Sur la factorisation des fonctions zêta des hypersurfaces de Dwork

Philippe Goutet

UNIVERSITÉ PARIS VI – PIERRE ET MARIE CURIE

THÈSE DE DOCTORAT

MATHÉMATIQUES

Sur la factorisation des fonctions zêta des hypersurfaces de Dwork

Philippe Goutet

Thèse soutenue le jeudi 3 décembre 2009 à 15 h 45 devant un jury composé de

Jean-Yves Etesse	rapporteur	Université de Rennes I
Michael Harris	examinateur	Université Paris VII
Jan Nekovar	examinateur	Université Paris VI
Joseph Oesterlé	directeur	Université Paris VI
Bernadette Perrin-Riou	examinateur	Université Paris XI
Jean-Pierre Wintenberger	rapporteur	Université de Strasbourg

Résumé, Abstract

Sur la factorisation des fonctions zêta des hypersurfaces de Dwork

Cette thèse s'intéresse à la factorisation des fonctions zêta des hypersurfaces de Dwork. Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas ont mis en évidence, dans le cas de la quintique, un facteur provenant de la symétrie miroir et deux facteurs provenant de courbes de type hypergéométrique. Wan a établit le lien avec la symétrie miroir dans le cas général, mais les facteurs complémentaires n'ont pas été étudiés avec le même niveau de détail que dans le cas de la quintique, et c'est sur eux que se concentre cette thèse. Après un premier chapitre de rappels sur les hypersurfaces de Dwork, on détermine, dans le chapitre 2, une factorisation explicite des fonctions zêta en terme de facteurs provenant d'hypersurfaces de type hypergéométrique. Dans le chapitre 3, on déduit une factorisation à partir d'une décomposition isotypique de la cohomologie des hypersurfaces de Dwork. Finalement, dans le chapitre 4, on relie les deux factorisations précédentes.

Mots clefs : hypersurfaces de Dwork, factorisation de fonctions zêta, hypersurfaces hypergéométriques, décomposition isotypique de la cohomologie étale, sommes de Gauss et de Jacobi, formule des traces de Lefschetz.

On the factorisation of the zeta functions of Dwork hypersurfaces

This thesis deals with the factorisation of the zeta functions of the Dwork hypersurfaces. Candelas, de la Ossa and Rodriguez-Villegas found, in the case of the quintic, a factor coming from mirror symmetry and two factors coming from hypergeometric curves. Wan established the link with mirror symmetry in the general case, but the remaining factors have not been studied with the same level of detail as for the quintic, and it is on them that this thesis focuses. After a first chapter recalling the properties of the Dwork hypersurfaces, we establish, in chapter 2, an explicit factorisation of the zeta functions in terms of factors coming from hypersurfaces of hypergeometric type. In chapter 3, we deduce a factorisation of the zeta function from the isotypic decomposition of the cohomology of the Dwork hypersurfaces. Finally, in chapter 4, we link the two preceding factorisations.

Key-words : dwork hypersurfaces, zeta function factorisation, hypergeometric hypersurfaces, isotypic decomposition of the etale cohomology, Gauss and Jacobi sums, Lefschetz trace formula.

Table des matières

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mon directeur de thèse, Joseph Oesterlé, pour son encadrement tout au long de ces trois années de thèse. Sa disponibilité constante, sa relecture attentive des manuscrits que je lui présentais ainsi que ses suggestions avisées ont énormément contribué à la qualité et la clarté de la présente thèse.

Je remercie aussi Jean-Yves Etesse et Jean-Pierre Wintenberger d'avoir accepté d'assumer les rôles de rapporteurs de ma thèse ainsi que de faire partie du jury. Je remercie également Michael Harris, Jan Nekovar et Bernadette Perrin-Riou d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Mes remerciement vont aussi à Luc Illusie pour une référence concernant le théorème 3.2.1 et à Surya Ramana pour une référence à propos de la proposition 2.5.9.

Je voudrais également remercier l'équipe de théorie des nombres qui m'a accueilli à l'Institut de Mathématiques de Jussieu, ainsi que tous les thésards qui ont rendu mon séjour à l'IMJ plus agréable, notamment Julien, Juliette, Manuel ainsi que mes camarades de bureau passés et présents, Sarah, Nicolas, Benjamin, Ismael, Viet Loc, Hamid, Olivier, Clémence, Lara, Abed et Florent.

Finalement, je tiens à remercier ma famille pour son soutien durant ma thèse.

Introduction

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p. Si X est une variété projective définie sur $\mathbb{F}_q$, la fonction zêta de X est définie par

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q}(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} |\mathrm{X}(\mathbb{F}_{q^r})| \, \frac{t^r}{r}\right),$$

où $\mathbb{F}_{q^r}$ désigne une extension de degré r de $\mathbb{F}_q$ et $\mathrm{X}(\mathbb{F}_{q^r})$ l'ensemble des points de X rationnels sur $\mathbb{F}_{q^r}$.

Soit $\psi \in \mathbb{F}_q$ un paramètre non nul. Notons $\mathcal{M}_\psi$ l'hypersurface de $\mathbb{P}^4$ d'équation

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 - 5\psi x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0.$$

Supposons-là non singulière, c'est-à-dire $\psi^5 \neq 1$. Dans deux articles [CdlORV00, CdlORV03], Rodriguez-Villegas et les deux physiciens Candelas et de la Ossa ont mis en évidence, de manière expérimentale, le fait que la fonction zêta se factorise sous la forme suivante, lorsque $p \neq 2$ et $q \equiv 1 \mod 5$,

$$\mathrm{Z}_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{R}_0(t,\psi)\mathrm{R}_{\mathcal{A}_\psi}(qt,\psi)^{20}\mathrm{R}_{\mathcal{B}_\psi}(qt,\psi)^{30}}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t)},$$

où R_0, $\mathrm{R}_{\mathcal{A}_\psi}$ et $\mathrm{R}_{\mathcal{B}_\psi}$ sont des polynômes appartenant à $1 + t\mathbb{Z}[t]$. Le facteur R_0 provient de la « variété miroir » $\mathcal{W}_\psi$ de $\mathcal{M}_\psi$ (on renvoie à [CdlORV03] pour la définition et la construction de cette variété) dans le sens où

$$\mathrm{Z}_{\mathcal{W}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{R}_0(t,\psi)}{(1-t)(1-qt)^{101}(1-q^2t)^{101}(1-q^3t)}.$$

Les facteurs $\mathrm{R}_{\mathcal{A}_\psi}$ et $\mathrm{R}_{\mathcal{B}_\psi}$ proviennent, eux, de courbes hypergéométriques dont des équations affines sont

$$\mathcal{A}_\psi : y^5 = x^2(1-x)^3(1-\tfrac{1}{\psi^5}x)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\psi : y^5 = x^2(1-x)^4(1-\tfrac{1}{\psi^5}x),$$

dans le sens où

$$\mathrm{Z}_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{R}_{\mathcal{A}_\psi}(t,\psi)}{1-qt} \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{R}_{\mathcal{B}_\psi}(t,\psi)}{1-qt}.$$

De plus (voir [CdlORV03]), ils ont démontré que $\mathrm{R}_{\mathcal{A}_\psi}$ et $\mathrm{R}_{\mathcal{B}_\psi}$ sont des carrés dans $\mathbb{Z}[t]$ (l'argument est que les courbes projectives lisses birationnelles à $\mathcal{A}_\psi$ et $\mathcal{B}_\psi$ sont hyperelliptiques et que l'existence d'un automorphisme particulier de ces courbes perm et de montrer que leur jacobienne est isogène à un carré). Ils ont également constaté numériquement que les facteurs sont scindés sur le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

L'existence dans la fonction zêta d'un facteur provenant de son miroir a été généralisé par Wan [Wan06] au cas des hypersurfaces de Dwork X_ψ d'équation

$$x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \ldots x_n = 0.$$

Plus précisément, Wan démontre [Wan06, § 7, éq. (14), p. 173], lorsque $q \equiv 1 \mod n$, que la fonction zêta de X_ψ s'écrit sous la forme

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\big(\mathrm{Q}(t,\psi)\mathrm{R}(qt,\psi)\big)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\ldots(1-q^{n-2}t)},$$

où $\mathrm{Q}(t,\psi)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré $n-1$ et $\mathrm{R}(t,\psi)$ un polynôme à coefficients entiers de degré $\frac{(n-1)^n+(-1)^n(n-1)}{n} - (n-1)$ dont les racines ont pour valeur absolue $q^{-(n-4)/2}$. Le polynôme $\mathrm{Q}(t,\psi)$ provient de la symétrie miroir dans le sens suivant : désignons par A le groupe $\{(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid \zeta_i^n = 1, \zeta_1\ldots\zeta_n = 1\}$ et par Y_ψ l'hypersurface quotient $\mathrm{X}_\psi/\mathrm{A}$; c'est, selon la terminologie de Wan, un « miroir singulier » de X_ψ (ce miroir n'est pas tout à fait le même que celui considéré dans [CdlORV03] lorsque $n=5$). Une équation simple de Y_ψ est $(y_1+\cdots+y_n)^n = (n\psi)^n y_1\ldots y_n$ et sa fonction zêta est donnée par

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{Y}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{Q}(t,\psi)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\ldots(1-q^{n-2}t)}.$$

Wan mentionne dans [Wan06, § 7, p. 175] que le problème de déterminer l'origine de R a été résolu pour $n=3$, $n=4$ (Dwork) et $n=5$ (Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas) mais reste ouvert pour les autres valeurs de n. L'un des résultats de la présente thèse (voir chapitre 2) décrit l'origine de ce facteur R : c'est un produit de facteurs provenant de fonctions zêta d'hypersurfaces de type hypergéométrique de dimension impaire. La méthode est la suivante : on calcule séparément le nombre de points de X_ψ et de certaines hypersurfaces de type hypergéométrique à l'aide de sommes de Gauss en suivant les techniques exposées dans [Kob83] puis on les compare en utilisant des formules sur les sommes de Gauss (telles que la formule des compléments ou la formule de multiplication de Hasse-Davenport).

Dans l'exemple de la quintique considéré par [CdlORV03], la fonction zêta est hautement factorisée. Parallèlement à la question d'identifier les facteurs que l'on vient de considérer, on peut s'intéresser à la question de prédire *a priori* l'existence d'une factorisation du polynôme précédent R. Dans [HKS06], une méthode cohomologique pour obtenir un tel résultat est esquissée ; elle a été menée à bien dans [Klo07] pour une famille de variétés englobant les hypersurfaces de Dwork. Le principe est le suivant : la fonction zêta s'exprime comme produit et quotient des polynômes caractéristiques du Frobenius sur les espaces de cohomologie ; si on décompose les espaces de cohomologie en somme directe de sous-espaces stables par le Frobenius, cela conduit à une factorisation de la fonction zêta. Kloosterman a utilisé cette méthode en exhibant une base explicite de la cohomologie de Monsky-Washnitzer puis en étudiant l'action du Frobenius sur cette base. Une autre méthode est de considérer la décomposition de la cohomologie étale en composants isotypiques sur $\mathbb{Q}_\ell$ (où ℓ est un nombre premier $\neq p$) sous l'action du groupe $\mathrm{G} = \mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_n$; puisque l'action du groupe G commute à celle du Frobenius (du moins lorsque $q \equiv 1 \mod n$), cette décomposition permet de factoriser le polynôme caractéristique du Frobenius. Le chapitre 3 de la thèse est consacré à la mise en oeuvre de cette méthode ; la factorisation qu'on obtient s'avère légèrement plus fine que celle obtenue par Kloosterman et permet aussi d'expliquer l'observation de [CdlORV03] à propos de la décomposition des facteurs dans une certaine extension de degré fini de $\mathbb{Q}$. Nous commençons par décomposer $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Les résultats que nous obtenons étendent ceux de Brünjes [Brü04] qui traitait le cas $\psi = 0$ (hypersurfaces de Fermat). Une fois cette décomposition obtenue, il faut en déduire la décomposition de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ (ce qui nécessite de construire explicitement des représentations irréductibles sur $\mathbb{Q}_\ell$ qui, après extension des scalaires, redonnent celles qui interviennent sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) puis montrer que la factorisation ainsi obtenue est indépendante de ℓ.

Finalement, le chapitre 4 consiste à relier les deux factorisations obtenues précédemment (la factorisation explicite et la factorisation cohomologique) à l'aide de techniques de fonctions L de représentations, en s'inspirant d'un calcul effectué par Katz [Kat81] dans le cas des courbes d'Artin-Schreier.

Mentionnons pour finir que, de manière indépendante, certaines des questions précédentes ont été abordées sous un angle différent par Katz dans [Kat09]. Nous renvoyons le lecteur aux introductions des chapitres 2 et 3 pour des précisions supplémentaires.

Chapitre 1

Hypersurfaces de Dwork

Dwork a consacré une part importante de son œuvre à l'étude des hypersurfaces qui portent aujourd'hui son nom, que ce soit en relation avec la méthode de déformation (voir [Dwo62a, Dwo62b, Dwo64, Dwo66b, Dwo69]) ou avec les fonctions hypergéométriques généralisées (voir [Dwo66a]). Le lecteur intéressé par plus de précisions historiques pourra consulter l'introduction de l'article [Kat09].

Ces dernières années, les hypersurfaces de Dwork sont revenues sur le devant de la scène, notamment en relation avec la symétrie miroir (dont la quintique de Dwork est un exemple emblématique, voir [CdlOGP91]) ou avec la conjecture de Sato-Tate (voir [HSBT07] et les articles connexes [CHT08, Tay08]).

1.1 Définition et propriétés algébriques

Définition 1.1.1. — *Soit n un entier ≥ 1 et $\mathbb{k}$ un corps. On considère l'hypersurface X_ψ de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{k}}$ d'équation $x_1^n+\cdots+x_n^n-n\psi x_1\ldots x_n=0$ où $\psi\in\mathbb{k}$ est un paramètre. L'hypersurface X_ψ est appelée hypersurface de Dwork. Lorsque $\psi=0$, on parle d'hypersurface de Fermat.*

Dans ce chapitre, on ne fait pas d'hypothèse particulière sur le corps $\mathbb{k}$, mais dans les chapitres suivants, on prendra $\mathbb{k}=\mathbb{F}_q$ où q est une puissance d'un nombre premier ne divisant pas n.

Proposition 1.1.2. — *Supposons que n soit premier à la caractéristique de $\mathbb{k}$. L'hypersurface X_ψ est singulière si et seulement si $\psi^n=1$.*

Démonstration. — Posons $f=x_1^n+\cdots+x_n^n-n\psi x_1\ldots x_n$ de sorte que X_ψ n'est autre que l'hypersurface d'équation $f=0$. Il s'agit de déterminer pour quelles valeurs de ψ les polynômes f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, …, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ ont des zéros en commun. Or :

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}=0\\ \ldots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}=0\end{cases}\iff\begin{cases}nx_1^{n-1}=n\psi x_2\ldots x_n\\ \ldots\\ nx_n^{n-1}=n\psi x_1\ldots x_{n-1}\end{cases}\implies nx_1^n=\cdots=nx_n^n=n\psi x_1\ldots x_n$$

Puisque n est premier à la caractéristique de $\mathbb{k}$, on en déduit que $x_1^n=\cdots=x_n^n=\psi x_1\ldots x_n$. Lorsque $\psi=0$, on obtient $x_1=\cdots=x_n=0$. Lorsque $\psi\neq 0$, on obtient $(n\psi x_1\ldots x_n)^n=(n\psi)^n x_1^n\ldots x_n^n=(n\psi)^n(\psi x_1\ldots x_n)^n$ d'où $(x_1\ldots x_n)^n=\psi^n(x_1\ldots x_n)^n$; or, si l'un des x_i est nul, ils le sont tous, donc, si on suppose au moins l'un des x_i non nul, on en déduit que $\psi^n=1$.

Réciproquement, si $\psi^n = 1$, le point $[1 : \psi : \ldots : \psi]$ est un zéro commun à f et à ses dérivées partielles. $\square$

Corollaire 1.1.3. — *Supposons que n soit ≥ 3 et premier à la caractéristique de $\mathbb{k}$. L'hypersurface X_ψ est absolument irréductible si et seulement si $\psi^n \neq 1$.*

Démonstration. — Il suffit d'utilsier le fait que, si $n \geq 3$, alors une hypersurface non singulière est irréductible. $\square$

Remarques 1.1.4.

a) Lorsque $n = 1$, l'équation est $(1 - \psi)x_1 = 0$ donc se réduit à $x_1 = 0$ si $\psi \neq 1$ et à $\mathbb{P}^0$ si $\psi = 1$.

b) Lorsque $n = 2$, l'hypersurface X_ψ n'est pas absolument irréductible :

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\psi x_1 x_2 = (x_1 - \psi x_2 + \sqrt{\psi^2 - 1}\, x_2)(x_1 - \psi x_2 - \sqrt{\psi^2 - 1}\, x_2).$$

1.2 Cohomologie étale, fonction zêta

Soit $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme de degré d tel que l'hypersurface X de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}_q}$ d'équation $f = 0$ soit non singulière. La dimension de X est $n-2$ et on note j l'inclusion canonique $\mathrm{X} \to \mathbb{P}^{n-1}$ et $\overline{\mathrm{X}}$ l'hypersurface $\mathrm{X} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$.

Théorème 1.2.1 (Lefschetz faible). — *Soit i un entier $\leq n-2$; l'injection canonique j induit une application j^* de $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ dans $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$ qui est bijective si $i \neq n-2$ et injective si $i = n-2$.*

Démonstration. — On renvoie à [FK88, cor. 9.4 p. 106]. $\square$

Rappelons que, lorsque $0 \leq i \leq 2n-4$, la dimension δ_i de $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ est égale à 1 si i est pair et à 0 si i est impair.

Corollaire 1.2.2. — *Lorsque $i < n-2$, on a*

$$\dim \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell) = \delta_i,$$

et le même résultat vaut pour $n - 2 < i \leq 2(n-2)$ par dualité de Poincaré.

Nous définissons maintenant la partie primitive de la cohomologie.

Définition 1.2.3. — *Notons $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}$ l'image de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ par j^* et*

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} = \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)/\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}.$$

Si n est pair, $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}$ est de dimension 1 et si n est impair, $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} = \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Théorème 1.2.4 (Formule d'Hirzebruch). — *Soit n un entier ≥ 1 et $f \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme homogène de degré d tel que f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, …, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ n'aient pas de zéros communs différents de $(0, \ldots, 0)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^n$. Alors l'hypersurface X de $\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ définie par l'équation $f = 0$ est non singulière (et irréductible si $n \geq 3$) et sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donnée par*

$$\chi(\mathrm{X}) = (n-1) + \frac{(1-d)^n + (d-1)}{d}.$$

Démonstration. — Si $n \geq 3$, on utilise le cor. 7.5.(*iii*) de [Gro66, exp. VII] : en effet, le sous-schéma X de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}_p}$ est lisse, connexe et de dimension $n-2$; sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donc donnée par :

$$\chi(\mathrm{X}) = d \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-i} \mathrm{C}_n^i d^{n-2-i} = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-i} \mathrm{C}_n^i d^{n-i} = \frac{(1-d)^n + nd - 1}{d},$$

ce qui est la formule annoncée. Si $n = 2$, l'hypersurface X de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$ se compose de d points distincts donc $\chi(\mathrm{X}) = d$, qui est égal à $(2-1) + \frac{1}{d}[(1-d)^2 + (d-1)]$. Finalement, si $n = 1$, $\mathrm{X} = \varnothing$ et donc $\chi(\mathrm{X}) = 0$, ce qui montre le résultat dans ce cas. □

Corollaire 1.2.5. — *La dimension de* $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ *est égale à* $\frac{(d-1)^n + (-1)^n(d-1)}{d}$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la formule de Hirzebruch et du théorème de Lefschetz faible ci-dessus. □

Corollaire 1.2.6. — *Posons* $\mathrm{P} = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}^* | \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}})$ *; c'est un polynôme de degré* $\frac{(d-1)^n + (-1)^n(d-1)}{d}$ *et on a :*

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{P}(t)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\dots(1-q^{n-2}t)}.$$

Démonstration. — Le Frobenius agit par multiplication par $q^{(n-2)/2}$ sur $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}$ et par multiplication par q^i sur les $\mathrm{H}^{2i}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$, d'où le résultat. □

1.3 Automorphismes, variété quotient

Désignons toujours par $\Bbbk$ un corps quelconque. On considère le groupe

$$\mathrm{A} = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mu_n(\Bbbk) \mid \zeta_1 \dots \zeta_n = 1\} / \{(\zeta, \dots, \zeta)\}.$$

On notera $[\zeta_1, \dots, \zeta_n]$ la classe de $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ dans A. Le groupe A agit sur X_ψ par multiplication des coordonnées :

$$[\zeta_1, \dots, \zeta_n] \cdot [x_1 : \dots : x_n] = [\zeta_1 x_1 : \dots : \zeta_n x_n].$$

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit à droite sur X_ψ par permutation des coordonnées :

$$[x_1 : \dots : x_n]^\sigma = [x_{\sigma(1)} : \dots : x_{\sigma(n)}]$$

et à gauche sur A par permutation des coordonnées :

$$^\sigma[\zeta_1 : \dots : \zeta_n] = [\zeta_{\sigma^{-1}(1)} : \dots : \zeta_{\sigma^{-1}(n)}].$$

Le produit semi-direct $\mathrm{G} = \mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_n$ de $\mathfrak{S}_n$ par A agit à droite sur X_ψ.

Dans toute la suite de ce n° 1.3, $\Bbbk$ désignera un corps tel que $|\mu_n(\Bbbk)| = n$ (par exemple, $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ avec $q \equiv 1 \mod n$).

Proposition 1.3.1. — *La variété* $\mathrm{Y}_\psi = \mathrm{X}_\psi/\mathrm{A}$ *peut se réaliser comme l'hypersurface singulière de* $\mathbb{P}^{n-1}$ *d'équation*

$$(y_1 + \cdots + y_n)^n = (n\psi)^n y_1 \ldots y_n.$$

Démonstration. — On renvoie à [BGK08] qui traite le cas $n = 5$ et dont la démonstration s'étend à toutes les valeurs de n. □

Remarque 1.3.2. — La variété Y_ψ est reliée à la notion de symétrie miroir ; c'est, selon la terminologie de Wan [Wan06], le « miroir singulier » de X_ψ et, lorsqu'on en prend une résolution crépante, on obtient une variété de Calabi-Yau W_ψ dont les nombres de hodge sont symétriques de ceux de X_ψ (vis-à-vis de la diagonale) :

$$p + q = n \implies h^{p,q}(\mathrm{W}_\psi) = h^{n-p,q}(\mathrm{X}_\psi).$$

On renvoie au livre [CK99] pour plus de précisions concernant les nombres de Hodge des variétés miroir (notamment théorème 4.1.5 p. 57 ainsi que p. 60).

Chapitre 2

Factorisation explicite

Le but de ce chapitre est de donner une décomposition explicite de la fonction zêta de X_ψ (lorsque $\psi^n \neq 1$) en terme de facteurs provenant de certaines variétés affines de dimension impaire $\leq n-4$ qui sont de type hypergéométrique. Comme on l'a dit dans l'introduction, la méthode utilisée consiste à compter séparément le nombre de points de X_ψ et de certaines variétés du type précédent puis à les comparer. Ceci permet de répondre, au moins dans le cas où n est premier, à une question posée par Wan dans son article [Wan06].

2.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, n désignera un entier ≥ 3 et $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique $p \nmid n$. On considère la famille $\mathrm{X}_\psi : x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \ldots x_n = 0$ sur le corps $\mathbb{F}_q$ et on prend le paramètre $\psi \in \mathbb{F}_q$ de la famille non nul ; on supposera de plus, dans cette introduction, que $\psi^n \neq 1$ (comme on le verra, la plupart des résultats du chapitre seront valables sans cette hypothèse ; il sera clairement indiqué quand elle deviendra nécessaire).

Lorsque $q \equiv 1 \mod n$ (voir [Wan06, th. 7.2, p. 174]) ou lorsque n est premier (voir [Hae06, th. 9.5 p. 179]), il est possible de montrer que la fonction zêta de X_ψ s'écrit

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\big(\mathrm{Q}(t,\psi)\mathrm{R}(q^\rho t^\rho, \psi)\big)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\ldots(1-q^{n-2}t)},$$

où ρ est l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Dans cette expression, $\mathrm{Q}(t,\psi)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré $n-1$. Son origine est connue, puisque Wan a montré (voir [Wan06, § 7, éq. (14), p. 173]) que ce facteur provient de la fonction zêta du quotient Y_ψ de $\mathrm{X}_\psi \otimes \mathbb{F}_{q^\rho}$ par le groupe $\{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{F}_{q^\rho}^n \mid \zeta_i^n = 1, \zeta_1 \ldots \zeta_n = 1\}$ (en reprenant la terminologie de Wan introduite dans la remarque 1.3.2, Y_ψ est un « miroir singulier » de X_ψ) :

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{Y}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{Q}(t,\psi)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)\ldots(1-q^{n-2}t)}.$$

Comme on l'a vu dans la proposition 1.3.1, une équation simple de Y_ψ est $(y_1+\cdots+y_n)^n = (n\psi)^n y_1 \ldots y_n$.

Le facteur $\mathrm{R}(t,\psi)$, quant à lui, est un polynôme à coefficients entiers de degré

$$\frac{(n-1)^n+(-1)^n(n-1)}{n}-(n-1)$$

dont les racines ont pour valeur absolue $q^{-(n-4)/2}$. Le problème auquel on s'intéresse est la description de la factorisation du polynôme R ; deux approches sont possibles : soit prédire théoriquement l'existence d'une factorisation de R, soit chercher des variétés explicites dont certains facteurs de la fonction zêta interviennent dans la factorisation de R. Concernant la première approche, on renvoie à [Klo07] et au chapitre 3. La deuxième approche est soulevée par Wan dans [Wan06, § 7, p. 175] qui mentionne qu'elle a déjà été résolue pour $n=3$, $n=4$ (Dwork) et $n=5$ (Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas) ; un article récent de Katz [Kat09] aborde aussi le sujet sous un angle différent (1).

Le but de ce chapitre est de traiter le cas où n est un nombre premier ≥ 5, en utilisant uniquement des propriétés des sommes de Gauss ; le fait que n soit premier permet de se restreindre au cas où $q\equiv 1 \mod n$ vu que Haessig [Hae06, th. 9.5, p. 179] a montré que, lorsque n est premier,

$$\mathrm{R}(qt,\psi)=\mathrm{R}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_{q^\rho}}(q^\rho t^\rho,\psi)^{1/\rho},\qquad \text{où } \rho \text{ est l'ordre de } q \text{ dans } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

De manière précise, si on définit $\mathrm{N}_\mathrm{R}(q^r)$ par la formule $\mathrm{R}(t,\psi)=\exp\bigl(\sum_{r=1}^{+\infty}\mathrm{N}_\mathrm{R}(q^r)\frac{t^r}{r}\bigr)$, on démontre dans ce chapitre le résultat suivant (th. 2.5.10, p. 33).

Théorème. — *Supposons n premier ≥ 5 et $q\equiv 1 \mod n$. On peut écrire :*

$$\mathrm{N}_\mathrm{R}(q^r)=q^{\frac{n-5}{2}}\mathrm{N}_1(q^r)+q^{\frac{n-7}{2}}\mathrm{N}_3(q^r)+\cdots+\mathrm{N}_{n-4}(q^r), \tag{2.1}$$

où chaque N_d est une somme (sur i) de quantités du type $|\mathrm{H}_{d,i}(q^r)|-(q-1)^{l-1}q^{d+1-l}$ où les $\mathrm{H}_{d,i}$ sont des variétés de type hypergéométrique de $\mathbb{A}^{d+2}_{\mathbb{F}_q}$ de dimension impaire égale à d avec $1\leq d\leq n-4$ dont les équations explicites seront données dans le n° 2.5.3.

Cette égalité en terme de nombre de points se traduit par une factorisation du polynôme R en terme des fonctions zêta des variétés de type hypergéométrique précédentes.

Le présent chapitre est organisé de la manière suivante. Dans le § 2.2, on rappelle les formules sur les sommes de Gauss et de Jacobi dont on aura besoin par la suite. Dans le § 2.3, on calcule le nombre de points de certaines variétés de type hypergéométrique à l'aide de sommes de Gauss grâce à une méthode semblable à celle exposée par Koblitz dans [Kob83, § 5]. Dans le § 2.4, on rappelle les formules pour le nombre de points de la variété projective X_ψ. Dans le § 2.5, on compare les formules obtenues aux § 2.3 et 2.4. Finalement, dans le § 2.6, on explicite les cas $n=5$ (déjà traité par Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas dans [CdlORV03]) et $n=7$. L'hypothèse que n est premier n'est utilisée qu'à partir du § 2.5 ; l'hypothèse $q\equiv 1 \mod n$ est, elle, utilisée à partir du n° 2.4.2.

1. Ses résultats sont en terme de traces du Frobenius des hypersurfaces toriques $x_1\ldots x_n=\lambda y_1\ldots y_m$ sur un faisceau hypergéométrique.

2.2 Formulaire sur les sommes de Gauss et de Jacobi

Dans tout ce § 2.2, $\mathbb{F}_q$ désigne un corps fini de cardinal q.

Soient Ω un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, G un groupe fini commutatif et $\widehat{\mathrm{G}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{G}, \Omega^*)$ son groupe des caractères. Rappelons la formule d'orthogonalité :

$$\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{\varphi\in\widehat{\mathrm{G}}}\varphi(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = e, \\ 0 & \text{si } g \neq e, \end{cases} \tag{2.2}$$

où e est l'élément neutre de G. Dans la suite, on appliquera cette formule à $\mathrm{G} = \mathbb{F}_q$ ou $\mathrm{G} = \mathbb{F}_q^*$.

Fixons désormais un caractère additif $\varphi : \mathbb{F}_q \to \Omega^*$ non trivial.

Proposition 2.2.1 (Formule d'orthogonalité). — *On a :*

$$\frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}_q}\varphi(ax) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x = 0, \\ 0 & \textit{si } x \neq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Démonstration. — Cela résulte du fait que tout caractère additif est de la forme $x \mapsto \varphi(ax)$ pour un certain $a \in \mathbb{F}_q$ et de la formule d'orthogonalité (2.2) précédente. □

Définition 2.2.2 (Sommes de Gauss). — *Pour tout caractère multiplicatif* $\chi : \mathbb{F}_q^* \to \Omega^*$*, notons* $\mathrm{G}(\varphi, \chi)$ *la somme de Gauss*

$$\mathrm{G}(\varphi, \chi) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^*}\varphi(x)\chi(x).$$

Si $\mathbb{1}$ *désigne le caractère trivial de* $\mathbb{F}_q^*$*, on a* $\mathrm{G}(\varphi, \mathbb{1}) = -1$.

Proposition 2.2.3 (Formule des compléments). — *Si* χ *est un caractère non trivial de* $\mathbb{F}_q^*$*, on a :*

$$\mathrm{G}(\varphi, \chi)\mathrm{G}(\varphi, \chi^{-1}) = \chi(-1)q. \tag{2.4}$$

Démonstration. — Rappelons la démonstration très simple de cette propriété (voir aussi [BEW98, th. 1.1.4 (a), p. 10]). Un calcul direct montre que

$$\mathrm{G}(\varphi, \chi)\mathrm{G}(\varphi, \chi^{-1}) = \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q^*}\varphi(x+y)\chi(\tfrac{x}{y}).$$

En faisant le changement de variable $x = yz$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(\varphi, \chi)\mathrm{G}(\varphi, \chi^{-1}) &= \sum_{y,z\in\mathbb{F}_q^*}\varphi(y(1+z))\chi(z) \\ &= \chi(-1)(q-1) + \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*, z\neq -1}\Big(\sum_{y\in\mathbb{F}_q^*}\varphi(y(1+z))\Big)\chi(z).\end{aligned}$$

On fait maintenant le changement de variable $y' = y(1+z)$; en utilisant une formule d'orthogonalité, on en déduit le résultat annoncé. □

Proposition 2.2.4 (Formule de multiplication). — *Soit $d \geq 1$ un diviseur de $q-1$. Si η est un caractère quelconque de $\mathbb{F}_q^*$, alors*

$$\frac{\mathrm{G}(\varphi, \eta^d)}{\prod_{\chi^d=\mathbb{1}} \mathrm{G}(\varphi, \eta\chi)} = \frac{\eta(d)^d}{\prod_{\substack{\chi^d=\mathbb{1} \\ \chi\neq\mathbb{1}}} \mathrm{G}(\varphi, \chi)} \,. \tag{2.5}$$

Démonstration. — Cette formule, d'apparence simple, ne semble pas admettre de démonstration élémentaire ; on renvoie le lecteur à [BEW98, th. 11.3.5 p. 355] pour plus de détail. □

Définition 2.2.5 (Sommes de Jacobi). — *Si $(\chi_1, \dots, \chi_r)$ est une suite finie de caractères de $\mathbb{F}_q^*$, on pose :*

$$\mathrm{J}(\chi_1, \dots, \chi_r) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_r \in \mathbb{F}_q^* \\ x_1+\cdots+x_r=1}} \chi_1(x_1) \dots \chi_r(x_r).$$

Proposition 2.2.6 (Lien avec les sommes de Gauss). — *Si χ_1, ...,χ_r sont des caractères de $\mathbb{F}_q^*$ non tous triviaux,*

$$\mathrm{J}(\chi_1, \dots, \chi_r) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} \dfrac{\mathrm{G}(\varphi, \chi_1) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi_r)}{\mathrm{G}(\varphi, \chi_1 \dots \chi_r)} & si\ \chi_1 \dots \chi_r = \mathbb{1}, \\ \dfrac{\mathrm{G}(\varphi, \chi_1) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi_r)}{\mathrm{G}(\varphi, \chi_1 \dots \chi_r)} & si\ \chi_1 \dots \chi_r \neq \mathbb{1}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Démonstration. — Rappelons brièvement la démonstration (voir aussi celle donnée dans [BEW98, th. 10.3.1, p. 302]). La convolée additive des fonctions χ_1, ..., χ_r est définie par

$$(\chi_1 * \cdots * \chi_r)(a) = \sum_{\substack{x_1+\cdots+x_r=a \\ x_i \in \mathbb{F}_q^*}} \chi_1(x_1) \dots \chi_r(x_r).$$

Lorsque $a \neq 0$, elle est égale à $(\chi_1 \dots \chi_r)(a)\mathrm{J}(\chi_1, \dots, \chi_r)$. Pour calculer la valeur lorsque $a = 0$, on remarque que la somme de ces valeurs, pour $a \in \mathbb{F}_q$, est nulle car l'un des χ_i est non trivial. Par suite, $(\chi_1 \dots \chi_r)(0)$ est égal à 0 si $\chi_1 \dots \chi_r \neq \mathbb{1}$ et à $-(q-1)\mathrm{J}(\chi_1, \dots, \chi_r)$ si $\chi_1 \dots \chi_r = \mathbb{1}$. Par ailleurs, on a

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{G}(\varphi, \chi_i) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \varphi(a)(\chi_1 * \cdots * \chi_r)(a),$$

d'où

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{G}(\varphi, \chi_i) = \mathrm{J}(\chi_1, \dots, \chi_r) \times \begin{cases} \mathrm{G}(\varphi, \chi_1 \dots \chi_n) & \text{si } \chi_1 \dots \chi_r \neq \mathbb{1}, \\ \mathrm{G}(\varphi, \mathbb{1}) - (q-1) & \text{si } \chi_1 \dots \chi_r = \mathbb{1}, \end{cases}$$

ce qui montre le résultat voulu. □

Proposition 2.2.7 (Formule d'inversion de Fourier). — *Si $f : \mathbb{F}_q^* \to \Omega$ est une application, alors*

$$\forall x \in \mathbb{F}_q^*, \quad f(x) = \frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}} \left(\sum_{y \in \mathbb{F}_q^*} f(y)\eta^{-1}(y) \right) \eta(x). \tag{2.7}$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe des relations d'orthogonalité pour les caractères du groupe abélien $\mathbb{F}_q^*$. □

Corollaire 2.2.8. — *On a, pour $x \in \mathbb{F}_q^*$,*

$$\varphi(x) = \frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}} \mathrm{G}(\varphi, \eta^{-1}) \eta(x). \tag{2.8}$$

2.3 Nombre de points de certaines variétés de type hypergéométriques

Dans tout ce § 2.3, n désigne un entier ≥ 2 et $\mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal q.

2.3.1 Calcul du nombre de points

On considère ici certaines variétés affines de type hypergéométrique dont on exprime le nombre de points à l'aide de sommes de Gauss en suivant une méthode proche de celle utilisée par Koblitz dans [Kob83, § 5].

Théorème 2.3.1. — *Soient $k \geq l \geq 2$ deux entiers et $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ un paramètre ; on désigne par H_λ la variété affine d'équation*

$$\begin{cases} y^n = x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} (1-x_1)^{\beta_1} \dots (1-x_{l-1})^{\beta_{l-1}} (1 - x_l - \dots - x_k)^{\beta_l} \\ \lambda x_1 \dots x_l = 1 \end{cases}$$

où les α_i et β_i sont des entiers ≥ 1. Le nombre de points de H_λ dans $\mathbb{F}_q^{k+1}$ est

$$|\mathrm{H}_\lambda(\mathbb{F}_q)| = (q-1)^{l-1} q^{k-l} + \sum_{\substack{\chi^n = \mathbb{1} \\ \chi \neq \mathbb{1}}} \frac{1}{q-1} \sum_{\eta} \mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}\, \eta(\lambda),$$

où

$$\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta} = \frac{1}{q^\nu} \frac{\mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_1}\eta) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_l}\eta)\, \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\beta_1}) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\beta_l}) \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_{l+1}}) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_k})}{\mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_1+\beta_1}\eta) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_{l-1}+\beta_{l-1}}\eta) \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_l+\dots+\alpha_k+\beta_l}\eta)},$$

l'entier ν désignant le nombre de caractères triviaux parmi ceux apparaissant au dénominateur (à savoir les $\chi^{\alpha_j+\beta_j}\eta$ pour $1 \leq j \leq l-1$ et $\chi^{\alpha_l+\dots+\alpha_k+\beta_l}\eta$).

Démonstration. — Pour simplifier, écrivons $y^n = \mathrm{Q}(x_1, \dots, x_k)$ pour la première équation. On a :

$$|\mathrm{H}_\lambda(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{x \in (\mathbb{F}_q)^k,\, y \in \mathbb{F}_q \\ y^n = \mathrm{Q}(x) \\ \lambda x_1 \dots x_l = 1}} 1 = \sum_{\substack{x \in (\mathbb{F}_q)^k \\ \lambda x_1 \dots x_l = 1}} \sum_{\substack{y \in \mathbb{F}_q \\ y^n = \mathrm{Q}(x)}} 1,$$

avec

$$|\{y \in \mathbb{F}_q \mid y^n = z\}| = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0, \\ 1 + \sum_{\substack{\chi^n = \mathbb{1} \\ \chi \neq \mathbb{1}}} \chi(z) & \text{si } z \neq 0, \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{H}_\lambda(\mathbb{F}_q)| &= \sum_{\substack{x\in(\mathbb{F}_q)^k \\ \lambda x_1\dots x_l=1 \\ \mathrm{Q}(x)=0}} 1 + \sum_{\substack{x\in(\mathbb{F}_q)^k \\ \lambda x_1\dots x_l=1 \\ \mathrm{Q}(x)\neq 0}} \Big(1+\sum_{\substack{\chi^n=\mathbb{1} \\ \chi\neq\mathbb{1}}} \chi(\mathrm{Q}(x))\Big) \\
&= \sum_{\substack{x\in(\mathbb{F}_q)^k \\ \lambda x_1\dots x_l=1}} 1 + \sum_{\substack{x\in(\mathbb{F}_q)^k \\ \lambda x_1\dots x_l=1 \\ \mathrm{Q}(x)\neq 0}} \sum_{\substack{\chi^n=\mathbb{1} \\ \chi\neq\mathbb{1}}} \chi(\mathrm{Q}(x)) \\
&= (q-1)^{l-1}q^{k-l} + \sum_{\substack{\chi^n=\mathbb{1} \\ \chi\neq\mathbb{1}}} \sum_{\substack{x\in(\mathbb{F}_q)^k \\ \lambda x_1\dots x_l=1 \\ \mathrm{Q}(x)\neq 0}} \chi(\mathrm{Q}(x)) \\
&= (q-1)^{l-1}q^{k-l} + \sum_{\substack{\chi^n=\mathbb{1} \\ \chi\neq\mathbb{1}}} \sum_{\substack{x\in(\mathbb{F}_q)^k \\ \mathrm{Q}(x)\neq 0}} \chi(\mathrm{Q}(x))\delta_{\lambda x_1\dots x_l,1},
\end{aligned}$$

où $\delta_{z,z'}$ est le symbole de Kronecker (égal à 1 si $z=z'$ et nul sinon). Or, on a :

$$\forall z,z'\in\mathbb{F}_q^*,\quad \delta_{z,z'} = \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\eta(\tfrac{z}{z'}),$$

et donc :

$$|\mathrm{H}_\lambda(\mathbb{F}_q)| = (q-1)^{l-1}q^{k-l} + \sum_{\substack{\chi^n=\mathbb{1} \\ \chi\neq\mathbb{1}}} \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\Bigg(\sum_{\substack{x\in(\mathbb{F}_q)^k \\ \mathrm{Q}(x)\neq 0}} \chi(\mathrm{Q}(x))\eta(x_1\dots x_l)\Bigg)\eta(\lambda).$$

Calculons $\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta} = \sum_{\substack{x\in(\mathbb{F}_q)^k \\ \mathrm{Q}(x)\neq 0}} \chi(\mathrm{Q}(x))\eta(x_1\dots x_l)$. Puisque les α_i et β_i sont >0 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta} = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_k)\in(\mathbb{F}_q^*)^k \\ \forall i\leq l-1,\, x_i\neq 1 \\ x_l+\dots+x_k\neq 1}} & (\chi^{\alpha_1}\eta)(x_1)\chi^{\beta_1}(1-x_1)\dots(\chi^{\alpha_{l-1}}\eta)(x_{l-1})\chi^{\beta_{l-1}}(1-x_{l-1}) \\
& (\chi^{\alpha_l}\eta)(x_l)\chi^{\alpha_{l+1}}(x_{l+1})\dots\chi^{\alpha_k}(x_k)\chi^{\beta_l}(1-x_l-\dots-x_k).
\end{aligned}$$

On reconnaît un produit de sommes de Jacobi :

$$\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta} = \mathrm{J}(\chi^{\alpha_1}\eta,\chi^{\beta_1})\dots\mathrm{J}(\chi^{\alpha_{l-1}}\eta,\chi^{\beta_{l-1}})\mathrm{J}(\chi^{\alpha_l}\eta,\chi^{\alpha_{l+1}},\dots,\chi^{\alpha_k},\chi^{\beta_l}).$$

En utilisant la formule (2.6) page 20, on en déduit que

$$\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta} = \frac{1}{q^\nu}\,\frac{\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\alpha_1}\eta)\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\alpha_l}\eta)\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\alpha_{l+1}})\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\alpha_k})\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\beta_1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\beta_l})}{\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\alpha_1+\beta_1}\eta)\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\alpha_{l-1}+\beta_{l-1}}\eta)\mathrm{G}(\varphi,\chi^{\alpha_l+\dots+\alpha_k+\beta_l}\eta)},$$

l'entier ν désignant le nombre de caractères triviaux apparaissant au dénominateur. □

Notations. — Soit $\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}$ comme défini dans le théorème précédent ; on pose :

$$\mathrm{N}_{\lambda,\chi} = \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}\,\eta(\lambda)\ ;$$

$$\mathrm{N}_\lambda = \sum_{\substack{\chi^n=\mathbb{1} \\ \chi\neq\mathbb{1}}}\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}.$$

Corollaire 2.3.2. — *Supposons que* n *soit impair, que les éléments de la suite* $(\beta_1, \dots, \beta_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_k)$ *soient tous non multiples de* n *et que, pour* $1 \leq b \leq n-1$*, le nombre de termes de la suite* $\equiv b \mod n$ *soit égal à celui des termes* $\equiv -b \mod n$ *(ce qui implique que* k *est pair). Dans ces conditions, on parle d'*appariement total *et on a :*

$$\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta} = q^{\frac{k}{2}-\nu} \frac{\mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_1}\eta) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_l}\eta)}{\mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_1+\beta_1}\eta) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_{l-1}+\beta_{l-1}}\eta)\mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_l+\dots+\alpha_k+\beta_l}\eta)},$$

l'entier ν *désignant le nombre de caractères triviaux parmi ceux apparaissant au dénominateur.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la formule des compléments (2.4) :

$$\mathrm{G}(\varphi, \chi^{\beta_1}) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\beta_l})\mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_{l+1}}) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{\alpha_k}) = q^{\frac{k}{2}}.$$

(On notera que puisque $\chi \neq \mathbb{1}$ et que les α_i et β_j sont $\not\equiv 0 \mod n$, les caractères qui interviennent sont non triviaux, donc la formule des compléments s'applique avec $\chi(-1) = 1$ vu que n est impair.) □

2.3.2 Lien avec des hypersurfaces de type hypergéométrique

Supposons n impair et que $\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \mod n$.

Dans ce cas, H_λ a le même nombre de points que l'hypersurface de l'espace affine de dimension k d'équation

$$y^n = x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}(1-x_2)^{\beta_2} \dots (1-x_{l-1})^{\beta_{l-1}}(1-x_l-\dots-x_k)^{\beta_{l+1}}(1-\lambda x_2 \dots x_l)^{\beta_1}$$

privée des points où $x_2 \dots x_l = 0$. On retrouve ainsi une hypersurface de type hypergéométrique, de la même forme que celles mises à jour dans [CdlORV00, CdlORV03] pour le cas $n = 5$.

2.4 Nombre de points de X_ψ

Dans tout ce § 2.4, n désigne un entier ≥ 3. Le but est de calculer le nombre de points de X_ψ puis de l'organiser sous une forme appropriée pour relier ce nombre de points à celui des variétés de type hypergéométrique considérées dans le § 2.3.

Pour calculer le nombre de points de X_ψ en terme de sommes de Gauss, il est possible d'utiliser une méthode proche de celle employée par Weil dans [Wei49] pour le cas diagonal $\psi = 0$; voir par exemple [Kob83, th. 2, p. 13] ou [Wan06, § 3]. Après avoir rappelé ce calcul dans le nº 2.4.2, on organise les termes selon le schéma employé par Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas pour le cas $n = 5$ (voir [CdlORV00, § 9] et [CdlORV03, § 11]), à savoir une formule du type (cf. th. 2.4.10) :

$$|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + \dots + q^{n-2} + \mathrm{N}_{\text{miroir}} + \sum \mathrm{N}_s.$$

Dans le § 2.5, on expliquera comment chaque facteur N_s est relié à un facteur $\mathrm{N}_\lambda = |\mathrm{H}_\lambda(\mathbb{F}_q)| - (q-1)^{l-1}q^{k-l}$ considéré dans le § 2.3 (avec $\lambda = \frac{1}{\psi^n}$).

2.4.1 Préliminaires

Le but de ce numéro est de fixer certaines notations utiles par la suite. Les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $\mathfrak{S}_n$ agissent sur les $(s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ vérifiant $s_1 + \dots + s_n = 0$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \forall j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & j \cdot (s_1, \dots, s_n) = (s_1 + j, \dots, s_n + j) \ ; \\ \forall k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, & k \times (s_1, \dots, s_n) = (ks_1, \dots, ks_n) \ ; \\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, & {}^\sigma(s_1, \dots, s_n) = (s_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, s_{\sigma^{-1}(n)}). \end{array}$$

Définition 2.4.1. — *Soit $s = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ tel que $s_1 + \dots + s_n = 0$.*

a) On note $[s] = [s_1, \dots, s_n]$ la classe de $(s_1, \dots, s_n)$ modulo l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) On note $\langle s\rangle = \langle s_1, \dots, s_n\rangle$ la classe de $(s_1, \dots, s_n)$ modulo l'action conjointe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$.

c) On note $\bar{s}$ la classe de $(s_1, \dots, s_n)$ modulo l'action conjointe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

d) On note $\underset{\sim}{s}$ la classe de $(s_1, \dots, s_n)$ modulo l'action conjointe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

e) Finalement, on note γ_s le nombre de permutés de $(s_1, \dots, s_n)$.

Remarques 2.4.2.

a) Le nombre γ_s ne dépend que de $\bar{s}$, pas de $[s]$ ou de s.

b) Si tous les s_i sont égaux, on a $\gamma_s = 1$.

c) Si $\langle s\rangle = \langle 0, 1, 2, \dots, n-1\rangle$, alors $\gamma_s = n!$ mais le nombre de permutés de $[s]$ est $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ (il faut diviser par n car ajouter un même nombre à toutes les coordonnées revient à en faire une permutation circulaire).

Le lemme suivant, qui ne nous servira que plus tard (dans le lemme 2.5.2), montre que, lorsque n est premier, le calcul du nombre γ_s de permutés de $(s_1, \dots, s_n)$ se ramène dans la plupart des cas à celui du nombre de permutés de $[s_1, \dots, s_n]$.

Lemme 2.4.3. — *Supposons que n soit premier. Si $\langle s_1, \dots, s_n\rangle \neq \langle 0, 1, 2, \dots, n-1\rangle$, alors γ_s est égal au nombre de permutés de $(s_1, \dots, s_n)$.*

Démonstration. — S'il existe $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ non nul tel que $(s_1 + j, \dots, s_n + j)$ soit un permuté de $(s_1, \dots, s_n)$, alors l'ensemble $\{s_1, \dots, s_n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ stable par $x \mapsto x + j$ donc égale à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ puisque n est premier. Par conséquent, $\langle s\rangle = \langle 0, 1, 2, \dots, n-1\rangle$. □

Remarque 2.4.4. — Cette démonstration montre que, lorsque $\langle s\rangle \neq \langle 0, 1, \dots, n-1\rangle$, tout $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifiant ${}^\sigma s = s + j$ est nul.

2.4.2 Formule pour le nombre de points de X_ψ

Le but de ce numéro est de démontrer le théorème suivant, énoncé sous une forme légèrement différente par Koblitz dans [Kob83, § 3]. Nous reprenons les notations et hypothèses du § 2.1 : $\mathbb{F}_q$ est un corps fini, n est un entier ≥ 3 tel que $q \equiv 1 \mod n$, $\psi \in \mathbb{F}_q$ est un paramètre non nul (on ne suppose pas ici que $\psi^n \neq 1$) et X_ψ est l'hypersurface de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}_q}$ d'équation $x_1^n + \dots + x_n^n - n\psi x_1 \dots x_n = 0$.

Théorème 2.4.5 (Koblitz). — *On a*

$$|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1+q+\cdots+q^{n-2}+\frac{1}{q-1}\sum_{[s]}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\frac{1}{q^\delta}\left(\prod_{i=1}^n \mathrm{G}(\varphi,\chi^{-s_i}\eta^{-1})\right)\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\eta(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}),$$

où $\delta = 0$ *si l'un des* $\chi^{s_i}\eta$ *est trivial et* $\delta = 1$ *sinon.*

Démonstration. — Par soucis d'être complet, et puisque déduire les formules ci-dessus de celles données par Koblitz serait tout aussi long, on rappelle la démonstration de Koblitz.

Posons $f(x) = x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \dots x_n$ et définissons

$$\nu_q(\mathrm{X}_\psi) = |\{x \in (\mathbb{F}_q)^n \mid f(x) = 0\}| \quad \text{et} \quad \nu_q^*(\mathrm{X}_\psi) = |\{x \in (\mathbb{F}_q^*)^n \mid f(x) = 0\}|.$$

Puisque le produit $x_1 \dots x_n$ est nul dès que l'un des x_i est nul, on a $\nu_q(\mathrm{X}_\psi) - \nu_q^*(\mathrm{X}_\psi) = \nu_q(\mathrm{X}_0) - \nu_q^*(\mathrm{X}_0)$, c'est-à-dire :

$$\nu_q(\mathrm{X}_\psi) = \nu_q(\mathrm{X}_0) + \nu_q^*(\mathrm{X}_\psi) - \nu_q^*(\mathrm{X}_0).$$

Le calcul de $\nu_q(\mathrm{X}_0)$ est classique et remonte à Weil [Wei49], aussi ne le rappelle-t-on pas (voir par exemple [BEW98, th. 10.4.2, p. 304]). En utilisant la formule (2.6) pour tout exprimer en terme de sommes de Gauss et en faisant le changement de variable $\chi_i \mapsto \chi_i^{-1}$, voici ce que l'on trouve :

$$\nu_q(\mathrm{X}_0) = q^{n-1} + \frac{q-1}{q}\sum_{\substack{\chi_i^n=\mathbb{1},\ \chi_i\neq\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}}}\left(\prod_{i=1}^n \mathrm{G}(\varphi,\chi_i^{-1})\right). \tag{2.9}$$

Il nous reste donc à calculer $\nu_q^*(\mathrm{X}_\psi)$ et $\nu_q^*(\mathrm{X}_0)$. Ces deux quantités se calculent chacune par la même méthode ; la seule différence est que lorsque $\psi = 0$, le polynôme $f(x)$ a n monômes au lieu de $n+1$ ce qui change légèrement le résultat. Nous donnons les détails pour $\nu_q^*(\mathrm{X}_\psi)$ lorsque $\psi \neq 0$.

La formule d'orthogonalité (2.3) page 19 pour les caractères additifs montre que :

$$\begin{aligned}\nu_q^*(\mathrm{X}_\psi) &= \frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}_q}\sum_{x\in(\mathbb{F}_q^*)^n}\varphi(af(x))\\ &= \frac{(q-1)^n}{q} + \frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}_q^*}\sum_{x\in(\mathbb{F}_q^*)^n}\left(\prod_{i=1}^n\varphi(ax_i^n)\right)\varphi(-n\psi a x_1\dots x_n).\end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule exprimant un caractère additif en terme de sommes de Gauss (formule (2.8) page 21) :

$$\begin{aligned}\nu_q^*(\mathrm{X}_\psi) = \frac{(q-1)^n}{q} + \frac{1}{q}\sum_{\eta_1,\dots,\eta_{n+1}\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\left(\prod_{i=1}^{n+1}\mathrm{G}(\varphi,\eta_i^{-1})\right)\left(\frac{1}{q-1}\sum_{a\in\mathbb{F}_q^*}(\eta_1\dots\eta_{n+1})(a)\right)\\ \prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{q-1}\sum_{x_i\in\mathbb{F}_q^*}(\eta_i^n\eta_{n+1})(x_i)\right)\eta_{n+1}(-n\psi).\end{aligned}$$

D'après les relations d'orthogonalité, les sommes sur a et les x_i sont toutes non nulles (égales à $q-1$) si et seulement si :

$$\begin{cases}\eta_1\dots\eta_n\eta_{n+1}=\mathbb{1}\\ \forall i\in[\![1\,;n]\!],\quad \eta_i^n\eta_{n+1}=\mathbb{1}\end{cases}\qquad\text{c'est-à-dire}\quad \exists\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*,\quad \begin{cases}\eta_i=\chi_i\eta\\ \chi_i^n=\mathbb{1}\text{ et }\chi_1\dots\chi_n=\mathbb{1}\\ \eta_{n+1}=\eta^{-n}\end{cases}$$

Le caractère η ainsi défini n'est pas unique ; en effet, si η' et χ_i' sont aussi solutions du système, il existe χ vérifiant $\chi^n=\mathbb{1}$ tel que $\eta'=\chi^{-1}\eta$ et $\chi_i'=\chi\chi_i$ pour tout i. Cela signifie que si R est un système de représentants des n-uplets $(\chi_1,\dots,\chi_n)$ de caractères vérifiant $\chi_i^n=\mathbb{1}$ et $\chi_1\dots\chi_n=\mathbb{1}$ modulo les $(\chi,\dots,\chi)$ avec $\chi^n=\mathbb{1}$, l'application $(\chi_1,\dots,\chi_n,\eta)\mapsto(\chi_1\eta,\dots,\chi_n\eta,\eta^{-n})$ est une bijection de $\mathrm{R}\times\widehat{\mathbb{F}}_q^*$ sur l'ensemble des $(n+1)$-uplets $(\eta_1,\dots,\eta_{n+1})$ vérifiant les conditions précédentes. De cela, il résulte que, si χ est un caractère multiplicatif d'ordre n :

$$\nu_q^*(\mathrm{X}_\psi)=\frac{(q-1)^n}{q}+\frac{1}{q}\sum_{[s]}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\Bigg(\prod_{i=1}^n\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-s_i}\eta^{-1})\Bigg)\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\eta\big(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}\big).\tag{2.10}$$

Ceci achève le calcul de $\nu_q^*(\mathrm{X}_\psi)$. Par une méthode analogue, on trouve :

$$\nu_q^*(\mathrm{X}_0)=\frac{(q-1)^n}{q}+\frac{q-1}{q}\sum_{\substack{\chi_i^n=\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}}}\Bigg(\prod_{i=1}^n\mathrm{G}(\varphi,\chi_i^{-1})\Bigg).\tag{2.11}$$

En comparant (2.9) et (2.11), on peut donc écrire :

$$\nu_q(\mathrm{X}_0)-\nu_q^*(\mathrm{X}_0)=q^{n-1}-\frac{(q-1)^n}{q}-\frac{q-1}{q}\sum_{\substack{\chi_i^n=\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}\\ \exists i,\ \chi_i=\mathbb{1}}}\Bigg(\prod_{i=1}^n\mathrm{G}(\varphi,\chi_i^{-1})\Bigg),$$

d'où :

$$\nu_q(\mathrm{X}_0)-\nu_q^*(\mathrm{X}_0)=q^{n-1}-\frac{(q-1)^n}{q}-\frac{q-1}{q}\sum_{\substack{\chi_i^n=\mathbb{1}\text{ et }\exists i,\ \chi_i=\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}\\ (\chi_1,\dots,\chi_n)\bmod\{(\chi,\dots,\chi)\}}}\ \sum_{\substack{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*\\ \eta^n=\mathbb{1}}}\Bigg(\prod_{i=1}^n\mathrm{G}(\varphi,(\chi_i\eta)^{-1})\Bigg),$$

Toujours en notant χ un caractère d'ordre n et en écrivant $\chi_i=\chi^{s_i}$, on ramène la première somme à une somme sur les $[s]$ tels que $\exists i,\ s_i=0$; finalement, on combine les termes de cette somme aux termes vérifiant $\eta^n=\mathbb{1}$ dans la formule (2.10) pour $\nu_q^*(\mathrm{X}_\psi)$. Vu que $\mathrm{G}(\varphi,\mathbb{1})=-1$, on a alors, avec δ comme dans l'énoncé du théorème :

$$\begin{aligned}\nu_q(\mathrm{X}_\psi)&=\nu_q^*(\mathrm{X}_\psi)+\nu_q(\mathrm{X}_0)-\nu_q^*(\mathrm{X}_0)\\ &=q^{n-1}+\sum_{[s]}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\frac{1}{q^\delta}\Bigg(\prod_{i=1}^n\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-s_i}\eta^{-1})\Bigg)\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\eta\big(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}\big).\end{aligned}$$

En comptant le nombre de points dans l'espace projectif au lieu de l'espace affine, on obtient exactement la formule souhaitée. □

2.4.3 Réorganisation des termes

Conservons les hypothèses et notations du nº 2.4.2 et supposons que n soit impair. Le but de ce numéro est de récrire la formule obtenue pour $|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)|$ dans le théorème 2.4.5 en terme de certains coefficients $\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}$ qu'on définit maintenant.

Définition 2.4.6. — *Considérons* $(s_1,\ldots,s_n)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ *tel que* $s_1+\cdots+s_n=0$. *Si* χ *est un caractère multiplicatif de* $\mathbb{F}_q^*$ *d'ordre* n *et si* η *est un caractère multiplicatif quelconque de* $\mathbb{F}_q^*$, *on pose :*

$$\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}=q^{\frac{n+1}{2}-z-\delta}\,\frac{\mathrm{G}(\varphi,\eta)\mathrm{G}(\varphi,\chi\eta)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{n-1}\eta)}{\mathrm{G}(\varphi,\chi^{s_1}\eta)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{s_n}\eta)}\,, \tag{2.12}$$

où z *désigne le nombre de caractères triviaux dans la suite finie* $(\chi^{s_1}\eta,\ldots,\chi^{s_n}\eta)$ *et où* $\delta=0$ *si* $z\neq 0$ *et* $\delta=1$ *si* $z=0$.

Proposition 2.4.7. — *On a :*

$$\frac{1}{q^\delta}\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-s_i}\eta^{-1})\right)\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\eta(\tfrac{1}{(-n\psi)^n})=\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}\,\eta(\tfrac{1}{\psi^n}).$$

Démonstration. — D'après la formule des compléments (2.4), on a

$$\prod_{i=1}^{n}\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-s_i}\eta^{-1})=q^{n-z}\,\frac{\eta(-1)^n}{\mathrm{G}(\varphi,\chi^{s_1}\eta)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{s_n}\eta)}\,,$$

et, d'après la formule de multiplication (2.5), vu que n est impair, on a :

$$\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)=\frac{\eta(n)^n}{q^{\frac{n-1}{2}}}\,\mathrm{G}(\varphi,\eta)\mathrm{G}(\varphi,\chi\eta)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{n-1}\eta).$$

Ces deux formules donnent exactement le résultat voulu. □

Les coefficients β ainsi définis vérifient les trois propriétés suivantes de compatibilité avec les actions des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Lemme 2.4.8. — *Avec les mêmes notations et hypothèses que la définition précédente :*

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n,\qquad \beta_{(s_{\sigma(1)},\ldots,s_{\sigma(n)}),\chi,\eta}=\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}\ ; \tag{2.13}$$

$$\forall j\in\mathbb{Z},\qquad \beta_{(s_1+j,\ldots,s_n+j),\chi,\eta}=\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\chi^j\eta}\ ; \tag{2.14}$$

$$\forall k\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\quad \beta_{(ks_1,\ldots,ks_n),\chi,\eta}=\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi^k,\eta}. \tag{2.15}$$

Démonstration. — La première formule résulte immédiatement de la définition des coefficients β. Pour la deuxième et la troisième, on remarque que le produit $\mathrm{G}(\varphi,\eta)\mathrm{G}(\varphi,\chi\eta)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{n-1}\eta)$ dans la formule (2.12) est invariant si on change η en $\chi^j\eta$ ou si on change χ en χ^k avec k premier à n. □

Proposition 2.4.9. — *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, les quantités suivantes ne dépendent que de* $\langle s\rangle$ *(ainsi que du choix de* χ*) et de* $\bar{s}$ *respectivement et non du représentant* $(s_1,\ldots,s_n)$ *choisi :*

$$\mathrm{N}_{\langle s\rangle,\chi}=\frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}\,\eta(\tfrac{1}{\psi^n})\ ;$$

$$\mathrm{N}_{\underline{s}}=\gamma_s\sum_{\langle s'\rangle\in\bar{s}}\mathrm{N}_{\langle s'\rangle,\chi}.$$

Démonstration. — Pour $\mathrm{N}_{[s],\chi}$ il suffit d'utiliser la formule (2.14) et le fait que $\eta \mapsto \chi^j\eta$ est une bijection de $\widehat{\mathbb{F}}_q^*$ sur lui-même si $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour $\mathrm{N}_{\underline{s}}$, il suffit d'utiliser la formule (2.15) et le fait que $\chi \mapsto \chi^k$ est une bijection de $\{\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^* \mid \chi^n = \mathbb{1}\}$ sur lui-même si $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. □

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 2.4.10. — *L'entier n étant impair, on peut écrire :*

$$|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + \sum_{\bar{s}} \mathrm{N}_{\underline{s}}.$$

Remarque 2.4.11. — Comme on va le voir dans le numéro suivant, $\mathrm{N}_{\bar{0}} = \mathrm{N}_{\mathrm{miroir}}$ et, lorsque X_ψ est non singulière (c'est-à-dire lorsque $\psi^n \neq 1$), $\mathrm{N}_{\overline{(0,1,2,\ldots,n-1)}} = 0$.

2.4.4 Identification de certains facteurs

Le but de ce numéro est de préciser la nature de certains des termes du théorème 2.4.10 précédent. On reprend les hypothèses et notations du numéro précédent.

Rappelons que la notation Y_ψ désigne le « miroir singulier » de X_ψ, ainsi qu'évoqué dans le § 2.1. On pose $\mathrm{N}_{\mathrm{miroir}} = |\mathrm{Y}_\psi(\mathbb{F}_q)| - (1 + q + \cdots + q^{n-2})$.

Théorème 2.4.12 (Wan). — *On a* $\mathrm{N}_{\bar{0}} = \mathrm{N}_{\mathrm{miroir}}$.

Démonstration. — Voir [Wan06, § 4] ; la démonstration utilise de manière essentielle l'hypothèse $q \equiv 1 \mod n$ et le résultat n'est pas connu dans le cas général (hormis si n est premier, voir [Hae06]). □

Rappelons que, dans ce § 2.4, la seule hypothèse qu'on fait sur ψ est que $\psi \neq 0$.

Lemme 2.4.13. — *On a*

$$\mathrm{N}_{\langle 0,1,2,\ldots,n-1\rangle,\chi} = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi^n \neq 1, \\ q^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } \psi^n = 1, \end{cases}$$

et donc le terme $\mathrm{N}_{\overline{(0,1,2,\ldots,n-1)}} = (n-1)!\,\mathrm{N}_{\langle 0,1,2,\ldots,n-1\rangle,\chi}$ ne contribue pas à la fonction zêta $\mathrm{Z}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$ lorsque $\psi^n \neq 1$ et contribue à hauteur de $(1 - q^{(n-1)/2}t)^{-(n-1)!}$ lorsque $\psi^n = 1$.

Démonstration. — Lorsque $(s_1, \ldots, s_n) = (0, 1, \ldots, n-1)$, on a $\mathrm{G}(\varphi, \chi^{s_1}\eta) \ldots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{s_n}\eta) = \mathrm{G}(\varphi, \eta)\mathrm{G}(\varphi, \chi\eta) \ldots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{n-1}\eta)$. Par ailleurs, le nombre z de caractères triviaux dans la suite $(\eta, \chi\eta, \ldots, \chi^{n-1}\eta)$ est égal à $1 - \delta$ avec les notations de la définition 2.4.6, d'où

$$\beta_{(0,1,\ldots,n-1),\chi,\eta} = q^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{N}_{\langle 0,1,2,\ldots,n-2,n-1\rangle,\chi} = \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*} \eta\left(\tfrac{1}{\psi^n}\right),$$

d'où la conclusion grâce aux formules d'orthogonalité. □

Remarque 2.4.14. — Un résultat similaire avait été constaté lorsque $q = p$ dans le cas $n = 5$ par Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas (voir [CdlORV00, § 9.3]).

2.5 Liens entre les nombres de points

Dans tout ce § 2.5, l'entier n sera supposé premier ≥ 5 et l'entier q sera supposé $\equiv 1 \bmod n$. On ajoutera l'hypothèse $\psi^n \neq 1$ uniquement dans le théorème 2.5.10.

Le but de ce paragraphe est de montrer (voir n° 2.5.4) la formule (2.1) du § 2.1. Plus explicitement, on montre, dans le théorème 2.5.7, que chaque $\mathrm{N}_{\underline{s}}$ (avec $\bar{s} \neq \bar{0}$) (2) intervenant dans le théorème 2.4.10 est égal, à un facteur multiplicatif entier près et à une puissance de q près, à un terme du type :

$$\mathrm{N}_\lambda = \sum_{\substack{\chi^n = \mathbb{1} \\ \chi \neq \mathbb{1}}} \mathrm{N}_{\lambda,\chi} = \sum_{\substack{\chi^n = \mathbb{1} \\ \chi \neq \mathbb{1}}} \frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*} \mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}\, \eta(\lambda), \tag{2.16}$$

où $\lambda = \frac{1}{\psi^n}$ et $\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}$ est donné par le corollaire 2.3.2 page 23.

Le point essentiel est, à partir d'un $\bar{s}$ donné, de trouver les entiers α_i et β_j qui interviennent. Pour cela, on définit dans le n° 2.5.2 des entiers v_i et w_i à partir desquels on définit ensuite les entiers α_i et β_j dans le n° 2.5.3. On commence par un résultat de divisibilité utile pour le théorème 2.5.7.

2.5.1 Un résultat de divisibilité

Le but de ce n° 2.5.1 est de montrer que l'entier γ_s (voir déf. 2.4.1) est divisible par

$$\mathrm{K}_s = |\{k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \mid [ks_1, \ldots, ks_n] \text{ est un permuté de } [s_1, \ldots, s_n]\}|.$$

Ce résultat est crucial dans le théorème 2.5.7 pour s'assurer que le quotient γ_s/K_s qui apparaît est entier. Notons que K_s ne dépend que de $\underline{s}$, pas du choix de s.

Définition 2.5.1. — *Étant donné $s \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ tel que $s_1 + \cdots + s_n = 0$, on considère les sous-groupes suivants de $\mathfrak{S}_n$:*

$$\mathrm{S}'_s = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid s = \sigma \cdot s\} \ ;$$
$$\mathrm{S}_s = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid [{}^\sigma s] = [s]\} \ ;$$
$$\mathrm{S}_{\bar{s}} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \exists k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\ \ [{}^\sigma s] = [ks]\}.$$

Notons qu'avec ces notations, le nombre γ_s (notation de la définition 2.4.1) de permutés de $(s_1, \ldots, s_n)$ est égal à $[\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}'_s]$ tandis que $[\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}_s]$ est le nombre de permutés de $[s_1, \ldots, s_n]$.

Lemme 2.5.2. — *Lorsque $\bar{s} \neq \bar{0}$, l'entier K_s divise $[\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}_s]$. Par conséquent, lorsque $\langle s \rangle \neq \langle 0, 1, 2, \ldots, n-1 \rangle$, K_s divise $\gamma_s = [\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}'_s]$.*

Démonstration. — Notons que :

$$\mathrm{K}_s = \frac{|\mathrm{S}_{\bar{s}}|}{|\mathrm{S}_s|} \cdot |\{k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \mid [ks] = [s]\}|.$$

Puisque $[s] \neq [0, \ldots, 0]$, on a $|\{k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \mid [ks] = [s]\}| = 1$ et donc :

$$[\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}_s] = [\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}_{\bar{s}}] \cdot \mathrm{K}_s.$$

Lorsque de plus $\langle s \rangle \neq \langle 0, 1, 2, \ldots, n-1 \rangle$, on a $\gamma_s = [\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}_s]$ d'après le lemme 2.4.3 page 24, d'où le résultat. □

2. Notons qu'il n'existe pas de $\bar{s} \neq \bar{0}$ lorsque $n = 3$; c'est pourquoi on fait l'hypothèse $n \geq 5$.

2.5.2 Transformation des coefficients $\boldsymbol{\beta}$

Pour pouvoir relier les $\mathrm{N}_{\underline{s}}$ à certains N_{1/ψ^n} dans le nº 2.5.3, on doit avant cela légèrement modifier la formule donnant les coefficients $\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}$.

Notations. — Soit $(s_1,\ldots,s_n)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ tel que $s_1+\cdots+s_n=0$. Pour tout $b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, posons $k(b)=|\{i\mid s_i=b\}|$; on a les relations :

$$\sum_{b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} k(b)b=0 \quad\text{et}\quad \sum_{b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} k(b)=n,$$

et on pose $n'=|\{b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\mid k(b)\neq 0\}|$ et $m=n-n'$.

Remarques 2.5.3.

a) L'entier n' vérifie $1\leq n'\leq n$.

b) On a $n'=1$ si et seulement si $[s]=[0,\ldots,0]$.

c) On a $n'=n$ si et seulement si $\langle s\rangle=\langle 0,1,\ldots,n-1\rangle$.

d) Puisque n est premier, l'entier n' est $\neq 2$. En effet, si $k_1b_1+k_2b_2=0$ avec $k_1,k_2\geq 1$ et $k_1+k_2=n$, on a $k_1\not\equiv 0 \mod n$ et $k_1(b_1-b_2)=0$ d'où $b_1=b_2$.

e) Puisque n est impair, l'entier n' est $\neq n-1$. En effet, soient s_1, …, s_{n-1} des éléments distincts de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; notons s_n l'élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui n'apparaît pas dans cette liste ; puisque n est impair, on a $s_1+\cdots+s_n=0$, et donc $2s_1+\cdots+s_{n-1}=s_1-s_n\neq 0$.

f) Ainsi, si $\langle s\rangle\neq\langle 0,1,\ldots,n-1\rangle$, alors $m\geq 2$ et si de plus $[s]\neq[0]$, alors $2\leq m\leq n-3$.

Théorème 2.5.4. — *Avec les notations précédentes :*

$$\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}=q^{\frac{n-1}{2}-\nu}\,\frac{\prod\limits_{b\,|\,k(b)=0}\mathrm{G}(\varphi,\chi^b\eta)}{\prod\limits_{b\,|\,k(b)\neq 0}\mathrm{G}(\varphi,\chi^b\eta)^{k(b)-1}},$$

où $\nu=0$ sauf s'il existe un b tel que $\chi^b\eta=\mathbb{1}$ et $k(b)\neq 0$, auquel cas $\nu=k(b)-1$.

Démonstration. — Par définition même de $\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}$ (déf. 2.4.6 p. 27), on a

$$\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}=q^{\frac{n+1}{2}-z-\delta}\,\frac{\prod\limits_{b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathrm{G}(\varphi,\chi^b\eta)}{\prod\limits_{b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathrm{G}(\varphi,\chi^b\eta)^{k(b)}}=q^{\frac{n+1}{2}-z-\delta}\,\frac{\prod\limits_{b\,|\,k(b)=0}\mathrm{G}(\varphi,\chi^b\eta)}{\prod\limits_{b\,|\,k(b)\neq 0}\mathrm{G}(\varphi,\chi^b\eta)^{k(b)-1}}.$$

Il reste à montrer que $z+\delta=1+\nu$. Rappelons que z est le nombre de caractères triviaux dans la suite finie $(\chi^{s_1}\eta,\ldots,\chi^{s_n}\eta)$ et que $\delta=0$ si $z\neq 0$ et $\delta=1$ si $z=0$. Si $z=0$, alors $\delta=1$ et $\nu=0$ et donc $z+\delta=1+\nu$; si $z\neq 0$, il existe un unique $b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\eta=\chi^{-b}$. On a alors $z=k(b)$, $\delta=0$ et $\nu=k(b)-1$, d'où $z+\delta=1+\nu$. □

Remarque 2.5.5. — Soit $(v_1,\ldots,v_m)$ une énumération des $b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $k(b)=0$ et soit $(w_1,\ldots,w_m)$ une énumération des $b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $k(b)\geq 2$, chacun répétés avec multiplicité $k(b)-1$. La formule du théorème 2.5.4 se récrit

$$\beta_{(s_1,\ldots,s_n),\chi,\eta}=q^{\frac{n-1}{2}-\nu}\,\frac{\mathrm{G}(\varphi,\chi^{v_1}\eta)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{v_m}\eta)}{\mathrm{G}(\varphi,\chi^{w_1}\eta)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{w_m}\eta)},\tag{2.17}$$

où ν est le nombre de caractères triviaux apparaissant au dénominateur.

Lemme 2.5.6. — *Avec les notations de la remarque précédente,*

$$v_1 + \cdots + v_m \equiv w_1 + \cdots + w_m \mod n.$$

Démonstration. — Avec les notations précédentes, cette identité se récrit

$$\sum_{b \,|\, k(b)=0} b = \sum_{b \,|\, k(b)\geq 1} (k(b)-1)b \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_b b = \sum_b k(b)b.$$

Or on a $\sum_{b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} k(b)b = 0$ et, puisque n est impair, $\sum_{b\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} b = 0$. □

2.5.3 Lien avec les variétés hypergéométriques

Théorème 2.5.7. — *Soit $\bar{s}$ une classe distincte de celle de $(0,1,\ldots,n-1)$ et de $(0,\ldots,0)$. Si s est un représentant de $\bar{s}$, supposons qu'il existe des suites $(v_1,\ldots,v_m)$ et $(w_1,\ldots,w_m)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ satisfaisant les hypothèses de la remarque 2.5.5 et un entier pair $m' \leq m-2$ tel que :*

$$\forall i \in [\![1\,;\tfrac{m'}{2}]\!], \quad w_{2i-1} - v_{2i-1} \equiv -(w_{2i} - v_{2i}) \mod n.$$

On considère la variété affine de dimension $2m - m' - 3$ d'équations

$$\begin{cases} y^n = x_1^{v_1} \ldots x_m^{v_m} x_{m+1}^{v_{m'+1}-w_{m'+1}} \ldots x_{2m-m'-2}^{v_{m-2}-w_{m-2}} (1-x_1)^{w_1-v_1} \ldots (1-x_{m-1})^{w_{m-1}-v_{m-1}} \\ \qquad\qquad (1 - x_m - \cdots - x_{2m-m'-2})^{v_{m-1}-w_{m-1}} \\ x_1 \ldots x_m = \psi^n \end{cases}$$

(Dans cette écriture, on remplace les exposants par leurs représentants dans $[\![1\,;n]\!]$.) C'est une variété du type considéré dans le corollaire 2.3.2 et on a

$$\mathrm{N}_{\underline{s}} = \frac{\gamma_s}{\mathrm{K}_s} q^{\frac{n+1}{2} - \frac{2m-m'}{2}} \mathrm{N}_{1/\psi^n}, \qquad \text{où } \gamma_s/\mathrm{K}_s \in \mathbb{N} \text{ d'après le lemme 2.5.2.}$$

Démonstration. — Puisque $\bar{s}$ est une classe distincte de celle de $(0,1,\ldots,n-1)$, on a $m \geq 2$ (voir rem. 2.5.3.*f* p. 30). La variété considérée est celle introduite dans le théorème 2.3.1 page 21 où l'on prend $l = m$, $k = 2m - m' - 2$ et :

$$\alpha_1 = v_1, \quad \ldots, \quad \alpha_m = v_m\ ;$$
$$\alpha_{m+1} = v_{m'+1} - w_{m'+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_{2m-m'-2} = v_{m-2} - w_{m-2}\ ;$$
$$\beta_1 = w_1 - v_1, \quad \ldots, \quad \beta_{m-1} = w_{m-1} - v_{m-1}, \quad \beta_m = v_{m-1} - w_{m-1}.$$

D'après l'hypothèse d'appariement sur les v_i et w_i et le lemme 2.5.6 page 31, on a

$$v_{m'+1} + \cdots + v_m = w_{m'+1} + \cdots + w_m \quad \text{dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Autrement dit : $\alpha_m + \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_{2m-m'-2} + \beta_m \equiv w_m \mod n$. De plus :

$$\alpha_1 + \beta_1 \equiv w_1 \mod n, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1} + \beta_{m-1} \equiv w_{m-1} \mod n\ ;$$
$$\beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \mod n, \quad \ldots, \quad \beta_{m'-1} + \beta_{m'} \equiv 0 \mod n\ ;$$
$$\alpha_{m+1} + \beta_{m'+1} \equiv 0 \mod n, \quad \ldots, \quad \alpha_{2m-m'-2} + \beta_{m-2} \equiv 0 \mod n\ ;$$
$$\beta_{m-1} + \beta_m \equiv 0 \mod n.$$

Les trois dernières lignes permettent de dire qu'il y a appariement total au sens du corollaire 2.3.2 page 23 de la suite $(\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{2m-m'-2})$ (ces éléments sont $\not\equiv 0 \mod n$ car $v_i \not\equiv w_i \mod n$), et donc :

$$\mathrm{N}_{1/\psi^n,\chi,\eta} = q^{\frac{2m-m'-2}{2}-\nu} \frac{\mathrm{G}(\varphi, \chi^{v_1}\eta) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{v_m}\eta)}{\mathrm{G}(\varphi, \chi^{w_1}\eta) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi^{w_m}\eta)},$$

d'où, en comparant avec la formule (2.17) page 30 :

$$\beta_{(s_1,\dots,s_n),\chi,\eta} = q^{\frac{n+1}{2}-\frac{2m-m'}{2}} \mathrm{N}_{1/\psi^n,\chi,\eta}.$$

En multipliant l'égalité précédente par $\frac{1}{q-1}\eta(\frac{1}{\psi^n})$ et en sommant sur $\eta \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*$, on obtient la relation

$$\mathrm{N}_{\langle s\rangle,\chi} = q^{\frac{n+1}{2}-\frac{2m-m'}{2}} \mathrm{N}_{1/\psi^n,\chi}.$$

Sommons désormais, pour $1 \le k \le n-1$, la relation précédente où χ est remplacée par χ^k. En remarquant que $\mathrm{N}_{\langle s\rangle,\chi^k} = \mathrm{N}_{\langle ks\rangle,\chi}$ (voir formule (2.15) p. 27), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{N}_{\langle ks\rangle,\chi} = q^{\frac{n+1}{2}-\frac{2m-m'}{2}} \mathrm{N}_{1/\psi^n}.$$

Le membre de gauche est égal à $\mathrm{K}_s \sum_{\langle s'\rangle \in \bar{s}} \mathrm{N}_{\langle s'\rangle,\chi}$ c'est-à-dire à $\frac{\mathrm{K}_s}{\gamma_s}\mathrm{N}_{\underline{s}}$. Puisque $[s] \neq [0]$, le lemme 2.5.2 page 29 montre que $\frac{\gamma_s}{\mathrm{K}_s}$ est un entier. Le théorème est donc démontré. □

Remarque 2.5.8. — Lorsque $m' = m-2$, on a $v_{m-1} - w_{m-1} = w_m - v_m$ d'après le lemme 2.5.6 page 31 et l'équation de la variété se simplifie grandement :

$$\begin{cases} y^n = x_1^{v_1} \dots x_m^{v_m} (1-x_1)^{w_1-v_1} \dots (1-x_m)^{w_m-v_m} \\ x_1 \dots x_m = \psi^n \end{cases}$$

2.5.4 Conclusion

On est maintenant en mesure de démontrer la formule (2.1) du § 2.1. On commence par un résultat qui permet de compter le nombre d'appariements. Ceci permettra de montrer que la dimension des variétés hypergéométriques est toujours $\le n-4$.

Proposition 2.5.9. — *Soit $\bar{s}$ une classe distincte de celle de $(0, 1, \dots, n-1)$ et de $(0, \dots, 0)$ et s un représentant de $\bar{s}$. On peut choisir des suites $(v_1, \dots, v_m)$ et $(w_1, \dots, w_m)$ vérifiant les hypothèses de la remarque 2.5.5 telles que :*

$$\forall i \in [\![1\,;\tfrac{2m-n+1}{2}]\!], \quad w_{2i-1} - v_{2i-1} \equiv -(w_{2i} - v_{2i}) \mod n.$$

Démonstration. — Soient $(v_1, \dots, v_m)$ et $(w_1, \dots, w_m)$ des suites satisfaisant les conditions de la remarque 2.5.5 page 30. D'après le théorème 1.2 de [Alo00, p. 126], il est possible de permuter $(w_1, \dots, w_m)$ de telle sorte que les $v_i - w_i$ soient deux à deux distincts. Notons alors V l'ensemble des $v_i - w_i$ (c'est une partie à m éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) et μ le nombre de paires d'éléments opposés contenus dans V ; on a

$$2\mu = |\mathrm{V} \cap (-\mathrm{V})| = 2m - |\mathrm{V} \cup (-\mathrm{V})| \ge 2m - (n-1).$$

Puisque 2μ est le nombre d'appariement maximal on en déduit le résultat voulu. □

Théorème 2.5.10. — *Si $\psi^n \neq 1$, alors on peut écrire :*

$$|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + \mathrm{N}_{\text{miroir}} + q^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{N}_1 + q^{\frac{n-5}{2}}\mathrm{N}_3 + \cdots + q\mathrm{N}_{n-4},$$

où chaque N_d est une somme de quantités du type $|\mathrm{H}_\lambda(\mathbb{F}_q)| - (q-1)^{l-1}q^{k-l}$ où les α_i et β_j sont obtenus à partir de chacun des $\bar{s}$ de la façon décrite dans le n^o 2.5.3 et où H_λ est une variété de type hypergéométrique de dimension impaire égale à d avec $d \leq n-4$ (ici, $\lambda = 1/\psi^n$).

Démonstration. — On a vu dans le théorème 2.4.10 page 28 que, si $\psi \neq 0$ et $q \equiv 1 \mod n$, on peut écrire :

$$|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + \mathrm{N}_{\bar{0}} + \sum_{\bar{s}\neq\bar{0}} \mathrm{N}_{\underline{s}}.$$

Le terme $\mathrm{N}_{\bar{0}}$ a été identifié par Wan (voir th. 2.4.12 p. 28) et dans le lemme 2.4.13, on a montré que le terme correspondant à la classe de $(0,1,2,\dots,n-1)$ était nul lorsque $\psi^n \neq 1$.

Considérons donc une classe $\bar{s}$ distincte de $\bar{0}$ et de la classe de $(0,1,2,\dots,n-1)$. Soit m' le plus grand entier pair $\leq m-2$ tel qu'il existe deux suites $(v_1,\dots,v_m)$ et $(w_1,\dots,w_m)$ satisfaisant les hypothèses de la remarque 2.5.5 et vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;\tfrac{m'}{2}]\!], \quad w_{2i-1} - v_{2i-1} \equiv -(w_{2i} - v_{2i}) \mod n.$$

D'après la proposition 2.5.9, on a $m' \geq 2m-n+1$ (notons que, d'après la remarque 2.5.3.*f* page 30, on a $m+3 \leq n$, d'où $m-2 \geq 2m-n+1$). La dimension d de la variété hypergéométrique correspondante considérée dans le théorème 2.5.7 page 31 vérifie donc $1 \leq d = 2m - m' - 3 \leq n-4$.

De plus, on a $q^{\frac{n+1}{2}-\frac{2m-m'}{2}} = q^{\frac{n-d-2}{2}}$, et donc, lorsque d varie entre 1 et $n-4$, ces puissances de q prennent les valeurs $q^{\frac{n-3}{2}}$, …, q respectivement et toutes ces valeurs sont prises ; en effet, si on se donne un entier m vérifiant $2 \leq m = d+1 \leq n-3$ et qu'on prend $s = (0,\dots,0,1,n-1,2,n-2,\dots,\frac{n-m-1}{2},n-\frac{n-m-1}{2})$, on a alors $w = (0,\dots,0)$ et $v = (\frac{n-m+1}{2}, n-\frac{n-m+1}{2},\dots,\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2})$; ces deux suites sont de cardinal m et on a $m' = m-2$ avec les notations du théorème 2.5.7. □

2.6 Exemples

Pour illustrer la méthode que l'on vient d'exposer, traitons explicitement les cas $n=5$ et $n=7$. Ces exemples sont rédigés en terme des hypersurfaces de type hypergéométrique considérées dans le n^o 2.3.2.

Exemple 2.6.1 (cas $n = 5$). — Retrouvons les résultats annoncés dans [CdlORV03]. On cherche la factorisation de la fonction zêta de $\mathcal{M}_\psi : x_1^5 + \cdots + x_5^5 - 5\psi x_1 \dots x_5 = 0$ lorsque $\psi \neq 0$ et $\psi^5 \neq 1$. Pour cela, on dresse la liste des classes $\overline{(s_1,\dots,s_5)} \neq \overline{(0,0,0,0,0)}$ et $\neq \overline{(0,1,2,3,4)}$ (notations des n^o 2.4.1, 2.5.1, 2.5.2 et 2.5.3) :

$\bar{s}$	γ_s	K_s	m	m'	d
$(0,0,0,1,4)$	20	2	2	0	1
$(0,0,1,1,3)$	30	2	2	0	1

En utilisant la méthode décrite précédemment, on obtient le tableau suivant (les hypersurfaces hypergéométriques intervenant sont toutes du type $y^5 = x^{v_1}(1-x)^{v_2}(1-\frac{1}{\psi^5}x)^{5-v_2}$).

$\bar{s}$	v_1	v_2	w_1	w_2	ÉQUATION
$(0,0,0,1,4)$	2	3	0	0	$y^5 = x^2(1-x)^3(1-\frac{1}{\psi^5}x)^2$
$(0,0,1,1,3)$	2	4	0	1	$y^5 = x^2(1-x)^4(1-\frac{1}{\psi^5}x)$

On trouve les mêmes équations que celles données par Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas dans [CdlORV03, § 11.1] :

$$\mathcal{A}_\psi : y^5 = x^2(1-x)^3(1-\tfrac{1}{\psi^5}x)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\psi : y^5 = x^2(1-x)^4(1-\tfrac{1}{\psi^5}x).$$

Posons $\mathrm{N}_{\mathcal{A}_\psi} = |\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_q)| - q$ et $\mathrm{N}_{\mathcal{B}_\psi} = |\mathcal{B}_\psi(\mathbb{F}_q)| - q$ (ces nombres de points sont affines). On a, lorsque $\psi \neq 0$, $\psi^5 \neq 1$ et $q \equiv 1 \mod 5$:

$$|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3 + \mathrm{N}_{\text{miroir}} + 10q\mathrm{N}_{\mathcal{A}_\psi} + 15q\mathrm{N}_{\mathcal{B}_\psi}.$$

Exemple 2.6.2 (cas $n = 7$). — On utilise les résultats précédents pour déterminer explicitement la factorisation de la fonction zêta de $\mathrm{S}_\psi : x_1^7 + \cdots + x_7^7 - 7\psi x_1 \ldots x_7 = 0$. On dresse le tableau des $\overline{(s_1,\ldots,s_7)} \neq \overline{(0,\ldots,0)}$ et $\neq \overline{(0,1,2,3,4,5,6)}$ (notations des n° 2.4.1, 2.5.1, 2.5.2 et 2.5.3) :

$\bar{s}$	γ_s	K_s	m	m'	d
$(0,0,0,1,2,5,6)$	840	2	2	0	1
$(0,0,1,1,3,4,5)$	1260	2	2	0	1
$(0,0,1,1,2,4,6)$	1260	2	2	0	1
$(0,0,0,0,1,2,4)$	210	3	3	0	3
$(0,0,0,1,1,2,3)$	420	1	3	0	3
$(0,0,1,1,3,3,6)$	630	3	3	0	3
$(0,0,0,0,0,1,6)$	42	2	4	2	3
$(0,0,0,0,1,1,5)$	105	1	4	2	3
$(0,0,0,1,1,1,4)$	140	2	4	2	3
$(0,0,0,1,1,6,6)$	210	2	4	2	3

Le résultat est que, lorsque $\psi \neq 0$, $\psi^7 \neq 1$ et $q \equiv 1 \mod 7$, le nombre de points est de la forme :

$$|\mathrm{S}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \mathrm{N}_{\text{miroir}} + q^2\mathrm{N}_1 + q\mathrm{N}_3,$$

où les facteurs correspondant à des courbes de $\mathbb{A}^2$ s'écrivent sous la forme :

$$\mathrm{N}_1 = 420\mathrm{N}_{c_1} + 630\mathrm{N}_{c_2} + 630\mathrm{N}_{c_3},$$

et ceux correspondant à des hypersurfaces de $\mathbb{A}^4$ de dimension 3 s'écrivent sous la forme :

$$\mathrm{N}_3 = 70\mathrm{N}_{e_1} + 420\mathrm{N}_{e_2} + 210\mathrm{N}_{e_3} + 21\mathrm{N}_{e'_1} + 105\mathrm{N}_{e'_2} + 70\mathrm{N}_{e'_3} + 105\mathrm{N}_{e'_4},$$

avec les différents termes définis dans le tableau suivant (les nombres de points correspondants sont affines).

ÉQUATION DE L'HYPERSURFACE	NOMBRE DE POINTS
$y^7 = x^3(1-x)^4(1-\frac{1}{\psi^7}x)^3$	$q + \mathrm{N}_{c_1}$
$y^7 = x^2(1-x)^6(1-\frac{1}{\psi^7}x)$	$q + \mathrm{N}_{c_2}$
$y^7 = x^3(1-x)^5(1-\frac{1}{\psi^7}x)^2$	$q + \mathrm{N}_{c_3}$
$y^7 = x_1^3x_2^5x_3^3(1-x_1)^4(1-x_2-x_3)^6(1-\frac{1}{\psi^7}x_1x_2)$	$q^3 + \mathrm{N}_{e_1}$
$y^7 = x_1^4x_2^5x_3^4(1-x_1)^3(1-x_2-x_3)^6(1-\frac{1}{\psi^7}x_1x_2)$	$q^3 + \mathrm{N}_{e_2}$
$y^7 = x_1^2x_2^4x_3^4(1-x_1)^6(1-x_2-x_3)^5(1-\frac{1}{\psi^7}x_1x_2)^2$	$q^3 + \mathrm{N}_{e_3}$
$y^7 = x_1^2x_2^5x_3^3(1-x_1)^5(1-x_2)^2(1-x_3)^4(1-\frac{1}{\psi^7}x_1x_2x_3)^3$	$q^3 + \mathrm{N}_{e'_1}$
$y^7 = x_1^3x_2^3x_3^2(1-x_1)^4(1-x_2)^4(1-x_3)^6(1-\frac{1}{\psi^7}x_1x_2x_3)$	$q^3 + \mathrm{N}_{e'_2}$
$y^7 = x_1^3x_2^5x_3^2(1-x_1)^4(1-x_2)^3(1-x_3)^6(1-\frac{1}{\psi^7}x_1x_2x_3)$	$q^3 + \mathrm{N}_{e'_3}$
$y^7 = x_1^3x_2^5x_3^2(1-x_1)^4(1-x_2)^3(1-x_3)^4(1-\frac{1}{\psi^7}x_1x_2x_3)^3$	$q^3 + \mathrm{N}_{e'_4}$

Justifions par exemple l'équation de l'hypersurface hypergéométrique correspondant à $[0,0,0,0,0,1,6]$. On a $\{v_1,v_2,v_3,v_4\} = \{2,3,4,5\}$ et $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$. On prend par exemple $v_1 = 2$, $v_2 = 5$, $v_3 = 3$ et $v_4 = 4$ de sorte que $w_1 - v_1 = -(w_2 - v_2)$ et $w_3 - v_3 = -(w_4 - v_4)$. Pour ce choix, on a $m = 4$, $m' = m - 2 = 2$ et l'équation correspondante est

$$y^7 = x_1^2x_2^5x_3^3(1-x_1)^5(1-x_2)^2(1-x_3)^4(1-\tfrac{1}{\psi^7}x_1x_2x_3)^3.$$

C'est la première équation de la troisième partie du tableau précédent. Les autres équations s'obtiennent de la même manière.

REMARQUE 2.6.3. — On peut traiter de même les cas $n = 11$, $n = 13$, etc. La seule difficulté est pratique, le nombre de classes $\overline{(s_1,\ldots,s_n)}$ grandissant rapidement avec l'entier n.

Chapitre 3

Factorisation cohomologique

Le but de ce chapitre est de montrer comment la décomposition en composants isotypiques pour le groupe G de la cohomologie étale des hypersurfaces de Dwork permet de déduire l'existence d'une factorisation de leur fonction zêta.

3.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, n désignera un entier ≥ 3 et $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique $p \neq 2$ ne divisant pas n ; pour simplifier les résultats, on supposera aussi que $q \equiv 1 \mod n$. On considère l'hypersurface $\mathrm{X}_\psi : x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \ldots x_n = 0$ sur $\mathbb{F}_q$ et on suppose que le paramètre ψ est non nul et vérifie $\psi^n \neq 1$ de sorte que $\overline{\mathrm{X}}_\psi = \mathrm{X}_\psi \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ est non singulière.

Puisque X_ψ est une hypersurface non singulière de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}_q}$, on connaît (voir § 1.2) la dimension des espaces de cohomologie étale ℓ-adique $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$; ils sont nuls pour $i > 2n-4$ ou $i < 0$ et, pour $0 \leq i \leq 2n-4$:

$$\dim \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} \delta_i & \text{si } i \neq n-2, \\ \delta_i + \frac{(n-1)^n + (-1)^n(n-1)}{n} & \text{si } i = n-2, \end{cases}$$

où $\delta_i = 0$ si i est impair et $\delta_i = 1$ si i est pair (voir § 1.2). De plus, la fonction zêta de X_ψ est reliée à la façon dont le Frobenius agit sur $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$.

On reprend les notations du § 1.3 et on pose

$$\hat{\mathrm{A}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\} / \{(a, \ldots, a)\}.$$

On notera $[a_1, \ldots, a_n]$ la classe de $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\hat{\mathrm{A}}$. Le groupe $\hat{\mathrm{A}}$ s'identifie au groupe des caractères de A à valeurs dans $\mathbb{F}_q^*$. Rappelons que le groupe A agit sur X_ψ par multiplication des coordonnées et que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit à droite sur X_ψ par permutation des coordonnées :

$$[x_1 : \ldots : x_n]^\sigma = [x_{\sigma(1)} : \ldots : x_{\sigma(n)}],$$

et à gauche sur A, ainsi que sur $\hat{\mathrm{A}}$, par permutation des coordonnées :

$${}^\sigma[\zeta_1, \ldots, \zeta_n] = [\zeta_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \zeta_{\sigma^{-1}(n)}] \quad \text{et} \quad {}^\sigma[a_1, \ldots, a_n] = [a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)}].$$

Rappelons finalement que le produit semi-direct $\mathrm{G} = \mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_n$ de $\mathfrak{S}_n$ par A agit à droite sur X_ψ, donc à gauche sur $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ vu que le foncteur $g \mapsto g^*$ est contravariant.

Le but de ce chapitre est de décrire la structure de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ comme $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{G}]$-module pour en déduire une factorisation de la fonction zêta de X_ψ. Plus précisément, on montrera que la partie primitive de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ (définie dans le § 1.2) admet une décomposition de la forme

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} \simeq \bigoplus_{a \in (\mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)\backslash \hat{\mathrm{A}}} \mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega},$$

où $\mathrm{W}_{a,\omega}$ est un $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module simple indépendant de ℓ, D_a le corps $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_{a,\omega})^{\mathrm{opp}}$ et $\mathrm{V}_{a,\omega}$ un certain $\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-module libre dont le rang, que nous déterminons, est indépendant de ℓ. Chaque espace intervenant dans cette décomposition est stable par le Frobenius donc le polynôme caractéristique de celui-ci se décompose en autant de facteur (l'idée de recourir à cette méthode s'inspire d'un argument donné dans [HKS06, n° 6.2]).

On commence par décomposer $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ en généralisant les résultats de Brünjes [Brü04] concernant le cas $\psi = 0$ (hypersurfaces de Fermat) ; la méthode est basée sur l'utilisation d'une formule des traces de Lefschetz pour déterminer les valeurs des caractères des représentations en jeu. Notons qu'au lieu de procéder par récurrence comme dans [Brü04, prop. 11.5], on utilise avantageusement une formule des traces plus puissante. On décompose ensuite $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ puis on s'assure que la décomposition obtenue est indépendante de ℓ. Nos méthodes sont généralisables à d'autres familles et les factorisations que nous obtenons sont légèrement plus fines que celles de Kloosterman dans [Klo07] (qui utilise la cohomologie p-adique de Monsky-Washnitzer). Elles permettent d'obtenir une expression de chacun des facteurs comme la norme d'un polynôme à coefficient dans une certaine extension de degré fini de $\mathbb{Q}$, expliquant ainsi une observation numérique de Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas dans le cas $n = 5$ où cette extension est $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (voir [CdlORV03, tab. 12.1, p. 133]) (3). Notons aussi qu'un article récent de Katz [Kat09] étudie l'action du groupe A (mais pas de $\mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_n$) sur la cohomologie de X_ψ et établit un lien motivique entre X_ψ et des objets de type hypergéométriques.

Le présent chapitre est organisé de la façon suivante. Après des préliminaires (§ 3.2), on commence par déterminer la structure de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ en tant que $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module (§ 3.3), puis en tant que $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{G}]$-module (§ 3.4). On en déduit alors la structure de $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{G}]$-module de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ (§ 3.5) puis on explique le lien entre cette structure et l'existence d'une factorisation de la fonction zêta de X_ψ (§ 3.6). Ce chapitre introduit de nombreuses notations que le lecteur trouvera récapitulées dans l'annexe (page 83) avec un formulaire.

3.2 Préliminaires

On rappelle tout d'abord une formule des traces de type Lefschetz, due à Deligne et Lusztig, qui permet d'exprimer la somme alternée des traces d'un automorphisme sur les espaces de cohomologie ℓ-adique comme la caractéristique d'Euler-Poincaré du

3. Leur observation concerne le cas $\psi = 0$, mais les données de la table du § 13.3 suggère que le même phénomène se produit lorsque $\psi \neq 0$ et $q \equiv 1 \mod 5$.

schéma des points fixes de cet automorphisme. On renvoie à la formule de Hirzebruch donnée au § 1.2 pour la valeur de cette caractéristique d'Euler-Poincaré dans les cas qui interviendront par la suite (hypersurfaces lisses d'espaces projectifs). Enfin, on relie la trace d'un élément de G à une caractéristique d'Euler-Poincaré d'un sous-schéma de points fixes.

3.2.1 Formule des traces de Lefschetz

Rappelons que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un schéma propre X sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est donnée par :

$$\chi(\mathrm{X}) = \sum_{i=0}^{2\dim \mathrm{X}} (-1)^i \dim \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathrm{X}, \mathbb{Q}_\ell),$$

où ℓ est un nombre premier $\neq p$. Elle est indépendante de ℓ.

Théorème 3.2.1. — *Soit* X *un schéma propre sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$. *Si* f *est un automorphisme de* X *d'ordre fini premier à* p *et si* X^f *désigne le sous-schéma de* X *des points fixes de* f, *alors*

$$\sum_{i=0}^{2\dim \mathrm{X}} (-1)^i \operatorname{tr}(f^*|\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathrm{X}, \mathbb{Q}_\ell)) = \chi(\mathrm{X}^f),$$

où $\chi(\mathrm{X}^f)$ *désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de* X^f.

Démonstration. — Voir [DL76, th. 3.2, p. 119]. □

Remarque 3.2.2. — Pour le calcul de $\chi(\mathrm{X}^f)$ lorsque X^f est une hypersurface projective, on renvoie à la formule de Hirzebruch (théorème 1.2.4 page 14).

3.2.2 Étude du caractère de G opérant dans $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$

La classe d'isomorphisme d'un $\mathbb{Q}_\ell$[G]-module est complètement déterminée par son caractère. Dans ce numéro, nous donnerons une expression en terme de caractéristiques d'Euler-Poincaré de la valeur du caractère du $\mathbb{Q}_\ell$[G]-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ sur les éléments $g \in \mathrm{G}$ d'ordre premier à p.

Lemme 3.2.3. — *Tout élément* g *de* G *opère comme l'identité sur* $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}$ *ainsi que sur* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ *lorsque* $i \neq n-2$.

Démonstration. — Comme g est la restriction d'un automorphisme de $\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$, cela résulte des considérations du § 1.2 et du lemme suivant. □

Lemme 3.2.4. — *Si* h *est un automorphisme de* $\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$, *alors* h^* *opère comme l'identité sur* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ *pour tout* i.

Démonstration. — Le groupe $\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ opère à droite sur $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ par $u \mapsto u^*$; puisque $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ est de dimension 0 ou 1, cette action se fait par homothéties, donc se factorise par un quotient abélien de $\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Or, puisque $\overline{\mathbb{F}}_q$ est algébriquement clos, $\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est égal à son groupe dérivé donc n'a pas de quotient abélien non nul. Ainsi, pour tout $u \in \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$, $u^* = \mathrm{Id}$. □

Théorème 3.2.5. — *Si g est un élément de* G *d'ordre premier à p, alors :*

$$\operatorname{tr}(g^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = (-1)^{n-1}\Big((n-1)-\chi(\overline{\mathrm{X}}^g_\psi)\Big). \tag{3.1}$$

Démonstration. — D'après la formule des traces du théorème 3.2.1, on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{2\dim\mathrm{X}} (-1)^i \operatorname{tr}(g^*|\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\mathbb{Q}_\ell)) = \chi(\overline{\mathrm{X}}^g_\psi).$$

D'après le lemme 3.2.3, on a (avec, comme dans le § 3.1, $\delta_i = 0$ si i est impair et $\delta_i = 1$ si i est pair) :

$$\operatorname{tr}(g^*|\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\mathbb{Q}_\ell)) = \begin{cases}\delta_i & \text{si } i\neq n-2,\\ \delta_i+\operatorname{tr}(g^*|\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}) & \text{si } i=n-2,\end{cases}$$

et donc :

$$\chi(\overline{\mathrm{X}}^g_\psi) = (n-1)+(-1)^{n-2}\operatorname{tr}(g^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}),$$

ce qui est exactement la formule voulue. □

3.3 Action de A sur $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$

Les représentations irréductibles sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ du groupe abélien fini A sont ses caractères (de degré 1). Trouver la structure du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ revient donc à déterminer la multiplicité des caractères de A intervenant dans la représentation $g\mapsto g^*$ de A dans $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$; c'est le but de ce paragraphe. Le choix, dans le nº 3.3.1, d'un isomorphisme de $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mu_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ permet d'identifier $\hat{\mathrm{A}}$ au groupe des caractères de A à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Après avoir déterminé dans le nº 3.3.2 le caractère du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$, nous démontrerons dans le nº 3.3.3 que la multiplicité de $a\in\hat{\mathrm{A}}$ est $m_a = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{a_1,\ldots,a_n\}|$.

3.3.1 Caractères de A à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$

Puisqu'on s'est placé dans le cas où $q\equiv 1 \bmod n$, le groupe $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ des racines n-ièmes de l'unité de $\mathbb{F}_q$ est isomorphe au groupe des racines n-ièmes de l'unité de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$; notons θ un isomorphisme de $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mu_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Le groupe $\hat{\mathrm{A}}$ s'identifie alors au groupe des caractères de A à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par l'isomorphisme $[a_1,\ldots,a_n]\mapsto([\zeta_1,\ldots,\zeta_n]\mapsto \theta(\zeta_1)^{a_1}\cdots\theta(\zeta_n)^{a_n})$.

3.3.2 Valeurs du caractère du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$

Comme p est premier à n par hypothèse, les éléments de A sont d'ordre premier à p. Par application de la formule (3.1), on obtient les valeurs du caractère du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$.

Théorème 3.3.1. — *Soit* $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mu_n(\mathbb{F}_q)^n$ *tel que* $\zeta_1 \dots \zeta_n = 1$ *et soit* g *l'élément* $[\zeta_1, \dots, \zeta_n]$ *de* A *correspondant. Pour tout* $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$*, notons* $k(\zeta)$ *le nombre d'indices* i *tels que* $\zeta_i = \zeta$*. On a :*

$$\operatorname{tr}(g^* | \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)} (1-n)^{k(\zeta)}. \tag{3.2}$$

Démonstration. — Pour qu'un point de $\overline{\mathrm{X}}_\psi$ de coordonnées homogènes $[x_1 : \dots : x_n]$ soit un point fixe de g, il faut et il suffit que $(x_1, \dots, x_n)$ soit proportionnel à $(\zeta_1 x_1, \dots, \zeta_n x_n)$. Le coefficient de proportionnalité est nécessairement une racine de l'unité $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$, et l'on doit avoir $x_i = 0$ si $\zeta_i \neq \zeta$. Ainsi, le sous-schéma des points de $\overline{\mathrm{X}}_\psi$ fixés par g est la réunion disjointe, pour $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$, des sous-variétés

$$\mathrm{Y}_\zeta = \{x \in \overline{\mathrm{X}}_\psi \mid x_i = 0 \text{ si } \zeta_i \neq \zeta\}.$$

Si $k(\zeta) = n$, on a $\mathrm{Y}_\zeta = \overline{\mathrm{X}}_\psi$. Si $2 \leq k(\zeta) \leq n-1$, Y_ζ est isomorphe à l'hypersurface de $\mathbb{P}^{k(\zeta)-1}$ d'équation $y_1^n + y_2^n + \dots + y_{k(\zeta)}^n = 0$. Finalement, si $k(\zeta) = 0$ ou 1, Y_ζ est vide. Dans chacun de ces cas, d'après le théorème 1.2.4 :

$$\chi(\mathrm{Y}_\zeta) = k(\zeta) - 1 + \frac{(1-n)^{k(\zeta)} + n - 1}{n} = k(\zeta) - \frac{1}{n} + \frac{(1-n)^{k(\zeta)}}{n}.$$

Par suite, on a :

$$\chi(\overline{\mathrm{X}}_\psi^g) = \sum_{\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)} \chi(\mathrm{Y}_\zeta) = n - 1 + \sum_{\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)} \frac{(1-n)^{k(\zeta)}}{n}$$

car $\sum_{\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)} k(\zeta) = n$ et $\sum_{\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)} \frac{1}{n} = 1$. En utilisant la formule des traces (3.1) du n° 3.2.2, on en déduit le résultat annoncé. □

Remarque 3.3.2. — Une prépublication très récente (juin 2009) établit dans un cadre général des formules du type donné dans le théorème 3.3.1 précédent et dans le théorème 3.4.12 page 47 ; on renvoie à [Chê09, cor. 2.5].

3.3.3 Décomposition en représentations irréductibles

Le théorème suivant donne une expression simple de la multiplicité m_a d'un caractère $a \in \hat{\mathrm{A}}$ dans le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$.

Théorème 3.3.3. — *La multiplicité du caractère irréductible* $a = [a_1, \dots, a_n]$ *de* A *dans le* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$*-module* $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ *est :*

$$m_a = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{a_1, \dots, a_n\}| = n - (\textit{nombre de } a_i \textit{ distincts}).$$

Démonstration. — Soit $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mu_n(\mathbb{F}_q)^n$ tel que $\zeta_1 \dots \zeta_n = 1$ et g l'élément $[\zeta_1, \dots, \zeta_n]$ de A correspondant. Par définition même :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(g^* | \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) &= \sum_{a \in \hat{\mathrm{A}}} m_a \zeta_1^{a_1} \dots \zeta_n^{a_n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \\ a_1 + \dots + a_n = 0}} m_a \zeta_1^{a_1} \dots \zeta_n^{a_n}.\end{aligned}$$

On va montrer que si on remplace m_a par le cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{a_1, \ldots, a_n\}$ dans le membre de droite de la formule précédente, on retrouve la relation (3.2) du numéro précédent, ce qui démontrera le résultat voulu. On écrit :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \\ a_1+\cdots+a_n=0}} |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{a_1, \ldots, a_n\}| \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_n^{a_n} \\
&\qquad = \frac{1}{n} \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \\ a_1+\cdots+a_n=0}} \Bigg(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \forall i,\ a_i\neq k}} 1 \Bigg) \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_n^{a_n} \\
&\qquad = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \\ a_1+\cdots+a_n=0 \\ \forall i,\ a_i\neq k}} \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_n^{a_n} \\
&\qquad = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \\ a_1+\cdots+a_n=0 \\ \forall i,\ a_i\neq 0}} \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_n^{a_n} \\
&\qquad = \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \\ a_1+\cdots+a_n=0 \\ \forall i,\ a_i\neq 0}} \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_n^{a_n} \\
&\qquad = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\} \\ a_1+\cdots+a_n=0}} \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_n^{a_n}.
\end{aligned}
$$

On conclut alors par le lemme suivant. □

Lemme 3.3.4. — *Soit r un entier ≥ 1 et soit $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ des éléments de $\mu_n(\mathbb{F}_q)$. Si $k(\zeta) = k_{(\zeta_1,\ldots,\zeta_r)}(\zeta)$ désigne le nombre d'indices i tels que $\zeta_i = \zeta$, alors :*

$$
\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_r\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\} \\ a_1+\cdots+a_r=0}} \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_r^{a_r} = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{\zeta\in\mu_n(\mathbb{F}_q)} (1-n)^{k(\zeta)}.
$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur r. Pour $r = 1$, l'égalité est juste la relation :

$$
0 = -\frac{1}{n} \Big[(1-n)^1 + (n-1)(1-n)^0 \Big].
$$

Supposons donc $r \geq 2$ et le résultat démontré pour $r-1$. On écrit :

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_r\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\} \\ a_1+\cdots+a_r=0}} \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_r^{a_r} &= \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\} \\ a_1+\cdots+a_{r-1}\neq 0}} \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_{r-1}^{a_{r-1}} \zeta_r^{-a_1-\cdots-a_{r-1}} \\
&= \sum_{a_1,\ldots,a_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}} \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_r}\right)^{a_1} \ldots \left(\frac{\zeta_{r-1}}{\zeta_r}\right)^{a_{r-1}} - \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\} \\ a_1+\cdots+a_{r-1}=0}} \zeta_1^{a_1} \ldots \zeta_{r-1}^{a_{r-1}}.
\end{aligned}
$$

Étant donné un élément $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$, on a :

$$
\sum_{a\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}} \zeta^a = \begin{cases} -1 & \text{si } \zeta \neq 1, \\ n-1 & \text{si } \zeta = 1. \end{cases}
$$

Cette remarque permet de calculer la première somme précédente :

$$\sum_{a_1,\dots,a_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}} \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_r}\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{\zeta_{r-1}}{\zeta_r}\right)^{a_{r-1}} = (-1)^{r-k(\zeta_r)}(n-1)^{k(\zeta_r)-1},$$

où $k(\zeta) = k_{(\zeta_1,\dots,\zeta_r)}(\zeta)$; par ailleurs, il résulte de l'hypothèse de récurrence que :

$$\sum_{\substack{a_1,\dots,a_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\} \\ a_1+\cdots+a_{r-1}=0}} \zeta_1^{a_1}\cdots\zeta_{r-1}^{a_{r-1}} = \frac{(-1)^{r-1}}{n}\left(\sum_{\zeta\neq\zeta_r}(1-n)^{k(\zeta)} + (1-n)^{k(\zeta_r)-1}\right),$$

On conclut en notant que :

$$\begin{aligned}(-1)^{r-k(\zeta_r)}&(n-1)^{k(\zeta_r)-1} - \frac{(-1)^{r-1}}{n}(1-n)^{k(\zeta_r)-1} \\ &= -\frac{(-1)^r n(1-n)^{k(\zeta_r)-1}}{n} + \frac{(-1)^r}{n}(1-n)^{k(\zeta_r)-1} = \frac{(-1)^r}{n}(1-n)^{k(\zeta_r)}. \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque 3.3.5. — Il résulte du théorème 3.3.3 que la multiplicité m_a du caractère $a \in \hat{\mathrm{A}}$ est non nulle sauf lorsque a appartient à l'orbite de $[0, 1, \dots, n-1]$ sous $\mathfrak{S}_n$ (ce qui impose à n d'être impair, sinon $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ n'est pas divisible par n).

3.4 Action de G sur $\mathbf{H}_{\mathbf{et}}^{n-2}(\overline{\mathbf{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathbf{prim}}$

3.4.1 Une décomposition du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$[G]-module $\mathbf{H}_{\mathbf{et}}^{n-2}(\overline{\mathbf{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathbf{prim}}$

Pour tout $a \in \hat{\mathrm{A}}$, identifié au groupe des caractères de A à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, notons $\overline{\mathrm{H}}_a$ le composant isotypique du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$[A]-module $\mathrm{H}_{\mathrm{et}}^{n-2}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ de type a (voir [Bou58, § 3, n° 4]). C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension m_a, où m_a est la multiplicité déterminée au n° 3.3.3, et l'on a

$$\mathrm{H}_{\mathrm{et}}^{n-2}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}} = \bigoplus_{a\in\hat{\mathrm{A}}} \overline{\mathrm{H}}_a.$$

Le groupe G opère à gauche par automorphismes intérieurs sur A, et, par suite, opère à gauche par transport de structure sur $\hat{\mathrm{A}}$: si $g \in \mathrm{A}\sigma$, avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et si $a = [a_1, \dots, a_n]$, on a ${}^g a = {}^\sigma a = [a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)}]$.

Soit $a \in \hat{\mathrm{A}}$. Le stabilisateur G_a de a dans G est égal à $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a$, où $\mathrm{S}_a = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid {}^\sigma a = a\}$. On a $g\overline{\mathrm{H}}_a = \overline{\mathrm{H}}_{{}^g a}$ pour tout $g \in$ G. L'espace $\overline{\mathrm{H}}_a$ est stable par G_a. Le sous-espace $\bigoplus_{a'\in\langle a\rangle} \overline{\mathrm{H}}_{a'}$ de $\mathrm{H}_{\mathrm{et}}^{n-2}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ est stable par G (rappelons que $\langle a\rangle$ désigne l'orbite de a sous $\mathfrak{S}_n$) ; c'est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$[G]-module canoniquement isomorphe à $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_a}^{\mathrm{G}} \overline{\mathrm{H}}_a$. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 3.4.1. — *Le* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$[G]*-module* $\mathrm{H}_{\mathrm{et}}^{n-2}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ *est isomorphe à* $\bigoplus_{a\in\mathrm{R}} \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_a}^{\mathrm{G}} \overline{\mathrm{H}}_a$, *où* R *est un système de représentants dans* $\hat{\mathrm{A}}$ *des éléments de* $\mathfrak{S}_n\backslash\hat{\mathrm{A}}$.

Le but du reste de ce § 3.4 est de déterminer la façon dont le groupe S_a opère sur $\overline{\mathrm{H}}_a$. La stratégie est la suivante : après avoir montré que S_a est un produit semi-direct $\mathrm{S}'_a \rtimes \overline{\Sigma}_a$ (n° 3.4.2), on calcule $\mathrm{tr}(\sigma^*|\mathrm{H}_{\mathrm{et}}^{n-2}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}})$ pour σ générateur de S'_a et on compare à la trace de l'identité (n° 3.4.4) pour en déduire que l'action de S'_a se fait par $\varepsilon(\sigma)\,\mathrm{Id}_{\overline{\mathrm{H}}_a}$ sur $\overline{\mathrm{H}}_a$ (voir n° 3.4.5). On démontre ensuite, par une méthode analogue à celle du § 3.3, que le facteur $\overline{\Sigma}_a$ opère par un multiple de la représentation régulière (n° 3.4.6-3.4.8).

La stratégie pour l'étude de l'action de S'_a est la même que celle que Brünjes a employé dans [Brü04, prop. 11.5, p. 197] pour le cas $\psi = 0$ à ceci près que notre formule des traces nous évite d'avoir à effectuer une fastidieuse démonstration par récurrence.

3.4.2 Détermination de la structure des S_a

Soit $a = [a_1, \dots, a_n] \in \hat{\mathrm{A}}$, où $(a_1, \dots, a_n)$ est un élément de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ tel que $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Considérons l'ensemble des éléments $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $(a_1 + j, \dots, a_n + j)$ soit un permuté de $(a_1, \dots, a_n)$. C'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il est donc de la forme $n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier $n'_a \geq 1$ divisant n ; notons $d_a = n/n'_a$ l'ordre de ce groupe. Ces deux entiers ne dépendent que de a et non du choix des a_i.

Remarque 3.4.2. — Pour tout $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, notons $\mathrm{I}(b)$ l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $a_i = b$. L'ensemble $n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{I}(b + j)$ a même cardinal que $\mathrm{I}(b)$ pour tout $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Lemme 3.4.3. — *Il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ possédant les deux propriétés suivantes :*

a) si $1 \leq i \leq n$, on a $a_{\sigma(i)} = a_i + n'_a$;

b) σ est le produit de n'_a cycles de longueur d_a à supports disjoints.

Démonstration. — Notons que la condition *a*) précédente est équivalente au fait que $\sigma(\mathrm{I}(b)) = \mathrm{I}(b + n'_a)$. Pour tout $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{I}(b) \neq \varnothing$, choisissons donc une numérotation $i_1(b)$, …, $i_{|\mathrm{I}(b)|}(b)$ des éléments de $\mathrm{I}(b)$ et notons σ l'élément de $\mathfrak{S}_n$ qui applique $i_l(b)$ sur $i_l(b + n'_a)$ pour tout $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $1 \leq l \leq |\mathrm{I}(b)|$.

Par définition même, on a $a_{\sigma(i)} = a_i + n'_a$ et, en regardant les orbites de l'un a_i sous $b \mapsto b + n'_a$, on voit que σ est un produit de n'_a cycles de longueur d_a à supports disjoints. □

Le fixateur S'_a de l'élément $(a_1, \dots, a_n)$ de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ dans $\mathfrak{S}_n$ est un groupe qui s'identifie à $\prod_{b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathfrak{S}_{\mathrm{I}(b)}$ (donc est engendré par des transpositions) et on a $\gamma_a = [\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}'_a]$. Considérons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui vérifie les conditions du lemme précédent et notons $\overline{\Sigma}_a = \langle \sigma \rangle$ le sous-groupe cyclique d'ordre d_a de $\mathfrak{S}_n$ engendré par la permutation σ.

Proposition 3.4.4. — *Le fixateur S_a de l'élément $a = [a_1, \dots, a_n]$ de $\hat{\mathrm{A}}$ peut s'écrire comme le produit semi-direct*

$$\mathrm{S}_a = \mathrm{S}'_a \rtimes \overline{\Sigma}_a.$$

Démonstration. — Si $s \in \mathrm{S}_a$, il existe un unique $j \in n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que ${}^s(a_1, \dots, a_n) = (a_1 + j, \dots, a_n + j)$. Cet élément ne dépend que de a et non du choix des a_i ; notons-le $j_a(s)$. L'application $j_a : \mathrm{S}_a \to n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ainsi définie est un homomorphisme de groupes. Cet homomorphisme est surjectif et son noyau n'est autre que le fixateur S'_a de $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ dans $\mathfrak{S}_n$.

Par ailleurs, $j_a(\sigma) = -n'_a$ par construction et donc j_a induit un isomorphisme de $\overline{\Sigma}_a = \langle\sigma\rangle$ sur l'image $n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de j_a, ce qui montre que

$$\mathrm{S}_a = \mathrm{S}'_a \rtimes \overline{\Sigma}_a. \qquad \square$$

Remarques 3.4.5.

a) En particulier, le groupe S'_a est distingué dans S_a et le groupe quotient $\mathrm{S}_a/\mathrm{S}'_a$ est isomorphe à $n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ donc cyclique d'ordre d_a.

b) Insistons sur le fait que n'_a, d_a, S'_a et j_a ne dépendent que de a et non du représentant $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ choisi. Le groupe $\overline{\Sigma}_a$ ne dépend lui aussi que de a, mais n'est de toute façon pas canonique étant donné que sa construction est subordonnée à un choix arbitraire de numérotation.

c) Notons pour finir que si $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, on a $d_{ka} = d_a$, $n'_{ka} = n'_a$, $\mathrm{S}'_{ka} = \mathrm{S}'_a$ et $\mathrm{S}_{ka} = \mathrm{S}_a$. Par contre, $j_{ka} = kj_a$.

3.4.3 Valeurs du caractère sur une transposition τ

Théorème 3.4.6. — *Pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a*

$$\mathrm{tr}(\tau^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = (-1)^n\left(\frac{(1-n)^{n-1} + (n-1)}{n} - \delta_n\right), \tag{3.3}$$

où $\delta_n = 0$ si n est impair et $\delta_n = 1$ si n est pair.

Démonstration. — Il n'est pas restrictif de supposer que notre transposition τ est $(1,2)$. Cherchons les points fixes de τ, c'est-à-dire l'ensemble des points $[x_1 : \ldots : x_n]$ tels que $[x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n] = [x_2 : x_1 : x_3 : \ldots : x_n]$ et $x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \ldots x_n = 0$. Pour un tel point, on a $x_1^2 = x_2^2$, de sorte que l'on est dans l'un des deux cas suivants.

(*a*) On a $x_1 = x_2$ et $2x_2^n + x_3^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_2^2 x_3 \ldots x_n = 0$. L'hypersurface de $\mathbb{P}^{n-2}$ définie par cette équation est lisse car $\psi^n \neq 1$ et sa caractéristique d'Euler-Poincaré est $(n-2) + [(1-n)^{n-1} + (n-1)]/n$ (théorème 1.2.4).

(*b*) On a $x_1 = -x_2 \neq 0$; dans ce cas, $x_3 = \cdots = x_n = 0$ et $x_1^n + x_2^n = 0$. Ce cas ne se produit donc que si n est impair et $[x_1 : \ldots : x_n] = [1 : -1 : 0 : \ldots : 0]$.

La caractéristique d'Euler-Poincaré de la sous-variété des points de $\overline{\mathrm{X}}_\psi$ fixés par τ est donc :

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{X}^\tau_\psi) &= (n-2) + \frac{(1-n)^{n-1} + (n-1)}{n} + 1 - \delta_n \\ &= (n-1) + \frac{(1-n)^{n-1} + (n-1)}{n} - \delta_n,\end{aligned}$$

et par conséquent, puisque τ est d'ordre 2 et que par hypothèse $\mathbb{F}_q$ est de caractéristique $\neq 2$, le théorème 3.2.5 s'applique :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\tau^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) &= (-1)^{n-1}\Big((n-1) - \chi(\overline{\mathrm{X}}^\tau_\psi)\Big) \\ &= (-1)^n\left(\frac{(1-n)^{n-1} + (n-1)}{n} - \delta_n\right). \qquad \square\end{aligned}$$

3.4.4 Somme des dimensions des espaces $\overline{\mathrm{H}}_a$ pour $a \in \hat{\mathrm{A}}^\tau$

Proposition 3.4.7. — *Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition. Notons $\hat{\mathrm{A}}^\tau$ l'ensemble des éléments de $\hat{\mathrm{A}}$ fixés par τ. On a :*

$$\sum_{a\in\hat{\mathrm{A}}^\tau} m_a = (-1)^{n-1}\left(\frac{(1-n)^{n-1}+(n-1)}{n} - \delta_n\right),$$

où $\delta_n = 0$ si n impair et $\delta_n = 1$ si n pair.

Démonstration. — Nous pouvons supposer que τ est la transposition $(1,2)$. Notons B l'ensemble des éléments $(b_1,\dots,b_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{0\})^n$ tels que $b_1 = b_2$ et $b_1+\cdots+b_n = 0$. L'application $(b_1,\dots,b_n) \mapsto [b_1,\dots,b_n]$ de B dans $\hat{\mathrm{A}}^\tau$ est surjective et chaque élément a de $\hat{\mathrm{A}}^\tau$ a exactement m_a antécédents par cette application. On a donc $\sum_{a\in\hat{\mathrm{A}}^\tau} m_a = |\mathrm{B}|$. On conclut par le lemme suivant. $\square$

Lemme 3.4.8. — *Soit r un entier ≥ 2. Le nombre de r-uplets $(b_1,\dots,b_r)$ appartenant à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{0\})^r$ tels que $b_1 = b_2$ et $b_1+\cdots+b_r = 0$ est $(-1)^{r-1}\left(\frac{(1-n)^{r-1}+(n-1)}{n} - \delta_n\right)$.*

Démonstration. — Notons u_r ce nombre. On a $u_2 = \delta_n$ et $u_r + u_{r+1}$ est le nombre de $(r+1)$-uplets $(b_1,\dots,b_r,b_{r+1}) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}-\{0\})^r\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $b_1 = b_2$ et $b_1+\cdots+b_{r+1} = 0$, c'est-à-dire $(n-1)^{r-1}$. Le lemme en résulte par récurrence sur r. $\square$

3.4.5 Action de S'_a sur $\overline{\mathrm{H}}_a$

On commence par un résultat général sur les automorphismes d'ordre fini dont la trace est la dimension de l'espace.

Lemme 3.4.9. — *Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique nulle, soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\Bbbk$ et soit u un automorphisme d'ordre fini de V. Si $\operatorname{tr} u = \dim \mathrm{V}$, alors $u = \mathrm{Id}_\mathrm{V}$.*

Démonstration. — Soit M la matrice de u dans une base de V sur $\Bbbk$. Le sous-corps $\Bbbk'$ de $\Bbbk$ engendré par les coefficients de la matrice M se plonge dans $\mathbb{C}$. Il suffit donc de démontrer le lemme lorsque $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Soient λ_1, …, λ_m les valeurs propres (complexes) de M, répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité, où $m = \dim \mathrm{V}$. Ce sont des racines de l'unité. Comme on a, par hypothèse,

$$|\lambda_1+\cdots+\lambda_m| = |\operatorname{tr} u| = m = |\lambda_1|+\cdots+|\lambda_m|,$$

les λ_i sont positivement proportionnels, donc égaux. Puisque leur somme est m, ils sont égaux à 1. L'endomorphisme u de V est donc unipotent. Puisqu'il est d'ordre fini, il est égal à Id_V. $\square$

Remarque 3.4.10. — Soient $\Bbbk$ un corps de caractéristique nulle et $(\mathrm{V}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille finie d'espaces vectoriels de dimension finie sur $\Bbbk$. Pour chaque $i \in \mathrm{I}$, soit u_i un automorphisme d'ordre fini de V_i. Si $\sum_{i\in\mathrm{I}} \operatorname{tr} u_i$ est égal à $\sum_{i\in\mathrm{I}} \dim \mathrm{V}_i$ (resp. à $-\sum_{i\in\mathrm{I}} \dim \mathrm{V}_i$), on a $u_i = \mathrm{Id}_{\mathrm{V}_i}$ (resp. $u_i = -\mathrm{Id}_{\mathrm{V}_i}$) pour tout $i \in \mathrm{I}$. Cela résulte du lemme 3.4.9 appliqué à l'automorphisme u de $\mathrm{V} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{V}_i$ qui coïncide avec u_i (resp. avec $-u_i$) dans V_i pour tout $i \in \mathrm{I}$.

Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition. Comme $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}} = \bigoplus_{a\in\hat{\mathrm{A}}} \overline{\mathrm{H}}_a$ et que τ^* applique $\overline{\mathrm{H}}_a$ dans $\overline{\mathrm{H}}_{{}^\tau a}$, on a :

$$\mathrm{tr}(\tau^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = \sum_{a\in\hat{\mathrm{A}}^\tau} \mathrm{tr}(\tau^*|\overline{\mathrm{H}}_a).$$

Par ailleurs, il résulte du théorème 3.4.6 et de la proposition 3.4.7 que l'on a :

$$\mathrm{tr}(\tau^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = -\sum_{a\in\hat{\mathrm{A}}^\tau} \dim \overline{\mathrm{H}}_a.$$

On déduit donc de la remarque 3.4.10 que, pour tout $a \in \hat{\mathrm{A}}^\tau$, τ^* opère sur $\overline{\mathrm{H}}_a$ par $-\mathrm{Id}_{\overline{\mathrm{H}}_a}$.

Théorème 3.4.11. — *Soit* $a \in \hat{\mathrm{A}}$ *et soit* σ *un élément de* S'_a. *Si on note* $\varepsilon(\sigma)$ *la signature de* σ, *on a :*

$$\sigma^*|\overline{\mathrm{H}}_a = \varepsilon(\sigma)\,\mathrm{Id}_{\overline{\mathrm{H}}_a}.$$

Démonstration. — Le sous-groupe S'_a de $\mathfrak{S}_n$ est engendré par des transpositions τ telles que ${}^\tau a = a$ (voir n° 3.4.2) et l'on a $\tau^*|\overline{\mathrm{H}}_a = -\mathrm{Id}_{\overline{\mathrm{H}}_a} = \varepsilon(\tau)\,\mathrm{Id}_{\overline{\mathrm{H}}_a}$ d'après ce que l'on vient de voir. □

3.4.6 Valeurs du caractère sur Aσ où σ est un produit de n' cycles de longueur d à supports disjoints

Soient n' et d des entiers ≥ 1 tels que $n'd = n$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un produit de n' cycles de longueur d à supports disjoints. Soient ζ_1, …, ζ_n des éléments de $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ tels que $\zeta_1 \dots \zeta_n = 1$. Notons g l'élément $[\zeta_1, \dots, \zeta_n]\sigma$ de $\mathrm{G} = \mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_n$. Notons O_1, …, $\mathrm{O}_{n'}$ les n' orbites de σ dans $\{1, \dots, n\}$. Pour chaque $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$, notons $k(\zeta)$ le nombre d'indices $j \in \{1, \dots, n'\}$ tels que $\prod_{i\in\mathrm{O}_j} \zeta_i = \zeta$. Le théorème suivant généralise le théorème 3.3.1 (que l'on retrouve en prenant $d = 1$ et $n' = n$).

Théorème 3.4.12. — *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$\mathrm{tr}(g^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = \frac{(-1)^n}{n'} \sum_{\zeta\in\mu_{n'}(\mathbb{F}_q)} (1-n)^{k(\zeta)}.$$

Démonstration. — On peut supposer que σ est le produit des cycles $((j-1)d + 1, \dots, jd)$ pour $1 \leq j \leq n'$ et que $\mathrm{O}_j = \{(j-1)d+1, \dots, jd\}$. Les points fixes de g dans $\mathrm{X}_\psi(\overline{\mathbb{F}}_q)$ sont les points $[x_1 : \dots : x_n]$ de $\mathrm{X}_\psi(\overline{\mathbb{F}}_q)$ tels que :

$$[\zeta_{\sigma^{-1}(1)}x_{\sigma^{-1}(1)} : \dots : \zeta_{\sigma^{-1}(n)}x_{\sigma^{-1}(n)}] = [x_1 : \dots : x_n]$$

c'est-à-dire

$$[\zeta_1 x_1 : \dots : \zeta_n x_n] = [x_{\sigma(1)} : \dots : x_{\sigma(n)}].$$

Le sous-schéma $\overline{\mathrm{X}}^g_\psi$ de ces points fixes est donc la réunion disjointe, pour $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}^*_q$, des sous-schémas fermés Y_λ de $\overline{\mathrm{X}}_\psi$ définis par les équations

$$(\mathrm{Y}_\lambda)\quad \begin{cases} x_1^n + \dots + x_n^n - n\psi x_1 \dots x_n = 0, \\ x_{\sigma(i)} = \lambda\zeta_i x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Soit $j \in \{1, \dots, n'\}$. Si $\prod_{i \in \mathrm{O}_j} \zeta_i \neq \lambda^{-d}$, il résulte de la seconde relation que $x_i = 0$ pour tout $i \in \mathrm{O}_j$. Si $\prod_{i \in \mathrm{O}_j} \zeta_i = \lambda^{-d}$, on a $\lambda \in \mu_{nd}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et il résulte de la seconde relation que

$$\sum_{i \in \mathrm{O}_j} x_i^n = x_{jd}^n \Big(\sum_{i=1}^{d} (\lambda^n)^i \Big) = \begin{cases} d x_{jd}^n & \text{si } \lambda \in \mu_n(\mathbb{F}_q), \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \mu_n(\mathbb{F}_q). \end{cases}$$

Considérons $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_q^*$ et posons $\zeta = \lambda^{-d}$ (puisque $n = n'd$, on a donc $\zeta^{n'} = 1 \iff \lambda^n = 1$). Notons J l'ensemble des indices $j \in \{1, \dots, n'\}$ tels que $\prod_{i \in \mathrm{O}_j} \zeta_i = \zeta$ et posons $y_j = x_{jd}$ pour $j \in \mathrm{J}$. Si $\zeta \notin \mu_n(\mathbb{F}_q)$, J est vide et donc Y_λ est vide. Supposons que $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$. Le cardinal de J est $k(\zeta)$. Distinguons deux cas.

(*a*) Premier cas. — On a $\zeta \in \mu_{n'}(\mathbb{F}_q)$. D'après ce qui précède, le schéma Y_λ est isomorphe à l'hypersurface de $\mathbb{P}^{k(\zeta)-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ d'équation

$$d\Big(\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j^n \Big) = 0 \quad \text{si } \mathrm{J} \neq \{1, \dots, n'\},$$
$$d(y_1^n + \cdots + y_{n'}^n) - n\psi' y_1^d \dots y_{n'}^d = 0 \quad \text{si } \mathrm{J} = \{1, \dots, n'\},$$

où ψ' est le produit de ψ par un élément de $\mu_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Cette hypersurface est lisse (car, dans le second cas, on a $(\psi')^n = \psi^n \neq 1$ et donc $(\psi')^{n'} \neq 1$). D'après le théorème 1.2.4 page 14, on a :

$$\chi(\mathrm{Y}_\lambda) = k(\zeta) - 1 + \frac{(1-n)^{k(\zeta)} + (n-1)}{n} = k(\zeta) + \frac{(1-n)^{k(\zeta)} - 1}{n}.$$

(*b*) Second cas. — On a $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q) - \mu_{n'}(\mathbb{F}_q)$. D'après ce qui précède, le schéma Y_λ est isomorphe à $\mathbb{P}^{k(\zeta)-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ si $\mathrm{J} \neq \{1, \dots, n'\}$ et à l'hypersurface de $\mathbb{P}^{n'-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ d'équation $(y_1 \dots y_{n'})^d = 0$ si $\mathrm{J} = \{1, \dots, n'\}$. Dans le premier cas, on a $\chi(\mathrm{Y}_\lambda) = k(\zeta)$. Dans le second cas, on a nécessairement $n' \geq 2$ et la caractéristique d'Euler-Poincaré de Y_λ est égale à celle de $\mathrm{Y}_\lambda^{\mathrm{red}}$, qui est la réunion dans $\mathbb{P}^{n'-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ des hyperplans d'équation $y_j = 0$. On a donc dans ce cas :

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{Y}_\lambda) &= \sum_{\substack{\mathrm{L} \subset \{1, \dots, n'\} \\ \mathrm{L} \neq \varnothing}} (-1)^{|\mathrm{L}|-1}(n' - |\mathrm{L}|) = \sum_{l=1}^{n'} (-1)^{l-1} \mathrm{C}_{n'}^l (n' - l) \\ &= n' \sum_{l=1}^{n'-1} (-1)^{l-1} \mathrm{C}_{n'-1}^l = n'(1 - (1 + (-1))^{n'-1}) = n' = k(\zeta).\end{aligned}$$

Pour chaque $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$, il existe exactement d valeurs de λ telles que $\lambda^{-d} = \zeta$. On a donc :

$$\begin{aligned}\chi(\overline{\mathrm{X}}_\psi^g) &= \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_q^*} \chi(\mathrm{Y}_\lambda) = d \sum_{\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)} k(\zeta) + d \sum_{\zeta \in \mu_{n'}(\mathbb{F}_q)} \frac{(1-n)^{k(\zeta)} - 1}{n} \\ &= dn' + \sum_{\zeta \in \mu_{n'}(\mathbb{F}_q)} \frac{(1-n)^{k(\zeta)} - 1}{n'} = n - 1 + \sum_{\zeta \in \mu_{n'}(\mathbb{F}_q)} \frac{(1-n)^{k(\zeta)}}{n'}.\end{aligned}$$

L'ordre de g divise nd donc est premier à q ; ainsi, d'après le théorème 3.2.5,

$$\mathrm{tr}(g^* | \mathrm{H}_{\mathrm{et}}^{n-2}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = (-1)^{n-1}\Big((n-1) - \chi(\overline{\mathrm{X}}_\psi^g)\Big) = \frac{(-1)^n}{n'} \sum_{\zeta \in \mu_{n'}(\mathbb{F}_q)} (1-n)^{k(\zeta)}. \ \square$$

3.4.7 Trace d'un produit $\boldsymbol{\sigma}$ de $\boldsymbol{n'}$ cycles de longueur $\boldsymbol{d}$ à supports disjoints opérant sur $\overline{\mathbf{H}}_{\boldsymbol{a}}$ lorsque $\boldsymbol{a} \in \hat{\mathbf{A}}^{\boldsymbol{\sigma}}$

Reprenons les notations du numéro précédent.

Lemme 3.4.13. — *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un produit de n' cycles de longueur d à supports disjoints,*

$$\sum_{a \in \hat{\mathrm{A}} \ tq\ \sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}'}} a(\zeta_1, \dots, \zeta_n) m_a = \frac{(-1)^{n'}}{n'} \sum_{\zeta \in \mu_{n'}(\mathbb{F}_q)} (1-n)^{k(\zeta)}.$$

Démonstration. — Notons B l'ensemble des éléments $(b_1, \dots, b_n)$ de $(((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times) - \{0\})^n$ tels que $b_1 + \cdots + b_n = 0$ et ${}^\sigma(b_1, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_n)$. L'application $(b_1, \dots, b_n) \mapsto [b_1, \dots, b_n]$ de B dans $\hat{\mathrm{A}}$ a pour image l'ensemble des éléments $a \in \hat{\mathrm{A}}$ tels que $\sigma \in \mathrm{S}'_a$; un tel élément a possède exactement m_a antécédents par cette application. La somme à calculer peut donc s'écrire

$$\sum_{(b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{B}} \zeta_1^{b_1} \dots \zeta_n^{b_n}.$$

Si $(b_1, \dots, b_n)$ appartient à B, tous les éléments b_i, pour i appartenant à une orbite O_j de σ, sont égaux à un même élément c_j de $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times) - \{0\}$ et l'on a $d(c_1 + \dots c_{n'}) = 0$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $c_1 + \cdots + c_{n'} \in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Notre somme peut donc se récrire

$$\sum_{\substack{c_1, \dots, c_{n'} \in ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times) - \{0\} \\ c_1 + \cdots + c_{n'} \in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mu_1^{c_1} \dots \mu_{n'}^{c_{n'}},$$

où l'on a posé $\mu_j = \prod_{i \in \mathrm{O}_j} \zeta_i$. On conclut donc par la généralisation suivante du lemme 3.3.4 (que l'on retrouve en prenant $d = 1$ et $n' = n$). □

Lemme 3.4.14. — *Soient r un entier ≥ 1 et μ_1, ..., μ_r des éléments de $\mu_n(\mathbb{F}_q)$. Pour tout $\zeta \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$, notons $k(\zeta)$ le nombre d'indices j tels que $\mu_j = \zeta$. On a alors :*

$$\sum_{\substack{c_1, \dots, c_r \in ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times) - \{0\} \\ c_1 + \cdots + c_r \in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mu_1^{c_1} \dots \mu_r^{c_r} = \frac{(-1)^r}{n'} \sum_{\zeta \in \mu_{n'}(\mathbb{F}_q)} (1-n)^{k(\zeta)}.$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur r. Pour $r = 1$, on a

$$\sum_{c_1 \in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{0\}} \mu_1^{c_1} = \begin{cases} d - 1 = \frac{-1}{n'}((1-n)^1 + (n'-1)(1-n)^0) & \text{si } \mu_1 \in \mu_{n'}(\mathbb{F}_q), \\ -1 = \frac{-1}{n'}(n'(1-n)^0) & \text{si } \mu_1 \notin \mu_{n'}(\mathbb{F}_q), \end{cases}$$

d'où le résultat dans ce cas. Supposons désormais $r \geq 2$ et le résultat démontré pour

$r-1$. On écrit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{c_1,\dots,c_r\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}\\ c_1+\dots+c_r\in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mu_1^{c_1}\dots\mu_r^{c_r} + \sum_{\substack{c_1,\dots,c_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}\\ c_1+\dots+c_{r-1}\in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mu_1^{c_1}\dots\mu_{r-1}^{c_{r-1}}\\
&\quad= \sum_{\substack{c_1,\dots,c_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}\\ c_r\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ c_1+\dots+c_r\in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mu_1^{c_1}\dots\mu_r^{c_r}\\
&\quad= \sum_{\substack{c_1,\dots,c_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}\\ l\in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mu_1^{c_1}\dots\mu_{r-1}^{c_{r-1}}\mu_r^{l-c_1-\dots-c_{r-1}}\\
&\quad= \sum_{c_1,\dots,c_{r-1}\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_r}\right)^{c_1}\dots\left(\frac{\mu_{r-1}}{\mu_r}\right)^{c_{r-1}} \sum_{l\in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mu_r^l.
\end{aligned}$$

La somme $\sum_{l\in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mu_r^l$ est égale à d si $\mu_r\in\boldsymbol{\mu}_{n'}(\mathbb{F}_q)$ et à 0 sinon tandis que la somme $\sum_{c_i\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}}(\frac{\mu_i}{\mu_r})^{c_i}$ est égale à $n-1$ si $\mu_i=\mu_r$ et à -1 sinon. Le produit de toutes ces sommes est donc égal à $(-1)^{r-1}d(1-n)^{k(\mu_r)-1}$ si $\mu_r\in\boldsymbol{\mu}_{n'}(\mathbb{F}_q)$ et à 0 sinon.

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, on a donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{c_1,\dots,c_r\in((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)-\{0\}\\ c_1+\dots+c_r\in n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mu_1^{c_1}\dots\mu_r^{c_r}\\
&\quad= \sum_{\substack{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{n'}(\mathbb{F}_q)\\ \zeta\neq\mu_r}} (-1)^r\frac{(1-n)^{k(\zeta)}}{n'} + \sum_{\substack{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{n'}(\mathbb{F}_q)\\ \zeta=\mu_r}} \left((-1)^r\frac{(1-n)^{k(\zeta)-1}}{n'} - d(-1)^r(1-n)^{k(\zeta)-1}\right)\\
&\quad= \frac{(-1)^r}{n'}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{n'}(\mathbb{F}_q)}(1-n)^{k(\zeta)}. \qquad\square
\end{aligned}$$

Théorème 3.4.15. — *Si σ est un produit de n' cycles de longueur d à supports disjoints et si $a\in\hat{\mathrm{A}}^\sigma$, alors :*

$$\operatorname{tr}(\sigma^*|\overline{\mathrm{H}}_a) = \begin{cases}(-1)^{n-n'}m_a & si\ \sigma\in\mathrm{S}'_a,\\ 0 & si\ \sigma\in\mathrm{S}_a-\mathrm{S}'_a.\end{cases}$$

Démonstration. — Comme $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}=\bigoplus_{a\in\hat{\mathrm{A}}}\overline{\mathrm{H}}_a$ et que σ^* applique $\overline{\mathrm{H}}_a$ dans $\overline{\mathrm{H}}_{\sigma a}$, on a, pour tout $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F}_q)^n$ tel que $\zeta_1\dots\zeta_n=1$:

$$\operatorname{tr}(([\zeta_1,\dots,\zeta_n]\sigma)^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = \sum_{a\in\hat{\mathrm{A}}^\sigma} a(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\operatorname{tr}(\sigma^*|\overline{\mathrm{H}}_a).$$

Par ailleurs, d'après le théorème 3.4.12 et le lemme 3.4.13 :

$$\sum_{a\in\hat{\mathrm{A}}\ \mathrm{tq}\ \sigma\in\mathrm{S}'_a}(-1)^{n-n'}m_a\,a(\zeta_1,\dots,\zeta_n) = \sum_{a\in\hat{\mathrm{A}}^\sigma}\operatorname{tr}(\sigma^*|\overline{\mathrm{H}}_a)\,a(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$$

Ceci étant valable pour tout $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F}_q)^n$ tels que $\zeta_1\dots\zeta_n=1$, on peut identifier les coefficients, ce qui donne le résultat voulu. $\square$

3.4.8 Action de S_a sur $\overline{\mathrm{H}}_a$

Récapitulons les résultats des nº 3.4.3 à 3.4.7. On reprend les notations du nº 3.4.2 : soient $a = [a_1, \ldots, a_n] \in \hat{\mathrm{A}}$, $n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $(a_1+j, \ldots, a_n+j)$ est un permuté de $(a_1, \ldots, a_n)$ et $d_a = n/n'_a$; le fixateur S_a de a dans $\mathfrak{S}_n$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_a = \mathrm{S}'_a \rtimes \overline{\Sigma}_a \quad &\text{où} \quad \mathrm{S}'_a \text{ est le fixateur de } (a_1, \ldots, a_n) \text{ dans } \mathfrak{S}_n, \\ &\text{et} \quad \overline{\Sigma}_a = \langle \sigma \rangle \text{ est un groupe cyclique d'ordre } d_a, \end{aligned}$$

avec σ un produit de n'_a cycles de longueur d_a à supports disjoints.

La dimension m_a de $\overline{\mathrm{H}}_a$ est, d'après le théorème 3.3.3, égale à $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{a_1, \ldots, a_n\}|$. Cette dimension est un multiple de d_a vu que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est stable par translations par les éléments de $n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Elle s'écrit donc $m_a = d_a m'_a$.

Théorème 3.4.16. — *L'action de* S_a *sur* $\overline{\mathrm{H}}_a$ *est donnée de la manière suivante :*

- *un élément* $s \in \mathrm{S}'_a$ *agit par* $\varepsilon(s)\,\mathrm{Id}_{\overline{\mathrm{H}}_a}$ *;*
- *un élément* $s \in \overline{\Sigma}_a$ *agit par* m'_a *copies de la représentation régulière de* $\overline{\Sigma}_a$*.*

Démonstration. — La première affirmation résulte du théorème 3.4.11 et la deuxième du théorème 3.4.15 : la trace de σ^i opérant sur $\overline{\mathrm{H}}_a$ est nulle pour $1 \le i \le n-1$ et égale à $m_a = \dim \overline{\mathrm{H}}_a$ pour $i = 0$ donc l'action de $\overline{\Sigma}_a$ se fait par $m'_a = m_a/d_a$ copies de la représentation régulière. □

Ceci détermine complètement la structure du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{S}_a]$-module $\overline{\mathrm{H}}_a$. D'après les considérations du nº 3.4.1, on en déduit la structure du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{G}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$:

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}} \simeq \bigoplus_{a \in \mathrm{R}} \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a} (a \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{reg}^{m'_a}_{\mathrm{S}_a/\mathrm{S}'_a}), \tag{3.4}$$

où $\mathrm{reg}_{\mathrm{S}_a/\mathrm{S}'_a}$ désigne la représentation régulière de $\mathrm{S}_a/\mathrm{S}'_a$ (rappelons que R est un système de représentants dans $\hat{\mathrm{A}}$ des éléments de $\mathfrak{S}_n \backslash \hat{\mathrm{A}}$).

3.5 Action de G sur $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$

On commence par donner une construction intrinsèque du corps cyclotomique et du caractère associé à un groupe cyclique.

3.5.1 Le corps cyclotomique associé à un groupe cyclique

Soit C un groupe cyclique d'ordre $m \ge 1$. Notons $\mathbb{Q}[\mathrm{C}]$ l'algèbre du groupe C sur $\mathbb{Q}$ et notons $\mathfrak{m}_{\mathrm{C}}$ l'idéal de $\mathbb{Q}[\mathrm{C}]$ engendré par les éléments $\sum_{x \in \mathrm{C}'} [x]$, où C' parcourt l'ensemble des sous-groupes de C distincts de $\{1\}$.

Théorème 3.5.1. — *L'idéal* $\mathfrak{m}_{\mathrm{C}}$ *de* $\mathbb{Q}[\mathrm{C}]$ *est maximal et le corps* $\mathbb{K}_{\mathrm{C}} = \mathbb{Q}[\mathrm{C}]/\mathfrak{m}_{\mathrm{C}}$ *est isomorphe au corps cyclotomique* $\mathbb{Q}(\mu_m)$ *des racines* m*-ièmes de l'unité.*

Démonstration. — Nous pouvons supposer que $\mathrm{C} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. L'algèbre $\mathbb{Q}[\mathrm{C}]$ s'identifie alors à $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^m-1)\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. On a $\mathrm{X}^m-1 = \prod_{d|m}\Phi_d$, où Φ_d est le polynôme cyclotomique d'indice d. Les polynômes Φ_d sont deux à deux étrangers dans $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. D'après le théorème chinois, on en déduit que $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^m-1)\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ est isomorphe à $\prod_{d|m}\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\Phi_d\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{m}_\mathrm{C}$ est le noyau de la projection $\varphi\colon \mathbb{Q}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^m-1)\mathbb{Q}[\mathrm{X}] \to \mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\Phi_m\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Soit d un diviseur de m distinct de m et $\mathrm{C}_d = d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ l'unique sous-groupe d'indice d de C ; l'élément $\sum_{x\in\mathrm{C}_d}[x]$ de $\mathbb{Q}[\mathrm{C}]$ a pour projection 0 sur le facteur $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\Phi_m\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ et une projection $\neq 0$ (égale à $\frac{m}{d}$) sur le facteur $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\Phi_d\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, d'où le résultat. □

Le corps $\mathbb{K}_\mathrm{C}$ est appelé *le corps cyclotomique associé au groupe cyclique* C. L'application composée

$$\mathrm{C} \longrightarrow \mathbb{Q}[\mathrm{C}] \longrightarrow \mathbb{K}_\mathrm{C} = \mathbb{Q}[\mathrm{C}]/\mathfrak{m}_\mathrm{C}$$

est un caractère canonique χ_C de C à valeurs dans $\mathbb{K}_\mathrm{C}$. Celui-ci induit un isomorphisme de C sur le groupe des racines m-ième de l'unité de $\mathbb{K}_\mathrm{C}$.

Proposition 3.5.2. — *Le corps* $\mathbb{K}_\mathrm{C}$ *est un* $\mathbb{Q}[\mathrm{C}]$*-module simple de commutant* $\mathbb{K}_\mathrm{C}$.

Si C_1 et C_2 sont deux groupes cycliques de même ordre m et $\varphi\colon \mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_2$ un isomorphisme de C_1 sur C_2, l'homomorphisme $\mathbb{Q}[\mathrm{C}_1] \to \mathbb{Q}[\mathrm{C}_2]$ qui prolonge φ définit par passage aux quotients un isomorphisme $\mathbb{K}_\varphi\colon \mathbb{K}_{\mathrm{C}_1} \to \mathbb{K}_{\mathrm{C}_2}$ et on a $\mathbb{K}_\varphi \circ \chi_{\mathrm{C}_1} = \chi_{\mathrm{C}_2}\circ\varphi$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\chi_{\mathrm{C}_1}"'] & \mathrm{C}_2 \arrow[d, "\chi_{\mathrm{C}_2}"] \\
\mathbb{K}_{\mathrm{C}_1} \arrow[r, "\mathbb{K}_\varphi"] & \mathbb{K}_{\mathrm{C}_2}
\end{tikzcd}$$

3.5.2 Le $\mathbb{Q}[\mathrm{A}]$-module simple associé à un élément de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\backslash\hat{\mathrm{A}}$

Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ opère sur les éléments de $\hat{\mathrm{A}}$ par $k\cdot[a_1,\dots,a_n] = [ka_1,\dots,ka_n]$ pour $k\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $[a_1,\dots,a_n]\in\hat{\mathrm{A}}$. Si $a\in\hat{\mathrm{A}}$, rappelons que $\bar{a}$ désigne la classe de a modulo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Notons que les entiers d_a et n'_a définis au n° 3.4.2 ne dépendent que de $\underline{a}$ et non de a (voir rem. 3.4.5.*c*).

Notons n_a l'ordre de l'élément a dans le groupe $\hat{\mathrm{A}}$; il ne dépend que de $\underline{a}$ et non de a. Si m est un entier, on a $ma = 0$ si et seulement si tous les ma_i sont égaux c'est-à-dire si et seulement si $m(a_i - a_{i'}) = 0$ pour tous i et i' compris entre 1 et n. Le sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par les différences $a_i - a_{i'}$ ne dépend que de $\underline{a}$ et non de a ou du choix des a_i ; il est de la forme $f_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où f_a est un diviseur de n et son ordre est n_a, donc $n = n_af_a$. L'entier f_a ne dépend que de $\underline{a}$, pas de a.

En suivant le n° 3.3.1, on identifie le groupe $\hat{\mathrm{A}}$ au groupe des caractères de A à valeurs dans $\mathbb{F}_q$, l'élément $a\in\hat{\mathrm{A}}$ correspondant au caractère $[\zeta_1,\dots,\zeta_n]\mapsto\theta(\zeta_1)^{a_1}\cdots\theta(\zeta_n)^{a_n}$. Si N_a et E_a désignent le noyau et l'image de ce caractère, $\mathrm{E}_a\simeq\mathrm{A}/\mathrm{N}_a$ est un groupe cyclique de cardinal n_a. Remarquons que E_a ne dépend que de $\underline{a}$ et N_a ne dépend que de $\bar{a}$, pas de a.

Notons $\mathbb{K}_a$ le corps cyclotomique associé au groupe cyclique E_a (voir n° précédent) et χ_a le caractère composé

$$\mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{A}/\mathrm{N}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}_a \hookrightarrow \mathbb{K}_a,$$

où la troisième flèche est le caractère canonique de E_a construit au nº précédent.

REMARQUES 3.5.3.

a) Soit $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. On a $ka = a$ si et seulement si $k \equiv 1 \mod n_a\mathbb{Z}$.

b) Le corps cyclotomique $\mathbb{K}_a$ ne dépend que de $\underline{a}$ et non de a, mais $\chi_{ka} = \chi_a^k$.

Proposition 3.5.4. — *Le caractère* χ_a *définit sur* $\mathbb{K}_a$ *une structure de* $\mathbb{Q}[\mathrm{A}]$*-module simple dont le commutant est canoniquement isomorphe au corps* $\mathbb{K}_a$*.*

3.5.3 Le stabilisateur $\mathrm{S}_{\bar{a}}$ dans $\mathfrak{S}_n$ d'un élément $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\backslash\hat{\mathrm{A}}$

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ opère sur $\hat{\mathrm{A}}$ par ${}^\sigma[a_1, \dots, a_n] = [a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)}]$. Cette action commute à celle de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$; par passage aux quotients, le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\backslash\hat{\mathrm{A}}$. Notons $\mathrm{S}_{\bar{a}}$ le fixateur de $\bar{a}$ dans $\mathfrak{S}_n$.

Si $\sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}}$, il existe un unique élément $k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ tel que ${}^\sigma a = ka$; notons-le $k_a(\sigma)$. L'application $k_a : \mathrm{S}_{\bar{a}} \to (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ ainsi définie est un homomorphisme de groupes, non surjectif en général (4). Son noyau n'est autre que le groupe S_a du nº 3.4.2 ; en particulier, S_a est distingué dans $\mathrm{S}_{\bar{a}}$. Notons que l'application k_a ne dépend que $\bar{a}$ et non de a.

Par définition de n'_a, il existe i tel que $a_1 = a_i + n'_a$, c'est-à-dire que $n'_a = a_1 - a_i \in f_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par suite, il existe e_a tel que $n'_a = e_a f_a$; on en déduit que $n = d_a e_a f_a$ et $n_a = d_a e_a$. L'entier e_a ne dépend que de $\underline{a}$ et non de a.

Théorème 3.5.5. — *L'image de l'homomorphisme* $k_a : \mathrm{S}_{\bar{a}} \to (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ *contient les éléments de* $(\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ *congrus à* 1 *modulo* e_a *et par suite est l'image réciproque par la surjection canonique* $(\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/e_a\mathbb{Z})^\times$ *d'un sous-groupe de* $(\mathbb{Z}/e_a\mathbb{Z})^\times$*.*

DÉMONSTRATION. — Étant donné $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ congru à 1 modulo e_a, il s'agit de construire une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que ${}^\sigma a = ka$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe j tel que, pour tout $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les ensembles $\mathrm{I}(kb + j)$ et $\mathrm{I}(b)$ ont même cardinal. Le lemme suivant montre que l'on peut prendre $j = -ka_1 + a_1$. □

Lemme 3.5.6. — *Si* $k \equiv 1 \mod e_a$*, alors, pour tout* $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*,* $\mathrm{I}(kb - ka_1 + a_1)$ *a même cardinal que* $\mathrm{I}(b)$*.*

DÉMONSTRATION. — Soit $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Supposons que $b \equiv a_1 \mod f_a$, de sorte que $(kb - ka_1 + a_1) - b = (k-1)(b - a_1)$ est multiple de $e_a f_a = n'_a$ et donc $kb - ka_1 + a_1 \equiv b \mod n'_a$; d'après la remarque 3.4.2, cela implique que $\mathrm{I}(kb - ka_1 + a_1)$ a même cardinal que $\mathrm{I}(b)$.

Supposons maintenant que $b \not\equiv a_1 \mod f_a$ (et donc $\mathrm{I}(b) = \varnothing$) ; dans ce cas, $kb - ka_1$ n'est pas nul modulo f_a et donc, par définition de f_a, $kb - ka_1 + a_1$ n'apparaît pas parmi les a_i, ce qui montre que $\mathrm{I}(kb - ka_1 + a_1)$ est vide. □

Déterminons désormais la structure de $\mathrm{S}_{\bar{a}}$. Rappelons (voir rem. 3.4.5.*c*) que S'_a et S_a ne dépendent que de $\bar{a}$, pas de a.

Théorème 3.5.7. — *Le groupe* S'_a *est distingué dans* $\mathrm{S}_{\bar{a}}$ *et l'extension suivante est scindée :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{S}'_a \longrightarrow \mathrm{S}_{\bar{a}} \longrightarrow \mathrm{S}_{\bar{a}}/\mathrm{S}'_a \longrightarrow 1.$$

4. Prendre $n = 5$ et $a = [0, 0, 1, 1, 3]$: on a $n_a = 5$, mais il n'existe pas $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ tel que ${}^\sigma a = 2a$.

Démonstration. — Par définition de f_a, il est possible de choisir le représentant $(a_1, \ldots, a_n)$ de a dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ tel que tous les a_i soient multiples de f_a ; puisque $f_a n_a = n$, les éléments wa_i et wf_a où $w \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ sont bien définis dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $\sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}}$, il existe un unique couple $(u_\sigma, v_\sigma) \in \mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ tel que, pour tout i, on ait $a_{\sigma(i)} = v_\sigma a_i + u_\sigma f_a$. L'unicité de v_σ provient du fait que l'on a déjà vu (rem. 3.5.3) qu'un k tel que $ka = {}^\sigma a$ était défini modulo n_a et l'unicité de u_σ résulte du fait que $u_\sigma f_a$ est unique modulo n.

L'application $\varphi : \sigma \mapsto (u_\sigma, v_\sigma)$ est un homomorphisme de $\mathrm{S}_{\bar{a}}$ dans le groupe $\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ (muni la loi de composition définie par $(u,v)(u',v') = (u + vu', vv')$) ; son noyau est S'_a qui est donc un sous-groupe distingué de $\mathrm{S}_{\bar{a}}$.

Pour tout $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, choisissons une numérotation $i_1(b)$, …, $i_{|\mathrm{I}(b)|}(b)$ des éléments de l'ensemble $\mathrm{I}(b)$. Étant donné $(u,v) \in \varphi(\mathrm{S}_{\bar{a}})$, si $\mathrm{I}(b)$ est non vide, alors b est un multiple de f_a (par hypothèse) et $\mathrm{I}(b)$ a même cardinal que $\mathrm{I}(vb + uf_a)$ vu que $a_{\sigma(i)} = va_i + uf_a$ pour tout $\sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}}$ vérifiant $\varphi(\sigma) = (u,v)$. Il existe donc une permutation $\sigma_{u,v} \in \mathfrak{S}_n$ qui applique $i_l(b)$ sur $i_l(vb + uf_a)$ pour tout $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $1 \le l \le |\mathrm{I}(b)|$. Cette permutation est dans $\mathrm{S}_{\bar{a}}$ par définition même et son image par φ est (u,v). De plus, l'application $(u,v) \mapsto \sigma_{u,v}$ ainsi définie est un homomorphisme de groupe vu que :

$$v'(vb + uf_a) + u'f_a = (v'v)b + (u' + v'u)f_a.$$

Ceci démontre que $(u,v) \mapsto \sigma_{u,v}$ est une section de φ et donc que l'extension $1 \to \mathrm{S}'_a \to \mathrm{S}_{\bar{a}} \to \mathrm{S}_{\bar{a}}/\mathrm{S}'_a \to 1$ est scindée. □

Remarques 3.5.8.

a) Bien que S_a soit distingué dans $\mathrm{S}_{\bar{a}}$, l'extension $1 \to \mathrm{S}_a \to \mathrm{S}_{\bar{a}} \to \mathrm{S}_{\bar{a}}/\mathrm{S}_a \to 1$ n'est pas toujours scindée. En effet, considérons le cas $n = 24$ et la suite $(a_1, \ldots, a_{24})$ qui comporte quatre fois chacun des termes 0, 2, 12, 14 et deux fois chacun des termes 1, 7, 13, 19 ; on a $n_a = 24$ mais bien que 5 soit un élément d'ordre 2 de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$, les seuls éléments (u,v) de l'image de φ tels que $v = 5$ sont $(2,5)$ et $(14,5)$ qui sont d'ordre 4.

b) Lorsque $\sigma \in \mathrm{S}_a$, on a $v_\sigma = 1$ et $u_\sigma \in e_a\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z}$; en effet, si $\sigma \in \mathrm{S}_a$, alors $v_\sigma = 1$ et donc $a_{\sigma(i)} - a_i = u_\sigma f_a$ et donc, par définition de n'_a, $u_\sigma f_a$ est un multiple de $n'_a = e_a f_a$ et donc u_σ est un multiple de e_a.

c) Avec les notations du nº 3.4.2, on a, pour tout $s \in \mathrm{S}_a$, $j_a(s) = f_a u_s$. Plus précisément, $j_a : \mathrm{S}_a \to n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le composé de l'homomorphisme $\sigma \mapsto u_s$ de S_a dans $e_a\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z}$ et de l'isomorphisme de $e_a\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z}$ dans $n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ déduit de la multiplication par f_a.

3.5.4 Construction de $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-modules et étude de leur extension des scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$

Le but de ce numéro est de construire des $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-modules qui, après extension des scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, redonnent les représentations considérées dans le § 3.4.

Avant de commencer, rappelons (voir rem. 3.5.3) que le corps $\mathbb{K}_a$ ne dépend que de $\underline{a}$ et non de a, mais que $\chi_{ka} = \chi_a^k$. De plus, si $v \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$, notons θ_v l'automorphisme du corps $\mathbb{K}_{\underline{a}}$ qui envoie chaque racine n_a-ième de l'unité sur sa puissance v-ième.

Soit $a \in \hat{\mathrm{A}}$; on choisit un représentant $(a_1, \ldots, a_n)$ de a dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ tels que les a_i soient tous multiples de f_a et on reprend les notations du nº précédent concernant les entiers u_σ et v_σ.

Proposition 3.5.9. — *Si ω est une racine n_a-ième de l'unité de $\mathbb{K}_a$, l'application suivante définit une représentation de $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\overline{a}}$ dans $\mathbb{K}_a$:*

$$\begin{aligned} \mu_{a,\omega} \ : \ \mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\overline{a}} &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K}_a) \\ (\zeta, \sigma) &\longmapsto \chi_a(\zeta)\varepsilon(\sigma)\omega^{u_\sigma}\theta_{v_\sigma} \end{aligned}$$

Notons $\mathrm{M}_{a,\omega}$ le $\mathbb{Q}[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\overline{a}}]$-module $\mathbb{K}_a$ ainsi défini. Son rang est $\phi(n_a)$ (où ϕ désigne la fonction indicatrice d'Euler) et, à isomorphisme près, il est indépendant du choix du représentant $(a_1, \ldots, a_n)$ de a tels que les a_i soient divisibles par f_a.

Démonstration. — Vérifions tout d'abord que $\mu_{a,\omega}$ est bien un homomorphisme de groupe. On a :

$$\begin{aligned} \mu_{a,\omega}(\zeta,\sigma)\mu_{a,\omega}(\zeta',\sigma') &= \chi_a(\zeta)\varepsilon(\sigma)\omega^{u_\sigma}\theta_{v_\sigma}\chi_a(\zeta')\varepsilon(\sigma')\omega^{u_{\sigma'}}\theta_{v_{\sigma'}} \\ &= \chi_a(\zeta)\chi_a(\zeta')^{v_\sigma}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')\omega^{u_\sigma+u_{\sigma'}v_\sigma}\theta_{v_\sigma v_{\sigma'}}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mu_{a,\omega}((\zeta,\sigma)(\zeta',\sigma')) = \mu_{a,\omega}(\zeta\,{}^\sigma\zeta', \sigma\sigma') &= \chi_a(\zeta\,{}^\sigma\zeta')\varepsilon(\sigma\sigma')\omega^{u_\sigma+v_\sigma u_{\sigma'}}\theta_{v_\sigma v_{\sigma'}} \\ &= \chi_a(\zeta)\chi_a({}^\sigma\zeta')\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')\omega^{u_\sigma+v_\sigma u_{\sigma'}}\theta_{v_\sigma v_{\sigma'}}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\chi_a({}^\sigma\zeta') = \chi_a(\zeta')^{v_\sigma}$:

$$\chi_a({}^\sigma\zeta') = \chi_{\sigma^{-1}a}(\zeta') = \chi_{v_\sigma a}(\zeta') = \chi_a(\zeta')^{v_\sigma}.$$

Ainsi, $\mu_{a,\omega}(\zeta,\sigma)\mu_{a,\omega}(\zeta',\sigma') = \mu_{a,\omega}((\zeta,\sigma)(\zeta',\sigma'))$, ce qui montre que $\mu_{a,\omega}$ est bien une représentation de $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a$ dans $\mathbb{K}_a$.

Montrons maintenant que $\mu_{a,\omega}$ ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix du représentant $(a_1, \ldots, a_n)$ de a tel que les a_i soient des multiples de f_a. Si $(a'_1, \ldots, a'_n)$ est un autre représentant, il existe j tel que $a'_i = a_i + jf_a$ pour tout i, et donc :

$$a'_{\sigma(i)} = a_{\sigma(i)} + jf_a = v_\sigma a_i + u_\sigma f_a + jf_a = v_\sigma a'_i + (u_\sigma + j(1-v_\sigma))f_a.$$

Ainsi, $v'_\sigma = v_\sigma$ et $u'_\sigma = u_\sigma + j(1-v_\sigma)$, d'où l'on déduit que :

$$\mu'_{a,\omega}(\zeta,\sigma) = \chi_a(\zeta)\varepsilon(\sigma)\omega^{u_\sigma+j(1-v_\sigma)}\theta_{v_\sigma} = \omega^j\mu_{a,\omega}(\zeta,\sigma)\,\omega^{-j}. \qquad \square$$

On étudie maintenant l'extension des scalaires $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Reprenons l'isomorphisme θ du nº 3.3.1 entre $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mu_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$; il existe un unique plongement ι_a de $\mathbb{K}_a$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_a \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mu_n(\mathbb{F}_q) \arrow[r, hook, "\theta"] & \mu_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d, hook] \\ \mathrm{E}_a \arrow[r, hook] & \mathbb{K}_a \arrow[r, hook, "\iota_a"'] & \overline{\mathbb{Q}}_\ell \end{tikzcd} .$$

Ce plongement ne dépend que de $\underline{a}$ et non de a. De plus, si on identifie $a \in \hat{\mathrm{A}}$ à un caractère $\mathrm{A} \to \mu_n(\mathbb{F}_q)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, hook, "a"] \arrow[d, equal] & \mu_n(\mathbb{F}_q) \arrow[r, hook, "\theta"] & \mu_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d, hook] \\ \mathrm{A} \arrow[r, hook, "\chi_a"'] & \mathbb{K}_a \arrow[r, hook, "\iota_a"'] & \overline{\mathbb{Q}}_\ell \end{tikzcd} .$$

Dans le reste de ce numéro, on identifie $\mathbb{K}_a$ au sous-corps $\iota_a(\mathbb{K}_a)$ de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ au moyen de ι_a.

En faisant cette identification, on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{K}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell &\xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{(\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} \\ k \otimes \lambda &\longmapsto (\theta_v(k)\lambda)_{v \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} \end{aligned}$$

Puisque

$$k \otimes \lambda \xmapsto{\mu_{a,\omega}(\zeta,\sigma)\otimes \mathrm{Id}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}} \chi_a(\zeta)\varepsilon(\sigma)\omega^{u_\sigma}\theta_{v_\sigma}(k) \otimes \lambda \xmapsto{\delta} (\chi_a(\zeta)^v \varepsilon(\sigma)\omega^{vu_\sigma}\theta_{vv_\sigma}(k)\lambda)_{v \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times},$$

l'endomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{(\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times}$ déduit de $\mu_{a,\omega}(\zeta,\sigma) \otimes \mathrm{Id}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ par l'isomorphisme δ est donné par

$$(x_v)_{v \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} \mapsto (\chi_{va}(\zeta)\varepsilon(\sigma)\omega^{vu_\sigma} x_{vv_\sigma})_{v \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times}. \tag{3.5}$$

Proposition 3.5.10. — *Notons u_a l'homomorphisme $\sigma \mapsto u_\sigma$ de S_a dans $e_a\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z}$. Il ne dépend pas du représentant $(a_1, \dots, a_n)$ de a choisi et on a $u_{ka} = ku_a$ pour tout $k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ (voir rem. 3.5.8.c et 3.4.5.c). Le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est isomorphe à*

$$\bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times/\mathrm{Im}\, k_a} \mathrm{Ind}_{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_a}^{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_{\bar{a}}}(ka \otimes \varepsilon \otimes \omega^{u_{ka}}).$$

Démonstration. — La formule (3.5) précédente montre que les composants isotypiques du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sont de type ka pour $k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ (comme dans le n° 3.3.1, on identifie ici a à un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) ; chacun de ces composants isotypiques est somme directe de représentations de dimension 1 isomorphes à ka.

Déterminons maintenant l'action de S_a. Puisque $\mathrm{S}_{ka} = \mathrm{S}_a$ pour tout $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, le groupe S_a laisse stable chaque facteur de dimension 1 isomorphe à ka du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et, d'après la formule (3.5), l'action de S_a sur un facteur isomorphe à ka se fait par multiplication par $\varepsilon(\sigma)\omega^{ku_\sigma} = \varepsilon(\sigma)\omega^{u_{ka}}$.

Ceci montre que le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est isomorphe à

$$\bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} (ka \otimes \varepsilon \otimes \omega^{u_{ka}}). \tag{3.6}$$

Au vu de la formule (3.5) et du fait que $\mathrm{S}_{\bar{a}}/\mathrm{S}_a = \mathrm{Im}\, k_a = \{v_\sigma \mid \sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}}\}$, on a l'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}]$-modules :

$$\bigoplus_{k \in \mathrm{Im}\, k_a} (ka \otimes \varepsilon \otimes \omega^{u_{ka}}) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_a}^{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_{\bar{a}}} (a \otimes \varepsilon \otimes \omega^{u_a}).$$

On en déduit le résultat annoncé. □

On en déduit les trois corollaires suivants.

Corollaire 3.5.11. — *À isomorphisme près, $\mathrm{M}_{a,\omega}$ ne dépend que de la racine d_a-ième de l'unité ω^{e_a}. Plus précisément :*

$$\mathrm{M}_{a,\omega} \simeq \mathrm{M}_{a',\omega'} \iff a' \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times a \ \text{ et } \ \omega^{e_a} = \omega'^{e_a}.$$

DÉMONSTRATION. — Puisque deux représentations isomorphes après extension des scalaires le sont également avant (voir [CR62, th. 29.7, p. 200]), il suffit de montrer ce résultat pour $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Or, d'après la formule (3.6), on a :

$$\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\mathrm{A}} \simeq \bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} ka,$$

ce qui montre que si $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathrm{M}_{a',\omega'} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, alors, nécessairement, $a' \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times a$. Supposons donc que $a' \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times a$ de sorte que $e_a = e_{a'}$. Rappelons (voir la remarque 3.5.8.b ainsi que la démonstration de la proposition 3.4.4) que u_a est une surjection de S_a sur $e_a\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z}$ avec $u_{ka} = ku_a$. D'après la formule (3.6), on a :

$$\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\mathrm{S}_a} \simeq \varepsilon \otimes \bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} \omega^{ku_a},$$

et donc, si $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathrm{M}_{a',\omega'} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on a nécessairement $\{\omega^{ku_a} \mid k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times\} = \{\omega'^{ku_a} \mid k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times\}$ et donc l'existence de $\kappa \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ tel que $\omega^{e_a} = \omega'^{\kappa e_a}$.

Réciproquement, supposons que $a' \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times a$ et qu'il existe $\kappa \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ tel que $\omega^{e_a} = \omega'^{\kappa e_a}$ et montrons que $\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathrm{M}_{a',\omega'} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ si et seulement si $\kappa = 1$. Écrivons $a' = k'a$ de sorte que l'on a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a]$-modules

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{a',\omega'} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} (kk'a \otimes \varepsilon \otimes \omega'^{u_{kk'a}}) &= \bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} (\kappa ka \otimes \varepsilon \otimes \omega'^{u_{\kappa ka}}) \\
&= \bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} (\kappa ka \otimes \varepsilon \otimes \omega^{u_{ka}}),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathrm{M}_{a',\omega'} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ implique que $\kappa = 1$. Réciproquement, si $\kappa = 1$, l'isomorphisme de la proposition 3.5.10 montre que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{a',\omega'} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell &\simeq \bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times/\mathrm{Im}\, k_a} \mathrm{Ind}_{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a}^{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}} (kk'a \otimes \varepsilon \otimes \omega^{u_{kk'a}}) \\
&\simeq \bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times/\mathrm{Im}\, k_a} \mathrm{Ind}_{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a}^{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}} (ka \otimes \varepsilon \otimes \omega^{u_{ka}}) \\
&\simeq \mathrm{M}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.5.12. — *Pour toute racine d_a-ième de l'unité η de $\mathbb{K}_a$, notons $\omega(\eta)$ une racine n_a-ième de l'unité de $\mathbb{K}_a$ vérifiant $\omega(\eta)^{e_a} = \eta$. On a un isomorphisme de $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}]$-modules*

$$\bigoplus_{\eta \in \mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \mathrm{M}_{a,\omega(\eta)} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times/\mathrm{Im}\, k_a} \mathrm{Ind}_{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a}^{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}} (ka \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{reg}_{\mathrm{S}_a/\mathrm{S}'_a}).$$

DÉMONSTRATION. — Vu la proposition précédente, il s'agit de vérifier que, pour tout $k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$,

$$\bigoplus_{\eta \in \mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \omega(\eta)^{u_{ka}} = \mathrm{reg}_{\mathrm{S}_a/\mathrm{S}'_a}.$$

D'après la remarque 3.5.8.b, on peut écrire $u_a = e_a u'_a$ où u'_a est un homomorphisme de S_a dans $\mathbb{Z}/d_a\mathbb{Z}$. On a $u'_a(\sigma) = 0 \iff u_a(\sigma) = 0 \iff \sigma \in \mathrm{S}'_a$ vu que $j_a = -f_a u_a$ (rem. 3.5.8.c). Par suite, si $\sigma \in \mathrm{S}_a$:

$$\sum_{\eta\in\mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \omega(\eta)^{u_{ka}(\sigma)} = \sum_{\eta\in\mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \omega(\eta)^{ku_a(\sigma)} = \sum_{\eta\in\mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \eta^{ku'_a(\sigma)} = \begin{cases} d_a & \text{si } \sigma \in \mathrm{S}'_a, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où le résultat. □

Corollaire 3.5.13. — *Gardons les notations du corollaire précédent. On a un isomorphisme de* $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{G}]$*-modules*

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} \simeq \bigoplus_{a\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\times\mathfrak{S}_n\backslash\hat{\mathrm{A}}} m'_a \operatorname{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_{\bar{a}}}\Bigg(\bigoplus_{\eta\in\mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \mathrm{M}_{a,\omega(\eta)}\Bigg) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

Démonstration. — Comme conséquence du corollaire précédent et des résultats du n° 3.4.8, on obtient :

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}} \simeq \bigoplus_{a\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\times\mathfrak{S}_n\backslash\hat{\mathrm{A}}} m'_a \operatorname{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_{\bar{a}}}\Bigg(\bigoplus_{\eta\in\mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \mathrm{M}_{a,\omega(\eta)}\Bigg) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

On en déduit le résultat correspondant sur $\mathbb{Q}_\ell$ par le même argument que dans le corollaire 3.5.11 : deux représentations isomorphes après extension des scalaires le sont également avant. □

3.5.5 Commutant des représentations

Notons $\mathrm{W}_{a,\omega}$ le $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module $\operatorname{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_{\bar{a}}} \mathrm{M}_{a,\omega}$; le but de ce numéro est de montrer qu'il est simple et d'identifier son commutant.

Théorème 3.5.14. — *Le* $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$*-module* $\mathrm{W}_{a,\omega}$ *est simple. De plus, si on identifie* $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_a/\mathbb{Q})$ *à* $(\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$*, le commutant de* $\mathrm{W}_{a,\omega}$ *s'identifie à l'unique sous-corps* D_a *de* $\mathbb{K}_a$ *tel que* $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_a/\mathrm{D}_a) = \operatorname{Im} k_a$*. Autrement dit,* D_a *est le sous-corps de* $\mathbb{K}_a$ *formé des éléments fixes par tous les* θ_{v_σ} *pour* $\sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}}$*. (En particulier,* D_a *est commutatif.)*

Démonstration. — Notons que puisqu'un $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module est simple si et seulement si son commutant est un corps, il suffit de montrer la deuxième assertion.

On a $\mathrm{W}_{a,\omega} = \operatorname{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_{\bar{a}}} \mathrm{M}_{a,\omega}$ où $\mathrm{M}_{a,\omega}$ n'est autre que $\mathbb{K}_a$ muni de la structure de $\mathbb{Q}[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}]$-module donnée par la représentation $\mu_{a,\omega}$. On peut écrire $\mathrm{W}_{a,\omega} = \bigoplus_{s\in\mathfrak{S}_n/\mathrm{S}_{\bar{a}}} s\mathrm{M}_{a,\omega}$. Par définition de $\mathrm{S}_{\bar{a}}$, les $s\mathrm{M}_{a,\omega}$ sont stables par A et les supports des $\mathbb{Q}[\mathrm{A}]$-modules $s\mathrm{M}_{a,\omega}$ sont deux à deux disjoints. Par conséquent, le commutant de $\mathrm{W}_{a,\omega}$ stabilise $\mathrm{M}_{a,\omega}$ et $u \mapsto u|_{\mathrm{M}_{a,\omega}}$ définit un isomorphisme du commutant de $\mathrm{W}_{a,\omega}$ sur le commutant du $\mathbb{Q}[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega}$.

Il nous reste donc à montrer que le commutant du $\mathbb{Q}[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega}$ est le sous-corps de $\mathbb{K}_a$ fixé par tous les θ_{v_σ} pour $\sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}}$. Le commutant du $\mathbb{Q}[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{K}_a$ via $x \mapsto (\lambda \mapsto x\lambda)$ car le $\mathbb{Q}[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega}$ n'est autre que $\mathbb{K}_a$. On en déduit que le commutant du $\mathbb{Q}[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}]$-module $\mathrm{M}_{a,\omega}$ est le sous-corps des éléments x de $\mathbb{K}_a$ tels que $\lambda \mapsto x\lambda$ commute avec tous les $\mu_{a,\omega}(\zeta, \sigma)$ c'est-à-dire avec tous les θ_{v_σ}. Or $\lambda \mapsto x\lambda$ commute avec θ_{v_σ} si et seulement si $\theta_{v_\sigma}(x) = x$, donc D_a est le sous-corps de $\mathbb{K}_a$ fixé par tous les θ_{v_σ} pour $\sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}}$. □

Remarques 3.5.15.

a) Le corps D_a est indépendant du choix de ω.

b) Le corps D_a est de dimension $\frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\, k_a|}$ sur $\mathbb{Q}$. Lorsque $(\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ est cyclique (par exemple si n est premier et $n_a = n$), cette dimension caractérise D_a.

c) Puisque $(\mathbb{Z}/e_a\mathbb{Z})^\times \subset \mathrm{Im}\, k_a$, le corps D_a est inclus dans le sous-corps $\mathbb{K}'_a$ de $\mathbb{K}_a$ engendré par les racines e_a-ièmes de l'unité. En général, $\mathrm{D}_a \neq \mathbb{K}'_a$ comme le montre l'exemple $n = 5$ et $a = [0, 0, 1, 1, 3]$: on a $n_a = e_a = 5$ donc $\mathbb{K}_a = \mathbb{K}'_a = \mathbb{Q}(\mu_5)$ alors que $\mathrm{D}_a = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (ceci est le même exemple que celui de la note du bas de la page 53).

Exemples 3.5.16.

a) Lorsque $a = [0, \dots, 0]$, on a $\mathrm{D}_a = \mathbb{K}_a = \mathbb{Q}$.

b) Lorsque $n = 5$ et $\bar{a}$ est la classe de $[0, 0, 0, 1, 4]$ ou $[0, 0, 1, 1, 3]$, on a $\mathrm{D}_a = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

c) Lorsque $n = 7$, on a les possibilités suivantes pour D_a.

classe de $\bar{a}$	D_a
$[0,0,0,0,0,0,0]$, $[0,1,2,3,4,5,6]$	$\mathbb{Q}$
$[0,0,0,0,1,2,4]$, $[0,0,1,1,3,3,6]$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$
$[0,0,0,0,0,1,6]$, $[0,0,0,1,1,1,4]$ $[0,0,0,1,1,6,6]$, $[0,0,0,1,2,5,6]$ $[0,0,1,1,3,4,5]$, $[0,0,1,1,2,4,6]$	$\mathbb{Q}(\mu_7)^+$
$[0,0,0,0,1,1,5]$, $[0,0,0,1,1,2,3]$	$\mathbb{Q}(\mu_7)$

Théorème 3.5.17. — *On a :*

$$\mathrm{W}_{a,\omega} \simeq \mathrm{W}_{a',\omega'} \iff a \in ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n)a' \ \ \text{et} \ \ \omega^{e_a} = \omega'^{e_a}.$$

Démonstration. — Puisque deux représentations isomorphes après extension des scalaires le sont également avant (voir [CR62, th. 29.7, p. 200]), il suffit de montrer le résultat pour $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ qui s'écrit, d'après la proposition 3.5.10 :

$$\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{s \in \mathfrak{S}_n/\mathrm{S}_{\bar{a}}} s\mathrm{M}_{a,\omega} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{s \in \mathfrak{S}_n/\mathrm{S}_{\bar{a}}} s\Bigg(\bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times} (ka \otimes \varepsilon \otimes \omega^{u_{ka}}) \Bigg).$$

Si a et a' ne sont pas les mêmes modulo l'action de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n$, cette formule montre que $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathrm{W}_{a',\omega'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ne sont pas isomorphes.

Si $a \in ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n)a'$, comme l'action de $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}$ laisse stable chaque copie $s\mathrm{M}_{a,\omega}$ donc en particulier $\mathrm{M}_{a,\omega}$, on en déduit, grâce au corollaire 3.5.11, que si $\omega^{e_a} \neq \omega'^{e_a}$, alors $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathrm{W}_{a',\omega'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ne sont pas isomorphes.

Finalement, si $a \in ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n)a'$ et $\omega^{e_a} = \omega'^{e_a}$, alors la formule précédente montre que $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathrm{W}_{a',\omega'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. □

3.6 Application à la factorisation de la fonction zêta

Le but de ce § 3.6 est de montrer que $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ est somme directe de sous-espaces stables par le Frobenius et d'en déduire une factorisation de la fonction zêta de

X_ψ. L'idée de recourir à cette méthode provient d'un argument donné dans [HKS06, § 6.2].

Les sous-espaces stables en question sont les composants isotypiques du $\mathbb{Q}[G]$-module $H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim}$; après les avoir décrit dans le nº 3.6.1, on regarde dans le nº 3.6.2 comment le Frobenius agit sur eux et on en déduit que le polynôme caractéristique du Frobenius restreint à ces espaces est la puissance entière $Q_{a,\omega}^{\gamma_a/d_a}$ d'un polynôme $Q_{a,\omega}$ dont on montre dans le nº 3.6.3 qu'il est à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et indépendant de ℓ. Finalement, dans le nº 3.6.4, on en déduit que la partie de la fonction zêta de X_ψ correspondant à $H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim}$ est le produit indexé par les $a \in \hat{A}$ et $\eta \in \mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)$ des polynômes $Q_{a,\omega(\eta)}^{\gamma_a/d_a}$ ($\omega(\eta)$ étant défini dans le cor. 3.5.12) et on montre que chaque $Q_{a,\omega(\eta)}$ se factorise sur le corps D_a défini au nº 3.5.5. On termine par des exemples dans nº 3.6.5 en explicitant les résultat obtenus dans les cas $n = 3$, 4, 5 et 7.

3.6.1 Décomposition isotypique du $\mathbb{Q}_\ell[G]$-module $H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim}$

Le but de ce numéro est de construire, en terme des représentations $W_{a,\omega}$ considérées précédemment, les composants isotypiques du $\mathbb{Q}[G]$-module $H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim}$. On reprend les notations du nº 3.5.5.

Proposition 3.6.1. — *Soit ω une racine n_a-ième de l'unité. Le $D_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-module $V_{a,\omega} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(W_{a,\omega}, H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim})$ est libre de rang m'_a.*

Démonstration. — D'après le corollaire 3.5.13, on a :

$$H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim} \simeq \bigoplus_{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n \backslash \hat{A}} \Bigg(\bigoplus_{\eta \in \mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} W_{a,\omega(\eta)}^{m'_a} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \Bigg),$$

d'où les isomorphismes suivants de $D_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-modules :

$$\begin{aligned} V_{a,\omega} &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(W_{a,\omega}, H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim}) \\ &\simeq \bigoplus_{a' \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n \backslash \hat{A}} \Bigg(\bigoplus_{\eta' \in \mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(W_{a,\omega}, W_{a',\omega(\eta')}^{m'_{a'}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell) \Bigg) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(W_{a,\omega}, W_{a,\omega}^{m'_a} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell) \\ &\simeq (\mathrm{End}_{\mathbb{Q}[G]}(W_{a,\omega}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^{m'_a} \\ &\simeq (D_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^{m'_a}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $V_{a,\omega}$ est libre de rang m'_a sur $D_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$. □

Corollaire 3.6.2. — *L'application $w \otimes v \mapsto v(w)$ de $W_{a,\omega} \otimes_{D_a} V_{a,\omega}$ dans $H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim}$ est $\mathbb{Q}_\ell[G]$-linéaire et injective ; son image est le composant isotypique $H_{\bar{a},\omega}$ de type $W_{a,\omega}$ du $\mathbb{Q}[G]$-module $H^{n-2}_{et}(\overline{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{prim}$.*

Démonstration. — On renvoie à [Bou58, § 3, nº 4, prop. 9, p. 33] et [Bou58, § 1, nº 5, th. 1.b, p. 15]. □

Remarque 3.6.3. — (Ne sert pas dans la suite.) Le lien entre les $\overline{H}_\alpha$ du nº 3.4.1 et les composants isotypiques $H_{\bar{a},\omega}$ du corollaire précédent est donné par la formule :

$$\bigoplus_{\eta \in \mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} H_{\bar{a},\omega(\eta)} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{\alpha \in (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times / \mathrm{Im}\, k_a} \mathrm{Ind}_{A \rtimes S_a}^{G} \overline{H}_\alpha.$$

3.6.2 Action du Frobenius sur chaque composant isotypique

Lemme 3.6.4. — *Les* $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{G}]$*-modules* $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$ *sont stables par le Frobenius.*

Démonstration. — Puisque tous les éléments de G sont des automorphismes de la variété X_ψ définis sur $\mathbb{F}_q$, l'endomorphisme de Frobenius sur $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\mathrm{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ commute avec l'action du groupe G ; il laisse donc stable les composants isotypiques du $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$, à savoir les $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$ (corollaire 3.6.2). □

Proposition 3.6.5. — *Le Frobenius agit sur* $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$ *par* $\mathrm{Id} \otimes v_{a,\omega}$ *où* $v_{a,\omega}$ *est l'endomorphisme* $v \mapsto \mathrm{Frob}^* \circ v$ *du* $\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$*-module* $\mathrm{V}_{a,\omega}$.

Démonstration. — L'action du Frobenius sur $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathrm{Frob}^*(w \otimes v) &= \mathrm{Frob}^*(v(w)) = (\mathrm{Frob}^* \circ v)(w) = v_{a,\omega}(v)(w) = w \otimes v_{a,\omega}(v) \\ &= (\mathrm{Id} \otimes v_{a,\omega})(w \otimes v).\end{aligned}$$

La structure de $\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-module de $\mathrm{V}_{a,\omega} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_{a,\omega}, \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}})$ est définie par $(d \otimes \lambda)v = \lambda(v \circ d)$. Puisque

$$\mathrm{Frob}^* \circ (\lambda(v \circ d)) = \lambda(\mathrm{Frob}^* \circ v) \circ d,$$

l'application $v_{a,\omega}$ est donc un endomorphisme du $\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-module $\mathrm{V}_{a,\omega}$. □

On en déduit le résultat suivant, qui décrit le polynôme réciproque du polynôme caractéristique du Frobenius sur chaque composant isotypique.

Proposition 3.6.6. — *Soit* ω *une racine* n_a*-ième de l'unité, et*

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{a,\omega}(t) = \det(1 - tv_{a,\omega} | \mathrm{V}_{a,\omega}/\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell) \in \mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell[t] \ ; \\ &\mathrm{Q}_{a,\omega}(t) = \mathrm{N}_{\mathrm{D}_a \otimes \mathbb{Q}_\ell[t]/\mathbb{Q}_\ell[t]}(\mathrm{P}_{a,\omega}(t)) \in \mathbb{Q}_\ell[t].\end{aligned}$$

On a $\deg \mathrm{P}_{a,\omega} = m'_a$ *et* $\deg \mathrm{Q}_{a,\omega} = \frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\, k_a|} m'_a$. *Le polynôme réciproque du polynôme caractéristique du Frobenius agissant sur* $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$ *est donnée par*

$$\det(1 - t\,\mathrm{Frob}^* | \mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}) = \mathrm{Q}_{a,\omega}(t)^{\gamma_a/d_a},$$

où γ_a *est le nombre de permutés de* $(a_1, \dots, a_n)$ *et* d_a *l'entier défini au n*^{o} 3.4.2.

Démonstration. — Vu que Frob^* opère sur $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$ par $\mathrm{Id} \otimes v_{a,\omega}$, on a, d'après [Bou70, § 8, n^o 6, ex. 3, p. 101] :

$$\begin{aligned}\det(1 - t\,\mathrm{Frob}^* | \mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}/\mathbb{Q}_\ell) &= \det(1 - tv_{a,\omega} | \mathrm{V}_{a,\omega}/\mathbb{Q}_\ell)^{\dim_{\mathrm{D}_a} \mathrm{W}_{a,\omega}} \\ &= \det(1 - tv_{a,\omega} | \mathrm{V}_{a,\omega}/\mathbb{Q}_\ell)^{(\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{W}_{a,\omega})/[\mathrm{D}_a:\mathbb{Q}]},\end{aligned}$$

avec, d'après [Bou70, § 9, n^o 4, prop. 6, p. 112] :

$$\det(1 - tv_{a,\omega} | \mathrm{V}_{a,\omega}/\mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{N}_{\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell[t]/\mathbb{Q}_\ell[t]}(\det(1 - tv_{a,\omega} | \mathrm{V}_{a,\omega}/\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)),$$

ce qui montre la formule souhaitée compte tenu des remarques suivantes :

a) le degré du polynôme $\mathrm{P}_{a,\omega}(t)$ est $m'_a = \dim_{\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell} \mathrm{V}_{a,\omega}$;

b) le degré du polynôme $\mathrm{Q}_{a,\omega}(t)$ est $[\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}] \cdot \deg \mathrm{P}_{a,\omega} = \frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\, k_a|} m'_a$;

c) la dimension de $\mathrm{W}_{a,\omega}$ sur $\mathbb{Q}$ est $\phi(n_a)[\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}_a] = \frac{\phi(n_a)\gamma_a}{|\mathrm{Im}\, k_a| d_a} = \frac{\gamma_a}{d_a}[\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}]$, et donc $(\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{W}_{a,\omega})/[\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}] = \frac{\gamma_a}{d_a}$. □

3.6.3 Rationalité et indépendance de ℓ des polynômes caractéristiques

Le but de ce numéro est de montrer que les polynômes $\mathrm{Q}_{a,\omega}$ définis dans la proposition 3.6.6 sont à coefficients rationnels et indépendants de ℓ. On commence par le petit lemme suivant, utile plusieurs fois dans la suite.

Lemme 3.6.7. — *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{Q}_\ell$ *et* u *un endomorphisme de* E*. Le polynôme* $\det(1-tu)$ *est un élément de* $\mathbb{Q}[t]$ *indépendant de* ℓ *si et seulement si, pour tout* $r \geq 1$, $\mathrm{tr}(u^r)$ *est un élément de* $\mathbb{Q}$ *indépendant de* ℓ.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme ainsi que des formules de Newton. □

Le lemme suivant permet de ramener l'étude de l'indépendance de ℓ de $\mathrm{Q}_{a,\omega}$ à celle de $\mathrm{Q}_{a,\omega}(t)^{\gamma_a/d_a}$.

Lemme 3.6.8. — *Soit* $\mathrm{P} \in 1+t\mathbb{Q}[t]$ *un polynôme non constant et* γ *un entier naturel non nul. Si, pour tout* ℓ*, il existe* $\mathrm{Q}_\ell \in 1+t\mathbb{Q}_\ell[t]$ *tel que* $\mathrm{Q}_\ell^\gamma = \mathrm{P}$*, alors* Q_ℓ *est un élément de* $1+t\mathbb{Q}[t]$ *indépendant de* ℓ.

Démonstration. — Notons $\sqrt[\gamma]{\mathrm{P}}$ l'unique élément de $1+t\mathbb{Q}[[t]]$ tel que $(\sqrt[\gamma]{\mathrm{P}})^\gamma = \mathrm{P}$. On a alors $\mathrm{Q}_\ell^\gamma = (\sqrt[\gamma]{\mathrm{P}})^\gamma = \mathrm{P}$ avec $\mathrm{Q}_\ell \in 1+t\mathbb{Q}_\ell[[t]]$, ce qui montre, par unicité de $\sqrt[\gamma]{\mathrm{P}}$ dans $1+t\mathbb{Q}_\ell[[t]]$, que $\mathrm{Q}_\ell = \sqrt[\gamma]{\mathrm{P}}$. Par suite, Q_ℓ est dans $1+t\mathbb{Q}[t]$ et indépendant de ℓ. □

On s'attaque maintenant à l'indépendance de ℓ de $\mathrm{Q}_{a,\omega}(t)^{\gamma_a/d_a}$ grâce à un argument de projecteur.

Proposition 3.6.9. — *Pour tout* $a \in \hat{\mathrm{A}}$*, le polynôme* $\mathrm{Q}_{a,\omega}(t)^{\gamma_a/d_a}$ *est à coefficients rationnels et indépendant de* ℓ.

Démonstration. — Notons $\xi_a : g \in \mathrm{G} \mapsto \mathrm{tr}(g^*|\mathrm{W}_{a,\omega}/\mathbb{Q})$ le caractère du $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module simple $\mathrm{W}_{a,\omega}$. Il existe un projecteur π_a de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ sur $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$ de la forme

$$\pi_a = \frac{\lambda}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \xi_a(g^{-1}) g^*, \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{Q},$$

où λ se détermine en prenant la trace des deux membres :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{W}_{a,\omega} = \frac{\lambda}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \xi_a(g^{-1}) \xi_a(g) = \lambda[\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}].$$

(En effet, sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, ξ_a est somme directe de $[\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}]$ représentations irréductibles comme on l'a vu dans le § précédent.) On a donc $\lambda = \dim_{\mathrm{D}_a} \mathrm{W}_{a,\omega}$.

Puisque l'image du projecteur π_a est $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$, on a :

$$\mathrm{Q}_{a,\omega}(t)^{\gamma_a/d_a} = \det(1 - t(\pi_a \circ \mathrm{Frob}^*)|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}).$$

D'après le lemme 3.6.7, il nous suffit de montrer que les puissances de $\pi_a \circ \mathrm{Frob}^*$ ont une trace dans $\mathbb{Q}$ indépendante de ℓ. Cela résulte du fait que ces puissances peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de quantités de la forme f^* où

f est un endomorphisme de la variété X_ψ qui se prolonge à $\mathbb{P}^{n-1}$ et du lemme suivant, qui est une adaptation de [KM74, th. 2.2), p. 76] au cas de traces sur la partie primitive de la cohomologie d'une hypersurface. (Notons que, puisque $n \geq 3$, l'hypersurface X_ψ est irréductible.) □

Lemme 3.6.10. — *Soit* X *une hypersurface non singulière et irréductible de* $\mathbb{P}^{n-1}$. *Si* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *est un endomorphisme de* X *qui se prolonge en un endomorphisme de* $\mathbb{P}^{n-1}$, *alors* $\mathrm{tr}(f^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}})$ *est un entier indépendant de* ℓ.

Démonstration. — On a $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} \oplus \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}$ avec $\mathrm{tr}(f^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell))$ et $\mathrm{tr}(f^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}) = \mathrm{tr}(f^*|\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell))$ deux entiers indépendants de ℓ d'après [KM74, th. 2.2), p. 76] ([5]). □

En combinant le lemme 3.6.8 et la proposition 3.6.9, on obtient le résultat voulu.

Théorème 3.6.11. — *Les polynômes* $\mathrm{Q}_{a,\omega}(t)$ *sont à coefficients rationnels et indépendants de* ℓ.

Dans le numéro suivant, on verra un résultat plus fort, à savoir l'indépendance de ℓ des polynômes $\mathrm{P}_{a,\omega}$.

3.6.4 Factorisation de la fonction zêta

Ce qui précède permet de déduire une factorisation de la fonction zêta sur $\mathbb{Q}$ ainsi que l'existence d'une décomposition de certains des facteurs sur des extensions finies de $\mathbb{Q}$.

Théorème 3.6.12. — *La fonction zêta de l'hypersurface* X_ψ *de* $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}_q}$ *d'équation* $x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \dots x_n = 0$ *(avec* $\psi \in \mathbb{F}_q^*$ *vérifiant* $\psi^n \neq 1$*) se factorise sur* $\mathbb{Q}$ *sous la forme*

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\left(\prod_{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n \backslash \hat{\mathrm{A}},\ \eta \in \mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \mathrm{Q}_{a,\omega(\eta)}(t)^{\gamma_a/d_a}\right)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\dots(1-q^{n-2}t)}.$$

(*Les notations sont celles du corollaire 3.5.12 et de la proposition 3.6.6.*)

Démonstration. — C'est juste une reformulation des résultats des n° 3.6.1, 3.6.2 et 3.6.3. □

Remarques 3.6.13.

a) Rappelons que le facteur correspondant à $[0, 1, 2, \dots, n-1]$ n'intervient pas (voir rem. 3.3.5 p. 43).

b) En général, les polynômes $\mathrm{Q}_{a,\omega}$ dépendent de ω^{e_a}. Voir à ce sujet l'exemple 3.6.20 page 3.6.20.

c) Lorsque n est un nombre premier (impair, car $n \geq 3$), on a $d_a = 1$ quand $a \neq [0, 1, 2, \dots, n-1]$, et donc $\omega(\eta) = 1$; les nombres $\omega(\eta)$ n'interviennent donc pas dans ce cas.

5. Sur le même sujet, voir aussi [DL76, p. 119] et [Ill06, n° 3.5 p. 112-113].

d) Comme on l'a déjà mentionné dans le § 3.1, un résultat de factorisation similaire a été montré par Kloosterman dans un cadre légèrement différent, voir [Klo07, cor. 6.10 p. 448]. La factorisation qu'il obtient est légèrement moins fine car elle fait intervenir les polynômes $\mathrm{R}_a(t) = \prod_{\eta\in\mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)} \mathrm{Q}_{a,\omega(\eta)}(t)$; on renvoie à l'exemple 3.6.20 pour une illustration de ce point.

On s'intéresse maintenant au comportement des polynômes $\mathrm{Q}_{a,\omega}$ sur D_a.

Proposition 3.6.14. — *Les facteurs* $\mathrm{Q}_{a,\omega}$ *se factorisent sur le corps* D_a *sous la forme d'un produit de* $[\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}]$ *polynômes de degré* m'_a.

Démonstration. — Puisque $\mathrm{Q}_{a,\omega}(t) = \mathrm{N}_{\mathrm{D}_a\otimes\mathbb{Q}_\ell[t]/\mathbb{Q}_\ell[t]}(\mathrm{P}_{a,\omega}(t))$, le polynôme $\mathrm{Q}_{a,\omega}$ est le produit des conjugués du polynôme $\mathrm{P}_{a,\omega}$. □

Le théorème suivant montre que cette factorisation est indépendante de ℓ.

Théorème 3.6.15. — *Les* $\mathrm{P}_{a,\omega}$ *sont des polynômes à coefficients dans* D_a *indépendants de* ℓ.

Démonstration. — Rappelons que $\mathrm{P}_{a,\omega}(t) = \det(1 - tv_{a,\omega}|\mathrm{V}_{a,\omega}/\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)$. Par le même argument que celui du lemme 3.6.7, il suffit de montrer l'indépendance de ℓ de $\mathrm{tr}(v^r_{a,\omega}|\mathrm{V}_{a,\omega}/\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Puisque $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{D}_a\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_\ell}(xy)$ est une forme bilinéaire non dégénérée, l'indépendance de ℓ de $\mathrm{tr}(v_{a,\omega}|\mathrm{V}_{a,\omega}/\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)$ se ramène à celle, pour tout $d \in \mathrm{D}_a$, de l'élément $\mathrm{tr}(dv_{a,\omega}|\mathrm{V}_{a,\omega}/\mathbb{Q}_\ell)$ de $\mathbb{Q}_\ell$, vu que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathrm{D}_a\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_\ell}(d\,\mathrm{tr}(v^r_{a,\omega}|\mathrm{V}_{a,\omega}/\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{D}_a\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{tr}(dv^r_{a,\omega}|\mathrm{V}_{a,\omega}/\mathrm{D}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell))\\ &= \mathrm{tr}(dv^r_{a,\omega}|\mathrm{V}_{a,\omega}/\mathbb{Q}_\ell).\end{aligned}$$

Puisque $dv^r_{a,\omega}$ n'est autre que l'application $v \mapsto (\mathrm{Frob}^*)^r \circ v \circ d$, on est ramené, compte tenu de la remarque 3.6.18 ci-dessous, à la proposition suivante. □

Proposition 3.6.16. — *Soit* X *une variété projective lisse sur* $\mathbb{F}_q$. *Soit* G *un sous-groupe fini de* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{X}/\mathbb{F}_q)$, W *un* $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$*-module simple,* D *(l'opposé de) son commutant et* i *un entier* ≥ 0. *Notons* V *le* $\mathrm{D} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$*-module* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}, \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell))$ *et,* $d \in \mathrm{D}$ *et* $r \geq 1$ *étant fixés, notons* α *l'endomorphisme* $v \mapsto (\mathrm{Frob}^*)^r \circ v \circ d$ *du* $\mathbb{Q}_\ell$*-espace vectoriel* V. *La trace de* α *est un élément de* $\mathbb{Q}$ *indépendant de* ℓ.

Démonstration. — Notons E le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{W}, \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell))$, l'action de G sur E étant donnée par $g \cdot v = g^* \circ v \circ g_{\mathrm{W}}^{-1}$ où g_{W} désigne l'endomorphisme du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel W induit par g. Soit π l'application $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire de E dans lui-même définie par

$$\pi(v) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} g^* \circ v \circ g_{\mathrm{W}}^{-1}.$$

C'est un projecteur d'image $\mathrm{E}^{\mathrm{G}} = \mathrm{V}$. L'application $\beta : v \mapsto (\mathrm{Frob}^*)^r \circ v \circ d$ est un endomorphisme du $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel E qui laisse V stable ; l'endomorphisme de V que β induit n'est autre que α et puisque π est un projecteur de E sur V, on a

$$\mathrm{tr}(\alpha) = \mathrm{tr}(\pi \circ \beta),$$

où l'endomorphisme $\pi \circ \beta$ peut s'écrire sous la forme

$$v \mapsto \sum_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{Frob}^*)^r \circ g_i^* \circ v \circ f_i,$$

avec I un ensemble fini, les g_i des éléments de G et les f_i des endomorphismes du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel W, tous indépendants de ℓ. On est ainsi ramené à montrer le lemme suivant. □

Lemme 3.6.17. — *Reprenons les notations de la proposition précédente. Si $g \in \mathrm{G}$, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{W})$ et r est un entier ≥ 1, alors la trace de l'endomorphisme*

$$v \mapsto (\mathrm{Frob}^*)^r \circ g^* \circ v \circ f$$

de V *est un élément de* $\mathbb{Q}$ *indépendant de* ℓ.

Démonstration. — Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de W sur $\mathbb{Q}$; l'application

$$v \mapsto (v(e_1), \ldots, v(e_k))$$

est un isomorphisme du $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel V sur le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^k$. Cet isomorphisme fait correspondre l'endomorphisme

$$v \mapsto (\mathrm{Frob}^*)^r \circ g^* \circ v \circ f$$

de V à l'endomorphisme

$$(h_1, \ldots, h_k) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{k} a_{i,j}((\mathrm{Frob}^*)^r \circ g^*)(h_i) \right)_{1 \leq j \leq k}$$

de $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^k$, où $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ est la matrice de f dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq k}$. Sa trace est donc égale à

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_{i,i} \right) \mathrm{tr}((\mathrm{Frob}^*)^r \circ g^* | \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

D'après [KM74, th. 2.2), p. 76], elle est indépendante de ℓ. □

Remarque 3.6.18. — Dans la proposition et le lemme précédents, il est possible, lorsque X est une hypersurface, de remplacer $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$ par $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ en utilisant le lemme 3.6.10 à la place de [KM74, th. 2.2), p. 76] (en effet, Frob^* et les g^* pour $g \in \mathrm{G}$ se prolongent à $\mathbb{P}^{n-1}$).

3.6.5 Exemples

Dans ce numéro, on explicite les calculs précédents dans un certains nombre de cas. Dans tous ces exemples, on utilise le fait que lorsque n est premier, on a $d_a = 1$ pour tout $a \neq [0, 1, 2, \ldots, n-1]$ et donc $m'_a = m_a$ et $\gamma_a / d_a = \gamma_a$. Rappelons que le degré de $\mathrm{Q}_{a,\omega}$ est égal à $(\deg \mathrm{P}_{a,\omega})[\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}] = m'_a \frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\, k_a|}$. Les données des tableaux sont organisées par valeurs de m_a décroissantes.

Exemple 3.6.19 (Cas $n = 3$). — C'est le cas le plus simple qui ne soit pas complètement trivial. Les éléments de $\hat{\mathrm{A}}$ sont, à permutation près, $[0,0,0]$ et $[0,1,2]$. La multiplicité du deuxième est nulle donc seul $[0,0,0]$ donne naissance à un facteur dans la fonction zêta. Ce facteur est de degré $m'_a = 2$ et affecté d'une puissance $\gamma_a/d_a = \gamma_a = 1$, donc :

$$\mathrm{Z}_{/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{Q}_{[0,0,0],1}(t)}{(1-t)(1-qt)}, \qquad \text{avec } \deg \mathrm{Q}_{[0,0,0],1}(t) = 2.$$

En fait, $\overline{\mathrm{X}}_\psi$ est dans ce cas une courbe elliptique, donc le résultat n'apprend rien de nouveau.

Exemple 3.6.20 (Cas $n = 4$). — Voici une liste des éléments de $\hat{\mathrm{A}}$ modulo les actions conjointes de $\mathfrak{S}_n$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$:

classe de $\bar{a}$	$\deg \mathrm{Q}_{a,\omega}$	γ_a/d_a	D_a	ω
$[0,0,0,0]$	3	1	$\mathbb{Q}$	1
$[0,0,2,2]$	1	3	$\mathbb{Q}$	± 1
$[0,0,1,3]$	1	12	$\mathbb{Q}$	1

Par conséquent, on a la factorisation suivante de la fonction zêta :

$$\mathrm{Z}_{/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)} \frac{1}{\mathrm{Q}_{[0,0,0,0],1}(t)\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],1}(t)^3\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],-1}(t)^3\mathrm{Q}_{[0,0,1,3],1}(t)^{12}}.$$

Ce résultat est en adéquation avec les observations numériques de Kadir [Kad04, § 6.1.1, p. 112-116] ; notons que selon ses tables, concernant les cas $q = p = 13$, 17, 29, 37, 41 (6) et $\psi = 2$, 3, 2, 2 et 2 respectivement, on a $\{\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],1}(t), \mathrm{Q}_{[0,0,2,2],-1}(t)\} = \{1-pt, 1+pt\}$; les deux polynômes $\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],1}$ et $\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],-1}$ ne sont donc pas égaux en général.

Cet exemple illustre également que notre méthode fournit une factorisation plus fine que celle de Kloosterman [Klo07] : au lieu de trouver pour $[0,0,2,2]$ un facteur $\mathrm{R}^3_{[0,0,2,2]}$ avec $\mathrm{R}_{[0,0,2,2]}$ de degré 2, on trouve un facteur $\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],1}(t)^3\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],-1}(t)^3$ avec $\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],1}$ et $\mathrm{Q}_{[0,0,2,2],-1}$ de degré égal à 1 ; le polynôme $\mathrm{R}_{[0,0,2,2]}$ se factorise donc sur $\mathbb{Q}$ en un produit de deux polynômes de degré 1.

Exemple 3.6.21 (Cas $n = 5$). — Voici les éléments de $\hat{\mathrm{A}}$ modulo les actions conjointes de $\mathfrak{S}_n$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ qui interviennent dans la fonction zêta :

classe de $\bar{a}$	$\deg \mathrm{Q}_{a,1}$	γ_a/d_a	D_a
$[0,0,0,0,0]$	4	1	$\mathbb{Q}$
$[0,0,0,1,4]$	4	20	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$[0,0,1,1,3]$	4	30	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

On peut donc écrire :

$$\mathrm{Z}_{/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{Q}_{[0,0,0,0,0],1}(t)\mathrm{Q}_{[0,0,0,1,4],1}(t)^{20}\mathrm{Q}_{[0,0,1,1,3],1}(t)^{30}}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t)}.$$

De plus, les facteurs $\mathrm{Q}_{[0,0,0,1,4],1}$ et $\mathrm{Q}_{[0,0,1,1,2],1}$ se factorisent sur $\mathrm{D}_a = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ en produit de deux facteurs de degré 2 (à savoir le $\mathrm{P}_{a,1}$ correspondant et son conjugué sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$).

6. Rappelons que seuls les $q \equiv 1 \mod 4$ rentrent dans le cadre de notre étude.

On retrouve ainsi (en la démontrant et en l'expliquant) l'observation de Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas faite pour le cas $\psi = 0$ dans [CdlORV03, tab. 12.1, p. 133] (7).

Exemple 3.6.22 (Cas $n = 7$). — Les éléments de $\hat{\mathrm{A}}$ modulo les actions conjointes de $\mathfrak{S}_n$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sont ceux donnés dans l'exemple 3.5.16.*c*. Complétons cette liste avec les informations utiles pour trouver la factorisation de la fonction zêta.

classe de $\bar{a}$	$\deg \mathrm{Q}_{a,1}$	γ_a/d_a	D_a
$[0,0,0,0,0,0,0]$	6	1	$\mathbb{Q}$
$[0,0,0,0,0,1,6]$	12	42	$\mathbb{Q}(\mu_7)^+$
$[0,0,0,0,1,1,5]$	24	105	$\mathbb{Q}(\mu_7)$
$[0,0,0,1,1,1,4]$	12	140	$\mathbb{Q}(\mu_7)^+$
$[0,0,0,1,1,6,6]$	12	210	$\mathbb{Q}(\mu_7)^+$
$[0,0,0,0,1,2,4]$	6	210	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$
$[0,0,0,1,1,2,3]$	18	420	$\mathbb{Q}(\mu_7)$
$[0,0,1,1,3,3,6]$	6	630	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$
$[0,0,0,1,2,5,6]$	6	840	$\mathbb{Q}(\mu_7)^+$
$[0,0,1,1,3,4,5]$	6	1260	$\mathbb{Q}(\mu_7)^+$
$[0,0,1,1,2,4,6]$	6	1260	$\mathbb{Q}(\mu_7)^+$

Comme dans les cas précédents, on peut facilement écrire la factorisation de la fonction zêta dans le cas $n = 7$ à partir de ce tableau.

7. Comme on l'a dit dans l'introduction de ce chapitre, les tables de données suggèrent que la même observation est valable lorsque $\psi \neq 0$ et $q \equiv 1 \mod 5$.

Chapitre 4

Liens entre les factorisations

Le but de ce chapitre est de relier les deux factorisations de la fonction zêta des hypersurfaces de Dwork obtenues dans les chapitres 2 et 3, à savoir une factorisation explicite en terme de numérateurs de fonctions zêta d'hypersurfaces de type hypergéométrique et une factorisation provenant d'une décomposition isotypique de la cohomologie. Le moyen qu'on utilise pour relier ces deux factorisations est une technique de fonction L de représentations.

4.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{F}_q$ désignera un corps fini à q éléments de caractéristique p et n un nombre premier ≥ 5 tel que $q \equiv 1 \mod n$.

Dans [Wan06, th. 7.2 p. 174], Wan a montré que la fonction zêta de l'hypersurface X_ψ d'équation $x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \dots x_n = 0$ (où $\psi \in \mathbb{F}_q^*$ est un paramètre vérifiant $\psi^n \neq 1$ afin que X_ψ soit non singulière) s'écrivait sous la forme :

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\big(\mathrm{Q}(t,\psi)\mathrm{R}(qt,\psi)\big)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\dots(1-q^{n-2}t)},$$

où Q est un certain polynôme à coefficients entiers de degré $n-1$ provenant de la symétrie miroir et R un polynôme à coefficients entiers de degré $\frac{(n-1)^n+(-1)^n(n-1)}{n} - (n-1)$ dont les racines ont pour valeur absolue $q^{-(n-4)/2}$.

Avant de rappeler les factorisations obtenues dans les deux chapitres précédents, faisons des rappels sur les notations utilisées. On considère les groupes

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \{(\zeta_1,\dots,\zeta_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid \zeta_i^n = 1,\, \zeta_1\dots\zeta_n = 1\}/\{(\zeta,\dots,\zeta)\}\ ;\\
\hat{\mathrm{A}} &= \{(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \mid a_1+\cdots+a_n = 0\}/\{(a,\dots,a)\}.
\end{aligned}$$

Le groupe A agit sur X_ψ par multiplication des coordonnées. Puisque $q \equiv 1 \mod n$, le groupe $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ des racines n-ièmes de l'unité de $\mathbb{F}_q$ est isomorphe au groupe $\mu_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$; notons θ un tel isomorphisme. On identifie le groupe des caractères de A à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ au groupe $\hat{\mathrm{A}}$ par l'isomorphisme $[a_1,\dots,a_n] \mapsto ([\zeta_1,\dots,\zeta_n] \mapsto \theta(\zeta_1)^{a_1}\dots\theta(\zeta_n)^{a_n})$. Par abus, on identifiera $a \in \hat{\mathrm{A}}$ et le caractère à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ correspondant et on notera $a([\zeta]) = a_1(\zeta_1)\dots a_n(\zeta_n)$. Considérons maintenant $a = [a_1,\dots,a_n] \in \hat{\mathrm{A}}^* = \hat{\mathrm{A}} - \{[0]\}$ et rappelons les notations suivantes :

- $m_a = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{a_1, \dots, a_n\}|$; c'est la multiplicité (voir nº 3.3.3) du caractère a dans le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (où $\overline{\mathrm{X}}_\psi = \mathrm{X}_\psi \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q)$;
- γ_a le nombre de permutés de $(a_1, \dots, a_n)$;
- $\mathrm{S}_{\overline{a}} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \exists k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\ {}^\sigma a = ka\}$; puisque n est premier, si $\sigma \in \mathrm{S}_{\overline{a}}$, il existe un unique $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ tel que ${}^\sigma a = ka$;
- k_a est l'application $\mathrm{S}_{\overline{a}} \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, $\sigma \mapsto k$ ainsi définie.

Dans le chapitre 2, on a montré que le polynôme R peut se mettre sous la forme :

$$\mathrm{R}(t) = \prod_{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n \backslash \hat{\mathrm{A}}^*} \mathrm{R}_a(t)^{\gamma_a / |\mathrm{Im}\, k_a|},$$

où les R_a sont les polynômes apparaissant (à une homothétie près de leur variable) au numérateur de la fonction zêta d'une hypersurface de type hypergéométrique dont on peut donner des équations explicites (voir nº 2.5.3, p. 31 ainsi que le nº 2.3.2 p. 23). Les hypersurfaces intervenant n'étant pas lisses, le degré des facteurs R_a n'est pas automatiquement connu.

D'autre part, dans le chapitre 3, on a montré (les formules du chapitre cité se simplifient grâce à l'hypothèse que n est premier) que R est de la forme :

$$\mathrm{R}(t) = \prod_{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n \backslash \hat{\mathrm{A}}^*} \mathrm{Q}_a(t)^{\gamma_a},$$

où les facteurs $\mathrm{Q}_a = \mathrm{Q}_{a,1}$ sont de degré $m_a \frac{n-1}{|\mathrm{Im}\, k_a|}$ et vérifient :

$$\mathrm{Q}_a(t)^{\gamma_a} = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}^* | \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{W}_a}),$$

avec $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{W}_a}$ le composant isotypique de type W_a du $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ où (voir nº 3.5.5, p. 58) $\mathrm{W}_a = \mathrm{W}_{a,1}$ est une certaine représentation irréductible sur $\mathbb{Q}$ du groupe d'automorphismes $\mathrm{G} = \mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_n$ de X_ψ.

On va, dans ce chapitre, relier ces deux factorisations ; on utilise pour cela la méthode suivante. Premièrement, on calcule, pour $a \in \hat{\mathrm{A}}$, les sommes suivantes, qui sont des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$,

$$\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a, r} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \sum_{[\zeta] \in \mathrm{A}} a([\zeta])\, |\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^r \circ [\zeta]^{-1})|.$$

(Ici, Frob désigne l'endomorphisme de Frobenius induit par $x \mapsto x^q$ et $\mathrm{Fix}(f) = \overline{\mathrm{X}}_\psi^f$ désigne l'ensemble des éléments de $\overline{\mathrm{X}}_\psi$ fixés par l'endomorphisme f de $\overline{\mathrm{X}}_\psi$.) On forme ensuite la fonction L correspondant à ces sommes :

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q, a}(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{S}(\mathrm{X}/\mathbb{F}_q, a, r)\, \frac{t^r}{r} \right),$$

et le calcul précédent des $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q, a, r}$ permettra de relier $\mathrm{R}_a(t)$ et $\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q, a}(t)$. Par ailleurs, une formule des traces et le fait que le groupe A agit trivialement sur les $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathrm{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ pour $i \neq n-2$ (voir § 4.4) montre que, lorsque $a \neq [0]$,

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q, a}(t) = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}^* | (\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))^a),$$

où $(\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))^a$ est le composant isotypique de type a du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Cette propriété nous permettra de relier Q_a à $\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a}(t)$ et donc à $\mathrm{R}_a(t)$. Le résultat final est que :

$$\mathrm{R}_a(t) = \mathrm{Q}_a(t)^{|\mathrm{Im}\, k_a|}.$$

Le présent chapitre est organisé comme suit. Pour calculer les sommes $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a,r}$ pour les hypersurfaces de Dwork dans le § 4.3, on a besoin avant cela de les déterminer pour les hypersurfaces de Fermat (voir § 4.2). Après des rappels sur les fonctions $\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a}(t)$ dans le § 4.4, on établit dans le § 4.5 le lien entre les polynômes R_a et les polynômes Q_a.

4.2 Calcul des sommes $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a,r}$ pour les hypersurfaces de Fermat

Avant de commencer, notons qu'il suffit de traiter le cas $r = 1$, c'est-à-dire calculer $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a} = \mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a,1}$. On se restreindra à ce cas dans la suite.

Soit $d \geq 1$ un entier tel que $q \equiv 1 \mod d$. On considère l'hypersurface D de $\mathbb{P}^{n-1}$ d'équation $x_1^d + \ldots + x_n^d = 0$ et on note D^* l'hypersurface correspondante considérée dans le tore (c'est-à-dire lorsque toutes les coordonnées sont non nulles).

On adapte les notations du § 4.1 aux hypersurfaces de Fermat (qui correspondent, lorsque $d = n$, au cas $\psi = 0$) en posant :

$$\mathrm{A} = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid \zeta_i^d = 1,\ \zeta_1 \ldots \zeta_n = 1\}/\{(\zeta, \ldots, \zeta)\}\ ;$$
$$\hat{\mathrm{A}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}/\{(a, \ldots, a)\},$$

et on identifie $\hat{\mathrm{A}}$ aux caractères de A à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ grâce à un isomorphisme fixé entre $\mu_d(\mathbb{F}_q)$ et $\mu_d(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

L'application de $\mathrm{Hom}(\mu_d(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans $\{\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^*} \mid \chi^d = \mathbb{1}\}$ qui à b associe $\check{b}\colon x \mapsto b(x^{(q-1)/d})$ est un isomorphisme de groupes ; notons $\chi \mapsto \hat{\chi}$ l'isomorphisme réciproque.

Pour finir, fixons les notations suivantes : Frob désigne l'endomorphisme de D induit par $x \mapsto x^q$, et, pour $a \in \hat{\mathrm{A}}$, on pose :

$$\mathrm{S}_{\mathrm{D}/\mathbb{F}_q,a} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \sum_{[\zeta] \in \mathrm{A}} a([\zeta])\, |\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}(\mathrm{Frob} \circ [\zeta]^{-1})|\ ;$$
$$\mathrm{S}_{\mathrm{D}^*/\mathbb{F}_q,a} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \sum_{[\zeta] \in \mathrm{A}} a([\zeta])\, |\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}^*}(\mathrm{Frob} \circ [\zeta]^{-1})|.$$

La technique qu'on va utiliser pour calculer $\mathrm{S}_{\mathrm{D}/\mathbb{F}_q,a}$ et $\mathrm{S}_{\mathrm{D}^*/\mathbb{F}_q,a}$ est une adaptation de la méthode utilisée par Katz pour les courbes d'Artin-Schreier dans [Kat81] ; elle revient à adapter le calcul classique du nombre de points de D et D^* sur $\mathbb{F}_q$ (voir par exemple [Del51]).

4.2.1 Résultats préliminaires

Commençons par quelques petites remarques évidentes dont on aura un usage constant par la suite.

Remarques 4.2.1.

a) Si $x^{q-1} = \xi$ avec $\xi^d = 1$, alors $x^d \in \mathbb{F}_q$. En effet, $(x^d)^{q-1} = (x^{q-1})^d = \xi^d = 1$.

b) Si $\xi^d = 1$, alors tout $y \in \overline{\mathbb{F}}_q$ vérifiant $y^{(q-1)/d} = \xi$ est un élément de $\mathbb{F}_q$. En effet, $y^{q-1} = (y^{(q-1)/d})^d = \xi^d = 1$.

c) Si $\xi^d = 1$ et $\chi^d = \mathbb{1}$, alors $\chi(y)$ est indépendant du choix de y tel que $y^{(q-1)/d} = \xi$. En effet, avec les notations précédentes, $\chi(y) = \hat{\chi}(y^{(q-1)/d}) = \hat{\chi}(\xi)$.

Lemme 4.2.2. — *Supposons toujours que $q \equiv 1 \mod d$ et considérons $\xi \in \mathbb{F}_q$ tel que $\xi^d = 1$. On a, avec les notations précédentes :*

$$\forall \eta \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*, \quad \sum_{x^{q-1}=\xi} \eta(x^d) = \begin{cases} (q-1)\hat{\eta}(\xi) & si\ \eta^d = \mathbb{1}, \\ 0 & si\ \eta^d \neq \mathbb{1}. \end{cases}$$

Démonstration. — Soit $y \in \mathbb{F}_q$ tel que $y^{(q-1)/d} = \xi$. Prolongeons η en un caractère $\bar{\eta}$ de $\overline{\mathbb{F}}_q^*$ et choisissons $\xi' \in \overline{\mathbb{F}}_q$ tel que $\xi'^d = y$. En faisant le changement de variable $x = \xi' z$, on obtient :

$$\sum_{x^{q-1}=\xi} \eta(x^d) = \bar{\eta}(\xi'^d) \sum_{z^{q-1}=1} \eta^d(z) = \eta(y) \times \begin{cases} q-1 & \text{si } \eta^d = \mathbb{1}, \\ 0 & \text{si } \eta^d \neq \mathbb{1}, \end{cases}$$

avec $\eta(y) = \hat{\eta}(\xi)$ d'après la remarque 4.2.1.*c*. □

4.2.2 Calcul de $\mathrm{S}_{\mathrm{D}/\mathbb{F}_q,a}$

Proposition 4.2.3. — *Soit φ un caractère additif non trivial fixé de $\mathbb{F}_q$. Si $[\zeta] = [\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \in \mathrm{A}$, on a, avec les notations du début du § 4.2, la formule suivante :*

$$\begin{aligned} |\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}(\mathrm{Frob} \circ [\zeta]^{-1})| &= 1 + q + \cdots + q^{n-2} \\ &\quad + \frac{1}{q} \sum_{\substack{\chi_i^d = \mathbb{1},\ \chi_i \neq \mathbb{1} \\ \chi_1 \cdots \chi_n = \mathbb{1}}} \mathrm{G}(\varphi, \chi_1^{-1}) \ldots \mathrm{G}(\varphi, \chi_n^{-1}) \hat{\chi}_1(\zeta_1) \ldots \hat{\chi}_n(\zeta_n). \end{aligned}$$

Démonstration. — On calcule d'abord le fixateur affine, puis on en déduit le fixateur projectif grâce à la formule :

$$|\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{Frob} \circ [\zeta]^{-1})| = \frac{|\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{aff}}(\mathrm{Frob} \circ \zeta^{-1})| - 1}{q-1}.$$

(Justifions rapidement cette formule : si $[x_1^q : \ldots : x_n^q] = [\zeta_1 x_1 : \ldots : \zeta_n x_n]$ avec les x_i non tous nuls, alors $(x_1^q, \ldots, x_n^q) = \lambda(\zeta_1 x_1, \ldots, \zeta_n x_n)$ où $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_q^*$; ainsi, pour i tel que $x_i \neq 0$, $x_i^q = \lambda \zeta_i x_i$; par suite, si $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_q^*$, on a $(\mu x_i)^q = \lambda \zeta_i (\mu x_i) \iff \mu^{q-1} = \lambda$, équation qui a $q-1$ solutions dans $\overline{\mathbb{F}}_q$.)

Posons $f(x) = x_1^d + \cdots + x_n^d$ de sorte que D est l'hypersurface d'équation $f = 0$. Comme on l'a déjà dit, on s'inspire du calcul classique pour $|\mathrm{D}(\mathbb{F}_q)|$ (voir [Del51]). Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbb{F}}_q^n$ vérifiant $x_i^q = \zeta_i x_i$. On a soit $x_i = 0$, soit $x_i^{q-1} = \zeta_i$, donc, dans tous les cas, $x_i^d \in \mathbb{F}_q$ d'après la remarque 4.2.1.a ; en particulier, $f(x) \in \mathbb{F}_q$. D'après les formules d'orthogonalité :

$$|\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{aff}}(\mathrm{Frob} \circ \zeta^{-1})| = \frac{1}{q} \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \sum_{x_i^q = \zeta_i x_i} \varphi(af(x)).$$

La première étape, en vue d'utiliser une inversion de Fourier, est de se ramener à des sommes sur des éléments non nuls :

$$\begin{aligned}|\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{aff}}(\mathrm{Frob} \circ \zeta^{-1})| &= q^{n-1} + \frac{1}{q} \sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{x_i^q = \zeta_i x_i} \varphi(ax_1^d) \dots \varphi(ax_n^d) \\ &= q^{n-1} + \frac{1}{q} \sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} \Bigg(1 + \sum_{x_1^{q-1} = \zeta_1} \varphi(ax_1^d)\Bigg) \dots \Bigg(1 + \sum_{x_n^{q-1} = \zeta_n} \varphi(ax_n^d)\Bigg).\end{aligned}$$

Puisque les ax_i^d sont non nuls, on peut utiliser la formule d'inversion de Fourier pour $\varphi|_{\mathbb{F}_q^*}$:

$$\begin{aligned}|\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{aff}}(\mathrm{Frob} \circ \zeta^{-1})| = q^{n-1} + \frac{1}{q} \sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} \Bigg(1 + \frac{1}{q-1} \sum_{\eta_1 \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*} \sum_{x_1^{q-1} = \zeta_1} \mathrm{G}(\varphi, \eta_1^{-1}) \eta_1(ax_1^d)\Bigg) \dots \\ \dots \Bigg(1 + \frac{1}{q-1} \sum_{\eta_n \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*} \sum_{x_n^{q-1} = \zeta_n} \mathrm{G}(\varphi, \eta_n^{-1}) \eta_n(ax_n^d)\Bigg).\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{G}(\varphi, \mathbb{1}) = -1$, cette quantité est égale à

$$\begin{aligned}q^{n-1} + \frac{1}{q} \frac{1}{(q-1)^n} \sum_{\forall i,\ \eta_i \neq \mathbb{1}} \mathrm{G}(\varphi, \eta_1^{-1}) \dots \mathrm{G}(\varphi, \eta_n^{-1}) \Bigg(\sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} (\eta_1 \dots \eta_n)(a) \Bigg) \\ \times \Bigg(\sum_{x_1^{q-1} = \zeta_1} \eta_1(x_1^d) \Bigg) \dots \Bigg(\sum_{x_n^{q-1} = \zeta_n} \eta_n(x_n^d) \Bigg).\end{aligned}$$

La somme sur a se calcule immédiatement grâce à une formule d'orthogonalité et les sommes sur les x_i se calculent grâce au lemme 4.2.2 :

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} (\eta_1 \dots \eta_n)(a) = \begin{cases} q-1 & \text{si } \eta_1 \dots \eta_n = \mathbb{1}, \\ 0 & \text{si } \eta_1 \dots \eta_n \neq \mathbb{1} \ ; \end{cases}$$

$$\sum_{x_i^{q-1} = \zeta_i} \eta_i(x_i^d) = \begin{cases} (q-1)\hat{\eta}_i(\zeta_i) & \text{si } \eta_i^d = \mathbb{1}, \\ 0 & \text{si } \eta_i^d \neq \mathbb{1}. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}|\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{aff}}(\mathrm{Frob} \circ \zeta^{-1})| &= q^{n-1} \\ &+ \frac{(q-1)}{q} \sum_{\substack{\chi_i^d = \mathbb{1},\ \chi_i \neq \mathbb{1} \\ \chi_1 \cdots \chi_n = \mathbb{1}}} \mathrm{G}(\varphi, \chi_1^{-1}) \dots \mathrm{G}(\varphi, \chi_n^{-1}) \hat{\chi}_1(\zeta_1) \dots \hat{\chi}_n(\zeta_n).\end{aligned}$$

On a donc, en terme de fixateur projectif :

$$|\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{Frob}\circ[\zeta]^{-1})| = 1+q+\cdots+q^{n-2} + \frac{1}{q}\sum_{\substack{\chi_i^d=\mathbb{1},\ \chi_i\neq\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}}} \mathrm{G}(\varphi,\chi_1^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi_n^{-1})\hat{\chi}_1(\zeta_1)\dots\hat{\chi}_n(\zeta_n).\square$$

Avant d'énoncer le théorème suivant, introduisons une notation dont on se servira dans toute la suite : $\delta_{\mathrm{P}}\in\{0,1\}$ vaut 1 si et seulement si la propriété P est vraie ; par exemple, $\delta_{a=[0]}$ vaut 1 si et seulement si $a=[0]$ et vaut 0 si $a\neq[0]$.

Théorème 4.2.4. — *Considérons toujours un caractère additif φ non trivial fixé de $\mathbb{F}_q$ et reprenons les notations du début du § 4.2. Si $a\in\hat{\mathrm{A}}$, on a :*

$$\mathrm{S}_{\mathrm{D}/\mathbb{F}_q,a} = (1+q+\cdots+q^{n-2})\delta_{a=[0]} + \frac{1}{q}\sum_{\chi^d=\mathbb{1},\ \chi\neq\check{a}_i} \mathrm{G}(\varphi,\chi^{-1}\check{a}_1)\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-1}\check{a}_n).$$

Démonstration. — D'après la proposition précédente, il s'agit de calculer :

$$\frac{1}{|\mathrm{A}|}\sum_{[\zeta]\in\mathrm{A}} a([\zeta])(1+q+\cdots+q^{n-2}) + \frac{1}{q}\sum_{\substack{\chi_i^d=\mathbb{1},\ \chi_i\neq\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}}} \mathrm{G}(\varphi,\chi_1^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi_n^{-1})\,\frac{1}{|\mathrm{A}|}\sum_{[\zeta]\in\mathrm{A}} a([\zeta])\hat{\chi}_1(\zeta_1)\dots\hat{\chi}_n(\zeta_n).$$

La valeur de la première somme se calcule immédiatement grâce aux formules d'orthogonalité :

$$\frac{1}{|\mathrm{A}|}\sum_{[\zeta]\in\mathrm{A}} a([\zeta]) = \delta_{a=[0]}.$$

Concernant la deuxième somme, on remarque que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathrm{A}|}\sum_{[\zeta]\in\mathrm{A}} a([\zeta])\hat{\chi}_1(\zeta_1)\dots\hat{\chi}_n(\zeta_n) &= \frac{1}{|\mathrm{A}|}\sum_{[\zeta]\in\mathrm{A}} (a_1\hat{\chi}_1)(\zeta_1)\dots(a_n\hat{\chi}_n)(\zeta_n)\\ &= \begin{cases}1 & \text{si } a_1\hat{\chi}_1=\cdots=a_n\hat{\chi}_n,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Dans le premier cas, on pose $\hat{\chi}=a_1\hat{\chi}_1=\cdots=a_n\hat{\chi}_n$ et on a $\chi=\check{a}_i\chi_i$ pour tout i et donc $\chi_i^{-1}=\check{a}_i\chi^{-1}$. On en déduit le résultat voulu car $\check{a}_i\chi^{-1}\neq\mathbb{1} \iff \chi\neq\check{a}_i$. □

4.2.3 Calcul des $\mathrm{S}_{\mathrm{D}^*/\mathbb{F}_q,a}$

Proposition 4.2.5. — *Considérons toujours un caractère additif φ non trivial fixé de $\mathbb{F}_q$. Si $[\zeta]=[\zeta_1,\dots,\zeta_n]\in\mathrm{A}$, on a, avec les notations du début du § 4.2, la formule suivante :*

$$|\mathrm{Fix}_{\mathrm{D}^*}(\mathrm{Frob}\circ[\zeta]^{-1})| = \frac{(q-1)^{n-1}}{q} + \frac{1}{q}\sum_{\substack{\chi_i^d=\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}}} \mathrm{G}(\varphi,\chi_1^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi_n^{-1})\hat{\chi}_1(\zeta_1)\dots\hat{\chi}_n(\zeta_n).$$

Démonstration. — La méthode est la même que dans le n° précédent. On calcule d'abord le fixateur affine, puis on en déduit le fixateur projectif grâce à la formule :

$$|\mathrm{Fix}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{D}^*}(\mathrm{Frob}\circ[\zeta]^{-1})| = \frac{|\mathrm{Fix}^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{D}^*}(\mathrm{Frob}\circ\zeta^{-1})|}{q-1}. \tag{4.1}$$

Comme pour D, $\varphi(ax_i^d)$ a un sens lorsque $x_i^q = \zeta_i x_i$. On se ramène d'abord à des sommes sur des éléments non nuls :

$$|\mathrm{Fix}^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{D}^*}(\mathrm{Frob}\circ\zeta^{-1})| = \frac{(q-1)^n}{q} + \frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}_q^*}\Big(\sum_{x_1^{q-1}=\zeta_1}\varphi(ax_1^d)\Big)\cdots\Big(\sum_{x_n^{q-1}=\zeta_n}\varphi(ax_n^d)\Big).$$

Comme précédemment, en utilisant la formule d'inversion de Fourier et les formules d'orthogonalité, on obtient :

$$|\mathrm{Fix}^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{D}^*}(\mathrm{Frob}\circ\zeta^{-1})| = \frac{(q-1)^n}{q} + \frac{(q-1)}{q}\sum_{\substack{\chi_i^d=\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}}}\mathrm{G}(\varphi,\chi_1^{-1})\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi_n^{-1})\hat{\chi}_1(\zeta_1)\ldots\hat{\chi}_n(\zeta_n),$$

ce qui fournit le résultat en utilisant (4.1). □

Théorème 4.2.6. — *Considérons toujours un caractère additif φ non trivial fixé de $\mathbb{F}_q$ et reprenons les notations du début du § 4.2. Si $a\in\hat{\mathrm{A}}$, on a :*

$$\mathrm{S}_{\mathrm{D}^*/\mathbb{F}_q,a} = \frac{(q-1)^{n-1}}{q}\delta_{a=[0]} + \frac{1}{q}\sum_{\chi^d=\mathbb{1}}\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-1}\check{a}_1)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-1}\check{a}_n).$$

Démonstration. — La démonstration se déroule de la même manière que pour le théorème 4.2.4. □

4.2.4 Calcul des $\mathrm{S}_{\mathrm{D}'/\mathbb{F}_q,a}$

Posons $\mathrm{S}_{\mathrm{D}'/\mathbb{F}_q,a} = \mathrm{S}_{\mathrm{D}/\mathbb{F}_q,a} - \mathrm{S}_{\mathrm{D}^*/\mathbb{F}_q,a}$ (c'est la somme où au moins un des x_i est nul). On a le résultat suivant.

Théorème 4.2.7. — *Considérons toujours un caractère additif φ non trivial fixé de $\mathbb{F}_q$ et reprenons les notations du début du § 4.2. Si $a\in\hat{\mathrm{A}}$, on a :*

$$\mathrm{S}_{\mathrm{D}'/\mathbb{F}_q,a} = \Big(1+q+\cdots+q^{n-2}-\tfrac{(q-1)^{n-1}}{q}\Big)\delta_{a=[0]} - \frac{1}{q}\sum_{\substack{\chi^d=\mathbb{1}\\ \exists i,\ \chi=\check{a}_i}}\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-1}\check{a}_1)\ldots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{-1}\check{a}_n).$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des théorèmes 4.2.4 et 4.2.6 et de la relation $\mathrm{S}_{\mathrm{D}'/\mathbb{F}_q,a} = \mathrm{S}_{\mathrm{D}/\mathbb{F}_q,a} - \mathrm{S}_{\mathrm{D}^*/\mathbb{F}_q,a}$. □

4.3 Calcul des sommes $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a,r}$ pour les hypersurfaces de Dwork

Comme pour le cas des hypersurface de Fermat, on peut sans perte de généralité se restreindre au calcul des $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a} = \mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a,1}$ (notations du § 4.1). Notons que le calcul de tout ce § 4.3 est valable lorsque n est un nombre entier ≥ 1 vérifiant $q\equiv 1 \mod n$.

On reprend les notations et hypothèses du § 4.1. De plus, on note X_ψ^* l'hypersurface d'équation $x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \ldots x_n = 0$ considérée dans le tore (c'est-à-dire lorsque tous les x_i sont non nuls).

Si Frob désigne toujours l'endomorphisme de Frobenius associé à $x \mapsto x^q$, on pose, pour tout $a \in \hat{\mathrm{A}}$:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi^*/\mathbb{F}_q,a} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \sum_{[\zeta]\in \mathrm{A}} a([\zeta])\, |\mathrm{Fix}_{\mathrm{X}_\psi^*}(\mathrm{Frob} \circ [\zeta]^{-1})|.$$

La méthode pour calculer cette somme est la même que pour l'hypersurface de Fermat. Par contre, on ne peut calculer directement $\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a}$: on va utiliser pour cela le fait que $\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a} - \mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi^*/\mathbb{F}_q,a} = \mathrm{S}_{\mathrm{D}/\mathbb{F}_q,a} - \mathrm{S}_{\mathrm{D}^*/\mathbb{F}_q,a}$ (lorsque $d = n$).

Les remarques 4.2.1 page 72 restent valables (avec $d = n$) ; on aura aussi besoin de la remarque suivante.

Remarque 4.3.1. — Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite finie d'éléments de $\overline{\mathbb{F}}_q$. Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on peut écrire $x_i^{q-1} = \zeta_i$ avec $\zeta_1 \ldots \zeta_n = 1$, alors $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{F}_q$. En effet, $(x_1 \ldots x_n)^{q-1} = \zeta_1 \ldots \zeta_n = 1$.

4.3.1 Calcul des $\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi^*/\mathbb{F}_q,a}$

Dans la démonstration de la proposition suivante, en plus de la remarque précédente, on utilisera le lemme 4.2.2 page 72 (lorsque $d = n$).

Proposition 4.3.2. — *Considérons toujours un caractère additif φ non trivial fixé de $\mathbb{F}_q$. Si $[\zeta] = [\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \in \mathrm{A}$, on a, avec les notations du début du § 4.2 (lorsque $d = n$), la formule suivante :*

$$|\mathrm{Fix}_{\mathrm{X}_\psi^*}(\mathrm{Frob} \circ [\zeta]^{-1})| = \frac{(q-1)^{n-1}}{q} + \sum_{\substack{\chi_i^n = \mathbb{1} \\ \chi_1\cdots\chi_n = \mathbb{1} \\ \mathrm{mod}\ (\chi,\ldots,\chi)}} \mathrm{N}_{\chi_1,\ldots,\chi_n,\eta}(\psi)\, \hat{\chi}_1(\zeta_1) \ldots \hat{\chi}_n(\zeta_n),$$

où $\mathrm{N}_{\chi_1,\ldots,\chi_n,\eta}(\psi) = \dfrac{1}{q-1} \displaystyle\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*} \frac{1}{q}\, \mathrm{G}(\varphi, \chi_1^{-1}\eta^{-1}) \ldots \mathrm{G}(\varphi, \chi_n^{-1}\eta^{-1}) \mathrm{G}(\varphi, \eta^n) \eta(\tfrac{1}{(-n\psi)^n})$.

Démonstration. — Posons $f(x) = x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \ldots x_n = 0$ où $\psi \in \mathbb{F}_q^*$ est un paramètre. La méthode est la même que pour l'hypersurface de Fermat (notamment, on calcule d'abord en affine, puis en projectif). Notons que, d'après la remarque 4.2.1.*a*, cela a un sens de considérer $\varphi(ax_i^n)$ lorsque $x_i^q = \zeta_i x_i$; de même pour $\varphi(-n\psi a x_1 \ldots x_n)$ d'après la remarque 4.3.1. On écrit :

$$\begin{aligned}|\mathrm{Fix}^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{X}_\psi^*}(\mathrm{Frob} \circ \zeta^{-1})| &= \frac{1}{q} \sum_{a\in\mathbb{F}_q} \sum_{x_i\in\overline{\mathbb{F}}_q^*,\ x_i^q = \zeta_i x_i} \varphi(af(x)) \\ &= \frac{(q-1)^n}{q} + \frac{1}{q} \sum_{a\in\mathbb{F}_q^*} \sum_{x_i^{q-1} = \zeta_i} \varphi(ax_1^n) \ldots \varphi(ax_n^n) \varphi(-n\psi a x_1 \ldots x_n).\end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule d'inversion de Fourier pour $\varphi|_{\mathbb{F}_q^*}$:

$$\begin{aligned}|\mathrm{Fix}^{\mathrm{aff}}_{X_\psi^*}(\mathrm{Frob}\circ\zeta^{-1})| &= \frac{(q-1)^n}{q}\\ &+\frac{1}{q}\frac{1}{(q-1)^{n+1}}\sum_{\substack{a\in\mathbb{F}_q^*\\ \eta_1,\dots,\eta_{n+1}\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*\\ x_i^{q-1}=\zeta_i}} \mathrm{G}(\varphi,\eta_1^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\eta_{n+1}^{-1})\eta_1(ax_1^n)\dots\eta_n(ax_n^n)\\ &\qquad\eta_{n+1}(-n\psi a x_1\dots x_n).\end{aligned}$$

On prolonge les caractères η_i en des caractères $\bar\eta_i$ de $\overline{\mathbb{F}}_q$. La somme précédente se récrit alors :

$$\begin{aligned}|\mathrm{Fix}^{\mathrm{aff}}_{X_\psi^*}(\mathrm{Frob}\circ\zeta^{-1})| &= \frac{(q-1)^n}{q}\\ &+\frac{1}{q}\frac{1}{(q-1)^{n+1}}\sum_{\eta_1,\dots,\eta_{n+1}} \mathrm{G}(\varphi,\eta_1^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\eta_{n+1}^{-1})\Big(\sum_{a\in\mathbb{F}_q^*}(\eta_1\dots\eta_{n+1})(a)\Big)\\ &\Big(\sum_{x_1^{q-1}=\zeta_1}(\bar\eta_1^n\bar\eta_{n+1})(x_1)\Big)\dots\Big(\sum_{x_n^{q-1}=\zeta_n}(\bar\eta_n^n\bar\eta_{n+1})(x_n)\Big)\eta_{n+1}(-n\psi).\end{aligned}$$

La somme sur a se calcule immédiatement grâce à une formule d'orthogonalité :

$$\sum_{a\in\mathbb{F}_q^*}(\eta_1\dots\eta_{n+1})(a)=\begin{cases}q-1 & \text{si } \eta_1\dots\eta_{n+1}=\mathbb{1},\\ 0 & \text{si } \eta_1\dots\eta_{n+1}\neq\mathbb{1},\end{cases}$$

et les sommes sur les x_i se calculent grâce à un simple changement de variable et aux formules d'orthogonalité ; plus précisément, si $\xi_i^{q-1}=\zeta_i$, on a :

$$\sum_{x_i^{q-1}=\zeta_i}(\bar\eta_i^n\bar\eta_{n+1})(x_i)=\begin{cases}(q-1)(\bar\eta_1^n\bar\eta_{n+1})(\xi_i) & \text{si } \eta_i^n\eta_{n+1}=\mathbb{1},\\ 0 & \text{si } \eta_i^n\eta_{n+1}\neq\mathbb{1}.\end{cases}$$

Ceci montre que, dans la somme précédente, on peut enlever tous les termes de la somme portant sur les caractères η_i ne vérifiant pas $\eta_1\dots\eta_{n+1}=\mathbb{1}$ et $\eta_i^n\eta_{n+1}=\mathbb{1}$. Comme lorsqu'on calcule le cardinal de $X_\psi(\mathbb{F}_q)$ (comme on l'a fait dans le n° 2.4.2), on considère η tel que $\eta^n=\eta_{n+1}^{-1}$, et on obtient :

$$\begin{cases}\eta_i^n\eta_{n+1}=\mathbb{1}\\ \eta_1\dots\eta_{n+1}=\mathbb{1}\end{cases}\iff\begin{cases}\eta_i=\chi_i\eta\\ \chi_1\dots\chi_n=\mathbb{1}\end{cases}\quad\text{où les } \chi_i \text{ vérifient } \chi_i^n=\mathbb{1}.$$

(On choisit aussi les prolongements des caractères de manière compatible avec ce système.) Le caractère η n'est pas unique ; en effet, si η' et χ_i' sont aussi solutions du système, il existe χ vérifiant $\chi^n=\mathbb{1}$ tel que $\eta'=\chi^{-1}\eta$ et $\chi_i'=\chi\chi_i$ pour tout i. Cela signifie que si R est un système de représentants des n-uplets $(\chi_1,\dots,\chi_n)$ de caractères vérifiant $\chi_i^n=\mathbb{1}$ et $\chi_1\dots\chi_n=\mathbb{1}$ modulo les $(\chi,\dots,\chi)$ avec $\chi^n=\mathbb{1}$, l'application $(\chi_1,\dots,\chi_n,\eta)\mapsto(\chi_1\eta,\dots,\chi_n\eta,\eta^{-n})$ est une bijection de $\mathrm{R}\times\widehat{\mathbb{F}}_q^*$ sur l'ensemble des $(n+1)$-uplets $(\eta_1,\dots,\eta_{n+1})$ vérifiant les conditions précédentes. Ainsi, la somme de départ se récrit :

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Fix}^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{X}^*_\psi}(\mathrm{Frob}\circ\zeta^{-1})| &= \frac{(q-1)^n}{q} \\
&+ \frac{1}{q}\,\frac{1}{(q-1)^n} \sum_{\substack{\chi_i^n=\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}\\ \mathrm{mod}\ (\chi,\dots,\chi)}} \sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*} \sum_{x_i^{q-1}=\zeta_i} \mathrm{G}(\varphi,(\chi_1\eta)^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,(\chi_n\eta)^{-1})\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\,\cdot \\
&\qquad\qquad\cdot\,\chi_1(x_1^n)\dots\chi_n(x_n^n)\eta(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}).
\end{aligned}
$$

(On a utilisé le fait que $\overline{\chi}_i^n(x_i)=\chi_i(x_i^n)$.) Finalement, on utilise le lemme 4.2.2 page 72, et on obtient :

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Fix}^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{X}^*_\psi}(\mathrm{Frob}\circ\zeta^{-1})| &= \frac{(q-1)^n}{q} \\
+\frac{1}{q} \sum_{\substack{\chi_i^n=\mathbb{1}\\ \chi_1\cdots\chi_n=\mathbb{1}\\ \mathrm{mod}\ (\chi,\dots,\chi)}} \sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*} &\mathrm{G}(\varphi,\chi_1^{-1}\eta^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi_n^{-1}\eta^{-1})\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\eta(\tfrac{1}{(-n\psi)^n})\hat{\chi}_1(\zeta_1)\dots\hat{\chi}_n(\zeta_n).
\end{aligned}
$$

En passant en projectif (c'est-à-dire en divisant par $q-1$), on obtient le résultat voulu. □

Théorème 4.3.3. — *Considérons toujours un caractère additif φ non trivial fixé de $\mathbb{F}_q$ et reprenons les notations du début du § 4.2 (lorsque $d=n$). Si $a\in\hat{\mathrm{A}}$, on a :*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_{\mathrm{X}^*_\psi/\mathbb{F}_q,a} &= \frac{(q-1)^{n-1}}{q}\,\delta_{a=[0]} \\
&\qquad + \frac{1}{q-1}\sum_\eta \frac{1}{q}\,\mathrm{G}(\varphi,\check{a}_1\eta^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\check{a}_n\eta^{-1})\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\eta(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}).
\end{aligned}
$$

Démonstration. — Le principe est le même que pour l'hypersurface de Fermat (théorème 4.2.4), à savoir l'utilisation des formules d'orthogonalité. Détaillons un peu le calcul. La somme sur les χ_i vérifiant $\chi_i^n=\mathbb{1}$ et $\chi_1\dots\chi_n=\mathbb{1}$ modulo les $(\chi,\dots,\chi)$ est égale à $\frac{1}{n}$ fois la somme sur les χ_i vérifiant $\chi_i^n=\mathbb{1}$ et $\chi_1\dots\chi_n=\mathbb{1}$. En appliquant les formules d'orthogonalité, on obtient alors

$$
\frac{1}{n}\sum_{\chi^d=\mathbb{1}}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\mathrm{G}(\varphi,\check{a}_1\chi^{-1}\eta^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\check{a}_n\chi^{-1}\eta^{-1})\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\chi(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}).
$$

Le changement de variable $\chi\eta\to\eta$ permet d'obtenir la formule souhaitée. □

4.3.2 Calcul des $\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a}$

Théorème 4.3.4. — *Considérons toujours un caractère additif φ non trivial fixé de $\mathbb{F}_q$ et reprenons les notations du début du § 4.2 (lorsque $d=n$). Si $a\in\hat{\mathrm{A}}$, on a :*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a} &= (1+q+\cdots+q^{n-2})\delta_{a=[0]} \\
&\qquad + \frac{1}{q-1}\sum_\eta \frac{1}{q^{\delta_{\forall i,\ \eta\neq\check{a}_i}}}\,\mathrm{G}(\varphi,\check{a}_1\eta^{-1})\dots\mathrm{G}(\varphi,\check{a}_n\eta^{-1})\mathrm{G}(\varphi,\eta^n)\eta(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}).
\end{aligned}
$$

Démonstration. — Posons $\mathrm{S}_{\mathrm{X}'_\psi/\mathbb{F}_q,a} = \mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a} - \mathrm{S}_{\mathrm{X}^*_\psi/\mathbb{F}_q,a}$. Lorsqu'au moins un des x_i est nul, on a $x_1 \dots x_n = 0$ et donc $\mathrm{S}_{\mathrm{X}'_\psi/\mathbb{F}_q,a} = \mathrm{S}_{\mathrm{D}'/\mathbb{F}_q,a}$ (lorsque $d = n$). On a donc :

$$\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a} = \mathrm{S}_{\mathrm{X}^*_\psi/\mathbb{F}_q,a} + \mathrm{S}_{\mathrm{D}'/\mathbb{F}_q,a},$$

où $\mathrm{S}_{\mathrm{X}^*_\psi/\mathbb{F}_q,a}$ est donné par le théorème 4.3.3 et $\mathrm{S}_{\mathrm{D}'/\mathbb{F}_q,a}$ par le théorème 4.2.7. Or, on peut écrire (puisque, lorsque $\eta^n = \mathbb{1}$, $\mathrm{G}(\varphi, \eta^n) = \mathrm{G}(\varphi, \mathbb{1}) = -1$ et $\eta(\frac{1}{(-n\psi)^n}) = 1$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{\mathrm{X}'_\psi/\mathbb{F}_q,a} = &\left(1 + q + \dots + q^{n-2} - \frac{(q-1)^{n-1}}{q}\right)\delta_{a=[0]} \\ &+ \frac{1}{q-1} \sum_{\substack{\eta^n=\mathbb{1} \\ \exists i,\, \eta=\check{a}_i}} \frac{q-1}{q} \left(\prod_{i=1}^n \mathrm{G}(\varphi, \chi^{-1}\check{a}_i)\right) \mathrm{G}(\varphi, \eta^n)\eta(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}).\end{aligned}$$

Cette quantité s'incorpore naturellement dans $\mathrm{S}_{\mathrm{X}^*_\psi/\mathbb{F}_q,a}$ pour donner le résultat voulu. □

4.4 Fonction L des sommes $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}$

Définition 4.4.1. — *Soit* X *une variété* (*lisse*) *sur* $\mathbb{F}_q$, G *un groupe fini d'automorphismes agissant algébriquement sur* X *et* ρ *une représentation de* G *irréductible sur* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. *On pose :*

$$\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho,r} = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g\in\mathrm{G}} \operatorname{tr}\rho(g)\,|\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^r \circ g^{-1})| \ ;$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho,r}\,\frac{t^r}{r}\right).$$

C'est la fonction L *associée à la représentation de* ρ *dans la cohomologie de* X.

Théorème 4.4.2. — *Soit* X *un schéma sur* $\mathbb{F}_q$ *projectif, lisse et de dimension* m. *On a :*

$$\sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \operatorname{tr}((\mathrm{Frob}^r \circ g^{-1})^* | \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)) = |\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^r \circ g^{-1})|.$$

Démonstration. — Voir [DL76, § 3 p. 119] qui renvoie à [Gro64] et [Gro66]. □

Proposition 4.4.3. — *Reprenons les notations précédentes. Désignons par* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\rho$ *le composant isotypique de type* ρ *de* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ *et posons* $\mathrm{P}_{i,\rho}(t) = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}^* | \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\rho)$. *Avec ces notations, on peut écrire :*

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t)^{\dim\rho} = \prod_{i=0}^{2m} \mathrm{P}_{i,\rho}(t)^{(-1)^{i+1}}.$$

Démonstration. — Ce théorème provient de [Kat81, p. 170-172] ; pour le démontrer, il suffit de remplacer le cardinal du fixateur par sa valeur en terme de somme alternée dans la définition de la fonction L :

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t)^{\dim\rho} &= \exp\Bigg(\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\dim\rho}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\operatorname{tr}\rho(g)\operatorname{tr}((\mathrm{Frob}^r\circ g^{-1})^*|\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\,\frac{t^r}{r}\Bigg)\\
&= \prod_{i=0}^{2m}\exp\Bigg(\sum_{r=1}^{+\infty}\operatorname{tr}\Bigg(\frac{\dim\rho}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\operatorname{tr}\rho(g)(g^*)^{-1}\circ(\mathrm{Frob}^*)^r\;\Bigg|\;\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\Bigg)\,\frac{t^r}{r}\Bigg)^{(-1)^i}\\
&= \prod_{i=0}^{2m}\exp\Bigg(\sum_{r=1}^{+\infty}\operatorname{tr}(\pi\circ(\mathrm{Frob}^*)^r|\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\,\frac{t^r}{r}\Bigg)^{(-1)^i}\\
&= \prod_{i=0}^{2m}\exp\Bigg(\sum_{r=1}^{+\infty}\operatorname{tr}((\mathrm{Frob}^*)^r|\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\rho)\,\frac{t^r}{r}\Bigg)^{(-1)^i}\\
&= \prod_{i=0}^{2m}\left(\frac{1}{\mathrm{P}_{i,\rho}(t)}\right)^{(-1)^i},
\end{aligned}$$

où l'application linéaire $\pi = \dfrac{\dim\rho}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\operatorname{tr}\rho(g)\,(g^*)^{-1}$ projette $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sur le composant isotypique $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\rho$. □

Remarque 4.4.4. — La décomposition de chaque $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ en composants isotypiques fournit la décomposition

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q}(t) = \prod_{\rho\ \text{irréd.}/\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t)^{\dim\rho}.$$

Proposition 4.4.5. — *Prenons $m = n-2$ et $\mathrm{X} = \mathrm{X}_\psi$ (toujours avec $n \geq 5$ premier et $q \equiv 1 \mod n$). Si $i \in [\![0\,;n-2]\!]$ et $a \in \hat{\mathrm{A}}$, on a $\mathrm{P}_{i,a} = 1$ mis à part dans les cas suivants :*

1°) *$i = n-2$;*

2°) *$a = [0]$ et i pair, auquel cas $\mathrm{P}_{2i,[0]} = 1 - q^i t$;*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que A agit trivialement sur les $\mathrm{H}^{2i}_{\mathrm{et}}(\mathrm{X}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (puisque les éléments de A se prolongent en des automorphismes de $\mathbb{P}^{n-1}$, il suffit de noter que $\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ n'admet aucune représentation de degré 1 non triviale ; voir lemme 3.2.3). □

Corollaire 4.4.6. — *Gardons les hypothèses de la proposition précédente. Si $a \neq [0]$, alors*

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a}(t) = \mathrm{P}_{n-2,a}(t).$$

4.5 Application : lien entre les factorisations explicite et cohomologique

Dans tout ce paragraphe, on suppose que $a \neq [0]$ (le cas $a = [0]$ relève de la symétrie miroir et a déjà été traité dans [Wan06]) et que a n'est pas un permuté de $[0, 1, \ldots, n-1]$. Rappelons les notations suivantes, introduites dans le n° 2.4.1 page 24.

Rappels. — Si $a \in \hat{\mathrm{A}}$, rappelons qu'on voit a comme un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. De plus, on note :

- $\langle a \rangle$ la classe de $a \in \mathrm{A}$ modulo $\mathfrak{S}_n$;
- $\bar{a}$ la classe de $a \in \mathrm{A}$ modulo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$;
- $\underline{a}$ la classe de $a \in \mathrm{A}$ modulo les actions conjointes de $\mathfrak{S}_n$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Rappelons aussi que l'entier γ_a et l'application k_a ne dépendent que de $\underline{a}$.

4.5.1 Lien entre $\mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a}(t)$ et R_a

Avant de définir ce qu'est R_a, faisons les rappels suivants.

Rappels. — Désignons toujours par n un nombre premier impair ≥ 5 et supposons toujours que $q \equiv 1 \mod n$. Si $a \in \hat{\mathrm{A}}$ et si χ est un caractère de $\mathbb{F}_q^*$ d'ordre n fixé, posons

$$\mathrm{N}_{\underline{a}} = |\mathrm{Im}\, k_a| \sum_{\langle a' \rangle \in \underline{a}} \frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*} \Bigg(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{\delta_{\forall i,\ \eta \neq \chi^{-a_i}}}} \mathrm{G}(\varphi, \chi^{-a_i}\eta^{-1}) \Bigg) \mathrm{G}(\varphi, \eta^n)\eta\big(\tfrac{1}{(-n\psi)^n}\big).$$

(Vis-à-vis des formules précédentes, cela revient à prendre $\breve{a}_i = \chi^{-a_i}$.) On peut montrer (voir théorème 2.4.10) que

$$|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + \sum_{\underline{a}} \frac{\gamma_a}{|\mathrm{Im}\, k_a|} \mathrm{N}_{\underline{a}}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème 2.5.7 et les considérations du n° 2.3.2, il existe une hypersurface affine de type hypergéométrique $\mathrm{H}_{1/\psi^n}(\mathbb{F}_q)$ de dimension $2m - m' - 3$ (dont on peut donner une équation explicite) telle que :

$$\mathrm{N}_{\underline{a}} = q^{\frac{n+1}{2} - \frac{2m-m'}{2}} (|\mathrm{H}_{1/\psi^n}(\mathbb{F}_q)| - q^{2m-m'-3}).$$

Théorème 4.5.1. — *Posons* $\mathrm{R}_a(t) = \exp\big(\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{N}_a(t)\, \frac{t^r}{r}\big)$. *On a*

$$\mathrm{N}_{\underline{a}} = |\mathrm{Im}\, k_a| \sum_{\langle a' \rangle \in \underline{a}} \mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a'} \quad \textit{et donc} \quad \mathrm{R}_a(t) = \Bigg(\prod_{\langle a' \rangle \in \underline{a}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a'}(t) \Bigg)^{|\mathrm{Im}\, k_a|}.$$

Démonstration. — C'est juste une reformulation du théorème 4.3.4 en terme des notations précédentes. □

4.5.2 Lien entre $\mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a}(t)$ et Q_a

Reprenons les notations du § 4.1 concernant $\mathrm{Q}_a = \mathrm{Q}_{a,1}$.

Théorème 4.5.2. — *Lorsque* $a \neq [0, \ldots, 0]$ *et* $\langle a \rangle \neq \langle 0, 1, \ldots, n-1 \rangle$,

$$\mathrm{Q}_a = \prod_{\langle a' \rangle \in \underline{a}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a'}(t).$$

Démonstration. — Notons $\overline{\mathrm{H}}_a$ le composant isotypique du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de type a et $\mathrm{H}_{\mathrm{W}_a}$ celui de type W_a du $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$. En reprenant les notations du § 4.1 concernant $\mathrm{W}_a = \mathrm{W}_{a,1}$ et d'après les considérations de la démonstration du théorème 3.5.17, on a les isomorphismes suivant :

$$\mathrm{W}_a \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{a' \in \underline{a}} a' \quad \text{d'où} \quad \mathrm{H}_{\mathrm{W}_a} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{a' \in \underline{a}} \overline{\mathrm{H}}_{a'}.$$

(Le premier isomorphisme est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-modules tandis que le second est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{G}]$-modules ; en effet, chaque $\overline{\mathrm{H}}_{a'}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module mais leur somme est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{G}]$-module.) Par conséquent, puisque $\mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a}(t) = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}^*|\overline{\mathrm{H}}_a)$ et $\mathrm{Q}_a(t)^{\gamma_a} = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}^*|\mathrm{H}_{\mathrm{W}_a})$:

$$\mathrm{Q}_a(t)^{\gamma_a} = \prod_{a' \in \underline{a}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a'}(t) = \Bigg(\prod_{\langle a' \rangle \in \underline{a}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a'}(t) \Bigg)^{\gamma_a}$$

(On a utilisé le fait que $\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a'} = \mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a}$ si a' est un permuté de a.) Puisque $\mathrm{Q}_a(t) \in 1 + t\mathbb{Q}[t]$ et $\prod_{\langle a' \rangle \in \underline{a}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a'}(t) \in 1 + t\mathbb{Q}[t]$, on en déduit l'égalité sans la puissance γ_a. □

Remarques 4.5.3.

a) Fixons a ; les $\mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a'}(t)$ sont des polynômes à coefficients dans le corps cyclotomique $\mathbb{K}_a$ plongé dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Les polynômes $\mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a'}(t)$, pour $\langle a' \rangle \in \underline{a}$ sont conjugués et donc :

$$\mathrm{Q}_a = \mathrm{N}_{\mathbb{K}_a/\mathrm{D}_a}(\mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a}(t))$$

b) Le degré des polynômes $\mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a'}(t)$ pour $\langle a' \rangle \in \underline{a}$ est égal au degré de $\mathrm{P}_a = \mathrm{P}_{a,1}$. En fait, on a mieux, comme on va le voir dans la proposition suivante.

Proposition 4.5.4. — *Il existe un plongement de* D_a *dans* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ *pour lequel*

$$\mathrm{P}_a(t) = \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a}(t)\,.$$

Démonstration. — Notons $\mathrm{F}_{\mathrm{W}_a}$ le Frobenius agissant sur $\mathrm{H}_{\mathrm{W}_a}$ et considéré comme application $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_a, \mathrm{W}_a)$-linéaire, $\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{W}_a}$ le Frobenius agissant sur $\mathrm{H}_{\mathrm{W}_a} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et considéré comme application $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaire et $\overline{\mathrm{F}}_a$ le Frobenius agissant sur $\overline{\mathrm{H}}_a$ et considéré comme application $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaire. Nous allons montrer qu'il existe un plongement β de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_a, \mathrm{W}_a)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ tel que, si $(\delta_{i,j})_{1 \le i,j \le m'_a}$ est la matrice de $\mathrm{F}_{\mathrm{W}_a}$, alors $(\beta(\delta_{i,j}))_{1 \le i,j \le m'_a}$ est celle de $\overline{\mathrm{F}}_a$, ce qui démontrera le résultat.

On construit le plongement β de la façon suivante. Soit δ_a un élément primitif de l'extension $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_a, \mathrm{W}_a)/\mathbb{Q}$; après extension des scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, l'application $\delta_a \otimes \mathrm{Id}$ se diagonalise dans toute base adaptée à la décomposition $\mathrm{W}_a \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{a' \in \underline{a}} a'$; on note $\lambda_{a'}$ la valeur propre correspondant à un a' et on considère le plongement β de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_a, \mathrm{W}_a)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ donné par $\beta(\delta_a) = \lambda_a$.

La matrice de $\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{W}_a}$ est $(\delta_{i,j} \otimes \mathrm{Id})_{1 \le i,j \le m'_a}$; reprenons la décomposition $\mathrm{W}_a \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{a' \in \underline{a}} a'$ précédente et écrivons $\delta_{i,j} = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{i,j,k} \delta_a^k$ avec $\alpha_{i,j,k} \in \mathbb{Q}$. L'application $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaire $\delta_{i,j} \otimes \mathrm{Id}$ induit sur la partie isomorphe au caractère a' une homothétie de rapport $\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{i,j,k} \lambda_{a'}^k$, quantité qui est égale à $\beta(\delta_{i,j})$ lorsque $a' = a$. La matrice de $\overline{\mathrm{F}}_a$ est donc $(\beta(\delta_{i,j}))_{1 \le i,j \le m'_a}$, ce qui démontre le résultat. □

Annexe – Notations et formules

Notations générales

$\lvert \mathrm{E} \rvert$	cardinal de l'ensemble E
$\mathrm{E} - \mathrm{F}$	ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F
$\mathbb{F}_q$	corps fini à q éléments
$\mathbb{Q}_\ell$	corps des nombres ℓ-adiques
$\overline{\mathbb{K}}$	clôture algébrique du corps $\mathbb{K}$
$\mu_n(\mathbb{k})$	ensemble des racines n-ièmes de l'unité d'un corps $\mathbb{k}$
ϕ	fonction indicatrice d'Euler
$\mathfrak{S}_n$	groupe des permutations de $\{1,\dots,n\}$
ε	signature (d'une permutation)
$\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\,\mu$	représentation de G induite par la représentation μ de H
$[\![1\,;n]\!]$	ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$
$\mathbb{P}^n_{\mathbb{k}}$	espace projectif de dimension n sur le corps $\mathbb{k}$
$\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$	espace affine de dimension n sur le corps $\mathbb{k}$

Notations du chapitre 1.

n	entier ≥ 3 sauf mention explicite du contraire	
X_ψ	hypersurface de $\mathbb{P}^{n-1}$ d'équation $x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \dots x_n = 0$ (non singulière lorsque $\psi^n \neq 1$)	p. 13
ψ	paramètre appartenant à $\mathbb{F}_q^*$	p. 13
$\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$	espace de cohomologie étale d'indice i de $\overline{\mathrm{X}}$	p. 14
$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}$	partie inprimitive de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$ (où $\dim \overline{\mathrm{X}} = n-2$)	p. 14
$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$	partie primitive de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$ (où $\dim \overline{\mathrm{X}} = n-2$)	p. 14
A	groupe $\{(\zeta_1,\dots,\zeta_n) \in \mu_n(\mathbb{F}_q)^n \mid \zeta_1 \dots \zeta_n = 1\}/\{(\zeta,\dots,\zeta)\}$; est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{n-2}$	p. 15
${}^\sigma\zeta$	action de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sur ζ définie par ${}^\sigma[\zeta_1 : \ldots : \zeta_n] = [\zeta_{\sigma^{-1}(1)} : \ldots : \zeta_{\sigma^{-1}(n)}]$	p. 15
G	groupe $\mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_n$	p. 15
Y_ψ	variété quotient $\mathrm{X}_\psi/\mathrm{A}$; peut se réaliser comme l'hypersurface singulière de $\mathbb{P}^{n-1}$ d'équation $(y_1 + \cdots + y_n)^n = (n\psi)^n y_1 \dots y_n$	p. 16

Notations communes aux chapitres 2 à 4.

p	nombre premier impair (non divisible par n)
q	puissance de p vérifiant $q \equiv 1 \mod n$ sauf mention explicite du contraire

Notations du chapitre 2.

$\mathrm{Q}(t,\psi)$	polynôme intervenant dans $\mathrm{Z}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$ provenant de la symétrie miroir	p. 17
$\mathrm{R}(t,\psi)$	facteur complémentaire de Q dans la factorisation de $\mathrm{Z}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$	p. 18
$\mathrm{N}_{\mathrm{R}}(q^r)$	défini par $\mathrm{R}(t,\psi) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{N}_{\mathrm{R}}(q^r)\frac{t^r}{r}\right)$	p. 18
φ	caractère additif non trivial	p. 19
χ	caractère multiplicatif (souvent d'ordre n)	p. 19
η	caractère multiplicatif (quelconque)	p. 20
$\mathbb{1}$	caractère multiplicatif trivial (constant égal à 1)	p. 19
$\mathrm{G}(\varphi,\chi)$	somme de Gauss	p. 19
$\mathrm{J}(\chi_1,\dots,\chi_n)$	somme de Jacobi	p. 20
H_λ	variété de type hypergéométrique	p. 21

$\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}$	quantité permettant de calculer $\lvert\mathrm{H}_\lambda(\mathbb{F}_q)\rvert$	p. 21
ν	nombre de caractères triviaux parmi les $\chi^{\alpha_j+\beta_j}\eta$ pour $1 \leq j \leq l-1$ et $\chi^{\alpha_l+\cdots+\alpha_k+\beta_l}\eta$; cette notation est indépendante de celle utilisée page 30	p. 21
$\delta_{z,z'}$	symbole de Kronecker, égal à 1 si $z = z'$ et nul sinon	p. 22
$\mathrm{N}_{\lambda,\chi}$	quantité égale à $\frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}\,\eta(\lambda)$	p. 22
N_λ	quantité égale à $\sum_{\substack{\chi^n=\mathbb{1}\\ \chi\neq\mathbb{1}}}\mathrm{N}_{\lambda,\chi,\eta}$	p. 22
$[s]$	classe modulo l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	p. 24
$\langle s\rangle$	classe modulo l'action conjointe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$	p. 24
$\bar{s}$	classe modulo l'action conjointe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$	p. 24
$\underline{s}$	classe modulo l'action conjointe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$	p. 24
γ_s	nombre de permutés de $(s_1,\dots,s_n)$; ne dépend que de $\underline{s}$	p. 24
δ	$\delta = 0$ si l'un des $\chi^{s_i}\eta$ est trivial et $\delta = 1$ sinon	p. 25
$\beta_{(s_1,\dots,s_n),\chi,\eta}$	quantité égale à $q^{\frac{n+1}{2}-z-\delta}\,\frac{\mathrm{G}(\varphi,\eta)\mathrm{G}(\varphi,\chi\eta)\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{n-1}\eta)}{\mathrm{G}(\varphi,\chi^{s_1}\eta)\dots\mathrm{G}(\varphi,\chi^{s_n}\eta)}$	p. 27
z	nombre de caractères triviaux dans parmi les $\chi^{s_i}\eta$	p. 27
$\mathrm{N}_{\langle s\rangle,\chi}$	quantité égale à $\frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*}\beta_{(s_1,\dots,s_n),\chi,\eta}\,\eta(\frac{1}{\psi^n})$	p. 27
$\mathrm{N}_{\underline{s}}$	quantité égale à $\gamma_s\sum_{\langle s'\rangle\in\bar{s}}\mathrm{N}_{\langle s'\rangle,\chi}$	p. 27
$\mathrm{N}_{\mathrm{miroir}}$	quantité égale à $\lvert\mathrm{Y}_\psi(\mathbb{F}_q)\rvert-(1+q+\cdots+q^{n-2})$	p. 28
K_s	nombre de $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ tels que $[ks_1,\dots,ks_n]$ soit un permuté de $[s_1,\dots,s_n]$; ne dépend que de $\underline{s}$	p. 29
S'_s	stabilisateur de $(s_1,\dots,s_n)$ dans $\mathfrak{S}_n$; ne dépend que de $\bar{s}$	p. 29
S_s	stabilisateur de $[s_1,\dots,s_n]$ dans $\mathfrak{S}_n$; ne dépend que de $\bar{s}$	p. 29
$\mathrm{S}_{\bar{s}}$	stabilisateur de $\overline{(s_1,\dots,s_n)}$ dans $\mathfrak{S}_n$; ne dépend que de $\bar{s}$	p. 29
$k(b)$	un s étant choisi, nombre d'indices i tels que $s_i = b$	p. 30
ν	un s étant choisi, $\nu = 0$ sauf s'il existe un b tel que $\chi^b\eta = \mathbb{1}$ et $k(b) \neq 0$, auquel cas $\nu = k(b)-1$; cette notation est indépendante de celle utilisée page 21	p. 30

Notations de l'introduction du chapitre 3.

δ_i	$\delta_i = 0$ si i est pair et $\delta_i = 1$ si i est impair	p. 37
$\hat{\mathrm{A}}$	groupe $\{(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \mid a_1+\cdots+a_n = 0\}$ quotienté par la diagonale $\{(a,\dots,a)\}$; s'identifie au groupe des caractères de A à valeurs dans $\mathbb{F}_q$ (lorsque $q \equiv 1 \mod n$) ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$	p. 37
$[a_1,\dots,a_n]$	élément de $\hat{\mathrm{A}}$	p. 37

Notations du § 3.2.

X^f	sous-schéma de X des points fixes par l'automorphisme f	p. 39
$\chi(\mathrm{X})$	caractéristique d'Euler-Poincaré d'un schéma X	p. 39
$\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$	Groupe linéaire projectif d'indice n sur $\overline{\mathbb{F}}_q$	p. 39

Notations du § 3.3.

$k(\zeta)$	une suite $(\zeta_1,\dots,\zeta_r)$ étant donnée, nombre d'indices $i \in \{1,\dots,r\}$ tels que $\zeta_i = \zeta$; notation indépendante de celle introduite page 47	p. 41
m_a	multiplicité du caractère a dans le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$	p. 41

Notations du § 3.4.

$\overline{\mathrm{H}}_a$	composant isotypique de type a du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\mathrm{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{prim}}$; sa dimension est m_a	p. 43
G_a	stabilisateur de a dans G, égal à $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a$	p. 43
R	système de représentants dans $\hat{\mathrm{A}}$ des éléments de $\mathfrak{S}_n\backslash\hat{\mathrm{A}}$	p. 43
n'_a	générateur $\in [\![1\,;n]\!]$ de l'ensemble des $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $(a_1+j,\dots,a_n+j)$ soit un permuté de $(a_1,\dots,a_n)$; ne dépend que de $\underline{a}$	p. 44
d_a	entier égal à n/n'_a ; ne dépend que de $\underline{a}$	p. 44
$\mathrm{I}(b)$	ensemble des indices i tels que $a_i = b$	p. 44
σ	relèvement dans S_a d'un générateur du groupe cyclique $\mathrm{S}_a/\mathrm{S}'_a$	p. 44
$\overline{\Sigma}_a$	groupe engendré par σ ; on a $\mathrm{S}_a = \mathrm{S}'_a \rtimes \overline{\Sigma}_a$	p. 44

j_a	homomorphisme de groupe $\mathrm{S}_a \to n'_a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vérifiant ${}^s(a_1, \dots, a_n) = (a_1 + j_a(s), \dots, a_n + j_a(s))$; on a $j_{ka} = kj_a$	p. 44
$\hat{\mathrm{A}}^\sigma$	ensemble des éléments de $\hat{\mathrm{A}}$ fixés par $\sigma \in \mathfrak{S}_n$	p. 46
O_j	orbites d'un produit de n' cycles de longueur d à supports disjoints	p. 47
$k(\zeta)$	nombre d'indices $j \in \{1, \dots, n'\}$ tels que $\prod_{i \in \mathrm{O}_j} \zeta_i = \zeta$; notation généralisant celle introduite page 41	p. 47
m'_a	$m_a = d_a m'_a$	p. 51
reg	représentation régulière de $\mathrm{S}_a/\mathrm{S}'_a$	p. 51

Notations du § 3.5.

$\mathbb{K}_\mathrm{C}$	corps cyclotomique associé à un groupe cyclique C	p. 52
χ_C	caractère canonique d'un groupe cyclique C ; prend ses valeurs dans $\mathbb{K}_\mathrm{C}$	p. 52
E_a	image de l'homomorphisme $[\zeta_1, \dots, \zeta_n] \mapsto \zeta_1^{a_1} \dots \zeta_n^{a_n}$; ne dépend que de $\underline{a}$	p. 52
N_a	noyau de l'homomorphisme $[\zeta_1, \dots, \zeta_n] \mapsto \zeta_1^{a_1} \dots \zeta_n^{a_n}$; ne dépend que de $\bar{a}$	p. 52
n_a	ordre de a dans $\hat{\mathrm{A}}$; égal à l'ordre du groupe engendré par les $a_i - a_{i'}$; égale au cardinal de l'image du caractère a ; ne dépend que de $\underline{a}$	p. 52
$\mathbb{K}_a$	corps cyclotomique associé au groupe cyclique A/N_a ; sa dimension sur $\mathbb{Q}$ est $\phi(n_a)$; dépend uniquement de $\underline{a}$	p. 52
χ_a	caractère canonique du groupe cyclique A/N_a considéré comme caractère de A et à valeurs dans $\mathbb{K}_a$; vérifie $\chi_{ka} = \chi_a^k$	p. 52
f_a	générateur du groupe engendré par les $a_i - a_{i'}$; vérifie $n'_a = e_a f_a$, $n = e_a f_a d_a$ et $n = n_a f_a$; ne dépend que de $\underline{a}$	p. 52
k_a	homomorphisme de groupes $\mathrm{S}_{\bar{a}} \to (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ défini par ${}^\sigma a = k_a(\sigma)a$; ne dépend que de $\bar{a}$	p. 53
e_a	entier tel que $n'_a = e_a f_a$; vérifie $n_a = e_a d_a$ et $n = e_a f_a d_a$; ne dépend que de $\underline{a}$	p. 53
(u_σ, v_σ)	si $\sigma \in \mathrm{S}_{\bar{a}}$, unique couple $(u_\sigma, v_\sigma) \in \mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$ tel que $a_{\sigma(i)} = v_\sigma a_i + u_\sigma f_a$; on a $v_\sigma = k_a(\sigma)$ et $j_a(\sigma) = f_a u_\sigma$	p. 54
φ	homomorphisme de groupe $\mathrm{S}_{\bar{a}} \to \mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/n_a\mathbb{Z})^\times$, $\sigma \mapsto (u_\sigma, v_\sigma)$	p. 54
θ_v	automorphisme du corps $\mathbb{K}_a$ qui envoie les racines n_a-ième de l'unité sur leur puissance v-ième	p. 54
$\mu_{a,\omega}$	représentation $(\zeta, \sigma) \mapsto \chi_a(\zeta)\varepsilon(\sigma)\omega^{u_\sigma}\theta_{v_\sigma}$ de $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}$ dans $\mathbb{K}_a$	p. 55
$\mathrm{M}_{a,\omega}$	$\mathbb{Q}[\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}]$-module $\mathbb{K}_a$ muni de $\mu_{a,\omega}$; à isomorphisme près, ne dépend que de ω^{e_a}, pas de ω	p. 55
ι_a	plongement de $\mathbb{K}_a$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$; ne dépend que de $\underline{a}$	p. 55
$\mathrm{W}_{a,\omega}$	$\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module simple $\mathrm{Ind}_{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_{\bar{a}}}^{\mathrm{G}} \mathrm{M}_{a,\omega}$	p. 58
D_a	(opposé du) commutant de $\mathrm{W}_{a,\omega}$; $\mathrm{D}_a \subset \mathbb{K}_a$ et $\dim_\mathbb{Q} \mathrm{D}_a = \frac{\phi(n_a)}{\lvert \mathrm{Im}\, k_a \rvert}$; est indépendant de ω	p. 58

Notations du § 3.6.

$\mathrm{V}_{a,\omega}$	$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_{a,\omega}, \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}})$, qui est un $\mathrm{D}_a \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell$-module libre de rang m'_a ; $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$ s'identifie à la composante isotypique $\mathrm{H}_{\bar{a},\omega}$ de type $\mathrm{W}_{a,\omega}$ du $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$	p. 60
$\mathrm{H}_{\bar{a},\omega}$	composant isotypique de type $\mathrm{W}_{a,\omega}$ du $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{G}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$; est isomorphe à $\mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega}$	p. 60
$v_{a,\omega}$	endomorphisme du $\mathrm{D}_a \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell$-module $\mathrm{V}_{a,\omega}$ tel que $\mathrm{Frob}^* \lvert \mathrm{W}_{a,\omega} \otimes_{\mathrm{D}_a} \mathrm{V}_{a,\omega} = \mathrm{Id} \otimes v_{a,\omega}$	p. 61
$\mathrm{P}_{a,\omega}$	polynôme $\det(1 - tv_{a,\omega} \lvert \mathrm{V}_{a,\omega}/\mathrm{D}_a \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell)$ de degré m'_a à coefficients dans $\mathrm{D}_a \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell$; est indépendant de ℓ	p. 61
$\mathrm{Q}_{a,\omega}$	polynôme $\mathrm{N}_{\mathrm{D}_a \otimes \mathbb{Q}_\ell[t]/\mathbb{Q}_\ell[t]}(\mathrm{P}_{a,\omega}(t))$ de degré $m'_a \frac{\phi(n_a)}{\lvert \mathrm{Im}\, k_a \rvert}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$; est indépendant de ℓ	p. 61

Notations du chapitre 4.

$\mathrm{Fix}_{\mathrm{X}}(f)$	ensemble des éléments de X fixés par l'endomorphisme f de X ; lorsque X est implicite, cet ensemble est noté $\mathrm{Fix}(f)$. Si ambiguïté il y a, $\mathrm{Fix}_{\mathrm{X}}^{\mathrm{aff}}(f)$ désigne le fixateur affine et $\mathrm{Fix}_{\mathrm{X}}^{\mathrm{proj}}(f)$ le fixateur projectif ; autre notation : X^f (p. 39)	p. 70
$\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho,r}$	somme $\frac{1}{\vert\mathrm{G}\vert}\sum_{g\in\mathrm{G}}\mathrm{tr}\,\rho(g)\,\vert\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^r\circ g^{-1})\vert$	p. 70
$\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t)$	série formelle $\exp\big(\sum_{r=1}^{+\infty}\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho,r}\,\frac{t^r}{r}\big)$	p. 70
$\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,\rho}$	quantité égale à $\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,\rho,1}$	p. 71
D	hypersurface de Fermat d'équation $x_1^d+\ldots+x_n^d=0$	p. 71
X^*	lorsque X est une hypersurface donnée par une équation $\mathrm{F}=0$ avec F homogène, hypersurface d'équation $\mathrm{F}=0$ considérée dans le tore (c'est-à-dire quand toutes les coordonnées sont non nulles)	p. 71
$\check{b}$	si $b\in\mathrm{Hom}(\mu_d(\mathbb{F}_q),\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, caractère $\check{b}\colon x\mapsto b(x^{(q-1)/d})$ appartenant à $\{\chi\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*\mid\chi^d=\mathbb{1}\}$	p. 71
$\hat{\chi}$	$\chi\mapsto\hat{\chi}$ est l'isomorphisme réciproque de $b\mapsto\check{b}$	p. 71
$\bar{\eta}$	prolongement à $\overline{\mathbb{F}}_q^*$ d'un caractère η de $\mathbb{F}_q^*$	p. 72
δ_{P}	vaut 1 si la propriété P est vraie et 0 sinon	p. 74
$\mathrm{S}_{\mathrm{X}'/\mathbb{F}_q,a}$	quantité égale à $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,a}-\mathrm{S}_{\mathrm{X}^*/\mathbb{F}_q,a}$ (c'est la somme où au moins un des x_i est nul)	p. 75

Principales formules

$$n=n'_ad_a=e_af_ad_a=n_af_a,\ n'_a=e_af_a \text{ et } n_a=e_ad_a.$$

$$[\mathfrak{S}_n:\mathrm{S}'_a]=\gamma_a$$

$$[\mathfrak{S}_n:\mathrm{S}_a]=\frac{\gamma_a}{d_a}$$

$$[\mathfrak{S}_n:\mathrm{S}_{\bar{a}}]=\frac{\gamma_a}{|\mathrm{Im}\,k_a|d_a}$$

$$[\mathrm{S}_a:\mathrm{S}'_a]=d_a$$

$$[\mathrm{S}_{\bar{a}}:\mathrm{S}_a]=|\mathrm{Im}\,k_a|$$

$$[\mathrm{S}_{\bar{a}}:\mathrm{S}'_a]=|\mathrm{Im}\,k_a|d_a$$

$$\dim\overline{\mathrm{H}}_a=m_a$$

$$\dim\mu_{a,\omega}=\dim\mathrm{M}_{a,\omega}=\dim\mathbb{K}_a=\phi(n_a)$$

$$\dim\mathrm{M}_{a,\omega}^{m'_a}=m'_a\phi(n_a)$$

$$\dim\mathrm{W}_{a,\omega}^{m'_a}=\dim\mathrm{Ind}_{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_{\bar{a}}}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}_{a,\omega}^{m'_a}=m'_a\phi(n_a)[\mathfrak{S}_n:\mathrm{S}_{\bar{a}}]=m'_a\,\frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\,k_a|}\,\frac{\gamma_a}{d_a}$$

$$\dim\bigoplus_{\eta\in\mu_{d_a}(\mathbb{K}_a)}\mathrm{Ind}_{\mathrm{A}\rtimes\mathrm{S}_{\bar{a}}}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}_{a,\omega(\eta)}^{m'_a}=m_a\,\frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\,k_a|}\,\frac{\gamma_a}{d_a}.$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{D}_a = \frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\, k_a|}$$

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{W}_{a,\omega}) = \frac{\phi(n_a)\gamma_a}{|\mathrm{Im}\, k_a| d_a} = [\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}_a][\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}].$$

$$\dim_{\mathrm{D}_a}(\mathrm{V}_{a,\omega}) = m'_a.$$

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{H}_{\bar{a},\omega}) = m'_a \, \frac{\phi(n_a)\gamma_a}{|\mathrm{Im}\, k_a| d_a} = m'_a[\mathfrak{S}_n : \mathrm{S}_a][\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}]$$

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n \backslash \hat{\mathrm{A}}} m'_a \, \frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\, k_a|} \, \gamma_a = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathfrak{S}_n \backslash \hat{\mathrm{A}}} m_a \, \frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\, k_a|} \, \frac{\gamma_a}{d_a}.$$

$$\deg \mathrm{P}_{a,\omega} = m'_a$$

$$\deg \mathrm{Q}_{a,\omega} = (\deg \mathrm{P}_{a,\omega})[\mathrm{D}_a : \mathbb{Q}] = m'_a \, \frac{\phi(n_a)}{|\mathrm{Im}\, k_a|}$$

Bibliographie

[Alo00] Alon (Noga), « Additive Latin Transversals », *Israel Journal of Mathematics* **117** (2000), p. 125-130.

[BEW98] Berndt (Bruce C.), Evans (Ronald J.) et Williams (Kenneth S.), *Gauss and Jacobi Sums*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, vol. 21, John Willey & Sons, Inc., New-York, 1998.

[BGK08] Bini (Gilberto), Geemen (Bert van) et Kelly (Tyler L.), « Mirror Quintics, Discrete Symmetries and Shioda Maps », *preprint* (2008), disponible sur : `http://arxiv.org/abs/0809.1791`.

[Bou58] Bourbaki (Nicolas), *Algèbre, chapitre VIII*, Hermann, 1958.

[Bou70] ——— , *Algèbre, chapitre III*, nouvelle éd., Hermann, 1970.

[Brü04] Brünjes (Lars), *Forms of Fermat Equations and Their Zeta Functions*, World Scientific, 2004.

[CdlOGP91] Candelas (P.), de la Ossa (X.), Green (P.) et Parkes (L.), « A Pair of Calabi-Yau Manifolds as an Exactly Soluble Superconformal Theory », *Nuclear Phys. B* **359** (1991), no. 1, p. 21-74.

[CdlORV00] Candelas (Philip), de la Ossa (Xenia) et Rodriguez-Villegas (Fernando), « Calabi-Yau Manifolds over Finite Fields, I », *prépublication* (2000), disponible sur : `http://arxiv.org/abs/hep-th/0012233`.

[CdlORV03] ——— , « Calabi-Yau Manifolds over Finite Fields, II », *Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry* (Toronto, July 23-29, 2001) (Yui (Noriko) et Lewis (J. D.), éds.), Fields Institute Comm. Series, vol. 38, Fields Institute, AMS, 2003, p. 121-157, disponible sur : `http://arxiv.org/abs/hep-th/0402133`.

[Chê09] Chênevert (Gabriel), « Representations on the Cohomology of Smooth Projective Hypersurfaces with Symmetries », *preprint* (2009), disponible sur : `http://arxiv.org/abs/0908.1748`.

[CHT08] Clozel (Laurent), Harris (Michael) et Taylor (Richard), « Automorphy for some ℓ-adic Lifts of Automorphic mod ℓ Galois Representations », *Pub. Math. IHES* **108** (2008), p. 1-181, disponible sur : `http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/twugfin.pdf`.

[CK99] Cox (David A.) et Katz (Sheldon), *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999.

[CR62] Curtis (Charles W.) et Reiner (Irving), *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, 1962.

[Del51] Delsarte (Jean), « Nombre de solutions des équations polynomiales sur un corps fini », *Séminaire Bourbaki* **3** (mars 1951), exposé n° 39.

[DL76] Deligne (Pierre) et Lusztig (George), « Representations of Reductive Groups over Finite Fields », *Ann. of Math.* **103** (1976), p. 103-161.

[Dwo62a] Dwork (Bernard M.), « A Deformation Theory for the Zeta Function of a Hypersurface Defined over a Finite Field », *Proceedings of the International Congress of Mathematics* (*Stockholm*), 1962, p. 247-259.

[Dwo62b] ——— , « On the Zeta Function of a Hypersurface I », *Pub. Math. IHES* **12** (1962), p. 5-68, disponible sur : `http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1962__12__5_0`.

[Dwo64] ——— , « On the Zeta Function of a Hypersurface II », *Ann. of Math.* **80** (1964), p. 227-299.

[Dwo66a] ——— , « On p-adic Analysis », *Some Recent Advances in the Basic Sciences, volume 2* (Proceedings Annual Science Conference, Belfer Graduate School, Yeshiva University, New York), 1965-1966, p. 129-154.

[Dwo66b] ——— , « On the Zeta Function of a Hypersurface III », *Ann. of Math.* **83** (1966), p. 457-519.

[Dwo69] ——— , « On the Zeta Function of a Hypersurface IV – A Deformation Theory for Singular Hypersurfaces », *Ann. of Math.* **90** (1969), p. 335-352.

[FK88] Freitag (Eberhardt) et Kiehl (Reinhardt), *Etale Cohomology and the Weil Conjecture*, Springer, 1988.

[Gro64] Grothendieck (Alexandre), « Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L », *Séminaire Bourbaki* **17** (décembre 1964), exposé n° 279 ; réédité dans *Dix exposés sur la cohomologie des Schémas*, disponible sur : `http://www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/DixExp.pdf`.

[Gro66] ——— (éd.), *Cohomologie ℓ-adique et fonction* L (*SGA5*), 1965-66, Lecture notes in mathematics, vol. 589, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie.

[Hae06] Haessig (C. Douglas), « Equalities, Congruences, and Quotients of Zeta Functions in Arithmetic Mirror Symmetry », *Mirror Symmetry V* (2006), appendice de [Wan06], disponible sur : `http://www.math.uci.edu/~dwan/mirror.pdf`.

[HKS06] Hulek (Klaus), Kloosterman (Remke) et Schütt (Matthias), « Modularity of Calabi-Yau Varieties », *Global aspects of complex geometry* (Catanese et al, éds.), 2006, p. 271-309, disponible sur : `http://arxiv.org/abs/math/0601238`.

[HSBT07] Harris (Michael), Shepherd-Barron (Nicholas) et Taylor (Richard), « A Family of Calabi-Yau Varieties and Potential Automorphy », *to appear in Annals of Math* (2007), disponible sur : `http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/cyfin.pdf`.

[Ill06] Illusie (Luc), « Miscellany on Traces in ℓ-adic Cohomology : a Survey », *Japanese Journal of Mathematics, 3rd series* **1** (2006), p. 107-136, disponible sur : `http://www.math.u-psud.fr/~illusie/miscellaneous.pdf`.

[Kad04] Kadir (Shabnam N.), « The Arithmetic of Calabi-Yau Manifolds and Mirror Symmetry », Thèse, Oxford University, 2004, disponible sur : `http://arxiv.org/abs/hep-th/0409202`.

[Kat81] Katz (Nicholas M.), « Crystalline Cohomology, Dieudonné Modules, and Jacobi Sums », *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, Papers Presented at the Bombay Colloquium, 1979*, Tata Institute of Fundamental Research, Springer, 1981, p. 165-246.

[Kat09] ——— , « Another Look at the Dwork Family », *Algebra, Arithmetic and Geometry – Manin Festschrift* (Tschinkel (Yuri), éd.), 2009, p. 85-122, disponible sur : `http://www.math.princeton.edu/~nmk/dworkfamilyfinal.pdf`.

[Klo07] Kloosterman (Remke), « The Zeta-Function of Monomial Deformations of Fermat Hypersurfaces », *Algebra & Number Theory* **1** (2007), p. 421-450, disponible sur : `http://arxiv.org/abs/math/0703120`.

[KM74] Katz (Nicholas M.) et Messing (William), « Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields », *Invent. Math.* **23** (1974), p. 73-77, disponible sur : `http://www.digizeitschriften.de/resolveppn/PPN356556735_0023`.

[Kob83] Koblitz (Neal), « The Number of Points on Certain Families of Hypersurfaces over Finite Fields », *Compositio Mathematica* **48** (1983), p. 3-23, disponible sur : `http://www.numdam.org/item?id=CM_1983__48_1_3_0`.

[Tay08] Taylor (Richard), « Automorphy for some ℓ-adic Lifts of Automorphic mod ℓ Galois Representations, II », *Pub. Math. IHES* **108** (2008), p. 183-239, disponible sur : `http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/twugkfin.pdf`.

[Wan06] Wan (Daqing), « Mirror Symmetry For Zeta Functions », *Mirror symmetry V* (BIRS, December 6-11, 2003 ; Yui et al, éds.), AMS and IP, 2006, avec un appendice de C. D. Haessig [Hae06], p. 159-184, disponible sur : `http://www.math.uci.edu/~dwan/mirror.pdf`.

[Wei49] Weil (André), « Numbers of Solutions of Equations in Finite Fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 497-508, disponible sur : `http://www.ams.org/journals/bull/1949-55-05/home.html`.

Index