



Etude analytique des systèmes magnétomécaniques sans fer: application au haut-parleur guidé par joints de ferrofluide

Romain Ravaud

► To cite this version:

Romain Ravaud. Etude analytique des systèmes magnétomécaniques sans fer: application au haut-parleur guidé par joints de ferrofluide. Mécanique [physics.med-ph]. Université du Maine, 2009. Français. NNT: . tel-00441482

HAL Id: tel-00441482

<https://theses.hal.science/tel-00441482>

Submitted on 16 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes
Université Du Maine
UFR Sciences et Techniques

THÈSE DE DOCTORAT

En vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université du Maine,
Spécialité: Sciences Pour l'Ingénieur

ÉTUDE ANALYTIQUE DES SYSTÈMES MAGNÉTOMÉCANIQUES SANS FER : APPLICATION AU HAUT-PARLEUR GUIDÉ PAR JOINTS DE FERROFLUIDE

Présentée par

Romain RAVAUD

Soutenue le **Mardi 24 Novembre 2009**

Devant le jury constitué de :

Alain NICOLAS	Professeur, Ecole Centrale de Lyon	<i>(Examineur)</i>
Cevdet AKYEL	Professeur, Ecole Polytechnique de Montréal	<i>(Rapporteur)</i>
Jean-Paul YONNET	Directeur de Recherche au CNRS, INPG	<i>(Rapporteur)</i>
Valérie LEMARQUAND	Professeure, Université du Maine	<i>(Examinatrice)</i>
Claude DEPOLLIER	Professeur, Université du Maine	<i>(Examineur)</i>
Guy LEMARQUAND	Professeur, Université du Maine	<i>(Directeur de thèse)</i>

Résumé

Cette thèse a pour objet la modélisation analytique des systèmes à aimants permanents. Leurs caractérisations supposent la détermination du champ magnétique qu'ils produisent et des énergies spécifiques mises en jeu. Les premiers travaux français réalisés par Durand en 1960 concernent principalement le calcul de champ créé par des aimants parallélépipédiques (structures planes) et des anneaux aimantés axialement. Les expressions analytiques des forces et couples, publiées par G. Akoun et J. P. Yonnet, et plusieurs études analytiques menées par F. Bancel et G. Lemarquand, dès les années 80-90, dénotent un intérêt manifeste pour l'optimisation des structures à aimants permanents. Les progrès de fabrication des aimants ouvrent alors des perspectives industrielles notables.

Dès la fin des années 90, E. P. Furlani, B. Azzerbonni, E. Cardelli ou encore J. P. Selvaggi, S. Salon et M. V. K. Chari proposent des approches semi-analytiques et des développements sériels pour calculer le champ magnétique créé par des structures à topologie cylindrique.

Dans ce prolongement, nous exposons dans cette thèse les expressions analytiques du champ magnétique créé par des anneaux de polarisation radiale. Ces modèles analytiques nous permettent d'évaluer le champ magnétique en tout point de l'espace. De façon connexe, nous établissons les formules du champ magnétique créé par un anneau aimanté axialement sous une forme plus générale que celle établie par Durand. De façon concomitante, S. I. Babic et C. Akyel développent en 2008 des modèles analytiques simplifiés du champ créé par des anneaux aimantés radialement et axialement.

Dans un second temps, nous présentons les expressions du champ magnétique créé par des tuiles aimantées radialement, axialement et orthoradialement. Ces expressions sont basées sur des intégrales elliptiques incomplètes pour le cas des polarisations axiale et radiale. Dans le cas de la polarisation orthoradiale, l'expression du champ magnétique ne nécessite pas l'utilisation de fonctions spéciales. Notons que ces aimants à topologie courbe sont largement utilisés dans la conception de machines électriques, d'accouplements ou encore de capteurs. Néanmoins, les aimants en forme de tuiles sont généralement fabriqués avec des aimantations uniformes pour des raisons technologiques et économiques. Ainsi, les tuiles conjecturées à aimantation radiale, orthoradiale ou axiale ont usuellement une aimantation uniforme. Cette caractéristique d'uniformité engendre des ondulations de champ qui dépendent du nombre de tuiles utilisées.

En conséquence, nous présentons les expressions du champ magnétique créé par des tuiles aimantées uniformément dans toutes les directions. Nous comparons les aimantations uniformes et idéales (radiale, orthoradiale et axiale) pour déterminer l'influence de l'uniformité de l'aimantation sur les caractéristiques du champ magnétique produit. Ces

expressions nous permettent de modéliser et d’optimiser les structures de Halbach et de prédire les effets notoires résultants de l’uniformité de l’aimantation. Ces mêmes effets sont étudiés dans le cadre des structures dédiées à l’Imagerie par Résonance Magnétique. On propose ainsi un modèle analytique général permettant de reconstruire le champ magnétique produit par un assemblage d’aimants à aimantations tournantes uniformes.

Les expressions exactes des forces, raideurs et couples s’exerçant entre anneaux et tuiles aimantées radialement, axialement ou uniformément, sont établies afin d’étudier tout dispositif constitué d’aimants permanents. Des modèles semi-analytiques aboutissent à l’optimisation d’accouplements magnétiques, de paliers passifs constitués d’anneaux et d’actionneurs linéaires.

La deuxième partie de cette thèse traite de l’étude d’un haut-parleur sans fer. La présence du fer dans les pièces polaires est un inconvénient majeur dans la conception de moteurs de haut-parleurs électrodynamiques. Une nouvelle structure de haut-parleur sans fer, développée par G. Lemarquand, permet de s’affranchir des non-linéarités engendrées par le fer et les suspensions périphériques. Ces suspensions sont remplacées par un ou plusieurs joints de ferrofluide dont le comportement mécanique dépend intrinsèquement du champ magnétique produit par sa structure.

Les travaux antérieurs sur les ferrofluides (notamment R. E. Rosensweig) concernent essentiellement leurs propriétés d’étanchéité et thermiques. Nous envisageons dans cette thèse d’utiliser le ferrofluide pour ses propriétés mécaniques.

Les outils analytiques caractérisant les champs magnétiques créés par des aimants permanents sont utilisés dans le cadre de l’étude de haut-parleurs sans fer. En effet, les expressions analytiques du champ magnétique conduisent à un modèle énergétique décrivant les propriétés mécaniques d’un joint de ferrofluide guidant le piston émissif d’un haut-parleur sans fer. Ce modèle est basé sur l’interaction du champ produit par la structure et l’aimantation saturée des particules ferromagnétiques du ferrofluide. La pression magnétique dans ce joint fixe ses raideurs radiale et axiale, son volume, sa forme et sa répartition dans l’entrefer du haut-parleur. La validité de ce modèle est confirmée par des mesures expérimentales.

L’ensemble des travaux présentés dans ce mémoire fonde une démarche d’analyse des systèmes à aimants basée sur un mode opératoire exclusivement analytique. D’un côté, les modèles exacts des champs suggèrent des optimisations précises et rapides des dispositifs magnétomécaniques. D’autre part, appliqués au dimensionnement d’un joint de ferrofluide, ces modèles permettent des études paramétriques sur l’évolution de la pression du ferrofluide dans un entrefer en fonction des dimensions des aimants utilisés.

Abstract

This thesis deals with the analytical modeling of ironless structures made of permanent magnets. The first french studies describing the magnetic fields created by permanent magnets were carried out by E. Durand in 1960. These models were only applied to the case of parallelepipedic and cylindrical magnets. The analytical expressions dealing with forces and torques have been published by G. Akoun and J. P. Yonnet. In addition, several analytical studies carried out by Bancel and Lemarquand have allowed manufacturers to optimize permanent magnet devices. It is noted that cylindrical permanent magnet structures have been studied by E. P. Furlani, B. Azzerbonni, E. Cardelli and J. P. Selvaggi, S. Salon, M. V. K. Chari. These authors have proposed semi-analytical approaches based on series expansions.

These previous works can be considered as the basis of this thesis. Indeed, we have determined the analytical expressions of the magnetic field created by a ring permanent magnet whose polarization is radial. These analytical expressions allow us to calculate the magnetic field in all points in space. Additionally, we have determined the analytical expression of the magnetic field created by a ring permanent magnet whose polarization is axial. This expression is more general than the one established by Durand. Then, this expression has been simplified by S. I. Babic and C. Akyl in 2008.

Furthermore, we have determined the analytical expressions of the magnetic field created by tile permanent magnets whose polarizations are radial, axial or orthoradial. It can be noted that the expression of the magnetic field created by a tile permanent magnet whose polarization is orthoradial is fully analytical. Such permanent magnets are widely used for the design of electrical machines, magnetic couplings or magnetic sensors.

Tile permanent magnets are generally fabricated with uniform polarizations because they are easier to manufacture than tile permanent magnets radially, axially or orthoradially magnetized. Moreover, ring permanent magnets with radial polarization are replaced by several tile permanent magnets uniformly magnetized. Such ring permanent magnets generate magnetic field undulations depending on the number of tiles used. We have determined the expressions of the magnetic field created by tile permanent magnets of various uniform magnetizations. We have compared the magnetic field created by uniformly and ideally magnetized tile permanent magnets so as to study the influence of the uniform polarization on the magnetic field shape. Such expressions have allowed us to design and optimize Halbach structures and to predict the uniform polarization effects on the magnetic field created. Such studies have also been carried out for the MRI structures. We have proposed a general analytical model allowing us to calculate the exact magnetic field created by a MRI structure composed of tile permanent magnets of various and uniform polarizations.

We have also determined the exact expressions of the forces, stiffnesses and torques between ring and tile permanent magnets whose polarizations can be radial, axial or uniform. Such expressions allow us to optimize quickly ironless devices made of permanent magnets. Semi-analytical models have been determined for the optimization of magnetic couplings, passive bearings constituted by rings and linear actuators.

We have carried out several studies dealing with the nonlinearities of electrodynamic loudspeakers. These works have allowed us to rank the defects occurring in the loudspeaker structure. Particularly, iron is an important drawback for the design of electrodynamic loudspeaker motors. G. Lemarquand has developed a new kind of loudspeaker structure avoiding the classical defects of electrodynamic loudspeakers. The outer rims have been replaced by one or several ferrofluid seals whose mechanical behaviour depends directly on the magnetic field produced by the permanent magnets of the loudspeaker motor.

Some previous works about ferrofluids, carried out by R. E. Rosensweig, dealt mainly with the thermal properties of ferrofluid seals. We have proposed in this thesis to use the mechanical properties of a ferrofluid seal so as to guide an emissive piston of an ironless loudspeaker.

The analytical expressions of the magnetic field created by permanent magnets have been used for the study of ironless loudspeakers. Indeed, such analytical expressions have allowed us to construct an analytical model describing the mechanical properties of a ferrofluid seal used for the guidance of an emissive piston of an ironless loudspeaker. This analytical model is based on the magnetic energy determination in the ferrofluid seal. The magnetic pressure in the ferrofluid seal has allowed us to predict its radial and axial stiffnesses, its volume, its shape as well as where the ferrofluid goes in the loudspeaker air gap.

This model has been verified by experimental measurements. Furthermore, this model has allowed us to predict the evolution of the shape and pressure in the ferrofluid seal versus the permanent magnet dimensions.

Un poète disait une fois : "«Tout l'univers est dans un verre de vin.»" Vous ne saurez probablement jamais quel sens il attribuait à ces paroles, car les poètes n'écrivent pas pour être compris. Mais il est vrai que si vous regardez un verre de vin de suffisamment près, vous découvrez l'univers entier. Il y a des phénomènes physiques : le liquide tourbillonnant, qui s'évapore selon les vents et le temps, les réflexions dans le verre, et notre imagination ajoute les atomes. Le verre est une distillation des roches terrestres et dans sa composition, nous découvrons les secrets de l'âge de l'univers et de l'évolution des étoiles. Quel étonnant tableau d'éléments chimiques trouve-t-on dans le vin ? Comment sont-ils venus là ? Il y a les ferments, les enzymes, les substrats, et les produits. Ainsi dans le vin on trouve cette importante généralité : toute la vie est fermentation. Personne ne peut découvrir la chimie du vin sans découvrir, comme le fit Louis Pasteur, la cause de la plupart des maladies. Combien vivifiant est ce vin, imprimant son existence dans la conscience de celui qui le regarde ! Si nos petits esprits, pour certaines commodités, divisent ce verre de vin, cet univers, en parties- la physique, la biologie, la géologie, l'astronomie, la psychologie, etc. - souvenez-vous que la nature ne connaît pas cela ! Aussi remettons tout ensemble, n'oubliant pas en fin de compte sa destination. Qu'il nous donne un dernier plaisir : buvons-le et oublions tout le reste.

Richard Feynman, *Les cours de Physique de Feynman*, Tome 1, p : 41

Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier le professeur Alain Nicolas pour avoir accepté de présider mon jury de thèse. j’ai été très sensible à ses encouragements et ses précieux conseils tant au niveau de mon manuscrit de thèse que pour mes futures démarches scientifiques et administratives.

Je tiens également à remercier le professeur Cevdet Akyel, qui, malgré les nombreux kilomètres qui séparent Le Mans et Montréal, a accepté d’être rapporteur de ma thèse. Ses encouragements très touchants m’ont aidé à préparer au mieux ma soutenance de thèse et à améliorer le contenu de mon manuscrit.

Je remercie également Jean-Paul Yonnet, directeur de recherche au CNRS, qui a accepté d’être rapporteur et qui a eu la gentillesse de m’aider à améliorer le contenu de mon manuscrit. Nos échanges scientifiques très fructueux m’ont permis d’élargir mes connaissances et d’appréhender au mieux mes futures années de recherche.

Je voudrais exprimer mes plus profonds remerciements à mon directeur de thèse, Guy Lemarquand, professeur à l’université du Maine, pour m’avoir formé au métier de chercheur. Ses méthodes de travail m’ont permis de m’émanciper, de travailler avec rigueur, de jour comme de nuit, afin d’atteindre des objectifs parfois difficiles. Je garderai un très bon souvenir des mails matinaux m’annonçant les objectifs de la journée, des mails nocturnes nécessitant des réponses dans l’heure qui suivait, les mails du dimanche matin, et enfin les mails de la veille de Noël où je devais lui renvoyer la correction d’une publication. Je dois néanmoins reconnaître une certaine souplesse de Guy qui, au bout de dix-huit mois de thèse, m’a encouragé à prendre quelques jours de vacances. Ces deux années ont été pour moi une très riche expérience scientifique qui m’a ouvert à une certaine forme de curiosité sur un domaine que je ne connaissais pas. Cette expérience, j’en suis sûr, me servira tout au long de ma vie.

Je n’oublie pas Valérie Lemarquand, professeure à l’université du Maine, qui a su me mettre sur les bons rails au début de ma thèse et me guider avec rigueur dans l’écriture de ma première publication. Cette collaboration m’a été très précieuse et je tiens à la remercier

pour son aide.

Je remercie aussi le professeur Claude Depollier pour nos discussions scientifiques qui m'ont éclairées depuis mon Master Recherche en Acoustique. Sa vision et son expérience m'ont permis de comprendre le fonctionnement de la recherche.

Je tiens à remercier le directeur du LAUM, Yves Aurégan, pour sa compréhension, son écoute et ses conseils.

Je remercie également mes collaborateurs éloignés, Marcos Pinho, Jean-Michel Génévaux, Nicolas Dauchez et Bruno Brouard pour les mesures expérimentales et les réunions d'équipe du projet MAGIC.

Certaines personnalités scientifiques m'ont profondément marqué pendant toute ma scolarité à l'université du Maine. Je pense au professeur Michel Bruneau, au professeur Vitali Gushev et au professeur Etienne Gaviot. Leur savoir-faire scientifique m'a encouragé à continuer à faire de la science, tout en ayant conscience de la route longue et sinueuse à poursuivre.

Je remercie également ma famille, qui, dans la sérénité, m'a financé mes études supérieures. Ceci m'a incité à me consacrer exclusivement à mes années d'étude et certains n'ont certainement pas eu cette chance.

Je conclurai en remerciant de tout cœur Aurianne, pour sa compréhension, ses éternels questionnements sur ma vie sociale, son pragmatisme médical et sa patience remarquable. Peut-être a-t-elle trop entendu le prénom de Guy depuis ces quelques années de travail. J'espère ne pas l'avoir traumatisée avec les aimants permanents, les publications internationales, l'Impact Factor et les Reviewers. Je pense qu'elle connaît maintenant les règles du jeu si l'envie la prenait, un jour, après ses études de médecine, de faire une thèse en Sciences Pour l'Ingénieur...

Villecomte, le 11 décembre 2009.

Avant-Propos

Ce manuscrit de thèse est composé de deux parties. La première partie est une synthèse des travaux réalisés pendant ces deux années de recherche. En outre, les travaux de cette thèse ayant donné lieu à des publications internationales sont notés (**[Ravaud-X]** où **X** désigne la lettre de l'annexe correspondante. Néanmoins, nous présentons simplement les résultats qui nous semblent les plus importants. En ce sens, les autres travaux mentionnés dans le corps du manuscrit sont accessibles dans les annexes.

La deuxième partie de ce manuscrit regroupe les copies des publications internationales (publications dans les revues internationales et proceedings). Ces publications sont désignées par leurs **DOI** lorsqu'elles sont parues.

Table des matières

I	Thèse de Doctorat	1
1	Introduction	3
1.1	Contexte	3
1.1.1	Cadre de la thèse	3
1.1.2	Modèles de l'Electrodynamique	4
1.1.3	L'Equivalence des modèles coulombien et ampérien	6
1.1.4	Place des aimants dans la technologie électrique moderne	8
1.2	Structure de la Thèse	8
2	Modélisation analytique des aimants permanents	11
2.1	Etat de l'Art	11
2.2	Champ magnétique 3D créé par un aimant annulaire	14
2.2.1	Anneau aimanté radialement	15
2.2.2	Anneau aimanté axialement	23
2.2.3	Intérêt d'utilisation des formulations 3D dans l'étude du champ magnétique créé par des anneaux	26
2.2.4	Le théorème de permutation des composantes	28
2.3	Champ magnétique 3D créé par des tuiles	30
2.3.1	Tuile aimantée radialement	31
2.3.2	Tuile aimantée uniformément et radialement	40
2.3.3	Tuile aimantée axialement	47
2.3.4	Tuile aimantée orthoradialement	52
2.3.5	Tuile aimantée orthoradialement et uniformément	56
2.3.6	Tuile aimantée arbitrairement et uniformément	62
2.4	Forces et couples exercés entre aimants permanents	71
2.4.1	Couple s'exerçant entre deux tuiles aimantées radialement	71
2.4.2	Couple s'exerçant entre deux tuiles aimantées uniformément et radialement	73
2.4.3	Force entre anneaux aimantés axialement	80
2.4.4	Force entre anneaux aimantés radialement	82

3	Conception d'un haut-parleur guidé par des joints de ferrofluide	85
3.1	Contexte	85
3.1.1	Sources de non-linéarités du haut-parleur électrodynamique : état de l'art	85
3.1.2	Contributions de cette thèse sur les défauts du haut-parleur électrodynamique	87
3.1.3	Utilisation des ferrofluides : état de l'art	87
3.2	Modélisation analytique d'un joint de ferrofluide	89
3.2.1	Hypothèses du modèle	89
3.2.2	Exemple de calcul pour une configuration à deux anneaux aimantés radialement	91
3.2.3	Validation du modèle	93
3.2.4	Prédiction des propriétés mécaniques d'un joint de ferrofluide	97
3.2.5	Optimisations de dispositifs à aimants permanents	98
4	Conclusion	101
II	Publications	115
A	Analytical Calculation of the Magnetic Field Created by Permanent-Magnet Rings (DOI :10.1109/TMAG.2008.923096)	117
B	Magnetic Field Created by Tile Permanent Magnets (DOI :10.1109/ TMAG.2009.2014752)	119
C	The Three Exact Components of the Magnetic Field Created by Radially Magnetized Permanent Magnets (DOI :10.2528/PIER08112708)	121
D	Discussion About the Magnetic Field Created by Permanent-Magnets (DOI :10.2528/PIERB08112102)	123
E	Magnetic Field Produced by a Tile Permanent Magnet Whose Polarization is Both Uniform and Tangential (DOI :10.2528/PIERB08121901)	125
F	Analytical Expression of the Magnetic Field Created by Tile Permanent Magnets Tangentially Magnetized and Radial Currents in Massive Disks (DOI :10.2528/PIERB09012704)	127

TABLE DES MATIÈRES

G	Modelling an Ironless Loudspeaker by Using Three-Dimensional Analytical Approaches (DOI :10.2528/PIER09021104)	129
H	Discussion About the Magnetic Field Produced by Cylindrical Halbach Structures (DOI :10.2528/PIERB09012004)	131
I	Permanent Magnet Couplings : Field and Torque Three-Dimensional Expressions Based on the Coulombian Model (DOI :10.1109/ T MAG.2008. 2010623)	133
J	Torque in Permanent Magnet Couplings : Comparison of Uniform and Radial Magnetization (DOI :10.1063/1.3074108)	135
K	Design of Ironless Louspeakers with Ferrofluid Seals : Analytical Study Based on the Coulombian Model (DOI :10.2528/PIERB09031904)	137
L	Mechanical Properties of a Ferrofluid Seal : Three-Dimensional Analytical Study Based on the Coulombian Model (DOI :10.2528/PIERB09020601)	139
M	Ironless Loudspeakers with Ferrofluid Seals (Archives of Acoustics, Vol. 34, N 4, 3-10, 2008)	141
N	Force and Stiffness of Passive Magnetic Bearing Using Permanent Magnets, Part 1 : Axial Magnetization (DOI :10.1109/TMAG.2009.2016088)	143
O	Force and Stiffness of Passive Magnetic Bearing Using Permanent Magnets, Part 2 : Radial Magnetization (DOI :10.1109/TMAG.2009.2025315)	145
P	Comparison of the Coulombian and Amperian Models for Calculating the Magnetic Field Produced by Radially Magnetized Arc-Shaped Permanent Magnets (DOI :10.2528/PIER09042105)	147
Q	Radial Stiffness of a Ferrofluid Seal (IEEE Trans. Magn., Vol 45, N 10, 2009)	149

R	Time-Varying Non-Linear Modeling of Electrodynamic Loudspeakers (DOI :10.1016/ j.apacoust.2008.05.009)	151
S	Experimental Measurement of the Nonlinearities of Electrodynamic Microphones (DOI :10.1016/j.apacoust.2009.03.009)	153
T	Mechanical Properties of Ferrofluid Applications : Centering Effect and Capacity of a Seal (DOI :10.1016/j.triboint.2009.04.050)	155
U	Magnetic Pressure and Shape of Ferrofluid Seals in Cylindrical Structures (DOI :10.1063/1.3187560)	157
V	Ironless Permanent Magnet Motors : Three Dimensional Analytical Calculation (DOI :10.1109/IEMDC.2009.5075318)	159
W	Magnetic Couplings with Cylindrical and Plane Air Gaps : Influence of the Magnet Polarization Direction (DOI :10.2528/PIERB09051903)	161
X	Magnetic Field in MRI Yokeless Devices : Analytical Approach (DOI : 10.2528/PIER09061205)	163
Y	Analytical Expressions of the Magnetic Field Created by Tile Permanent Magnets of Various Magnetization Directions (26th Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18-21, Moscou, Russia, 2009)	165
Z	Predicting the Exact Shape of the Magnetic Field Produced by Halbach Structures (International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, September 10-12, Arras, 2009)	167

Table des figures

1.1	<i>Première page du tome 1 publié par Charles Augustin Coulomb en 1785 sur un livre intitulé Premier Mémoire sur l'Electricité et le Magnétisme</i>	5
2.1	<i>Illustration de différentes structures d'anneaux aimantés (disques et anneaux), source : http://www.007magnet.com/UploadFiles/20067701429249.jpg</i>	15
2.2	<i>Représentation d'un anneau aimanté radialement vers le centre dans l'approche coulombienne</i>	16
2.3	<i>Représentation 2D de la composante radiale du champ créé par un anneau à section carrée aimanté radialement vers l'intérieur ($r1 = 0.025\text{ m}$, $r2 = 0.028\text{ m}$, $z1 = 0\text{ m}$, $z2 = 0.003\text{ m}$, $z = 0.0015\text{ m}$ (plan médian), $J = 1\text{ T}$) ; la discontinuité du champ radial tend vers 800000 A/m pour $r = 0.025\text{ m}$ et $r = 0.028\text{ m}$; la composante radiale du champ démagnétisant vaut 400.378 kA/m dans le milieu de l'anneau (c'est-à-dire pour $r = 0.0265\text{ m}$ et $z = 0.0015\text{ m}$)</i>	19
2.4	<i>Représentation d'un anneau aimanté radialement vers le centre dans l'approche ampérienne</i>	20
2.5	<i>Représentations 2D de la composante axiale du champ créé par un anneau aimanté radialement vers l'intérieur en fonction de r pour plusieurs altitudes (courbe bleue : $z = 0.0031\text{ m}$, courbe verte : $z = 0.0025\text{ m}$, courbe noire : $z = 0.002\text{ m}$) avec les dimensions suivantes : $r1 = 0.025\text{ m}$, $r2 = 0.028\text{ m}$, $z1 = 0\text{ m}$, $z2 = 0.003\text{ m}$, $J = 1\text{ T}$; pour $z = 0.0031\text{ m}$, la composante axiale du champ magnétique est déterminée juste au-dessus de l'anneau, à 0.1 mm de sa face supérieure. Pour $z = 0.0015\text{ m}$, la composante axiale du champ est 0 kA/m (dans le plan médian)</i>	22
2.6	<i>Représentation 3D de la composante radiale créée par un anneau aimanté radialement en fonction de r ($r1 = 0.025\text{ m}$, $r2 = 0.028\text{ m}$, $z1 = 0\text{ m}$, $z2 = 0.003\text{ m}$, $z = 0.0015\text{ m}$, $J = 1\text{ T}$), r varie de 0 m à 0.023 m : on montre ici l'utilité d'un formalisme 3D dans la représentation du champ magnétique créé par une structure de topologie cylindrique, le champ radial est déterminé dans l'entrefer d'un haut-parleur sans fer.</i>	23

2.7	<i>Représentation d'un anneau aimanté axialement vers le haut dans l'approche coulombienne</i>	26
2.8	<i>Représentations 2D de la composante radiale du champ créé par un anneau aimanté axialement vers le haut en fonction de r pour plusieurs altitudes (courbe bleue : $z = 0.0031$ m, courbe verte : $z = 0.0025$ m, courbe noire : $z = 0.002$ m) avec les dimensions suivantes : $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $J = 1$ T; pour $z = 0.0031$ m, la composante radiale du champ magnétique est déterminée juste au-dessus de l'anneau, à 0.1 mm de sa face supérieure.</i>	27
2.9	<i>Représentation 2D de la composante axiale du champ créé par un anneau à section carrée aimanté axialement vers le haut ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0031$ m (juste au dessus de l'aimant), $J = 1$ T); le champ axial est presque uniforme juste au-dessus de la face supérieure de l'anneau (à 0.1 mm de la face supérieure de l'anneau)</i>	27
2.10	<i>Représentation de l'erreur relative en fonction de différents rayons intérieurs et de différents points d'observation; $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m (plan médian), $J = 1$ T. r_{in} désigne le rayon de courbure de l'anneau et r_{out} est négligée pour cette comparaison : on ne regarde que l'influence de la courbure d'une face sur le champ magnétique produit. Par exemple, pour $r = 0.9r_{in}$, l'erreur commise sur le champ est de 18% pour un rayon de courbure de 0.02 m et de 15.5% pour un rayon de courbure de 0.1 m</i>	29
2.11	<i>Représentation de deux aimants parallélépipédiques infinis dans une direction et dont les aimantations sont orthogonales</i>	30
2.12	<i>Illustration de différentes tuiles d'aimant avec des rayons de courbure différents (technologie Samarium Cobalt, source : http://www.chinahpimg.com/ProductPicture-china/th/SmCo-Magnets-Smco-Tile-458-0.jpg)</i>	31
2.13	<i>Représentation d'une tuile aimantée radialement vers le centre dans l'analogie coulombienne</i>	35
2.14	<i>Représentation d'une tuile aimantée radialement vers le centre dans l'analogie ampérienne</i>	36
2.15	<i>Représentation 2D de la composante radiale en fonction du point d'observation r; ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T, $\theta_1 = 0$ rad, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ rad, $\theta = \frac{\pi}{16}$ rad, c'est-à-dire dans le plan médian de la tuile); la composante axiale du champ démagnétisant vaut 379.139 kA/m au milieu de la tuile, c'est-à-dire pour $z = 0.0015$ m, $r = 0.0265$ m, $\theta = \frac{\pi}{16}$ rad. La discontinuité du champ radial tend vers 800000 A/m pour $r = 0.025$ m et $r = 0.028$ m</i>	37

TABLE DES FIGURES

2.16	<i>Représentation 2D de la composante azimutale du champ magnétique créé par une tuile aimantée radialement vers le centre en fonction de θ ; ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.026$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T, $\theta_1 = 0$ rad, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ rad). Le point d'observation r est situé au tiers de la tuile au niveau de sa largeur radiale. Il y a continuité de cette composante au passage des faces droites de la tuile</i>	38
2.17	<i>Représentation 2D de la composante axiale du champ magnétique créé par une tuile aimantée radialement vers le centre en fonction de r ; ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.001$ m, $J = 1$ T, $\theta_1 = 0$ rad, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ rad, $\theta = \frac{\pi}{16}$ rad). Le point d'observation z est situé au tiers de la tuile au niveau de sa hauteur. Il y a continuité de cette composante au passage des faces courbes de la tuile</i>	39
2.18	<i>Représentation 3D de la composante radiale du champ magnétique créé par une structure alternée de 8 tuiles jointives aimantées radialement en fonction de la distance radiale dans l'entrefer (r varie de 0 m à 0.024 m) ; les dimensions sont les suivantes : $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T. Le champ est donc déterminé dans le plan médian de la structure ($z = 0.0015$ m) et chaque tuile a une largeur angulaire de $\frac{\pi}{4}$ rad. La nappe du champ obtenue est lisse au sens topologique. On montre ici l'intérêt d'utiliser une formulation 3D qui tient compte de la courbure des aimants</i>	40
2.19	<i>Représentation de deux tuiles : tuile aimantée radialement et tuile aimantée à la fois uniformément et radialement</i>	41
2.20	<i>Représentation d'une tuile aimantée à la fois uniformément et radialement dans l'approche coulombienne</i>	42
2.21	<i>Représentation des trois composantes du champ magnétique en fonction de l'angle θ : la courbe bleue représente la tuile aimantée radialement et la courbe verte représente la tuile aimantée transversalement ; $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.024$ m, $h = z_2 - z_1 = 0.003$ m, $z = 0.002$ m, $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{3}$ rad, $J = 1$ T. Le trajet d'observation se situe au deux tiers de chaque tuile dans la direction axiale ($z = 0.002$ m). Le champ est toujours représenté en face de chaque tuile ($r = 0.024$ m). Ces trois figures illustrent les effets notoires de l'uniformité de la polarisation sur le champ magnétique produit ainsi que les effets de bord.</i>	46
2.22	<i>Anneau composé de 8 tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement</i>	47

2.23	<i>Représentation du champ radial créé par un anneau constitué de tuiles aimantées uniformément et radialement vers le centre pour trois configurations utilisant 16, 32 et 64 tuiles ; $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $h = z_2 - z_1 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $r = 0.024$ m, $J = 1$ T. L'amplitude des ondulations du champ radial diminuent quand on augmente le nombre de tuiles utilisées. La valeur limite du champ radial tend vers 162.32 kA/m quand le nombre de tuiles utilisées tend vers l'infini, c'est-à-dire vers l'anneau aimanté radialement vers le centre.</i>	48
2.24	<i>Représentation d'une tuile aimantée axialement dans l'approche coulombienne</i>	49
2.25	<i>Représentation d'une tuile aimantée orthoradialement en coupe 2D</i>	52
2.26	<i>Représentation coulombienne d'une tuile aimantée orthoradialement</i>	55
2.27	<i>Représentation de la composante azimutale du champ en fonction de l'angle θ ; $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.0265$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m (plan médian), $\theta_1 = -\frac{\pi}{16}$ rad, $\theta_2 = +\frac{\pi}{16}$ rad, $J = 1$ T. Il y a des discontinuités dans le champ orthoradial pour $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$, c'est-à-dire, à la traversée des plans chargés dans l'analogie coulombienne (H_{θ} tend vers 800000 A/m). La composante orthoradiale du champ démagnétisant est de -38.4 kA/m pour $r = 0.0265$ m, $z = 0.0015$ m et $\theta = 0$ rad</i>	55
2.28	<i>Représentation d'une structure de 8 tuiles aimantées orthoradialement</i>	56
2.29	<i>Représentation d'une tuile aimantée à la fois uniformément et orthoradialement dans l'approche coulombienne</i>	58
2.30	<i>Représentation du champ axial créé par une structure alternée de 8 tuiles orthoradiales aimantées à la fois uniformément et orthoradialement en fonction de l'angle θ ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.024$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T). Le champ magnétique est donc déterminé dans l'entrefer de la structure et non dans la matière aimantée. On illustre ici les changements de signe dus à l'uniformité de la polarisation uniforme des tuiles aimantées à la fois orthoradialement et uniformément. Ceci est important dans la conception de wigglers où le trajet de l'électron dépend directement du champ magnétique produit par une structure de type Halbach (pouvant comporter de telles tuiles)</i>	58
2.31	<i>Structure linéarisée de Halbach permettant de déterminer le champ proche produit par un anneau constitué de tuiles aimantées orthoradialement et radialement</i>	62

TABLE DES FIGURES

2.32	Représentation de la composante radiale H_r et de sa structure linéarisée H_x en fonction de l'angle θ et de la longueur associée en analogie parallélépipédique dans une structure de Halbach classique comportant 12 tuiles aimantées radialement et orthoradialement ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.024$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m (plan médian), $J = 1$ T). Le champ est déterminé dans l'entrefer de la structure d'aimant à une distance de 0.001 m de la face inférieure de l'anneau comportant les 12 tuiles d'aimants. On illustre ici les limites de l'utilisation des formules linéarisées pour évaluer le champ magnétique dans une structure cylindrique de type Halbach (dont les polarisations successives tournent de $\frac{\pi}{2}$ entre deux tuiles consécutives)	63
2.33	Structure de Halbach utilisée pour l'Imagerie par Résonance Magnétique; cette structure est composée de 8 tuiles aimantées uniformément	63
2.34	Paramètres utilisés pour calculer le champ magnétique créé par une tuile dont l'aimantation est à la fois uniforme et arbitraire dans le plan (R, θ)	64
2.35	Induction radiale créée par une structure IRM composée de 8 tuiles aimantées uniformément; ($r_1 = 0.3$ m, $r_2 = 0.6$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 1.6$ m, $z = 0.8$ m, $J = 1.5$ T), de gauche à droite et de haut en bas, $r = 0.29$ m, $r = 0.27$ m, $r = 0.25$ m, $r = 0.23$ m, $r = 0.21$ m, $r = 0.19$ m, $r = 0.17$ m, $r = 0.15$ m	69
2.36	Représentation 3D de $\mu_0 H_y = B_y$ (notation propre à cette figure) créée par une structure IRM composée de 16 tuiles aimantées uniformément à différentes altitudes (de haut en bas et de gauche à droite, le patient rentre au fur et à mesure dans l'IRM); ($r_1 = 0.3$ m, $r_2 = 0.6$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 1.6$ m, $J = 1.5$ T), de gauche à droite et de haut en bas, $r = 0.29$ m, $r = 0.27$ m, $r = 0.25$ m, $r = 0.23$ m, $r = 0.21$ m, $r = 0.19$ m, $r = 0.17$ m, $r = 0.15$ m. Le champ est de plus en plus uniforme lorsqu'il est déterminé dans le centre de la structure de l'IRM.	70
2.37	Accouplement entre deux tuiles aimantées radialement	71
2.38	Couple transmis entre deux tuiles aimantées radialement en fonction du décalage angulaire, $r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_1 = z_3 = 0$ m, $z_2 = z_4 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T, $\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ rad	74
2.39	Deux tuiles aimantées uniformément et radialement dans l'analogie coulombienne	74
2.40	Couple transmis entre deux tuiles aimantées uniformément et radialement en fonction du décalage angulaire, $r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_1 = z_3 = 0$ m, $z_2 = z_4 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T, $\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ rad	80
2.41	Représentation d'une butée axiale constituée de deux anneaux aimantés axialement	81
2.42	Coupe 2D d'une butée axiale constituée de deux anneaux aimantés axialement	81

2.43	Représentation de la force axiale transmise entre deux anneaux aimantés axialement et centrés radialement en fonction du décalage axial z ($r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_3 - z_1 = 0.003$ m, $z_4 - z_2 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T)	82
2.44	Représentation d'une butée axiale constituée de deux anneaux aimantés radialement	83
2.45	Coupe 2D d'une butée axiale faite avec des anneaux aimantés radialement	83
2.46	Représentation de la force axiale transmise entre deux anneaux aimantés radialement et centrés radialement en fonction du décalage axial z ($r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_3 - z_1 = 0.003$ m, $z_4 - z_2 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T), entrefers (courbe la plus épaisse à la moins épaisse) : 0.1 mm, 1 mm, 2 mm	84
3.1	Configuration à deux anneaux aimantés radialement dont les polarisations sont opposées avec un piston émissif sans fer et un joint de ferrofluide	92
3.2	Représentation schématique du dispositif expérimental pour mesurer la raideur radiale d'un joint de ferrofluide	95
3.3	Décalage radial du pison central pour le calcul de la raideur radiale du joint de ferrofluide	95
3.4	Résultats expérimentaux de la mesure de la force en fonction du décalage radial du piston central ; $D = 49.7$ mm, $d = 49.0$ mm, $\mu_0 M_s = 40$ mT, $h = 0.02$ m	96
3.5	Représentation de la densité d'énergie magnétique en tout point de l'espace dans l'entrefer ; $D = 49.7$ mm, $d = 49.0$ mm, $\mu_0 M_s = 40$ mT, $h = 0.02$ m	97
3.6	Représentation 3D d'un joint de ferrofluide soumis à un champ magnétique produit par deux anneaux aimantés, de polarisations opposées dont le module vaut 1 T et de hauteurs 3 mm. Le rayon intérieur vaut 0.025 m	98
3.7	Coupe de la pression magnétique dans un joint de ferrofluide soumis à un champ créé par trois anneaux aimantés radialement, $r_{in} = 0.025$ m, $J = 1.5$ T ; les couleurs les plus chaudes correspondent aux régions de l'espace pour lesquelles la pression magnétique est la plus forte ; de haut en bas et de gauche à droite : on diminue la hauteur h de l'anneau du milieu : (a) $h = 0.003$ m, (b) $h = 0.0025$ m, (c) $h = 0.002$ m, (d) $h = 0.0015$ m, la hauteur des deux autres aimants vaut 0.003 m.	99
4.1	Synthèse des configurations d'aimant étudiées dans cette thèse à l'aide de l'approche coulombienne et de l'approche ampérienne	103

Première partie

Thèse de Doctorat

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

1.1.1 Cadre de la thèse

Cette thèse est effectuée dans le cadre d'un programme de recherche soutenu par la Région Pays de la Loire sur les haut-parleurs sans fer (Projet **MAGIC** : **MAG**netic **I**ronless **C**oncept). Nos travaux traitent en particulier de la modélisation d'actionneurs électromécaniques et de systèmes magnétomécaniques. L'accent est mis sur l'utilisation d'approches analytiques permettant d'optimiser ces dispositifs avec des temps de calcul très courts.

L'objet initial de cette thèse est l'étude du comportement mécanique d'un joint de ferrofluide guidant le piston émissif d'un haut-parleur sans fer. Cette étude nécessite le développement d'outils analytiques conduisant à la détermination du champ magnétique créé par les aimants constituant le moteur du haut-parleur. Les recherches entamées dans cette voie nous conduisent à développer des calculs analytiques du champ créé par des aimants cylindriques. En conséquence, la majorité des travaux publiés pendant cette thèse concerne la modélisation du champ magnétique créé par des aimants annulaires et des tuiles d'aimant dont les polarisations sont radiales, orthoradiales, axiales, uniformes ou encore arbitraires. Ces modèles analytiques sont appliqués à l'étude des structures de Halbach, aux structures dédiées à l'Imagerie par Résonance Magnétique, aux accouplements magnétiques, aux machines électriques et aux paliers passifs.

Si certains travaux effectués tout au long de cette thèse poursuivent des travaux antérieurs sur la modélisation du champ magnétique créé par des aimants permanents (voir l'état de l'art du chapitre 2), de nouvelles configurations d'aimants sont étudiées. Un certain nombre de travaux concerne le calcul du champ créé par des tuiles aimantées dans toutes les directions. Ces formes d'aimant sont majoritairement utilisées dans les machines électriques, les accouplements magnétiques et les moteurs d'actionneurs linéaires.

Une intention toute particulière concerne la modélisation du champ magnétique créé par les tuiles fabriquées avec des aimantations uniformes. Lorsque les aimants sont à base de Néodyme-Fer-Bore, ces tuiles sont plus simples à fabriquer que les tuiles aimantées radialement ou orthoradialement.

Nos modèles sont appliqués à la conception d'un moteur de haut-parleur sans fer ainsi qu'à la modélisation de la pression magnétique d'un joint de ferrofluide utilisé pour le guidage du piston émissif d'un haut-parleur sans fer.

1.1.2 Modèles de l'Electrodynamique

Les modèles de champ nécessaires à l'étude des structures à aimants permanents reposent sur les lois fondamentales de l'électrostatique et de la magnétostatique postulées par Charles Augustin Coulomb en 1785 et André-Marie Ampère en 1820. Le concept même de champ est intrinsèquement lié au concept d'interaction à distance. En effet, les attractions d'aimants ou de bobines parcourues par des courants impliquent l'utilisation du concept de champ, par lequel les paramètres de forces, couples et raideurs peuvent être calculés. La notion de champ en elle-même est d'une grande utilité puisqu'elle conduit à concevoir et optimiser des structures alors même que sa nature matérielle n'est pas connue. Ainsi, alors que l'utilisation du concept de flux magnétique est largement répandue dans le domaine de l'électrotechnique, la connaissance de sa nature physique n'est pas indispensable pour mener à bien des études théoriques et expérimentales.

Les premiers écrits de Charles Augustin Coulomb en 1785 sont considérés comme une synthèse des premières découvertes fondamentales sur les lois régissant l'équilibre des charges et les forces s'exerçant entre conducteurs et sources de champ (Figure 1.1).

Sa découverte sur la loi donnant la force $|\vec{F}|$ s'exerçant entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 au repos est donnée ici dans le système international (en Newton) :

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et r est la distance séparant les deux charges ponctuelles. Cette loi, étendue au cas de distributions de charge, permet de déterminer la force s'exerçant entre des volumes chargés électrostatiquement.

André-Marie Ampère étudie en 1820 les liens entre le magnétisme et l'électricité. Ses travaux conduisent à l'écriture de la loi de Biot et Savart : le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ se déduit en un point d'observation M à partir de la relation suivante :

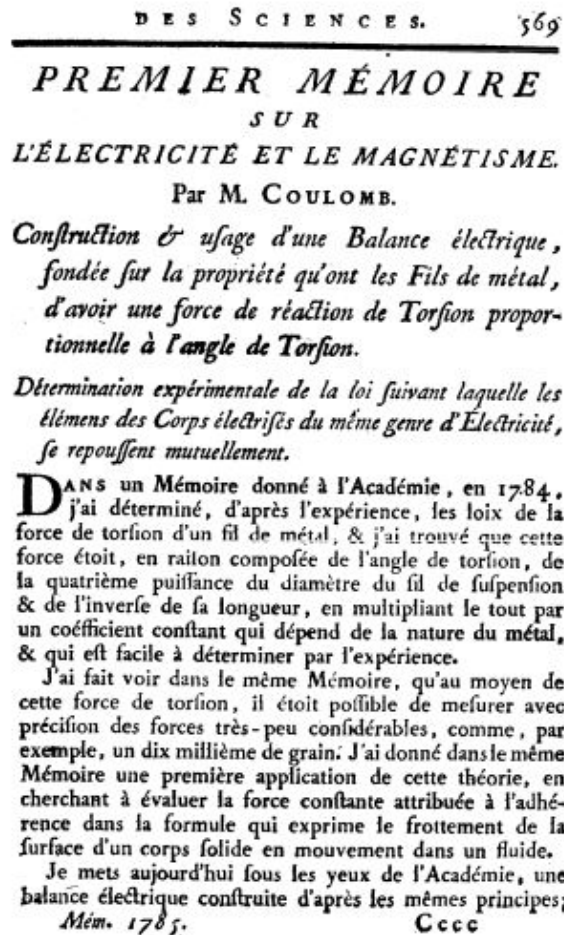


FIGURE 1.1 – Première page du tome 1 publié par Charles Augustin Coulomb en 1785 sur un livre intitulé *Premier Mémoire sur l'Electricité et le Magnétisme*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_{(\Omega)} \frac{\vec{j} d\tilde{\Omega} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (1.2)$$

où μ_0 est la perméabilité du vide, Ω est le volume de la distribution de courant, $\vec{j}$ est le vecteur densité volumique de courant et r est la distance entre un point de la distribution et le point d'observation M .

Les équations de Charles Augustin Coulomb et de Biot et Savart caractérisent les pro-

propriétés géométriques des champs magnétostatiques et électrostatiques créés par des distributions de charges ou de courants.

Un certain nombre d'ouvrages français regroupent ces lois, leurs utilisations et leurs propriétés mathématiques. Les ouvrages d'Emile Durand [1] traitent le calcul de champ créé par des distributions de charges et servent de référence aux travaux présentés aux chapitres 2 et 3 de ce manuscrit.

Par ailleurs, nous considérons l'ouvrage de Pierre Brissonneau [2] comme une référence sur le domaine du magnétisme appliqué où les principales lois de la magnétostatique sont rappelées. Citons enfin les ouvrages français publiés sous la direction d'Etienne du Trémolet de Lacheisserie en 2000 qui couvrent les grands domaines de magnétisme [3][4].

1.1.3 L'Equivalence des modèles coulombien et ampérien

Les expériences menées par Ampère, Oersted et Coulomb, formalisées théoriquement par Maxwell au XIX^{eme} siècle, conduisent à définir le concept de champ qui se manifeste au voisinage de la matière aimantée, sur les matériaux conducteurs ou entre des charges électrostatiques. Cette manifestation à distance est délibérément dissociée dans le cas d'interactions entre aimants et matériaux conducteurs d'un côté et diélectriques de l'autre. Ainsi, le champ magnétostatique et le champ électrostatique traduisant une loi physique similaire (en $\frac{1}{r^2}$) sont nécessairement différents en nature du fait de la non-existence de monopôles magnétiques. Les équations de Maxwell qui décrivent ce fait expérimental et qui doivent en conséquence être vues comme fondamentales sur une certaine plage dimensionnelle (le champ n'est plus en $\frac{1}{r^2}$ sur de très petites distance de l'ordre de 10^{-14} m) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \vec{0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}^* \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique, ρ est la densité volumique de charges, ϵ_0 est la permittivité du vide, $\vec{B}$ est le champ d'induction magnétique, μ_0 est la perméabilité du vide et $\vec{j}^*$ est la densité volumique de courants. Ces équations traduisent les causes physiques qui engendrent le champ électrostatique $\vec{E}$ et le champ magnétostatique $\vec{B}$. Le champ électrostatique $\vec{E}$ est un champ à divergence donnée et à rotationnel nul parce que l'on admet l'existence de charges et distributions de charges électrostatiques. Le champ magnétostatique $\vec{B}$ est un champ à divergence nulle et à rotationnel donné parce que le monopôle magnétique n'a jamais été découvert. Les courants fictifs (courants ampériens) sont alors utilisés comme modèle de référence pour calculer le champ créé par des aimants permanents : ils traduisent

les hypothèses théoriques des courants locaux responsables de la polarisation des aimants.

Remarquons cependant qu'il est tout à fait possible de définir des équations duales de Maxwell décrivant des champs électrostatiques et magnétostatiques équivalents :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{\tilde{\rho}}{\mu_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \epsilon_0 \vec{j}^* & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique équivalent, $\tilde{\rho}$ est la densité volumique de charges magnétiques, ϵ_0 est la permittivité du vide, $\vec{B}$ est le champ d'induction magnétique équivalent, μ_0 est la perméabilité du vide et $\vec{j}^*$ est la densité volumique de courants.

La différence majeure qui réside dans une formulation duale de Maxwell est l'absence d'explications physiques associées aux champs produits par des sources électrostatiques ou magnétostatiques. Cependant, ces modèles n'ont pour unique objectif que de rendre compte d'un phénomène mesurable. Dans ce sens, les équations classiques de Maxwell ou les équations duales permettent de remonter aux expressions des champs électriques ou magnétiques créés par des charges stationnaires ou en mouvement.

Les équations de Maxwell décrivant les champs produits par des charges stationnaires ou des courants en régime permanent satisfont le théorème d'Helmholtz sur les champs de vecteurs. De ce fait, si la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteurs sont connus, toutes les propriétés de ce champ sont connues. La description du champ magnétique produit par un aimant permanent peut donc être faite avec une approche coulombienne. Cependant, alors qu'en électrostatique, la charge élémentaire peut être isolée, le monopôle n'existe pas en magnétostatique. Le modèle coulombien n'est utilisable que si l'on considère des distributions de charge en analogie dipolaire.

Les champs magnétiques créés par des aimants permanents sont souvent modélisés dans la littérature par le modèle coulombien. Ce modèle, emprunté à l'électrostatique est applicable seulement si toutes les contributions sont prises en compte. Dans le cas contraire, ce modèle n'aurait pas de sens. Par exemple, le champ créé par un seul plan chargé n'a pas de sens en magnétostatique car toute source de champ magnétique est par nature dipolaire, ce qui n'est pas le cas pour un plan chargé.

Notre discussion amène à penser que la loi de Coulomb est dans une certaine mesure identique à la loi de Biot et Savart. C'est en partie vrai sur la dépendance en $\frac{1}{r^2}$ du champ,

qu'il soit de nature électrostatique ou magnétostatique. L'artefact du produit vectoriel dans la loi de Biot et Savart peut être vu comme la façon mathématique la plus commode de lier la direction d'un courant avec les lignes de champ.

L'équivalence du modèle coulombien et du modèle ampérien est utilisée tout au long de cette thèse. Certaines topologies d'aimants sont plus facilement modélisables par l'un ou l'autre modèle. C'est pour cela que les équations classiques et duales de Maxwell doivent être considérées avec la même intention pour la description des champs issus de structures à topologie courbe.

1.1.4 Place des aimants dans la technologie électrique moderne

Les aimants permanents tiennent aujourd'hui une place considérable dans la technologie électrique et l'électrotechnique [2]-[4]. La conception de machines électriques est directement liée à l'utilisation de sources de champ magnétique. Ainsi, les aimants permanents ou les électro-aimants produisent un champ polarisant utile à l'élaboration de machines à aimants permanents, d'accouplements magnétiques ou encore de capteurs magnétiques. Notons que les ferrites (on parle aussi d'oxydes ferriques) dominent largement le marché mondial. Ces aimants, apparus à la fin des années 1950 ont un prix de revient relativement faible comparé aux autres aimants (Néodyme-Fer-Bore, Samarium-Cobalt). Cependant, leur induction rémanente est de l'ordre de 0.4 T, ce qui est assez faible en comparaison avec les aimants modernes. En effet, les aimants Néodyme-Fer-Bore possèdent une énergie spécifique très importante (à partir d'environ 400 kJ/m³) avec une aimantation rémanente qui égale celle des AlNiCo (de l'ordre de 1.3 T à 1.5 T). Ainsi, le choix d'utiliser une certaine famille d'aimants plutôt qu'une autre dépend des conditions pour lesquelles l'aimant est utilisé. Par exemple, les AlNiCo ont une très bonne stabilité thermique, même à des températures élevées (de l'ordre de 500° C) mais un champ coercitif relativement faible (de l'ordre de $\mu_0 H_c = 0.2$ T). A l'inverse, les aimants à base de Néodyme-Fer-Bore ont une température de Curie assez modeste (à partir de 310° C environ) mais un champ coercitif plus important ($\mu_0 H_c = 1.5$ T environ).

1.2 Structure de la Thèse

Ce manuscrit est composé de deux parties synthétisant les travaux présentés dans les annexes sous forme de publications. En conséquence, nous présentons de manière succincte les principaux résultats qui retracent les deux années de recherche consacrées à cette thèse. Par souci d'éviter toute redondance avec le contenu des publications, nous avons indiqué tout au long du texte les références des publications relatives au contenu présenté.

La première partie expose les modèles analytiques sur la modélisation du champ créé par des aimants permanents de topologie courbe. Les premières configurations étudiées sont les anneaux aimantés radialement et axialement. Puis, nous établissons des modèles analytiques permettant de calculer le champ magnétique créé par des tuiles aimantées radialement, axialement, uniformément et dans toutes les directions du plan d'aimantation. Ces modèles sont utilisés pour la conception d'actionneurs sans fer, d'accouplements magnétiques ou encore de structures dédiées à l'Imagerie par Résonance Magnétique.

La deuxième partie présente les travaux réalisés sur le joint de ferrofluide d'un haut-parleur sans fer. Ces travaux sont basés sur le calcul du champ créé par des aimants permanents. La façon dont nous modélisons le comportement du joint est très différente des études menées dans la littérature. Dans notre application, le ferrofluide est soumis à un champ magnétique très fort (supérieur à 400 kA/m) et son comportement mécanique dépend principalement de l'interaction du champ magnétique produit par la structure magnétique et de l'aimantation saturée du ferrofluide. Dans cette configuration, la connaissance exacte du champ inhomogène en tout point de l'espace est indispensable pour la prédiction de la forme, du volume et des propriétés mécaniques du joint. Notons que l'inhomogénéité du champ implique une répartition énergétique dans l'espace entraînant la formation du joint de ferrofluide. Ce modèle est validé expérimentalement par une mesure de la raideur radiale du joint de ferrofluide.

Chapitre 2

Modélisation analytique des aimants permanents

Ce chapitre regroupe les différents travaux effectués sur la modélisation analytique des structures sans fer. Ces approches sont essentiellement basées sur les lois fondamentales de la magnétostatique et de l'électrostatique. La modélisation analytique d'un système à aimants permanents passe par la détermination du champ et des interactions mécaniques (forces, couples, raideurs) exercées entre ces aimants. Toutes les expressions analytiques formalisées au cours de cette thèse sont présentées dans les annexes de ce manuscrit. En conséquence, nous donnons dans ce chapitre les principaux modèles analytiques établis pour modéliser les structures à aimants permanents.

Nous présentons d'abord un état de l'art consacré aux principaux travaux sur le calcul analytique du champ créé par des aimants ainsi que sur le calcul analytique des interactions mécaniques entre aimants permanents.

Dans un second temps, nous exposons les travaux effectués sur le calcul de champ créé par des aimants permanents ainsi que sur le calcul de forces s'exerçant entre eux.

2.1 Etat de l'Art

Les premiers travaux de synthèse concernant le calcul du champ magnétique créé par des sources magnétiques (aimants, bobines) remontent aux années 1960. Les trois ouvrages de référence, publiés par E. Durand [1] et dédiés à l'Electrostatique et la Magnétostatique, décrivent les expressions du champ créé par des surfaces planes (topologie parallélépipédique) et cylindriques. Ces approches sont essentiellement basées sur la détermination du potentiel scalaire créé par des distributions de charges en tout point de l'espace. Notons

dès à présent que le champ magnétique dérive d'un potentiel coulombien, c'est-à-dire que le potentiel magnétique décroît en $\frac{1}{r}$ (r est la distance entre le point d'observation et la source). Ces premiers travaux synthétisent les différentes lois régissant les propriétés du champ magnétique. Nous considérons ces ouvrages comme étant les références dans ce domaine dès 1960.

Les progrès réalisés dans la fabrication des aimants apparus avec la technologie des aimants Terre Rare conduisent les scientifiques à étudier de façon analytique le champ créé par les aimants permanents. En particulier, G. Akoun et J. P. Yonnet établissent en 1984 l'expression 3D de la force s'exerçant entre 2 aimants parallélépipédiques [5]. Ces travaux incitent à employer des formulations analytiques pour la conception et l'optimisation de dispositifs à aimants permanents [6]-[9].

Les années qui suivent sont marquées par des études sur l'optimisation des structures annulaires. Ces structures sont abondamment utilisées en électrotechnique pour la réalisation de moteurs et de machines électriques. On distingue cependant deux façons d'appréhender la problématique du calcul de champ créé par les aimants constituant ces structures.

B. Azzerboni, E. Cardelli et A. Tellini établissent les expressions du champ créé par des conducteurs parallélépipédiques infinis parcourus par des courants [10]. Ces travaux, du point de vue de la topologie des sources magnétiques, sont dans la continuité des travaux amorcés par J. P. Yonnet. Dans le même temps, certains auteurs remplacent les anneaux par des parallélépipèdes infinis afin de simuler le champ proche à l'intérieur des anneaux. En effet, la courbure des aimants entraîne des difficultés mathématiques redoutables (fonctions spéciales, oscillations des intégrandes). Ainsi, M. Marinescu et N. Marinescu qui s'intéressent aux structures de Halbach [11] mènent des travaux basés sur la linéarisation de la courbure des aimants pour optimiser des structures à aimantation tournante [12][13]. Cette façon de traiter la problématique des champs exercés par des aimants annulaires et des forces s'exerçant entre ces anneaux est utilisée par J. P. Yonnet [14] dans l'étude de la raideur des structures d'anneaux empilés (structures passives) et dans l'étude des accouplements magnétiques [15]. Ces approches ont l'intérêt d'être totalement analytiques et conduisent J. Delamare à comparer les performances de différentes structures d'aimants utilisées pour la conception de paliers magnétiques [16]. Ces approches analytiques sont également employées par F. Bancel, M. Berkouk, P. Elies, J. F. Charpentier, G. Lemarquand et V. Lemarquand pour optimiser les structures à aimants permanents (capteurs, actionneurs, accouplements) [17]-[22]. Par ailleurs, S. M. Huang et C. K. Sung utilisent un modèle bidimensionnel pour calculer le moment transmis entre aimants permanents [23]. Très récemment, A. E. Marble propose des formules analytiques 2D pour étudier le champ lointain créé par une structure de type IRM [24].

La deuxième façon d'aborder le calcul du champ créé par des aimants est d'utiliser

des formulations tridimensionnelles qui tiennent compte de l'effet de courbure des anneaux aimantés radialement et axialement. En 1991, B. Azzerboni, E. Cardelli, M. Raugi, A. Tellini et G. Tina emploient le potentiel vecteur pour calculer le champ magnétique créé par des courants circulant dans des disques conducteurs [25]. Les trois composantes du champ magnétique sont présentées sous formes semi-analytiques basées sur une ou deux intégrales numériques selon le cas. Ces expressions sont ensuite simplifiées par B. Azzerboni et E. Cardelli en 1993 [26]. Ces années sont aussi marquées par des travaux concernant l'utilisation d'aimants dont le produit énergétique est élevé pour la conception d'accouplements magnétiques, comme le montrent les travaux de M. M. Nagrial [27].

E. P. Furlani, S. Reznik et A. Kroll poursuivent ces travaux en établissant une formulation 3D semi-analytique du champ magnétique créé par des cylindres polarisés radialement [28]. E. P. Furlani et M. A. Knewtson reprennent cette méthodologie en 1997 et utilisent des formules 3D dans le cas de cylindres aimantés axialement [29]. Cette même année, E. P. Furlani applique ces résultats pour l'amélioration de moteurs d'aimants permanents de type NdFeB [30]. Notons par ailleurs que E. P. Furlani propose des modèles analytiques de forces et couples s'exerçant entre des aimants courbes pour l'optimisation d'accouplements magnétiques [31]-[34]. En outre, il établit des modèles 2D [35] et 3D [36] pour calculer le moment transmis dans les accouplements à entrefer cylindrique. Il utilise ses modèles pour concevoir des structures dédiées aux accouplements magnétiques [37]. Ses travaux le conduisent en 2001 à la publication d'un livre traitant des applications de l'électromécanique [38].

En 1997, S. I. Babic et M. M. Gavrilovic établissent des formulations semi-analytiques du champ créé par des courants circulant dans des conducteurs courbes [39]. En 1998, E. Varga et A. Beyer proposent une formulation tridimensionnelle basée sur des intégrales elliptiques pour déterminer le champ magnétique créé par un cylindre aimanté uniformément [40]. Cette même année, B. Azzerboni, G. A. Saraceno et E. Cardelli établissent des formulations semi-analytiques du champ magnétique créé par des courants dans des conducteurs cylindriques. En 2000, S. I. Babic, C. Akyel et M. M. Gavrilovic appliquent la représentation coulombienne pour évaluer le champ tridimensionnel créé par des distributions de charge [41]. Notons que les expressions supputées par Azzerboni en 1998 sont simplifiées en 2002 par S. I. Babic, C. Akyel, S. Salon et S. Kincic [42]. Ces modèles sont ensuite employés par ces auteurs pour calculer les forces s'exerçant entre bobines parcourues par des courants en 2003 [43]. Puis, ils sont réduits dans le cas de conducteurs infiniment fins en 2004 [44] puis en 2005 [45] dans le cas de géométries plus complexes. Notons enfin les travaux de M. Lang en 2002 où il expose le calcul du champ créé par un anneau aimanté axialement ainsi que de la force et la raideur [46].

Dans le même temps, O.-M. Kwon, Chinnawat Surussavadee, M. V. K. Chari, S. Salon et K. Sivasubramaniam se servent d'expansions sérielles pour s'affranchir des intégrales

elliptiques dans l'étude du champ magnétique lointain pour déterminer les défauts géométriques des moteurs à aimants permanents [47][48]. Cette expansion sérielle, basée sur l'utilisation de fonctions toroïdales est reprise par J. P. Selvaggi, S. Salon, O.-M Kwon, M. V. K. Chari et M. DeBortoli en 2007 [49][50] pour évaluer le champ magnétique créé par des sources cylindriques. Cette année 2007 témoigne d'un intérêt grandissant pour déterminer le champ magnétique créé par des anneaux ou tuiles aimantés radialement. H. L. Rakotoarison, J. P. Yonnet et B. Delinchant utilisent le modèle coulombien pour calculer le potentiel scalaire et les trois expressions semi-analytiques du champ magnétique créé par une tuile aimantée radialement [51]. E. A. Perigo, R. N. Faria et C. C. Motta utilisent un développement taylorien pour évaluer la densité de flux magnétique produit par des aimants toroïdaux [52]. Y. Zhilichev emploie l'équation de Laplace et la méthode de séparation des variables pour caractériser le champ magnétique créé par une machine à aimants permanents [53]. J. Conway utilise une formulation intégrale basée sur les fonctions de Bessel pour déduire l'inductance entre bobines avec [54] ou sans l'utilisation du potentiel vecteur [55].

Ainsi, de nombreux travaux sur la modélisation analytique montrent clairement l'intérêt d'utiliser des modèles analytiques. Ces études permettent de concevoir des sources de flux intenses, comme le montrent les travaux de M. Abele et H. A. Leupold [56][57] en collaboration avec E. Potenziani II [58]. En parallèle, d'autres auteurs comme M. Aydin, Z. Zhu, T. Lipo et D. Howe utilisent des formules analytiques basées sur l'exploitation de bases de fonctions trigonométriques pour optimiser les accouplements magnétiques [59]. Notons enfin l'importance des travaux de Z. Q. Zhu et D. Howe [60][61] dans l'étude des structures de Halbach [62][63]. En 2002 et 2004, Z. Zhu, Z. Xia et D. Howe étudient ces structures à l'aide d'approches analytiques basées sur l'équation de Laplace. [64][65].

2.2 Champ magnétique 3D créé par un aimant annulaire

L'aimant annulaire est utilisé dans les moteurs, les paliers et les transducteurs électromécaniques (figure 2.1). Sa taille et son poids sont des éléments importants dans la conception de dispositifs à aimants permanents pour des raisons économiques (l'aimant coûte cher) et pour des raisons scientifiques (optimisation de structures).

Pour ces raisons, il est intéressant de prédire analytiquement le champ magnétique créé par un anneau en tout point de l'espace, quels que soient son volume et sa forme. Les deux grandes familles d'anneaux d'aimant sont les anneaux aimantés radialement et les anneaux aimantés axialement. Remarquons qu'un anneau aimanté orthoradialement est à strictement parler un circuit magnétique fermé qui ne produit pas de champ magnétique.



FIGURE 2.1 – Illustration de différentes structures d’anneaux aimantés (disques et anneaux),
source : <http://www.007magnet.com/UploadFiles/20067701429249.jpg>

2.2.1 Anneau aimanté radialement

Nous exposons les modèles utilisés pour établir les expressions du champ magnétique 3D créé par un anneau aimanté radialement. Deux méthodes analytiques sont employées : le modèle coulombien et le modèle ampérien.

L’approche coulombienne

Dans l’approche coulombienne, un anneau aimanté radialement est représenté par des charges fictives localisées sur les surfaces et dans le volume de l’aimant. Ainsi, pour un anneau dont l’aimantation est dirigée vers le centre (figure 2.2), la surface intérieure de l’anneau est chargée avec une densité surfacique de pôles magnétiques $\sigma_s = +J$, la surface extérieure de l’anneau est chargée avec une densité surfacique de pôles magnétiques $\sigma_s = -J$ et le volume est chargé avec la densité volumique de charges $\sigma_v = \frac{J}{r}$, où r est la distance radiale, J est le module de la polarisation de l’aimant.

En notant r_0 , un point appartenant à la surface d’intégration de l’anneau, le champ magnétique $\vec{H}(r, z)$ créé peut être exprimé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{H}(r, z) = & \int_{(V)} \frac{\sigma_v^*(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\mu_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^3\vec{r}_0 + \int_{(S_{in})} \frac{\sigma_s^*(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\mu_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^2\vec{r}_0 \\ & - \int_{(S_{out})} \frac{\sigma_s^*(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\mu_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^2\vec{r}_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

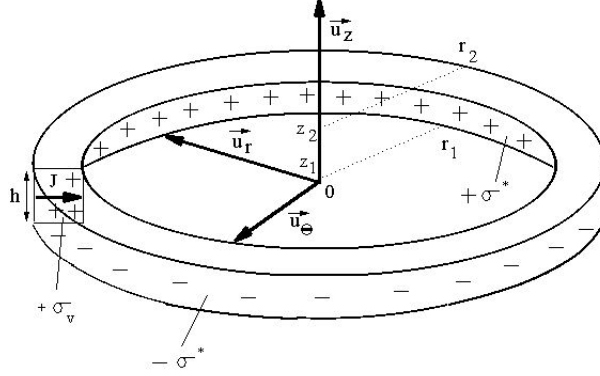


FIGURE 2.2 – Représentation d'un anneau aimanté radialement vers le centre dans l'approche coulombienne

avec

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = \frac{(r - r_i \cos(\tilde{\theta}))\vec{u}_r - r_i \sin(\tilde{\theta})\vec{u}_\theta + (z - \tilde{z})\vec{u}_z}{(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\tilde{\theta}) + (z - \tilde{z})^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.2)$$

où $i = 1$ pour $dr_0^2 = dS_{in} = r_1 d\tilde{\theta} d\tilde{z}$, $i = 2$ pour $dr_0^2 = dS_{out} = r_2 d\tilde{\theta} d\tilde{z}$, $i = [\bullet]$ pour $dr_0^3 = \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{\theta} d\tilde{z}$.

L'intégration de l'équation (2.1) permet de calculer les trois composantes : $H_r(r, z)$, $H_\theta(r, z)$ and $H_z(r, z)$. Notons que la composante azimutale $H_\theta(r, z)$ est 0 à cause de la symétrie cylindrique.

Par ailleurs, la composante radiale $H_r(r, z)$ est donnée par :

$$H_r(r, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} \left(S_{i,j}^r + V_{i,j}^r + \mathbf{N}_{i,j} \right) \quad (2.3)$$

avec

$$S_{i,j}^r = \alpha_{i,j}^{(0)} \left(\alpha_i^{(1)} \mathbf{F}^* \left[\alpha_{i,j}^{(2)}, \alpha_i^{(3)} \right] + \alpha_i^{(4)} \mathbf{\Pi}^* \left[\alpha_{i,j}^{(2)}, \alpha_i^{(5)}, \alpha_i^{(6)} \right] \right) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} V_{i,j}^r &= f(z - z_j, r^2 + r_i^2 + (z - z_j)^2, 2rr_i, -1) \\ &\quad - f(z - z_j, r^2 + r_i^2 + (z - z_j)^2, 2rr_i, 1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

et

$$f(a, b, c, u) = -\eta \left(\beta^{(1)} + \beta^{(2)} \right) \quad (2.6)$$

Paramètres	
$\alpha_{i,j}^{(0)}$	$\frac{J\sqrt{2}}{4\pi\mu_0} \frac{r_i(-z+z_j)}{(2r_i r)^{3/2} \alpha_i^{(1)}}$
$\alpha_i^{(1)}$	$r_i^2 + r^2 + 2r_i r$
$\alpha_{i,j}^{(2)}$	$\sqrt{\frac{4r_i r}{\alpha_i^{(1)} + (z-z_j)^2}}$
$\alpha_i^{(3)}$	$\sqrt{\frac{\alpha_i^{(1)} + (z-z_j)^2}{4r_i r}}$
$\alpha_i^{(4)}$	$2r_i r^2 - r_i(r_i^2 + r^2)$
$\alpha_i^{(5)}$	$\frac{\alpha_i^{(1)} + (z-z_j)^2}{\alpha_i^{(1)}}$
$\alpha_i^{(6)}$	$\sqrt{\frac{2(\alpha_i^{(1)} + (z-z_j)^2)}{4r_i r}}$

TABLE 2.1 – Paramètres utilisés pour le calcul des contributions de charges surfaciques dans la détermination de la composante radiale $H_r(r, z)$

$$\begin{aligned}
 \eta = & \beta^{(3)} \left[(b-c) \mathbf{E}^* \left[\beta^{(4)}, \beta^{(5)} \right] + c \mathbf{F}^* \left[\beta^{(4)}, \beta^{(5)} \right] \right] \\
 & + \beta^{(6)} \left[(b-a^2) \mathbf{F}^* \left[\beta^{(7)}, \beta^{(8)} \right] + (b-a^2+c) \mathbf{\Pi}^* \left[\beta^{(9)}, \beta^{(7)}, \beta^{(8)} \right] \right] \\
 & - \beta^{(10)} - \beta^{(11)}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{N}_{i,j} = \int_1^{-1} (1-u^2) \arctan \left[\frac{(r_i - ru)(z - z_j)}{\sqrt{r^2(u^2 - 1)} \xi} \right] du \tag{2.8}$$

$$\xi = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i u + (z - z_j)^2} \tag{2.9}$$

La composante axiale $H_z(r, z)$ du champ est donnée par :

$$H_z(r, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} \left(S_{i,j}^z + V_{i,j}^z \right) \tag{2.10}$$

avec

$$S_{i,j}^z = \frac{2r_i}{(r - r_i)^2 + (z - z_j)^2} \mathbf{K}^* \left[-\frac{4rr_i}{(r - r_i)^2 + (z - z_j)^2} \right] \tag{2.11}$$

$$V_{i,j}^z = \int_0^{2\pi} \tanh^{-1} \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_j)^2 - 2rr_i \cos(\tilde{\theta})}}{r_i - r \cos(\tilde{\theta})} \right] \tag{2.12}$$

Paramètres	
$\beta^{(1)}$	$a\sqrt{1-u^2}\sqrt{\frac{b-cu}{b+c}} + \frac{a\sqrt{c(1+u)}}{c\sqrt{1-u^2}}$
$\beta^{(2)}$	$\frac{a(a^2+b)\arcsin[u]}{c\sqrt{b+c}}\sqrt{b-cu}$
$\beta^{(3)}$	$(1+u)\sqrt{\frac{c(u-1)}{b-c}}$
$\beta^{(4)}$	$\arcsin\left[\sqrt{\frac{b-cu}{b+c}}\right]$
$\beta^{(5)}$	$\frac{b+c}{b-c}$
$\beta^{(6)}$	$\sqrt{1-u^2}\sqrt{\frac{c(1+u)}{b+c}}$
$\beta^{(7)}$	$\arcsin\left[\sqrt{\frac{1+u}{2}}\right]$
$\beta^{(8)}$	$\frac{2c}{b+c}$
$\beta^{(9)}$	$\frac{2c}{b+c-a^2}$
$\beta^{(10)}$	$-2\sqrt{1-u^2}\log[a+\sqrt{b-cu}]$
$\beta^{(11)}$	$-\frac{\sqrt{x}}{c}\log\left[\frac{4c^2(c+a^2u-bu+\sqrt{x}\sqrt{1-u^2})}{x^{\frac{3}{2}}(a^2-b+cu)}\right]$
x	$-a^4+2a^2b-b^2+c^2$

TABLE 2.2 – Paramètres utilisés pour la détermination de la contribution de charges volumiques dans le calcul de $H_r(r, z)$

Les fonctions spéciales utilisées sont les suivantes :

$$\mathbf{K}^*[m] = \mathbf{F}^*\left[\frac{\pi}{2}, \mathbf{m}\right] \quad (2.13)$$

$$\mathbf{F}^*[\phi, m] = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-m\sin(\theta)^2}} d\theta \quad (2.14)$$

$$\mathbf{\Pi}^*[n, \phi, m] = \int_0^\phi \frac{1}{(1-n\sin(\theta)^2)\sqrt{1-m\sin(\theta)^2}} d\theta \quad (2.15)$$

L'expression de la composante axiale est illustrée à la figure 2.3 où on représente cette composante en fonction du point d'observation r . Nous prenons les dimensions suivantes : $r1 = 0.025$ m, $r2 = 0.028$ m, $z1 = 0$ m, $z2 = 0.003$ m, $z = 0.0029$ m, $J = 1$ T.

Les expressions tridimensionnelles du champ sont donc exprimées en fonction d'intégrales elliptiques complètes ([Ravaud-A],[66]). Ces intégrales sont complètes du fait de la connexité de l'anneau (l'intégration angulaire va de 0 à 2π).

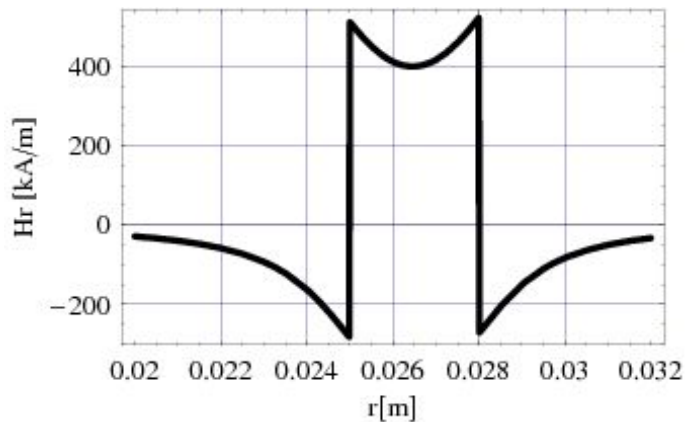


FIGURE 2.3 – Représentation 2D de la composante radiale du champ créé par un anneau à section carrée aimanté radialement vers l'intérieur ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m (plan médian), $J = 1$ T); la discontinuité du champ radial tend vers 800000 A/m pour $r = 0.025$ m et $r = 0.028$ m; la composante radiale du champ démagnétisant vaut 400.378 kA/m dans le milieu de l'anneau (c'est-à-dire pour $r = 0.0265$ m et $z = 0.0015$ m)

Le modèle coulombien implique un formalisme constitué d'une partie basée sur des intégrales elliptiques, et une autre partie semi-analytique utilisant une intégration numérique ([Ravaud-B],[67]). En effet, dans l'approche coulombienne, la contribution due aux charges volumiques s'écrit en une partie analytique (basée sur des intégrales elliptiques) et une partie semi-analytique (nécessitant une intégration numérique). Pour des anneaux radialement fins, on peut omettre la contribution de charges volumiques afin d'obtenir des temps de calcul très courts (1 seconde pour un processeur 1 GHz). Cependant, cette contribution doit être prise en compte en champ lointain ([Ravaud-D],[68]). Elle est d'ailleurs obligatoire pour assurer l'équilibre des charges fictives dans l'approche coulombienne.

L'approche ampérienne

Le modèle ampérien est plus adapté pour évaluer le champ magnétique créé par un anneau aimanté radialement. Dans l'approche ampérienne, un anneau aimanté radialement est représenté par deux nappes de courants fictifs circulant sur la face inférieure et la face supérieure de l'anneau. Par exemple, un anneau dont l'aimantation est dirigée vers le centre est représenté par une nappe de courant dont le vecteur instantané est dirigé dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sur la face supérieure et d'une nappe de courant dont le vecteur instantané est dirigé dans le sens des aiguilles d'une montre sur la face inférieure

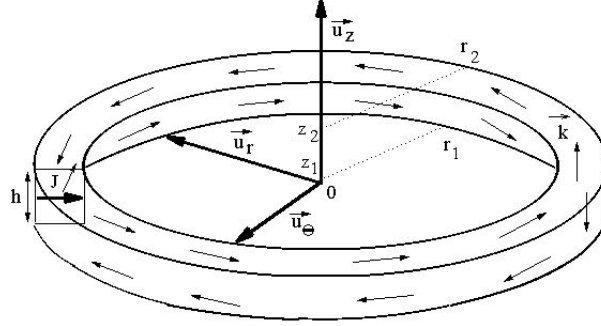


FIGURE 2.4 – Représentation d'un anneau aimanté radialement vers le centre dans l'approche ampérienne

(voir figure 2.4).

Si on note $\vec{k}$ le vecteur densité de courant circulant sur les deux faces (face inférieure et face supérieure de l'anneau aimanté radialement), le rapport entre ce vecteur densité de courant et le vecteur polarisation de l'anneau est le suivant :

$$|\vec{k}| = \frac{|\vec{J}|}{\mu_0} \quad (2.16)$$

La circulation de ces courants fictifs est intrinsèquement liée à l'existence d'un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ qui s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_{S_{up}} \frac{\vec{k}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tilde{S}_{up} - \int_{S_{down}} \frac{\vec{k}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tilde{S}_{down} \right) \quad (2.17)$$

où S_{up} est la face supérieure de l'anneau, ($z = z_2$) et S_{down} est la face inférieure de l'anneau ($z = z_1$). Par ailleurs, la densité volumique de courants fictifs est nulle car la polarisation est supposée parfaitement radiale :

$$\vec{k}_v = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{J}}{\mu_0} = \vec{0} \quad (2.18)$$

De ce fait, le champ magnétique se calcule avec :

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r}) = H_r(r, z) \vec{u}_r + H_z(r, z) \vec{u}_z \quad (2.19)$$

On trouve :

$$H_r(r, z) = \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} (g(i, k, 2\pi) - g(i, k, 0)) \quad (2.20)$$

avec

$$g(i, k, \tilde{\theta}) = 2(z - z_k)f(r^2 + (z - z_k)^2, r^2 + r_i^2 + (z - z_k)^2, rr_i, -r^2 - 2(z - z_k)^2, \tilde{\theta}) \quad (2.21)$$

où

$$\begin{aligned} f(a, b, e, c, x, \tilde{\theta}) = & \eta \left(2\xi_1(2ce^2 + \xi_2) \right) \mathbf{F}^*[\phi_2, \phi_3] \\ & + \eta \left(-e^2(c - x)(bx\sqrt{2} + 2\xi_1) \right) \mathbf{\Pi}^*[\phi_1^+, \phi_2, \phi_3] \\ & + \eta \left(e^2(c - x)(bx\sqrt{2} - 2\xi_1) \right) \mathbf{\Pi}^*[\phi_1^-, \phi_2, \phi_3] \\ & - 2\eta ax \left(xe^2 - ce^2\sqrt{2} + b\xi_1 \right) \mathbf{\Pi}^*[\phi_1^+, \phi_2, \phi_3] \\ & - 2\eta ax \left(-xe^2 + ce^2\sqrt{2} + b\xi_1 \right) \mathbf{\Pi}^*[\phi_1^-, \phi_2, \phi_3] \end{aligned} \quad (2.22)$$

où $\mathbf{F}^*[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ et $\mathbf{\Pi}^*[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ sont des intégrales elliptiques de deuxième et troisième espèce.

Par ailleurs, les paramètres ξ_1, ξ_2, η sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{e^2 x(x - c)} \\ \xi_2 &= x(b^2 - 2e^2) \\ \eta &= \frac{i \sqrt{\frac{-e^2 \sin(\tilde{\theta})^2}{(b-2e)^2}} \csc(\tilde{\theta})}{2 \sqrt{\frac{-1}{b+2e}} x \xi_1 (2ce^2 + \xi_2)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les arguments des intégrales elliptiques sont les suivants :

$$\begin{aligned} \phi_1^{+,-} &= \frac{(b + 2e)x}{bx \pm \sqrt{2} \sqrt{xe^2(x - c)}} \\ \phi_2 &= i \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{-1}{b + 2e}} \sqrt{b - 2e \cos(\tilde{\theta})} \right) \\ \phi_3 &= \frac{b + 2e}{b - 2e} \end{aligned} \quad (2.24)$$

La composante axiale du champ est déterminée à partir du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ par l'équation suivante :

$$H_z(r, z) = \vec{H}(\vec{r}) \bullet \vec{u}_z = \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r}) \right) \bullet \vec{u}_z \quad (2.25)$$

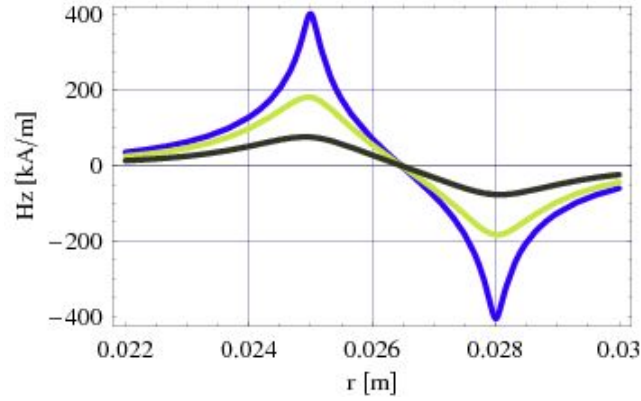


FIGURE 2.5 – Représentations 2D de la composante axiale du champ créé par un anneau aimanté radialement vers l'intérieur en fonction de r pour plusieurs altitudes (courbe bleue : $z = 0.0031$ m, courbe verte : $z = 0.0025$ m, courbe noire : $z = 0.002$ m) avec les dimensions suivantes : $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $J = 1$ T; pour $z = 0.0031$ m, la composante axiale du champ magnétique est déterminée juste au-dessus de l'anneau, à 0.1 mm de sa face supérieure. Pour $z = 0.0015$ m, la composante axiale du champ est 0 kA/m (dans le plan médian)

On trouve :

$$H_z(r, z) = \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} (I_1(r, z) + I_2(r, z)) \quad (2.26)$$

avec

$$I_1(r, z) = \frac{-4r_i}{\sqrt{(r - r_i)^2 + (z - z_k)^2}} \mathbf{K}^* \left[\frac{-4rr_i}{(r - r_i)^2 + (z - z_k)^2} \right] \quad (2.27)$$

où $\mathbf{K}^*[x]$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

$$I_2(r, z) = \int_0^{2\pi} \ln \left[r_i - r \cos(\tilde{\theta}) + \sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_k)^2 - 2rr_i \cos(\tilde{\theta})} \right] d\tilde{\theta} \quad (2.28)$$

On illustre cette expression à la figure 2.5 où on représente la composante axiale du champ en fonction du point d'observation r pour plusieurs altitudes. Les dimensions utilisées sont précisées dans la légende de la figure 2.5.

Dans l'approche ampérienne, la composante radiale du champ s'écrit seulement en fonctions d'intégrales elliptiques et aucune intégration numérique supplémentaire n'est requise

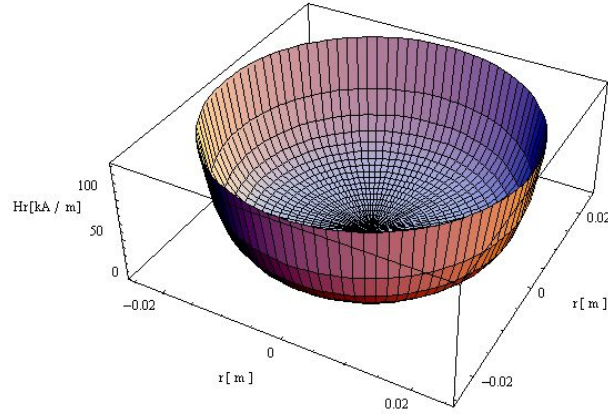


FIGURE 2.6 – Représentation 3D de la composante radiale créée par un anneau aimanté radialement en fonction de r ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T), r varie de 0 m à 0.023 m : on montre ici l'utilité d'un formalisme 3D dans la représentation du champ magnétique créé par une structure de topologie cylindrique, le champ radial est déterminé dans l'entrefer d'un haut-parleur sans fer.

([Ravaud-P],[69]). Par ailleurs, la composante axiale du champ est exprimée avec une partie semi-analytique moins lourde au niveau calculatoire que celle établie dans l'approche coulombienne. Précisons que ces deux approches donnent les mêmes résultats.

De telles expressions analytiques tridimensionnelles sont utiles pour représenter le champ magnétique créé par des aimants annulaires. Par exemple, le champ radial créé par un anneau aimanté radialement est représenté en fonction de la distance radiale à la figure 2.6. Les dimensions utilisées et les paramètres sont définis à la figure 2.2. Notons que nous avons représenté sur cette figure le champ radial dans l'entrefer d'un haut-parleur sans fer composé d'un anneau aimanté radialement.

Le temps de calcul pour représenter en 3D ce champ radial est de 2 secondes pour un processeur de 2 GHz. Notons que le champ est exact en tout point de l'espace (champ proche, champ lointain) car nous n'avons utilisé aucune hypothèse simplificatrice.

2.2.2 Anneau aimanté axialement

Dans le cas de l'anneau aimanté axialement, la maîtrise des deux approches permet de déduire que le modèle coulombien est plus adapté que le modèle ampérien pour déterminer

le champ magnétique créé en tout point de l'espace. En effet, comme le montre la figure 2.7, les densités surfaciques de pôles magnétiques apparaissent seulement sur les faces inférieure et supérieure de l'anneau dans l'approche coulombienne. Ainsi, les contributions surfaciques sont plus simples à déterminer mathématiquement que les contributions volumiques qui interviennent dans le cas de l'utilisation de l'approche ampérienne.

En effet, en adoptant l'approche coulombienne, si on ne considère qu'une face de l'anneau (par exemple, la face supérieure), le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\sigma^*}{4\pi\mu_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{\overrightarrow{P_1M}}{|\overrightarrow{P_1M}|^3} \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{\theta} \quad (2.29)$$

où $\overrightarrow{P_1M}$ désigne le vecteur pointant de la distribution de charge vers un point d'observation. Comme pour le cas de l'anneau aimanté radialement, la composante azimutale du champ est nulle pour raisons de symétrie.

Le champ magnétique s'écrit alors seulement en fonction de deux composantes :

$$\vec{H}(r, z) = H_r(r, z)\vec{u}_r + H_z(r, z)\vec{u}_z \quad (2.30)$$

La composante radiale du champ $H_r(r, z)$ s'écrit :

$$H_r(r, z) = \frac{\sigma^*}{2\pi\mu_0} (\alpha(u_2) - \alpha(u_1)) \quad (2.31)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha(u) = & F_1(u, r, z) \left(G_1(u, r, z) \mathbf{E}^* \left[\arcsin \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u + (z-h)^2}}{(r+r_2)^2 + (z-h)^2} \right], \psi(r_2) \right] \right) \\ & + F_1(u, r, z) \Pi^* \left[\arcsin \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u + (z-h)^2}}{(r+r_2)^2 + (z-h)^2} \right], \psi(r_2) \right] \\ & - F_2(u, r, z) \left(G_2(u, r, z) \mathbf{E}^* \left[\arcsin \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u + (z-h)^2}}{(r+r_1)^2 + (z-h)^2} \right], \psi(r_1) \right] \right) \\ & - F_2(u, r, z) \Pi^* \left[\arcsin \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u + (z-h)^2}}{(r+r_1)^2 + (z-h)^2} \right], \psi(r_1) \right] \\ & + \frac{(u^2 - 1)}{\sqrt{1 - u^2}} \log \left[r_2 - ru + \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u + (z-h)^2} \right] \\ & - \frac{(u^2 - 1)}{\sqrt{1 - u^2}} \log \left[r_1 - ru + \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u + (z-h)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

où

$$\psi(\alpha) = \frac{(r + \alpha)^2 + (z - h)^2}{(r - \alpha)^2 + (z - h)^2} \quad (2.33)$$

$$F_1(u, r, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{2r_2(1 + u) \sqrt{\frac{rr_2(u-1)}{(r-r_2)^2 + (z-h)^2}} \sqrt{\frac{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u + (z-h)^2}{(r+r_2)^2 + (z-h)^2}}}{\sqrt{\frac{rr_2(1+u)}{(r+r_2)^2 + (z-h)^2}} \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u + (z-h)^2}} \quad (2.34)$$

$$F_2(u, r, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{2r_1(1 + u) \sqrt{\frac{rr_1(u-1)}{(r-r_1)^2 + (z-h)^2}} \sqrt{\frac{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u + (z-h)^2}{(r+r_1)^2 + (z-h)^2}}}{\sqrt{\frac{rr_1(1+u)}{(r+r_1)^2 + (z-h)^2}} \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u + (z-h)^2}} \quad (2.35)$$

$$G_1(r, z) = \frac{(r - r_1)^2 + (z - h)^2}{2rr_1} \quad (2.36)$$

$$G_2(r, z) = \frac{(r - r_2)^2 + (z - h)^2}{2rr_2} \quad (2.37)$$

$$E^*[k] = \int_0^{\phi=\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} d\theta \quad (2.38)$$

Notons que u_2 vaut 0,999999999 et u_1 vaut -0.999999999. Plus $|u_1|$ et $|u_2|$ tendent vers 1, plus l'expression de la composante radiale est précise. Remarquons que dans le cas des discontinuités, nous pouvons utiliser la valeur principale de Cauchy.

La composante axiale $H_z(r, z)$ du champ est exprimée à l'aide d'intégrales elliptiques :

$$H_z(r, z) = \frac{\sigma^*}{4\pi\mu_0} (\gamma(\theta_2) - \gamma(\theta_1)) \quad (2.39)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) = & h_1(\theta)\eta_1(\theta)\mathbf{\Pi}^* \left[\frac{2(c_1 + d_1)f}{2c_1f - \sqrt{2}\sqrt{d_1^2f(-e + f)}}, i \sinh^{-1}[v_1], \frac{c_1 + d_1}{c_1 - d_1} \right] \\ & + h_2(\theta)\eta_1(\theta)\mathbf{\Pi}^* \left[\frac{2(c_1 + d_1)f}{2c_1f + \sqrt{2}\sqrt{d_1^2f(-e + f)}}, i \sinh^{-1}[v_1], \frac{c_1 + d_1}{c_1 - d_1} \right] \\ & - h_3(\theta)\eta_2(\theta)\mathbf{\Pi}^* \left[\frac{2(c_2 + d_2)f}{2c_2f - \sqrt{2}\sqrt{d_2^2f(-e + f)}}, i \sinh^{-1}[v_2], \frac{c_2 + d_2}{c_2 - d_2} \right] \\ & - h_4(\theta)\eta_2(\theta)\mathbf{\Pi}^* \left[\frac{2(c_2 + d_2)f}{2c_2f + \sqrt{2}\sqrt{d_2^2f(-e + f)}}, i \sinh^{-1}[v_2], \frac{c_2 + d_2}{c_2 - d_2} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

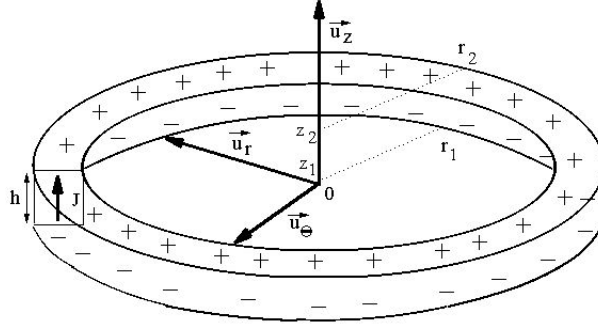


FIGURE 2.7 – Représentation d'un anneau aimanté axialement vers le haut dans l'approche coulombienne

où $\Pi^*[n, \phi, m]$ est une intégrale elliptique de troisième espèce et v_i est donnée dans l'équation suivante :

$$v_i = \sqrt{\frac{-1}{c_i + d_i}} \sqrt{c_i - d_i \cos(\theta)} \quad (2.41)$$

Les expressions déterminées sont plus générales que celles établies par Durand [1] car nous n'utilisons pas la fonction signe ([Ravaud-A],[66]). Les résultats sont numériquement équivalents et sont utiles pour optimiser en un temps de calcul très court des structures utilisant des anneaux aimantés axialement (1.6 s pour un processeur de 2 GHz). Ces expressions ont également été simplifiées par Babic et Akyel [70].

Le champ radial est illustré à la figure 2.8 en fonction de la distance radiale pour plusieurs altitudes avec les mêmes dimensions que celles choisies dans l'illustration précédente (figure 2.6) ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $J = 1$ T). Tous les paramètres sont définis dans la légende de la figure 2.8.

La composante axiale du champ magnétique créé par un anneau aimanté axialement est illustrée à la figure 2.9 où les paramètres utilisés sont définis dans la légende.

2.2.3 Intérêt d'utilisation des formulations 3D dans l'étude du champ magnétique créé par des anneaux

Les expressions tridimensionnelles des composantes du champ magnétique créé par un anneau aimanté radialement sont relativement complexes puisqu'elles requièrent le calcul

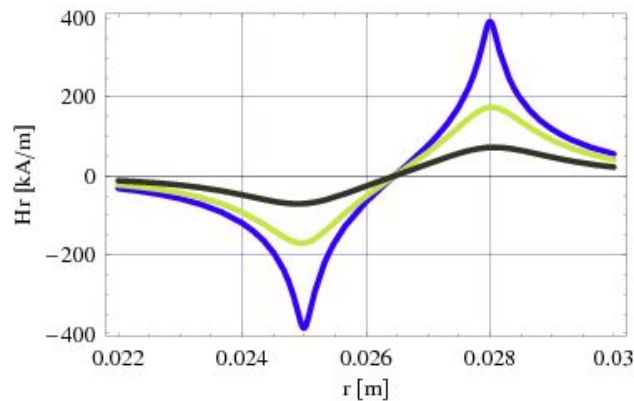


FIGURE 2.8 – Représentations 2D de la composante radiale du champ créé par un anneau aimanté axialement vers le haut en fonction de r pour plusieurs altitudes (courbe bleue : $z = 0.0031$ m, courbe verte : $z = 0.0025$ m, courbe noire : $z = 0.002$ m) avec les dimensions suivantes : $r1 = 0.025$ m, $r2 = 0.028$ m, $z1 = 0$ m, $z2 = 0.003$ m, $J = 1$ T; pour $z = 0.0031$ m, la composante radiale du champ magnétique est déterminée juste au-dessus de l'anneau, à 0.1 mm de sa face supérieure.

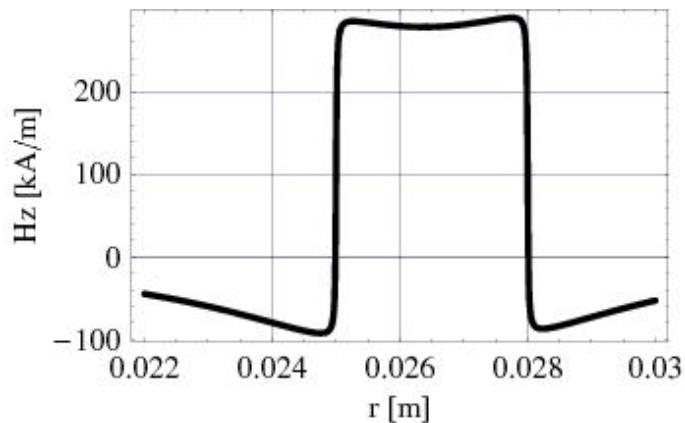


FIGURE 2.9 – Représentation 2D de la composante axiale du champ créé par un anneau à section carrée aimanté axialement vers le haut ($r1 = 0.025$ m, $r2 = 0.028$ m, $z1 = 0$ m, $z2 = 0.003$ m, $z = 0.0031$ m (juste au dessus de l'aimant), $J = 1$ T); le champ axial est presque uniforme juste au-dessus de la face supérieure de l'anneau (à 0.1 mm de la face supérieure de l'anneau)

numérique d'intégrales elliptiques. En conséquence, un aimant annulaire est souvent remplacé par un aimant parallélépipédique infini et le champ magnétique en champ proche est supposé être le même que celui produit par un aimant annulaire. Les expressions du champ produit sont totalement analytiques et se révèlent être plus simples à utiliser, leur temps de calcul étant également considérablement réduit. Nous utilisons dans ce manuscrit le terme de *formules linéarisées* [6]. Cette notion de *formules linéarisées* est similaire à l'emploi du terme *d'approximation linéaire*. Notons que cette façon de procéder est largement employée, comme en témoignent les références citées dans l'état de l'art de ce chapitre.

Cependant, nous démontrons dans cette thèse que l'utilisation de formules linéarisées induit des erreurs allant de 5 à 10 pour cent pour les grandes dimensions en champ proche et ne sont plus valides pour les dispositifs de petite taille.

La figure 2.10 illustre bien les limites de l'utilisation de formules 2D. En effet, définissant l'erreur relative $\frac{\Delta H_r}{H_r}$ de la façon suivante :

$$\frac{\Delta H_r}{H_r} = \left| \frac{H_r^{(3D)}(r, z) - H_r^{(2D)}(r, z)}{H_r^{(3D)}(r, z)} \right| \quad (2.42)$$

où $H_r^{(3D)}(r, z)$ est la composante radiale obtenue avec l'approche 3D et $H_r^{(2D)}(r, z)$ est la composante radiale obtenue avec d'approche 2D (c'est-à-dire linéarisée). On trace cette erreur relative à la figure 2.10 pour différents rayons de courbure r_{in} et pour différentes positions radiales du point d'observation.

La figure 2.10 montre clairement que pour des rayons intérieurs d'anneau de l'ordre de 2 cm ($r_{in} = 0.02$ m sur la figure 2.10), l'erreur relative commise est au moins de 10% quand le point d'observation est situé au niveau de la face inférieure de l'anneau. Cette erreur relative atteint pratiquement 20% lorsque le point d'observation r vaut les 9/10 du rayon intérieur.

Pour des rayons plus grands ($r_{in} = 0.1$ m), cette erreur relative est plus faible et sa décroissance varie en fonction de la position du point d'observation. Par exemple, cette erreur est d'environ 5% quand le point d'observation vaut 0.98 fois le rayon intérieur. De plus, le champ lointain n'est jamais déterminé précisément, avec une approche linéarisée pour des dispositifs dont le rayon vaut 10 cm.

2.2.4 Le théorème de permutation des composantes

Les composantes du champ créé par des aimants parallélépipédiques à section carrée, infinis dans une direction, et dont les aimantations sont orthogonales, sont liées mathématiquement [9]([Ravaud-D],[68]). Considérons deux aimants parallélépipédiques infinis dont les polarisations sont orthogonales, comme le montre la figure 2.11. Sur la figure 2.11-1,

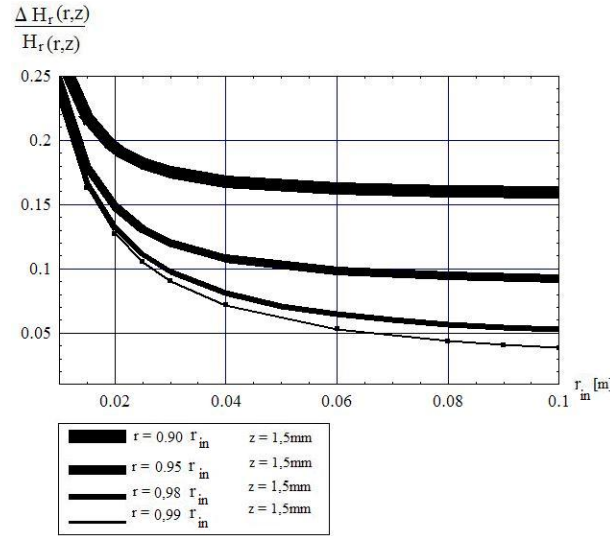


FIGURE 2.10 – Représentation de l'erreur relative en fonction de différents rayons intérieurs et de différents points d'observation ; $z_1 = 0 \text{ m}$, $z_2 = 0.003 \text{ m}$, $z = 0.0015 \text{ m}$ (plan médian), $J = 1 \text{ T}$. r_{in} désigne le rayon de courbure de l'anneau et r_{out} est négligée pour cette comparaison : on ne regarde que l'influence de la courbure d'une face sur le champ magnétique produit. Par exemple, pour $r = 0.9r_{in}$, l'erreur commise sur le champ est de 18% pour un rayon de courbure de 0.02 m et de 15.5% pour un rayon de courbure de 0.1 m

l'aimantation de l'aimant est dirigée suivant $\vec{u}_z$. Sur la figure 2.11-2, l'aimantation de l'aimant est dirigée suivant $-\vec{u}_x$.

Les deux composantes du champ magnétique s'écrivent :

$$\begin{aligned} H_z^{(1)}(x, z) &= H_x^{(2)}(x, z) \\ H_x^{(1)}(x, z) &= -H_z^{(2)}(x, z) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Le module du champ est le même dans les deux cas. Ceci montre que les deux configurations montrées à la figure 2.11 sont absolument équivalentes en terme de source magnétique.

Dans le cas d'anneaux aimantés radialement et axialement, ces équations ne sont plus valides et montrent que le théorème de permutation n'est plus applicable à des anneaux. Ceci prouve que le champ magnétique produit par un anneau aimanté radialement est différent de celui produit par un anneau aimanté axialement. Ainsi, les paliers passifs formés

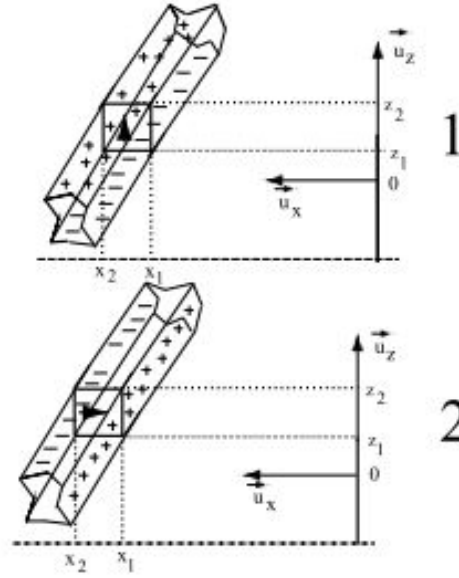


FIGURE 2.11 – *Représentation de deux aimants parallélépipédiques infinis dans une direction et dont les aimantations sont orthogonales*

avec des anneaux aimantés radialement n'ont pas les mêmes propriétés mécaniques que les paliers passifs formés avec des anneaux aimantés axialement. Cette différence est d'ailleurs d'autant plus grande que les rayons sont petits ([Ravaud-D], [68]).

2.3 Champ magnétique 3D créé par des tuiles

Les tuiles sont majoritairement employées dans les machines électriques, les capteurs, les accouplements magnétiques ou encore les moteurs (figure 2.12). Si le cas des tuiles aimantées radialement est étudié [51], les expressions analytiques du champ magnétique créé par des tuiles avec d'autres aimantations (aimantations axiales, orthoradiales, uniformes, arbitraires) sont présentées dans cette thèse. Ces tuiles sont fréquemment utilisées dans la conception de capteurs, d'actionneurs, ou encore dans les structures de Halbach. Nous présentons ici de telles structures et les perspectives qu'ouvrent l'utilisation de modèles totalement analytiques pour les modéliser.

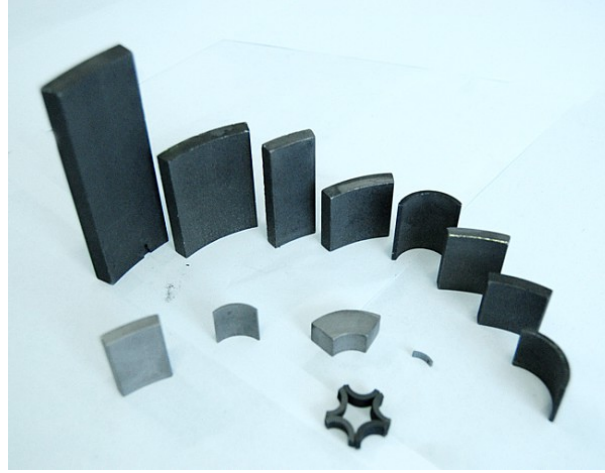


FIGURE 2.12 – Illustration de différentes tuiles d'aimant avec des rayons de courbure différents (technologie Samarium Cobalt, source : <http://www.chinahpmg.com/ProductPicture-china/th/SmCo-Magnets-Smco-Tile-458-0.jpg>)

2.3.1 Tuile aimantée radialement

La tuile aimantée radialement est largement utilisée dans la conception de machines électriques. L'expression du champ magnétique créé par une tuile infiniment fine dont l'aimantation est parfaitement radiale ([Ravaud-B],[71]) est établie en utilisant le modèle coulombien ([Ravaud-C],[67]). Dans cette configuration, l'expression de la composante azimutale $H_\theta(r, \theta, z)$ est totalement analytique car elle ne nécessite pas l'utilisation d'intégrales elliptiques incomplètes. La densité volumique de charge peut être négligée en champ proche puisque sa contribution entraîne systématiquement une formulation semi-analytique (sauf pour $H_\theta(r, \theta, z)$). Néanmoins, cette densité volumique de charge doit être prise en compte en champ lointain. Ces expressions sont donc applicables à des tuiles épaisses ou à des tuiles fines. Nous donnons ici les expressions des trois composantes du champ créé par des tuiles minces ou épaisses dans l'approche coulombienne. Le champ magnétique dépend cette fois-ci des trois coordonnées (r, θ, z) et s'écrit donc :

$$\vec{H}(r, \theta, z) = H_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + H_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + H_z(r, \theta, z)\vec{u}_z \quad (2.44)$$

En adoptant la même démarche que celle utilisée dans le cas de l'anneau aimanté radialement, la composante radiale $H_r(r, \theta, z)$ est réduite de la façon suivante :

$$H_r(r, \theta, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k-1)} \left(S_{i,j,k}^r + V_{i,j,k}^r \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} \mathbf{N}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \quad (2.45)$$

où

$$S_{i,j,k}^r = \alpha_{i,j}^{(0)} \left(\alpha_i^{(1)} \mathbf{F}^* \left[\alpha_{i,j,k}^{(2)}, \alpha_{i,k}^{(3)} \right] + \alpha_i^{(4)} \mathbf{\Pi}^* \left[\alpha_{i,j,k}^{(2)}, \alpha_{i,k}^{(5)}, \alpha_{i,k}^{(6)} \right] \right) \quad (2.46)$$

et

$$V_{i,j,k}^r = - \frac{f(z - z_j, r^2 + r_i^2 + (z - z_j)^2, 2rr_i, \cos(\theta - \theta_k))}{(\beta^{(1)} + \beta^{(2)})} \quad (2.47)$$

La fonction $f(a, b, c, u)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f(a, b, c, u) = & \beta^{(3)} \left[(b - c) \mathbf{E}^* \left[\beta^{(4)}, \beta^{(5)} \right] + c \mathbf{F}^* \left[\beta^{(4)}, \beta^{(5)} \right] \right] \\ & + \beta^{(6)} \left[(b - a^2) \mathbf{F}^* \left[\beta^{(7)}, \beta^{(8)} \right] \right] - \beta^{(10)} - \beta^{(11)} \\ & + \beta^{(6)} \left[(b - a^2 + c) \mathbf{\Pi}^* \left[\beta^{(9)}, \beta^{(7)}, \beta^{(8)} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \int_{\cos(\theta-\theta_1)}^{\cos(\theta-\theta_2)} (1 - u^2) \arctan \left[\frac{(r_i - ru)(z - z_j)}{\sqrt{r^2(u^2 - 1)\xi_1}} \right] du \quad (2.49)$$

avec

$$\xi_1 = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i u + (z - z_j)^2} \quad (2.50)$$

Il est intéressant de noter que les contributions de charges volumiques se décomposent en deux parties. Une partie est exprimable en fonction d'intégrales elliptiques classiques (terme $V_{i,j,k}^r$ dans l'équation 2.45) alors qu'une seconde partie nécessite l'utilisation d'une intégrale numérique (terme $\mathbf{N}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ dans l'équation 2.45 et défini dans l'équation 2.49).

La composante azimutale du champ $H_\theta(r, \theta, z)$ est donnée par

$$H_\theta(r, \theta, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k-1)} \left(S_{i,j,k}^\theta + V_{i,j,k}^\theta \right) \quad (2.51)$$

où

$$S_{i,j,k}^\theta = - \frac{(z - z_j)}{r \sqrt{-(z - z_j)^2}} \arctan \left[\frac{\xi_2}{\sqrt{-(z - z_j)^2}} \right] \quad (2.52)$$

avec

$$\xi_2 = \sqrt{r_i^2 + r^2 + (z - z_j)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_k)} \quad (2.53)$$

Paramètres	
$\alpha_{i,j}^{(0)}$	$\frac{J\sqrt{2}}{4\pi\mu_0} \frac{r_i(-z+z_j)}{(2r_i r)^{3/2} \alpha_i^{(1)}}$
$\alpha_i^{(1)}$	$r_i^2 + r^2 + 2r_i r$
$\alpha_{i,j,k}^{(2)}$	$\cos\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right) \sqrt{\frac{4r_i r}{\alpha_i^{(1)} + (z-z_j)^2}}$
$\alpha_{i,k}^{(3)}$	$\sqrt{\frac{\alpha_i^{(1)} + (z-z_j)^2}{4r_i r}}$
$\alpha_i^{(4)}$	$2r_i r^2 - r_i(r_i^2 + r^2)$
$\alpha_{i,k}^{(5)}$	$\frac{\alpha_i^{(1)} + (z-z_j)^2}{\alpha_i^{(1)}}$
$\alpha_{i,k}^{(6)}$	$\sqrt{\frac{2(\alpha_i^{(1)} + (z-z_j)^2)}{4r_i r}}$
$\beta^{(1)}$	$a\sqrt{1-u^2} \sqrt{\frac{b-cu}{b+c}} + \frac{a\sqrt{c(1+u)}}{c\sqrt{1-u^2}}$
$\beta^{(2)}$	$\frac{a(a^2+b) \arcsin[u]}{c\sqrt{b+c}} \sqrt{b-cu}$
$\beta^{(3)}$	$(1+u) \sqrt{\frac{c(u-1)}{b-c}}$
$\beta^{(4)}$	$\arcsin \left[\sqrt{\frac{b-cu}{b+c}} \right]$
$\beta^{(5)}$	$\frac{b+c}{b-c}$
$\beta^{(6)}$	$\sqrt{1-u^2} \sqrt{\frac{c(1+u)}{b+c}}$
$\beta^{(7)}$	$\arcsin \left[\sqrt{\frac{1+u}{2}} \right]$
$\beta^{(8)}$	$\frac{2c}{b+c}$
$\beta^{(9)}$	$\frac{2c}{b+c-a^2}$
$\beta^{(10)}$	$-2\sqrt{1-u^2} \log[a + \sqrt{b-cu}]$
$\beta^{(11)}$	$-\frac{\sqrt{x}}{c} \log \left[\frac{4c^2(c+a^2u-bu+\sqrt{x}\sqrt{1-u^2})}{x^{1.5}(a^2-b+cu)} \right]$
x	$-a^4 + 2a^2b - b^2 + c^2$
α	$r_i - r \cos(\theta - \theta_k)$
ξ	$\sqrt{r^2 + r_i^2 + (z-z_j)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_k)}$

TABLE 2.3 – Paramètres utilisés dans l'expression de la composante radiale du champ $H_r(r, \theta, z)$

et

$$V_{i,j,k}^\theta = \frac{1}{r} (-z_j - \alpha \log[z - z_j + \xi] + (z - z_j) \log[\alpha + \xi])$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin(\theta - \theta_k) \arctan \left[\frac{r \sin(\theta - \theta_k)}{z - z_j} \right] \\
 & + \sin(\theta - \theta_k) \arctan \left[\frac{(z - z_j)\alpha}{r \sin(\theta - \theta_k)\xi} \right]
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Il est important de noter que, dans l'approche coulombienne, la composante azimutale s'exprime sous forme totalement analytique. En effet, les contributions volumiques de charges sont exprimables de manière analytique et ne nécessitent ni l'utilisation de fonctions spéciales ni d'intégrations numériques.

La composante axiale $H_z(r, \theta, z)$ est donnée par :

$$H_z(r, \theta, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k-1)} \left(S_{i,j,k}^z \right) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} V_{i,j}^z \tag{2.55}$$

avec

$$S_{i,j,k}^z = \frac{2r_i}{(r - r_i)^2 + (z - z_j)^2} \mathbf{F} \left[\frac{\theta - \theta_k}{2}, -\frac{4rr_i}{(r - r_i)^2 + (z - z_j)^2} \right] \tag{2.56}$$

et

$$V_{i,j}^z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tanh^{-1} \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_j)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \tilde{\theta})}}{r_i - r \cos(\theta - \tilde{\theta})} \right] d\tilde{\theta} \tag{2.57}$$

L'approche coulombienne permet donc l'obtention d'expressions dont le temps de calcul est très court (1.2 s pour un processeur de 2 GHz).

L'approche ampérienne appliquée à une tuile aimantée radialement permet d'obtenir des expressions plus réduites dans le sens où l'expression du champ radial est analytique car elle ne s'exprime qu'avec des intégrales elliptiques (**Ravaud-P**, [69]). On définit l'opérateur somme $\wp_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} [\bullet]$ pour l'écriture des trois composantes du champ magnétique :

$$\wp_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} [\bullet] = \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} [\bullet] \tag{2.58}$$

Dans l'approche ampérienne (figure 2.14), la composante radiale du champ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H_r(r, \theta, z) = & \frac{J}{4\pi\mu_0} \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tilde{r} \sin(\theta - \theta_1)}{\left| \vec{r} - \vec{r}'(\theta_1, \tilde{z}) \right|^3} d\tilde{r} d\tilde{z} \\
 & - \frac{J}{4\pi\mu_0} \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tilde{r} \sin(\theta - \theta_2)}{\left| \vec{r} - \vec{r}'(\theta_2, \tilde{z}) \right|^3} d\tilde{r} d\tilde{z}
 \end{aligned}$$

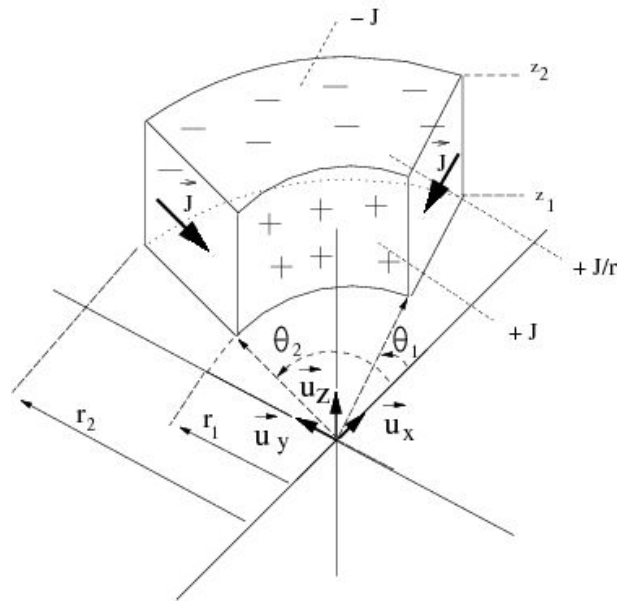


FIGURE 2.13 – Représentation d'une tuile aimantée radialement vers le centre dans l'analogie coulombienne

$$\begin{aligned}
 & + \frac{J}{4\pi\mu_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(z - z_2) \cos(\theta - \tilde{\theta})}{\left| \vec{r} - \vec{r}'(\tilde{\theta}, z_2) \right|^3} \tilde{r} d\tilde{\theta} d\tilde{r} \\
 & - \frac{J}{4\pi\mu_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(z - z_1) \cos(\theta - \tilde{\theta})}{\left| \vec{r} - \vec{r}'(\tilde{\theta}, z_1) \right|^3} \tilde{r} d\tilde{\theta} d\tilde{r}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

où

$$\frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}'(\alpha, \beta) \right|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \tilde{r}^2 - 2r\tilde{r} \cos(\theta - \alpha) + (z - \beta)^2}} \tag{2.60}$$

Cette expression se réduit en une formulation analytique basée sur l'utilisation d'intégrales elliptiques :

$$H_r(r, \theta, z) = \wp_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} [g(i, k, \theta - \theta_j) + k_{i,j,k} + l_{i,j,k}] \tag{2.61}$$

$$k_{i,j,k} = \sin(\theta - \theta_j) \ln [Y_{i,j,k}] \tag{2.62}$$

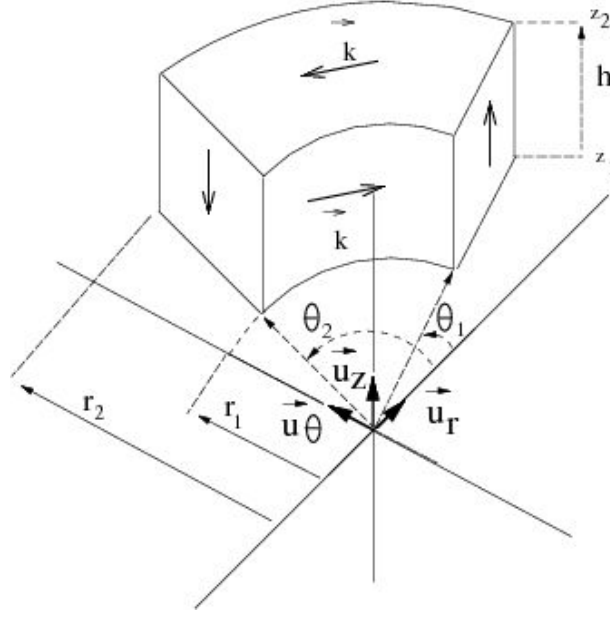


FIGURE 2.14 – Représentation d'une tuile aimantée radialement vers le centre dans l'analogue ampérienne

$$l_{i,j,k} = -\cos(\theta - \theta_j) \arctan[X_{i,j,k}] \quad (2.63)$$

avec

$$\begin{aligned} Y_{i,j,k} &= (z - z_k) + \sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_k)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_j)} \\ X_{i,j,k} &= \frac{(z - z_k)(r_i - r \cos(\theta - \theta_j))}{r \sin(\theta - \theta_j) \sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_k)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_j)}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Les fonctions $k_{i,j,k}$ et $l_{i,j,k}$ sont basées sur une formulation totalement analytique. Ces fonctions proviennent des densités de charges localisées sur les faces planes des tuiles. Il est donc intéressant de noter qu'une contribution plane de charges peut s'écrire dans un problème à symétrie de révolution à l'aide des fonctions usuelles telles que l'arctangente ou le logarithme. On peut illustrer l'expression de la composante radiale à la figure 2.15 où on trace cette composante en fonction du point d'observation r avec les dimensions suivantes : $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T, $\theta_1 = 0$ rad, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ rad, $\theta = \frac{\pi}{16}$ rad.

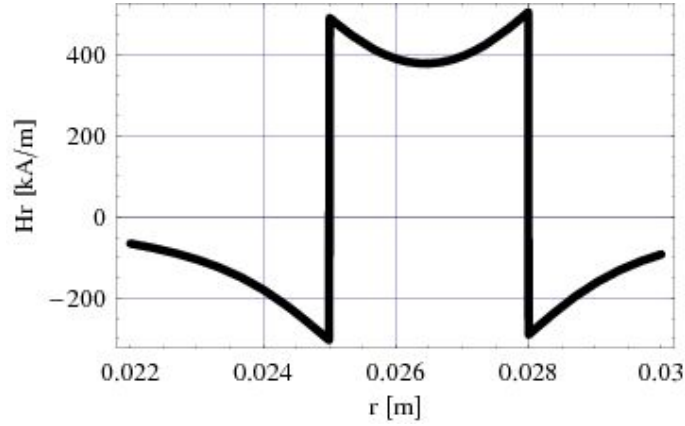


FIGURE 2.15 – Représentation 2D de la composante radiale en fonction du point d'observation r ; ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T, $\theta_1 = 0$ rad, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ rad, $\theta = \frac{\pi}{16}$ rad, c'est-à-dire dans le plan médian de la tuile); la composante axiale du champ démagnétisant vaut 379.139 kA/m au milieu de la tuile, c'est-à-dire pour $z = 0.0015$ m, $r = 0.0265$ m, $\theta = \frac{\pi}{16}$ rad. La discontinuité du champ radial tend vers 800000 A/m pour $r = 0.025$ m et $r = 0.028$ m

La composante azimutale $H_\theta(r, \theta, z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H_\theta(r, \theta, z) = & \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left(\int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(z - \tilde{z}) \sin(\theta - \tilde{\theta})}{|\vec{r} - \vec{r}'_j(\tilde{r}, \tilde{\theta})|^3} \right) \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{\theta} \\
 & + \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left(\int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r - \tilde{r} \cos(\theta - \theta_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'(\tilde{r}, \tilde{z})|^3} \right) d\tilde{r} d\tilde{z}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j(\alpha, \beta)|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha \cos(\theta - \beta) + (z - z_j)^2}} \\
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'(\alpha, \beta)|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha \cos(\theta - \theta_j) + (z - \beta)^2}}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Cette expression se réduit à :

$$H_\theta(r, \theta, z) = \wp_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} [-\cos(\theta - \theta_j) \ln[Y_{i,j,k}] - \sin(\theta - \theta_j) \arctan[X_{i,j,k}]]$$

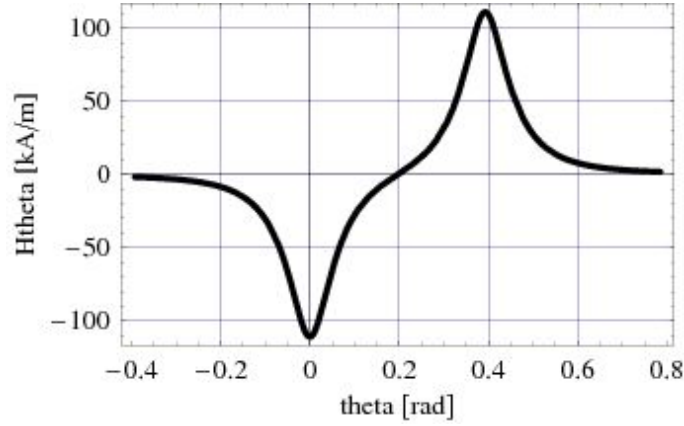


FIGURE 2.16 – Représentation 2D de la composante azimutale du champ magnétique créé par une tuile aimantée radialement vers le centre en fonction de θ ; ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.026$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T, $\theta_1 = 0$ rad, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ rad). Le point d'observation r est situé au tiers de la tuile au niveau de sa largeur radiale. Il y a continuité de cette composante au passage des faces droites de la tuile

$$+\varphi_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} \left[\frac{(z - z_k)}{r} (r_i - r \cos(\theta - \theta_j) + \xi_{i,j,k}) \right] \quad (2.67)$$

où

$$\xi_{i,j,k} = \sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_k)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_j)} \quad (2.68)$$

Les fonctions utilisées pour calculer la composante azimutale du champ $H_\theta(r, \theta, z)$ utilisent toutes des fonctions usuelles et sont dans ce sens analytiques. Ce champ azimutal peut s'écrire de façon totalement analytique dans l'analogie coulombienne ou dans l'analogie ampérienne. On peut illustrer l'expression de la composante azimutale à la figure 2.16 où on trace cette composante en fonction de θ avec les dimensions suivantes : $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.026$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T, $\theta_1 = 0$ rad, $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ rad, $\theta = \pi$ rad.

La composante axiale $H_z(r, \theta, z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} H_z(r, \theta, z) = & \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r\tilde{r} \cos(\theta - \tilde{\theta})}{\left| \vec{r} - \vec{r}'(\alpha, \gamma) \right|^3} d\tilde{r} d\tilde{\theta} \\ & - \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tilde{r}^2}{\left| \vec{r} - \vec{r}'(\alpha, \gamma) \right|^3} d\tilde{r} d\tilde{\theta} \end{aligned} \quad (2.69)$$

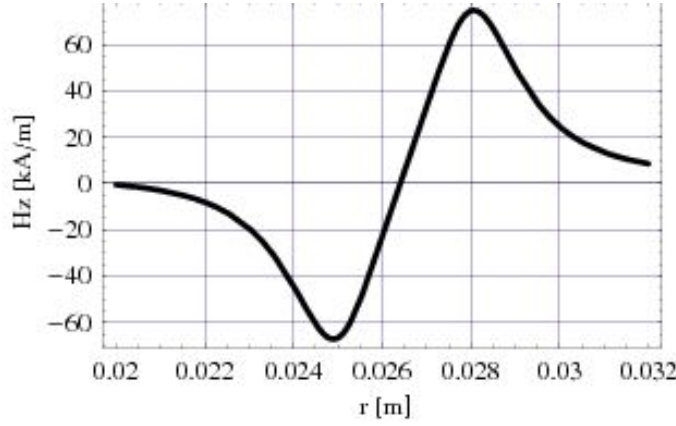


FIGURE 2.17 – Représentation 2D de la composante axiale du champ magnétique créé par une tuile aimantée radialement vers le centre en fonction de r ; ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.001$ m, $J = 1$ T, $\theta_1 = 0$ rad, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ rad, $\theta = \frac{\pi}{16}$ rad). Le point d'observation z est situé au tiers de la tuile au niveau de sa hauteur. Il y a continuité de cette composante au passage des faces courbes de la tuile

avec

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'(\alpha, \gamma)|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \gamma^2 - 2r\gamma \cos(\theta - \alpha) + (z - z_j)^2}} \quad (2.70)$$

Cette expression se réduit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H_z(r, \theta, z) = & \wp_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} \left[\frac{-2r_i}{(r - r_i)^2 + (z - z_k)^2} \mathbf{F}^* \left[\frac{\theta - \theta_j}{2}, -\frac{4rr_i}{(r - r_i)^2 + (z - z_k)^2} \right] \right] \\ & + \frac{J}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln \left[r_i - r \cos(\theta - \tilde{\theta}) + \xi_{\tilde{\theta}} \right] d\tilde{\theta} \end{aligned} \quad (2.71)$$

avec

$$\xi_{\tilde{\theta}} = \sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_k)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \tilde{\theta})} \quad (2.72)$$

Cette expression est illustrée sur la figure 2.17 où les dimensions sont précisées dans la légende.

L'écriture de la composante axiale du champ $H_z(r, \theta, z)$ montre qu'il reste encore une partie semi-analytique qui doit être évaluée numériquement. Le temps de calcul reste cependant très faible mais la partie semi-analytique, basée sur un logarithme à argument oscillant semble difficile à intégrer analytiquement.

Cette approche permet de représenter le champ magnétique créé par une structure alternée (de type machine électrique) en trois dimensions. A titre d'illustration, on montre à la figure

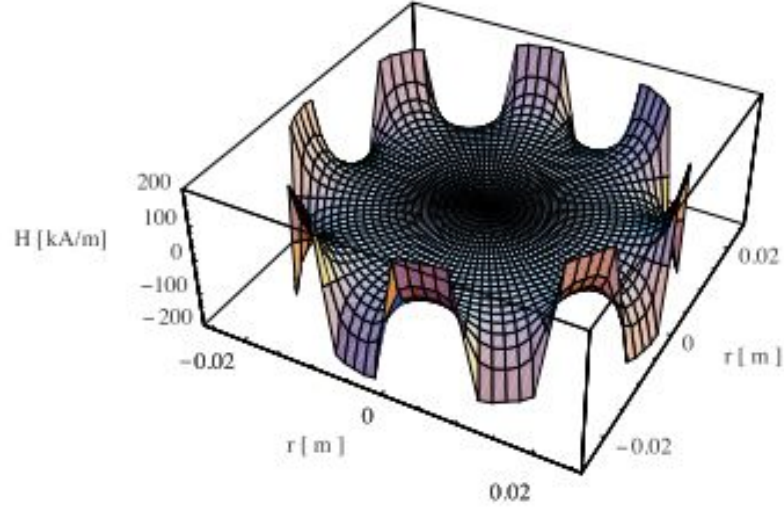


FIGURE 2.18 – Représentation 3D de la composante radiale du champ magnétique créé par une structure alternée de 8 tuiles jointives aimantées radialement en fonction de la distance radiale dans l'entrefer (r varie de 0 m à 0.024 m) ; les dimensions sont les suivantes : $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T. Le champ est donc déterminé dans le plan médian de la structure ($z = 0.0015$ m) et chaque tuile a une largeur angulaire de $\frac{\pi}{4}$ rad. La nappe du champ obtenue est lisse au sens topologique. On montre ici l'intérêt d'utiliser une formulation 3D qui tient compte de la courbure des aimants

2.18 la représentation tridimensionnelle de la composante radiale du champ magnétique créé par une structure alternée composée de 8 tuiles jointives aimantées radialement.

La figure 2.18 illustre à la fois le phénomène de décroissance en $\frac{1}{r^2}$ du champ et l'ondulation de champ qui résulte de l'alternance des tuiles aimantées radialement. Au sens géométrique du terme, la nappe de champ obtenue est lisse car le champ à l'intérieur de l'anneau n'est jamais discontinu.

2.3.2 Tuile aimantée uniformément et radialement

Certains aimants modernes de type Néodyme-Fer-Bore sont aimantés à la fois radialement et uniformément, ceci pour des raisons économiques et technologiques (du fait de l'axe de pressage utilisé). On parle aussi parfois d'aimantation transverse. En conséquence, les aimantations de ces tuiles dites radiales sont en réalité uniformes, ce qui implique que

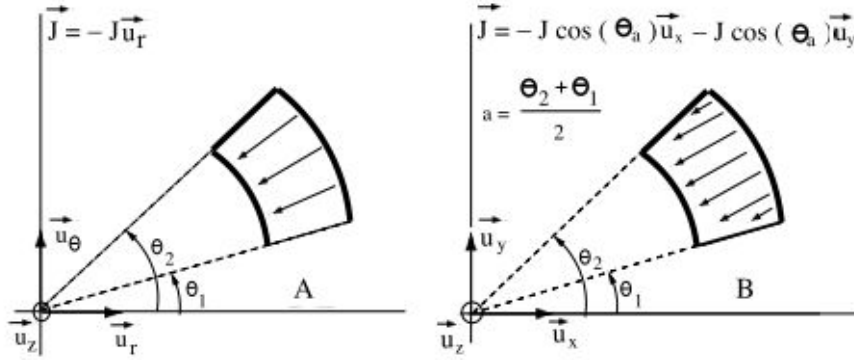


FIGURE 2.19 – Représentation de deux tuiles : tuile aimantée radialement et tuile aimantée à la fois uniformément et radialement

le champ magnétique qu'elles produisent est différent de celui créé par des tuiles aimantées radialement. Le vecteur polarisation $\vec{J}$ n'est donc pas le même dans les deux configurations, comme le montre la figure 2.19.

L'approche analytique adoptée pour modéliser le champ magnétique créé par une tuile aimantée à la fois uniformément et radialement est le modèle coulombien. En effet, comme l'aimantation de la tuile est uniforme, il n'y a pas de densité volumique de charges. En conséquence, le calcul des trois composantes du champ nécessite la détermination de deux intégrales dues aux contributions surfaciques des charges magnétiques. Par ailleurs, l'approche coulombienne est très intuitive puisqu'elle permet de voir où se localisent les densités surfaciques de pôles magnétiques.

Dans l'approche coulombienne, une tuile aimantée à la fois uniformément et radialement est représentée à la figure 2.20. Dans cette approche, les charges magnétiques sont localisées sur les quatre faces de la tuile aimantée uniformément, ce qui diffère du cas d'une tuile aimantée radialement où les charges fictives sont localisées sur les deux faces courbes et dans le volume. Ce changement de répartition des charges magnétiques entraîne une modification de la forme et de la valeur du champ magnétique.

Les densités fictives de charge magnétique s'obtiennent en calculant la projection du vecteur polarisation $\vec{J}$ sur les quatre faces de la tuile. On obtient les densités surfaciques suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{J} \cdot \vec{n}_1 &= (-J_x \vec{u}_x - J_y \vec{u}_y) \cdot (-\cos(\theta) \vec{u}_x - \sin(\theta) \vec{u}_y) \\ &= +J \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \\ \vec{J} \cdot \vec{n}_2 &= (-J_x \vec{u}_x - J_y \vec{u}_y) \cdot (-\sin(\theta_2) \vec{u}_x + \cos(\theta_2) \vec{u}_y) \\ &= +J \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\end{aligned}$$

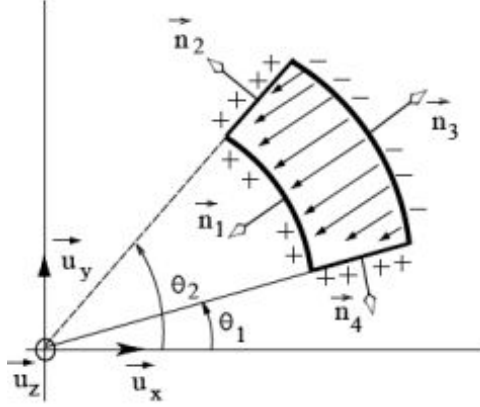


FIGURE 2.20 – Représentation d’une tuile aimantée à la fois uniformément et radialement dans l’approche coulombienne

$$\begin{aligned}
 \vec{J} \cdot \vec{n}_3 &= (-J_x \vec{u}_x - J_y \vec{u}_y) \cdot (+\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y) \\
 &= -J \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \\
 \vec{J} \cdot \vec{n}_4 &= (-J_x \vec{u}_x - J_y \vec{u}_y) \cdot (+\sin(\theta_1) \vec{u}_x - \cos(\theta_1) \vec{u}_y) \\
 &= +J \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

De ce fait, le problème est fondamentalement différent puisque le pas élémentaire d’intégration dans le cas des tuiles aimantées uniformément rend impossible l’écriture de l’expression du champ magnétique sous forme d’intégrales elliptiques classiques ([Ravaud-G],[72]). En effet, les dépendances angulaires du numérateur et du dénominateur de l’intégrande traduisant le champ élémentaire créé par une tuile aimantée uniformément et radialement sont différentes. En conséquence, les trois composantes du champ magnétique créé par une tuile aimantée uniformément et radialement s’expriment en une partie analytique et une intégrale que l’on pourrait nommer intégrale elliptique non classique.

On utilise les fonctions suivantes pour l’écriture des trois composantes du champ magnétique créé par une tuile d’aimantation à la fois radiale et uniforme.

$$\xi_{i,j} = \sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_j)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \tilde{\theta})} \tag{2.74}$$

$$\eta_{i,k} = \sqrt{2r_i^2 - 4rr_i x_k + r^2(1 + x_{2k})} \tag{2.75}$$

$$\alpha_{i,j,k} = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i x_k + (z - z_j)^2} \tag{2.76}$$

L'approche adoptée ici est donc exactement la même que celle utilisée dans le cas de la tuile aimantée radialement et de la tuile aimantée axialement. Nous donnons ici directement l'écriture des trois composantes afin d'analyser les différences mathématiques majeures entre une tuile aimantée radialement et une tuile aimantée à la fois uniformément et radialement.

La composante radiale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H_r(r, \theta, z) = & \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} \wp^{(1,r)}(i, j) \\
 & + \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j)} \wp^{(2,r)}(i, j, k)
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

avec

$$\wp^{(1,r)}(i, j) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r_i(z_j - z)(-r + r_i \cos(\theta - \tilde{\theta})) \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\tilde{\theta}}{2}\right)}{(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\theta - \tilde{\theta}))\xi_{i,j}} d\tilde{\theta} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}
 \wp^{(2,r)}(i, j, k) = & -\frac{r(rx_k(x_{2k} - 1) + 2r_i y_k^2)}{\sqrt{-r^2(-1 + x_{2k})}\eta_{i,k}} \arctan \left[\frac{(z - z_j)\eta_{i,k}}{\sqrt{-r^2(x_{2k} - 1)}\alpha_{i,j,k}} \right] \\
 & - x_k \log [z - z_j + \alpha_{i,j,k}]
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

La fonction $\wp^{(1,r)}(i, j)$ est intéressante dans le sens où elle ressemble à une intégrale elliptique classique mais est rigoureusement différente. Ceci vient du fait que la variation angulaire dans le numérateur de l'équation (2.77) est différente de la variation angulaire du dénominateur. En conséquence, l'intégrande oscille mais ne décrit pas le cycle d'oscillation des intégrales elliptiques classiques. Nous parlons dans cette thèse d'intégrales elliptiques non classiques.

La composante azimutale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H_\theta(r, \theta, z) = & \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} \wp^{(1,\theta)}(i, j) \\
 & + \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j)} \wp^{(2,\theta)}(i, j, k)
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

avec

$$\wp^{(1,\theta)}(i, j) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r_i^2(z - z_j) \sin(\theta - \tilde{\theta}) \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\tilde{\theta}}{2}\right)}{\xi_{i,j} (r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\theta - \tilde{\theta}))} d\tilde{\theta} \tag{2.81}$$

et

$$\begin{aligned}\wp^{(2,\theta)}(i,j,k) = & \frac{z-z_j}{\alpha_{i,j,k}} y_k \sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) \\ & - \frac{r_i y_k t_k}{\alpha_{i,j,k}} \sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) \arctan\left[\frac{z-z_j}{r y_k}\right] \\ & + \frac{r y_k x_k t_k}{\alpha_{i,j,k}} \sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) \arctan\left[\frac{z-z_j}{r y_k}\right]\end{aligned}\quad (2.82)$$

Nous retrouvons ici une expression composée d'une intégrale elliptique non classique $\wp^{(1,\theta)}(i,j)$ qui est d'ailleurs différente dans sa structure de $\wp^{(1,r)}(i,j)$. Par ailleurs, la deuxième partie $\wp^{(2,\theta)}(i,j,k)$ est totalement analytique : notons que cette partie est issue des densités de charges magnétiques localisées sur les faces planes de la tuile d'aimant.

La composante axiale s'écrit :

$$\begin{aligned}H_z(r,\theta,z) = & \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} \wp^{(1,z)}(i,j) \\ & + \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j)} \wp^{(2,z)}(i,j,k)\end{aligned}\quad (2.83)$$

avec

$$\wp^{(1,z)}(i,j) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-r_i}{\xi_{i,j}} \cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-2\tilde{\theta}}{2}\right) d\tilde{\theta} \quad (2.84)$$

et

$$\wp^{(2,z)}(i,j,k) = \sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) \log[r_i - r \cos(\theta - \theta_k) + \xi_{i,j}] \quad (2.85)$$

Nous retrouvons là encore une formulation basée sur l'utilisation d'une intégrale elliptique non classique $\wp^{(1,z)}(i,j)$ issue des charges localisées sur les faces courbes de la tuile et d'une partie totalement analytique issue des densités de charges magnétiques localisées sur les faces planes. Par ailleurs, la structure de cette intégrale elliptique non classique $\wp^{(1,z)}(i,j)$ est également différente de celle utilisée dans les expressions de la composante radiale ($\wp^{(1,\theta)}(i,j)$) et de la composante azimutale ($\wp^{(1,\theta)}(i,j)$). En outre, comme pour le cas des intégrales elliptiques classiques (de première espèce, de seconde espèce et de troisième espèce), il semble exister trois types d'intégrales elliptiques non classiques qui sont utilisées dans l'évaluation du champ magnétique créé par une tuile d'aimant.

Les temps de calcul restent très courts puisque le champ magnétique est évalué en tout point de l'espace en moins d'une seconde avec un processeur de 2 GHz. Précisons que dans

le cas des points singuliers, l'utilisation de la valeur principale de Cauchy permet de s'affranchir des discontinuités au passage des faces chargées. Cependant, la connaissance de cette valeur en de tels points est rarement utile dans la plupart des optimisations de dispositifs à aimants permanents.

La forme du champ magnétique est profondément affectée par l'uniformité de l'aimantation de la tuile. En effet, les trois composantes du champ magnétique sont modifiées, comme le montre la figure 2.21. Précisons que, sur cette figure 2.21, les représentations des trois composantes d'une tuile aimantée uniformément sont les courbes qui sont toujours inférieures en valeur absolue aux autres courbes représentant une tuile aimantée radialement.

Les trois composantes (H_r , H_θ et H_z) sont ainsi diminuées et leur formes modifiées : on aperçoit les effets de bord résultant des charges localisées sur les faces droites des tuiles aimantées uniformément sur H_r et H_z .

Fabrication d'anneaux aimantés radialement

Les tuiles aimantées uniformément et radialement sont utilisées pour fabriquer des anneaux modernes (technologie Néodyme Fer Bore), supputés aimantés radialement. En pratique, ces tuiles sont collées les unes par rapport aux autres, comme le montre la figure 2.22.

L'assemblage de tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement induit nécessairement des ondulations de champ dont les valeurs moyennes dépendent à la fois du nombre de tuiles utilisées et des dimensions de l'anneau. Un nombre relativement élevé de tuiles produit un champ radial pratiquement uniforme, comme le montre la figure 2.23. Quand la largeur angulaire vaut $\frac{\pi}{32}$, l'ondulation de champ est relativement faible (trait épais sur la figure 2.23)([Ravaud-G],[72]).

A l'inverse, un anneau constitué de 16 tuiles (courbe en pointillés) induit un taux d'ondulation plus important et une valeur moyenne de champ plus faible.

Notons que le prototype de haut-parleur sans fer développé au LAUM est constitué de tuiles aimantées radialement et uniformément. Le champ moyen vu par la bobine dans l'entrefer étant plus faible, le facteur de force du haut-parleur est plus petit, l'accélération de la bobine mobile est donc plus faible. En conséquence, ceci induit une diminution du rendement du haut-parleur. Il est donc important de concevoir de tels prototypes avec un nombre suffisant de tuiles pour éviter d'abaisser le facteur de force du haut-parleur (et donc son rendement).

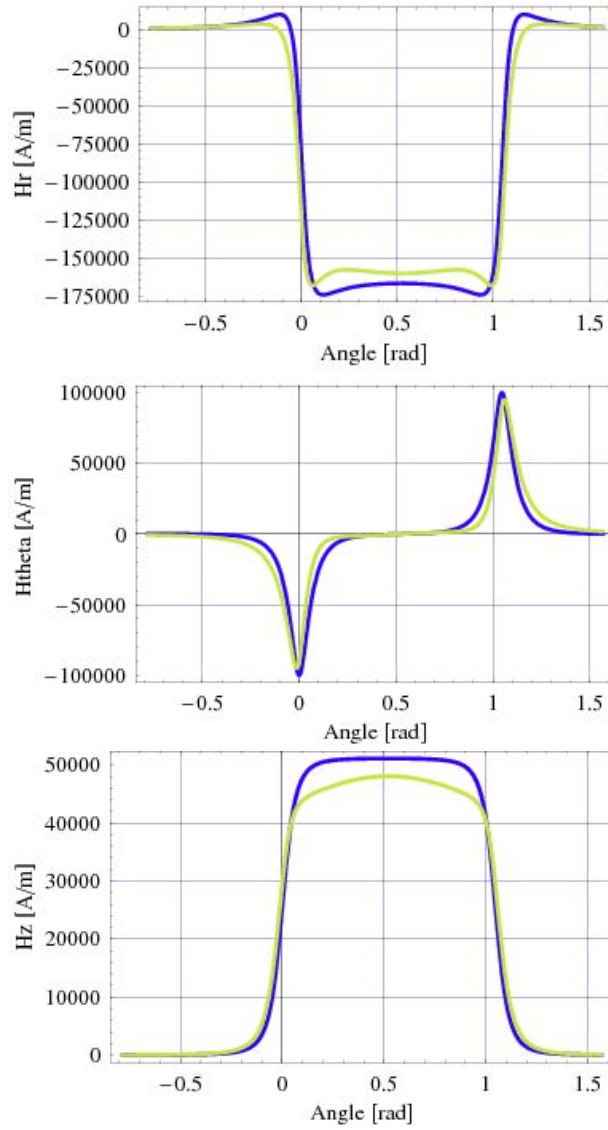


FIGURE 2.21 – Représentation des trois composantes du champ magnétique en fonction de l'angle θ : la courbe bleue représente la tuile aimantée radialement et la courbe verte représente la tuile aimantée transversalement ; $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.024$ m, $h = z_2 - z_1 = 0.003$ m, $z = 0.002$ m, $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{3}$ rad, $J = 1$ T. Le trajet d'observation se situe au deux tiers de chaque tuile dans la direction axiale ($z = 0.002$ m). Le champ est toujours représenté en face de chaque tuile ($r = 0.024$ m). Ces trois figures illustrent les effets notoires de l'uniformité de la polarisation sur le champ magnétique produit ainsi que les effets de bord.

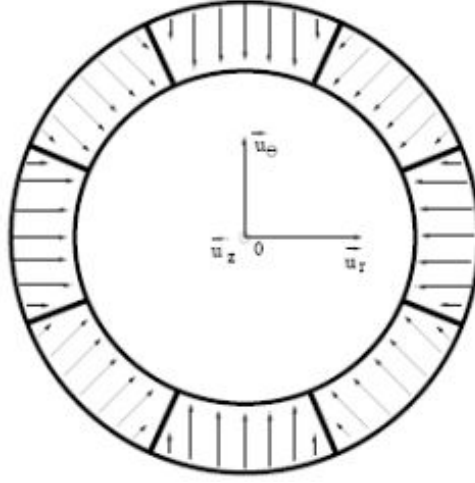


FIGURE 2.22 – Anneau composé de 8 tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement

2.3.3 Tuile aimantée axialement

Les expressions analytiques du champ magnétique créé par une tuile d'aimantation axiale sont établies dans l'approche coulombienne ([Ravaud-B],[71]). En utilisant les coordonnées cylindriques, on montre que le champ magnétique s'écrit sous la forme d'intégrales elliptiques incomplètes.

Nous adoptons ici également la même démarche que celle utilisée pour évaluer le champ magnétique créé par une tuile aimantée radialement dans l'approche coulombienne. Cette fois-ci les charges sont situées sur la face supérieure et sur la face inférieure de la tuile, comme le montre la figure 2.24.

Dans cette configuration, le champ magnétique dépend des trois paramètres (r, θ, z) et se décompose en trois composantes :

$$\vec{H}(r, \theta, z) = \vec{H}_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + \vec{H}_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + \vec{H}_z(r, \theta, z)\vec{u}_z \quad (2.86)$$

Pour une face de la tuile, le champ magnétique se détermine par l'équation suivante :

$$\vec{H}(r, \theta, z) = \frac{J}{4\pi\mu_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\overrightarrow{P_1M}}{|\overrightarrow{P_1M}|^3} \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{\theta} \quad (2.87)$$

où $\overrightarrow{P_1M}$ désigne le vecteur entre un point appartenant à la distribution de charges et le point d'observation. La composante radiale $H_r(r, \theta, z)$ du champ s'écrit :

$$H_r(r, \theta, z) = \frac{\sigma^*}{4\pi\mu_0} (\alpha(u_2, r, z) - \alpha(u_1, r, z)) \quad (2.88)$$

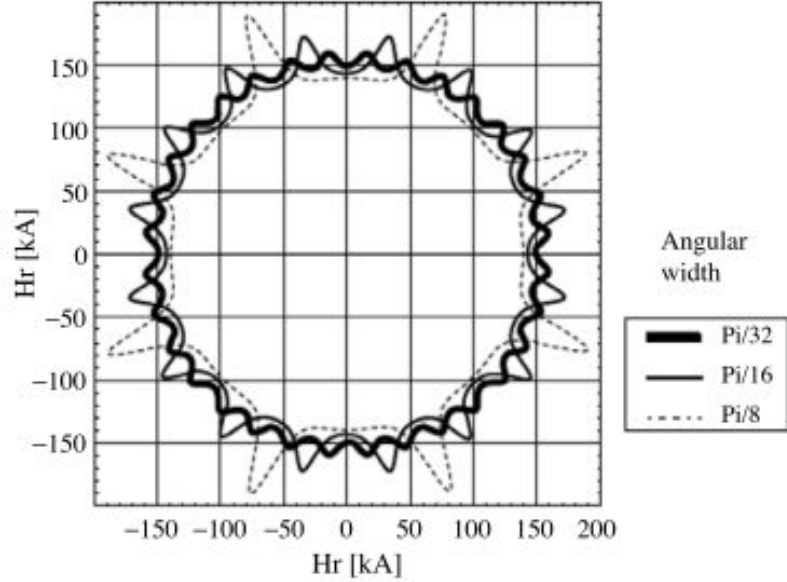


FIGURE 2.23 – Représentation du champ radial créé par un anneau constitué de tuiles aimantées uniformément et radialement vers le centre pour trois configurations utilisant 16, 32 et 64 tuiles ; $r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $h = z_2 - z_1 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $r = 0.024$ m, $J = 1$ T. L'amplitude des ondulations du champ radial diminuent quand on augmente le nombre de tuiles utilisées. La valeur limite du champ radial tend vers 162.32 kA/m quand le nombre de tuiles utilisées tend vers l'infini, c'est-à-dire vers l'anneau aimanté radialement vers le centre.

où

$$u_i = \cos(\theta - \theta_i) \quad (2.89)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha(u_i, r, z) = & F_1(u_i, r, z) \left(G_1(u_i, r, z) \mathbf{E}^* \left[\arcsin \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u_i + (z-h)^2}}{(r+r_2)^2 + (z-h)^2} \right], \beta(r_2) \right] \right) \\ & + F_1(u_i, r, z) \Pi^* \left[\arcsin \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u_i + (z-h)^2}}{(r+r_2)^2 + (z-h)^2} \right], \beta(r_2) \right] \\ & - F_2(u_i, r, z) \left(G_2(u_i, r, z) \mathbf{E}^* \left[\arcsin \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u_i + (z-h)^2}}{(r+r_1)^2 + (z-h)^2} \right], \beta(r_1) \right] \right) \end{aligned}$$

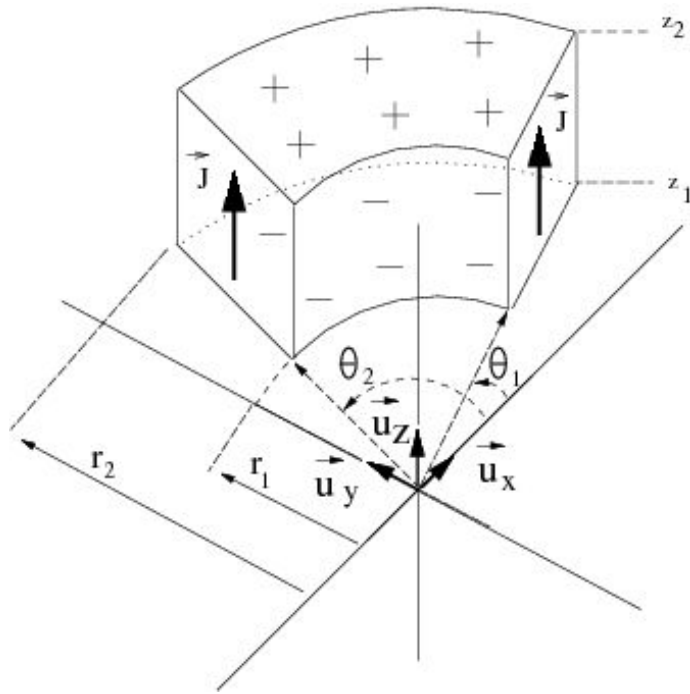


FIGURE 2.24 – Représentation d'une tuile aimantée axialement dans l'approche coulombienne

$$\begin{aligned}
 & -F_2(u_i, r, z) \Pi^* \left[\arcsin \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u_i + (z-h)^2}}{(r+r_1)^2 + (z-h)^2} \right], \beta(r_1) \right] \\
 & + \frac{(u_i^2 - 1)}{\sqrt{1 - u_i^2}} \log \left[r_2 - ru_i + \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u_i + (z-h)^2} \right] \\
 & - \frac{(u_i^2 - 1)}{\sqrt{1 - u_i^2}} \log \left[r_1 - ru_i + \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u_i + (z-h)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

avec

$$\beta(x) = \frac{(r+x)^2 + (z-h)^2}{(r-x)^2 + (z-h)^2} \tag{2.91}$$

et

$$F_1(u_i, r, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - u_i^2}} \frac{2r_2(1 + u_i) \sqrt{\frac{rr_2(u_i - 1)}{(r - r_2)^2 + (z - h)^2}} \sqrt{\frac{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u_i + (z - h)^2}{(r + r_2)^2 + (z - h)^2}}}{\sqrt{\frac{rr_2(1 + u_i)}{(r + r_2)^2 + (z - h)^2}} \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2u_i + (z - h)^2}} \quad (2.92)$$

$$F_2(u_i, r, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - u_i^2}} \frac{2r_1(1 + u_i) \sqrt{\frac{rr_1(u_i - 1)}{(r - r_1)^2 + (z - h)^2}} \sqrt{\frac{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u_i + (z - h)^2}{(r + r_1)^2 + (z - h)^2}}}{\sqrt{\frac{rr_1(1 + u_i)}{(r + r_1)^2 + (z - h)^2}} \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1u_i + (z - h)^2}} \quad (2.93)$$

$$G_1(r, z) = \frac{(r - r_1)^2 + (z - h)^2}{2rr_1} \quad (2.94)$$

$$G_2(r, z) = \frac{(r - r_2)^2 + (z - h)^2}{2rr_2} \quad (2.95)$$

$$E^*[k] = \int_0^{\phi = \frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} d\theta \quad (2.96)$$

La composante axiale $H_z(r, \theta, z)$ s'écrit :

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{\sigma^*}{4\pi\mu_0} (\gamma(\theta, \theta_2) - \gamma(\theta, \theta_1)) \quad (2.97)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma(\theta, \theta_i) = & h_1\eta_1(\theta, \theta_i)\mathbf{\Pi}^* \left[\frac{2(c_1 + d_1)f}{2c_1f - \sqrt{2}\sqrt{d_1^2f(-e + f)}}, i \sinh^{-1} [\lambda(1)], \frac{c_1 + d_1}{c_1 - d_1} \right] \\ & + h_2\eta_1(\theta, \theta_i)\mathbf{\Pi}^* \left[\frac{2(c_1 + d_1)f}{2c_1f + \sqrt{2}\sqrt{d_1^2f(-e + f)}}, i \sinh^{-1} [\lambda(1)], \frac{c_1 + d_1}{c_1 - d_1} \right] \\ & - h_3\eta_2(\theta, \theta_i)\mathbf{\Pi}^* \left[\frac{2(c_2 + d_2)f}{2c_2f - \sqrt{2}\sqrt{d_2^2f(-e + f)}}, i \sinh^{-1} [\lambda(2)], \frac{c_2 + d_2}{c_2 - d_2} \right] \\ & - h_4\eta_2(\theta, \theta_i)\mathbf{\Pi}^* \left[\frac{2(c_2 + d_2)f}{2c_2f + \sqrt{2}\sqrt{d_2^2f(-e + f)}}, i \sinh^{-1} [\lambda(2)], \frac{c_2 + d_2}{c_2 - d_2} \right] \end{aligned} \quad (2.98)$$

avec

$$\lambda(x) = \sqrt{\frac{-1}{c_x + d_x}} \sqrt{c_x - d_x \cos(\theta - \theta_i)} \quad (2.99)$$

Paramètres	
a	$2(z-h)(r^2 + (z-h)^2)$
b_1	$2(z-h)rr_2$
c_1	$r^2 + r_2^2 + (z-h)^2$
d_1	$-2rr_2$
e	$-r^2 - 2(z-h)^2$
f	r^2
b_2	$2(z-h)rr_1$
c_2	$r^2 + r_1^2 + (z-h)^2$
d_2	$-2rr_1$

TABLE 2.4 – Définition des paramètres utilisés dans (2.97)

$$\eta_1(\theta, \theta_i) = \frac{\left(-i\sqrt{\frac{d_1(-1+\cos(\theta-\theta_i))}{c_1-d_1}} \sqrt{\frac{d_1(1+\cos(\theta-\theta_i))}{c_1+d_1}} \frac{1}{\cos(\theta-\theta_i)} \right)}{\left(2\sqrt{\frac{-1}{c_1+d_1}} \sqrt{d_1^2 f (-e + d_1)(d_1^2(e-f)) + 2c_1^2 f} \right)} \quad (2.100)$$

$$\eta_2(\theta, \theta_i) = \frac{\left(-i\sqrt{\frac{d_2(-1+\cos(\theta-\theta_i))}{c_2-d_2}} \sqrt{\frac{d_2(1+\cos(\theta-\theta_i))}{c_2+d_2}} \frac{1}{\cos(\theta-\theta_i)} \right)}{\left(2\sqrt{\frac{-1}{c_2+d_2}} \sqrt{d_2^2 f (-e + d_2)(d_2^2(e-f)) + 2c_2^2 f} \right)} \quad (2.101)$$

$$h_1 = 2ad_1(\sqrt{2}c_1f + \sqrt{d_1^2 f(-e+f)}) + b_1(\sqrt{2}d_1^2(e-f) - 2c_1\sqrt{d_1^2 f(-e+f)}) \quad (2.102)$$

$$h_2 = 2ad_1(-\sqrt{2}c_1f + \sqrt{d_1^2 f(-e+f)}) + b_1(\sqrt{2}d_1^2(-e+f) - 2c_1\sqrt{d_1^2 f(-e+f)}) \quad (2.103)$$

$$h_3 = 2ad_2(\sqrt{2}c_2f + \sqrt{d_2^2 f(-e+f)}) + b_2(\sqrt{2}d_2^2(e-f) - 2c_2\sqrt{d_2^2 f(-e+f)}) \quad (2.104)$$

$$h_4 = 2ad_2(-\sqrt{2}c_2f + \sqrt{d_2^2 f(-e+f)}) + b_2(\sqrt{2}d_2^2(-e+f) - 2c_2\sqrt{d_2^2 f(-e+f)}) \quad (2.105)$$

Les paramètres utilisés dans l'équation (2.98) sont définis dans la table 2.4. L'expression (2.97) montre la possibilité d'évaluer le champ axial en tout point de l'espace avec des intégrales elliptiques. Notons que cette expression est différente de celle établie par Durand [1] car elle n'utilise pas la fonction signe. De ce fait, elle est dans ce sens plus générale. Ceci peut être intéressant dans l'évaluation du gradient de champ.

Le champ azimutal s'exprime de façon totalement analytique.

$$H_\theta(r, \theta, z) = \frac{\sigma^*}{4\pi\mu_0} (\eta(\theta, \theta_1) - \eta(\theta, \theta_2)) \quad (2.106)$$

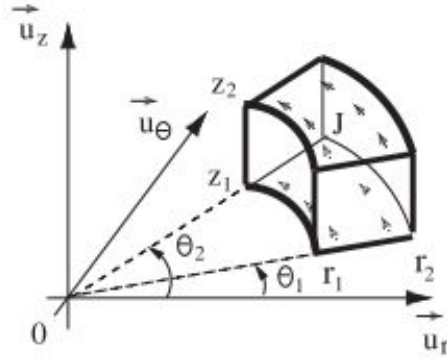


FIGURE 2.25 – Représentation d'une tuile aimantée orthoradialement en coupe 2D

avec

$$\begin{aligned}
 \eta(\theta, \theta_i) = & \frac{\sqrt{r^2 + r_1^2 + (z - h)^2 - 2rr_1 \cos(\theta_i - \theta)}}{r} \\
 & + \cos(\theta_i - \theta) \log \left[r_1 - r \cos(\theta_i - \theta) + \sqrt{r^2 + r_1^2 + (z - h)^2 - 2rr_1 \cos(\theta_i - \theta)} \right] \\
 & - \frac{\sqrt{r^2 + r_2^2 + (z - h)^2 - 2rr_2 \cos(\theta_i - \theta)}}{r} \\
 & - \cos(\theta_i - \theta) \log \left[r_2 - r \cos(\theta_i - \theta) + \sqrt{r^2 + r_2^2 + (z - h)^2 - 2rr_2 \cos(\theta_i - \theta)} \right]
 \end{aligned} \tag{2.107}$$

Il est intéressant de noter que l'expression de la composante azimutale est totalement analytique puisqu'elle n'utilise pas de fonctions spéciales. L'approche coulombienne semble donc être une approche judicieuse pour l'évaluation du champ azimutal créé par une tuile aimantée axialement.

L'approche ampérienne est moins intéressante que l'approche coulombienne car elle implique le calcul d'une densité volumique de courants fictifs.

2.3.4 Tuile aimantée orthoradialement

Une tuile aimantée orthoradialement est employée dans les structures de Halbach, par exemple pour les systèmes dédiés à l'Imagerie par Résonance Magnétique (voir figure 2.25). Le modèle coulombien induit une formulation totalement analytique du champ magnétique

produit. En effet, dans cette analogie, une tuile aimantée orthoradialement est remplacée par deux plans d'abscisses angulaires θ_1 et θ_2 , chargés avec des densités surfaciques de pôles magnétiques (voir figure 2.26). Par ailleurs, comme il est mentionné dans la publication ([Ravaud-F],[73]), l'expression du potentiel scalaire est également totalement analytique. Dans l'approche coulombienne, le potentiel scalaire $\Phi(\vec{r})$ est donné par l'équation suivante :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\sum_i \int \int_{(S_i)} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{S}_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int \int \int_{(V)} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right) \quad (2.108)$$

où S_i représente une surface de la tuile et V désigne son volume. Le potentiel scalaire $\Phi(r, \theta, z)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Phi(r, \theta, z) = \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k)} \phi(a_{i,j}, b_{i,j}, c_k) \quad (2.109)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi(a_{i,j}, b_{i,j}, c_k) = & -z_k - \sqrt{b_{i,j} - a_{i,j}^2} \arctan \left[\frac{c_k}{\sqrt{b_{i,j} - a_{i,j}^2}} \right] \\ & + \sqrt{b_{i,j} - a_{i,j}^2} \arctan \left[\frac{a_{i,j} c_k}{\sqrt{b_{i,j} - a_{i,j}^2} \sqrt{b_{i,j} + c_k^2}} \right] \\ & - c_k \log \left[a_{i,j} + \sqrt{b_{i,j} + c_k^2} \right] \\ & - a_{i,j} \log \left[c_k + \sqrt{b_{i,j} + c_k^2} \right] \end{aligned} \quad (2.110)$$

et

$$a_{i,j} = r_i - r \cos(\theta - \theta_j) \quad (2.111)$$

$$b_{i,j} = r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_j) \quad (2.112)$$

$$\xi_k = z - z_k \quad (2.113)$$

Le champ magnétique se déduit du potentiel scalaire avec la relation suivante :

$$\mathbf{H} = -\vec{\nabla} \Phi(r, \theta, z) \quad (2.114)$$

Les trois composantes du champ magnétique sont définies par :

$$\begin{aligned} H_r(r, \theta, z) &= -\vec{\nabla} \Phi(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_r \\ H_\theta(r, \theta, z) &= -\vec{\nabla} \Phi(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_\theta \\ H_z(r, \theta, z) &= -\vec{\nabla} \Phi(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_z \end{aligned} \quad (2.115)$$

La composante radiale $H_r(r, \theta, z)$ se met sous la forme suivante :

$$H_r(r, \theta, z) = \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k)} h_r(i, j, k) \quad (2.116)$$

où

$$\begin{aligned} h_r(i, j, k) = & \frac{(-e_{i,j} + \cos(\theta - \theta_j)^2 f_j)}{\sqrt{f_j(f_j + b_{i,j})}} \tanh^{-1} \left[\frac{\xi_k \sqrt{f_j + b_{i,j}}}{\sqrt{f_j} \sqrt{b_{i,j} + \xi_k^2}} \right] \\ & - \cos(\theta - \theta_j)^2 \log \left[\xi_k + \sqrt{b_{i,j} + \xi_k^2} \right] \end{aligned} \quad (2.117)$$

avec

$$f_j = \frac{r}{r_i} e_{i,j} = \frac{r}{r_i} \left(r r_i (-1 + \cos(\theta - \theta_j)^2) \right) \quad (2.118)$$

La composante azimutale s'écrit :

$$H_\theta(r, \theta, z) = \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k)} h_\theta(i, j, k) \quad (2.119)$$

avec

$$\begin{aligned} h_\theta = & -y_j \frac{c_j + d_{i,j}}{\sqrt{c_j(b_{i,j} + c_j)}} \tanh^{-1} \left[\frac{\xi_k \sqrt{b_{i,j} + c_j}}{\sqrt{c_j} \sqrt{b_{i,j} + \xi_k^2}} \right] \\ & + y_j \log \left[\xi_k + \sqrt{b_{i,j} + \xi_k^2} \right] \end{aligned} \quad (2.120)$$

où

$$y_j = \sin(\theta - \theta_j) \quad (2.121)$$

$$d_{i,j} = r^2 - r r_i \cos(\theta - \theta_j) \quad (2.122)$$

$$c_j = r^2 ((\cos(\theta - \theta_j))^2 - 1) \quad (2.123)$$

La composante axiale s'écrit :

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k)} h_z(i, j, k) \quad (2.124)$$

avec

$$h_z(i, j, k) = \log \left[r_i - r \cos(\theta - \theta_j) + \sqrt{b_{i,j} + \xi_k^2} \right] \quad (2.125)$$

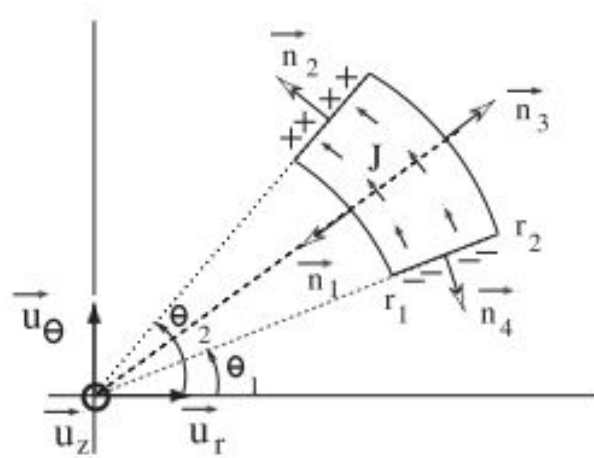


FIGURE 2.26 – Représentation coulombienne d'une tuile aimantée orthoradialement

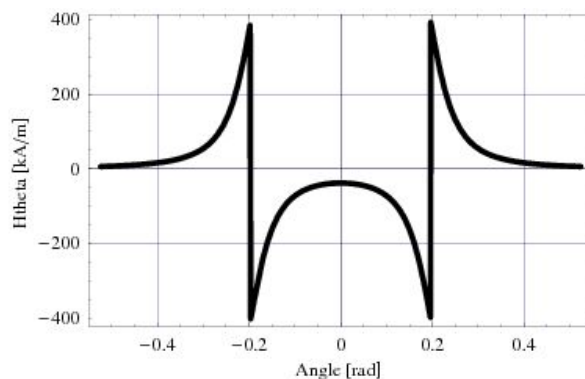


FIGURE 2.27 – Représentation de la composante azimuthale du champ en fonction de l'angle θ ; $r_1 = 0.025 \text{ m}$, $r_2 = 0.028 \text{ m}$, $r = 0.0265 \text{ m}$, $z_1 = 0 \text{ m}$, $z_2 = 0.003 \text{ m}$, $z = 0.0015 \text{ m}$ (plan médian), $\theta_1 = -\frac{\pi}{16} \text{ rad}$, $\theta_2 = +\frac{\pi}{16} \text{ rad}$, $J = 1 \text{ T}$. Il y a des discontinuités dans le champ orthoradial pour $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$, c'est-à-dire, à la traversée des plans chargés dans l'analogie coulombienne ($|H_{\theta}|$ tend vers 800000 A/m). La composante orthoradiale du champ démagnétisant est de -38.4 kA/m pour $r = 0.0265 \text{ m}$, $z = 0.0015 \text{ m}$ et $\theta = 0 \text{ rad}$

On donne à titre d'illustration sur la figure 2.27 la composante orthoradiale du champ magnétique créé par une tuile aimantée orthoradialement. Les dimensions utilisées sont présentées dans la légende.

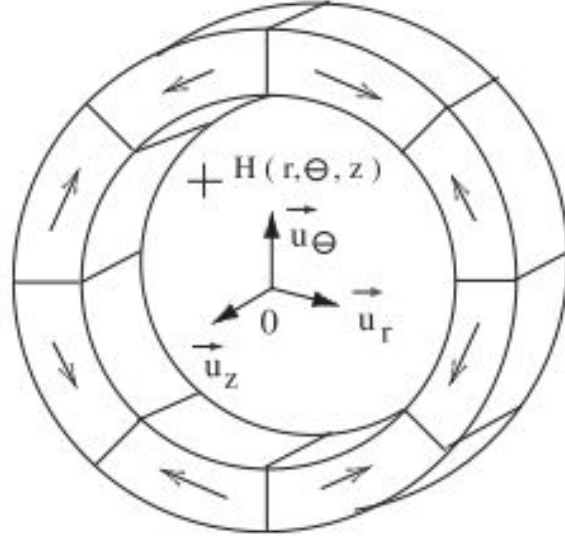


FIGURE 2.28 – Représentation d'une structure de 8 tuiles aimantées orthoradialement

Il est intéressant de noter que l'approche coulombienne appliquée à une tuile aimantée orthoradialement permet l'obtention de formulations totalement analytiques, que ce soit pour le potentiel scalaire ou pour les trois composantes du champ magnétique créé par la tuile.

De telles tuiles sont utilisées pour fabriquer des machines électriques ou des accouplements magnétiques. Remarquons que leur rôle principal est de canaliser le flux magnétique dans les structures sans fer (figure 2.28).

2.3.5 Tuile aimantée orthoradialement et uniformément

Comme pour le cas des tuiles aimantées radialement avec la technologie Néodyme Fer Bore, les tuiles aimantées orthoradialement sont difficiles à fabriquer en pratique. En conséquence, ces tuiles sont aimantées à la fois uniformément et orthoradialement. Leur étude analytique ([Ravaud-E],[74]) montre les inconvénients de l'uniformité de l'aimantation d'une tuile sur le champ magnétique créé.

En effet, comme le montre la figure 2.29, le modèle coulombien prédit les changements de forme du champ magnétique créé par une tuile aimantée à la fois uniformément et orthoradialement. La répartition de la densité de charge surfacique sur les faces courbes de la tuile diminue le champ magnétique créé. Cette contribution induit des changements de signe dans le champ axial produit, comme le montre la figure 2.30.

2.3 Champ magnétique 3D créé par des tuiles

En effet, considérons d'abord la face dont la normale est désignée par $\vec{n}_1$. Sur cette surface, la densité surfacique de pôles magnétiques est définie par : $-J \sin\left(\theta - \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right)$. Donc, on a :

$$\begin{aligned}\theta_1 \leq \theta < \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) &\Rightarrow \sigma_1(\theta)^* > 0 \\ \theta = \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) &\Rightarrow \sigma_1(\theta)^* = 0 \\ \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \theta < \theta_2 &\Rightarrow \sigma_1(\theta)^* < 0\end{aligned}\tag{2.126}$$

Considérons maintenant la face dont la normale est désignée par $\vec{n}_3$ sur laquelle la densité de pôles magnétiques est donnée par $J \sin\left(\theta - \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right)$. Nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}\theta_1 \leq \theta < \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) &\Rightarrow \sigma_3(\theta)^* < 0 \\ \theta = \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) &\Rightarrow \sigma_3(\theta)^* = 0 \\ \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \theta < \theta_2 &\Rightarrow \sigma_3(\theta)^* > 0\end{aligned}\tag{2.127}$$

Considérons maintenant la face désignée par le vecteur $\vec{n}_2$ sur laquelle la densité surfacique de pôles magnétiques est donnée par $J \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$. Nous appelons cette face f_2 . On déduit les propriétés suivantes :

$$\forall \theta \in f_2 \Rightarrow \sigma_2^* > 0\tag{2.128}$$

Considérons enfin la face désignée par le vecteur $\vec{n}_4$ sur laquelle la densité surfacique de pôles magnétiques est donnée par $-J \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$. Nous appelons cette face f_4 . On déduit les propriétés suivantes :

$$\forall \theta \in f_4 \Rightarrow \sigma_4^* < 0\tag{2.129}$$

Dans l'approche coulombienne, le champ magnétique $\vec{H}(r, \theta, z)$ se calcule par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\vec{H}(r, \theta, z) &= \int \int_{S_1} \frac{\sigma_1(\tilde{\theta})^*}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|^3} dS_1 \\ &+ \int \int_{S_2} \frac{\sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|^3} dS_2 \\ &+ \int \int_{S_3} \frac{\sigma_3(\tilde{\theta})^*}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{u}_3}{|\vec{u}_3|^3} dS_3\end{aligned}$$

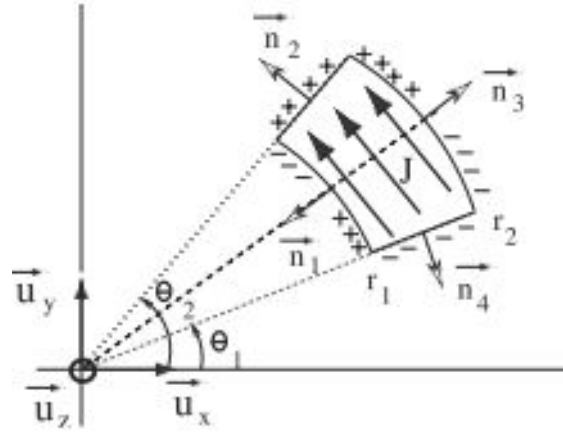


FIGURE 2.29 – Représentation d’une tuile aimantée à la fois uniformément et orthoradialement dans l’approche coulombienne

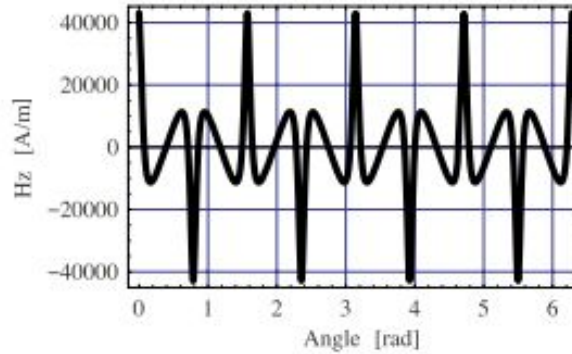


FIGURE 2.30 – Représentation du champ axial créé par une structure alternée de 8 tuiles orthoradiales aimantées à la fois uniformément et orthoradialement en fonction de l’angle θ ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.024$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m, $J = 1$ T). Le champ magnétique est donc déterminé dans l’entrefer de la structure et non dans la matière aimantée. On illustre ici les changements de signe dus à l’uniformité de la polarisation uniforme des tuiles aimantées à la fois orthoradialement et uniformément. Ceci est important dans la conception de wigglers où le trajet de l’électron dépend directement du champ magnétique produit par une structure de type Halbach (pouvant comporter de telles tuiles)

$$+ \int \int_{S_4} \frac{\sigma_4^*}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{u}_4}{|\vec{u}_4|^3} dS_4 \quad (2.130)$$

où $\vec{u}_i$ ($i = 1..4$) est le vecteur entre le point d'observation et un point appartenant à la face S_i . Par ailleurs, les expressions du champ magnétique créé par une tuile aimantée à la fois uniformément et orthoradialement ne sont pas exprimables sous forme totalement analytique car l'uniformité de la polarisation de la tuile entraîne un pas d'intégration plus complexe. Par conséquent, on retrouve des formulations basées sur une partie analytique et une partie semi-analytique sous forme d'intégrale elliptique non classique.

En outre, le champ radial s'écrit :

$$\begin{aligned} H_r(r, \theta, z) = & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} h_r^{(I)}(r_i, z_j) \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k)} h_r^{(II)}(r_i, z_j, \theta_k) \end{aligned} \quad (2.131)$$

où $h_r^{(I)}(r_i, z_j)$ représente le champ magnétique créé par les charges fictives situées sur les faces courbes de la tuile et $h_r^{(II)}(r_i, z_j, \theta_k)$ représente le champ magnétique créé par les charges fictives situées sur les faces droites de la tuile.

$$h_r^{(I)}(r_i, z_j) = \frac{J}{4\pi\mu_0} r_i (z - z_j) \tilde{\mathbf{E}}^* [\theta_a, r_i, z_j] \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} h_r^{(II)}(r_i, z_j, \theta_k) = & -\frac{J \cos(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})}{8\pi\mu_0 X_k} \left((1 - x_k^2 + x_k X_k) \log[A_{i,j,k}] \right) \\ & -\frac{J \cos(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})}{8\pi\mu_0 X_k} \left((-1 + x_k^2 + x_k X_k) \log[B_{i,j,k}] \right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

où $\tilde{\mathbf{E}}^* [\theta_a, r_i, z_j]$ peut être vu comme une intégrale elliptique non classique.

$$\tilde{\mathbf{E}}^* [\theta_a, r_i, z_j] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(r - r_i \cos(\theta - \tilde{\theta})) \sin(\theta_a - \tilde{\theta})}{\xi(i, j, \tilde{\theta}) (\xi(i, j, \tilde{\theta})^2 - (z - z_j)^2)} d\tilde{\theta} \quad (2.134)$$

et

$$\begin{aligned} A_{i,j,k} = & \frac{2(rr_i X_k^2 + r^2 X_k^2 (-x_k + X_k))}{(-X_k^2 + x_k X_k)(r_i + r(-x_k + X_k))(z - z_j)} \\ & - \frac{2X_k(z - z_j + \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i x_k + (z - z_j)^2})}{(-X_k^2 + x_k X_k)(r_i + r(-x_k + X_k))} \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned}
 B_{i,j,k} = & -\frac{2(rr_i X_k^2 - r^2 X_k^2 (x_k + X_k))}{(X_k^2 + x_k X_k)(r_i - r(x_k + X_k))(z - z_j)} \\
 & + \frac{2X_k(z - z_j + \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i x_k + (z - z_j)^2})}{(X_k^2 + x_k X_k)(r_i - r(x_k + X_k))}
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

avec

$$X_k = \sqrt{x_k^2 - 1} = \sqrt{\cos(\theta - \theta_k)^2 - 1} \tag{2.137}$$

et

$$\xi(i, j, \theta_k) = \sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_j)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \theta_k)} \tag{2.138}$$

Il est intéressant de noter que $h_r^{(II)}(r_i, z_j, \theta_k)$ est totalement analytique alors que $h_r^{(I)}(r_i, z_j)$ est basé sur une intégrale elliptique non classique.

La composante azimutale $H_\theta(r, \theta, z)$ du champ magnétique créé par la tuile aimantée à la fois uniformément et orthoradialement s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 H_\theta(r, \theta, z) = & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} h_\theta^{(I)}(r_i, z_j) \\
 & + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k)} h_\theta^{(II)}(r_i, z_j, \theta_k)
 \end{aligned} \tag{2.139}$$

avec

$$h_\theta^{(I)}(r_i, z_j) = \frac{J}{4\pi\mu_0} r_i^2 (z - z_j) \tilde{\mathbf{L}}^* \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, r_i, z_j \right] \tag{2.140}$$

où $\tilde{\mathbf{L}}^*[\theta_a, r_i, z_j]$ peut être vu comme une intégrale elliptique non classique.

$$\tilde{\mathbf{L}}^*[\theta_a, r_i, z_j] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin(\theta_a - \tilde{\theta}) \sin(\theta - \tilde{\theta})}{\xi(i, j, \tilde{\theta}) (\xi(i, j, \tilde{\theta})^2 - (z - z_j)^2)} d\tilde{\theta} \tag{2.141}$$

et

$$\begin{aligned}
 h_\theta^{(II)}(r_i, z_j, \theta_k) = & \frac{J \cos(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})}{8\pi\mu_0} \frac{2r + y_k (-x_k + \tilde{X}_k)}{\tilde{X}_k} \log[C_{i,j,k}] \\
 & + \frac{J \cos(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})}{8\pi\mu_0} \frac{-2r + y_k (x_k + \tilde{X}_k)}{\tilde{X}_k} \log[D_{i,j,k}]
 \end{aligned} \tag{2.142}$$

$$C_{i,j,k} = \frac{4\tilde{X}_k \left((z_j - z) - \sqrt{r^2 + r_i^2 - r_i \tilde{x}_k + (z - z_j)^2} \right)}{(2r_i - \tilde{x}_k + \tilde{X}_k) \left(2r + (X_k - \tilde{x}_k) y_k \right)} + \frac{\tilde{X}_k (\tilde{x}_k^2 - 4r^2) + (2r_i - \tilde{x}_k) (\tilde{x}_k^2 - 4r^2)}{(2r_i - \tilde{x}_k + \tilde{X}_k) \left(2r + (X_k - \tilde{x}_k) y_k \right) (z - z_j)} \quad (2.143)$$

$$D_{i,j,k} = \frac{4\tilde{X}_k \left(\sqrt{r^2 + r_i^2 - r_i \tilde{x}_k + (z - z_j)^2} + (z - z_j) \right)}{(-2r_i + \tilde{x}_k + \tilde{X}_k) \left(-2r + (\tilde{x}_k + \tilde{X}_k) y_k \right)} + \frac{(4r^2 - \tilde{x}_k^2)}{\left(-2r + (\tilde{x}_k + \tilde{X}_k) y_k \right) (z - z_j)} \quad (2.144)$$

avec

$$\tilde{X}_k = \sqrt{\tilde{x}_k^2 - 4r^2} = \sqrt{(2r \cos(\theta - \theta_k))^2 - 4r^2} \quad (2.145)$$

$$y_k = \sin(\theta - \theta_k) \quad (2.146)$$

La composante axiale $H_z(r, \theta, z)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$H_z(r, \theta, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+j)} h_z^{(I)}(r_i, z_j) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+j+k)} h_z^{(II)}(r_i, z_j, \theta_k) \quad (2.147)$$

avec

$$h_z^{(I)}(r_i, z_j) = \frac{J}{4\pi\mu_0} (-r_i) \tilde{\mathbf{K}}^* \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, r_i, z_j \right] \quad (2.148)$$

où $\tilde{\mathbf{K}}^* [\theta_a, r_i, z_j]$ représente une intégrale elliptique non classique.

$$\tilde{\mathbf{K}}^* [\theta_a, r_i, z_j] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin(\theta_a - \tilde{\theta})}{\xi(i, j, \tilde{\theta})} d\tilde{\theta} \quad (2.149)$$

et

$$h_z^{(II)}(r_i, z_j, \theta_k) = \frac{J}{4\pi\mu_0} \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \log [r_i - r \cos(\theta - \theta_k) + \xi(i, j, \theta_k)] \quad (2.150)$$

Nous retrouvons donc trois formulations composées d'intégrales elliptiques non classiques différentes et de fonctions totalement analytiques qui résultent des contributions de charges situées sur les faces planes des tuiles.

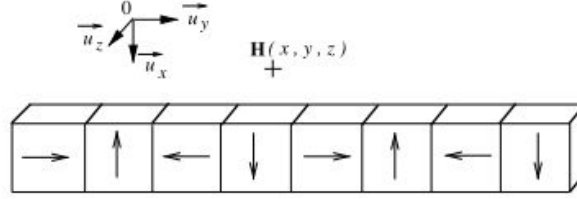


FIGURE 2.31 – Structure linéarisée de Halbach permettant de déterminer le champ proche produit par un anneau constitué de tuiles aimantées orthoradialement et radialement

2.3.6 Tuile aimantée arbitrairement et uniformément

Les structures employant des aimants à polarisation tournante (de type IRM ou Halbach) sont en pratique réalisées avec des tuiles aimantées uniformément. Ainsi, le champ magnétique créé par un anneau dont l'aimantation est parfaitement tournante [24] ne peut être prédit de façon précise que si on tient compte des effets de l'uniformité des polarisations des tuiles. Une telle étude, par le biais d'approches analytiques, est donc indispensable pour évaluer le champ magnétique exact produit par ces structures.

La comparaison du champ exact produit par ces structures avec le champ produit par des structures linéarisées (basées sur le champ produit par des parallélépipèdes, voir figure 2.31) montre que la forme du champ proche est différente entre les deux approches 2.32, ceci conduisant à conclure que l'approche linéarisée n'est pas assez précise pour optimiser des structures cylindriques de Halbach ([Ravaud-H],[75]). En effet, comme le montre la figure 2.32, le module du champ radial est surestimé dans l'approche linéarisée (ou parallélépipédique) par rapport au champ réel créé dans les structures cylindriques.

Les structures de Halbach dédiées à l'IRM (figure 2.33) sont majoritairement constituées de tuiles aimantées uniformément dans toutes les directions.

Les expressions analytiques des trois composantes du champ magnétique créé par une tuile aimantée à la fois uniformément et arbitrairement ([Ravaud-Y],[76]) sont basées sur une partie analytique (contribution de charges situées sur les faces planes de la tuile) et une partie semi-analytique (contribution de charges situées sur les faces courbes de la tuile) ([Ravaud-X],[77])([Ravaud-Z]).

Une tuile aimantée uniformément et arbitrairement peut être représentée par des densités fictives de pôles magnétiques localisées sur ses quatre faces. En notant $\sigma_{j,i}^*$, la densité surfacique de charges fictives localisée sur la face i de l'aimant j dont la largeur angulaire vaut $\theta_{j+1} - \theta_j$, les densités surfaciques de charges sont données par les produits scalaires $\vec{J} \cdot \vec{n}_j$ où $j = 1..4$ (comme le montre la figure 2.34). Ces quatre densités surfaciques $\sigma_{j,1}^*$, $\sigma_{j,2}^*$,

2.3 Champ magnétique 3D créé par des tuiles

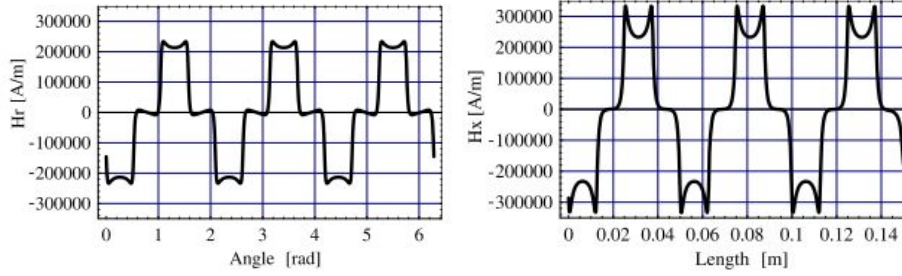


FIGURE 2.32 – Représentation de la composante radiale H_r et de sa structure linéarisée H_x en fonction de l'angle θ et de la longueur associée en analogie parallélépipédique dans une structure de Halbach classique comportant 12 tuiles aimantées radialement et orthoradialement ($r_1 = 0.025$ m, $r_2 = 0.028$ m, $r = 0.024$ m, $z_1 = 0$ m, $z_2 = 0.003$ m, $z = 0.0015$ m (plan médian), $J = 1$ T). Le champ est déterminé dans l'entrefer de la structure d'aimant à une distance de 0.001 m de la face inférieure de l'anneau comportant les 12 tuiles d'aimants. On illustre ici les limites de l'utilisation des formules linéarisées pour évaluer le champ magnétique dans une structure cylindrique de type Halbach (dont les polarisations successives tournent de $\frac{\pi}{2}$ entre deux tuiles consécutives)

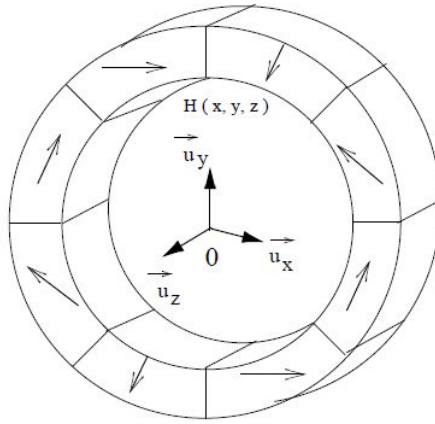


FIGURE 2.33 – Structure de Halbach utilisée pour l'Imagerie par Résonance Magnétique ; cette structure est composée de 8 tuiles aimantées uniformément

$\sigma_{j,3}^*$ et $\sigma_{j,4}^*$ sont écrites sous la forme suivante :

$$\sigma_{j,1}^* = -J \cos \left(\theta - \alpha - \frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2} \right)$$

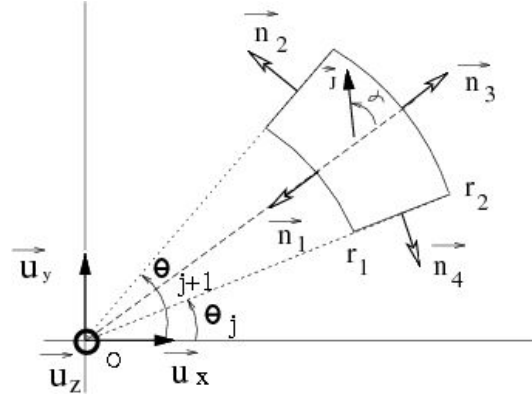


FIGURE 2.34 – Paramètres utilisés pour calculer le champ magnétique créé par une tuile dont l'aimantation est à la fois uniforme et arbitraire dans le plan (R, θ)

$$\begin{aligned}\sigma_{j,2}^* &= -J \sin \left(\frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{2} - \alpha \right) \\ \sigma_{j,3}^* &= J \cos \left(\theta - \alpha - \frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2} \right) \\ \sigma_{j,4}^* &= J \sin \left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} - \alpha \right)\end{aligned}\tag{2.151}$$

On utilise la fonction de Green tridimensionnelle pour l'évaluation du champ magnétique créé par une tuile d'aimant :

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}\tag{2.152}$$

où $\vec{r}$ est le point d'observation et $\vec{r}'$ est un point localisé sur la distribution de charges. Nous utilisons les quatre définitions suivantes de la fonction de Green pour établir les formules des trois composantes du champ créé par une structure composée de tuiles aimantées uniformément et arbitrairement.

$$\begin{aligned}G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(1)} &= (4\pi)^{-1} \left(r_1^2 + \tilde{r}^2 - 2r_1\tilde{r} \cos(\theta - \tilde{\theta}) + (z - \tilde{z})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(2)} &= (4\pi)^{-1} \left(r^2 + \tilde{r}^2 - 2r\tilde{r} \cos(\theta - \theta_{j+1}) + (z - \tilde{z})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(3)} &= (4\pi)^{-1} \left(r_2^2 + \tilde{r}^2 - 2r_2\tilde{r} \cos(\theta - \tilde{\theta}) + (z - \tilde{z})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(4)} &= (4\pi)^{-1} \left(r^2 + \tilde{r}^2 - 2r\tilde{r} \cos(\theta - \theta_j) + (z - \tilde{z})^2 \right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{2.153}$$

2.3 Champ magnétique 3D créé par des tuiles

Pour une tuile aimantée uniformément et arbitrairement, de largeur angulaire $\theta_{j+1} - \theta_j$, la composante $H_x(x, y, z)$ du champ est donnée par :

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) = & \cos(\theta) \partial_r \left\{ \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(k)} \sigma_{j,k}^*(\vec{r}') d^2 \vec{r}'_k \right\} \\ & - \sin(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(k)} \sigma_{j,k}^*(\vec{r}') d^2 \vec{r}'_k \right\} \end{aligned} \quad (2.154)$$

La composante $H_y(x, y, z)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} H_y(x, y, z) = & \sin(\theta) \partial_r \left\{ \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(k)} \sigma_{j,k}^*(\vec{r}') d^2 \vec{r}'_k \right\} \\ & + \cos(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(k)} \sigma_{j,k}^*(\vec{r}') d^2 \vec{r}'_k \right\} \end{aligned} \quad (2.155)$$

La composante $H_z(x, y, z)$ est donnée par :

$$H_z(x, y, z) = -\partial_z \left\{ \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(k)} \sigma_{j,k}^*(\vec{r}') d^2 \vec{r}'_k \right\} \quad (2.156)$$

Les calculs précédents peuvent être développés :

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) = & \cos(\theta) \partial_r \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(1)} \sigma_{j,1}^* r_1 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & + \cos(\theta) \partial_r \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(2)} \sigma_{j,2}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \\ & + \cos(\theta) \partial_r \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(3)} \sigma_{j,3}^* r_2 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & + \cos(\theta) \partial_r \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(4)} \sigma_{j,4}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \\ & - \sin(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(1)} \sigma_{j,1}^* r_1 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & - \sin(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(2)} \sigma_{j,2}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \\ & - \sin(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(3)} \sigma_{j,3}^* r_2 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \end{aligned}$$

$$- \sin(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(4)} \sigma_{j,4}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned} H_y(x, y, z) = & \sin(\theta) \partial_r \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(1)} \sigma_{j,1}^* r_1 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & + \sin(\theta) \partial_r \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(2)} \sigma_{j,2}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \\ & + \sin(\theta) \partial_r \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(3)} \sigma_{j,3}^* r_2 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & + \sin(\theta) \partial_r \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(4)} \sigma_{j,4}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \\ & + \cos(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(1)} \sigma_{j,1}^* r_1 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & + \cos(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(2)} \sigma_{j,2}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \\ & + \cos(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(3)} \sigma_{j,3}^* r_2 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & + \cos(\theta) r^{-1} \partial_\theta \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(4)} \sigma_{j,4}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \end{aligned} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) = & -\partial_z \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(1)} \sigma_{j,1}^* r_1 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & -\partial_z \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(2)} \sigma_{j,2}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \\ & -\partial_z \left\{ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(3)} \sigma_{j,3}^* r_2 d\tilde{\theta} d\tilde{z} \right\} \\ & -\partial_z \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} G_0(\vec{r}, \vec{r}')^{(4)} \sigma_{j,4}^* d\tilde{r} d\tilde{z} \right\} \end{aligned} \quad (2.159)$$

Ces trois composantes, $H_x(x, y, z)$, $H_y(x, y, z)$ et $H_z(x, y, z)$ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) = & \frac{J \cos(\theta)}{4\pi\mu_0} \left(\sin\left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} + \alpha\right) f(\theta_j) + \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} - \alpha\right) f(\theta_{j+1}) \right) \\ & + \frac{J \cos(\theta)}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+k)} r_i (-z + z_k) \mathbf{N}[\tilde{\theta}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{J \sin(\theta)}{4\pi\mu_0} \left\{ \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} - \alpha\right) h(\theta_j) + \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} + \alpha\right) h(\theta_{j+1}) \right\} \\
& -\frac{J \sin(\theta)}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{r_i^2(-z + z_k) \cos\left(\alpha + \frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} - \tilde{\theta}\right) \sin(\theta - \tilde{\theta})}{(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\theta - \tilde{\theta}))\epsilon(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta}
\end{aligned} \tag{2.160}$$

$$\begin{aligned}
H_y(x, y, z) &= \frac{J \sin(\theta)}{4\pi\mu_0} \left(\sin\left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} + \alpha\right) f(\theta_j) + \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} - \alpha\right) f(\theta_{j+1}) \right) \\
&+ \frac{J \sin(\theta)}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+k)} r_i(-z + z_k) \mathbf{N}[\tilde{\theta}] \\
&+ \frac{J \cos(\theta)}{4\pi\mu_0} \left\{ \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} - \alpha\right) h(\theta_j) + \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} + \alpha\right) h(\theta_{j+1}) \right\} \\
&+ \frac{J \cos(\theta)}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{r_i^2(-z + z_k) \cos\left(\alpha + \frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} - \tilde{\theta}\right) \sin(\theta - \tilde{\theta})}{(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\theta - \tilde{\theta}))\epsilon(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta}
\end{aligned} \tag{2.161}$$

$$\begin{aligned}
H_z(x, y, z) &= \frac{J}{4\pi\mu_0} \left(\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} - \alpha\right) g(\theta_2) + \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + \alpha\right) g(\theta_1) \right) \\
&+ \frac{J}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{r_i \cos\left(\alpha + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} - \tilde{\theta}\right)}{\epsilon(\theta_j)} d\tilde{\theta}
\end{aligned} \tag{2.162}$$

avec

$$\begin{aligned}
g(\theta_j) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \log[r_i - r \cos(\theta - \theta_j) + \epsilon(\theta_j)] \\
f(\theta_j) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{(i+k)} (-\cos(\theta - \theta_j) \log[X_j] + \sin(\theta - \theta_j) \arctan[Y_j]) \\
h(\theta_j) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sin(\theta - \theta_j) \log[X_j] - \cos(\theta - \theta_j) \arctan[Y_j]
\end{aligned} \tag{2.163}$$

$$\mathbf{N}[\tilde{\theta}] = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\left(r - r_i \cos(\theta - \tilde{\theta})\right) \cos\left(\alpha + \frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2} - \tilde{\theta}\right)}{\left(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\theta - \tilde{\theta})\right) \epsilon(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta} \tag{2.164}$$

$$X_j = z - z_k + \epsilon(\theta_j)$$

$$\begin{aligned}
 Y_j &= \frac{(z - z_k)(r_i - r \cos(\theta - \theta_j))}{r \sin(\theta - \theta_j) \epsilon(\theta_j)} \\
 \epsilon(\beta) &= \sqrt{r^2 + r_i^2 + (z - z_k)^2 - 2rr_i \cos(\theta - \beta)}
 \end{aligned}
 \tag{2.165}$$

Ici encore, nous obtenons des expressions basées sur des intégrales elliptiques non classiques et de fonctions totalement analytiques. Ces expressions généralisent les modèles établis dans le cas d'une tuile aimantée à la fois uniformément et radialement et dans le cas d'une tuile aimantée à la fois uniformément et orthoradialement. Notons que les fonctions totalement analytiques qui composent les expressions des composantes du champ magnétique créé par une tuile dont l'aimantation est à la fois arbitraire dans un plan et uniforme résultent des densités surfaciques de charges localisées sur les faces planes de la tuile. Les fonctions elliptiques non classiques résultent des densités surfaciques de pôles magnétiques localisés sur les surfaces courbes de la tuile.

Ces expressions mettent en évidence les effets de l'uniformité des polarisations des tuiles sur la forme du champ produit. Par exemple, la figure 2.35 montre le champ projeté sur une direction (y) créé par une structure composée de 8 tuiles à aimantation uniforme et tournante.

La figure 2.35 met en évidence le changement de forme du champ proche dû à l'uniformité des aimantations des tuiles d'aimant. En champ lointain, dès que le champ est évalué au centre de la structure, ces effets sont plus faibles sur l'ondulation produite.

Enfin, cette approche exacte permet de reconstruire le champ en tout point de l'espace, comme le montre la figure 2.36.

Notons que le champ tridimensionnel exact créé par un assemblage de tuiles aimantées à la fois uniformément et dont les polarisations tournent autour du centre de symétrie est obtenu avec un temps de calcul de 5 s pour un processeur de 2GHz. De telles représentations sont intéressantes pour prédire les effets de l'uniformité de l'aimantation des tuiles sur le champ magnétique produit. Par ailleurs, le fait d'avoir traité ce problème en tenant compte de la courbure des tuiles permet de calculer le champ magnétique au milieu de la structure, comme il est généralement souhaité dans le cadre des structures dédiées à l'Imagerie par Résonance Magnétique.

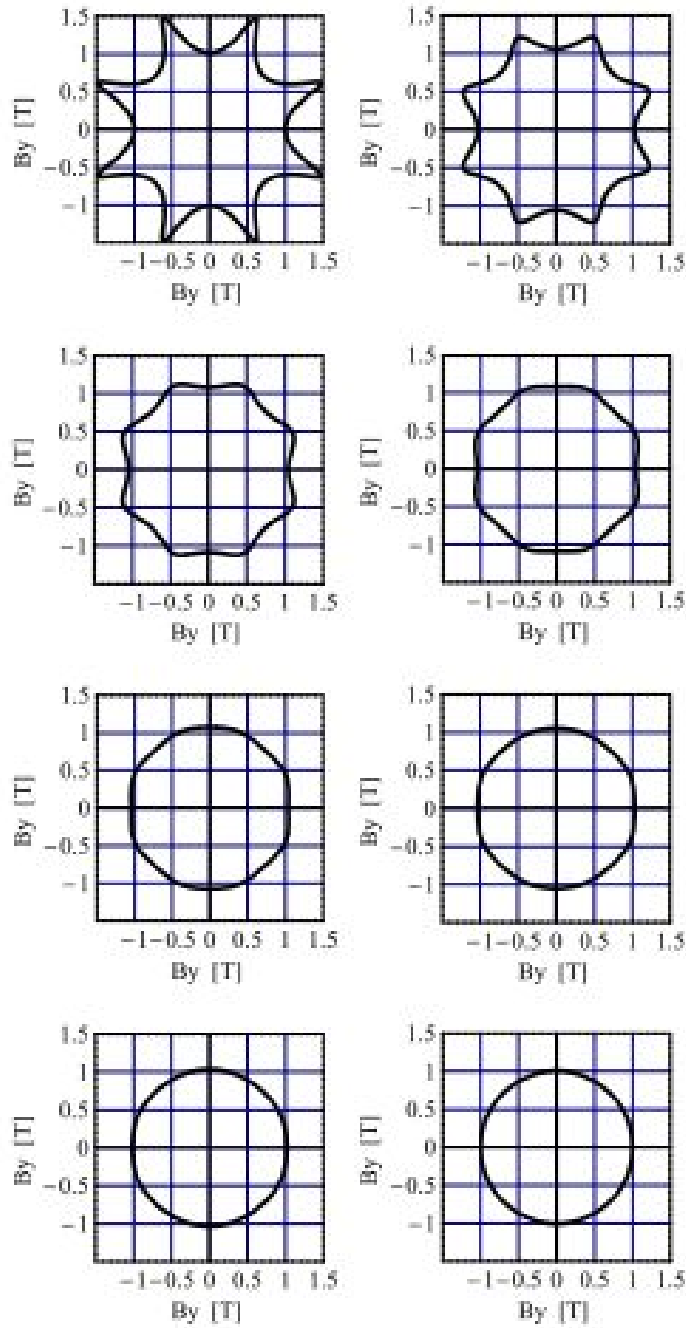


FIGURE 2.35 – Induction radiale créée par une structure IRM composée de 8 tuiles aimantées uniformément; ($r_1 = 0.3m, r_2 = 0.6m, z_1 = 0m, z_2 = 1.6m, z = 0.8m, J = 1.5T$), de gauche à droite et de haut en bas, $r = 0.29m, r = 0.27m, r = 0.25m, r = 0.23m, r = 0.21m, r = 0.19m, r = 0.17m, r = 0.15m$

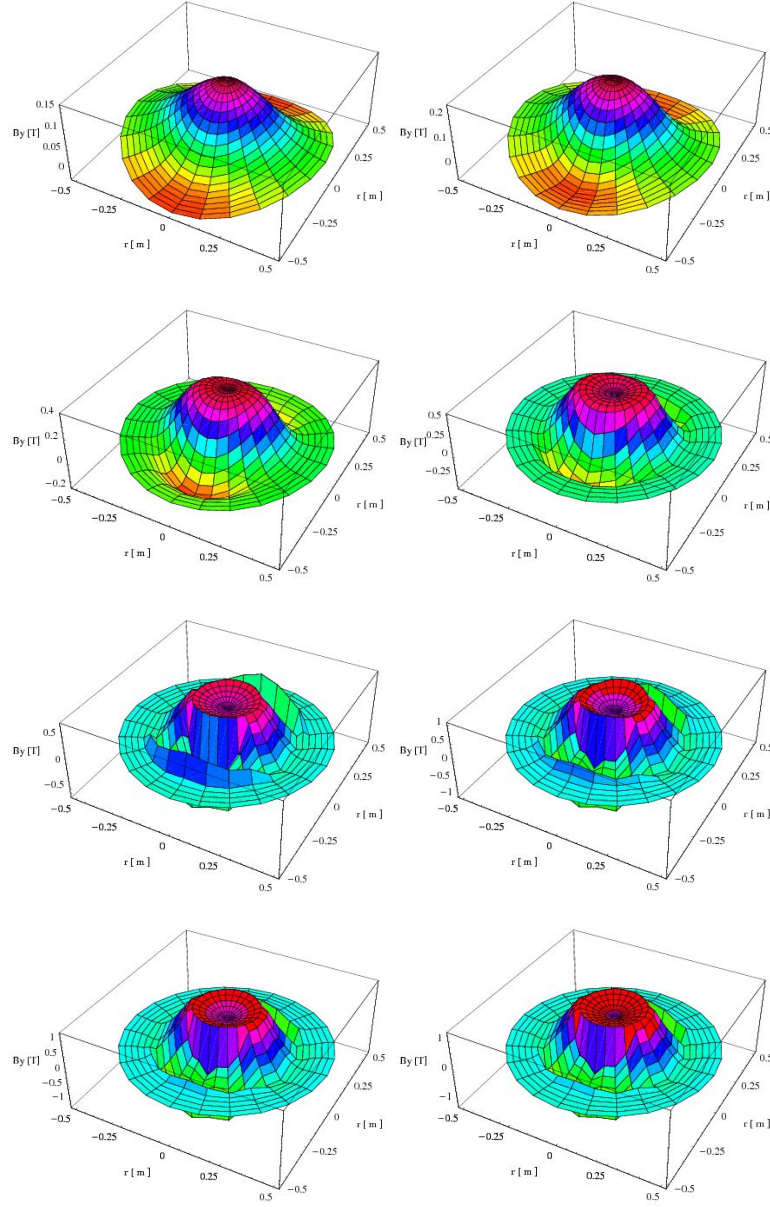
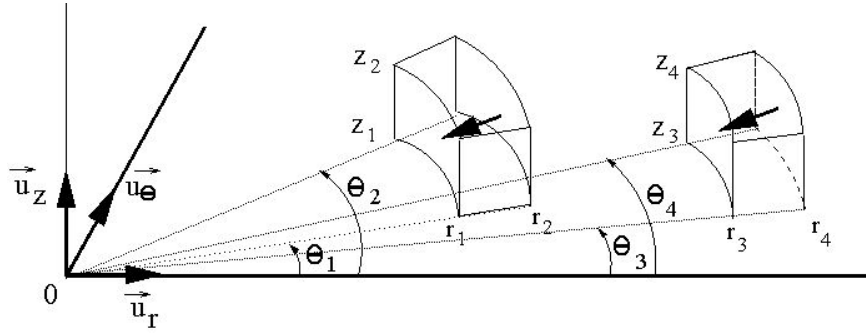


FIGURE 2.36 – Représentation 3D de $\mu_0 H_y = B_y$ (notation propre à cette figure) créée par une structure IRM composée de 16 tuiles aimantées uniformément à différentes altitudes (de haut en bas et de gauche à droite, le patient rentre au fur et à mesure dans l'IRM) ; ($r_1 = 0.3 \text{ m}$, $r_2 = 0.6 \text{ m}$, $z_1 = 0 \text{ m}$, $z_2 = 1.6 \text{ m}$, $J = 1.5 \text{ T}$), de gauche à droite et de haut en bas, $r = 0.29 \text{ m}$, $r = 0.27 \text{ m}$, $r = 0.25 \text{ m}$, $r = 0.23 \text{ m}$, $r = 0.21 \text{ m}$, $r = 0.19 \text{ m}$, $r = 0.17 \text{ m}$, $r = 0.15 \text{ m}$. Le champ est de plus en plus uniforme lorsqu'il est déterminé dans le centre de la structure de l'IRM.


 FIGURE 2.37 – *Accouplement entre deux tuiles aimantées radialement*

2.4 Forces et couples exercés entre aimants permanents

Les calculs de la force et du couple qui s'exercent entre deux tuiles ou deux anneaux aimantés sont généralement traités dans la littérature scientifique avec des approches linéarisées (basées par exemple sur le calcul de la force s'exerçant entre deux parallélépipèdes, voir l'état de l'art au début de ce chapitre). Nous employons des approches exactes non linéarisées formulées de manière semi-analytique pour calculer la force, le couple ou encore la raideur s'exerçant entre anneaux ou tuiles selon le cas.

2.4.1 Couple s'exerçant entre deux tuiles aimantées radialement

Nous utilisons le modèle coulombien pour calculer le couple s'exerçant entre deux tuiles aimantées radialement. Dans cette approche, l'expression du couple est obtenue en intégrant le champ azimuthal créé par une tuile aimantée radialement sur les contributions de charge de l'autre tuile aimantée radialement (en multipliant l'intégrande par la distance r pour chaque contribution). En considérant toutes les contributions de charges localisées sur chaque tuile aimantée radialement, la formule intégrale dans l'approche coulombienne s'écrit :

$$\begin{aligned}
 T_\theta = & -\frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_{in1}^2 r_{out2}^2 \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_{out2}^2 + r_{in1}^2 - 2r_{in1}r_{out2} \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2 \\
 & + \frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_{out1}^2 r_{out2}^2 \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_{out2}^2 + r_{out1}^2 - 2r_{out1}r_{out2} \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2 \\
 & + \frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_{in1}^2 r_{in2}^2 \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_{out2}^2 + r_{in1}^2 - 2r_{in1}r_{out2} \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2 \\
 & - \frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_{out1}^2 r_{in2}^2 \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_{in2}^2 + r_{out1}^2 - 2r_{out1}r_{in2} \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_1 r_{out2}^2 \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_1^2 + r_{out2}^2 - 2r_{out2}r_1 \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} dr_1 d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2 \\
 & +\frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_1 r_{in2}^2 \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_1^2 + r_{in2}^2 - 2r_{in2}r_1 \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} dr_1 d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2 \\
 & -\frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_2^2 r_{out1} \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_2^2 + r_{out1}^2 - 2r_2 r_{out1} \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} dr_2 d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2 \\
 & +\frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_2^2 r_{in1} \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_2^2 + r_{in1}^2 - 2r_2 r_{in1} \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} dr_2 d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2 \\
 & +\frac{\sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^h \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_1 r_2 \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_2 r_1 \cos(\theta_j - \theta_i) + (z_2 - z_1)} dr_1 dr_2 d\theta_i dz_1 d\theta_j dz_2
 \end{aligned} \tag{2.166}$$

Cette formule peut être réduite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 T_\theta &= \int_{\theta_3}^{\theta_4} \left(M_1^{(r_{out1}, r_{out2})} - M_1^{(r_{in1}, r_{out2})} + M_1^{(r_{in1}, r_{in2})} + M_1^{(r_{out1}, r_{in2})} \right) d\theta_i \\
 &+ \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \left(M_2^{(r_1, r_{in2})} - M_2^{(r_1, r_{out2})} \right) dr_1 d\theta_i \\
 &+ \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \left(M_3^{(r_2, r_{in1})} - M_3^{(r_2, r_{out1})} \right) dr_2 d\theta_i \\
 &+ \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} M_4^{(r_1, r_2)} d\theta_i dr_1 dr_2
 \end{aligned} \tag{2.167}$$

avec

$$M_1^{(a,b)} = -\frac{a^2 b^2 \sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} (g(\theta_2) - g(\theta_1)) \tag{2.168}$$

$$M_2^{(a,b)} = -\frac{ab^2 \sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} (g(\theta_2) - g(\theta_1)) \tag{2.169}$$

$$M_3^{(a,b)} = -\frac{a^2 B \sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} (g(\theta_2) - g(\theta_1)) \tag{2.170}$$

$$M_4^{(a,b)} = -\frac{ab \sigma_1^* \sigma_2^*}{4\pi\mu_0} (g(\theta_2) - g(\theta_1)) \tag{2.171}$$

et $g(\theta_i)$ est donnée par (2.172).

$$\begin{aligned}
 g(\theta_j) &= \beta(a, b, h2, za, \theta_i, \theta_j) - \beta(a, b, h1, za, \theta_i, \theta_j) \\
 &+ \beta(a, b, h1, zb, \theta_i, \theta_j) - \beta(a, b, h2, zb, \theta_i, \theta_j)
 \end{aligned} \tag{2.172}$$

$$\beta(a, b, za, zb, a, b, \theta_i, \theta_j) = -\frac{\eta}{ab} \arctan \left[\frac{\xi}{\eta} \right] + \frac{\xi}{ab} \tag{2.173}$$

avec

$$\xi = \sqrt{a^2 + b^2 + (z_2 - z_1)^2 - 2ab \cos(\theta_i - \theta_j)} \quad (2.174)$$

$$\eta = \sqrt{-(z_1 - z_2)^2} \quad (2.175)$$

Dans l'approche coulombienne, l'expression du couple s'exerçant entre deux tuiles aimantées radialement ([Ravaud-I],[78]) (voir figure 2.37) se décompose en trois interactions. La première interaction correspond à la contribution de densités surfaciques de charge des deux tuiles. La deuxième interaction correspond à la contribution de densités surfaciques d'une tuile avec les densités volumiques de l'autre tuile. La troisième interaction correspond à la contribution de densités volumiques des deux tuiles aimantées radialement.

Les interactions ayant le temps de calcul le plus court sont les contributions dues uniquement aux densités surfaciques des deux tuiles (de l'ordre de 3 s pour calculer le couple s'exerçant entre deux tuiles aimantées radialement avec un processeur de 2 GHz). Le fait de prendre en compte seulement cette contribution dans le calcul du couple transmis entre deux tuiles aimantées radialement permet d'optimiser très rapidement les dimensions des tuiles pour avoir la forme et la valeur du couple voulu. Néanmoins, la détermination exacte du couple transmis entre deux tuiles aimantées radialement nécessite la prise en compte des trois contributions, le temps de calcul étant alors plus long puisque trois intégrales numériques sont nécessaires pour déterminer le couple exact transmis entre ces deux tuiles aimantées radialement (15 s pour calculer le couple transmis entre deux tuiles aimantées radialement avec un processeur de 2GHz).

La figure 2.38 représente le couple transmis entre deux tuiles aimantées radialement en fonction du décalage angulaire entre ces deux tuiles. Nous prenons les dimensions suivantes : $r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_1 = z_3 = 0$ m, $z_2 = z_4 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T, $\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ rad.

Cette figure traduit le caractère dissymétrique de ce couple lorsque les deux tuiles sont décalées angulairement. Notons que cette dissymétrie est également observable dans l'approche linéarisée.

2.4.2 Couple s'exerçant entre deux tuiles aimantées uniformément et radialement

Les tuiles aimantées radialement étant en réalité majoritairement aimantées uniformément et radialement (technologie néodyme-fer-bore), le couple transmis entre deux tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement ([Ravaud-J],[79]) change en module et dans sa forme ([Ravaud-W],[80]). Pour étudier l'influence de l'uniformité de l'aimantation des tuiles sur le couple transmis, nous avons utilisé l'approche coulombienne et les paramètres définis à la figure 2.39.

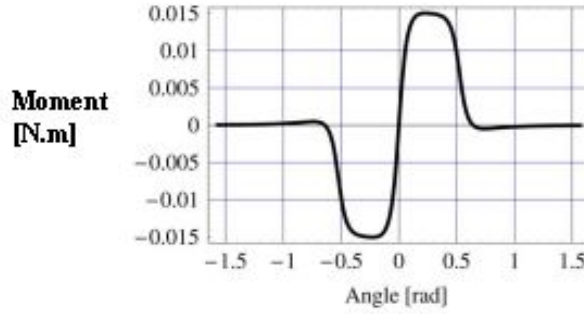


FIGURE 2.38 – Couple transmis entre deux tuiles aimantées radialement en fonction du décalage angulaire, $r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_1 = z_3 = 0$ m, $z_2 = z_4 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T, $\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ rad

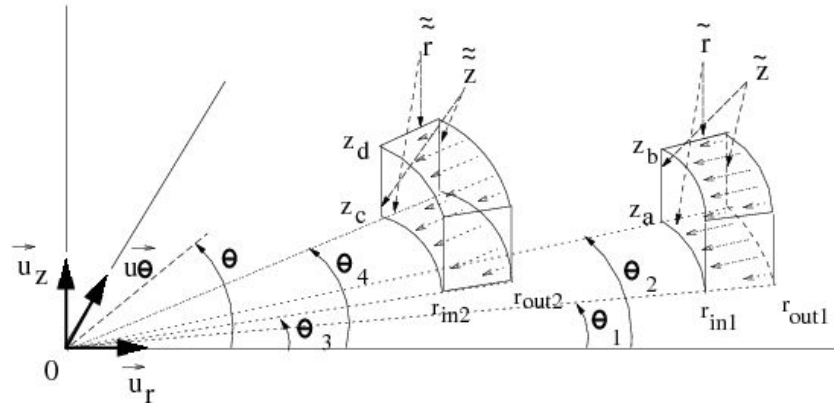


FIGURE 2.39 – Deux tuiles aimantées uniformément et radialement dans l'analogie coulombienne

En conséquence, chaque tuile est représentée par des faces chargées avec des densités fictives de pôles magnétiques. En notant $\vec{n}_{ij}$, le vecteur normal de la face i de l'aimant j , les densités surfaciques σ_{ij}^* sont déduites de la relation suivante :

$$\sigma_{ij}^* = \vec{J}_j \cdot \vec{n}_{ij} \quad (2.176)$$

On applique la relation précédente aux quatre faces des deux tuiles d'aimant. On donne les résultats à la table 2.4.2. Le couple est donc calculé en intégrant le champ azimuthal créé par la tuile extérieure sur les contributions de charges de la tuile intérieure. Le champ azimuthal

Densités surfaciques	Produit scalaire	Expression
σ_{11}^*	$\vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1$	$J_1 \cos(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})$
σ_{12}^*	$\vec{J}_1 \cdot \vec{n}_2$	$J_1 \sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})$
σ_{13}^*	$\vec{J}_1 \cdot \vec{n}_3$	$-J_1 \cos(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})$
σ_{14}^*	$\vec{J}_1 \cdot \vec{n}_4$	$J_1 \sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})$
σ_{25}^*	$\vec{J}_2 \cdot \vec{n}_5$	$J_2 \cos(\theta - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2})$
σ_{26}^*	$\vec{J}_2 \cdot \vec{n}_6$	$J_2 \sin(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2})$
σ_{27}^*	$\vec{J}_2 \cdot \vec{n}_7$	$-J_2 \cos(\theta - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2})$
σ_{28}^*	$\vec{J}_2 \cdot \vec{n}_8$	$J_2 \sin(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2})$

TABLE 2.5 – Définition des densités surfaciques de charges pour calculer le couple exercé entre deux tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement

s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 H_\theta(r, \theta, z) = & \frac{J_1}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{z_a}^{z_b} \cos(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}) \frac{\vec{u}(r_{in1})}{|\vec{u}(r_{in1})|^3} r_{in1} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \\
 & - \frac{J_1}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{z_a}^{z_b} \cos(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}) \frac{\vec{u}(r_{out1})}{|\vec{u}(r_{out1})|^3} r_{out1} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \\
 & + \frac{J_1}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \int_{z_a}^{z_b} \sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}) \frac{\vec{v}(\theta_2)}{|\vec{v}(\theta_2)|^3} d\tilde{r} d\tilde{z} \\
 & + \frac{J_1}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \int_{z_a}^{z_b} \sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}) \frac{\vec{v}(\theta_1)}{|\vec{v}(\theta_1)|^3} d\tilde{r} d\tilde{z}
 \end{aligned} \tag{2.177}$$

où

$$\vec{u}(x) = (r - x \cos(\theta - \tilde{\theta}))\vec{u}_r - x \sin(\theta - \tilde{\theta})\vec{u}_\theta + (z - \tilde{z})\vec{u}_z \tag{2.178}$$

et

$$\vec{v}(y) = (r - \tilde{r} \cos(\theta - y))\vec{u}_r - \tilde{r} \sin(\theta - y)\vec{u}_\theta + (z - \tilde{z})\vec{u}_z \tag{2.179}$$

Le couple entre les deux tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement se détermine par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 T_\theta = & \frac{J_1 J_2}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_c}^{z_d} r_{in2} H(r_{in2}, \tilde{\theta}, \tilde{z}) r_{in2} \cos(\tilde{\theta} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}) d\tilde{\theta} d\tilde{z} \\
 & - \frac{J_1 J_2}{4\pi\mu_0} \int_{\theta_3}^{\theta_4} \int_{z_c}^{z_d} r_{out2} H(r_{out2}, \tilde{\theta}, \tilde{z}) r_{out2} \cos(\tilde{\theta} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}) d\tilde{\theta} d\tilde{z} \\
 & + \frac{J_1 J_2}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \int_{z_c}^{z_d} \tilde{r} H(\tilde{r}, \theta_4, \tilde{z}) \sin(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2}) d\tilde{r} d\tilde{z}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{J_1 J_2}{4\pi\mu_0} \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \int_{z_c}^{z_d} \tilde{r} H(\tilde{r}, \theta_3, \tilde{z}) \sin\left(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2}\right) d\tilde{r} d\tilde{z} \quad (2.180)$$

Après simplification, l'expression finale du couple transmis entre deux tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement s'écrit :

$$T_\theta = \frac{J_1 J_2}{4\pi\mu_0} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_3}^{\theta_4} dT_\theta^{(1)} + T_\theta^{(2)} + \int_{z_a}^{z_b} dT_\theta^{(3)} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} dT_\theta^{(4)} \right) \quad (2.181)$$

avec

$$\begin{aligned} dT_\theta^{(1)} = & + \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right) \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}) A[r_{in1}, r_{in2}] d\tilde{\theta} d\tilde{\theta} \\ & - \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right) \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}) A[r_{out1}, r_{in2}] d\tilde{\theta} d\tilde{\theta} \\ & - \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right) \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}) A[r_{in1}, r_{out2}] d\tilde{\theta} d\tilde{\theta} \\ & + \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right) \sin(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}) A[r_{in2}, r_{out1}] d\tilde{\theta} d\tilde{\theta} \end{aligned} \quad (2.182)$$

On voit que $dT_\theta^{(1)}$ comporte les contributions croisées des charges localisées sur les faces courbes des deux tuiles aimantées radialement. Cette fonction est particulièrement difficile à intégrer car le numérateur comporte un produit de fonctions dont les variations angulaires diffèrent du pas angulaire d'intégration.

$$\begin{aligned} T_\theta^{(2)} = & + \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2}\right) B[\theta_2, \theta_4] \\ & + \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2}\right) B[\theta_1, \theta_4] \\ & + \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2}\right) B[\theta_2, \theta_3] \\ & + \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2}\right) B[\theta_1, \theta_3] \end{aligned} \quad (2.183)$$

La fonction $T_\theta^{(2)}$ est la plus simple à intégrer car cette fonction résulte des contributions de charges localisées sur les faces planes de chaque tuile aimantée radialement. Notons d'ailleurs que cette fonction n'est basée que sur une seule intégrale numérique.

$$\begin{aligned}
dT_{\theta}^{(3)} = & \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \frac{\theta_4 - \theta_3}{2}\right) C[\theta_2, r_{in2}] d\tilde{z} \\
& + \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right) C[\theta_1, r_{in2}] d\tilde{z} \\
& - \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right) C[\theta_2, r_{out2}] d\tilde{z} \\
& - \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right) C[\theta_1, r_{out2}] d\tilde{z}
\end{aligned} \tag{2.184}$$

$$\begin{aligned}
dT_{\theta}^{(4)} = & + \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2}\right) D[\theta_4, r_{in1}] d\tilde{\theta} \\
& - \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4 - \theta_3}{2}\right) D[\theta_4, r_{out1}] d\tilde{\theta} \\
& + \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) D[\theta_3, r_{in1}] d\tilde{\theta} \\
& - \cos\left(\tilde{\theta} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) D[\theta_3, r_{out1}] d\tilde{\theta}
\end{aligned} \tag{2.185}$$

Les fonctions $dT_{\theta}^{(3)}$ et $dT_{\theta}^{(4)}$ sont des fonctions croisées dans le sens où elles tiennent compte du produit des contributions de charges localisées sur les faces courbes et les faces planes de chaque tuile aimantée radialement. Il est intéressant de noter que ces fonctions sont basées sur une partie semi-analytique utilisant une seule intégration numérique.

Les fonctions $A[r_1, r_2]$, $B[\theta_i, \theta_j]$, $C[\theta_i, r_i]$ et $D[\theta_j, r_j]$ qui décrivent les différents types d'interactions entre les charges magnétiques localisées sur les faces des tuiles aimantées radialement sont définis de la manière suivante :

$$A[r_1, r_2] = \int_{z_a}^{z_b} \int_{z_c}^{z_d} \frac{-r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}) + (\tilde{z} - \tilde{z})^2)^{\frac{3}{2}}} d\tilde{z} d\tilde{z} \tag{2.186}$$

$$B[\theta_i, \theta_j] = \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \int_{z_c}^{z_d} \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-\tilde{r} \tilde{r} \sin(\theta_j - \theta_i)}{(\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r} \tilde{r} \cos(\theta_j - \theta_i) + (\tilde{z} - \tilde{z})^2)^{\frac{3}{2}}} d\tilde{r} d\tilde{z} d\tilde{r} d\tilde{z} \tag{2.187}$$

$$C[\theta_i, r_i] = \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} \int_{z_a}^{z_b} \int_{z_c}^{z_d} \frac{-r_i^2 \tilde{r} \sin(\tilde{\theta} - \theta_i)}{(\tilde{r}^2 + r_i^2 - 2\tilde{r} r_i \cos(\tilde{\theta} - \theta_i) + (\tilde{z} - \tilde{z})^2)^{\frac{3}{2}}} d\tilde{r} d\tilde{z} d\tilde{z} \tag{2.188}$$

$$D[\theta_j, r_j] = \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \int_{z_c}^{z_d} \int_{z_a}^{z_b} \frac{-r_j^2 \tilde{r} \sin(\theta_j - \tilde{\theta})}{(\tilde{r}^2 + r_j^2 - 2r_j \tilde{r} \cos(\theta_j - \tilde{\theta}) + (\tilde{z} - \tilde{z})^2)^{\frac{3}{2}}} d\tilde{z} d\tilde{r} d\tilde{z} \tag{2.189}$$

$$A[r_1, r_2] = A^{(1)}[z_a, z_c] - A^{(1)}[z_b, z_c] - A^{(1)}[z_a, z_d] + A^{(1)}[z_b, z_d] \quad (2.190)$$

avec

$$A^{(1)}[z_i, z_j] = \frac{r_1^2 r_2^2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (z_i - z_j)^2 - 2r_1 r_2 \cos(\tilde{\theta} - \tilde{\theta})}}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\tilde{\theta} - \tilde{\theta})} \quad (2.191)$$

$$\begin{aligned} B[\theta_i, \theta_j] = & \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \left(-B^{(1)}[z_a - z_c, r_{out1}] + B^{(1)}[z_b - z_c, r_{out1}] \right) d\tilde{r} \\ & + \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \left(+B^{(1)}[z_a - z_d, r_{out1}] - B^{(1)}[z_b - z_d, r_{out1}] \right) d\tilde{r} \\ & + \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \left(B^{(1)}[z_a - z_c, r_{in1}] - B^{(1)}[z_b - z_c, r_{in1}] \right) d\tilde{r} \\ & + \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \left(-B^{(1)}[z_a - z_d, r_{in1}] + B^{(1)}[z_b - z_d, r_{in1}] \right) d\tilde{r} \end{aligned} \quad (2.192)$$

avec

$$\begin{aligned} B[y, r_i] = & \tilde{r} \sqrt{\tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\tilde{r}x + y} + \tilde{r}^2 x \log \left[\tilde{r} - \tilde{r}x + \sqrt{\tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\tilde{r}x + y} \right] \\ & + \frac{\tilde{r}i(-x + \sqrt{-1 + x^2})\sqrt{\tilde{r}^2 - y}}{2\sqrt{-1 + x^2}} \log[A] \\ & + \frac{\tilde{r}i(x + \sqrt{-1 + x^2})\sqrt{\tilde{r}^2 - y}}{2\sqrt{-1 + x^2}} \log[B] \end{aligned} \quad (2.193)$$

$$\begin{aligned} A = & \frac{2i(\tilde{r}\tilde{r}(-1 + x^2) + \tilde{r}^2(x - x^3 + x^2\sqrt{-1 + x^2}))}{(-x + \sqrt{-1 + x^2})(\tilde{r} + \tilde{r}(-x + \sqrt{-1 + x^2}))(\tilde{r}^2 - y)^{\frac{3}{2}}} \\ & + \frac{2i\sqrt{-1 + x^2}(-y + i\sqrt{\tilde{r}^2 - y}\sqrt{\tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\tilde{r}x + y})}{(-x + \sqrt{-1 + x^2})(\tilde{r} + \tilde{r}(-x + \sqrt{-1 + x^2}))(\tilde{r}^2 - y)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.194)$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{2i\tilde{r}\tilde{r}(-1 + x^2) - 2i\tilde{r}^2 x(-1 + x^2 + x\sqrt{-1 + x^2})}{(x + \sqrt{-1 + x^2})(-\tilde{r} + \tilde{r})(x + \sqrt{-1 + x^2})(\tilde{r}^2 - y)^{\frac{3}{2}}} \\ & + \frac{2\sqrt{-1 + x^2}(iy + \sqrt{\tilde{r}^2 - y}\sqrt{\tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\tilde{r}x + y})}{(x + \sqrt{-1 + x^2})(-\tilde{r} + \tilde{r}(x + \sqrt{-1 + x^2}))(\tilde{r}^2 - y)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.195)$$

$$x = \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (2.196)$$

$$C[\theta_i, r_i] = \int_{r_{in1}}^{r_{out1}} C^{(1)}[\theta_i, r_i] d\tilde{r} \quad (2.197)$$

$$\begin{aligned} C^{(1)}[\theta_i, r_i] = & r_i \sqrt{r_i^2 + \tilde{r}^2 + (z_c - \tilde{z})^2 - 2r_i \tilde{r} \cos(\theta_3 - \theta_i)} \\ & - r_i \sqrt{r_i^2 + \tilde{r}^2 + (z_d - \tilde{z})^2 - 2r_i \tilde{r} \cos(\theta_3 - \theta_i)} \\ & - r_i \sqrt{r_i^2 + \tilde{r}^2 + (z_c - \tilde{z})^2 - 2r_i \tilde{r} \cos(\theta_4 - \theta_i)} \\ & + r_i \sqrt{r_i^2 + \tilde{r}^2 + (z_d - \tilde{z})^2 - 2r_i \tilde{r} \cos(\theta_4 - \theta_i)} \\ & + r_i (z_c - \tilde{z}) \log \left[-z_c + \tilde{z} + \sqrt{r_i^2 + \tilde{r}^2 + (z_c - \tilde{z})^2 - 2r_i \tilde{r} \cos(\theta_3 - \theta_i)} \right] \\ & - r_i (z_d - \tilde{z}) \log \left[-z_d + \tilde{z} + \sqrt{r_i^2 + \tilde{r}^2 + (z_d - \tilde{z})^2 - 2r_i \tilde{r} \cos(\theta_4 - \theta_i)} \right] \\ & + r_i (z_d - \tilde{z}) \log \left[-z_d + \tilde{z} + \sqrt{r_i^2 + \tilde{r}^2 + (z_d - \tilde{z})^2 - 2r_i \tilde{r} \cos(\theta_3 - \theta_i)} \right] \\ & - r_i (z_c - \tilde{z}) \log \left[-z_c + \tilde{z} + \sqrt{r_i^2 + \tilde{r}^2 + (z_c - \tilde{z})^2 - 2r_i \tilde{r} \cos(\theta_3 - \theta_i)} \right] \end{aligned} \quad (2.198)$$

$$D[\theta_j, r_j] = \int_{r_{in2}}^{r_{out2}} \left(D^{(2)}(z_b, z_c) - D^{(2)}(z_a, z_c) + D^{(2)}(z_a, z_d) - D^{(2)}(z_b, z_d) \right) d\tilde{r} \quad (2.199)$$

avec

$$D^{(2)}(x, y) = \frac{\sin(\theta_i - \theta_j) r_j^2 \tilde{r} \sqrt{r_j^2 + \tilde{r}^2 + (x - y)^2 - 2r_j \tilde{r} \cos(\theta_j - \theta_i)}}{r_j^2 + \tilde{r}^2 - 2r_j \tilde{r} \cos(\theta_j - \theta_i)} \quad (2.200)$$

L'approche coulombienne met en évidence la déformation du couple transmis entre deux tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement et permet de comparer le couple transmis entre deux tuiles aimantées uniformément et deux tuiles aimantées radialement ([**Ravaud-V**], [81]) (considérées comme ayant des polarisations idéales), comme le montre la figure 2.40.

Par ailleurs, cette figure 2.40 illustre la diminution et la déformation du couple transmis entre deux tuiles aimantées uniformément. Nous utilisons les dimensions suivantes : $r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_1 = z_3 = 0$ m, $z_2 = z_4 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T, $\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ rad. Ceci prouve les inconvénients de l'utilisation de tuiles aimantées uniformément par rapport aux tuiles aimantées radialement.

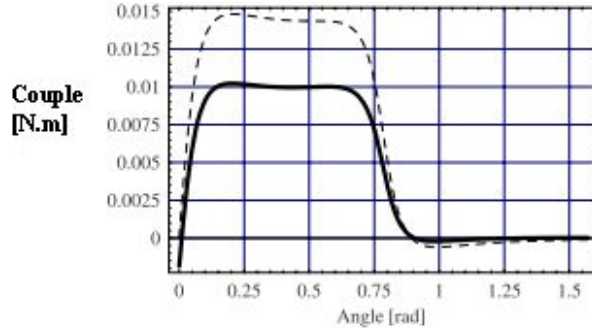


FIGURE 2.40 – Couple transmis entre deux tuiles aimantées uniformément et radialement en fonction du décalage angulaire, $r_1 = 0.021\text{ m}$, $r_2 = 0.024\text{ m}$, $r_3 = 0.025\text{ m}$, $r_4 = 0.028\text{ m}$, $z_1 = z_3 = 0\text{ m}$, $z_2 = z_4 = 0.003\text{ m}$, $J_1 = J_2 = 1\text{ T}$, $\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3 = \frac{\pi}{4}\text{ rad}$

Notons enfin que la direction de la polarisation a une influence sur le couple transmis ([Ravaud-W],[80]) pour les accouplements à entrefer plan et cylindrique. Nos travaux conduisent à la conclusion que les accouplements à entrefer cylindrique doivent être élaborés avec des tuiles d'aimantation radiale. Les accouplements à entrefer plan doivent être fabriqués avec des tuiles d'aimantation axiale. Le détail de ces calculs sont présentés à l'annexe ([Ravaud-W],[80]).

2.4.3 Force entre anneaux aimantés axialement

Les anneaux aimantés radialement sont utilisés dans la réalisation de paliers magnétiques dits passifs. Ces paliers sont généralement constitués de deux anneaux.

La figure 2.41 représente une butée axiale, constituée de deux anneaux aimantés radialement en répulsion. Une telle configuration est d'ailleurs généralement représentée en coupe bidimensionnelle, comme le montre la figure 2.42.

Les expressions semi-analytiques de la force et de la raideur ([Ravaud-N],[82]) permettent d'étudier l'influence des dimensions sur la raideur ou la force (voir figure 2.43) s'exerçant entre ces deux anneaux aimantés axialement.

Nous avons utilisé une formulation tridimensionnelle exacte pour calculer la force et la raideur s'exerçant entre deux anneaux aimantés axialement. Cette formulation exacte est basée sur le modèle coulombien. Le détail des calculs est donné dans les annexes de ce manuscrit ([Ravaud-N],[82]). L'idée est, comme pour le cas du calcul de couple transmis

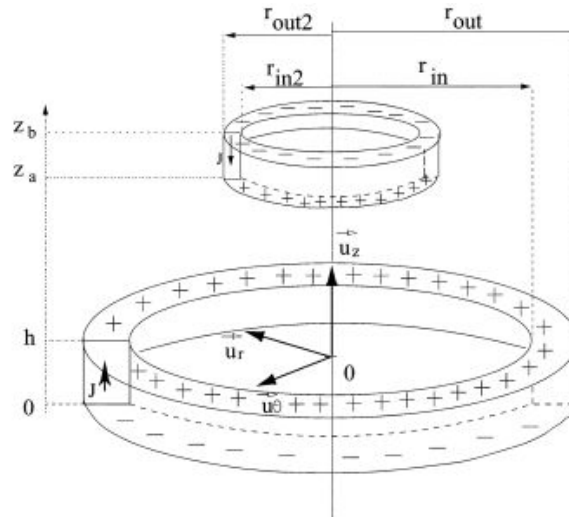


FIGURE 2.41 – Représentation d’une butée axiale constituée de deux anneaux aimantés axialement

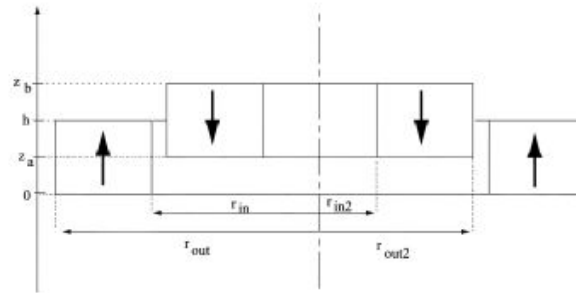


FIGURE 2.42 – Coupe 2D d’une butée axiale constituée de deux anneaux aimantés axialement

entre deux tuiles, de déterminer le champ magnétique créé par l’anneau extérieur. Dans un deuxième temps, nous calculons la projection du champ magnétique créé par l’anneau extérieur sur l’anneau intérieur. Cette méthode de calcul a été largement utilisée dans cette thèse, mais aussi par de nombreux travaux portant sur l’optimisation de structures à aimants permanents [6]-[9].

Le temps de calcul pour représenter la force axiale transmise entre deux anneaux aimantés axialement et centrés radialement est de 4 s avec un processeur de 2GHz. Notons que le temps de calcul avec une formulation linéarisée établie par J. P. Yonnet est plus courte (moins d’une seconde avec le même processeur) mais est moins précise, en particulier pour

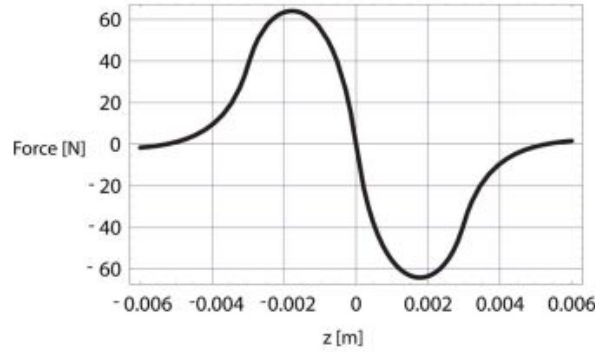


FIGURE 2.43 – Représentation de la force axiale transmise entre deux anneaux aimantés axialement et centrés radialement en fonction du décalage axial z ($r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_3 - z_1 = 0.003$ m, $z_4 - z_2 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T)

les dispositifs de petite taille. L'utilité d'utiliser une approche tridimensionnelle exacte est donc clairement justifiée par le choix d'obtenir des résultats très précis.

2.4.4 Force entre anneaux aimantés radialement

Une butée axiale peut aussi être réalisée avec des anneaux aimantés radialement travaillant en attraction (voir figures 2.44 et 2.45) ; cependant, de tels anneaux étant difficiles à aimanter en pratique, il est souvent plus simple de réaliser des butées axiales avec des anneaux aimantés axialement. Néanmoins, les propriétés mécaniques (raideur, force) sont différentes ([Ravaud-N], [83]), en particulier pour des anneaux dont le rayon est petit.

L'approche analytique adoptée est similaire à celle employée dans le cas des anneaux aimantés axialement ou à celle utilisée pour évaluer le couple transmis entre deux tuiles d'aimant. La courbure des anneaux est donc prise en compte et ceci permet d'obtenir des résultats très précis. Les temps de calcul sont relativement faibles : environ 6 s pour évaluer la force entre deux anneaux aimantés radialement dans l'approche coulombienne avec un processeur de 2GHz.

Par ailleurs, ces approches permettent de réaliser facilement des optimisations paramétriques. On illustre ce propos sur la figure 2.46 où nous représentons la force en fonction de la différence d'altitude entre les deux anneaux pour trois entrefers différents (0.1 mm, 1 mm et 3 mm). Nous prenons les dimensions suivantes : $r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_3 - z_1 = 0.003$ m, $z_4 - z_2 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T

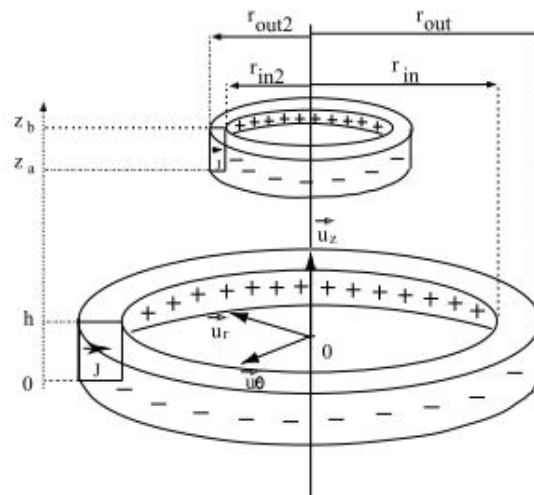


FIGURE 2.44 – Représentation d’une butée axiale constituée de deux anneaux aimantés radialement

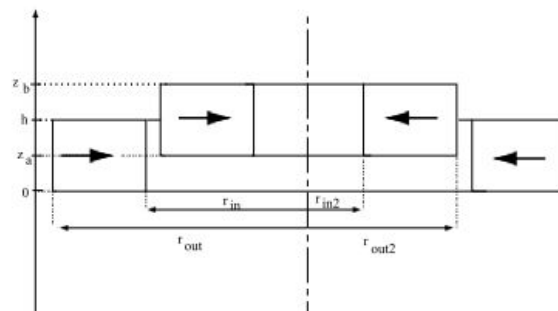


FIGURE 2.45 – Coupe 2D d’une butée axiale faite avec des anneaux aimantés radialement

La figure 2.46 met clairement en évidence la nécessité de réaliser des paliers avec de très petits entrefers, ceci afin d’obtenir la plus grande force possible. L’utilisation de formules 3D permet d’obtenir des optimisations plus fines que celles utilisant les formules 2D (dites linéarisées). Un point majeur à mentionner est la possibilité d’obtenir avec précision la valeur maximale de la force en fonction des dimensions de l’entrefer et des anneaux utilisés. En effet, comme le montre la figure 2.46, la valeur maximale de la force dépend intrinsèquement des dimensions de l’entrefer, et ceci pour des anneaux ayant la même dimension. Cette information est cruciale pour l’optimisation de structures à anneaux et de paliers passifs. En conséquence, l’approche 3D permet des optimisations plus fines que l’approche

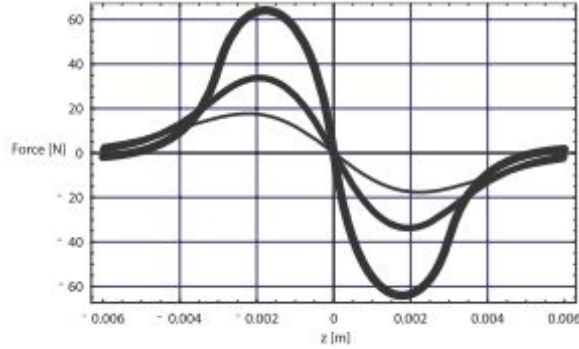


FIGURE 2.46 – Représentation de la force axiale transmise entre deux anneaux aimantés radialement et centrés radialement en fonction du décalage axial z ($r_1 = 0.021$ m, $r_2 = 0.024$ m, $r_3 = 0.025$ m, $r_4 = 0.028$ m, $z_3 - z_1 = 0.003$ m, $z_4 - z_2 = 0.003$ m, $J_1 = J_2 = 1$ T), entrefers (courbe la plus épaisse à la moins épaisse) : 0.1 mm, 1 mm, 2 mm

linéarisée (basée sur la détermination de la force entre deux parallélépipèdes).

L'analyse des configurations étudiées montre que la prise en compte de la courbure entraîne systématiquement des complications mathématiques. Dans l'approche coulombienne, six intégrations sont nécessaires pour obtenir une formulation analytique. La réduction du nombre d'intégrales à utiliser est crucial pour réaliser des optimisations paramétriques avec des temps de calcul réduits. La réelle complication mathématique vient de la prise en compte des densités volumiques de charges magnétiques localisées dans les anneaux aimantés radialement. Négliger ces contributions peut être une première étape de calcul pour réaliser une optimisation paramétrique. Puis, dans un second temps, la prise en compte de ces contributions de charges permet d'affiner les résultats.

Chapitre 3

Conception d'un haut-parleur guidé par des joints de ferrofluide

3.1 Contexte

Nous présentons dans ce chapitre une synthèse des travaux menés sur la modélisation des joints de ferrofluide. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité de travaux préliminaires développés par G. Lemarquand et V. Lemarquand sur la conception de nouvelles structures de haut-parleur sans fer utilisant des suspensions de ferrofluide [84][18]. Cette nouvelle structure s'inscrit dans la recherche de nouveaux transducteurs haute fidélité ([Ravaud-M],[85]).

Les haut-parleurs électrodynamiques classiques comportent des défauts qui génèrent des harmoniques et inharmoniques lorsqu'un son est émis. Ces défauts proviennent essentiellement de la structure du moteur du haut-parleur et de ses suspensions périphériques.

Après avoir retracé les principaux travaux menés dans la littérature sur les non-linéarités des haut-parleurs électrodynamiques et sur l'utilisation des ferrofluides en ingénierie, nous présentons succinctement les points majeurs apportés dans cette thèse sur la modélisation d'un joint de ferrofluide guidant le piston émissif d'un haut-parleur sans fer.

3.1.1 Sources de non-linéarités du haut-parleur électrodynamique : état de l'art

Les premiers travaux sur la modélisation du haut-parleur électrodynamique remontent au début des années 1970 avec les publications de R. H. Small [86][87] et A. N. Thiele [88]. Ces travaux décrivent pour la première fois un modèle linéaire simple fixant les paramètres essentiels à la description du comportement du haut-parleur électrodynamique en

basse fréquence (résonance, impédance nominale, impédance motionnelle). Si ce modèle est encore largement employé aujourd'hui, il ne prédit pas les non-linéarités intrinsèques du haut-parleur qui se répercutent sur la dépendance des paramètres de Thiele et Small en fonction du niveau d'excitation et de la température de la bobine.

En 1981, M. R. Gander s'intéresse au comportement de la bobine mobile qu'il juge primordial pour estimer l'excursion maximale pour laquelle le haut-parleur est linéaire [89]. Des travaux sont poursuivis par R. H. Small sur ce même thème en 1984 [90].

En 1985, H. Suzuki montre l'influence de la forme du dôme d'un haut-parleur sur la pression rayonnée [91]. Notons qu'à ce jour, le débat portant sur la forme idéale du dôme d'un haut-parleur est encore ouvert.

En 1986, M. R. Gander étudie les conséquences de la chaleur dégagée par la bobine mobile sur le rendement du haut-parleur et sur l'impédance du haut-parleur électrodynamique [92]. L'année suivante, en 1987, A. Dobrucki et C. Szmall publient un papier sur les non linéarités des haut-parleurs en basse fréquence (boomer), en particulier autour de la fréquence de résonance [93]. Les débattements de la membrane présentent des non-linéarités assez importantes dans cette zone fréquentielle.

En 1987, A. J. M. Kaizer propose un modèle analytique basé sur les séries de Volterra pour modéliser la réponse non linéaire d'un haut-parleur électrodynamique soumis à une excitation sinusoïdale [94].

En 1989, J. Vanderkooy établit un modèle bidimensionnel permettant de tenir compte des courants de Foucault apparaissant dans les pièces polaires du moteur du haut-parleur électrodynamique [95]. D'une part, il étudie une configuration plane puis le cas plus réaliste d'une configuration cylindrique infinie dans une direction. Cette même année, P. G. L. Mills et M. O. J. Hawksford suggèrent de réduire les distorsions induites par la bobine mobile en employant une technologie alternative dans la source de courant [96].

Le début des années 1990 est marqué par les travaux de W. Klippel [97] sur la modélisation et la caractérisation des non linéarités des haut-parleurs électrodynamiques. Ces travaux sont d'ailleurs poursuivis par ce même auteur [98]-[100] qui identifie l'inductance, le facteur de force et la compliance des suspensions périphériques comme étant les principales sources de non-linéarités du haut-parleur électrodynamique.

Durant la même période, les travaux de J. R. Wright [101] et A. Dobrucki [102] mettent en lumière les mêmes causes de non-linéarités de W. Klippel. Par ailleurs, E. R. Olsen et K. B. Christensen établissent un modèle non linéaire du haut-parleur électrodynamique et J. W. Norris montre les effets du comportement dynamique non linéaire de la bobine mobile

du moteur [103].

L'identification des paramètres de Thiele et Small suscite un certain nombre de travaux [104] [105] et plusieurs méthodologies sont proposées afin de déterminer les paramètres équivalents de Thiele et Small.

Très récemment, des études de synthèse sont menées pour continuer à affiner les modèles existants [106][107]. Parmi ces études, G. Lemarquand et M. Bruneau montrent les conséquences de la propagation acoustique non linéaire d'ondes émises par le haut-parleur électrodynamique [108]. Notons également que N. Quagebeur a étudié les non-linéarités et le rôle du matériau de la membrane dans la reproduction sonore du haut-parleur électrodynamique [109].

3.1.2 Contributions de cette thèse sur les défauts du haut-parleur électrodynamique

Des travaux préliminaires à cette thèse pointent les principales causes de non-linéarités d'un haut-parleur électrodynamique. Une méthodologie expérimentale, basée sur la détermination 3D de l'impédance électrique du haut-parleur électrodynamique, permet de classer les défauts du haut-parleur ([Ravaud-R],[110]). Notons que cette méthodologie est aussi utilisée pour caractériser les microphones électrodynamiques ([Ravaud-S],[111]). L'idée principale est de mesurer l'impédance électrique d'un haut-parleur à différents niveaux d'excitation et d'en tirer les lois de comportement des différents paramètres de Thiele et Small en fonction du niveau d'excitation par la méthode du Simplex. Ces lois de comportement, écrites sous forme polynomiale et réinjectées dans l'équation différentielle du haut-parleur électrodynamique permettent de prédire théoriquement les distorsions induites par le haut-parleur électrodynamique sous excitation sinusoïdale. Ces travaux montrent, par le biais des distorsions induites par l'inductance, l'inconvénient d'utiliser du fer dans le moteur d'un haut-parleur électrodynamique.

3.1.3 Utilisation des ferrofluides : état de l'art

L'utilisation de ferrofluides est née dans les années 1960. Les premiers travaux sur ce domaine sont conduits en majeure partie par R. E. Rosensweig qui publie un livre réédité en 1997 dans lequel les lois fondamentales de la ferrohydrodynamique sont décrites [112]. Nous retraçons ici les publications montrant l'évolution des études théoriques et expérimentales sur les ferrofluides en rapport direct ou indirect avec les joints de ferrofluide.

En 1972, I. Tarapov étudie le mouvement d'un fluide magnétique utilisé dans une structure cylindrique [113]. Ce ferrofluide est utilisé comme lubrifiant et joint d'étanchéité. Cette idée d'utiliser les ferrofluides dans les paliers est reprise par J. Walker et J. Backmaster en 1979 [114]. En 1983, N. Tiperi décrit les différentes caractéristiques intrinsèques des paliers à ferrofluide et S. Miyake et S. Takahashi approfondissent l'idée d'utiliser les propriétés d'étanchéité et lubrificatrices en 1985 [115]. Cette idée est largement reprise par H. Chang, C. Chi et P. Zhao en 1987 [116]. Certains auteurs s'intéressent alors aux propriétés statiques de ces films de ferrofluide, comme Y. Zhang en 1991 [117] alors que M. C. Miguel et J. M. Rubi étudient le comportement du ferrofluide en régime dynamique [118].

Les applications de l'utilisation des ferrofluides sont nombreuses. C. A. Borghi, A. Cristofolini et M. Fabbri utilisent les ferrofluides dans la conception de pompes [119] alors que H. S. Lee et I. Nakatani étudient la stabilité des ferrofluides fabriqués avec différents surfactants [120].

En 2000, S. Chen, Q. Zhang, H. Chong, T. Komatsu et C. Kang utilisent du ferrofluide dans les imprimantes [121] alors que Q. Zhang, S. Chen, S. Winoto et E. Ong l'emploient pour des moteurs à haute vitesse [122].

D'autres études théoriques portent sur les propriétés macroscopiques du ferrofluide. T. Osman, G. Nada et Z. Safar reprennent l'idée des paliers lubrifiés avec du ferrofluide et établissent des modèles statique et dynamique pour caractériser le ferrofluide en champ confiné [123]. D'un autre côté, G. S. Park et S. H. Park étudient la forme du ferrofluide soumis à des forces extérieures [124][125]. Citons également les travaux de M. Miwa, H. Harita, T. Nishigami, R. Kaneko et H. Unozawa [126] qui déterminent la fréquence caractéristique des particules ferromagnétiques dans le ferrofluide. Cette donnée est d'ailleurs particulièrement intéressante lorsque l'on souhaite décrire théoriquement le phénomène d'agrégation des particules en champ très intense.

Les notions de pression et de force sont employées par M. d'Aquino, G. Miano, C. Serpico, W. Zamboni et G. Coppola en 2003 [127] pour caractériser les propriétés mécaniques des ferrofluides. En 2004, R. C. Shah et M. Bhat exposent un modèle analytique basé sur l'hypothèse d'un champ homogène pour déterminer les propriétés d'un film de ferrofluide dans un palier [128] ainsi que P. Kuzhir en 2008 [129] alors que W. Ochonski étudie les forces d'interaction dans les paliers employant des ferrofluides en 2005 [130].

Au cours de ces années de recherche, certains inconvénients importants sont mis au jour (instabilités, agrégation des particules ferromagnétiques) en régime dynamique, comme le montrent G. Matthies et U. Tobiska en 2005 [131], H. S. Choi, Y. S. Kim, K. T. Kim et I. H. Park [132] en 2008 et A. Ivanov, S. Kantorovich, V. Mendelev et E. Pyanzina en 2006 [133]. Citons aussi les travaux de Y. L. Raikher, V. I. Stepanov, J. C. Bacri et R. Perzynski

en 2005 sur la modélisation du phénomène de relaxation des particules dans les ferrofluides [134].

Historiquement, certains papiers de synthèse retracent bien la problématique des ferrofluides, leurs utilisations, leurs propriétés, comme le montrent C. Holm et J. J. Weiss en 2005 [135] et H. Chetouani, C. Jeandey, V. Haguët, H. Rostaing, C. Dieppedale et G. Reyne en 2006 [136] par des applications originales.

Les publications les plus récentes et qui sont davantage en lien avec la manière dont nous utilisons le ferrofluide dans un haut-parleur sans fer sont celles de S. H. Lee, H. S. Choi, I. H. Park en 2007 qui utilisent les forces de Kelvin pour remonter aux grandeurs mécaniques [137] et G. Lemarquand cette même année qui emploie le joint de ferrofluide pour le guidage d'un piston émissif [84]. Citons également la publication de X. Li, K. Yao et Z. Liu qui s'intéressent à l'utilisation de ferrofluide en champ fort [138], comme c'est le cas dans notre application (on appelle ici champ fort, un champ d'environ 500 kA/m).

Enfin, R. E. Rosensweig, Y. Hirota, S. Tsuda et K. Raj utilisent le ferrofluide comme milieu de transfert thermique pour évacuer la chaleur dégagée par la bobine d'un haut-parleur [139]. Ce haut-parleur est constitué de ses suspensions périphériques, ce qui est différent du prototype développé au LAUM où le ferrofluide est employé pour ses propriétés mécaniques et non pas simplement comme un milieu de transfert thermique.

3.2 Modélisation analytique d'un joint de ferrofluide

Nous exposons ici succinctement les hypothèses descriptives du formalisme basé sur l'énergie magnétique contenue dans le joint de ferrofluide. Les détails des calculs conduisant à la détermination de la forme ([Ravaud-U],[140]), du volume ([Ravaud-L],[141]), de la répartition ([Ravaud-T],[142]) du joint dans un entrefer ainsi que ses raideurs radiale et axiale ([Ravaud-K],[143]) sont détaillés dans les publications des annexes.

3.2.1 Hypothèses du modèle

Les travaux menés durant cette thèse sur la modélisation du joint de ferrofluide d'un haut-parleur sans fer sont étroitement liés aux travaux concernant l'évaluation des champs magnétiques créés par des aimants permanents. En effet, les joints de ferrofluide guidant le piston émissif du haut-parleur sans fer sont soumis à des champs magnétiques forts. Dans ces conditions, les particules ferromagnétiques sont alignées avec le champ magnétique et le champ qu'elles produisent est négligeable par rapport à l'énergie d'interaction entre les particules ferromagnétiques et le champ magnétique créé par les aimants permanents. L'énergie gravitationnelle et l'énergie thermique ne jouent également aucun rôle dans les propriétés mécaniques du joint de ferrofluide.

Nous partons alors de l'équation de Bernoulli généralisée qui est utilisée en ferrohydrodynamique [112].

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p^* + \mu_0 M \vec{\nabla} H + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (3.1)$$

où ρ est la densité volumique du ferrofluide, $\vec{v}$ est la vitesse de déplacement du ferrofluide (régime dynamique), p^* désigne une pression (pression atmosphérique, pression de capillarité, tension de surface), μ_0 est la perméabilité du vide, M est la magnétisation moyenne du ferrofluide, $\vec{H}$ est le champ magnétique créé par la structure extérieure au ferrofluide, $\vec{g}$ est l'accélération de la gravité. Cette équation peut être vue comme une généralisation de l'équation de Navier-Stokes. Le terme $\mu_0 M \vec{\nabla} H$ décrit l'interaction entre le champ magnétique créé par une structure extérieure au ferrofluide (aimants permanents) et les particules ferromagnétiques. Notre fluide est étudié en régime statique dans l'ensemble de nos travaux. En conséquence, l'équation (3.1) s'écrit :

$$0 = -\vec{\nabla} p^* + \mu_0 M \vec{\nabla} H + \rho \vec{g} \quad (3.2)$$

L'intégration de l'équation précédente entraîne :

$$A = -p^* + \mu_0 M H + \rho g h \quad (3.3)$$

où A désigne une constante et h la hauteur du ferrofluide. Dans nos conditions expérimentales, la tension de surface ne joue aucun rôle car le champ est très intense (supérieur à 1.2 T). Dans ces conditions, le ferrofluide est saturé et peut être considéré du point de vue macroscopique comme une distribution dipolaire continue. Sa magnétisation moyenne est alors vue comme une magnétisation saturée et est notée M_s

$$\bar{M} = \frac{1}{H} \int_0^H M dH = M_s \quad (3.4)$$

La tension de surface intervient généralement dans un terme décrivant la pression de capillarité. Dans notre application en champ fort (entre 1 à 1.2 T), cette pression de capillarité est négligeable devant le terme $\mu_0 M H$. Par ailleurs, la pression normale de traction est également négligeable. Le ferrofluide sature à 32 kA/m alors que le champ magnétique que nous utilisons dépasse les 400 kA/m ; dans ces conditions, la valeur de la pression est plus grande que 12800 N/m². D'un autre côté, la tension de surface est bien réelle. Cependant, quand on prend en compte à la fois la valeur du coefficient de surface, S , (S vaut 0.0256 kg/s² pour les ferrofluides utilisés) et le rayon de courbure, l'effet de la tension de surface peut être négligé : ce dernier ne déforme pas le ferrofluide en champ fort. De ce fait, la pression totale en un point du ferrofluide devient (à une constante A près, qui est choisie nulle) :

$$p = p^* \quad (3.5)$$

Par ailleurs, les particules ferromagnétiques sont alignées avec le champ magnétique extérieur. De plus, pour un très petit volume de ferrofluide, la gravité n'intervient pas dans l'équation de Bernoulli. On obtient alors :

$$p = \mu_0 \vec{M}_s \cdot \vec{H} = \mu_0 M_s H \quad (3.6)$$

En résumé, notre modèle est basé sur la détermination de la pression magnétique dans le joint qui s'exprime en fonction de l'aimantation saturée du ferrofluide et du champ inhomogène dans lequel est baigné le ferrofluide.

3.2.2 Exemple de calcul pour une configuration à deux anneaux aimantés radialement

L'équation (3.6) est utilisée pour évaluer les propriétés mécaniques d'un joint de ferrofluide, le volume qu'il occupe dans l'espace (par exemple un entrefer) et la forme qu'il épouse sous le champ magnétique. Notons que cette équation n'est valide que lorsque le ferrofluide est soumis à un champ fort (de l'ordre de 1.2 T), comme c'est le cas du haut-parleur sans fer guidé par joints de ferrofluide.

Nous donnons à titre d'illustration un exemple de configuration étudiée pendant cette thèse. Considérons la configuration présentée à la figure 3.1. Ce système est composé de deux anneaux aimantés radialement et dont les polarisations sont opposées, d'un piston émissif sans fer qui est centré radialement et d'un joint de ferrofluide utilisé pour le positionnement et le centrage radial du piston émissif. La pression en tout point de l'espace est alors calculée à partir de l'équation suivante :

$$|p(r, z)| = \mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H}(r, z) \quad (3.7)$$

où μ_0 est la perméabilité du vide, $\mathbf{M}_s$ est l'aimantation saturée des particules ferromagnétiques et $\mathbf{H}(r, z)$ est le champ magnétique créé par la structure cylindrique. Du fait de la symétrie cylindrique, la pression magnétique ne dépend pas de l'angle θ mais seulement des deux paramètres r et z .

$$p(r, z) = \mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \vec{H}(r, z) = \mu_0 M_s \sqrt{H_r(r, z)^2 + H_z(r, z)^2} \quad (3.8)$$

Nous utilisons la fonction suivante pour le champ magnétique créé par les deux anneaux aimantés radialement :

$$H_r(r, z) = \frac{\sigma^*}{\pi \mu_0} i(1 + u) (\varsigma(u_1) - \varsigma(u_2)) \quad (3.9)$$

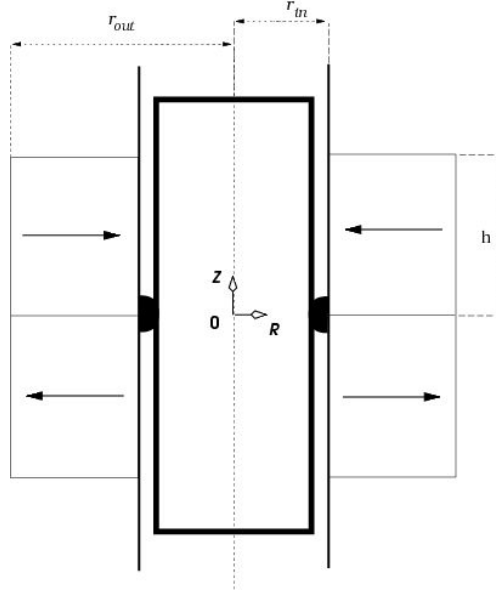


FIGURE 3.1 – Configuration à deux anneaux aimantés radialement dont les polarisations sont opposées avec un piston émissif sans fer et un joint de ferrofluide

avec

$$\begin{aligned}
 \varsigma(u) = & \frac{\xi_1(-(a_1 d + b_1(c + e_1))) F^* \left[i \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{-c+d-e_1}}{\sqrt{c+e_1+du}} \right], \frac{c+d+e_1}{c-d+e_1} \right]}{d \sqrt{-c+d-e_1} e_1 \sqrt{\frac{d(1+u)}{c+e_1+du}} \sqrt{1-u^2}} \\
 & + \frac{\xi_1(b_1 c - a_1 d) \Pi^* \left[\frac{e_1}{c-d+e_1}, i \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{-c+d+e_1}}{\sqrt{c+e_1+du}} \right], \frac{c+d+e_1}{c-d+e_1} \right]}{d \sqrt{-c+d-e_1} e_1 \sqrt{\frac{d(1+u)}{c+e_1+du}} \sqrt{1-u^2}} \\
 & + \frac{\xi_2(-(a_2 d + b_2(c + e_2))) F^* \left[i \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{-c+d-e_2}}{\sqrt{c+e_2+du}} \right], \frac{c+d+e_2}{c-d+e_2} \right]}{d \sqrt{-c+d-e_2} e_2 \sqrt{\frac{d(1+u)}{c+e_2+du}} \sqrt{1-u^2}} \\
 & + \frac{\xi_2(b_2 c - a_2 d) \Pi^* \left[\frac{e_2}{c-d+e_2}, i \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{-c+d+e_2}}{\sqrt{c+e_2+du}} \right], \frac{c+d+e_2}{c-d+e_2} \right]}{d \sqrt{-c+d-e_2} e_2 \sqrt{\frac{d(1+u)}{c+e_2+du}} \sqrt{1-u^2}} \\
 & - \frac{\eta_3((a_3 d - b_3 e_3)) F^* \left[i \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{-d-e_3}}{\sqrt{e_3+du}} \right], \frac{-d-e_3}{d+e_3} \right]}{d \sqrt{-d-e_3} (-c + e_3) \sqrt{\frac{d(1+u)}{e_3+du}} \sqrt{1-u^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta_3(b_3c - a_3d)\Pi^* \left[\frac{-c+e_3}{d+e_3}, i \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{-d+e_3}}{e_3+du} \right], \frac{-d+e_3}{d+e_3} \right]}{d\sqrt{-d-e_3}(-c+e_3)\sqrt{\frac{d(1+u)}{e_3+du}}\sqrt{1-u^2}} \\
& - \frac{\eta_4(a_4d - b_4e_4)F^* \left[i \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{-d-e_4}}{\sqrt{e_4+du}} \right], \frac{-d+e_4}{d+e_4} \right]}{d\sqrt{-d-e_4}(c+e_4)\sqrt{\frac{d(1+u)}{e_4+du}}\sqrt{1-u^2}} \\
& - \frac{\eta_4(b_4c - a_4d)\Pi^* \left[\frac{-c+e_4}{d+e_4}, i \sinh^{-1} \left[\frac{\sqrt{-d-e_4}}{e_4+du} \right], \frac{-d+e_4}{d+e_4} \right]}{d\sqrt{-d-e_4}(-c+e_4)\sqrt{\frac{d(1+u)}{e_4+du}}\sqrt{1-u^2}}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Par ailleurs, la composante axiale s'écrit dans notre configuration :

$$\begin{aligned}
H_z(r, z) = & \frac{\sigma^*}{\pi\mu_0} \left(-r_{in} \frac{K^* \left[\frac{-4rr_{in}}{(r-r_{in})^2+z^2} \right]}{\sqrt{(r-r_{in})^2+z^2}} \right) \\
& + \frac{\sigma^*}{\pi\mu_0} \left(r_{in} \frac{K^* \left[\frac{-4rr_{in}}{(r-r_{in})^2+(z-h)^2} \right]}{\sqrt{(r-r_{in})^2+(z-h)^2}} \right) \\
& - \frac{\sigma^*}{\pi\mu_0} \left(r_{in} \frac{K^* \left[\frac{-4rr_{in}}{(r-r_{in})^2+z^2} \right]}{\sqrt{(r-r_{in})^2+z^2}} \right) \\
& + \frac{\sigma^*}{\pi\mu_0} \left(r_{in} \frac{K^* \left[\frac{-4rr_{in}}{(r-r_{in})^2+(z+h)^2} \right]}{\sqrt{(r-r_{in})^2+(z+h)^2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\xi_i = \sqrt{\frac{d(-1+u)}{c+e_i+du}} \tag{3.12}$$

$$\eta_i = \sqrt{\frac{d(-1+u)}{e_i+du}} \tag{3.13}$$

Les paramètres utilisés dans (3.10) sont définis à la table 3.1.

Ainsi, le terme $\vec{H}(r, z)$ doit être évalué précisément de façon à calculer les propriétés mécaniques du joint de ferrofluide guidant le piston émissif du haut-parleur sans fer.

3.2.3 Validation du modèle

Notre modèle a été validé expérimentalement dans le cas d'une configuration à deux anneaux, comme le montre schématiquement la figure 3.2.

Paramètres	
a_1	$r_{in}rz$
b_1	$-r_{in}^2z$
c	$r^2 + r_{in}^2$
d	$-2rr_{in}$
e_1	z^2
a_2	$-r_{in}r(z - h)$
b_2	$r_{in}^2(z - h)$
e_2	$(z - h)^2$
a_3	$r_{in}rz$
b_3	$-r_{in}^2z$
e_3	$r^2 + r_{in}^2 + z^2$
a_4	$r_{in}r(-z - h)$
b_4	$-r_{in}^2(-z - h)$
e_4	$r^2 + r_{in}^2 + (z + h)^2$

TABLE 3.1 – Définition des paramètres utilisés dans (3.10)

Le dispositif expérimental est représenté à la figure 3.2. La partie statique est constituée de deux rangées de tuiles aimantées transversalement (et qui forment deux anneaux supposés aimantés radialement en première approximation). Le diamètre intérieur des anneaux est de $D = 49.7$ mm. Le diamètre du piston central est de $d = 49.0$ mm. L'épaisseur du joint de ferrofluide est de 0.35 mm. Notons que le ferrofluide est placé en dernier, une fois que le piston central est disposé dans le dispositif. Le ferrofluide utilisé est le Ferrotec-APGW05 donc le $\mu_0 M_s$ vaut 40 mT.

L'objectif de la manipulation est d'appliquer deux forces aux extrémités du piston central F_1 et F_2 qui assurent un déplacement radial, comme le montre la figure 3.3. Notons que, dans ces conditions, le rayon extérieur r_{out} du cylindre central vérifie la relation suivante :

$$r_{out}(\theta) = r_0 + e \cos(\theta). \quad (3.14)$$

où r_0 désigne le rayon du piston émissif et e le décalage radial. On utilise par ailleurs un miroir avec une grille et un faisceau laser pour s'assurer que le mouvement du cylindre central s'effectue dans une seule direction (mouvement de translation pure).

Deux capteurs de force sont utilisés pour mesurer la force de rappel du joint de ferrofluide en fonction du déplacement du piston central. Nous donnons ici à la figure 3.4 les résultats expérimentaux pour un volume de ferrofluide de 105 mm³.

A l'aide de notre modèle de pression, nous pouvons déterminer l'énergie magnétique dans le joint de ferrofluide. Pour cela, nous utilisons la relation suivante qui tient compte du

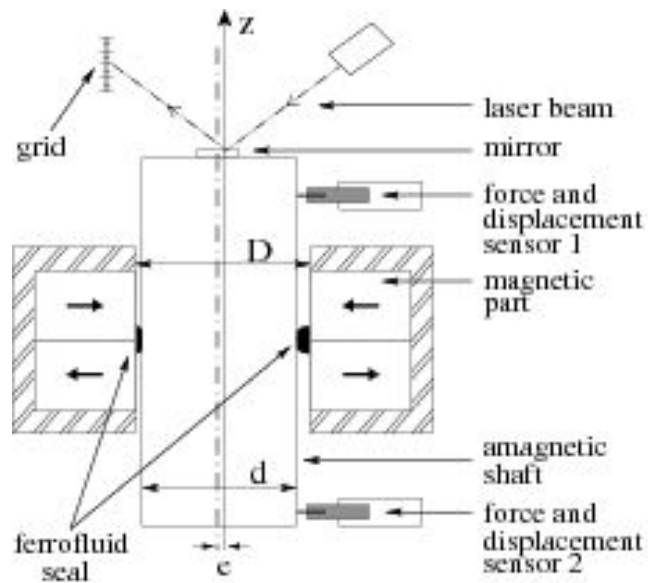


FIGURE 3.2 – Représentation schématique du dispositif expérimental pour mesurer la raideur radiale d'un joint de ferrofluide

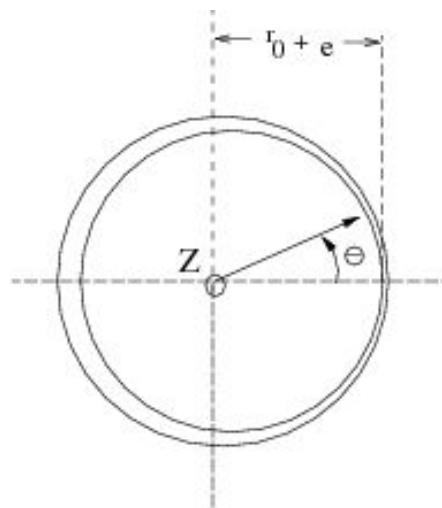


FIGURE 3.3 – Décalage radial du pison central pour le calcul de la raideur radiale du joint de ferrofluide

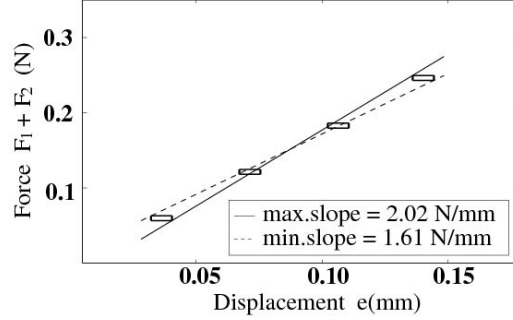


FIGURE 3.4 – Résultats expérimentaux de la mesure de la force en fonction du décalage radial du piston central ; $D = 49.7 \text{ mm}$, $d = 49.0 \text{ mm}$, $\mu_0 M_s = 40 \text{ mT}$, $h = 0.02 \text{ m}$

Volume	$\mu_0 M_s$	k_{theo}	k_{exp}
105 mm^3	40 mT	1.85 kN/m	$1.82 \pm 0.21 \text{ kN/m}$

TABLE 3.2 – Résultats expérimentaux et théoriques pour la détermination de la raideur d'un joint de ferrofluide

décentrage du piston central :

$$\Delta E_m = \int_0^{2\pi} \int_{r_0+e \cos(\theta)}^{r_{in}} \int_{-z_0}^{z_0} p_m(r, z) r dr d\theta dz - \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_{in}} \int_{-z_0}^{z_0} p_m(r, z) r dr d\theta dz \quad (3.15)$$

où r_{in} est le rayon intérieur de l'anneau, $2z_0$ est la hauteur du joint de ferrofluide au contact des deux anneaux aimantés radialement. Ainsi, la densité d'énergie magnétique contenue dans le joint de ferrofluide peut être représentée en tout point de l'espace de façon très rapide puisque sa formulation est analytique. La figure 3.5 montre la répartition de la densité d'énergie magnétique dans le joint de ferrofluide avec les mêmes dimensions que celles choisies pour l'expérimentation. Le travail de la force de rappel est égal à la variation de l'énergie magnétique dans le joint de ferrofluide. On suppose en première approximation que cette force est proportionnelle au déplacement e du piston

$$F_r = \frac{\Delta E_m}{2e} \quad (3.16)$$

La raideur théorique k_{theo} se déduit alors directement en calculant le rapport $\frac{F_r}{e}$. Les résultats expérimentaux et théoriques sont donnés à la table 3.2.

La table 3.2 montre un bon accord entre le modèle théorique et les mesures expérimentales ([Ravaud-Q],[144]).

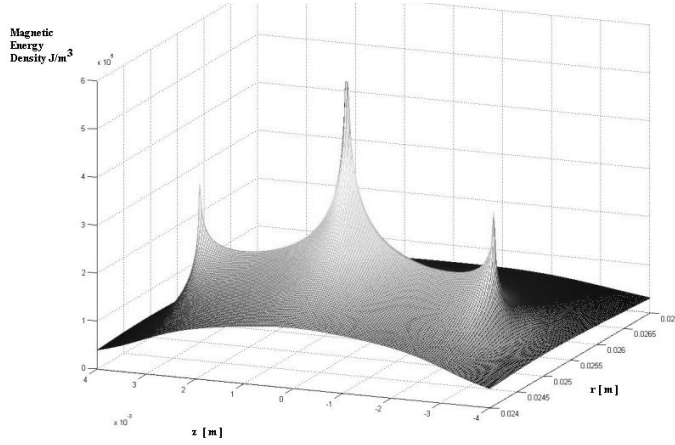


FIGURE 3.5 – Représentation de la densité d'énergie magnétique en tout point de l'espace dans l'entrefer ; $D = 49.7 \text{ mm}$, $d = 49.0 \text{ mm}$, $\mu_0 M_s = 40 \text{ mT}$, $h = 0.02 \text{ m}$

3.2.4 Prédiction des propriétés mécaniques d'un joint de ferrofluide

Un premier paramètre important à déterminer pour modéliser une structure à aimants permanents utilisant du ferrofluide est le volume qu'il occupe dans l'entrefer. Le ferrofluide étant un produit cher (plusieurs milliers d'euros le litre), il est fondamental de connaître exactement le volume optimal de ferrofluide à utiliser en fonction des dimensions du système.

Notre modèle nous permet de reconstruire le volume occupé par un ferrofluide dans un entrefer donné. A titre d'illustration, nous donnons la représentation 3D d'un joint de ferrofluide soumis à un champ magnétique créé par deux anneaux aimantés, de polarisations radiales opposées ($J = 1 \text{ T}$). Le rayon intérieur est 0.025 m et la hauteur de chaque anneau vaut 0.003 m .

Ainsi, la formulation analytique de la pression dans le joint de ferrofluide permet de prédire, pour des dimensions données, la forme épousée par un volume de ferrofluide donné ([Ravaud-L],[141]).

Dans un second temps, ce modèle est utilisé pour prédire la raideur axiale du joint de ferrofluide soumis à la fois à un champ fort et à un piston non cylindrique ([Ravaud-K],[143]). La démarche utilisée repose sur l'utilisation des propriétés géométriques liées à la forme des iso-champs avec lesquels les particules ferromagnétiques sont alignées. Un critère important d'optimisation consiste à déterminer la forme du piston émissif pour laquelle la force de rappel de ce piston soit proportionnelle au déplacement de la bobine.

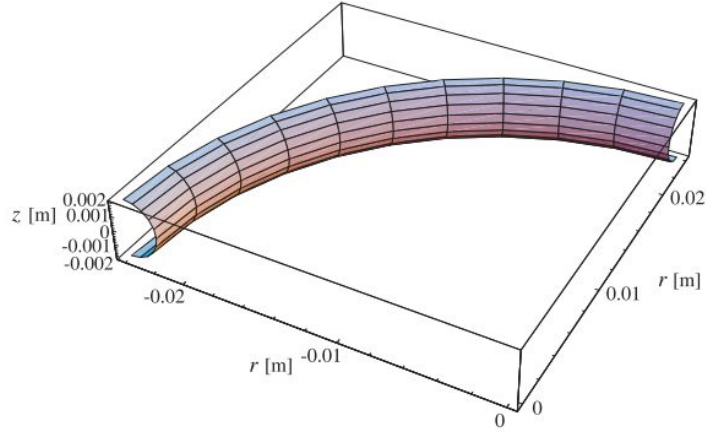


FIGURE 3.6 – Représentation 3D d'un joint de ferrofluide soumis à un champ magnétique produit par deux anneaux aimantés, de polarisations opposées dont le module vaut 1 T et de hauteurs 3 mm. Le rayon intérieur vaut 0.025 m

3.2.5 Optimisations de dispositifs à aimants permanents

L'intérêt d'utiliser une approche analytique basée sur la connaissance précise du champ magnétique créé par des structures cylindriques réside dans la facilité avec laquelle ces structures peuvent être optimisées. D'une part, les temps de calculs sont très courts (de l'ordre de quelques secondes), par ailleurs, des études paramétriques sont facilement mises en oeuvre.

On illustre ceci en étudiant l'influence de la hauteur d'un anneau aimanté radialement sur la forme du joint de ferrofluide. On utilise pour ceci trois anneaux aimantés radialement, comme le montre la figure 3.7.

On utilise les dimensions suivantes : $r_{in} = 0.025$ m, $J = 1$ T, la hauteur des anneaux du haut et du bas est de 3 mm, le rayon extérieur est $r_{out} = 0.028$ m et est gardé fixe pour les simulations analytiques.

Une étude paramétrique sur l'anneau central permet de prédire quelle hauteur de l'anneau du milieu induit un ou deux joints de ferrofluide en fonction des dimensions des autres anneaux, pour un volume de ferrofluide donné. Par exemple, lorsque la hauteur de l'anneau central vaut $h = 0.003$ m (figure 3.7-(a)), il est possible d'obtenir deux joints de ferrofluide. Lorsque la hauteur de l'anneau central diminue et vaut la moitié de la hauteur des anneaux inférieur et supérieur (figure 3.7-(d)), il est moins aisé d'obtenir deux joints de ferrofluide.

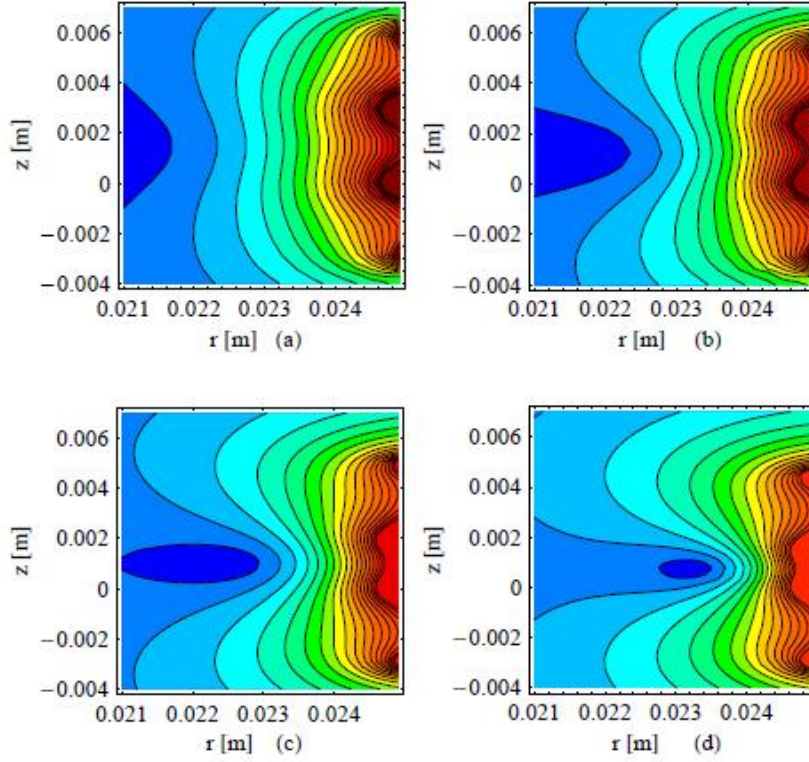


FIGURE 3.7 – Coupe de la pression magnétique dans un joint de ferrofluide soumis à un champ créé par trois anneaux aimantés radialement, $r_{in} = 0.025$ m, $J = 1.5$ T ; les couleurs les plus chaudes correspondent aux régions de l'espace pour lesquelles la pression magnétique est la plus forte ; de haut en bas et de gauche à droite : on diminue la hauteur h de l'anneau du milieu : (a) $h = 0.003$ m, (b) $h = 0.0025$ m, (c) $h = 0.002$ m, (d) $h = 0.0015$ m, la hauteur des deux autres aimants vaut 0.003 m.

Ces travaux ([Ravaud-T],[142]) montrent l'intérêt d'utiliser notre modèle à des fins d'optimisations de structures sans fer utilisant des joints de ferrofluide.

Chapitre 4

Conclusion

L'utilisation d'approches analytiques tridimensionnelles permet de construire des modèles exacts pour concevoir et optimiser des structures à aimants permanents.

En particulier, les expressions du champ magnétique créé par des anneaux ou des tuiles sont utilisées pour modéliser différents systèmes à aimants permanents. Certains travaux exposent les formulations analytiques des champs créés par ces anneaux et démontrent la nécessité d'utiliser un formalisme tridimensionnel qui tient compte de la courbure des aimants. Par ailleurs, de tels modèles sont plus appropriés que les méthodes totalement numériques pour réaliser des études paramétriques.

Une partie importante des travaux réalisés tout au long de cette thèse montre les effets de l'aimantation uniforme des tuiles sur le champ magnétique produit. Ces tuiles correspondent aux aimants à base de néodyme-fer-bore (aimants modernes) qui sont utilisés du fait de leurs propriétés magnétiques remarquables (rectangularité de leur cycle d'aimantation, aimantation rémanente). L'uniformité de la polarisation des tuiles engendre des ondulations de champ dans les machines électriques et abaisse la qualité de la transmission dans les accouplements magnétiques. Ces approches analytiques mettent en lumière les cas où les formulations ne peuvent s'écrire en fonction d'intégrales elliptiques classiques dans l'approche coulombienne. Ces modèles sont utilisés pour reconstruire le champ magnétique créé par des structures de Halbach, en particulier celles dédiées à l'Imagerie par Résonance Magnétique. Ils permettent de prédire théoriquement les ondulations de champ résultant de l'uniformité des tuiles alors que les modèles linéarisés ne permettent pas de les décrire.

Les configurations étudiées pendant cette thèse sont données à la figure 4.1 où le point majeur est la comparaison entre l'approche coulombienne et l'approche ampérienne ; on note IE = Intégrales Elliptiques, IENC = Intégrales Elliptiques Non Classiques. Les cases au fond rouge désignent les cas où la formulation est soit totalement analytique soit basée

sur des intégrales elliptiques classiques (de première, seconde et troisième espèce). Les cases au fond orange désignent les cas où la formulation est basée sur des intégrales elliptiques non classiques dans l'approche coulombienne. Les cases au fond vert désignent les configurations qui n'ont pas encore été étudiées. On donne également les références bibliographiques associées à chaque structure.

Ces travaux conduisent à penser que le choix du modèle pour calculer le champ créé par un aimant est primordial. Par exemple, l'approche ampérienne est plus appropriée que l'approche coulombienne pour calculer le champ magnétique créé par un anneau aimanté radialement et une tuile aimantée radialement. Par ailleurs, les expressions établies tout au long de cette thèse montrent des corrélations fortes sur les fonctions spéciales utilisées.

Les approches analytiques permettent également d'optimiser le moteur d'un nouveau type de haut-parleur sans fer développé au LAUM. Les anneaux aimantés radialement étant souvent remplacés par des tuiles aimantées à la fois uniformément et radialement, le nombre de tuiles utilisées est un critère important pour concevoir des transducteurs électromécaniques. Les modèles établis permettent de prévoir, pour un nombre de tuiles donné, la forme et le taux d'ondulation du champ radial dans les entrefers de tels transducteurs.

Nos modèles analytiques sont également appliqués à des dispositifs d'accouplements magnétiques et de paliers magnétiques. Des études paramétriques montrent l'intérêt d'utiliser ces approches analytiques afin d'optimiser la raideur dans les paliers passifs ou le couple transmis dans les accouplements à entrefers plan ou cylindrique. Par ailleurs, la formulation tridimensionnelle est indispensable pour connaître le positionnement relatif exact entre deux anneaux aimantés pour lequel la force est la plus élevée.

Ces expressions analytiques du champ sont aussi employées pour étudier les propriétés d'un joint de ferrofluide guidant le piston émissif d'un haut-parleur sans fer. Un modèle 3D, basé sur l'énergie contenue dans un joint de ferrofluide, nous conduit à dimensionner les moteurs de haut-parleurs sans fer et la quantité de ferrofluide à utiliser. Ce modèle, vérifié expérimentalement, est déterminé lorsque le ferrofluide est soumis à des champs magnétiques forts, ce qui est généralement le cas dans les haut-parleurs sans fer ou pour les paliers employant du ferrofluide.

Les différents modèles établis ont donc pour objectif d'être utilisés pour la conception et l'optimisation de dispositifs de toute taille, en particulier les dispositifs miniatures où les effets de courbure sont prépondérants. La philosophie de l'utilisation d'approches analytiques est clairement justifiée par les temps de calcul très courts pour réaliser des optimisations paramétriques. De plus, de tels modèles comportent des informations fondamentales sur la topologie du champ.

Topologie	Aimantation	Composantes du champ	Approche	Formulation	Apports de cette thèse	Références (formulations réduites)
Parallélépipédique	Collinéaire à un plan	Hx	Coulombienne	Analytique		[2]
		Hy	Coulombienne	Analytique		[2]
		H _z	Coulombienne	Analytique		[2]
Annulaire	Radiale	H _r	Coulombienne	Semi-analytique	[68]	
		H _{theta}	Coulombienne	Semi-analytique	[68]	
		H _z	Ampérienne	Analytique + IE	[69]	
	Axiale	H _z	Ampérienne	Semi-analytique	[69]	
		H _r	Coulombienne	Analytique + IE	[66]	
		H _z	Coulombienne	Analytique + IE	[66]	
		H _r	Ampérienne	Analytique + IE		[46]
		H _z	Ampérienne	Analytique + IE		[46]
		H _r	Coulombienne	Semi-analytique	[67]	
		H _{theta}	Coulombienne	Analytique	[67]	
		H _z	Coulombienne	Semi-analytique	[67]	
		H _r	Ampérienne	Analytique + IE	[69]	
Tuile	Radiale	H _{theta}	Ampérienne	Analytique	[69]	
		H _z	Ampérienne	Semi-analytique	[69]	
		H _r	Coulombienne	Analytique + IE	[71]	
		H _{theta}	Coulombienne	Analytique	[71]	
		H _z	Coulombienne	Analytique + IE	[71]	
		H _r	Ampérienne		x	x
		H _{theta}	Ampérienne		x	x
		H _z	Ampérienne		x	x
	Orthoradiale	H _r	Coulombienne	Analytique	[73]	
		H _{theta}	Coulombienne	Analytique	[73]	
		H _z	Coulombienne	Analytique	[73]	
		H _r	Ampérienne		x	x
		H _{theta}	Ampérienne		x	x
		H _z	Ampérienne		x	x
	Transversale (Uniforme et Radiale)	H _r	Coulombienne	Analytique + IENC	[72]	
		H _{theta}	Coulombienne	Analytique + IENC	[72]	
		H _z	Coulombienne	Analytique + IENC	[72]	
	Uniforme et orthoradiale	H _r	Coulombienne	Analytique + IENC	[74]	
		H _{theta}	Coulombienne	Analytique + IENC	[74]	
		H _z	Coulombienne	Analytique + IENC	[74]	
	Uniforme et arbitraire dans un plan	H _r	Coulombienne	Analytique + IENC	[76,77]	
		H _{theta}	Coulombienne	Analytique + IENC	[76,77]	
		H _z	Coulombienne	Analytique + IENC	[76,77]	

FIGURE 4.1 – Synthèse des configurations d'aimant étudiées dans cette thèse à l'aide de l'approche coulombienne et de l'approche ampérienne

Bibliographie

- [1] E. Durand, *Magnétostatique*. Masson Editeur, Paris, France, 1968.
- [2] P. Brissonneau, *Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique*. hermes ed., 1997.
- [3] E. du Trémolet de Lacheisserie, *Magnétisme : fondements*. edp sciences ed., 2000.
- [4] E. du Trémolet de Lacheisserie, *Magnétisme : matériaux et applications*. edp sciences ed., 2000.
- [5] G. Akoun and J. P. Yonnet, "3d analytical calculation of the forces exerted between two cuboidal magnets," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 20, no. 5, pp. 1962–1964, 1984.
- [6] J. P. Yonnet, "Permanent magnet bearings and couplings," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 17, no. 1, pp. 1169–1173, 1981.
- [7] J.-P. Yonnet, "Etude des paliers magnétiques passifs." These d'Etat ES Sciences, 1980.
- [8] J. P. Yonnet, "A new type of permanent-magnet coupling," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 17, no. 6, pp. 2991–2993, 1981.
- [9] J. P. Yonnet, "Passive magnetic bearings with permanent magnets," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 14, no. 5, pp. 803–805, 1978.
- [10] B. Azzerboni, E. Cardelli, and A. Tellini, "Computation of the magnetic field in massive conductor systems," *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 25, no. 6, pp. 4462–4473, 1989.
- [11] M. Marinescu and N. Marinescu, "Anisotropy effects in permanent multiple magnets," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 20, no. 5, pp. 3882–3884, 1984.
- [12] M. Marinescu and N. Marinescu, "Compensation of anisotropy effects in flux-confining permanent-magnet structures," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 25, no. 5, pp. 3899–3901, 1989.
- [13] M. Marinescu and N. Marinescu, "New concept of permanent-magnet excitation for electrical machines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, pp. 1390–1393, 1992.
- [14] J. P. Yonnet, G. Lemarquand, S. Hemmerlin, and E. Rulliere, "Stacked structures of passive magnetic bearings," *J. Appl. Phys.*, vol. 70, no. 10, pp. 6633–6635, 1991.
- [15] J. P. Yonnet, S. Hemmerlin, E. Rulliere, and G. Lemarquand, "Analytical calculation of permanent magnet couplings," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 6, pp. 2932–2934, 1993.

- [16] J. Delamare, E. Rulliere, and J. P. Yonnet, "Classification and synthesis of permanent magnet bearing configurations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 6, pp. 4190–4192, 1995.
- [17] F. Bancel and G. Lemarquand, "Three-dimensional analytical optimization of permanent magnets alternated structure," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 1, pp. 242–247, 1998.
- [18] M. Berkouk, V. Lemarquand, and G. Lemarquand, "Analytical calculation of ironless loudspeaker motors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no. 2, pp. 1011–1014, 2001.
- [19] J. F. Charpentier and G. Lemarquand, "Optimization of unconventional p.m. couplings," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp. 1093–1096, 2002.
- [20] J. F. Charpentier, V. Lemarquand, and G. Lemarquand, "A study of permanent-magnet couplings with progressive magnetization using analytical exact formulation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no. 5, pp. 4206–4217, 1999.
- [21] P. Elies and G. Lemarquand, "Analytical study of radial stability of permanent magnet synchronous couplings," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no. 4, pp. 2133–2136, 1999.
- [22] V. Lemarquand, J. F. Charpentier, and G. Lemarquand, "Nonsinusoidal torque of permanent-magnet couplings," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no. 5, pp. 4200–4205, 1999.
- [23] S. M. Huang and C. K. Sung, "Analytical analysis of magnetic couplings with parallelepiped magnets," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 239, pp. 614–616, 2002.
- [24] A. E. Marble, "Strong, stray static magnetic fields," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 5, pp. 576–580, 2008.
- [25] B. Azzerboni, E. Cardelli, M. Raugi, A. Tellini, and G. Tina, "Analytic expressions for magnetic field from finite curved conductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 27, no. 2, pp. 750–757, 1991.
- [26] B. Azzerboni and E. Cardelli, "Magnetic field evaluation for disk conductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 6, pp. 2419–2421, 1993.
- [27] M. M. Nagrial, "Design optimization of magnetic couplings using high energy magnets," *Electric Power Components and Systems*, vol. 21, no. 1, pp. 115–126, 1993.
- [28] E. P. Furlani, S. Reznik, and A. Kroll, "A three-dimensional field solution for radially polarized cylinders," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 1, pp. 844–851, 1995.
- [29] E. P. Furlani and M. Knewston, "A three-dimensional field solution for permanent-magnet axial-field motors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 3, pp. 2322–2325, 1997.
- [30] E. P. Furlani, "Field analysis and optimization of ndfeb axial field permanent magnet motors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 5, pp. 3883–3885, 1997.
- [31] E. P. Furlani, "A formula for the levitation force between magnetic disks," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 6, pp. 4165–4169, 1993.

- [32] E. P. Furlani, "Formulas for the force and torque of axial couplings," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 5, pp. 2295–2301, 1993.
- [33] R. Wang, E. P. Furlani, and Z. J. Cendes, "Design and analysis of a permanent-magnet axial coupling using 3d finite element field computation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 4, pp. 2292–2295, 1994.
- [34] E. P. Furlani, "A two-dimensional analysis for the coupling of magnetic gears," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 3, pp. 2317–2321, 1997.
- [35] E. P. Furlani and T. S. Lewis, "A two-dimensional model for the torque of radial couplings," *Int J. Appl. Elec. Mech.*, vol. 6, no. 3, pp. 187–196, 1995.
- [36] E. P. Furlani, R. Wang, and H. Kusnadi, "A three-dimensional model for computing the torque of radial couplings," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 5, pp. 2522–2526, 1995.
- [37] E. P. Furlani, "Analysis and optimization of synchronous magnetic couplings," *J. Appl. Phys.*, vol. 79, no. 8, pp. 4692–4694, 1996.
- [38] E. P. Furlani, *Permanent Magnet and Electromechanical Devices : Materials, Analysis and Applications*. Academic Press, 2001.
- [39] S. I. Babic and M. M. Gavrilovic, "New expression for calculating magnetic fields due to current-carrying solid conductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 5, pp. 4134–4136, 1997.
- [40] E. Varga and A. Beyer, "Magnetic field of a uniformly magnetized hollow cylinder," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 3, pp. 613–618, 1998.
- [41] S. I. Babic, C. Akyel, and M. M. Gavrilovic, "Calculation improvement of 3d linear magnetostatic field based on fictitious magnetic surface charge," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 5, pp. 3125–3127, 2000.
- [42] S. I. Babic, C. Akyel, S. Salon, and S. Kincic, "New expressions for calculating the magnetic field created by radial current in massive disks," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp. 497–500, 2002.
- [43] S. I. Babic, C. Akyel, and S. Salon, "New procedures for calculating the mutual inductance of the system : filamentary circular coil-massive circular solenoid," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, no. 3, pp. 1131–1134, 2003.
- [44] S. I. Babic, S. Salon, and C. Akyel, "The mutual inductance of two thin coaxial disk coils in air," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 822–825, 2004.
- [45] S. I. Babic and C. Akyel, "An improvement in the calculation of the magnetic field for an arbitrary geometry coil with rectangular cross section," *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 18, pp. 493–504, November 2005.
- [46] M. Lang, "Fast calculation method for the forces and stiffnesses of permanent-magnet bearings," *8th International Symposium on Magnetic Bearing*, pp. 533–537, 2002.

- [47] O. M. Kwon, C. Surussavadee, M. V. K. Chari, S. Salon, and K. S. Vasubramaniam, "Analysis of the far field of permanent magnet motors and effects of geometric asymmetries and unbalance in magnet design," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 3, pp. 435–442, 2004.
- [48] J. P. Selvaggi, S. Salon, O. M. Kwon, and M. V. K. Chari, "Calculating the external magnetic field from permanent magnets in permanent-magnet motors - an alternative method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 5, pp. 3278–3285, 2004.
- [49] J. P. Selvaggi, S. Salon, O. M. Kwon, and M. V. K. Chari, "Computation of the three-dimensional magnetic field from solid permanent-magnet bipolar cylinders by employing toroidal harmonics," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 10, pp. 3833–3839, 2007.
- [50] J. P. Selvaggi, S. Salon, O. M. Kwon, M. V. K. Chari, and M. DeBortoli, "Computation of the external magnetic field, near-field or far-field from a circular cylindrical magnetic source using toroidal functions," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 4, pp. 1153–1156, 2007.
- [51] H. L. Rakotoarison, J. P. Yonnet, and B. Delinchant, "Using coulombian approach for modeling scalar potential and magnetic field of a permanent magnet with radial polarization," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 4, pp. 1261–1264, 2007.
- [52] E. Perigo, R. Faria, and C. Motta, "General expressions for the magnetic flux density produced by axially magnetized toroidal permanent magnets," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 10, pp. 3826–3832, 2007.
- [53] Y. Zhilichev, "Calculation of magnetic field of tubular permanent magnet assemblies in cylindrical bipolar coordinates," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 7, pp. 3189–3195, 2007.
- [54] J. Conway, "Inductance calculations for noncoaxial coils using bessel functions," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 3, pp. 1023–1034, 2007.
- [55] J. Conway, "Noncoaxial inductance calculations without the vector potential for axisymmetric coils and planar coils," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 4, pp. 453–462, 2008.
- [56] H. A. Leupold, E. P. II, and M. G. Abele, "Applications of yokeless flux confinement," *J. Appl. Phys.*, vol. 64, no. 3, 1988.
- [57] M. Abele, J. Jensen, and H. Rusinek, "Generation of uniform high fields with magnetized wedges," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 5, pp. 3874–3876, 1997.
- [58] M. Abele and H. A. Leupold, "A general method for flux confinement in permanent magnet structure," *J. Appl. Phys.*, vol. 64, no. 10, pp. 5988–5990, 1988.
- [59] M. Aydin, Z. Zhu, T. Lipo, and D. Howe, "Minimization of cogging torque in axial-flux permanent-magnet machines : design concepts," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 9, pp. 3614–3622, 2007.

- [60] Z. Zhu and D. Howe, "Analytical prediction of the cogging radial-field permanent magnet brushless motors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1371–1374, 1992.
- [61] Z. Zhu, G. W. Jewell, and D. Howe, "Design considerations for permanent magnet polarised electromagnetically actuated brakes," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 6, pp. 3743–3745, 1995.
- [62] K. Halbach, "Design of permanent multiple magnets with oriented rec material," *Nucl. Inst. Meth.*, vol. 169, pp. 1–10, 1980.
- [63] K. Halbach, "Strong rare earth cobalt quadrupoles," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, no. 3, pp. 3882–3884, 1979.
- [64] Z. Zhu, Z. Xia, and D. Howe, "Comparison of halbach magnetized brushless machines based on discrete magnet segments or a single ring magnet," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 9, pp. 2997–2999, 2002.
- [65] Z. Xia, Z. Q. Zhu, and D. Howe, "Analytical magnetic field analysis of halbach magnetized permanent-magnet machines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 4, pp. 1864–1872, 2004.
- [66] R. Ravaud, G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "Analytical calculation of the magnetic field created by permanent-magnet rings," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 8, pp. 1982–1989, 2008.
- [67] R. Ravaud, G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "The three exact components of the magnetic field created by a radially magnetized tile permanent magnet.," *Progress in Electromagnetics Research, PIER 88*, pp. 307–319, 2008.
- [68] R. Ravaud, G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "Discussion about the analytical calculation of the magnetic field created by permanent magnets.," *Progress in Electromagnetics Research B*, vol. 11, pp. 281–297, 2009.
- [69] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Comparison of the coulombian and amperian current models for calculating the magnetic field produced by arc-shaped permanent magnets radially magnetized," *Progress in Electromagnetics Research, PIER 95*, pp. 309–327, 2009.
- [70] S. I. Babic and C. Akyel, "Improvement in the analytical calculation of the magnetic field produced by permanent magnet rings," *Progress in Electromagnetics Research C*, vol. 5, pp. 71–82, 2008.
- [71] R. Ravaud, G. Lemarquand, and V. Lemarquand, "Magnetic field created by tile permanent magnets," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 7, pp. 2920–2926, 2009.
- [72] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Modelling an ironless loudspeaker by using three-dimensional analytical approaches," *Progress in Electromagnetics Research, PIER 91*, pp. 53–68, 2009.
- [73] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Analytical expression of the magnetic field created by tile permanent magnets tangentially magnetized and radial currents in massive disks," *Progress in Electromagnetics Research B*, vol. 13, pp. 309–328, 2009.

- [74] R. Ravaud, G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "Magnetic field produced by a tile permanent magnet whose polarization is both uniform and tangential," *Progress in Electromagnetics Research B*, vol. 13, pp. 1–20, 2009.
- [75] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Discussion about the magnetic field produced by cylindrical halbach structures," *Progress in Electromagnetics Research B*, vol. 13, pp. 275–308, 2009.
- [76] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Analytical expressions of the magnetic field created by tile permanent magnets of various magnetization directions," 26th Progress in Electromagnetics Symposium, Moscow, Russia, August 18-21, 2009.
- [77] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Magnetic field in mri yokeless devices : analytical approach," *Progress in Electromagnetics Research B, PIER 94*, pp. 327–341, 2009.
- [78] R. Ravaud, G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "Permanent magnet couplings : field and torque three-dimensional expressions based on the coulombian model," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 4, pp. 1950–1958, 2009.
- [79] R. Ravaud, G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "Torque in permanent magnet couplings : comparison of uniform and radial magnetization," *Journal of applied physics*, vol. 105, p. 053904, 2009.
- [80] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Magnetic couplings with cylindrical and plane air gaps : influence of the magnet polarization direction," *Progress in Electromagnetics Research B*, vol. 16, pp. 333–349, 2009.
- [81] R. Ravaud, G. Lemarquand, and V. Lemarquand, "Ironless permanent magnet motors : three dimensional analytical calculation," International Electric Machines and Drives Conference, Miami, 2009.
- [82] R. Ravaud, G. Lemarquand, and V. Lemarquand, "Force and stiffness of passive magnetic bearings using permanent magnets. part 1 : axial magnetization," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 7, pp. 2996–3002, 2009.
- [83] R. Ravaud, G. Lemarquand, and V. Lemarquand, "Force and stiffness of passive magnetic bearings using permanent magnets. part 2 : radial magnetization," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 9, pp. 3334–3342, 2009.
- [84] G. Lemarquand, "Ironless loudspeakers," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 8, pp. 3371–3374, 2007.
- [85] R. Ravaud, G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "Ironless loudspeakers with ferrofluid seals," *Archives of Acoustics*, vol. 33, no. 4, pp. 53–58, 2008.
- [86] R. H. Small, "Direct radiator loudspeaker system analysis," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 20, pp. 383–395, 1972.
- [87] R. H. Small, "Closed-boxloudspeaker systems, part 1 : Analysis," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 20, pp. 798–808, 1972.

- [88] A. N. Thiele, "Loudspeakers in vented boxes : Part 1 and 2," in *Loudspeakers, vol. 1*, New York : Audio Eng. Soc., 1978.
- [89] M. R. Gander, "Moving-coil loudspeaker topology as an indicator of linear excursion capability," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 29, 1981.
- [90] R. H. Small, "Loudspeaker large-signal limitations," No. 2102, AES Australian Regional Convention, 1984.
- [91] H. Suzuki, "Sound radiation from a concave or a convex dome in a semi-infinite tube," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 33, pp. 956–962, December 1985.
- [92] M. R. Gander, "Dynamic linearity and power compression in moving-coil loudspeaker," *J. Audio Eng. Soc.*, pp. 627–646, September 1986.
- [93] C. S. A. Dobrucki, "Nonlinear distortions of woofers in fundamental resonance region," in *80th convention, Montreux*, no. 2344, Audio Eng. Soc., 1986.
- [94] A. J. M. Kaizer, "Modeling of the nonlinear response of an electrodynamic loudspeaker by a volterra series expansion," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 35, pp. 421–433, June 1987.
- [95] J. Vanderkooy, "A model of loudspeaker driver impedance incorporating eddy currents in the pole structure," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 37, pp. 119–128, March 1989.
- [96] P. Mills and M. Hawksford, "Distortion reduction in moving-coil loudspeaker systems using current-drive technology," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 37, pp. 129–148, March 1989.
- [97] W. Klippel, "Dynamic measurement and interpretation of the nonlinear parameters of electrodynamic loudspeakers," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 38, pp. 944–955, 1990.
- [98] W. Klippel, "Nonlinear large-signal behavior of electrodynamic loudspeakers at low frequencies," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 40, pp. 483–496, 1992.
- [99] W. Klippel, "Loudspeaker nonlinearities - cause, parameters, symptoms," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 54, pp. 907–939, 2006.
- [100] W. Klippel, "Measurement of large-signal parameters of electrodynamic transducer," in *107th convention, San Francisco*, no. 5008, Audio Eng. Soc., 1999.
- [101] J. Wright, "An empirical model for loudspeaker motor impedance," *J. Audio Eng. Soc.*, pp. 749–754, October 1990.
- [102] A. Dobrucki, "Nontypical effects in an electrodynamic loudspeaker with a nonhomogeneous magnetic field in the air gap and nonlinear suspension," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 42, pp. 565–576, 1994.
- [103] J. W. Noris, "Nonlinear dynamical behavior of a moving voice coil," in *105th convention, San Francisco*, no. 4785, Audio Eng. Soc., 1998.
- [104] J. C. L. Roux, "Le haut-parleur électrodynamique : Estimation des paramètres électroacoustiques aux basses fréquences et modélisation de la suspension." These de doctorat de l'Université du Maine, 1994.

- [105] D. Clark, "Precision measurement of loudspeaker parameters," *J. Audio Eng. Soc.*, pp. 129–141, March 1997.
- [106] W. Leach, "Loudspeaker voice-coil inductance losses : Circuit models, parameter estimation and effect on frequency response," *J. Audio Eng. Soc.*, pp. 442–449, 2002.
- [107] J. Borwick, *Loudspeaker Measurements, in Loudspeaker and Headphone Handbook*. Focal Press, oxford ed., 2001.
- [108] G. Lemarquand and M. Bruneau, "Large bandwidth loudspeaker emitting coherent acoustic waves : nonlinear inter-modulation effects," *J. Audio Eng. Soc.*, 2007.
- [109] N. Quaegebeur, *Vibrations non linéaires et rayonnement acoustique de structures minces de type haut-parleurs*. Thèse de Doctorat, 2007.
- [110] R. Ravaud, G. Lemarquand, and T. Roussel, "Time-varying non linear modeling of electrodynamic loudspeakers," *Applied Acoustics*, vol. 70, pp. 450–458, 2009.
- [111] R. Ravaud, G. Lemarquand, and T. Roussel, "Experimental measurement of the nonlinearities of electrodynamic microphones," *Applied Acoustics*, vol. 70, pp. 1194–1199, 2009.
- [112] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*. Dover, 1997.
- [113] I. Tarapov, "Movement of a magnetizable fluid in lubricating layer of a cylindrical bearing," *Magnetohydrodynamics*, vol. 8, no. 4, pp. 444–448, 1972.
- [114] J. Walker and J. Backmaster, "Ferrohydrodynamics thrust bearings," *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 17, pp. 1171–1182, 1979.
- [115] S. Miyake and S. Takahashi, "Sliding bearing lubricated with ferromagnetic fluid," *ASLE Trans.*, vol. 28, pp. 461–466, 1985.
- [116] H. Chang, C. Chi, and P. Zhao, "A theoretical and experimental study of ferrofluid lubricated four-pocket journal bearing," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 65, pp. 372–374, 1987.
- [117] Y. Zhang, "Static characteristics of magnetized journal bearing lubricated with ferrofluids," *ASME J. Tribol.*, vol. 113, pp. 533–538, 1991.
- [118] M. C. Miguel and J. M. Rubi, "On the dynamics of magnetic colloidal particles and holes," *Physica A*, vol. 231, pp. 288–294, 1996.
- [119] C. A. Borghi, A. Cristofolini, and M. Fabbri, "Study of the design model of a liquid metal induction pump," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 4, pp. 2956–2959, 1998.
- [120] H. S. Lee and I. Nakatani, "On the chemical stability of iron-nitride magnetic fluids in atmospheric conditions," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 201, pp. 23–26, 1999.
- [121] S. Chen, Q. Zhang, H. Chong, T. Komatsu, and C. Kang, "Some design and prototyping issues on a 20 krpm hdd spindle motor with a ferro-fluid bearing system," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no. 2, pp. 805–809, 2001.

- [122] Q. Zhang, S. Chen, S. Winoto, and E. Ong, "Design of high-speed magnetic fluid bearing spindle motor," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no. 4, pp. 2647–2650, 2001.
- [123] T. Osman, G. Nada, and Z. Safar, "Static and dynamic characteristics of magnetized journal bearings lubricated with ferrofluid," *Tribology International*, vol. 34, pp. 369–380, 2001.
- [124] G. S. Park and S. H. Park, "Determination of the curvature of the magnetic fluid under external forces," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, pp. 957–960, march 2002.
- [125] G. S. Park and K. Seo, "New design of the magnetic fluid linear pump to reduce the discontinuities of the pumping forces," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, pp. 916–919, 2004.
- [126] M. Miwa, H. Harita, T. Nishigami, R. Kaneko, and H. Unozawa, "Frequency characteristics of stiffness and damping effect of a ferrofluid bearing," *Tribology Letter*, vol. 15, no. 2, pp. 97–105, 2003.
- [127] M. d'Aquino, G. Miano, C. Serpico, W. Zamboni, and G. Coppola, "Forces in magnetic fluids subject to stationary magnetic fields," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, no. 5, pp. 2657–2659, 2003.
- [128] R. C. Shah and M. Bhat, "Ferrofluid squeeze film in a long bearing," *Tribology International*, vol. 37, pp. 441–446, 2004.
- [129] P. Kuzhir, "Free boundary of lubricant film in ferrofluid journal bearings," *Tribology International*, vol. 41, pp. 256–268, 2008.
- [130] W. Ochonski, "The attraction of ferrofluid bearings," *Mach. Des.*, vol. 77, no. 21, pp. 96–102, 2005.
- [131] G. Matthies and U. Tobiska, "Numerical simulation of normal-field instability in the static and dynamic case," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 289, pp. 436–439, 2005.
- [132] H. S. Choi, Y. S. Kim, K. T. Kim, and I. H. Park, "Simulation of hydrostatical equilibrium of ferrofluid subject to magneto-static field," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 6, pp. 818–821, 2008.
- [133] A. Ivanov, S. Kantorovich, V. Mendelev, and E. Pyanzina, "Ferrofluid aggregation in chains under the influence of a magnetic field," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 300, pp. e206–e209, 2006.
- [134] Y. L. Raikher, V. I. Stepanov, J. C. Bacri, and R. Perzynski, "Orientational dynamics in magnetic fluids under strong coupling of external and internal relaxations," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 289, pp. 222–225, 2005.
- [135] C. Holm and J. J. Weiss, "The structure of ferrofluids : A status report," *Current Opinion in colloid and interface science*, vol. 10, no. 4, pp. 133–140, 2005.

- [136] H. Chetouani, C. Jeandey, V. Haguët, H. Rostaing, C. Dieppedale, and G. Reyne, "Diamagnetic levitation with permanent magnets for contactless guiding and trapping microdroplets and particles in air and liquids," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 10, pp. 3557–3559, 2006.
- [137] S. H. Lee, H. S. Choi, and I. H. Park, "Introducing the virtual air-gap scheme to the kelvin force densities with external and total field," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 4, pp. 1457–1460, 2007.
- [138] X. Li, K. Yao, and Z. Liu, "Cfd study on the magnetic fluid delivering in the vessel in high-gradient magnetic fields," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 320, pp. 1753–1758, 2008.
- [139] R. E. Rosensweig, Y. Hirota, S. Tsuda, and K. Raj, "Study of audio speakers containing ferrofluid," *J. Phys. : Condens. Matter*, vol. 20, 2008.
- [140] R. Ravaud, G. Lemarquand, and V. Lemarquand, "Magnetic pressure and shape of ferrofluid seals in cylindrical structures," *Journal of applied physics*, vol. 106, p. 034911, 2009.
- [141] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Mechanical properties of a ferrofluid seal : three-dimensional analytical study based on the coulombian model," *Progress in Electromagnetics research B*, vol. 13, pp. 385–407, 2009.
- [142] R. Ravaud, G. Lemarquand, and V. Lemarquand, "Mechanical properties of ferrofluid applications : centering effect and capacity of a seal," *Tribology International*, vol. 43, no. 1-2, pp. 76–82, 2010.
- [143] R. Ravaud and G. Lemarquand, "Design of ironless loudspeakers with ferrofluid seals : analytical study based on the coulombian model," *Progress in Electromagnetics research B*, vol. 14, pp. 285–309, 2009.
- [144] R. Ravaud, M. Pinho, G. Lemarquand, N. Dauchez, J. M. Genevieux, V. Lemarquand, and B. Brouard, "Radial stiffness of a ferrofluid seal," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 10, pp. 4388–4390, 2009.

Deuxième partie

Publications

Annexe A

Analytical Calculation of the Magnetic Field Created by Permanent-Magnet Rings (*DOI :10.1109/TMAG.2008.923096*)

Annexe B

Magnetic Field Created by Tile Permanent Magnets (*DOI :10.1109/ TMAG.2009.2014752*)

Annexe C

The Three Exact Components of the
Magnetic Field Created by Radially
Magnetized Permanent Magnets
(*DOI :10.2528/PIER08112708*)

Annexe D

Discussion About the Magnetic Field Created by Permanent-Magnets (*DOI :10.2528/PIERB08112102*)

Annexe E

Magnetic Field Produced by a Tile
Permanent Magnet Whose
Polarization is Both Uniform and
Tangential
(*DOI :10.2528/PIERB08121901*)

Annexe F

Analytical Expression of the Magnetic Field Created by Tile Permanent Magnets Tangentially Magnetized and Radial Currents in Massive Disks

(DOI :10.2528/PIERB09012704)

Annexe G

Modelling an Ironless Loudspeaker by Using Three-Dimensional Analytical Approaches (*DOI :10.2528/PIER09021104*)

Annexe H

Discussion About the Magnetic Field Produced by Cylindrical Halbach Structures (*DOI :10.2528/PIERB09012004*)

Annexe I

Permanent Magnet Couplings : Field
and Torque Three-Dimensional
Expressions Based on the
Coulombian Model
*(DOI :10.1109/ TMAG.2008.
2010623)*

Annexe J

Torque in Permanent Magnet Couplings : Comparison of Uniform and Radial Magnetization (*DOI :10.1063/1.3074108*)

Annexe K

Design of Ironless Loudspeakers with Ferrofluid Seals : Analytical Study Based on the Coulombian Model (*DOI :10.2528/PIERB09031904*)

Annexe L

Mechanical Properties of a Ferrofluid Seal : Three-Dimensional Analytical Study Based on the Coulombian Model

(DOI :10.2528/PIERB09020601)

Annexe M

Ironless Loudspeakers with Ferrofluid Seals

*(Archives of Acoustics, Vol. 34, N
4, 3-10, 2008)*

Annexe N

Force and Stiffness of Passive Magnetic Bearing Using Permanent Magnets, Part 1 : Axial Magnetization (*DOI :10.1109/TMAG.2009.2016088*)

Annexe O

Force and Stiffness of Passive Magnetic Bearing Using Permanent Magnets, Part 2 : Radial Magnetization (*DOI :10.1109/TMAG.2009.2025315*)

Annexe P

Comparison of the Coulombian and Amperian Models for Calculating the Magnetic Field Produced by Radially Magnetized Arc-Shaped Permanent Magnets

(DOI :10.2528/PIER09042105)

Annexe Q

Radial Stiffness of a Ferrofluid Seal
*(IEEE Trans. Magn., Vol 45, N 10,
2009)*

Annexe R

Time-Varying Non-Linear Modeling of Electrodynamic Loudspeakers

*(DOI :10.1016/
j.apacoust.2008.05.009)*

Annexe S

Experimental Measurement of the Nonlinearities of Electrodynamic Microphones

(DOI :10.1016/j.apacoust.2009.03.009)

Annexe T

Mechanical Properties of Ferrofluid Applications : Centering Effect and Capacity of a Seal (*DOI :10.1016/j.triboint.2009.04.050*)

Annexe U

Magnetic Pressure and Shape of Ferrofluid Seals in Cylindrical Structures (*DOI :10.1063/1.3187560*)

Annexe V

Ironless Permanent Magnet Motors : Three Dimensional Analytical Calculation (*DOI :10.1109/IEMDC.2009.5075318*)

Annexe W

Magnetic Couplings with Cylindrical and Plane Air Gaps : Influence of the Magnet Polarization Direction (*DOI :10.2528/PIERB09051903*)

Annexe X

Magnetic Field in MRI Yokeless Devices : Analytical Approach (*DOI : 10.2528/PIER09061205*)

Annexe Y

Analytical Expressions of the
Magnetic Field Created by Tile
Permanent Magnets of Various
Magnetization Directions
(*26th Progress in Electromagnetics
Research Symposium, August 18-21,
Moscou, Russia, 2009*)

Annexe Z

Predicting the Exact Shape of the Magnetic Field Produced by Halbach Structures

*(International Symposium on
Electromagnetic Fields in
Mechatronics, Electrical and
Electronic Engineering, September
10-12, Arras, 2009)*