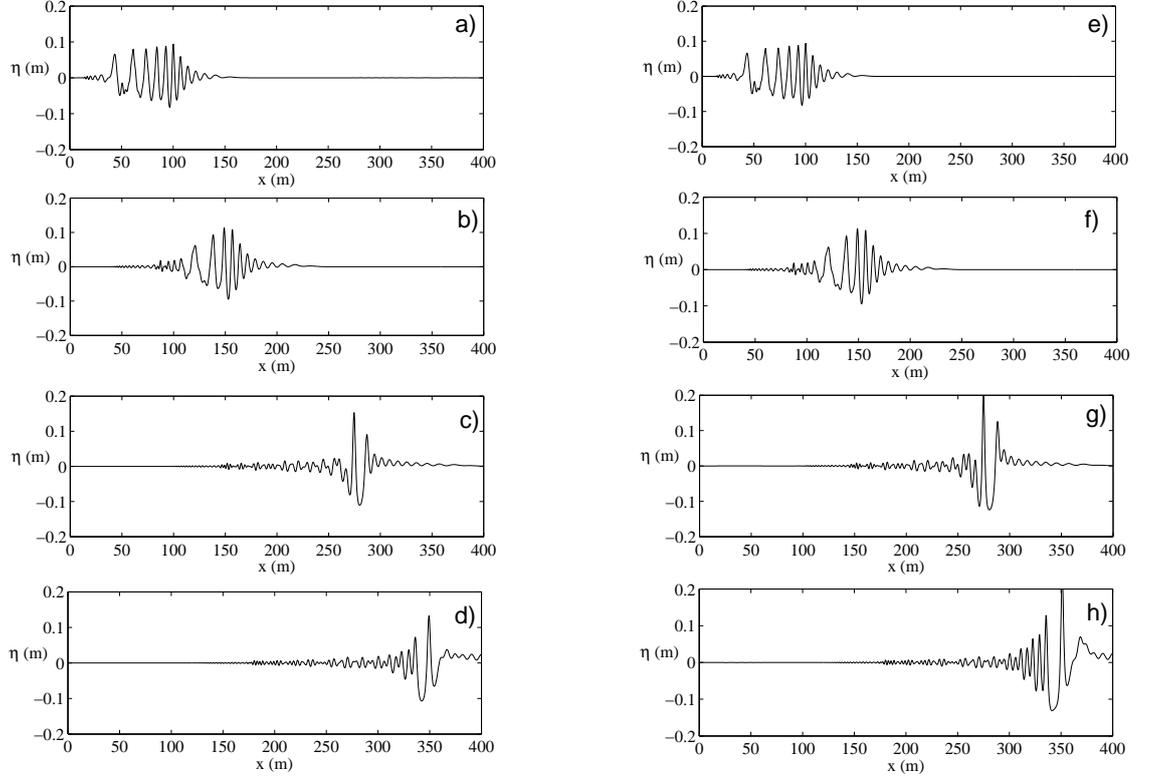


Figure 12: Focusing wave train without wind at several times. (a):  $t = 50 s$ , (b):  $t = 75 s$ , (c):  $t = 125 s$ , (d):  $t = 150 s$  without wind, (e):  $t = 50 s$ , (f):  $t = 75 s$ , (g):  $t = 125 s$ , (h):  $t = 150 s$  with wind velocity  $U = 20 m \cdot s^{-1}$ .

$U = 20 m \cdot s^{-1}$  and  $U = 30 m \cdot s^{-1}$ , respectively. As soon as the wave slope become greater than the threshold value we observe an amplification of the wave train. Note that a significant wind velocity is needed to influence the dynamics of the steep wave event. The amplification factor is not very different between  $U = 10 m \cdot s^{-1}$  and  $U = 0 m \cdot s^{-1}$ , i.e. without wind. For wind velocity larger than  $U = 20 m \cdot s^{-1}$  a significant increase of the amplification factor is obtained. The defocusing is then stopped by the breaking of the steep wave. In shallow water, strong wind velocities are needed to amplify the highest waves of the group while in deep water (see Kharif *et al.* [4]) lower values may increase the wave height. This feature can be explained by the fact that waves are more stable in shallow water than in deep water.

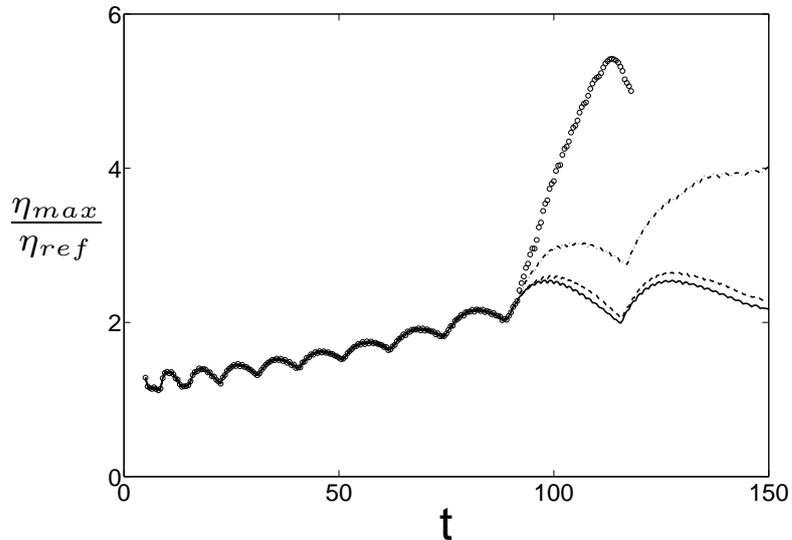


Figure 13: Evolution of the amplification factor  $A(t, U) = \eta_{\max}/\eta_{\text{ref}}$  as a function of time, for several values of the wind speed (dispersive focusing).  $U = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (solid line),  $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (dashed line),  $U = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (dot-dashed line),  $U = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (open circle) in the dispersive focusing case.

### 5.2.2. Korteweg de Vries equation and inverse method

We now consider the spatio-temporal evolution of the initial wave train defined in subsection 3.2 and plotted in figure 4. The length of the tank is  $800 \text{ m}$  and the constant water depth is  $1 \text{ m}$ . To discretize the boundary the number of meshes is 2000, 1000 of them on the free surface. The time step is  $0.05 \text{ s}$ . We show in figure 14 the focusing and defocusing stages of the wave train without wind effect ( $U = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) in the plane  $(x, t)$ . At the maximum of modulation the profile of the steep wave event does not fit with the expected Gaussian impulse. This discrepancy is easily explained. We have used as initial condition for the fully nonlinear system of equations (1), (3), (4) and (5) with the boundary conditions prescribed by equation (2) the profile resulting from the KdV equation which is a weakly nonlinear model. The deviation between fully nonlinear and weakly nonlinear is due to higher-order terms which are not considered in the KdV equation.

Figure 15 gives the amplification factor as a function of time for various values of the wind velocity, equal to  $0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  and  $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . The critical slope of the modified Jeffreys mechanism is

$(\partial\eta/\partial x)_c = 0.20$ . The maximum value for the slope  $\partial\eta/\partial x$  of the focused wave is 0.24. The curves corresponding to  $U = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  and  $U = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  are almost identical. As shown in subsection 5.2.1, larger wind velocities are needed to influence the dynamics of the steep wave events. In deep water, Touboul *et al.* [3] and Kharif *et al.* [4] observed significant influence of wind on extreme wave events for weaker values of the wind speed. In relation to deep water, larger values of the wind velocity are needed in shallow water to influence significantly the behaviour of the steep wave events. This means that steep wave events are more stable to wind perturbation in shallow water than in deep water. Figure 15 shows as well that the effect of the wind is threefold: it increases the amplification factor and lifetime of the steep wave event, and shifts downstream the focus point which corresponds to the maximum value of  $A(t, U)$ . For  $U = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , the defocusing is stopped by the breaking of the wave.

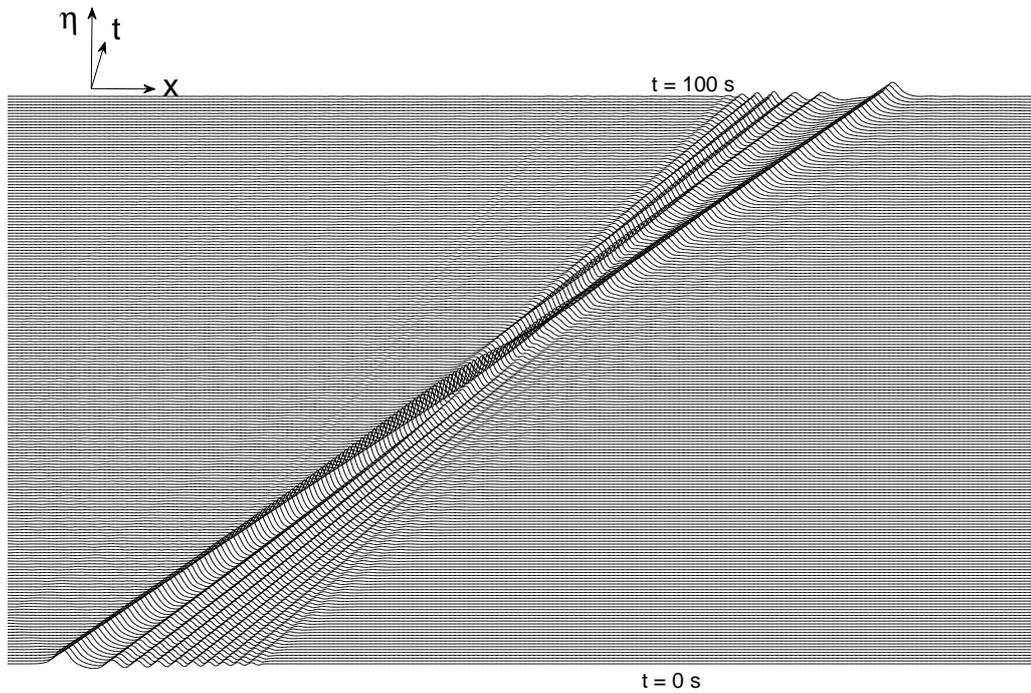


Figure 14: Spatio-temporal evolution of the focusing and defocusing wave group in the absence of wind.

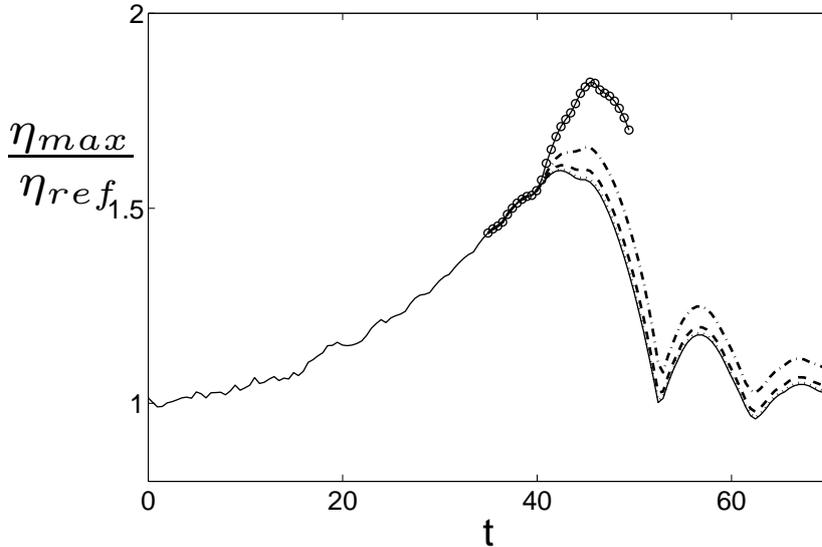


Figure 15: Evolution of the amplification factor  $A(t, U) = \eta_{\max}/\eta_{\text{ref}}$  as a function of time, for several values of the wind speed (inverse method).  $U = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (solid line),  $U = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (dotted line),  $U = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (dashed line),  $U = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (dot-dashed line),  $U = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (open circle) in the KdV inverse method case.

### 5.2.3. Wind effect on breaking waves (Ricker Spectrum)

In this subsection, wind effect upon the dynamics of breaking waves is investigated. We simulate numerically the spatio-temporal evolution of the wavetrain considered in subsection 5.1 when wind effect is introduced. The wind velocity and threshold value for the slope are  $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  and  $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.25$ , respectively. The maximum value for the slope  $\partial\eta/\partial x$  of the focused wave is 0.32. Wind effect is twofold: (i) it amplifies slightly the height of the wave and (ii) it speeds up the jet formation as shown in figure 16. In figure 17 we plot the amplification curves corresponding to three different cases. The solid line correspond to the case without wind whereas the dashed line corresponds to the case with wind. The wind speed is  $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  and the modified Jeffreys sheltering mechanism is applied when the wave slope satisfies the following condition:  $0.25 \leq \partial\eta/\partial x \leq \tan(\pi/6)$ . The value  $\tan(\pi/6)$  corresponds to the Stokes corner, the limiting slope of Stokes waves. The upper bound for the wave slope has been introduced to avoid the use of equation (18) when  $\partial\eta/\partial x$  becomes infinite. When the upper bound is

not included, prior to breaking the wave presents a quasi vertical front with a slope close to infinity yielding to a numerical blow up. In this case the amplification factor is represented by open circles in figure 17. Furthermore equation (18) becomes questionable when the wave profile is multi-valued.

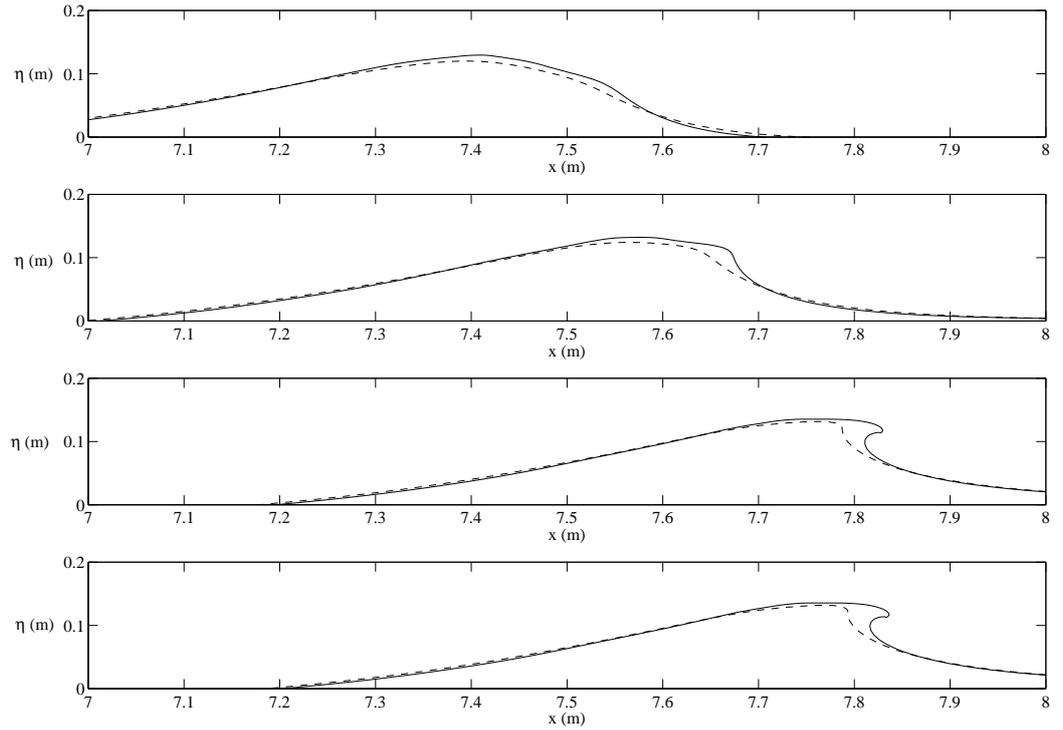


Figure 16: Spatio-temporal evolution of breaking waves with wind (solid line) and without wind (dashed line). Wind speed is  $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  and critical wave slope is  $\partial\eta/\partial x = 0.25$ .

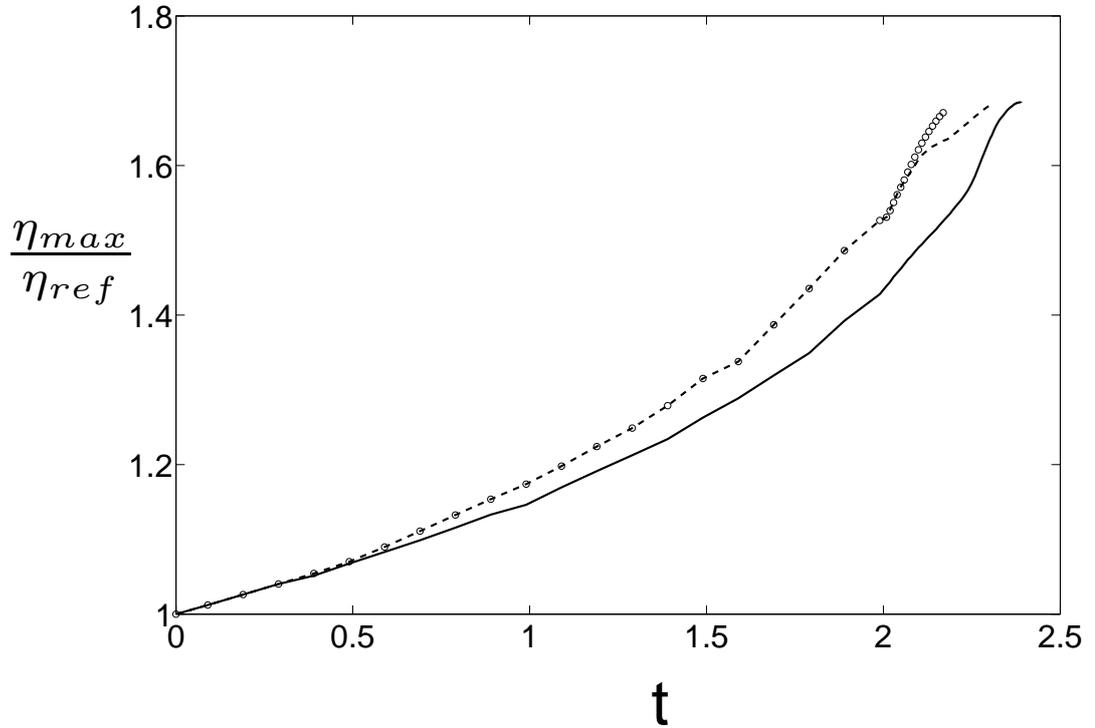


Figure 17: Amplification factor  $A(t, U) = \eta_{\max}/\eta_{\text{ref}}$  as a function of time for a focusing wavetrain generated from a Ricker spectrum. Without wind (solid line), with wind  $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $0.25 \leq \partial\eta/\partial x \leq \tan(\pi/6)$  (dashed line) and with wind  $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $0.25 \leq \partial\eta/\partial x$  (open circles).

## 6. Conclusion

One of the main objectives of this paper was to extend the results obtained by Touboul *et al.* [3] and Kharif *et al.* [4] in deep water to shallow water. The latter authors have considered the formation of steep wave events under wind action. The wind modelling is based on the Jeffreys' sheltering mechanism which is modified by introducing a threshold slope above which air flow separation can occur. In shallow water, waves are generally steep and air flow separation is more likely to occur. We have conducted a series of numerical simulation of steep wave events in shallow water. We used a dispersive focusing mechanism and an inverse method to generate steep wave groups. We found that focused steep gravity waves behaves similarly

in shallow water and deep water. The main effect of wind is threefold: (i) it increases the amplitude and lifetime of the highest waves in the group and (ii) it moves downwind the area where steep wave events are formed. In addition, we observed that the steep wave events are less unstable to wind perturbation in shallow water than in deep water. In other words, stronger wind are required in finite depth to produce breaking waves.

To compare with experiments on plunging breaker on a vertical wall conducted in the wave tank of Ecole Centrale Marseille, a series of numerical simulation has been performed. The breaking wave is obtained by focusing wave energy from a Ricker spectrum. The role of surface tension effects has been emphasized to describe accurately the profile of the breaking jet. Wind effect has been introduced and it was found that it speeds up the overturning of the crest. During the formation of the breaking wave the pressure is no more hydrostatic and an inversion of the vertical pressure gradient is observed beneath the water surface.

## References

- [1] C. Kharif, E. Pelinovsky and A. Slunyaev, "Rogue waves in the ocean" edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [2] M.L. Banner and J. Song, *On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. Part II: Influence of wind forcing and surface shear*, J. Phys. Oceanogr., **32** (2002), 2559–2570.
- [3] J. Touboul, J.P. Giovanangeli, C. Kharif and E. Pelinovsky, *Freak waves under the action of wind: experiments and simulations*, Eur. J. Mech. B/Fluids, **25** (2006), 662–676.
- [4] C. Kharif, J.P. Giovanangeli, J. Touboul, L. Grare and E. Pelinovsky, *Influence of wind on extreme wave events: experimental and numerical approaches*, J. Fluid Mech., **594** (2008), 209–247.
- [5] Q.W. Ma and S. Yan, *Preliminary simulation on wind effects on 3D freak waves*, Rogue Wave 2008, Brest, France.
- [6] S. Yan and Q.W. Ma, *Numerical simulation of wind effects on breaking solitary waves*, 19th Int. Offshore and Polar Eng. Conf. (2009), 480-487, Osaka, Japan.

- [7] J. Chambarel, C. Kharif and O. Kimmoun, *Focusing wave group in shallow water in the presence of wind*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (AIMS'journal) (in press)
- [8] H. Oumeraci, *Review and analysis of vertical breakwater failures lessons learned*, Coast. Eng., **22** (1994), 3–29.
- [9] E.S. Chan and W.K. Melville, *Deep water plunging-wave pressures on a vertical plane wall*, Proc. R. Soc. London, **417** (1988), 95–131.
- [10] M.S. Kirkgöz, *An experimental investigation of a vertical wall response to breaking wave impact*, Ocean. Eng., **17** (1990), 379–391.
- [11] M.S. Kirkgöz, *Impact pressure of breaking waves on vertical and sloping walls*, Ocean Eng., **18** (1991), 45–59.
- [12] M. Hattori, A. Arami and T. Yui, *Impact wave pressure on vertical walls under breaking waves of various types*, Coast. Eng., **22** (1994), 79–114.
- [13] G.N. Bullock, C. Obhrai, D.H. Peregrine and H. Bredmose, *Violent breaking wave impacts. Part 1: Results from large-scale regular wave tests on vertical and sloping walls*, Coast. Eng., **54** (2007), 602–617.
- [14] M.J. Cooker and D.H. Peregrine, *Wave impact pressure and its effect upon bodies lying on the bed*, Coast. Eng., **18** (1992), 205–229.
- [15] D.H. Peregrine, *Water-wave impact on walls*, Annu. Rev. Fluid Mech., **35** (2003), 23–43.
- [16] M.J. Cooker and D.H. Peregrine, *A model for breaking wave impact pressures*, Proc. 22nd Int. Conf. Coast. Eng., **2** (1990), 1473–1486.
- [17] S. Zhang, D.K.P. Yue and K. Tanizawa, *Simulation of plunging wave impact on a vertical wall*, J. Fluid Mech., **327** (1996), 221–254.
- [18] D. Ruvinsky, T. F. I. Feldstein and G. I. Freidman, *Numerical simulations of the quasi-stationary stage of ripple excitation by steep gravity-capillary waves*, J. Fluid Mech., **230** (1991), 339–353.
- [19] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, Wiley, (1974).

- [20] L. Ostrovsky and A. Potapov, *Modulated waves, theory and applications*, John Hopkins University Press, Baltimore, (1999).
- [21] M. G. Brown, *Space-time surface gravity waves caustics: structurally stable extreme events*, Wave Motion, **33** (2001), 117–143.
- [22] E. Pelinovsky, T. Talipova and C. Kharif, *Nonlinear dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water*, Phys. D, **147** (2000), 83–94.
- [23] B. Fornberg, *A practical guide to pseudo-spectral methods*, Cambridge University Press, (1998).
- [24] H. Jeffreys, *On the formation of wave by wind*, Proc. R. Soc. Lond. A, **107** (1925), 189–206.
- [25] M.L. Banner and W.K. Melville, *On the separation of air flow over water waves*, J. Fluid Mech., **77** (1976), 825–842.
- [26] S. Kawai, *Structure of air flow separation over wind wave crests*, Boundary-Layer Met., **23** (1982), 503–521.
- [27] J. Grue and A. Jensen, *Experimental velocities and accelerations in very steep wave events in deep water*, Eur. J. Mech. B/Fluids, **25** (2006), 554–564.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre portant sur l'étude de vagues scélérates en eau peu profonde, nous avons dans un premier temps décrit deux modes de génération de vagues scélérates en eau peu profonde par focalisation dispersive, l'un se basant sur l'équation de Korteweg de Vries, l'autre sur l'utilisation d'un batteur de type piston. Un des objectifs de ces travaux a été d'étendre les résultats obtenus sur l'influence du vent sur une vague scélérate dans le cadre de la théorie de l'eau profonde. La modélisation du vent se base sur le mécanisme d'abri de Jeffreys, en introduisant une pente critique à partir de laquelle le décollement aérien au-dessus de la crête des vagues les plus cambrées est avéré. L'effet du vent est important, et deux conclusions essentielles ressortent : il amplifie significativement l'amplitude de la vague scélérate formée suite à la focalisation, et également sa durée de vie. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus en eau profonde.

Nous pouvons ajouter que ces vagues issues de la focalisation dispersive sont moins instables suite à la perturbation du vent en eau peu profonde qu'en eau profonde. Nous avons ensuite effectué des simulations numériques visant à reproduire des expériences menées dans le canal à houle de l'Ecole Centrale de Marseille sur une vague scélérate déferlante et impactant un mur vertical. La vague scélérate est obtenue par focalisation dispersive à partir d'un spectre de Ricker. Nous mettons en évidence l'influence de la tension de surface sur la crête du jet plongeant. Nous mesurons également l'effet du vent sur cette vague déferlante. Celle-ci est évidemment amplifiée par le vent, et le déferlement est accéléré. Nous effectuons des mesures de pression sur le mur vertical durant l'impact. Celle-ci n'est plus hydrostatique, et on observe une inversion du gradient de pression vertical sous la surface libre.



# Conclusions et perspectives

Cette thèse a porté sur la dynamique des vagues extrêmes que sont les vagues de tsunamis et les vagues scélérates, en eau peu profonde. Nous avons modélisé ce type de vagues à l'aide de simulations numériques que nous avons dans certains cas confrontées avec l'expérience, l'objectif étant de mieux comprendre les phénomènes physiques qui se cachent derrière ces vagues meurtrières.

Une première approche consistant à étudier numériquement le runup d'ondes solitaires dans le cadre de leur collision présente certes un caractère fondamental, mais peut s'appliquer aussi bien aux vagues de tsunami (runup d'une onde sur un mur) qu'aux vagues scélérates.

Dans cette étude sur la collision de deux ondes solitaires, nous avons retrouvé puis étendu les résultats existants dans la littérature. Suite à l'extension de cette étude, nous avons découvert un phénomène nouveau, absent des précédentes recherches sur ce sujet, la formation d'un jet résiduel en chute libre précédé par des perturbations de la surface libre autour de la crête de la collision à partir d'une valeur seuil de l'amplitude des vagues considérées (Chambarel et al. (2009c)). Nous avons par la suite étudié le caractère instable de cette configuration par une analyse de stabilité linéaire, qui a mis en évidence un taux d'instabilité. La gravité apparente que nous avons introduite et qui représente la compétition entre l'accélération du fluide à la surface libre et celle due à la gravité, montre qu'il y a bien une instabilité au sens de Rayleigh-Taylor.

Parmi les perspectives, l'étude de stabilité du cas asymétrique, c'est-à-dire le cas de la collision de deux ondes solitaires d'amplitudes différentes, est à développer lorsque le jet résiduel apparaît. De plus il serait intéressant de considérer le problème de la collision de deux ondes solitaires d'un point de vue expérimental. L'étude de ce jet résiduel et de l'instabilité qui le précède peut éventuellement cacher des effets tridimensionnels non capturés avec le code BIEM. Un code numérique tridimensionnel pourrait aussi être utilisé dans ce sens. Cependant, il est difficile de générer expérimentalement des ondes solitaires ayant des amplitudes extrêmes comme celles que nous avons traitées numériquement. La mise en oeuvre d'une telle expérience pourrait s'avérer délicate mais est à prévoir.

Dans un second temps, nous avons traité numériquement le problème de

l'évolution des vagues scélérates en zones côtières qui sont les zones des océans les plus fréquentées par l'homme. Nous avons porté un intérêt particulier à l'influence du vent sur ces vagues extrêmes. De même que par le passé pour l'eau profonde, nous avons supposé que le vent était modélisable au moyen de la théorie de Jeffreys modifiée. Celle-ci énonce que la pression générée par le décollement aérien au-dessus de la crête des vagues les plus cambrées est en phase avec la pente des vagues. Les résultats obtenus sont similaires à ceux de l'eau profonde (Chambarel et al. (2009a) et Chambarel et al. (2009b)). Le vent brise la symétrie entre la phase de focalisation et la phase de défocalisation, ce qui se traduit par une augmentation de la durée de vie de la vague scélérate. De plus le taux d'amplification de la vague est augmenté, c'est-à-dire que l'amplitude de l'onde focalisée est plus élevée en présence du vent. Les vagues focalisées se sont également trouvées plus stables qu'en eau profonde sous l'effet du vent.

Dans le cadre de l'influence du vent sur des vagues scélérates, il serait intéressant de considérer l'écoulement de l'air au-dessus des vagues, par conséquent d'utiliser un code numérique traitant les deux phases, air et eau, que ce soit en eau peu profonde ou non. Une étude rigoureuse du décollement aérien au-dessus des vagues pourrait être ainsi réalisée, afin de définir les limites de ce phénomène en fonction de la pente locale des vagues et de la vitesse du vent. Ceci nous permettrait en effet de connaître le domaine de validité de la théorie de Jeffreys notamment. Il serait alors intéressant d'utiliser les équations de Navier-Stokes en diphasique avec un suivi d'interface de type Volume Of Fluid (VOF) pour déterminer le seuil de pente des vagues au-dessus duquel se produit un décollement de l'écoulement d'air.

Il serait aussi important d'étudier l'interaction entre une couche limite turbulente de l'air et les vagues. Il existe des codes numériques permettant de modéliser l'écoulement de l'air au-dessus d'une houle de Stokes qui nous fournissent la distribution de pression à l'interface. Cependant ces modèles ne sont valables que pour des vagues de faibles cambrures, cas différents de ceux que l'on a traités, mais ils pourraient nous permettre de connaître la distribution de la pression durant la phase de focalisation, afin d'assurer la transition avec le modèle de Jeffreys modifié. D'autres codes, de type spectral, traitent d'états de mer plus variés mais ne donnent qu'un champ moyenné de la traînée de forme par exemple. Il est alors difficile d'accéder à la distribution de pression.

Il nous faut également envisager d'étendre l'étude sur l'interaction entre le vent et les vagues au cas tridimensionnel.





## Annexes



# Annexe 1 L'onde solitaire

## L'équation de Korteweg de Vries

En 1895 Korteweg et de Vries, dans le cadre de la théorie de l'eau peu profonde (ou théorie des ondes longues), ont obtenu à partir des équations exactes du mouvement, une équation simple approchée qui porte désormais leurs noms. Cette équation est un équilibre entre non linéarité et dispersion. Ils ont utilisé une méthode de perturbation qui tient compte de cet équilibre.

Cette équation s'obtient aussi de façon plus simple en utilisant une approche heuristique. Partons de la relation de dispersion linéaire

$$\omega^2 = gk \tanh(kh). \quad (3.19)$$

où  $h$  est la profondeur d'eau considérée,  $g$  la gravité et  $k$  le nombre d'onde. Elle devient pour  $kh \ll 1$

$$\omega = c_0 k \left[ 1 - \frac{(kh)^2}{6} \right] + O((kh)^4), \quad (3.20)$$

avec  $c_0 = \sqrt{gh}$ . On en déduit la vitesse de phase

$$c = c_0 \left[ 1 - \frac{(kh)^2}{6} \right] + O((kh)^4). \quad (3.21)$$

On a donc

$$\omega = c_0 \left[ k - \frac{k^3 h^2}{6} \right]. \quad (3.22)$$

En utilisant les équivalences

$$\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.23)$$

et leur généralisation

$$\omega^n \rightarrow i^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad \text{et} \quad k^n \rightarrow (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}, \quad (3.24)$$

la relation de dispersion linéaire donne l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) \eta = c_0 \left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) \eta - \frac{c_0 h^2}{6} \left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right)^3 \eta \quad (3.25)$$

$$i \frac{\partial \eta}{\partial t} = -i c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} - i \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (3.27)$$

Ceci est une version linéarisée de l'équation de Korteweg de Vries qui ne tient compte que de la dispersion.

Le terme non linéaire de l'équation de Korteweg de Vries peut être aussi obtenu de manière heuristique à partir des équations de Saint-Venant ci-dessous (voir Whitham (1974)) qui ne tiennent compte que de la non linéarité

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u[h + \eta]) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.29)$$

Nous écrivons maintenant les invariants de Riemann correspondant au système hyperbolique précédent

$$u + 2\sqrt{g(h + \eta)} = Const \quad (3.30)$$

$$u - 2\sqrt{g(h + \eta)} = Const \quad (3.31)$$

Le second invariant correspond à l'onde se propageant vers la droite

$$u - 2\sqrt{g(h + \eta)} = 0 - 2\sqrt{gh} \quad (3.32)$$

$$u = 2\sqrt{g(h + \eta)} - 2\sqrt{gh} \quad (3.33)$$

On peut donc éliminer  $u$  dans la première équation du système de Saint-Venant. On a donc

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left[3\sqrt{g(h + \eta)} - 2\sqrt{gh}\right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.34)$$

Avec l'hypothèse  $\eta/h$  petit

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3\eta}{2h}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.35)$$

Lorsqu'on ajoute le terme de dispersion obtenu précédemment, il en résulte l'équation de Korteweg de Vries.

## Solutions de l'équation de Korteweg de Vries

Une solution connue de l'équation de Korteweg-de-Vries est l'onde solitaire qui s'écrit :

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3a}{4h^3}} (x - ct) \right] \quad (3.36)$$

avec  $c = c_0(1 + \frac{a}{2h}) = \sqrt{g(a+h)}$  et  $a$  l'amplitude de l'onde. Sa largeur à mi-hauteur est de l'ordre de  $1/\sqrt{a}$ .

L'équation KdV et l'onde solitaire sont à la base du concept de soliton introduit beaucoup plus tard par Zabuski et Kruskal (1965).

La largeur d'un soliton se définit par la largeur à mi-hauteur de l'onde. On peut évaluer cette largeur  $\lambda$  grâce à la solution de l'équation de Korteweg de Vries

$$\frac{a}{2} = \frac{a}{ch^2 \left[ \sqrt{\frac{3a}{4h^3}} \frac{\lambda}{2} \right]} \Rightarrow ch \left[ \sqrt{\frac{3a}{4h^3}} \frac{\lambda}{2} \right] = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{3a}{4h}} \frac{\lambda}{2} = C^{te} \quad (3.37)$$

La largeur évolue donc de la manière suivante

$$\lambda \sim h \sqrt{\frac{h}{a}} \quad (3.38)$$

Il existe également des solutions périodiques de cette équation. Les ondes cnoïdales sont des ondes périodiques de formes permanentes en eau peu profonde. Elles sont solutions de l'équation de Korteweg de Vries. L'onde solitaire est un cas particulier des ondes cnoïdales. On utilise dans l'expression du profil de ces vagues la fonction Jacobienne elliptique  $cn(u)$ . La théorie des ondes cnoïdales n'est pas très développée dans la littérature.

Korteweg & de Vries (1895) ont introduit la théorie des ondes cnoïdales. Ils ont montré qu'il existait une catégorie d'ondes longues de forme permanente et d'amplitude finie. Un cas limite de la théorie donne l'onde solitaire, un autre cas limite donne les ondes sinusoïdales telles qu'elles sont représentées dans la théorie linéaire. Certains auteurs ont étudié la théorie des ondes cnoïdales au début du XXIème siècle tels Keulegan & Patterson (1940), Keller (1948), Littman (1957), Benjamin & Lighthill (1954), Iwasa (1955) ou encore Wiegel (1960).

Ces ondes ont une période qui s'écrit

$$T = \left( \frac{h}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{4K(m/3H/h^{-1})^{\frac{1}{2}}}{\left[ 1 + \frac{H}{h} \frac{1}{m} (-m + 2 - 3\frac{E}{K}) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.39)$$

où  $h$  est la profondeur d'eau,  $g$  la gravité,  $K$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce,  $m$  est un paramètre dépendant du rapport d'aspect des ondes

( $0 < m < 1$ ),  $H$  est la hauteur crête-creux,  $E$  est l'intégrale elliptique de deuxième espèce. Son élévation est de la forme

$$\eta = \eta_2 + H \operatorname{cn}^2 \left[ 2 \frac{K}{\lambda} (x - ct) \right] \quad (3.40)$$

Lorsque  $m \rightarrow 1$  alors la longueur d'onde  $\lambda \rightarrow \infty$ , l'onde cnoïdale tend donc vers l'onde solitaire

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{H}{h^3}} (x - ct) \right] \quad (3.41)$$

et lorsque  $m \rightarrow 0$  alors l'onde cnoïdale tend vers une onde sinusoïdale

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right]. \quad (3.42)$$

## Solutions d'ordre supérieur

La solution en sécante hyperbolique au carré solution de l'équation de Korteweg de Vries admet des termes d'ordres supérieurs comme l'a montré Laitone (1960)

$$\frac{\eta(x)}{h} = \frac{a}{h} \operatorname{sech}^2 \alpha X - \frac{3}{4} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \alpha X (1 - \operatorname{sech}^2 \alpha X) + O \left( \frac{a}{h} \right)^3 \quad (3.43)$$

avec

$$\alpha X = \frac{x}{h} \left( \frac{3a}{4h} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{5a}{8h} \right) + O \left( \frac{a}{h} \right)^{\frac{5}{2}} \quad (3.44)$$

Cette solution n'est plus une solution de l'équation KdV.

## Dans le cadre des équations exactes : l'onde solitaire de Tanaka

L'algorithme de Tanaka (1986) permet d'obtenir une solution de l'onde solitaire à partir des équations exactes. La figure 3.6 montre la comparaison entre les deux solutions, celle de Tanaka et celle de KdV. Signalons que la solution analytique obtenue à partir de l'équation de KdV est valable pour des valeurs de  $a/h$  petites. La solution complètement non linéaire obtenue par Tanaka est valable pour toutes les valeurs admissibles du paramètre de non linéarité. La valeur maximale de ce paramètre est 0.8332.

## Découverte du soliton

Un soliton est une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif. On l'observe dans de nombreux phénomènes physiques ; il est solution de nombreuses équations aux dérivées partielles non linéaires. Il possède une énergie localisée dans l'espace et il se révèle extrêmement stable en présence de

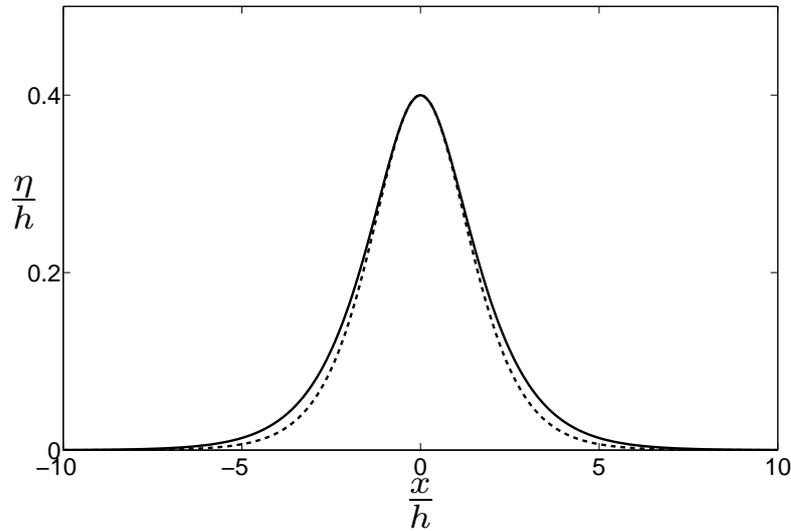


FIG. 3.6 – Comparaison de la solution de Tanaka avec celle de KdV. Tanaka en trait plein, KdV en pointillés.

perturbations. C'est l'équilibre entre dispersion et non linéarité qui permet à cette vague de conserver sa forme.

Le phénomène associé a été décrit pour la première fois par l'Écossais John Scott Russell en 1834, qui l'a observé initialement en se promenant le long du Canal de l'Union qui relie Édimbourg à Forth-Clyden : une onde de forte amplitude générée par l'arrêt brusque d'une barge. Il a suivi pendant plusieurs kilomètres cette vague qui remontait le courant et qui ne semblait pas vouloir faiblir. Il constata que la forme et la vitesse de la vague restaient inchangées durant sa propagation.

"Je ne puis donner une idée plus nette du phénomène qu'en décrivant les circonstances dans lesquelles il m'apparut pour la première fois. J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup, mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal ; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 miles à l'heure et conservant sa forme initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1 et 1/2 de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie sur un mile ou deux, je la

perdis dans les sinuosités du canal."

Pendant longtemps l'onde solitaire fut considérée comme une curiosité mathématique sans importance réelle. Une première découverte qui à première vue n'avait rien à voir avec l'onde solitaire a été faite par Fermi, Pasta et Ulam (1955). Il s'agissait du problème de l'équipartition de l'énergie dans un réseau non linéaire de cristaux, lié au phénomène de conductivité thermique. Comment expliquer le processus physique conduisant à la thermalisation ? Dans un réseau de cristaux la conduction de la chaleur est due au transport désordonné de l'énergie (agitation moléculaire). Le modèle le plus simple pour étudier un tel réseau est celui d'une chaîne d'atomes (ou masse) reliés par des ressorts non linéaires. Debye a en effet suggéré que les non linéarités devaient favoriser les interactions entre les modes du système et ainsi permettre le transport de l'énergie entre les modes et enfin conduire à l'équilibre thermique (thermalisation). En 1955 Fermi, Pasta et Ulam ont tenté de vérifier ce scénario en développant une série d'expériences numériques dans un réseau 1D. Ils ont étudié le comportement dynamique de la chaîne précédente en tenant compte d'interactions non linéaires entre les atomes en espérant que l'énergie initiale se distribuerait sur tous les degrés de liberté du réseau. Contrairement à ce qu'ils espéraient le système ne tendait pas vers une equipartition de l'énergie entre tous les modes, mais revenait de manière périodique vers le mode excité initialement. Le phénomène observé fut désigné par la récurrence de Fermi-Pasta-Ulam (FPU). Ce résultat surprenant motiva Zabusky et Kruskal (1965) qui revisitèrent ce problème. Le fait que seuls les modes d'ordre les plus bas (de grande longueur d'onde) du réseau participent à ce phénomène les poussa à utiliser l'équation KdV comme modèle. A partir de simulations numériques, ils ont découvert que les ondes de type impulsion peuvent se propager de façon stable dans le système. Ces ondes solitaires qui peuvent se traverser les unes les autres tout en conservant leurs formes initiales et leurs célérités après collision furent appelées solitons pour souligner cette propriété remarquable propre aux quasi-particules. Les solitons sont des entités remarquablement stables qui préservent leur identité à travers de nombreuses interactions. Il n'existe pas une définition précise d'un soliton mais on pourrait donner celles-ci

- Toute onde non linéaire localisée qui interagit avec une autre perturbation locale et qui retrouve asymptotiquement sa forme initiale et sa vitesse est un soliton.

- Le soliton découvert numériquement par Zabusky et Kruskal est une impulsion cohérente de grande amplitude ou une onde solitaire très stable. Il est la solution exacte d'une équation d'ondes non linéaire dont le profil et la célérité ne sont pas modifiés par une collision avec d'autres ondes solitaires.

Les manifestations physiques des solitons sont multiples. On peut citer les vagues

scélérates, les mascarets ou le morning glory cloud. Ce mode de propagation d'une vague sur de longues distances explique aussi la propagation des tsunamis (ou raz-de-marée). Ceux-ci se déplacent pratiquement sans effet notable en eaux profondes. Le transport par soliton explique que les tsunamis, imperceptibles pour les navires en mer, puissent naître d'un séisme sur une côte de l'océan Pacifique et avoir des effets sur la côte opposée.

Ces structures qui se retrouvent dans différents domaines de la physique ont un caractère universel.

### Paramètre de non linéarité

Evaluons les termes linéaires devant les termes non linéaires dans l'équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (3.45)$$

On considère que le potentiel des vitesses est de la forme

$$\phi = \frac{ag}{\omega} \frac{ch [k(z+h)]}{ch[kh]} \sin(kx - \omega t). \quad (3.46)$$

Comparons les effets non linéaires aux effets linéaires

$$\frac{|u \frac{\partial u}{\partial x}|}{|\frac{\partial u}{\partial t}|} = \frac{ak}{th(kh)} ch \left[ kh \left( 1 + \frac{z}{h} \right) \right]. \quad (3.47)$$

De plus

$$kh \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

On en déduit

$$\frac{|u \frac{\partial u}{\partial x}|}{|\frac{\partial u}{\partial t}|} \rightarrow \frac{ak}{kh} = \frac{a}{h}. \quad (3.49)$$

Ce paramètre sans dimension détermine la non linéarité d'un soliton.



## Annexe 2 Les vagues scélérates

Une approche simple pour représenter les déformations de la surface de la mer consiste à considérer les vagues comme une somme de sinusoïdes d'amplitudes et de phases différentes. Dans l'approximation linéaire, un état de mer aléatoire obéit à une distribution aléatoire gaussienne stationnaire. La densité de probabilité des élévations de la surface s'écrit

$$g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.50)$$

où  $\eta$  est l'élévation de la surface et  $\sigma^2$  la variance de  $\eta$ . La variance est obtenue à partir du spectre en fréquence  $S(\omega)$

$$\sigma^2 = \langle \eta^2 \rangle = \int_0^\infty S(\omega) d\omega. \quad (3.51)$$

On suppose en général que le spectre de la mer est à bande étroite. On en déduit que les hauteurs de vagues suivent une distribution de Rayleigh

$$f(H) = \frac{H}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma^2}\right). \quad (3.52)$$

La probabilité qu'une vague dépasse une certaine hauteur  $H^*$  est

$$P(H > H^*) = \int_{H^*}^\infty f(H) dH = \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma^2}\right). \quad (3.53)$$

Cette densité de probabilité des hauteurs de vagues nous permet d'introduire la notion de hauteur significative d'un état de mer  $H_s$ , généralement utilisée en océanographie et en ingénierie côtière. Cette hauteur significative est définie comme la moyenne des hauteurs du tiers des vagues les plus hautes. Ce concept a été introduit par Sverdrup & Munk (1947). Massel (1996) a montré que la hauteur significative s'écrit

$$H_s = 3\sqrt{2\pi} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\ln(3)} + 2\sqrt{2\ln(3)}\right) \sigma \simeq 4\sigma \quad (3.54)$$

où  $\text{erfc}()$  désigne la fonction d'erreur complémentaire de Gauss. En effet la hauteur  $H^*$  du tiers des vagues les plus hautes est fournie par la probabilité  $P(H > H^*) = 1/3$ , soit

$$H^* = 2\sqrt{2\ln(3)}\sigma. \quad (3.55)$$

Ainsi on obtient la hauteur moyenne des vagues considérées

$$H_s = \int_{H^*}^{\infty} H f(H) dH. \quad (3.56)$$

La hauteur significative correspond à peu près à la hauteur moyenne d'un champ de vagues estimée par l'oeil humain. En utilisant l'équation 3.54, on peut réécrire l'équation 3.53

$$P(H > H^*) = \exp\left(-\frac{2H^{*2}}{H_s^2}\right). \quad (3.57)$$

En général, une vague est considérée comme scélérate lorsque

$$H > 2H_s. \quad (3.58)$$

Statistiquement, ceci correspond à la formation d'une vague scélérate toutes les 16000 vagues. Il y aurait formation d'une vague scélérate toutes les 44 heures si l'on considérait une période caractéristique de vagues de 10 s.

# Annexe 3 Problème instationnaire et résolution

## Le problème instationnaire

La méthode dite "Mixed Euler-Lagrange" consiste à passer d'une formulation eulérienne du problème à une formulation lagrangienne de la surface libre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\mathbf{grad} \phi)^2 - g\eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \phi)^2 - g\eta \\ \frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{V}_i \end{array} \right. \quad (3.59)$$

On utilise alors l'une des méthodes de Runge-Kutta. Ce sont des méthodes à un pas qui consistent à donner une meilleure évaluation de la solution en prenant des valeurs intermédiaires de  $t$  dans l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ . En fait, écrivons cela sous la forme

$$t_{n,i} = t_n + \theta_i \Delta t_n \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.60)$$

Il en résulte que la valeur exacte de la solution pour une valeur intermédiaire de  $t$  s'écrit

$$u(t_{n+k}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+k}} f(t, u(t)) dt \quad (3.61)$$

Réalisons un calcul numérique des intégrales en choisissant les points d'intégration  $t_{n,i}$  dans l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ , il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_n}^{t_{n+\theta_i \Delta t_n}} \phi(t) dt = \Delta t_n \int_0^{\theta_i} \phi(\alpha) d\alpha \approx \Delta t_n \sum_{j=1}^p a_{ij} \phi(\theta_j) \\ \int_{t_n}^{t_{n+\Delta t_n}} \phi(t) dt = \Delta t_n \int_0^1 \phi(\alpha) d\alpha \approx \Delta t_n \sum_{j=1}^p b_j \phi(\theta_j) \end{array} \right. \quad (3.62)$$

Les propriétés de l'intégration numérique montrent que les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_j$  ne dépendent pas de la fonction à intégrer. La méthode s'écrit alors

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t_n \phi(t_n, u_n, \Delta t_n) \quad (3.63)$$

avec

$$\begin{cases} u_i = u_n + \sum_{j=1}^p a_{ij} f(t_n + \theta_j \Delta t_n, u_j) \\ \phi(t_n, u_n, h_n) = \sum_{j=1}^p b_j f(t_n + \theta_j \Delta t_n, u_j) \end{cases} \quad (3.64)$$

Ces résultats montrent que la méthode de Runge-Kutta est une méthode générique qui peut revêtir de multiples formes en fonction de la précision recherchée. Si nous connaissons les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_j$ , ainsi que les valeurs des  $\theta_i$ , la méthode est ainsi définie. Ces coefficients sont calculés une fois pour toutes, et sont consignés dans des tables. Ils sont souvent présentés sous la forme suivante

$$\begin{array}{c|cccc} \theta_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \theta_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_p & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_p \end{array}$$

La méthode Runge-Kutta la plus utilisée par les physiciens est probablement la méthode d'ordre 4 dont les coefficients sont

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

La suite récurrente s'écrit alors

$$\begin{cases} k_1 = \Delta t_n f(t_n, u_n) \\ k_2 = \Delta t_n f(t_n + \frac{\Delta t_n}{2}, u_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = \Delta t_n f(t_n + \frac{\Delta t_n}{2}, u_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = \Delta t_n f(t_n + \Delta t_n, u_n + k_3) \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t_n \end{aligned} \quad (3.66)$$

Cette formulation est bien entendu valable pour un système différentiel. C'est une formulation explicite, elle est donc soumise à des conditions de stabilité de type CFL

(Courant-Friedrichs-Lewy-1928). Il conviendra de choisir un pas de temps inférieur au pas de temps critique

$$\Delta t^2 \leq \frac{8\Delta x}{\pi g}. \quad (3.67)$$

## La méthode de résolution

Le système linéaire à résoudre se présente sous la forme

$$[A_{ij}] \left\{ \begin{array}{c} \phi_j^{bo} \\ \frac{\partial \phi_j^{fs}}{\partial n} \end{array} \right\} = [B_{ij}] \left\{ \begin{array}{c} \phi_j^{fs} \\ \frac{\partial \phi_j^{bo}}{\partial n} \end{array} \right\} \quad (3.68)$$

soit

$$[A] \{X\} = \{B\} \quad (3.69)$$

La matrice  $[A]$  ne présente ici aucune particularité, elle est pleine et non symétrique. Ce système doit être résolu à chaque pas de temps, une méthode performante est donc nécessaire.

On distingue deux grandes catégories de méthodes de résolution d'un système linéaire :

- les méthodes directes
- les méthodes itératives

Dans la mesure où les méthodes itératives présentent des conditions de convergence, chaque fois que cela sera possible, on choisira les méthodes directes. C'est le cas pour des systèmes de taille "raisonnable". C'est précisément à ce type de problèmes que nous avons à faire.

La méthode du pivot de Gauss utilise une matrice triangularisée par laquelle la résolution est particulièrement aisée. La même idée est reprise pour développer une méthode de factorisation. Le schéma de résolution devient donc simple si nous pouvons factoriser la matrice  $[A]$  de la façon suivante

$$[A] = [L][U] \quad \text{avec } l_{ii} = 1. \quad (3.70)$$

La matrice  $[L]$  est une matrice triangulaire inférieure (Low) et la matrice  $[U]$  est une matrice triangulaire supérieure (Up). Nous choisissons ici de normaliser les termes diagonaux de  $[L]$  afin de rendre unique cette décomposition. Plusieurs techniques de factorisation peuvent être utilisées, nous présentons ici la principale. Notons que dans ce premier cas, les termes diagonaux de l'une des matrices doivent être fixés. Le principe de résolution s'écrit

$$[L][U] \{X\} = \{B\} \Leftrightarrow \begin{cases} [L] \{Y\} = \{B\} \\ [U] \{X\} = \{Y\} \end{cases} \quad (3.71)$$

Dans l'hypothèse où la factorisation est effectuée, il ne reste que deux systèmes linéaires à matrices triangulaires à résoudre. Nous avons vu dans le cadre de la

méthode du pivot de Gauss, que la résolution d'un système linéaire à matrice triangulaire est particulièrement aisé. Il est clair que le principal problème est ici la factorisation. Le principe consiste principalement à identifier le produit  $[L][U]$  à  $[A]$ , soit

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

En effectuant le produit matriciel ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & \dots & l_{21}u_{1n} + u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1}u_{11} & l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} & \dots & l_{n1}u_{1n} + \dots + l_{nn-1}u_{n-1n} + u_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Les résultats obtenus peuvent s'écrire de la façon suivante

$$\begin{cases} \text{triangle inférieur} & (j < i) & l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \right) \\ \text{triangle supérieur} & (j \geq i) & u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \end{cases} \quad (3.74)$$

Ecrivons l'algorithme correspondant au produit des matrices  $[L]$  et  $[U]$ , et identifions avec  $[A]$  en affectant le résultat dans la matrice  $[A]$  pour économiser l'espace mémoire de la façon suivante

$$[A] \longrightarrow \text{factorisation} \quad [A] = [L] + [U] - [I] \quad (3.75)$$

En calculant successivement une ligne de  $[L]$  puis une colonne de  $[U]$  dont le résultat est placé dans  $[A]$ , les termes modifiés ne sont plus alors requis pour la suite du processus. Il est donc possible de factoriser la matrice  $[A]$  dans  $[A]$  conformément à la relation ci-dessus. L'algorithme s'écrit alors

```

pour i = 2 à n faire
  pour j = 1 à i - 1 faire
    pour k = 1 à j - 1 faire
      a[i, j] = a[i, j] - a[i, k].a[k, j]      (* ligne de L *)
      a[j, i] = a[j, i] - a[j, k].a[k, i]      (* colonne de U *)
    fin
    a[i, j] = a[i, j]/a[j, j]      (* normalisation de L *)
  fin
pour j = 1 à i - 1 faire

```

```

                a[i, i] = a[i, i] - a[i, j].a[j, i]           (* terme diagonal de U *)
            fin
fin

```

Après la mise en oeuvre de cet algorithme, la matrice  $[A]$  contient dans son triangle supérieur les éléments de  $[U]$ , de même pour sa diagonale, tandis que le triangle inférieur contient les éléments de  $[L]$ . Les éléments diagonaux de  $[L]$  égaux à 1 ne sont pas explicités.

La résolution du système initial se ramène donc à la résolution de deux systèmes à matrices triangulaires  $[L]$  et  $[U]$  mémorisées dans  $[A]$ . La séquence de résolution s'écrit donc

(\*système triangulaire inférieur\*)

```

pour i = 2 à n faire
    s = 0
    pour j = 1 à i - 1 faire
        s = s + a[i, j]b[j]
    fin
    b[i] = b[i] - s
fin

```

fin

(\*système triangulaire supérieur\*)

```

x[n] = b[n]/a[n, n]
pour i = n - 1 à 1 faire
    s = 0
    pour j = i + 1 à n faire
        s = s + a[i, j]b[j]
    fin
    x[i] = (b[i] - s)/a[i, i]
fin

```

fin

Comme dans le cas du pivot de Gauss, il est possible de mémoriser la solution  $\{X\}$  dans  $\{B\}$  pour économiser l'espace mémoire correspondant. Le nombre d'opérations arithmétiques est proportionnel à  $n^3$ . Le temps de calcul augmente donc très rapidement, et il convient d'étalonner l'ordinateur utilisé en estimant le temps CPU sous la forme

$$T_{CPU} = \alpha n^3 \quad (3.76)$$

Comme dans le cas de la méthode du pivot de Gauss, le déterminant de la matrice du système initial est le produit des termes diagonaux de la matrice  $[A]$  résultant de la solution

$$\Delta(A) = \prod_{i=1}^n u_{ii} \quad (3.77)$$

Si le problème aux éléments de frontière à l'origine de ce système linéaire est bien posé, il n'y a pas de zéro sur la diagonale de  $[U]$  après factorisation. Dans ce cadre, les programmes de résolution ne comportent généralement pas de procédure de recherche de zéros sur la diagonale.

# Bibliographie

- Baldock, T., Swan, C., & Taylor, P. : A laboratory study of surface waves on water, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **354**, 649–676, 1996.
- Bateman, W., Swan, C., & Taylor, P. : On the efficient numerical simulation of directionnally spread surface water waves, *J. Comp. Phys.*, **174**, 277–305, 2001.
- Benjamin, T. B. & Feir, J. E. : The desintegration of wave trains on deep water. part 1. theory, *J. Fluid Mech.*, **27**, 417–430, 1967.
- Benjamin, T. B. & Lighthill, M. J. : On cnoidal waves and bores, *Proc. Roy. Soc. A*, **224**, 448–460, 1954.
- Bona, J. L. & Chen, M. : A Boussinesq system for two-way propagation of nonlinear dispersive waves, *Physica D*, **116**, 191–224, 1998.
- Branger, H. & Kimmoun, O. : Laboratory experiment on waves propagating and breaking on a beach : regular and solitary waves, EGS Symposium, *Geophysical Research Abstracts*, Vienna, Austria, 2006.
- Byatt-Smith, J. G. B. : An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation., *J. Fluid Mech.*, **49**, 625–633, 1971.
- Calini, A. & Schober, C. : Homoclinic chaos increases the likelihood of rogue wave formation, *Phys. Lett. A*, **298**, 335–349, 2002.
- Chambarel, J., Kharif, C., & Kimmoun, O. : Focusing wave group in shallow water in the presence of wind, *Discret and Continuous Dynamical System series S (in Press)*, 2009a.
- Chambarel, J., Kharif, C., & Kimmoun, O. : Generation of steep water waves on finite depth with and without wind, *Eur. J. Mech. B/Fluids (submitted)*, 2009b.
- Chambarel, J., Kharif, C., & Touboul, J. : Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation, *Nonlin. Processes Geophys.*, **16**, 111–122, 2009c.
- Chan, R. K. C. & Street, R. L. : A computer study of finite-amplitude water waves., *J. Computat. Phys.*, **6**, 68–94, 1970.

- Chen, G., Kharif, C., Zaleski, S., & Li, J. : Two-dimensional Navier–Stokes simulation of breaking waves., *Phys. Fluids*, **11**, 121–133, 1999.
- Clamond, D., Francius, M., Grue, J., & Kharif, C. : Strong interaction between envelope solitary surface gravity waves, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **25**, 536–553, 2006.
- Cooker, M. J., Weidman, P. D., & Bale, D. S. : Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall, *J. Fluid Mech.*, **342**, 141–158, 1997.
- Craig, W., Guyenne, P., Hammack, J., Henderson, D., & Sulem, C. : Solitary wave interactions., *Phys. Fluids*, **18**, 1–25, 2006.
- Dyachenko, A. & Zakharov, V. : Modulational instability of Stokes wave  $\rightarrow$  freak wave, *J. Exp. Theor. Phys. Letters*, **81**, 318–322, 2005.
- Dysthe, K. & Trulsen, K. : Note on breather type solutions of the nls as model for freak waves, *Phys. Scripta*, **82**, 48–52, 1999.
- Faltinsen, O. M., Greco, M., & Landrini, M. : Green water loading on a FPSO, *J. Offshore Mech. Art. Eng.*, **124**, 97–103, 2002.
- Fenton, J. D. & Rienecker, M. M. : A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems : application to solitary-wave interactions., *J. Fluid Mech.*, **118**, 411–443, 1982.
- Fochesato, C., Grilli, S., & Dias, F. : Numerical modelling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing, *Wave Motion*, **44**, 395–416, 2007.
- Greco, M. : A two-dimensional study of green water loading, Ph.D. thesis, *Dept. Marine Hydrodynamics, NTNU, Trondheim*, 2001.
- Grilli, S. & Svendsen, I. A. : Computation of nonlinear wave kinematics during propagation and runup on a beach, *Proc. Water Wave Kinematics Nato ASI Series E*, **178**, 387–412, 1990.
- Helmholtz, H. L. F. : Über discontinuierliche flüssigkeits-bewegungen, *Monthly Reports of the Royal Prussian Academy of Philosophy in Berlin*, **23**, 215, 1868.
- Henderson, K., Peregrine, D., & Dold, J. : Unsteady water wave modulations : Fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation, *Wave Motion*, **29**, 341–361, 1999.
- Henye, F. S., Creamer, D. B., Dysthe, K. B., Schult, R. L., & Wright, J. A. : The energy and action of small waves riding on large waves, *J. Fluid Mech.*, **189**, 443–462, 1988.

- Iwasa, Y. : On cnoidal waves and bores, 17 **4**, *Memoire of Faculty of Engineering, Kyoto Univ. (Japan)*, 1955.
- Jeffreys, H. : On the formation of wave by wind, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 189–206, 1924.
- Jeffreys, H. : On the formation of wave by wind (second paper), *Proc. R. Soc. Lond. A*, **110**, 241–247, 1925.
- Johannessen, T. & Swan, C. : A laboratory study of the focusing of transient and directionnaly spread surface water waves, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **457**, 971–1006, 2001.
- Johannessen, T. & Swan, C. : On the nonlinear dynamics of wave groups produced by the focusing of surface waves, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **459**, 1021–1052, 2003.
- Keller, J. B. : The solitary wave and periodic waves in shallow water, *Commun. appl. Math*, **1**, 323–339, 1948.
- Kelvin, W. T. : Hydrokinetic solutions and observations, *Philosophical Magazine*, **42**, 362–377, 1871.
- Keulegan, G. H. & Patterson, G. W. : Mathematical theory of irrotational translation waves, *J. Res. Nat. Bur. Stand., U.S. Dep. Commerce*, **24**, 47–101, 1940.
- Kharif, C. : Some aspects of the kinematics of short waves over longer gravity waves on deep water, *NATO ASI Series, Water Wave Kinematics* (Eds. A. Torum & O.T. Gudmestad), **178**, 265–279, 1990.
- Kharif, C. & Pelinovsky, E. : Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **22**, 603–634, 2003.
- Kharif, C., Giovanangeli, J., Touboul, J., Grare, L., & Pelinovsky, E. : Influence of wind on extreme wave events : experimental and numerical approaches, *J. Fluid Mech.*, **594**, 209–247, 2008.
- Kharif, C., Pelinovsky, E., & Slunyaev, A. : Rogue waves in the ocean, *Springer*, 2009.
- Korteweg, D. J. & de Vries, G. : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag. 6th Series*, **39**, 422–443, 1895.
- Laitone, E. V. : The second approximation to cnoidal and solitary waves, *J. Fluid Mech.*, **9**, 430–444, 1960.

- Lavrenov, I. : The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa, *Natural Hazards*, **17**, 117–127, 1998.
- Lighthill, M. : Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems, *J. Inst. Math. Appl.*, **1**, 269–306, 1965.
- Littman, W. : On the existence of periodic waves near critical speed, *Commun. Pure appl. Math*, **10**, 241–269, 1957.
- Longuet-Higgins, M. S. : The propagation of short surface waves on longer gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **177**, 293–306, 1987.
- Longuet-Higgins, M. S. & Cleaver, R. P. : Crest instabilities of gravity waves. Part 1. The almost-highest wave., *J. Fluid Mech.*, **258**, 115–129, 1994.
- Longuet-Higgins, M. S. & Cokelet, E. : The deformation of steep surface waves on water, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **350**, 1–26, 1976.
- Longuet-Higgins, M. S. & Tanaka, M. : On the crest instabilities of steep surface waves., *J. Fluid Mech.*, **336**, 51–68, 1997.
- Longuet-Higgins, M. S., Cleaver, R. P., & Fox, M. J. H. : Crest instabilities of gravity waves. Part 2. Matching and asymptotic analysis, *J. Fluid Mech.*, **259**, 333–344, 1994.
- Mallory, J. : Abnormal waves on the south-east Africa, *Int. Hydrog. Rev.*, **51**, 89–129, 1974.
- Massel, S. R. : Ocean surface waves : Their physics and prediction, Tech. rep., *World Scientific (Singapore)*, 1996.
- Maxworthy, T. : Experiments on collisions between solitary waves., *J. Fluid Mech.*, **76**, 177–185, 1976.
- Miles, J. : On the generation of surface waves by shear flows, *J. Fluid Mech.*, **3**, 185–204, 1957.
- Mirie, R. M. & Su, C. H. : Collisions between two solitary waves. Part 2. A numerical study., *J. Fluid. Mech.*, **115**, 475–492, 1982.
- Oikawa, M. & Yajima, N. : Interactions of solitary waves - a perturbation approach to nonlinear systems., *J. Phys. Soc. Japan*, **34**, 1093–1099, 1973.
- Onkuma, K. & Wadati, M. : The Kadomtsev-Petviashvili equation, the trace methods and the soliton resonance, *J. Phys. Soc. Japan*, **52**, 749–760, 1983.
- Osborne, A., Onorato, M., & Serio, M. : The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave train, *Phys. Rev. A*, **275**, 386–393, 2000.

- Pelinovsky, E., Troshina, E., Golinko, V., Osipenko, N., & Petrukhin, N. : Runup of tsunami waves on a vertical wall in a basin of complex topography., *Phys. Chem. Earth (B)*, **24**, 431–436, 1999.
- Pelinovsky, E., Talipova, T., & Kharif, C. : Nonlinear dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water, *Physica D.*, **147**, 83–94, 2000.
- Peterson, P., Soomere, T., Engelbrecht, J., & Groesen, E. V. : Soliton interaction as possible model for extreme waves, *Nonlin. Proc. Geophys.*, **10**, 503–510, 2003.
- Phillips, O. M. : On the generation of waves by turbulent wind, *J. Fluid Mech.*, **2**, 417–445, 1957.
- Power, H. & Chwang, A. T. : On reflection of a planar at a vertical wall., *Wave Motion*, **6**, 183–195, 1984.
- Slunyaev, A., Kharif, C., Pelinovsky, E., & Talipova, T. : Nonlinear wave focusing on water of finite depth, *Physica D.*, **173**, 77–96, 2002.
- Smith, R. : Giant waves, *J. Fluid Mech.*, **77**, 417–431, 1976.
- Soomere, T. & Engelbrecht, J. : Extreme elevations and slopes of interacting solitons in shallow water, *Wave Motion*, **41**, 179–192, 2005.
- Su, C. H. & Gardner, C. S. : Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de vries equation and Burgers equation., *J. Math. Phys.*, **10**, 536–539, 1969.
- Su, C. H. & Mirie, R. M. : On head-on collisions between two solitary waves., *J. Fluid Mech.*, **98**, 509–525, 1980.
- Sverdrup, H. U. & Munk, W. H. : Wind, sea, and swell; theory of relations for forecasting, Tech. rep., *Tech. Rep., U. S. Navy Hydrographic office*, 1947.
- Tanaka, M. : The stability of solitary waves., *Phys. Fluids*, **29**, 650–655, 1986.
- Temperville, A. : Interaction of solitary waves in shallow water theory., *Arch. Mech.*, **31**, 177–184, 1979.
- Vinje, T. & Brevig, P. : Breaking waves on finite depth : a numerical study, Tech. rep., *Tech. Rep. R-118-81. Ship Res. Inst. Norway*, 1981.
- White, B. & Fornberg, B. : On the chance of freak wave at sea, *J. Fluid Mech.*, **355**, 113–138, 1998.
- Whitham, G. B. : Linear and nonlinear waves, *Wiley-Interscience*, 1974.

- Wiegel, R. L. : A presentation of cnoidal wave theory for practical application, *J. Fluid Mech.*, **7**, 273–286, 1960.
- Wu, C. & Yao, A. : Laboratory measurements of limiting freak waves on current, *J. Geophys. Res.*, **109**, 1–18, 2004.
- Zakharov, V. : Instability of waves in nonlinear dispersive media, *J. Exp. Theor. Phys.*, **51**, 1107–1114, 1966.
- Zakharov, V. : Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep water, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **9**, 190–194, 1968.







## Résumé

L'objectif de ces travaux est d'étudier la dynamique de différents types de vagues extrêmes en eau peu profonde et plus particulièrement les tsunamis et les vagues scélérates. Pour modélisation et analyse, les simulations numériques sont réalisées à l'aide d'une méthode d'intégrales de frontières appelée BIEM (Boundary Integral Equation Method). Dans un premier temps nous considérons numériquement la dynamique des ondes solitaires, modèles simples pour les vagues de tsunamis dont la phase appelée "runup" sera l'objet d'un développement particulier. Afin de valider le modèle BIEM, nous confrontons les résultats numériques d'une onde solitaire déferlante avec une approche expérimentale. Une méthode de génération numérique de ces ondes est ensuite développée. Enfin une étude complète sur la collision frontale de deux ondes solitaires de Tanaka est effectuée. Un nouveau phénomène est alors découvert, puis exploré, la formation d'un jet résiduel en chute libre apparaissant à partir d'une valeur critique du paramètre de non linéarité  $a/h$ . Nous considérons ensuite numériquement la génération de vagues scélérates en eau peu profonde par focalisation d'énergie due à la nature dispersive des vagues. Ce travail s'attache à étudier entre autres l'influence du vent sur la dynamique de ces vagues. Le mécanisme d'abri proposé par Jeffreys est modifié par l'introduction d'un seuil de pente pour lequel un décollement aérien au-dessus des vagues apparaît. Ces vagues sont alors amplifiées et leur durée de vie est significativement augmentée. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus en eau profonde.

## Abstract

The main objective of these investigations is to study the dynamics of various types of extreme waves in shallow water, more particularly tsunami waves and freak waves. For modelling and analyze, a series of numerical simulations is realized using a Boundary Integral Equation Method. First we consider numerically the dynamics of the solitary waves, simple model to simulate a tsunami wave, where the runup will be more particularly developed. We present some comparisons of a breaking solitary wave on a sloping beach with an experimental approach, to validate the BIEM model. A method of numerical generation of these waves is then developed. Finally a full study on the head-on collision of two Tanaka solitary waves is performed. A new phenomenon is discovered and then presented, the residual falling jet formation appearing from a threshold value of the nonlinearity parameter  $a/h$ . We consider then numerically the generation of freak waves in shallow water by energy focusing due to the dispersive nature of water waves. This work attempts to study among others the influence of wind on the dynamics of these waves. The sheltering mechanism proposed by Jeffreys is modified by introducing a threshold in local slope above which air flow separation occurs over steep waves crests. These waves are then amplified and their lifetime is significantly increased. These results are similar to those obtained in deep water.