Stroboscopie et moyennisation dans les équations différentielles fonctionnelles à retard

Mustapha Lakrib

UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE

MULHOUSE

THÈSE

présentée
pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE

par

Mustapha LAKRIB

Stroboscopie et Moyennisation dans les Équations Différentielles Fonctionnelles à Retard

Soutenue le vendredi 12 novembre 2004
devant la commission d'examen composée de

Messieurs	Robert LUTZ	*Président*
	Claude LOBRY	*Rapporteur*
	Guy WALLET	*Rapporteur*
	Augustin FRUCHARD	
	Reinhard SCHAFKE	
	Tewfik SARI	*Directeur de thèse*

STROBOSCOPIE ET MOYENNISATION

DANS LES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

FONCTIONNELLES À RETARD

Par

MUSTAPHA LAKRIB

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE
4, RUE DES FRÈRES LUMIÈRE
68093 MULHOUSE CEDEX

Mots clés. — Equation différentielle ordinaire et fonctionnelle à retard, perturbation régulière, oscillation non linéaire, oscillation rapide, forme normale, moyennisation, stroboscopie, prolongeabilité, quasi-bornitude, analyse non standard.

Classification mathématique (2000 MSC). — 34C29, 34E10, 34E18, 03H05, 34K25.

A la mémoire de mon Père
A ma Mère
A Karima, ma femme
A Ikram et Kenza, mes filles
A toute ma famille.

Table des Matières

Remerciements

Je dois beaucoup à mon directeur de thèse Tewfik Sari qui a su me faire profiter de sa science. Il m'a offert son temps et sa patience. Ses conseils, remarques et critiques ont toujours été une aide précieuse pour moi. J'ai beaucoup appris à son contact et eu grand plaisir à travailler avec lui. Il m'est très agréable de lui adresser mes vives remerciements et de lui témoigner ma sincère reconnaissance. Merci aussi pour toutes les fois où j'ai fait appel à lui pour une aide, scientifique ou autre, car il n'a jamais ni hésité, ni ménagé sa peine pour répondre à mes sollicitations.

Je remercie Claude Lobry et Guy Wallet d'avoir accepté la (lourde) tâche de lire, commenter et juger cette thèse.

Je remercie Augustin Fruchard, Robert Lutz et Reinhard Schäfke qui ont eu la gentillesse de faire partie du jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui, au Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université de Haute Alsace à Mulhouse, ont participé à rendre ce travail possible et agréable.

Je remercie ma femme qui m'a toujours soutenu. Elle a dû subir mon éloignement et se retrouver seule à s'occuper de nos enfants. Je sais que cela n'a pas été facile.

Enfin, merci à mes parents. Sans leurs sacrifices je ne serais pas devenu ce que je suis aujourd'hui.

Merci à tous ...

Mulhouse, le vendredi 22 octobre 2004
Mustapha Lakrib

Acronymes

ANS :	Analyse non standard
EDFR :	Equation(s) différentielle(s) fonctionnelle(s) à retard
EDO :	Equation(s) différentielle(s) ordinaire(s)
EE :	Enoncé externe
EI :	Enoncé interne
ES :	Equation stroboscopique
KBM :	Krylov, Bogolyubov et Mitropolsky

Introduction

Ce travail est parti du constat suivant : sous sa formulation originale, la technique de stroboscopie élaborée dans le cadre des équations différentielles ordinaires (EDO) par Callot, Reeb et Sari [6, 40, 47] ne se prête pas à une application dans le cadre des équations différentielles fonctionnelles à retard (EDFR) et plus particulièrement dans les problèmes de moyennisation concernant ces équations. Nous nous sommes alors proposés d'en apporter une formulation adaptée suivi d'une extension qui répondraient à ce besoin.

Ainsi, l'objet de ce travail est de présenter une approche nouvelle dans la justification de la méthode de moyennisation dans le cadre des EDFR, basée sur une technique de stroboscopie établie dans ce contexte.

Cette thèse se compose de quatre chapitres et de quatre annexes.

Le chapitre 1 est un rappel de quelques notions de base de la théorie d'existence, d'unicité et de prolongement des solutions d'EDO et d'EDFR. Nous nous y attardons particulièrement sur la dernière notion dans le but de mettre en évidence la différence fondamentale qui sépare le comportement "existentiel" des solutions selon qu'il s'agit de solutions d'EDO ou d'EDFR. Ce point motivera par la suite l'une des hypothèses (la condition de quasi-bornitude uniforme) qui interviendra dans la justification de certains résultats de moyennisation dans le cadre des EDFR.

Le chapitre 2 concerne les EDO. Il commence par une brève présentation de la décomposition de Bogolyubov-Hale [2, 19] et le concept de moyenne locale dû à Eckhaus [13]. Ces approches classiques sont souvent utilisées pour approximer des EDO rapidement oscillantes au moyen de la méthode de moyennisation.

La partie principale du chapitre est dédiée à la présentation de la technique de stroboscopie (théorème 2.2.1, page 20) et son apport dans la justification, sous des hypothèses moins restrictives que celles rencontrées dans la littérature classique, des résultats de moyennisation pour une EDO rapidement oscillante qui peut se mettre sous la forme dite normale

$$x' = \varepsilon f(\tau, x) \tag{1}$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre réel supposé petit.

Le principe de cette technique de stroboscopie est d'observer une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en des instants privilégiés, de sorte à ne retenir de la fonction qu'une évolution moyenne. Il s'applique dans le cas de l'équation (1) de la manière suivante : on soumet l'équation à un changement dans l'échelle du temps en considérant le temps lent $t = \varepsilon\tau$. Ceci la transforme en l'équation équivalente

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right). \tag{2}$$

Puis on regarde une solution de l'équation (2) au voisinage d'un point limité quelconque $(t, x(t))$ sous une loupe (un changement de variables) de grossissement convenablement choisi (ce choix est un élément déterminant dans le traitement du problème considéré), dans le but de déduire l'existence d'un instant $t' > t$ vérifiant

$$t' \simeq t, \ \forall s \in [t, t'] \ x(s) \simeq x(t) \text{ et } \frac{x(t') - x(t)}{t' - t} \simeq f^o(x(t)) \tag{3}$$

où $f^o : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est la fonction moyenne définie par

$$f^o(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x)dt, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Cette procédure permet alors, moyennant le théorème 2.2.1, page 20, de montrer le résultat que nous énonçons en termes classiques, mais qui sera traduit puis prouvé dans le cadre de l'Analyse Non Standard (ANS).

Théorème 1 (Théorème 2.3.1, page 22). *[49] — On suppose que $f = f(t, x)$ est continue, que sa continuité en x est uniforme par rapport à t et que la limite (4) existe, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Soit y_0 dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour la condition initiale y_0 l'équation moyennisée*

$$\dot{y} = f^o(y) \tag{5}$$

admet une solution unique. Soient y cette solution et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$, L dans J, et tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ tel que pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0]$, toute solution x de l'équation (2), issue du point $x(0) = y_0$, est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie l'inégalité $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L]$.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse aux EDFR qui se ramènent à la forme dite normale

$$x'(\tau) = \varepsilon f(\tau, x_\tau) \tag{6}$$

où x_τ est l'élément de $\mathcal{C}_o = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^d)$ défini par $x_\tau(\theta) = x(\tau + \theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$, et où $r \geq 0$ est une constante indépendante du paramètre $\varepsilon > 0$ supposé petit.

Nous rappelons dans ce chapitre, et de manière succincte, les deux plus importantes approches classiques qui traitent l'équation (6) au moyen de la méthode de moyennisation. L'une est exposée par Hale et Verduyn Lunel dans [22] et consiste, à travers un changement de variable convenable, à se ramener à une situation où la décomposition de Bogolyubov-Hale rappelée au chapitre 2 s'applique. L'autre est une extension, due à Lehman et Weibel [32], du concept de moyenne locale, dû à Eckhaus, rappelé lui aussi au chapitre 2.

Dans le reste du chapitre 3, nous proposons une nouvelle formulation de la technique de stroboscopie (théorème 3.2.4, page 34). Elle est suivie de son application pour montrer des résultats de moyennisation pour des EDFR du type (6) dont les EDO rapidement oscillantes font partie (pour $r = 0$).

Posons $t = \varepsilon\tau$ dans l'équation (6). Celle-ci devient

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_{t,\varepsilon}\right) \tag{7}$$

où, pour t fixé et $\theta \in [-r, 0]$, $x_{t,\varepsilon}(\theta) = x(t + \varepsilon\theta)$. Soit x une solution de l'équation (7). Contrairement à la technique de stroboscopie rappelée au chapitre 2, se contenter ici de faire une observation ponctuelle de la solution x est insuffisant pour déterminer son comportement au voisinage de $x(t)$ où t est un instant d'observation. On fait plutôt un agrandissement autour d'un point $(t, \tilde{x}^t)$ où $\tilde{x}^t$ est l'élément de $\mathcal{C}_o$ défini par $\tilde{x}^t(\theta) = x(t)$, pour $\theta \in [-r, 0]$. L'instant d'observation, qui est limité, est alors choisi tel que x soit limitée tout le temps qui le précède. Pour le reste, l'idée ne diffère pas de celle évoquée dans la technique originale : le choix convenable de la loupe conduit à la détermination d'un instant $t' > t$ vérifiant la propriété (3) où f^o est remplacée par la fonction moyenne $\overline{f}$ définie par

$$\overline{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_s^{s+T} f(t, \tilde{x})dt, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{8}$$

où la limite est supposée exister uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}$ et où pour x dans $\mathbb{R}^d$, $\tilde{x}$ est dans $\mathcal{C}_o$ tel que $\tilde{x}(\theta) = x$, pour $\theta \in [-r, 0]$.

Ceci permet alors, en utilisant le langage de l'ANS, de montrer deux résultats relatifs à l'équation (7).

— Dans un premier temps, nous établissons un résultat concernant le cas où, d'une part, le second membre de l'équation (7) est presque périodique en la première variable uniformément par rapport à la seconde variable prise dans des compacts, et d'autre part, les solutions de l'équation (7) et de sa moyennisée sont définies sur un même intervalle fini de temps.

Théorème 2 (Théorème 3.3.4, page 39). — *On suppose que $f = f(t, x)$ est continue, que sa continuité en x est uniforme par rapport à t et que f est presque périodique en t dans $\mathbb{R}$ uniformément par rapport à x dans les compacts de $\mathcal{C}_o$ (donc la limite (8) existe uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}$). Soit $\phi \in \mathcal{C}_0$. On suppose que, pour la condition initiale $\phi(0)$, l'équation moyennisée (qui est une EDO)*

$$\dot{y} = \overline{f}(y) \tag{9}$$

admet une solution unique. Soient y cette solution et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$ appartenant à J, et tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ tel que, pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0]$, toute solution x de l'équation (7), à valeur initiale ϕ à $t = 0$ (c.-à-d. $x(t) = \phi(t/\varepsilon)$, pour t dans $[-\varepsilon r, 0]$), qui est définie au moins sur l'intervalle $[-\varepsilon r, L]$, vérifie l'inégalité $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L]$.

— Dans un second temps, en considérant le cas général, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 3 (Théorème 3.3.10, page 46). — *On suppose que* $f = f(t, x)$ *est continue, que sa continuité en* x *est uniforme par rapport à* t*, que* f *est quasi-bornée en* x *uniformément par rapport à* t *et que pour* $s = 0$ *la limite (8) existe. Soit* ϕ *dans* $\mathcal{C}_o$*. On suppose que pour la condition initiale* $\phi(0)$ *l'équation moyennisée (9) admet une solution unique. Soient* y *cette solution et* $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$*, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Alors, pour tout* $L > 0$*,* L *dans* J*, et tout* $\delta > 0$*, il existe* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ *tel que pour tout* ε *dans* $]0, \varepsilon_0]$*, toute solution* x *de l'équation (7), à valeur initiale* ϕ *à* $t = 0$ *(c.-à-d.* $x(t) = \phi(t/\varepsilon)$*, pour* t *dans* $[-\varepsilon r, 0]$*), est définie au moins sur l'intervalle* $[-\varepsilon r, L]$ *et vérifie l'inégalité* $|x(t) - y(t)| < \delta$ *pour tout* t *dans* $[0, L]$.

L'hypothèse de quasi-bornitude uniforme intervenant dans le théorème 3 est motivée par la discussion du chapitre 1 sur la prolongeabilité des solutions d'une EDFR. Elle est, par ailleurs, soutenue par le traitement du cas presque périodique en la première variable uniformément par rapport à la seconde variable prise dans des compacts,.

Le chapitre 4 est consacré à la justification de la méthode de moyennisation pour les EDFR rapidement oscillantes qui s'écrivent

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_t\right) \tag{10}$$

où $x_t \in \mathcal{C}_o = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^d)$ avec $r > 0$ et où $\varepsilon > 0$ est un paramètre supposé petit.

Bien que la littérature classique concernée par ce problème, y compris dans le cas où le retard est ponctuel, soit très peu abondante, il y a un travail de référence que nous citons dans ce chapitre. Il s'agit de l'approche proposée par Hale et Verduyn Lunel [21] qui consiste à étendre la technique de moyennisation à des équations différentielles ordinaires abstraites définies sur des espaces de Banach, puis à identifier l'équation (10) à l'une d'entre elles et ainsi lui transférer les résultats de moyennisation obtenus.

Dans la suite du chapitre, nous exposons notre contribution qui consiste d'abord à étendre la technique de stroboscopie dans sa formulation proposée au chapitre précédent. Cette extension est naturelle en ce sens que dans les conditions du chapitre 3 on retrouve les résultats qui y sont énoncés et montrés. Ensuite, de la même manière qu'au chapitre 3, nous déduisons les résultats de moyennisation pour l'équation (10) comme conséquence de la technique de stroboscopie.

Dans ce chapitre, nous tiendrons compte du fait que l'espace des phases, contrairement au cas des EDO où c'est $\mathbb{R}^d$, est ici un espace fonctionnel, en l'occurrence $\mathcal{C}_o$. Celui-ci n'étant pas propre (un espace où toute boule fermée est compacte), il influence, à travers la fonction x_t qui évolue en son sein au cours du temps, le comportement de la fonction x étudiée.

Ainsi, si x est une solution de l'équation (10), le principe de la technique de stroboscopie consiste ici à observer x, à travers une loupe adaptée, en un point (t, x_t), où t est choisi non seulement tel que x soit limitée tout le temps antérieur à l'instant t, mais aussi $f^o(x_s)$ le soit pour tout $s \in [0,t]$. L'observation permet alors de déterminer un instant $t' > t$ vérifiant la propriété

$$t' \simeq t,\ \forall s \in [t,t']\ x(s) \simeq x(t) \text{ et } \frac{x(t')-x(t)}{t'-t} \simeq f^o(x_t)$$

où $f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ est la fonction moyenne définie par

$$f^o(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_s^{s+T} f(t,x)dt, \quad x \in \mathcal{C}_o \tag{11}$$

La limite étant supposée exister uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}$.

En faisant usage de l'ANS, la technique exposée ci-dessus permet finalement de déduire deux résultats de moyennisation.

— Le premier est l'homologue du théorème 2, c'est-à-dire, un résultat de moyennisation dans le cas où les deux conditions suivantes sont réalisées simultanément : la presque périodicité du second membre de l'équation (10) en la première variable est uniforme par rapport à la seconde variable prise dans des compacts, et les solutions de l'équation (10) et de sa moyennisée sont définies sur le même intervalle fini de temps.

Théorème 4 (Théorème 4.3.4, page 58**).** — *On suppose que $f = f(t,x)$ est continue, que sa continuité en x est uniforme par rapport à t et que f est presque périodique en t dans $\mathbb{R}$ uniformément par rapport à x dans les compacts de $\mathcal{C}_o$ (donc la limite (11) existe uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}$). Soit ϕ dans $\mathcal{C}_0$. On suppose que, pour la condition initiale ϕ, l'équation moyennisée (qui est une EDFR)*

$$\dot{y} = f^o(y_t), \quad t \geq 0 \tag{12}$$

admet une solution unique. Soient y cette solution et $J = [-r,\omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$ appartenant à J, et tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L,\delta) > 0$ tel que, pour tout ε dans $]0,\varepsilon_0]$, toute solution x de l'équation (10), à valeur initiale ϕ à $t = 0$ (c.-à-d. $x_0 = \phi$), qui est définie au moins sur l'intervalle $[-r,L]$, vérifie l'inégalité $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0,L]$.

— Le second résultat concerne le cas général. C'est l'homologue du théorème 3.

Théorème 5 (Théorème 4.3.9, page 63**).** — *On suppose que $f = f(t,x)$ est continue, que sa continuité en x est uniforme par rapport à t, que f est quasi-bornée en x uniformément par rapport à t et que pour $s = 0$ la limite (11) existe. Soit ϕ dans $\mathcal{C}_o$. On suppose que pour la condition initiale ϕ l'équation moyennisée (12) admet une solution unique. Soient y cette solution et $J = [-r,\omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$, L dans J, et tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L,\delta) > 0$ tel que pour tout ε dans $]0,\varepsilon_0]$, toute solution x de l'équation (10), à valeur initiale ϕ à $t = 0$ (c.-à.d. $x_0 = \phi$), est définie au moins sur l'intervalle $[-r,L]$ et vérifie l'inégalité $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0,L]$.*

L'hypothèse de quasi-bornitude uniforme figurant parmi les hypothèses du théorème 5 est introduite pour les mêmes raisons que celles évoquées au chapitre 3.

Dans la dernière partie du chapitre, nous nous intéressons à un problème à valeur initiale, particulier, associé à une équation différentielle à retard ponctuel, du type

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(\dfrac{t}{\varepsilon}, x(t), x(t-r)\right), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{13}$$

En l'absence de l'hypothèse de quasi-bornitude uniforme, nous vérifions que le résultat du théorème 5 reste vrai. Pour ce faire, nous utiliserons la technique d'intégration "pas-à-pas", qui consiste à considérer le problème (13) sur chacun des intervalles $[0, r]$, $[r, 2r]$, etc. sur lesquels l'équation différentielle associée à (13) devient une EDO rapidement oscillante. Le résultat montré s'énonce, en langage non standard, comme ceci :

Théorème 6 (Théorème 4.4.1, page 68). — *On suppose que f et ϕ dans (13) sont standard et continues, que la continuité de $f = f(t, x_1, x_2)$ en x_1, x_2 est uniforme par rapport à t, qu'il existe une fonction standard $f^o : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que*

$$\forall^{st} x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \; \forall R \simeq +\infty \quad f^o(x_1, x_2) \simeq \frac{1}{R}\int_0^R f(t, x_1, x_2)dt,$$

et que le problème moyennisé

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f^o(y(t), y(t-r)), & t \geq 0 \\ y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

admet une solution unique. Soient y cette solution et $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Alors, pour tout $L > 0$ et standard appartenant à J, toute solution x du problème (13) est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.

L'annexe A est une introduction à l'ANS, due à Robinson [42], sous sa formalisation IST (Internal Set Theory), due à Nelson [39]. Nous y exposons toutes les notions nécessaires à la compréhension des énoncés externes des résultats ainsi que leurs démonstrations, qui sont présentés ou élaborés aux chapitres 2, 3 et 4, et à l'annexe C.

L'annexe B est un exercice de réduction. Sur deux exemples, à savoir la notion de quasi-bornitude uniforme et le résultat du théorème 5 plus haut (théorème 4.3.9, page 63), nous montrons comment l'algorithme de Nelson [39] permet d'établir l'équivalence entre les énoncés internes et externes de la notion et du résultat considérés.

Dans l'annexe C, nous proposons une variante de la technique de stroboscopie. Elle est moins générale que celles rencontrées aux chapitres 2 et 3 en ce sens que dans l'expression (3) la quantité $t' - t$, qui est infinitésimale, peut être fixée a priori, mais non arbitrairement, indépendamment du choix de l'instant t. Comme il est vérifié dans la deuxième partie de l'annexe, cette version est au moins suffisante pour apporter une justification à l'utilisation de la méthode de moyennisation pour les EDO rapidement oscillantes et permet de (re-)démontrer le résultat du théorème 1.

Dans l'annexe D sont présentés nos travaux sur la moyennisation dans les EDO et les EDFR, rapidement oscillantes.

Chapitre 1

Equations différentielles ordinaires et fonctionnelles à retard : définitions et notions de base

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la théorie d'existence, d'unicité, et de prolongement des solutions pour les EDO et les EDFR (voir [12, 19, 20, 22]). Nous y discutons en particulier le dernier point.

1.1 Equations différentielles ordinaires

1.1.1 Définitions

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue.

Définition 1.1.1. — Une *équation différentielle ordinaire* (EDO) sur U est une relation du type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

où $\dot{x} = dx/dt$.

Définition 1.1.2. — Soit x une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$.

1. La fonction x est dite *solution de l'équation* (1.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I, si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, et si x satisfait la relation (1.1) sur I.
2. Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné. La fonction x est dite *solution du problème à valeur initiale* associé à l'équation (1.1) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x soit solution de l'équation (1.1) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.

Remarque 1.1.1. — Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) est généralement exprimé sous l'écriture suivante :

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

et une solution de (1.2) est également dite solution de l'équation (1.1) à valeur initiale x_0 à l'instant initial t_0 (ou encore, de condition initiale (t_0, x_0)).

Définition 1.1.3. — Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, une solution du problème (1.2) est dite *unique* si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.

Remarque 1.1.2. — Si le problème (1.2) admet une solution unique, celle-ci est notée par $x = x(\cdot; t_0, x_0)$.

Proposition 1.1.1. *[19]— Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) est équivalent à l'équation intégrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.3}$$

Remarque 1.1.3. — Pour sa maniabilité, l'équation intégrale (1.3) est souvent utilisée au lieu du problème (1.2), par exemple dans les preuves de résultats d'existence, d'unicité, etc. , des solutions.

1.1.2 Existence, unicité et prolongement des solutions

Théorème 1.1.2 (Existence)**.** *[19] — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet au moins une solution.*

Corollaire 1.1.3. *[19]— Soient U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Si $W \subset V \subset U$ sont tels que W est fermé et borné (c.-à-d. compact), et V est ouvert avec $\overline{V} \subset U$, alors il existe $L > 0$ tel que, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in W$, il existe une solution x du problème* (1.2) *définie au moins sur l'intervalle* $[t_0 - L, t_0 + L]$.

Définition 1.1.4. — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On dit que $f = f(t, x)$ est *localement lipschitzienne en x* si pour tout fermé et borné (c.-à-d. compact) K dans U, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

pour tous (t, x_1) et (t, x_2) dans K.

Théorème 1.1.4 (Unicité)**.** *[19] — Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Si $f = f(t, x) : U \to \mathbb{R}^d$ est continue et localement lipschitzienne en x, alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet une solution unique.*

U étant un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$, on suppose que $f : U \to \mathbb{R}^d$ est continue.

Définition 1.1.5. — Soient x une solution de l'équation (1.1) et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle sur lequel x est définie.

1. Une fonction $\check{x}$ est appelée *prolongement* de x si elle est définie sur un intervalle $\check{I}$ contenant strictement I, coïncide avec x sur I, et vérifie la relation (1.1) sur $\check{I}$.
2. La solution x est dite *maximale* (on dit aussi *non prolongeable*) si elle n'admet pas de prolongement, c'est-à-dire que l'intervalle I est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.

Remarque 1.1.4. — L'existence d'une solution maximale prolongeant toute solution est une conséquence du Lemme de Zorn. L'intervalle maximal d'existence d'une solution est toujours ouvert.

Théorème 1.1.5 (Prolongement)**.** *[12] — Soit x une solution maximale de l'équation (1.1) et soit $I =]a, b[$ son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout fermé et borné (c.-à-d. compact) W dans U, il existe t_W^1 et t_W^2 tels que $(t, x(t)) \notin W$ pour $t \in]a, t_W^1]$ et $t \in [t_W^2, b[$.*

Corollaire 1.1.6. *[19] — Soient x une solution maximale de l'équation (1.1) et $I =]a, b[$ son intervalle maximal d'existence. Alors $(t, x(t))$ va vers le bord de U lorsque t tend vers a et vers b.*

1.2 Equations différentielles fonctionnelles à retard

1.2.1 Définitions

Soit $r \geq 0$ un réel donné. On note par $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^d)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour $[a, b] = [-r, 0]$ on pose

$$\mathcal{C}_o = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^d)$$

et on désigne la norme[1] d'un élément ϕ de $\mathcal{C}_o$ par

$$|\phi| = \sup\{|\phi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}$$

où $|\cdot|$ est une norme dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.2.1. — Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $L \geq 0$. Soient $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + L], \mathbb{R}^d)$ et $t \in [t_0, t_0 + L]$. On définit une nouvelle fonction x_t, élément de $\mathcal{C}_o$, par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

Remarque 1.2.1. — Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t - r, t]$, translatée sur $[-r, 0]$.

Définition 1.2.2. — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle fonctionnelle à retard* (EDFR) sur U une relation de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.4}$$

où le point "$\cdot$" représente la dérivation à droite.

Remarque 1.2.2. —

1. Une application telle que f, définie sur un ensemble de fonctions, est parfois désignée sous le nom de *fonctionnelle* au lieu de fonction.
2. La référence à l'équation (1.4), qui est une équation différentielle fonctionnelle, comme étant une EDFR souligne le fait qu'il n'y a que le présent et le passé de x qui interviennent dans la détermination de $\dot{x}$.

[1] Nous conviendrons dans cette thèse de noter par le même symbole les normes dans $\mathcal{C}_o$ et dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.2.3. — Soit x une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$.

1. On dit que x est *solution de l'équation* (1.4) s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $L > 0$ tels que $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + L[, \mathbb{R}^d)$, $(t, x_t) \in U$ et x vérifie la relation (1.4) pour tout $t \in [t_0, t_0 + L[$.
2. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{C}_o$ donnés, x est dite *solution du problème à valeur initiale*
$$\dot{x} = f(t, x_t), \quad t \geq t_0; \qquad x_{t_0} = \phi \tag{1.5}$$
s'il existe $L > 0$ tel que x soit solution de (1.4) sur $[t_0 - r, t_0 + L[$ et $x_{t_0} = \phi$.
3. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{C}_o$ donnés, la solution du problème (1.5) est dite *unique* si deux solutions coïncident là où elles sont simultanément définies.

Remarque 1.2.3. — Dans le cas où il y a unicité, la solution de (1.4) à valeur initiale ϕ à t_0 (c.-à-d. la solution du problème (1.5)) est notée par $x = x(\cdot; t_0, \phi)$.

L'équation (1.4) est du type le plus général, en ce sens qu'elle inclut aussi bien les EDO
$$\dot{x} = f_1(t, x),$$
que les équations différentielles à retard(s)
$$\dot{x}(t) = f_2(t, x(t), x(t - r_1(t)), ..., x(t - r_p(t)))$$
avec $0 \leq r_i(t) \leq r$, $i = 1, 2, ..., p$, puisqu'il suffit de poser
$$f(t, u) = f_2(t, u(0), u(-r_1(t)), ..., u(-r_p(t))).$$
Alors, nous avons
$$f(t, x_t) = f_2(t, x_t(0), x_t(-r_1(t)), ..., x_t(-r_p(t))) = f_2(t, x(t), x(t - r_1(t)), ..., x(t - r_p(t))).$$

De même les équations intégro-différentielles de la forme
$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} f_3(t, \theta, x(t + \theta))d\theta$$
sont du type (1.4) pour
$$f(t, u) = \int_{-r}^{0} f_3(t, \theta, u(\theta))d\theta.$$

D'autres types d'équations peuvent également être exprimés par la relation (1.4).

Définition 1.2.4. — On dit que l'équation (1.4) est *autonome* si la fonction f ne dépend pas de t. On note dans ce cas $f(u)$ au lieu de $f(t, u)$.

Proposition 1.2.1. *[22] — Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{C}_0$ donnés, et soit $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Une fonction x est solution du problème (1.5) si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale*
$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds, \quad t \geq t_0; \qquad x_{t_0} = \phi. \tag{1.6}$$

Remarque 1.2.4. — Souvent dans les applications il est plus commode de convertir le problème (1.5) en l'équation intégrale (1.6) et de travailler avec cette expression de la solution considérée.

1.2.2 Existence, unicité et prolongement des solutions

Nous rappelons, dans ce paragraphe, quelques résultats de base sur l'existence, l'unicité et le prolongement des solutions de l'équation (1.4), en accordant une attention particulière à cette dernière notion.

Théorème 1.2.2 (Existence)**.** *[22] — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Si $(t_0, \phi) \in U$, alors le problème (1.5) admet au moins une solution.*

Plus généralement, si la fonction f est continue et $W \subset U$ et compact, alors il existe un voisinage $V \subset U$ de W tel que $f_{|V}$ soit bornée, et il existe $L > 0$ tel que, pour tout $(t_0, \phi) \in W$, il existe au moins une solution x du problème (1.5)*, définie sur l'intervalle* $[t_0 - r, t_0 + L]$.

Définition 1.2.5. — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On dit que $f = f(t, x)$ est *lipschitzienne en x dans les compacts de U* si pour tout compact K dans U, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

à chaque fois que (t, x_1) et (t, x_2) sont dans K.

Théorème 1.2.3 (Unicité)**.** *[22] — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On suppose que $f = f(t, x)$ est lipschitzienne en x dans les compacts de U. Si $(t_0, \phi) \in U$, alors le problème (1.5) admet une solution unique.*

On suppose que la fonction f dans l'équation (1.4) est continue. Soit x une solution de cette équation, définie sur l'intervalle $[t_0 - r, a[$, $a > t_0$.

Définition 1.2.6. — On dit que $\check{x}$ est un *prolongement* de x s'il existe $b > a$ tel que $\check{x}$ est définie sur $[t_0 - r, b[$, coïncide avec x sur $[t_0 - r, a[$, et vérifie l'équation (1.4) sur $[t_0 - r, b[$.

Définition 1.2.7. — La solution x est dite *maximale* si elle n'admet pas de prolongement, c'est-à-dire que l'intervalle $[t_0 - r, a[$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.

Remarque 1.2.5. — L'intervalle maximal d'existence d'une solution est nécessairement ouvert à droite.

Théorème 1.2.4 (Prolongement)**.** *[22] — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Soit x une solution maximale de l'équation (1.4) et soit $[t_0 - r, b[$ son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout compact W dans U, il existe t_W tel que $(t, x_t) \notin W$ pour $t \in [t_W, b[$.*

Corollaire 1.2.5. *[22] — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Soit x une solution maximale de l'équation (1.4) et soit $[t_0 - r, b[$ son intervalle maximal d'existence. Soit W l'adhérence de $\{(t, x_t) : t \in [t_0, b[\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$. Si W est compact alors il existe une suite $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$ telle que $t_k \to b^-$ et (t_k, x_{t_k}) tend vers le bord de U lorsque $k \to \infty$. Si $r > 0$, alors il existe $\psi \in \mathcal{C}_o$ tel que (b, ψ) appartienne au bord de U et $(t, x_t) \to (b, \psi)$ lorsque $t \to b^-$.*

Commentaire 1.2.1. — Rappelons que le théorème 1.1.5 (et son corollaire) affirme que toute solution de l'EDO (1.1) peut être prolongée jusqu'à ce que sa trajectoire atteigne le bord de l'ouvert U (le domaine de définition de l'EDO considérée). La preuve de ce résultat se base sur la propriété que l'image par une fonction continue d'une partie fermée et bornée de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, qui est donc compacte car $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ est propre[2], est en particulier bornée. Cette propriété n'est pas vraie pour une fonctionnelle continue. En effet, une partie fermée et bornée de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ n'est pas nécessairement compacte héritant cette propriété de l'espace $\mathcal{C}_o$ qui n'est pas propre. Ainsi, le résultat du théorème cité plus haut (et son corollaire) n'est plus vrai dans le cas des EDFR.

Ce qui vient d'être dit justifie la condition de compacité sur l'objet de l'hypothèse dans le théorème 1.2.4. Par ailleurs, le corollaire de ce dernier montre qu'en particulier si l'adhérence de la trajectoire $\{(t, x_t) : t \in [t_0, b[\}$ d'une solution de l'EDFR (1.4) est compacte, elle est alors non prolongeable car sa trajectoire aura nécessairement atteint le bord de U (ici, le domaine de définition de l'EDFR). Mais en général cette condition de compacité sur la trajectoire d'une solution n'est pas réalisée comme on peut le constater sur l'exemple étudié plus bas. D'où la nécessite d'introduire sur la fonctionnelle f une hypothèse supplémentaire assurant la prolongeabilité des solutions de l'EDFR (1.4) jusqu'à atteinte par leurs trajectoires du bord de U. Une telle hypothèse est évidemment en rapport avec ce qui vient d'être dit plus haut. Elle est vérifiée dans la plupart des cas rencontrés dans les applications.

Définition 1.2.8. — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On dit que la fonction f est *quasi-bornée* si l'image par f de tout ensemble fermé et borné de U est un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$.

Il est facile de vérifier la proposition suivante que nous utiliserons d'ailleurs tout au long de cette thèse en substitution à la définition 1.2.8 :

Proposition 1.2.6. — *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction. La fonction f est quasi-bornée si et seulement si l'image par f de tout ensemble borné de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$.*

Théorème 1.2.7 (Prolongement ∘ Bis)**.** *[22]— Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On suppose que f est quasi-bornée. Soient x une solution maximale de l'équation (1.4) et $[t_0 - r, b[$ son intervalle maximal d'existence. Alors, pour toute partie fermée et bornée W de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$, contenue dans U, il existe t_W tel que $(t, x_t) \notin W$ pour $t \in [t_W, b[$.*

Commentaire 1.2.2. — Ainsi le théorème 1.2.7 affirme que la trajectoire d'une solution maximale doit quitter puis rester en dehors de toute partie fermée et bornée contenue dans U, pourvu que f soit quasi-bornée. Si cette condition sur f n'est plus satisfaite, il est possible que la trajectoire $\{(t, x_t) : t \in [t_0, b[\}$ constitue elle-même un ensemble fermé et borné dans U. C'est-à-dire que la courbe $\{(t, x(t)) : t \in [t_0 - r, b[\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ peut osciller de sorte que (t, x_t) n'admet pas de limite dans $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ lorsque $t \to b^-$. Un tel comportement est illustré par l'exemple suivant tiré de [22], pages 46-47, et dû à Mishkis [36] (voir aussi [12], page 312, pour un exemple similaire) :

[2] Un espace métrique est dit propre si toutes ses boules fermées sont compactes.

Exemple 1.2.1. — Tout au long de cet exemple $\Delta(t)$ prendra la valeur suivante : $\Delta(t) = t^2$.

Considérons deux suites prenant leurs valeurs sur la demi-droite strictement négative $\mathbb{R}^*_-$ telles que

$$a_1 < a_2 < \cdots, \qquad b_1 < b_2 < \cdots, \qquad a_k \to 0, \quad b_k \to 0, \text{ lorsque } \ k \to +\infty$$

avec

$$a_k = b_k - \Delta(b_k), \quad b_k \leq a_{k+1} - \Delta(a_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}^*$$

On peut prendre, par exemple, pour les b_k les valeurs : $b_k = -2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $z : \mathbb{R}^*_- \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable, vérifiant

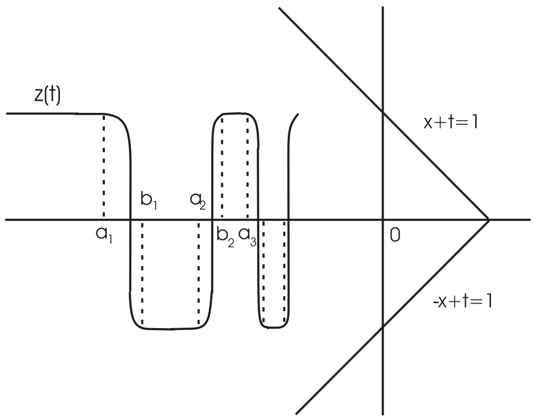
$$z(t) = \begin{cases} +1, & t \in]-\infty, a_1],\ [b_{2k}, a_{2k+1}],\ k \in \mathbb{N}^* \\ -1, & t \in [b_{2k-1}, a_{2k}],\ k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\dot{z}(t) \neq 0, \quad t \in]a_k, b_k[,\ k \in \mathbb{N}^*$$

Posons $A = \{(t,x) : |x| + t < 1,\ t, x \in \mathbb{R}\}$ et définissons la fonction $h : A \to \mathbb{R}$ comme suit : sur le graphe de z on pose

$$h(t - \Delta(t), z(t - \Delta(t))) = \dot{z}(t), \quad t \in \mathbb{R}^*_-.$$

La fonction h est continue sur le graphe de z. Pour $t \in]a_k, b_k[$, $k \geq 2$, c.-à-d. un point de croissance ou de décroissance sur le graphe de z, nous avons $t - \Delta(t) \in [b_{k-1}, a_k]$ et pour $t \in]-\infty, b_1]$, $t - \Delta(t) \in]-\infty, a_1]$. Par suite $h \equiv 0$ sur $]-\infty, b_1]$ et sur $]a_k, b_k[$ pour $k \geq 2$, et en particulier, h s'annule en tout point de croissance ou de décroissance du graphe de z. On prolonge continûment la fonction h de telle sorte qu'elle s'annule sur le carré : $|t| + |x| \leq 1$.



- Fig. 1.1 -

Considérons à présent l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = h(t - \Delta(t), x(t - \Delta(t))), \qquad t < 0. \tag{1.7}$$

Choisissons $t_0 < a_1$ et posons $r = t_0 - \min\{(t - t^2) : t \in [t_0, 0]\}$. Alors, la fonction $x = z_{|[t_0 - r, 0[}$ est une solution maximale de (1.7) à valeur initiale $\phi = z_{t_0}$ à t_0.

Notons le second membre de l'équation (1.7) par $f(t, x_t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $x_t \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R})$. La fonction $f = f(t, u)$ n'est pas quasi-bornée. En fait, la trajectoire de la solution x considérée, c.-à-d. $\{(t, x_t) : t \in [t_0, 0[\}$, est elle-même un ensemble borné, et il est fermé car il n'existe pas de suite (t_k) dans $[t_0, 0[$ tendant vers zéro pour laquelle x_{t_k} converge.

Ainsi, le comportement des solutions d'une EDFR est influencé par le fait que $\mathcal{C}_o$ ne soit pas propre. Ce "phénomène" est loin d'être isolé comme le montre le résultat suivant :

Théorème 1.2.8. *[22] — Soient $r > 0$ et $b < \infty$. On suppose que $b \geq 0$. Soit $x : [-r, b[\to \mathbb{R}^d$ une fonction bornée, continûment dérivable, et telle que $\lim_{t \to b^-} x(t)$ n'existe pas. Alors, il existe une fonction $f : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ continue telle que x soit solution maximale du problème à valeur initiale*

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \quad t \geq 0; \qquad x_0 = \phi$$

où $\phi = x|_{[-r,0]}$.

Nous achevons ce chapitre par la réponse à la question de la nécessité de la condition de quasi-bornitude sur le second membre d'une EDFR pour le prolongement des solutions, dans le cas où le retard est non nul ($r > 0$). Elle est donnée par le résultat suivant :

Proposition 1.2.9. *[22] — La conclusion du théorème 1.2.7 cesse d'être vraie dans le cas où la fonction f n'est pas quasi-bornée.*

Chapitre 2

Cas des équations différentielles ordinaires rapidement oscillantes

Le principe de moyennisation pour les EDO rapidement oscillantes est rappelé dans ce chapitre. Nous y présentons quelques idées sous-jacentes aux différentes approches, classique et non classique, de justification de la méthode tout en insistant sur le cas non standard où la méthode de stroboscopie joue un rôle prépondérant.

2.1 Introduction

La moyennisation est une méthode largement répandue dans la littérature concernée par la théorie des oscillations non stationnaires. Elle prend ses racines dans la mécanique céleste. Mais sous ce nom elle est habituellement attribuée à Krylov, Bogolyubov et Mitropolsky. Quelques ouvrages de référence sont Bogolyubov et Mitropolsky [2], Bogolyubov, Mitropolsky, et Samoilenko [3], Hale [19], Krylov et Bogolyubov [24], Mitropolsky [37, 38], Roseau [43, 44], Sanders et Verhulst [45], et Volosov [50].

Elle concerne, d'un point de vue asymptotique, la construction de solutions approximatives, essentiellement du premier ordre, d'EDO rapidement oscillantes en la variable temps, qui se ramènent à la forme

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, \varepsilon\right) \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ est un paramètre réel destiné à tendre vers zéro. A cette équation est associée l'EDO autonome suivante

$$\dot{y} = f^o(y) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, y, 0)d\tau \tag{2.2}$$

obtenue à partir de l'équation (2.1) en prenant la moyenne, dont on suppose l'existence, par rapport à la variable temps de son membre de droite pour $\varepsilon = 0$ et appelée équation moyennisée. Le principe de la méthode consiste alors à affirmer que le comportement d'une trajectoire de l'équation (2.1) est très proche de celui de la trajectoire de l'équation (2.2), issue de la même condition initiale (ou même d'une condition initiale proche de celle de la première trajectoire), sur des intervalles finis de temps.

L'intuition derrière cette approximation est la suivante : pour ε petit, l'équation (2.1) correspond à un champ de vecteurs dépendant du temps soumis à des oscillations très rapides au cours de son évolution. Il est donc naturel d'estimer qu'en première approximation les solutions de l'équation (2.1) obéissent uniquement à l'effet moyen du champ de vecteurs $f(t, x, 0)$. Le principe qui en découle alors consiste à ne retenir que ce qui "produit un effet", en négligeant ce qui est par contre "sans influence notable".

Introduisons dans l'équation (2.1) un changement dans l'échelle de temps en posant $t = \varepsilon\tau$. Celle-ci devient

$$x' = \varepsilon f(\tau, x, \varepsilon) \tag{2.3}$$

Faisons de même avec l'équation (2.2). L'équation moyennisée s'écrit alors

$$y' = \varepsilon f^o(y). \tag{2.4}$$

L'étude des équations de la forme (2.3), appelée forme normale, a été initiée par Bogolyubov [2]. Malgré la gêne engendrée par l'apparition explicite du paramètre ε dans l'équation moyennisée (2.4), il est devenu une tradition dans la littérature classique de formuler et discuter les résultats sur les fondements de la méthode de moyennisation pour des équations mises sous la forme (2.3).

Il est à noter que les écritures (2.1) et (2.3) sont équivalentes. L'étude du problème à l'une ou à l'autre échelle de temps t ou $\tau = t/\varepsilon$ conduit, indifféremment, aux mêmes résultats.

Dans la littérature classique, différentes techniques de calcul pour justifier les résultats de moyennisation ont été élaborées. Nous en citons deux des plus importantes :

- La décomposition que nous conviendrons d'appeler décomposition de Bogolyubov-Hale [2, 19]. — Elle consiste à introduire un changement de variable faisant apparaître l'équation (2.3) comme une perturbation (régulière) de l'équation moyennisée (2.4).

  Ainsi on montre l'existence d'une fonction $u(\tau, z, \varepsilon)$, vérifiant certaines propriétés dont celle-ci : la fonction $\varepsilon u(\tau, z, \varepsilon)$ tend vers zéro, avec ε, uniformément en τ dans $\mathbb{R}$ et en z dans les compacts de $\mathbb{R}^d$; de sorte que le changement de variable, proche de l'identité

  $$x = z + \varepsilon u(\tau, z, \varepsilon)$$

  transforme l'équation (2.3) en l'équation

  $$z' = \varepsilon f^o(z) + \varepsilon F(\tau, z, \varepsilon).$$

  Puis on néglige le terme $\varepsilon F(\tau, z, \varepsilon)$, supposé tendre vers zéro, avec ε, uniformément en τ dans $\mathbb{R}$ et en z dans les compacts de $\mathbb{R}^d$, pour obtenir l'équation moyennisée (2.4).

  Sous des conditions convenables, la méthode aboutit finalement au résultat :

  $$x(\tau) = y(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

  sur des intervalles du temps τ du type $[0, L/\varepsilon]$ où $L > 0$ est une constante arbitraire.

- Le concept de moyenne locale dû à Eckhaus [13, 45]. — Il s'agit de définir la notion de moyenne locale du second membre de l'équation (2.3). Les solutions de l'équation qui lui est associée constituent alors des solutions intermédiaires entre celles de l'équation (2.3) et l'équation moyennisée (2.4).

  Ainsi l'idée est de considérer l'équation moyennisée locale associée à l'équation (2.3) donnée par
$$z' = \varepsilon f_T(\tau, z) = \varepsilon \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t, z, 0)dt$$
  et de vérifier par des évaluations d'intégrales, moyennant des hypothèses convenables, qu'uniformément par rapport à $\tau \in [0, L/\varepsilon]$, $L = cte > 0$, on a d'une part
$$x(\tau) = z(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon T)$$
  et d'autre part
$$y(\tau) = z(\tau) + \mathcal{O}\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon T}\right)$$
  où la fonction d'ordre en ε, $\delta(\varepsilon)$, définie par
$$\delta(\varepsilon) = \sup_{x} \sup_{\tau \in [0, L/\varepsilon]} \varepsilon \left| \int_0^{\tau} [f(t, x) - f^o(x)]dt \right|$$
  est supposée petite avec ε. Enfin, le choix du paramètre T tel que : $\varepsilon^2 T^2 = \delta(\varepsilon)$ donne le résultat recherché
$$x(\tau) = y(\tau) + \mathcal{O}(\delta^{1/2}(\varepsilon)).$$

Remarque 2.1.1. — Les techniques utilisées dans la littérature classique, et en particulier dans celle citée plus haut, font intervenir des hypothèses du type : (presque) périodicité, Lipschitz (locale), différentiabilité continue en la deuxième variable, bornitude, etc., de la fonction f intervenant dans le second membre de l'équation (2.3) ; existence uniforme de la limite dans la définition de la moyenne de cette fonction, c.-à-d. dans (2.2), par rapport à la seconde variable, etc.

Une approche différente, basée sur les techniques de l'ANS, fut introduite par Sari [46, 47, 49] dans le but de prouver des résultats de moyennisation. Elle est motivée par le fait que le cadre de l'ANS se prête bien à une formulation naturelle du problème de moyennisation et fournit des outils bien adaptés, d'autant plus que, outre les conditions imposées qui sont assez contraignantes, les preuves classiques sont longues et difficiles.

En se remettant à l'échelle de temps original (forme (2.1)), cette approche permet de voir que les petites oscillations rapides d'une solution x de l'équation (2.1) sont portées par la solution y de l'équation moyennisée (2.2). En plus, elle donne des résultats plus généraux que ceux fournis par les approches classiques ; notamment, par l'affaiblissement des hypothèses, elle met en évidence la possibilité de traiter par la méthode de moyennisation des problèmes du type (2.1) ne vérifiant pas les conditions habituellement imposées dans la littérature classique.

La suite du chapitre est organisée de la manière suivante : le paragraphe 2.2 sera consacré à la présentation de la technique de stroboscopie et en particulier du Lemme de stroboscopie. Puis, au paragraphe 2.3 nous présenterons les énoncés interne et externe d'un résultat de moyennisation pour les EDO rapidement oscillantes. Nous vérifierons que ce dernier se déduit comme conséquence du Lemme de stroboscopie.

2.2 Stroboscopie dans les EDO

La technique de stroboscopie a été proposée par Callot et Reeb [40] pour l'étude de l'EDO particulière

$$\dot{x} = \sin(\omega x t) \tag{2.5}$$

où $x, t \in \mathbb{R}$, et $\omega \simeq +\infty$ est un paramètre réel fixé, et où "$\cdot$" $= d/dt$.

L'objectif est de déterminer les ombres des solutions de l'équation (2.5). Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation (2.5). Comme sa dérivée est limitée, x est une fonction S-continue dont l'ombre y est une fonction standard continue. Pour des raisons de symétrie, l'étude est restreinte au quadrant $t \geq 0$ et $x \geq 0$. L'ombre y est une fonction décroissante, analytique sauf au point où elle traverse la bissectrice $x = t$ où elle est alors continûment dérivable. Dans le secteur $t \geq x > 0$, il y a des pièges à trajectoires de sorte que l'ombre y est une hyperbole tx =constante. Cette description du comportement de l'ombre y a été exposée par Reeb dans [40]. Dans le secteur $x > t > 0$, la solution x oscille et Callot a montré que deux minima successifs (t_n, x_n) et (t_{n+1}, x_{n+1}) vérifient les estimations

$$0 < t_{n+1} - t_n \simeq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \simeq f^o(t_n, x_n) \tag{2.6}$$

où $f^o : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction standard et continue définie par

$$f^o(t, y) = \frac{\sqrt{y^2 - t^2} - y}{t}, \qquad t, y \in \mathbb{R}.$$

La condition (2.6) signifie en fait que la suite de points (t_n, x_n) s'obtient par le schéma d'Euler, perturbé et à pas variables, appliqué à l'EDO standard

$$\dot{y} = f^o(t, y). \tag{2.7}$$

Donc, l'ombre y est une solution standard de l'équation (2.7).

Cet exemple illustre le principe de la technique qui sera appelée par Callot et Reeb la technique de stroboscopie. L'idée de base est alors la suivante [48] : "On étudie une fonction x, qui est en général solution d'une certaine EDO. On suppose que x se laisse surprendre (c'est l'effet stroboscopique) en des instants discrets et infiniment proches (instants d'observation de la stroboscopie), mais éventuellement très irrégulièrement espacés de sorte que la pente

$\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$ entre deux flashes soit infiniment proche de la valeur $f^o(t_n, x(t_n))$, où la fonction f^o est associée à une EDO standard

$$\dot{y} = f^o(t, y). \tag{2.8}$$

Dans ces conditions la fonction x est alors infiniment proche d'une solution de l'équation (2.8)".

Plus tard, Sari dans [47] tenant compte de toutes les améliorations apportées au fur et à mesure que les applications se multipliaient (voir [5, 6, 33, 46, 49] pour les détails), étendra cette technique de stroboscopie. L'extension concernera des situations où la sélection des instants d'observation n'est pas donnée a priori, ou par une relation de récurrence donnant l'instant t_{n+1} en fonction de celui qui le précède t_n, comme était le cas dans beaucoup d'applications. Il donnera la forme finale à ce qui s'appelle aujourd'hui le Lemme de stroboscopie que nous énonçons sous la forme suivante :

Théorème 2.2.1 (Lemme de stroboscopie pour les EDO). *[49]* — *Soit $f^o : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et continue. Soient I une partie de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $x : I \to \mathbb{R}^d$ une fonction avec $x(0)$ limité dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que*

1. *Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout t dans I, si $t \geq 0$ et limité, et $x(t)$ est limité alors il existe t' tel que $\mu < t' - t \simeq 0$, $[t, t'] \subset I$, $x(s) \simeq x(t)$ pour tout s dans $[t, t']$ et $\dfrac{x(t') - x(t)}{t' - t} \simeq f^o(t, x(t))$.*
2. *Le problème à valeur initiale*

$$\dot{y} = f^o(t, y), \qquad y(0) = {}^o\big(x(0)\big) \tag{2.9}$$

admet une solution unique, notée y. Soit $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence.

Alors, pour tout $L > 0$ et standard appartenant à J, la fonction x est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.

Notation 2.2.1. —

1. L'hypothèse 1 est ce qu'on appelle la propriété stroboscopique.
2. Les moments t et t' sont les instants d'observation de la stroboscopie.
3. L'équation associée au problème (2.9) est dite équation stroboscopique.

Remarque 2.2.1. — Le principe de permanence, appliqué à la conclusion du théorème 2.2.1, assure l'existence d'un $\omega_0 > 0$ tel que $\omega_0 \simeq \omega$, l'intervalle $J_0 = [0, \omega_0[$ est contenu dans J, et la fonction x est définie au moins sur J_0 et vérifie l'approximation $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans J_0.

Commentaire 2.2.1. — Bien que l'équation stroboscopique dans (2.9) soit une EDO du type général (non autonome), dans l'application de la technique de stroboscopie pour montrer des résultats de moyennisation, cette équation représentera toujours l'équation moyennisée qui est autonome. Ceci prouve en particulier que le champ d'application de cette technique s'étend au delà du thème étudié dans ce chapitre (et même tout le long de cette thèse), en l'occurrence la méthode de moyennisation.

2.3 Moyennisation dans les EDO rapidement oscillantes

Rappelons que l'objectif de la méthode de moyennisation est de montrer l'approximation, lorsque ε tend vers zéro, d'une solution x, issue d'un point x_0 à l'instant $t = 0$[1], de l'EDO non autonome (rapidement oscillante)

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) \tag{2.10}$$

par la solution y, que l'on supposera ici unique, issue du même point, de l'EDO autonome (équation moyennisée)

$$\dot{y} = f^o(y)$$

où $f^o : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ désigne la moyenne, dont on suppose l'existence, de la fonction $f = f(t, x)$ par rapport à la variable t, c.-à-d. pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$f^o(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x)dt. \tag{2.11}$$

L'approximation de x par y étant valable sur des intervalles de temps du type $[0, L]$ où $L > 0$ est une constante arbitraire fixée.

Commentaire 2.3.1. — Puisque nous allons faire usage du language de l'ANS, nous avons choisi de ne pas faire dépendre la fonction f dans l'équation (2.10) du paramètre ε comme nous l'avions fait dans l'équation (2.1). Il suffirait de permettre à f d'être éventuellement non standard, mais proche d'une fonction standard, pour des valeurs convenables des variables et du paramètre, pour nous dispenser de considerer une famille $f = f(t, x, \varepsilon)$ dépendant de ε et de manier des propriétés encombrantes qui porteraient sur toute une famille. D'ailleurs, dans la littérature classique, il est souvent supposé que la fonction f est suffisamment régulière pour que, pour ces mêmes valeurs convenables des variables et du paramètre, on ait la propriété suivante : $f(t, x, \varepsilon)$ converge convenablement vers $f(t, x, 0)$ lorsque ε tend vers zéro. Par ailleurs, comme c'est essentiellement cette fonction standard, proche de la fonction f, qui joue un rôle important tout au long du traitement de la méthode de moyennisation, nous allons dans les formulations externes des résultats de moyennisation supposer d'emblée que la fonction f est elle même standard.

Présentons à présent les hypothèses sous lesquelles le résultat principal de moyennisation de ce chapitre, que nous conviendrons d'appeler le Théorème KBM[2], sera énoncé :

- (H1) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dans l'équation (2.10) est continue.
- (H2) La continuité de $f = f(t, x)$ en la variable x est uniforme par rapport à la variable t.
- (H3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la limite (2.11) existe.

[1]L'instant initial peut prendre n'importe quelle valeur. C'est par soucis de simplification que nous l'avons choisi nul.

[2]En référence à Krylov, Bogolyubov, et Mitropolsky

(H4) Pour $y_0 \in \mathbb{R}^d$ donné, le problème moyennisé

$$\dot{y} = f^o(y), \qquad y(0) = y_0 \tag{2.12}$$

admet une solution unique.

Le Théorème KBM s'énonce alors :

Théorème 2.3.1 (Théorème KBM - EI). *[49] — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction vérifiant les hypothèses (H1)-(H4). Soit y_0 dans $\mathbb{R}^d$. Soient y la solution du problème moyennisé (2.12) et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$, L dans J, et tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ tel que pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0]$, toute solution x de l'équation (2.10), à valeur initiale y_0 à $t = 0$, est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie l'inégalité $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Commentaire 2.3.2. — Il n'est pas nécessaire que $x(0)$ (le point d'où est issue la solution considérée de l'équation (2.10)) soit confondu avec la condition initiale de la solution du problème moyennisé (2.12). Le résultat du théorème 2.3.1 reste vrai pour toute valeur proche de y_0. En termes non standard, nous dirons, pour toute valeur dans le halo de y_0. Mais pour des raisons similaires à celles évoquées vers la fin du commentaire 2.3.1 ci-dessus, nous allons considérer uniquement le cas où $x(0)$ est standard et donc $x(0) = y_0$ puisque ce dernier sera choisi dans la suite ayant une valeur standard.

Les traductions externes des hypothèses (H1), (H2) et (H3), ainsi que celle du résultat donné par le théorème 2.3.1 sont, respectivement :

(H1') $\forall^{st} t \in \mathbb{R}_+ \, \forall^{st} x \in \mathbb{R}^d \, \forall t' \in \mathbb{R}_+ \, \forall x' \in \mathbb{R}^d \, \big(t' \simeq t, \ x' \simeq x \Rightarrow f(t', x') \simeq f(t, x)\big)$.

(H2') $\forall^{st} x \in \mathbb{R}^d \, \forall x' \in \mathbb{R}^d \, \forall t \in \mathbb{R}_+ \, \big(x' \simeq x \Rightarrow f(t, x') \simeq f(t, x)\big)$.

(H3') $\exists^{st} f^o : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que :

$$\forall^{st} x \in \mathbb{R}^d \, \forall R \simeq +\infty \quad f^o(x) \simeq \frac{1}{R} \int_0^R f(t, x) dt.$$

Théorème 2.3.2 (Théorème KBM - EE). *[49] — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard vérifiant les hypothèses (H1)-(H4). Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et standard. Soient y la solution du problème moyennisé (2.12) et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Alors, pour tout $L > 0$ et standard dans J, toute solution x de l'équation (2.10), à valeur initiale y_0 à $t = 0$, est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Commentaire 2.3.3. —

1. Un résultat de moyennisation, plus faible que celui véhiculé par le Théorème KBM (dans ses deux énoncés, interne et externe, qui sont par ailleurs équivalents), est encore vrai si l'hypothèse (H4) n'est pas vérifiée. Il est obtenu au prix d'une condition supplémentaire portant sur les solutions de l'équation (2.10) ; ce qui n'est pas pratique car typiquement dans les applications c'est la situation suivante qui se présente : on souhaite obtenir une information sur les solutions de l'équation “inconnue et compliquée” - dans notre cas l'équation (2.10) - à partir de celles de l'équation “connue et (plus) simple” - l'équation moyennisée (2.12) -.

Un tel résultat, exprimé en language non standard, a pour énoncé :

Théorème 2.3.3 (Théorème KBM ∘ Bis - EE). *[46, 47] — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard vérifiant les hypothèses (H1)-(H3). Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et standard. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution de l'équation (2.10), à valeur initiale y_0 à $t = 0$, et soit $L > 0$ et standard appartenant à I. On suppose que sur l'intervalle $[0, L]$ la solution x est limitée. Alors, il existe une solution y du problème moyennisée (2.12) définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifiant $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Le théorème 2.3.3 se déduit d'un résultat plus faible que le Lemme de stroboscopie (théorème 2.2.1). Il s'agit du lemme 3.2.2, page 33.

2. A travers le premier point ci-dessus, on constate que sous l'hypothèse (H4) on obtient, aussi bien des précisions sur le domaine d'existence des solutions de l'équation (2.10), que des précisions sur le domaine de validité de l'approximation de ces solutions par la solution de l'équation moyennisée.

3. Très souvent dans les approches classiques c'est l'unicité simultanée des solutions des équations (2.10) et (2.12) qui est exigée. Les résultats obtenus laissent ainsi échapper de nombreuses situations où la moyennisation se justifie encore.

Nous allons à présent énoncer un résultat donnant l'approximation des solutions d'une EDO dont le second membre ne dépend presque pas de l'état. Deux autres résultats suivront. Ils concernent des propriétés de la fonction moyenne dont la deuxième est fondamentale. Ces trois résultats interviennent dans la preuve du théorème 2.3.2.

Lemme 2.3.4. *[49] — Soient $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ des fonctions continues. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et limité. On suppose que*

1. *$F(t, x) \simeq G(t)$ pour tous t et x limités.*
2. *$\int_0^t G(s)ds$ est limitée pour tout $t \geq 0$ et limité.*

Alors, toute solution x du problème à valeur initiale

$$\dot{x} = F(t, x), \qquad x(0) = x_0 \tag{2.13}$$

est définie et limitée pour tout $t \geq 0$ et limité, et vérifie

$$x(t) \simeq x_0 + \int_0^t G(s)ds.$$

Lemme 2.3.5. *[49] — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Alors, la fonction f^o dans (H3) est continue et vérifie*

$$f^o(x) \simeq \frac{1}{R} \int_0^R f(t, x)dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et limité, et tout $R \simeq +\infty$.

Lemme 2.3.6. *[49] — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Alors, pour tout $t \geq 0$ et limité, et tout $x \in \mathbb{R}^d$ et limité, il existe $\varepsilon < \alpha \simeq 0$ tel que pour tout $T \geq 0$ et limité on a*

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(t,x)dt \simeq T.f^o(x). \tag{2.14}$$

Moyennant ces résultats, la preuve du théorème 2.3.2 (Théorème KBM) se fait de la manière suivante :

Démonstration du théorème 2.3.2. — L'idée est de montrer que le théorème 2.3.2 se déduit du Lemme de stroboscopie (théorème 2.2.1). Pour cela nous commençons par remarquer que, grâce à l'hypothèse (H4), l'hypothèse 2 du Lemme de stroboscopie est vérifiée. Afin de vérifier que l'hypothèse 1 (la propriété stroboscopique) est elle aussi réalisée, nous allons observer à l'aide du "stroboscope" les solutions de l'équation (2.10).

Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale de l'équation (2.10), issue du point $x(0) = y_0$. Soit t_0 l'un des instants[3] d'observation de la stroboscopie. Nous allons déterminer l'instant suivant d'observation de la stroboscopie, t_1. En vertu du lemme 2.3.6, nous avons pour tout $T \geq 0$ et limité

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(t,x(t_0))dt \simeq T.f^o(x(t_0))$$

où $\varepsilon < \alpha \simeq 0$. Alors, à l'aide de la loupe suivante, de grossissement $1/\alpha$ et centrée en $(t_0, x(t_0))$,

$$T = \frac{t-t_0}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad X(T) = \frac{x(t_0+\alpha T)-x(t_0)}{\alpha} \tag{2.15}$$

on soumet le graphe de la fonction x à une observation au voisinage du point $(t_0, x(t_0))$.

Sous le changement de variables (2.15) l'équation (2.10) s'écrit

$$\frac{dX}{dT} = f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}T, x(t_0) + \alpha X(T)\right). \tag{2.16}$$

Moyennant les hypothèses et le lemme 2.3.4, on vérifie qu'une solution X de l'équation (2.16), issue du point $X(0) = 0$, est définie et limitée pour tout $T \geq 0$ et limité, et vérifie

$$X(T) \simeq \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, x(t_0)\right)dt = \frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(t,x(t_0))dt \simeq T.f^o(x(t_0)).$$

Les propriétés de l'instant suivant d'observation de la stroboscopie imposent alors le choix : $T = 1$. Ceci donne : $t_1 = t_0 + \alpha$ avec $\mu = \varepsilon < t_1 - t_0 = \alpha \simeq 0$, $[t_0, t_1] \subset I$, $x(t) - x(t_0) = \alpha X(T) \simeq 0$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$, et

$$\frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0} = X(1) \simeq f^o(x(t_0)).$$

Ainsi, les hypothèses du Lemme de stroboscopie pour les EDO sont vérifiées et par conséquent la conclusion du théorème 2.3.2 s'en découle. ■

[3] La notation des instants d'observation de la stroboscopie avec des indices entiers naturels ne correspond pas à une discrétisation du temps. Il s'agit d'un abus de notation.

Dans la plupart des cas d'applications, le second membre de l'équation (2.10) est soit périodique, soit de manière générale presque périodique (et même dans ce dernier cas, le plus souvent c'est une somme de fonctions périodiques). Examinons alors chacun de ces deux cas :

1. *Cas périodique.* — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard, continue et 1-périodique[4] en la variable temps. L'hypothèse (H2') (et donc l'hypothèse (H2)) est vérifiée. En effet, soit $t \in \mathbb{R}$ et soient $x, {}^o x \in \mathbb{R}^d$ avec ${}^o x$ standard et $x \simeq {}^o x$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t - k$ soit limité. Alors

$$f(t, {}^o x) = f(t-k, {}^o x) \simeq f(t-k, x) = f(t, x).$$

L'hypothèse (H3) est trivialement vérifiée puisque si $f^o : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est la fonction moyenne de f, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$f^o(x) = \int_0^1 f(t, x)dt.$$

Le résultat de moyennisation dans ce cas (contenu dans le théorème 2.3.2) se démontre en montrant la propriété stroboscopique comme suit :

Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale de l'équation (2.10), issue de $x(0) = y_0$. Soit t_0 un instant d'observation de la stroboscopie. Sous le changement de variables

$$T = \frac{t - t_0}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad X(T) = \frac{x(t_0 + \varepsilon T) - x(t_0)}{\varepsilon} \tag{2.17}$$

l'équation (2.10) devient

$$\frac{dX}{dT} = f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + T, x(t_0) + \varepsilon X(T)\right). \tag{2.18}$$

Moyennant les hypothèses et le lemme 2.3.4, on trouve que

$$X(T) \simeq \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + t, x(t_0)\right) dt = \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon + T} f(t, x(t_0))dt \tag{2.19}$$

pour tout $T \geq 0$ et limité.

On choisit l'instant suivant d'observation de la stroboscopie en posant $t_1 = t_0 + \varepsilon$ (qui correspond à $T = 1$) pour avoir

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = X(1) \simeq \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+1} f(t, x(t_0))dt = \int_0^1 f(t, x(t_0))dt = f^o(x(t_0))$$

avec $\mu = \varepsilon/2 < t_1 - t_0 = \varepsilon \simeq 0$, $[t_0, t_1] \subset I$, $x(t) - x(t_0) = \varepsilon X(T) \simeq 0$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$.

Ainsi, la propriété stroboscopique est vérifiée. Le résultat du théorème 2.3.2 dans le cas périodique se déduit alors comme conséquence du Lemme de stroboscopie pour les EDO.

[4]Par soucis de simplification, nous avons donné la valeur 1 à la période. L'étude reste vraie pour n'importe quelle autre valeur non nulle de celle-ci.

2. *Cas presque périodique*[5]. — Soit $f = f(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard satisfaisant les conditions (H1) et (H2). On suppose en outre qu'au lieu de la condition (H3), elle est presque périodique en t. La fonction f vérifie alors l'hypothèse suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la limite[6]
$$f^o(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_s^{s+T} f(t,x)dt$$
existe uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}$. Un lemme semblable au lemme 2.3.5 donne la propriété suivante sur f^o : la fonction f^o est standard et continue, et vérifie, pour tout $s \in \mathbb{R}$, tout x limité dans $\mathbb{R}^d$ et tout $T \simeq +\infty$, l'approximation
$$f^o(x) \simeq \frac{1}{T}\int_s^{s+T} f(t,x)dt. \tag{2.20}$$

   Là encore, la conclusion du théorème 2.3.2 reste vraie sous les hypothèses ci-dessus. Pour le prouver on procède de la même manière que dans le cas périodique et on montre que la propriété stroboscopique est vérifiée. La seule différence réside dans la manière de choisir l'instant suivant d'observation de la stroboscopie. Le choix se fait de la façon suivante : l'estimation (2.19) étant vraie pour tout $T \geq 0$ et limité, par permanence elle le reste jusqu'à un certain $T_0 \simeq +\infty$ que l'on choisira tel que $\varepsilon T_0 \simeq 0$. On pose alors $t_1 = t_0 + \varepsilon T_0$. Ceci donne, moyennant l'estimation (2.20)
$$\frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{X(T_0)}{T_0} \simeq \frac{1}{T_0}\int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+T_0} f(t,x(t_0))dt \simeq f^o(x(t_0)).$$

Commentaire 2.3.4. — Il est à remarquer qu'à partir d'un instant quelconque d'observation de la stroboscopie t_0, l'instant suivant t_1 est obtenu en soumettant la solution considérée x de l'équation (2.10) à l'effet d'une loupe, de grossissement infiniment grand convenablement choisi, au point $(t_0, x(t_0))$. La puissance de la loupe est fournie par une certaine propriété de la fonction moyenne. Cette dernière correspond à :

1. la définition de la moyenne, pour le cas périodique.
2. la propriété (2.20), pour le cas presque périodique.
3. la propriété (2.14), pour le cas général.

On remarque, par ailleurs, que le choix de l'instant t_1 est dicté par le calcul dans les deux premiers cas, bien que le deuxième cas ait, tout de même, nécessité l'intervention d'un outil externe, en l'occurrence le principe de permanence. Par contre, dans le dernier cas, le choix est plus astucieux et subtil. Ce sont ces deux derniers cas, comme nous l'avons souligné plus haut, qui ont motivé Sari [47] à étendre la technique de stroboscopie à des situations où le pas entre les instants d'observation de la stroboscopie n'est pas évident à déterminer.

[5]Pour plus d'informations concernant les fonctions presque périodiques, voir l'article [10] de T. Sari, pages 131-141, et l'annexe de [19], pages 315-325.

[6]Cette hypothèse est vérifiée dans bien d'autres situations, en particulier dans le cas où f est périodique en sa première variable (cas 1 étudié au point précédent). Souvent cette hypothèse est imposée directement dans les hypothèses du Théorème KBM en substitution à l'hypothèse (H3).

Chapitre 3

Cas des équations différentielles fonctionnelles à retard mises sous la forme normale

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle formulation de la technique de stroboscopie. Elle permet d'en déduire l'essentiel des résultats de moyennisation pour les EDFR mises sous la forme normale, où celle-ci se justifie. Elle s'applique ainsi en particulier aux EDO rapidement oscillantes ; ce qui permettrait de retrouver les résultats du chapitre précédent.

3.1 Introduction

Soit $r \geq 0$ fixé et soit $y \in \mathbb{R}^d$ (resp. $y : J \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue, avec $0 \in J \subset \mathbb{R}$). Nous conviendrons de noter $\tilde{y}$ (resp. $\tilde{y}^\tau$ pour $\tau \in J$ et $\tau \geq 0$) la fonction de $[-r, 0]$ dans $\mathbb{R}^d$ prenant la valeur y (resp. $y(\tau)$) sur $[-r, 0]$, c.-à-d. $\tilde{y}$ (resp. $\tilde{y}^\tau$, $\tau \in J$ et $\tau \geq 0$) est l'élément de $\mathcal{C}_o$ défini par $\tilde{y}(\theta) = y$ (resp. $\tilde{y}^\tau(\theta) = y(\tau)$) pour $\theta \in [-r, 0]$.

Nous allons nous intéresser ici aux EDFR qui peuvent être ramenées à la forme normale

$$x'(\tau) = \varepsilon f(\tau, x_\tau) \tag{3.1}$$

où " $'$ " $= d/d\tau$. Une technique des plus connues, traitant de l'utilisation de la méthode de moyennisation dans l'étude de ce type d'équations, est exposée par Hale et Verduyn Lunel dans [22]. Elle consiste à associer à l'équation (3.1) l'équation moyennisée (regardée comme une EDO) définie par

$$y'(\tau) = \varepsilon f^o(\tilde{y}^\tau) \tag{3.2}$$

où $f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ est la fonction moyenne donnée, pour $x \in \mathcal{C}_o$, par

$$f^o(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt. \tag{3.3}$$

L'équation (3.1) est alors traitée en tant que perturbation du champ de vecteurs nul et sa solution x est décomposée de la manière suivante :

$$x_\tau = \tilde{I} z(t) + w_\tau$$

où $\tilde{I}$ est la fonction matrice carrée d'ordre d sur $[-r, 0]$, définie par $\tilde{I}(\theta) = I$, la matrice identité, pour $\theta \in [-r, 0]$. Dans cette décomposition w_τ possède la propriété de tendre exponentiellement vers zero et z est solution d'une EDO définie sur une certaine partie de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ par

$$z' = \varepsilon g(\tau, z, \varepsilon) \tag{3.4}$$

où $g(\tau, z, 0) = f(\tau, \tilde{z})$. Le principe de moyennisation (décomposition de Bogolyubov-Hale exposée au chapitre 2, page 17) est alors appliqué à l'équation (3.4) pour obtenir l'approximation des solutions de l'équation (3.1) par celles de l'équation moyennisée (3.2) via celles de l'équation (3.4).

Dans le cas des équations différentielles à retard ponctuel qui s'écrivent

$$x'(\tau) = \varepsilon f(\tau, x(\tau), x(\tau - r)) \tag{3.5}$$

Foduck [14], Halanay [16], Hale [18], Medvedev [35] et Volosov [50], parmi d'autres auteurs, proposent un changement de variable, proche de l'identité, du type

$$x = z + \varepsilon u(\tau, z, \varepsilon)$$

semblable à celui utilisé dans le cas des EDO rapidement oscillantes. L'objectif étant d'approximer les solutions de l'équation (3.5) par celles de l'équation moyennisée correspondante, qui est une EDO rapidement oscillante. Les auteurs montrent ensuite que, pour ε suffisamment petit, tous les termes à retard sont négligeables et terminent par une application du principe de moyennisation à l'EDO rapidement oscillante obtenue.

Plus récemment, dans l'étude d'EDFR du type (3.1), Lehman et Weibel dans [32] proposent de retenir le retard dans l'équation moyennisée de sorte que l'équation (3.1) est approximée par l'EDFR moyennisée

$$y'(\tau) = \varepsilon f^o(y_\tau) \tag{3.6}$$

où f^o est la fonction moyenne donnée par la limite (3.3.) Pour ce faire, les auteurs étendent la technique de Eckhaus [13, 45], élaborée dans le cadre des EDO rapidement oscillantes et rappelée au chapitre 2, page 18. Cela consiste à définir une équation intermédiaire, en l'occurrence l'équation moyennisée locale définie par

$$z'(\tau) = \varepsilon f_T(\tau, z_\tau) \tag{3.7}$$

où la fonction moyenne locale f_T est donnée, pour $x \in \mathcal{C}_o$, $\tau \in \mathbb{R}$ et $T > 0$, par

$$f_T(\tau, x) = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(t, x) dt.$$

L'approximation recherchée est alors obtenue via l'approximation des solutions de l'équation (3.1) par celles de l'équation moyennisée locale (3.7) et de celles-ci par celles de l'équation moyennisée (3.6).

Remarque 3.1.1. — Les conditions habituellement requises dans la littérature classique en général et dans celle citée dans cette introduction en particulier, sur la régularité de la fonction f dans l'équation (3.1) sont du même type que celles évoquées à la remarque 2.1.1, page 18.

Yebdri dans [52], en se mettant dans le cadre de l'ANS, s'est lui aussi intéressé à la justification de la méthode de moyennisation pour l'équation (3.1) sous des hypothèses plus restrictives que celles imposées dans ce chapitre.

Dans notre approche du traitement de l'équation (3.1) par la méthode de moyennisation, nous associons à celle-ci l'équation moyennisée suivante, qui est une EDO dans $\mathbb{R}^d$

$$y' = \varepsilon \overline{f}(y)$$

où la fonction moyenne[1] $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est donnée par

$$\overline{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \tilde{x})dt, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Le changement d'échelle de temps $t = \varepsilon\tau$ permet de passer de l'équation (3.1) à l'équation

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_{t,\varepsilon}\right) \tag{3.8}$$

où " $\cdot$ " $= d/dt$ et où pour $t \geq 0$, $x_{t,\varepsilon}$ est l'élément de $\mathcal{C}_o$ défini par $x_{t,\varepsilon}(\theta) = x(t + \varepsilon\theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$. L'EDO moyennisée s'écrit alors

$$\dot{y} = \overline{f}(y). \tag{3.9}$$

Commentaire 3.1.1. —

1. Notons que si $\phi \in \mathcal{C}_o$ est une fonction initiale, une solution du problème à valeur initiale associé à l'équation (3.1) doit vérifier

   $$x(\tau) = \phi(\tau), \quad \text{pour } \tau \in [-r, 0]$$

   qui devient, sous l'écriture (3.8)

   $$x(t) = \phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \text{pour } t \in [-\varepsilon r, 0].$$

2. C'est la longueur infinitésimale de l'intervalle constituant le passé d'une solution, ici l'intervalle $[-\varepsilon r, 0]$, avec ε allant vers zéro, qui motive le choix d'approximer l'EDFR (3.8) par l'EDO (3.9).

[1] Nous avons adopté la notation $\overline{f}$ pour la fonction moyenne définie sur $\mathbb{R}^d$ afin de la différencier de l'autre fonction moyenne f^o qui est, elle, définie sur $\mathcal{C}_o$. Cette fonction $\overline{f}$ exprime en fait la composition de fonctions dans le second membre de l'équation (3.2).

Nous allons nous mettre dans le cadre de l'ANS pour, dans un premier temps, énoncer puis montrer ce qui constitue l'outil des démonstration, à savoir le Lemme de stroboscopie. La formulation de ce dernier, rencontrée au chapitre 2, est suffisante dans son application pour les EDO rapidement oscillantes, mais elle ne permet pas de traiter les EDFR auxquelles nous nous intéressons dans cette thèse. Ceci motive notre objectif d'en proposer une formulation mieux adaptée en ce sens que son application, comme nous le verrons dans ce chapitre, s'étend au delà des EDO rapidement oscillantes. Elle permet de traiter le cas, plus général, des EDFR du type (3.8), c.-à-d. de manière équivalente, des EDFR mises sous la forme normale (3.1). Ensuite, dans un second temps, nous déduirons, sous des conditions les moins contraignantes possibles, les résultats de moyennisation comme conséquences de cette technique de stroboscopie.

Rappelons que dans ce travail de thèse nous allons être amenés à établir deux lemmes de stroboscopie :

- Le premier est énoncé et démontré dans ce chapitre, en page 34. Il concerne le cas où l'équation stroboscopique est une EDO. Nous appliquerons ce résultat pour moyenniser dans les EDFR du type (3.8).
- Le second lemme sera présenté et prouvé au chapitre 4, en page 54. Son application concernera la moyennisation dans les EDFR rapidement oscillantes et aura pour équation stroboscopique une EDFR.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, dorénavant nous ferons la distinction entre les deux lemmes de stroboscopie. Nous appellerons le premier le Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDO et le second le Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDFR.

Nous terminons cette introduction en soulignant que le paragraphe 3.3.1 sera dédié à l'étude du cas particulier des EDFR du type (3.8) à second membre presque périodique en sa première variable uniformément par rapport à la seconde variable prise dans des compacts, et sous l'hypothèse que les solutions des équations (3.8) et (3.9) soient définies sur le même intervalle fini de temps. Il motivera, en se référant à ce qui a été vu au chapitre 1, l'introduction de la condition de quasi-bornitude uniforme qui interviendra au paragraphe 3.3.2 dans le traitement du cas général.

3.2 Stroboscopie : cas où l'équation stroboscopique est une EDO

Soit $\overline{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et continue. Soient I une partie de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $x : I \to \mathbb{R}^d$ une fonction telle que $x(0) = x_0$, où $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est limité.

Afin d'établir le Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDO (théorème 3.2.4), nous allons commencer par montrer quelques résultats préliminaires.

3.2.1 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1. *[6, 49] — Soit $L > 0$ et standard tel que l'intervalle $[0, L]$ soit contenu dans I. On suppose que*

1. *La fonction x est limitée sur l'intervalle $[0, L]$.*
2. *Il existe une suite d'instants t_n, $n = 0 \dots N+1$, dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N \leq L < t_{N+1}$ et pour n dans $\{0, \dots, N\}$, $t_{n+1} \simeq t_n$, $x(t) \simeq x(t_n)$ pour tout t dans $[t_n, t_{n+1}]$ et $\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \simeq \overline{f}(t_n, x(t_n))$.*

Alors, la fonction standard $y : [0, L] \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$y(t) = {}^o\big(x(t)\big), \text{ si } t \in [0, L],\ t \text{ standard}$$

est solution du problème à valeur initiale

$$\dot{y} = \overline{f}(t, y), \quad y(0) = {}^o(x_0) \tag{3.10}$$

et vérifie l'approximation

$$\forall t \in [0, L] \quad x(t) \simeq y(t). \tag{3.11}$$

Remarque 3.2.1. —

1. La fonction y ainsi définie est l'ombre de la restriction de la fonction x à l'intervalle $[0, L]$.
2. La conclusion du lemme 3.2.1 reste vraie si l'hypothèse 2 n'est vérifiée que sur un intervalle $[\eta, L'] \subset [0, L]$ où $\eta \simeq 0$ et $L' \simeq L$. Nous avons dans ce cas $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t presque standard dans $[\eta, L']$. (Nous aurons besoin de cette remarque dans la preuve du théorème 3.3.5).

Démonstration du lemme 3.2.1. — Elle se fait en deux étapes.

1ère étape : On vérifie que la fonction y est continue sur l'intervalle $[0, L]$. On en déduira l'approximation (3.11). — La fonction x étant limitée sur $[0, L]$, il suffit de montrer qu'elle y est S-continue pour déduire que la fonction y, en tant que son ombre, est continue sur le même intervalle.

Soient $t, t' \in [0, L]$ tels que $t \leq t'$ et $t \simeq t'$. Il existe alors $p, q \in \{0, \dots, N\}$ tels que $t \in [t_p, t_{p+1}]$ et $t' \in [t_q, t_{q+1}]$ avec $t_p \simeq t_q$. Nous avons

$$\begin{aligned} x(t_q) - x(t_p) &= \sum_{n=p}^{q-1} (x(t_{n+1}) - x(t_n)) \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} (t_{n+1} - t_n)[\overline{f}(t_n, x(t_n)) + \eta_n] \end{aligned} \tag{3.12}$$

où $\eta_n \simeq 0$ pour tout $n \in \{p, \dots, q-1\}$. Posons $\eta = \max\{|\eta_n| : n = p, \dots, q-1\}$ et $m = \max\{|\overline{f}(t_n, x(t_n))| : n = p, \dots, q-1\}$. Nous avons $\eta \simeq 0$ et $m = |\overline{f}(t_s, x(t_s))|$ pour un certain $s \in \{p, \dots, q-1\}$. Comme $\overline{f}$ est standard et continue et $(t_s, x(t_s))$ est limité et donc presque standard, $\overline{f}(t_s, x(t_s))$ est presque standard et donc limité. Il en est de même pour m. D'où, moyennant l'expression (3.12), il vient que

$$|x(t') - x(t)| \simeq |x(t_q) - x(t_p)| \leq (m + \eta)(t_q - t_p) \simeq 0.$$

Ceci prouve que la fonction x est S-continue sur l'intervalle $[0, L]$. Nous avons, en outre, pour $t \in [0, L]$

$$y(t) \simeq y(^o t) \simeq x(^o t) \simeq x(t),$$

ce qui achève la première étape de la preuve.

2ème étape : On montre que, pour tout $t \in [0, L]$, la fonction y satisfait l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = {}^o(x_0) + \int_0^t \overline{f}(s, y(s))ds. \quad —$$

Soient $t \in [0, L]$ et standard, et $n \in \{0, \ldots, N\}$ tel que $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Nous avons

$$\begin{aligned} y(t) - {}^o(x_0) &\simeq x(t_n) - x(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x(t_{k+1}) - x(t_k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)[\overline{f}(t_k, x(t_k)) + \eta_k] \end{aligned} \tag{3.13}$$

où $\eta_k \simeq 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Comme, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x(t_k) \simeq y(t_k)$ avec $x(t_k)$ limité et donc presque standard, et que $\overline{f}$ est standard et continue, l'estimation (3.13) donne

$$\begin{aligned} y(t) - {}^o(x_0) &\simeq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)[\overline{f}(t_k, y(t_k)) + \beta_k + \eta_k] \\ &\simeq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)\overline{f}(t_k, y(t_k)) \\ &\simeq \int_0^t \overline{f}(s, y(s))ds \end{aligned}$$

où $\beta_k \simeq 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Ainsi, pour tout standard $t \in [0, L]$, nous avons

$$y(t) \simeq {}^o(x_0) + \int_0^t \overline{f}(s, y(s))ds \tag{3.14}$$

et par suite

$$y(t) = {}^o(x_0) + \int_0^t \overline{f}(s, y(s))ds \tag{3.15}$$

puisque les deux membres de l'approximation (3.14) sont standard. Par transfert on déduit finalement que l'égalité (3.15) est vraie pour tout $t \in [0, L]$. Ceci achève la preuve du lemme 3.2.1. ■

Remarque 3.2.2. — De la preuve du lemme 3.2.1, il est facile de voir que si on remplace $L > 0$ et standard par $L > 0$ et limité dans les hypothèses du lemme, la S-continuité de la fonction x est encore vérifiée sur l'intervalle $[0, L]$.

Le lemme 3.2.2 ci-après est une sorte de généralisation du lemme 3.2.1. Il intervient dans la preuve du lemme 3.2.3 qui le suit.

Lemme 3.2.2. *[49] — Soit $L > 0$ et standard tel que l'intervalle $[0, L]$ soit contenu dans I. On suppose que*

1. *La fonction x est limitée sur l'intervalle $[0, L]$.*
2. *Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout t dans $[0, L]$ il existe t' dans I tel que $\mu < t' - t \simeq 0$, $[t, t'] \subset I$, $x(s) \simeq x(t)$ pour tout s dans $[t, t']$ et $\dfrac{x(t') - x(t)}{t' - t} \simeq \overline{f}(t, x(t))$.*

Alors, la fonction standard $y : [0, L] \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$y(t) = {}^o\big(x(t)\big), \text{ si } t \in [0, L], \ t \text{ standard}$$

est solution du problème à valeur initiale

$$\dot{y} = \overline{f}(t, y), \quad y(0) = {}^o(x_0) \tag{3.16}$$

et vérifie l'approximation : $\forall t \in [0, L] \quad x(t) \simeq y(t)$.

Démonstration. — Considérons l'ensemble $A_\mu = \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in [0, L] \ \exists t' \in I : \mathcal{P}_\mu(t, t', \lambda)\}$ où

$$\mathcal{P}_\mu(t, t', \lambda) \equiv \mu < t' - t < \lambda, \ [t, t'] \subset I, \ |x(s) - x(t)| < \lambda \ \forall s \in [t, t'] \text{ et}$$
$$\left| \frac{x(t') - x(t)}{t' - t} - \overline{f}(t, x(t)) \right| < \lambda.$$

En vertu de l'hypothèse 2, nous avons : $\lambda \in A_\mu$ pour tout $\lambda > 0$ et appréciable. Par permanence, il existe λ_0 infinitesimal appartenant à A_μ, c.-à-d. il existe $0 < \lambda_0 \simeq 0$ tel que pour tout $t \in [0, L]$ il existe $t' \in I$ tel que $\mathcal{P}_\mu(t, t', \lambda_0)$. L'axiome du choix permet alors d'affirmer l'existence d'une fonction $c : [0, L] \to I$ telle que $c(t) = t'$, c'est-à-dire qu'on a $\mathcal{P}_\mu(t, c(t), \lambda_0)$ pour tout $t \in [0, L]$. Puisque $c(t) - t > \mu$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ et une suite finie d'instants t_n, $n = 0, \ldots, N + 1$, tels que $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N \leq L < t_{N+1}$ et $t_{n+1} = c(t_n)$. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 3.2.1 pour achever la preuve du lemme 3.2.2. ■

La preuve du Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDO repose sur le lemme 3.2.3 qui suit :

Lemme 3.2.3. *[49] — On suppose que le nombre réel L dans le lemme 3.2.2 est limité (non nécessairement standard). On suppose en outre que le problème à valeur initiale (3.16) admet une solution unique. Soient y cette solution et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Alors, l'intervalle $[0, L]$ est contenu dans J et la solution y vérifie $y(t) \simeq x(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Démonstration. — Le cas où L est infinitésimal est évident. Supposons que L est non infinitésimal. En vertu du lemme 3.2.2, pour tout standard a tel que $0 < a \leq L$, la solution y est définie sur $[0, a]$ et vérifie $y(t) \simeq x(t)$ pour tout $t \in [0, a]$. Par permanence, la propriété reste vraie pour un certain $a \simeq L$. Dans le cas où $\omega = \infty$, a est presque standard dans J. Donc $L \in J$ et, par continuité de y, $y(t) \simeq y(a)$ pour tout $t \in [a, L]$. Dans le cas où ω est un réel standard, comme conséquence[2] de la propriété de prolongeabilité des solutions d'une EDO, y est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$, étant définie et limitée en a. De même que précédemment, par continuité, nous avons $y(t) \simeq y(a)$ pour tout $t \in [a, L]$. Par ailleurs, en vertu de la remarque 3.2.2, nous avons $x(t) \simeq x(a)$ pour tout $t \in [a, L]$. Par suite, l'approximation $x(t) \simeq y(t)$, $t \in [0, L]$, est bien vérifiée. ■

3.2.2 Lemme de stroboscopie

La différence entre le résultat qui va suivre et celui du théorème 2.2.1, page 20, réside dans le fait qu'ici on tient compte du passé de la fonction x étudiée au moyen de la stroboscopie.

En effet, comme nous le verrons plus loin, dans le contexte des EDFR se contenter de faire une observation ponctuelle d'une solution x est insuffisant. Ceci est dû au fait que le comportement présent de x dépend aussi de son comportement passé.

Théorème 3.2.4 (Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDO). — *On suppose que*

1. *Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout t dans I, si $t \geq 0$ et limité, $[0, t]$ est contenu dans I, et x est limitée sur $[0, t]$ alors il existe t' dans I tel que $\mu < t' - t \simeq 0$, $[t, t'] \subset I$, $x(s) \simeq x(t)$ pour tout s dans $[t, t']$ et $\dfrac{x(t') - x(t)}{t' - t} \simeq \overline{f}(t, x(t))$.*
2. *Le problème à valeur initiale*
$$\dot{y} = \overline{f}(t, y), \quad y(0) = {}^o(x_0), \tag{3.17}$$
admet une solution unique, notée y. Soit $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence.

Alors, pour tout $L > 0$ et standard appartenant à J, la fonction x est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.

Comme au chapitre précédent, nous adoptons les notations et appellations suivantes :

Notation 3.2.1. —

1. L'hypothèse 1 est appelée la propriété stroboscopique.
2. Les moments t et t' sont les instants d'observation de la stroboscopie.
3. L'équation associée au problème (3.17) est l'équation stroboscopique (ES).

Remarque 3.2.3. — La remarque 2.2.1 et le commentaire 2.2.1 en page 20 restent valables pour le résultat du théorème ci-dessus.

Démonstration du théorème 3.2.4. — Soit $L \in J$ avec $L > 0$ et standard, et soit K un voisinage tubulaire, de rayon non nul et standard, autour de la trajectoire de y sur l'intervalle $[0, L]$. Soit A l'ensemble défini par $A = \{L_1 \in [0, L] \ / \ [0, L_1] \subset I \text{ et } x([0, L_1]) \subset K\}$. L'ensemble A est non vide car $0 \in A$, et est majoré par L. Soit $L_0 = \sup A$. Il existe alors $L_1 \in A$ tel que

[2] En effet, si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction standard et continue et si y est une solution maximale standard de l'EDO $\dot{y} = f(t, y)$, de demi-intervalle maximal $J = [t_0, c[$, avec $c > 0$ (et standard), alors pour t infiniment proche de c, $y(t)$ est infiniment grand. Ce résultat exprime le fait que lorsque t tend vers c, $y(t)$ quitte tout compact de $\mathbb{R}^d$. Par contraposition, si la solution y est définie et limitée en a, alors a est presque standard dans J. Par suite, pour tout L infiniment proche de a, y est définie sur l'intervalle $[0, L]$.

$L_0 - \mu < L_1 \leq L_0$. Cependant $x([0, L_1]) \subset K$ entraîne que x est limitée sur $[0, L_1]$. En vertu du lemme 3.2.3, nous avons $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$. D'après l'hypothèse 1, il existe $L_1' > L_1 + \mu$ tel que $[L_1, L_1'] \subset I$ et $x(t) \simeq (x(L_1) \simeq y(L_1) \simeq)\ y(t)$ pour tout $t \in [L_1, L_1']$. Supposons que $L_1' \leq L$. Alors $[0, L_1'] \subset I$ et $x([0, L_1']) \subset K$ entraînent que $L_1' \in A$, ce qui est absurde puisque $L_1' > L_0$. Ainsi $L_1' > L$. C'est-à-dire que, pour chaque $L > 0$ et standard dans J, nous avons $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L]$. Ceci termine la preuve du théorème. ■

3.3 Moyennisation dans les EDFR mises sous la forme normale

Pour les EDO rapidement oscillantes, qui correspondent aux EDFR du type (3.8) avec un retard nul, il est clair que la nouvelle formulation du Lemme de stroboscopie permet de retrouver les résultats de moyennisation élaborés au chapitre 2. Mais il est clair aussi que la technique de stroboscopie originale est déjà suffisante pour montrer ces résultats. Ceci nous amène à ne considérer dans ce qui va suivre que les EDFR du type (3.8) avec un retard non nul.

Ainsi, nous supposons que $r > 0$. Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction donnée. Nous rappelons que l'objectif de la méthode de moyennisation est l'établissement d'une approximation, sur des intervalles finis du temps positif, du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(\dfrac{t}{\varepsilon}, x_{t,\varepsilon}\right), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right), & t \in [-\varepsilon r, 0] \end{cases} \tag{3.18}$$

où, pour $t \geq 0$, $x_{t,\varepsilon}(\theta) = x(t + \varepsilon\theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$, par le problème moyennisé

$$\dot{y} = \overline{f}(y), \qquad y(0) = \phi(0) \tag{3.19}$$

où $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est la fonction moyenne de f qui sera définie plus bas.

Nous allons, comme indiqué dans l'introduction, commencer par étudier le cas que nous convenons de désigner par cas de la presque périodicité uniforme, sous l'hypothèse que les solutions des problèmes (3.18) et (3.19) soient définies sur le même intervalle fini de temps. Nous y trouverons, en se référant au paragraphe 1.2.2, page 12, la motivation pour introduire une des hypothèses (la condition de quasi-bornitude uniforme) qui interviendra dans le cas général qui sera étudié ensuite.

3.3.1 Cas de la presque périodicité uniforme

Nous énumérons ci-après les hypothèses sous lesquelles le théorème 3.3.4 sera montré.

(H1) La fonction f est continue.

(H2) La continuité de $f = f(t, x)$ en la variable $x \in \mathcal{C}_o$ est uniforme par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$.

(H3) La fonction $f = f(t,x)$ est[3] presque périodique en $t \in \mathbb{R}_+$, uniformément par rapport à x dans les compacts de $\mathcal{C}_o$.

Propriété 3.3.1. — La fonction f étant presque périodique en t, la limite suivante

$$\overline{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_s^{s+T} f(t,\tilde{x})dt, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

existe uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}_+$, où $\tilde{x}(\theta) = x$ pour $\theta \in [-r,0]$.

(H4) Le problème à valeur initiale (3.19) admet une solution unique.

Remarque 3.3.1. —

1. L'hypothèse (H3) est satisfaite par toute fonction $f = f(t,x)$ périodique en t. Dans le cas général des fonctions presque périodiques, elle est souvent prise comme hypothèse dans les problèmes de moyennisation concernant le problème (3.18), car elle correspond à beaucoup de cas d'application (voir par exemple [17, 18, 32]).
2. Pour la preuve de la propriété 3.3.1 nous renvoyons à l'article de T. Sari, pages 131-141, dans [10] et à l'ouvrage [4].
3. Comme nous allons le voir dans le lemme 3.3.1 plus bas, les hypothèses (H1), (H2) et la propriété 3.3.1 induisent la continuité de la fonction $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ donnée dans la propriété citée. En vertu de quoi l'EDO $\dot{y} = \overline{f}(y)$ considérée dans l'hypothèse (H4) est bien définie.

Lemmes préliminaires

En se mettant dans le cadre de l'ANS, nous allons montrer quelques résultats préliminaires qui interviendront dans la preuve de la version externe (théorème 3.3.5) du résultat du théorème 3.3.4.

On suppose que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ dans le problème (3.18) est standard. Les écritures externes des conditions (H1), (H2) ainsi que de la propriété 3.3.1 sont données dans l'ordre par :

(H1') $\forall^{st} t \in \mathbb{R}_+\ \forall^{st} x \in \mathcal{C}_o\ \forall t' \in \mathbb{R}_+\ \forall x' \in \mathcal{C}_o\ \big(t' \simeq t,\ x' \simeq x \ \Rightarrow\ f(t',x') \simeq f(t,x)\big)$.

(H2') $\forall^{st} x \in \mathcal{C}_o\ \forall x' \in \mathcal{C}_o\ \forall t \in \mathbb{R}_+\ \big(x' \simeq x \ \Rightarrow\ f(t,x') \simeq f(t,x)\big)$.

Propriété 3.3.2. — Il existe $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard telle que

$$\forall^{st} x \in \mathbb{R}^d\ \forall s \in \mathbb{R}_+\ \forall R \simeq +\infty \quad \overline{f}(x) \simeq \frac{1}{R}\int_s^{s+R} f(t,\tilde{x})dt.$$

[3] Par définition (voir [19], page 322), f est presque périodique en $t \in \mathbb{R}_+$, uniformément par rapport à x dans les compacts de $\mathcal{C}_o$, si pour tout compact K de $\mathcal{C}_o$ et tout $\delta > 0$, il existe $l = l(\delta) > 0$ tel que, dans tout intervalle de longueur l, il existe τ tel que $|f(t,x) - f(t-\tau,x)| < \delta$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in K$.

Nous allons montrer les lemmes suivants :

Lemme 3.3.1. — *On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Alors, la fonction* $\overline{f}$ *dans la propriété 3.3.1 est continue et vérifie*

$$\overline{f}(x) \simeq \frac{1}{R}\int_s^{s+R} f(t,\tilde{x})dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ *et limité, tout* $s \in \mathbb{R}_+$ *et tout* $R \simeq +\infty$.

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et limité. Il est alors presque standard. Soit ${}^o x$ son ombre dans $\mathbb{R}^d$. Soit $s \in \mathbb{R}_+$. Soit $\nu > 0$ et infinitésimal. La propriété 3.3.1 entraîne l'existence d'un $R_0 > 0$ tel que, pour $R > R_0$

$$\left|\overline{f}(x) - \frac{1}{R}\int_s^{s+R} f(t,\tilde{x})dt\right| < \nu.$$

D'où, pour un certain $R \simeq +\infty$, nous avons

$$\overline{f}(x) \simeq \frac{1}{R}\int_s^{s+R} f(t,\tilde{x})dt.$$

Or $x \simeq {}^o x$ avec ${}^o x$ standard dans $\mathbb{R}^d$ entraîne que $\tilde{x} \simeq {}^o\tilde{x}$ avec ${}^o\tilde{x}$ standard dans $\mathcal{C}_o$. Alors, moyennant l'hypothèse (H2'), nous avons $f(t,\tilde{x}) \simeq f(t,{}^o\tilde{x})$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Par suite

$$\overline{f}(x) \simeq \frac{1}{R}\int_s^{s+R} f(t,{}^o\tilde{x})dt.$$

De la propriété 3.3.2, nous déduisons que $\overline{f}(x) \simeq \overline{f}({}^o x)$. Ainsi $\overline{f}$ est continue. En outre, pour $R \simeq +\infty$, nous avons

$$\overline{f}(x) \simeq \overline{f}({}^o x) \simeq \frac{1}{R}\int_s^{s+R} f(t,{}^o\tilde{x})dt \simeq \frac{1}{R}\int_s^{s+R} f(t,\tilde{x})dt.$$

Ceci termine la preuve du lemme 3.3.1. ■

Le résultat qui suit joue un rôle important dans la preuve du théorème 3.3.5. En effet, il permet de déterminer le pas, ici indépendant du temps et donc constant, entre les instants d'observation de la technique de stroboscopie qui sera appliquée pour montrer le résultat du théorème 3.3.5.

Lemme 3.3.2. — *On suppose que* f *vérifie les hypothèses (H1)-(H3). Soit* $\varepsilon, \alpha > 0$ *et infinitésimaux tels que* $\varepsilon/\alpha \simeq 0$. *Alors*

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \simeq T.\overline{f}(x) \tag{3.20}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ *et limité, tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et tout* $T \in [0,1]$.

Démonstration. — Soient $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$ et limité, et $T \in [0,1]$.
1er Cas : T est tel que $T\alpha/\varepsilon \simeq \infty$. — En vertu du lemme 3.3.1, nous avons

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \simeq T.\overline{f}(x).$$

2ème Cas : T est tel que $T\alpha/\varepsilon$ est limité. — Après transformation du membre de gauche de l'approximation (3.20), on applique le lemme 3.3.1 pour obtenir

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau =$$
$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau - \frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon+(1-T)\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \simeq$$
$$\overline{f}(x) - (1-T)\overline{f}(x) = T.\overline{f}(x).$$

■

Remarque 3.3.2. — Les résultats énoncés dans les lemmes 3.3.1 et 3.3.2 sont vrais aussi bien pour $r > 0$ que pour $r = 0$.

Outre les résultats des lemmes ci-dessus, la preuve du théorème 3.3.5 se base sur une propriété fondamentale des fonctions continues vérifiant l'hypothèse (H3), en l'occurrence :

Lemme 3.3.3. — *On suppose que les hypothèses (H1) et (H3) sont satisfaites par la fonction f. Alors la propriété suivante est vérifiée :*

$$\begin{gathered}\forall^{st} K \text{ compact dans } \mathcal{C}_o \ \exists^{st} M > 0 \ \exists^{st} W \text{ voisinage de } K \text{ dans } \mathcal{C}_o \\ \text{tels que } \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in W \ |f(t,x)| < M.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Remarque 3.3.3. — Les voisinages W dans la propriété (3.21) peuvent être choisis tel que

$$W = \{x + \psi : x \in K, \psi \in B_\rho\}, \text{ où } B_\rho = \{\psi \in \mathcal{C}_o : |\psi| \leq \rho\}, \text{ avec } \rho > 0 \text{ et standard.}$$

Démonstration du lemme 3.3.3. — Soit K un compact dans $\mathcal{C}_o$. De l'hypothèse (H3) on déduit que

$$\begin{gathered}\forall \delta > 0 \ \exists l = l(\delta) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \exists \tau : \ \tau \in [t-l,t] \text{ et} \\ \forall x \in K \ \ |f(t,x)| < |f(t-\tau,x)| + \delta.\end{gathered} \tag{3.22}$$

La fonction f étant continue et $[0,l] \times K$ un compact de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o$, il existe $C = C(l,K) > 0$ tel que $|f(t,x)| < C$, pour tout $t \in [0,l]$ et tout $x \in K$. Donc $[0,l] \times K \subset g^{-1}(]-C,C[)$, où $g : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}$ est la fonction composée définie par : $g(t,x) = |f(t,x)|$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathcal{C}_o$. Or $g^{-1}(]-C,C[)$ est un ouvert contenant $[0,l] \times K$, il existe $\rho = \rho(l,K) > 0$ tel que $[0,l] \times W \subset g^{-1}(]-C,C[)$, où $W = W(l,K) := \{x + \psi : x \in K, \psi \in B_\rho\}$ et $B_\rho = \{\psi \in \mathcal{C}_o : |\psi| \leq \rho\}$. Nous avons, f est bornée par C sur $[0,l] \times W$.

Revenons, à présent, à la formule (3.22). Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Comme $t - \tau \in [0, l]$ on a : $\forall x \in W$ $|f(t-\tau, x)| < C$. Par conséquent

$$\forall \delta > 0 \ \exists l = l(\delta) > 0 \ \exists C = C(l, K) > 0 \ \exists W = W(l, K) \text{ voisinage de } K \text{ dans } \mathcal{C}_o \text{ tels que}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in W \ |f(t, x)| < C + \delta.$$

Posons $\delta = 1$ et soient $l, C > 0$ fixés. Posons $M = C + 1$. Nous avons alors $|f(t, x)| < M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in W$.

Ainsi, nous venons de montrer la propriété suivante :

$$\forall K \text{ compact dans } \mathcal{C}_o \ \exists M = M(K) > 0 \ \exists W = W(K) \text{ voisinage de } K \text{ dans } \mathcal{C}_o \text{ tels que}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in W \ |f(t, x)| < M.$$

Finalement, la propriété (3.21) s'obtient par transfert. ■

Résultat de moyennisation

Nous sommes à présent en mesure d'établir un résultat de moyennisation dans le cas de la presque périodicité uniforme, sous l'hypothèse que les solutions des problèmes (3.18) et (3.19) soient définies sur le même intervalle fini de temps. Sa formulation externe (théorème 3.3.5) sera prouvée au moyen du lemme 3.2.1, en tenant compte du deuxième point de la remarque 3.2.1.

Théorème 3.3.4 (EI). — *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction vérifiant les conditions (H1)-(H4) de la page 35. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0$. Soient y la solution du problème (3.19) et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$ appartenant à J et tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ tel que, pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0]$, toute solution x du problème (3.18) qui est définie au moins sur l'intervalle $[-\varepsilon r, L]$, vérifie l'inégalité $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L]$.*

La traduction externe du résultat ci-dessus se lit :

Théorème 3.3.5 (EE). — *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les conditions (H1)-(H4) sont satisfaites. Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard. Soient y la solution du problème (3.19) et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitesimal. Alors, pour tout $L > 0$ et standard appartenant à J, toute solution x du problème (3.18) qui est définie au moins sur l'intervalle $[-\varepsilon r, L]$, est approximée par la solution y sur l'intervalle $[0, L]$, c.-à-d. x vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Démonstration du théorème 3.3.5. — Commençons par remarquer que, sur l'intervalle $[0, \varepsilon r]$ et grâce à la dépendance continue des solutions du problème (3.18) par rapport au paramètre ε, toute solution x de (3.18) satisfait

$$\forall t \in [0, \varepsilon r] \quad x(t) \simeq x(0). \tag{3.23}$$

Soient, à présent, $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale du problème (3.18) et $L > 0$ et standard tel que $L \in I \cap J$. Comme $\Gamma = \{y(t) : t \in [0, L]\}$ est un compact standard de $\mathbb{R}^d$, l'ensemble $K = \{\tilde{y}^t : t \in [0, L]\}$, où $\tilde{y}^t \in \mathcal{C}_o$ est tel que $\tilde{y}^t(\theta) = y(t)$, pour $\theta \in [-r, 0]$, est un compact standard de $\mathcal{C}_o$. En vertu du lemme 3.3.3, il existe $M > 0$ et standard, et W un voisinage standard de K que l'on peut choisir (d'après la remarque 3.3.3) de la forme $W = \{\tilde{y}^t + \psi : t \in [0, L], \psi \in B_\rho\}$, où $B_\rho = \{\psi \in \mathcal{C}_o : |\psi| \leq \rho\}$ avec $\rho > 0$ et standard, tels que : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in W \ |f(t, x)| < M$.

Dans ce qui va suivre, nous allons procéder en deux temps. D'abord nous vérifions que : tout $L_1 \in [\varepsilon r, L]$ et standard tel que $x_{t,\varepsilon} \in W$ pour tout $t \in [\varepsilon r, L_1]$, vérifie les conditions du lemme 3.2.1, en tenant compte du deuxième point de la remarque 3.2.1. Ceci permet de déduire, moyennant certaines propriétés que vérifient x et y, que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$. Ensuite, nous montrons que l'approximation s'étend à tout l'intervalle $[0, L]$.

1ère partie. — Soit $L_1 \in [\varepsilon r, L]$ et standard tel que $x_{t,\varepsilon} \in W$ pour tout $t \in [\varepsilon r, L_1]$. La solution x est alors limitée sur $[\varepsilon r, L_1]$. Comme $x(0) = \phi(0)$ est limité (et même standard), d'après (3.23), x est limitée sur $[0, \varepsilon r]$. Ainsi, x est limitée sur l'intervalle $[0, L_1]$ et donc l'hypothèse 1 du lemme 3.2.1 est vérifiée.

Avant de montrer que l'hypothèse 2 du lemme 3.2.1 en tenant compte du deuxième point de la remarque 3.2.1 est réalisée, remarquons que x est S-continue sur l'intervalle $[0, L_1]$. En effet, d'après (3.23), x est S-continue sur l'intervalle $[0, \varepsilon r]$ et si $t, t' \in [\varepsilon r, L_1]$ sont tels que $t \leq t'$ et $t \simeq t'$, alors

$$|x(t') - x(t)| \leq \int_t^{t'} \left| f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{\tau,\varepsilon}\right) \right| d\tau \leq M(t' - t) \simeq 0$$

puisque, pour $\tau \in [t, t'] \subset [\varepsilon r, L_1]$, $x_{\tau,\varepsilon} \in W$. .

Soit, à présent, α tel que $0 < \alpha \simeq 0$ et $\varepsilon/\alpha \simeq 0$. Posons $t_n = \varepsilon r + n\alpha$ pour $n \in \{0, \ldots, N+1\}$ où $N \in \mathbb{N}$ est tel que $t_N \leq L_1 - \alpha < t_{N+1}$. Nous allons montrer que la suite $\{t_n : n = 0, \ldots, N+1\}$ vérifie l'hypothèse 2 du lemme 3.2.1 en tenant compte du deuxième point de la remarque 3.2.1 (ici "η" $= \varepsilon r$ et "L'" $= L_1 - \alpha$).

Soit $n \in \{0, \ldots, N\}$. Comme $x(t_n)$ est presque standard car limité, $\tilde{x}^{t_n}$ est presque standard. En vertu du lemme 3.3.2, nous avons

$$\forall T \in [0, 1] \qquad \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_n/\varepsilon}^{t_n/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(t, \tilde{x}^{t_n}) dt \simeq T.\overline{f}(x(t_n)). \tag{3.24}$$

Considérons le changement de variables défini par

$$T = \frac{t - t_n}{\alpha} \quad \text{et} \quad X(\theta, T) = \frac{x_{t_n + \alpha T, \varepsilon}(\theta) - \tilde{x}^{t_n}(\theta)}{\alpha}, \ \theta \in [-r, 0], \ T \in [0, 1]. \tag{3.25}$$

Nous avons, pour $\theta = 0$ et $T \in [0, 1]$,

$$X(0, T) = \frac{x(t_n + \alpha T) - x(t_n)}{\alpha}. \tag{3.26}$$

L'équation obtenue en soumettant l'EDFR dans (3.18) au changement de variables (3.25) s'écrit

$$\frac{\partial X}{\partial T}(0, T) = f\left(\frac{t_n}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} T, \tilde{x}^{t_n} + \alpha X(\cdot, T)\right)$$

qui, après intégration, donne

$$X(0, T) = \int_0^T f\left(\frac{t_n}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} t, \tilde{x}^{t_n} + \alpha X(\cdot, t)\right) dt. \tag{3.27}$$

Notons que $\tilde{x}^{t_n} + \alpha X(\cdot, T) = x_{t_n+\alpha T,\varepsilon} \in W$ pour tout $T \in [0,1]$. De la S-continuité de x sur $[0, L_1]$, nous déduisons que

$$\forall \theta \in [-r, 0] \qquad \alpha X(\theta, T) = x_{t_n+\alpha T,\varepsilon}(\theta) - \tilde{x}^{t_n}(\theta) = x(t_n + \alpha T + \varepsilon\theta) - x(t_n) \simeq 0.$$

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse (H2') et l'approximation (3.24), nous obtenons

$$\begin{aligned} X(0,T) &\simeq \int_0^T f\left(\frac{t_n}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} t, \tilde{x}^{t_n}\right) dt \\ &= \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_n/\varepsilon}^{t_n/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(t, \tilde{x}^{t_n}) dt \simeq T.\overline{f}(x(t_n)). \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x(t_n + \alpha) - x(t_n)}{\alpha} = X(0,1) \simeq \overline{f}(x(t_n)).$$

Enfin, de la S-continuité de x sur $[0, L_1]$, nous avons : $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]\ \ x(t) \simeq x(t_n)$.

Ainsi, en vertu du lemme 3.2.1, du deuxième point de la remarque 3.2.1 ainsi que de l'hypothèse (H4), nous avons $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t presque standard dans $[\varepsilon r, L_1 - \alpha]$.

Si a_1 et a_2 sont standard et vérifient $\varepsilon r \leq a_1 < a_2 \leq L_1 - \alpha$, alors $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [a_1, a_2]$. Par permanence, cette propriété est vraie pour certains $a_1 \simeq \varepsilon r$ et $a_2 \simeq L_1 - \alpha$. D'autre part, en vertu de la S-continuité de x et de la continuité de y sur l'intervalle $[0, L_1]$, nous avons

$$\forall t \in [0, a_1] \qquad x(t) \simeq x(a_1) \simeq y(a_1) \simeq y(t)$$

et

$$\forall t \in [a_2, L_1] \qquad x(t) \simeq x(a_2) \simeq y(a_2) \simeq y(t).$$

Ceci permet de conclure quand à l'approximation de x par y sur tout l'intervalle $[0, L_1]$, c.-à-d. x est tel que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$.

2ème partie. — Il nous reste à montrer que L lui-même est tel que $x_{t,\varepsilon} \in W$ pour tout $t \in [\varepsilon r, L]$; ce qui achèvera la preuve du théorème.

Remarquons que $x_{\varepsilon r,\varepsilon} \simeq \tilde{y}^{\varepsilon r}$ car, d'après l'approximation (3.23) et la continuité de y, nous avons

$$\forall \theta \in [-r, 0] \qquad x_{\varepsilon r,\varepsilon}(\theta) = x(\varepsilon r + \varepsilon\theta) \simeq x(0) = y(0) \simeq y(\varepsilon r) = \tilde{y}^{\varepsilon r}(\theta)$$

et donc $x_{\varepsilon r,\varepsilon} \in W$.

Supposons, à présent et par l'absurde, qu'il existe $t_1 \in]\varepsilon r, L]$ tel que $x_{t_1,\varepsilon} \notin W$. Ceci entraîne que $|x_{t_1,\varepsilon} - \tilde{y}^t| > \rho$ pour tout $t \in [0, L]$. En particulier, nous avons $|x_{t_1,\varepsilon} - \tilde{y}^{t_1}| > \rho$. Puisque les fonctions $t \mapsto x_{t,\varepsilon}$ et $t \mapsto \tilde{y}^t$ sont continues sur $[0, L]$, $x_{\varepsilon r,\varepsilon} \simeq \tilde{y}^{\varepsilon r}$ et $|x_{t_1,\varepsilon} - \tilde{y}^{t_1}| > \rho$, il existe $t_2, t_3 \in]\varepsilon r, t_1[$ tels que

$$|x_{t_2,\varepsilon} - \tilde{y}^{t_2}| = \rho \tag{3.28}$$

et $|x_{t_3,\varepsilon} - \tilde{y}^{t_3}| = \rho/2$. Nous supposons que t_2 est le premier instant vérifiant (3.28). Il en découle que $x_{t,\varepsilon} \in W$ pour tout $t \in [\varepsilon r, t_2]$. Ceci permet (de la même manière que plus haut) de vérifier que x est S-continue sur l'intervalle $[0, t_2]$. Nous avons alors en particulier $|x_{L_1,\varepsilon} - \tilde{y}^{L_1}| \simeq \rho/2$, où $\varepsilon r \leq L_1 = {}^o t_3 \leq t_2$. Or, le fait que $x_{t,\varepsilon} \in W$ pour tout $t \in [\varepsilon r, L_1] \subset [\varepsilon r, t_2]$, entraîne, d'après le résultat de la première partie ci-dessus, que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$ et donc $x_{L_1,\varepsilon} \simeq \tilde{y}^{L_1}$ en tenant compte du fait que $L_1 \geq \varepsilon r$; ce qui est absurde. ■

Commentaire 3.3.1. — Le théorème 3.3.5 exige que les solutions x et y du problème (3.18) et du problème moyennisé (3.19), respectivement, soient définies sur le même intervalle $[0, L]$, où $L > 0$ est standard. Comme dans le cas des EDO (voir théorème 2.3.2, page 22), on voudrait montrer, outre l'approximation de la solution x par la solution y, que x est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ sur lequel y est définie. Pour obtenir ce résultat, on impose à la fonction f la condition de quasi-bornitude[4] uniforme. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Avant de clore ce commentaire, soulignons que la propriété (3.21) est intervenue, dans la preuve du théorème 3.3.5, pour obtenir le résultat suivant :

$$\exists W \text{ voisinage borné de } \{y_t : t \in [0, L]\} \text{ dans } \mathcal{C}_o \ \exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in W \ |f(t, x)| < M$$

alors que la condition de quasi-bornitude uniforme est par définition (voir la définition 3.3.1, explicitée dans le point 1 de la remarque 3.3.4) :

$$\forall W \text{ une partie bornée de } \mathcal{C}_o \ \exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in W \ |f(t, x)| < M.$$

Notons enfin que sous cette condition de quasi-bornitude uniforme, il n'est plus indispensable que f soit presque périodique en sa première variable. Il suffit qu'elle admette une moyenne au sens plus général donné par l'hypothèse (H4) au paragraphe 3.3.2 qui suit.

3.3.2 Cas général

Soient $\phi \in \mathcal{C}_o$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ les fonctions associées au problème (3.18). Les conditions qui seront imposées dans ce paragraphe à ϕ et f sont les suivantes :

- (H1) La fonction f est continue.
- (H2) La continuité de $f = f(t, x)$ en la variable $x \in \mathcal{C}_o$ est uniforme par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$.
- (H3) L'image par la fonction f de $\mathbb{R}_+ \times$(un ensemble borné de $\mathcal{C}_o$) est un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$.
- (H4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la limite

  $$\overline{f}(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \tilde{x}) dt$$

  existe, où $\tilde{x}(\theta) = x$ pour $\theta \in [-r, 0]$.
- (H5) Le problème moyennisé (3.19) admet une solution unique.

Définition 3.3.1. — On dit d'une fonction f définie sur tout $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant l'hypothèse (H3) qu'elle est quasi-bornée en $x \in \mathcal{C}_o$ uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$.

[4]Se référer au paragraphe 1.2.2, page 12, pour la notion de quasi-bornitude et son rôle dans le prolongement de solutions d'EDFR.

Remarque 3.3.4. —

1. L'hypothèse (H3) s'écrit aussi :
$$\forall W \subset \mathcal{C}_o \text{ et borné } \exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in W \ |f(t,x)| < M.$$
2. Les hypothèses (H1), (H2) et (H4) induisent (lemme 3.3.6) la continuité de la fonction $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ donnée dans l'hypothèse (H4) ; ce qui rend l'EDO $\dot{y} = \overline{f}(y)$ considérée dans l'hypothèse (H5) bien définie.

Lemmes préliminaires

Mettons-nous dans le cadre de l'ANS. Afin d'établir le résultat du théorème 3.3.9 dans sa version externe (théorème 3.3.10), nous allons montrer quelques résultats préliminaires.

On suppose que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ est standard. Les traductions externes des hypothèses (H1)-(H4) sont respectivement :

(H1') $\forall^{st} t \in \mathbb{R}_+ \ \forall^{st} x \in \mathcal{C}_o \ \forall t' \in \mathbb{R}_+ \ \forall x' \in \mathcal{C}_o \ \big(t' \simeq t, \ x' \simeq x \ \Rightarrow \ f(t',x') \simeq f(t,x)\big)$.

(H2') $\forall^{st} x \in \mathcal{C}_o \ \forall x' \in \mathcal{C}_o \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \big(x' \simeq x \ \Rightarrow \ f(t,x') \simeq f(t,x)\big)$.

(H3') $\forall x \in \mathcal{C}_o$ et limité $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t,x)$ est limité.

(H4') $\exists^{st} \overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que
$$\forall^{st} x \in \mathbb{R}^d \ \forall R \simeq +\infty \ \ \overline{f}(x) \simeq \frac{1}{R} \int_0^R f(t,\tilde{x})dt.$$

Les résultats des lemmes 3.3.6 et 3.3.7 ci-après sont vrais pour $r \geq 0$. Ceux du lemme 3.3.8 n'ont d'intérêt pour notre propos que pour $r > 0$.

Lemme 3.3.6. — *On suppose que les hypothèses (H1), (H2) et (H4) sont satisfaites. Alors, la fonction $\overline{f}$ dans (H4) est continue et vérifie*
$$\overline{f}(x) \simeq \frac{1}{R} \int_0^R f(t,\tilde{x})dt$$
pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et limité, et tout $R \simeq +\infty$.

Démonstration. — Elle est analogue à celle du lemme 3.3.1 et donc omise. ■

Le résultat suivant permet de déterminer le pas, en fonction du temps, entre les instants d'observation de la technique de stroboscopie. Cette dernière sera utilisée pour prouver le résultat du théorème 3.3.10.

Lemme 3.3.7. *[52]* — *On suppose que f vérifie les hypothèses (H1), (H2) et (H4). Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Alors, pour tout $t \geq 0$ et limité, et tout $x \in \mathbb{R}^d$ et limité, il existe $\alpha = \alpha(\varepsilon, t, x)$ tel que $0 < \alpha \simeq 0$, $\varepsilon/\alpha \simeq 0$ et*
$$\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \simeq T.\overline{f}(x) \tag{3.29}$$
pour tout T dans $[0,1]$.

Démonstration. — Soient $t \geq 0$ et limité, x limité dans $\mathbb{R}^d$ et $T \in [0,1]$.

1er cas : t/ε est limité. — Soit $\alpha > 0$ tel que $\varepsilon/\alpha \simeq 0$. Nous allons distinguer les deux situations suivantes :

1. T est tel que $T\alpha/\varepsilon$ est limité. — Dans ce cas $T \simeq 0$ et

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \simeq 0 \simeq T.\overline{f}(x).$$

2. T est tel que $T\alpha/\varepsilon \simeq +\infty$. — Réécrivons le membre de gauche de l'approximation (3.29) de la manière suivante :

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau =$$

$$\left(T+\frac{t}{\alpha}\right)\frac{1}{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon}\int_{0}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau - \frac{\varepsilon}{\alpha}\int_0^{t/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau.$$

D'après le lemme 3.3.6, nous avons

$$\frac{1}{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon}\int_{0}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \simeq \overline{f}(x)$$

et en tenant compte du fait que

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_0^{t/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \simeq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{t}{\alpha} \simeq 0$$

nous aboutissons à

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \simeq T.\overline{f}(x).$$

Finalement, l'approximation (3.29) est vérifiée, dans les deux cas, pour tout $\alpha > 0$ tel que $\varepsilon/\alpha \simeq 0$. Il suffit de prendre α tel que $0 < \alpha \simeq 0$ et $\varepsilon/\alpha \simeq 0$ pour rendre la conclusion du lemme vraie.

2ème cas : $t/\varepsilon \simeq +\infty$. — Soit $\alpha > 0$. Nous réécrivons cette fois-ci le membre de gauche de l'approximation (3.29) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau &= T\frac{1}{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon}\int_{0}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau \\ &+\frac{t}{\alpha}\left(\frac{1}{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon}\int_{0}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau - \frac{1}{t/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau\right).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Posons

$$\eta(\alpha) = \frac{1}{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon}\int_{0}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau - \overline{f}(x).$$

En vertu du lemme 3.3.6, nous avons $\eta(\alpha) \simeq 0$ pour tout $\alpha \geq 0$. L'expression (3.30) s'écrit en fonction de η et de $\overline{f}$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,\tilde{x})d\tau = T\overline{f}(x) + \left(T\eta(\alpha) + \frac{t}{\alpha}[\eta(\alpha)-\eta(0)]\right).$$

La quantité $T\eta(\alpha) + \dfrac{t}{\alpha}[\eta(\alpha)-\eta(0)]$ est infinitésimale pour tout $0 < \alpha \not\simeq 0$. Par permanence, cette propriété continue à être vraie jusqu'à un certain $0 < \alpha \simeq 0$. En choisissant ce dernier tel que $\varepsilon/\alpha \simeq 0$ la conclusion du lemme est alors vérifiée. ■

Le résultat du lemme 3.3.8 ci-après est fondamental en ce sens qu'il assure, sous l'hypothèse (H3), à toute solution de l'équation originale (3.8), d'être prolongeable tout en admettant une ombre tant qu'elle reste limitée.

Lemme 3.3.8. — *Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On suppose que*

(S-QB) *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in \mathcal{C}_o$, si t et x sont limités alors $F(t,x)$ est limité.*[5]

Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard, et soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_{t,\varepsilon}), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right), & t \in [-\varepsilon r, 0]. \end{cases} \tag{3.31}$$

Soit t_0 dans I tel que $t_0 \geq 0$ et limité, et x est limitée sur l'intervalle $[0,t_0]$. Alors, la fonction x est

1. *S-continue sur l'intervalle $[0,t_0]$.*
2. *définie et limitée pour tout $t \geq t_0$, t dans le halo de t_0.*

Démonstration. —

1. Soient t et $t' \in [0,t_0]$ tels que $t \leq t'$ et $t \simeq t'$. En utilisant l'équation intégrale associée au problème (3.31) nous obtenons

$$|x(t') - x(t)| \leq \int_t^{t'} |F(s,x_{s,\varepsilon})|ds \leq (t'-t)\sup_{s\in[t,t']}|F(s,x_{s,\varepsilon})|.$$

Puisque $x_{s,\varepsilon}(\theta) = x(s+\varepsilon\theta)$ est limité pour tout $\theta \in [-r,0]$ et tout $s \in [t,t']$, $x_{s,\varepsilon}$ est limitée pour tout $s \in [t,t']$. Moyennant l'hypothèse (S-QB), nous déduisons que $\sup_{s\in[t,t']}|F(s,x_{s,\varepsilon})|$ est limité, et par suite nous avons bien $x(t') \simeq x(t)$. Ceci achève de prouver que x est S-continue sur l'intervalle $[0,t_0]$.

2. Posons $I = [-\varepsilon r, b[$, $0 < b \leq \infty$.

1ère partie. — Supposons par contre que la première partie de la conclusion du point 2 du lemme soit fausse, ce qui entraîne que $b \simeq t_0$. Étudions alors chacun des deux cas suivants :

[5] *Nous dirons que F est S-quasi-bornée. Pour F standard, cela équivaut à la définition classique de la quasi-bornitude (Voir définition 1.2.8 et proposition 1.2.6, page 13).*

1er cas : Pour tout $t \in [t_0, b[$, $x(t)$ est limité. — Nous avons, d'une part, x est limitée sur l'intervalle $[-\varepsilon r, 0]$ car $x([-\varepsilon r, 0]) = \phi([-r, 0])$ avec ϕ standard et continue. D'autre part, x est limitée sur l'intervalle $[0, t_0]$ par hypothèse. On en déduit que x est limitée sur l'intervalle $[-\varepsilon r, b[$ et donc $x_{t,\varepsilon}$ l'est aussi pour tout $t \in [0, b[$. Ceci entraîne l'existence de la limite suivante : $\lim_{t \to b^-} x(t)$. En effet, soient t et $t' \in [0, b[$ tels que $t \leq t'$. Nous avons

$$|x(t') - x(t)| \leq \int_t^{t'} |F(s, x_{s,\varepsilon})| ds \leq (t' - t) \sup_{s \in [0,b[} |F(s, x_{s,\varepsilon})|.$$

La quantité $\sup_{s \in [0,b[} |F(s, x_{s,\varepsilon})|$ étant limitée et indépendante des valeurs que prennent t et t', la différence $x(t') - x(t)$ tend vers 0 lorsque t et t' tendent, simultanément, vers b par valeurs inférieurs. D'où $\lim_{t \to b^-} x(t)$ existe. La solution x peut alors être prolongée en une fonction continue sur l'intervalle $[-\varepsilon r, b]$ en posant $x(b) = \lim_{t \to b^-} x(t)$. Comme $x_{b,\varepsilon} \in \mathcal{C}_o$ on peut trouver une solution de l'équation (3.31) issue du point initial $(b, x_{b,\varepsilon})$ qui soit définie à droite de b. Ceci contredit la non prolongeabilité de x.

2ème cas : Il existe $t' \in [t_0, b[$ tel que $x(t') \simeq \infty$. — Par continuité de x, il existe $t \in [t_0, b[$ tel que x soit limitée sur l'intervalle $[t_0, t]$ et vérifie $x(t) \not\simeq x(t_0)$. Puisque, moyennant le point 1 du présent lemme, x est S-continue sur l'intervalle $[0, t]$ et que d'autre part $t \simeq t_0$, nous avons $x(t) \simeq x(t_0)$; ce qui est une contradiction.

Ainsi b est tel que $t_0 \ll b$. Ceci termine la preuve de la première partie du point 2 du lemme.

2ème partie. — Supposons que la dernière partie de la conclusion du point 2 du lemme ne soit pas vraie. Il existe donc $t' \in [t_0, b[$ tel que $t' \simeq t_0$ et $x(t') \simeq \infty$. Une argumentation analogue à celle utilisée dans le deuxième cas de la première partie de la preuve ci-dessus aboutit à une contradiction. Ceci prouve que $x(t)$ est limité pour tout $t \geq t_0$, t dans le halo de t_0 et finit par achever la preuve du lemme 3.3.8. ∎

Résultats de moyennisation

Par analogie avec celui correspondant au cas des EDO rapidement oscillantes (chapitre 2), nous appelons le résultat de ce paragraphe, concernant la justification de la méthode de moyennisation, le Théorème KBM. Sa formulation interne est :

Théorème 3.3.9 (Théorème KBM - EI). — *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction vérifiant les conditions (H1)-(H5) de la page 42. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0$. Soient y la solution du problème (3.19) et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$ et appartenant à J, et tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ tel que, pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0]$, toute solution x du problème (3.18) est définie au moins sur l'intervalle $[-\varepsilon r, L]$ et vérifie $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L]$.*

La traduction externe du théorème 3.3.9 est donnée par le résultat suivant :

Théorème 3.3.10 (Théorème KBM - EE). — *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les conditions (H1)-(H5) sont satisfaites. Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard. Soient y la solution du problème (3.19) et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Alors, pour tout $L > 0$ et standard appartenant à J,* *toute solution x du problème (3.18) est définie au moins sur l'intervalle* $[-\varepsilon r, L]$ *et vérifie* $x(t) \simeq y(t)$ *pour tout t dans* $[0, L]$.

Commentaire 3.3.2. — Rappelons que notre objectif est d'apporter, à partir de la connaissance des solutions du problème moyennisé (3.19), les deux "informations" suivantes :

- Une estimation des domaines d'existence des solutions du problème (3.18).
- Une approximation des solutions de ce dernier problème, c.-à-d. le problème (3.18), par celle du problème moyennisé (3.19) sur ces domaines d'existence estimés.

De même que dans le cas des EDO rapidement oscillantes (voir commentaire 2.3.3, page 22), il est possible d'affaiblir les hypothèses en supprimant l'hypothèse (H5). Le résultat est alors moins puissant que celui donné par le Théorème KBM ci-dessus. Pour l'obtenir on doit rajouter une condition sur les solutions du problème original (3.18) pour finalement en tirer des informations sur les solutions du problème moyennisé (3.19) ; ce qui est contraire à la démarche exposée plus haut.

Sans l'hypothèse (H5), nous avons :

Théorème 3.3.11 (Théorème KBM $\circ$ Bis -EE)**.** — *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les conditions (H1)-(H4) sont satisfaites. Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Soient $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution du problème (3.18), et $L > 0$ et standard appartement à I. On suppose que sur l'intervalle $[0, L]$ la solution x est limitée. Alors, il existe une solution y du problème moyennisé (3.19) définie au moins sur l'intervalle $[-\varepsilon r, L]$ et vérifiant $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L]$.*

Le théorème 3.3.11 se démontre comme conséquence du lemme 3.2.2.

Démonstration du théorème 3.3.10. — Nous allons montrer que le théorème 3.3.10 se déduit du Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDO (théorème 3.2.4). Puisque l'hypothèse 2 de ce dernier est vérifiée grâce à l'hypothèse (H5), il ne reste plus qu'à montrer que la propriété stroboscopique est, elle aussi, satisfaite.

Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale du problème à valeur initiale (3.18) et soit t_0 un instant d'observation de la stroboscopie, c.-à-d. $t_0 \in I$, $t_0 \geq 0$ et limité, et x est limitée sur l'intervalle $[0, t_0]$. En vertu du lemme 3.3.7, il existe $\alpha = \alpha(\varepsilon, t_0, x(t_0))$ tel que $\alpha \simeq 0$, $\varepsilon/\alpha \simeq 0$ et pour $T \in [0, 1]$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau, \tilde{x}^{t_0}) d\tau \simeq T.\overline{f}(x(t_0)). \tag{3.32}$$

Considérons la loupe, de puissance $1/\alpha$, centrée au point $(t_0, \tilde{x}^{t_0})$, définie par

$$T = \frac{t - t_0}{\alpha} \quad \text{et} \quad X(\theta, T) = \frac{x_{t_0 + \alpha T, \varepsilon}(\theta) - \tilde{x}^{t_0}(\theta)}{\alpha}, \ \theta \in [-r, 0], \ T \in [0, 1]. \tag{3.33}$$

D'après le point 2 du lemme 3.3.8, le changement de variables (3.33) est bien défini. En outre, nous avons

$$X(0, T) = \frac{x(t_0 + \alpha T) - x(t_0)}{\alpha}. \tag{3.34}$$

Sous le changement de variables (3.33), l'EDFR dans (3.18) se transforme en l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial T}(0, T) = f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} T, \tilde{x}^{t_0} + \alpha X(\cdot, T)\right),$$

ce qui donne, après intégration, pour tout $T \in [0,1]$

$$X(0,T) = \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, \tilde{x}^{t_0} + \alpha X(\cdot,t)\right) dt. \tag{3.35}$$

Notons que, d'après le point 2 du lemme 3.3.8, $\tilde{x}^{t_0} + \alpha X(\cdot,T) = x_{t_0+\alpha T,\varepsilon}$ est limité pour tout $T \in [0,1]$. Distinguons alors les cas suivants :

1er cas : T est tel que $T \in [0, \varepsilon r/\alpha]$. — Comme $\varepsilon r/\alpha \simeq 0$, moyennant l'hypothèse (H3'), l'expression (3.35) donne

$$X(0,T) \simeq 0. \tag{3.36}$$

2ème cas : T est tel que $T \in [\varepsilon r/\alpha, 1]$. — Dans ce cas nous avons $t_0 \leq\ t_0+\alpha T+\varepsilon\theta \leq t_0+\alpha$ pour tout $\theta \in [-r,0]$. De la S-continuité de x sur $[0, t_0+\alpha]$ (qui est une conséquence des points 2 et 1, dans cet ordre, du lemme 3.3.8) nous déduisons que

$$\forall \theta \in [-r,0] \qquad \alpha X(\theta,T) = x_{t_0+\alpha T,\varepsilon}(\theta) - \tilde{x}^{t_0}(\theta) = x(t_0+\alpha T+\varepsilon\theta) - x(t_0) \simeq 0.$$

Comme $\tilde{x}^{t_0}$ est presque standard car $x(t_0)$ l'est puisqu'il est limité, il en est de même de $\tilde{x}^{t_0} + \alpha X(\cdot,T)$. Alors, en utilisant l'approximation (3.36), l'hypothèse (H2') et l'approximation (3.32), nous obtenons

$$\begin{aligned}
X(0,T) &= \int_0^{\varepsilon r/\alpha} f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, \tilde{x}^{t_0} + \alpha X(\cdot,t)\right) dt \\
&\quad + \int_{\varepsilon r/\alpha}^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, \tilde{x}^{t_0} + \alpha X(\cdot,t)\right) dt \\
&\simeq \int_{\varepsilon r/\alpha}^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, \tilde{x}^{t_0}\right) dt \\
&\simeq \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, \tilde{x}^{t_0}\right) dt \\
&= \frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(t, \tilde{x}^{t_0}) dt \\
&\simeq T.\overline{f}(x(t_0)).
\end{aligned}$$

Posons comme instant suivant d'observation de la stroboscopie $t_1 = t_0 + \alpha$. L'instant t_1 est tel que $[t_0,t_1] \subset I$ et $x(t) \simeq x(t_0)$ pour tout $t \in [t_0,t_1]$. Il vérifie aussi $\dfrac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0} = X(0,1) \simeq \overline{f}(x(t_0))$.

Finalement, il ne reste plus qu'à poser $\mu = \varepsilon r$ puis appliquer le Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDO pour obtenir la conclusion du théorème 3.3.10. ■

Commentaire 3.3.3. — Contrairement au cas des EDO rapidement oscillantes (chapitre 2), si f est presque périodique, et même périodique, en sa variable temps, la preuve du théorème 3.3.10 ne se simplifie presque pas. Le seul avantage est dans le choix de α intervenant dans le changement de variables (3.33). Désormais α n'est plus déterminé par un calcul, mais peut être choisi tel que $\alpha = \omega\varepsilon$ où ω est un infiniment grand arbitraire, entier naturel pour le cas périodique et réel positif dans le cas presque périodique.

Par contre certaines hypothèses, énumérées en page 42, sur la fonction f peuvent être soit affaiblies, soit supprimées. Elles se déduisent, comme nous allons le montrer ci-après, de celles retenues.

1. *Cas périodique.* — Soit $f = f(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et 1-périodique en t. On suppose que l'hypothèse (H1) en page 42 est réalisée. On procède de la même manière que pour les EDO rapidement oscillantes, page 25, pour montrer que f vérifie l'hypothèse (H2). La condition (H4) est évidemment satisfaite avec, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\overline{f}(x) = \int_0^1 f(t, \tilde{x})dt$$

   où $\tilde{x}(\theta) = x$ pour $\theta \in [-r, 0]$.

   Nous allons finalement montrer qu'il suffit d'imposer à la fonction f la condition de quasi-bornitude[6] pour en déduire l'hypothèse (H3).

   En effet, soient $t \in \mathbb{R}_+$ et x limité dans $\mathcal{C}_o$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $t - k$ soit limité (il suffit de prendre $k = [t]$, la partie entière de t). Alors,

$$f(t,x) = f(t-k,x) \text{ est limité.}$$

2. *Cas presque périodique.* — Soit $f = f(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et presque périodique en t, satisfaisant les conditions (H1) et (H2) de la page 42. Pour une telle fonction la propriété suivante est vérifiée : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la limite

$$f^o(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} f(t, \tilde{x})dt$$

   existe uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}$. L'hypothèse (H4) est donc vérifiée comme cas particulier pour $s = 0$. On suppose, en outre, que la fonction f est quasi-bornée. Nous allons voir que la condition (H3) est alors satisfaite.

   En effet, soient $t \in \mathbb{R}_+$ et x limité dans $\mathcal{C}_o$. Soit $p = p(x) \in \mathbb{R}$ une presque période de la fonction $f(\cdot, x)$ telle que :

$$|f(t,x)| \leq |f(t-p,x)| + 1, \text{ avec } t - p \text{ limité.}$$

   On déduit ainsi que $f(t,x)$ est limité.

[6] Voir définition 1.2.8 et proposition 1.2.6, page 13, pour la définition classique, et voir l'hypothèse (S-QB) dans le lemme 3.3.8, page 45, pour la caractérisation non standard de cette notion.

Chapitre 4

Cas des équations différentielles fonctionnelles à retard rapidement oscillantes

Une extension naturelle de la technique de stroboscopie proposée au chapitre précédent est réalisée ici dans le cadre des EDFR. Une application en est faite pour étendre les résultats de moyennisation aux EDFR rapidement oscillantes.

4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 2 qu'une EDO rapidement oscillante en sa variable temps du type

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) \tag{4.1}$$

se ramène, sous l'effet du changement de temps rapide $\tau = t/\varepsilon$, à la forme normale qui s'écrit

$$x' = \varepsilon f(\tau, x) \tag{4.2}$$

où " $'$ " $= d/d\tau$, et inversement. Les résultats de moyennisation établis pour l'une ou l'autre écriture de l'équation sont équivalents.

S'agissant des EDFR du type étudié au chapitre 3, qui se mettent sous la forme normale

$$x'(\tau) = \varepsilon f(\tau, x_\tau) \tag{4.3}$$

où $x_\tau(\theta) = x(\tau + \theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$ et $\tau \in \mathbb{R}$, nous avons apporté une justification à la technique de moyennisation en regardant l'équation (4.3) à l'échelle du temps $t = \varepsilon\tau$, c.-à-d.

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_{t,\varepsilon}\right) \tag{4.4}$$

où $x_{t,\varepsilon}(\theta) = x(t + \varepsilon\theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$ et $t \in \mathbb{R}$.

Notons que pour $r \neq 0$, du fait que le retard dans l'équation (4.4) soit εr, qui est petit avec ε, cette équation est non équivalente à l'EDFR rapidement oscillante suivante

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_t\right). \tag{4.5}$$

En effet, si on considère, pour simplifier, le cas particulier d'une équation différentielle à retard ponctuel, rapidement oscillante, du type

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t), x(t-r)\right) \tag{4.6}$$

et on pose $\tau = t/\varepsilon$, l'équation (4.6) devient

$$x'(\tau) = \varepsilon f\left(\tau, x(\tau), x\left(\tau - \frac{r}{\varepsilon}\right)\right).$$

Ainsi, d'un intervalle de retard $[-r, 0]$ pour x_t on passe à l'intervalle de retard $[-r/\varepsilon, 0]$ pour x_τ.

Ceci nous amène à l'objet de ce chapitre où nous nous proposons d'étendre la technique de stroboscopie dans le but de son application pour montrer des résultats de moyennisation concernant l'équation (4.5).

Dans la littérature classique, il y a très peu de travaux traitant de la technique de moyennisation pour les EDFR du type (4.5). Hale et Lunel Verduyn dans [21] introduisent une extension de la méthode de moyennisation à des équations abstraites d'évolution, définies sur des espaces de Banach. Les résultats obtenus sont alors appliqués à l'équation (4.5), elle-même identifiée à une équation abstraite d'évolution. L'approche fait intervenir des techniques plutôt sophistiquées de la théorie générale des équations différentielles et d'analyse fonctionnelle. Étant donné sa complexité, nous préférons renvoyer à la référence [21] pour les détails.

En collaboration avec Sari, nous avons proposé dans [27] un résultat de moyennisation concernant l'équation (4.5). Sous des conditions plus contraignantes que celles imposées dans ce chapitre, notre approche dans [27] se base sur des calculs directs (estimations d'équations intégrales). Le résultat prouvé dans ce travail étend celui de [25] où une équation différentielle à retard ponctuel, rapidement oscillante, du type particulier

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t-r)\right)$$

est considérée.

Nous avons aussi montré dans [26] un résultat justifiant l'utilisation de la méthode de moyennisation pour des équations différentielles à retard ponctuel, rapidement oscillantes, du type général (4.6). Des auteurs classiques, comme Lehman *et al* dans [29], Lehman et Kolmanovskii dans [30], et Lehman *et al.* dans [31], se sont également intéressés à l'équation (4.6).

La suite du chapitre est organisé de la manière suivante : un lemme de stroboscopie, correspondant au cas où l'équation stroboscopique est une EDFR, est élaboré au paragraphe 4.2. Nous le désignerons par le Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDFR. Il s'agit d'une extension naturelle de celui proposé au paragraphe 3.2 puisque dans les conditions de ce dernier on retrouve le Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDO. Puis, au paragraphe 4.3, nous étendons à l'EDFR rapidement oscillante (4.5), et sous les mêmes hypothèses, les résultats de moyennisation montrés au chapitre 3, d'abord pour le cas où le second membre de l'équation (4.5) est presque périodique en la première variable uniformément par rapport à la seconde variable prise dans des compacts, puis pour le cas général. Ces résultats se déduisent eux aussi de la technique de stroboscopie. Enfin, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, c.-à-d. au paragraphe 4.4, nous nous intéressons au cas particulier des équations différentielles à retard ponctuel, rapidement oscillantes, du type (4.6). Nous y vérifions que le résultat de moyennisation se déduit de celui élaboré au chapitre 2 pour les EDO rapidement oscillantes.

Nous terminons cette introduction par indiquer que nos hypothèses dans ce chapitre sont les moins restrictives possibles, et qu'à notre connaissance, elles sont plus faibles que celles rencontrées dans la littérature, y compris celle citée plus haut.

4.2 Stroboscopie : cas où l'équation stroboscopique est une EDFR

Les résultats préliminaires énoncés dans ce paragraphe aux lemmes 4.2.1 et 4.2.2 sont les homologues de ceux établis au paragraphe 3.2, en pages 31 et 33. Ils interviennent dans la preuve du Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDFR (théorème 4.2.3).

Remarque 4.2.1. — Tout le long du chapitre 3 nous avons pu faire, à chaque fois que cela s'imposait, la transition de la notion d'être limité à celle d'être presque standard parce que $\mathbb{R}^d$ est un espace propre, c.-à-d. un espace où tout élément limité est presque standard (la réciproquement étant toujours vraie dans un espace métrique). Ce n'est pas le cas dans $\mathcal{C}_o$ qui n'est pas propre où donc un élément limité n'est pas nécessairement presque standard. Par conséquent, dorénavant, nous ferons attention au contexte dans l'utilisation de ces deux notions.

Soient $r > 0$ et $\phi \in \mathcal{C}_o$, tous les deux standard. Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une fonction telle que $[-r, 0] \subset I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 = \phi$. Soit $f^o : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et continue.

Lemme 4.2.1. — *Soit $L > 0$ et standard tel que l'intervalle $[0, L]$ soit contenu dans I. On suppose que*

1. *Pour tout t dans l'intervalle $[0, L]$, $x(t)$ et $f^o(t, x_t)$ sont limités.*
2. *Il existe une suite finie $\{t_n : n = 0 \ldots N+1\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N \leq L < t_{N+1}$, et pour tout n dans $\{0, \ldots, N\}$, $t_{n+1} \simeq t_n$, $x(t) \simeq x(t_n)$ pour tout t dans $[t_n, t_{n+1}]$ et $\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \simeq f^o(t_n, x_{t_n})$.*

Alors, la fonction standard $y : [-r, L] \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$y(t) = \begin{cases} {}^o\big(x(t)\big), & \text{si } t \in [0, L],\ t \text{ standard} \\ \phi(t), & \text{si } t \in [-r, 0] \end{cases}$$

est solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f^o(t, y_t), & t \geq 0 \\ y_0 = \phi \end{cases} \tag{4.7}$$

et vérifie l'approximation

$$\forall t \in [0, L] \quad x(t) \simeq y(t). \tag{4.8}$$

Remarque 4.2.2. —

1. La fonction y définie dans le lemme 4.2.1 est l'ombre de la restriction de la fonction x à l'intervalle $[-r, L]$.
2. La conclusion du résultat ci-dessus reste vraie si l'hypothèse 2 n'est vérifiée que sur un intervalle $[0, L'] \subset [0, L]$ où $L' \simeq L$. Ceci donne $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t presque standard dans $[0, L']$. (Cette remarque interviendra dans la preuve du théorème 4.3.5).

Démonstration du lemme 4.2.1. — Comme pour le lemme 3.2.1, page 31, elle consiste à montrer que la fonction y est telle que :

1. continue sur l'intervalle $[0, L]$, ce qui permet ensuite d'en déduire l'approximation (4.8).
2. vérifie l'équation intégrale associée au problème (4.7), c.-à-d.

$$\forall t \in [0, L] \quad y(t) = \phi(0) + \int_0^t f^o(s, y_s) ds.$$

Bien que la preuve du premier point ne diffère que très peu de celle qui lui correspond dans la preuve du lemme 3.2.1 cité plus haut, nous allons la faire ci-après.

Montrons donc que y est continue sur l'intervalle $[0, L]$. Puisque la fonction x est limitée sur $[0, L]$, il suffit de montrer qu'elle y est S-continue pour déduire la continuité de la fonction y en tant que l'ombre de sa restriction à cet intervalle.

Soient $t, t' \in [0, L]$ et $p, q \in \{0, \ldots, N\}$ tels que $t \leq t'$, $t \simeq t'$, $t \in [t_p, t_{p+1}]$ et $t' \in [t_q, t_{q+1}]$ avec $t_p \simeq t_q$. Nous avons

$$\begin{aligned} x(t_q) - x(t_p) &= \sum_{n=p}^{q-1} (x(t_{n+1}) - x(t_n)) \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} (t_{n+1} - t_n)[f^o(t_n, x_{t_n}) + \eta_n] \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $\eta_n \simeq 0$ pour tout $n \in \{p, \ldots, q-1\}$. Si $\eta = \max\{|\eta_n| : n = p, \ldots, q-1\}$ et $m = \max\{|f^o(t_n, x_{t_n})| : n = p, \ldots, q-1\}$, alors $\eta \simeq 0$ et $m = |f^o(t_s, x_{t_s})|$ pour un certain $s \in \{p, \ldots, q-1\}$. Or $f^o(t_s, x_{t_s})$ étant limité, il en est de même pour m. D'où, de l'expression (4.9), on déduit que

$$|x(t') - x(t)| \simeq |x(t_q) - x(t_p)| \leq (m + \eta)(t_q - t_p) \simeq 0.$$

Ceci prouve que la fonction x est S-continue sur l'intervalle $[0, L]$. Par suite, nous avons

$$\forall t \in [0, L] \quad y(t) \simeq y(^o t) \simeq x(^o t) \simeq x(t).$$

Pour le deuxième point, en tenant compte des conséquences du premier point ci-dessus, c.-à-d. du fait que, pour tout $t \in [0, L]$, x_t est presque standard et $x_t \simeq y_t$, la preuve suit pas-à-pas la démarche suivie dans celle de la deuxième étape dans la démonstration du lemme 3.2.1 cité plus haut. Elle est donc omise. ■

La remarque 3.2.2, page 32, se reproduit ici. Elle a pour énoncé :

Remarque 4.2.3. — Si dans les hypothèses du lemme 4.2.1, la condition $L > 0$ et standard est remplacée par $L > 0$ et limité, la preuve ci-dessus permet de vérifier que la fonction x est S-continue sur l'intervalle $[0, L]$.

La preuve du lemme qui va suivre est identique à celle du lemme 3.2.2, page 33, et est donc omise.

Lemme 4.2.2. — *Soit $L > 0$ et standard tel que l'intervalle $[0, L]$ soit contenu dans I. On suppose que*

1. *Pour tout t dans l'intervalle $[0, L]$, $x(t)$ et $f^o(t, x_t)$ sont limités.*
2. *Il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout t dans $[0, L]$ il existe t' dans I tel que $\mu < t' - t \simeq 0$, $[t, t'] \subset I$, $x(s) \simeq x(t)$ pour tout s dans $[t, t']$ et $\dfrac{x(t') - x(t)}{t' - t} \simeq f^o(t, x_t)$.*

Alors, la fonction standard $y : [-r, L] \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$y(t) = \begin{cases} {}^o\big(x(t)\big), & \text{si } t \in [0, L],\ t \text{ standard} \\ \phi(t), & \text{si } t \in [-r, 0] \end{cases}$$

est solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f^o(t, y_t), & t \geq 0 \\ y_0 = \phi \end{cases} \tag{4.10}$$

et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L]$.

Commentaire 4.2.1. — La formulation de la technique de stroboscopie proposée au paragraphe 3.2.2, page 34, tient compte du comportement passé de la fonction x étudiée au moyen de cette technique. Ceci étant motivé par le contexte des EDFR dans l'application de la technique de stroboscopie. L'utilisation que nous en avons faite alors concernait des EDFR du type (3.8), page 29, qui ont pour équations moyennisées des EDO.

Les EDFR rapidement oscillantes que nous considérons dans ce chapitre admettent des équations moyennisées qui sont des EDFR. Nous devons donc tenir compte également des valeurs que prennent les fonctions qui déterminent ces équations moyennisées. Ces fonctions sont représentées par la fonction f^o dans (4.10), que nous retrouvons ci-après. Cette dernière est définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o$ avec $\mathcal{C}_o$ ayant la particularité de ne pas être un espace propre.

Le Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDFR s'énonce alors comme ceci :

Théorème 4.2.3 (Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDFR). — *On suppose que*

1. *Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout t dans I, si $t \geq 0$ et limité, $[0, t]$ est contenu dans I, et $x(s)$ et $f^o(s, x_s)$ sont limités pour tout s dans $[0, t]$ alors il existe t' dans I tel que $\mu < t' - t \simeq 0$, $[t, t'] \subset I$, $x(s) \simeq x(t)$ pour tout s dans $[t, t']$ et $\dfrac{x(t') - x(t)}{t' - t} \simeq f^o(t, x_t)$.*
2. *Le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f^o(t, y_t), & t \geq 0 \\ y_0 = \phi \end{cases} \tag{4.11}$$

admet une solution unique. Soient y cette solution et $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence.

Alors, pour tout $L > 0$ *et standard dans* J*, la fonction* x *est définie au moins sur l'intervalle* $[-r, L]$ *et vérifie* $x(t) \simeq y(t)$ *pour tout* t *dans* $[0, L]$.

Remarque 4.2.4. —

1. La propriété de prolongeabilité des solutions d'une EDO, qui est cruciale dans la démonstration du lemme 3.2.3 (voir la note en bas de la page 33), n'est plus valable dans le cas des EDFR. On n'a pas d'analogue du lemme 3.2.3 dans le cas des EDFR, sauf si on exige de la fonction f^o dans le problème (4.11) d'être quasi-bornée. Cependant, on peut montrer directement le théorème 4.2.3 à partir du lemme 4.2.2, sans passer par ce résultat intermédiaire, comme c'était le cas dans les chapitres 2 et 3.
2. Les notations, la remarque, ainsi que le commentaire, qui suivent immédiatement les énoncés des lemmes de stroboscopie au chapitre 2, page 20, et au chapitre 3, page 34, se reproduisent encore ici.

Démonstration du théorème 4.2.3. — Soit $L \in J$ avec $L > 0$ et standard. La fonction f^o étant standard et continue, l'ensemble $[0, L] \times \Gamma$, où $\Gamma = \{y_t : t \in [0, L]\}$, un compact standard de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o$, il existe $\rho > 0$ et standard tel que $W = \{y_t + \psi : t \in [0, L], \psi \in B_\rho\}$, où $B_\rho = \{\psi \in \mathcal{C}_o : |\psi| \leq \rho\}$, soit un voisinage de Γ dans $\mathcal{C}_o$ tel que la fonction f^o soit limitée sur $[0, L] \times W$. Soit A l'ensemble défini par

$$A = \{L_1 \in [0, L] \;/\; [0, L_1] \subset I \text{ et } \{x_t : t \in [0, L_1]\} \subset W\}.$$

L'ensemble A est non vide car $0 \in A$, et est majoré par L. Soit $L_0 = \sup A$. Il existe alors $L_1 \in A$ tel que $L_0 - \mu < L_1 \leq L_0$. Or $L_1 \in A$ implique que $[0, L_1] \times \{x_t : t \in [0, L_1]\} \subset [0, L] \times W$ et donc $x(t)$ et $f^o(t, x_t)$ sont limités pour tout $t \in [0, L_1]$.

Soit, à présent, un standard a tel que $0 < a \leq L_1$. En vertu du lemme 4.2.2, la fonction standard définie sur $[-r, a]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qui coïncide avec ϕ sur $[-r, 0]$ et qui prend la valeur ${}^o\big(x(t)\big)$ en tout standard $t \in [0, a]$, est solution du problème à valeur initiale (4.11). Par unicité, elle coïncide avec la solution y sur $[-r, a]$. Elle vérifie ainsi

$$\forall t \in [0, a] \;\; x(t) \simeq y(t). \tag{4.12}$$

Par permanence, la propriété (4.12) est vraie pour un certain $a \simeq L_1$. D'autre part, en vertu de la remarque 4.2.3 et de la continuité de y, nous avons

$$\forall t \in [a, L_1] \quad x(t) \simeq x(a) \quad \text{et} \quad y(t) \simeq y(a).$$

Ceci achève de montrer que

$$\forall t \in [0, L_1] \quad x(t) \simeq y(t). \tag{4.13}$$

D'après l'hypothèse 1, il existe $L_1' > L_1 + \mu$ tel que $L_1' \simeq L_1$, $[L_1, L_1'] \subset I$ et

$$\forall t \in [L_1, L_1'] \quad x(t) \simeq x(L_1). \tag{4.14}$$

Vérifions que $[L_1, L_1'] \subset J$. Le cas où $L_1' \leq L$ est évident. Supposons que $L_1' > L$. Comme ω est soit standard, soit infini, L_1' est nécessairement tel que $L_1' < \omega$ et donc, en particulier, $[L_1, L_1'] \subset J$.

D'où, par continuité de y, nous avons

$$\forall t \in [L_1, L_1'] \quad y(t) \simeq y(L_1). \tag{4.15}$$

Des approximations (4.14) et (4.15), il vient que

$$\forall t \in [L_1, L_1'] \quad x(t) \simeq y(t) \tag{4.16}$$

et les approximations (4.13) et (4.16) donnent enfin

$$\forall t \in [0, L_1'] \quad x(t) \simeq y(t). \tag{4.17}$$

Comme $x_0 = \phi = y_0$, de l'approximation (4.17), nous déduisons que, pour tout $t \in [0, L_1']$, $x_t \simeq y_t$. Supposons que $L_1' \leq L$. Alors $[0, L_1'] \subset I$ et $\{x_t : t \in [0, L_1']\} \subset W$ entraînent que $L_1' \in A$; ce qui est absurde puisque $L_1' > L_0$. Ainsi $L_1' > L$. Ceci prouve bien que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L] \subset [0, L_1']$ et termine la preuve. ■

Commentaire 4.2.2. — Nous remarquons que, dans le cadre des EDO, l'hypothèse 1 du théorème 4.2.3 (Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDFR) se confond avec son homologue du théorème 3.2.4, page 34 (Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDO). Ceci fait du premier théorème cité une extension naturelle du second.

4.3 Moyennisation dans les EDFR rapidement oscillantes

Reprenons l'EDFR rapidement oscillante (4.5) et considérons le problème à valeur initiale qui lui correspond

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(\dfrac{t}{\varepsilon}, x_t\right), \quad t \geq 0 \\ x_0 = \phi \end{cases} \tag{4.18}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{C}_o$ sont données, et soit le problème à valeur initiale (problème moyennisé) associé à (4.18)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f^o(y_t), \quad t \geq 0 \\ y_0 = \phi \end{cases} \tag{4.19}$$

où $f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ est la fonction moyenne de f qui sera donnée plus loin.

L'objectif est d'approximer les solutions du problème original (4.18) par celles du problème moyennisé (4.19) sur des intervalles finis du temps positif.

Comme au chapitre 3, nous allons commencer par traiter le cas que nous appellerons cas de la presque périodicité uniforme, lorsque les solutions des problèmes (4.18) et (4.19) sont définies sur le même intervalle fini de temps. Ceci permet de se rendre compte du caractère naturel de l'hypothèse de quasi-bornitude uniforme introduite dans le cas général étudié ensuite.

4.3.1 Cas de la presque périodicité uniforme

Nous allons reprendre les hypothèses (H1)-(H4) en page 35 sous lesquelles le théorème 4.3.5 (traduction externe du théorème 4.3.4) sera prouvé. Nous adapterons certaines parmi elles au problème traité ici. Ainsi on suppose que

(H1) La fonction f est continue.

(H2) La continuité de $f = f(t, x)$ en la variable $x \in \mathcal{C}_o$ est uniforme par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$.

(H3) La fonction $f = f(t, x)$ est presque périodique en $t \in \mathbb{R}_+$, uniformément par rapport à x dans les compacts de $\mathcal{C}_o$.

Propriété 4.3.1. — La fonction f étant presque périodique en t, la limite suivante

$$f^o(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} f(t, x)dt, \quad x \in \mathcal{C}_o$$

existe uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}_+$.

(H4) Le problème moyennisé (4.19) admet une solution unique.

Remarque 4.3.1. —

1. La condition (H3) est évidemment vérifiée dans le cas périodique. Pour les mêmes raisons que celles évoquées au point 1 de la remarque 3.3.1, page 36, elle est souvent imposée comme hypothèse dans les problèmes traitant de la moyennisation dans le problème (4.18) (voir par exemple [21, 31]).
2. La même argumentation que celle développée au point 3 de la remarque 3.3.1, citée au point 1 ci-dessus, permet de montrer, au lemme 4.3.1 ci-après, que la fonction moyenne $f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ définie dans la propriété 4.3.1, est continue ; ce qui rend l'EDFR $\dot{y} = f^o(y_t)$ dans l'hypothèse (H4) bien définie.

Pour f standard nous rappelons les traductions externes des conditions (H1) et (H2), ainsi que de celle de la propriété 4.3.1.

(H1') $\forall^{st} t \in \mathbb{R}_+ \ \forall^{st} x \in \mathcal{C}_o \ \forall t' \in \mathbb{R}_+ \ \forall x' \in \mathcal{C}_o \ \big(t' \simeq t, \ x' \simeq x \ \Rightarrow \ f(t', x') \simeq f(t, x)\big)$.

(H2') $\forall^{st} x \in \mathcal{C}_o \ \forall x' \in \mathcal{C}_o \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \big(x' \simeq x \ \Rightarrow \ f(t, x') \simeq f(t, x)\big)$.

Propriété 4.3.2. — Il existe $f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard telle que

$$\forall^{st} x \in \mathcal{C}_o \ \forall s \in \mathbb{R}_+ \ \forall R \simeq +\infty \quad f^o(x) \simeq \frac{1}{R} \int_s^{s+R} f(t, x)dt.$$

Les résultats préliminaires qui vont suivre sont les homologues de ceux du paragraphe 3.3.1, pages 37 et 38 :

Lemme 4.3.1. — *On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Alors, la fonction* $f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ *donnée par la propriété 4.3.1 est continue et vérifie*

$$f^o(x) \simeq \frac{1}{R}\int_s^{s+R} f(t,x)dt$$

pour tout $x \in \mathcal{C}_o$ *et presque standard, tout* $s \in \mathbb{R}_+$ *et tout* $R \simeq +\infty$.

Lemme 4.3.2. — *On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Soit* $\varepsilon, \alpha > 0$ *et infinitésimaux tels que* $\varepsilon/\alpha \simeq 0$. *Alors*

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(t,x)dt \simeq T.f^o(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{C}_o$ *et presque standard, tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et tout* $T \in [0,1]$.

Lemme 4.3.3. — *On suppose que* f *vérifie les hypothèses (H1) et (H3). Alors, nous avons*

$$\forall^{st} K \text{ compact dans } \mathcal{C}_o\ \exists^{st} M > 0\ \exists^{st} W \text{ voisinage de } K \text{ dans } \mathcal{C}_o \text{ tels que}$$
$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in W\ |f(t,x)| < M.$$

Remarque 4.3.2. — Les voisinages W dans le lemme 4.3.3 ci-dessus peuvent être choisis tel que

$$W = \{x + \psi : x \in K, \psi \in B_\rho\}, \text{ où } B_\rho = \{\psi \in \mathcal{C}_o : |\psi| \leq \rho\}, \text{ avec } \rho > 0 \text{ et standard.}$$

Nous énonçons ci-après le résultat justifiant l'utilisation de la méthode de moyennisation dans l'approximation d'une solution du problème (4.18) par celle du problème (4.19), sur tout intervalle fini du temps sur lequel elles sont toutes les deux définies. Il a pour formulations interne et externe les énoncés respectifs :

Théorème 4.3.4 (EI). — *Soit* $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ *une fonction vérifiant les conditions (H1)-(H4). Soit* $\phi \in \mathcal{C}_0$. *Soient* y *la solution du problème (4.19) et* $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, *son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout* $L > 0$ *appartenant à* J, *et tout* $\delta > 0$ *il existe* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L,\delta) > 0$ *tel que, pour tout* ε *dans* $]0, \varepsilon_0]$, *toute solution* x *du problème (4.18) qui est définie au moins sur l'intervalle* $[-r, L]$, *vérifie l'inégalité* $|x(t) - y(t)| < \delta$ *pour tout* t *dans* $[0, L]$.

Théorème 4.3.5 (EE). — *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les conditions (H1)-(H4) sont satisfaites. Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard. Soient y la solution du problème (4.19) et $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitesimal. Alors, pour tout $L > 0$ et standard tel que $L \in J$, toute solution x du problème (4.18) qui est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$, est approximée par la solution y sur l'intervalle $[0, L]$, c.-à-d. x vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Remarque 4.3.3. — La preuve du théorème 4.3.5 ne diffère pas dans l'esprit de celle du théorème 3.3.5, page 39. Par contre, il y a certaines différences dans les détails qui sont assez importantes. C'est la raison pour laquelle nous la menons en entier ci-après.

Démonstration du théorème 4.3.5. — Soient $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale du problème (4.18) et $L > 0$ et standard tel que $L \in I \cap J$. En vertu du lemme 4.3.3, pour $K = \{y_t : t \in [0, L]\}$, qui est un compact standard, il existe $M > 0$ et standard, et W un voisinage standard de K que l'on peut choisir (d'après la remarque 4.3.2) tel que $W = \{y_t + \psi : t \in [0, L], \psi \in B_\rho\}$, où $B_\rho = \{\psi \in \mathcal{C}_o : |\psi| \leq \rho\}$ avec $\rho > 0$ et standard, tels que : $\forall t \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in W\ |f(t, x)| < M$.

Dans ce qui suit, nous allons commencer par vérifier que : tout $L_1 \in [0, L]$ et standard tel que $x_t \in W$, vérifie les hypothèses du lemme 4.2.1 restraint aux conditions du deuxième point de la remarque qui le suit. Ceci permet de déduire, moyennant certaines propriétés de x et y, l'approximation $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$. Nous vérifierons ensuite que l'approximation est vraie sur l'intervalle $[0, L]$ en entier.

1ère partie. — Soit $L_1 \in [0, L]$ et standard tel que $x_t \in W$ pour tout $t \in [0, L_1]$. Nous avons $x(t)$ est limité pour tout $t \in [0, L_1]$. Vérifions que $f^o(x_t)$ est aussi limité pour tout $t \in [0, L_1]$.

Comme f^o est standard et continue, nous allons montrer que, pour tout $t \in [0, L_1]$, x_t est presque standard, ce qui permet d'en déduire que $f^o(x_t)$ est presque standard et donc limité. Pour cela, étant donné que x est limitée sur $[0, L_1]$ et $x_0 = \phi$ sur $[-r, 0]$, il suffit de vérifier que x est S-continue sur l'intervalle $[0, L_1]$. Ceci est vrai puisque si $t, t' \in [0, L_1]$ sont tels que $t \leq t'$ et $t \simeq t'$, alors

$$|x(t') - x(t)| \leq \int_t^{t'} \left| f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) \right| d\tau \leq M(t' - t) \simeq 0$$

en tenant compte du fait que, pour $\tau \in [t, t'] \subset [0, L_1]$, $x_\tau \in W$.

Ainsi, l'hypothèse 1 du lemme 4.2.1 est vérifiée sur l'intervalle $[0, L_1]$.

Soit α tel que $0 < \alpha \simeq 0$ et $\varepsilon/\alpha \simeq 0$. Posons $t_n = n\alpha$ pour $n \in \{0, \ldots, N+1\}$ où $N \in \mathbb{N}$ est tel que $t_N \leq L_1 - \alpha < t_{N+1}$. Nous allons, à présent, montrer que la suite $\{t_n : n = 0, \ldots, N+1\}$ vérifie l'hypothèse 2 du lemme 4.2.1 dans le contexte du deuxième point de la remarque 4.2.2 (ici "L'" $= L_1 - \alpha$).

Soit $n \in \{0, \ldots, N\}$. Comme x_{t_n} est presque standard, en vertu du lemme 4.3.2, nous avons

$$\forall T \in [0, 1] \qquad \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_n/\varepsilon}^{t_n/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(t, x_{t_n}) dt \simeq T.f^o(x_{t_n}). \tag{4.20}$$

Introduisons le changement de variables défini par

$$T = \frac{t - t_n}{\alpha} \quad \text{et} \quad X(\theta, T) = \frac{x_{t_n + \alpha T}(\theta) - x_{t_n}(\theta)}{\alpha},\ \theta \in [-r, 0],\ T \in [0, 1]. \tag{4.21}$$

Nous avons en particulier pour $\theta = 0$ et $T \in [0,1]$

$$X(0,T) = \frac{x(t_n + \alpha T) - x(t_n)}{\alpha}. \tag{4.22}$$

L'EDFR dans le problème (4.18) soumise au changement de variables (4.21) devient

$$\frac{\partial X}{\partial T}(0,T) = f\left(\frac{t_n}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}T, x_{t_n} + \alpha X(\cdot, T)\right)$$

qui donne, après intégration

$$X(0,T) = \int_0^T f\left(\frac{t_n}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, x_{t_n} + \alpha X(\cdot, t)\right) dt. \tag{4.23}$$

Or, x étant S-continue sur l'intervalle $[-r, L_1]$, pour $\theta \in [-r, 0]$ et $T \in [0,1]$, nous avons

$$\alpha X(\theta, T) = x_{t_n + \alpha T}(\theta) - x_{t_n}(\theta) = x(t_n + \alpha T + \theta) - x(t_n + \theta) \simeq 0.$$

D'où, moyennant l'hypothèse (H2') et l'approximation (4.20), nous obtenons, pour $T \in [0,1]$

$$\begin{aligned} X(0,T) &\simeq \int_0^T f\left(\frac{t_n}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, x_{t_n}\right) dt \\ &= \frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t_n/\varepsilon}^{t_n/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(t, x_{t_n})dt \\ &\simeq T.f^o(x_{t_n}). \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x(t_n + \alpha) - x(t_n)}{\alpha} = X(0,1) \simeq f^o(x_{t_n}).$$

D'autre part, de la S-continuité de x sur $[0, L_1]$, nous avons : $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]\quad x(t) \simeq x(t_n)$.

Ainsi, en vertu du lemme 4.2.1, du deuxième point de la remarque 4.2.2 et de l'hypothèse (H4), la solution x est tel que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t presque standard dans $[0, L_1 - \alpha]$.

Si a est standard et vérifie $0 < a \leq L_1 - \alpha$, alors $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, a]$. Par permanence, cette propriété est vraie pour un certain $a \simeq L_1 - \alpha$. D'autre part, en vertu de la S-continuité de x et de la continuité de y sur l'intervalle $[0, L_1]$, nous avons

$$\forall t \in [a, L_1] \quad x(t) \simeq x(a) \simeq y(a) \simeq y(t).$$

Finalement, l'approximation de x par y s'étale à tout l'intervalle $[0, L_1]$, c.-à-d. x est tel que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$.

2ème partie. — Afin de rendre la conclusion du théorème vraie, nous allons montrer dans cette deuxième partie que L lui-même est tel que $x_t \in W$ pour tout $t \in [0, L]$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in]0, L]$ tel que $x_{t_1} \notin W$. Donc, nous avons $|x_{t_1} - y_t| > \rho$ pour tout $t \in [0, L]$. En particulier $|x_{t_1} - y_{t_1}| > \rho$. Or les fonctions $t \mapsto x_t$ et $t \mapsto y_t$ étant continues sur $[0, L]$, $x_0 = y_0$ et $|x_{t_1} - y_{t_1}| > \rho$, il existe $t_2, t_3 \in]0, t_1[$ tels que

$$|x_{t_2} - y_{t_2}| = \rho \tag{4.24}$$

et $|x_{t_3} - y_{t_3}| = \rho/2$. Nous supposons que t_2 est le premier instant vérifiant (4.24). Il s'ensuit que $x_t \in W$ pour tout $t \in [0, t_2]$. Ceci entraîne que x est S-continue sur l'intervalle $[0, t_2]$ et en particulier, pour $L_1 = {}^o t_3 \leq t_2$, nous obtenons $|x_{L_1} - y_{L_1}| \simeq \rho/2$. Or, le fait que $x_t \in W$ pour tout $t \in [0, L_1] \subset [0, t_2]$, entraîne, d'après le résultat de la première partie ci-dessus, que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$ et donc $x_{L_1} \simeq y_{L_1}$ en tenant compte du fait que x et y coïncident sur $[-r, 0]$; ce qui est absurde. ∎

Remarque 4.3.4. — Le commentaire 3.3.1 en page 42 concernant la motivation de l'introduction de la condition de quasi-bornitude uniforme comme hypothèse au paragraphe qui va suivre est encore vrai ici.

4.3.2 Cas général

Soient $\phi \in \mathcal{C}_o$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction donnée. Reprenons les hypothèses (H1)-(H5) en page 42 et adaptons celles qui le nécessitent au problème présent. Elles s'énumèrent alors comme ceci :

(H1) La fonction f est continue.

(H2) La continuité de $f = f(t, x)$ en la variable $x \in \mathcal{C}_o$ est uniforme par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$.

(H3) La fonction $f = f(t, x)$ est quasi-bornée en $x \in \mathcal{C}_o$ uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$, c.-à-d. l'image par f de $\mathbb{R}_+ \times$ (un ensemble borné de $\mathcal{C}_o$) est un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$.

(H4) Pour tout $x \in \mathcal{C}_o$, la limite

$$f^o(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt$$

existe.

(H5) Le problème à valeur initiale (4.19) admet une solution unique.

Remarque 4.3.5. — L'EDFR $\dot{y} = f^o(y_t)$ dans l'hypothèse (H5) est bien définie car la fonction moyenne $f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ définie dans l'hypothèse (H4) est continue. Cette dernière affirmation est montrée au lemme 4.3.6 ci-après moyennant une argumentation semblable à celle développée au point 2 de la remarque 3.3.4, page 43.

Supposons que f est standard et traduisons en langage non standard les hypothèses (H1)-(H4). Ceci donne

(H1') $\forall^{st} t \in \mathbb{R}_+ \; \forall^{st} x \in \mathcal{C}_o \; \forall t' \in \mathbb{R}_+ \; \forall x' \in \mathcal{C}_o \; \big(t' \simeq t, \; x' \simeq x \; \Rightarrow \; f(t', x') \simeq f(t, x)\big)$.

(H2') $\forall^{st} x \in \mathcal{C}_o \; \forall x' \in \mathcal{C}_o \; \forall t \in \mathbb{R}_+ \; \big(x' \simeq x \; \Rightarrow \; f(t, x') \simeq f(t, x)\big)$.

(H3') $\forall x \in \mathcal{C}_o$ et limité $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t, x)$ est limité.

(H4') $\exists^{st} f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall^{st} x \in \mathcal{C}_o \; \forall R \simeq +\infty \quad f^o(x) \simeq \frac{1}{R} \int_0^R f(t, x) dt.$$

Les lemmes suivants sont les homologues des lemmes 3.3.6, 3.3.7 et 3.3.8, pages 43 et 45.

Lemme 4.3.6. — *On suppose que les hypothèses (H1), (H2) et (H4) sont satisfaites. Alors, la fonction f^o dans (H4) est continue et vérifie*

$$f^o(x) \simeq \frac{1}{R}\int_0^R f(t,x)dt$$

pour tout $x \in \mathcal{C}_o$ et presque standard, et tout $R \simeq +\infty$.

Lemme 4.3.7. — *On suppose que les hypothèses (H1), (H2) et (H4) sont satisfaites. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Alors, pour tout $t \geq 0$ et limité, et tout $x \in \mathcal{C}_o$ et presque standard, il existe $\alpha = \alpha(\varepsilon, t, x)$ tel que $\varepsilon < \alpha \simeq 0$ et*

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,x)d\tau \simeq T.f^o(x)$$

pour tout T dans $[0,1]$.

Lemme 4.3.8. — *Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On suppose que*

(S-QB) *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in \mathcal{C}_o$, si t et x sont limités alors $F(t,x)$ est limité.*[1]

Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard, et soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad t \geq 0 \\ x_0 = \phi. \end{cases} \tag{4.25}$$

Soit t_0 dans I tel que $t_0 \geq 0$ et limité, et x est limitée sur l'intervalle $[0,t_0]$. Alors, la fonction x est

1. *S-continue sur l'intervalle $[-r, t_0]$.*
2. *définie et limitée pour tout $t \geq t_0$, t dans le halo de t_0.*

Remarque 4.3.6. — Sous les hypothèses du lemme 4.3.8 nous avons : la S-continuité de la fonction x sur l'intervalle $[-r, t_0]$ implique que la fonction x_t est S-continue et donc presque standard pour tout t dans l'intervalle $[0,t_0]$.

Esquisse de la démonstration du lemme 4.3.8. —

1. Sur l'intervalle $[-r, 0]$ les fonctions x et ϕ coïncident. La fonction ϕ étant standard et continue, elle est S-continue. Il en sera de même de x. Pour le reste de la preuve, c.-à-d. montrer que la fonction x est S-continue sur l'intervalle $[0,t_0]$, il est identique à celui correspondant au lemme 3.3.8, page 45.

2. Bien que la preuve du point 2 du lemme ne diffère que de très peu de celle qui lui correspond au lemme 3.3.8 cité plus haut, nous allons la reprendre ici.

Posons $I = [-r, b[$, $0 < b \leq \infty$.

1ère partie. — Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $b \simeq t_0$ et examinons chacun des cas suivants :

[1] *Pour rappel, l'hypothèse (S-QB) est la définition de la S-quasi-bornitude pour une fonction F. Pour F standard, ce n'est autre que la caractérisation non standard de la définition de la quasi-bornitude (pour la définition classique, se référer à la définition 1.2.8 et à la proposition 1.2.6, page 13).*

1er cas : Pour tout $t \in [t_0, b[$, $x(t)$ est limité. — Comme sur l'intervalle $[-r, 0]$ la fonction x coïncide avec la fonction ϕ et que cette dernière est standard et continue, x est alors limitée sur $[-r, 0]$. D'autre part, x étant limitée sur $[0, t_0]$ par hypothèse, il s'en suit que x est limitée sur tout l'intervalle $[-r, b[$, et donc x_t l'est aussi pour tout $t \in [0, b[$. On en déduit que $\lim_{t \to b^-} x(t)$ existe. En effet, si $t, t' \in [0, b[$ sont tels que $t \leq t'$, alors

$$|x(t') - x(t)| \leq \int_t^{t'} |F(s, x_s)| ds \leq (t' - t) \sup_{s \in [0,b[} |F(s, x_s)|.$$

Puisque $\sup_{s \in [0,b[} |F(s, x_s)|$ est limité, indépendamment des valeurs que prennent t et t', cela entraîne que la différence $x(t') - x(t)$ tend vers 0 lorsque t et t' tendent, simultanément, vers b^-. D'où $\lim_{t \to b^-} x(t)$ existe. En posant $x(b) = \lim_{t \to b^-} x(t)$, la fonction x est prolongée en une fonction continue sur l'intervalle $[-r, b]$. Comme $x_b \in \mathcal{C}_o$, il existe une solution de l'équation associée à (4.25) issue du point (b, x_b), qui est définie à droite de b, ce qui contredit le caractère maximal (non prolongeabilité) de la solution x.

2ème cas : Il existe $t' \in [t_0, b[$ tel que $x(t') \simeq \infty$. — Par continuité de x, il existe $t \in [t_0, b[$ tel que x soit limitée sur l'intervalle $[t_0, t]$ et $x(t) \not\simeq x(t_0)$. D'après le point 1 montré plus haut, la fonction x est S-continue sur l'intervalle $[0, t]$. Comme $t \simeq t_0$, il s'ensuit que $x(t) \simeq x(t_0)$, ce qui est absurde.

Ainsi b est tel que $t_0 \ll b$.

2ème partie. — Supposons, encore par l'absurde, qu'il existe $t' \in [t_0, b[$ tel que $t' \simeq t_0$ et $x(t')$ ne soit pas limité. Alors une argumentation analogue à celle utilisée dans le deuxième cas de la première partie de la preuve ci-dessus entraîne une contradiction. Ceci prouve bien que $x(t)$ est limitée dans le halo de t_0 et achève la preuve du lemme 4.3.8. ■

L'approximation, sous les hypothèses (H1)-(H5), du problème (4.18) par le problème moyennisé (4.19) est donné par le théorème ci-après. Il a pour formulation interne l'énoncé suivant :

Théorème 4.3.9 (Théorème KBM - EI). — *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction vérifiant les conditions (H1)-(H5) de la page 61. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0$. Soient y la solution du problème (4.19) et $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$, L dans J, et tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ tel que, pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0]$, toute solution x du problème (4.18) est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$ et vérifie $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L]$.*

L'énoncé externe du résultat du théorème 4.3.9 s'écrit :

Théorème 4.3.10 (Théorème KBM - EE). — *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les conditions (H1)-(H5) sont satisfaites. Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard. Soient y la solution du problème (4.19) et $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitesimal. Alors, pour tout $L > 0$, L standard dans J, toute solution x du problème (4.18) est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Commentaire 4.3.1. — Sans l'hypothèse (H5), en rajoutant une condition supplémentaire sur les solutions du problème (4.18), il est là aussi possible d'énoncé un résultat semblable à celui du théorème 3.3.11, page 47. Il se démontre moyennant le lemme 4.2.2.

Théorème 4.3.11 (Théorème KBM $\circ$ Bis -EE). — *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les conditions (H1) - (H4) sont satisfaites. Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. Soient $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution du problème (4.18), et $L > 0$ et standard appartement à I. On suppose que sur l'intervalle $[0, L]$ la solution x est limitée. Alors, il existe une solution y du problème moyennisé (4.19) définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$ et vérifiant $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L]$.*

Démonstration du théorème 4.3.10. — Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale du problème (4.18). Nous allons montrer que l'hypothèse 1 (la propriété stroboscopique) du Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDFR (théorème 4.2.3) est vérifiée.

Soit t_0 un instant d'observation de la stroboscopie, c.-à-d. $t_0 \in I$, $t_0 \geq 0$ et limité, et $x(t)$ et $f^o(x_t)$ sont limités pour tout $t \in [0, t_0]$. D'après le point 1 du lemme 4.3.8, x est S-continue sur l'intervalle $[-r, t_0]$. Puis de la remarque 4.3.6, on déduit que x_t est presque standard pour tout $t \in [0, t_0]$, et donc, en particulier, x_{t_0} est presque standard. Le lemme 4.3.7 implique alors l'existence de $\alpha = \alpha(\varepsilon, t_0, x_{t_0})$ tel que $\varepsilon < \alpha \simeq 0$ et

$$\forall T \in [0,1] \qquad \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(t, x_{t_0}) dt \simeq T.f^o(x_{t_0}). \tag{4.26}$$

En vertu du point 2 du lemme 4.3.8, le changement de variables suivant est bien défini :

$$T = \frac{t - t_0}{\alpha} \quad \text{et} \quad X(\theta, T) = \frac{x_{t_0 + \alpha T}(\theta) - x_{t_0}(\theta)}{\alpha}, \ \theta \in [-r, 0], \ T \in [0, 1]. \tag{4.27}$$

Comme cas particulier, pour $\theta = 0$ et $T \in [0, 1]$, nous avons

$$X(0, T) = \frac{x(t_0 + \alpha T) - x(t_0)}{\alpha}. \tag{4.28}$$

L'EDFR dans (4.18), à travers le changement de variables (4.27), devient

$$\frac{\partial X}{\partial T}(0, T) = f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} T, x_{t_0} + \alpha X(\cdot, T)\right),$$

qui s'écrit de manière équivalente

$$X(0, T) = \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} t, x_{t_0} + \alpha X(\cdot, t)\right) dt. \tag{4.29}$$

Soient à présent $\theta \in [-r, 0]$ et $T \in [0, 1]$. Comme $t_0 + \alpha T + \theta \simeq t_0 + \theta$, de la S-continuité de x sur l'intervalle $[-r, t_0 + \alpha]$ (qui est une conséquence des points 2 et 1, respectivement, du lemme 4.3.8) il vient que

$$\alpha X(\theta, T) = x_{t_0 + \alpha T}(\theta) - x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \alpha T + \theta) - x(t_0 + \theta) \simeq 0.$$

Retournons à présent à (4.29). Comme x_{t_0} est presque standard, il en est de même de $x_{t_0} + \alpha X(\cdot, T)$ pour tout $T \in [0,1]$. Alors, moyennant l'hypothèse (H2') et l'approximation (4.26), nous obtenons, pour $T \in [0,1]$

$$\begin{aligned} X(0,T) &\simeq \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} t, x_{t_0}\right) dt \\ &= \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(t, x_{t_0}) dt \\ &\simeq T.f^o(x_{t_0}). \end{aligned}$$

Posons $\mu = \varepsilon$ et soit $t_1 = t_0 + \alpha$ l'instant suivant d'observation de la stroboscopie. Ils sont tels que :

$$\mu < t_1 - t_0 \simeq 0,\ [t_0, t_1] \subset I \text{ et } \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = X(0,1) \simeq f^o(x_{t_0})$$

avec $x(t) \simeq x(t_0)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$ puisque x est S-continue sur $[t_0, t_1] \subset [-r, t_1]$.

Ainsi, la propriété stroboscopique (l'hypothèse 1 du Lemme de stroboscopie) est bien vérifiée. Finalement, comme la dernière condition du lemme de stroboscopie sur l'unicité des solutions du problème (4.19) est satisfaite par hypothèse, il ne reste plus qu'à déduire le résultat du théorème 4.3.10 de celui-ci. ■

Commentaire 4.3.2. — Comme nous l'avons fait à la fin de chacun des chapitres précédents, nous allons nous intéresser à présent aux deux cas que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications. Il s'agit du cas périodique et de celui plus général, le cas presque périodique. De même qu'au chapitre 2, la technique de moyennisation élaborée dans ce chapitre se simplifie quelque peu pour ces deux cas. La simplification concerne le choix du grossissement de la loupe intervenant dans la preuve du Théorème KBM. Mais l'apport principal est surtout du coté des hypothèses qui se retrouvent considérablement affaiblies.

1. *Cas périodique.* — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et 1-périodique en sa première variable. On suppose que l'hypothèse (H1) en page 61 est satisfaite et que la fonction f est quasi-bornée. Nous avons vu au chapitre 3, page 49, que la fonction f vérifie alors les hypothèses (H2) et (H3). Soit f^o la fonction moyenne de f. Elle est donnée par

$$f^o(x) = \int_0^1 f(t,x)dt, \qquad x \in \mathcal{C}_o.$$

En supposant enfin que la condition (H5) est vraie, on montre la propriété stroboscopique de la manière suivante :

Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale du problème (4.18) et soit t_0 un instant d'observation de la stroboscopie, c.-à-d. $t_0 \in I$, $t_0 \geq 0$ et limité, et $x(t)$ et $f^o(x_t)$ sont limités pour tout $t \in [0, t_0]$. En vertu du point 1 du lemme 4.3.8, x est S-continue sur l'intervalle $[-r, t_0]$. Puis de la remarque 4.3.6, on déduit que x_t est presque standard pour tout $t \in [0, t_0]$. En particulier, x_{t_0} est presque standard.

Le changement de variables (4.27) devient à présent

$$T = \frac{t - t_0}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad X(\theta, T) = \frac{x_{t_0+\varepsilon T}(\theta) - x_{t_0}(\theta)}{\varepsilon}, \; \theta \in [-r, 0], \; T \in [0, 1] \tag{4.30}$$

qui est bien défini d'après le point 2 du lemme 4.3.8. De même, (4.28) donne

$$X(0, T) = \frac{x(t_0 + \varepsilon T) - x(t_0)}{\varepsilon}, \quad T \in [0, 1].$$

Sous le changement de variables (4.30), l'EDFR dans (4.18) se transforme en l'équation intégrale suivante

$$X(0, T) = \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + t, x_{t_0} + \varepsilon X(\cdot, t)\right) dt. \tag{4.31}$$

En vertu des points 2 et 1, respectivement, du lemme 4.3.8, la fonction x est S-continue sur l'intervalle $[-r, t_0 + \varepsilon]$. Soient $\theta \in [-r, 0]$ et $T \in [0, 1]$. Comme $t_0 + \varepsilon T + \theta \simeq t_0 + \theta$, il vient que

$$\varepsilon X(\theta, T) = x_{t_0+\varepsilon T}(\theta) - x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \varepsilon T + \theta) - x(t_0 + \theta) \simeq 0.$$

Donc $x_{t_0} + \varepsilon X(\cdot, T)$ est presque standard pour tout $T \in [0, 1]$, puisque x_{t_0} l'est. Moyennant l'hypothèse (H2'), l'équation intégrale (4.31) donne, pour $T \in [0, 1]$

$$X(0, T) \simeq \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + t, x_{t_0}\right) dt = \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+T} f(t, x_{t_0}) dt. \tag{4.32}$$

Posons $\mu = \varepsilon/2$ et choisissons comme instant suivant d'observation de la stroboscopie l'instant $t_1 = t_0 + \varepsilon$. Nous avons alors : $\mu < t_1 - t_0 \simeq 0$, $[t_0, t_1] \subset I$, et

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = X(0, 1) \simeq \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+1} f(t, x_{t_0}) dt = \int_0^1 f(t, x_{t_0}) dt = f^o(x_{t_0})$$

avec $x(t) \simeq x(t_0)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$ puisque x est S-continue sur tout l'intervalle $[-r, t_1]$.

Ce qui précède permet de conclure quand à la déduction du Théorème KBM dans le cas périodique du Lemme de stroboscopie où l'ES est une EDFR.

2. *Cas presque périodique.* — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et presque périodique en sa première variable. On suppose que f vérifie les hypothèses (H1) et (H2), page 61, ainsi que la condition de quasi-bornitude. Alors, d'une part, il existe $f^o : \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et continue telle que

$$f^o(x) \simeq \frac{1}{\omega} \int_s^{s+\omega} f(t, x) dt \tag{4.33}$$

pour tout $x \in \mathcal{C}_o$ et presque standard, tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $\omega \simeq +\infty$. L'hypothèse (H4) est obtenue pour $s = 0$. D'autre part, f satisfait la condition (H3) (voir chapitre 3, page 49, pour les détails). Il ne reste plus qu'à supposer l'hypothèse (H5) vraie et montrer que la propriété stroboscopique est vérifiée.

Pour ce faire, on procède de manière analogue au cas périodique ci-dessus. Rappelons cependant que dans ce dernier cas, au voisinage du point (t_0, x_{t_0}), nous avions considéré une loupe de grossissement $1/\varepsilon$. Dans le cas présent, c.-à-d. le cas presque périodique, on choisit une loupe de grossissement $1/\varepsilon\omega$ avec ω un réel quelconque mais fixé, vérifiant : $\omega \simeq +\infty$ et $\varepsilon\omega \simeq 0$. L'approximation (4.32) devient ici

$$X(0,T) \simeq \int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \omega t, x_{t_0}\right) dt = \frac{1}{\omega} \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+\omega T} f(t, x_{t_0}) dt$$

pour tout $T \in [0,1]$. On pose alors $t_1 = t_0 + \varepsilon\omega$ $(T = 1)$. Ceci donne, moyennant l'approximation (4.33)

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = X(0,1) \simeq \frac{1}{\omega} \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon+\omega} f(t, x_{t_0}) dt \simeq f^o(x_{t_0}).$$

4.4 Cas particulier des équations différentielles à retard ponctuel rapidement oscillantes

Nous nous intéressons dans ce dernier paragraphe au cas particulier des problèmes à valeurs initiales, associés à des équations différentielles à retard ponctuel, rapidement oscillantes, qui s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t), x(t-r)\right), \quad t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{4.34}$$

Notre objectif est de vérifier que le résultat du théorème 4.3.10 dans le cas du problème (4.34) reste vrai sans la condition de quasi-bornitude uniforme.

Rappelons que le retard r est supposé standard et non nul. Sur tout intervalle de longueur r l'équation associée au problème (4.34) est une EDO rapidement oscillante. L'idée est alors d'utiliser la méthode "pas-à-pas" (appelée aussi méthode d'intégration séquentielle) qui consiste à "regarder" une solution du problème (4.34), successivement, sur les intervalles $[0, r]$, $[r, 2r]$, etc.

Reprenons, en adaptant les notations au problème (4.34), toutes les hypothèses en page 61, excepté celle concernant la condition de quasi-bornitude uniforme.

Supposons donc que dans le problème (4.34) les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{C}_o$ sont standard. De plus nous supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(H1) La fonction f est continue.

(H2) La continuité de $f = f(t, x_1, x_2)$ en $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ est uniforme par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$.

(H3) Il existe une fonction standard $f^o : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall^{st} x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \ \forall R \simeq +\infty \quad f^o(x_1, x_2) \simeq \frac{1}{R}\int_0^R f(t, x_1, x_2)dt.$$

(H4) Le problème moyennisé associé au problème (4.34)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f^o(y(t), y(t-r)), & t \geq 0 \\ y(t) = \phi(t), & t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{4.35}$$

admet une solution unique.

Le Théorème KBM correspondant au cas du problème (4.34) a pour énoncé externe le résultat suivant :

Théorème 4.4.1 (Théorème KBM - EE). — *On suppose que les conditions (H1)-(H4) sont vérifiées. Soient y la solution du problème (4.35) et $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitesimal. Alors, pour tout $L > 0$ et standard dans J, toute solution x du problème (4.34) est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Esquisse de la démonstration. — Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale du problème (4.34). Soient $L > 0$ et standard dans J, et $m \in \mathbb{N}$ tel que $mr \leq L < (m+1)r$ (m est standard). L'idée, comme nous l'avons indiqué plus haut, est de "regarder" la fonction x comme solution du problème (défini par une EDO rapidement oscillante) donné par

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, \bar{x}(t), x(t-r)\right), & kr \leq t \leq L' \\ \bar{x}(kr) = x(kr) \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{N}$ est tel que $0 \leq k \leq m$, et où $L' = (k+1)r$ si $k < m$ et $L' = L$ si $k = m$.

Une récurrence externe sur les entiers k, moyennant le théorème 2.3.2, page 22, permet de vérifier le résultat suivant :

Proposition 4.4.2. — *La solution x est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L']$ et vérifie l'approximation $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L']$.*

La solution y est, elle aussi, regardée comme la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}(t) = f^o(\bar{y}(t), y(t-r)), & kr \leq t \leq L' \\ \bar{y}(kr) = y(kr) = {}^o\big(x(kr)\big). \end{cases}$$

avec $0 \leq k \leq m$, en tenant compte du fait que $x_{|[-r,0]} = y_{|[-r,0]} = \phi$. ■

Annexe A

Analyse Non Standard : notions de base

Nous exposons dans cette annexe les rudiments de l'ANS nécessaires à la compréhension des énoncés non standard des résultats élaborés dans cette thèse, ainsi qu'au suivi de leurs démonstrations. Nos ouvrages de référence dans la rédaction de cette annexe sont [10, 11, 15]. Pour plus de détails concernant l'ANS, nous renvoyons aussi à [1, 7, 8, 9, 23, 28, 34, 39, 41].

A.1 Formalisation

La théorie des ensembles dans laquelle nous nous sommes placés tout au long de cette thèse, essentiellement pour apporter la preuve à nos résultats, est due à Nelson [39] qui formalisa l'*Analyse non standard* (ANS) de Robinson [42] pour en proposer ce qui s'appelle *Internal Set Theory* (IST). Il s'agit d'une *extension* de la théorie des ensembles. Cette dernière étant habituellement désignée par la théorie ZFC, car fondée sur l'axiomatique de Zermelo et Fraenkel à laquelle on rajoute l'axiome du choix. La théorie IST est obtenue par introduction d'un nouveau prédicat à une place noté *st* (lire, *standard*) et trois schémas d'axiomes régissant l'utilisation de ce dernier. L'extension est *consistante* en ce sens que tout théorème de ZFC reste vrai dans IST.

L'introduction de *st* amène à distinguer deux types de formules : celles qui peuvent s'écrire sans utiliser le prédicat *st* sont appelées *formules internes*. Les autres, qui contiennent le prédicat *st* ou ses dérivés, sont appelées *formules externes*.

Notons que seules les formules internes permettent de définir des ensembles. Ainsi, si E est un ensemble et $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ est une formule, la collection $\{x \in E : \mathcal{F}(x)\}$ n'est un ensemble que si $\mathcal{F}$ est interne. Par exemple, la collection des entiers standard n'est pas un ensemble. Par commodité, on écrira aussi $\{x \in E : \mathcal{F}(x)\}$ pour des formules externes, mais les éléments de E ainsi délimités peuvent ne pas constituer un ensemble. En ce cas on dira qu'on a défini une *collection externe*, et on s'autorisera à la noter par un symbole, ainsi qu'à pratiquer sur elles les opérations booléennes binaires telles l'intersection, la réunion, le complément, etc.

Par opposition au langage non standard (ou langage d'IST) qui utilise le prédicat *st*, on parlera de langage *classique* pour désigner le langage de ZFC.

La théorie IST est une *extension conservative* de ZFC, c.-à-d. tout théorème interne de IST est en fait déjà un théorème de ZFC. Il s'en suit que si ZFC ne possède pas de contradiction, IST n'en a pas non plus.

Signalons l'existence d'un procédé de Logique qui légitime l'utilisation de techniques puisées dans la théorie IST pour montrer des résultats exprimables par un énoncé dans ZFC. Il s'agit de l'algorithme de réduction dû à Nelson, qui permet de montrer que tout énoncé externe possède une traduction interne au sens suivant : si $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x_1, \ldots, x_n)$ est un énoncé du langage IST n'ayant pas d'autres variables libres que $x_1, \ldots, x_n$, on peut obtenir un énoncé interne $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(x_1, \ldots, x_n)$ qui est équivalent à $\mathcal{E}$ dès que $x_1, \ldots, x_n$ sont standard.

Nous verrons deux exemples d'application de cet algorithme dans l'annexe suivante.

Quantificateurs externes. — Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ une formule. Les notations suivantes sont adoptées dans la manipulation des quantificateurs externes :

- $\forall^{st} x\ \mathcal{F}(x)$ comme abréviation de $\forall x\ \big(st(x)\ \Rightarrow\ \mathcal{F}(x)\big)$, où $st(x)$ se lit "x est standard".
- $\exists^{st} x\ \mathcal{F}(x)$ comme abréviation de $\exists x\ \big(st(x)$ et $\mathcal{F}(x)\big)$.
- $\exists^{stfini} x\ \mathcal{F}(x)$ comme abréviation de $\exists x\ \big(st(x),\ fini(x)$ et $\mathcal{F}(x)\big)$, où $fini(x)$ signifie que l'ensemble x est fini.

Axiomes. — Les schémas d'axiomes codifiant l'utilisation du prédicat *st* sont :

Transfert. — Pour toute formule interne $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ où tous les paramètres sont standard et où x est une variable libre[1], on a l'implication suivante :

$$\forall^{st} x\ \mathcal{F}(x)\ \Rightarrow\ \forall x\ \mathcal{F}(x)$$

(ou, de façon équivalente : $\exists x\ \mathcal{F}(x)\ \Rightarrow\ \exists^{st} x\ \mathcal{F}(x)$).

Idéalisation. — Pour toute formule interne $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, y)$ à deux variables libres x et y, on a l'équivalence :

$$\forall y\ \exists^{st} x\ \mathcal{B}(x, y)\ \Leftrightarrow\ \exists^{stfini} z\ \forall y\ \exists x \in z\ \mathcal{B}(x, y).$$

Standardisation. — Pour toute formule, interne ou externe, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ où x est une variable libre, on a :

$$\forall^{st} x\ \exists^{st} y\ \forall^{st} z\ \big(z \in y\ \Leftrightarrow\ z \in x \text{ et } \mathcal{F}(z)\big).$$

Quelques conséquences remarquables des axiomes. —

- Transfert. —
  a) Tous les objets spécifiques des mathématiques classiques sont standard. Par exemple, $\emptyset$, $\{0\}$, 3, sin, ..., $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, ..., $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, ...
  b) Une fonction standard prend des valeurs standard aux points standard.
- Idéalisation. —
  a) Il existe un nombre réel plus petit en valeur absolue que tout nombre réel standard et positif. Il est dit *infinitésimal*.

[1] Une variable est dite libre si elle n'apparaît pas dans le champ d'un quantificateur, liée sinon. Exemple : dans la formule $(\forall y\ \ x \geq 0 \Rightarrow x + y \geq y)$, x est libre et y est liée.

b) Tout ensemble infini possède des éléments non standard, et un ensemble n'a que des éléments standard si et seulement si il est standard et fini.

– Standardisation. —

a) Soient E un ensemble et $A = \{x \in E : \mathcal{F}(x)\}$ où $\mathcal{F}$ est une formule interne ou externe. Il existe alors un unique ensemble standard, appelé *standardisé* de A et noté ${}^{s}A$, ayant pour éléments standard, les éléments standard de A.

b) Pour tout nombre réel limité x (c'est un nombre réel dont la valeur absolue est majorée par au moins un réel standard)[2], il existe un nombre réel standard, appelé *partie standard* de x et noté ${}^{o}x$, tel que ${}^{o}x \simeq x$, c.-à-d. le nombre réel ${}^{o}x - x$ est infinitésimal.

A.2 Lexique non standard

Soient x un nombre réel et $|x|$ sa valeur absolue. On dit que x est :
– *infinitésimal* si $|x| < a$ pour tout nombre réel standard et positif a.
– *limité* si $|x| < a$ pour un certain nombre réel standard et positif a.
– *appréciable* s'il est limité et non infinitésimal.
– *non limité* (on dit aussi *infiniment grand*) s'il n'est pas limité.
En particulier tout réel standard est limité, et tout réel standard non nul est appréciable.

Pour des nombres réels x et y, nous utiliserons les notations suivantes :
– $x \simeq y$ pour $x - y$ infinitésimal. On dit que x et y sont *infiniment proches*.
– $x \not\simeq y$ pour $x - y$ non infinitésimal.
– $x \simeq \infty$ (resp. $+\infty$) pour x *non limité* (resp. non limité et positif).
– $x \ll y$ pour $x < y$ et $x \not\simeq y$.

Soient d un entier naturel standard et $|\cdot|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Un vecteur x dans $\mathbb{R}^d$ est *infinitésimal* (resp. *limité*, *non limité*) si sa norme $|x|$ est infinitésimale (resp. limitée, non limitée).

Les notions ci-dessus s'étendent à tout espace métrique standard. Soit (E, d) un tel espace et soient x et y deux éléments de E et A une partie interne ou une collection externe de E.

– On dit que x et y sont *infiniment proches*, et on note $x \simeq y$, si $d(x, y) \simeq 0$.
– On dit que x est *presque standard* dans E s'il existe dans E un élément standard x_0 tel que $x \simeq x_0$. L'élément x_0 est appelé *partie standard* de x. Il est unique et est noté également ${}^{o}x$.
  Rappelons que dans $\mathbb{R}^d$, où d est standard, tout limité est presque standard.
– On appelle *halo métrique* de x, et on note $\mathrm{hal}(x)$, la collection, généralement externe, des y qui sont infiniment proches de x.
– On appelle *halo* de A la collection hal(A)= $\{y \in E : \exists x \in A,\ x \simeq y\}$.

[2]Voir paragraphe A.2

A.3 Traduction de quelques notions classiques

Fonctions continues. — Soient E et F deux espaces métriques standard et $f : E \to F$ une fonction standard.

- La fonction f est dite continue en un point standard x_0 de E, si et seulement si :
$$\forall x \ \big(x \simeq x_0 \ \Rightarrow \ f(x) \simeq f(x_0)\big).$$
- La fonction f est dite continue sur E si et seulement si :
$$\forall^{st} x \ \forall y \ \big(x \simeq y \ \Rightarrow \ f(x) \simeq f(y)\big).$$
- La fonction f est dite uniformément continue sur E si et seulement si :
$$\forall x \ \forall y \ \big(x \simeq y \ \Rightarrow \ f(x) \simeq f(y)\big).$$

Topologie sur un espace métrique. — Soit (E, d) un espace métrique standard, et soient y un élément standard de E et A un sous-ensemble standard de E.

- A est ouvert si et seulement si : $\forall^{st} x \ \mathrm{hal}(x) \subset A$.
- A est fermé si et seulement si : $\forall x \in A$ (x presque standard dans $E \ \Rightarrow \ {}^o x \in A$).
- $y \in \overline{A}$ (adhérence de A) si et seulement si : $y \in \mathrm{hal}(A)$.
- A est compact si et seulement si : $\forall x \in A$ (x est presque standard dans E et ${}^o x \in A$).

A.4 S-continuité, ombre et Théorème de l'ombre continue

Les caractérisations non standard en général et celles citées au paragraphe précédent en particulier ne sont valables que pour les objets standard. Toutefois ces mêmes définitions (exprimées par ces caractérisations) présentent un intérêt en soi, c.-à-d. pas seulement pour des objets standard. Ainsi, pour les objets non standard, on dispose donc de la notion classique et d'une notion non standard (ou S-notion), a priori différente, donnée par la définition en question.

Un exemple de S-notion que l'on rencontre très souvent est la S-continuité.

S-continuité. — Soient E et F deux espaces métriques standard. Soit $f : E \to F$ une fonction, non nécessairement standard. On dit que f est *S-continue*

- en un point x si et seulement si : $\forall y \in E \ \big(y \simeq x \ \Rightarrow \ f(y) \simeq f(x)\big)$.
- sur E si et seulement si :
$$\forall x \in E \ \forall y \in E \ \big(x \text{ et } y \text{ presque standard et } x \simeq y \ \Rightarrow \ f(x) \simeq f(y)\big).$$

Proposition A.4.1. *[11] — Soient E et F deux espaces métriques standard et $f : E \to F$ une fonction. S'il existe une fonction standard $g : E \to F$ telle que, pour tout x presque standard, $f(x) \simeq g(x)$, alors f est S-continue en tout point presque standard.*

Un autre exemple de S-notion est donné par la notion d'ombre.

Soit E un espace métrique standard. Si A est une partie standard de E, nous avons vu au paragraphe précédent que les points standard adhérents à A sont ceux qui appartiennent à $\mathrm{hal}(A)$. Comme $\overline{A}$ est un ensemble standard, il en résulte que $\overline{A}$ est le standardisé de $\mathrm{hal}(A)$. Plus généralement, nous avons :

Ombre. — Soit A une partie interne ou une collection externe de E. On appelle *ombre* de A l'ensemble standard, noté ${}^oA$, défini par : ${}^oA = {}^s\text{hal}(A)$.

Quelques propriétés de l'ombre.—

- Si x est presque standard dans E et ${}^ox$ est sa partie standard, alors ${}^o\{x\} = \{{}^ox\}$. C'est pourquoi ${}^ox$ est appelée indifféremment partie standard de x ou ombre de x.
- Toute partie interne ou collection externe de E admet une ombre.
- L'ombre est unique.
- Si A est standard alors ${}^oA = \overline{A}$.
- Si A est interne alors ${}^oA$ est fermé.
- Si A ne contient aucun élément presque standard dans E alors ${}^oA = \emptyset$.

Remarquons que si $\varepsilon > 0$ et infinitésimal, et A est le graphe de la fonction $f(x) = \sin(x/\varepsilon)$ sur l'intervalle $[-1, -1]$ alors ${}^oA = [-1, -1] \times [-1, -1]$. Ainsi, A est un graphe de fonction, mais pas son ombre ${}^oA$. Cela est dû au fait que la fonction f n'est pas S-continue. Ceci nous amène à un résultat important, en l'occurrence le Théorème de l'ombre courte. Mais avant d'énoncer un tel résultat rappelons la définition suivante :

Classe S^o. — Soient E et F deux espaces métriques standard et $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est de classe S^o au point $x \in E$ si f est presque standard et S-continue en x.

On dit que f est de classe S^o sur une partie interne A de E si f est de classe S^o en tout point $x \in E$ presque standard dans A.

Théorème A.4.2 (Théorème de l'ombre continue). *[10]— Soient E et F deux espaces métriques standard et $f : E \to F$ une fonction. Il existe une fonction standard et continue $f_o : E \to F$ telle que, pour tout x presque standard dans E, $f(x) \simeq f_o(x)$, si et seulement si, f est de classe S^o.*

La fonction f_o est unique. On l'appelle l'*ombre* de f et on la note ${}^of$. Elle est obtenue par standardisation comme ceci :

$$\text{Graphe de } {}^of = {}^s\{\big(x, {}^o(f(x))\big) : x \in E,\ x \text{ standard}\}$$

Dans le cas où la fonction f n'est de classe S^o que sur une partie interne A de E, nous avons le résultat suivant :

Corollaire A.4.3. *[11]— Si f est une fonction de classe S^o sur une partie interne A de E, alors l'ombre ${}^of$ de f existe sur ${}^sA$ et vérifie $f(x) \simeq {}^of(x)$ pour tout x de $A \cap {}^sA$ presque standard dans A.*

A.5 Principes de permanence

La distinction entre ensembles internes et collections externes permet souvent de montrer que si une certaine propriété est satisfaite par tous les éléments d'un certain domaine, sa validité déborde nécessairement sur ce dernier pour s'étendre à un domaine plus grand.

C'est ce qui s'appelle les *raisonnements par permanence.* Mais avant d'exprimer ces principes de permanence, revenons sur les notions d'ensembles internes et de collections externes et apportons les précisions suivantes :

Ensemble interne. — Un ensemble interne est un ensemble défini par une formule interne. En particulier, tous les ensembles déjà définis en mathématiques classiques sont internes. A ces ensembles s'appliquent sans restriction tous les théorèmes classiques.

Collection externe. — On appelle ainsi toute collection d'éléments d'un ensemble interne, définie par une formule externe, pour laquelle au moins un théorème classique est mis en défaut.

Exemples d'ensembles internes et de collections externes. —

- Soit $\varepsilon > 0$ (infinitésimal ou pas). Les ensembles suivants sont internes :
$$[-\varepsilon, 0], \qquad \{x \in \mathbb{R} : \varepsilon x \leq 1\}, \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x/\varepsilon)\}.$$
- Soit $\varepsilon > 0$ et infinitésimal. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x + \varepsilon \simeq x\}$ est interne, et égal à $\mathbb{R}$, bien que la formule qui le définit comme collection de nombres réels soit externe.
- La collection $\text{hal}(0) = \{x \in \mathbb{R} : x \simeq 0\}$ est externe, car si elle constituait un ensemble interne, celui-ci vérifierait le théorème classique : "Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure". Or, hal(0) étant majoré, par exemple, par 1, s'il admettait une borne supérieure m, elle ne pourrait être infinitésimale car $2m$ serait un infinitésimal strictement supérieur à m. Elle ne pourrait être appréciable, non plus, car $m/2$ le serait aussi. Donc, hal(0) met ce théorème en défaut.

Parmi les principes de permanence les plus utilisés figure celui-ci :

Principe de Cauchy. — Aucune collection externe ne constitue un ensemble interne.

Ce principe, trivial à première vue, est très utile dans les applications où il s'utilise de la manière suivante : soient E un ensemble interne et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$ une propriété interne. Alors, $\{x \in E : \mathcal{P}(x)\}$ est un sous-ensemble interne de E. Donc, si G est une collection externe d'éléments de E et que l'on a démontré que $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les éléments de G, alors nécessairement $\mathcal{P}$ est encore vraie pour certains éléments hors de G.

Le résultat suivant, utilisé à plusieurs reprises dans cette thèse, en est une illustration :

Théorème A.5.1. *[11] — Soit $(\eta_i)_{i\in I}$ une famille interne de réels infinitésimaux (resp. limités). Alors $\sup\{\eta_i : i \in I\}$ et $\inf\{\eta_i : i \in I\}$ sont infinitésimaux (resp. limités).*

D'autres principes de permanence existent. Nous en citons encore un deuxième ci-après avant de conclure cette annexe. Pour les autres, se référer aux ouvrages cités au début de l'annexe.

Lemme A.5.2 (Lemme de Robinson)**.** *[10] — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $x \geq 0$ et limité, $f(x) \simeq 0$. Alors, il existe $\omega \simeq +\infty$ tel que $f(x) \simeq 0$, pour tout x dans l'intervalle $[0, \omega]$.*

Annexe B

Exemples de réduction : "Quasi-bornitude uniforme" et "Théorème KBM pour les EDFR rapidement oscillantes"

A titre d'exemple et moyennant l'algorithme de réduction de Nelson [39], nous nous proposons de montrer dans cette annexe, dans un premier temps, l'équivalence entre la définition de la quasi-bornitude uniforme et sa caractérisation externe. Celles-ci sont données respectivement par la définition 3.3.1, page 42 et par l'hypothèse (H3'), chapitre 3, page 43, et chapitre 4, page 61. Ensuite, nous prouvons l'équivalence entre les énoncés interne (EI) et externe (EE) du Théorème KBM élaboré pour les EDFR rapidement oscillantes au chapitre 4, page 63.

B.1 Énoncés interne et externe

Nous rappelons dans ce paragraphe la définition et la caractérisation externe de la notion de quasi-bornitude uniforme, puis l'énoncé dans ses deux formulations interne et externe du Théorème KBM correspondant au cas des EDFR rapidement oscillantes.

Définition B.1.1 (Quasi-bornitude uniforme - EI). — Soit $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On dit que la fonction f est quasi-bornée en $x \in \mathcal{C}_o$ uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$ si : $\forall W \subset \mathcal{C}_o$ et borné $\exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in W\ |f(t,x)| < M$.

Définition B.1.2 (Quasi-bornitude uniforme - EE). — Soit $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. La fonction f est dite quasi-bornée en $x \in \mathcal{C}_o$ uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathcal{C}_o$ et limité, $f(t,x)$ est limité dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème B.1.1 (Théorème KBM - EI). — *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction vérifiant les conditions (H1)-(H5) en page 61. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0$. Soient y la solution du problème moyennisé (4.19), page 56, et $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Alors, pour tout $L > 0$, L dans J, et tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L,\delta) > 0$ tel que, pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0]$, toute solution x du problème (4.18), page 56, est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$ et vérifie $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Théorème B.1.2 (Théorème KBM - EE). — *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_o \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard. On suppose que les conditions (H1)-(H5) sont satisfaites. Soit $\phi \in \mathcal{C}_o$ et standard. Soient y la solution du problème moyennisé (4.19) et $J = [-r, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son intervalle maximal d'existence. Soit $\varepsilon > 0$ et infinitesimal. Alors, pour tout $L > 0$, L standard dans J, toute solution x du problème (4.18) est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout t dans $[0, L]$.*

B.2 Réduction

Rappelons que l'algorithme de réduction de Nelson [39] a pour objectif de traduire par une procédure automatique, utilisant les trois principes, Transfert, Idéalisation et Standardisation, tout énoncé externe en un énoncé interne équivalent, qui est en plus standard si les constantes qui y interviennent sont standard.

Une procédure simplifiée mais suffisante pour l'usage que nous souhaitons en faire plus bas suivrait les étapes suivantes :

1. Remplacer tous les prédicats externes par leurs définitions.
2. Déplacer les quantificateurs internes et externes, en respectant les règles usuelles, vers le début de l'énoncé.
3. Appliquer le principe d'idéalisation pour échanger l'ordre des quantificateurs de telle sorte que ceux qui sont externes soient regroupés en début de l'énoncé.
4. Faire en sorte qu'à la fin l'énoncé se réduit à la forme

$$\forall^{st} x \; \exists^{st} y \; \mathcal{F}(x, y, \ldots)$$

où $\mathcal{F}$ est une formule interne. Pour des valeurs standard des variables libres de $\mathcal{F}$, le principe de transfert donne finalement

$$\forall x \; \exists y \; \mathcal{F}(x, y, \ldots).$$

B.2.1 Quasi-bornitude uniforme

L'énoncé externe définissant la notion de quasi-bornitude uniforme étant

"Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathcal{C}_o$ et limité, $f(t, x)$ est limité"

il se traduit en son homologue classique en suivant les étapes ci-après :

1. $\forall t \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathcal{C}_o$ (x limité $\Rightarrow$ $f(t, x)$ est limité), par traduction.
2. $\forall t \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathcal{C}_o \; (\exists^{st} k \;\; |x| < k \;\Rightarrow\; \exists^{st} M \;\; |f(t, x)| < M)$, par définition.
3. $\forall t \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathcal{C}_o \; \forall^{st} k \; \exists^{st} M \; (|x| < k \;\Rightarrow\; |f(t, x)| < M)$[1].

[1] Nous avons appliqué les deux règles suivantes :
$(\exists x \; A(x) \;\Rightarrow\; B)$ équivaut à $\forall x \; (A(x) \;\Rightarrow\; B)$
$(A \;\Rightarrow\; \exists x \; B(x))$ équivaut à $\exists x \; (A \;\Rightarrow\; B(x))$.

4. $\forall^{st}k\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{C}_o\ \exists^{st}M\ (|x| < k \ \Rightarrow\ |f(t,x)| < M)$, par commutation.
5. $\forall^{st}k\ \exists^{stfini}M'\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{C}_o\ \exists M \in M'\ (|x| < k \ \Rightarrow\ |f(t,x)| < M)$, par idéalisation.
6. $\forall^{st}k\ \exists^{stfini}M'\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{C}_o\ (|x| < k \ \Rightarrow\ \exists M \in M'\ \ |f(t,x)| < M)^2$.
7. $\forall k\ \exists^{fini}M'\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{C}_o\ (|x| < k \ \Rightarrow\ \exists M \in M'\ \ |f(t,x)| < M)$, par transfert.

Notons que, pour un ensemble fini M', l'équivalence suivante est vraie :

$$(\exists M \in M'\ \ |f(t,x)| < M)\ \Leftrightarrow\ |f(t,x)| < M_0$$

où $M_0 = \max M'$. L'énoncé au point 7 ci-dessus devient alors :

8. $\forall k\ \exists M_0\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{C}_o\ (|x| < k \ \Rightarrow\ |f(t,x)| < M_0)$.

Ce dernier énoncé traduit bien la définition B.1.1. ■

B.2.2 Théorème KBM

L'énoncé de la conclusion du théorème B.1.2 s'écrit aussi :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \begin{cases} \varepsilon \simeq 0 \\ \Downarrow \\ \text{Toute solution } x \text{ du problème (4.18) est définie au moins} \\ \text{sur l'intervalle } [-r, L] \text{ et vérifie } x(t) \simeq y(t) \text{ pour tout } t \in [0, L]. \end{cases} \tag{B.1}$$

En nommant $\mathcal{F}$ la formule suivante : “Si $\delta > 0$ alors toute solution x du problème (4.18) est définie au moins sur l'intervalle $[-r, L]$ et vérifie $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout $t \in [0, L]$”, l'énoncé (B.1) devient :

$$\forall \varepsilon\ (\forall^{st}\eta\ \ 0 < \varepsilon < \eta \implies \forall^{st}\delta\ \ \mathcal{F})$$

où L est un paramètre réel positif standard. Cet énoncé se transforme successivement en :

1. $\forall \varepsilon\ \forall^{st}\delta\ \exists^{st}\eta\ \big(0 < \varepsilon < \eta \ \Rightarrow\ \mathcal{F}\big)^3$
2. $\forall^{st}\delta\ \forall \varepsilon\ \exists^{st}\eta\ \big(0 < \varepsilon < \eta \ \Rightarrow\ \mathcal{F}\big)$, par commutation.
3. $\forall^{st}\delta\ \exists^{stfini}\eta'\ \forall \varepsilon\ \exists \eta \in \eta'\ \big(0 < \varepsilon < \eta \ \Rightarrow\ \mathcal{F}\big)$, par idéalisation.
4. $\forall^{st}\delta\ \exists^{stfini}\eta'\ \forall \varepsilon\ (\forall \eta \in \eta'\ \ 0 < \varepsilon < \eta \ \Rightarrow\ \mathcal{F})^3$.
5. $\forall \delta\ \exists^{fini}\eta'\ \forall \varepsilon\ (\forall \eta \in \eta'\ \ 0 < \varepsilon < \eta \ \Rightarrow\ \mathcal{F})$, par transfert.

Or, pour un ensemble fini η', nous avons :

$$(\forall \eta \in \eta'\ \ 0 < \varepsilon < \eta)\ \Leftrightarrow\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

où $\varepsilon_0 = \min \eta'$. L'énoncé au point 5 ci-dessus s'écrit alors de manière équivalente :

6. $\forall \delta\ \exists \varepsilon_0\ \forall \varepsilon\ (\varepsilon < \varepsilon_0 \ \Rightarrow\ \mathcal{F})$.

Ceci prouve que la conclusion du Théorème KBM sous son énoncé interne (théorème B.1.2), où $L > 0$ et standard, est vraie. Par transfert, elle l'est pour tout $L > 0$. ■

---

[2]Voir deuxième règle rappelée au bas de la page précédente.

[3]Nous avons appliqué au moins l'une des deux règles suivantes :

$(A \ \Rightarrow\ \forall x\ B(x))$ équivaut à $\forall x\ (A \ \Rightarrow\ B(x))$

$(\forall x\ A(x) \ \Rightarrow\ B)$ équivaut à $\exists x\ (A(x) \ \Rightarrow\ B)$.

Annexe C

Stroboscopie et moyennisation dans les équations différentielles ordinaires : une alternative

Dans cette troisième annexe, nous proposons une variante de la technique de stroboscopie. Elle est moins générale que celles exposées aux chapitres 2 et 3. Cependant, comme nous allons le voir, elle est suffisante dans ses applications au moins dans les problèmes de moyennisation concernant les EDO rapidement oscillantes.

C.1 Stroboscopie dans les EDO : une technique alternative

La technique de stroboscopie que nous développons dans ce paragraphe ne diffère de celles rencontrées aux chapitres 2 et 3 que dans le choix des instants d'observation de la stroboscopie. En effet, nous allons montrer qu'il est possible de choisir des instants d'observation qui soient régulièrement espacés, c.-à-d. la distance entre deux instants successifs quelconques est fixée a priori, mais pas arbitrairement.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $x : I \to \mathbb{R}^d$ une fonction vérifiant $x(0) = x_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et limité. Soit $f^o : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction standard et continue.

Hypothèse 1. — Le problème à valeur initiale

$$\dot{y} = f^o(t, y), \qquad y(0) = {}^o\big(x_0\big) \tag{C.1}$$

admet une solution unique.

Soient y la solution du problème (C.1) et $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Soient $L > 0$ et standard dans J et K un voisinage tubulaire standard autour de $\Gamma = y([0, L])$.

Hypothèse 2. — Il existe $0 < \alpha \simeq 0$ tel que pour tout $t \in I$, si $t \in [0, L]$, $x(t) \in K$ et $t' = t + \alpha$ alors $[t, t'] \subset I$, $x(s) \simeq x(t)$ pour tout $s \in [t, t']$ et $\dfrac{x(t') - x(t)}{t' - t} \simeq f^o(t, x(t))$.

Théorème C.1.1 (Un lemme de stroboscopie). — *Si les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites, alors la fonction x est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L]$.*

Les résultats suivant sont les homologues des lemmes 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, pages 31 et 33. Ils interviennent dans la preuve du théorème C.1.1.

Lemme C.1.2. — *Soit $L_1 > 0$ tel que $L_1 \leq L$ et standard, et $[0, L_1] \subset I$. On suppose que*

1. $x([0, L_1]) \subset K$.
2. *Il existe une suite finie $\{t_n : n = 0 \ldots N+1\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N \leq L_1 < t_{N+1}$ et pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, $t_{n+1} \simeq t_n$, $x(t) \simeq x(t_n)$ pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$ et $\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \simeq f^o(t_n, x(t_n))$.*

Alors, la fonction x vérifie l'approximation $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$.

Esquisse de la démonstration. — On considère la fonction standard $z : [0, L_1] \to \mathbb{R}^d$ définie par $z(t) = {}^o\big(x(t)\big)$ pour t standard dans $[0, L_1]$ et on montre qu'elle est solution du problème (C.1). Ceci prouve en particulier que z et x sont, respectivement, continue et S-continue sur l'intervalle $[0, L_1]$. Par unicité des solutions de (C.1), la fonction z coïncide avec la solution y sur l'intervalle $[0, L_1]$, ce qui a pour conséquence

$$\forall t \in [0, L_1] \quad y(t) = z(t) \simeq z({}^o t) = {}^o\big(x({}^o t)\big) \simeq x({}^o t) \simeq x(t)$$

et prouve le lemme.

Pour vérifier que la fonction z est solution du problème (C.1), on montre dans un premier temps qu'elle est continue. Pour ce faire, puisque x est limitée, il suffit de montrer qu'elle est S-continue et donc z en tant que son ombre sera continue. Dans un second temps, on vérifie que z est telle que

$$\forall t \in [0, L_1] \quad z(t) = {}^o\big(x_0\big) + \int_0^t f^o(s, z(s))ds.$$

La preuve étant identique à celle du lemme 3.2.1, page 31, elle est omise. ■

Remarque C.1.1. — Si on remplace $L > 0$ et standard par $L > 0$ et limité, dans les hypothèses du lemme C.1.2, la S-continuité de la fonction x est encore vérifiée sur l'intervalle $[0, L]$.

Lemme C.1.3. — *Soit $L_1 > 0$ tel que $L_1 \leq L$ et standard, et $[0, L_1] \subset I$. On suppose que*

1. $x([0, L_1]) \subset K$.
2. *Il existe $0 < \alpha \simeq 0$ tel que pour tout $t \in I$, si $t \in [0, L_1]$ et $t' = t + \alpha$ alors $[t, t'] \subset I$, $x(s) \simeq x(t)$ pour tout $s \in [t, t']$ et $\dfrac{x(t') - x(t)}{t' - t} \simeq f^o(t, x(t))$.*

Alors, la fonction x vérifie l'approximation $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$.

Démonstration. — Il suffit de poser $t_n = n\alpha$ pour $n \in \{0, \ldots, N+1\}$ où $N \in \mathbb{N}$ est tel que $t_N \leq L_1 < t_{N+1}$, puis appliquer le lemme C.1.2. ■

Lemme C.1.4. — *La conclusion du lemme C.1.3 reste vraie si on suppose que L_1 est limité (non nécessairement standard).*

Démonstration. (Elle diffère de peu de celle du lemme 3.2.3, page 33). — Dans le cas où L_1 est infinitésimal, il n'y a rien à montrer. Supposons que L_1 est non infinitésimal. En vertu du lemme C.1.3, pour tout standard a tel que $0 < a \leq L_1$, la fonction x est telle que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, a]$. Par permanence, la propriété reste vraie pour un certain $a \simeq L_1$. Comme, pour tout $t \in [a, L_1]$, $x(t) \simeq x(a)$, en conséquence à la remarque C.1.1, et $y(t) \simeq y(a)$, par continuité de y, il s'en suit que $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$. ■

Preuve du théorème C.1.1

Remarque : Elle diffère de peu de celle du théorème 3.2.4, page 34. —

L'ensemble $A = \{L_1 \in [0, L] \ / \ [0, L_1] \subset I \text{ et } x([0, L_1]) \subset K\}$ étant non vide puisque $0 \in A$ et majoré par L, on pose $L_0 = \sup A$. Il existe alors $L_1 \in A$ tel que $L_0 - \alpha < L_1 \leq L_0$. En vertu du lemme C.1.4, nous avons $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L_1]$. D'après l'hypothèse 2, $L_1' = L_1 + \alpha$ est tel que $[L_1, L_1'] \subset I$ et $x(t) \simeq (x(L_1) \simeq y(L_1) \simeq)\ y(t)$ pour tout $t \in [L_1, L_1']$. Supposons que $L_1' \leq L$. Alors $[0, L_1'] \subset I$ et $x([0, L_1']) \subset K$ entraînent que $L_1' \in A$, ce qui est absurde car $L_1' > L_0$. Ainsi $L_1' > L$. Ceci prouve bien que la fonction x est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$ pour tout $t \in [0, L]$. ■

C.2 Moyennisation dans les EDO rapidement oscillantes

Nous allons reprendre le problème traité au paragraphe 2.3, page 21, ainsi que les hypothèses qui lui sont associées.

Soit donc l'EDO rapidement oscillante définie par

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right). \tag{C.2}$$

Supposons que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dans l'équation (C.2) est standard et considérons les hypothèses suivantes :

(H1) La fonction f est continue.

(H2) La continuité de $f = f(t, x)$ en la variable x est uniforme par rapport à la variable temps t.

(H3) Il existe une fonction standard $f^o : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que
$$\forall^{st} x \in \mathbb{R}^d \ \forall R \simeq +\infty \quad f^o(x) \simeq \frac{1}{R} \int_0^R f(t, x) dt.$$

(H4) Pour $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et standard, le problème moyennisé
$$\dot{y} = f^o(y), \qquad y(0) = y_0 \tag{C.3}$$
admet une solution unique.

Moyennant le théorème C.1.1, nous allons re-démontrer le résultat de moyennisation donné par le théorème 2.3.2, page 22, et que nous rappelons ci-après.

Théorème C.2.1 (Théorème KBM). — *On suppose que les hypothèses (H1)-(H4) sont satisfaites. Soit* $y_0 \in \mathbb{R}^d$ *et standard. Soient* y *la solution du problème (C.3) et* $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq \infty$, *son demi-intervalle positif maximal d'existence. Soit* $\varepsilon > 0$ *et infinitésimal. Alors, pour tout* $L > 0$ *et standard dans* J, *toute solution* x *de l'équation (C.2), à valeur initiale* y_0 *à* $t = 0$, *est définie au moins sur l'intervalle* $[0, L]$ *et vérifie* $x(t) \simeq y(t)$ *pour tout* $t \in [0, L]$.

Pour la preuve du théorème C.2.1 nous avons besoin des résultats suivants :

Lemme C.2.2. — *On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Alors, la fonction* f^o *est continue et vérifie*

$$f^o(x) \simeq \frac{1}{R} \int_0^R f(t, x) dt$$

pour tout $x \in K$ *et tout* $R \simeq +\infty$, *où* K *est un compact standard quelconque de* $\mathbb{R}^d$.

Remarque C.2.1. — Le lemme C.2.2 se déduit, indifféremment, du lemme 2.3.5, page 23 ou du lemme 3.3.6, page 43.

Lemme C.2.3. — *On suppose que les hypotheses (H1)-(H3) sont satisfaites. Soit* $\varepsilon > 0$ *et infinitésimal. Soient* K *un compact standard de* $\mathbb{R}^d$ *et* $L > 0$ *et standard. Alors, il existe* $\alpha = \alpha(\varepsilon, K, L)$ *tel que* $0 < \alpha \simeq 0$ *et*

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau \simeq T.f^o(x) \tag{C.4}$$

pour tout $x \in K$, *tout* $t \in [0, L]$ *et tout* $T \in [0, 1]$.

Démonstration. — Soient $x \in K$, $t \in [0, L]$ et $T \in [0, 1]$. Soit $\alpha > 0$. Nous allons distinguer les trois cas suivants :

1er cas : $t \neq 0$. — Réécrivons le membre de gauche de l'approximation (C.4) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau &= T \frac{1}{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau \\ &+ \frac{t}{\alpha} \left(\frac{1}{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau - \frac{1}{t/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau \right). \end{aligned} \tag{C.5}$$

Posons

$$\eta(\varepsilon, x, t, T, \alpha) = \frac{1}{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau - f^o(x).$$

L'équation (C.5) s'écrit alors

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau =$$
$$T f^o(x) + \left(T\eta(\varepsilon, x, t, T, \alpha) + \frac{t}{\alpha} [\eta(\varepsilon, x, t, T, \alpha) - \eta(\varepsilon, x, t, 0, \alpha)] \right).$$

Ceci donne

$$\left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+T\alpha/\varepsilon} f(\tau,x)d\tau - T.f^o(x)\right| = \delta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) \leq \overline{\delta}(\varepsilon,K,L,\alpha)$$

où

$$\delta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) = \left|T\eta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) + \frac{t}{\alpha}[\eta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) - \eta(\varepsilon,x,t,0,\alpha)]\right|$$

et

$$\overline{\delta}(\varepsilon,K,L,\alpha) = \sup\{\delta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) : x \in K, t \in]0,L], T \in [0,1]\}.$$

Soit à présent α tel que $0 < \alpha \not\simeq 0$ et montrons que $\overline{\delta}(\varepsilon,K,L,\alpha) \simeq 0$. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\forall x \in K \ \forall t \in]0,L] \ \forall T \in [0,1] \quad \delta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) \simeq 0.$$

Soient $x \in K$, $t \in]0,L]$ et $T \in [0,1]$. Nous avons :

1. t/ε est limité. — Dans ce cas $t \simeq 0$. Considérons les deux possibilités suivantes :
   (a) T est tel que $T\alpha/\varepsilon$ est limité. — Ceci entraîne que $T \simeq 0$. Comme dans ce cas $\eta(\varepsilon,x,t,T,\alpha)$ et $\eta(\varepsilon,x,t,0,\alpha)$ sont limités, il est clair que $\delta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) \simeq 0$.
   (b) T est tel que $T\alpha/\varepsilon \simeq \infty$. — Puisque dans ce cas $\eta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) \simeq 0$ (en vertu du lemme C.2.2) et $\eta(\varepsilon,x,t,0,\alpha)$ est limité, il s'en suit que $\delta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) \simeq 0$.
2. $t/\varepsilon \simeq \infty$. — En vertu du lemme C.2.2, $\eta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) \simeq 0$ et $\eta(\varepsilon,x,t,0,\alpha) \simeq 0$, et donc nous avons bien $\delta(\varepsilon,x,t,T,\alpha) \simeq 0$.

Ainsi, $\overline{\delta}(\varepsilon,K,L,\alpha) \simeq 0$ pour tout $0 < \alpha \not\simeq 0$. Par permanence, cette propriété continue à être vérifiée jusqu'à un certain $0 < \alpha_1 \simeq 0$.

2ème cas : $t = 0$ et $T \neq 0$. — Posons

$$\eta(\varepsilon,x,T,\alpha) = \frac{1}{T\alpha/\varepsilon}\int_0^{T\alpha/\varepsilon} f(\tau,x)d\tau - f^o(x).$$

Nous avons

$$\left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_0^{T\alpha/\varepsilon} f(\tau,x)d\tau - T.f^o(x)\right| = T|\eta(\varepsilon,x,T,\alpha)| \leq \delta(\varepsilon,K,\alpha)$$

où

$$\delta(\varepsilon,K,\alpha) = \sup\{T|\eta(\varepsilon,x,T,\alpha)| : x \in K, T \in]0,1]\}.$$

Moyennant le lemme C.2.2, il est aisé de voir que $\delta(\varepsilon,K,\alpha) \simeq 0$ pour tout $0 < \alpha \not\simeq 0$. Par permanence, celle-ci reste vraie jusqu'à un certain $0 < \alpha_2 \simeq 0$.

3ème cas : $t = 0$ et $T = 0$. — C'est le cas trivial. N'importe quelle valeur de $\alpha > 0$ convient.

Finalement, il suffit de poser $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ pour rendre la conclusion du lemme vraie.
■

Lemme C.2.4. — *Soient $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ continues. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et limité. On suppose que*

1. *$F(t,x) \simeq G(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout x limité dans $\mathbb{R}^d$.*
2. *$\int_0^t G(s)ds$ est limité pour tout $t \in [0,1]$.*

Alors, toute solution x du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x), \ t \in [0,1] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

est définie et limitée sur l'intervalle $[0,1]$ et vérifie

$$\forall t \in [0,1] \qquad x(t) \simeq x_0 + \int_0^t G(s)ds.$$

Remarque C.2.2. — Le lemme C.2.4 se déduit du lemme 2.3.4, page 23.

Démonstration du lemme C.2.4. — Par permanence, il existe $\omega \simeq +\infty$ tel que $F(t,x) \simeq G(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in B(0,\omega)$ où $B(0,\omega)$ est la boule dans $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon ω. Supposons qu'il existe $t' \in [0,1]$ tel que $x(t') \simeq \infty$. Soit $t \in [0,1]$ tel que $t \leq t'$, $x(t) \simeq \infty$ et $x(s) \in B(0,\omega)$ pour tout $s \in [0,t]$. Alors

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s,x(s))ds \simeq x_0 + \int_0^t G(s)ds.$$

Donc $x(t)$ est limité ; ce qui est absurde. ■

Preuve du théorème C.2.1

Remarque : Elle diffère de peu de celle du théorème 2.3.2, page 22. —

L'hypothèse 1 du théorème C.1.1 étant vérifiée par hypothèse, nous allons montrer que l'hypothèse 2 est satisfaite.

Soient $L \in J$ avec $L > 0$ et standard, et K un voisinage tubulaire standard autour de $\Gamma = y([0,L])$. Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale de l'EDO (C.2), à valeur initiale y_0 à $t = 0$, et soit $t_0 \in I$ tel que $t_0 \in [0,L]$ et $x(t_0) \in K$. En vertu du lemme C.2.3, nous avons

$$\forall T \in [0,1] \qquad \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(t, x(t_0))dt \simeq T.f^o(x(t_0)), \tag{C.6}$$

où $\alpha = \alpha(\varepsilon, K, L)$ est tel que $0 < \alpha \simeq 0$.

Considérons le changement de variables (la loupe de grossissement $1/\alpha$, centrée au point $(t_0, x(t_0))$) :

$$T = \frac{t - t_0}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad X(T) = \frac{x(t_0 + \alpha T) - x(t_0)}{\alpha}, \ T \in [0,1]. \tag{C.7}$$

Sous la loupe (C.7), l'équation (C.2) s'écrit

$$\frac{dX}{dT} = f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}T, x(t_0) + \alpha X(T)\right).$$

Comme $x(t_0)$ est presque standard, il en est de même pour $x(t_0) + \alpha X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^d$ et limité. En vertu de l'hypothèse (H2), nous avons

$$f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}T, x(t_0) + \alpha X\right) \simeq f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}T, x(t_0)\right)$$

pour tout $T \in [0,1]$ et tout $X \in \mathbb{R}^d$ et limité. D'autre part, moyennant (C.6), nous avons

$$\int_0^T f\left(\frac{t_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, x(t_0)\right) dt = \frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{t_0/\varepsilon}^{t_0/\varepsilon + T\alpha/\varepsilon} f(t, x(t_0))dt \simeq T.f^o(x(t_0))$$

qui est limité pour tout $T \in [0,1]$. D'après le lemme C.2.4, X est alors définie sur l'intervalle $[0,1]$, ce qui revient à dire que x est définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \alpha]$, et de plus $X(T)$ est limité et vérifie $X(T) \simeq T.f^o(x(t_0))$ pour tout $T \in [0,1]$.

Posons $t_1 = t_0 + \alpha$. Cet instant t_1 est tel que $[t_0, t_1] \subset I$ et $x(t_0 + \alpha T) = x(t_0) + \alpha X(T) \simeq x(t_0)$ pour tout $T \in [0,1]$, soit en revenant à la variable t, $x(t) \simeq x(t_0)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Il vérifie aussi

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = X(1) \simeq f^o(x(t_0)).$$

En définitif, le théorème C.2.1 est bien une conséquence du théorème C.1.1. ■

Annexe D

Travaux et Publications

Dans cette dernière annexe sont listés nos travaux et publications concernant la moyennisation dans le cadre des EDO et dans celui des EDFR.

[1] *Résonance dans les systèmes différentiels à plusieurs fréquences*, Thèse de Magister, Université de Sidi Bel Abbès, 1994.

[2] Rentrée dans l'atmosphère d'un véhicule spatial : le roulis résonant, *dans*, 2ème Colloque National en Analyse Fonctionnelle et Applications (Sidi Bel Abbès, 1997). *Ann. Math. Univ. Sidi Bel Abbès* 6 (1999), 195–206 (avec T. Sari).

[3] Sur la moyennisation dans les systèmes à plusieurs fréquences, *Maghreb Math. Rev.* (soumis en 1996, accepté en 1999) Sous presse.

[4] On the validity of the averaging method for all time, *Maghreb Math. Rev.* 8, no. 1-2 (1999), 119-128.

[5] The method of averaging and functional differential equations with delay, *Int. J. Math. Math. Sci.* 26, no. 8 (2001), 497-511.

[6] *Moyennisation dans les équations différentielles fonctionnelles*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Sidi Bel Abbès, 2002.

[7] On the averaging method for differential equations with delay, *Electron. J. Diff. Eqns.* 2002, no. 65 (2002), 1-16.

[8] The method of averaging and differential equations with two times scales, New Zealand J. Math. 32, no. 1 (2003), 57-65.

[9] Averaging results for functional differential equations, *Sibirsk. Mat. Zh.* 45, no. 2 (2004), 375-386 ; translation in *Siberian Math. J.* 45, no. 2 (2004), 311-320 (avec T. Sari).

Commentaire. —

1. Nous rappelons que l'objet de cette thèse est d'établir une technique de stroboscopie pour les EDFR, permettant d'en déduire les résultats de moyennisation dans le cadre des EDFR, alors que les résultats de moyennisation obtenus en [5, 6] et [9] sont basés sur des

calculs directs (estimations d'intégrales). Celui en [7] puise dans les résultats techniques de la stroboscopie élaborée pour les EDO. Tous ces travaux ont été réalisés sous des hypothèses plus contraignantes que celles imposées dans cette thèse et/ou pour des équations particulières.

2. Les références [1-4] et [8] concernent la moyennisation dans des EDO rapidement oscillantes.

Bibliographie

[1] I. P. van den Berg. *Nonstandard Asymptotic Analysis*, Lecture Notes in Mathematics 1249, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[2] N. N. Bogolyubov et Yu. A. Mitropolsky. *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*, Gauthiers Villars, Paris, 1962.

[3] N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropolsky et A. M. Samoilenko. *Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*, Hindustan Publ. Co. and Springer-Verlag, Delhi and Berlin, 1976.

[4] H. Bohr. *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New York, 1947.

[5] J. L. Callot. *Bifurcations du portrait de phase pour des équations différentielles ayant pour type l'équation d'Hermite*, Thèse, Université de Strasbourg, 1981.

[6] J. L. Callot et T. Sari. Stroboscopie infinitésimale et moyennisation dans les systèmes d'équations différentielles à solutions rapidement oscillantes, *in* I. D. Landau, éditeur, *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal*, Editions du CNRS 3, Paris, 1983, pp. 345-353.

[7] A. Deledicq et M. Diener. *Leçons de calcul infinitésimal.* Collection "U", Armand Colin, Paris, 1989.

[8] F. Diener. *Cours d'analyse non standard*, Office des Publications Universitaires, Alger, 1983.

[9] F. Diener et M. Diener (Eds.). *Nonstandard Analysis in Practice*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[10] M. Diener et C. Lobry (Eds.). *Analyse non standard et Représentation du réel*, Editions du CNRS, Paris, et Office des Publications Universitaires, Alger, 1985.

[11] F. Diener et G. Reeb. *Analyse Non Standard*, Hermann, 1989.

[12] R. D. Driver. *Ordinary and Delay Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 20, Springer-Verlag, New York, 1977.

[13] W. Eckhaus. New approach to the asymptotic method in the theory of nonlinear oscillations and wave-propagation, *J. Math. Anal. Appl.* 49 (1975), 575-611.

[14] V. I. Foduck. The method of averaging for differential equations of the neutral type, *Ukrai. Math. Zh.* 20 (1968), 203-209.

[15] V. Gautheron et E. Isambert. Lire l'Analyse Non Standard, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* (1996), 29-50.

[16] A. Halanay. The method of averaging in equations with retardation, *Rev. Math. Pur. Appl. Acad. R.P.R.* 4 (1959), 467-483.

[17] ______. On the method of averaging for differential equations with retarded argument, *J. Math. Anal. Appl.* 14 (1966), 70-76.

[18] J. K. Hale. Averaging methods for differential equations with retarded arguments, *J. Differential Equations* 2 (1966), 57-73.

[19] ______. *Ordinary differential equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[20] ______. *Theory of functional differential equations*, Applied Mathematical Sciences 3, Springer-Verlag, New York, 1977.

[21] J. K. Hale et S. M. Verduyn Lunel. Averaging in infinite dimensions, *J. Integral Equations Appl.* 2, no. 4 (1990), 463-493.

[22] ______. *Introduction to functional differential equations*, Applied Mathematical Sciences 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[23] A. Hurd (Edit.). *Nonstandard analysis. Recent developments.* Lecture Notes in Mathematics, 983, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[24] N. M. Krylov et N. N. Bogolyubov. *Introduction to Nonlinear Mechanics (in Russian)*, Patent no. 1, Kiev, 1937.

[25] M. Lakrib. The method of averaging and functional differential equations with delay, *Int. J. Math. Math. Sci.* 26, no. 8 (2001), 497-511.

[26] ______. On the averaging method for differential equations with delay, *Electron. J. Diff. Eqns.* 2002, no. 65 (2002), 1-16.

[27] M. Lakrib et T. Sari. Averaging results for functional differential equations, *Sibirsk. Mat. Zh.* 45, no. 2 (2004), 375-386 ; translation in *Siberian Math. J.* 45, no. 2 (2004), 311-320.

[28] D. Laugwitz. *The theory of infinitesimals. An introduction to Nonstandard Analysis*, Lectures at the Academic dei Lincei, Rome, 1977.

[29] B. Lehman, J. Bentsman, S. V. Lunel et E. I. Verriest. Vibrational control of nonlinear time lag systems with bounded delay : Averaging theory, stabilizability, and transient behavior, *IEEE Trans. Automat. Control* AC-39 (1994), 898-912.

[30] B. Lehman et V. B. Kolmanovskii. Extensions of classical averaging techniques to delay differential equations, in *Proceedings, 33rd IEEE CDC*, 1994, pp. 411-416.

[31] B. Lehman, I. Widjaya et K. Shujaee. Vibrational control of chemical reactions in a CSTR with delayed recycle stream, *J. Math. Anal. Appl.* 193 (1995), 28-59.

[32] B. Lehman et S. P. Weibel. Fundamental theorems of averaging for functional differential equations, *J. Differential Equations* 152, no. 1 (1999), 160-190.

[33] R. Lutz. L'intrusion de l'Analyse non standard dans l'étude des perturbations singulières, *in* IIIème Rencontre de Géométrie du Schnepfenried, Vol. 2, Astérisque 107-108 (1983), 101-140.

[34] R. Lutz et M. Goze, *Nonstandard Analysis : A Practical Guide with Applications*, Lecture Notes in Mathematics 881, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[35] G. N. Medvedev. Asymptotic solutions of some systems of differential equations with deviating argument, *Soviet Math. Dokl.* 9 (1968), 85-87.

[36] A. D. Mishkis. General theory of differential equations with retarded argument, *Amer. Math. Soc. Transl.* no. 55 (1951). *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)* 4, 33 (1949), 99-141.

[37] Yu. A. Mitropolsky. *Problème de la théorie des oscillations non stationnaires*, Gauthiers Villars, Paris, 1966.

[38] ______. *Certains aspects des progrès de la méthode de centrage*, CIME, Edizione Cremonese, Roma, 1973.

[39] E. Nelson. Internal Set Theory : A new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* 83, no. 6 (1977), 1165-1198.

[40] G. Reeb. Equations différentielles et analyse non classique (d'après J. L. Callot), *in* Proceedings of the 4th International Colloquium on Differential Geometry (1978), *Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostella* (1979), 240-245.

[41] A. Robert. *Analyse Non Standard*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

[42] A. Robinson. *Nonstandard Analysis*, American Elsevier, New York, 1974.

[43] M. Roseau. *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[44] ______. *Equations différentielles*, Mason, Paris, 1976.

[45] J. A. Sanders et F. Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences 59, Springer-Verlag, New York, 1985.

[46] T. Sari. Sur la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires. *in* IIIème Rencontre de Géométrie du Schnepfenried, Vol. 2, Astérisque 109-110 (1983), 141-158.

[47] ______. *Moyennisation dans les systèmes différentiels à solutions rapidement oscillantes*, Thèse, Université de Mulhouse, 1983.

[48] ______. Petite histoire de la stroboscopie, *dans* Colloque Trajectorien à la Mémoire de G. Reeb et J. L. Callot, Strasbourg-Obernai, 1995. A. Fruchard et A. Troesch, Eds. *Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg* (1995), 1-10. http ://www.math.uha.fr/~geometry/sari/papers.html

[49] ______. Stroboscopy and averaging, *in* Colloque Trajectorien à la Mémoire de G. Reeb et J. L. Callot, Strasbourg-Obernai, 1995. A. Fruchard et A. Troesch, Eds. *Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg* (1995), 95-124. http ://www.math.uha.fr/~geometry/sari/papers.html

[50] V. M. Volosov. Averaging in Systems of Ordinary Differential Equations, *Russian Math. Surveys*, 17 (1968), 251-294.

[51] V. M. Volosov, G. M. Medvedev et B. I. Morgunov. On the applications of the averaging method for certain systems of differential equations with delay, *Vestnik M.G.U. Ser. III, Fizika, Astronomija* (1968), 251-294.

[52] M. Yebdri. *Equations différentielles à retard*, Thèse de Magister, Université de Tlemcen, 1989.