



**HAL**  
open science

# Nouvelles approximations numériques pour les équations de Stokes et l'équation Level Set

Djenno Ngomanda Emery Malcom

► **To cite this version:**

Djenno Ngomanda Emery Malcom. Nouvelles approximations numériques pour les équations de Stokes et l'équation Level Set. Mathématiques [math]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2007. Français. NNT: . tel-00445189

**HAL Id: tel-00445189**

**<https://theses.hal.science/tel-00445189>**

Submitted on 7 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*N° d'ordre : D.U. 1806*

UNIVERSITÉ BLAISE-PASCAL  
(U.F.R. de Sciences et Technologies)

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES  
N° : 553

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

(SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

par

Malcom DJENNO NGOMANDA  
*Diplômé d'Études Approfondies*

NOUVELLES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES  
POUR LES ÉQUATIONS DE STOKES ET  
L'ÉQUATION LEVEL SET

Soutenue publiquement le 14 Décembre 2007, devant la commission d'examen

<i>Messieurs</i>	Stéphane CLAIN	Directeur de thèse
	Thierry DUBOIS	Examineur
	Jérôme JAFFRÉ	Rapporteur
	François JAUBERTEAU	Président
	Jonas KOKO	Examineur
	Marco PICASSO	Rapporteur
	Rachid TOUZANI	Directeur de thèse

## REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord exprimer ma gratitude et ma profonde reconnaissance à Monsieur le Président de la République et doyen des chefs d'Etat africain son excellence HADJ OMAR BONGO ONDIMBA et son gouvernement pour leurs efforts en faveur de la jeunesse gabonaise. Sa politique volontariste de promotion des savoirs et des intelligences s'est traduite par un investissement massif dans l'éducation, en ouvrant dans tout le pays des écoles, des collèges et des lycées, en finançant les études supérieures de nombreux étudiants à l'étranger, en construisant des universités au Gabon et en mettant en place le système de bourse le plus large qui soit, depuis la classe de 6ème jusqu'à la fin des études supérieures. Il a réussi la difficile mission d'offrir à chaque enfant de ce pays la possibilité de s'instruire et de se former. Avec les meilleurs des enfants du GABON, il parvient chaque jour à former une élite dont nous devons être fiers.

Je tiens aussi à remercier mon oncle le ministre d'Etat IDRIS NGARI pour le soutien sans faille qu'il m'a apporté tout au long de ces années de thèse. Je ne pourrai pas oublier de mentionner également mon oncle et ami, le commissaire général au plan ANGE MACAIRE LONGHO pour m'avoir orienté dans le milieu de la recherche.

Un remerciement spécial à toute ma famille. A ma Maman qui a suivi avec rigueur et discipline toutes mes études. A mon Père qui a su me donner le goût du savoir et de l'expression intellectuelle. A mes frères et soeurs qui ont su être patients à mon égard. A mon grand frère WILLY qui est venu spécialement d'Allemagne pour assister à mon soutenance, à Michel que je m'aime beaucoup, à mon ami CLOVIS qui m'a évité la solitude par sa présence et compris pendant les jours fériés, à TSOUMOU FRANCE qui s'est illustrée de manière énergique et à tous ceux qui sont venus du GABON et de tous les coins de France pour assister à ma soutenance. A mon épouse AXELLE et ma fille ANNA pour leur patience et enfin à ma cousine YANNICQUE pour m'avoir soutenu quotidiennement au cours de l'élaboration de ce manuscrit.

Je tiens aussi à remercier RACHID TOUZANI pour l'encadrement de cette thèse de doctorat. Je le remercie tout particulièrement de m'avoir mis en contact avec STEPHANE CLAIN. Cette collaboration avec STEPHANE a été fructueuse et a conduit à la rédaction de la deuxième partie de cette thèse. Cette thèse n'aurait pas été possible sans la bibliothèque OFELI parfaitement conçue par RACHID TOUZANI. Je tiens aussi à signaler l'énergie, la passion, la patience que STEPHANE et RACHID ont déployé à mon égard pour l'aboutissement de ce travail. La disponibilité, la confiance et l'attention dont ils ont fait preuve ont été un soutien constant tout au long de ce travail.

Je remercie très chaleureusement les rapporteurs de ma thèse FRANCO PICASSO et JEROME JAFFRE pour leurs suggestions constructives. Ils ont contribué à améliorer ce mémoire. Mes remerciements s'adressent aussi à FRANCOIS JAUBERTEAU, THIERRY DUBOIS et JONAS KOKO pour l'honneur et le

plaisir qu'ils m'ont fait de participer au Jury.

Je suis reconnaissant à YOUCEF AMIRAT, BERNARD SARAMITO, PIERRE HENRARD, NOELLE ROUGANNE (Mère Teresa du doctorant), pour leur disponibilité et leur soutien constants. Merci à tous ceux, dans le Laboratoire de Mathématiques de l'université Blaise Pascal, qui m'ont facilité le travail durant ces années. Je voudrais aussi témoigner de mes sentiments les plus profonds à tous mes amis compagnons de thèse : VIVIEN CLAUZON, NICOLAS JAMES, HAIJA MOUSTAPHA, FABRICE BLACHE, LIANGZHEN LEI, INGRID VIOLET, REMY SART, BENOIT TESTUD et FANA TANGARA pour leur bonne humeur.

Enfin, je ne peux terminer cette page sans avoir une pensée pour mes grands parents, mes oncles OLOUNA et ADMNINA qui ne sont plus là pour constater ce résultat qu'ils ont su initier dès ma naissance.

## Résumé

Ce travail de thèse est consacré à deux thèmes de recherche en Calcul Scientifique liés par l'approximation numérique de problèmes en mécanique des fluides.

Le premier thème concerne l'approximation numérique des équations de Stokes, modélisant les écoulements de fluides incompressibles à vitesse faible. Ce thème est présent dans plusieurs travaux en Calcul Scientifique. La discrétisation en temps est réalisée à l'aide de la méthode de projection. La discrétisation en espace utilise la méthode des éléments finis mixtes hybrides qui permet d'imposer de façon exacte la contrainte d'incompressibilité. Cette approche est originale : la méthode des éléments mixtes hybrides est couplée avec une méthode d'éléments finis standards. L'ordre de convergence des deux méthodes est préservé.

Le second thème concerne la mise au point de méthodes numériques de type volumes finis pour la résolution de l'équation Level Set. Ces équations interviennent de manière essentielle dans la résolution des problèmes de propagation d'interfaces. Dans cette partie, nous avons développé une nouvelle méthode d'ordre 2 de type MUSCL pour résoudre le système hyperbolique résultant de l'équation Level Set. Nous illustrons ces propriétés par des applications numériques. En particulier nous avons regardé le cas du problème des deux demi-plans pour lequel notre schéma donne une approximation pour le gradient de la fonction Level Set. Par ailleurs, l'ordre de précision attendu est obtenu avec les normes  $L_1$  et  $L_\infty$  pour des fonctions régulières. Pour finir, il est à noter que notre méthode peut être facilement étendue aux problèmes d'Hamilton-Jacobi du premier et du second ordre.

## **Abstract**

This thesis work is devoted to two research topics in Scientific Computing related to the numerical approximation of problems in fluids mechanics.

The first topic relates to the numerical approximation of Stokes equations, modelling the "slow" flows of incompressible fluids. It considers the approximation by a method of projection for the discretization in time. The discretization in space uses the finite element method mixed hybrids making it possible to impose in an exact way the incompressibility constraint. This approach is original since it allows to couple the hybrid mixed finite elements with a method standard finite element while preserving the order of convergence of the two methods.

The second topic relates to the development of finite volume schemes for the resolution of the Level Set equation. These equations intervene in an essential way in the resolution of problems of propagation of interfaces. In this part, we developed a new second order method of MUSCL type to solve the hyperbolic system resulting from the Level Set equation. We illustrate these properties by numerical applications. In particular we looked at the case of the problem of the two half-planes for which our scheme gives an approximation for the gradient of the level set function. In addition, the expected order of accuracy is reached for the standard  $L_1$  and  $L_\infty$  norms for regular functions. Finally, it should be noted that our method can easily be extended to Hamilton-Jacobi problems of first and second orders.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>UNE METHODE MIXTE HYBRIDE POUR LES EQUATIONS DE STOKES</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Quelques rappels sur la méthode des éléments finis</b>	<b>15</b>
1.1	Problèmes abstraits . . . . .	15
1.1.1	Formulations standards . . . . .	15
1.1.2	Formulations mixtes . . . . .	17
1.2	Espaces fonctionnels . . . . .	21
1.3	Espaces d'approximation . . . . .	23
1.3.1	Maillage . . . . .	23
1.3.2	Espaces de polynômes . . . . .	23
1.3.3	Espaces d'éléments finis . . . . .	24
1.4	Problème de Poisson . . . . .	26
1.4.1	Position du problème . . . . .	26
1.4.2	Approximation $\mathbb{P}_1$ non conforme . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Méthodes mixtes hybrides pour l'équation de Darcy</b>	<b>29</b>
2.1	Formulations mixtes . . . . .	30
2.1.1	Formulation mixte primale . . . . .	30
2.1.2	Formulation mixte duale . . . . .	30
2.2	Discrétisation par l'élément fini $\mathbb{P}_0^2/\mathbb{P}_1$ non conforme . . . . .	31
2.3	Discrétisation par l'élément fini $RT_k/\mathbb{P}_k$ . . . . .	32
2.3.1	Éléments finis mixtes . . . . .	33
2.3.2	Éléments finis mixtes hybrides . . . . .	33
2.3.3	Étude de l'élément $RT_0/\mathbb{P}_0$ . . . . .	35
2.3.3.1	Implémentation . . . . .	36
2.3.3.2	Analyse de l'erreur . . . . .	37
2.3.4	Étude de l'élément $RT_1/\mathbb{P}_1$ . . . . .	40
2.3.4.1	Autre caractérisation . . . . .	41
2.3.4.2	Implémentation . . . . .	42
2.4	Résultats numériques . . . . .	44
2.4.1	tests . . . . .	46
2.5	Conclusions . . . . .	47



---

<b>3</b>	<b>Méthodes mixtes hybrides pour les équations de Stokes</b>	<b>49</b>
3.1	Position du problème . . . . .	49
3.2	Approximation du problème de Stokes . . . . .	50
3.2.1	Discrétisation en temps par la méthode de projection . . . . .	50
3.2.2	Discrétisation en espace par la méthode des éléments finis . . . . .	52
3.2.2.1	Éléments finis mixtes . . . . .	52
3.2.2.2	Éléments finis mixtes hybrides . . . . .	53
3.3	Résultats numériques . . . . .	56
3.4	Conclusions . . . . .	62

## II SCHEMAS NON CONFORMES POUR L'ÉQUATION LEVEL SET 69

<b>1</b>	<b>Généralités sur l'équation level set</b>	<b>73</b>
1.1	Présentation de l'équation Level Set . . . . .	74
1.1.1	Formulation en ensemble de niveau . . . . .	74
1.1.2	Equation d'évolution de la frontière . . . . .	75
1.2	Solution de l'équation level set dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	77
1.2.1	Quelques notations . . . . .	77
1.2.2	Solution généralisée . . . . .	77
1.2.3	Solution régularisée . . . . .	79
1.2.4	Solution de viscosité . . . . .	81
1.3	Solution de l'équation level set dans $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ . . . . .	83
1.3.1	Conditions de type Dirichlet . . . . .	83
1.3.2	Conditions de type Neumann . . . . .	83
<b>2</b>	<b>Équation de loi de conservation associée à l'équation level set</b>	<b>87</b>
2.1	Propriétés de l'équation de loi de conservation . . . . .	87
2.1.1	Étude de l'hyperbolicité . . . . .	88
2.1.2	Solutions faibles du problème de Cauchy . . . . .	89
2.1.3	Solutions faibles entropiques . . . . .	89
2.1.3.1	Entropie mathématique . . . . .	90
2.1.3.2	Solution entropique . . . . .	90
2.2	Liens entre les deux équations . . . . .	91
2.2.1	Cas unidimensionnel . . . . .	92
2.2.2	Cas général . . . . .	92
2.3	Rappels sur les équations de lois de conservation scalaires . . . . .	95
2.3.1	Solutions faibles entropiques . . . . .	95
2.3.2	Problème de Riemann . . . . .	96
2.3.2.1	Onde de détente ou onde de raréfaction . . . . .	97
2.3.2.2	Courbes de choc et choc entropique . . . . .	97
2.3.2.3	Discontinuité de contact . . . . .	99

---

2.3.2.4	Résolution théorique du problème de Riemann . . .	99
2.4	Le problème des deux demi-plans pour l'équation level set . . . . .	100
2.4.1	Introduction au problème des demi-plans . . . . .	101
2.4.1.1	Orientation . . . . .	101
2.4.1.2	Condition initiale pour $\phi$ et $\mathbf{U}$ . . . . .	102
2.4.2	Simplification du problème de Riemann . . . . .	103
2.4.3	Résolution théorique du problème de Riemann . . . . .	105
2.4.3.1	Étude du choc $\omega_0 \neq 0$ . . . . .	106
2.4.3.2	Étude du choc $\omega_0 = 0$ . . . . .	106
2.4.3.3	Étude de la raréfaction $\omega_0 \neq 0$ . . . . .	106
2.4.3.4	Étude de la raréfaction $\omega_0 = 0$ . . . . .	107
2.4.4	Solution théorique pour la level set . . . . .	110
2.4.4.1	Étude du choc . . . . .	110
2.4.4.2	Étude de la raréfaction $\omega_0 \neq 0$ . . . . .	111
2.4.4.3	Étude de la raréfaction $\omega_0 = 0$ . . . . .	113
<b>3</b>	<b>Schémas volumes finis pour l'équation level set</b>	<b>115</b>
3.1	Quelques définitions . . . . .	116
3.1.1	Maillage . . . . .	116
3.1.2	Espaces d'approximation . . . . .	117
3.2	Construction des schémas . . . . .	119
3.2.1	Formulation non conforme de l'équation level set . . . . .	119
3.2.2	Formulation volumes finis de l'équation de loi de conservation	120
3.2.3	Lien entre les deux formulations . . . . .	121
3.3	Propriétés fondamentales des schémas . . . . .	125
3.3.1	Maillage structuré . . . . .	125
3.3.2	Maillage non structuré . . . . .	126
3.3.3	Application de la théorie de Barles-Souganidis . . . . .	128
3.4	Schémas centrés . . . . .	133
3.4.1	Présentation . . . . .	133
3.4.2	Propriétés . . . . .	135
3.5	Schémas décentrés de type Roe . . . . .	136
3.5.1	Présentation du schéma . . . . .	137
3.6	Schémas de type Lax . . . . .	139
3.6.1	Présentation . . . . .	139
3.6.2	Propriétés . . . . .	141
3.7	Résultats, tests numériques . . . . .	143
3.7.1	Description des tests . . . . .	145
3.7.2	Comportement des schémas, Stabilité . . . . .	149
3.7.3	Ordre en norme $L^1$ . . . . .	158
3.7.4	Ordre en norme $L^\infty$ . . . . .	160
3.8	Conclusions . . . . .	162

---

<b>4</b>	<b>Schémas MUSCL pour l'équation level set</b>	<b>163</b>
4.1	La méthode MUSCL Classique . . . . .	164
4.1.1	Construction de la pente par les méthodes du gradient . . .	166
4.1.2	Méthode de minimisation . . . . .	167
4.1.3	Conditions de stabilité. . . . .	168
4.1.4	Le limiteur . . . . .	168
4.2	Méthode MUSCL multipente . . . . .	168
4.2.1	La décomposition fondamentale . . . . .	169
4.3	Méthode multipente avec les points $\mathbf{Q}_{i,j}$ . . . . .	171
4.4	Méthode multipente avec les points $\mathbf{M}_{i,j}$ . . . . .	172
4.4.1	Décomposition fondamentale de $\mathbf{r}_i$ par rapport à $\mathbf{r}_j$ . . . .	173
4.4.2	Décomposition de $\mathbf{r}_i$ par rapport à $\mathbf{t}_i$ et $\mathbf{t}_j$ . . . . .	174
4.4.3	Construction des pentes . . . . .	175
4.5	Résultats numériques . . . . .	176
4.5.1	tests numériques . . . . .	176
4.5.1.1	Description des tests . . . . .	177
4.5.1.2	Comparaison de la viscosité des schémas . . . . .	178
4.5.1.3	Ordre en norme $L^1$ . . . . .	183
4.5.1.4	Ordre en norme $L^\infty$ . . . . .	187
4.5.2	Simulations numériques . . . . .	191
4.5.2.1	Cône en rotation . . . . .	191
4.5.2.2	Changement de topologie . . . . .	191
4.6	Conclusions . . . . .	197

---

**PARTIE I**

**UNE METHODE MIXTE  
HYBRIDE POUR LES  
EQUATIONS DE STOKES**



# Introduction

La méthode de projection est la technique la plus fréquemment utilisée pour la résolution numérique des équations Navier-Stokes incompressibles. Cette méthode est en particulier largement répandue dans les simulations numériques directes d'écoulements turbulents. En pratique, la méthode de projection est combinée avec une technique de discrétisation spatiale, de type différences finies (Bell et al. [3]), ou éléments finis (Donea et al. [13], Gresho et Chan [24]), ou approximations spectrales (Ku et al. [24]).

Les méthodes numériques de projection ont en commun le fait qu'elles découpent, à chaque pas temps, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'incompressibilité. Ainsi, on résout successivement :

- l'équation de mouvement avec une pression connue, ce qui conduit à la résolution d'un problème elliptique bien conditionné ;
- la projection du champ de vitesse ainsi obtenu dans un espace de fonctions à divergence nulle. Ceci se traduit par la résolution d'une équation elliptique dont l'inconnue est la pression. Cette équation est en fait de type Darcy et le choix d'une bonne méthode numérique pour cette étape détermine la qualité de la solution obtenue.

Nous présentons, dans ce travail une nouvelle méthode d'éléments finis mixtes hybrides pour la résolution de l'étape de projection. Ceci assure des propriétés de conservation de la masse pour la solution obtenue. De plus, nous verrons que la stabilité du schéma numérique est mise en évidence à travers plusieurs essais numériques.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les outils fondamentaux à la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis mixtes utiles pour la suite. Dans le chapitre 2, nous présentons une approximation par éléments finis mixtes hybrides des équations de Darcy dans laquelle l'élimination de la vitesse s'effectue aisément, facilitant ainsi l'implémentation de l'étape de projection. Nous terminons cette partie, par le chapitre 3 qui nous permettra d'appliquer les résultats de l'étude précédente aux équations de Stokes instationnaires. Enfin, nous réalisons quelques expériences numériques pour illustrer la convergence de notre méthode.



# Chapitre 1

## Quelques rappels sur la méthode des éléments finis

Dans ce chapitre, nous introduisons les outils fondamentaux à la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis mixtes que nous utiliserons pour approcher les équations de Stokes. Nous rappelons les résultats classiques sur les formulations variationnelles standards et mixtes, aussi bien dans le cas conforme que non conforme. Nous rappelons également une liste de plusieurs espaces de polynômes ainsi que celle des espaces éléments finis correspondants. Nous terminons, en donnant les résultats d'estimation d'erreurs pour l'approximation par éléments finis non conformes du problème de Poisson.

### 1.1 Problèmes abstraits

Cette section est consacrée à quelques résultats théoriques utiles pour l'étude des équations aux dérivées partielles que nous rencontrerons au cours de la première partie.

On se donne deux espaces de Hilbert  $V$  et  $Q$  munis des normes respectives  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_Q$ .  $V'$  et  $Q'$  sont leurs espaces duaux respectifs. On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q' \times Q}$  les crochets de dualité entre  $V'$  et  $V$  et  $Q'$  et  $Q$ . Enfin,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a' : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  sont trois formes bilinéaires continues.

#### 1.1.1 Formulations standards

Nous supposons que la forme bilinéaire  $a'$  est elliptique, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$a'(q, q) \geq \alpha \|q\|_Q^2 \quad \forall q \in Q.$$



Le problème abstrait qui nous intéresse est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p \in Q \text{ tel que} \\ a'(p, q) = \langle f, q \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q \in Q, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où  $f \in Q'$ .

Par le théorème de Lax-Milgram (voir [17]), le problème (1.1.1) admet une solution unique.

Soit  $Q_h$  un espace vectoriel de dimension finie muni de la norme  $\|\cdot\|_h$ . Cet espace est destiné à approcher l'espace  $Q$ .

Si  $Q_h$  est un sous-espace de  $Q$ , on définit le problème approché :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_h \in Q_h \text{ tel que} \\ a'(p_h, q) = \langle f, q_h \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q \in Q_h. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

C'est encore le théorème de Lax-Milgram qui garantit l'existence d'une solution unique au problème en substituant l'espace  $Q_h$  à l'espace  $Q$ .

Une majoration de l'erreur  $\|p - p_h\|_h$  est donnée par (cf. [17]) :

$$\|p - p_h\|_Q \leq \frac{\|a'\|}{\alpha} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q, \quad (1.1.3)$$

Si  $Q_h$  n'est pas un sous-espace de  $Q$ , nous avons besoin d'une extension  $a'_h(\cdot, \cdot)$  de la forme bilinéaire  $a'(\cdot, \cdot)$  sur  $Q_h \times Q_h$  telle que  $a'_h(p, q) = a'(p, q) \quad \forall p, q \in Q$ . Nous avons également besoin d'une extension  $f_h$  de  $f$  sur  $Q'_h$  telle que  $\langle f_h, q \rangle_{Q'_h \times Q_h} = \langle f, q \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q \in Q$ .

Nous supposons de plus qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$a'_h(q_h, q_h) \geq \alpha \|q_h\|_{Q_h}^2 \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Le problème approché est alors défini par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_h \in Q_h \text{ tel que} \\ a'_h(p_h, q) = \langle f_h, q \rangle_{Q'_h \times Q_h} \quad \forall q \in Q_h. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Là encore, nous utilisons le théorème Lax-Milgram pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution. Pour cela, il suffit de vérifier la continuité de la forme  $a'_h(\cdot, \cdot)$  sur  $Q_h \times Q_h$  et son ellipticité sur  $Q_h$ . Dans ce cas, il n'est pas en général possible d'assurer ces hypothèses à partir de celles du problème continu. Nous rappelons aussi l'évaluation de l'erreur abstraite. Par rapport au cas précédent, nous introduisons l'erreur de consistance

$$r_h(p)(q_h) = a'_h(p - p_h, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Ceci nous amène à définir la norme

$$\|r_h(p)\|_h^* = \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|a'_h(p - p_h, q_h)|}{\|q_h\|_{Q_h}}.$$

Le lemme de Strang (voir [17]) nous dit alors :

$$\|p - p_h\|_h \leq \frac{1}{\alpha} \|r_h(p)\|_h^* + \left(1 + \frac{\|a'_h\|}{\alpha}\right) \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_h. \quad (1.1.5)$$

### 1.1.2 Formulations mixtes

Nous définissons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in V \times Q \text{ tel que} \\ a(u, v) + b(v, q) = \langle f, v \rangle_{V' \times V} & \forall v \in V, \\ b(u, q) = \langle g, q \rangle_{Q' \times Q} & \forall q \in Q, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

où  $f \in V'$ ,  $g \in Q'$  sont donnés.

Nous rappelons d'abord quelques caractérisations de la condition inf-sup de Brezzi ([17]). Pour ce faire, nous introduisons un sous espace de  $V$  noté  $V_0$  et défini par

$$V_0 = \{v \in V; b(v, q) = 0 \quad \forall q \in Q\}.$$

$V_0$  est un sous espace fermé de  $V$  grâce à la continuité de la forme bilinéaire  $b$  sur  $V \times Q$ . Par conséquent,  $V_0$  est un espace de Hilbert. Nous définissons l'espace polaire et l'orthogonal de  $V_0$  respectivement par

$$V_0^\circ = \{h \in V'; \langle h, v \rangle_{V' \times V} = 0 \quad \forall v \in V_0\},$$

$$V_0^\perp = \{v \in V; (v, w) = 0 \quad \forall w \in V_0\}.$$

**Proposition 1.1.1** (Brezzi [5]). *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\exists \beta > 0$  tel que  $\inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta$ .
2. Il existe un isomorphisme  $B'$  de  $Q$  sur  $V_0^\circ$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$b(v, q) = \langle v, B'q \rangle_{V' \times V} \quad \forall q \in Q, \quad \|q\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \|B'q\|_{V'}.$$

3. Il existe un isomorphisme  $B$  de  $V_0^\perp$  sur  $Q'$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$b(v, q) = \langle Bv, q \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall v \in V_0^\perp, \quad \|v\|_V \leq \frac{1}{\beta} \|Bv\|_{Q'}.$$

Les conditions d'existence et d'unicité d'une solution au problème (1.1.6) sont données par le

**Théorème 1.1.1** (Brezzi [5]). *On suppose que :*

1.  $\exists \alpha > 0$  tel que  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V_0$ ,
2.  $\exists \beta > 0$  tel que  $\inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta$ .

Alors pour tout  $f \in V'$  et pour tout  $g \in Q'$ , le problème (1.1.6) admet une solution unique  $(u, p) \in V \times Q$ . De plus, cette solution vérifie les estimations :

$$\|v\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \left( \|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\beta} \|g\|_{Q'} \right), \quad (1.1.7)$$

$$\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \left( \|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\alpha} \left( \|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\beta} \|g\|_{Q'} \right) \right). \quad (1.1.8)$$

Nous nous intéressons maintenant au problème mixte discret. Selon que les espaces d'approximations sont inclus ou non dans les espaces continus, deux cas se dégagent.

### Le cas conforme

Soient  $V_h \subset V$  et  $Q_h \subset Q$  deux espaces de dimension finie. Considérons le problème mixte approché :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, q_h) = \langle f, v_h \rangle & \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

On définit  $V_{0,h}$  comme suit :

$$V_{0,h} = \{v_h \in V_h ; b(v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}.$$

De manière générale,  $V_{0,h}$  n'est pas inclus dans  $V$ . Pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.1.9), il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 1.1.1. Comme  $V_h \subset V$  et  $Q_h \subset Q$ , alors la continuité des formes bilinéaires  $a$  et  $b$  sur  $V_h \times V_h$  et  $V_h \times Q_h$  est immédiate. Mais l'ellipticité de  $a$  sur  $V_0$  ne s'étend pas forcément à l'espace  $V_{0,h}$ . En revanche, si  $a$  est elliptique sur  $V$ , alors elle l'est également sur  $V_h$  et donc sur  $V_{0,h}$ . Quant à la condition inf-sup, même si elle est vérifiée par le problème continu, cela n'est pas toujours le cas pour le problème discret. L'étude de l'existence d'une solution unique au problème (1.1.9) révient à donc à vérifier la condition inf-sup discrète.

Examinons maintenant la convergence de la solution discrète  $(u_h, p_h)$  vers la solution continue  $(u, p)$ . D'après [17], nous avons immédiatement

$$\|u - u_h\|_V \leq \left( 1 + \frac{\|a\|}{\alpha} \right) \inf_{v_h \in V_{0,h}} \|u - v_h\|_V + \frac{\|b\|}{\alpha} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q.$$

Mais la majoration ci-dessus ne fait intervenir que la quantité  $\inf_{v_h \in V_{0,h}} \|u - v_h\|_V$  que l'on ne sait pas évaluer. Pour obtenir une majoration par  $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$  rap- pelons tout d'abord la notion de condition inf-sup discrète pour la forme bilinéaire  $b$  :

$$\exists \beta_h > 0 \text{ tel que } \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|q_h\|_{Q_h}} \geq \beta_h. \quad (1.1.10)$$

Ensuite considérons la proposition suivante.

**Proposition 1.1.2.** *On suppose que la forme bilinéaire  $b$  est continue sur  $V_h \times Q_h$  et vérifie la condition inf-sup (1.1.10) alors  $\forall u \in V$*

$$\inf_{v_h \in V_{0,h}} \|u - v_h\| \leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V.$$

Une démonstration de cette proposition peut être trouvée dans [30].

La conséquence immédiate de la proposition 1.1.2 est la majoration :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \\ &\quad + \frac{\|b\|}{\beta_h} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Nous terminons en donnant la majoration de  $\|p - p_h\|_Q$  :

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_Q &\leq \frac{\|a\|}{\beta_h} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \\ &\quad + \left(1 + \frac{\|a\| \|b\|}{\alpha \beta_h} + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

### Le cas non conforme

Nous examinons maintenant le cas où les deux espaces  $V_h$  et  $Q_h$  ne sont pas inclus dans  $V$  et  $Q$ . De ce fait, nous nous donnons deux formes bilinéaires  $a_h(\cdot, \cdot)$  et  $b_h(\cdot, \cdot)$  sur  $V_h \times V_h$  et  $V_h \times Q_h$ . Nous notons par  $\alpha_h$  la constante d'ellipticité de  $a_h(\cdot, \cdot)$  sur  $V_{0,h}$  et par  $\beta_h$  la constante provenant de la condition inf-sup de la forme  $b_h(\cdot, \cdot)$ .

Nous cherchons donc à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) + b_h(v_h, q_h) = \langle f, v_h \rangle & \forall v_h \in V_h, \\ b_h(u_h, q_h) = \langle g, q_h \rangle & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (1.1.13)$$

A l'inverse du cas conforme, il n'est en général pas possible d'assurer certaines hypothèses à partir de celles du problème continu. Ce n'est plus seulement la condition inf-sup qu'il faut vérifier, mais il faut s'assurer explicitement de la validité des trois autres hypothèses.

Nous donnons maintenant une majoration d'erreur abstraite. On définit

$$r_h(u, p)(v_h) = a_h(u - u_h, v_h) + b_h(v_h, p - p_h), \forall v_h \in V_h,$$

et

$$\|r_h(u, p)\|_h^* = \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a_h(u - u_h, v_h) + b_h(v_h, p - p_h)|}{\|v_h\|_{V_h}}.$$

D'après [17] nous avons

$$\|u - u_h\|_h \leq \left(1 + \frac{\|a_h\|}{\alpha_h} + \frac{1}{\alpha_h} \|r_h(u, p)\|_h^*\right) \inf_{w_h \in V_{0,h}} \|u - w_h\|_h + \frac{\beta_h}{\alpha_h} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{Q_h}.$$

En utilisant la proposition 1.1.2, nous pouvons majorer comme suit :

$$\inf_{w_h \in V_{0,h}} \|u - w_h\|_h \leq \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h,$$

et nous obtenons finalement la majoration de  $\|u - u_h\|_h$  :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_h &\leq \left(1 + \frac{\|a_h\|}{\alpha_h} + \frac{1}{\alpha_h} \|r_h(u, p)\|_h^*\right) \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \\ &\quad + \frac{\|b\|}{\beta_h} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{Q_h} \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Par conséquent, nous avons la majoration de  $\|p - p_h\|_{Q_h}$  :

$$\begin{aligned}
 \|p - p_h\|_{Q_h} &\leq \frac{\|a_h\|}{\beta_h} \left( 1 + \frac{\|a_h\|}{\alpha_h} + \frac{1}{\alpha_h} \|r_h(u, p)\|_h^* \right) \left( 1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h} \right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \\
 &\quad + \left( 1 + \frac{\|a_h\| \|b_h\|}{\alpha_h \beta_h} + \frac{\|b_h\|}{\beta_h} \right) \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{Q_h} \\
 &\quad + \frac{1}{\beta_h} \|r_h(u, p)\|_h^*.
 \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Les estimations d'erreur ont donc une forme identique à celles du cas conforme, seulement il apparaît en plus un terme de non consistence en  $r_h(u, p)$ .

## 1.2 Espaces fonctionnels

Nous définissons maintenant les espaces de fonctions qui nous seront utiles tout au long de la première partie.

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière régulière  $\Gamma$  et soit  $\mathbf{n}$  la normale unité extérieure à  $\Gamma$ .

Nous commençons par introduire les espaces de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , des fonctions définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $p$ -intégrables. Nous considérons ensuite les espaces de Sobolev  $H^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , des fonctions définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , et à dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$ , au sens des distributions, dans  $L^2(\Omega)$ ; et l'espace

$$H_0^1(\Omega) := \{q \in H^1(\Omega); q = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

dont l'espace dual est noté  $H^{-1}(\Omega)$ .

Nous utilisons  $(\cdot, \cdot)$  pour désigner le produit scalaire à la fois dans les espaces  $L^2(\Omega)^2$  et  $L^2(\Omega)$ . Nous munissons l'espace  $H^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de la semi-norme

$$|q|_{k, \Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} q|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

et de la norme

$$\|q\|_{k, \Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} q|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

où

$$\partial^{\alpha} q = \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} q}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_1^{\alpha_2}},$$

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$  et  $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2$ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous allégerons nos notations par  $|\cdot|_k$  et  $\|\cdot\|_k$ . En particulier,  $\|\cdot\|_0$  est la norme de l'espace  $L^2(\Omega)$ .

Nous aurons aussi besoin des espaces de Hilbert  $L_0^2(\Omega)$ , et  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  définis par

$$L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = 0\},$$

et

$$H(\operatorname{div}; \Omega) := \{\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^2; \operatorname{div} \mathbf{w} \in L^2(\Omega)\},$$

et munis respectivement des normes

$$\|q\|_0 := \left( \int_{\Omega} |q|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

et

$$\|\mathbf{w}\|_{\operatorname{div}} := \left( \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Nous noterons par  $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$  et  $H(\operatorname{div}^0; \Omega)$  les sous espaces de  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  suivants :

$$\begin{aligned} H_0(\operatorname{div}; \Omega) &:= \{\mathbf{w} \in H(\operatorname{div}; \Omega); \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \\ H(\operatorname{div}^0; \Omega) &:= \{\mathbf{w} \in H(\operatorname{div}; \Omega); \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega\}. \end{aligned}$$

Nous rappelons que la trace de  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Gamma$  (voir [25]) est définie par dualité

$$\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{w}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (1.2.1)$$

Nous notons par  $H^{1/2}(\Gamma)$  le sous espace de  $L^2(\Gamma)$  des traces des fonctions de  $H^1(\Omega)$  muni de la semi-norme

$$|\mu|_{1/2, \Gamma} = \inf_{\{q \in H^1(\Omega); q|_{\Gamma} = \mu\}} |q|_{1, \Omega},$$

et de la norme

$$\|\mu\|_{1/2, \Gamma} = \inf_{\{q \in H^1(\Omega); q|_{\Gamma} = \mu\}} \|q\|_{1, \Omega}.$$

L'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$  est un espace de Hilbert. De plus, l'injection canonique de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $L^2(\Gamma)$  est continue. Nous désignons par  $H^{-1/2}(\Gamma)$  le dual topologique de l'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$  muni de la norme

$$\|\mu\|_{-1/2, \Gamma} = \inf_{\{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mu\}} \|\mathbf{v}\|_{\operatorname{div}, \Omega}.$$

Pour les problèmes dépendant du temps, nous aurons besoin des espaces  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  et  $L^p(0, T; H^k(\Omega))$  :

$$L^2(0, T; L^2(\Omega)) = \{\mathbf{v} : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}; \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_0 \in L^2(0, T) \text{ pour presque tout } t\},$$

$$L^p(0, T; H^k(\Omega)) = \{\mathbf{v} : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}; \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_k \in L^p(0, T) \text{ pour presque tout } t\},$$

pour  $T > 0$  donné.

## 1.3 Espaces d'approximation

Dans cette section, nous définissons une triangulation du domaine  $\Omega$ . Ceci nous permettra d'introduire les espaces éléments finis nécessaires à la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis.

### 1.3.1 Maillage

On suppose que le domaine  $\Omega$  est un polygone. Soit  $h > 0$  et  $\mathcal{T}_h$  un maillage de  $\Omega$  constitué de triangles de longueurs d'arêtes inférieures ou égales à  $h$  avec  $\text{card } \mathcal{T}_h = N_T$ . On note par

- $\mathcal{E}_h^i$  l'ensemble des arêtes intérieures de  $\mathcal{T}_h$ , de cardinal  $N_i$ ,
- $\mathcal{E}_h^f$  l'ensemble des arêtes frontières de  $\mathcal{T}_h$ , de cardinal  $N_f$ ,
- $\mathcal{E}_h$  l'ensemble des arêtes de  $\mathcal{T}_h$ , de cardinal  $N_a = N_i + N_f$ .

Si  $e \in \mathcal{E}_h$ , nous noterons par

- $\mathcal{P}_e$  l'ensemble des triangles contenant l'arête  $e$ ,
- $M_e$  le milieu de l'arête  $e$ ,
- $|e|$  la longueur de l'arête  $e$ .

Si  $e \in \mathcal{E}_h^i$ , nous lui associons deux triangles  $T_e^g$  et  $T_e^d$  et nous notons par

- $\boldsymbol{\nu}^g$  (resp.  $\boldsymbol{\nu}^d$ ) la normale unité extérieure au triangle  $T_e^g$  (resp.  $T_e^d$ ),
- $\boldsymbol{\tau}^g$  (resp.  $\boldsymbol{\tau}^d$ ) le vecteur tangent à l'arête  $e$  tel que le repère  $(\boldsymbol{\tau}^g, \boldsymbol{\nu}^g)$  (resp.  $(\boldsymbol{\tau}^d, \boldsymbol{\nu}^d)$ ) soit orthonormé.

Soit  $T \in \mathcal{T}_h$ , alors pour  $1 \leq i \leq 3$ , on note par

- $a_{i,T}$  le  $i$ -ème sommet du triangle  $T$ ,
- $\lambda_i^T$  la  $i$ -ème coordonnée barycentrique du triangle  $T$ ,
- $e_{i,T}$  l'arête opposée au sommet  $a_{i,T}$ ,
- $b_{i,T}$  le milieu de l'arête  $e_{i,T}$ .

Enfin, on désigne par

- $\boldsymbol{\nu}$  la normale unité extérieure au triangle  $T$ ,
- $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur tel que le repère  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$  est orthonormé,
- $\mathcal{E}_T$  l'ensemble des arêtes de l'élément  $T$ ,
- $|T|$  l'aire de l'élément  $T$ .

### 1.3.2 Espaces de polynômes

Soit  $T \in \mathcal{T}_h$ , nous rappelons les espaces de polynômes classiques :

- l'espace  $\mathbb{P}_k(T)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , des polynômes de degré  $\leq k$  définis sur  $T$ ,
- l'espace  $\tilde{\mathbb{P}}_k(T)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , des polynômes homogènes de degré  $\leq k$  définis sur  $T$
- l'espace  $\mathbb{P}_k(e)$ ,  $e \in \mathcal{E}_h$ , des restrictions à  $e$  des polynômes  $\mathbb{P}_k$  qui nous permet de définir l'espace

$$R_k(\partial T) = \{\phi \in L^2(\partial T), \phi|_e \in \mathbb{P}_k(e), \forall e \in \mathcal{E}_T\}$$



et

$$T_k(\partial T) = R_k(\partial T) \cap C^0(\partial T).$$

Nous rappelons aussi l'espace de Raviart-Thomas d'ordre  $k$  (voir [5]), noté  $RT_k(T)$ , avec en particulier

$$RT_0(T) := \{\mathbf{w} : T \rightarrow \mathbb{R}^2; \mathbf{w}(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 + bx \\ a_2 + by \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, a_1, a_2, b \in \mathbb{R}\},$$

et

$$RT_1(T) := (\mathbb{P}_1(T))^2 \oplus \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tilde{\mathbb{P}}_1(T).$$

Enfin

$$\mathbb{D}_1^0(T) := \{\mathbf{w} \in RT_1(T); \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}$$

est le sous espace de  $RT_1(T)$  des champs à divergence nulle.

### 1.3.3 Espaces d'éléments finis

Nous définissons l'espace  $Q_h^k$  par

$$Q_h^k = \{q \in L^2(\Omega); q|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Nous savons que l'espace  $Q_h^{k,c}$ , défini par

$$Q_h^{k,c} = \{q \in C^0(\bar{\Omega}); q|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

est un espace d'approximation conforme de l'espace  $H^1(\Omega)$ . Nous considérons par ailleurs l'espace d'approximation  $\mathbb{P}_1$  non conforme (voir [12])

$$Q_h^{1,nc} = \{q \in Q_h^1, q \text{ est continu au point } b_{i,T}, 1 \leq i \leq 3, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

L'espace  $Q_h^{1,nc}$  est muni de la semi-norme

$$|q_h|_{1,h} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla q_h|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

et de la norme

$$\|q_h\|_{1,h} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q_h\|_{1,T}^2 \right)^{1/2}.$$

Soit

$$\mathbb{V}_h^k := \{\mathbf{w} \in H(\operatorname{div}; \Omega); \mathbf{w}|_T \in RT_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}, k \geq 0,$$

l'espace élément fini de Raviart-Thomas d'ordre  $k$ . Pour relaxer la contrainte de continuité des composantes normales des fonctions de  $H(\operatorname{div}; \Omega)$ , nous introduisons l'espace

$$Y_h = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H(\operatorname{div}; T)$$

que l'on munit de la norme

$$\|\mathbf{w}\|_{\operatorname{div}, h} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \|\mathbf{w}\|_{0, T}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{0, T}^2 \right) \right)^{1/2}.$$

Nous notons par  $Y_h^0$  le sous-espace de  $Y_h$  constitué des fonctions à divergence nulle sur chaque élément  $T \in \mathcal{T}_h$  :

$$Y_h^0 = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H(\operatorname{div}^0; T).$$

Nous considérons les espaces d'approximation de  $Y_h$  suivants :

$$V_h^k := \{\mathbf{w} \in L_0^2(\Omega)^2; \mathbf{w}|_T \in RT_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\} = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} RT_k(T).$$

Enfin,

$$\mathbb{D}_1^0 := \{\mathbf{w} \in V_h^1; \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}$$

est le sous-espace de  $W_h^1$  des champs à divergence nulle qui n'est rien d'autre qu'un espace d'approximation pour  $Y_h^0$ .

La contrainte de continuité des flux des fonctions de  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  sera prise en compte par un multiplicateur de Lagrange appartenant à l'espace suivant :

$$M_h = \{\mu = (\mu_T)_{T \in \mathcal{T}_h}; \exists q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); \mu_T = q|_{\partial T} \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Notons que  $M_h$  est un sous-espace de  $\prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial T)$ . Nous le munissons de la semi-norme

$$|\mu|_{1/2, h} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mu_T|_{1/2, \partial T}^2 \right)^{1/2},$$

et de la norme

$$\|\mu\|_{1/2, h} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mu_T\|_{1/2, \partial T}^2 \right)^{1/2}.$$

De plus, en notant

$$\Theta_h := \bigcup_{e \in \mathcal{E}_h} e,$$

la réunion des arêtes du maillage, nous pouvons définir les espaces d'approximation de  $M_h$  suivants :

$$M_h^k := \{\mu \in L^2(\Theta_h); \mu|_e \in \mathbb{P}_k(e) \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \int_{\Theta_h} \mu \, ds = 0\}.$$

## 1.4 Problème de Poisson

Nous terminons ce chapitre par l'illustration du problème (1.1.4). Pour cela, nous considérons une approximation non conforme d'ordre 1 du problème de Poisson (voir [12, 21]). Nous verrons dans le chapitre 2 que cette discrétisation nous permettra de démontrer des estimations d'erreur pour certaines approximations du problème de Darcy.

### 1.4.1 Position du problème

Etant donné  $f \in L_0^2(\Omega)$ , le problème de Poisson avec condition de type Neumann homogène consiste à chercher  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} -\Delta p = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Commençons par rappeler une formulation variationnelle du problème (1.4.1) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ a'(p, q) = (f, q) \quad \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Le problème (1.4.2) admet une solution unique grâce au théorème de Lax-Milgram (voir par exemple [12]).

### 1.4.2 Approximation $\mathbb{P}_1$ non conforme

Comme  $Q_h^{1,nc} \not\subset H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , nous définissons une extension  $a'_h(\cdot, \cdot)$  de la forme bilinéaire  $a'(\cdot, \cdot)$  à l'espace  $Q_h^{1,nc}$  de la manière suivante :

$$a'_h(p, q) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla p_h \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} \quad \forall p, q \in (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \cup Q_h^{1,nc}.$$

Notons que

$$a'_h(p, q) = a(p, q) \quad \forall p, q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

Le problème approché est alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_h \in Q_h^{1,nc} \text{ tel que} \\ a'_h(p_h, q_h) = (f, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h^{1,nc}. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Pour montrer que le problème (1.4.3) admet une solution unique, nous avons besoin d'un lemme intermédiaire.

**Lemme 1.4.1** ([12]).

- (i) La semi-norme  $|\cdot|_{1,h}$  est une norme sur  $Q_h^{1,nc}$ .
- (ii) La forme bilinéaire  $a'_h(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $Q_h^{1,nc} \times Q_h^{1,nc}$  pour la norme  $|\cdot|_{1,h}$  et coercive sur  $Q_h^{1,nc}$ .

Le lemme 1.4.1 et le théorème de Lax-Milgram montrent que le problème (1.4.3) admet une solution unique.

Le problème (1.4.3) est du type (1.1.4). Nous rappelons le résultat établi par Tomas (cf. [33]) pour la semi-norme  $|\cdot|_{1,h}$  et la norme  $\|\cdot\|_0$ .

**Théorème 1.4.1.** *Soit  $p$  la solution du problème (1.4.2) et  $p_h$  la solution du problème (1.4.3). Supposons que  $p \in H^2(\Omega)$ . Alors il existe  $c > 0$  tel que*

$$|p - p_h|_{1,h} \leq ch |p|_2,$$

$$\|p - p_h\|_0 \leq ch^2 |p|_2.$$



## Chapitre 2

# Méthodes mixtes hybrides pour l'équation de Darcy

L'équation de Darcy modélise les écoulements en milieux poreux et exprime le fait que le débit d'un écoulement est proportionnel à la différence des charges hydrostatiques à l'entrée et à la sortie. Elle intervient également dans la discrétisation en temps de l'équation instationnaire de Stokes ou Navier-Stokes par la méthode de projection (cf. [32]).

On rappelle que  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière régulière  $\Gamma$  et que  $\mathbf{n}$  est la normale unité extérieure à  $\Gamma$ . Étant donnée une fonction  $\mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega)$  avec  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ , le problème de Darcy s'écrit sous forme adimensionnelle : Trouver  $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{u} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.0.1)$$

L'approximation par éléments finis des équations de Darcy est basée sur deux approches :

L'une implique une formulation pour la pression et l'autre emploie une formulation mixte dans laquelle la pression et la vitesse sont des variables. L'approche la plus populaire jusqu'ici dans les applications a été basée sur la formulation mixte. Cependant, cette approche a également son inconvénient : la complexité. Différentes interpolations sont exigées pour la pression et la vitesse, et l'implémentation est particulièrement compliquée en 3D. Dans ce qui suit, nous donnons une approximation par éléments fins mixtes hybrides des équations de Darcy dans laquelle l'élimination de la vitesse s'effectue aisément.

## 2.1 Formulations mixtes

Dans ce qui suit, nous donnons deux formulations mixtes équivalentes du problème (2.0.1). Pour cela, on introduit les formes bilinéaires  $a(.,.)$ ,  $b(.,.)$  et  $\tilde{b}(.,.)$  définies par

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x},$$

$$b(\mathbf{w}, q) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x},$$

et

$$\tilde{b}(\mathbf{w}, q) = \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}.$$

On peut noter qu'une troisième formulation "non symétrique", que nous n'utiliserons pas, a été proposée par Thomas (cf. [1] et ses références) où l'espace pour la solution est différent de l'espace des fonctions tests.

### 2.1.1 Formulation mixte primale

Nous considérons la formulation variationnelle du problème (2.0.1) dite formulation mixte primale (voir [1, 8]) :

Etant donné  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$ , on cherche  $(\mathbf{v}, p) \in L^2(\Omega)^2 \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$  tel que :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \tilde{b}(\mathbf{w}, p) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in L^2(\Omega)^2, \quad (2.1.1)$$

$$\tilde{b}(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega). \quad (2.1.2)$$

Cette formulation s'interprète au sens des distributions sous la forme du problème (2.0.1). Nous pouvons donner un résultat d'existence et d'unicité démontré dans [1].

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$ . Le problème (2.1.1)-(2.1.2) admet une solution unique  $(\mathbf{v}, p)$  dans  $L^2(\Omega)^2 \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ . De plus, cette solution satisfait l'estimation suivante*

$$\|\mathbf{v}\|_0 + \|p\|_1 \leq C \|\mathbf{u}\|_0, \quad (2.1.3)$$

pour une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ .

### 2.1.2 Formulation mixte duale

Nous introduisons une autre formulation mixte du problème (2.0.1). Cette formulation est dite duale et s'écrit :

Trouver  $(\mathbf{v}, p) \in H_0(\operatorname{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  tel que :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in H_0(\operatorname{div}; \Omega), \quad (2.1.4)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (2.1.5)$$

**Proposition 2.1.1.** *Le problème (2.1.4)-(2.1.5) admet une solution unique.*

*Démonstration.* Nous savons d'après [5] que d'une part, la forme bilinéaire  $a(., .)$  est continue sur  $H(\operatorname{div}; \Omega) \times H(\operatorname{div}; \Omega)$  et coercive sur  $H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$ . D'autre part, que la forme bilinéaire  $b(., .)$  est continue sur  $H(\operatorname{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  et vérifie la condition inf-sup. Alors, par le théorème 1.1.1, on déduit que le problème (2.1.4)-(2.1.5) admet une solution unique.  $\square$

## 2.2 Discrétisation par l'élément fini $\mathbb{P}_0^2/\mathbb{P}_1$ non conforme

Nous rappelons que les espaces  $Q_h^k$  et  $Q_h^{1,nc}$  sont définis respectivement par

$$Q_h^k = \{q \in L^2(\Omega); q|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

et

$$Q_h^{1,nc} = \{q \in Q_h^1, q \text{ est continu au point } b_{i,T}, 1 \leq i \leq 3, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Soit  $V_h^{0,p} := Q_h^0 \times Q_h^0$ . Nous considérons l'approximation par éléments finis mixtes du problème (2.1.1)-(2.1.2) donnée dans [1, 8] :

Trouver  $(\mathbf{v}_h, p_h) \in V_h^{0,p} \times Q_h^{1,nc}$  tel que :

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + \tilde{b}_h(\mathbf{w}_h, p_h) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h^{0,p}, \quad (2.2.1)$$

$$\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h^{1,nc}, \quad (2.2.2)$$

et nous définissons l'espace suivant

$$V_{0,h}^{0,p} = \{\mathbf{w}_h \in V_h^{0,p}; \tilde{b}_h(\mathbf{w}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h^{1,nc}\}. \quad (2.2.3)$$

Considérons le lemme suivant établi dans [1].

**Lemme 2.2.1.** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|q\|_{1,h} \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |q|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall q \in \tilde{M}(\mathcal{T}_h), \quad (2.2.4)$$

où l'espace  $\tilde{M}(\mathcal{T}_h)$  est défini par

$$\tilde{M}(\mathcal{T}_h) = \{q \in L_0^2(\Omega); q|_K \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \int_e [q]_e ds = 0 \quad \forall e \in \mathcal{E}_h\}.$$

**Proposition 2.2.1.** *Le problème (2.2.1)-(2.2.2) admet une solution unique.*



*Démonstration.* La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , par conséquent, elle est également continue sur  $V_{0,h}^{0,p} \times V_{0,h}^{0,p}$ . De plus, elle est elliptique sur  $V_{0,h}^{0,p}$  car  $V_{0,h}^{0,p} \subset H_0(\text{div}^0; \Omega)$ .

Par ailleurs, lorsqu'on munit l'espace  $Q_h^{1,nc}$  de la norme  $\|\cdot\|_{1,h}$ , alors la forme bilinéaire  $\tilde{b}_h$  est continue sur  $V_h^{0,p} \times Q_h^{1,nc}$ , bornée indépendamment de  $h$ . De plus, puisque  $\nabla Q_h^{1,nc} \subset V_h^{0,p}$ , alors la condition inf-sup est obtenue en prenant  $\mathbf{w}_h$  égal à  $\nabla q_h$  :

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in V_h^{0,p}} \frac{\tilde{b}_h(\mathbf{w}_h, q_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_0} \geq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |q_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \quad \forall q_h \in Q_h^{1,nc}, \quad (2.2.5)$$

et en appliquant le lemme 2.2.1.  $\square$

**Remarque 2.2.1.** *Du problème (2.2.1)-(2.2.2) et de la définition de l'espace  $V_h^{0,p}$  nous déduisons que la vitesse  $\mathbf{v}_h$  est à divergence nulle. De plus, comme  $V_{0,h}^{0,p} \subset H_0(\text{div}^0; \Omega)$ , nous observons en définitive que les équations (2.0.1)-2 et (2.0.1)-3 sont satisfaites par la solution approchée  $\mathbf{v}_h$ .*

L'estimation d'erreur est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 2.2.1.** ([1])

*Soit  $(\mathbf{v}_h, p_h)$  la solution du problème (2.2.1)-(2.2.2) et  $(\mathbf{v}, p)$  celle du problème (2.1.1)-(2.1.2). Si  $(\mathbf{v}, p) \in H^s(\Omega)^2 \times H^{s+1}(\Omega)$ ,  $0 < s \leq 1$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_0 + \|p - p_h\|_1 \leq Ch^s (\|\mathbf{v}\|_s + \|p\|_{s+1}).$$

## 2.3 Discrétisation par l'élément fini $RT_k/\mathbb{P}_k$

Nous considérons cette fois-ci une approximation par éléments finis mixtes de l'équation de Darcy à partir de la formulation duale (2.1.4)-(2.1.5). Le couple élément fini choisi est l'espace  $RT_k/\mathbb{P}_k$ ,  $k = 0$  ou  $1$ . Signalons que cette discrétisation des équations de Darcy a déjà été considérée par exemple dans [8]. Mais, ici nous utilisons une technique introduite dans [2] pour simplifier l'implémentation du problème mixte. Par soucis de clarté, nous faisons une différence de traitement entre les cas  $k = 0$  et  $k = 1$ . Nous rappelons que les espaces  $\mathbb{V}_h^k$ ,  $V_h^k$  et  $Q_h^k$  sont définis par

$$\mathbb{V}_h^k := \{\mathbf{w} \in H(\text{div}; \Omega); \mathbf{w}|_T \in RT_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_h^k := \{\mathbf{w} \in L_0^2(\Omega)^2; \mathbf{w}|_T \in RT_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

et

$$Q_h^k = \{q \in L^2(\Omega); q|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

### 2.3.1 Éléments finis mixtes

Le problème mixte approché s'écrit :

$$\text{Trouver } (\mathbf{v}_h, p_h) \in \mathbb{V}_h^k \times Q_h^k \text{ tel que :}$$

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p_h) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{V}_h^k, \quad (2.3.1)$$

$$b(\mathbf{v}_h, q) = 0 \quad \forall q \in Q_h^k. \quad (2.3.2)$$

On pose

$$\mathbb{V}_{0,h}^k = \{\mathbf{w} \in \mathbb{V}_h^k; \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

**Proposition 2.3.1.** *Le problème (2.3.1)-(2.3.2) admet une solution unique.*

*Démonstration.* L'approximation (2.3.1)-(2.3.2) est conforme, c'est-à-dire  $\mathbb{V}_{0,h}^k \subset H_0(\operatorname{div}; \Omega)$  et  $Q_h^k \subset L^2(\Omega)$ . Par ailleurs,  $\mathbb{V}_{0,h}^k \subset H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$ , donc d'après le théorème 1.1.1 rappelé dans le chapitre 1, l'existence d'une solution unique au problème (2.3.1)-(2.3.2) revient à satisfaire la condition inf-sup pour la forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  sur  $\mathbb{V}_h^k \times Q_h^k$ . Ceci est donné dans [5].  $\square$

L'estimation d'erreur est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $(\mathbf{v}_h, p_h)$  la solution du problème (2.3.1)-(2.3.2) et  $(\mathbf{v}, p)$  celle du problème (2.1.4)-(2.1.5). Si  $(\mathbf{v}, p) \in H^{k+1}(\Omega)^2 \times H^k(\Omega)$ , alors il existe  $C > 0$  tel que*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{\operatorname{div}} + \|p - p_h\|_0 \leq Ch^{k+1} \|\mathbf{v}\|_{k+1}.$$

*Démonstration.* Le problème (2.3.1)-(2.3.2) est un problème du même type que le problème (1.1.9). Les estimations d'erreur sur la vitesse et la pression ne sont qu'une simple conséquence des propriétés d'approximation des espaces  $\mathbb{V}_h^k$  et  $Q_h^k$ .  $\square$

### 2.3.2 Éléments finis mixtes hybrides

Nous modifions l'espace d'approximation  $\mathbb{V}_h^k$  en relaxant la contrainte de continuité sur les flux. Celle-ci est prise en compte directement dans les équations à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Cela nous conduit à la formulation mixte

hybride suivante (cf. [5, 2]) :

Trouver  $(\mathbf{v}_h, p_h, \lambda_h) \in V_h^k \times Q_h^k \times M_h^k$  tel que :

$$\int_T \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \int_T p_h \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \lambda_h \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in RT_k(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (2.3.3)$$

$$\int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_h q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_k(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (2.3.4)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \mu \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \forall \mu \in M_h^k. \quad (2.3.5)$$

Nous introduisons la forme bilinéaire

$$c(\mathbf{w}, \mu) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (2.3.6)$$

l'opérateur linéaire  $C : V \rightarrow Q'$  et son adjoint  $C^* : Q \rightarrow V'$  par

$$\langle C\mathbf{w}, \mu \rangle_{Q' \times Q} = \langle C^*\mu, \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} = c(\mathbf{w}, \mu),$$

avec  $V = H(\operatorname{div}; \Omega)$  et  $Q = \prod_{e \in \mathcal{E}_h} L^2(e)$ .

Dans ce qui suit, nous rappelons la démarche suivie dans [5] pour montrer l'existence et l'unicité du problème (2.3.3)-(2.3.5) dans la cas  $k = 0$  (pour le cas  $k = 1$  on peut consulter [10]). Pour cela, nous donnons un lemme (voir [5]) qui est une conséquence directe de la définition de l'espace  $\mathbb{V}_h^0$ .

**Lemme 2.3.1.** *Supposons que  $\mathbf{w} \in V_h^0$ . Alors*

$$c(\mathbf{w}, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in M_h^0 \iff \mathbf{w} \in \mathbb{V}_h^0. \quad (2.3.7)$$

Ceci revient à dire que  $\operatorname{Ker} C = \mathbb{V}_h^0$ .

Soit maintenant  $(\mathbf{v}_h, p_h)$  la solution du problème (2.3.1)-(2.3.2). Montrons qu'on peut lui associer un élément unique  $\lambda_h$  de  $M_h^0$  de sorte que  $(\mathbf{v}_h, p_h, \lambda_h)$  soit la solution du problème (2.3.3)-(2.3.5). Pour cela, considérons l'application linéaire

$$\Phi : \mathbf{w} \in \mathbb{V}_h^0 \longmapsto (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}) - (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \in \mathbb{R}. \quad (2.3.8)$$

Il est clair que  $\Phi(\mathbf{w}) = 0$  pour  $\mathbf{w} \in \mathbb{V}_h^0$ . Donc  $\text{Ker } \Phi = \mathbb{V}_h^0 = \text{Ker } C = \text{Im } C^*$ . Ce qui implique l'existence de  $\lambda_h \in M_h^0$  tel que

$$\Phi(\mathbf{w}) = c(\mathbf{w}, \lambda_h) \quad \forall \mathbf{w} \in V_h^0. \quad (2.3.9)$$

Montrons qu'un tel  $\lambda_h$  est unique. Cela sera une conséquence immédiate du lemme suivant.

**Lemme 2.3.2.** *Si  $\mu \in M_h^0$  et*

$$c(\mathbf{w}, \mu) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V_h^0, \quad (2.3.10)$$

*alors  $\mu = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $e^* \in \mathcal{E}_h$  et  $K^*$  un triangle contenant l'arête  $e^*$ . Soit  $\mathbf{w}^* \in V_h^0$  tel que

$$\mathbf{w}^*|_K = 0 \quad \forall K \neq K^*, \quad (2.3.11)$$

et défini sur  $K^*$  par

$$\begin{cases} \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{n}|_e = 0, & \forall e \neq e^*, \\ \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{n}|_{e^*} = 1. \end{cases} \quad (2.3.12)$$

Alors  $c(\mathbf{w}^*, \mu) = \int_{e^*} \mu ds$  et l'hypothèse (2.3.10) implique que  $\mu = 0$  sur  $e^*$ . Puisque  $e^*$  est une arête quelconque de  $\mathcal{E}_h$  cela termine la preuve.  $\square$

D'après les lemmes 2.3.1 et 2.3.2, il existe donc un unique  $\lambda_h \in M_h^0$  tel que

$$(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}) - (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{w} dx = c(\mathbf{w}, \lambda_h) \quad \forall \mathbf{w} \in V_h^0. \quad (2.3.13)$$

Nous pouvons maintenant résumer les résultats obtenus dans le théorème suivant.

**Théorème 2.3.1.** *([5, 10]) Soit  $(\mathbf{v}_h, p_h)$  la solution du problème (2.3.1)-(2.3.2) et soit  $\lambda_h$  défini par (2.3.9). Alors  $(\mathbf{v}_h, p_h, \lambda_h)$  est l'unique solution du problème (2.3.3)-(2.3.5).*

### 2.3.3 Étude de l'élément $RT_0/\mathbb{P}_0$

Dans cette section, nous étudions l'approximation de l'équation de Darcy par la méthode des éléments finis mixtes hybrides avec l'espace de Raviart-Thomas du plus bas degré. Nous utilisons une nouvelle décomposition de l'espace  $RT_0$  pour simplifier l'implémentation du problème (2.3.3)-(2.3.5). Le schéma obtenu est alors équivalent à un schéma volume fini ou à l'approximation par éléments finis mixtes (2.2.1)-(2.2.2) (cf. [1]).

### 2.3.3.1 Implémentation

La technique d'implémentation que nous exposons ici a pour but d'éliminer les variables  $p_h$  et  $\mathbf{v}_h$  du problème (2.3.3)-(2.3.5). Nous éliminons la variable  $p_h$  en utilisant une nouvelle décomposition de l'espace  $RT_0(T)$ . En effet, d'après [2]

$$RT_0(T) = (\mathbb{P}_0(T))^2 \oplus \mathbf{x}\mathbb{P}_0(T).$$

Donc la restriction de  $\mathbf{v}_h$  au triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  s'écrit

$$\mathbf{v}_{h|T} = \mathbf{v}_T^0 + \alpha_T \mathbf{x} \text{ avec } \alpha_T \in \mathbb{R}.$$

Comme  $\operatorname{div} \mathbf{v}_{h|T} = \operatorname{div}(\alpha_T \mathbf{x}) = 2\alpha_T$  et que par l'équation (2.3.4) nous avons

$$\int_T \operatorname{div}(\alpha_T \mathbf{x}) \operatorname{div}(\alpha_T \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

nous en déduisons que  $2\alpha_T = \operatorname{div}(\alpha_T \mathbf{x}) = 0$  et par conséquent  $\mathbf{v}_{h|T} \in (\mathbb{P}_0(T))^2$ . Le problème (2.3.3)-(2.3.5) revient alors à chercher  $(\mathbf{v}_T^0, \lambda_h) \in \mathbb{P}_0^2 \times M_h^0$  tels que :

$$|T| \mathbf{v}_T^0 + \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \lambda_h \mathbf{n} \, ds = \int_T \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (2.3.14)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \mu \mathbf{v}_T^0 \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.3.15)$$

L'élimination de la variable  $\mathbf{v}_T^0$  se fait en effectuant le produit scalaire de l'équation (2.3.14) par  $\mathbf{n}$ , puis en sommant sur tous les éléments de  $\mathcal{T}_h$ .  $\lambda_h$  puis  $\mathbf{v}_T^0$  sont finalement solutions du problème :

Trouver  $(\mathbf{v}_T^0, \lambda_h) \in \mathbb{P}_0^2 \times M_h^0$  tel que

$$\sum_{T \in \mathcal{P}_e} \frac{1}{|T|} \sum_{f \in \mathcal{E}_T} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \boldsymbol{\nu}_{Tf} \lambda_f = \sum_{T \in \mathcal{P}_e} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \mathbf{u}_T \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \quad (2.3.16)$$

$$\mathbf{v}_T^0 = \mathbf{u}_T - \frac{1}{|T|} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \boldsymbol{\nu}_{Te} \lambda_e \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (2.3.17)$$

avec

$$\mathbf{u}_T = \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \text{ pour } T \in \mathcal{T}_h,$$

et

$$\boldsymbol{\nu}_{Te} = \int_e \mathbf{n} \, ds \text{ pour } e \in \mathcal{E}_T.$$

### 2.3.3.2 Analyse de l'erreur

On rappelle que  $R_1(\partial T) = \{\phi \in L^2(\partial T), \phi|_e \in \mathbb{P}_0(e), \forall e \in \mathcal{E}_T\}$ . Alors d'après [5] une autre caractérisation de l'espace de Crouzeix-Raviart est donnée par

$$Q_h^{1,nc} = \{q \in L^2(\Omega); q|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \sum_T \int_{\partial T} q \phi ds = 0, \quad \forall \phi \in R_1(\partial T)\}.$$

Les degrés de liberté de l'espace  $Q_h^{1,nc}$  peuvent être choisis sur les arêtes de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  de telle sorte que la fonction de forme locale  $\varphi_e$  associée à chaque arête  $e \in \mathcal{E}_T$  satisfait la relation

$$\int_{e'} \varphi_e ds = \delta_{ee'}.$$

Soit  $(\mathbf{v}_h, p_h, \lambda_h)$  la solution du problème (2.3.3)-(2.3.5) et soit  $\tilde{\lambda}_h = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \lambda_e \varphi_e$ .

Dans ce qui suit, nous donnons deux techniques pour estimer l'erreur entre le couple  $(\mathbf{v}_h, \tilde{\lambda}_h)$  et la solution  $(\mathbf{v}, p)$ .

#### Première technique

Cette approche est basée sur les deux propositions suivantes établies dans [1].

**Proposition 2.3.3.** *Les familles  $(\mathbf{v}_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$  et  $(\lambda_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$  constituent une solution du problème (2.3.3)-(2.3.4) si et seulement si le couple  $(\mathbf{v}_h, \tilde{\lambda}_h)$  défini par*

$$\mathbf{v}_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{v}_T \chi_T \tag{2.3.18}$$

et

$$\tilde{\lambda}_h = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \lambda_e \varphi_e, \tag{2.3.19}$$

est, à une constante près, solution du problème non conforme (2.2.1)-(2.2.2).

**Proposition 2.3.4.** *On suppose que la solution  $(\mathbf{v}, p)$  du problème (2.3.3)-(2.3.4) appartient à  $H^s(\Omega)^2 \times H^{s+1}(\Omega)$ ,  $0 < s \leq 1$ , alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  tel que*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^2} + \|p - \tilde{\lambda}_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^s \left( \|\mathbf{v}\|_{H^s(\Omega)^2} + \|p\|_{H^{s+1}(\Omega)} \right).$$

## Deuxième technique

Appliquons formellement l'opérateur  $\text{div}$  au problème de Darcy (2.0.1). Nous obtenons le problème de Poisson suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ -\Delta p = -\text{div } \mathbf{u} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.3.20)$$

Ensuite, considérons l'approximation par éléments finis  $\mathbb{P}_1$  non conforme du problème (2.3.20) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_h \in Q_h^{1,nc} \text{ tel que :} \\ a'_h(p_h, q_h) = -(\text{div } \mathbf{u}, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h^{1,nc}. \end{cases} \quad (2.3.21)$$

où

$$a'_h(p, q) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla p \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} \quad \forall p, q \in (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \cup Q_h^{1,nc}.$$

Nous avons la proposition suivante.

**Proposition 2.3.5.** *La famille  $(\lambda_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$  est solution du problème (2.3.3)-(2.3.4) si et seulement si la fonction  $\tilde{\lambda}_h$  définie par*

$$\tilde{\lambda}_h = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \lambda_e \varphi_e, \quad (2.3.22)$$

*est, à une constante près, solution du problème non conforme (2.3.21).*

*Démonstration.* Le gradient de  $\varphi_e$  est donnée par

$$\nabla \varphi_e|_T = \frac{1}{|T|} \int_{\partial T} \varphi_e \mathbf{n} \, ds.$$

D'où

$$\nabla \varphi_e|_T = \frac{1}{|T|} \int_e \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{|T|} \boldsymbol{\nu}_{Te},$$

puis

$$a'_h(\varphi_e, \varphi_{e'}) = \frac{1}{|T|^2} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \boldsymbol{\nu}_{Te'} \quad \forall e, e' \in \mathcal{E}_T.$$

Par ailleurs,

$$-\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \varphi_e \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_e \, d\mathbf{x} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_e \, d\mathbf{x} = \sum_{T \in \mathcal{P}_e} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \mathbf{u}_T.$$

□

Nous terminons en donnant la majoration d'erreur.

**Théorème 2.3.2.** *Soit  $(\mathbf{v}, p)$  la solution du problème (2.1.4)-(2.1.5) et  $(\mathbf{v}_h, \lambda_h)$  la solution du problème (2.3.14)-(2.3.15). Supposons que*

$$(\mathbf{v}, p) \in H^1(\Omega)^2 \times H^2(\Omega).$$

Alors il existe  $C > 0$  tel que

$$|p - \tilde{\lambda}_h|_{1,h} \leq Ch,$$

$$\|p - \tilde{\lambda}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2,$$

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch.$$

*Démonstration.* Dans toute la preuve,  $\|\cdot\|$  désigne la norme canonique de l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Les estimations d'erreur sur la pression sont données par le théorème 1.4.1 rappelé dans la chapitre 1. L'estimation d'erreur sur la vitesse est obtenue d'une part, en observant que

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \nabla p \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.3.23)$$

En effet, si on considère la projection  $\bar{\mathbf{v}}$  de la vitesse  $\mathbf{v}$  dans l'espace  $Q_h^0 \times Q_h^0$  définie par

$$\int_T \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = \int_T \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Alors d'après [17] par exemple, il existe  $C_1 > 0$  tel que

$$\|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C_1 h. \quad (2.3.24)$$

Puis, si on pose

$$\bar{\mathbf{v}}_T = \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}_T = \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{u} \, d\mathbf{x},$$

la formule (2.3.23) implique

$$\bar{\mathbf{v}}_T = \mathbf{u}_T - \frac{1}{|T|} \int_\Omega \nabla p \, d\mathbf{x}. \quad (2.3.25)$$

D'autre part, comme

$$\mathbf{v}_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{v}_T^0 \chi_T,$$

avec



$$\mathbf{v}_T^0 = \mathbf{u}_T - \frac{1}{|T|} \int_T \nabla \tilde{\lambda}_h \, d\mathbf{x}. \quad (2.3.26)$$

La différence des équations (2.3.25)-(2.3.26) nous donne

$$\bar{\mathbf{v}}_T - \mathbf{v}_T^0 = \frac{1}{|T|} \int_T \nabla(\tilde{\lambda}_h - p) \, d\mathbf{x},$$

ce qui implique

$$|T| \|\bar{\mathbf{v}}_T - \mathbf{v}_T^0\| = \left\| \int_T \nabla(\tilde{\lambda}_h - p) \, d\mathbf{x} \right\|,$$

ou encore

$$|T| \|\bar{\mathbf{v}}_T - \mathbf{v}_T^0\| \leq \int_T \|\nabla(\tilde{\lambda}_h - p)\| \, d\mathbf{x},$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|T| \|\bar{\mathbf{v}}_T - \mathbf{v}_T^0\| \leq |T|^{1/2} \left( \int_T \|\nabla(\tilde{\lambda}_h - p)\|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

On en déduit

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \|\bar{\mathbf{v}}_T - \mathbf{v}_T^0\|^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \|\nabla(\tilde{\lambda}_h - p)\|^2 \, d\mathbf{x},$$

c'est-à-dire

$$\|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \leq |\tilde{\lambda}_h - p|_{1,h}. \quad (2.3.27)$$

Finalement, l'inégalité triangulaire suivante

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega},$$

et les formules (2.3.24) et (2.3.27) nous donnent le résultat.  $\square$

### 2.3.4 Étude de l'élément $RT_1/\mathbb{P}_1$

Dans cette section, nous étudions l'approximation de l'équation de Darcy par la méthode des éléments finis mixtes hybrides avec l'espace  $RT_1/\mathbb{P}_1$ . Nous utilisons à la fois une nouvelle décomposition de l'espace  $RT_1$  et une nouvelle caractérisation des problèmes mixtes hybrides introduite dans [10] pour simplifier l'implémentation du problème (2.3.3)-(2.3.5).

### 2.3.4.1 Autre caractérisation

Nous rappelons que la formulation mixte hybride du problème de Darcy associée au couple éléments finis mixtes  $\mathbb{V}_h^1 \times Q_h^1$  consiste à chercher  $(\mathbf{v}_h, p_h, \lambda_h) \in V_h^1 \times Q_h^1 \times M_h^1$  tel que :

$$\int_T \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \int_T p_h \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \lambda_h \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in RT_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (2.3.28)$$

$$\int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_h q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (2.3.29)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \mu \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \forall \mu \in M_h^1. \quad (2.3.30)$$

Dans ce qui suit, nous rappelons la caractérisation du problème (2.3.28)-(2.3.30) introduite dans [10], pour cela considérons quelques notations.

Soit  $m \in L^2(\Theta_h)$ , on note par  $(\mathbf{v}_h, p_h)_m = (\mathbf{v}_{h,m}, p_{h,m}) \in V_h^1 \times Q_h^1$  le couple vérifiant

$$\int_T \mathbf{v}_{h,m} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \int_T p_{h,m} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = - \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e m \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad \forall \mathbf{w} \in RT_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

$$\int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_{h,m} q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

De même pour  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$ , on note par  $(\mathbf{v}_h, p_h)_u = (\mathbf{v}_{h,u}, p_{h,u}) \in V_h^1 \times Q_h^1$  le couple vérifiant

$$\int_T \mathbf{v}_{h,u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \int_T p_{h,u} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = \int_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in RT_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

$$\int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_{h,u} q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

soit  $\mu \in M_h^1$ . Nous définissons la forme bilinéaire  $d_h$  et la forme linéaire  $l_h$  sur  $M_h^1$  par

$$d_h(\lambda_h, \mu) = \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\lambda_h} \cdot \mathbf{v}_{h,\mu} \, d\mathbf{x},$$

$$l_h(\lambda_h, \mu) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{h,\mu} \, d\mathbf{x}.$$

**Théorème 2.3.3.** ([10]) Soit  $(\mathbf{v}_h, p_h, \lambda_h)$  la solution de (2.3.28)-(2.3.30) alors

$$(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{v}_h, p_h)_m + (\mathbf{v}_h, p_h)_u.$$

De plus,  $\lambda_h$  est l'unique solution du problème

$$d_h(\lambda_h, \mu) = l_h(\mu) \quad \forall \mu \in M_h. \quad (2.3.31)$$

L'estimation d'erreur se fera entre la solution  $\lambda_h$  du problème (2.3.31) et la pression  $p$ . Pour cela, considérons la projection  $\bar{p}$  de  $p$  dans l'espace  $M_h^1$  définie par

$$\int_e \bar{p} \mu ds = \int_e p \mu ds \quad \forall \mu \in \mathbb{P}_1(e), \forall e \in \mathcal{E}_h. \quad (2.3.32)$$

De plus, supposons que le maillage  $\mathcal{T}_h$  est quasi-uniforme. Alors nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.3.4.** ([5, 11]) Soit  $(\mathbf{v}, p)$  la solution du problème (2.1.4)-(2.1.5) et  $\lambda_h$  la solution du problème (2.3.31). Supposons que

$$p \in H^3(\Omega).$$

Alors il existe  $C > 0$  tel que

$$\|\lambda_h - \bar{p}\|_{1/2,h} \leq Ch^3.$$

### 2.3.4.2 Implémentation

Nous décrivons maintenant l'implémentation du problème (2.3.31). Pour ce faire, considérons  $(\psi_i)_i$  et  $(\mathbf{w}_i)_i$  les bases respectives des espaces  $M_h^1$  et  $\mathbb{V}_h^1$  et notons par  $(\mathbf{v}_h, p_h)_{\psi_i} = (\mathbf{v}_{h,\psi_i}, p_{h,\psi_i}) \in V_h^1 \times Q_h^1$  le couple vérifiant

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{v}_{h,\psi_i} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} - \int_T p_{h,\psi_i} \operatorname{div} \mathbf{w} d\mathbf{x} &= - \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \psi_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} ds \quad \forall \mathbf{w} \in RT_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ \int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_{h,\psi_i} q d\mathbf{x} &= 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$

De même, notons par  $(\mathbf{v}_h, p_h)_{\mathbf{w}_i} = (\mathbf{v}_{h,\mathbf{w}_i}, p_{h,\mathbf{w}_i}) \in V_h^1 \times Q_h^1$  le couple vérifiant

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{v}_{h,\mathbf{w}_i} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} - \int_T p_{h,\mathbf{w}_i} \operatorname{div} \mathbf{w} d\mathbf{x} &= \int_T \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in RT_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ \int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_{h,\mathbf{w}_i} q d\mathbf{x} &= 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$

Ensuite, définissons la matrice  $D = (d_{ij})_{ij}$  par

$$d_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\psi_i} \cdot \mathbf{v}_{h,\psi_j} d\mathbf{x},$$

et le vecteur  $l$  par

$$l_i = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{h,\psi_i} d\mathbf{x}.$$

Enfin, notons par  $\hat{\lambda}$  le vecteur colonne des valeurs de  $\lambda \in M_h^1$  dans la base  $(\phi_i)_i$ . Alors d'après le théorème 2.3.3, nous avons

$$D\hat{\lambda} = l. \quad (2.3.33)$$

Dans ce qui suit, nous allons simplifier la construction du système (2.3.33), en utilisant le fait que (cf. [2])

$$RT_1(T) := \mathbb{D}_1^0(T) \oplus \mathbf{xP}_1(T).$$

Ainsi, le problème (2.3.28)-(2.3.30) revient à chercher  $(\mathbf{v}_h, \lambda_h) \in \mathbb{D}_1^0 \times M_h^1$  tel que  $\forall T \in \mathcal{T}_h$  :

$$\int_T \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} + \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \lambda_h \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} ds = \int_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{D}_1^0(T), \quad (2.3.34)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \mu \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad \forall \mu \in M_h^1. \quad (2.3.35)$$

Par ailleurs, la fonction  $(\mathbf{v}_h)_{\psi_i} = \mathbf{v}_{h,\psi_i} \in V_h^1$  est solution de

$$\int_T \mathbf{v}_{h,\psi_i} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = - \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \psi_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} ds \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{D}_1^0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (2.3.36)$$

avec  $\mathbf{v}_{h,\psi_i}|_T \in \mathbb{D}_1^0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$ .

De même  $(\mathbf{v}_h)_{\mathbf{w}_i} = \mathbf{v}_{h,\mathbf{w}_i} \in V_h^1$  est solution de

$$\int_T \mathbf{v}_{h,\mathbf{w}_i} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_T \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{D}_1^0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (2.3.37)$$

avec  $\mathbf{v}_{h,\mathbf{w}_i}|_T \in \mathbb{D}_1^0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$ .

Choisissons de manière précise la base  $(\mathbf{w}_i)_i$  en considérant les deux remarques suivantes sur l'espace  $\mathbb{D}_1^0(T)$ .

**Remarque 2.3.1.** ([5, 33]) Soit  $T \in \mathcal{T}_h$ , pour  $d = 2$ ,  $\dim \mathbb{D}_1^0(T) = 5$  et si on note par  $(\mathbf{w}_i)_{i=1,\dots,5}$  une base de l'espace  $\mathbb{D}_1^0(T)$ , les degrés de liberté d'une fonction  $\mathbf{v} \in \mathbb{D}_1^0(T)$  sont les quantités  $\int_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i d\mathbf{x}$ ,  $T \in \mathcal{T}_h$  et  $i = 1, \dots, 5$ .

Le choix d'une base pour l'espace  $\mathbb{D}_1^0(T)$  est donnée par la remarque suivante.

**Remarque 2.3.2.** ([5]) Sachant que toute fonction de  $\mathbb{D}_1^0(T)$  peut être représentée par  $\mathbf{rot} \varphi$  avec  $\varphi \in \mathbb{P}_2(T)$  ([5]), on construit une base de l'espace  $\mathbb{D}_1^0(T)$  à l'aide des fonctions  $(\mathbf{rot} \varphi_i)_{i=1,\dots,5}$ , où  $\varphi_i$  est une fonction de forme des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_2(T)$ .

Par ailleurs, comme fonctions de forme de l'espace  $\mathbb{P}_1(e)$ ,  $e \in \mathcal{E}_T$ , nous choisissons les polynômes de Gauss-Legendre. Nous notons par  $(\psi_i)_{i=1,\dots,6}$  la base correspondante de l'espace  $\prod_{e \in \mathcal{E}_T} \mathbb{P}_1(e)$ . Considérons la fonction  $\mathbf{v}_{h,\psi_i} \in V_h^1$  solution du problème (2.3.36) et notons par  $\hat{\mathbf{v}}_{T,\psi_i}$  le vecteur colonne de ses composantes dans la base  $(\mathbf{rot} \varphi_i)_{i=1,\dots,5}$ . De la même manière  $\hat{\lambda}_T$  est le vecteur colonne des valeurs de  $\lambda \in M_h^1$  dans la base  $(\psi_i)_{i=1,\dots,6}$  de  $\prod_{e \in \mathcal{E}_T} \mathbb{P}_1(e)$ . Ensuite, introduisons la matrice carrée  $A_T$  de taille 5. Cette matrice est définie par

$$(A_T)_{ij} = \int_T \mathbf{rot} \varphi_i \cdot \mathbf{rot} \varphi_j \, d\mathbf{x} = \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} \quad (2.3.38)$$

Elle est inversible car elle est symétrique et définie positive. Notons par  $b_T$  le vecteur de taille 5 définie par

$$(b_T)_k = - \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \psi_i \mathbf{rot} \varphi_k \cdot \mathbf{n} \, ds$$

alors

$$A_T \hat{\mathbf{v}}_{T,\psi_i} = b_T. \quad (2.3.39)$$

Le système (2.3.39) permet donc de calculer de manière très simple la fonction  $\mathbf{v}_{h,\psi_i}$  au niveau de chaque élément, ce qui facilite la construction du système (2.3.33).

## 2.4 Résultats numériques

Nous présentons deux tests numériques pour l'étude de la convergence du schéma approchant l'équation de Darcy par éléments finis mixtes hybrides dans le cas  $k = 0$  (schéma (2.3.16)-(2.3.17)). Le domaine considéré est  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ , nous utiliserons ici des maillages structurés constitués de  $N \times N$  carrés coupés en deux triangles dont le diamètre sera égal à  $h$ .

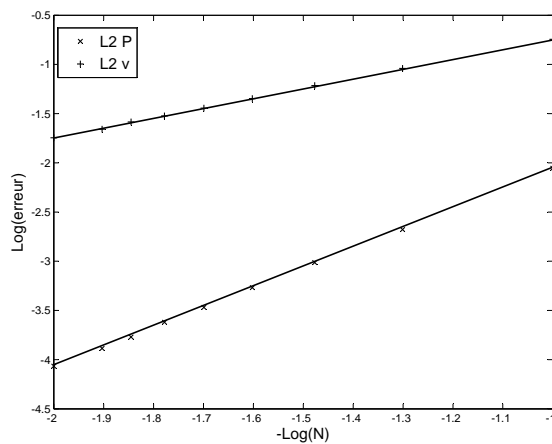


FIGURE 2.1 – *Taux de convergence*

N	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$
10	$5.5 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-2}$
20	$1.3 \times 10^{-4}$	$6.3 \times 10^{-3}$
30	$6.0 \times 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
40	$3.3 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-3}$
50	$2.1 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-3}$
60	$1.4 \times 10^{-5}$	$2.1 \times 10^{-3}$
70	$1.0 \times 10^{-5}$	$1.8 \times 10^{-3}$
80	$8.3 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-3}$
90	$6.5 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-3}$
100	$5.3 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-3}$

TABLE 2.1 – *Erreurs en fonction de N*

### 2.4.1 tests

Pour commencer, on se donne  $\mathbf{u}(x, y) = ((1 - 2y)x(1 - x), (2x - 1)y(1 - y))$ . Notons que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ . Ceci implique  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ ,  $p = 0$ .

Le tableau 2.1 et le graphique 2.1 illustrent l'ordre de convergence dans la norme  $L^2$  pour la vitesse et la pression.

Dans le deuxième test, on prend  $\mathbf{u}(x, y) = (0, -2\pi \sin(\pi y) \cos(\pi x))$ . Alors  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$  et le problème (2.0.1) a pour solution

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= (\pi \sin(\pi x) \cos(\pi y), -\pi \sin(\pi y) \cos(\pi x)), \\ p(x, y) &= \cos(\pi x) \cos(\pi y). \end{aligned}$$

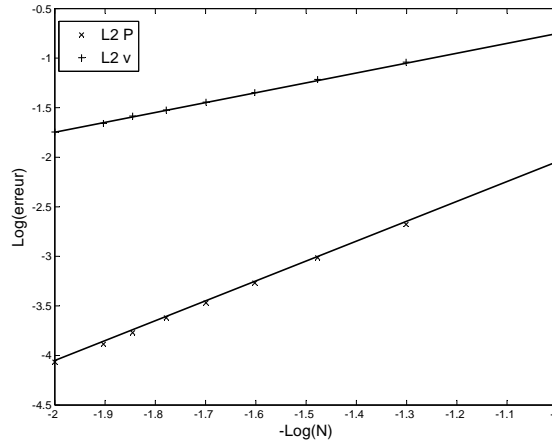


FIGURE 2.2 – Taux de convergence

N	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$
10	$8.8 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-1}$
20	$2.1 \times 10^{-3}$	$9.1 \times 10^{-2}$
30	$9.7 \times 10^{-4}$	$6.1 \times 10^{-2}$
40	$5.4 \times 10^{-4}$	$4.5 \times 10^{-2}$
50	$3.4 \times 10^{-4}$	$3.6 \times 10^{-2}$
60	$2.4 \times 10^{-4}$	$3.0 \times 10^{-2}$
70	$1.7 \times 10^{-4}$	$2.6 \times 10^{-2}$
80	$1.3 \times 10^{-4}$	$2.2 \times 10^{-2}$
90	$1.0 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-2}$
100	$8.6 \times 10^{-5}$	$1.8 \times 10^{-2}$

TABLE 2.2 – Erreurs en fonction de N

Dans les deux tests, nous observons un ordre de convergence égal à 1 pour la vitesse et égal à 2 pour la pression. La convergence de la vitesse est d'un ordre moins élevé, ce qui est consistant avec les prédictions théoriques.

## 2.5 Conclusions

Nous avons présenté deux méthodes éléments finis mixtes hybrides pour les équations de Darcy. Ces deux méthodes permettent de découpler les variables de vitesse et de pression. Ceci conduit à la résolution d'un problème dont l'inconnue est la pression. Nous avons estimé l'erreur pour l'élément mixte  $RT_0/\mathbb{P}_0$  et rappelé les estimations pour l'élément mixte  $RT_1/\mathbb{P}_1$ . Pour l'élément  $RT_0/\mathbb{P}_0$  et le schéma qui en découle, nous avons également rappelé son équivalence avec un schéma volumes finis, ce qui garantit la propriété de conservativité pour le schéma proposé. Enfin, nous avons testé le schéma mixte hybride associé à l'élément  $RT_0/\mathbb{P}_0$ . Les résultats numériques obtenus confirment les prédictions théoriques.





# Chapitre 3

## Méthodes mixtes hybrides pour les équations de Stokes

Nous présentons dans ce chapitre une nouvelle méthode de discrétisation des équations de Stokes pour les fluides incompressibles. En effet, l'approximation de ces équations reste un enjeu considérable dans le domaine de l'analyse numérique et du calcul scientifique.

### 3.1 Position du problème

Les équations de Stokes [15, 9] modélisent l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible très visqueux ou encore l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible à basse vitesse. Pour connaître l'écoulement d'un tel fluide, il nous faut donc trouver un champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et un champ de pression  $p$  solutions des équations suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.2)$$

où  $\Omega$  est un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une densité de force volumique et  $\nu$  est la viscosité cinématique.

Soit  $T > 0$ , si on associe la condition initiale  $\mathbf{u}_0 : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  et une condition aux limites de type Dirichlet homogène aux équations (3.1.1)-(3.1.2), on obtient le problème de Stokes qui s'écrit :

trouver  $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $p : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.1.6)$$

En désignant par  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{H}$  la fermeture de  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$  respectivement dans  $H^1(\Omega)^2$  et  $L^2(\Omega)^2$ , nous rappelons [32, 23] le résultat suivant.

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,*

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^2),$$

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbb{H}.$$

*Alors  $\mathbf{u}$  et  $p$  sont solutions uniques du problème (3.1.3)-(3.1.6). De plus,*

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbb{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbb{H}) \cap C(0, T; \mathbb{H}),$$

$$p \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2_{loc}(\Omega)), \quad \nabla p \in W^{-1, \infty}(0, T; (H^{-1}(\Omega))^2).$$

## 3.2 Approximation du problème de Stokes

Pour commencer, nous utiliserons le schéma de projection en temps introduit par Chorin [17] puis Temam [32] pour découpler les difficultés rencontrées dans l'approximation des équations de Navier-Stokes ; difficultés principalement dues à la condition d'incompressibilité. Puis nous effectuons une discrétisation en espace par la méthode des éléments finis.

### 3.2.1 Discrétisation en temps par la méthode de projection

Soient  $\delta t > 0$  un réel et  $N = [T/\delta t]$  la partie entière de  $T/\delta t$ . On considère une subdivision  $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^N = T$  de l'intervalle  $[0, T]$  où  $t^n = n\delta t$ . Pour  $0 \leq n \leq N$ ,  $\mathbf{u}^n$  et  $p^n$  sont les approximations respectives de la vitesse  $\mathbf{u}$  et de la pression  $p$  à l'instant  $t^n$ , donnés. On pose  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$  et on suppose que  $p \in C^0(0, T; L^2_0(\Omega))$ . Alors les approximations respectives de la vitesse  $\mathbf{u}$  et de la pression  $p$  à l'instant  $t^n + \delta t$  sont calculées de la manière suivante.

Dans un premier temps, nous calculons une approximation intermédiaire  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  de la vitesse  $\mathbf{u}$  comme solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \nabla p^n & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où  $\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}(t^{n+1})$ .

Puis nous définissons le couple  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  comme solution du problème

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

En résumé, le schéma d'approximation en temps que nous étudions s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \nabla p^n & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Soient  $Q = L_0^2(\Omega)$ ,  $V = H_0^1(\Omega)^2$  et  $W = H_0(\text{div}; \Omega)$  les espaces fonctionnels introduits dans le chapitre 1. La formulation variationnelle du schéma (3.2.3) est donnée par

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}) + (p^n, \text{div } \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V, \\ \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{w}) - (p^{n+1} - p^n, \text{div } \mathbf{w}) = 0 & \forall \mathbf{w} \in W, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, q) = 0 & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

**Proposition 3.2.1.** *Étant donnés  $p^n \in Q$ ,  $\mathbf{u}^n \in W$ , alors les fonctions  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in V$ ,  $p^{n+1} \in Q$ ,  $\mathbf{u}^{n+1} \in W$  sont définies de manière unique dans le problème (3.2.4).*

*Démonstration.* Soient  $p^n \in Q$ ,  $\mathbf{u}^n \in W$  alors le problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in V \text{ tel que :} \\ \frac{1}{\delta t}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}) + (p^n, \text{div } \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{array} \right.$$

admet une solution unique par le théorème de Lax-Milgram. Par conséquent, la fonction  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  est définie de manière unique.

Par ailleurs, d'après la proposition 2.1.1 du chapitre 2, le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in W \times Q \text{ tel que :} \\ \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{w}) - (p^{n+1} - p^n, \text{div } \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, q) = 0 \quad \forall q \in Q \end{array} \right.$$

admet une solution unique.  $\square$

## 3.2.2 Discrétisation en espace par la méthode des éléments finis

### 3.2.2.1 Éléments finis mixtes

Dans cette section, nous considérons la discrétisation par éléments finis mixtes du problème (3.2.4). Pour cela, nous introduisons les espaces éléments finis  $Q_h = Q_h^0$ ,  $V_h = Q_h^1 \times Q_h^1$  et  $W_h = \mathbb{V}_h^0$  où  $Q_h^0$ ,  $Q_h^1$  et  $\mathbb{V}_h^0$  sont les espaces définis dans le chapitre 1. L'approximation en espace pour le problème de Stokes (3.1.3)-(3.1.6) qui en découle est la suivante :

Étant donnés  $p_h^n \in Q_h$ ,  $\mathbf{u}_h^n \in W_h$ , nous calculons  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in V_h$ ,  $p_h^{n+1} \in Q_h$ ,  $\mathbf{u}_h^{n+1} \in W_h$  par :

$$\frac{1}{\delta t}(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) - (p_h^n, \text{div } \mathbf{v}) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_h, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{w}) - (p_h^{n+1} - p_h^n, \text{div } \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W_h, \quad (3.2.6)$$

$$(q, \text{div } \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0 \quad \forall q \in Q_h. \quad (3.2.7)$$

**Proposition 3.2.2.** *Étant donnés  $p_h^n \in Q_h$ ,  $\mathbf{u}_h^n \in W_h$ , alors les fonctions  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in V_h$ ,  $p_h^{n+1} \in Q_h$ ,  $\mathbf{u}_h^{n+1} \in W_h$  sont définies de manière unique par (3.2.5)-(3.2.7).*

*Démonstration.* Soient  $p_h^n \in Q_h$ ,  $\mathbf{u}_h^n \in W_h$  alors le problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in V_h \text{ tel que :} \\ \frac{1}{\delta t}(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}) + (p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_h \end{array} \right.$$

admet une solution unique par le théorème de Lax-Milgram. Par conséquent, la fonction  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}$  est définie de manière unique.

Par ailleurs, d'après la proposition 2.3.1 du chapitre 2, le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in W_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{w}) - (p_h^{n+1} - p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W_h, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}, q) = 0 \quad \forall q \in Q_h \end{array} \right.$$

admet une solution unique. □

### 3.2.2.2 Éléments finis mixtes hybrides

Nous avons vu dans le chapitre 1 que si on relaxe la contrainte de continuité de l'espace  $\mathbb{V}_h^0$  on obtient l'espace  $V_h^0$ . Ceci nous permet d'établir une formulation mixte hybride du problème (3.2.5)-(3.2.7) avec  $W_h = V_h^0$ . Pour cela, on se donne

$$p_h^n \in Q_h, \lambda_h^n \in M_h^0, \mathbf{u}_h^n \in W_h,$$

puis on calcule

$$p_h^{n+1} \in Q_h, \lambda_h^{n+1} \in M_h^0, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in V_h, \mathbf{u}_h^{n+1} \in W_h$$

par l'algorithme suivant :

$$\frac{1}{\delta t}(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) - (p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_h, \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \delta t \int_T (p_h^{n+1} - p_h^n) \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \\ \delta t \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e (\lambda_h^{n+1} - \lambda_h^n) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds = \\ \int_T \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in RT_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\int_T \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1} q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.2.10)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \mu \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \forall \mu \in M_h^0. \quad (3.2.11)$$

Dans ce qui suit, nous simplifierons le schéma (3.2.8)-(3.2.11) en appliquant les résultats obtenus lors de l'étude du problème de Darcy dans le chapitre 2.A cet effet, considérons le problème suivant :

trouver

$$p_h^{n+1} \in Q_h, \quad \lambda_h^{n+1} \in M_h^0, \quad \mathbf{u}_h^{n+1} \in W_h$$

tels que :

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \delta t \int_T (p_h^{n+1} - p_h^n) \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \\ \delta t \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e (\lambda_h^{n+1} - \lambda_h^n) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds = \\ \int_T \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in RT_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\int_T \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1} q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.2.13)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \mu \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \forall \mu \in M_h^0. \quad (3.2.14)$$

Nous rappelons que la décomposition de l'espace  $RT_0(T)$  présentée dans [2], permet d'éliminer la variable  $p_h^{n+1}$  du problème (3.2.12)-(3.2.14), le réduisant ainsi à chercher

$$\lambda_h^{n+1} \in M_h^0, \quad \mathbf{u}_h^{n+1} \in W_h$$

tels que :

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \delta t \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e (\lambda_h^{n+1} - \lambda_h^n) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds = \\ \int_T \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in RT_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$\int_T \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1} q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.2.16)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e \mu \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \forall \mu \in M_h^0. \quad (3.2.17)$$

Posons

$$\tilde{\mathbf{u}}_T^n = \frac{1}{|T|} \int_T \tilde{\mathbf{u}}_h^n \, d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\nu}_{Te} = \int_e \mathbf{n} \, ds \quad \forall e \in \mathcal{E}_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Il est clair que nous pouvons découpler le problème (3.2.15)-(3.2.17). Ceci revient donc à chercher

$$\mathbf{u}_h^{n+1} = (\mathbf{u}_T^{n+1}) \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbb{P}_0(T)^2,$$

$$\lambda_h^{n+1} = (\lambda_e^{n+1}) \in \prod_{e \in \mathcal{E}_h} \mathbb{P}_0(e)$$

tels que :

$$\delta t \sum_{T \in \mathcal{P}_e} \frac{1}{|T|} \sum_{f \in \mathcal{E}_T} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \boldsymbol{\nu}_{Tf} (\lambda_f^{n+1} - \lambda_f^n) = \sum_{T \in \mathcal{P}_e} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_T^{n+1} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \quad (3.2.18)$$

$$\mathbf{u}_T^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_T^{n+1} - \frac{\delta t}{|T|} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \boldsymbol{\nu}_{Te} (\lambda_e^{n+1} - \lambda_e^n) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.2.19)$$

Ainsi, le schéma (3.2.8)-(3.2.11) s'écrit :  
Étant donnés :

$$\lambda_h^n = (\lambda_e^n) \in \prod_{e \in \mathcal{E}_h} \mathbb{P}_0(e), \quad \mathbf{u}_h^n = (\mathbf{u}_T^n) \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbb{P}_0(T)^2,$$



on cherche

$$\lambda_h^{n+1} = (\lambda_e^{n+1}) \in \prod_{e \in \mathcal{E}_h} \mathbb{P}_0(e), \quad \mathbf{u}_h^{n+1} = (\mathbf{u}_T^{n+1}) \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbb{P}_0(T)^2,$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in V_h \text{ tels que :}$$

$$\frac{1}{\delta t} (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) - (p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}) =$$

$$(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_h, \quad (3.2.20)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{P}_e} \frac{1}{|T|} \delta t \sum_{f \in \mathcal{E}_T} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \boldsymbol{\nu}_{Tf} (\lambda_f^{n+1} - \lambda_f^n) = \sum_{T \in \mathcal{P}_e} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_T^{n+1} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \quad (3.2.21)$$

$$\mathbf{u}_T^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_T^{n+1} - \frac{\delta t}{|T|} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \boldsymbol{\nu}_{Te} (\lambda_e^{n+1} - \lambda_e^n) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.2.22)$$

Il est possible d'améliorer l'ordre de convergence en temps du schéma de projection (3.2.3) en le remplaçant par un schéma d'ordre 2 en temps, par exemple en utilisant le schéma BDF2 (cf. [17]). Ceci nous permet d'introduire un nouveau schéma d'approximation des équations de Stokes défini de la manière suivante :

$$\frac{1}{2\delta t} (3\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - 4\tilde{\mathbf{u}}_h^n + \tilde{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \mathbf{v}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) - (p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}) =$$

$$(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_h, \quad (3.2.23)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{P}_e} \frac{1}{|T|} \frac{2\delta t}{3} \sum_{f \in \mathcal{E}_T} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \boldsymbol{\nu}_{Tf} (\lambda_f^{n+1} - \lambda_f^n) = \sum_{T \in \mathcal{P}_e} \boldsymbol{\nu}_{Te} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_T^{n+1} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \quad (3.2.24)$$

$$\mathbf{u}_T^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_T^{n+1} - \frac{2\delta t}{3} |T| \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \boldsymbol{\nu}_{Te} (\lambda_e^{n+1} - \lambda_e^n) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.2.25)$$

### 3.3 Résultats numériques

Nous allons maintenant tester la convergence des schémas (3.2.20)-(3.2.22) et (3.2.23)-(3.2.25) présentés dans la section précédente à travers quelques exemples. Nous considérons le domaine  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . La vitesse est fixée sur tout le bord du domaine. Soit  $\delta t$  le pas de temps. Nous établirons les résultats de convergence numérique entre la solution exacte et la solution du problème faible discret au temps  $t = T = 1s$  dans la norme  $\|\cdot\|_0$ . Dans toute la suite, on note par

Smh1 : le schéma d'ordre 1 en temps donné par (3.2.20)-(3.2.22),

Smh2 : le schéma d'ordre 2 en temps donné par (3.2.23)-(3.2.25).

### Convergence pour une solution linéaire

Testons la convergence pour la solution suivante

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{pmatrix} y + t \\ x + t \end{pmatrix}, \quad p(x, y, t) = x + y + t, \quad \text{et } \mathbf{f}(x, y, t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ici la moyenne  $\bar{p}$  de la pression  $p$  sur  $\Omega$  est égale à  $1 + t$  à chaque instant  $t$ . On pose  $\tilde{p} = p - \bar{p}$  et  $\tilde{p}_h = p_h - \bar{p}_h$ . L'erreur commise sur la vitesse et la pression est de l'ordre de la précision machine pour les deux schémas (cf. tableaux 3.1 et 3.2). Ceci nous indique que l'erreur pour la vitesse et la pression est au moins de l'ordre  $O(h + \delta t)$ .

$N$	$h$	$\delta t$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	$\ \tilde{p} - \tilde{p}_h\ _0$
10	0.1000	0.1000	$3.58 \times 10^{-16}$	$2.39 \times 10^{-14}$
20	0.0500	0.0500	$8.63 \times 10^{-15}$	$7.05 \times 10^{-14}$
40	0.0250	0.0250	$1.68 \times 10^{-14}$	$3.53 \times 10^{-13}$
80	0.0125	0.0125	$6.33 \times 10^{-14}$	$2.47 \times 10^{-12}$

TABLE 3.1 – *Tableau de convergence du schéma Smh1.*

$N$	$h$	$\delta t$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	$\ \tilde{p} - \tilde{p}_h\ _0$
10	0.1000	0.1000	$3.19 \times 10^{-16}$	$1.32 \times 10^{-14}$
20	0.0500	0.0500	$1.22 \times 10^{-15}$	$2.54 \times 10^{-14}$
40	0.0250	0.0250	$3.43 \times 10^{-15}$	$6.39 \times 10^{-14}$
80	0.0125	0.0125	$1.28 \times 10^{-14}$	$3.19 \times 10^{-13}$

TABLE 3.2 – *Tableau de convergence du schéma Smh2*

Nous envisageons un deuxième test pour estimer les erreurs de convergence des schémas Smh1 et Smh2.

### Convergence pour une solution polynomiale

Testons la convergence pour la solution suivante

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{pmatrix} y^2 + t^2 \\ x^2 + t^2 \end{pmatrix}, \quad p(x, y, t) = x^2 + y^2 + t^2, \quad \text{et } \mathbf{f}(x, y, t) = \begin{pmatrix} 2t - 2 + 2x \\ 2t - 2 + 2y \end{pmatrix}.$$

Ici  $\bar{p}$  est égale à  $\frac{2}{3} + t^2$  à chaque instant  $t$ . Cette fois-ci, nous fixons le pas de temps ( $\delta t = 10^{-2}$ ) pour estimer l'erreur en espace sur la vitesse et la pression. Puis nous fixons, le pas d'espace ( $h = 0,0125$ ), pour estimer l'erreur en temps sur la vitesse et la pression.

Le comportement du schéma Smh1 (resp. Smh2) est illustré dans les figures 3.1 et 3.2 (resp. 3.3 et 3.4). Les estimations d'erreurs qui en découlent sont résumées dans les tableaux suivants :

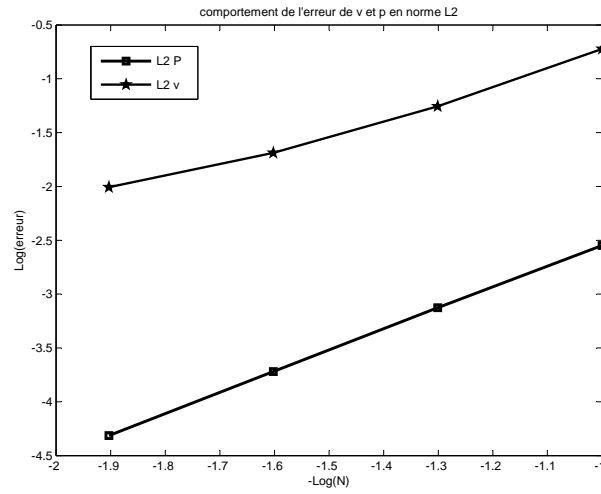


FIGURE 3.1 – Courbes de convergence en espace pour le schéma Smh1 ( $\delta t = 10^{-2}$ ).

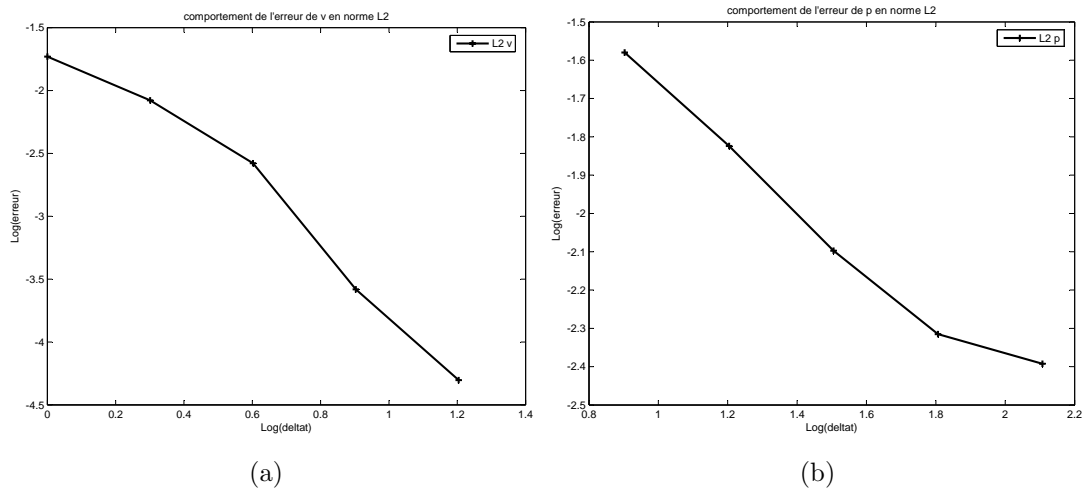


FIGURE 3.2 – Courbes de convergence en temps ( $h = 0,0125$ ) pour le schéma Smh1.

Méthode	Ordre en espace pour la vitesse	Ordre en espace pour la pression
Smh1	1.95	1.42
Smh2	1.98	1.94

TABLE 3.3 – Ordre de convergence en espace pour les schémas Smh1 et Smh2.

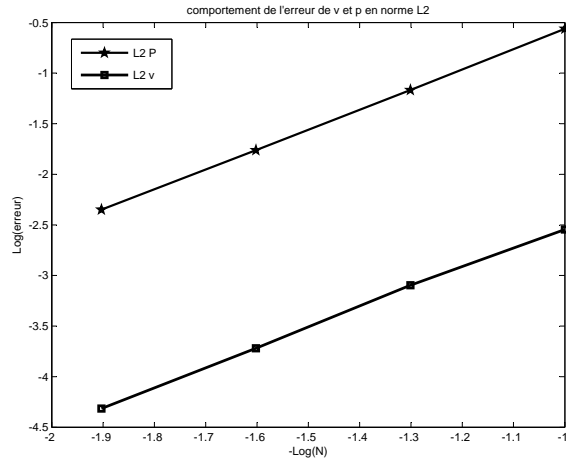


FIGURE 3.3 – Courbes de convergence en espace pour  $(\delta t = 10^{-2})$  pour le schéma Smh2.

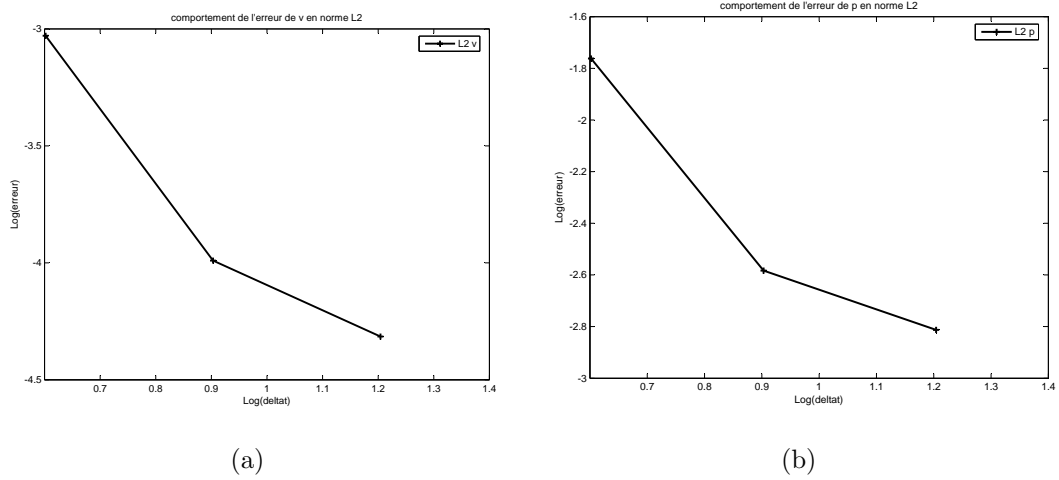


FIGURE 3.4 – Courbes de convergence en temps pour  $(h = 0,0125)$  pour le schéma Smh2.

Méthode	Ordre en temps pour la vitesse	Ordre en temps pour la pression
Smh1	2.2	0.70
Smh2	2.13	1.74

TABLE 3.4 – Ordre de convergence en temps pour les schémas Smh1 et Smh2.

### Convergence pour une solution sinusoïdale

Enfin, testons la convergence pour la solution suivante

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \begin{pmatrix} \exp(-2t) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ -\exp(-2t) \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{pmatrix}, \quad p(t, x, y) = 0,$$

et

$$\mathbf{f}(t, x, y) = \begin{pmatrix} -2 \exp(-2t) \cos(\pi x) \sin(\pi y) + 2\pi^2 \exp(-2t) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ 2 \exp(-2t) \sin(\pi x) \cos(\pi y) - 2\pi^2 \exp(-2t) \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{pmatrix}.$$

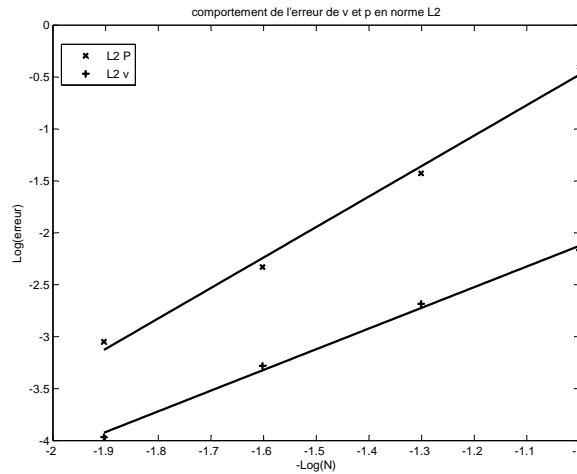


FIGURE 3.5 – Courbes de convergence en espace pour le schéma Smh1 ( $\delta t = 10^{-2}$ ).

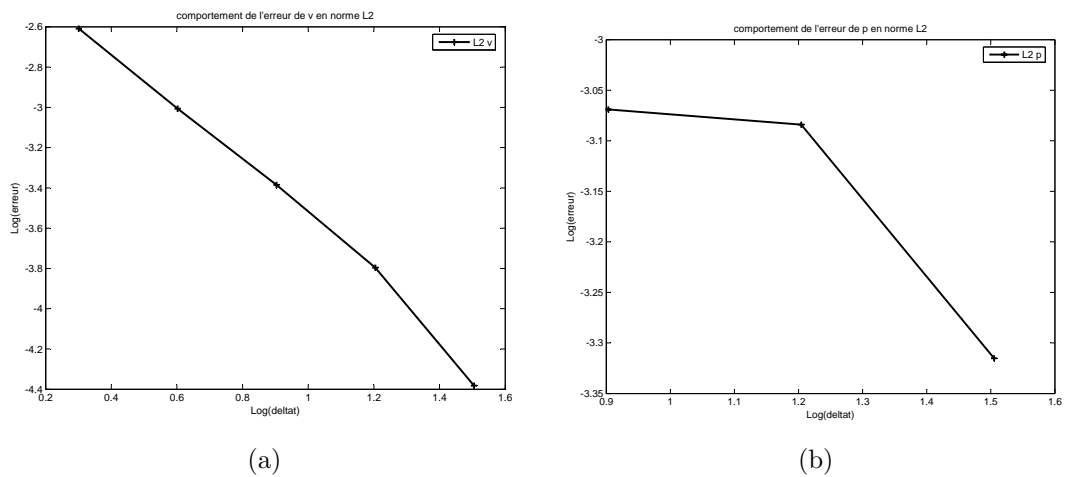


FIGURE 3.6 – Courbes de convergence en temps ( $h = 0,0125$ ) pour le schéma Smh1.

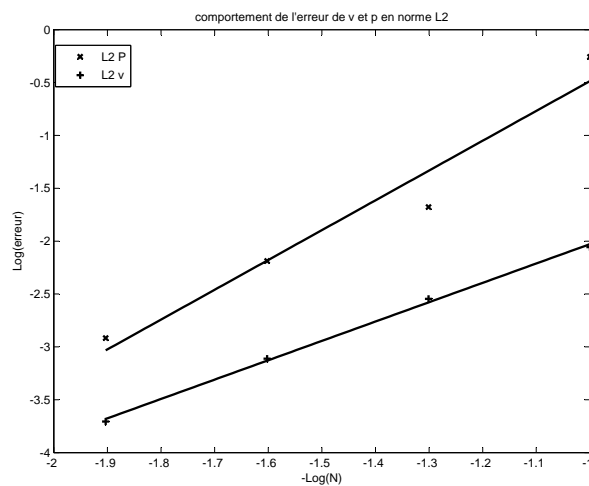


FIGURE 3.7 – Courbes de convergence en espace ( $\delta t = 10^{-2}$ ) pour le schéma Smh2.

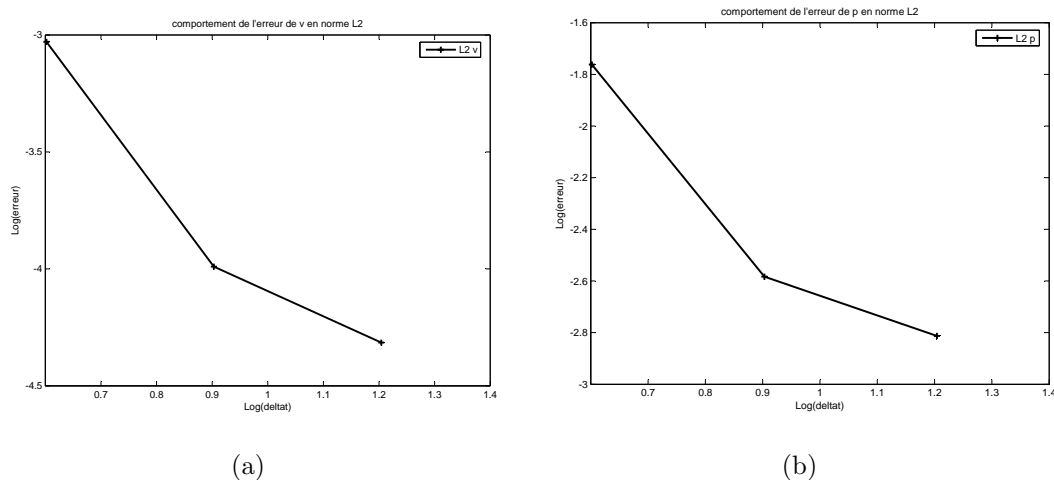


FIGURE 3.8 – Courbes de convergence en temps pour ( $h = 0,0125$ ) pour le schéma Smh2.

Les résultats du schéma Smh1 (resp. Smh2) donnés par les figures 3.5 et 3.6 (resp. 3.7 et 3.8) sont résumés dans les tableaux suivants :

Méthode	Ordre en espace pour la vitesse	Ordre en espace pour la pression
Smh1	1.99	2.93
Smh2	1.83	2.82

TABLE 3.5 – Ordre de convergence en espace pour les schémas Smh1 et Smh2.

Méthode	Ordre en temps pour la vitesse	Ordre en temps pour la pression
Smh1	1.44	0.4
Smh2	2.13	1.80

TABLE 3.6 – Ordre de convergence en temps pour les schémas Smh1 et Smh2.

## 3.4 Conclusions

Nous avons présenté deux méthodes éléments finis mixtes hybrides pour les équations de Stokes. Ces deux méthodes découplent les effets de diffusion et d'incompressibilité en remplaçant la résolution des équations de Stokes par la résolution de deux problèmes successifs. Dans la première étape, nous résolvons un problème elliptique par éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , tandis que dans la seconde, nous approchons l'équation de Darcy par éléments finis mixtes hybrides  $RT_0/\mathbb{P}_0$ . Des essais numériques ont été conduits dans le but de comparer les méthodes décrites. Nous avons constaté la convergence des deux méthodes tout en observant que le schéma

$\text{Smh2}$  s'avère plus performant que le schéma  $\text{Smh1}$ . Notons que les deux schémas peuvent s'étendre facilement aux équations de Navier-Stokes et une généralisation en dimension 3 peut être a priori obtenue sans hypothèse supplémentaire.





# Bibliographie

- [1] Y. Achdou, C. Bernardi, F. Coquel, *A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations*, Numer. Math. 96 (2003), no. 1, 17–42.
- [2] A. Bendali, F. Raynaud, J. -M. Thomas, *New decomposition of shape functions spaces of mixed finite element methods*, Appl. Math. Lett. 9 (1996), no. 1, 33–38.
- [3] J. B. Bell, P. Collela, H. M. Glasz, *A second projection method for the incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. 85, 257–283, (1989).
- [4] F. Brezzi, J. Douglas, L. D. Marini, *Two families of mixed finite elements for second order elliptic equations*, Numer. Math., 47, 217–235, (1985).
- [5] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element methods*, Springer-Verlag, (1991).
- [6] F. Brezzi, M. Fortin, L. D. Marini, *Error analysis of piecewise constant approximations of Darcy's law*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006), 1547–1599.
- [7] F. Brezzi, T. J. R. Hughes, L. D. Marini, A. Masud, *Mixed Discontinuous Galerkin methods for Darcy flow*, Journal of Scientific Computing 22, (2005), 119–145.
- [8] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti, *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, Springer-Verlag, (2004).
- [9] S. Candel, *Mécanique des fluides*, Dunod (2001).
- [10] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan, *A characterization of hybridized mixed methods for second order elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal. 42 (2004), no. 1, 283–301.
- [11] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan, *Error analysis of variable degree mixed methods for elliptic problems via hybridation*, Math. Comp. 74 (2004), 252, 1653–1677.
- [12] M. Crouzeix, P. A. Raviart, *Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, RAIRO, Anal. Numer. (1973), no. R-3, 33–75.

- 
- [13] J. Donea, S. Giuliani, H. Laval, L. Quartapelle, *Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method*, Comput. Maths. Appl. Mech. Eng. 30, 53–73, (1982).
- [14] I. Danaila, F. Hecht, O. Pironneau, *Simulation numérique en C++*, Dunod, Paris, (2003).
- [15] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Masson, (1990).
- [16] A. Elmkies, P. Joly, *Eléments finis d'arête et condensation de masse pour les équations de Maxwell : le cas 2D*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1, Math 324 (1997), no. 11, 1287–1293.
- [17] A. Ern, J. L. Guermond, *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, Springer-Verlag (2002).
- [18] M. Farhloul, M. Fortin, *A non-conforming mixed finite element for second-order elliptic problems*, Numer. Methods Partial Differential Equations 13 (1997), no. 5, 445–457.
- [19] M. Fortin, *Calcul numérique des écoulements par la méthode des éléments finis.*, Thèse Université Paris 6 (1972).
- [20] M. Fortin, *An analysis of the convergence of mixed finite element methods*, RAIRO Anal. Numér. 11 (1977), no. 4, 341–354.
- [21] M. Fortin, M. Soulie, *A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles*, Int. J. Numer. Methods. Engrg. (1983), no. 4, 505–520.
- [22] G. Cohen, A. Elmkies, *Eléments finis triangulaires  $\mathbb{P}_2$  avec condensation de masse pour l'équation des ondes*, Rapport INRIA (1994).
- [23] G. .P Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, I et II. Springer, (1994).
- [24] P. M. Gresho, S. T. Chan, *On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via finite element that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part I and Part II*, Int. J. Numer. Methods Fluids 11, 587–620 (1990).
- [25] V. Girault, P. -A. Raviart, *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, (1986).
- [26] Y. Haugazeau, P. Lacoste, *Condensation de la matrice de masse pour les éléments finis mixtes  $H(\text{rot})$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 316 (1993), no. 5, 509–512.
- [27] Y. Haugazeau, P. Lacoste, *Condensation de la matrice de masse pour les éléments finis mixtes  $H(\text{rot})$* , C. R. Acad. Sci. (1993).
- [28] A. Masud, T. J. R. Hughes, *A stabilized mixed element method for Darcy flow*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002), no. 39–40, 4341–4370.
-

- [29] J. C. Nédélec, *Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. 35 (1980), no. 3, 315–341.
- [30] O. Pironneau. *Finite Element Methods for Fluids*. Masson, Paris, (1988).
- [31] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems*, Lecture Notes in Mathematics Springer-Verlag, (1977).
- [32] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and numerical analysis*. North-Holland, (1977).
- [33] J. M. Thomas, *Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie (1977).



**PARTIE II**

**SCHEMAS NON CONFORMES  
POUR L'EQUATION LEVEL  
SET**



# Introduction

Le but de cette partie est d'établir des schémas numériques suffisamment précis pour approcher l'équation level set. En effet, comme l'objectif à terme est de réaliser des simulations en trois dimensions d'espace et que les chargements sont parfois considérés à l'échelle un, le nombre de mailles de calcul croît très rapidement. En particulier lorsque l'on utilise des schémas numériques du premier ordre, l'obtention d'une approximation suffisamment fiable se réalise au prix de maillages extrêmement fins. En outre, l'expérience montre que le passage à un ordre supérieur permet de conserver une précision appréciable tout en autorisant une réduction considérable du nombre de mailles. Enfin, cette quête de précision est légitimée par le fait que les solutions que nous recherchons sont en général régulières presque partout. Cette régularité étant intimement liée à celle du domaine d'intégration, les coins, les points de rebroussement, les inversions locales de convexité/concavité sont autant de zones de singularité pour la solution susceptibles de provoquer des instabilités artificielles. Les nouvelles méthodes numériques devront donc prédire une fois de plus avec une grande précision et un maximum de stabilité, le comportement du front, en particulier au voisinage de ces zones de singularité.

Les deux premiers chapitres de cette partie sont consacrés à l'analyse mathématique de l'équation Level set en tant qu'équation d'Hamilton-Jacobi du premier ordre puis à l'équation de loi de conservation associée. Les chapitres suivants sont consacrés au développement de nouvelles méthodes numériques d'ordre 1 et 2.

Dans le Chapitre 1, nous caractérisons l'évolution d'une frontière libre par l'équation Level set. Nous pouvons ainsi définir la frontière libre comme une courbe ou une surface,  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$  où  $(\mathbf{x}, t)$  est la variable spatio-temporelle, qui se propage avec une vitesse qui dépend du temps dans le milieu. Décrire l'évolution de la frontière libre revient alors à décrire la loi d'évolution de la fonction  $\phi$ . Nous formulons l'évolution du front par une formulation de type valeur initiale. Ces équations qui sont des équations de type Hamilton-Jacobi du premier ordre, sont complétées par les conditions initiales et aux limites ad hoc. Ce Chapitre est entièrement consacré à l'analyse mathématique de notre problème de type Hamilton-Jacobi. On rappelle en particulier les résultats d'existence et d'unicité dans la classe des solutions de viscosité.

Dans le chapitre 2, nous nous plaçons à la fois dans le cadre abstrait des équations de type Hamilton-Jacobi du premier ordre, et des équations de type de



loi de conservation associées. Ce type de problème est généralement associé à un système faiblement hyperbolique. Par conséquent, la solution de viscosité peut être formellement considérée comme primitive de la solution faible entropique du problème hyperbolique associé. Cependant, même si dans le cas général, il n'existe pas de résultats rigoureux prouvant l'équivalence des solutions de viscosité et faible entropique associées, cela est vraie pour les hamiltoniens concaves ou convexes. Ainsi, nous résolvons de manière exacte le problème de Riemann associé à l'équation de loi de conservation puis le problème correspondant des deux-demis plans associé à l'équation level set avec des Hamiltoniens concaves ou convexes.

Dans le Chapitre 3, nous nous intéressons essentiellement à l'intégration numérique de l'équation level set. Pour cela, nous présentons une méthode qui approche la solution de viscosité par des fonctions linéaires par morceaux pas nécessairement continues (non conformes). Le but de ce travail est la construction de solveurs de type Lax-Frederichs pour la résolution de l'équation level set ou des équations de type Hamilton-Jacobi du premier ordre. De plus, on montre que les schémas résultants sont monotones. Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux vitesses  $F$  quelconques. Nous avons cherché, dans cette étude, une alternative aux modèles numériques de Godunov car ces derniers se sont révélés assez difficiles à implémenter. Par souci de simplicité d'emploi, nous avons choisi de baser nos constructions sur l'Hamiltonien numérique monotone de Lax-Friedrichs introduit dans [37]. Il est alors possible de montrer que le nouveau schéma converge vers l'unique solution de viscosité. Enfin, des exemples numériques montrent qu'on obtient bien de l'ordre 1 en norme  $L^1$  même dans les cas où la solution présente un gradient discontinu.

Dans le chapitre 4, nous présentons une nouvelle méthode de reconstruction MUSCL (avec le procédé de limitation ad hoc) qui produit alors des schémas qui sont formellement d'ordre 2 dans les régions régulières. Cette observation peut se justifier par le fait que ces schémas centrés en espace sont dissipatifs et stabilisent ainsi la solution approchée. C'est pourquoi la méthode n'explose pas numériquement. De nombreux exemples numériques sont exposés prouvant les performances des différentes méthodes. En particulier, nous les avons testées sur des exemples ayant des gradients discontinus ou réguliers.

# Chapitre 1

## Généralités sur l'équation level set

Les problèmes de suivi d'interfaces interviennent dans plusieurs domaines de la physique comme la propagation de fronts de flammes, la croissance de dendrites en solidification, la formation de cristaux, le couplage fluide-structure, en imagerie, en dynamique de bulles, etc. De nombreux auteurs ont étudié ces problèmes en imaginant un grand nombre de méthodes qui peuvent être regroupées en deux catégories.

Le premier type de méthodes sont dites lagrangiennes et correspondent au déplacement d'un système de coordonnées. Le système de coordonnées suit l'interface de façon à représenter à chaque instant sa position de manière précise sans modification du modèle. La précision sur la position de cette interface permet de pouvoir y imposer facilement les conditions aux limites. Son inconvénient provient du traitement des changements de topologie, comme par exemple, le recollement de deux fronts.

Le deuxième type de méthodes sont dites eulériennes. La position de la surface libre peut être caractérisée par des marqueurs dont un grand nombre est nécessaire pour obtenir des résultats précis. L'autre voie consiste à ajouter une inconnue supplémentaire  $\phi$  ainsi qu'une équation dans le modèle, caractérisant le transport de cette fonction. Les valeurs de cette fonction  $\phi$  sont zéro ou un. La résolution de l'équation de transport qui régit l'évolution de cette fonction discontinue peut produire une zone diffuse autour de la frontière libre. Pour remédier à cela, une nouvelle fonction  $\phi$  qui varie alors de manière continue, est introduite. Ainsi, la surface libre correspond à une isovaleur de cette fonction, ceci est le cas des méthodes Level Set. Les changements de topologie dans le front d'évolution sont alors traités naturellement. Ces méthodes permettent également d'étudier des fronts se déplaçant aussi bien en avant qu'en arrière.

## 1.1 Présentation de l'équation Level Set

Dans cette section nous rappelons la formulation en ensemble de niveau d'une frontière libre initialement proposée par **Osher** et **Sethian**([47]). A partir de cette formulation, nous établissons l'équation level set.

### 1.1.1 Formulation en ensemble de niveau

Soit  $T > 0$  et  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , on notera par  $t$  la variable temps et par  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  la variable d'espace. On suppose que  $\Omega$  est composé de deux sous domaines  $\Omega_t^+$  et  $\Omega_t^-$  séparés par une frontière libre  $\Gamma_t$  (figure 1.1) susceptible d'évoluer au cours du temps.

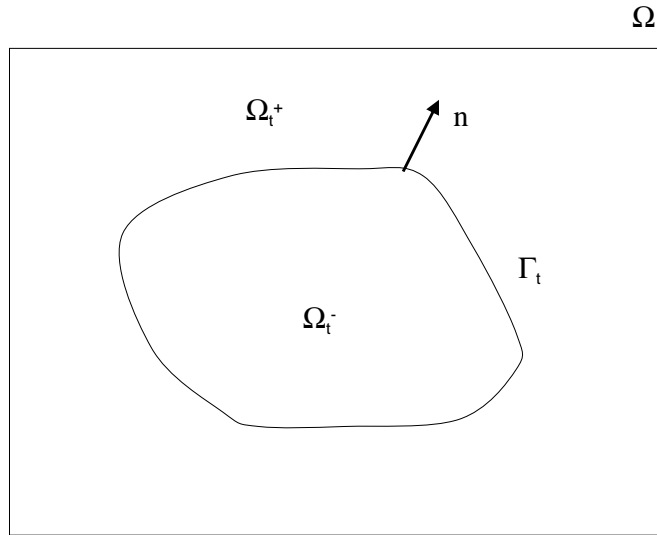


FIGURE 1.1 – *Domaine  $\Omega$  composé des deux sous ensembles  $\Omega_t^+$  et  $\Omega_t^-$  séparés par  $\Gamma_t$*

L'idée principale de la méthode level set consiste à représenter le bord  $\Gamma_t$  comme la ligne de niveau nulle d'une fonction  $\phi$  définie sur le domaine  $\Omega$  pour tout  $t$  (voir la figure 1.2). On cherche donc à construire une fonction  $\phi$  tel que les domaines  $\Omega_t^+$ ,  $\Omega_t^-$  et la frontière libre  $\Gamma_t$  sont caractérisés par

$$\Gamma_t = \{\mathbf{x} \in \Omega; \quad \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}, \quad (1.1.1)$$

$$\Omega_t^+ = \{\mathbf{x} \in \Omega; \quad \phi(\mathbf{x}, t) > 0\}, \quad (1.1.2)$$

$$\Omega_t^- = \{\mathbf{x} \in \Omega; \quad \phi(\mathbf{x}, t) < 0\}. \quad (1.1.3)$$

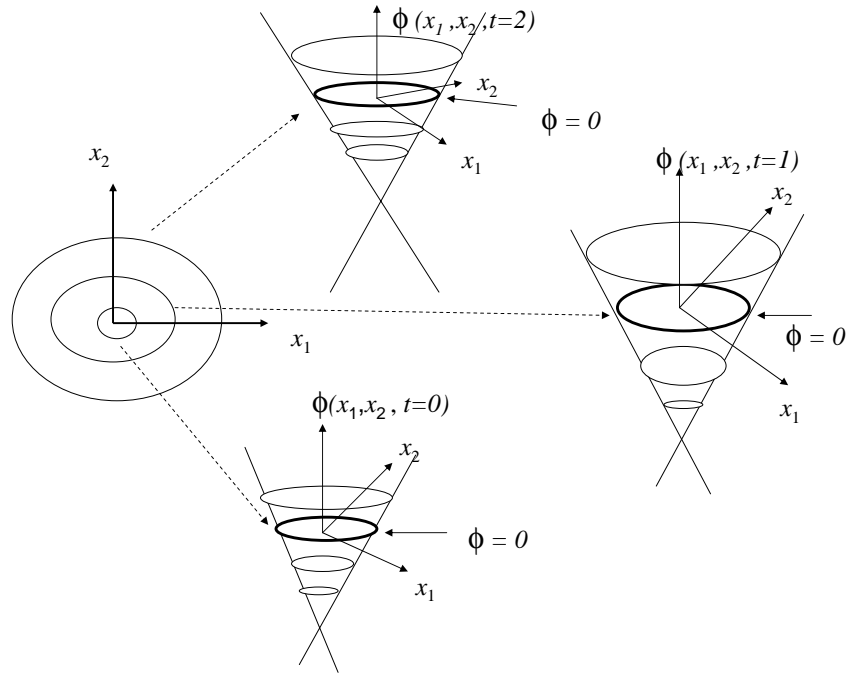


FIGURE 1.2 – La frontière  $\Gamma_t$  est la surface de niveau nulle de la fonction  $\phi$ .

### 1.1.2 Equation d'évolution de la frontière

Pour déterminer l'équation d'évolution que doit satisfaire la fonction  $\phi$ , nous allons supposer que  $\Gamma_t$  est une courbe paramétrée par

$$(s, t) \mapsto \gamma(s, t) \in \Gamma_t \quad (1.1.4)$$

où  $s$  est une paramétrisation de la courbe indépendante de  $t$ . En utilisant la définition (1.1.1), nous pouvons écrire

$$\phi(\gamma(s, t), t) = 0. \quad (1.1.5)$$

En dérivant la relation (1.1.5) par rapport à  $t$  nous obtenons

$$\partial_t[\phi(\gamma(s, t), t)] = \partial_t\phi(\gamma(s, t), t) + \nabla\phi \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0. \quad (1.1.6)$$

De même, en dérivant la relation (1.1.5) par rapport à  $s$ , nous avons

$$\partial_s[\phi(\gamma(s, t), t)] = \nabla\phi \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial s} = 0. \quad (1.1.7)$$

L'équation (1.1.7) signifie que le vecteur  $\nabla\phi(\gamma(s,t),t)$  est orthogonal à la courbe  $\Gamma_t$  et si  $\nabla\phi(\gamma(s,t),t) \neq (0,0)$ , le vecteur normal unitaire est défini par

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi(\gamma(s,t),t)}{|\nabla\phi(\gamma(s,t),t)|}. \quad (1.1.8)$$

Par le choix de  $\phi < 0$  dans  $\Omega_t^-$  et  $\phi > 0$  dans  $\Omega_t^+$ , le vecteur  $\mathbf{n}$  correspond au vecteur normal extérieur à  $\Omega_t^-$  pointant vers  $\Omega_t^+$ .

En divisant formellement (1.1.6) par  $|\nabla\phi(\gamma(s,t),t)|$  et en notant par  $\mathbf{w}(s,t) = \frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,t)$  la vitesse d'une particule sur la frontière, nous en déduisons qu'en un point de l'interface

$$\frac{\partial_t\phi(\gamma(s,t),t)}{|\phi(\gamma(s,t),t)|} + \mathbf{w}(s,t) \cdot \mathbf{n}(s,t) = 0. \quad (1.1.9)$$

En posant  $F = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  la vitesse normale sur  $\Gamma_t$ , nous obtenons l'équation

$$\partial_t\phi(\mathbf{x},t) + F(\mathbf{x},t) |\nabla\phi|(\mathbf{x},t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t. \quad (1.1.10)$$

Par construction, l'équation (1.1.10) est satisfaite uniquement sur le bord  $\Gamma_t$ . Aussi cherche-t-on à étendre cette équation sur le domaine  $\Omega$  tout entier. A cette fin, on définira un prolongement de  $F$  sur tout le domaine (encore noté  $F$ ) et on considère le nouveau problème :

trouver  $\phi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\partial_t\phi(\mathbf{x},t) + F(\mathbf{x},t) |\nabla\phi|(\mathbf{x},t) = 0, \quad (1.1.11)$$

que l'on complètera avec une condition initiale au temps  $t = 0$ . En outre, si  $\Omega$  est différent de  $\mathbb{R}^2$ , il faut aussi rajouter des conditions de type Neumann ou Dirichlet sur la frontière  $\partial\Omega$ .

Le système ainsi constitué conduit à une équation d'**Hamilton-Jacobi** dans  $\Omega$  et en posant  $H(\mathbf{x},t,\nabla\phi) = F(\mathbf{x},t) |\nabla\phi|$ , on peut réécrire l'équation (1.1.11) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + H(\mathbf{x},t,\nabla\phi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.1.12)$$

où  $H(\mathbf{x},t,\nabla\phi)$  s'appelle l'**Hamiltonien**.

Pour toute fonction  $\phi$  régulière l'application  $H(\mathbf{x},t,\nabla\phi)$  est bien définie, malheureusement même pour des conditions initiales régulières (disons dans  $C^1$ ), la solution  $\phi$  peut présenter des singularités pour la dérivée (voir [19]).

Afin de prendre en considération ce type de solution, on élargit la classe des solutions en cherchant  $\phi$  dans les espaces de fonctions moins régulières que nous préciserons dans la suite.

## 1.2 Solution de l'équation level set dans $\mathbb{R}^2$

L'objet de cette section est de rappeler les principaux résultats mathématiques sur l'équation (1.1.12). Nous considérons le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^2$  afin d'éviter momentanément les difficultés dues au bord.

### 1.2.1 Quelques notations

Nous allons tout d'abord définir les espaces de fonctions que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Soit  $T > 0$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $Q_T = \Omega \times ]0, T[$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ . On considère les espaces suivants.

$L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions bornées presque partout sur  $\Omega$ .

$B(\overline{\Omega})$  est l'espace des fonctions bornées sur  $\overline{\Omega}$ .

$C(\Omega)$  est l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$ .

$C(\overline{\Omega})$  est l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ .

$BUC(\Omega)$  est l'espace des fonctions bornées, uniformément continues sur  $\Omega$ .

Si  $\overline{\Omega}$  est un ensemble compact alors  $BUC(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$ .

$\mathbf{W}_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$  est l'espace des fonctions bornées, à dérivées bornées sur  $\Omega$ .

$C^1(\Omega)$  est l'espace des fonctions dérivables et à dérivée continue sur  $\Omega$ .

$C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$  est l'espace des fonctions continues  $\alpha$  höldérienne par rapport à la variable d'espace et  $\frac{\alpha}{2}$  höldérienne par rapport à la variable temps.

En outre, on adoptera la notation suivante :

soit  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $[a]^+ = \max(a, 0)$  et  $[a]^- = \max(-a, 0)$ .

### 1.2.2 Solution généralisée

Une classe de fonctions permettant de construire des solutions généralisées au problème d'Hamilton-jacobi a été introduite dans les années 80 par Pierre Louis Lions ([44]) où l'espace fonctionnel adéquat est  $\mathbf{W}_{loc}^{1,\infty}$ . La difficulté principale du choix de cette espace fonctionnel est qu'il n'y a pas unicité de la solution comme le montre l'exemple ci-dessous :

Trouver  $\phi \in \mathbf{W}_{loc}^{1,\infty}(0, 1)$  tel que :

$$|\phi'| = 1 \quad \text{dans } ]0, 1[, \quad (1.2.1)$$

avec la condition aux limites :

$$\phi(0) = \phi(1) = 0. \quad (1.2.2)$$

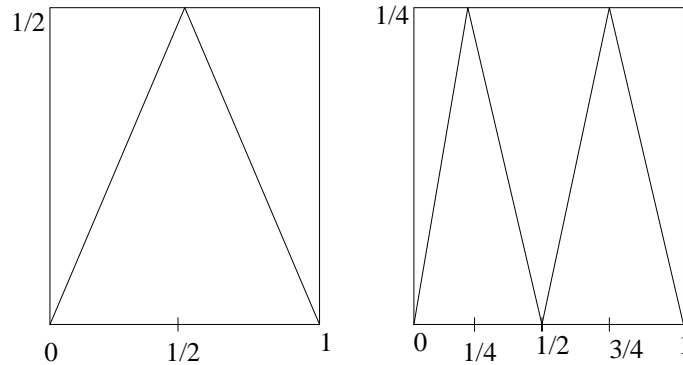


FIGURE 1.3 – Deux solutions généralisées.

On peut vérifier sans grande difficulté que les fonctions représentées sur la figure (1.3) sont solutions généralisées de (1.2.1) - (1.2.2).

Plus généralement, en alternant les pentes 1 et pentes -1, on peut construire une suite  $(u_n)_n$  de solutions (qui convergent uniformément vers 0) en procédant de la manière suivante :  $u_n(0) = 0, u'_n(x) = 1$  si  $x \in ]\frac{2^k}{2^n}, \frac{2^k+1}{2^n}[$  et  $u'_n(x) = -1$  si  $x \in ]\frac{2^k+1}{2^n}, \frac{2^k+2}{2^n}[$  pour  $k$  compris entre 0 et  $2^{n-1} - 1$  (voir la figure 1.4). Un autre défaut des solutions généralisées vient du fait que la limite d'une famille de solutions généralisées n'est pas forcément une solution généralisée. Ce dernier fait est encore illustrée par la famille de solutions généralisées que nous venons de construire. Pierre Louis Lions introduit une contrainte supplémentaire afin de

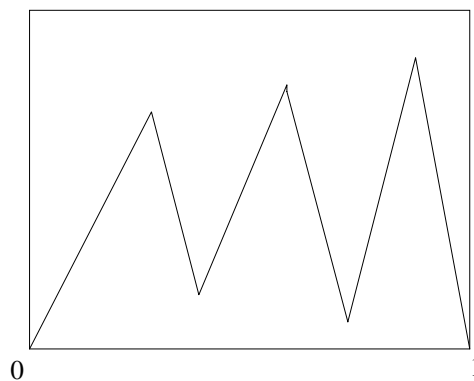


FIGURE 1.4 – Une solution généralisée construite en alternant les pentes .

sélectionner une seule solution en régularisant l'équation (1.1.12).

### 1.2.3 Solution régularisée

L'exemple (1.2.1)-(1.2.2) introduit un problème d'unicité pour des solutions généralisés. Il faut donc un critère supplémentaire pour choisir la "bonne solution".

La procédure pour sélectionner cette solution est de considérer la méthode classique de *viscosité évanescence* que nous rappelons brièvement. Pour cela, soit  $\phi_0 \in BUC(\mathbb{R}^2)$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors il existe une suite  $\phi_{0,\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap C^\alpha(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\phi_{0,\varepsilon} \rightarrow \phi_0$  dans  $C(\mathbb{R}^2)$  avec  $|\phi_{0,\varepsilon} - \phi_0|_\infty \leq \varepsilon$ .

On considère le problème régularisé suivant : soit  $\varepsilon > 0$ , trouver  $\phi_\varepsilon$  tel que :

$$\partial_t \phi_\varepsilon - \varepsilon \Delta \phi_\varepsilon + H(\mathbf{x}, t, \nabla \phi_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times ]0, T[, \quad (1.2.3)$$

$$\phi_\varepsilon(0, \cdot) = \phi_{0,\varepsilon} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (1.2.4)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (1.2.3)-(1.2.4) repose sur l'hypothèse suivante :

**(H1)** Soit  $H(\mathbf{x}, t, p)$  une application continue sur le domaine  $\mathbb{R}^2 \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , on suppose qu'il existe une constante  $b_1$ , tel que

$$H(\mathbf{x}, t, p) \geq b_1. \quad (1.2.5)$$

On a le théorème suivant (voir [41] P.460 Théorème 6.4).

**Théorème 1.2.1.** *Il existe une unique solution*

$$\phi_\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$$

au problème (1.2.3)-(1.2.4). De plus on a la régularité

$$\phi_\varepsilon \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2 \times ]0, T[),$$

$$\nabla \phi_\varepsilon \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2 \times ]0, T[).$$

On prendra alors comme solution du problème d'Hamilton-Jacobi la limite de  $\phi_\varepsilon$  lorsque celle-ci existe. La difficulté essentielle réside dans le terme non linéaire  $H$  car il faut définir une notion de solution faible qui permette de passer à la limite dans (1.2.3)-(1.2.4) avec seulement la convergence uniforme de la suite  $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ . Crandal et Lions ([19]) ont proposé une nouvelle définition fondée sur lemme suivant.

**Lemme 1.2.1.** ([3] P.23)

Soit  $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$  une suite de fonctions continues sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \times ]0, T[$  qui converge dans  $C(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$  vers  $\phi$ . Si  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times ]0, T[$  est un point de maximum local strict de  $\phi$  alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$  on peut construire une suite de points  $(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon)_\varepsilon$  tel que  $\phi_\varepsilon$  admet un maximum local en  $(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon)$  et qui converge vers  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ .



Grâce à ce lemme on montre le théorème suivant.

**Théorème 1.2.2.** *Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\phi_\varepsilon \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2 \times ]0, T[)$  la solution du problème (1.2.3)-(1.2.4) est donné par le théorème (1.2.1).*

*On suppose que  $\phi_\varepsilon$  converge vers  $\phi$  dans  $C(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ , alors pour toute fonction  $\chi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$ , si  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  est un point de maximum local strict de  $\phi - \chi$  sur  $\mathbb{R}^2 \times ]0, T[$ , on a :*

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) + H(\mathbf{x}_0, t_0, \nabla \chi(\mathbf{x}_0, t_0)) \leq 0. \quad (1.2.6)$$

*De même pour toute fonction  $\chi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$ , si  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  est un point de minimum local de  $\phi - \chi$  sur  $\mathbb{R}^2 \times ]0, T[$ , on a :*

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) + H(\mathbf{x}_0, t_0, \nabla \chi(\mathbf{x}_0, t_0)) \geq 0. \quad (1.2.7)$$

*Démonstration.* On effectuera la preuve pour la relation (1.2.6), la relation (1.2.7) s'obtiendra de la même manière.

Soit  $\chi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$  et supposons que  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  est un *point de maximum local strict* de  $\phi - \chi$  sur  $\mathbb{R}^2 \times (0, T]$  alors d'après le lemme il existe une suite de points  $(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon)$  de maximum local strict de  $\phi_\varepsilon - \chi$  qui converge vers  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . On a donc

$$\partial_t \phi_\varepsilon(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon) = \partial_t \chi(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon),$$

$$\nabla \phi_\varepsilon(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon) = \nabla \chi(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon).$$

Comme la matrice hessienne de  $\phi - \chi$  au point  $(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon)$  est définie négative, on alors

$$\Delta(\phi_\varepsilon - \chi)(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon) \leq 0,$$

soit encore

$$\Delta \phi_\varepsilon(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon) \leq \Delta \chi(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon) - \varepsilon \Delta \chi(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon, \nabla \chi) &\leq \\ \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon) - \varepsilon \Delta \phi_\varepsilon(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(\mathbf{x}_\varepsilon, t_\varepsilon, \nabla \phi_\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans cette inégalité on obtient

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) + H(\mathbf{x}_0, t_0, \nabla \chi) \leq 0.$$

□

Les relations (1.2.6)-(1.2.7) sont à la base de la solution de viscosité.

### 1.2.4 Solution de viscosité

**Définition 1.2.1** (Solution de viscosité). *Une fonction  $\phi \in BUC(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$  est dite solution de viscosité du problème*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(\mathbf{x}, t, \nabla \phi) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times ]0, T[, \quad (1.2.8)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (1.2.9)$$

si et seulement si :

1) pour toute fonction  $\chi \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$ , si  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  est un point de maximum local de  $\phi - \chi$  sur  $\mathbb{R}^2 \times ]0, T[$ , on a :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) + H(\nabla \chi(\mathbf{x}_0, t_0)) \leq 0, \quad (1.2.10)$$

2) pour toute fonction  $\chi \in C^1(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$ , si  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  est un point de minimum local de  $\phi - \chi$  sur  $\Omega \times ]0, T[$ , on a :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) + H(\nabla \chi(\mathbf{x}_0, t_0)) \geq 0. \quad (1.2.11)$$

Afin d'obtenir l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité, on introduit des hypothèses complémentaires à celles données précédemment([3]).

**(H2)**  $H$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2 \times ]0, T[ \times \mathbb{R}^2$ .

**(H3)** Soit  $R > 0$  alors il existe  $m_R : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $(\mathbf{x}, t), (\mathbf{y}, t) \in \overline{Q}_T, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  on a

$$|H(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) - H(\mathbf{y}, t, \mathbf{p})| \leq m_R((|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)(1 + |\mathbf{p}|)),$$

où  $m_R(s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow 0$ .

L'existence de l'unique solution de viscosité du problème (1.2.8)-(1.2.9) est donnée par le théorème suivant([3, 19, 20]).

**Théorème 1.2.3.** *Sous les hypothèses (H2)-(H3), si  $\phi_0 \in \mathbf{BUC}(\mathbb{R}^2)$  alors il existe une unique fonction  $\phi \in \mathbf{BUC}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$  satisfaisant (1.2.8) -(1.2.9).*

*En outre, on a les propriétés suivantes :*

*Soit  $\phi_0$  et  $\psi_0$  deux conditions initiales,  $\phi$  et  $\psi$  les deux solutions de viscosité de*

l'équation (1.2.8)-(1.2.9) associées à ces conditions initiales :

- (i)  $\|[\phi(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)]^+\| \leq \|[\phi_0(\cdot) - \psi_0(\cdot)]^+\|$ ,
- (ii)  $\|[\phi(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)]^-\| \leq \|[\phi_0(\cdot) - \psi_0(\cdot)]^-\|$ ,
- (iii)  $\|\phi(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)\| \leq \|\phi_0(\cdot) - \psi_0(\cdot)\|$ ,
- (iv)  $\inf_{\mathbf{y} \in \Omega} \phi_0(\mathbf{y}) \leq tH(\cdot, 0, \nabla \phi_0) + \phi_0(\cdot) \leq \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \phi_0(\mathbf{y})$ ,
- (v) pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ ,  

$$|\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) - \phi(\mathbf{x}, t)| \leq \sup_{\mathbf{z} \in \Omega} |\phi_0(\mathbf{z} + \mathbf{y}) - \phi_0(\mathbf{z})|$$
- (vi) si  $\phi_0$  est lipschitzienne de constante de  $L$  alors  

$$\|\phi(\cdot, t) - \phi(\cdot, \tau)\| \leq |t - \tau| \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{p}\| \leq L} |H(\mathbf{p})|$$
- (vii) si  $\phi_0$  bornée, lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^2$  et soit  $\phi_\varepsilon$  la solution de (1.1.10) et  $\phi$  la solution de (1.2.8)-(1.2.9), on a  

$$\sup_{(\mathbf{x}, t) \in Q_T} |\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t)| \leq c\sqrt{\varepsilon}$$

où  $c$  dépend uniquement de la constante de Lipschitz de  $\phi_0$ , de  $H$  et de  $T$ .

Si l'on souhaite obtenir une approximation numérique de la solution de viscosité, celle-ci doit respecter des propriétés similaires à celles énoncées dans le théorème 1.2.3. On peut distinguer plus particulièrement deux propriétés majeures.

### Corollaire 1.2.1.

- 1) Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , et  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ . Si  $\phi_0(\mathbf{x}) = a + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$  est la condition initiale alors la solution exacte du problème (1.2.8)-(1.2.9) est

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(\mathbf{x}) - tH(\mathbf{x}, 0, \mathbf{p})$$

- 2) Soit  $\phi_0$  et  $\psi_0$  deux conditions initiales,  $\phi$  et  $\psi$  les deux solutions de viscosité de l'équation (1.2.8)-(1.2.9) associées à ces conditions initiales. Si  $\phi_0 \leq \psi_0$  alors  $\phi \leq \psi$ .

### Application à l'équation level set :

Nous rappelons que  $\overline{H(\mathbf{x}, t, \mathbf{p})} = \overline{F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{p}|}$ . Si nous supposons que  $F$  est continue, lipschitzienne par rapport à  $x$ , alors d'une part  $H$  vérifie **(H2)**. D'autre part, il existe  $L > 0$  tel que

$$|F(x, t) - F(y, t)| \leq L|x - y|.$$

Soit  $R > 0$ ,  $m_R(s) = Ls$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T$ ,  $(\mathbf{y}, t) \in \overline{Q}_T$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{aligned}
 |H(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) - H(\mathbf{y}, t, \mathbf{p})| &= |F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{p}| - F(\mathbf{y}, t) |\mathbf{p}|| \\
 &= |F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)| |\mathbf{p}| \\
 &\leq L |x - y| |\mathbf{p}| \leq L |x - y| (1 + |\mathbf{p}|) \\
 &= m_R(|x - y| (1 + |\mathbf{p}|)).
 \end{aligned}$$

Comme  $m_R(s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow 0$ , on en déduit que **(H3)** est vérifiée.

Si de plus  $\phi_0 \in \mathbf{BUC}(\mathbb{R}^2)$  alors d'après le théorème 1.2.3 nous en déduisons que la fonction level set  $\phi$  est solution de viscosité du problème de cauchy (1.2.8)-(1.2.9) et que  $\phi \in \mathbf{BUC}(\mathbb{R}^2)$ .

### 1.3 Solution de l'équation level set dans $\Omega \neq \mathbb{R}^2$

En théorie, on peut prolonger  $F$  (et donc on calcule  $\phi$ ) sur tout  $\mathbb{R}^2$ . En pratique (pour l'approximation numérique), on ne peut travailler que sur un domaine borné. Il devient donc nécessaire d'imposer des conditions de bord. L'objectif de cette section est de déterminer quelle type de condition au bord est il préférable de prescrire. Cette liberté de choix résulte du fait que nous ne traiterons que le cas où le domaine  $\Omega$  contient la frontière  $\Gamma_t$ .

#### 1.3.1 Conditions de type Dirichlet

Un premier choix consiste à utiliser des conditions de Dirichlet sur le bord de  $\Omega$ . Ceci entraîne de nombreuses difficultés car une condition de compatibilité devient nécessaire et toutes les conditions de Dirichlet ne sont pas admissibles ([19, 3]). Par exemple, considérons le problème en une dimension d'espace suivant : Trouver  $\phi \in \mathbf{W}_{loc}^{1,\infty}(0, 1)$  tel que :

$$|\phi'| = 1 \quad \text{dans } ]0, 1[,$$

Si on impose  $\phi(0) = 0$  et  $\phi(1) = 7$  il ne peut pas y avoir de solution car si la fonction  $\phi$  respecte la condition  $\phi(0) = 0$ , elle est nécessairement majorée par 1. D'autre part, la condition de Dirichlet force la valeur de  $\phi$  sur le bord et peut engendrer un problème de couche limite si la surface de niveau nulle se rapproche du bord (ou le touche).

#### 1.3.2 Conditions de type Neumann

Un autre choix consiste à imposer une condition de type Neumann homogène correspondant à une hypothèse de symétrie. Ce qui nous conduit à la notion de solution de viscosité pour un problème de Neumann homogène ([45]).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(\mathbf{x}, t, \phi, \nabla \phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.3.1)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \bar{\Omega}, \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]. \quad (1.3.3)$$

Avant d'énoncer le résultat sur l'existence et l'unicité de la solution, nous introduisons les hypothèses suivantes sur l'Hamiltonien initialement proposées dans ([45]).

**(H4)**  $\exists \gamma > -\infty$  tel que pour tout  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $s_1 \leq s_2$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$H(\mathbf{x}, t, s_2, \mathbf{p}) - H(\mathbf{x}, t, s_1, \mathbf{p}) \geq \gamma(s_2 - s_1).$$

**(H5)** Soit  $R > 0$  alors il existe  $\omega_R : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega}$ ,  $|t| \leq R$ ,  $\lambda \geq 1$  on a

$$H(\mathbf{x}, t, \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - H(\mathbf{y}, t, \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \geq -\omega_R(\lambda |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|),$$

où  $\omega_R(s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow 0^+$ .

**(H6)**  $\forall R < \infty$  on a

$$\sup\{|H(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) - H(\mathbf{x}, t, \mathbf{q})|; \mathbf{x} \in \Omega, |t| \leq R, |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leq \varepsilon\} \rightarrow 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème 1.3.1.** *Soit  $\phi_0 \in C(\bar{\Omega})$ , soit  $H$  satisfaisant **(H4)**, **(H5)**, **(H6)**. Alors le problème (1.3.1)-(1.3.3) admet une solution unique dans  $C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .*

Application à l'équation level set :

Supposons que  $F(\mathbf{x}, t)$  est uniformément lipschitzienne par rapport à  $\mathbf{x}$  et continue par rapport à  $t$ . Alors l'hamiltonien  $H(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{p}|$  vérifie les hypothèses **(H4)**, **(H5)** et **(H6)**. En effet, pour

**(H4)** on prend  $\gamma = 0$ , comme  $H(\mathbf{x}, t, s, \mathbf{p}) = H(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) \quad \forall s \in \mathbb{R}$  alors pour  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $s_1 \leq s_2$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$

$$H(\mathbf{x}, t, s_2, \mathbf{p}) - H(\mathbf{x}, t, s_1, \mathbf{p}) = 0.$$

**(H5)** Pour  $R > 0$ , on prend  $\omega_R(s) = s$ . Comme  $F$  est uniformément lipschitzienne par rapport à  $\mathbf{x}$  alors il existe  $L > 0$  tel que pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega}$

$$F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t) \geq -L(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 1)$$

d'où pour  $|t| \leq R$ ,  $\lambda \geq 1$ ,

$$H(\mathbf{x}, t, \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - H(\mathbf{y}, t, \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \geq -L(\lambda |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|).$$

**(H6)** Pour tout  $R < \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $|t| \leq R$ ,  $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leq \varepsilon$  nous avons

$$\begin{aligned} |H(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) - H(\mathbf{x}, t, \mathbf{q})| &= |F(\mathbf{x}, t)| \left| |\mathbf{p}| - |\mathbf{q}| \right| \\ |H(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) - H(\mathbf{x}, t, \mathbf{q})| &\leq |F(\mathbf{x}, t)| |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leq |F(\mathbf{x}, t)| \varepsilon. \end{aligned}$$

Si  $\phi_0 \in C(\overline{\Omega})$  alors d'après le théorème 1.3.1 nous en déduisons que la fonction level set  $\phi$  est solution de viscosité du problème de cauchy (1.2.8)-(1.2.9) et que  $\phi \in C(\overline{\Omega} \times [0, T])$ .



## Chapitre 2

# Équation de loi de conservation associée à l'équation level set

Dans ce chapitre, nous nous plaçons à la fois dans le cadre abstrait des équations de type Hamilton-Jacobi du premier ordre, et des équations de type de loi de conservation associées. Ce type de problème est généralement associé à un système faiblement hyperbolique. Par conséquent, la solution de viscosité peut être formellement considérée comme primitive de la solution faible entropique du problème hyperbolique associé. Nous rappelons les résultats rigoureux prouvant l'équivalence des solutions de viscosité et faible entropique associée. Enfin, nous résolvons de manière exacte le problème de Riemann associé à l'équation de loi de conservation puis le problème des demi-plans associé à l'équation level set.

### 2.1 Propriétés de l'équation de loi de conservation

On considère le problème suivant : trouver  $\phi : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\partial_t \phi + H(\mathbf{x}, t, \nabla \phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (2.1.1)$$

$$\phi = \phi_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \quad (2.1.3)$$

nous introduisons la notation  $\mathbf{U} = \nabla \phi$  et appliquons l'opérateur  $\nabla$  à (2.1.1) et (2.1.2). Nous obtenons le système de loi de conservation suivant :  
Trouver  $\mathbf{U} : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla(H(\mathbf{x}, t, \mathbf{U})) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.4)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t = 0) = \nabla \phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \bar{\Omega}, \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]. \quad (2.1.6)$$



Le but de cette section est de rappeler les notions de solutions faibles et de solutions entropiques pour le problème (2.1.4)-(2.1.6), pour plus de détails sur les systèmes de lois de conservation, on peut consulter [42].

### 2.1.1 Étude de l'hyperbolicité

Soient  $\mathbb{E}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  deux fonctions  $C^1$  différentiables de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on posera  $\mathbf{f}_j(\mathbf{U}) = (\mathbf{f}_{j1}(\mathbf{U}), \mathbf{f}_{j2}(\mathbf{U}))^T \forall \mathbf{U} \in \mathbb{E}$ .

On considère le système de loi de conservation :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_{x_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{U}) + \partial_{x_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{U}) = 0, \quad (2.1.7)$$

où  $\mathbf{U} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{E}$ .

On note

–  $A_j(\mathbf{U})$  la matrice jacobienne associée au flux  $\mathbf{f}_j, j = 1, 2$  :

$$(A_j(\mathbf{U}))_{i,k} = \frac{\partial f_{ji}(\mathbf{U})}{\partial u_k}.$$

–  $A(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$  la matrice jacobienne associée au flux  $\mathbf{f} = \sum_{j=1}^2 \nu_j \mathbf{f}_j$  :

$$A(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{j=1}^2 \nu_j A_j(\mathbf{U}), \text{ pour } \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2 \text{ non nul.}$$

#### Définition 2.1.1.

\* Le système (2.1.7) est dit hyperbolique si pour tout  $\mathbf{U}$  dans  $\mathbb{E}$  et tout  $\boldsymbol{\nu}$  vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ , les valeurs propres de  $A(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$  sont réelles et les vecteurs propres associés engendrent l'espace  $\mathbb{R}^2$ .

\* Le système (2.1.7) est dit strictement hyperbolique s'il est hyperbolique et si les valeurs propres de  $A(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$  sont toutes distinctes.

On note  $\lambda_j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$  les valeurs propres de  $A(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$  et  $\mathbf{r}_j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$  (resp.  $\mathbf{l}_j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$ ) les vecteurs propres à droite (resp. à gauche) associés.

#### Application au système de loi de conservation associée à l'équation level set :

Posons  $\mathbf{f}_1(\mathbf{U}) = (H(\mathbf{U}), 0)$ ,  $\mathbf{f}_2(\mathbf{U}) = (0, H(\mathbf{U}))$ . Récrivons l'équation (2.1.4) de manière à avoir le système :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_{x_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{U}) + \partial_{x_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{U}) = 0. \quad (2.1.8)$$

Alors

$$A_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial u_1} & \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial u_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial u_1} & \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

$$A(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{pmatrix} \nu_1 \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial u_1} & \nu_1 \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial u_2} \\ \nu_2 \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial u_1} & \nu_2 \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $A(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$  sont

$$\lambda_1(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) = 0$$

et

$$\lambda_2(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) = \nabla H(\mathbf{U}) \cdot \boldsymbol{\nu}.$$

Si  $\nabla H(\mathbf{U}) = 0$  alors  $A(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) = 0$  et n'importe quelle base de  $\mathbb{R}^2$  est une base de vecteurs propres. Le problème est qu'il existe des couples  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})$  tels que  $\nabla H(\mathbf{U}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$  ce qui implique que le système (2.1.8) n'est pas strictement hyperbolique.

### 2.1.2 Solutions faibles du problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{U}) = 0, \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.1.9)$$

**Définition 2.1.2.** On appelle solution faible de (2.1.9) pour  $\mathbf{U}_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)^2$ , une solution  $\mathbf{U} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)^2$  au sens des distributions c'est-à-dire solution de :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{U} \cdot \partial_t \varphi + \sum_{j=1}^2 \mathbf{f}_j(\mathbf{U}) \cdot \partial_{x_j} \varphi) \, d\mathbf{x} \, dt + \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} = 0 \quad (2.1.10)$$

pour toute fonction  $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)^2$  et telle que  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  appartienne à  $\mathbb{E}$  presque partout.

### 2.1.3 Solutions faibles entropiques

Si la notion de solutions faibles permet l'existence d'une solution de (2.1.9), elle ne s'accompagne pas en général de l'unicité.

### Méthode de viscosité évanescence

La solution physique cherchée est donnée par la limite (si elle existe) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  de la solution  $\mathbf{U}_\varepsilon$  du problème parabolique visqueux :

$$\partial_t \mathbf{U}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{U}_\varepsilon) - \varepsilon \Delta \mathbf{U}_\varepsilon = 0. \quad (2.1.11)$$

Par passage à la limite, on verra que la solution obtenue devra vérifier une propriété supplémentaire liée à la notion d'entropie mathématique.

#### 2.1.3.1 Entropie mathématique

**Définition 2.1.3.** *On suppose  $\mathbb{E}$  convexe. Une fonction  $C^2$  différentiable convexe  $\eta$  de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{R}$  est appelée entropie mathématique pour le système de lois de conservation (2.1.7) s'il existe 2 fonctions  $C^2$  différentiables  $q_1$  et  $q_2$  de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{R}$  appelées flux d'entropie telles que pour des fonctions  $C^2$  différentiables on ait :*

$$\nabla_{\mathbf{U}} \eta(\mathbf{U}) \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{f}_j(\mathbf{U}) = \nabla_{\mathbf{U}} q_j(\mathbf{U}), \text{ pour } j = 1, 2, \quad (2.1.12)$$

où

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{U}} \eta(\mathbf{U}) &= \left( \frac{\partial \eta}{\partial u_1}, \frac{\partial \eta}{\partial u_2} \right), \\ (\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{f}_j(\mathbf{U}))_{i,k} &= \frac{\partial f_{ji}}{\partial u_k} = (A_j(\mathbf{U}))_{ik}. \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.1.** *Si  $\mathbf{U}$  est solution de (2.1.7), alors  $\mathbf{U}$  vérifie une loi de conservation supplémentaire :*

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{U})}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} q_j(\mathbf{U}) = 0$$

#### 2.1.3.2 Solution entropique

Le concept d'entropie étant défini, on obtient la condition supplémentaire que doit vérifier la solution par le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1.** *Supposons que (2.1.7) admette une entropie  $\eta$  avec des flux d'entropie  $q_1$  et  $q_2$ . Soit  $(\mathbf{U}_\varepsilon)_\varepsilon$  une suite de solutions régulières de (2.1.11) telles que :*

- $\|\mathbf{U}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)^2} \leq C$
- $\mathbf{U}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{U}$  presque partout dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ .

Alors la limite  $\mathbf{U}$  est solution de (2.1.7) et vérifie la condition d'entropie :

$$\partial_t \eta + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} q_j(\mathbf{U}) \leq 0 \text{ au sens suivant :} \quad (2.1.13)$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^2} (\eta(\mathbf{U}) \cdot \partial_t \varphi + \sum_{j=1}^2 q_j(\mathbf{U}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^2} \eta(\mathbf{U}_0(\mathbf{x})) \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \geq 0 \quad (2.1.14)$$

pour toute fonction  $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$  avec  $\varphi \geq 0$

On peut alors définir la notion de solution faible entropique.

**Définition 2.1.4.** Une solution entropique est une solution faible qui vérifie la condition (2.1.13) pour toute entropie mathématique.

La proposition suivante permet d'écrire la condition (2.1.13) sous forme d'une inégalité sur les sauts.

**Proposition 2.1.1.** Soit  $\mathbf{U}$  une fonction  $C^1$  différentiable par morceaux solution du système (2.1.9), elle satisfait la condition d'entropie (2.1.13) si et seulement si :

- (i)  $\mathbf{U}$  est solution classique là où elle est  $C^1$ .
- (ii)  $\mathbf{U}$  vérifie l'inégalité de saut d'entropie :

$$n_t[\eta(\mathbf{U})] + \sum_{j=1}^2 n_{x_j}[q_j(\mathbf{U})] \leq 0 \quad (2.1.15)$$

le long des surfaces de discontinuités  $\sum$  dans l'espace des  $(t, x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ ,

où

\*  $\mathbf{n} = (n_t, n_{x_1}, n_{x_2})$  est une normale unitaire à la surface  $\sum$  dirigée de  $-$  vers  $+$ .

\*  $[\mathbf{U}] = \mathbf{U}_+ - \mathbf{U}_-$  pour  $\mathbf{U}_+$  et  $\mathbf{U}_-$  les limites de la fonction régulière  $\mathbf{U}$  de part et d'autre de la discontinuité  $\sum$ .

## 2.2 Liens entre les deux équations

Dans cette section nous nous intéressons au lien entre la solution de viscosité d'une équation d'Hamilton-Jacobi et la solution entropique du système de loi de conservation associée à cette équation. Nous rappelons les résultats classiques et pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [35, 34, 17, 40].

### 2.2.1 Cas unidimensionnel

Dans le cas monodimensionnel, le passage de l'équation d'Hamilton-Jacobi à l'équation de conservation a été montré par [44]. Nous résumons ici les résultats essentiels : Considérons le problème de Cauchy pour l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \partial_t \phi + H(\phi_x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{HJ})$$

Considérons d'autre part le problème de cauchy pour l'équation de conservation

$$\begin{cases} \partial_t u + (H(u))_x = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{LC})$$

**Proposition 2.2.1.** *Sous l'hypothèse (H2), si  $\phi \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0, T))$  est une solution généralisée de (HJ) alors  $u := \phi_x$  est une solution faible de (LC).*

La réciproque de la proposition 2.2.1 est donnée par la proposition suivante [17].

**Proposition 2.2.2.** *Sous l'hypothèse (H2), supposons que  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$  est une solution faible de (LC). Soit  $\phi(x, t) := \int_\alpha^t u(\xi, t) d\xi$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé. Alors  $\phi \in \mathbf{W}_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0, T))$  et  $\phi$  est une solution généralisée de (HJ).*

#### **Application : Lien entre l'équation level set et l'équation de loi de conservation :**

*Ce lien est immédiat et s'obtient grâce aux propositions 2.2.1 et 2.2.2. En effet, dans ce cas l'hamiltonien est  $H(u) = F|u|$  est donc continu.*

**Remarque 2.2.1.** *Si  $H \in C^1(\mathbb{R})$  nous avons une correspondance entre la solution de viscosité du problème (HJ) et la solution entropique du problème (LC) (cf [17]).*

### 2.2.2 Cas général

Soit  $\phi : \mathbb{R}^d \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  la solution de viscosité du problème

$$\begin{cases} \partial_t \phi + H(\mathbf{x}, t, \nabla \phi) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \\ \phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{HJd})$$

Si on pose formellement  $\mathbf{U} = \nabla\phi$  et qu'on applique l'opérateur  $\nabla$  au problème **(HJd)** alors  $\mathbf{U}$  est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \nabla(H(\mathbf{x}, t, \mathbf{U})) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) = \nabla\phi_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\mathbf{LCd})$$

Les problèmes **(HJd)** et **(LCd)** sont équivalents si les solutions sont régulières ( $\phi \in C^2$  et  $\mathbf{U} \in C^1$ ). Mais ceci n'est plus nécessairement vrai pour  $\phi$  solution de viscosité et  $\mathbf{U}$  solution entropique. Néanmoins,  $\phi$  peut être considérée comme une primitive de  $\mathbf{U}$ . En effet, si  $\mathbf{U}$  est connu, alors on peut récupérer  $\phi$  par l'intégration de l'équation différentielle ordinaire pour  $\mathbf{x}$  paramètre fixé

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{x}, t) + H(\mathbf{x}, t, \mathbf{U}) &= 0 && \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \\ \phi(\mathbf{x}; t = 0) &= \phi_0(\mathbf{x}) && \text{dans } \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Nous avons vu dans la section 2.1.1 que le problème **(LCd)** n'est pas strictement hyperbolique pour  $d = 2$ . Cependant, on montre que pour un hamiltonien convexe, la solution de viscosité de **(HJd)** dans  $\mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  est équivalente à la solution entropique dans  $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  (voir [44]). En supposant que la condition initiale  $\phi_0 \in C^1$ , nous donnons une preuve simple de ce résultat (voir [34]). Pour cela, considérons les propositions suivantes.

**Proposition 2.2.3.** *Supposons que  $\phi \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  est la solution de viscosité de **(HJd)** alors  $\mathbf{U} = \nabla\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  est solution faible de **(LCd)**. De plus,  $\mathbf{U}$  est la limite dans  $L^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  pour  $m < \infty$  et au sens de la topologie \*-faible de  $L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  d'une suite  $(\mathbf{U}_\varepsilon)_\varepsilon$  de solutions du problème régularisé de **(LCd)**.*

*Démonstration.* Soit  $\phi$  la solution de viscosité de **(HJd)**. Comme  $H$  est convexe, alors il existe une suite  $\phi_\varepsilon$  uniformément bornée dans  $\mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  de solutions régulières du problème

$$\partial_t \phi_\varepsilon + H(\mathbf{x}, t, \nabla\phi_\varepsilon) = \varepsilon \Delta \phi_\varepsilon \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \quad (2.2.1)$$

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (2.2.2)$$

telles que  $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$  dans  $\mathbf{W}^{1,m}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ . Posons  $\mathbf{U}_\varepsilon = \nabla\phi_\varepsilon$  alors l'application de l'opérateur  $\nabla$  à (2.2.1)-(2.2.2) implique  $\mathbf{U}_\varepsilon$  est solution du problème

$$\partial_t \mathbf{U}_\varepsilon + \nabla(H(\mathbf{x}, t, \mathbf{U}_\varepsilon)) = \varepsilon \Delta \mathbf{U}_\varepsilon \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{x}, t = 0) = \nabla\phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \quad (2.2.4)$$

En notant par  $\mathbf{U}$  la limite \*-faible de  $\mathbf{U}_\varepsilon$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ , en multipliant (2.2.3)-(2.2.4) par une fonction test et en intégrant par parties, on peut montrer facilement que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,  $\mathbf{U}$  est solution faible de **(LCd)**. Ainsi, par construction  $\mathbf{U}$  est la solution entropique de **(LCd)**.  $\square$

**Remarque 2.2.2.** *En fait, sin on avait la convergence  $\mathbf{U}_\varepsilon \longrightarrow \mathbf{U}$  presque partout, on aurait une convergence forte  $L^p$  par le Lebesgue.*

Réciproquement, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 2.2.4.** *Soit  $\mathbf{U} \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  une solution faible de (LCd) obtenue par la méthode de viscosité évanescence, c'est-à-dire  $\mathbf{U} \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  est la limite dans  $L^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  et dans la topologie \*-faible de  $L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  d'une suite uniformément bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$   $(\mathbf{U}_\varepsilon)_\varepsilon$  de solutions du problème (2.2.3)-(2.2.4). Alors il existe une unique solution de viscosité  $\phi$  à (HJd) satisfaisant*

$$\nabla \phi = \mathbf{U} \text{ presque partout.} \quad (2.2.5)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{U}_\varepsilon$  une suite de solution du problème (2.2.3)-(2.2.4) et  $\phi_\varepsilon$  l'unique solution du problème

$$\partial_t \phi_\varepsilon - \varepsilon \Delta \phi_\varepsilon = -H(\mathbf{x}, t, \mathbf{U}_\varepsilon) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \quad (2.2.6)$$

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (2.2.7)$$

$\phi_\varepsilon$  est une solution régulière gloable de (2.2.6)-(2.2.7). De plus, par le principe du maximum, il existe une constante  $C = C(T)$  indépendante de  $\varepsilon$  tel que

$$\|\mathbf{U}_\varepsilon\|_\infty \leq C(T) \text{ pour } 0 < t \leq T. \quad (2.2.8)$$

Pour estimer  $\nabla \phi_\varepsilon$ , on applique l'opérateur  $\nabla$  à (2.2.6)-(2.2.7) et on obtient

$$\partial_t \nabla \phi_\varepsilon - \varepsilon \Delta \nabla \phi_\varepsilon = -\nabla H(\mathbf{x}, t, \mathbf{U}_\varepsilon) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \quad (2.2.9)$$

$$\nabla \phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t = 0) = \nabla \phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (2.2.10)$$

Il suit de (2.2.3)-(2.2.4) et (2.2.9)-(2.2.10) que

$$\partial_t (\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{U}_\varepsilon) - \varepsilon \Delta (\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{U}_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \quad (2.2.11)$$

$$(\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{U}_\varepsilon)(\mathbf{x}, t = 0) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (2.2.12)$$

L'unicité du problème de Cauchy de l'équation de la chaleur (2.2.11)-(2.2.12) donne

$$\nabla \phi_\varepsilon = \mathbf{U}_\varepsilon. \quad (2.2.13)$$

La combinaison de ce résultat avec (2.2.6)-(2.2.7) montre que

$$\partial_t \phi_\varepsilon + H(\mathbf{x}, t, \nabla \phi_\varepsilon) = \varepsilon \Delta \phi_\varepsilon \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times ]0, T[, \quad (2.2.14)$$

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (2.2.15)$$

De plus,  $\phi_\varepsilon$  est uniformément bornée dans  $\mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ , donc il existe  $\phi \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  tel que

$$\begin{cases} \phi_\varepsilon \rightarrow \phi \text{ uniformément,} \\ \nabla \phi_\varepsilon \rightarrow \nabla \phi \text{ dans } L^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+), \end{cases} \quad (2.2.16)$$

où  $0 < m < \infty$ . Il vient de (2.2.16), (2.2.13) que

$$\mathbf{U} = \nabla \phi \text{ presque partout} \quad (2.2.17)$$

De plus,  $\phi$  est l'unique solution de viscosité de **(HJd)** par la théorie classique.  $\square$

**Application : Lien dans le cas général :**

*Si nous supposons que la fonction  $F$  ne change pas de signe ( $F > 0$  par exemple) alors l'hamiltonien  $H(\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)) = F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)|$  est convexe. En effet, soit  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{U}_1(\mathbf{x}, t), \mathbf{U}_2(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2$ , alors*

$$\begin{aligned} H(\alpha \mathbf{U}_1(\mathbf{x}, t) + (1 - \alpha) \mathbf{U}_2(\mathbf{x}, t), t) &= F(\mathbf{x}, t) |\alpha \mathbf{U}_1(\mathbf{x}, t) + (1 - \alpha) \mathbf{U}_2(\mathbf{x}, t)| \\ &\leq F(\mathbf{x}, t) \alpha |\mathbf{U}_1(\mathbf{x}, t)| + F(\mathbf{x}, t) (1 - \alpha) |\mathbf{U}_2(\mathbf{x}, t)|, \\ &\leq \alpha H(\mathbf{U}_1(\mathbf{x}, t)) + (1 - \alpha) H(\mathbf{U}_2(\mathbf{x}, t)). \end{aligned}$$

## 2.3 Rappels sur les équations de lois de conservation scalaires

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats sur les équations de lois de conservation scalaires (cf. [42]) que nous utiliserons dans la section 2.4. En effet, la résolution du problème de Riemann dans le cas scalaire nous permettra de traiter le problème de Riemann associé à l'équation de loi de conservation obtenu en dérivant l'équation de level set.

### 2.3.1 Solutions faibles entropiques

Soit  $\mathbb{E}$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction  $C^1$  dérivable de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{R}$ , on considère le problème de cauchy suivant :

Trouver  $u : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

**Théorème 2.3.1.** *Une fonction  $u$ ,  $C^1$  par morceaux, est solution faible du problème (2.3.1) dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  si et seulement si :*



- (i)  $u$  est solution classique là où elle est  $C^1$
- (ii)  $u$  vérifie la condition de saut de Rankine-Hugoniot :

$$[f(u)] = \sigma[u] \tag{2.3.2}$$

le long des surfaces de discontinuités  $\Sigma$  dans l'espace des  $(t, x)$  de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  avec :

- \*  $\mathbf{n} = (n_t, n_x)$  est une normale unitaire à la surface  $\Sigma : x = \xi(t)$ .
- \*  $[u] = u_+ - u_-$  pour  $u_+$  et  $u_-$  les limites de la fonction régulière  $u$  de part et d'autre de la discontinuité  $\Sigma$  (la normale  $\mathbf{n}$  étant dirigée de  $-$  vers  $+$ )
- \*  $\sigma = \frac{d\xi}{dt}$

**Proposition 2.3.1.** Une fonction  $u$ ,  $C^1$  par morceaux et solution du problème scalaire dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  satisfait la condition d'entropie (2.1.13) si et seulement si :

- (i)  $u$  est solution classique là où elle est  $C^1$ .
- (ii)  $u$  vérifie l'inégalité de saut d'entropie :

$$\sigma[\eta(u)] \geq [q(u)] \tag{2.3.3}$$

On utilisera par la suite un autre critère d'entropie pour le problème de Riemann qui est la condition d'entropie au sens de Lax.

### 2.3.2 Problème de Riemann

On appelle problème de Riemann  $R(u_g, u_d)$  le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \tag{2.3.4}$$

où  $u_g$  et  $u_d$  sont des constantes réelles données. L'objectif de cette section est d'introduire tous les outils permettant de déterminer la solution entropique du problème de Riemann. Par la suite, on posera  $\lambda(u) = f'(u)$ , sauf mention du contraire.

On note que si  $u(x, t)$  est une solution du problème (2.3.4), alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$  strictement positif  $u_a(x, t) = u(ax, at)$  est encore une solution. Soit  $a = \frac{1}{t}$  alors  $u(\frac{x}{t}, 1) = v(\frac{x}{t})$  est une solution. On cherche donc une solution autosimilaire au problème de Riemann de la forme  $v(\frac{x}{t})$ . En notant  $\xi = \frac{x}{t}$ , l'équation (2.3.4) donne

$$-\frac{x}{t^2}v'(\xi) + f'(v(\xi))v'(\xi)\frac{x}{t} = 0, \tag{2.3.5}$$

en simplifiant (2.3.5) par  $\frac{1}{t}$ , on obtient :

$$f'(v(\xi))v'(\xi) = \xi v'(\xi). \quad (2.3.6)$$

Pour  $\xi = \frac{x}{t}$ , on a :

$$\begin{aligned} \xi &\xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} -\infty \text{ si } x < 0, \\ \xi &\xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

Donc les conditions initiales de  $v$  s'écrivent :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = u_g, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = u_d.$$

La nature de la solution  $v$  dépend de la valeur de  $v'(\xi)$ . Si  $v'(\xi) \neq 0$  alors (2.3.6) devient

$$f'(v(\xi)) = \xi \quad (2.3.7)$$

### 2.3.2.1 Onde de détente ou onde de raréfaction

Soient  $u_g$  et  $u_d$  données telles que  $\lambda(u_g) < \lambda(u_d)$ . La solution auto-similaire admet une raréfaction dans le domaine si  $v$  vérifie

$$\lambda(v(\zeta)) = \zeta \quad \forall \zeta \in [\zeta_g, \zeta_d]. \quad (2.3.8)$$

**Définition 2.3.1.** *On appelle onde de détente ou onde de raréfaction reliant  $u_g$  et  $u_d$ , une solution régulière  $u(\zeta)$  de (2.3.8) et vérifiant (2.3.4) avec  $u_g = u(\zeta_g)$  et  $u_d = u(\zeta_d)$ .*

L'existence d'une solution au problème (2.3.8) correspond à l'existence d'une solution à une équation différentielle. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure au moins localement l'existence et l'unicité de la solution.

**Proposition 2.3.2.** *Etant donné un état  $u_g$  dans  $\mathbb{E}$ , si  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  alors il existe localement une courbe régulière  $R_k(u_g)$  d'états  $u_d$  de  $\mathbb{E}$  qui peut être relié à  $u_g$  à droite par une onde de raréfaction.*

### 2.3.2.2 Courbes de choc et choc entropique

Si  $u_g$  et  $u_d$  sont choisis tels que  $\lambda(u_g) \geq \lambda(u_d)$  alors le domaine  $\lambda(u_g) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda(u_d)$  n'existe pas. On alors cherche des solutions discontinues constantes par morceaux qui relient  $u_g$  et  $u_d$ . Elles doivent donc vérifier la condition de Rankine-Hugoniot (2.3.2) et seront alors de la forme :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t, \\ u_d & \text{si } x > \sigma t, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

avec  $\sigma(u_g - u_d) = f(u_g) - f(u_d)$ .

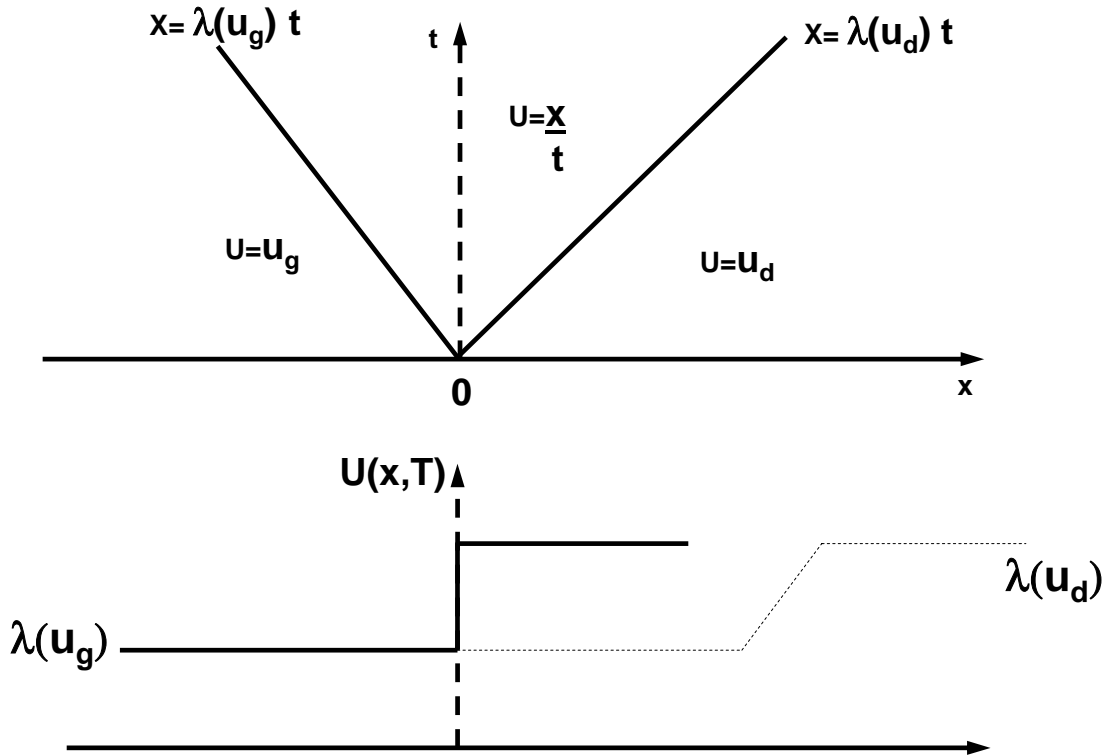


FIGURE 2.1 – Représentation d'une onde de raréfaction

**Proposition 2.3.3.** *Etant donné un état  $u_g$  dans  $\mathbb{E}$ , si  $f$  est de classe  $C^2$  alors il existe localement une courbe régulière  $S_k(u_g)$  d'états  $u_d$  de  $\mathbb{E}$  qui peuvent être reliés à  $u_g$  à droite par un choc.*

La proposition suivante définit les chocs entropiques pouvant être reliés à  $u_d$  à droite.

**Proposition 2.3.4.** *Soit  $u_g$  un état dans  $\mathbb{E}$ . Soit  $(\eta, q)$  un couple entropique. Si  $\eta$  est strictement convexe, l'inégalité d'entropie (2.3.3) a lieu pour  $u_d$  sur la portion de la courbe  $S_k(u_g)$ , c'est-à-dire si  $\lambda(u_d) < \lambda(u_g)$ .*

On peut envisager une autre condition pour éliminer les chocs non physiques. Un choc est déclaré admissible s'il vérifie la condition de Lax :

$$\lambda(u_d) < \sigma = \frac{d\zeta}{dt} < \lambda(u_g). \quad (2.3.10)$$

La proposition suivante permet de faire le lien avec la condition d'entropie.

**Proposition 2.3.5.** *On suppose que  $(u_g, u_d)$  est un choc faible i.e que  $\|u_g - u_d\|$  est petit.*

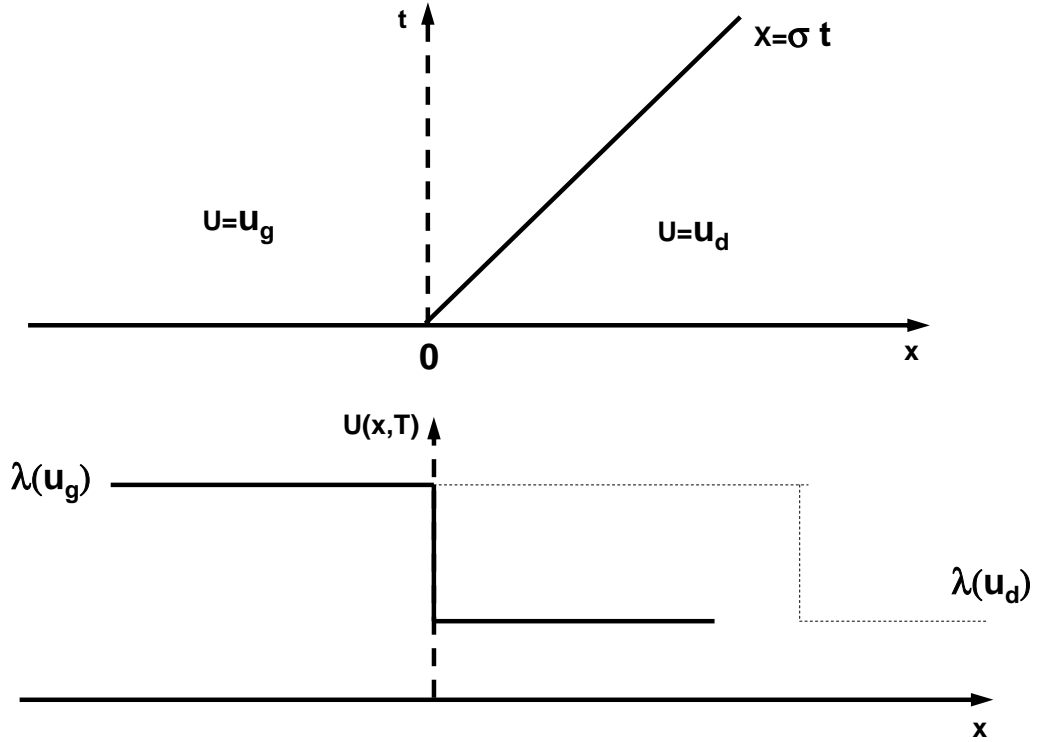


FIGURE 2.2 – Représentation d'une onde de choc

- \* Si ce choc vérifie la condition de choc de Lax (2.3.10) il vérifie alors l'inégalité d'entropie (2.3.3) pour toute entropie convexe du système (2.1.7)
- \* Si ce choc vérifie l'inégalité d'entropie (2.3.3) pour une entropie convexe du système (2.1.7), il vérifie les conditions de choc de Lax (2.3.10).

### 2.3.2.3 Discontinuité de contact

**Proposition 2.3.6.** On suppose que  $\lambda(u) = \text{cte}$  et on se donne un état  $u_g \in \mathbb{E}$ . Alors il existe localement une courbe régulière  $C_k(u_g)$  d'états  $u_d \in \mathbb{E}$  vérifiant

$$\lambda(u_g) = \lambda(u_d).$$

La solution discontinue  $(u_g, u_d)$  est appelée discontinuité de contact.

**Proposition 2.3.7.** On se donne  $(\eta, q)$  un couple entropique. Si  $\eta$  est strictement convexe, l'inégalité d'entropie (2.1.15) pour la discontinuité de contact devient

$$\forall u_d \in C_k(u_g) \quad q(u_d) - q(u_g) = \lambda(u)(\eta(u_d) - \eta(u_g))$$

### 2.3.2.4 Résolution théorique du problème de Riemann

**Théorème 2.3.2.** Si  $u_g \in \mathbb{E}$ , alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}(u_g)$  de  $u_g$  dans  $\mathbb{E}$  tel que si  $u_d \in \mathcal{V}(u_g)$ , le problème de Riemann admet une solution faible entropique

qui est constituée en au plus 2 états constants séparés par une onde de raréfaction, soit par une ondes de choc admissible ou une par discontinuité de contact. Une telle solution faible est unique.

En conséquence, la position relative de  $\lambda(u_g)$  et  $\lambda(u_d)$  permet de savoir si nous avons un choc ou une détente.

## 2.4 Le problème des deux demi-plans pour l'équation level set

L'objectif de cette section est d'étudier un problème de Riemann pour l'équation de loi de conservation en  $\mathbf{U}$ . Ce problème dérive du problème particulier formulé par la fonction  $\phi$ . Nous allons considérer dans cette section que la vitesse  $F$  est constante et que le domaine est unifié  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Soit  $\phi_0$  une fonction continue lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Le problème est :

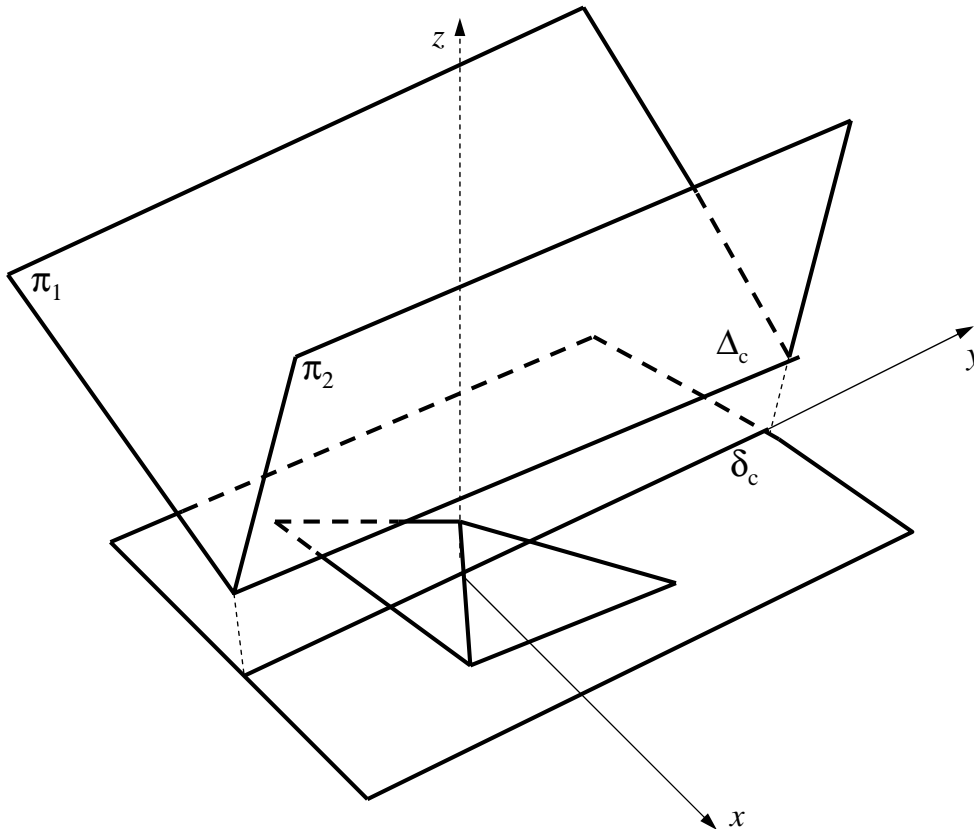


FIGURE 2.3 – Représentation du problème des deux demi-plans dans le cas général

Trouver  $\phi : \mathbb{R}^2 \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t) |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)| &= 0 && \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, T], \\ \phi &= \phi_0 && \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où  $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$  est un plan, la solution est tout simplement  $\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - tF|\mathbf{a}|$ .

Si l'on réécrit le problème en terme de loi de conservation, on obtient le problème : Trouver  $\mathbf{U} : \mathbb{R}^2 \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + F |\nabla \mathbf{U}| &= 0 && \text{dans } \mathbb{R}^2 \times ]0, T), \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t = 0) &= \nabla \phi_0(\mathbf{x}) && \text{dans } \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Si  $\phi_0$  est l'équation d'un plan,  $\mathbf{U}_0(\mathbf{x})$  est un vecteur constant et la solution évidente est  $\mathbf{U} = \mathbf{a}$ .

Nous allons maintenant considérer l'équation de level-set avec une condition initiale caractérisée par deux demi-plans. Cette étude est motivée par les problèmes de Riemann qui interviennent au niveau de chaque interface entre deux éléments.

## 2.4.1 Introduction au problème des demi-plans

Soit  $\pi_1$  et  $\pi_2$  deux plans de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $z = \phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{x}$ , pour  $i = 1, 2$ . On note alors

$$\phi_0^m = \min(\phi_1, \phi_2), \quad \phi_0^M = \max(\phi_1, \phi_2).$$

Si  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ , on retrouve le problème du plan traité précédemment. Nous supposons dans toute la suite que  $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$ . L'objectif est de déterminer la solution théorique de l'équation de level-set avec  $\phi_0^m$  ou  $\phi_0^M$  comme condition initiale.

### 2.4.1.1 Orientation

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{x} = (x, y)^T, \quad \mathbf{X} = (x, y, z)^T,$$

puisque  $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$ , les deux demi-plans se coupent en une droite  $\Delta_c \in \mathbb{R}^3$  passant par l'origine  $O$  d'équation

$$(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) \cdot \mathbf{x} = 0, \quad z = \phi_1(\mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x}).$$

On notera alors par  $\delta_c$  la projection de la droite  $\Delta_c$  dans le plan  $(x, y)$  et  $\delta_c$  a pour équation

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \text{avec } \mathbf{W} = \frac{\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2}{|\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2|}.$$

D'autre part, on note par  $\mathbf{V}$  l'unique vecteur tel que  $\{\mathbf{V}, \mathbf{W}\}$  forment une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^2$ . En conséquence,  $\mathbf{V}$  est un vecteur directeur de  $\delta_c$ .

Le vecteur  $\mathbf{W}$  est perpendiculaire à la droite  $\delta_c$  séparant deux demi-plans que nous noterons  $\mathcal{P}_g$  et  $\mathcal{P}_d$ . On choisit les indices  $g$  et  $d$  de manière à ce que  $\mathbf{W}$  soit orienté de  $\mathcal{P}_g$  vers  $\mathcal{P}_d$ . Ceci définit de manière unique la gauche et la droite (voir figure 2.4).

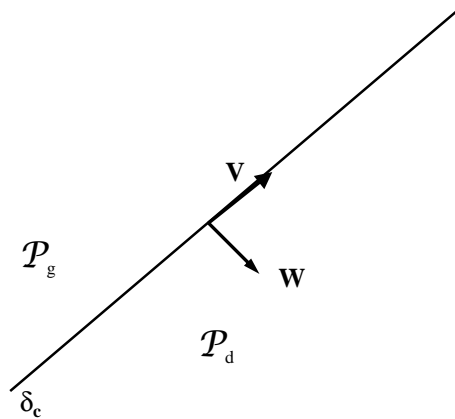


FIGURE 2.4 – Orientation des vecteurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$ , choix de  $\mathcal{P}_g$  et  $\mathcal{P}_d$ .

### 2.4.1.2 Condition initiale pour $\phi$ et $\mathbf{U}$

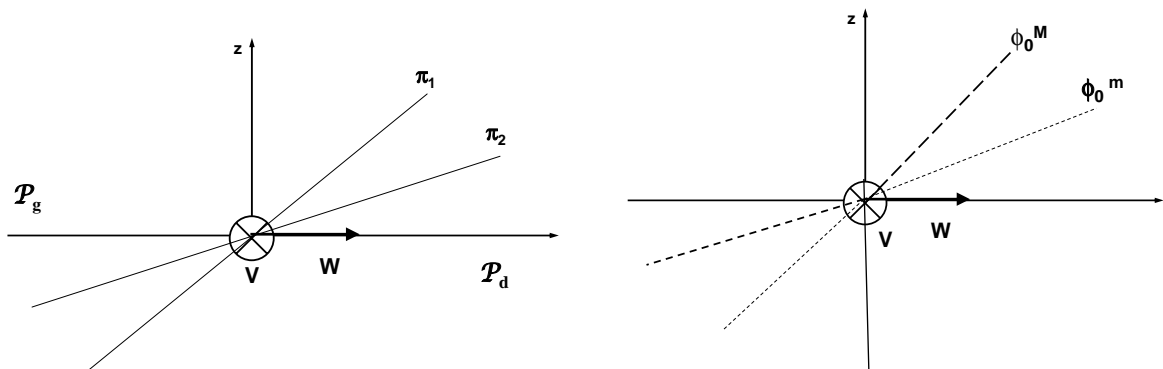


FIGURE 2.5 – Cas  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_1 > \mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_2$

Par construction, le vecteur  $\mathbf{W}$  va de la gauche vers la droite. Si  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_1 > \mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_2$ , cela veut dire que  $\phi_1 \geq \phi_2$  sur le demi-plan  $\mathcal{P}_d$  et  $\phi_1 \leq \phi_2$  sur le demi-plan  $\mathcal{P}_g$ . En conséquence, on a

$$\begin{cases} \phi_0^m = \phi_1 \text{ sur } \mathcal{P}_g \text{ et } \phi_0^m = \phi_2 \text{ sur } \mathcal{P}_d, \\ \phi_0^M = \phi_2 \text{ sur } \mathcal{P}_g \text{ et } \phi_0^M = \phi_1 \text{ sur } \mathcal{P}_d. \end{cases}$$

De même, si  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_1 < \mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_2$  on a

$$\begin{cases} \phi_0^m = \phi_2 \text{ sur } \mathcal{P}_g \text{ et } \phi_0^m = \phi_1 \text{ sur } \mathcal{P}_d, \\ \phi_0^M = \phi_1 \text{ sur } \mathcal{P}_g \text{ et } \phi_0^M = \phi_2 \text{ sur } \mathcal{P}_d. \end{cases}$$

En conclusion, on peut par exemple décider de choisir  $\phi_1$  à gauche et  $\phi_2$  à droite en sélectionnant  $\phi_0^m$  ou  $\phi_0^M$  comme condition initiale.

Considérons maintenant la condition initiale  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_1$  sur  $\mathcal{P}_g$  et  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_2$  sur  $\mathcal{P}_d$ . Il lui correspond alors une fonction  $\phi_0$  à choisir parmi  $\phi_0^m$  et  $\phi_0^M$  tel que  $\nabla \phi_0 = \mathbf{U}_0$ . En effet, si  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_1 > \mathbf{W} \cdot \mathbf{U}_2$ , on prend  $\phi_0 = \phi_0^m$  sinon on choisit  $\phi_0 = \phi_0^M$ .

Nous résumons dans la proposition suivante la construction de la condition initiale.

**Proposition 2.4.1.** *Pour un couple de vecteurs  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  donné, on construit les vecteurs  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{V}$  ainsi que la droite  $\delta_c$  séparant les demi-plans  $\mathcal{P}_g$  et  $\mathcal{P}_d$  avec  $\mathbf{W}$  allant de gauche à droite. On choisit alors  $\phi_0$ ,  $\phi_0^m$  et  $\phi_0^M$  tel que  $\mathbf{U}_g = \mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_d = \mathbf{U}_2$ .*

**Remarque 2.4.1.** *Il est important de noter que les deux demi-plans correspondant avec le problème en  $\phi$  sont spécifiques aux conditions initiales. Contrairement à un problème de Riemann classique, la droite séparant les deux états constants ne peut pas être quelconque, elle dépend du choix des deux vecteurs (voir la figure 2.3).*

## 2.4.2 Simplification du problème de Riemann

Etant données  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , on considère le problème de Riemann suivant : trouver  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  tel que

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot (F |\mathbf{U}| \text{Id}) &= 0, \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{U}_g, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g, \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{U}_d, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d. \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.2.** *Notons que  $\nabla(F |\mathbf{U}|) = \nabla \cdot (F |\mathbf{U}| \text{Id})$ .*



On procède au changement de variable suivant en introduisant les coordonnées dans la base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{W}, \mathbf{V}\}$

$$\mathbf{x} = \zeta \mathbf{W} + \eta \mathbf{V}.$$

Cette transformation correspond à une rotation dans la nouvelle base  $\mathcal{B}$ , où  $\mathbf{W}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Comme la norme est invariante par rotation, on a donc le problème de Riemann suivant

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}(\zeta, \eta, t) + \nabla_{\zeta, \eta} (F |\mathbf{U}(\zeta, \eta, t)|) = 0, \\ \mathbf{U}(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} \omega_g \\ \omega_0 \end{pmatrix} \text{ si } \zeta < 0, \quad \eta \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{U}(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} \omega_d \\ \omega_0 \end{pmatrix} \text{ si } \zeta > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec

- $\omega_g = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W}$ ,
- $\omega_d = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{W}$ ,
- $\omega_0 = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{V}$ , par construction de  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{V}$ .

On note que si  $\mathbf{U}(\zeta, \eta, t)$  est une solution alors pour tout  $c \in \mathbb{R}$   $\mathbf{U}(\zeta, \eta + c, t)$  est encore solution du problème de Riemann donc  $\partial_\eta \mathbf{U} = 0$ . Le problème se réduit alors à

$$\begin{cases} (\partial_t \mathbf{U}(\zeta, t) + \partial_\zeta (F |\mathbf{U}(\zeta, t)|)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbf{U}(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} \omega_g \\ \omega_0 \end{pmatrix} \text{ si } \zeta < 0, \quad \eta \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{U}(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} \omega_d \\ \omega_0 \end{pmatrix} \text{ si } \zeta > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En effectuant le produit scalaire avec  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on en déduit que

$$\partial_t (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = 0$$

donc

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \omega_0, \quad \forall \eta, \zeta, t.$$

Soit  $\omega(\zeta, t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{W}$ , la composante de  $\mathbf{U}$  suivant la direction  $\mathbf{W}$ , la fonction  $\omega$  satisfait le problème de Riemann scalaire monodimensionnel suivant

$$\begin{cases} \partial_t \omega(\zeta, t) + F \partial_\zeta \sqrt{w^2(\zeta, t) + w_0^2} = 0, \\ \omega(\zeta, 0) = \omega_g, \zeta < 0, \\ \omega(\zeta, 0) = \omega_d, \zeta > 0. \end{cases}$$

### 2.4.3 Résolution théorique du problème de Riemann

Dans un premier temps, nous allons supposer que  $\omega_0 \neq 0$ . Nous envisagerons le cas  $\omega_0 = 0$  comme le cas limite  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Posons  $f(\omega) = F \sqrt{w^2 + w_0^2}$ , on a donc

$$\lambda(\omega) = f'(\omega) = \frac{F\omega}{\sqrt{w^2 + w_0^2}}, \quad f''(\omega) = \frac{F\omega_0^2}{(w^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On en déduit que  $f'$  est croissante si  $F \geq 0$  et décroissante si  $F \leq 0$ .

**Proposition 2.4.2.** *Soient  $\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d \in \mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{W} = \mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d$ . Si les deux réels  $\omega_g$  et  $\omega_d$  sont définis par*

$$\omega_g = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W}, \quad \omega_d = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{W},$$

alors  $\omega_g \geq \omega_d$ .

*Démonstration.* Comme

$$(\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d) \cdot (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d) \geq 0$$

alors

$$-(\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d) \cdot (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d) \leq 0.$$

En développant, on obtient

$$2\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{U}_d - \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{U}_d \leq 0.$$

Ceci équivaut à

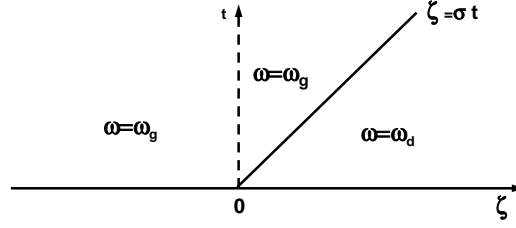
$$\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{U}_d - \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{U}_d \leq \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{U}_g - \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{U}_d.$$

D'où

$$\omega_d = \mathbf{U}_d \cdot (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d) \leq \mathbf{U}_g \cdot (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d) = \omega_g.$$

□

**Remarque 2.4.3.** *Afin d'obtenir à la fois  $\mathbf{W} = \mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d$  et  $\mathbf{U}_g$  à gauche et  $\mathbf{U}_d$  à droite, on fait un choix  $\phi_0$  entre  $\phi_0^m$  et  $\phi_0^M$ . Si on considère l'autre possibilité, c'est-à-dire  $\mathbf{W} = -(\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d)$ , on peut alors retrouver la situation précédente en effectuant le changement de variable  $\zeta \rightarrow -\zeta$ . Ceci implique que la vitesse  $F > 0$  devient  $-F < 0$ . En conséquence, on choisira toujours la situation  $\mathbf{W} = \mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d$  avec  $\mathbf{U}_g$  à gauche et  $\mathbf{U}_d$  à droite mais  $F$  peut être soit positif, soit négatif.*


 FIGURE 2.6 – Représentation d'une onde de choc dans la cas  $\omega_0 \neq 0$ 

### 2.4.3.1 Étude du choc $\omega_0 \neq 0$

Nous supposons que  $F > 0$ , alors  $f'(\omega_g) > f'(\omega_d)$  car  $\omega_g > \omega_d$  et la condition de Lax indique que l'on est en présence d'un choc. La condition de Rankine-Hugoniot implique

$$\sigma = \frac{f(\omega_g) - f(\omega_d)}{\omega_g - \omega_d} = F \frac{\omega_g + \omega_d}{\sqrt{w_g^2 + w_0^2} + \sqrt{w_d^2 + w_0^2}}.$$

Par définition de  $\omega_g$  et  $\omega_d$ , on peut réécrire la formule sous la forme

$$\sigma = F \frac{(\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{U}_g| + |\mathbf{U}_d|} = F \frac{|\mathbf{U}_g| - |\mathbf{U}_d|}{|\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d|}.$$

### 2.4.3.2 Étude du choc $\omega_0 = 0$

Cette situation correspond au cas où  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  sont colinéaires, en particulier  $\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d \parallel \mathbf{U}_g \parallel \mathbf{U}_d$ . On passe à la limite avec  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Comme  $\omega_g \geq \omega_d$  nous avons encore  $f'(\omega_g) > f'(\omega_d)$ . La condition de Lax indique que l'on est en présence d'un choc. Comme précédemment,  $\sigma$  est encore défini par

$$\sigma = F \frac{|\mathbf{U}_g| - |\mathbf{U}_d|}{|\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d|}.$$

### 2.4.3.3 Étude de la raréfaction $\omega_0 \neq 0$

On se place maintenant dans le cas d'une raréfaction, c'est-à-dire que l'on suppose que  $F < 0$  alors  $f'(\omega_g) < f'(\omega_d)$  car  $\omega_d < \omega_g$ . On cherche une solution autosimilaire qui satisfait

$$f'(\omega(\zeta, t)) = \frac{\zeta}{t}. \quad (2.4.1)$$

En premier lieu, on note que  $f'(\omega)$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]F, -F[$ , donc  $\lambda(\omega_g), \lambda(\omega_d) \in ]F, -F[$ . De la relation (2.4.1), on tire

$$F^2 \omega^2 = \left( \frac{\zeta}{t} \right)^2 (\omega^2 + \omega_0^2),$$

soit encore

$$\omega = -\frac{\frac{\zeta}{t} |\omega_0|}{\sqrt{F^2 - \left( \frac{\zeta}{t} \right)^2}}, \quad \frac{\zeta}{t} \in ]F, -F[. \quad (2.4.2)$$

La rarefaction se développe dans le cône

$$F < f'(\omega_g) \leq \frac{\zeta}{t} \leq f'(\omega_d) < -F$$

et  $\omega$  est donné par la relation (2.4.2). Nous avons trois situations distinctes :

1. si  $f'(\omega_g) < f'(\omega_d) < 0$  alors la raréfaction est dans le plan gauche et  $\omega(0, t) = \omega_d$ . Le flux traversant la droite  $\delta_c$  est  $F|\mathbf{U}_d|$  (voir figure 2.7-(a)).
2. si  $0 < f'(\omega_g) < f'(\omega_d)$  alors la raréfaction est dans le plan droit et  $\omega(0, t) = \omega_g$ . Le flux traversant la droite  $\delta_c$  est  $F|\mathbf{U}_g|$  (voir figure 2.7-(b)).
3. si  $f'(\omega_g) < 0 < f'(\omega_d)$ , cela donne lieu à une raréfaction traversant l'axe  $\zeta = 0$ . On a alors  $\omega(0, t) = 0$ . Le flux traversant la droite  $\delta_c$  est  $F|\omega_0|$  (voir figure 2.7-(c)).

#### 2.4.3.4 Étude de la raréfaction $\omega_0 = 0$

La situation  $\omega_0 = 0$  correspond au cas où  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  sont colinéaires, en particulier  $\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d \parallel \mathbf{U}_g \parallel \mathbf{U}_d$ . Pour tout  $\omega_0 \neq 0$ , la propriété que  $f'(\omega)$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]F, -F[$  est toujours vraie et la raréfaction se développe entre  $f'(\omega_g)$  et  $f'(\omega_d)$ . On note par  $f'_l$  et  $\omega_l$  la limite de  $f'$  et de  $\omega(\zeta, t)$  lorsque  $\omega_0$  tend vers 0 dans les relations (2.4.1) et (2.4.2). La fonction  $f'$  devient

$$f'_l(\omega) = -F, \text{ si } \omega < 0, \quad f'_l(\omega) = +F, \text{ si } \omega > 0.$$

D'autre part, la relation (2.4.2) donne comme limite  $\omega_l(\zeta, t) = 0$ . On distingue trois cas.

1. Si  $\omega_g < \omega_d < 0$  alors

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} f'(\omega_g) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} f'(\omega_g) = -F.$$

Par conséquent la raréfaction se réduit à une discontinuité de contact évoluant à la vitesse  $\sigma = -F$  (voir figure 2.8-(a)).

2. Si  $0 < \omega_g < \omega_d$  alors la raréfaction se réduit à une discontinuité de contact évoluant à la vitesse  $\sigma = +F$  (voir figure 2.8-(b)).
3. Dans le cas où  $\omega_d < 0 < \omega_g$ , avec  $F < 0$ , on a  $f'_l(\omega_g) = +F$  et  $f'_l(\omega_d) = -F$  avec  $\omega_l(\zeta, t) = 0$  sur le domaine  $[F, -F]$ . C'est le cas limite de la raréfaction se réduisant à la solution nulle sur le cône (voir figure 2.8-(c)).

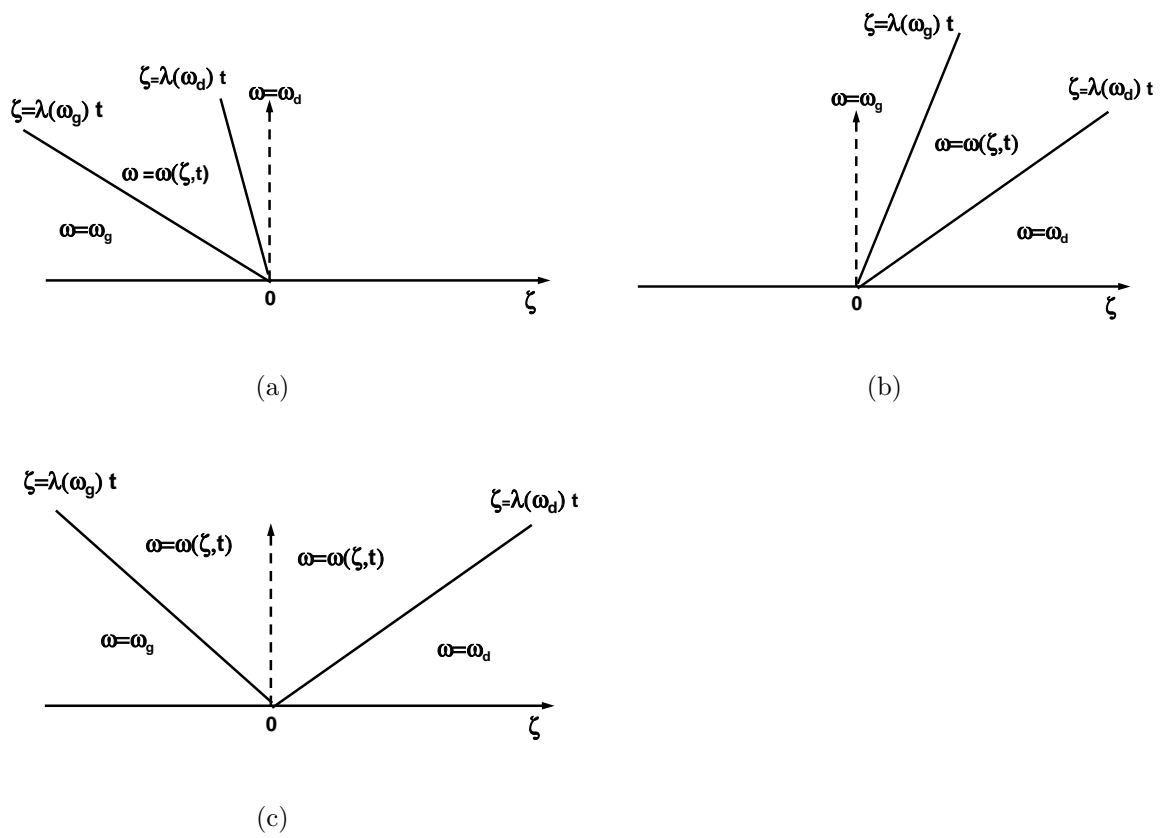


FIGURE 2.7 – Représentation d'une onde de raréfaction dans la cas  $\omega_0 \neq 0$

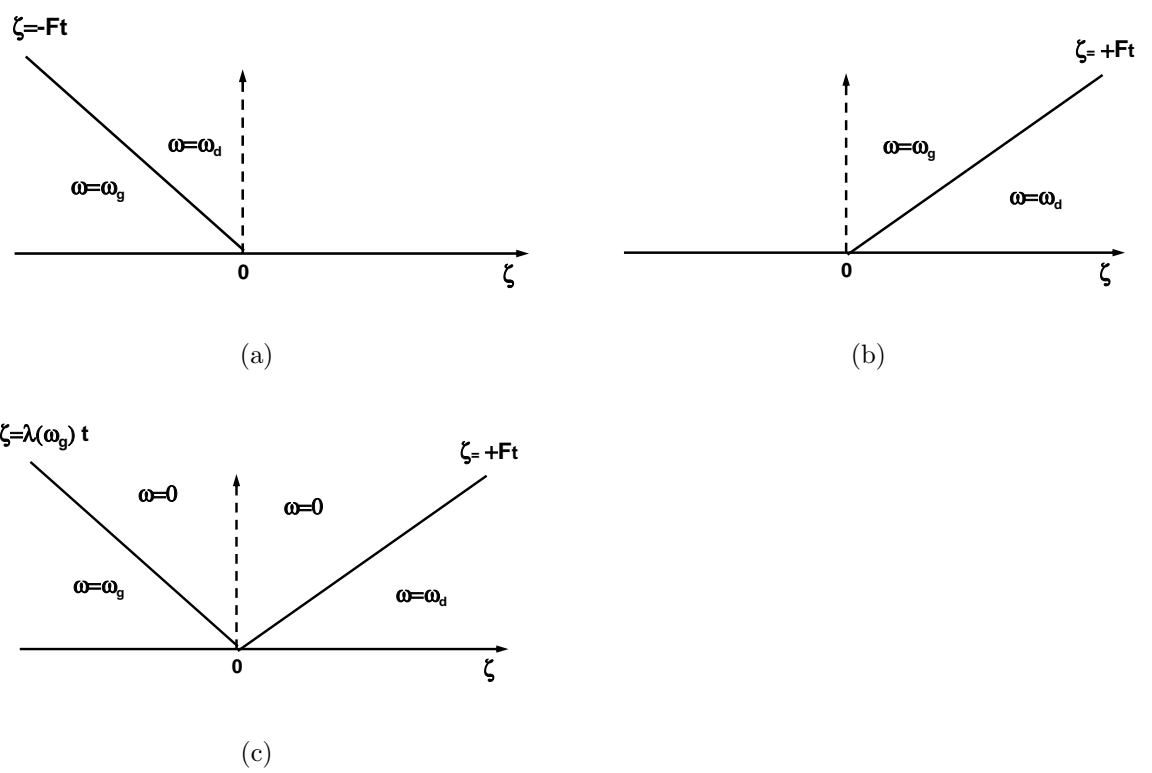


FIGURE 2.8 – Représentation d'une onde de raréfaction dans la cas  $\omega_0 = 0$

### 2.4.4 Solution théorique pour la level set

A partir de la solution en  $\mathbf{U}$ , nous allons construire la solution en  $\phi$ . Nous rappelons que pour  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  donnés, on détermine le vecteur  $\mathbf{W} = \frac{\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d}{|\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d|}$  ainsi que la droite  $\delta_c$  et les deux demi-plans  $\mathcal{P}_g$  et  $\mathcal{P}_d$ . On fait le choix de la bonne condition initiale ( $\phi_0^m$  ou  $\phi_0^M$ ) afin que  $\nabla\phi_0 = \mathbf{U}_g$  sur  $\mathcal{P}_g$ ,  $\nabla\phi_0 = \mathbf{U}_d$  sur  $\mathcal{P}_d$ . On rappelle qu'avec ce choix  $\omega_g \geq \omega_d$ .

#### 2.4.4.1 Étude du choc

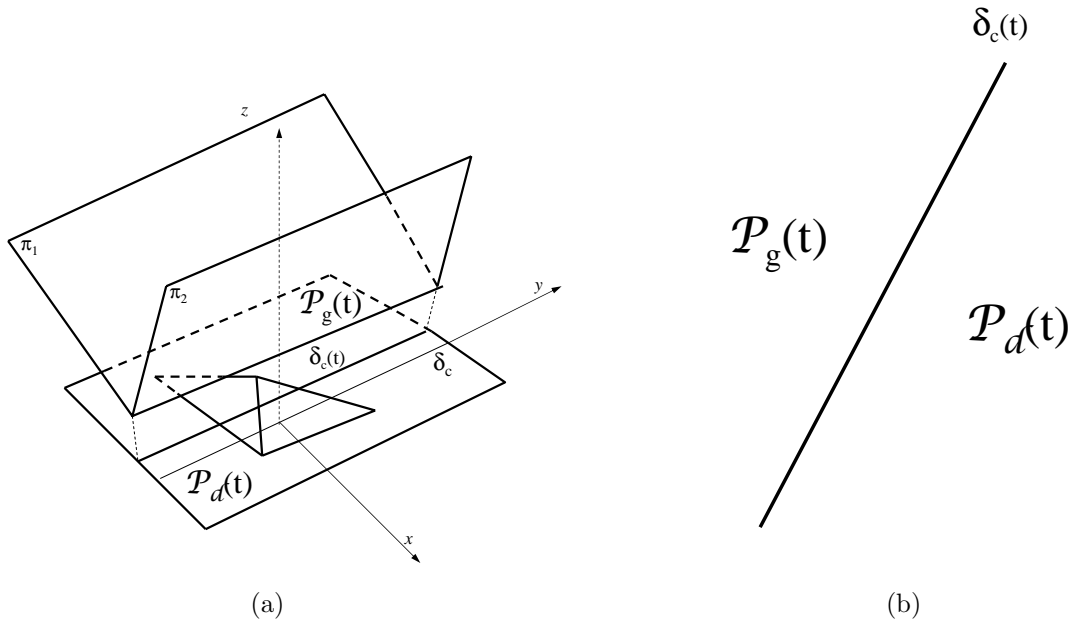


FIGURE 2.9 – Représentation de la solution du problème des demi-plans dans le cas du choc

On suppose que  $F > 0$ , on est alors dans la situation où  $f'(\omega_g) \geq f'(\omega_d)$ .

On est en présence d'un choc de vitesse

$$\sigma = F \frac{|\mathbf{U}_g| - |\mathbf{U}_d|}{|\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d|}.$$

Pour tout temps  $t \geq 0$ , on note par  $\delta_c(t)$  la droite parallèle à  $\delta_c$  dans le plan  $Oxy$ , translatée du vecteur  $t\sigma\mathbf{W}$ . On note aussi par  $\mathcal{P}_g(t)$  et  $\mathcal{P}_d(t)$  les demi-plans situés à gauche et à droite de  $\delta_c(t)$  (voir figure 2.9). La fonction  $\mathbf{U}$  est définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_g, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_d, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t). \end{aligned}$$

Posons alors

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_g(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{x} - F |\mathbf{U}_g| t, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \\ \phi &= \phi_d(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{x} - F |\mathbf{U}_d| t, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t).\end{aligned}$$

On vérifie bien que  $\phi_g$  et  $\phi_d$  sont solutions de l'équation dans chacun des demi-plans tel que  $\nabla\phi = \mathbf{U}$ .

On vérifie bien la continuité de la fonction  $\phi$  sur la droite  $\delta_c(t)$ . En effet, si  $\mathbf{x} \in \delta_c(t)$  alors par définition de la droite  $\delta_c(t)$

$$\mathbf{W} \cdot (\mathbf{x} - t\sigma\mathbf{W}) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} - t\sigma = 0.$$

Evaluons maintenant la différence des deux fonctions sur la droite  $\delta_c(t)$

$$\begin{aligned}\phi_g(\mathbf{x}, t) - \phi_d(\mathbf{x}, t) &= (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d) \cdot \mathbf{x} - F(|\mathbf{U}_g| - |\mathbf{U}_d|)t \\ &= |\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d|(\mathbf{W} \cdot \mathbf{x} - t\sigma) = 0,\end{aligned}$$

donc  $\phi$  est bien la solution du problème des demi-plans.

#### 2.4.4.2 Étude de la raréfaction $\omega_0 \neq 0$

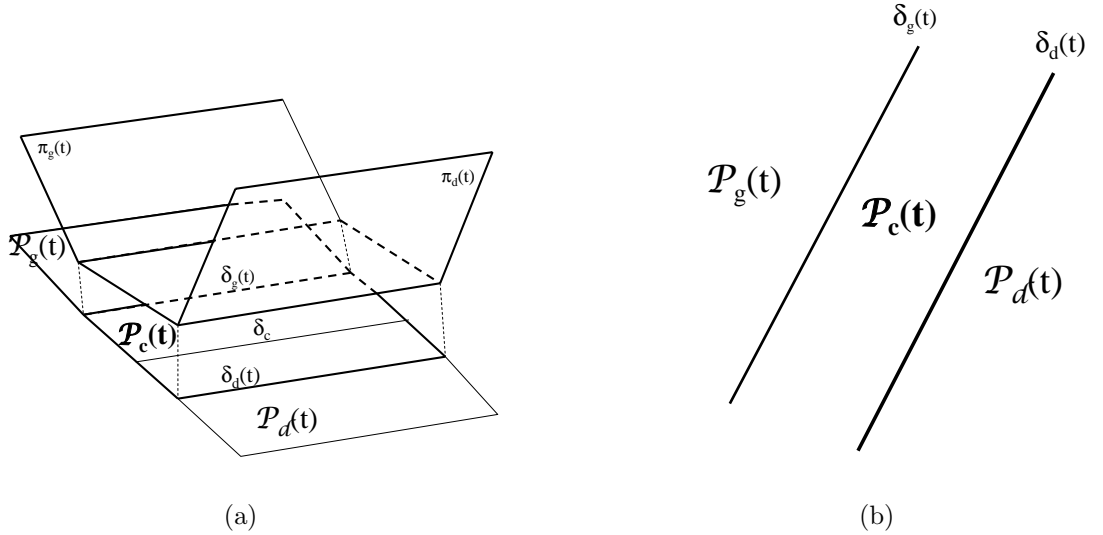


FIGURE 2.10 – Représentation de la solution du problème des demi-plans dans le cas de la raréfaction  $\omega_0 \neq 0$

On suppose que  $F < 0$ , on est dans la situation où  $f'(\omega_g) < f'(\omega_d)$  en reprenant les notations de la section précédente avec

$$f'(\omega_g) = F \frac{\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{U}_g|}, \quad f'(\omega_d) = F \frac{\mathbf{U}_d \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{U}_d|}.$$



On découpe l'espace  $\mathbb{R}^2$  en trois parties de la manière suivante : on note par  $\delta_g(t)$  la droite parallèle à  $\delta_c$  translatée du vecteur  $f'(\omega_g)t\mathbf{W}$  et par  $\delta_d(t)$  la droite parallèle à  $\delta_c$  translatée du vecteur  $f'(\omega_d)t\mathbf{W}$ . Le demi-plan  $\mathcal{P}_g(t)$  est situé à gauche de  $\delta_g(t)$  et le demi-plan  $\mathcal{P}_d(t)$  est situé à droite de  $\delta_d(t)$ . Enfin, on notera par  $\mathcal{P}_c(t)$  la bande centrale située entre  $\delta_g(t)$  et  $\delta_d(t)$  (voir figure 2.10). La solution  $\mathbf{U}$  est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_g = \omega_g \mathbf{W} + \omega_0 \mathbf{V}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_d = \omega_d \mathbf{W} + \omega_0 \mathbf{V}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t), \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= \omega(\zeta, t) \mathbf{W} + \omega_0 \mathbf{V}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_c(t)\end{aligned}$$

avec  $\zeta = \mathbf{x} \cdot \mathbf{W}$  et la fonction  $\omega$  est donnée par la relation (2.4.2). On en déduit que sur les domaines  $\mathcal{P}_g(t)$  et  $\mathcal{P}_d(t)$ , la solution  $\phi$  est donnée par

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_g(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{x} - F |\mathbf{U}_g| t, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \\ \phi &= \phi_d(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{x} - F |\mathbf{U}_d| t, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t).\end{aligned}$$

Pour définir la solution sur la bande  $\mathcal{P}_c(t)$ , il est préférable d'utiliser le repère  $\mathcal{B} = \{\mathbf{W}, \mathbf{V}\}$ . Dans ce repère, la bande est caractérisée par  $f'(\omega_g) \leq \frac{\zeta}{t} \leq f'(\omega_d)$  et la fonction  $\tilde{\phi}_c(\zeta, \eta, t) = \phi_c(\mathbf{x}, t)$  est à déterminer.

On sait que  $\partial_\eta \tilde{\phi} = \omega_0$ ,  $\partial_\zeta \tilde{\phi} = \omega(\zeta, t)$  et  $\partial_t \tilde{\phi} = -F \sqrt{\omega^2(\zeta, t) + \omega_0^2}$  avec

$$\omega(\zeta, t) = -\frac{\zeta |\omega_0|}{\sqrt{t^2 F^2 - \zeta^2}}, \quad \frac{\zeta}{t} \in ]-F, F[.$$

Posons  $\gamma(\zeta, t) = -|\omega_0| \sqrt{t^2 F^2 - \zeta^2}$ , vérifions que

$$\tilde{\phi}_c(\zeta, \eta, t) = \gamma(\zeta, t) + \eta \omega_0$$

est bien solution du problème.

Par construction, on a bien  $\partial_\eta \tilde{\phi} = \omega_0$ ,  $\partial_\zeta \tilde{\phi} = \omega(\zeta, t)$ . Il reste à vérifier que

$$\partial_t \tilde{\phi} = -F |\nabla_{\zeta, \eta} \tilde{\phi}| = -F \sqrt{\omega^2(\zeta, t) + \omega_0^2}$$

D'une part, on a

$$\partial_t \tilde{\phi} = \partial_t \gamma(\zeta, t) = -F^2 \frac{t |\omega_0|}{\sqrt{t^2 F^2 - \zeta^2}}.$$

D'autre part on a

$$F \sqrt{\omega^2(\zeta, t) + \omega_0^2} = F \sqrt{\frac{F^2 \omega_0^2}{t^2 F^2 - \zeta^2} + \omega_0^2} = F^2 \frac{t |\omega_0|}{\sqrt{t^2 F^2 - \zeta^2}}$$

et la dernière relation est bien vérifiée. On peut exprimer la solution dans le repère canonique par

$$\phi_c(\mathbf{x}, t) = -|\omega_0| \sqrt{t^2 F^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{W})^2} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_c(t),$$

avec  $\omega_0 = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{V}$ .

Nous allons enfin vérifier la continuité de la solution sur les droites  $\delta_g(t)$  et  $\delta_d(t)$ . Nous présentons la vérification uniquement pour  $\delta_g$  et on se place à nouveau dans le repère  $(\mathbf{W}, \mathbf{V})$ .

Dans le nouveau repère,  $\delta_g(t)$  est caractérisée par

$$\zeta_g(t) = f'(\omega_f)t = Ft \frac{\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{U}_g|}.$$

On a alors dans le repère  $\{\mathbf{W}, \mathbf{V}\}$

$$\phi_g(\zeta, \eta, t) = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W}\zeta + \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{V}\eta - F|\mathbf{U}_g|t.$$

On vérifie alors

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_g(\zeta_g(t), t) - \tilde{\phi}_c(\zeta_g(t), t) &= \zeta_g(t)\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W} + \eta\omega_0 - Ft|\mathbf{U}_g| - (-|\omega_0|\sqrt{t^2F^2 - \zeta_g^2(t)} + \eta\omega_0) \\ &= Ft \frac{(\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W})^2}{|\mathbf{U}_g|} - Ft|\mathbf{U}_g| + |\omega_0|\sqrt{t^2F^2 - \left(Ft \frac{\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{U}_g|}\right)^2} \\ &= Ft \left( \frac{\omega_g^2}{|\mathbf{U}_g|} - |\mathbf{U}_g| + \frac{|\omega_0|}{|\mathbf{U}_g|} \sqrt{|\mathbf{U}_g|^2 - \omega_g^2} \right) \\ &= Ft \left( \frac{\omega_g^2}{|\mathbf{U}_g|} - |\mathbf{U}_g| + \frac{\omega_0^2}{|\mathbf{U}_g|} \right) = 0. \end{aligned}$$

#### 2.4.4.3 Étude de la raréfaction $\omega_0 = 0$

Si  $\omega_d < \omega_g < 0$  (resp.  $\omega_g > \omega_d > 0$ ) alors, la rarefaction dégénère en une discontinuité de contact se déplaçant à la vitesse  $-F$  (resp.  $+F$ ). Dans ce cas on considère la droite  $\delta_c(t)$  parallèle à  $\delta_c$  translatée du vecteur  $Ft\mathbf{W}$  (resp.  $-Ft\mathbf{W}$ ).  $\mathcal{P}_g(t)$  et  $\mathcal{P}_d(t)$  représente respectivement les deux demi-plans situés à gauche et à droite de  $\delta_c(t)$  et la solution est

$$\phi = \phi_g(\mathbf{x}, t) = \omega_g \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} - F|\omega_g|t, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \quad (2.4.3)$$

$$\phi = \phi_d(\mathbf{x}, t) = \omega_d \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} - F|\omega_d|t, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t). \quad (2.4.4)$$

Dans le cas où  $\omega_d < 0 < \omega_g$ , avec  $F < 0$ , on redécoupe le plan  $\mathbb{R}^2$  en trois parties séparées par les droite  $\delta_g(t)$  et  $\delta_d(t)$  obtenues par translation de  $\delta_c$  suivant les vecteur  $-Ft\mathbf{W}$  et  $+Ft\mathbf{W}$  respectivement. Sur  $\mathcal{P}_g$  et  $\mathcal{P}_d$  la fonction  $\phi$  est donnée par (2.4.3) et (2.4.4). Sur  $\mathcal{P}_c$  on a  $\phi = 0$ .

**Remarque 2.4.4.** *Cette situation particulière est la traduction du principe de monotonie de la solution d'un problème d'Hamilton-Jacobi en dimension un d'espace ( $\omega_0 = 0$ ). Celle-ci résulte de la condition d'entropie appliquée à la solution*

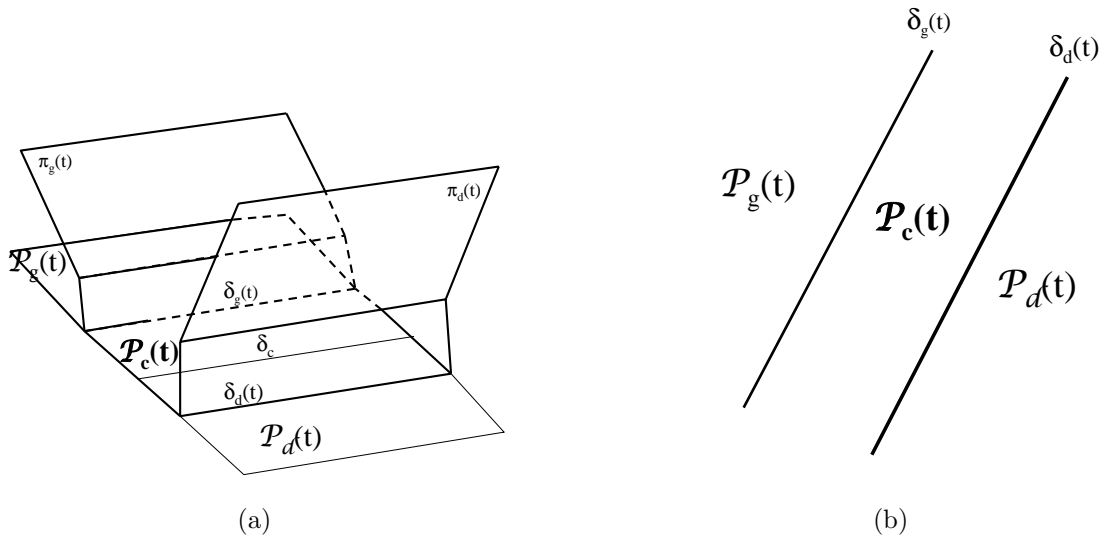


FIGURE 2.11 – Représentation de la solution du problème des demi-plans dans le cas de la raréfaction  $\omega_0 = 0$  et  $\omega_g < 0 < \omega_d$ .

U. On peut vérifier sur des exemples très simples, en dimension un d'espace, que la solution non entropique conduit à une solution  $\phi$  qui n'est pas la solution de viscosité (mais qui est bien une solution du problème d'Hamilton-Jacobi). La solution obtenue dans le cas limite  $\omega_0 = 0$  est aussi continue car limite de fonctions continues, uniformément lipschitziennes sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$  en prenant une suite  $\omega_{0,n} \rightarrow 0$ .

## Chapitre 3

# Schémas volumes finis pour l'équation level set

Dans ce chapitre on se propose de calculer une approximation de la solution de l'équation de level set. Dans la littérature, il existe deux approches très différentes pour établir des schémas numériques. La première approche consiste à étudier l'équation de level set comme une équation de type **Hamilton-Jacobi** alors qu'une autre façon de procéder est de se ramener à un problème de type **loi de conservation** en prenant le gradient de cette équation conduisant à un système faiblement hyperbolique. La solution de viscosité peut être alors formellement considérée comme primitive de la solution faible entropique du problème hyperbolique associé. Notons au passage que cette correspondance est prouvée en dimension un d'espace mais que le cas de dimensions supérieures est un problème encore ouvert. Néanmoins, plusieurs auteurs capturent la solution faible entropique puis l'intègre pour obtenir la solution de viscosité.

Nous présentons une méthode volume fini pour approcher l'équation level set sur des maillages non structurés composés de triangles. La solution approchée appartient à l'espace des fonctions linéaires par morceaux qui sont continues aux milieux des interfaces des triangles (l'espace de Crouzeix-Raviart [12]). Cette méthode est conçue pour des vitesses  $F$  quelconques, ce qui ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire de convexité. En outre, les nouveaux solveurs possèdent propriétés classiques : ils sont exacts lorsque la donnée initial est affine, indépendamment de la représentation géométrique de la donnée initiale et monotone. La théorie générale de Barles-Souganidis [?] (voir aussi Crandall et Lions [20] et [50]) fournit aussi bien la convergence que l'estimation d'erreur dans la norme  $L^\infty$ .

Nous illustrons ces propriétés par des applications numériques. En particulier nous regardons le cas du problème des deux demi-plans pour lequel notre schéma donne une approximation pour le gradient de la fonction level set. Par ailleurs, l'ordre de précision attendu est obtenu avec la norme  $L^1$  et  $L^\infty$  pour des fonctions régulières. Pour finir, notre méthode est facilement extensible aux problèmes d'Hamilton-Jacobi du premier et du second ordre, comme ce qui est le cas

par exemple des résultats de [10] où une étude détaillée des diverses méthodes volumes finis pour les problèmes linéaires du second degré est proposée. Nous nous référons également à [36] où des schémas volumes finis pour les problèmes du second ordre totalement non linéaires sont étudiés.

## 3.1 Quelques définitions

### 3.1.1 Maillage

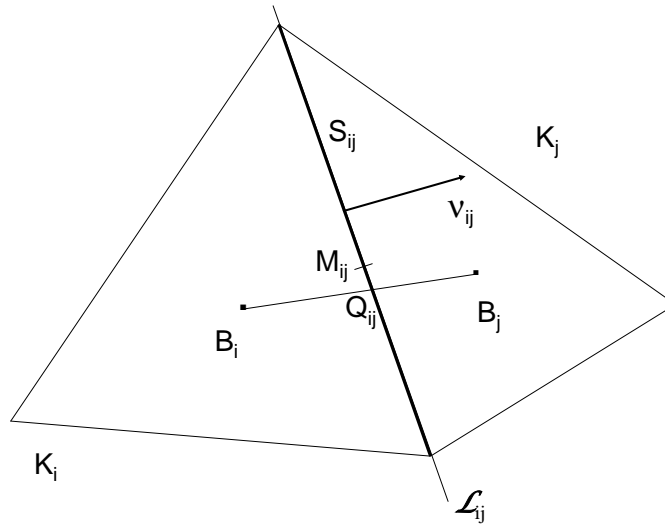


FIGURE 3.1 – *Éléments du maillage.*

On suppose que  $\Omega$  est un domaine ouvert borné et polygonal de  $\mathbb{R}^2$  et on note par  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\Omega$ . Soit  $N$  le nombre d'éléments du maillage, on note par  $\mathbf{B}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) le centre du triangle  $K_i$  appartenant à  $\mathcal{T}_h$ ; et par  $\nu(i)$  l'ensemble des indices des éléments  $K_j \in \mathcal{T}_h$  qui ont un côté commun avec  $K_i$ .

Soit  $j \in \nu(i)$ , on désigne par  $S_{i,j} = \overline{K_i} \cap \overline{K_j}$  le côté commun aux triangles  $K_i$  et  $K_j$ .  $S_{i,j}$  est donc une arête du maillage  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{E}_h$  est l'ensemble des arêtes de ce maillage. On note par  $\mathbf{M}_{i,j}$  le milieu de l'arête  $S_{i,j}$  et par  $\boldsymbol{\nu}_{i,j}$  la normale à  $S_{i,j}$  orientée du triangle  $K_i$  vers le triangle  $K_j$ . Par cette convention d'orientation, nous en déduisons que  $\boldsymbol{\nu}_{j,i} = -\boldsymbol{\nu}_{i,j}$ .

Si un triangle  $K_i$  a un côté commun avec le bord, on le notera  $S_{ie}$ . Si  $\mathcal{L}_{i,j}$  représente la droite contenant l'arête  $S_{i,j}$ , le point  $\mathbf{Q}_{i,j}$  est défini comme l'intersection entre le segment  $[\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j]$  et la droite  $\mathcal{L}_{i,j}$ .

Soit  $T > 0$ ,  $L \in \mathbb{N}^*$ , et  $t_1, \dots, t_L$  une subdivision de l'intervalle de temps  $[0, T]$ .  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  est le pas de temps à l'instant  $t^{n+1}$  et  $\Delta t = \max_{n=1, \dots, L} \Delta t^n$  est le pas de temps maximal.

### 3.1.2 Espaces d'approximation

Nous définissons les espaces d'approximations de type éléments finis utiles pour la suite.

$$\mathcal{V}_h^0 = \{\phi \in L^\infty(\Omega), \forall K_i \in \mathcal{T}_h \phi|_{K_i} \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{V}_h^1 = \{\phi \text{ continue sur } \Omega, \forall K_i \in \mathcal{T}_h \lambda|_{K_i} \in \mathbb{P}^1\},$$

$$\mathcal{V}_{grad}^0 = \{\nabla\phi \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^0, \phi \in \mathcal{V}_h^1\},$$

$$\mathcal{V}_h^{1,nc} = \{\phi \in L^2(\Omega), \forall K_i \in \mathcal{T}_h \phi|_{K_i} \in \mathbb{P}^1, \phi|_{K_i}(\mathbf{M}_{ij}) = \phi|_{K_j}(\mathbf{M}_{ij})\},$$

$$\mathcal{V}_{grad}^{0,nc} = \left\{ \sum_{i=1}^N \nabla\phi|_{K_i} 1_{K_i} \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^0, \phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc} \right\}.$$

On désigne par  $1_{K_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , et  $\lambda_{ij}$  les bases respectives des espaces vectoriels  $\mathcal{V}_h^0$  et  $\mathcal{V}_h^{1,nc}$ .

**Remarque 3.1.1.** *Par construction une fonction  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  n'est pas définie sur les arêtes sauf aux points  $\mathbf{M}_{ij}$ . Soit  $\mathbf{P}$  un point de  $S_{ij}$ , on note par*

$$\phi^-(P) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{P}, \mathbf{x} \in K_i} \phi(\mathbf{x}), \quad \text{et} \quad \phi^+(P) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{P}, \mathbf{x} \in K_j} \phi(\mathbf{x}).$$

On posera alors

$$\Phi(P) = \frac{1}{2}(\phi^-(P) + \phi^+(P))$$

et on obtient ainsi une extension de  $\phi \in \mathbb{B}(\Omega)$ . En outre l'extension est encore continue aux points  $\mathbf{M}_{ij}$ .

Soit  $\phi_{ij}^n$  une approximation de la fonction  $\phi$  (solution de l'équation de level set) au point  $\mathbf{M}_{ij} \in \mathcal{E}_h$  et à l'instant  $t^n$ , la fonction approchée  $\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  est définie par  $\phi_h^n = \sum_{S_{ij}} \phi_{ij}^n \lambda_{ij}$ . La fonction  $\phi_h^n$  est une approximation non conforme

de  $\phi$ , ses valeurs sont connues aux milieux des interfaces des éléments et non aux sommets des éléments. Si on pose  $\mathbf{U}_i^n = \nabla\phi_h^n|_{K_i}$ , alors  $\mathbf{U}_h^n = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^n 1_{K_i}$  est une

approximation de  $\nabla\phi$  à l'instant  $t^n$ . Comme  $\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$ ,  $\mathbf{U}_h^n \in \mathcal{V}_{grad}^{0,nc}$ , une relation entre la fonction  $\phi_h^n$  et son gradient est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  alors*

$$\nabla\phi|_{K_i} = \sum_{j \in \nu(i)} \frac{|S_{ij}|}{|K_i|} \phi(M_{i,j}) \boldsymbol{\nu}_{i,j}.$$

D'autre part, soient  $(\phi_{ij})_{ij}$ ,  $\forall K_i$ ,  $j \in \nu(i)$ , des réels et posons

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j \in \nu(i)} \frac{|S_{ij}|}{|K_i|} \phi_{i,j} \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \quad \mathbf{U}_h = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i 1_{K_i}$$

alors

$$\mathbf{U}_h \in \mathcal{V}_{grad}^{0,nc}$$

*Démonstration.* Soit  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  alors  $\phi = \sum_{S_{ij}} \phi(M_{i,j}) \lambda_{ij}$ . Pour  $K_i \in \mathcal{T}_h$ ,  $\nabla \phi|_{K_i} \in \mathbb{R}^2$  et on donc

$$\nabla \phi|_{K_i} = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} \nabla \phi \, d\mathbf{x}.$$

Comme,

$$\begin{aligned} \int_{K_i} \nabla \phi \, d\mathbf{x} &= \int_{\partial K_i} \phi \boldsymbol{\nu} \, ds \\ &= \sum_{j \in \nu(i)} \int_{S_{ij}} \phi \boldsymbol{\nu} \, ds \\ &= \sum_{j \in \nu(i)} \phi(M_{i,j}) \boldsymbol{\nu}_{ij} |S_{ij}| \end{aligned}$$

car  $\phi$  est linéaire le long de  $S_{ij}$  donc la méthode d'intégration centrée est exacte. Il en résulte :

$$\nabla \phi|_{K_i} = \sum_{j \in \nu(i)} \frac{|S_{ij}|}{|K_i|} \phi(M_{i,j}) \boldsymbol{\nu}_{i,j}.$$

pour  $\phi_{ij}$  tel que  $K_i \in \mathcal{T}_h$ ,  $j \in \nu(i)$ , posons  $\phi = \sum_{S_{ij}} \phi_{ij} \lambda_{ij}$ , on a alors comme précédemment

$$\nabla \phi|_{K_i} = \frac{1}{|K_i|} \sum_{j \in \nu(i)} \phi_{ij} \boldsymbol{\nu}_{ij} |S_{ij}| = \mathbf{U}_i$$

d'où

$$\mathbf{U}_h = \sum_{j \in \nu(i)} \nabla \phi|_{K_i} 1_{K_i} \in \mathcal{V}_{grad}^{0,nc}.$$

□

**Remarque 3.1.2.** Si on se donne  $\mathbf{U}_i \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et  $\mathbf{U}_h = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i 1_{K_i}$  alors  $\mathbf{U}_h$  n'est pas forcément un élément de  $\mathcal{V}_{grad}^{0,nc}$ . La proposition précédente montre que  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{V}_{grad}^{0,nc}$  si et seulement si  $\mathbf{U}_i$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j \in \nu(i)} \frac{|S_{ij}|}{|K_i|} \phi_{i,j} \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \quad \mathbf{U}_h = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i 1_{K_i} \in \mathcal{V}_{grad}^{0,nc}$$

## 3.2 Construction des schémas

Dans cette section, nous introduisons les différents schémas numériques fondés sur l'équation d'Hamilton-Jacobi ou sur l'équation de loi de conservation associée.

### 3.2.1 Formulation non conforme de l'équation level set

Soit  $\phi$  définie sur  $\Omega \times (0, T)$  tel que

$$\partial_t \phi(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t) |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)| = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2.1)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \bar{\Omega}, \quad (3.2.2)$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]. \quad (3.2.3)$$

Intégrons l'équation (3.2.1) sur  $S_{ij} \times [t^n, t^{n+1}]$

$$\begin{aligned} & \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{S_{ij}} \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) d\gamma dt + \\ & \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{S_{ij}} F(\mathbf{x}, t) |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)| d\gamma dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

En divisant l'équation (3.2.4) par  $|S_{ij}|$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|S_{ij}|} \int_{S_{ij}} \phi(\mathbf{x}, t^{n+1}) d\gamma - \frac{1}{|S_{ij}|} \int_{S_{ij}} \phi(\mathbf{x}, t^n) d\gamma + \\ & \frac{1}{|S_{ij}|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{S_{ij}} F(\mathbf{x}, t) |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)| d\gamma dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Finalement, en posant

$$\widehat{\phi}_{ij}^n = \frac{1}{|S_{ij}|} \int_{S_{ij}} \phi(\mathbf{x}, t^n) d\gamma, \quad (3.2.6)$$

et

$$H_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta t |S_{i,j}|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{S_{i,j}} F(\mathbf{x}, t) |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)| d\gamma dt.$$

l'équation (3.2.5) devient

$$\widehat{\phi}_{ij}^{n+1} = \widehat{\phi}_{ij}^n - \Delta t H_{i,j}^n, \quad (3.2.7)$$

où  $H_{i,j}^n$  est l'hamiltonien numérique. Nous dirons qu'un schéma est de type **Hamilton-Jacobi** s'il est construit à partir de la formulation (3.2.7).



### 3.2.2 Formulation volumes finis de l'équation de loi de conservation

La méthode des volumes finis [8, 25] est largement utilisée dans l'approximation numérique des équations de lois de conservation (cf. par exemple [15] ses références). Cette méthode repose sur l'intégration de l'équation de conservation sur un volume de contrôle. Par le théorème de la divergence, on peut exprimer la variation temporelle de la grandeur physique étudiée en fonction des flux aux interfaces du volume. L'avantage de cette technique est qu'elle préserve la conservativité par nature et permet un choix très libre des volumes de contrôle s'adaptant ainsi à des géométries complexes.

Soit  $\mathbf{U} : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \nabla (F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)|) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2.9)$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]. \quad (3.2.10)$$

On utilise une formulation volumes finis de l'équation (3.2.8). Pour cela, intégrons l'équation (3.2.8) sur  $K_i$

$$\int_{K_i} \partial_t \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{K_i} \nabla (F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)|) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.2.11)$$

Remarquons qu'une formule d'intégration par parties sur le deuxième terme de gauche de l'équation (3.2.11) nous donne

$$\int_{K_i} \partial_t \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial K_i} F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)| \boldsymbol{\nu} d\gamma = 0. \quad (3.2.12)$$

Puis intégrons l'équation (3.2.12) sur  $[t^n, t^{n+1}]$

$$\begin{aligned} & \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K_i} \partial_t \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt + \\ & \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial K_i} F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)| \boldsymbol{\nu} d\gamma dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

En divisant l'équation (3.2.13) par  $|K_i|$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t^{n+1}) d\mathbf{x} - \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x} + \\ & \frac{1}{|K_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial K_i} F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)| \boldsymbol{\nu} d\gamma dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

En posant

$$\widehat{\mathbf{U}}_i^n = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x}, \quad \alpha_{i,j} = \frac{|S_{i,j}|}{|K_i|},$$

$$G_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta t |S_{i,j}|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{S_{i,j}} F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)| d\gamma dt,$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|K_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial K_i} F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)| \boldsymbol{\nu} d\gamma dt = \\ & \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} \frac{1}{|S_{i,j}| \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{S_{i,j}} F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)| \boldsymbol{\nu}_{ij} d\gamma dt, \end{aligned}$$

l'équation (3.2.14) devient

$$\widehat{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \widehat{\mathbf{U}}_i^n - \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} G_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \quad (3.2.15)$$

où  $G_{i,j}^n$  est le flux numérique. Nous dirons qu'un schéma est de type **Loi de conservation** s'il est construit à partir de la formulation (3.2.15). On posera par

la suite  $\widehat{\mathbf{U}}_h^n = \sum_{i=1}^N \widehat{\mathbf{U}}_i^n 1_{K_i}$ .

**Remarque 3.2.1.**  $\sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} G_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j} \in \mathcal{V}_{grad}^{0,nc}$  d'après la proposition 3.1.1. Donc si  $\widehat{\mathbf{U}}_h^n \in \mathcal{V}_{grad}^{0,nc}$  alors  $\widehat{\mathbf{U}}_h^{n+1} \in \mathcal{V}_{grad}^{0,nc}$ .

### 3.2.3 Lien entre les deux formulations

Pour déterminer une approximation de  $\phi$  et de  $\mathbf{U}$ , on peut soit utiliser l'équation de type Hamilton-Jacobi (**HJd**), soit le système de loi de conservation (**LCd**). Nous avons vu dans le chapitre 2 que sous une hypothèse de convexité de l'Hamiltonien ces deux modèles sont équivalents. Nous établissons dans cette section le lien entre les formulations (3.2.7) et (3.2.15) en terme de schéma numérique.

Soient  $\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  une approximation de la fonction  $\phi$  à l'instant  $t^n$  et  $\mathbf{U}_h^n \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^0$  une approximation de  $\mathbf{U}$ . Nous considérons les deux schémas suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t h_{ij}^n, \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \end{array} \right. \quad (3.2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} g_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{ij}. \\ 2) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} \mathbf{1}_{K_i}. \end{array} \right. \quad (3.2.17)$$

où  $h_{ij}^n = h_{ij}(\nabla \phi_{h|K_i}^n, \nabla \phi_{h|K_j}^n)$  est une approximation de l'hamiltonien numérique  $H_{ij}^n$  et  $g_{ij}^n = g_{i,j}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n)$  est une approximation du flux numérique  $G_{ij}^n$ .

**Définition 3.2.1.**

–  $h_{ij}$  est dit consistant si

$$h_{ij}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = H(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2.$$

–  $g_{ij}$  est dit consistant si

$$g_{ij}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = H(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2.$$

Pour établir les liens entre les deux schémas, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.2.1.** *Pour  $i$  fixé,  $j \in \nu(i)$ , on se donne des coefficients  $c_{ij}$ .*

$$\text{si } \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{ij} c_{ij} \boldsymbol{\nu}_{ij} = 0 \text{ alors } c_{ij} = c_i$$

*Démonstration.*

$$1. \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ on a } c \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{ij} \boldsymbol{\nu}_{ij} = 0 \implies \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{ij} c \boldsymbol{\nu}_{ij} = 0.$$

2. soit  $j = j_1, j_2, j_3$ . En dimension 2,  $\boldsymbol{\nu}_1 = \beta_{12} \boldsymbol{\nu}_2 + \beta_{13} \boldsymbol{\nu}_3$ . Donc

$$(\alpha_{ij_1}(c_{ij_1} - c)\beta_{12} + \alpha_{ij_2}(c_{ij_2} - c)) \boldsymbol{\nu}_2 + (\alpha_{ij_1}(c_{ij_1} - c)\beta_{13} + \alpha_{ij_3}(c_{ij_3} - c)) \boldsymbol{\nu}_3 = 0$$

Comme  $\{\boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  alors

$$\alpha_{ij_1}(c_{ij_1} - c)\beta_{12} + \alpha_{ij_2}(c_{ij_2} - c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\alpha_{ij_1}(c_{ij_1} - c)\beta_{13} + \alpha_{ij_3}(c_{ij_3} - c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Posons  $c = c_{ij_1}$  alors d'une part  $\alpha_{ij_2}(c_{ij_2} - c_{ij_1}) = 0$  d'où  $c_{ij_2} = c_{ij_1}$ . D'autre part,  $\alpha_{ij_3}(c_{ij_3} - c_{ij_1}) = 0$  d'où  $c_{ij_3} = c_{ij_1}$ . Finalement,  $c_{ij_1} = c_{ij_2} = c_{ij_3} = c_i$ .  $\square$

**Théorème 3.2.1.** *Supposons que  $\mathbf{U}_h^n = \nabla \phi_h^n$  et que  $h_{ij}$  et  $g_{ij}$  sont consistants. Soient  $\phi_h^{n+1}$  et  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  définis par les schémas (3.2.16) et (3.2.17). Alors  $\mathbf{U}_h^{n+1} = \nabla \phi_h^{n+1}$  si et seulement si*

$$h_{i,j}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n) = g_{i,j}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n).$$

*Démonstration.* Supposons que  $\mathbf{U}_h^{n+1} = \nabla \phi_h^{n+1}$ , alors  $\mathbf{U}_i^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^{n+1}$  et d'après (3.2.17)-1

$$\nabla \phi_{h|K_i}^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^n - \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} g_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j}. \quad (3.2.18)$$

D'autre part, en multipliant l'équation (3.2.16)-1 par  $\frac{|S_{i,j}|}{|K_i|} \boldsymbol{\nu}_{i,j}$ , puis en sommant sur  $j \in \nu(i)$ , nous obtenons

$$\frac{1}{|K_i|} \sum_{j \in \nu(i)} |S_{i,j}| \phi_{ij}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j} = \frac{1}{|K_i|} \sum_{j \in \nu(i)} |S_{i,j}| \phi_{ij}^{n+1} \boldsymbol{\nu}_{i,j} - \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} h_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j}. \quad (3.2.19)$$

De la proposition 3.1.1 nous déduisons que

$$\nabla \phi_{h|K_i}^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^n - \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} h_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j}.$$

Des équations (3.2.18) et (3.2.19), nous obtenons l'égalité

$$\sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} h_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j} = \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} g_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j},$$

d'où, d'après le lemme 3.2.1

$$h_{i,j}^n = g_{i,j}^n + C_i, \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

On obtient un résultat identique en utilisant  $K_j$ . On obtient alors  $g_{ij}^n + C_i = g_{ij}^n + C_j$ , ce qui équivaut à dire que  $C_i = C_j = C$ . Finalement la consistance du flux  $g_{ij}$  implique que  $C = 0$ .

Réciproquement, en supposant que  $h_{i,j}^n = g_{i,j}^n$ , nous avons immédiatement

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^{n+1}, \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \nabla \phi_h^{n+1}.$$

□

Etant donnés  $\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  et  $\mathbf{U}_h^n = \nabla \phi_h^n$ , nous pouvons évaluer  $\phi_h^{n+1}$  et  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  par le schéma utilisant l'hamiltonien numérique (3.2.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t h_{ij} (\nabla \phi_{h|K_i}^n, \nabla \phi_{h|K_j}^n), \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^{n+1} = \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} \phi_{ij}^{n+1} \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} 1_{K_i}. \end{array} \right. \quad (\text{SHJ})$$

Une seconde approche consiste à utiliser le système de loi de conservation par la formule (3.2.17). Ceci nous donne le schéma mixte suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t g_{i,j}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n), \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} g_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} 1_{K_i}, \end{array} \right. \quad (\text{SHJ-LC})$$

par construction  $\nabla \phi_h^{n+1} = \mathbf{U}_h^{n+1}$ .

La différence essentielle entre (SHJ) et (SHJ-LC) réside dans le fait que le second schéma construit  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  à partir de  $\mathbf{U}_h^n$  tandis que dans le premier schéma  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  se déduit de  $\nabla \phi_h^{n+1}$ . Dans le premier schéma on effectue le calcul avec  $\phi$  et on en déduit  $\mathbf{U}$ . Dans le deuxième schéma on effectue le calcul avec  $\mathbf{U}$  et on en déduit  $\phi$ .

### 3.3 Propriétés fondamentales des schémas

Dans le chapitre 1, nous avons vu que l'analyse mathématique de l'équation level set se fonde sur la théorie des équations de type **Hamilton-Jacobi**. Dans cette section, nous verrons que les schémas numériques permettant d'approcher la solution de viscosité de l'équation level set doivent satisfaire certaines propriétés fondamentales. L'idée naturelle ici consiste à reproduire l'opérateur d'Hamilton-Jacobi sous une forme discrétisée.

#### 3.3.1 Maillage structuré

Soit  $\mathbf{M}_{ij} \in \mathcal{E}_h$  de coordonnées  $(x_i, y_j)$ . Pour chaque point  $(x_i, y_j)$  de la grille  $\phi_{ij}^n$  représente une approximation de  $\phi(x_i, y_j, t^n)$ .

Crandal et Lions ([20]) proposent des schémas numériques pour les équations d'Hamilton-Jacobi où  $\phi_{ij}^{n+1}$  est obtenu de la manière suivante :

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t h_{ij}(\phi_{ij}^n, \phi_{i,j-1}^n, \phi_{i,j+1}^n, \phi_{i-1,j}^n, \phi_{i,j+1}^n), \quad (3.3.1)$$

où  $h_{ij}$  est l'approximation numérique de l'Hamiltonien  $H$ . Le choix de  $h_{ij}^n$  est conditionné par les propriétés satisfaites par la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. Parmi celles-ci, nous en retenons deux.

#### Consistance

Supposons que  $\phi^0(\mathbf{x}) = b_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$  avec  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\phi_{ij}^0 = \phi^0(x_i, y_j)$ . Le schéma (3.3.1) est dit consistant si

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t H(\mathbf{a}). \quad (3.3.2)$$

Cette propriété est toujours réalisée si l'hamiltonien numérique vérifie

$$h_{ij}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = H(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2.$$

#### Monotonie

Etant donnés  $\phi_{ij}^n, \psi_{ij}^n$ , on calcule  $\phi_{ij}^{n+1}, \psi_{ij}^{n+1}$  par

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{n+1} &= \phi_{ij}^n - \Delta t h_{ij}(\phi_{ij}^n, \phi_{i,j-1}^n, \phi_{i,j+1}^n, \phi_{i-1,j}^n, \phi_{i,j+1}^n), \\ \psi_{ij}^{n+1} &= \psi_{ij}^n - \Delta t h_{ij}(\psi_{ij}^n, \psi_{i,j-1}^n, \psi_{i,j+1}^n, \psi_{i-1,j}^n, \psi_{i,j+1}^n). \end{aligned}$$

Le schéma (3.3.1) est dit monotone si

$$\phi_{ij}^n \geq \psi_{ij}^n \text{ implique } \phi_{ij}^{n+1} \geq \psi_{ij}^{n+1}. \quad (3.3.3)$$

Pour souligner l'importance de ces notions, nous rappelons le résultat de convergence obtenu par Crandall-Lions([20]).

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  continue et  $\phi_0$  borné et lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^2$  de constante Lipschitz  $L$ . Supposons que le schéma (3.3.1) est monotone et consistant. Supposons de plus que l'Hamiltonien numérique  $h_{ij}$  est localement lipschitzien. Soit  $\phi$  la solution de viscosité de l'équation level set. Alors il existe une constante  $c$  dépendant uniquement de  $\sup |\phi_0|$ ,  $L$ ,  $h_{ij}$  et  $N\Delta t$  tel que*

$$|\phi_{j,k}^n - \phi(x_j, y_k, n\Delta t)| \leq c\sqrt{\Delta t}$$

pour  $0 \leq n \leq N$  et pour tout  $j, k$ .

### 3.3.2 Maillage non structuré

Une extension des résultats de Crandall et Lions a été réalisé par Barles et Souganidis [?] (voir aussi [50]) qui montre pour les maillages non structurés la convergence uniforme de la solution du schéma (3.3.1) vers la solution de viscosité de l'équation level set et donne une estimation d'erreur.

Nous allons détailler les points importants de ce résultat.

En fait, on peut définir  $S(\tau)$  pour tout  $\tau \in [0, \Delta t]$  en remplaçant  $\Delta t$  par  $\tau$  dans le schéma numérique permettant de calculer les  $\phi_{ij}^{n+1}$  à partir des  $\phi_{ij}^n$ .

Etant donné  $\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  une approximation de  $\phi$  au temps  $t^n$ , on suppose que l'on possède un algorithme qui calcule  $\phi_h^{n+1}$  au temps  $t^n + \Delta t$ . On note par  $S_h(\Delta t)$  l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} S_h(\tau) : \mathcal{V}_h^{1,nc} &\longrightarrow \mathcal{V}_h^{1,nc} \\ \phi_h^n &\longmapsto S_h(\tau)\phi_h^n = \phi_h^{n+1}. \end{aligned}$$

On rappelle que l'espace  $B(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions bornées uniformément sur  $\Omega$  et nous introduisons les opérateurs de projection suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_h : B(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{V}_h^{1,nc} \subset B(\Omega) \\ \phi &\longmapsto I_h\phi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Pi_h : B(\Omega) &\longrightarrow B(\Omega) \\ \phi &\longmapsto \Pi_h\phi, \end{aligned}$$

dont on précisera la définition plus tard. Alors pour  $\tau > 0$ , on peut construire l'opérateur  $S(\tau)$  par

$$\begin{aligned} S(\tau) : B(\Omega) &\longrightarrow B(\Omega) \\ \phi &\longmapsto \Pi_h \circ S_h(\tau) \circ I_h\phi \end{aligned}$$

Souganidis et Barles ont mis en évidence les contraintes que doivent satisfaire  $S$ .

**Définition 3.3.1.**

1. L'opérateur  $S$  est invariant par translation avec les constantes si pour tout  $\phi \in B(\Omega)$

$$S(\tau)(\phi + k) = S(\tau)\phi + k, k \in \mathbb{R}. \quad (3.3.4)$$

2. L'opérateur  $S$  est consistant si pour tout  $\phi \in C^\infty(\Omega)$

$$\frac{\phi - S(\tau)(\phi)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} H(\nabla\phi) \quad (3.3.5)$$

3. L'opérateur  $S$  est monotone si pour tout  $\phi \in B(\Omega), \psi \in B(\Omega)$

$$\phi \geq \psi \text{ implique } S(\tau)\phi \geq S(\tau)\psi \quad \forall \tau > 0. \quad (3.3.6)$$

Nous allons énoncer le résultat principal de Souganidis. Soit  $M \in \mathbb{N}^*$ . Considérons une subdivision régulière  $t^0, \dots, t^M$  ( $t^n = n\frac{T}{M}$ ) de l'intervalle de temps  $[0, T]$  de pas de temps  $\Delta t$ . Définissons la fonction

$$\phi_{\Delta t} : \mathbb{R}^N \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

par

$$\phi_{\Delta t}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} S(t - t^n) \phi_{\Delta t}(\cdot, t^n)(\mathbf{x}) & \text{si } t \in (t^n; t^{n+1}], \\ \phi_0(\mathbf{x}) & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Nous avons :

**Théorème 3.3.2.** *Supposons que  $S$  vérifie (3.3.6), (3.3.4), (3.3.5) et que  $H \in C(\mathbb{R}^N), \phi_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ . Si  $\phi \in BUC(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  est la solution de viscosité du problème (3.2.1)-(3.2.3), alors*

$$\phi_{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \phi \text{ sur } \mathbb{R}^N \times [0, T].$$

En outre, pour obtenir une estimation d'erreur, Souganidis montre une estimation sous la condition de consistance suivante :

On suppose que  $\forall \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap B(\mathbb{R}^2)$ , on a

$$\left| \frac{\phi - S(\tau)(\phi)}{\tau} - H(\nabla\phi) \right| \leq O(\tau (\|\nabla\phi\| + \|\nabla^2\phi\|)) \quad (3.3.8)$$

**Théorème 3.3.3.** *Supposons que  $S$  vérifie (3.3.6), (3.3.4), (3.3.8), que  $H \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$  et  $\phi_0 \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N) \cap BUC(\mathbb{R}^N)$ . Si  $\phi \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  est la solution de viscosité du problème (3.2.1)-(3.2.3) et si  $\phi_{\Delta t}$  est définie par (3.3.7), alors il existe une constante positive  $C = C(\|\nabla\phi_0\|)$  telle que*

$$\|\phi_{\Delta t} - \phi\|_\infty \leq C\sqrt{\Delta t}.$$



### 3.3.3 Application de la théorie de Barles-Souganidis

L'objectif de cette section est de faire le lien entre les notions de monotonie et de consistance introduits par Souganidis et Barles avec les notions de monotonie et consistance du schéma.

Dans le but d'utiliser les concepts usuels de la théorie des schémas des équations hyperboliques scalaires, nous introduisons tout d'abord une rénumérotation locale pour les fonctions  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$ . Ainsi pour tout couple de triangles  $K_i$  et  $K_j$  d'arête commune  $S_{i,j}$  (voir la figure 3.2) nous introduisons les valeurs  $\phi_1, \dots, \phi_5$  et les points  $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_5$  par

- $\phi_1 = \phi_{ij}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_{ij}$
- Dans le triangle  $K_i$ , on note par  $\phi_2$  et  $\phi_3$  les deux autres valeurs de  $\phi$  et par  $\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$  les autres points milieux des segments.
- Dans le triangle  $K_j$ , on note par  $\phi_4$  et  $\phi_5$  les deux autres valeurs de  $\phi$  et par  $\mathbf{M}_4, \mathbf{M}_5$  les autres points milieux des segments.

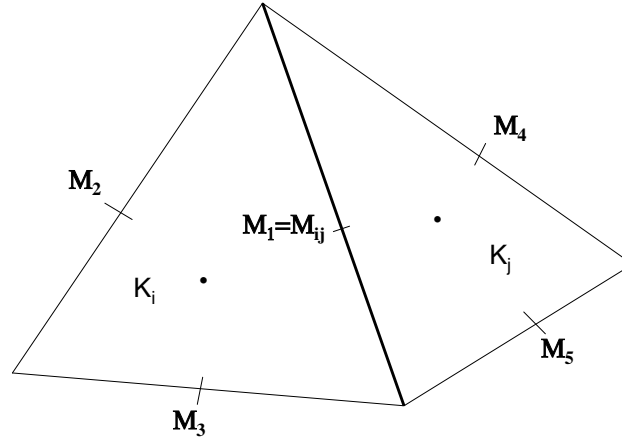


FIGURE 3.2 – *Renomérotation locale.*

Par ailleurs, on note par  $\varphi_l$  la fonction de forme associée à l'arête  $S_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4, 5$ . La fonction  $\varphi_l$  est  $\mathbb{P}_1$  par morceaux et par définition  $\varphi_l(\phi_k) = \delta_{lk}$ .

Nous rappelons le résultat suivant.

**Lemme 3.3.1.**

$$\nabla \varphi_l|_{K_i} = \frac{|S_l|}{|K_i|} \boldsymbol{\nu}_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

$$\nabla \varphi_l|_{K_j} = \frac{|S_l|}{|K_j|} \boldsymbol{\nu}_l, \quad l = 1, 4, 5.$$

*Démonstration.* Nous faisons la preuve pour  $\varphi_1$  dans le triangle  $K_i$ . La preuve est identique pour les autres fonctions. Puisque  $M_2M_3 \parallel S_{ij}$  alors  $\nabla \phi_1 \cdot M_2M_3 = 0$

car  $\varphi_1 \in \mathbb{P}_1(K_i)$  et  $\varphi_1(M_2) = \varphi_1(M_3) = 0$  donc  $\nabla\varphi_1 \perp S_{ij}$ , colinéaire avec  $\boldsymbol{\nu}_{ij}$ . Ainsi, nous avons

$$\nabla\varphi_1 = \frac{1}{\text{dist}(M_2M_3, S_{ij})} \boldsymbol{\nu}_{ij} = \frac{|S_{ij}|}{|K_i|} \boldsymbol{\nu}_{i,j} \quad (3.3.9)$$

□

Etant donnés  $\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$ , on détermine  $\phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{ij}^{n+1} \lambda_{ij}$  selon le schéma générique suivant :

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t h_{ij}^n, \quad (3.3.10)$$

où  $h_{ij}^n = h_{ij}(\nabla\phi_{h|K_i}^n, \nabla\phi_{h|K_j}^n)$  est l'hamiltonien numérique.

Nous réécrivons le schéma (3.3.10) en introduisant l'opérateur  $\mathcal{H}_{ij}$  défini par

$$\mathcal{H}_{i,j}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5) = \phi_{ij} - \Delta t h_{ij}(\nabla\phi_{h|K_i}, \nabla\phi_{h|K_j}). \quad (3.3.11)$$

On met ainsi en évidence les valeurs aux noeuds plutôt que les gradients sur  $K_i$  et  $K_j$ .

### Définition 3.3.2.

1.  $\mathcal{H}_{ij}$  est consistant si  $h_{ij}$  est consistant, c'est-à-dire si  $\phi_h = a + \mathbf{U} \cdot \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$  alors

$$\mathcal{H}_{ij}(\phi_1, \dots, \phi_5) = h_{ij}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = H(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2.$$

2.  $\mathcal{H}_{ij}$  est monotone si

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_k} \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, 5.$$

**Remarque 3.3.1.** On établit une condition équivalente de consistance entre  $\mathcal{H}_{ij}$  et  $h_{ij}$ . Par contre, la notion de monotonie n'est définie que pour  $\mathcal{H}_{ij}$  et ne peut pas être étendue pour  $h_{ij}$ , c'est ce dernier point qui motive l'introduction de  $\mathcal{H}_{ij}$ .

Nous devons maintenant construire précisément l'opérateur  $S$  puis établir une correspondance entre les propriétés de  $\mathcal{H}_{ij}$  et les propriétés de  $S$  requises par la théorie de Barles-Souganidis. Pour cela, pour tout  $\tau > 0$ , définissons tout d'abord l'opérateur

$$\begin{aligned} S_h(\tau) : \mathcal{V}_h^{1,nc} &\longrightarrow \mathcal{V}_h^{1,nc} \\ \phi &\longmapsto S_h(\tau)\phi \end{aligned}$$

par

$$S_h(\tau)\phi(\mathbf{M}_{ij}) = \phi_{ij} - \tau h_{ij}(\nabla\phi|_{K_i}, \nabla\phi|_{K_j}), \quad \forall \mathbf{M}_{ij} \in \mathcal{E}_h.$$

Nous considérons l'opérateur de projection

$$\begin{aligned} I_h : B(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{V}_h^{1,nc} \subset B(\Omega) \\ \phi &\longmapsto I_h\phi = \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h, j \in \nu(i)} \phi(\mathbf{M}_{ij}) \lambda_{ij} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

comme l'opérateur d'interpolation des fonctions  $\phi \in B(\Omega)$ . On utilise l'extension de  $\phi$  donnée par la remarque 3.1.1.

**Remarque 3.3.2.** *Il paraît étrange de définir un opérateur d'interpolation sur des fonctions qui sont bornées. En premier lieu, les fonctions  $\phi \in B(\Omega)$  sont supposées définies en tout point  $\mathbf{x} \in \Omega$  donc  $\phi(\mathbf{x})$  a toujours un sens. D'autre part, on s'intéresse aux fonctions  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  qui sont continues aux points  $\mathbf{M}_{ij}$  qui sont justement les points utilisés par l'interpolation.*

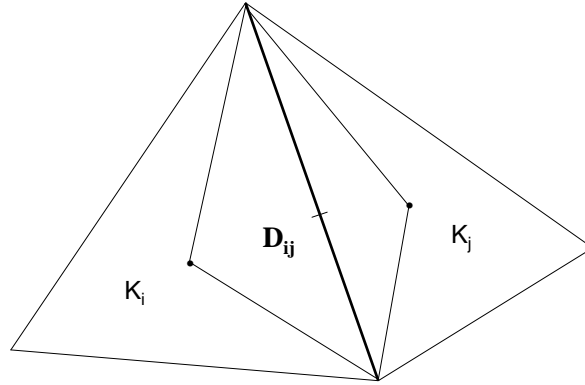


FIGURE 3.3 – Cellule diamant  $D_{ij}$ .

Pour définir le projecteur  $\Pi_h$ , nous considérons une partition  $\tilde{\mathcal{T}}_h$  de  $\Omega$  duale à la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Cette partition s'obtient en connectant les sommets de chaque triangle de  $\mathcal{T}_h$  avec leur barycentre et en éliminant les arêtes des triangles de  $\mathcal{T}_h$ . On obtient ainsi des mailles de type diamant  $D_{ij}$  positionnés sur chaque facette (voir la figure 3.3). Nous associons à cette nouvelle partition, l'espace  $\tilde{\mathcal{V}}_h^{1,nc}$  défini par

$$\tilde{\mathcal{V}}_h^{1,nc} = \{\phi \in B(\Omega); \phi|_{D_{ij}} \in \mathbb{P}_0(D_{ij}), D_{ij} \in \tilde{\mathcal{T}}_h\}.$$

Notons qu'il y a une bijection entre les points  $M_{ij}$  de  $\mathcal{T}_h$  et  $\tilde{\mathcal{T}}_h$ . Le projecteur  $\Pi_h$  est donnée par

$$\begin{aligned} \Pi_h : B(\Omega) &\longrightarrow \tilde{\mathcal{V}}_h^{1,nc} \\ \phi &\longmapsto \Pi_h\phi, \end{aligned}$$

tel que

$$\Pi_h \phi|_{D_{ij}} = \phi(M_{ij}), \quad M_{ij} \in \mathcal{E}_h, D_{ij} \in \tilde{\mathcal{T}}_h.$$

On a la proposition suivante.

**Proposition 3.3.1.** *L'opérateur  $\Pi_h$  est monotone.*

*Démonstration.* Soient  $\phi, \psi \in B(\Omega)$  tels que  $\phi \geq \psi$  alors

$$\phi(\mathbf{M}_{ij}) \geq \psi(\mathbf{M}_{ij}), \quad \forall \mathbf{M}_{ij} \in \mathcal{E}_h$$

ce qui implique

$$\phi(\mathbf{M}_{ij}) \geq \psi(\mathbf{M}_{ij}) \text{ sur } D_{ij},$$

d'où

$$\Pi_h \phi \geq \Pi_h \psi.$$

□

**Proposition 3.3.2.** *On a les propriétés évidentes suivantes.*

1.  $\forall \phi \in B(\Omega)$

$$\Pi_h I_h \phi = \Pi_h \phi,$$

$$I_h \Pi_h \phi = I_h \phi.$$

2.  $\forall \phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$

$$I_h \Pi_h \phi = \phi.$$

3.  $\forall \phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$

$$\Pi_h I_h \phi = \phi.$$

En conséquence, il y a une identification entre  $\Pi_h \phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  et  $I_h \phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$ .  
 Nous rappelons ici la définition de l'opérateur  $S(\tau)$  pour  $\tau > 0$  par

$$\begin{aligned} S(\tau) : B(\Omega) &\longrightarrow B(\Omega) \\ \phi &\longmapsto \Pi_h \circ S_h(\tau) \circ I_h \phi \end{aligned}$$

Nous avons alors les résultats suivants.

**Théorème 3.3.4.**

1. *L'opérateur  $S(\tau)$  est invariant par translation.*
2. *L'opérateur  $S(\tau)$  est consistant si  $\mathcal{H}_{ij}$  est consistant.*
3. *L'opérateur  $S(\tau)$  est monotone si  $\mathcal{H}_{ij}$  est monotone.*

*Démonstration.*

1. Soient  $\phi \in B(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  alors par définition

$$I_h(\phi + k) = \sum_{\mathbf{M}_{ij} \in \mathcal{E}_h} (\phi(\mathbf{M}_{ij}) + k) \lambda_{ij} = \sum_{\mathbf{M}_{ij} \in \mathcal{E}_h} \phi(\mathbf{M}_{ij}) \lambda_{ij} + k.$$

Pour  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{M}_{ij} \in \mathcal{E}_h$ , nous avons

$$\begin{aligned} S_h(\tau)I_h(\phi + k)(\mathbf{M}_{ij}) &= \phi(\mathbf{M}_{ij}) + k - \tau h_{ij}(\nabla(\phi|_{K_i} + k), \nabla(\phi|_{K_j} + k)) \\ &= \phi(\mathbf{M}_{ij}) - \tau h_{ij}(\nabla\phi|_{K_i}, \nabla\phi|_{K_j}) + k. \end{aligned}$$

Comme la fonction  $\Pi_h S_h(\tau)I_h(\phi + k)$  est telle que

$$\Pi_h S_h(\tau)I_h(\phi + k)(\mathbf{M}_{ij}) = (\phi(\mathbf{M}_{ij}) - \tau h_{ij}(\nabla\phi|_{K_i}, \nabla\phi|_{K_j})) + k \text{ sur } D_{ij},$$

nous en déduisons que

$$\Pi_h S_h(\tau)I_h(\phi + k)(\mathbf{M}_{ij}) = \Pi_h S_h(\tau)I_h(\phi)(\mathbf{M}_{ij}) + k.$$

2. Soient  $\phi \in C^\infty$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , et  $\mathbf{M}_{ij} \in \mathcal{E}_h$  alors

$$\Pi_h S_h(\tau)I_h(\phi)(\mathbf{M}_{ij}) = (\phi(\mathbf{M}_{ij}) - \tau h_{ij}(\nabla\phi|_{K_i}, \nabla\phi|_{K_j})) \text{ sur } D_{ij}.$$

Par un calcul simple, nous obtenons

$$\frac{\phi - S(\tau)\phi}{\tau} = \frac{\phi(\mathbf{M}_{ij}) - S(\tau)\phi(\mathbf{M}_{ij})}{\tau} = h_{ij}(\nabla\phi|_{K_i}, \nabla\phi|_{K_j}) \text{ sur } D_{ij}.$$

Comme

$$h_{ij}(\nabla\phi|_{K_i}, \nabla\phi|_{K_j}) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} h_{ij}(\nabla\phi, \nabla\phi)$$

par continuité de  $h_{ij}$  et que par consistance de  $h_{ij}$

$$h_{ij}(\nabla\phi, \nabla\phi) = H(\nabla\phi),$$

nous en déduisons que

$$\frac{\phi - S(\tau)\phi}{\tau} = \frac{\phi(\mathbf{M}_{ij}) - S(\tau)\phi(\mathbf{M}_{ij})}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} H(\nabla\phi) \text{ sur } D_{ij}.$$

D'où la consistance.

3. Soient  $\phi \in B(\Omega)$ ,  $\psi \in B(\Omega)$  tel que  $\phi \geq \psi$ . On a clairement que  $I_h\phi \geq I_h\psi$ . Par la monotonie de  $\mathcal{H}_{ij}$  on en déduit alors que pour tout  $\tau > 0$

$$S(\tau)\phi = \Pi_h S_h(\tau)I_h\phi \geq \Pi_h S_h(\tau)I_h\psi = S(\tau)\psi.$$

□

## 3.4 Schémas centrés

Dans cette section, nous étudions deux schémas définis à partir d'un hamiltonien numérique centré. Ces schémas peuvent sembler naturels et simples mais nous allons justifier pourquoi ils doivent être rejetés.

### 3.4.1 Présentation

Etant donnés  $\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  et  $\mathbf{U}_h^n = \nabla \phi_h^n$ , nous considérons l'hamiltonien numérique centré  $h_{ij}^n$  défini par

$$\begin{aligned} h_{ij}^n = h_{ij}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n) &= \frac{|K_i| H(\mathbf{M}_{ij}, \mathbf{U}_i^n, t^n) + |K_j| H(\mathbf{M}_{ij}, \mathbf{U}_j^n, t^n)}{|K_i| + |K_j|} \\ &= F(\mathbf{M}_{ij}, t^n) \frac{|K_i| |\mathbf{U}_i^n| + |K_j| |\mathbf{U}_j^n|}{|K_i| + |K_j|}. \end{aligned}$$

Nous calculons ensuite  $\phi_h^{n+1}$  et  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  par le schéma de type Hamilton-Jacobi suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t h_{ij}^n, \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^{n+1} = \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} \phi_{i,j}^{n+1} \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} 1_{K_i}. \end{array} \right. \quad (\text{SC1})$$

En prenant  $g_{i,j}^n = h_{i,j}^n$ , nous pouvons aussi considérer le schéma de type loi de conservation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t g_{i,j}^n, \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} g_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} \mathbf{1}_{K_i}, \end{array} \right. \quad (\text{SC2})$$

**Lemme 3.4.1.** Soit  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$ , on pose  $\mathbf{U}_i = \nabla \phi|_{K_i}$ ,  $\mathbf{U}_j = \nabla \phi|_{K_j}$  alors

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_1} = \frac{|S_1|}{|K_i| + |K_j|} \left( \frac{F(\mathbf{M}_{ij}, t^n) \mathbf{U}_i}{|\mathbf{U}_i|} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} + \frac{F(\mathbf{M}_{ij}, t^n) \mathbf{U}_j}{|\mathbf{U}_j|} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ji} \right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_l} = \frac{|S_l|}{|K_i| + |K_j|} \left( \frac{F(\mathbf{M}_{ij}, t^n) \mathbf{U}_i}{|\mathbf{U}_i|} \cdot \boldsymbol{\nu}_l \right), \quad l = 2, 3.$$

*Démonstration.* Soit  $\{\varphi_l\}_{l=1}^5$  les fonctions de forme associées aux points  $\{M_l\}_{l=1}^5$  c'est-à-dire que  $\varphi_l \in \mathbb{P}_1$ ,  $\forall l = 1, \dots, 5$  et  $\varphi_l(M_k) = \delta_{lk}$ . Soit  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  alors

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{l=1}^3 \varphi_l(\mathbf{x}) \phi_l \text{ si } \mathbf{x} \in K_i, \\ \sum_{l=1,4,5} \varphi_l(\mathbf{x}) \phi_l \text{ si } \mathbf{x} \in K_j. \end{cases}$$

Comme

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{l=1}^3 \nabla \varphi_l(\mathbf{x}) \phi_l \text{ si } \mathbf{x} \in K_i, \\ \sum_{l=1,4,5} \nabla \varphi_l(\mathbf{x}) \phi_l \text{ si } \mathbf{x} \in K_j. \end{cases}$$

alors

$$\text{sur le triangle } K_i \quad \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\phi_1} = \nabla \varphi_1,$$

$$\text{sur le triangle } K_j \quad \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\phi_1} = \nabla \varphi_1.$$

Le lemme 3.3.1 implique

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\phi_1} &= \frac{|S_1|}{K_i} \boldsymbol{\nu}_{ij} \\ \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\phi_1} &= \frac{|S_1|}{K_j} \boldsymbol{\nu}_{ji}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\mathbf{U}_i|}{\partial \phi_1} &= \frac{\mathbf{U}_i}{|\mathbf{U}_i|} \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\phi_1} = \frac{\mathbf{U}_i}{|\mathbf{U}_i|} \frac{|S_1|}{K_i} \boldsymbol{\nu}_{ij}, \\ \frac{\partial |\mathbf{U}_j|}{\partial \phi_1} &= \frac{\mathbf{U}_j}{|\mathbf{U}_j|} \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\phi_1} = \frac{\mathbf{U}_j}{|\mathbf{U}_j|} \frac{|S_1|}{K_j} \boldsymbol{\nu}_{ji}. \end{aligned}$$

On en déduit alors

Pour  $l = 2, 3$  avec le lemme 3.3.1 on a

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\phi_l} = \nabla \varphi_l = \frac{|S_l|}{K_i} \boldsymbol{\nu}_l$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\phi_l} = 0$$

car  $\mathbf{U}_j$  ne dépend pas de  $\phi_l$  pour  $l = 2, 3$ .

Ceci implique finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\mathbf{U}_i|}{\partial \phi_l} &= \frac{\mathbf{U}_i}{|\mathbf{U}_i|} \frac{|S_l|}{K_i} \boldsymbol{\nu}_l \\ \frac{\partial |\mathbf{U}_j|}{\partial \phi_l} &= 0. \end{aligned}$$

En conséquence □

### 3.4.2 Propriétés

La proposition suivante résume les propriétés de ce schéma.

**Proposition 3.4.1.** *Le schéma (SC1) est consistant, mais il n'est pas monotone.*



*Démonstration.* Soit  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} h_{ij}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) &= F(\mathbf{M}_{ij}, t^n) \frac{|K_i| |\mathbf{V}| + |K_j| |\mathbf{V}|}{|K_i| + |K_j|} = \frac{|K_i| H(\mathbf{V}) + |K_j| H(\mathbf{V})}{|K_i| + |K_j|} \\ &= H(\mathbf{V}), \end{aligned}$$

donc le schéma est consistant.

Montrons que ce schéma n'est pas monotone.

Soit  $\mathcal{H}_{ij}$  défini par

$$\mathcal{H}_{ij}(\phi_1, \dots, \phi_5) = \phi_{ij} - \Delta t h_{ij}(\nabla \phi_{|K_i}, \nabla \phi_{|K_j}).$$

D'après le lemme 3.4.1, nous avons par exemple

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_2} = - \frac{\Delta t}{|K_i| + |K_j|} |S_2| \left( \frac{F(\mathbf{M}_{ij}, t^n) \mathbf{U}_i}{|\mathbf{U}_i|} \cdot \boldsymbol{\nu}_2 \right).$$

Comme

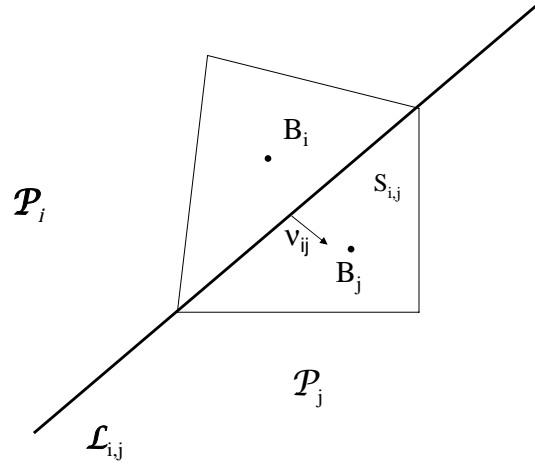
$$\mathbf{U}_i = \phi_2 \nabla \phi_2 + \mathbf{c},$$

nous en déduisons que  $\frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_2}$  change de signe selon les valeurs de  $\phi_2$  ce qui implique que  $\mathcal{H}_{ij}$  n'est pas monotone car ce schéma ne réalise pas systématiquement  $\frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial \phi_i} \geq 0$ .  $\square$

## 3.5 Schémas décentrés de type Roe

Afin de calculer les flux à travers chaque interface, Godounov (1959) propose une méthode numérique simple fondée sur la résolution exacte du problème de Riemann. La principale difficulté de cette méthode réside dans le fait que la résolution des problèmes de Riemann n'est pas simple en général. Une variante de cette méthode proposée par Roe, consiste à calculer le flux inter-éléments en résolvant de manière approchée le problème de Riemann.

Dans ce qui suit, nous proposons un schéma décentré basée sur l'approche de Roe [53]. Ce schéma a la propriété d'être simple à implémenter. Malheureusement, comme nous le verrons par la suite, un tel schéma n'est pas satisfaisant.


 FIGURE 3.4 – Deux demi-plans  $\mathcal{P}_i$  et  $\mathcal{P}_j$  de  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.5.1 Présentation du schéma

Nous considérons le problème de Riemann suivant : trouver  $\mathbf{Z} : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que

$$\partial_t \mathbf{Z} + \nabla (F_{i,j}^n |\mathbf{Z}|) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[, \quad (3.5.1)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{U}_i^n \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_i, \quad (3.5.2)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{U}_j^n \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_j, \quad (3.5.3)$$

où  $F_{i,j}^n = F(\mathbf{M}_{i,j}, t^n)$ .

Nous calculons le flux approché

$$g_{i,j}^n(R) = \frac{F_{i,j}^n}{\Delta t |S_{i,j}|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{S_{i,j}} |\mathbf{Z}|(\mathbf{x}, t) d\gamma(\mathbf{x}) dt$$

par une méthode de type Roe. Cette méthode consiste à linéariser le problème de Riemann (3.5.1)-(3.5.3). Pour cela, on se donne  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2$ , et on note par  $A(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\nu})$

la matrice jacobienne associée au flux  $\mathbf{f} = \sum_{j=1}^2 \nu_j \mathbf{f}_j$  et par

$$A_{ij}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n) = A\left(\frac{\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_j^n}{2}, \boldsymbol{\nu}_{ij}\right)$$

la matrice de Roe associée. D'après le chapitre 2 nous en déduisons que

$$A_{ij}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n) = \frac{F_{ij}^n}{|\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_j^n|} \boldsymbol{\nu}_{ij} \otimes (\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_j^n).$$

$\mathbf{Z}$  est alors défini comme solution du problème de Riemann linéarisé suivant :

$$\partial_t \mathbf{Z} + A_{i,j}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n) \nabla \mathbf{Z} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[, \quad (3.5.4)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{U}_i^n \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_i, \quad (3.5.5)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{U}_j^n \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}_j. \quad (3.5.6)$$

Comme la matrice  $A(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\nu})$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = \nabla H(\mathbf{Z}) \cdot \boldsymbol{\nu}$  (voir chapitre 2). Ceci implique d'une part que le flux  $\mathbf{f} = \sum_{j=1}^2 \nu_j \mathbf{f}_j$  est invariant à travers la discontinuité de contact  $\lambda_1 = 0$  et d'autre part que la valeur du flux en  $x = 0$  est déterminée par le signe de  $\lambda_2$ . En conséquence, on introduit le flux numérique suivant :

$$h_{ij}^n = g_{ij}^n(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) = \begin{cases} F_{ij} |\mathbf{U}_i| & \text{si } \lambda_2 \geq 0 \\ F_{ij} |\mathbf{U}_j| & \text{si } \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Les schémas numériques fondés sur ce flux sont les suivants.

Pour  $\phi_h \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  donné on pose  $\mathbf{U}_h = \nabla \phi_h$  et on détermine  $\phi_h^{n+1}, \mathbf{U}_h^{n+1}$  par le schéma de type Hamilton-Jacobi :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t h_{i,j}^n, \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^{n+1} = \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} \phi_{ij}^{n+1} \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} \mathbf{1}_{K_i}. \end{array} \right. \quad (\text{SR1})$$

ou le schéma de type Loi de conservation :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t g_{i,j}^n, \\
 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\
 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} g_{i,j}^n \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\
 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} 1_{K_i},
 \end{array} \right. \quad (\text{SR2})$$

**Remarque 3.5.1.** *Malgré le décentrage, les schémas (SR1) et (SR2) ne vont pas être satisfaisants. En effet, contrairement à un problème de Riemann classique, la droite séparant les deux états constants ne peut être quelconque, le choix du décentrage est fait en fonction de  $\boldsymbol{\nu}_{ij}$  alors qu'il devrait plutôt être tributaire de  $\mathbf{W}$ .*

## 3.6 Schémas de type Lax

Dans cette section, nous proposons une alternative aux solveurs de Godounov. Nous étudions deux schémas construits à partir d'un flux numérique de type Lax. La preuve de la monotonie du schéma se fait à partir d'une hypothèse sur le maillage introduite dans [37]. Le cadre abstrait de [?], rappelé dans la section 3.3, est utilisée pour prouver la convergence et l'estimation d'erreur entre la solution de l'équation level set et la solution approchée.

### 3.6.1 Présentation

Etant donnés  $\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$  et  $\mathbf{U}_h^n = \nabla \phi_h^n = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^n 1_{K_i}$ , le flux de Lax est défini par

$$g_{i,j}^{Lax}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n) = \frac{H(\mathbf{U}_i^n) + H(\mathbf{U}_j^n)}{2} - \frac{D}{2} (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij},$$

où  $D > 0$  est une constante que l'on précisera dans la suite. Grâce au théorème 3.2.1, nous prenons  $h_{ij}^n = g_{i,j}^{Lax}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n)$  et nous calculons  $\phi_h^{n+1}$  et  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  par le schéma de type Hamilton-Jacobi suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t h_{i,j}^n, \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^{n+1} = \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} \phi_{ij}^{n+1} \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} 1_{K_i}. \end{array} \right. \quad (\text{Lax1})$$

Nous pouvons aussi calculer  $\phi_h^{n+1}$  et  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  par les schéma de type loi de conservation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t g_{i,j}^{Lax}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n), \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} g_{i,j}^{Lax}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n) \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} 1_{K_i}, \end{array} \right. \quad (\text{Lax2})$$

Les propriétés de l'hamiltonien numérique  $h_{ij}^n$  sont données par le lemme suivant.

**Lemme 3.6.1.** *Soit  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$ , on pose  $\mathbf{U}_i = \nabla \phi|_{K_i}$ ,  $\mathbf{U}_j = \nabla \phi|_{K_j}$  alors*

$$\frac{\partial h_{i,j}}{\partial \phi_1}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) = |S_{ij}| \left( \frac{\nabla H(\mathbf{U}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij}}{2|K_i|} + \frac{\nabla H(\mathbf{U}_j) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ji}}{2|K_j|} \right) + \frac{D|S_{ij}|}{|K_i|},$$

$$\frac{\partial h_{i,j}}{\partial \phi_l}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) = \frac{|S_l|}{2|K_i|} (\nabla H(\mathbf{U}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_l + D\boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \boldsymbol{\nu}_l), \quad l = 2, 3.$$

*Démonstration.* Soit  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$ . Comme  $\mathbf{U}_i = \nabla\phi|_{K_i}$ ,  $\mathbf{U}_j = \nabla\phi|_{K_j}$  alors

$$h_{i,j}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) = \frac{H(\mathbf{U}_i) + H(\mathbf{U}_j)}{2} - \frac{D}{2}(\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij}.$$

Nous avons vu dans la démonstration du lemme 3.4.1 que

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial \phi_1} = \nabla \varphi_1|_{K_i} = \frac{|S_1|}{K_i} \boldsymbol{\nu}_{ij}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial \phi_1} = \nabla \varphi_1|_{K_j} = \frac{|S_1|}{K_j} \boldsymbol{\nu}_{ji}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{i,j}}{\partial \phi_1} &= \frac{\nabla H(\mathbf{U}_i^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial \phi_1} + \nabla H(\mathbf{U}_j^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial \phi_1}}{2} - \frac{D}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial \phi_1} - \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial \phi_1} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} \\ &= |S_{ij}| \left( \frac{\nabla H(\mathbf{U}_i^n) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij}}{2|K_i|} + \frac{\nabla H(\mathbf{U}_j^n) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ji}}{2|K_j|} \right) + \frac{D|S_{ij}|}{|K_i|} \end{aligned}$$

Nous calculons aussi, pour  $l = 2, 3$ . Comme

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial \phi_l} = \nabla \varphi_l = \frac{|S_l|}{K_i} \boldsymbol{\nu}_{ij}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial \phi_l} = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{i,j}}{\partial \phi_l} &= \frac{\nabla H(\mathbf{U}_i^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial \phi_l} + \nabla H(\mathbf{U}_j^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial \phi_l}}{2} - \frac{D}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial \phi_l} - \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial \phi_l} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} \\ &= \frac{|S_l|}{2|K_i|} (\nabla H(\mathbf{U}_i^n) \cdot \boldsymbol{\nu}_l + D \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \boldsymbol{\nu}_l). \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

□

### 3.6.2 Propriétés

**Lemme 3.6.2.** *Supposons que tous les angles  $\omega$  de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  satisfont  $\omega \leq \omega_0 < \pi/2$ , où  $\omega_0$  est indépendant de  $h$ . Choisissons  $D$  tel que*

$$D = \frac{\|\nabla H\|_\infty}{\cos \omega_0}.$$

*Si on vérifie la condition*

$$\max_{S_{ij}} \frac{|S_{ij}|}{|K_j|} \tau \leq \frac{1}{\|\nabla H\|_\infty} \tag{CFL}$$

*alors le schéma est monotone.*

*Démonstration.* Nous avons :

Soit  $\phi \in \mathcal{V}_h^{1,nc}$ . Comme  $\mathbf{U}_i = \nabla\phi|_{K_i}$ ,  $\mathbf{U}_j = \nabla\phi|_{K_j}$ , on définit  $\mathcal{H}_{ij}$  par

$$\mathcal{H}_{ij} = \phi_{i,j} - \tau \left( \frac{H(\mathbf{U}_i) + H(\mathbf{U}_j)}{2} - \frac{D}{2}(\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} \right)$$

D'après le lemme 3.6.1, on en déduit d'une part que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_1} = 1 - |S_{ij}| \left( \frac{\nabla H(\mathbf{U}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij}}{2|K_i|} + \frac{\nabla H(\mathbf{U}_j) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ji}}{2|K_j|} \right) + \frac{D|S_{ij}|}{|K_i|},$$

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_1} \geq 1 - \tau |S_{ij}| \left( \frac{\|\nabla H\|_\infty}{2|K_i|} + \frac{\|\nabla H\|_\infty}{2|K_j|} \right) + \frac{D|S_{ij}|}{|K_i|}.$$

La condition **(CFL)** implique

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_1} \geq 0.$$

D'autre part, pour  $l = 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_l} &= -\tau \frac{|S_l|}{2|K_i|} (\nabla H(\mathbf{U}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_l + D\boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \boldsymbol{\nu}_l) \\ &= -\tau \frac{|S_l|}{2|K_i|} \left( \nabla H(\mathbf{U}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_l + \frac{\|\nabla H\|_\infty}{\cos \omega_0} \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \boldsymbol{\nu}_l \right) \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Par hypothèse sur le maillage, on a  $-\boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \boldsymbol{\nu}_l \geq \cos(\omega_0)$  donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_{i,j}}{\partial \phi_l} &\geq \tau \frac{|S_l|}{2|K_i|} \left( \frac{\|\nabla H_\infty\|}{\cos(\omega_0)} \cos(\omega_0) - \|\nabla H_\infty\| \right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Pour énoncer le principal résultat de convergence, nous avons besoin d'introduire l'hypothèse suivante sur le maillage.

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \text{L'intersection entre deux triangles est soit un sommet} \\ \quad \text{soit une arête} \\ (ii) \quad \text{pas plus de } \mu \text{ triangles ont un sommet en commun} \\ (iii) \quad h = \sup_{T \in \mathcal{T}_h} h_T > 1 \\ (iv) \quad \mathcal{T}_h \text{ est régulier, c'est-à-dire qu'il existe une constante} \\ \quad \gamma \text{ indépendante de } h \text{ tel que si } \tau_T \text{ est le diamètre} \\ \quad \text{du cercle inscrit au triangle } T, \text{ alors pour tout } T \in \mathcal{T}_h, \\ \quad h_T \leq \gamma \rho_T. \end{array} \right. \tag{\mathcal{HM1}}$$

La dernière hypothèse implique que si  $e$  est une face du triangle  $T$ , alors

1. la longueur  $|e|$  de l'arête  $e$  et  $h_T$  sont comparables,
2. les angles des triangles du maillage sont plus grand que  $\theta_0 > 0$  (condition d'angle minimale), et
3. les triangles voisins avec  $T'$ ,  $T \cap T' \neq \emptyset$  ont une aire comparable, c'est-à-dire qu'il existe des constantes  $c_1, c_2$  telles que  $c_1 |T'| \leq |T| \leq c_2 |T'|$ .

**Théorème 3.6.1.** *Supposons que  $H \in C^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\phi_0 \in BUC(\mathbb{R}^2)$  et soit une triangulation  $\mathcal{T}_h$  vérifiant **(HM1)**. Considérons le schéma **(Lax1)** avec  $D = \frac{\|\nabla H\|_\infty}{\cos \omega_0}$ . Si la condition CFL est vérifiée, alors quand  $h \rightarrow 0$  et  $\Delta t \rightarrow 0$ ,*

$$\sup_{M_{ij} \in \mathcal{E}_h, 0 \leq n \leq N} |\phi(M_{ij}, t_n) - \phi_h^n(M_{ij})| \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Comme le schéma **Lax1** est consistant et monotone (lemme 3.6.2), nous en déduisons la convergence par la théorie de Barles et Souganis [?, 37].  $\square$

## 3.7 Résultats, tests numériques

Afin de mesurer la qualité des schémas, nous allons introduire des outils permettant d'évaluer la stabilité et la vitesse de convergence.

**Définition 3.7.1.** *(Nombre de points caractéristiques d'un maillage) Pour un maillage non structuré, on définit le nombre de points caractéristiques par*

$$\mathcal{N} = \tilde{h}^{-1} = \sqrt{I} \tag{3.7.1}$$

où  $I$  est le nombre de cellules du maillage,  $\tilde{h}$  le pas d'espace caractéristique et  $\mathcal{N}$  le nombre caractéristique de points dans chaque direction.

**Définition 3.7.2.** *Soit  $\phi_h$  une approximation de  $\phi$ . On veut mesurer l'écart  $\varepsilon_h = |\phi - \phi_h|$  sous la forme*

$$|\varepsilon_h| \simeq C \tilde{h}^\alpha$$

où  $|\cdot|$  est une norme à définir,  $C$  et  $\alpha$  des constantes positives appelées respectivement "constante" et "ordre" de la méthode.

**Remarque 3.7.1.** *Avec les schémas d'ordre élevé (i.e.  $\alpha > 1$ ), la constante  $C$  est d'une importance mineure puisque l'erreur se réduit rapidement avec des maillages de plus en plus fins. Mais pour des schémas d'ordre peu élevé ( $\alpha < 1$ ), la valeur de  $C$  devient prédominante pour estimer la précision du schéma.*



De manière précise, pour estimer l'erreur globale, nous utiliserons les normes  $L^1$  discrètes suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_h^1(\phi, t) &= \sum_{S_{ij}} |K_i| |\phi_{ij}(t) - \phi_{ij}^e(t)|, \\ \varepsilon_h^1(\mathbf{U}, t) &= \sum_i |K_i| |\mathbf{U}_i(t) - \mathbf{U}_i^e(t)|,\end{aligned}$$

où  $\phi_i^e$  est la valeur exacte de la fonction level set au point  $\mathbf{M}_{ij}$  et  $\mathbf{U}_i^e$  est la valeur exacte de son gradient au point  $\mathbf{B}_i$ .

Nous utiliserons aussi, les normes  $L^\infty$  discrètes suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_h^\infty(\phi, t) &= \max_{S_{ij}} |\phi_{ij}(t) - \phi_{ij}^e(t)|, \\ \varepsilon_h^\infty(\mathbf{U}, t) &= \max_i |\mathbf{U}_i(t) - \mathbf{U}_i^e(t)|.\end{aligned}$$

Pour un pas d'espace  $\tilde{h}$ , nous fixons le pas de temps  $\Delta t$  à l'aide d'une relation de type CFL

$$\Delta t \leq \frac{\tilde{h}}{\sup_{[0,T] \times \Omega} |F(x,t)|} \times \mathbf{cfl}. \quad (3.7.2)$$

où  $\mathbf{cfl} \in [0, 1]$  est un paramètre de réglage.

Cette section a pour but de réaliser des tests numériques. Les calculs s'effectueront avec les six schémas suivants :

- SC1** : schéma centré de type Hamilton-Jacobi,
- SC2** : schéma centré de type loi de conservation,
- SR1** : schéma de Roe de type Hamilton-Jacobi,
- SR2** : schéma de Roe de type loi de conservation,
- Lax1** : schéma de Lax de type Hamilton-Jacobi,
- Lax2** : schéma de lax de type loi de conservation.

Nous réalisons deux types de tests. Les deux premiers tests sont dédiés à l'étude de la stabilité des schémas en présence des solutions peu régulières et mesurent la viscosité numérique. Dans le dernier test, nous comparons les schémas ayant réussi les premiers tests. Cette nouvelle comparaison se fera en estimant l'ordre et la constante dans les normes  $L^1$  et  $L^\infty$ . Dans tous les tests, le pas de temps  $\Delta t$  sera adapté pour satisfaire la condition **CFL** grâce à la relation (3.7.2). Dans le dernier test, nous fixons la valeur du coefficient  $\mathbf{cfl}$  pour obtenir la plus petite erreur  $\varepsilon_h^1(\phi, T)$  (la norme  $L^1$ ) au temps final pour un maillage donné de longueur caractéristique  $\tilde{h}$ . L'objectif ici est de montrer que, sous la condition **CFL** minimale, nous avons asymptotiquement la convergence

$$\varepsilon_h^1(\phi, T) = C_1 \tilde{h}^{\alpha_1}, \quad \varepsilon_h^1(\mathbf{U}, T) = C_2 \tilde{h}^{\alpha_2},$$

pour la norme discrète  $L^1$  par exemple.

Pour cela, nous choisissons  $\Omega = [-1, 1]^2$  et utilisons les 4 maillages  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  avec  $N_0 = 92, N_1 = 358, N_2 = 1414, N_3 = 5770$  éléments de longueurs caractéristiques  $\tilde{h}_0 = 2.25 \times 10^{-1}, \tilde{h}_1 = 1.09 \times 10^{-1}, \tilde{h}_2 = 4.83 \times 10^{-2}, \tilde{h}_3 = 2.49 \times 10^{-2}$  respectivement.

### 3.7.1 Description des tests

Soient  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . On rappelle que  $\mathbf{W}$  est le vecteur défini par  $\mathbf{W} = \frac{\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d}{|\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d|}$  et  $\mathbf{V}$  est l'unique vecteur tel que  $\{\mathbf{V}, \mathbf{W}\}$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^2$ .  $\mathcal{P}_g$  et  $\mathcal{P}_d$  sont deux plans de  $\mathbb{R}^3$  d'équations respectives  $z = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{x}$ , et  $z = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{x}$ .  $\Delta_c \in \mathbb{R}^3$  est la droite passant par l'origine  $O$  d'équation

$$(\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d) \cdot \mathbf{x} = 0,$$

et  $\delta_c$  la projection de la droite  $\Delta_c$  dans le plan  $(x, y)$ . Pour tout temps  $t \geq 0$ , on note par  $\delta_c(t)$  la droite parallèle à  $\delta_c$  dans le plan  $Oxy$ , translatée du vecteur  $t\sigma\mathbf{W}$ . On note aussi par  $\mathcal{P}_g(t)$  et  $\mathcal{P}_d(t)$  les demi-plans situés à gauche et à droite de  $\delta_c(t)$ .

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , si on procède au changement de variable en introduisant les coordonnées dans la base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{W}, \mathbf{V}\}$ , alors on a :

$$\mathbf{x} = \zeta\mathbf{W} + \eta\mathbf{V}.$$

Ce changement de base correspond à une rotation dans la nouvelle base  $\mathcal{B}$ , où  $\mathbf{W}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Par construction  $\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{V} = \omega_0$ . Ainsi, les vecteurs  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  sont définis dans la nouvelle base de la manière suivante :

$$\mathbf{U}_g = \omega_g\mathbf{W} + \omega_0\mathbf{V},$$

$$\mathbf{U}_d = \omega_d\mathbf{W} + \omega_0\mathbf{V},$$

avec  $\omega_g = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{W}$ ,  $\omega_d = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{W}$ .

Comme la norme est invariante par rotation, on a donc le problème des demi-plans suivants : trouver  $\phi : \mathbb{R}^2 \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \partial_t \phi(\zeta, \eta, t) + F |\nabla_{\zeta, \eta} \phi(\zeta, \eta, t)| = 0, \\ \phi(\zeta, \eta) = \omega_g \zeta + \omega_0 \eta & \text{si } \zeta < 0, \quad \eta \in \mathbb{R}, \\ \phi(\zeta, \eta) = \omega_d \zeta + \omega_0 \eta & \text{si } \zeta > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.7.3)$$

dont le problème de Riemann associé est :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}(\zeta, \eta, t) + \nabla_{\zeta, \eta} (F |\mathbf{U}(\zeta, \eta, t)|) = 0, \\ \mathbf{U}(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} \omega_g \\ \omega_0 \end{pmatrix} & \text{si } \zeta < 0, \quad \eta \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{U}(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} \omega_d \\ \omega_0 \end{pmatrix} & \text{si } \zeta > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Les deux premiers tests que nous considérons sont solutions du problème des deux demi-plans (3.7.3). Nous rappelons que nous avons résolu de manière exacte ce problème dans le chapitre 2.

- Cas d'un choc avec  $\omega_0 \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{x} - F |\mathbf{U}_g| t, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \\ \phi_1 &= \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{x} - F |\mathbf{U}_d| t, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t). \end{aligned}$$

et  $\nabla \phi_1$  est défini par

$$\begin{aligned} \nabla \phi_1(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_g, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \\ \nabla \phi_1(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_d, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t). \end{aligned}$$

Où  $F = 1$ ,  $\mathbf{U}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{U}_d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Cas d'un choc avec  $\omega_0 = 0$  :

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \omega_g \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} - F |\omega_g| t, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \\ \phi_2 &= \omega_d \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} - F |\omega_d| t, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t). \end{aligned}$$

et  $\nabla \phi_2$  est défini par

$$\begin{aligned} \nabla \phi_2(\mathbf{x}, t) &= \omega_g \mathbf{W}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g(t), \\ \nabla \phi_2(\mathbf{x}, t) &= \omega_d \mathbf{W}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d(t). \end{aligned}$$

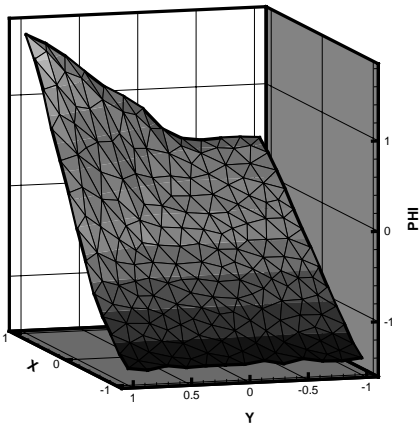
Où  $F = 1$ ,  $\mathbf{U}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{U}_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Cas d'une fonction régulière :

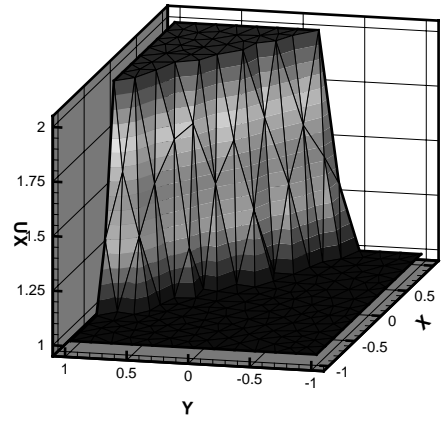
$$\phi_3(x, y, t) = (4 - x - 2y)^3 \exp(-t).$$

On peut vérifier que  $\phi_3$  satisfait l'équation level set avec la vitesse  $F(t, x, y) = (4 - x - 2y)/\sqrt{45}$ . Par ailleurs, nous avons

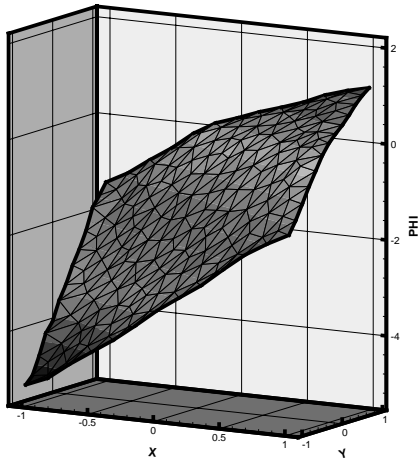
$$\nabla\phi_3 = \begin{pmatrix} -3(4 - x - 2y)^2 \exp(-t) \\ -6(4 - x - 2y)^2 \exp(-t) \end{pmatrix}.$$



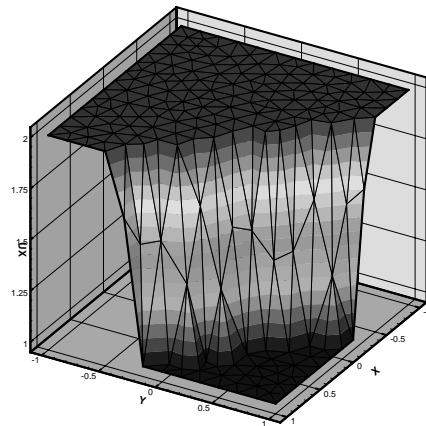
(a)



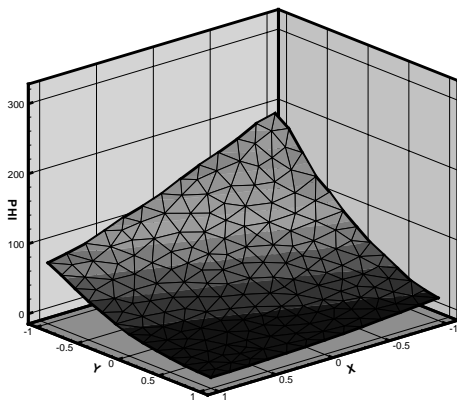
(b)



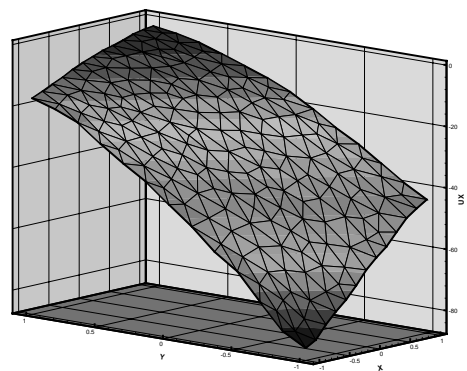
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 3.5 – Représentation 3D des fonctions utilisées dans les tests à l'instant  $t = 0,491$  pour le maillage  $\mathcal{M}_1$ . De gauche à droite et de haut en bas :  $\phi_1, \nabla\phi_1, \phi_2, \nabla\phi_2, \phi_3, \nabla\phi_3$ .

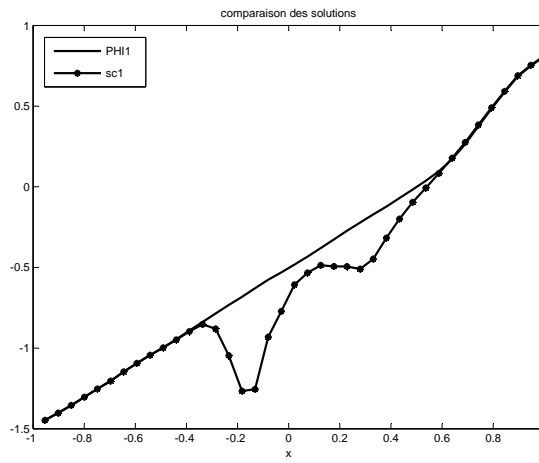
### 3.7.2 Comportement des schémas, Stabilité

L'objectif des deux premiers tests est d'observer le comportement des schémas **SC1**, **SC2**, **SR1**, **SR2**, **Lax1**, **Lax2** pour des solutions issues du problème des deux demi-plans. Ces deux tests sont intéressants car comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, nous en connaissons la solution exacte pour des conditions initiales linéaires par morceaux. D'autre part, la solution est peu régulière générant des oscillations pour les schémas qui ne sont pas stables. Ceci nous offre un premier critère pour rejeter les "mauvais" schémas. Un autre intérêt pour ces deux tests provient du fait que leurs gradients sont discontinus. Ainsi, nous pouvons comparer la viscosité numérique.

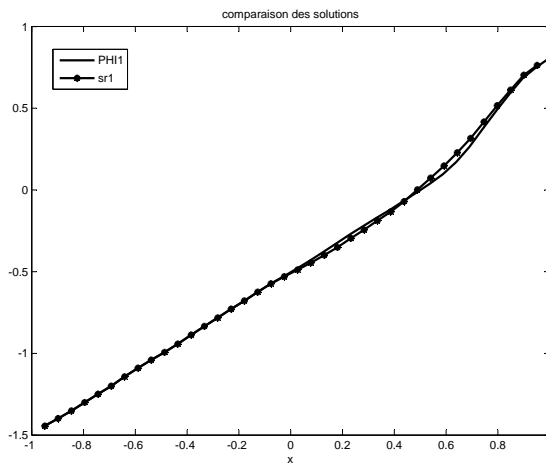
Dans le premier test, on observe que les schémas **SR1** et **Lax1** capturent la bonne solution (voir figure 3.6). Pour l'approche loi de conservation, on observe de nouveau que le schéma centré doit être exclu (voir la figure 3.7). Dans la figure 3.8, on observe les fortes oscillations des schémas centrés. On remarque aussi que le schéma décentré **SR1** ne respecte pas le principe du maximum car la courbe passe sous la valeur 1. Le schéma **Lax1** présente une bonne stabilité  $L^\infty$  mais avec beaucoup de viscosité. Le choix de la méthode loi de conservation modifie le comportement du schéma centré. Cependant, le schéma **SR2** ne respecte pas le principe du maximum même sous la forme loi de conservation. Enfin, le schéma de lax donne le bon résultat (voir 3.9).

Pour le cas  $\omega_0 = 0$ , on retrouve un comportement identique que dans le cas  $\omega_0 \neq 0$  (voir les figures 3.10 et 3.11). Cependant, le schéma centré présente moins d'oscillations sous la forme loi de conservation (voir les figures 3.12 et 3.13).

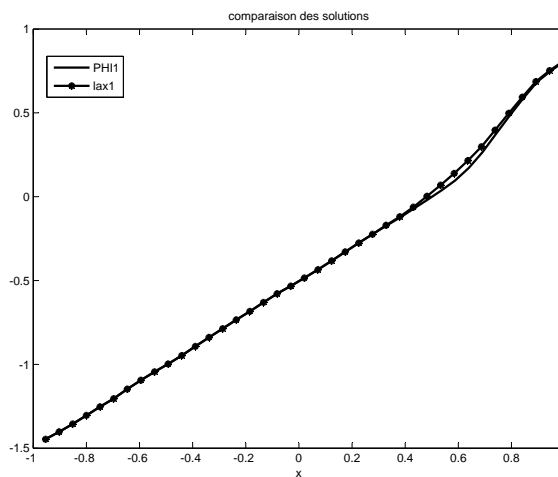
On ne représente pas de courbe pour le cas  $\phi_3$  car l'approximation numérique est très proche de la solution théorique et la visualisation n'apporte pas d'éléments nouveaux.



(a)

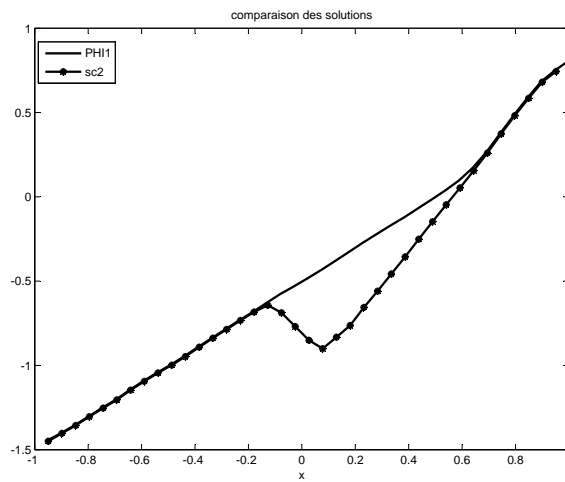


(b)

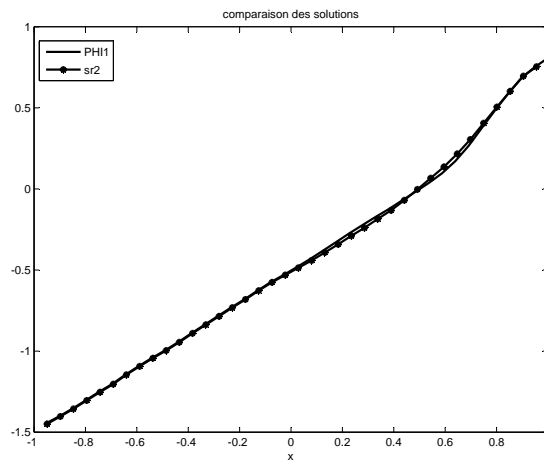


(c)

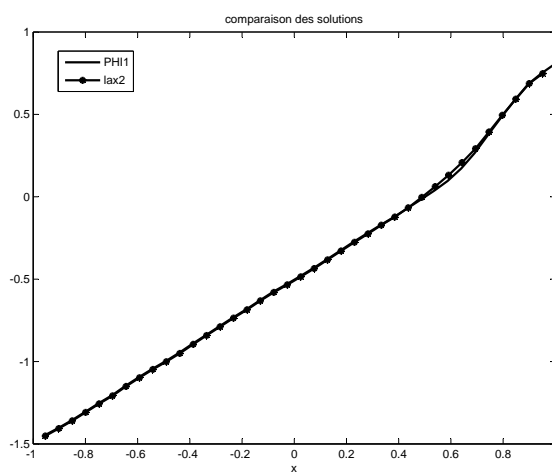
FIGURE 3.6 – Cas  $\omega_0 \neq 0$ . Coupe 1D de  $\phi_1$  et des fonctions calculées par les schémas SC1, SR1 et Lax1 au temps  $t=0.5$ .



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.7 – Cas  $\omega_0 \neq 0$ . Coupe 1D de  $\phi_1$  et des fonctions calculées par les schémas SC2, SR2 et Lax2 au temps  $t=0.5$ .



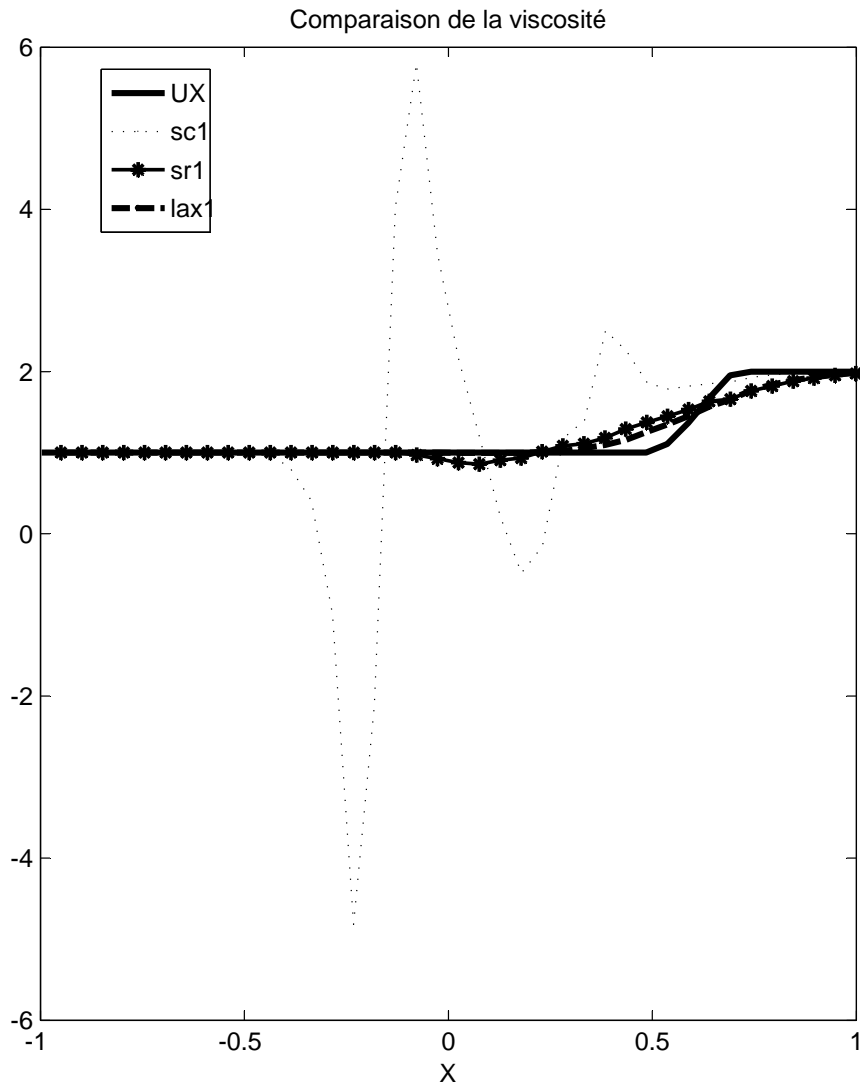


FIGURE 3.8 – Cas  $\omega_0 \neq 0$ . Coupe 1D de  $\nabla\phi_1$  et des gradients des fonctions calculées par les schémas **SC1**, **SR1** et **Lax1** au temps  $t=0.5$ .

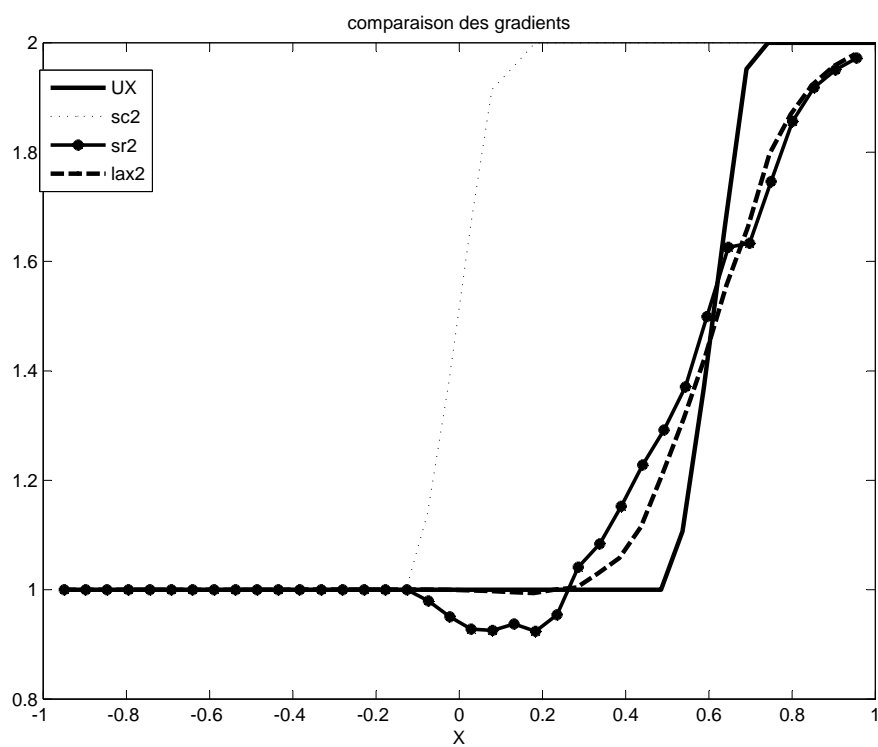
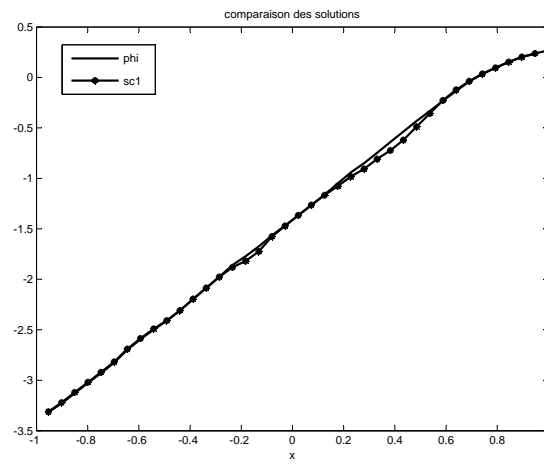
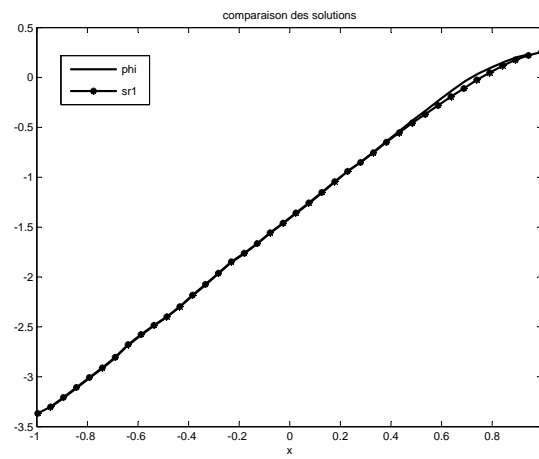


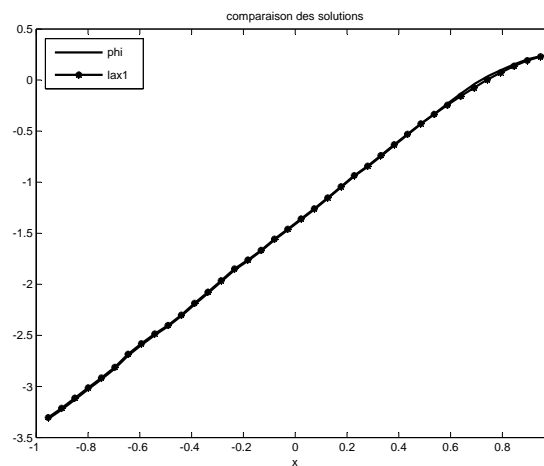
FIGURE 3.9 – Cas  $\omega_0 \neq 0$ . Coupe 1D de  $\nabla\phi_1$  et des gradients des fonctions calculées par les schémas **SC2**, **SR2** et **Lax2** au temps  $t=0.5$ .



(a)

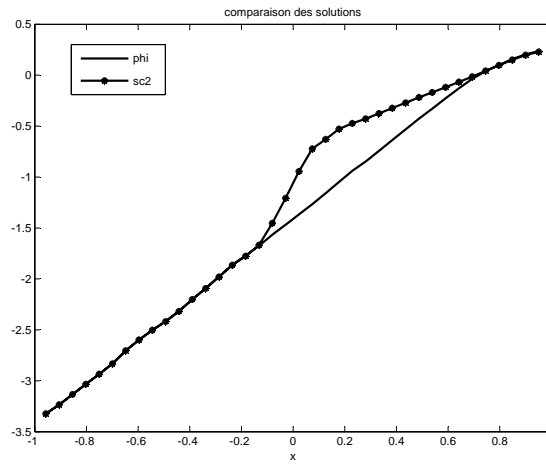


(b)

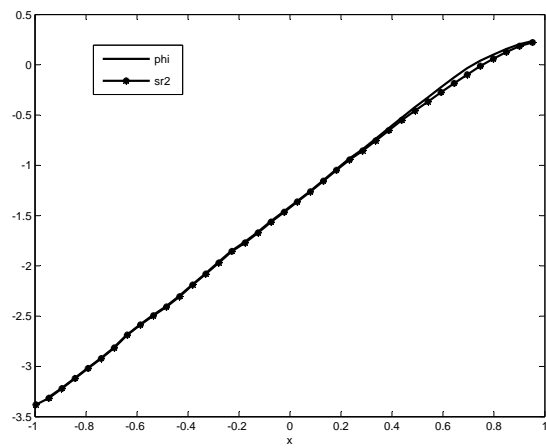


(c)

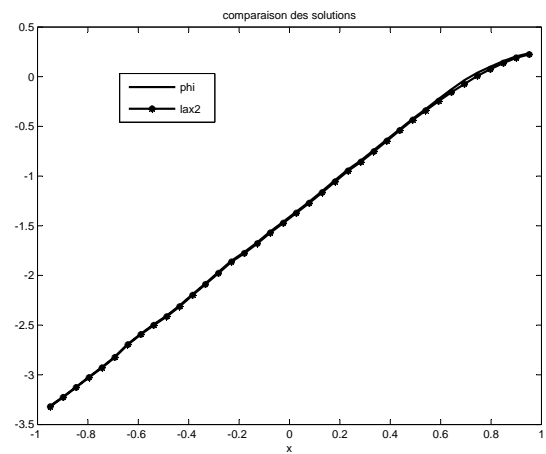
FIGURE 3.10 – Cas  $\omega_0 = 0$ . Coupe 1D de  $\phi_2$  et des fonctions calculées par les schémas **SC1**, **SR1** et **Lax1** au temps  $t=0.5$ .



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.11 – Cas  $\omega_0 = 0$ . Coupe 1D de  $\phi_2$  et des fonctions calculées par les schémas **SC2**, **SR2** et **Lax2** au temps  $t=0.5$ .

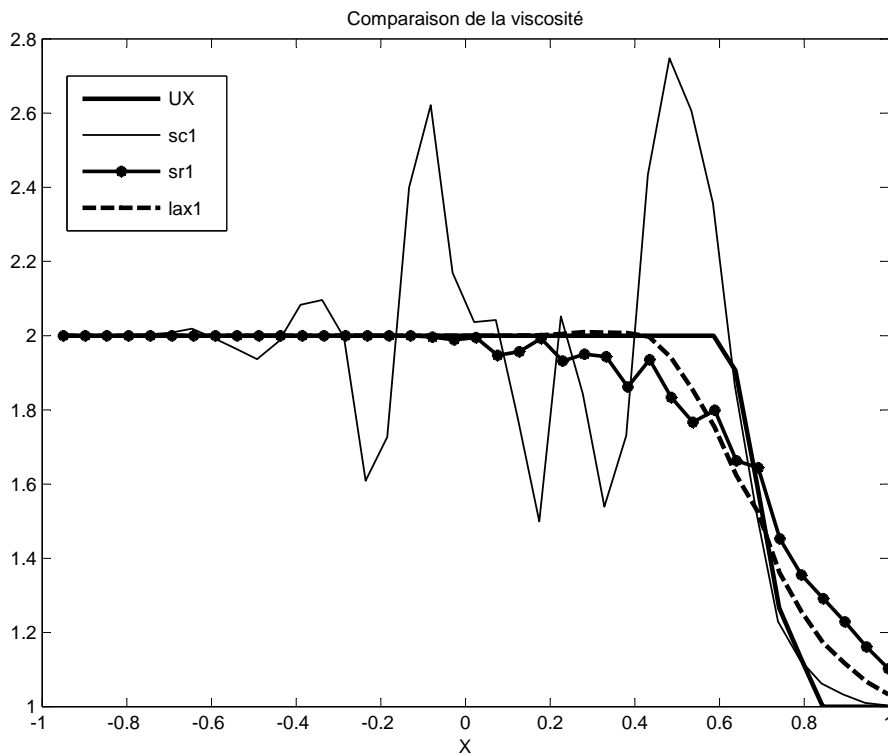


FIGURE 3.12 – Cas  $\omega_0 = 0$ . Coupe 1D de  $\nabla\phi_2$  et des gradients des fonctions calculées par les schémas **SC1**, **SR1** et **Lax1** au temps  $t=0.5$ .

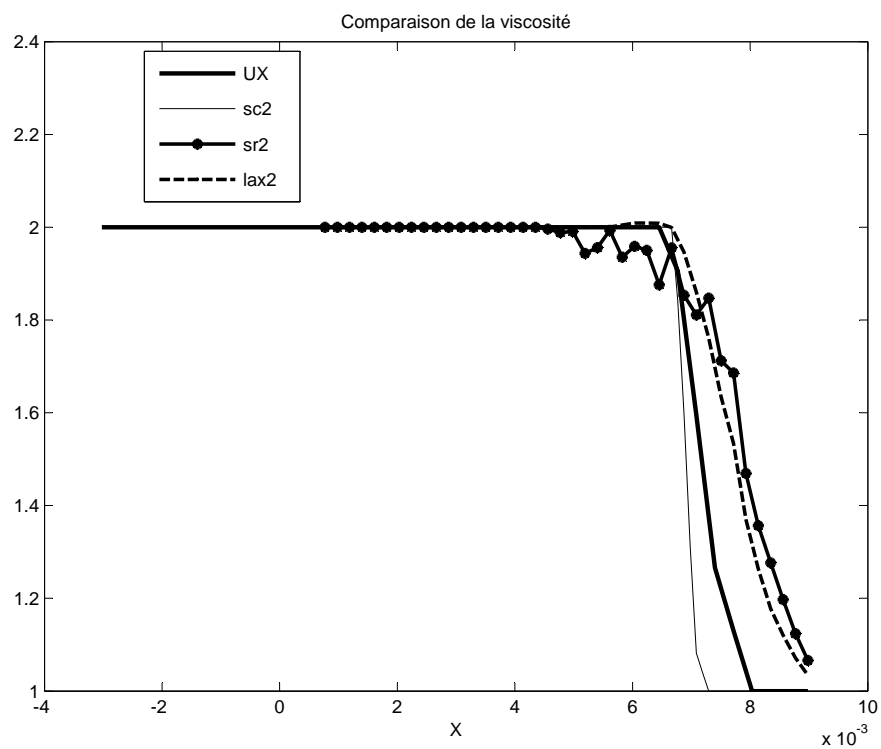


FIGURE 3.13 – Cas  $\omega_0 = 0$ . Coupe 1D de  $\nabla\phi_2$  et des gradients des fonctions calculées par les schémas **SC2**, **SR2** et **Lax2** au temps  $t=0.5$ .

### 3.7.3 Ordre en norme $L^1$

Nous avons vu que l'erreur d'une méthode s'écrit sous la forme  $\|\varepsilon\| = Ch^\alpha$ . Si on pose  $y = -\log(\|\varepsilon\|)$  et  $x = -\log(h)$  alors l'ordre  $\alpha$  et la constante  $C$  s'obtiennent par exemple en traçant la droite d'équation  $y = \alpha \times x - \log(C)$ . De manière concrète, nous ferons cette évaluation par une régression linéaire. Dans toute la suite, nous noterons par  $\alpha_1$  et  $C_1$  (resp.  $\alpha_2$  et  $C_2$ ) l'ordre et la constante associés à la fonction level set  $\phi$  (resp.  $\nabla\phi$ ).

<b>Lax1</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	9.38	0.91	1.57	0.43
$\phi_2$	5.37	1.18	1.35	0.52
$\phi_3$	$5.82 \times 10^{-2}$	0.99	$2.23 \times 10^{-2}$	0.72

<b>Lax2</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	9.16	0.93	1.57	0.44
$\phi_2$	5.48	1.17	1.36	0.51
$\phi_3$	$6.10 \times 10^{-2}$	0.98	$2.18 \times 10^{-2}$	0.81

TABLE 3.1 – *Ordre et constante des méthodes Lax1 et Lax2*

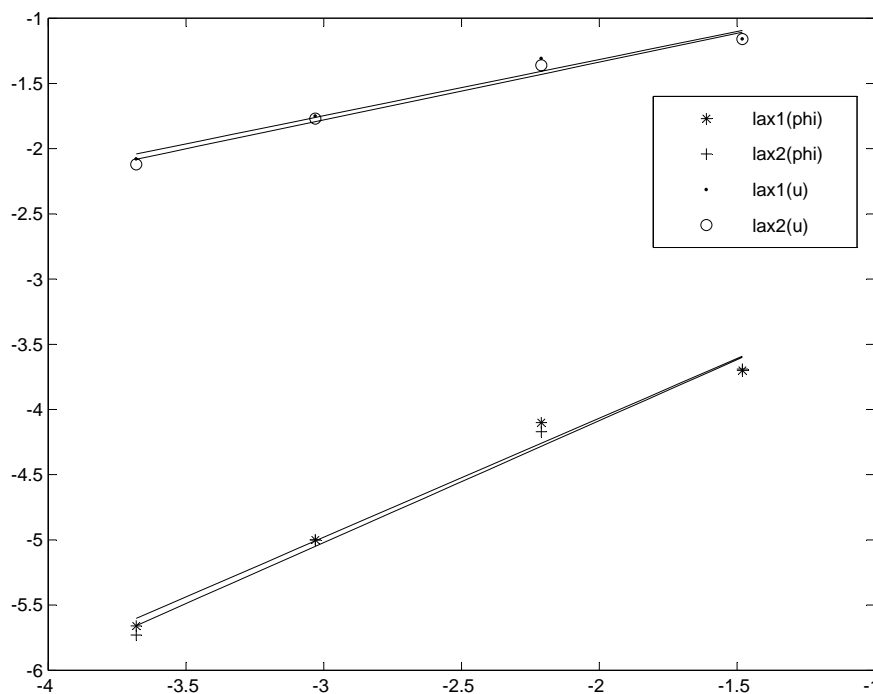


FIGURE 3.14 – *Courbes de convergence en espace pour  $\phi_1$  en norme  $L^1$ .*

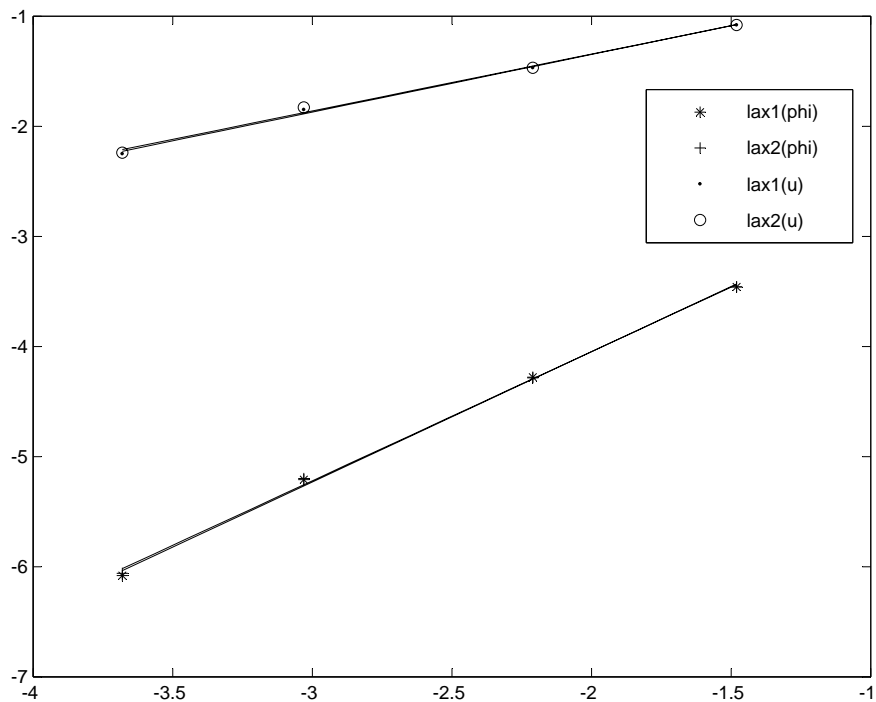


FIGURE 3.15 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_2$  en norme  $L^1$ .

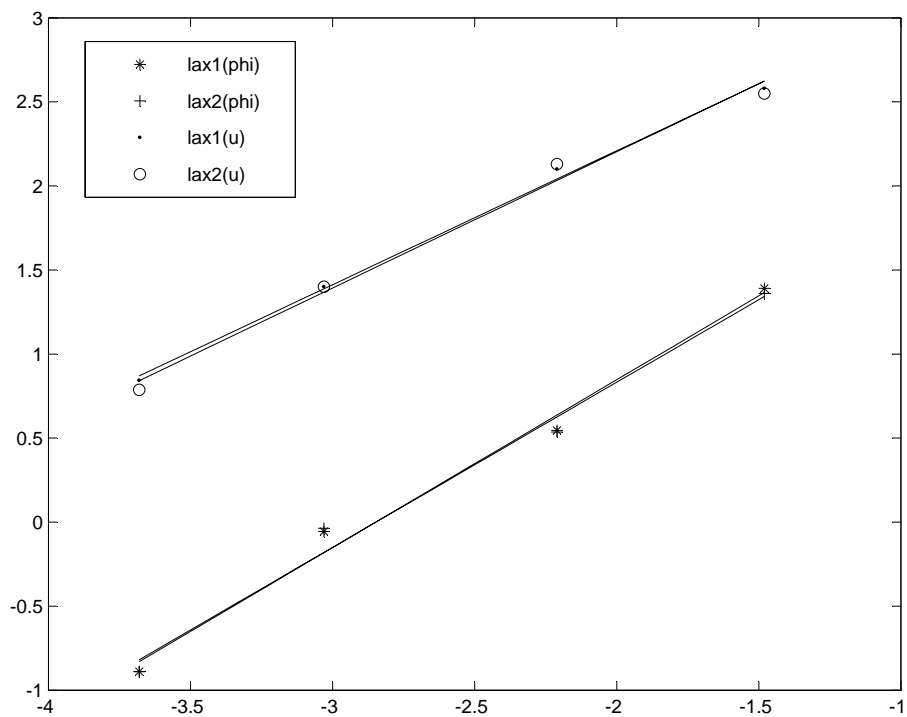


FIGURE 3.16 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_3$  en norme  $L^1$ .



### 3.7.4 Ordre en norme $L^\infty$

Les solutions  $\nabla\phi_1$  et  $\nabla\phi_2$  étant discontinues, il n'y a pas d'ordre pour la norme  $L^\infty$ .

<b>Lax1</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	7.87	0.43	-	-
$\phi_2$	9.38	0.91	-	-
$\phi_3$	$7.73 \times 10^{-2}$	0.89	$1.99 \times 10^{-2}$	0.71

<b>Lax2</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	7.61	0.45	-	-
$\phi_2$	9.16	0.93	-	-
$\phi_3$	$7.59 \times 10^{-2}$	0.89	$2.50 \times 10^{-2}$	0.64

TABLE 3.2 – *Ordre et constante des méthodes Lax1 et Lax2*

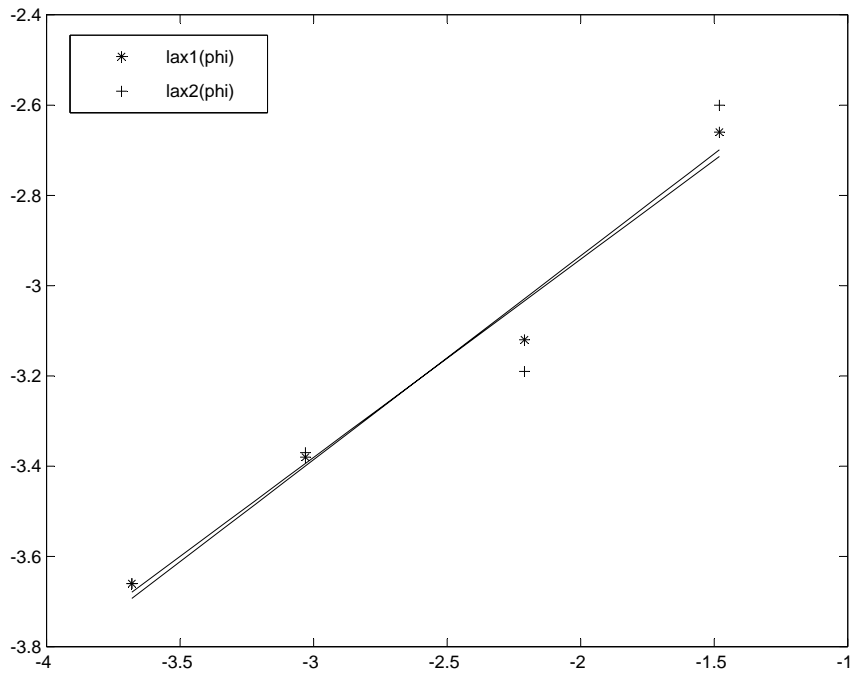


FIGURE 3.17 – *Courbes de convergence en espace pour  $\phi_1$  en norme  $L^\infty$ .*

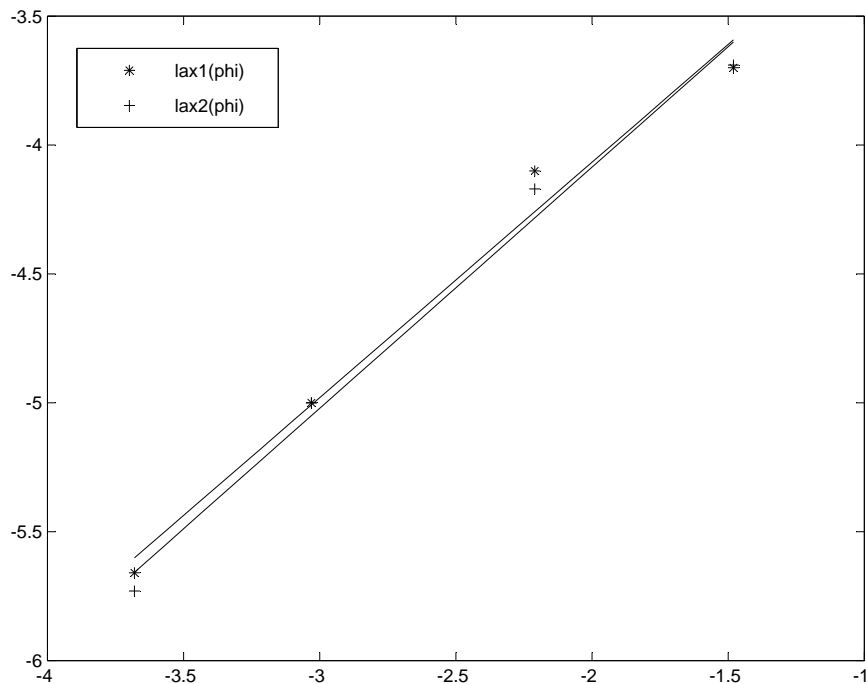


FIGURE 3.18 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_2$  en norme  $L^\infty$ .

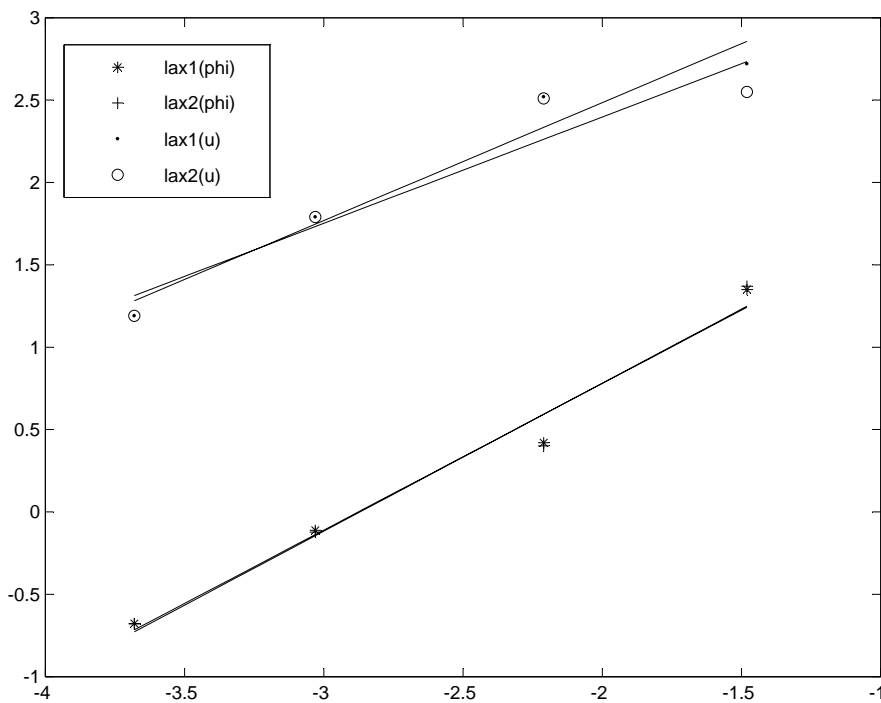


FIGURE 3.19 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_3$  en norme  $L^\infty$ .

## 3.8 Conclusions

Nous avons présenté le principe de construction d'un schéma volume fini pour l'équation level set sur un maillage non structuré formé de triangles. Nous avons adopté deux approches dont la première est dite de type **Hamilton-Jacobi** et la deuxième de type **loi de conservation**. La solution approchée est linéaire par morceaux et continue aux milieux des interfaces des éléments. Nous avons rappelé le cadre abstrait de la théorie de Barles et Souganidis permettant de prouver la convergence.

Comme point de départ, nous avons étudié des schémas centrés. Il s'avère que l'approche loi de conservation est plus stable ; mais pour les deux approches, les schémas demeurent insatisfaisants confirmant ainsi les résultats théoriques obtenus en étudiant l'approche de type Hamilton-Jacobi. Nous avons ensuite proposé des schémas décentrés de type Roe qui paraissent intéressants car faciles à implémenter ; malheureusement, ces schémas ne sont pas stables du fait que le décentrage se fait selon la normale  $\mathbf{n}_{ij}$  et non selon le vecteur  $\mathbf{W}$ .

Enfin, nous avons proposé un schéma de type Lax-Frederichs dont nous donnons une démonstration précise de la convergence en mettant en évidence sa propriété essentielle qui est la monotonie dans le cas de l'approche Hamilton-Jacobi. Pour les deux approches (Hamilton-Jacobi et loi de conservation), nous pouvons résumer les propriétés du schéma de type Lax observés aussi bien au niveau théorique que lors les essais numériques :

- il est consistant : il résout exactement le problème de Cauchy associé à l'équation level set quand la donnée initiale est une fonction linéaire sur  $\mathbb{R}^2$ .
- il est indépendant de la représentation géométrique des fonctions linéaires par morceaux.
- il manipule facilement les géométries compliqués. Et d'un point de vue théorique, le passage de la dimension deux à la dimension trois en espace peut être obtenu sans hypothèse supplémentaire.

## Chapitre 4

# Schémas MUSCL pour l'équation level set

Les schémas volumes finis permettent la mise en oeuvre efficace des approximations numériques des solutions des problèmes hyperboliques monodimensionnels. Ils permettent en particulier d'approcher la solution faible entropique en effectuant une bonne résolution des chocs et des discontinuités de contact [42, 25]. Cependant, ils ne donnent pas une précision élevée au moins dans la région où la solution est régulière.

Le critère TVD (Total Variation Diminishing) [29] et les méthodes de limitation de pente qui sont à la base des schémas MUSCL, permettent d'obtenir des méthodes d'ordre de convergence élevé tout en évitant les oscillations non physiques (voir [5] par exemple). Bien que ces méthodes de type MUSCL se soient révélées précises et robustes en dimension 1, leur extension aux maillages multidimensionnels cartésiens ou non structurés n'est pas simple. Par exemple, la notion de schéma TVD n'est pas facilement extensible. En effet, pour un maillage structuré  $2D$ , une méthode TVD est forcément d'ordre inférieur ou égal à 1 [27]. A cet effet, de nouvelles notions comme les schémas monotones de Spekreijse [51] ou les schémas LED (Local Extremum Diminishing) de Jameson [31] ont été construites. On peut aussi citer les extensions des méthodes MUSCL pour les schémas volumes finis de type *cell-centered* sur des maillages bidimensionnels non structurés de Barth [5] ainsi que l'approche de type *vertex-centered* (inconnue aux noeuds) qui a été étudiée notamment par Dervieux et son équipe (voir [55, 18]). On notera aussi que la convergence des schémas volumes finis avec une approche *cell-centered* pour l'équation d'advection sur un maillage non cartésien a été traitée par Desprès [24]. Pour une étude mathématique des schémas d'ordre supérieur on peut consulter [38, 39].

Les méthodes de type MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservative Laws) ont été introduites par Van Leer [54]. L'idée principale est une reconstruction linéaire par morceaux de la solution tout en préservant la stabilité du schéma. Dans le cas scalaire, le schéma MUSCL doit préserver toute la variation

totale de la solution et des méthodes de limiteur de pentes sont associées pour empêcher de fausses oscillations ou dépassement. Les extensions de la méthode MUSCL à des dimensions plus élevées ont été obtenues en utilisant les maillages structurés où la technique MUSCL est appliquée dans chaque direction [16].

Pour permettre la discrétisation pour des domaines complexes bornés, des méthodes MUSCL pour les maillages non structurés ont été considérés dans [32, 22, 6]. Ces méthodes MUSCL sont construites suivant deux étapes pour chaque pas de temps :

- Un gradient prédit est d’abord calculé en utilisant un schéma compact,
- ensuite le gradient est modifié pour respecter une contrainte de principe de maximum ou la décroissance de la variation totale.

Ceci implique le calcul de nouvelles valeurs et des fonctions flux monotones sur les interfaces des éléments.

L’objet de ce chapitre est de présenter une nouvelle méthode numérique de type MUSCL afin d’améliorer la précision des schémas volumes finis étudiés dans le chapitre 3. On rappelle que des schémas d’ordre de précision élevée sur maillage non structuré pour les équations de type Hamilton-Jacobi et donc l’équation level set ont déjà été proposés par Abgraal [1, 2] mais en utilisant une technique alternative aux méthodes MUSCL : les schémas ENO. Lions et Souganidis [46] ont également proposé des schémas MUSCL pour les équations d’Hamilton-Jacobi mais sur maillage structuré.

## 4.1 La méthode MUSCL Classique

Les schémas du premier ordre ne sont pas très précis et induisent une viscosité numérique importante pour les chocs. Un schéma du second ordre fournit une meilleure approximation et tend à diminuer l’effet de diffusion pour les chocs.

Pour construire un schéma du second ordre, les techniques de type MUSCL les plus connues, que nous rappelons brièvement dans cet exposé, consistent à effectuer une reconstruction linéaire locale (voir [8, 26, 53]). Soit  $\mathbf{U}_h^n = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^n 1_{K_i}$  une approximation constante par morceaux  $\mathbf{U}$  au temps  $t^n$  donnée ; ici  $\mathbf{U} = \nabla \phi$  et  $\phi$  est la solution de l’équation level set. Les méthodes MUSCL consistent à construire une nouvelle approximation linéaire par morceaux  $\tilde{\mathbf{U}}_h^n = (\tilde{u}_h^n, \tilde{v}_h^n)$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{u}_h^n(\mathbf{X}) = u_i^n + \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X}, & \mathbf{X} \in K_i, \\ \tilde{v}_h^n(\mathbf{X}) = v_i^n + \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X}, & \mathbf{X} \in K_i \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où

$$- \mathbf{U}_i^n = (u_i^n, v_i^n),$$

- $\mathbf{B}_i \mathbf{X}$  représente le vecteur  $\mathbf{X} - \mathbf{B}_i$ ,
- $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X}$  est le produit scalaire de  $\mathbf{B}_i \mathbf{X}$  avec la pente  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^2$ ,
- $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X}$  est le produit scalaire de  $\mathbf{B}_i \mathbf{X}$  avec la pente  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^2$ .

Remarquons qu'une telle reconstruction satisfait

$$\int_{K_i} \tilde{\mathbf{U}}_i^n(\mathbf{X}) dX = |K_i| \mathbf{U}_i^n,$$

puisque le barycentre  $\mathbf{B}_i$  est choisi comme point de référence.

Soit  $\mathbf{X}_{i,j}$  un point sur l'arête commune  $S_{i,j}$ , nous notons

$$\begin{cases} u_{i,j}^n = u_i^n + \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X}_{i,j}, & u_{j,i}^n = u_j^n + \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{B}_j \mathbf{X}_{i,j}, \\ v_{i,j}^n = v_i^n + \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X}_{i,j}, & v_{j,i}^n = v_j^n + \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{B}_j \mathbf{X}_{i,j}, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Ce genre de méthode est dite **méthode monopente** puisque nous calculons les valeurs  $u_{i,j}^n$  (respectivement  $v_{i,j}^n$ ) sur les arêtes  $S_{i,j}$ ,  $j \in \nu(i)$  en utilisant la même pente : la pente  $\mathbf{a}_i$  (respectivement  $\mathbf{b}_i$ ) ne change pas avec  $j$  pour chaque élément  $K_i$ .

Il y a deux choix naturels pour le point  $\mathbf{X}_{i,j}$  : le premier est suggéré par le point de vue géométrique car il correspond à l'interpolation linéaire entre  $\mathbf{B}_i$  et  $\mathbf{B}_j$ , le second est naturel du point de vue de l'intégration puisque la méthode d'intégration centrée est exacte pour les fonctions linéaires le long de l'arête  $S_{i,j}$ .

Pour obtenir une méthode du second ordre, nous remplaçons le flux numérique  $g_{i,j}^n(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n)$  par un nouveau flux  $g_{i,j}^n(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{j,i}^n)$  où  $\mathbf{U}_{i,j}^n$  et  $\mathbf{U}_{j,i}^n$  sont de meilleures approximations de  $\mathbf{U}$  sur l'interface. Le schéma d'ordre 2 s'écrit alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t h_{ij}^n(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{j,i}^n), \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{i,j}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}, \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \nabla \phi_{h|K_i}^{n+1} = \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} \phi_{ij}^{n+1} \boldsymbol{\nu}_{i,j}, \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} 1_{K_i}. \end{array} \right. \quad (\text{SHJ2})$$

Une seconde approche consiste à utiliser le système de loi de conservation. Ceci nous donne le schéma mixte suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t g_{i,j}^n(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{j,i}^n), \\ 2) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{S_{ij}} \phi_{i,j}^{n+1} \lambda_{i,j}. \\ 3) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \sum_{j \in \nu(i)} \alpha_{i,j} g_{i,j}^n(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{j,i}^n) \nu_{i,j}. \\ 4) \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{n+1} 1_{K_i}. \end{array} \right. \quad (\text{SHJ-LC2})$$

Comme nous l'avons rappelé, la difficulté réside dans l'obtention d'un ordre de convergence plus élevé tout en maintenant la stabilité. Plusieurs reconstructions de pentes ont été proposées (voir [26], [30], [8] pour une liste exhaustive). Toutes les méthodes sont basées sur une reconstruction locale du gradient. Deux principales contraintes doivent être respectées :

1. Le choix de la pente sera consistant avec une solution linéaire, *i.e.*, si la solution est linéaire, la fonction reconstruite doit être égale à la solution.
2. La solution doit respecter un certain principe du maximum pour garantir la stabilité de l'approximation numérique.

**Remarque 4.1.1.** *Dans toute la suite, nous considérons uniquement la situation où un élément  $K_i$  est strictement inclus dans le domaine, *i.e.* l'élément n'a pas d'arête au bord. Dans le cas où l'élément a une arête au bord, nous utilisons juste un schéma du premier ordre en posant  $\mathbf{a}_i = 0$ ,  $\mathbf{b}_i = 0$ .*

### 4.1.1 Construction de la pente par les méthodes du gradient

Nous donnons ici quelques méthodes classiques de reconstruction en utilisant la première composante de  $\mathbf{U}$ . Le principe est le même pour la seconde composante.

Notons par  $K_{j_1}$ ,  $K_{j_2}$ ,  $K_{j_3}$  les trois triangles adjacents au triangle  $K_i$ , nous considérons les quatre hyperplans dans l'espace  $x_1, x_2, U$  : l'hyperplan  $\pi_{i,1}$  est défini par les points  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{B}_{j_2}$ ,  $\mathbf{B}_{j_3}$  avec l'élévation  $u_i$ ,  $u_{j_2}$ ,  $u_{j_3}$  (et alors  $\pi_{i,2}$  et  $\pi_{i,3}$  dans la même démarche). L'hyperplan  $\pi_{1,2,3}$  est défini par les points  $\mathbf{B}_{j_1}$ ,  $\mathbf{B}_{j_2}$ ,  $\mathbf{B}_{j_3}$  avec l'élévation  $u_{j_1}$ ,  $u_{j_2}$ ,  $u_{j_3}$ .

$\pi_{i,1}$  est donné par l'équation

$$(u - u_i^n) = \mathbf{G}_{i,1} \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X}$$

où  $\mathbf{G}_{i,1} \in \mathbb{R}^2$  correspond au gradient suivant la direction spatiale tandis que  $\pi_{1,2,3}$  est donnée par

$$(u - u_{j_1}^n) = \mathbf{G}_{1,2,3} \cdot \mathbf{B}_{j_1} \mathbf{X}$$

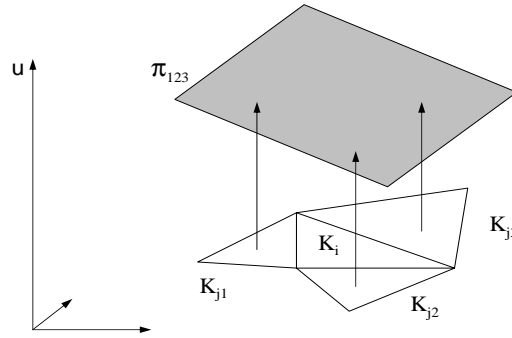


FIGURE 4.1 – Représentation du plan  $\pi_{1,2,3}$ .

Un premier choix pour la pente est  $\mathbf{a}_i = \mathbf{G}_{1,2,3}$  et conduit à un schéma linéaire consistant tandis que les autres choix utilisent une combinaison de  $\mathbf{G}_{i,1}$ ,  $\mathbf{G}_{i,2}$ ,  $\mathbf{G}_{i,3}$ , en posant

$$\mathbf{a}_i = \sigma(\mathbf{G}_{i,1}, \mathbf{G}_{i,2}, \mathbf{G}_{i,3}).$$

La consistance linéaire est obtenue si et seulement si  $\mathbf{a} = \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$  pour tout  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ .

### 4.1.2 Méthode de minimisation

Dans cette méthode ([11]), nous considérons l'hyperplan minimisant la distance avec les quatre points  $(\mathbf{B}_i, u_i)$ ,  $(\mathbf{B}_j, u_j)$ ,  $j \in \nu(i)$ . Nous cherchons la pente  $a_i$  qui minimise la fonctionnelle

$$E(\mathbf{a}) = \sum_{j \in \nu(i)} (u_j^n - u_i^n - \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j)^2.$$

L'existence et l'unicité pour le minimum sont évidents puisque la fonctionnelle est strictement convexe et nous obtenons le minimum  $a_i = \mathbf{G}_{LS}$  en utilisant la méthode des moindres carrés. Si  $u$  est linéaire, les quatre points sont dans le même hyperplan et le minimum correspond au gradient de  $u$ .



### 4.1.3 Conditions de stabilité.

Pour éviter des instabilités numériques à proximité des gradients élevés, on impose que les valeurs reconstruites  $u_{i,j}$  (respectivement  $v_{i,j}$ ) et  $u_{j,i}$  (respectivement  $v_{j,i}$ ) sur  $S_{i,j}$  satisfont des conditions de stabilité. Considérons deux triangles adjacents  $K_i$  et  $K_j$ , nous définissons les conditions suivantes.

1. La condition de stabilité  $L^\infty$

$$\begin{cases} \min(u_i^n, u_j^n) \leq u_{i,j}^n, u_{j,i}^n \leq \max(u_i^n, u_j^n), \\ \min(v_i^n, v_j^n) \leq v_{i,j}^n, v_{j,i}^n \leq \max(v_i^n, v_j^n), \end{cases} \quad (4.1.3)$$

2. La condition de conservation de la variation totale

$$\begin{cases} \text{si } u_i^n \leq u_j^n \text{ alors } u_i^n \leq u_{i,j}^n \leq u_{j,i}^n \leq u_j^n, \\ \text{si } v_i^n \leq v_j^n \text{ alors } v_i^n \leq v_{i,j}^n \leq v_{j,i}^n \leq v_j^n, \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Notons que la condition de conservation de la variation totale implique la condition de stabilité  $L^\infty$ .

### 4.1.4 Le limiteur

La pente  $\mathbf{a}_i$  (respectivement  $\mathbf{b}_i$ ) obtenue par les méthodes des sections 4.1.1 et 4.1.2 ne satisfait pas *à priori* la condition de stabilité. Nous imposons cette condition en multipliant la pente par un limiteur  $\theta_i$  tel que les valeurs  $u_{i,j}$  (respectivement  $v_{i,j}$ ) et  $u_{j,i}$  (respectivement  $v_{j,i}$ ) obtenues avec la nouvelle pente  $\tilde{\mathbf{a}}_i = \theta_i \mathbf{a}_i$  (respectivement  $\tilde{\mathbf{b}}_i = \theta_i \mathbf{b}_i$ ) satisfont la condition de stabilité. En particulier, si  $\theta_i = 0$ , on retombe sur le schéma du premier ordre. Dans le cas de la solution linéaire, on a  $\theta_i = 1$  de sorte qu'il est naturel de choisir la plus grande valeur de  $\theta_i \in [0, 1]$ .

## 4.2 Méthode MUSCL multipente

Toutes les méthodes classiques du second ordre sont basées sur la reconstruction (4.1.1). La pente  $\mathbf{a}_i$  (respectivement  $\mathbf{b}_i$ ) calculée sur l'élément  $K_i$  est utilisée pour produire toutes les valeurs reconstruites  $u_{i,j}$ ,  $j \in \nu(i)$  (respectivement  $v_{i,j}$ ,  $j \in \nu(i)$ ). Une approche différente consiste à fournir trois pentes, une pour chaque arête de l'élément en respectant les deux conditions fondamentales :

- le schéma est consistant pour la fonction linéaire  $u$ , *i.e.*  $u_{i,j} = u(\mathbf{X}_{i,j})$ ,
- si nous avons un extremum local au point  $\mathbf{B}_i$ , le schéma redonne un schéma du premier ordre, *i.e.* les pentes s'annulent.

Dans cette section, nous appliquons une nouvelle méthode de type MUSCL introduite dans [13] au schémas **Lax1** et **Lax2** étudiés dans le chapitre 3. Cette méthode est dite **méthode multipente** puisque chaque valeur  $u_{i,j}$  (respectivement  $v_{i,j}$ ), est obtenue en utilisant une pente spécifique pour chaque  $j \in \nu(i)$ . L'idée principale consiste à considérer pour chaque direction un problème unidimensionnel où on doit évaluer une pente qui est consistante avec la solution linéaire et satisfait la contrainte de stabilité dans la direction considérée.

### 4.2.1 La décomposition fondamentale

Pour définir la méthode multipente, nous introduisons les vecteurs normalisés dans chaque direction  $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j$  :

$$\mathbf{t}_k = \mathbf{t}_{ij_k} = \frac{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_k}}{|\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_k}|}, \quad k = 1, 2, 3.$$

où  $K_{j_k}$ ,  $k = 1, 2, 3$  sont les trois triangles adjacents à  $K_i$  en utilisant une numérotation locale.

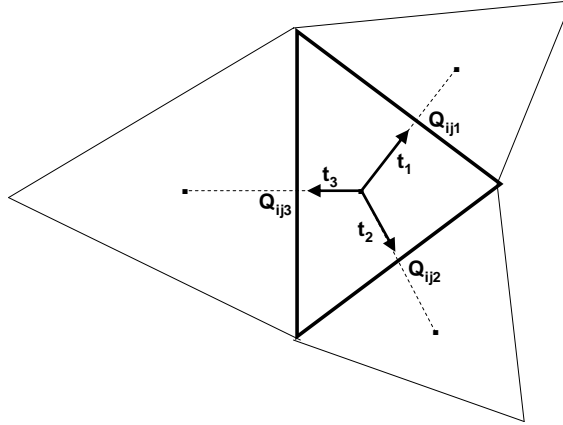


FIGURE 4.2 – Définition du vecteur  $\mathbf{t}_k$ .

Avant d'énoncer notre proposition, nous supposons de plus que le maillage satisfait la propriété suivante (voir figure 4.3) :

$$(\mathcal{HM}2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour un triangle } K_i \in \mathcal{T}_h \text{ tel que } |\nu(i)| = 3, \text{ le point } \mathbf{B}_i \\ \text{est strictement inclus dans le triangle} \\ \text{défini par les trois points } \mathbf{B}_j, j \in \nu(i). \end{array} \right.$$

**Proposition 4.2.1** (La décomposition fondamentale). *Sous l'hypothèse  $(\mathcal{HM}2)$ , il existe des coefficients  $\beta_{km} > 0$  tels que l'on ait la décomposition suivante :*

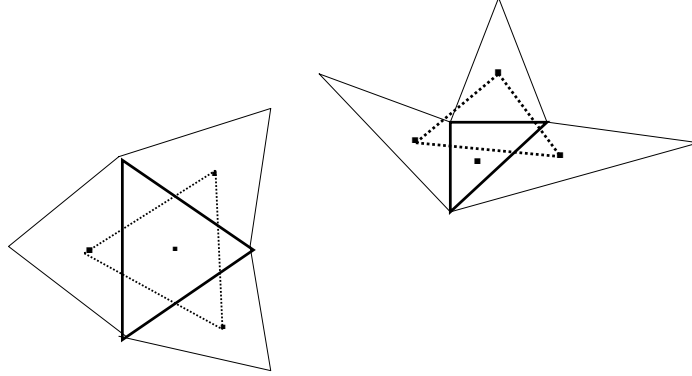


FIGURE 4.3 – Configuration satisfaisant la propriété  $(\mathcal{HM}2)$  (sur la gauche). Configuration qui ne satisfait pas la propriété  $(\mathcal{HM}2)$  (sur la droite).

$$\mathbf{t}_1 = \beta_{12} \mathbf{t}_2 + \beta_{13} \mathbf{t}_3 \quad (4.2.1)$$

$$\mathbf{t}_2 = \beta_{21} \mathbf{t}_1 + \beta_{23} \mathbf{t}_3 \quad (4.2.2)$$

$$\mathbf{t}_3 = \beta_{31} \mathbf{t}_1 + \beta_{32} \mathbf{t}_2. \quad (4.2.3)$$

En outre les coefficients satisfont les propriétés :

$$\beta_{ml} \beta_{lm} = 1, \quad (4.2.4)$$

$$\beta_{ml} \beta_{lk} = -\beta_{mk}, \quad (4.2.5)$$

pour toute permutation circulaire  $(m, l, k)$  de  $(1, 2, 3)$ .

*Démonstration.* En utilisant les coordonnées barycentriques, l'hypothèse  $(\mathcal{HM}2)$  implique que

$$\mathbf{B}_i = \sum_{k=1,2,3} \rho_k \mathbf{B}_{j_k}$$

avec  $\rho_k > 0$  et  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1$ . Nous déduisons alors

$$0 = \sum_{k=1,2,3} \rho_k \mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_k} = \sum_{k=1,2,3} \rho_k |\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_k}| \mathbf{t}_k.$$

Par conséquent

$$t_n = \sum_{l \neq m} \frac{\rho_l |\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_l}|}{\rho_m |\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_m}|}, \quad t_l = \sum_{l \neq m} \beta_{ml} t_l.$$

Les relations (4.2.4)-(4.2.5) se déduisent immédiatement de la relation  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1$ .

Puisque  $\rho_k |\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_k}| > 0$ , nous en déduisons que tous les coefficients  $\beta_{ij}$  sont négatifs.  $\square$

### 4.3 Méthode multipente avec les points $\mathbf{Q}_{i,j}$

A l'aide de la décomposition fondamentale, nous allons évaluer une approximation de  $u_{i,j}$  et  $u_{j,i}$  au point  $\mathbf{Q}_{i,j}$  par

$$u_{ij} = u_i + p_{ij} |\mathbf{B}_i \mathbf{Q}_{ij}|, \quad u_{ji} = u_j + p_{ji} |\mathbf{B}_j \mathbf{Q}_{ij}|.$$

Afin de déterminer les pentes  $p_{ij}$ , deux ensembles de pentes sont introduits

$$p_{ij_k}^{ref} = p_k^{ref} = p_k^+ = \frac{u_{j_k}^n - u_i^n}{|\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_k}|}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.3.1)$$

comme pentes de référence (appelés pentes avales) et

$$\begin{aligned} p_{i,j_1}^- &= \beta_{12} p_{i,j_2}^{ref} + \beta_{13} p_{i,j_3}^{ref}, \\ p_{i,j_2}^- &= \beta_{21} p_{i,j_1}^{ref} + \beta_{23} p_{i,j_3}^{ref}, \\ p_{i,j_3}^- &= \beta_{31} p_{i,j_1}^{ref} + \beta_{32} p_{i,j_2}^{ref}, \end{aligned}$$

représentent les pentes amont. Nous allons combiner les pentes avales et amont pour calculer les pentes  $p_{ij}$ . A cette fin, nous introduisons le limiteur de pente pour garantir les propriétés de stabilité.

**Définition 4.3.1.** Une fonction  $(p, q) \rightarrow \theta(p, q)$  est un limiteur s'il satisfait les trois propriétés

$$\theta(p, p) = p, \quad \forall p \in \mathbb{R}, \quad (4.3.2)$$

$$\theta(p, q) = 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{R} \text{ avec } pq \leq 0. \quad (4.3.3)$$

$$\theta(p, q) = \theta(q, p). \quad (4.3.4)$$

Par exemple le limiteur minmod

$$\begin{cases} \theta(p, q) = 0 & pq \leq 0, \\ \theta(p, q) = \min(p, q) & p, q \geq 0, \\ \theta(p, q) = \max(p, q) & p, q \leq 0, \end{cases}$$

satisfait les trois propriétés. D'autres limiteurs comme le limiteur de Van-Leer ou le limiteur superbe satisfont aussi les trois propriétés (4.3.2,4.3.3,4.3.4).

Définissons les pentes limitées dans la direction  $\mathbf{t}_{ij}$  par

$$p_{i,j} = \theta(p_{i,j}^+, p_{i,j}^-), \quad j \in \nu(i), \quad (4.3.5)$$

la méthode multipente s'écrit alors

$$u_{i,j} = u_i + p_{i,j} |\mathbf{B}_i \mathbf{Q}_{i,j}|, \quad j \in \nu(i). \quad (4.3.6)$$

Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 4.3.1.** *Supposons que le maillage satisfait l'hypothèse  $(\mathcal{HM}2)$ ,*

- i) le schéma est consistant pour la solution linéaire,*
- ii) Nous avons un schéma du premier ordre aux points extrémaux.*

*Démonstration.* Pour prouver la première assertion, considérons une fonction linéaire  $u(\mathbf{X}) = u_0 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}$ . Alors nous avons

$$p_{i,j_k}^{ref} = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_k}}{|\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{j_k}|} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{t}_k.$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} p_{i,j_1}^- &= \beta_{12} p_{i,j_2}^{ref} + \beta_{13} p_{i,j_3}^{ref} \\ &= \beta_{12} \mathbf{L} \cdot \mathbf{t}_2 + \beta_{13} \mathbf{L} \cdot \mathbf{t}_3 \\ &= \mathbf{L} \cdot (\beta_{12} \mathbf{t}_2 + \beta_{13} \mathbf{t}_3) \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{t}_1 = p_{i,j_1}^{ref} \end{aligned}$$

Nous déduisons de la propriété (4.3.2) que  $p_{i,j} = p_{i,j}^{ref}$  et finalement que  $u_{i,j} = u(\mathbf{Q}_{i,j})$ .

Pour prouver la seconde assertion, supposons que  $u_i$  est un minimum local alors toutes les pentes  $p_{i,j}^{ref}$  sont positives. Sous l'hypothèse  $(\mathcal{HM}2)$ , tous les coefficients  $\beta$  sont négatifs par la Proposition 4.2.1. Par conséquent  $p_{i,j}^-$  sont négatifs et la propriété (4.3.3) implique  $p_{i,j} = 0$ .  $\square$

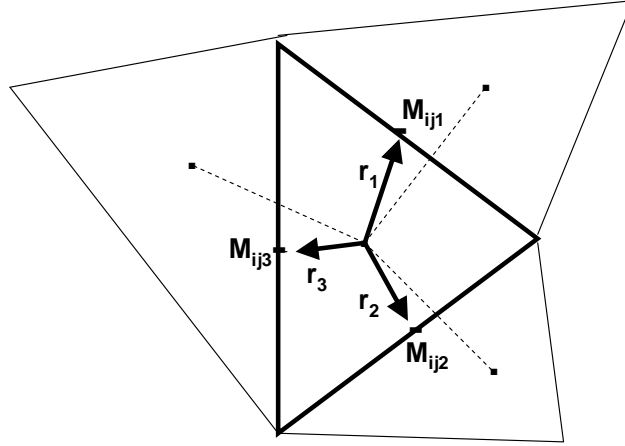
**Remarque 4.3.1.** *Si nous choisissons la fonction minmod comme limiteur, nous construisons la valeur au point  $\mathbf{Q}_{i,j}$  avec la relation (4.3.6). On peut vérifier que nous vérifions la condition  $u_i \leq u_{i,j} \leq u_{i,j}^{ref}$  si  $u_i \leq u_j$  ce qui implique que la reconstruction est TVD dans chaque direction.*

## 4.4 Méthode multipente avec les points $\mathbf{M}_{i,j}$

Par définition, le flux traversant la facette  $S_{ij}$  est donnée par

$$G_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta t |S_{i,j}|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{S_{i,j}} F(\mathbf{x}, t) |\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)| d\gamma dt.$$

Pour obtenir une approximation numérique d'ordre deux, on utilise une formule de quadrature  $G_{i,j}^n \approx F(\mathbf{M}_{ij}) |\mathbf{U}(\mathbf{M}_{ij}, t^n)|$  où  $\mathbf{M}_{ij}$  est le milieu de la facette  $S_{ij}$ . Il est donc naturel de chercher à évaluer  $\mathbf{U}_{ij}$  en utilisant le point  $\mathbf{M}_{ij}$ .


 FIGURE 4.4 – Vecteur  $\mathbf{r}_k$ .

#### 4.4.1 Décomposition fondamentale de $\mathbf{r}_i$ par rapport à $\mathbf{r}_j$

Nous considérerons une approximation de  $u_{i,j}$  au point  $\mathbf{M}_{i,j}$ . A cette fin, nous considérerons un nouvel ensemble de vecteurs (figure 4.4),

$$\mathbf{r}_{ijk} = \mathbf{r}_k = \frac{\mathbf{B}_i \mathbf{M}_{ijk}}{|\mathbf{B}_i \mathbf{M}_{ijk}|}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Comme dans la section précédente, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 4.4.1.** *Supposons que le triangle  $K \in \mathcal{T}_h$  n'est pas réduit à un segment, alors il existe des coefficients  $\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{21}, \delta_{23}, \delta_{31}, \delta_{32}$  tel que*

$$\mathbf{r}_1 = \delta_{12} \mathbf{r}_2 + \delta_{13} \mathbf{r}_3 \quad (4.4.1)$$

$$\mathbf{r}_2 = \delta_{21} \mathbf{r}_1 + \delta_{23} \mathbf{r}_3 \quad (4.4.2)$$

$$\mathbf{r}_3 = \delta_{31} \mathbf{r}_1 + \delta_{32} \mathbf{r}_2, \quad (4.4.3)$$

avec la relation

$$\delta_{ml} \delta_{lm} = 1, \quad (4.4.4)$$

$$\delta_{ml} \delta_{lk} = -\delta_{mk}, \quad (4.4.5)$$

pour une permutation circulaire  $(m, l, k)$  de  $(1, 2, 3)$ . De plus, si  $\mathbf{B}_i$  est strictement à l'intérieur du triangle  $(\mathbf{M}_{i,j})_{j \in \nu(i)}$  alors tous les coefficients sont négatifs.

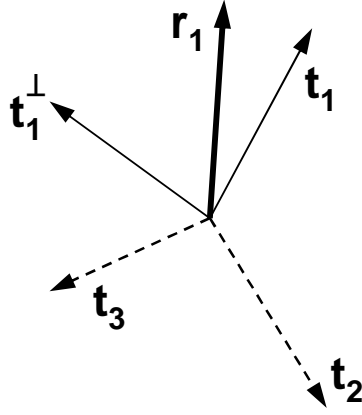


FIGURE 4.5 – Décompositions du vecteur  $\mathbf{r}_1$  dans la base  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1^\perp$  et du vecteur  $\mathbf{t}_1^\perp$  dans la base  $\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$

#### 4.4.2 Décomposition de $\mathbf{r}_i$ par rapport à $\mathbf{t}_i$ et $\mathbf{t}_j$

Les directions naturelles pour calculer les pentes sont  $\mathbf{t}_m = \mathbf{t}_{ijm}$ ,  $m = 1, 2, 3$  puisque les informations basiques (*i.e.* les valeurs de  $\mathbf{U}_i$ ) sont fournies au barycentre. Pour calculer les valeurs interpolées aux points  $\mathbf{M}_{i,j}$ , on doit décomposer  $\mathbf{r}_k$  à partir de l'ensemble  $(\mathbf{t}_m)_{m=1,2,3}$ . La non unicité de la décomposition est évidente ainsi un nouveau critère est à introduire dans le but de définir la "bonne" décomposition indiquée.

**Définition 4.4.1.** *La décomposition*

$$\mathbf{r}_k = \sum_{m=1,2,3} \mu_{km} \mathbf{t}_m, \quad (4.4.6)$$

est compatible avec l'ensemble  $(\mathbf{t}_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$  si les coefficients satisfont les propriétés suivantes :

$$\text{si } \mathbf{r}_k = \mathbf{t}_k \text{ alors } \mu_{kk} = 1 \text{ et } \mu_{km} = 0, \quad m \neq k.$$

De plus, la décomposition est unique.

Dans le but de construire une décomposition compatible, désignons par  $\mathbf{t}_k^\perp$  un vecteur normalisé et orthogonal à  $\mathbf{t}_k$ . D'une part, nous considérons l'unique décomposition de  $\mathbf{t}_k^\perp$  dans la base  $\mathbf{t}_m$   $m \neq k$  (figure 4.5)

$$\mathbf{t}_1^\perp = \eta_{12} \mathbf{t}_2 + \eta_{13} \mathbf{t}_3, \quad (4.4.7)$$

$$\mathbf{t}_2^\perp = \eta_{21} \mathbf{t}_1 + \eta_{23} \mathbf{t}_3, \quad (4.4.8)$$

$$\mathbf{t}_3^\perp = \eta_{31} \mathbf{t}_1 + \eta_{32} \mathbf{t}_2. \quad (4.4.9)$$

D'autre part, nous décomposons  $\mathbf{r}_k$  en utilisant

$$\mathbf{r}_k = (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{t}_k) \mathbf{t}_k + (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{t}_k^\perp) \mathbf{t}_k^\perp.$$

Avec les relations (4.4.7)-(4.4.9), nous obtenons les décompositions de  $\mathbf{r}_k$  de la forme (4.4.6) selon la définition (4.4.1).

### 4.4.3 Construction des pentes

Nous définissons d'abord les pentes avales  $q_{i,j}^+$  dans la direction  $\mathbf{B}_i \mathbf{M}_{i,j}$  par

$$q_{i,j_k}^+ = \sum_{m=1,2,3} \mu_{km} p_{i,j_m}^{ref}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.4.10)$$

Ensuite, nous définissons les pentes amonts

$$\begin{aligned} q_{i,j_1}^- &= \delta_{12} q_{i,j_2}^+ + \delta_{13} q_{i,j_3}^+, \\ q_{i,j_2}^- &= \delta_{21} q_{i,j_1}^+ + \delta_{23} q_{i,j_3}^+, \\ q_{i,j_3}^- &= \delta_{31} q_{i,j_1}^+ + \delta_{32} q_{i,j_2}^+. \end{aligned}$$

Finalement, nous calculons les pentes  $q_{i,j}$  avec

$$q_{i,j} = \theta(q_{i,j}^+, q_{i,j}^-), \quad j \in \nu(i), \quad (4.4.11)$$

où  $\theta$  est un limiteur et nous définissons les valeurs reconstruites par

$$u_{i,j} = u_i + q_{i,j} |\mathbf{B}_i \mathbf{M}_{i,j}|. \quad (4.4.12)$$

**Proposition 4.4.2.** *Le schéma est consistant pour la fonction linéaire.*

*Démonstration.* Considérons une fonction  $u(\mathbf{X}) = u_0 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}$  avec  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^2$ . Par construction, nous avons  $p_{i,j_k}^{ref} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{t}_k$ . La relation (4.4.10) implique que

$$q_{i,j_k}^+ = \mathbf{L} \cdot \sum_{m=1,2,3} (\mu_{km} \mathbf{t}_m) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{r}_k.$$

Ainsi nous déduisons que

$$q_{i,j_k}^+ = \mathbf{L} \cdot \mathbf{r}_k = \frac{u(\mathbf{M}_{i,j_k}) - u(\mathbf{B}_i)}{|\mathbf{B}_i \mathbf{M}_{i,j_k}|}.$$

D'un autre côté, nous écrivons par exemple avec  $k = 1$

$$\begin{aligned} q_{i,j_1}^- &= \delta_{12} q_{i,j_2}^+ + \delta_{13} q_{i,j_3}^+ \\ &= \mathbf{L} \cdot (\delta_{12} \mathbf{r}_2 + \delta_{13} \mathbf{r}_3) \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{r}_1 = q_{i,j_1}^+ \end{aligned}$$

Grâce à la propriété (4.3.2), nous déduisons que  $q_{i,j_k} = q_{i,j_k}^+$  et ainsi  $u_{i,j} = u(\mathbf{M}_{i,j})$  pour tout  $j \in \nu(i)$ .  $\square$



**Remarque 4.4.1.** *Il n'est pas évident que le schéma dégénère en un schéma du premier ordre si  $u_i$  est un minimum ou un maximum local. En effet, puisque nous supposons que le point  $\mathbf{B}_i$  est strictement à l'intérieur du triangle composé des points  $M_{ij}$ ,  $j \in \nu(i)$ , tous les coefficients  $\delta_{km}$  sont négatifs. Donc si toutes les pentes  $q_{i,j_k}^+$  ont le même signe, nous en déduisons que si  $q_{i,j_k}^- q_{i,j_k}^+ < 0$  alors  $q_{i,j_k} = 0$  grâce à la relation (4.3.3). Mais si toutes les pentes  $p_{i,j}^{ref}$  ont le même signe, les pentes  $q_{i,j_k}^+$  données par les relations (4.4.10) n'ont pas à priori le même signe, par conséquent la pente  $p_{i,j}$  doit être non nulle.*

## 4.5 Résultats numériques

Dans cette section nous présentons une série de tests numériques afin de valider (ou invalider) les schémas et mesurer les critères de convergences. Nous allons mettre en oeuvre les six schémas suivants :

**laxhj** : schéma **Lax1** introduit dans la section 3.6 du chapitre 3,

**laxlc** : schéma **Lax2** introduit dans la section 3.6 du chapitre 3,

**laxhj2Q** : schéma MUSCL construit au point Q à partir du schéma **Lax1**,

**laxhj2M** : schéma MUSCL construit au point M à partir du schéma **Lax1**,

**laxlc2Q** : schéma MUSCL construit au point Q à partir du schéma **Lax2**,

**laxlc2M** : schéma MUSCL construit au point M à partir du schéma **Lax2**.

Pour tous les essais, nous prenons  $\Omega = [-1, 1]^2$  et utilisons les 4 maillages  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_3$  avec  $N0 = 92$ ,  $N1 = 358$ ,  $N2 = 1414$ ,  $N3 = 5770$  éléments de longueurs caractéristiques  $\tilde{h}_0 = 2.25 \times 10^{-1}$ ,  $\tilde{h}_1 = 1.09 \times 10^{-1}$ ,  $\tilde{h}_2 = 4.83 \times 10^{-2}$ ,  $\tilde{h}_3 = 2.49 \times 10^{-2}$  respectivement.

### 4.5.1 tests numériques

Nous allons construire plusieurs types de tests. Pour les deux premiers tests, nous comparons les schémas sur une solution peu régulière pour évaluer la viscosité numérique. Le dernier test concerne une fonction régulière et on s'intéresse plus particulièrement à l'ordre de convergence. Nous estimons l'ordre et la constante de chaque schéma en normes  $L^1$  et  $L^\infty$ .

#### 4.5.1.1 Description des tests

Considérons le problème suivant : Trouver  $\phi : \mathbb{R}^2 \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t) |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)| &= 0 && \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, T], \\ \phi &= \phi_0 && \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous rappelons les tests numériques déjà rencontrés dans le chapitre 3. Ces tests ont été construits en choisissant à la fois la vitesse  $F$  et la condition initiale  $\phi_0$ .

Pour les deux premiers tests, on se donne deux vecteurs  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  de  $\mathbb{R}^2$ . On rappelle que  $\mathbf{W}$  est le vecteur défini par  $\mathbf{W} = \frac{\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d}{|\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_d|}$  et  $\mathbf{V}$  est l'unique vecteur tel que  $\{\mathbf{V}, \mathbf{W}\}$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^2$ .  $\mathcal{P}_g$  et  $\mathcal{P}_d$  sont deux plans de  $\mathbb{R}^3$  d'équations respectives  $z = \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{x}$ , et  $z = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{x}$ .

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , on procède au changement de variable en introduisant les coordonnées dans la base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{W}, \mathbf{V}\}$ , ce qui implique

$$\mathbf{x} = \zeta \mathbf{W} + \eta \mathbf{V}.$$

Par construction  $\mathbf{U}_g \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{V} = \omega_0$  et les vecteurs  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  s'expriment dans la nouvelle base de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_g &= \omega_g \mathbf{W} + \omega_0 \mathbf{V}, \\ \mathbf{U}_d &= \omega_d \mathbf{W} + \omega_0 \mathbf{V}. \end{aligned}$$

- $\nabla \phi_1$  un choc à l'instant initial et  $F = 1$  avec  $\omega_0 \neq 0$  :

$$\phi_1(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g \cdot \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g \\ \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d \end{cases}$$

et

$$\nabla \phi_1(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g \\ \mathbf{U}_d, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d \end{cases}$$

Avec  $\mathbf{U}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{U}_d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- $\nabla \phi_2$  un choc à l'instant initial et  $F = 1$  avec  $\omega_0 = 0$  :

$$\phi_2(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \omega_g \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g \\ \omega_d \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d \end{cases}$$

et

$$\nabla\phi_2(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \omega_g \mathbf{W}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_g \\ \omega_d \mathbf{W}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}_d \end{cases}$$

Avec  $\mathbf{U}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{U}_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- $\phi_3$  est régulier à l'instant initial et  $F(x, y, t) = (4 - x - 2y)/\sqrt{45}$  :

$$\phi_3(x, y, 0) = (4 - x - 2y)^3$$

et

$$\nabla\phi_3(x, y, 0) = \begin{pmatrix} -3(4 - x - 2y)^2 \\ -6(4 - x - 2y)^2 \end{pmatrix}.$$

#### 4.5.1.2 Comparaison de la viscosité des schémas

Nous présentons une coupe suivant l'axe  $y = 0.5$  de la solution calculée par plusieurs schémas. L'objectif est d'évaluer visuellement la viscosité des schémas. Les résultats sont représentés par les figures 4.6 et 4.7 pour les schémas de type **Hamilton-Jacobi**; par les figures 4.8 et 4.9 pour les schémas de type **loi de conservation**. Il apparaît d'une part que les schémas d'ordre 2 soient moins diffusifs que les schémas **laxhj** et **laxlc**. D'autre part, on constate les schémas de type **loi de conservation** sont plus robustes que les schémas de type **Hamilton-Jacobi**.

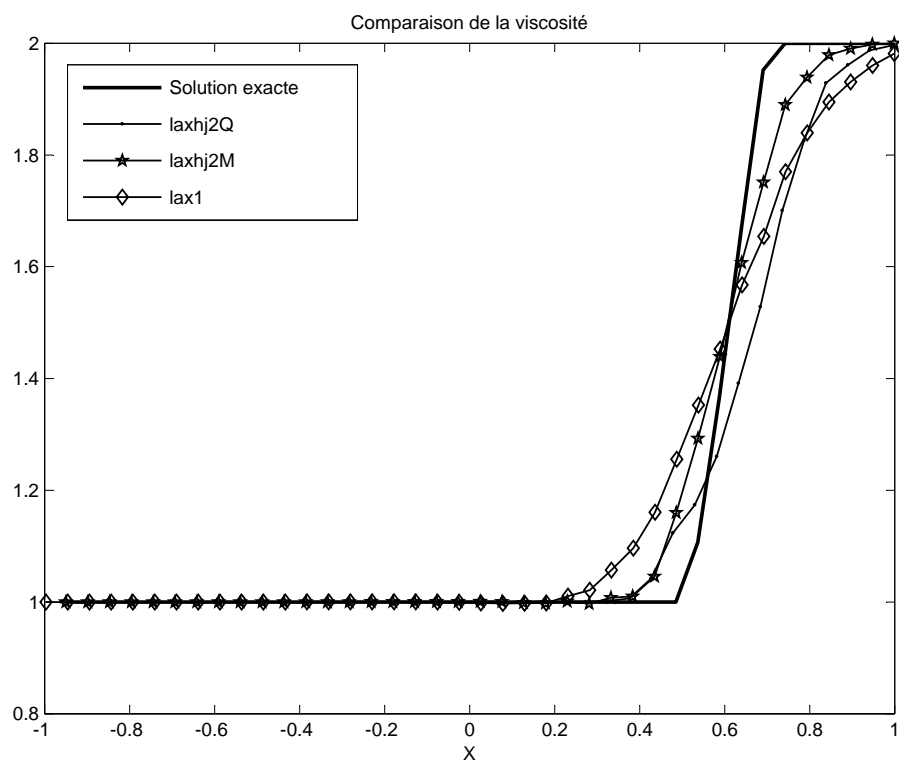


FIGURE 4.6 – Cas  $\omega_0 \neq 0$ . Coupe 1D de  $\nabla\phi_1$  et des gradients des fonctions calculées par les méthodes de type Hamilton-Jacobi à l'instant  $t=0.5$ .

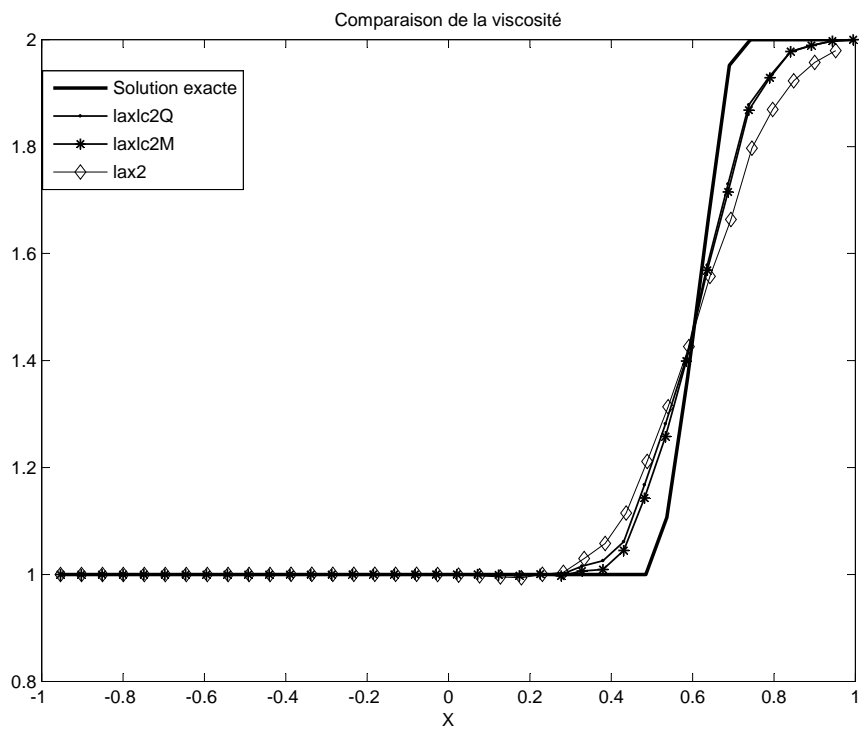


FIGURE 4.7 – Cas  $\omega_0 \neq 0$ . Coupe 1D de  $\nabla\phi_1$  et des gradients des fonctions calculées par les méthodes de type loi de conservation à l'instant  $t=0.5$ .

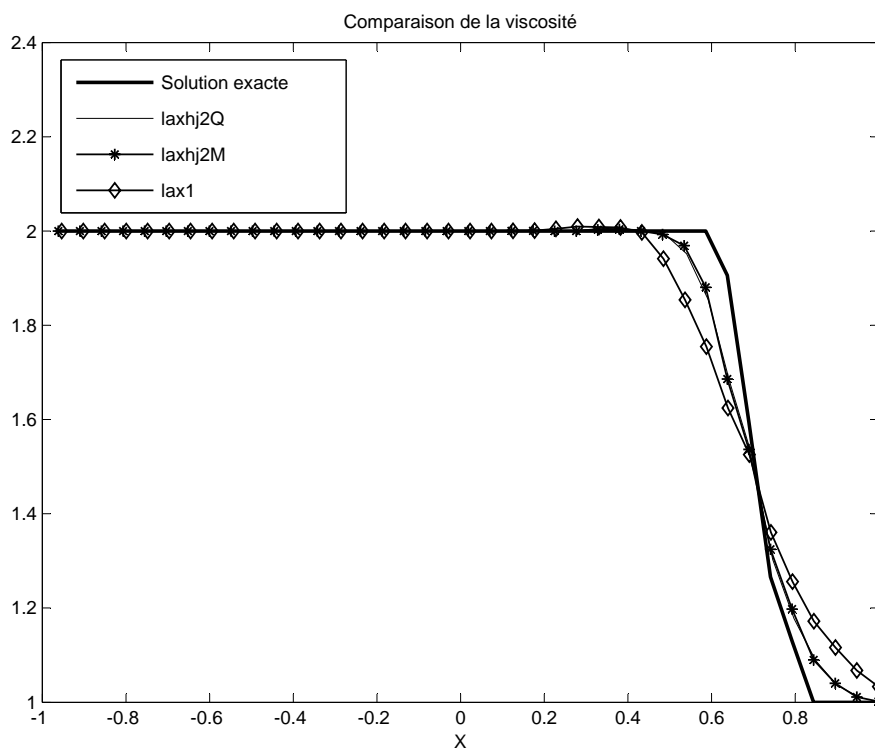


FIGURE 4.8 – Cas  $\omega_0 = 0$ . Coupe 1D de  $\nabla\phi_2$  et des gradients des fonctions calculées par les méthodes de type Hamilton-Jacobi à l'instant  $t=0.5$ .

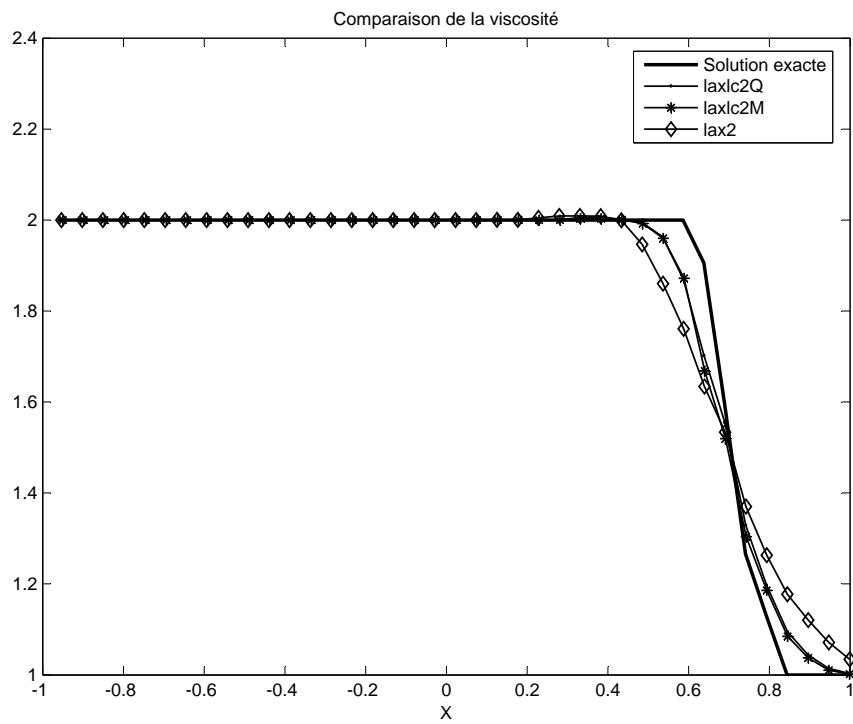


FIGURE 4.9 – Cas  $\omega_0 = 0$ . Coupe 1D de  $\nabla\phi_2$  et des gradients des fonctions calculées par les méthodes de type loi de conservation à l'instant  $t=0.5$ .

### 4.5.1.3 Ordre en norme $L^1$

Dans ce qui suit, nous évaluons l'ordre  $\alpha$  et la constante  $C$  des méthodes étudiées en traçant la droite d'équation  $y = \alpha \times x - \log(C)$  par une régression linéaire. Dans toute la suite, nous noterons par  $\alpha_1$  et  $C_1$  (resp.  $\alpha_2$  et  $C_2$ ) l'ordre et la constante associés à la fonction level set  $\phi$  (resp.  $\nabla\phi$ ). Avant de donner les résultats pour l'ordre 2, nous rappelons les résultats obtenus pour l'ordre 1 (tableaux 4.1) pour saisir le gain en précision. Les résultats de l'ordre 2 sont donnés par les tableaux 4.2 et 4.3. Les courbes de convergence pour l'erreur entre les solutions exactes  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  et les solutions calculées par les schémas d'ordre 2 sont respectivement donnés par les figures 4.10, 4.11 et 4.12. Enfin, les courbes de convergence pour l'erreur entre  $\nabla\phi_1$ ,  $\nabla\phi_2$ ,  $\nabla\phi_3$  et les gradients des solutions calculées par les schémas d'ordre 2 sont respectivement donnés par les figures 4.13, 4.14 et 4.15.

<b>laxhj</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	9.38	0.91	1.57	0.43
$\phi_2$	5.37	1.18	1.35	0.52
$\phi_3$	$5.82 \times 10^{-2}$	0.99	$2.23 \times 10^{-2}$	0.72

<b>laxlc</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	9.16	0.93	1.57	0.44
$\phi_2$	5.48	1.17	1.36	0.51
$\phi_3$	$6.10 \times 10^{-2}$	0.98	$2.18 \times 10^{-2}$	0.81

TABLE 4.1 – *Ordre et constante des méthodes laxhj et laxlc*

<b>laxhj2Q</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	9.19	1.19	$9.99 \times 10^{-1}$	0.71
$\phi_2$	5.6	1.37	1.07	0.72
$\phi_3$	$2.8 \times 10^{-2}$	2.00	$6.5 \times 10^{-3}$	1.53

<b>laxhj2M</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	8.22	1.23	$9.99 \times 10^{-1}$	0.7
$\phi_2$	5.57	1.38	1.03	0.73
$\phi_3$	$2.59 \times 10^{-2}$	2.05	$4.7 \times 10^{-3}$	1.71

TABLE 4.2 – *Ordres et constantes des méthodes MUSCL de type Hamilton-Jacobi.*



<b>laxlc2Q</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	6.64	1.26	$9.87 \times 10^{-1}$	0.71
$\phi_2$	7.9	1.30	1.01	0.73
$\phi_3$	$3.55 \times 10^{-2}$	1.86	$4.4 \times 10^{-3}$	1.59

<b>laxlc2M</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	5.96	1.29	$9.54 \times 10^{-1}$	0.71
$\phi_2$	8.08	1.30	$9.97 \times 10^{-1}$	0.73
$\phi_3$	$1.64 \times 10^{-2}$	2.01	$3.00 \times 10^{-3}$	1.81

TABLE 4.3 – *Ordres et constantes des méthodes MUSCL de type loi de conservation.*

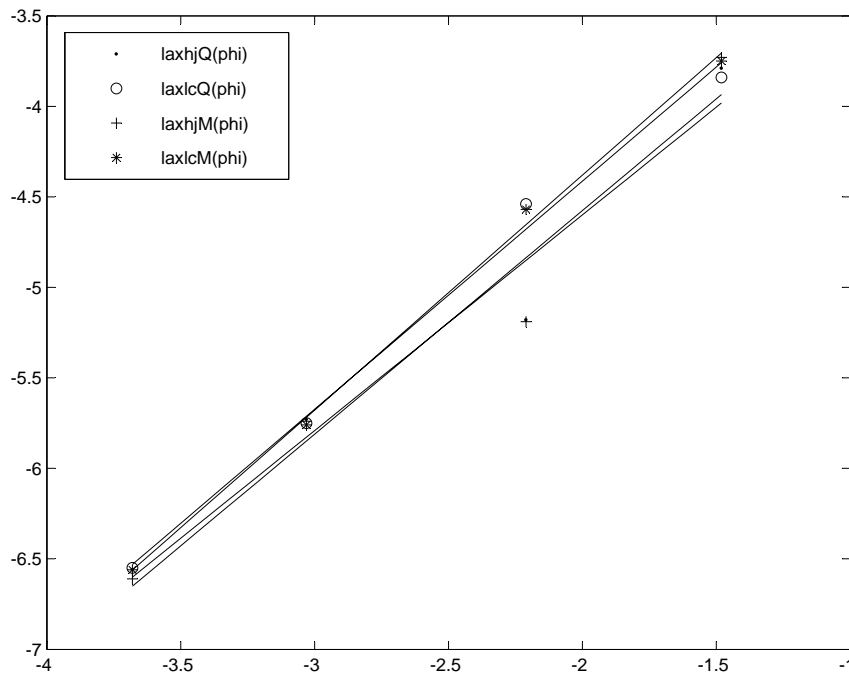


FIGURE 4.10 – *Courbes de convergence en espace pour  $\phi_1$  en norme  $L^1$ .*

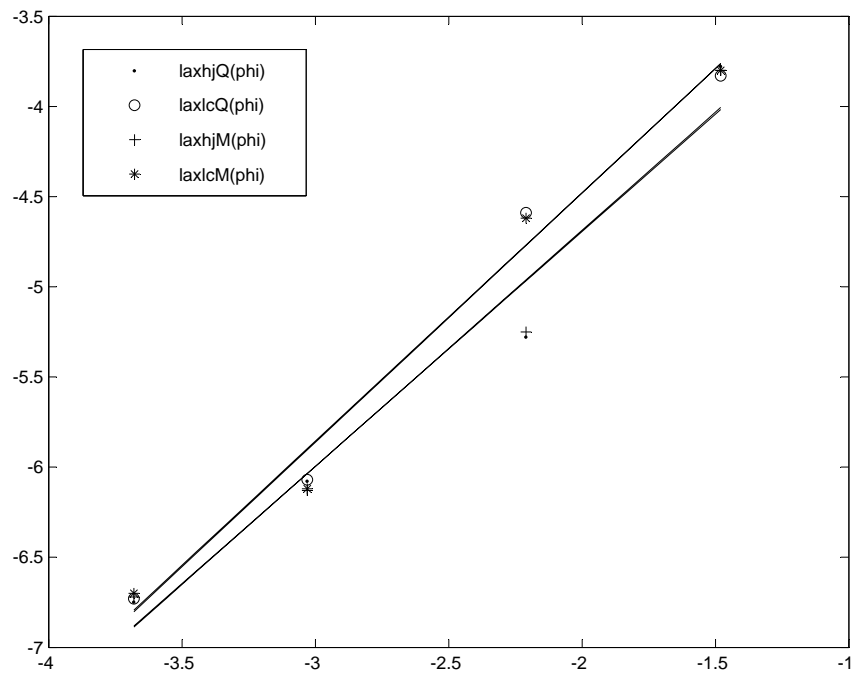


FIGURE 4.11 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_2$  en norme  $L^1$ .

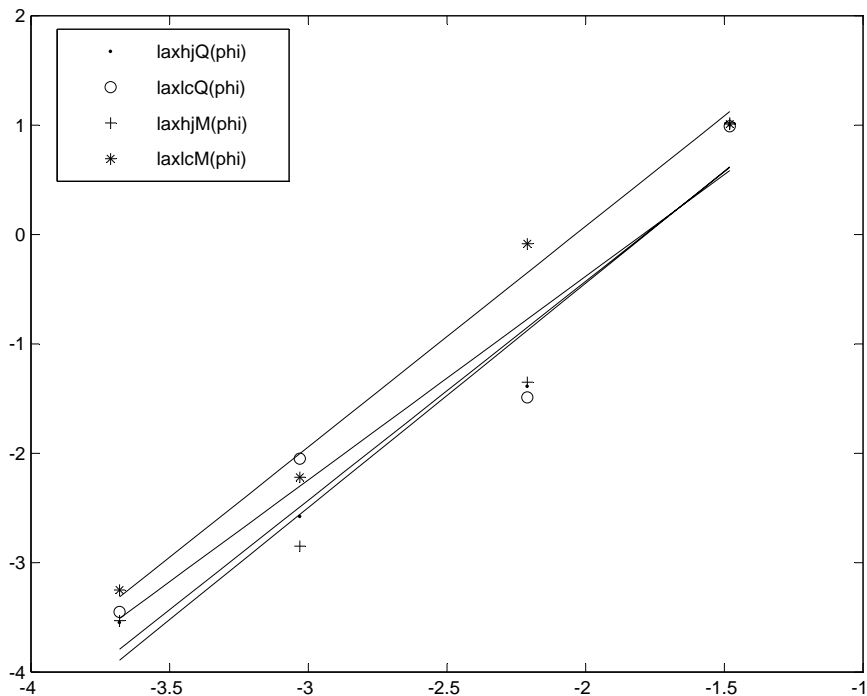
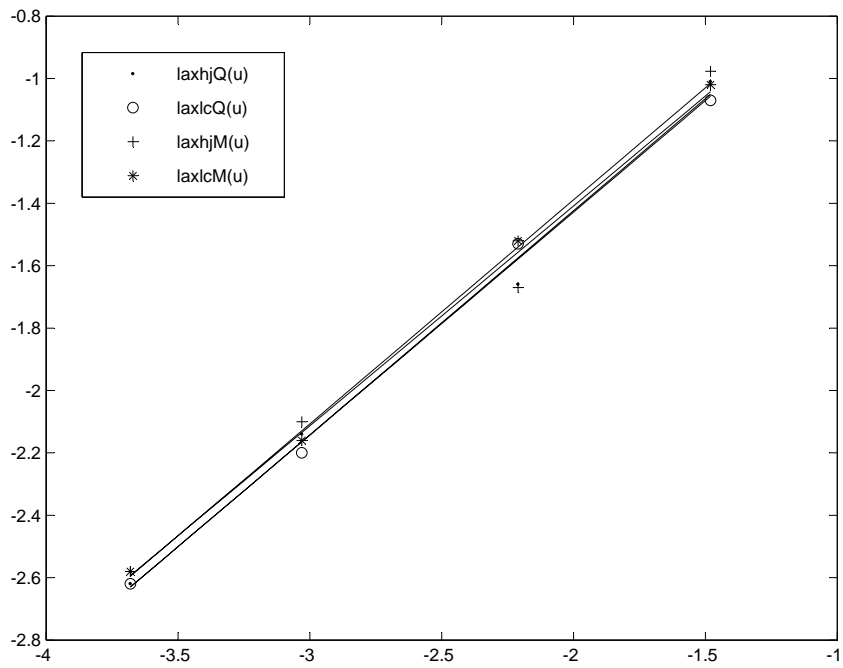
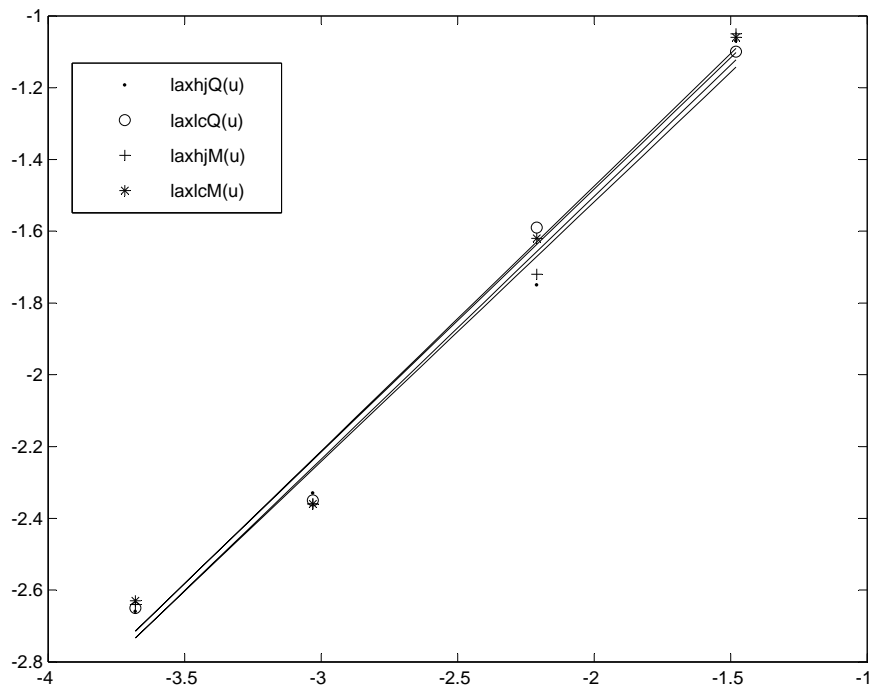
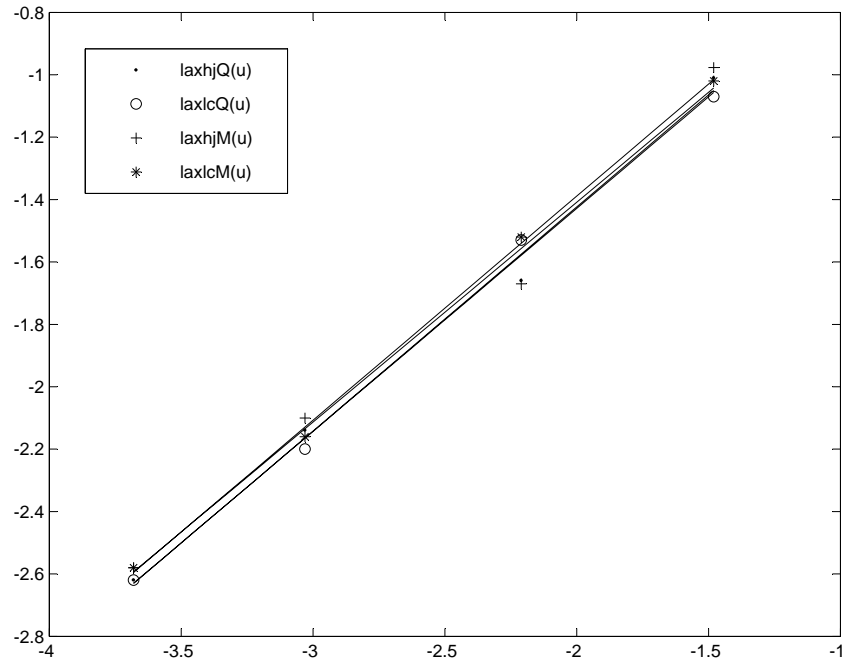


FIGURE 4.12 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_3$  en norme  $L^1$ .

FIGURE 4.13 – Courbes de convergence en espace pour  $\nabla\phi_1$  en norme  $L^1$ .FIGURE 4.14 – Courbes de convergence en espace pour  $\nabla\phi_2$  en norme  $L^1$ .


 FIGURE 4.15 – Courbes de convergence en espace pour  $\nabla\phi_3$  en norme  $L^1$ .

#### 4.5.1.4 Ordre en norme $L^\infty$

Nous rappelons également les résultats obtenus pour l'ordre 1 dans les tableaux 4.4. Les résultats de l'ordre 2 sont donnés par les tableaux 4.5 et 4.6. Les courbes de convergence pour l'erreur entre les solutions exactes  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  et les solutions calculées par les schémas d'ordre 2 sont respectivement donnés par les figures 4.16, 4.17 et 4.18. Enfin, les courbes de convergence pour l'erreur entre le gradient de la solution exacte  $\phi_3$  et le gradient des solutions calculées par les schémas d'ordre 2 sont donnés par la figure 4.19.

<b>laxhj</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	7.87	0.43	-	-
$\phi_2$	9.38	0.91	-	-
$\phi_3$	$7.73 \times 10^{-2}$	0.89	$1.99 \times 10^{-2}$	0.71

<b>laxlc</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	7.61	0.45	-	-
$\phi_2$	9.16	0.93	-	-
$\phi_3$	$7.59 \times 10^{-2}$	0.89	$2.50 \times 10^{-2}$	0.64

 TABLE 4.4 – Ordres et constantes des méthodes **laxhj** et **laxlc**.

<b>laxhj2Q</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	9.83	0.47	-	-
$\phi_2$	7.83	0.55	-	-
$\phi_3$	$1.22 \times 10^{-3}$	2.12	$8.8 \times 10^{-3}$	1.07

<b>laxhj2M</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	9.06	0.5	-	-
$\phi_2$	7.00	0.58	-	-
$\phi_3$	$1.57 \times 10^{-2}$	1.96	$9.99 \times 10^{-3}$	0.99

TABLE 4.5 – *Ordres et constantes des méthodes MUSCL de type Hamilton-Jacobi.*

<b>laxlc2Q</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	6.82	0.58	-	-
$\phi_2$	5.71	0.63	-	-
$\phi_3$	$4.4 \times 10^{-3}$	2.13	$3.6 \times 10^{-3}$	1.19

<b>laxlc2M</b>	$C_1$	$\alpha_1$	$C_2$	$\alpha_2$
$\phi_1$	6.61	0.59	-	-
$\phi_2$	5.38	0.64	-	-
$\phi_3$	$5.00 \times 10^{-3}$	2.05	$2.8 \times 10^{-3}$	1.32

TABLE 4.6 – *Ordres et constantes des méthodes MUSCL de type loi de conservation.*

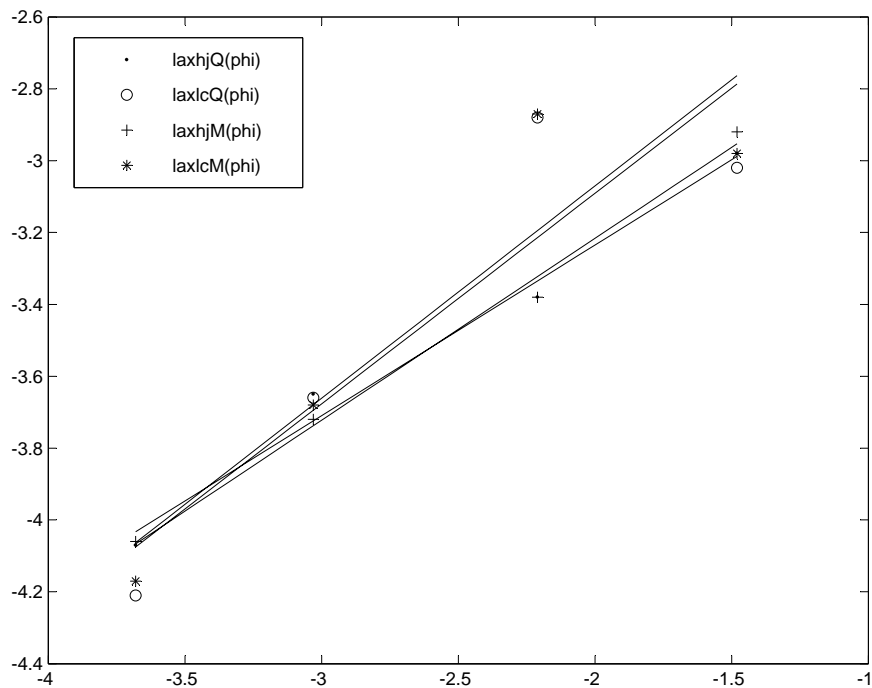


FIGURE 4.16 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_1$  en norme  $L^\infty$ .

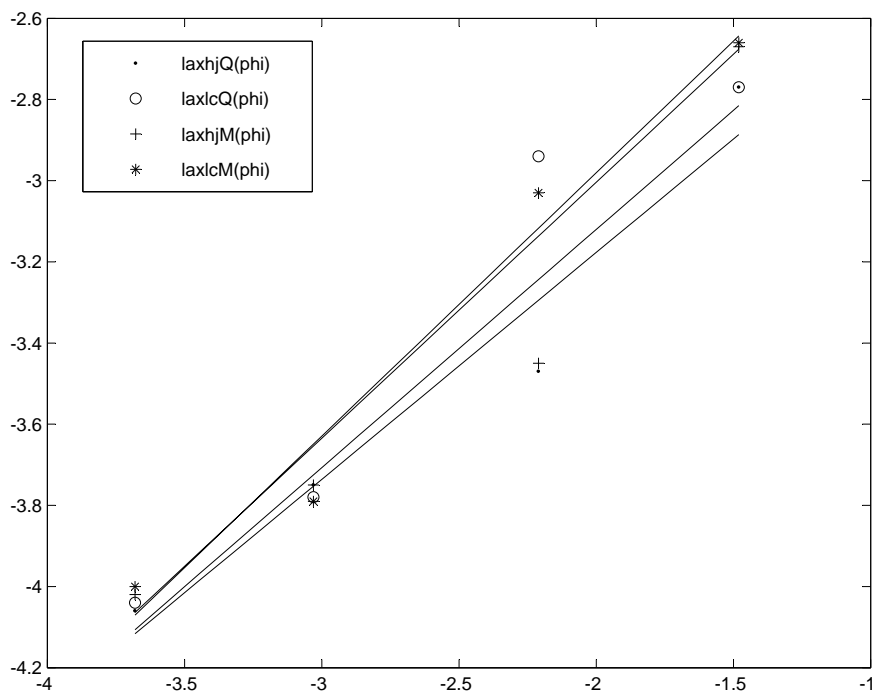
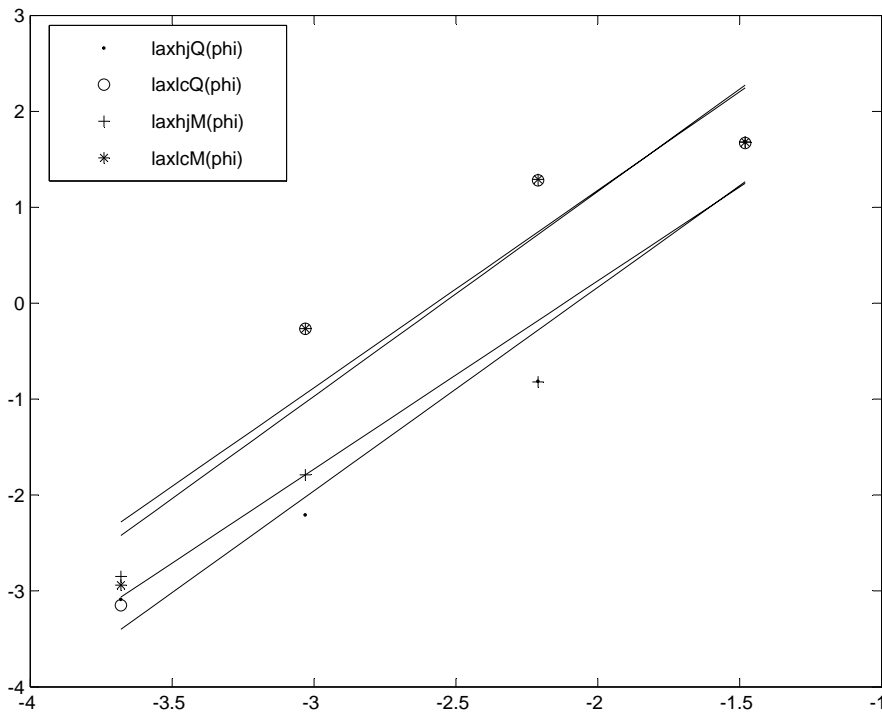
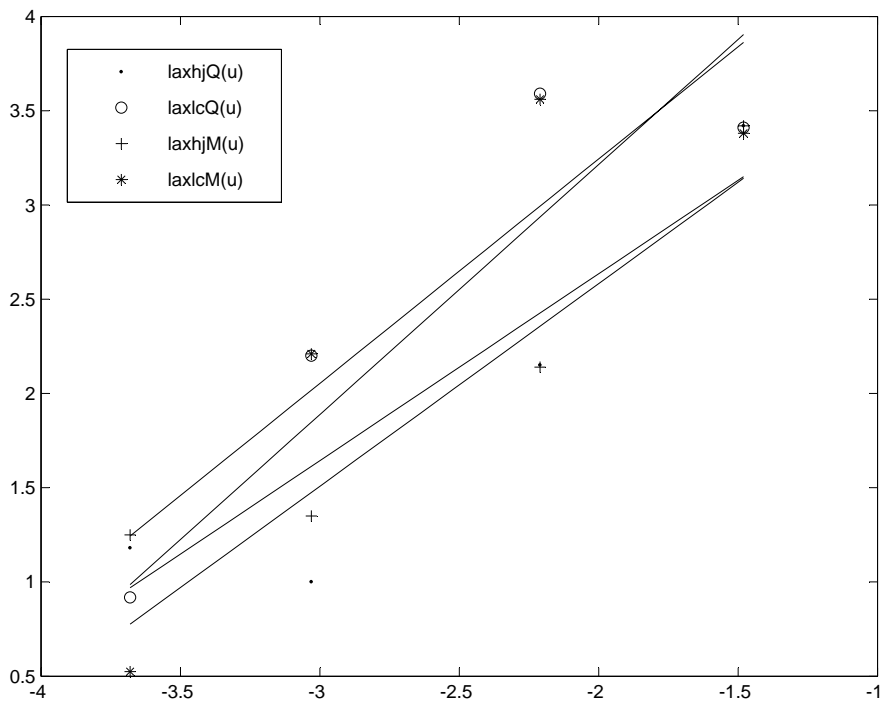


FIGURE 4.17 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_2$  en norme  $L^\infty$ .

FIGURE 4.18 – Courbes de convergence en espace pour  $\phi_3$  en norme  $L^\infty$ .FIGURE 4.19 – Courbes de convergence en espace pour  $\nabla\phi_3$  en norme  $L^\infty$ .

## 4.5.2 Simulations numériques

### 4.5.2.1 Cône en rotation

Dans  $\Omega = [-1, 1]^2$ , considérons l'équation de transport en  $2D$

$$\partial_t \phi + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0,$$

avec une vitesse de convection  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  et une condition initiale

$\phi(x, y, 0) = \sqrt{(x - 0.5)^2 + y^2} - 0.25$ . Si nous projetons la vitesse  $\mathbf{v}$  sur la normale au front nous avons l'équation level set

$$\partial_t \phi + F |\nabla \phi| = 0,$$

avec  $F = \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ .

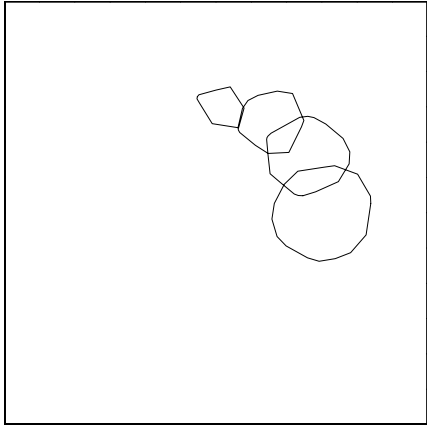
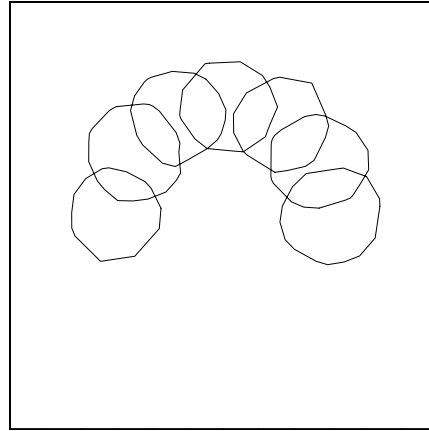
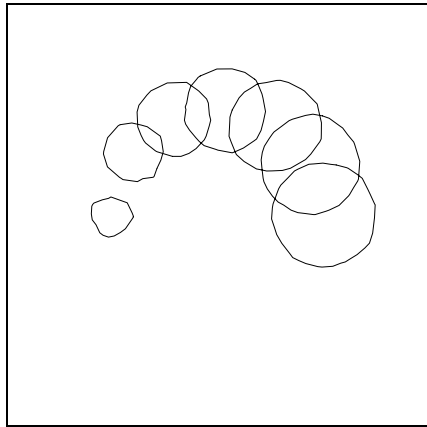
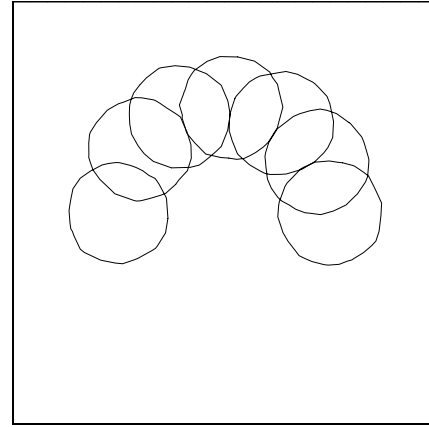
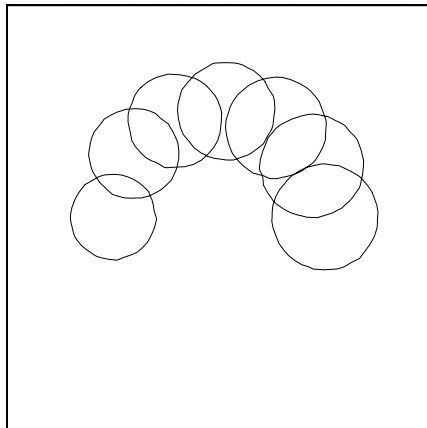
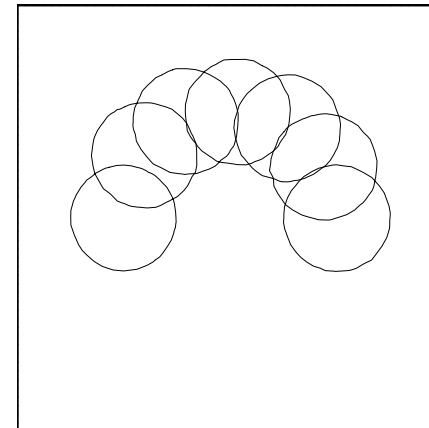
Nous présentons les simulations de la demi rotation d'un cône afin de comparer les schémas d'ordre 1 et 2. Les résultats qui illustrent la comparaison entre les schémas d'ordre 1 et les schémas d'ordre 2 pour l'approche de type **Hamilton-Jacobi** sont donnés par les figures 4.20 et 4.21. Nous observons une propriété déjà rencontré dans les tests précédents : Les schémas d'ordre 2 sont moins dissipatifs que les schémas d'ordre 1. Nous avons des résultats analogue pour l'approche **loi de conservation**.

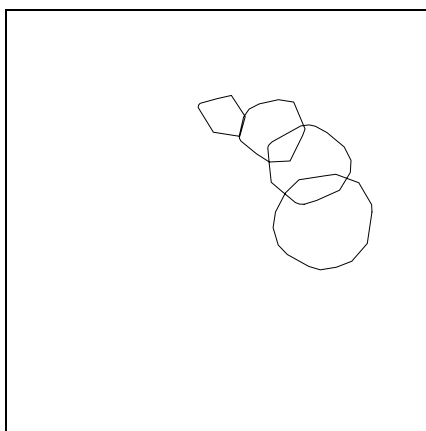
### 4.5.2.2 Changement de topologie

L'intérêt principal de l'équation level set est de permettre de suivre l'évolution d'une frontière libre même en présence de rupture topologique.

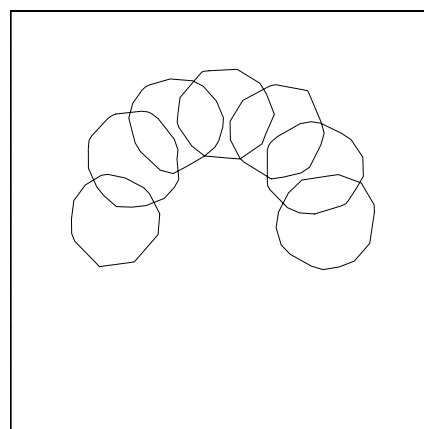
Nous présentons ici un exemple de rupture topologique en convectant à l'instant initial deux cônes  $\sqrt{(x - 0.25)^2 + y^2} - 0.2$  et  $\sqrt{(x + 0.25)^2 + y^2} - 0.2$  avec la même vitesse  $F = 1$ . Nous donnons le résultat obtenu par le schéma **laxlc2M** (voir la figure 4.24).



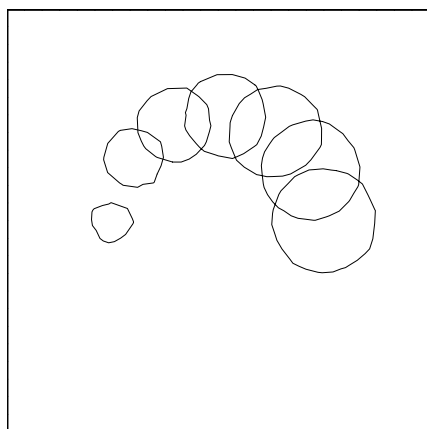
(a) Maillage  $\mathcal{M}_1$  : schéma **laxhj**(b) Maillage  $\mathcal{M}_1$  : schéma **laxhj2Q**(c) Maillage  $\mathcal{M}_2$  : schéma **laxhj**(d) Maillage  $\mathcal{M}_2$  : schéma **laxhj2Q**(e) Maillage  $\mathcal{M}_3$  : schéma **laxhj**(f) Maillage  $\mathcal{M}_3$  : schéma **laxhj2Q**FIGURE 4.20 – Demi rotation d'un cône sous un raffinement de maillage : comparaison des schémas **laxhj** et **laxhj2Q**.



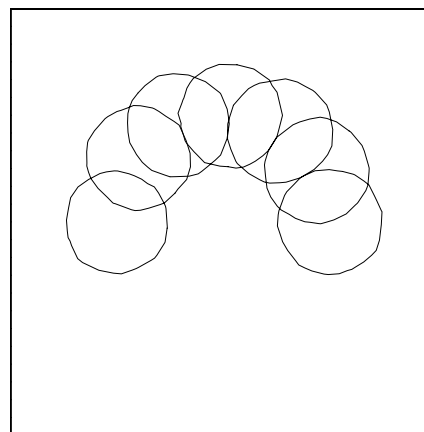
(a) Maillage  $\mathcal{M}_1$  : schéma **laxhj**



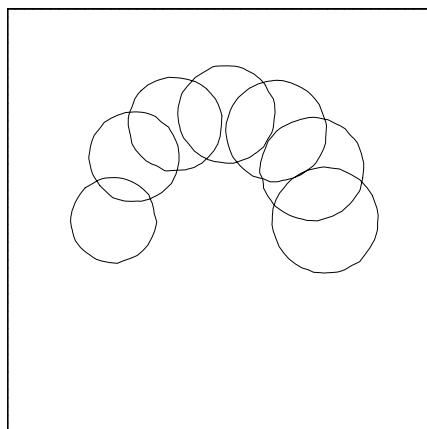
(b) Maillage  $\mathcal{M}_1$  : schéma **laxhj2M**



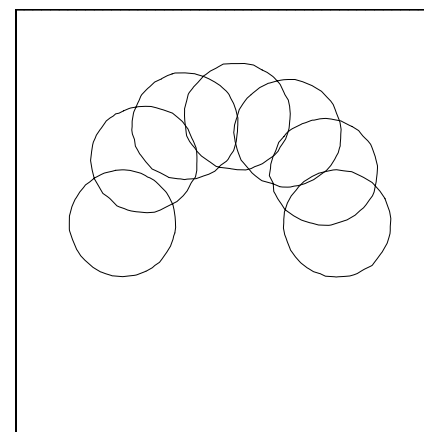
(c) Maillage  $\mathcal{M}_2$  : schéma **laxhj**



(d) Maillage  $\mathcal{M}_2$  : schéma **laxhj2M**



(e) Maillage  $\mathcal{M}_3$  : schéma **laxhj**



(f) Maillage  $\mathcal{M}_3$  : schéma **laxhj2M**

FIGURE 4.21 – Demi rotation d'un cône sous un raffinement de maillage : comparaison des schémas **laxhj** et **laxhj2M**.

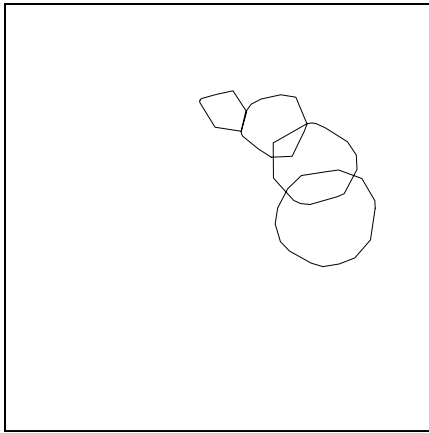
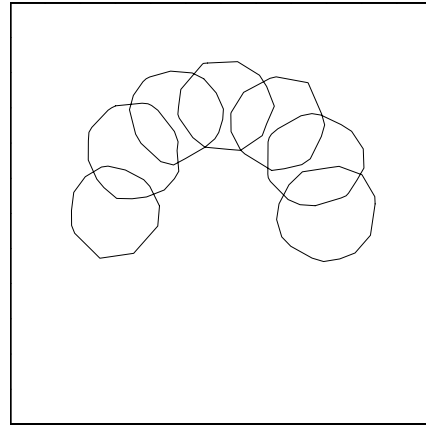
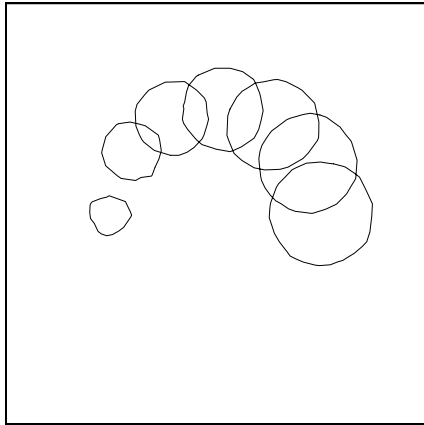
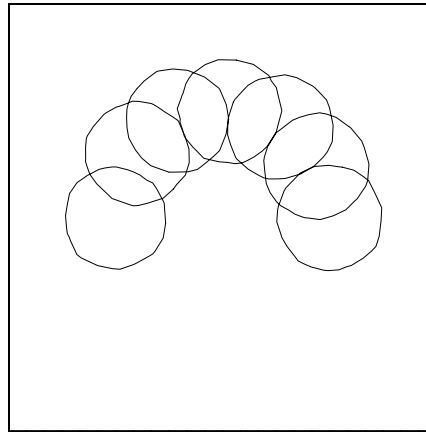
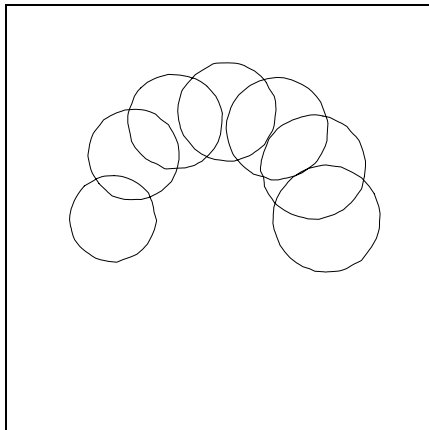
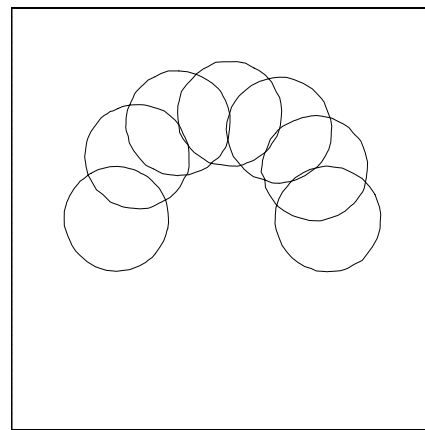
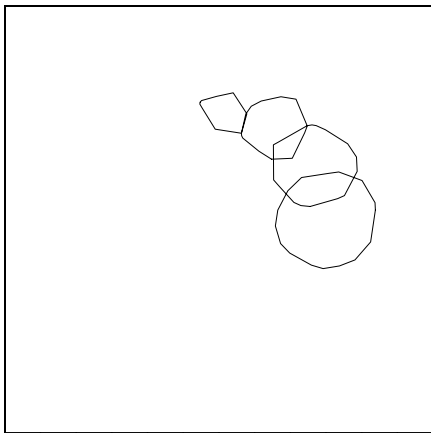
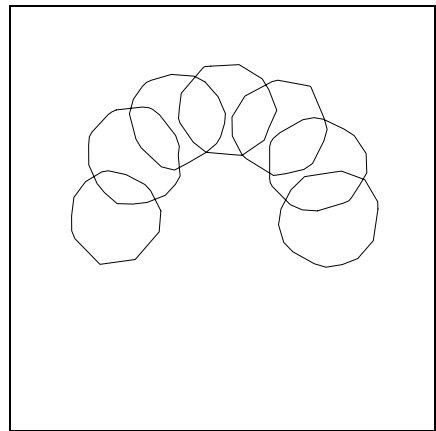
(a) Maillage  $\mathcal{M}_1$  : schéma **laxlc**(b) Maillage  $\mathcal{M}_1$  : schéma **laxlc2Q**(c) Maillage  $\mathcal{M}_2$  : schéma **laxlc**(d) Maillage  $\mathcal{M}_2$  : schéma **laxlc2Q**(e) Maillage  $\mathcal{M}_3$  : schéma **laxlc**(f) Maillage  $\mathcal{M}_3$  : schéma **laxlc2Q**

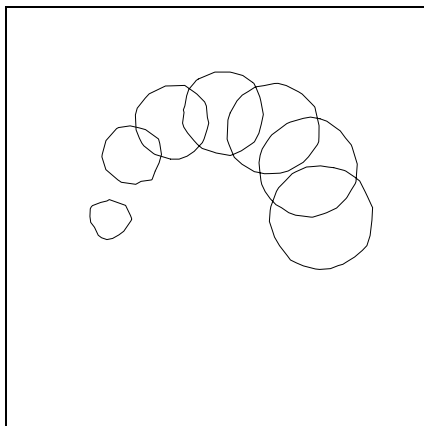
FIGURE 4.22 – Demi rotation d'un cône sous un raffinement de maillage : comparaison des schémas **laxlc** et **laxlc2Q**.



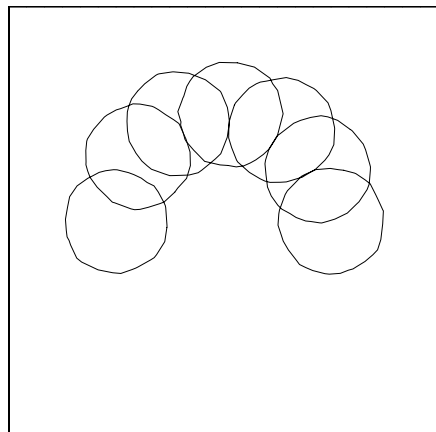
(a) Maillage  $\mathcal{M}_1$  : schéma **laxlc**



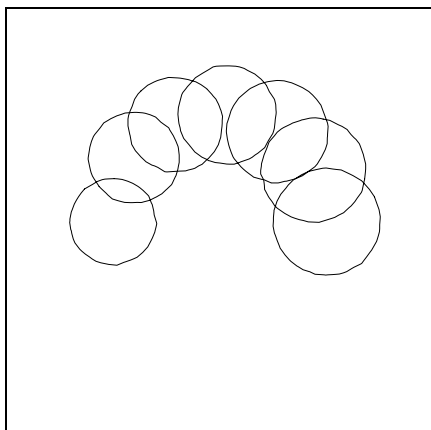
(b) Maillage  $\mathcal{M}_1$  : schéma **laxlc2M**



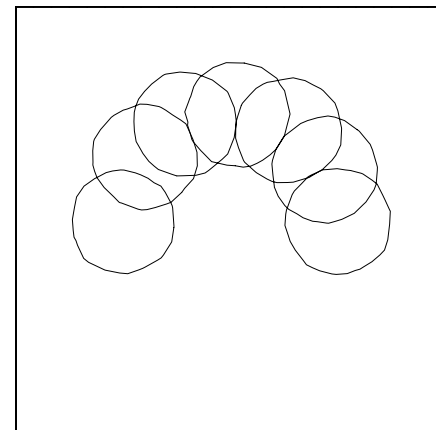
(c) Maillage  $\mathcal{M}_2$  : schéma **laxlc**



(d) Maillage  $\mathcal{M}_2$  : schéma **laxlc2M**



(e) Maillage  $\mathcal{M}_3$  : schéma **laxlc**



(f) Maillage  $\mathcal{M}_3$  : schéma **laxlc2M**

FIGURE 4.23 – Demi rotation d'un cône sous un raffinement de maillage : comparaison des schémas **laxlc** et **laxlc2M**.

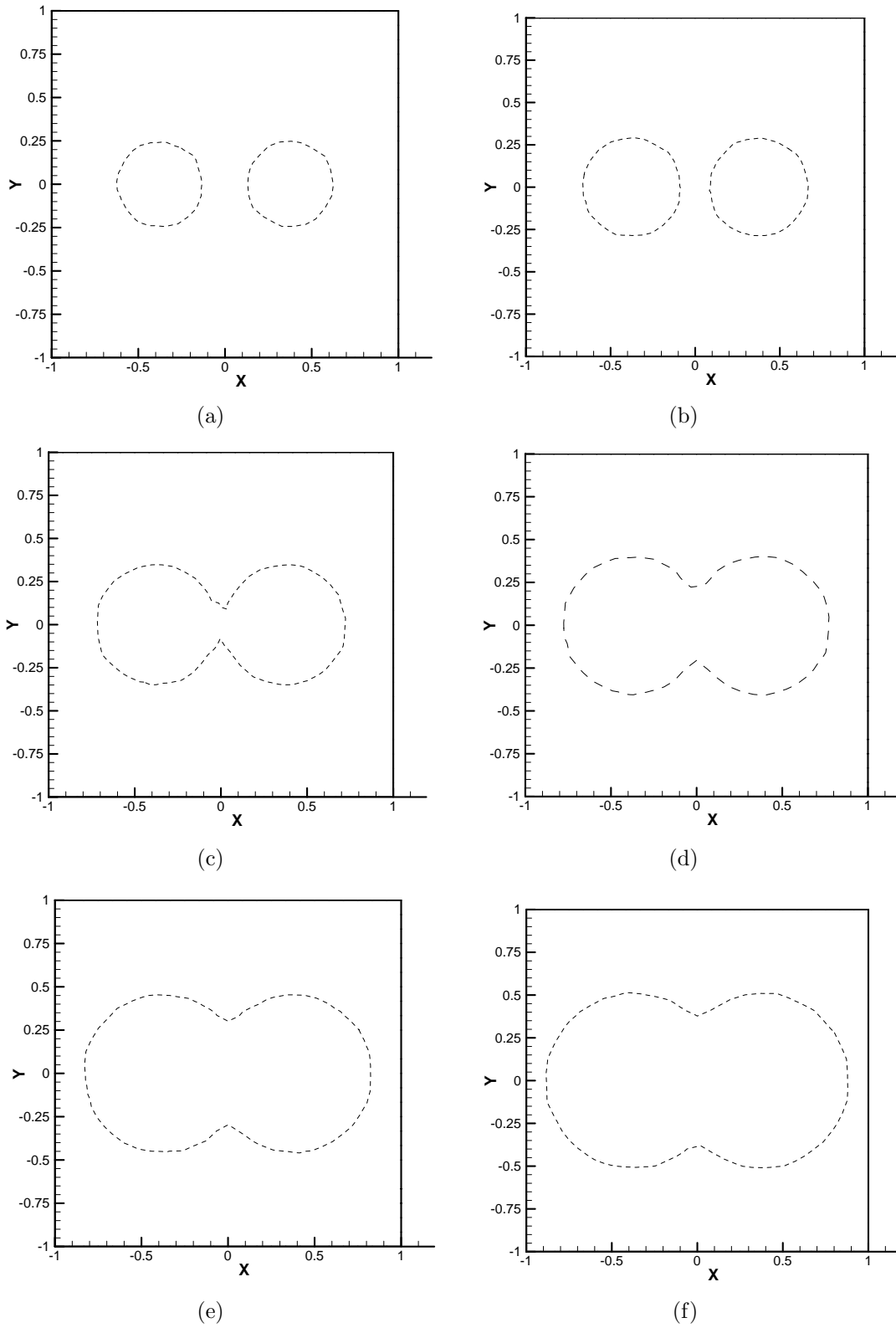


FIGURE 4.24 – Maillage  $\mathcal{M}_2$  : simulation d'une rupture topologique par le schéma  $\text{laxlc2M}$ .

## 4.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons introduits de nouvelles méthodes de reconstruction MUSCL dans le cadre d'un problème level set bidimensionnel sur un maillage non structuré formé de trinagles. Les pentes de cette méthode MUSCL sont calculées suivant trois directions données par les trois triangles voisins. Ceci nous a permis d'augmenter la précision des schémas proposés au chapitre 3. La mise en oeuvre numérique est facile puisque la méthode est une méthode MUSCL unidimensionnelle de dans chaque direction. D'un point de vue numérique, le choix du point médian  $M$  de bord pour calculer les valeurs  $u_{i,j}$  d'interpolation apporte une meilleure précision mais le schéma est moins stable puisque le principe du maximum n'est pas nécessairement respecté ( $u_{i,j}$  peut être plus grand que  $u_i$  ou  $u_j$ ). Le choix du point  $Q$  réduit l'ordre de la méthode mais le schéma est plus robuste puisque le choix de  $u_{i,j}$  satisfait la contrainte TVD. Néanmoins, aucune anomalie numérique n'a pu être notée pendant les simulations en utilisant les schémas avec les points  $M$  qui au final semble être le meilleur choix.

Des essais numériques ont été conduits dans le but de comparer les méthodes MUSCL décrites. Les nouvelles méthodes *multi-pente* en utilisant l'approche de type loi de conservation s'avèrent plus performantes.



# Conclusion

D'un point de vue analyse mathématique, la contribution que nous avons apportée dans cette partie de la thèse porte sur un seul point.

1. La résolution exacte du problème des demi-plans, ce qui nous donne ainsi une méthode systématique pour construire des tests pour les schémas approchant l'équation level set.

D'un point de vue numérique, nous avons développé deux approches a priori équivalente pour la résolution de l'équation level set. Ces deux approches nous ont permis de construire des schémas généralisables aux équations d'Hamilton-Jacobi.

1. La construction des schémas est basée sur la méthode des volumes finis, mais le fait essentielle ici est que la solution approchée est une fonction linéaire par morceaux calculée aux milieux des interfaces des éléments. Cela, nous a permis d'établir un lien entre la solution approchée de l'équation level set et la solution approchée de l'équation de loi de conservation associée ; sans hypothèse supplémentaire de convexité.
2. Dans un premier temps, nous avons proposé des solveurs de type lax d'ordre 1 parfaitement adapté aux vitesses  $F$  quelconques. Ces solveurs ont la particularité d'être de conception simple. Nous avons notamment prouvé la convergence de tels schémas numériques pour l'approche de type Hamilton-Jacobi. Les résultats numériques mettent en évidence l'équivalence de l'approche de type Hamilton-Jacobi et l'approche loi de conservation.
3. Nous avons ensuite appliqué une nouvelle méthode de reconstruction MUSCL introduite par Clain et Buffard [13] pour l'équation de convection en dimension 2. Les nouveaux schémas s'avèrent moins diffusifs que la version d'ordre 1 comme l'ont confirmé les exemples numériques. Notons que l'approche de type loi de conservation apparaît plus performante que l'approche de type Hamilton-Jacobi.



4. Les schémas précédents sont généralisables en dimension 3. En effet, nous pouvons nous référer aux travaux réalisés par Vivien CLauzon [14] sur l'extension en dimension 3 de la méthode MUSCL de Clain et Buffard.

# Bibliographie

- [1] Abgrall R., « Numerical discretization of the first-order Hamilton-Jacobi equation on triangular meshes », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 49, n° 12, p. 1339-1373, 1996.
- [2] Augoula S., Abgrall R., « High order numerical discretization for Hamilton-Jacobi equations on triangular meshes », *J. Sci. Comput.*, vol. 15, n° 2, p. 197-229, 2000.
- [3] Barles G., *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, vol. 17 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*, Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [4] Barles G., Souganidis P. E., « Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations », *Asymptotic Anal.*, vol. 4, n° 3, p. 271-283, 1991.
- [5] Barth T., « Numerical Methods for conservative Laws on Structured and Unstructured Meshes », *VKI March 2003 Lecture Series*, 2003.
- [6] Barth T. J., Jespersen D. C., « The design and application of upwind schemes on unstructured meshes », *AIAA J.*, 1989.
- [7] Barth T. J., Sethian J. A., « Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domains », *J. Comput. Phys.*, vol. 145, n° 1, p. 1-40, 1998.
- [8] Barth T., Ohlberger M., « Finite volume methods : foundation and analysis », *Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 1, Fundamentals*, John Wiley and Sons Ltd, p. 439-474, 2004.
- [9] Beurling A., « On free-boundary problems for the Laplace equation », *Inst. Adv. Stud. Princeton*, 1957.
- [10] Chatzipandelidis P., Finite volume and finite element methods for boundary and initial-boundary value problems, Ph. d thesis, Dept. of Math., University of crete, 1998.
- [11] Chévrier P., Galley H., « A van Leer finite volume scheme for the Euler equations on unstructured meshes », *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, vol. 27, n° 2, p. 183-201, 1993.

- 
- [12] Clain S., « A simple level set numerical scheme for unstructured meshes », *Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002)*, Hermes Sci. Publ., Paris, p. 295-302, 2002.
- [13] Clain S., Buffard T., « Multi-Slope MUSCL Methods for Unstructured Meshes », *Preprint*, 2005.
- [14] Clauzon V., Analyse de schémas d'ordre élevé pour les écoulements compressibles. Application à la simulation numérique d'une torche à plasma, Thèse de doctorat, université Blaise-Pascal, 2008.
- [15] Cockburn B., Coquel F., LeFloch P., « An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws », *Math. Comp.*, vol. 63, n° 207, p. 77-103, 1994.
- [16] Colella P., « Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws », *J. Comput. Phys.*, vol. 87, n° 1, p. 171-200, 1990.
- [17] Corrias L., Falcone M., Natalini R., « Numerical schemes for conservation laws via Hamilton-Jacobi equations », *Math. Comp.*, vol. 64, n° 210, p. 555-580, S13-S18, 1995.
- [18] Cournède P.-H., Debiez C., Mer K., Dervieux A., « A Positive MUSCL Scheme for Triangulations, JOURNAL = rapport de recherche INRIA numera 3465, YEAR = 1998, », n.d.
- [19] Crandall M. G., Lions P.-L., « Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 277, n° 1, p. 1-42, 1983.
- [20] Crandall M. G., Lions P.-L., « Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations », *Math. Comp.*, vol. 43, n° 167, p. 1-19, 1984.
- [21] Crandall M. G., Lions P.-L., « On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations », *Nonlinear Anal.*, vol. 10, n° 4, p. 353-370, 1986.
- [22] Désidéri J.-A., Dervieux A., « Compressible flow solvers using unstructured grids », *Computational fluid dynamics, Vol. 1, 2*, vol. 88 of *von Karman Inst. Fluid Dynam. Lecture Ser.*, von Karman Inst. Fluid Dynamics, Rhode, p. 115, 1988.
- [23] Després B., « Triangle based adaptative stencils for the solution of hyperbolic conservation laws », *J. of Comp. Physics*, 1992.
- [24] Després B., « An explicit a priori estimate for a finite volume approximation of linear advection on non-Cartesian grids », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 42, n° 2, p. 484-504 (electronic), 2004.
- [25] Eymard R., Gallouët T., Herbin R., « Finite volume methods », *Handbook of numerical analysis, Vol. VII*, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, p. 713-1020, 2000.
- [26] Godlewski E., Raviart P.-A., *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 118 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1996.
-

- [27] Goodman J. B., LeVeque R. J., « On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws », *Math. Comp.*, vol. 45, n° 171, p. 15-21, 1985a.
- [28] Goodman J. B., LeVeque R. J., « On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws », *Math. Comp.*, vol. 45, n° 171, p. 15-21, 1985b.
- [29] Harten A., « High resolution schemes for hyperbolic conservation laws [MR0701178 (84g :65115)] », *J. Comput. Phys.*, vol. 135, n° 2, p. 259-278, 1997. With an introduction by Peter Lax, Commemoration of the 30th anniversary {of J. Comput. Phys.}.
- [30] Hubbard M. E., « Multidimensional slope limiters for MUSCL-type finite volume schemes on unstructured grids », *J. Comput. Phys.*, vol. 155, n° 1, p. 54-74, 1999.
- [31] Jameson A., « Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1, artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on multigrid convergence », *Int. J. of Comp. Fluid Dyn.*, vol. 4, p. 171-218, 1995.
- [32] Jameson A., Mavriplis D., « Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh », *AIAA J.*, 1985.
- [33] Jin S., Xin Z., « Numerical passage from systems of conservation laws to Hamilton-Jacobi equations, relaxation schemes », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, n° 6, p. 2385-2404 (electronic), 1998a.
- [34] Jin S., Xin Z., « Numerical passage from systems of conservation laws to Hamilton-Jacobi equations, relaxation schemes », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, n° 6, p. 2385-2404 (electronic), 1998b.
- [35] Karlsen K., Risebro N., « Unconditionally stable methods for Hamilton-Jacobi equations », n.d.
- [36] Kossioris G., Makridakis C., Souganidis P. E., « Finite volume methods for fully nonlinear problems », *in preparation*, 1999a.
- [37] Kossioris G., Makridakis C., Souganidis P. E., « Finite volume schemes for Hamilton-Jacobi equations », *Numer. Math.*, vol. 83, n° 3, p. 427-442, 1999b.
- [38] Kröner D., *Numerical schemes for conservation laws*, Wiley-Teubner Series Advances in Numerical Mathematics, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.
- [39] Kröner D., Noelle S., Rokyta M., « Convergence of higher order upwind finite volume schemes on unstructured grids for scalar conservation laws in several space dimensions », *Numer. Math.*, vol. 71, n° 4, p. 527-560, 1995.
- [40] Kurganov A., Noelle S., Petrova G., « Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 23, n° 3, p. 707-740 (electronic), 2001.
- [41] Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N., *Linear and quasilinear elliptic equations*, Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc. Translation editor : Leon Ehrenpreis, Academic Press, New York, 1968.

- 
- [42] LeVeque R. J., *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, second edn, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [43] Lin C.-T., Tadmor E., « High-resolution nonoscillatory central schemes for Hamilton-Jacobi equations », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, n° 6, p. 2163-2186 (electronic), 2000.
- [44] Lions P.-L., *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, vol. 69 of *Research Notes in Mathematics*, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1982.
- [45] Lions P.-L., « Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations », *Duke Math. J.*, vol. 52, n° 4, p. 793-820, 1985.
- [46] Lions P.-L., Souganidis P. E., « Convergence of MUSCL and filtered schemes for scalar conservation laws and Hamilton-Jacobi equations », *Numer. Math.*, vol. 69, n° 4, p. 441-470, 1995.
- [47] Osher S., Sethian J. A., « Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations », *J. Comput. Phys.*, vol. 79, n° 1, p. 12-49, 1988.
- [48] Osher S., Shu C.-W., « High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 28, n° 4, p. 907-922, 1991.
- [49] Sethian J. A., *Level set methods*, vol. 3 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science.
- [50] Souganidis P. E., « Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations », *J. Differential Equations*, vol. 59, n° 1, p. 1-43, 1985.
- [51] Spekreijse S., « Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws », *Math. Comp.*, vol. 49, n° 179, p. 135-155, 1987.
- [52] Sweby P. K., « High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 21, n° 5, p. 995-1011, 1984.
- [53] Toro E. F., *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997. A practical introduction.
- [54] van Leer B., « Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method [J. Comput. Phys. **32** (1979), no. 1, 101-136] », *J. Comput. Phys.*, vol. 135, n° 2, p. 227-248, 1997. With an introduction by Ch. Hirsch, Commemoration of the 30th anniversary {of J. Comput. Phys.}.
- [55] Viozat C., Held C., Mer K., Dervieux A., « On vertex-centered unstructured finite-volume methods for stretched anisotropic triangulations », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, n° 35-36, p. 4733-4766, 2001.
-

**Résumé** Ce travail de thèse est consacré à deux thèmes de recherche en Calcul Scientifique liés par l'approximation numérique de problèmes en mécanique des fluides.

Le premier thème concerne l'approximation numérique des équations de Stokes, modélisant les écoulements de fluides incompressibles à vitesse faible. Ce thème est présent dans plusieurs travaux en Calcul Scientifique. La discrétisation en temps est réalisée à l'aide de la méthode de projection. La discrétisation en espace utilise la méthode des éléments finis mixtes hybrides qui permet d'imposer de façon exacte la contrainte d'incompressibilité. Cette approche est originale : la méthode des éléments mixtes hybrides est couplée avec une méthode d'éléments finis standards. L'ordre de convergence des deux méthodes est préservé.

Le second thème concerne la mise au point de méthodes numériques de type volumes finis pour la résolution de l'équation Level Set. Ces équations interviennent de manière essentielle dans la résolution des problèmes de propagation d'interfaces. Dans cette partie, nous avons développé une nouvelle méthode d'ordre 2 de type MUSCL pour résoudre le système hyperbolique résultant de l'équation Level Set. Nous illustrons ces propriétés par des applications numériques. En particulier nous avons regardé le cas du problème des deux demi-plans pour lequel notre schéma donne une approximation pour le gradient de la fonction Level Set. Par ailleurs, l'ordre de précision attendu est obtenu avec les normes  $L_1$  et  $L_\infty$  pour des fonctions régulières. Pour finir, il est à noter que notre méthode peut être facilement étendue aux problèmes d'Hamilton-Jacobi du premier et du second ordre.

**Abstract** This thesis work is devoted to two research topics in Scientific Computing related to the numerical approximation of problems in fluids mechanics.

The first topic relates to the numerical approximation of Stokes equations, modelling the "slow" flows of incompressible fluids. It considers the approximation by a method of projection for the discretization in time. The discretization in space uses the finite element method mixed hybrids making it possible to impose in an exact way the incompressibility constraint. This approach is original since it allows to couple the hybrid mixed finite elements with a method standard finite element while preserving the order of convergence of the two methods.

The second topic relates to the development of finite volume schemes for the resolution of the Level Set equation. These equations intervene in an essential way in the resolution of problems of propagation of interfaces. In this part, we developed a new second order method of MUSCL type to solve the hyperbolic system resulting from the Level Set equation. We illustrate these properties by numerical applications. In particular we looked at the case of the problem of the two half-planes for which our scheme gives an approximation for the gradient of the level set function. In addition, the expected order of accuracy is reached for the standard  $L_1$  and  $L_\infty$  norms for regular functions. Finally, it should be noted that our method can easily be extended to Hamilton-Jacobi problems of first and second orders.