Variétés caractéristiques et non formalité des fibres de Milnor

Hugues Zuber

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS – UFR Sciences

École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par

Hugues ZUBER

Variétés caractéristiques et non formalité des fibres de Milnor

Thèse dirigée par **Alexandru DIMCA**

soutenue le 7 décembre 2009

Membres du jury et rapporteurs :

M.	F. CAMPANA	Professeur, Nancy	Président du Jury
M.	A. DIMCA	Professeur, Nice	Directeur de thèse
M.	P. EYSSIDIEUX	Professeur, Grenoble	Examinateur
M.	C. SABBAH	Directeur de Recherches CNRS, Palaiseau	Rapporteur et examinateur
M.	C. SIMPSON	Directeur de Recherches CNRS, Nice	Examinateur
M.	A. SUCIU	Professeur, Boston	Rapporteur

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné

Université de Nice, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers Alexandru Dimca, pour sa disponibilité et sa générosité. En me fournissant des pistes de recherche à la fois précises et variées, il m'a donné une liberté hautement appréciable. Sachant à la fois me laisser du temps et m'encourager quand j'avais besoin de quelques mois pour aller au bout de mes intuitions, et m'encadrer plus nettement quand j'avais besoin d'aide, il me réorientait subtilement, chaque fois que nous convenions que cela était préférable, vers un prolongement neuf des questions posées. C'est dans un climat de confiance que j'ai pu bénéficier de son expérience, lui faire part de mes doutes, mes craintes et mes espoirs mathématiques, obtenant toujours de bons conseils.

Je remercie Claude Sabbah et Alexandru Suciu, les rapporteurs de cette thèse. Leurs commentaires sur celle-ci ou mes écrits précédents ont été très instructifs, et je suis flatté qu'ils aient pris la peine de s'intéresser à mon travail. Merci également à Frédéric Campana, Philippe Eyssidieux, et Carlos Simpson de me faire l'honneur d'être membres du jury.

Merci aux personnels du laboratoire qui accompagnent la recherche, et qui permettent à ce monde d'avancer. Je pense en particulier à ceux que j'ai pu connaître, Stéphanie Ferrero, Andrée Bianchi, Cécile Yvon, Claudine Torres, Janine Lachkar (à qui je renouvelle mes souhaits de bonne retraite), Jean-Paul Pradère, Fernande Robini, Isabelle Laurent et Jean-Louis Thomin, sans oublier Jean-Marc Lacroix et Julien Maurin qui ont su me guider quand il m'est arrivé de mettre en route d'importants calculs à l'aide de logiciels mathématiques.

Je remercie Antoine Ducros, dont j'ai suivi le cours de Master 2 de Géométrie Algébrique à Rennes, et grâce à qui j'ai pu décider quelle voie mathématique je voulais suivre. Je pense également à Michel Merle, qui a eu la patience de faire bénéficier de son expérience nos groupes de travail, à effectif très restreint, pour doctorants débutants.

C'est ainsi que j'en viens aux doctorants, et à ceux qui l'étaient encore quand je suis arrivé. Ils forment dans le laboratoire un groupe en évolution constante, due bien sûr aux départs et aux arrivées, dans lequel des liens solides se tissent, et permettent la réalisation du travail de thèse dans un esprit de franche empathie, propice aux échanges et au maintien de la bonne humeur.

Je commence par ceux qui ont partagé mon bureau, et les remercie pour la très bonne ambiance qui y a toujours régné : Nicolas, le plus ancien, qui a eu le courage, une fois docteur, de partir travailler un an pour une organisation humanitaire. Asma, qui a su me faire parler et parler de la situation personnelle douloureuse que je vivais en première année. Xavier, avec qui j'ai eu des débats d'ordre métaphysique sur la politique, la grammaire française, l'algèbre linéaire et la soupe angevine. Et enfin Chiara et Luca, grâce à qui je ne désespère pas de faire un jour des progrès en Italien.

Au delà de ce bureau, je veux remercier Michel, à l'optimisme aussi inébranlable que réaliste, avec qui j'ai pu discuter de tous les sujets qui me passaient par la tête, mathématiques ou non. Sa présence au laboratoire est précieuse. Thomas, parti enseigner à Paris, que j'espère revoir régulièrement, pour bénéficier de ses fines analyses sur des sujets sociaux qui nous tiennent à cœur. Dans le même ordre d'idées, j'associe Patrick, et lui souhaite toute la réussite possible dans ses projets professionnels. Nicolas, qui va pouvoir diffuser une bonne parole et transmettre sa sagesse mathématique dans toute la Haute Normandie. Joan, que j'ai hâte de retrouver imbibé de culture germanique, et toujours aussi imprévisible. Julianna, la colocataire prodigue, qui m'amuse beaucoup dans ses hésitations à la trompette. Thu, dont la proximité du sujet de thèse a permis des échanges rassurants. Rémy, aux impressionnantes ressources mathématiques, dissimulées derrière un flegme qui serait très britannique s'il n'était normand. Le Mig, à qui je souhaite beaucoup de bonheur dans son nouveau rôle paternel. Quant à Hugo et son rire désarmant, eh bien, c'est Hugo, quoi.

Merci à Delphine. Je l'ai vue successivement sociable, perspicace, fatiguée, tenace, absente, torturée, joyeuse, confiante, et de tout temps partager mes goûts cinématographiques, ce qui est toujours agréable. Merci à Pierre, dont la faconde inénarrable a (presque) toujours le bonheur de donner des points de vue originaux.

Voilà pour ceux que j'ai amplement côtoyés. Mais il y a également Marcello, Olivier, Benedikt, Nicolas, Philippe, Damien, Elimane, et plus récemment Florent, Olivia, Salima, Thierry, Camille, Marie et Brice.

J'ai une pensée émue pour ma famille, à commencer par ma mère. Nous avons souffert deux disparitions ces dernières années, et dans ces circonstances éprouvantes, j'ai senti la force de l'amour familial qui nous unit.

À mon père ; je sais ce que je lui dois.

Table des matières

Introduction

Placer une information algébrique locale sur un espace topologique, comme un espace tangent, une structure complexe, ou un anneau de fonctions, un module de formes différentielles, amène naturellement la question : à quel point peut-on étendre globalement cette information, de façon cohérente, c'est à dire de façon continue, ou de façon à pouvoir recoller, identifier localement, les objets algébriques considérés ? La cohomologie des faisceaux est un exemple fondamental de mesure de cette capacité à résumer globalement un objet défini localement, ou au contraire, de la perte d'information subie. Certains faisceaux simples, les systèmes locaux, sont des faisceaux localement constants, dont l'aspect non trivial résulte de la non trivialité de l'invariant topologique qu'est le groupe fondamental. Par exemple, si l'espace est un plan troué, un système local $\mathcal{L}$ de fibre un groupe abélien G sur cet espace sera localement isomorphe au faisceau constant $\underline{G}$, ce qui signifie que l'on peut recouvrir l'espace par des zones où l'on se donnera un isomorphisme avec le faisceau $\underline{G}$. En faisant le tour du trou pour revenir à son point de départ, on accumulera les isomorphismes, et il n'y a pas de raison pour que l'isomorphisme final soit simplement l'identité. Ce phénomène s'appelle la monodromie.

De manière générale, faire ainsi de l'algèbre pour calculer des invariants permet de différencier les espaces, dans l'idée de les classer. Dans cette optique on peut distinguer deux types d'espaces : les espaces lisses, localement isomorphes à des espaces linéaires (c'est à dire des espaces qui admettent une structure algébrique extrêmement contraignante, et qui de ce point de vue sont rectilignes) et les espaces singuliers. À titre d'exemple, on peut penser à l'espace formé de deux droites concourantes : l'espace ne sera pas lisse au niveau de l'intersection. Plus généralement, on peut se représenter un cône : on se donne une forme, et on relie tous les points de cette forme à un point fixé (éventuellement hors de la forme), en considérant la réunion de toutes les droites passant par ce point central et les points de la forme. Le point central sera (en général !) un point singulier de la forme obtenue. Il est d'ailleurs remarquable que pour les espaces analytiques, toutes les singularités sont topologiquement des cônes (sur ce point, on peut se référer à la section 1.5 de [**Dim92**]). De fait, l'intersection du cône avec une petite sphère autour de la singularité s'appelle l'entrelacs, et est un élément crucial de l'étude des singularités. Il ne faut cependant pas dissocier espaces lisses et espaces singuliers, car on apprend des uns en étudiant les autres. Partant d'un espace lisse, on peut tomber sur un espace singulier en le compactifiant, et en regardant son complémentaire. Si ce complémentaire est singulier, on dira que l'espace de départ a des singularités à l'infini. Inversement, il est utile de regarder le complémentaire d'une singularité. Cela permet d'étudier, en lieu et place de la singularité, un ouvert d'un espace lisse (l'espace ambiant). Par exemple, on étudie ainsi les complémentaires d'ensembles finis d'hyperplans ou d'hypersurfaces dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$; en ce qui concerne les singularités à l'infini, les théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes (voir par exemple [**Voi04**], Chapitre 13) sont révélateurs des imbrications topologiques entre un espace, son complémentaire, et l'espace total. L'étude des fibres de Milnor s'inscrit dans cette logique : on a une fonction analytique, dont une fibre est singulière. On peut mieux la connaitre en étudiant les fibres voisines qui sont, elles, lisses, dans un voisinage de la singularité.

La comparaison des invariants d'un même espace peut devenir, en soi, un critère de comparaison entre espaces. La théorie de l'homotopie rationnelle fondée par D. Sullivan [**Sul77**], s'intéresse au groupes d'homotopie d'un espace topologique, modulo torsion. La notion de formalité intervient pour préciser si la cohomologie rationnelle d'un espace détermine le type d'homotopie rationnelle de cet espace. Elle admet un raffinement, la notion de formalité partielle. Récemment, A. Dimca, S. Papadima et A. Suciu [**DPS09**] ont montré comment ce dernier critère était déterminant dans la comparaison entre deux invariants topologiques, les variétés de résonance et les variétés caractéristiques. Ces dernières permettent d'étudier la cohomologie des systèmes locaux sur un espace, et sont les lieux de saut de dimension des groupes de cohomologie. Les variétés de résonance ont une définition similaire, mais portent sur les formes différentielles. Si l'espace est 1-formel, alors les variétés de résonance sont les espaces tangents à l'origine des variétés caractéristiques. Par contrapposée, si l'on sait calculer les variétés de résonance et les variétés caractéristiques d'un espace, et que l'on constate que les premières ne sont pas les approximations linéaires des dernières, alors l'espace n'est pas formel.

Le résultat principal de cette thèse, qui utilise cette implication, est la donnée d'un exemple de fibre de Milnor globale, associée à un arrangement de droites dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, qui ne soit pas 1-formelle. Le complémentaire d'un arrangement de droites est formel, et l'on peut se demander dans quelle mesure la notion de formalité est stable pour ce type de construction (voir Question 5.5 dans [**PS09**], et Question 2.10 dans [**DP09**]). Si f est un polynôme homogène qui définit l'arrangement de droites, la fibre de Milnor globale $f^{-1}(1)$ est une sous variété de $\mathbb{C}^3$. On montre par l'exemple que cette construction ne conserve pas forcément la formalité des espaces.

Le premier chapitre est consacré aux définitions des systèmes locaux, des variétés de résonance, et des variétés caractéristiques. Des théorèmes de structure des variétés caractéristiques y sont mentionnés, qui interviennent de façon déterminante par la suite.
Le deuxième chapitre introduit le cas particulier des complémentaires d'arrangements d'hyperplans, avec les raffinements des théorèmes de structure précédents qui existent dans cette situation. Des critères permettant la recherche d'exemples (Propositions 2.2 et 2.4) sont démontrés.

Le troisième chapitre est consacré à la notion de formalité. Après un rappel des définitions, il contient l'étude d'un cas particulier, où à titre d'exemple, l'on manipule explicitement les algèbres différentielles graduées qui interviennent pour décider du caractère formel de l'espace. Enfin, le théorème de A. Dimca, S. Papadima et A. Suciu sur le lien entre formalité et variétés caractéristiques est énoncé (Théorème 3.9).
Le quatrième chapitre amène progressivement le résultat principal de cette thèse (Théorème 4.12), en commençant par quelques propriétés classiques des fibres de Milnor globales. On démontre ensuite des propriétés de relèvement de morphismes particuliers (Proposition 4.6), intervenant dans la structure des variétés caractéristiques, et qui servent à l'analyse de l'exemple du Théorème 4.12.

Variétés de résonance, variétés caractéristiques

Résumé. Les systèmes locaux étudiés ici seront des faisceaux localement libres de rang 1 sur $\mathbb{C}$. On définit les variétés caractéristiques associées, après avoir défini les variétés de résonance. Le théorème de structure des variétés caractéristiques de D. Arapura est énoncé, ainsi que ses raffinements dans le cas d'un complémentaire d'une courbe réduite dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

1.1. Systèmes locaux

Soit X un espace topologique connexe. Un invariant important de la topologie de X est le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$, où x est un point de X. Un façon d'étudier ce groupe fondamental est de considérer les caractères de ce groupe, c'est à dire les éléments de

$$Hom(\pi_1(X,x),\mathbb{C}^*).$$

On peut supposer, pour éviter un trop grand degré de généralité, que X a même type d'homotopie qu'un complexe simplicial fini. Comme $\mathbb{C}^*$ est un groupe abélien, les morphismes de $\pi_1(X,x)$ dans $\mathbb{C}^*$ se factorisent par son abélianisé $H_1(X)$, qui est un groupe abélien de type fini. Ainsi,

$$Hom(\pi_1(X,x),\mathbb{C}^*) \simeq Hom(H_1(X),\mathbb{C}^*).$$

Ceci est un groupe algébrique, que l'on note $\mathbb{T}(X)$. Si $b_1(X)$ désigne le premier nombre de Betti de X, alors la composante connexe de l'origine de $\mathbb{T}(X)$ est le tore

$$\mathbb{T}_1(X) \simeq (\mathbb{C}^*)^{b_1(X)}.$$

Il est possible d'avoir une vision faisceautique des éléments de $\mathbb{T}(X)$.

Definition 1.1. *Un système local de rang* 1 *sur* X *est un faisceau de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels localement libre de rang* 1 *sur* X.

Proposition 1.1. *Les classes d'isomorphisme de systèmes locaux de rang* 1 *sur* X *sont en bijection avec les éléments du groupe algébrique* $H^1(X,\mathbb{C}^*)$.

Démonstration. Un système local est localement isomorphe au faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}$, donc se donner un système local revient à se donner un recouvrement ouvert de M

par des ouverts (au dessus desquels il sera trivial), et des isomorphismes du faisceau constant (donc des éléments de $GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$)) au dessus des intersections deux à deux de ces ouverts, avec des conditions de compatibilité au dessus des intersections trois à trois. Cela revient à se donner un 1-cocycle du complexe de Čech associé à ce recouvrement et au faisceau $\underline{\mathbb{C}^*}$. □

PROPOSITION 1.2. *On a un isomorphisme naturel*

$$H^1(X, \mathbb{C}^*) \simeq Hom(H_1(X), \mathbb{C}^*).$$

DÉMONSTRATION. Le théorème des coefficients universels (voir [**Spa94**]), fournit une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow Ext^1(H_0(X), \mathbb{C}^*) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}^*) \longrightarrow Hom(H_1(X), \mathbb{C}^*) \longrightarrow 0.$$

Le groupe $\mathbb{C}^*$ étant divisible, il est injectif dans la catégorie des groupes abéliens (on peut se référer à [**God60**]), et donc $Ext^1(H_0(X), \mathbb{C}^*) = 0$. On peut également dire que $H_0(X) = \mathbb{Z}$ est projectif. □

1.2. Variétés de résonance

Les variétés de résonance ont été introduites par M. Falk [**Fal97**], comme outil dans la classification des algèbres de Orlik et Solomon. Si l'espace topologique étudié X est le complémentaire d'un ensemble fini $\mathcal{A}$ d'hyperplans (ce que l'on appelle un arrangement d'hyperplans) dans un espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, l'algèbre de Orlik et Solomon de X est déterminée par la combinatoire de l'arrangement (c'est à dire l'ensemble des relations d'incidence des hyperplans de $\mathcal{A}$). Comme cette algèbre permet de calculer l'homologie de X, il est ainsi montré que les groupes d'homologie de X sont déterminés par la combinatoire de l'arrangement ; on se référera à [**OT92**] pour ces définitions et propriétés. C'est dans ce cadre que Falk a défini les variétés de résonance, qui sont elles mêmes déterminées par la combinatoire de l'arrangement.

On se restreindra aux variétés de résonance portant sur la cohomologie en degré 1. On a alors la définition suivante, où X est un espace topologique (qui a même type d'homotopie qu'un complexe simplicial fini).

DEFINITION 1.2. *Soit $d \in \mathbb{N}$. La $d^{\text{ième}}$ variété de résonance de X est*

$$R_d(X) = \{\alpha \in H^1(X, \mathbb{C}),\, dim\, H^1(H^\bullet(X, \mathbb{C}), \wedge\alpha) \geq d\}.$$

Falk a conjecturé que dans le cas du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans, $R_d(X)$ est une union de sous espaces linéaires de $H^1(X, \mathbb{C})$. Cette conjecture a été montrée par D. Cohen et A. Suciu [**CS99**], par le biais des variétés caractéristiques. Comme on va le voir, ces variétés font intervenir les systèmes locaux sur X. Ceux-ci étaient déjà apparus en relation avec les variétés de résonance dans l'article de H. Esnault, E. Viehweg, et V. Schechtman [**ESV92**], où un système local $\mathcal{L}(a)$ était associé à un élément a de l'algèbre A de Orlik et Solomon, et la cohomologie $H^\bullet(X, \mathcal{L}(a))$ comparée à celle du complexe $(A, \cdot a)$, moyennant une identification, grâce à un théorème de Orlik et Solomon [**OS80**], entre A et une algèbre engendrée par certaines formes différentielles fermées sur X.

1.3. Variétés caractéristiques

1.3.1. L'étude du groupe fondamental d'un espace topologique X (qui a même type d'homotopie qu'un complexe simplicial fini) peut-être menée par l'analyse de ses représentations. Les systèmes locaux de rang 1 que l'on a définis précédemment sont les représentations de dimension 1 de $\pi_1(X)$. L'ensemble des systèmes locaux de rang 1 dont le premier groupe de cohomologie est non nul est ainsi un invariant qui apporte des informations sur $\pi_1(X)$. Plus généralement, tout en se restreignant au premier groupe de cohomologie, les variétés caractéristiques de X sont définies comme suit.

Definition 1.3. *Soit $d \in \mathbb{N}$. La $d^{ième}$ variété caractéristique des systèmes locaux de rang* 1 *est*

$$V_d(X) = \{\mathcal{L} \in H^1(X, \mathbb{C}^*),\, dim\, H^1(X, \mathcal{L}) \geq d\}.$$

1.3.2. C. Simpson [**Sim93**] a montré que, si X est une variété complexe projective lisse, les variétés caractéristiques sont des translatés de tores dans $H^1(X, \mathbb{C}^*)$, et que les translations s'effectuent par des éléments d'ordre fini.

Ce type de théorème de structure avait déjà été étudié par M. Green et R. Lazarsfeld. Dans [**GL87**], ils ont donné des critères d'annulation de la cohomologie des fibrés en droites holomorphes (dont la première classe de Chern est de torsion) sur une variété kählérienne compacte. Ils se sont intéressés à des variétés semblables aux variétés caractéristiques, mais portant sur ces fibrés en droites, et ont montré dans [**GL91**] que ces variétés sont des translatés de tores complexes. Le fait que ces translations se fassent par des éléments de torsion a été conjecturé par F. Catanese [**Cat91**] et A. Beauville [**Bea92**].

Dans ce dernier article, A. Beauville a montré la conjecture dans certains cas, et a prolongé ses résultats aux variétés caractéristiques, étudiant par la théorie de Hodge le lien entre la cohomologie d'un fibré en droites, et celle du système local associé. La correspondance entre système local et fibré en droites est la suivante : si $\mathcal{L}$ est un système local et $\mathcal{O}$ est le faisceau des fonctions holomorphes, alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}$ est une fibré en droites, que l'on munit d'une connexion plate ∇, définie de la façon suivante : dans une trivialisation locale au dessus d'un ouvert contractile U, si σ_0 est une section non nulle de $\mathcal{L}$, alors toute section de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}$ s'écrit sous la forme $\sigma = \sigma_0 \otimes \alpha$. On pose alors

$$\nabla\sigma = \sigma_0 \otimes \mathrm{d}\alpha.$$

Il est montré, par exemple dans [**Voi04**], Proposition 9.11, que cette correspondance entre classes d'isomorphisme de systèmes locaux et classes d'isomorphisme de fibrés à connexion plate est bijective. Partant d'une telle connexion, le système local associé est l'ensemble des sections horizontales, autrement dit l'ensemble des sections qui annulent la connexion, et qui de ce point de vue peuvent être considérées commes les sections constantes.

C. Simpson a donc démontré la conjecture. La question était alors de savoir si ces résultats restaient valides dans le cas non compact.

1.3.3. S'appuyant, entre autres, sur des constructions de théorie de Hodge mixte, et sur une généralisation d'un lemme fondamental de Beauville-Castelnuovo-De Franchis ([**Bea92**], Proposition 2.1), D. Arapura démontre le théorème suivant sur $V_1(X)$ ([**Ara97**], Theorem 1.6).

THÉORÈME 1.3 (Arapura). *Soient $\overline{X}$ une variété kählérienne compacte, et $D \subset \overline{X}$ un diviseur à croisements normaux. Soit $X = \overline{X} \setminus D$. Il existe un nombre fini d'éléments de torsion $\rho_i \in H^1(X, \mathbb{C}^*)$, de caractères unitaires ρ'_j, et des applications holomorphes surjectives, sur des courbes lisses, $f_i : X \to C_i$, tels que*

$$V_1(X) = \bigcup_i \rho_i f_i^* H^1(C_i, \mathbb{C}^*) \cup \bigcup_j \{\rho'_j\}.$$

Arapura définit une classe d'applications holomorphes admissibles $X \to C$, où C doit être une courbe lisse. Une application admissible est dite de type général si $\chi(C) < 0$. Il montre alors ([**Ara97**], Proposition 1.7)

PROPOSITION 1.4 (Arapura). *Soit $f : X \to C$ une application admissible vers une courbe de type général. Alors $f^* H^1(C, \mathbb{C}^*)$ est une composante irréductible de $V_1(X)$. Inversement, toute composante irréductible de $V_1(X)$ qui contient l'origine* 1 *est de cette forme.*

1.3.4. Supposons que $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ soit une courbe réduite, dont on note $C_1, \ldots, C_k$ les composantes irréductibles. On pose $M = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$. Soit W une composante de $V_1(M)$ de dimension strictement positive. Il existe un morphisme surjectif $f_W : M \to S_W$, dont la fibre générique est connexe (cela résulte de la définition d'admissibilité), et un caractère de torsion $\rho_W \in H^1(M, \mathbb{C}^*)$ tel que

$$W = \rho_W \otimes f_W^* H^1(S_W, \mathbb{C}^*). \tag{1.3.1}$$

A. Libgober [**Lib01**] a remarqué que dans ce cas, S_W est nécessairement rationnelle. Les applications admissibles sont alors les morphismes $M \to S_W$ surjectifs, à fibre générique connexe. A. Dimca [**Dim06**] a rassemblé et prolongé les résultats que l'on peut obtenir dans cette situation. Il a également montré la proposition suivante, toujours sous l'hypothèse $M = \mathbb{P}^2 \setminus C$ ([**Dim06**], section 3) :

PROPOSITION 1.5 (Dimca). *L'ensemble des morphismes f_W apparaissant dans l'écriture (1.3.1), tels que $\chi(S_W) < 0$, est paramétré par l'ensemble des sous-espaces isotropes maximaux, définis sur $\mathbb{Q}$, $E \subset H^1(M, \mathbb{C})$, tels que $dim E \geq 2$.*

En fait, comme indiqué dans [**Dim06**], Remark 3.16, les sous-espaces isotropes maximaux de $H^1(M, \mathbb{C})$ de dimension au moins 2 sont toujours définis sur $\mathbb{Q}$.

Chapitre 2

Arrangements de droites

Résumé. La première variété caractéristique du complémentaire M d'un arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ possède certaines composantes particulières, les composantes locales et les composantes globales, qui sont définies ici. Les composantes de la variété caractéristique ne passent pas toutes par l'origine du groupe des systèmes locaux, et les multiplicités des fibres de l'application admissible associée à une composante donne une information sur l'existence de tels translatés ne passant pas par l'origine. On démontre des critères permettant d'exclure la présence de fibres multiples.

Un arrangement d'hyperplans dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un ensemble fini $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\}$ d'hyperplans de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. L'espace étudié est le complémentaire des hyperplans dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, noté M :

$$M = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

D'après un théorème de Zariski du type de Lefschetz (voir [**HL73**]), le groupe fondamental de M coïncide avec le groupe fondamental de $P \cap M$, où P est un plan (complexe) générique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. On peut donc se limiter aux arrangements de droites dans $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
Beaucoup d'exemples ont été étudiés dans ce cadre. En particulier, A. Suciu a pu donner un exemple d'arrangement dont la variété caractéristique associée admet une composante translatée (c'est à dire, ne passant pas par l'origine), de dimension strictement positive. Il s'agit du “deleted B_3 arrangement”, présenté dans [**Suc02**] (voir aussi la Remarque 1 après la Proposition 2.4).

Le caractère particulier de la situation d'arrangement de droites permet d'exhiber certains morphismes $f : M \to S$ vers des courbes, qui vérifient les critères d'Arapura, et qui, ainsi, produisent des composantes (non translatées) de la variété caractéristique $V_1(M)$ (voir 1.3.3). Les deux premières sections présentent deux types connus de tels morphismes. Par ailleurs, A. Dimca [**Dim06**] a étudié algébriquement la géométrie des morphismes $f : M \to S$, pour donner des conditions suffisantes pour que ceux-ci donnent naissance également à des composantes translatées. Nous proposons dans la troisième section des critères s'appuyant sur cette géométrie, pour affirmer qu'un morphisme ne donne pas lieu à des composantes translatées.

2.1. Composantes locales

Soit $\mathcal{A}$ un arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2$, et M son complémentaire. Supposons que le point $p \in \mathbb{P}^2$ appartienne à k droites de $\mathcal{A}$, avec $k \geq 3$. L'ensemble des droites de $\mathbb{P}^2$ qui passent par p est paramétré par $\mathbb{P}^1$. On considère l'application $\phi : M \to \mathbb{P}^1$, qui à un point p' de M (notons que $p \notin M$) associe la droite qui passe par p et p'. L'image de ϕ est $\mathbb{P}^1$ privé de k droites, notons-la S. Comme $k \geq 3$, $\chi(S) < 0$. Par ailleurs, $\phi : M \to S$ est un morphisme surjectif à fibres connexes. Donc d'après 1.3.3, $\phi^* H^1(S, \mathbb{C}^*)$ est une composante de $V_1(M)$.

2.2. Composantes globales

2.2.1. Premier groupe d'homologie de M. Soit $x \in M$ un point base. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ des lacets élémentaires autour des droites $H_1, \ldots, H_d$ respectivement. D'après [**Dim92**], Chapter 4, on a

$$H_1(M) \simeq \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\gamma_d / < \gamma_1 + \cdots + \gamma_d >,$$

donc

$$H^1(M, \mathbb{C}^*) \simeq \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in (\mathbb{C}^*)^d,\ \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_d = 1\}. \tag{2.2.1}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, le coefficient λ_i est la monodromie du système local en question autour de la droite H_i.

2.2.2. Soit W une composante irréductible de $V_1(M)$.

DEFINITION 2.1. *La composante W est globale si $1 \in W$ et si W n'est incluse dans aucune des hypersurfaces de coordonnées $(\lambda_i = 1)$, avec les notations de (2.2.1).*

Cela signifie que les systèmes locaux dans W ont une monodromie non triviale autour de chacune des droites de l'arrangement $\mathcal{A}$, et donc que W ne provient pas de la variété caractéristique d'un sous arrangement de $\mathcal{A}$: toutes les droites de $\mathcal{A}$ entrent en jeu dans la constitution de W.

2.2.3. Multinets. Choisissons, pour chaque $i \in \{1, \ldots, d\}$, une forme linéaire $f_i \in \mathbb{C}[x, y, z]$ telle que $H_i = (f_i = 0)$.
Soit W une composante globale de $V_1(M)$ de dimension k. M. Falk et S. Yuzvinsky [**FY07**] ont montré que l'on peut associer à W un pinceau $\phi : \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B} \to \mathbb{P}^1$, où $\mathcal{B}$ désigne le lieu d'indétermination de ϕ, et que ϕ correspond à une partition de $\mathcal{A}$, avec multiplicités, ce que Falk et Yuzvinsky appellent un multinet (je ne reproduis pas ici les propriétés combinatoires nécessaires à la définition d'un multinet).
Précisément, il existe k points de $\mathbb{P}^1$, $a_1, \ldots, a_k$, des exposants $k_1, \ldots, k_d$, et des indices $m_1 < \cdots < m_k = d$ tels que (quitte à renuméroter les droites de $\mathcal{A}$)

$$\begin{array}{rcl} \phi^{-1}(a_1) & = & (f_1^{k_1} \cdots f_{m_1}^{k_{m_1}} = 0) \\ \phi^{-1}(a_2) & = & (f_{m_1+1}^{k_{m_1+1}} \cdots f_{m_2}^{k_{m_2}} = 0) \\ & \vdots & \\ \phi^{-1}(a_k) & = & (f_{m_{k-1}+1}^{k_{m_{k-1}+1}} \cdots f_d^{k_d} = 0). \end{array} \tag{2.2.2}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, on pose $C_i = \phi^{-1}(a_i)$, et $Q_i = \prod_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} f_j^{k_j}$. Comme ϕ est un pinceau, l'espace $< Q_1, \ldots, Q_k >$ est de dimension 2, engendré par deux quelconques des polynômes $Q_1, \ldots, Q_k$. On peut supposer $a_1 = [0:1]$ et $a_2 = [1:0]$, de sorte que ϕ soit le pinceau $[Q_1 : Q_2]$.

2.3. Composantes translatées

2.3.1. Soit $\phi : M \to S$ un morphisme admissible. A. Dimca indique dans la section 5 de [**Dim06**] que ϕ se restreint en une fibration localement triviale $\phi' : M' \to S'$, dont on note F la fibre. La courbe S' est la courbe S privée d'un nombre fini de points, et M' est égal à M privé des images réciproques de ces points. Suivant la section 6 du même article, on remarque que l'on a une suite exacte

$$H_1(F) \longrightarrow H_1(M') \xrightarrow{\phi'_*} H_1(S') \longrightarrow 0,$$

ainsi qu'une suite non nécessairement exacte au milieu

$$H_1(F) \xrightarrow{i_*} H_1(M) \xrightarrow{\phi'_*} H_1(S') \longrightarrow 0,$$

où $i : F \hookrightarrow M$ désigne l'injection de la fibre dans M. On pose

$$T(\phi) = \frac{Ker\,\phi_*}{Im\,i_*}.$$

Ce groupe a été introduit par A. Beauville [**Bea92**] dans le cas d'une variété kählérienne compacte. Il contient les (classes des) éléments de torsion $\rho \in H^1(M, \mathbb{C}^*)$ intervenant dans l'écriture

$$\rho\phi^* H^1(S, \mathbb{C}^*)$$

du théorème d'Arapura (section 1.3.3). C'est donc ce groupe qui indique quelles sont les translations possibles. Il peut être calculé [**Dim06**], et dépend des multiplicités des fibres de $\phi : M \to S$. On obtient en particulier la propriété suivante (Corollary 6.6 de [**Dim06**]) :

Proposition 2.1. *Si $\phi : M \to S$ n'a pas de fibres multiples, alors il n'y a pas de composante translatée dans $V_1(M)$ qui soit associée à ϕ.*

2.3.2. Je propose ici des conditions suffisantes pour qu'un morphisme $\phi : M \to S$ n'ait pas de fibres multiples. Il s'agit en réalité de critères pour que le morphisme n'ait que des singularités isolées. Pour cela, je m'inspire d'une idée de A. Dimca [**Dim03**] et de A. Bodin [**Bod01**], qui ont étudié les singularités des polynômes qui sont produits de polynômes de degré 1. J'étends leur méthode à une fraction rationnelle, ayant de tels polynômes au numérateur et au dénominateur.

Soient $H_1, \ldots, H_d$, d droites dans $\mathbb{C}^2$. On considère l'arrangement affine $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_d\}$. On suppose que $\mathcal{A}$ est un arrangement essentiel, c'est à dire, qu'il existe $\{i_1, \ldots, i_l\} \subset \{1, \ldots, d\}$ tel que $\bigcap_{j=1}^{l} H_{i_j}$ soit réduit à un point (c'est la définition générale, ici cela revient à dire qu'il y a deux droites qui se coupent). On pose $M = \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{d} H_i$. On choisit, pour chaque $i \in \{1, \ldots, d\}$, un polynome de degré 1, $l_i \in$

$\mathbb{C}[x,y]$, tel que $H_i = (l_i = 0)$.
Soit f la fraction rationnelle

$$l_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot l_d^{e_d},$$

où (e_i) est une famille d'entiers.

PROPOSITION 2.2. *Supposons que (e_i) vérifie :*

(1) *pour tout i, $\sum_{k,\ H_k \nparallel H_i} e_k \neq 0$, et*
(2) $\sum_{k=1}^{d} e_k \neq 0$.

Alors f n'a que des singularités isolées dans M.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe une suite $(z_k)_k$ d'éléments de M telle que $z_k \to \infty$ et $\forall k$, $\mathrm{d}f(z_k) = 0$. On va montrer que ceci est impossible.
Homogénéisons l'expression de f, en ajoutant une variable z, de façon à travailler dans $\mathbb{P}^2$, et en définissant, pour chaque i, $\hat{l_i}$ comme étant l'homogénéisé de l_i. On pose ensuite

$$\hat{f} = z^{\varepsilon} \prod_{i=1}^{d} \hat{l_i}^{e_i},$$

où $\varepsilon = -\sum_{i=1}^{d} e_i$. Notons L_0 la droite à l'infini, d'équation $(z = 0)$, et pour tout i, $L_i = \overline{H_i}$ la clôture de H_i dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (z_k) tend vers un élément z de L_0. Comme l'arrangement $\mathcal{A}$ est essentiel, il existe j tel que $l_j(z_k) \to \infty$. On renumérote les droites de telle sorte que $l_1(z_k) \to \infty$. Rappelons le lemme des petits chemins ([**Mil68**], Lemma 3.1), tel qu'il est cité dans [**Lê74**].

LEMME 2.3 (Lemme des petits chemins). *Soit E un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbb{R}^m$ et soit x un point adhérent à E. Alors il existe un chemin analytique réel $p : [0, \delta[\to \mathbb{R}^m$ tel que $p(0) = x$ et $p(t) \in E$ pour tout $t \neq 0$.*

Supposons que $z \in L_0$ ne soit pas dans $\bigcup_{i=1}^{d} L_i$. Alors, comme par hypothèse $\sum_{k=1}^{d} e_k \neq 0$, f ou $\frac{1}{f}$ est définie et vaut 0 sur $L_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{d} L_i$, donc en particulier en z. Supposons par exemple que f soit nulle sur cet ouvert de L_0. On applique le lemme des petits chemins au sous-ensemble semi-analytique $(\mathrm{d}f = 0)$ dans le sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^2$, $(\hat{l_1} \neq 0)$. On obtient un chemin analytique réel $p : [0, \delta[\to \mathbb{P}^2 \setminus L_1$ tel que $p(0) = z$ et $p(t) \in (\mathrm{d}f = 0)$ pour $t \neq 0$. Alors $f \circ p : [0, \delta[\to \mathbb{C}$ est une fonction analytique de dérivée nulle sur $]0, \delta[$; elle est donc constante, et forcément non nulle sur $]0, \delta[$, bien que sa limite en 0 soit nulle. Cette contradiction implique que $z \in \bigcup_{i=1}^{d} L_i$.

Comme $l_1(z_k) \to \infty$, on a $z \notin L_1$. Il existe i_0 tel que $H_{i_0} \nparallel H_1$ et $z \in L_{i_0}$. Quitte à renuméroter les droites, on suppose $i_0 = 2$. Dire que $z \in L_2 \cap L_0$ revient à dire que $\frac{l_2(z_k)}{l_1(z_k)} \to 0$. On note l'_1 et l'_2 les éléments du dual de $\mathbb{C}^2$ obtenus en annulant la constante de l_1 et l_2. Alors (l'_1, l'_2) forme une base de $(\mathbb{C}^2)'$; en effet, la condition sur le comportement à l'infini sur (z_k) empêche ces formes d'être colinéaires.
Pour $i \geq 3$, on pose

$$l_i = a_i l'_1 + b_i l'_2 + c_i.$$

Alors la suite $\left(\frac{l_i(z_k)}{l_1(z_k)}\right)$ converge vers a_i. De plus, $a_i = 0$ si et seulement si la droite H_i est parallèle à H_2. Remarquons que a_i et b_i sont les dérivées partielles de l_i selon l'_1 et l'_2 respectivement (et en ayant fixé la base (l'_1, l'_2)).
Calculons la dérivée logarithmique de f par rapport à l'_1, en z_k, multipliée par $l'_1(z_k)$:

$$\frac{1}{f(z_k)}\frac{\partial f}{\partial l'_1}(z_k)l'_1(z_k) = \sum_{i,\, H_i \nparallel H_2} e_i \frac{1}{l_i(z_k)}\frac{\partial l_i}{\partial l'_1}(z_k)l'_1(z_k) + \sum_{i,\, H_i \| H_2} e_i \frac{1}{l_i(z_k)}\frac{\partial l_i}{\partial l'_1}(z_k)l'_1(z_k).$$

Le membre de gauche vaut zéro, parce qu'en z_k la différentielle de f est nulle. Dans le membre de droite, la première somme tend, quand $k \to \infty$, vers $\sum_{i,\, H_i \nparallel H_2} e_i$, qui est non nul d'après l'hypothèse 1 de l'énoncé ; dans la seconde somme, chaque terme est nul, car pour chacun, l'on a $\frac{\partial l_i}{\partial l'_1} = 0$. Ainsi, en passant à la limite, on obtient

$$\sum_{i,\, H_i \nparallel H_2} e_i = 0,$$

ce qui est exclu par hypothèse.
On obtient à nouveau une contradiction, donc le lieu d'annulation de df est borné dans M.
Le lieu $(\mathrm{d}f = 0)$ est un sous-ensemble algébrique fermé de M, qui est un ouvert algébrique de $\mathbb{C}^2$. Nous venons de montrer que ce lieu est borné, ce qui implique qu'il est de dimension 0, et donc que les singularités de f sont isolées.

$\square$

Remarques.

(1) La deuxième hypothèse de la Proposition 2.2 peut être interprétée géométriquement. Soit $\hat{f}$ l'homogénéisé de f comme dans la démonstration précédente, et L_0 la droite à l'infini.
On a vu à la section 2.2.1 que

$$\mathbb{T}(M) = Hom(H_1(M), \mathbb{C}^*) = \{\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_d) \in (\mathbb{C}^*)^{d+1},\ \lambda_0 \cdots \lambda_d = 1\}.$$

La condition

$$\sum_{i=1}^{d} e_i = -\varepsilon \neq 0$$

est équivalente à

$$f^*(\mathbb{T}(\mathbb{C}^*)) \not\subset \{\rho_0 = 1\}.$$

En effet, soit $\mathcal{L} \in \mathbb{T}(\mathbb{C}^*)$ un système local qui ait une monodromie non triviale α autour de 0. Alors la monodromie λ_0 de $f^*\mathcal{L}$ le long d'un lacet élémentaire γ_0 autour de L_0 sera α^ε : comme $\hat{f}$ se comporte localement comme z^ε, le lacet $f_*\gamma_0$ fera ε tours autour du point à l'infini dans $\mathbb{C}^*$.

(2) On peut donner un contre-exemple quand la première hypothèse de la Proposition 2.2 n'est pas faite : soit

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x(x+2y)(2y-1)(y+1)(x+y+2)^2}{(x+2)(x+2y+2)(y-1)(x+y)^2}.$$

La somme des e_i's des droites qui ne sont pas parallèles à $(y+1=0)$ est nulle, alors que, en ce qui concerne l'hypothèse 2, la somme de tous les e_i's est non nulle.
On peut vérifier que le lieu d'annulation de la différentielle de f_1 contient $(y=0)$. Cela implique que f_1 est constante sur $(y=0)$, et sa valeur y est 1. La fibre $f_1^{-1}(1)$ est donnée par

$$y^2\left(2xy^3+(5x^2+8x-2)y^2+(4x^3+12x^2+6x)y+x^4+4x^3+4x^2+2x+2\right)=0.$$

On voit que la droite $(y=0)$ apparaît avec multiplicité 2. L'application f_1 est admissible, mais n'a aucune fibre multiple, bien qu'elle ait, on vient de le voir, une fibre non réduite. Ceci implique, grâce à [**Dim06**], Theorem 6.3, que $T(f_1)=1$, et en particulier que la variété caractéristique associée à l'arrangement décrit par l'annulation du numérateur et du dénominateur de f_1 n'a pas de composante translatée.
Un autre contre-exemple (qui, lui, ne sera pas admissible), associé à l'absence de l'hypothèse 2, mais avec l'hypothèse 1, sera donné après la Proposition 2.4.

La méthode de la démonstration précédente s'applique aussi au résultat suivant, où la première hypothèse est modifiée.

PROPOSITION 2.4. *Supposons que les droites de $\mathcal{A}$ soient deux à deux non parallèles. Supposons de plus que pour tout i, $e_i \neq 0$, et que*

$$\sum_{i=1}^d e_i \neq 0.$$

Alors f n'a que des singularités isolées.

DÉMONSTRATION. On raisonne comme précédemment, en supposant avoir une suite (z_k) tendant vers l'infini et telle que $\forall k$, $\mathrm{d}f(z_k)=0$. On prend les mêmes notations que dans la démonstration de la Proposition 2.2, et les étapes sont les mêmes : on montre d'abord grâce à l'hypothèse $\sum_i e_i \neq 0$ que la limite z de (z_k) dans $\mathbb{P}^2$ n'est pas dans $L_0 \setminus \bigcup_{i=1}^d L_i$, puis on montre qu'elle ne peut être non plus dans $L_0 \cap L_i$, quel que soit i. La première partie étant identique, on se contente d'écrire la deuxième.
Supposons que $\frac{l_2(z_k)}{l_1(z_k)} \to 0$. On choisit (l_1', l_2') comme base de $(\mathbb{C}^2)'$. Alors :

$$\frac{1}{f(z_k)}\frac{\partial f}{\partial l_2'}(z_k)l_2(z_k)=\sum_{i=1}^d e_i\frac{1}{l_i(z_k)}\frac{\partial l_i}{\partial l_2'}(z_k)l_2(z_k).$$

Quand k tend vers l'infini, tous les termes de la somme tendent vers 0, excepté le terme associé à l_2. En effet, puisque aucune droite autre que H_2 n'est parallèle à H_2, on a pour tout $i \neq 2$, $\frac{l_2(z_k)}{l_i(z_k)} \to 0$, car l_i a une composante sur l_1'. En passant à la limite, on obtient

$$0 = e_2,$$

ce que l'on a exclu par hypothèse.

□

Remarques.

(1) L'hypothèse "$\forall i, e_i \neq 0$" ne peut pas toujours être considérée comme acquise, car l'espace M est déterminé avant le choix des e_i's. Regardons le fameux exemple de A. Suciu, le "deleted B_3-arrangement" ([**Suc02**], Example 4.1). On pose $H_1 = (x = 0)$, $H_2 = (x-1 = 0)$, $H_3 = (y = 0)$, $H_4 = (y-1 = 0)$, $H_5 = (x-y-1 = 0)$, $H_6 = (x-y = 0)$, et $H_7 = (x-y+1 = 0)$ (on ne considère qu'un "decone" de l'arrangement, selon les termes de Suciu). La fraction rationnelle associée à la composante translatée de dimension strictement positive de la variété caractéristique, au sens des résultats d'Arapura, est
$$f : (x, y) \longmapsto \frac{x(y-1)(x-y-1)^2}{(x-1)y(x-y+1)^2}.$$
On a donc $e_6 = 0$. La fibre $f^{-1}(1)$ est $H_6 + 2H$, où $H = (x + y - 1 = 0)$. Si l'on ajoute à l'arrangement la ligne $H_8 = H$, cette fibre importante (car contenant une multiplicité) ne sera même pas visible dans le complémentaire $\mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{8} H_i$.
D'autres hypothèses de nos propositions ne sont pas vérifiées par cet exemple : on a $\sum_{i=1}^{7} e_i = 0$, et pour tout i, $\sum_{H_j \nparallel H_i} e_j = 0$.

(2) Une interprétation géométrique de la condition "$\forall i \neq j$, $H_i \nparallel H_j$" est que l'arrangement $\mathcal{A}$ n'a que des points nodaux le long de L_0 (la droite à l'infini), puisque les éléments de $\mathcal{A}$ ne s'intersectent pas à l'infini.

(3) On a des contre-exemples quand la condition $\sum_{i=1}^{d} e_i \neq 0$ n'est pas satisfaite. Considérons
$$f_2 : (x, y) \mapsto \frac{(2x + y + 2)(4x + y + 4)}{(3x + y + 3)^2}.$$
Le lieu d'annulation de la différentielle contient la droite
$$x + 1 = 0,$$
qui n'est pas contenue dans l'arrangement. La fibre $f_2^{-1}(1)$ est donnée par
$$(x + 1)^2 = 0.$$

On ne dispose toujours pas d'exemple de fibre avec une composante multiple dont le degré soit supérieur à 1.

Chapitre 3

Formalité

Résumé. On donne la définition d'une algèbre différentielle graduée, puis l'on précise ce dont on aura besoin pour définir la formalité d'un espace topologique. Un théorème de Morgan sur une algèbre particulière est énoncé, qui permet de faire de calculs explicites pour montrer, dans certains cas, la formalité d'espaces. On donne un exemple de tel calcul, ainsi que d'espaces entrant ou non dans les conditions de ce calcul. On finit par un théorème de A. Dimca, S. Papadima et A. Suciu, où l'hypothèse de formalité partielle permet de relier variétés caractéristiques et variétés de résonance.

3.1. Algèbres différentielles graduées, formalité

3.1.1. À partir d'un espace topologique X, on peut construire des complexes bien connus, comme par exemple le complexe des cochaines singulières, ou, si X est une variété différentiable, le complexe de de Rham. Au delà de la structure d'espace vectoriel différentiel gradué, ces espaces sont munis de produits, qui en font des algèbres différentielles graduées (commutatives) : le produit cup pour le premier, le produit wedge pour le deuxième. Ce produit passe à la cohomologie, qui est ainsi une algèbre différentielle graduée (avec différentielle nulle).

Definition 3.1. *Une algèbre différentielle graduée (commutative) sur $\mathbb{Q}$ est un complexe de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels (A,d), muni d'un morphisme de complexes*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & (A,d)\otimes_{\mathbb{Q}}(A,d) & \longrightarrow & (A,d) \\ & a\otimes b & \longmapsto & a\cdot b \end{array},$$

appelé le produit, vérifiant les conditions suivantes :

(1) *ce produit μ est commutatif (au sens gradué), c'est à dire, si $a\in A^p$ et $b\in A^q$, alors $a\cdot b=(-1)^{pq}b\cdot a$,*
(2) *μ est associatif.*

Remarquons que puisque μ est un morphisme de complexes, l'identité de Leibniz est vérifiée : si $a\in A^p$ et $b\in A^q$, alors

$$d(a\cdot b)=da\cdot b+(-1)^p a\cdot db.$$

3.1.2. Dans son article fondateur de la théorie de l'homotopie rationnelle [**Sul77**], D. Sullivan qualifie certaines algèbres différentielles graduées (DGA) de minimales. Un modèle minimal pour une DGA A est une DGA minimale $\mathcal{M}(A)$ telle qu'il existe un quasi-isomorphisme de DGA $\rho : \mathcal{M}(A) \to A$, c'est à dire un morphisme qui induise un isomorphisme sur la cohomologie. Il existe une unique $\mathcal{M}(A)$ à isomorphisme près satisfaisant la définition de Sullivan.

DEFINITION 3.2. *Une DGA A est formelle s'il existe un quasi-isomorphisme de DGA $\mathcal{M}(A) \to (H^\bullet(A), d = 0)$.*

En pratique, il est utile de connaître le simple critère suivant.

PROPOSITION 3.1. *S'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes reliant une DGA A à $(H^\bullet(A), d = 0)$, alors A est formelle.*

Il existe également une notion de formalité partielle, que l'on définit en deux étapes :

DEFINITION 3.3. *Soit $k \geq 1$. Une algèbre minimale $\mathcal{M}$ engendrée par des éléments de degré inférieur ou égal à k est appelée un modèle k-minimal d'une DGA A s'il existe un morphisme de DGA $\rho : \mathcal{M} \to A$ qui induise des isomorphismes en cohomologie en degrés inférieurs ou égaux à k, et un monomorphisme en degré $k+1$. Un tel objet existe et est unique à isomorphisme près. On le note $\mathcal{M} = \mathcal{M}_k(A)$.*

DEFINITION 3.4. *Une DGA A est dite k-formelle s'il existe un morphisme de DGA $\mathcal{M}_k(A) \to H^\bullet(A)$ qui induise des isomorphismes en cohomologie en degrés inférieurs ou égaux à k, et un monomorphisme en degré $k+1$.*

On remarque alors qu'une DGA formelle est k-formelle pour tout $k \geq 1$. On a comme précédemment

PROPOSITION 3.2. *Soit A une DGA. S'il existe un zig-zag de morphismes de DGA reliant A à $(H^\bullet(A), d = 0)$, tels que chacun induise des isomorphismes en cohomologie en degrés inférieurs ou égaux à k, et un monomorphisme en degré $k+1$, alors A est k-formelle.*

3.1.3. Soit X un espace topologique, homotope à un complexe simplicial fini. Sullivan [**Sul77**] définit la DGA des formes PL sur X, $\Omega_{PL}(X, \mathbb{Q})$, et montre que l'on a un isomorphisme de DGA entre $H^\bullet\Omega_{PL}(X, \mathbb{Q})$ et $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$.

DEFINITION 3.5. *Un tel espace X est dit formel (respectivement, pour $k \geq 1$, k-formel) si $\Omega_{PL}(X, \mathbb{Q})$ est une DGA formelle (respectivement, k-formelle).*

3.1.4. Exemples. Les variétés kählériennes compactes sont formelles [**DGMS75**]. Les complémentaires d'arrangements d'hyperplans sont formels [**Bri73**].
Si une variété quasi-projective lisse X est telle que la filtration par le poids de Deligne (voir [**Del71**]) vérifie $W_1H^1(X) = 0$, alors X est 1-formelle ([**Mor78**], ainsi que [**DPS09**], Example 2.6).

3.2. Suite spectrale de Gysin

On exhibe ici un résultat de J. Morgan, qui fait intervenir une DGA particulière, premier terme de la suite spectrale de Gysin, ainsi appelée car les morphismes de ce premier terme sont les morphismes de Gysin de l'inclusion d'un diviseur dans une variété. Cela permettra de fixer le cadre dans lequel on se situe pour effectuer, à titre d'exemple, un calcul "à la main", permettant de montrer un propriété de formalité. On obtient ainsi un résultat où le quasi-isomorphisme est explicite ; ce résultat est néanmoins une conséquence d'un théorème de A. Macinic [**Mac08**].

3.2.1. Soit V une variété complexe compacte de dimension n, et D un diviseur à croisement normaux. On pose $X = V \setminus D$.
Notons $D_1, \ldots, D_r$ les composantes irréductibles de D. Si K est une partie de $\{1, \ldots, r\}$, on note

$$D_K = \bigcap_{i \in K} D_i.$$

Puis, si $1 \leq k \leq r$, on note $D^{(k)}$ la réunion disjointe, sur toutes les parties K de $\{1, \ldots, r\}$ de cardinal k, de D_K. On pose $D^{(0)} = V$. La filtration par le poids sur $\Omega^\bullet_V(logD)$ (voir [**Del71**]) induit la suite spectrale suivante ([**Voi04**], Corollaire 8.33), que l'on appellera suite spectrale de Gysin :

$$E_1^{-p,q} \simeq H^{-2p+q}(D^{(p)}, \mathbb{Q}) \Longrightarrow H^{-p+q}(X, \mathbb{Q}). \tag{3.2.1}$$

Cette suite spectrale dégénère au niveau E_2, et donc $E_2 \simeq H^\bullet(X, \mathbb{Q})$.

Soit $K \neq \emptyset$ une partie de $\{1, \ldots, r\}$, de cardinal k. Notons les éléments de K, $K_1 < \cdots < K_k$. Pour $j \in \{1, \ldots, k\}$, on note i_j l'injection de D_K dans $D_{K \setminus \{K_j\}}$. L'injection i_j induit en homologie, pour tout l

$$i_{j*} : H_{2n-2k-l}(D_K) \longrightarrow H_{2n-2k-l}(D_{K \setminus \{K_j\}}),$$

donc par dualité sur la cohomologie

$$i_j{}^* : H^{2n-2k-l}(D_{K \setminus \{K_j\}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{2n-2k-l}(D_K, \mathbb{Q}).$$

On passe à la transposée :

$${}^t(i_j{}^*) : H^{2n-2k-l}(D_K, \mathbb{Q})^* \longrightarrow H^{2n-2k-l}(D_{K \setminus \{K_j\}}, \mathbb{Q})^*.$$

Par dualité de Poincaré sur les variétés compactes D_K et $D_{K \setminus \{K_j\}}$ de dimensions respectives $n-k$ et $n-k+1$, on a

$$H^{2n-2k-l}(D_K, \mathbb{Q})^* \simeq H^l(D_K, \mathbb{Q}) \text{ et } H^{2n-2k-l}(D_{K \setminus \{K_j\}}, \mathbb{Q})^* \simeq H^{l+2}(D_{K \setminus \{K_j\}}, \mathbb{Q}).$$

Finalement, par compositions, on obtient pour chaque l un morphisme

$$\phi_j : H^l(D_K, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{l+2}(D_{K \setminus \{K_j\}}, \mathbb{Q}),$$

qui est le morphisme de Gysin associé à l'inclusion i_j.
En suivant pas à pas cette définition, on obtient la description suivante : si $\omega \in H^l(D_K, \mathbb{Q})$, alors $\phi_j(\omega)$ est l'élément de $H^{2n-2k-l}(D_{K \setminus \{K_j\}}, \mathbb{Q})^*$ donné par

$$\eta \longmapsto \int_{D_K} \omega \wedge \eta_{|D_K}. \tag{3.2.2}$$

Ces morphismes de Gysin permettent de construire la différentielle du complexe E_1 de la façon suivante : si $a \in H^p(D_K)$, alors la différentielle de a est donnée par

$$d(a) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \phi_j(a).$$

Le complexe E_1 est en fait une DGA. La structure d'algèbre est décrite ainsi ([**FM94**], section 6) : le produit d'un élément a de $H^p(D_K)$ et d'un élément a' de $H^{p'}(D_{K'})$, avec $card(K) = k$ et $card(K') = k'$, est 0 si K et K' ne sont pas disjoints, et ε fois le produit cup des restrictions de a et a' à $D_K \cap D_{K'}$ sinon, avec

$$\varepsilon = (-1)^{kp' + card\{(s,s') \in K \times K',\, s > s'\}}.$$

J. Morgan montre (Theorem 10.1 de [**Mor78**]) que le modèle minimal de cette DGA E_1 est isomorphe au modèle minimal de l'espace X. Il propose aussi le corollaire suivant ([**Mor78**], Corollary 10.5) :

COROLLAIRE 3.3 (Morgan). *On suppose que V est projective et que D est une section hyperplane lisse. Alors il existe un quasi-isomorphisme (de DGA) entre le terme E_1 et le terme $E_2 \simeq H^\bullet(X, \mathbb{Q})$ de la suite spectrale de Gysin. Par conséquent, X est formelle.*

Ceci est un corollaire du théorème pour la partie affirmant que X est formelle. Le quasi-isomorphisme est explicité par Morgan ; c'est une projection définie à l'aide des théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes.

3.2.2. J'ai tenté de voir dans quel mesure l'on pouvait continuer à construire ce genre de quasi-isomorphismes explicites à partir du terme E_1 de la suite spectrale (3.2.1), quitte à se placer en basse dimension. J'obtiens le résultat suivant, qui est toutefois une conséquence d'un résultat de A. Macinic, comme on le verra juste après.

PROPOSITION 3.4. *Soit S une surface algébrique complexe compacte lisse, telle que $H^1(S, \mathbb{Q}) = 0$. Soit D un diviseur à croisements normaux ayant deux composantes irréductibles D_1 et D_2. On suppose que D est connexe. Alors la DGA E_1 est quasi-isomorphe à $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$.*

Remarquons d'abord que si S est une surface, et $D = D_1 \cup \cdots \cup D_r$ un diviseur à croisements normaux, le terme E_1 de la suite spectrale de Gysin se réduit à

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{1 \le i < j \le r} H^0(D_i \cap D_j) & \to & \bigoplus_{i=1}^r H^2(D_i) & \to & H^4(S) \\
0 & \to & \bigoplus_{i=1}^r H^1(D_i) & \to & H^3(S) \\
0 & \to & \bigoplus_{i=1}^r H^0(D_i) & \to & H^2(S) \\
0 & \to & 0 & \to & H^1(S) \\
0 & \to & 0 & \to & H^0(S)
\end{array},$$

où la cohomologie est prise à coefficients rationnels. On démontre deux lemmes.

LEMME 3.5. *Soit S une surface algébrique complexe. Soit D un diviseur connexe à croisements normaux, dont on note D_1, …, D_r les composantes. On a $E_2^{-1,4} = 0$.*

Démonstration. Soient $i < j$ dans $\{1, \ldots, r\}$. On commence par décrire le morphisme de Gysin $\phi : H^0(D_i \cap D_j) \to H^2(D_i)$. Comme $D_i \cap D_j$ est de dimension zéro, c'est un ensemble fini de points $\{v_1, \ldots, v_k\}$. De ce point de vue, on a $H^0(D_1 \cap D_2) \simeq \mathbb{Q}^k$, et si $\eta \in H^0(D_i)$, la restriction de η à $D_i \cap D_j$ est juste le vecteur

$$\eta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^k,$$

où η représente ici la valeur de la constante rationnelle qu'est η sur D_i. Étant donné

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_k \end{pmatrix} \in H^0(D_i \cap D_j),$$

l'accouplement naturel sur $D_1 \cap D_2$ entre ω et la restriction de η est juste

$$\int_{D_i \cap D_j} \omega \cdot \eta = (\omega_1 \ \ldots \ \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} \eta \\ \vdots \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Donc, avec la relation (3.2.2), il résulte que la restriction de la différentielle

$$H^0(D_i \cap D_j) \longrightarrow H^2(D_i) \oplus H^2(D_j)$$

envoie un élément ω sur le couple de formes

$$(\eta_i \longmapsto -{}^t\omega \cdot \eta_{i|D_i \cap D_j}, \eta_j \longmapsto {}^t\omega \cdot \eta_{j|D_1 \cap D_2}).$$

Mais D_i et D_j étant des courbes irréductibles, les η_i et η_j qui apparaissent ici ne sont que des constantes rationnelles. Ainsi, à isomorphisme évident près, le couple précédent, image de ω, n'est que

$$(-\sigma(\omega), \sigma(\omega)),$$

où la forme σ associe à un vecteur la somme de ses composantes.
Pour tout $i < j$, notons 1_{ij} l'élément de $H^0(D_i \cap D_j)$ dont toutes les composantes valent 1. Comme D est connexe, il existe $r-1$ couples (i_1, j_1), ..., (i_{r-1}, j_{r-1}) tels que pour chaque k, $D_{i_k} \cap D_{j_k} \neq \emptyset$, et tels que tous les indices soient atteints. Alors $1_{i_1,j_1}$, $1_{i_2,j_2}$, ..., $1_{i_{r-1},j_{r-1}}$ sont $r-1$ formes dont les images par la différentielle sont linéairement indépendantes (leurs composantes sont échelonnées). Ainsi, la différentielle

$$E_1^{-2,4} \longrightarrow E_1^{-1,4}$$

est de rang au moins $r-1$.
Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, le morphisme de Gysin $H^2(D_i) \to H^4(S)$ est

$$\omega \longmapsto \left(\eta \in H^0(S) \longmapsto \int_{D_i} \omega \wedge \eta_{|D_i} = \eta \cdot \int_{D_i} \omega \right).$$

Donc il suffit de choisir une forme volume sur l'une des composantes du diviseur D pour voir que le rang de la différentielle $E_1^{-1,4} \to E_1^{0,4}$ est au moins 1. Comme $dim \bigoplus_{i=1}^r H^2(D_i) = r$, on peut conclure que $E_2^{-1,4} = 0$. □

LEMME 3.6. *Soit S une surface algébrique complexe. Soit D un diviseur à croisements normaux ayant deux composantes irréductibles. Notons ici $\cup$ le produit $E_1^{-1,2} \otimes E_1^{-1,2} \to E_1^{-2,4}$, et d la différentielle $E_1^{-2,4} \to E_1^{-1,4}$. Alors*

$$Im(\cup) \cap Ker(d) = \{0\}.$$

Remarque. Ce lemme est faux en général pour un diviseur ayant plus de deux composantes irréducibles.

DÉMONSTRATION. On reprend partiellement les notations de la démonstration du lemme précédent. Soient $\Omega = (\omega_1, \omega_2), \Omega' = (\omega'_1, \omega'_2) \in E_1^{-1,2}$. Le produit $\Omega \cup \Omega'$ est donné par

$$(\omega_1, \omega_2) \cup (\omega'_1, \omega'_2) = \omega_{1|D_1 \cap D_2} \cdot \omega'_{2|D_1 \cap D_2} - \omega_{2|D_1 \cap D_2} \cdot \omega'_{1|D_1 \cap D_2},$$

où $\cdot$ désigne le produit composante par composante. Supposons que $d(\Omega \cup \Omega') = 0$, et montrons que $\Omega \cup \Omega' = 0$.
On a, si $\omega_{12} \in E_1^{-2,4}$, $d(\omega_{12}) = (\sigma(\omega_{12}), -\sigma(\omega_{12}))$. Ici, $\Omega \cup \Omega'$ est un vecteur dont toutes les composantes sont égales, donc $\Omega \cup \Omega'$ est nul dès que $\sigma(\Omega \cup \Omega')$ est nul, ce qu'on voulait montrer. □

On démontre maintenant la Proposition 3.4.

DÉMONSTRATION. On va définir une projection $\pi : E_1 \to E_2$, en la précisant sur chaque terme. Il faudra ensuite vérifier que c'est un morphisme de DGA, et que cela induit un isomorphisme en cohomologie.
Commençons par remarquer que par hypothèse $H^1(S) = 0$, et que cela implique par dualité de Poincaré que $H^3(S) = 0$ également.
Pour $q \in \{0, \ldots, 4\}$, on a $E_2^{0,q} = E_1^{0,q}/Imd$, donc pour ces indices, π est définie comme étant la projection canonique. On a $E_2^{p,q} = Ker(d : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q})$ pour $(p,q) \in \{(-1,2), (-1,3)\}$; pour un tel couple (p,q), on choisit un supplémentaire (quelconque) $I^{p,q}$ de $E_2^{p,q}$ dans $E_1^{p,q}$, et l'on définit π comme la projection sur $E_2^{p,q}$ parallèlement à $I^{p,q}$.
D'après le lemme 3.6, on peut choisir un supplémentaire $I^{-2,4}$ de $E_2^{-2,4} = Ker(d)$ dans $E_1^{-2,4}$ qui contienne l'image du produit $E_1^{-1,2} \otimes E_1^{-1,2} \to E_1^{-2,4}$. Alors π est la projection sur $E_2^{-2,4}$ parallèlement à $I^{-2,4}$.
Enfin, comme $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, le lemme 3.5 montre que $E_2^{-1,4} = 0$, donc π envoie $E_1^{-1,4}$ sur 0.

Vérifions que π commute avec les différentielles. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} E_1^{pq} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & E_1^{p+1,q} \arrow[d, "\pi"] \\ E_2^{pq} \arrow[r, "0"] & E_2^{p+1,q} \end{tikzcd}$$

Si l'on a $E_1^{p,q} = 0$ ou $\pi(E_1^{p+1,q}) = 0$, alors le diagramme commute. Les cas restants sont $(p,q) = (-1,2)$ et $(p,q) = (-1,4)$. Dans ces cas, $\pi : E_1^{p+1,q} \to E_2^{p+1,q}$ est la projection naturelle (parllèlement à l'image de d), donc $\pi \circ d = 0$, et le diagramme commute.

Vérifions la compatibilité avec le produit. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\pi\otimes\pi"'] & C \arrow[d, "\pi"] \\ A' \otimes B' \arrow[r, "\cup"] & C' \end{tikzcd} \tag{3.2.3}$$

où A, B, et C sont des espaces qui interviennent au niveau E_1, et A', B', C' au niveau E_2.
Si A et B font partie des espaces $E_1^{0,q}$, alors, puisque pour toutes formes ω sur D_i ($i \in \{1,2\}$), et η sur S, si ϕ désigne le morphisme de Gysin correspondant, on a $\phi(\omega) \wedge \eta = \phi(\omega \wedge \eta_{|D_i})$, le diagramme (3.2.3) est commutatif.
Si A (ou B) est $E_1^{0,0} = H^0(S)$, alors le produit est juste

$$\begin{array}{rcl} H^0(S) \otimes B & \longrightarrow & B \\ \omega \otimes \eta & \longmapsto & \omega \cdot \eta \end{array}.$$

Cette application passe à n'importe quel quotient de B (et $E_2^{0,0} = E_1^{0,0}$).
Si $A = E_1^{-2,4} = H^0(D_1 \cap D_2)$ et B est de la forme $E_1^{-1,q}$ alors le produit sur $A \otimes B$ est nul.
Comme $H^1(S) = H^3(S) = 0$, si A, B ou C est l'un de ces espaces, le diagramme 3.2.3 est commutatif.
Les cas restants sont

$$\begin{array}{l} H^2(S) \otimes (H^0(D_1) \oplus H^0(D_2)) \longrightarrow H^2(D_1) \oplus H^2(D_2) \\ (H^0(D_1) \oplus H^0(D_2)) \otimes (H^0(D_1) \oplus H^0(D_2)) \longrightarrow H^0(D_1 \cap D_2) \end{array}.$$

Pour le premier, on a vu que $E_2^{-1,4} = 0$, donc la compatibilité est assurée. Pour le second, on a fait en sorte que $\pi \circ \cup = 0$. Il faut vérifier que la composée du bas dans (3.2.3) est également nulle. L'espace $E_2^{-1,2}$ est égal à $Kerd$, ainsi que $E_2^{-2,4}$, donc le produit induit est simplement la restriction du produit sur E_1 : on a obligatoirement $E_2^{-1,2} \cup E_2^{-1,2} \subset Kerd$. Mais d'après le lemme 3.6, l'image de $\cup$ n'intersecte $Kerd$ qu'en 0, donc le produit induit est nul.

Enfin, il est immédiat de vérifier que π induit un isomorphisme en cohomologie. $\square$

3.2.3. Avant d'évoquer le résultat de A. Macinic, donnons quelques exemples.

A) Soit $V \subset \mathbb{P}^3$ une surface ayant un unique point singulier $p \in V$. Soit $\pi : S \to V$ la bonne résolution minimale de V, et soit $D = \pi^{-1}(p)$ le diviseur exceptionnel.
On a $b_1(S) = b_3(S) = b_3(V)$ d'après [**Dim92**], p.218. Et d'autre part, dans la plupart des cas, l'on a $b_3(V) = 0$, d'après [**Dim92**], Theorem 4.17 p.214.
Remarquons que $X = S \setminus D = V \setminus \{p\}$ n'est pas affine. En effet, (V, p) est une singularité normale, donc toute fonction régulière globale $f : V \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction régulière $\tilde{f} : V \to \mathbb{C}$, et donc $\tilde{f}$, et f, sont des fonctions constantes. L'anneau de X est donc $A[X] \simeq \mathbb{C}$, alors que X est de dimension 2. Ainsi X ne peut être affine.

Donnons des exemples d'espaces non formels quand les hypothèses de la proposition ne sont pas vérifiées.

B) Considérons l'exemple donné dans [**DPS09**], Example 7.5. Le diviseur a 2 composantes, mais n'est pas connexe, et $b_1(S) > 0$. La variété $X = S \setminus D$ n'est pas formelle. Voici la construction : soit C_g une courbe projective lisse de genre $g \geq 1$. Soit $S_g = \mathbb{P}(L_g \oplus \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est le fibré en droites trivial sur C_g, et L_g le fibré en droites $\mathcal{O}(a)$ associé à un point a de C_g. Alors la projection $p : S_g \to C_g$ est une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{P}^1$. Il suffit d'écrire la suite spectrale de Leray de p pour voir que
$$H^1(S_g, \mathbb{C}) = H^1(C_g, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{2g}.$$
En effet, les fibres du faisceau $R^1p_*\mathbb{C}$ sont les $H^1(p^{-1}(x), \mathbb{C})$, pour $x \in C_g$, et sont nulles car $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe. On pose $D = S_0 \cup S_\infty$, avec $S_0 = \mathbb{P}(0 \oplus \mathcal{O})$ et $S_\infty = \mathbb{P}(L_g \oplus 0)$. Les variétés de résonance et les varités caractéristiques de X sont calculées dans [**DPS09**], et, à l'aide du Théorème 3.9 que l'on verra dans la section suivante, on voit que X n'est pas 1-formelle.

C) Soit V la surface de $\mathbb{P}^3$ définie par
$$\{(x : y : z : t) \in \mathbb{P}^3,\ x^d + y^d + z^d = 0\},$$
où $d \in \mathbb{N}^*$ est un multiple pair de 3. Soit $C \subset V$ la courbe définie par l'équation $(xt^2 + y^3 + z^3 = 0)$. Soit $\pi : S = \hat{V} \to V$ la résolution de la singularité en $a = (0 : 0 : 0 : 1)$ (par un seul éclatement). Soit
$$D = \pi^{-1}(a) \cup \tilde{C} \cup \tilde{V}_\infty,$$
où $V_\infty = V \cap (t = 0)$ est la partie de V située à l'infini, et où $\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{a\})}$ et $\tilde{V}_\infty = \pi^{-1}(V_\infty)$. Les courbes $\pi^{-1}(a)$, $\tilde{C}$ et $\tilde{V}_\infty$ sont lisses et à croisements normaux. Le diviseur D est connexe, et $b_1(S) > 0$. La courbe C vérifie les hypothèses de la Proposition 7.2 de [**DPS08b**], et donc $X = S \setminus D$ n'est pas 1-formel.

3.2.4. A. Manicic a montré ([**Mac08**], Proposition 3.6)

PROPOSITION 3.7 (Macinic). *Un espace k-formel M avec $H^{\geq k+2}(M) = 0$ est formel.*

On peut en déduire le corollaire suivant, qui généralise la Proposition 3.4.

COROLLAIRE 3.8. *Si $X = S \setminus D$, avec S une surface algébrique compacte telle que $H^1(X) = 0$, et $D = D_1 \cup \cdots \cup D_r$ un diviseur connexe à croisements normaux, alors X est formel.*

DÉMONSTRATION. On a une suite exacte longue
$$0 = H^0_c(X) \to H^0(S) \to H^0(D) \to H^1_c(X) \to H^1(S) \to H^1(D) \to \dots$$
$$\dots \to H^2(S) \to H^2(D) \to H^3_c(X) \to H^3(S) \to H^3(D) = 0.$$
Ici, $H^2(D) = H^2(D_1) \oplus \cdots \oplus H^2(D_r)$ est muni d'une structure de Hode pure de type $(1,1)$, par application du Theorem C24 de [**Dim92**]. Comme $H^3(S) = 0$, $H^3_c(X)$ est le

quotient de $H^2(D)$ par une sous structure de Hodge, donc sa structure est également pure de type $(1,1)$, et par dualité, il en est de même de $H^1(X)$. En particulier, $W_1H^1(X) = 0$, et comme indiqué dans la section 3.1.4, cela implique que X est 1-formel.
Comme D est connexe, la restriction $H^0(S) \to H^0(D)$ est surjective, donc, puisque $H^1(S) = 0$, la suite exacte longue implique que $H^1_c(X) = 0$, et par dualité, $H^3(X) = 0$ (remarquons que ceci peut également se vérifier de façon élémentaire avec le lemme 3.5). La Proposition 3.7 s'applique alors et fournit le résultat. □

3.3. Lien avec les variétés caractéristiques

A. Dimca, S. Papadima, et A. Suciu ont montré le théorème suivant ([**DPS09**], Theorem A), où sous l'hypothèse de 1-formalité, on a un lien très fort entre variétés de résonance et variétés caractéristiques.

Théorème 3.9 (Dimca, Papadima, Suciu). *Soit X une variété quasi-projective lisse. Supposons que X soit 1-formelle. Alors exp : $H^1(X,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathbb{C}^*)$ induit pour tout $k \in \mathbb{N}$ un isomorphisme de germes :*

$$exp : (R_k(X), 0) \longrightarrow (V_k(X), 1). \tag{3.3.1}$$

Ainsi, si X est 1-formelle, $R_k(X)$ s'identifie au cône tangent à l'origine de $V_k(X)$, que nous noterons $TC_1V_k(X)$.
Le résultat était connu dans le cas des complémentaires d'arrangements d'hyperplans : D. Cohen et A. Suciu ont montré dans [**CS99**] la formule du cône tangent (3.3.1) dans cette situation.

Remarque. On a toujours l'inclusion $TC_1V_k(X) \subset R_k(X)$ (voir [**Lib02**]), et l'on dispose d'exemples où il n'y a pas égalité quand on omet l'hypothèse de 1-formalité : voir [**Dim08**], section 5, et pour un autre exemple, le chapitre suivant. Ainsi la conjecture de Libgober [**Lib02**] selon laquelle il y aurait égalité pour toute variété X quasi projective lisse est fausse.

Chapitre 4

Exemple de fibre de Milnor non formelle

Résumé. Après avoir rappelé quelques résultats classiques sur la fibre de Milnor globale associée à un polynôme homogène, on démontre une propriété de relèvement des morphismes admissibles associés aux composantes locales ou globales de la première variété caractéristique d'un complémentaire d'arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On présente ensuite l'exemple sur lequel porte le résultat principal de cette thèse : il s'agit d'un arrangement de droites dont la fibre de Milnor associée F n'est pas 1-formelle, car la première variété de résonance de F ne coïncide pas avec le cône tangent de la première variété caractéristique. Ceci est démontré dans la dernière section.

4.1. Fibre de Milnor associée à un polynôme homogène

4.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ un polynôme homogène sans facteur carré de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Notons $F = f^{-1}(1)$ la fibre de Milnor globale.

Proposition 4.1. *La restriction de la fonction polynomiale f donnée par*

$$f : \mathbb{C}^{n+1} \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

est une fibration localement triviale. Il existe donc une action de monodromie géométrique $h : F \to F$, donnée par

$$h(a_0, \dots, a_n) = (\zeta a_0, \dots, \zeta a_n),$$

où ζ est une racine primitive $d^{\text{ème}}$ de l'unité, et en particulier h vérifie

$$h^d = Id.$$

Démonstration. Notons

$$U_1 = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+ = \{\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*,\ \rho > 0 \text{ et } \theta \in] - \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\},$$

et

$$U_2 = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_- = \{\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*,\ \rho > 0 \text{ et } \theta \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\}.$$

On choisit une détermination du logarithme sur U_1 en posant

$$\forall \rho > 0,\, \forall \theta \in]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \ln_1(\rho e^{i\theta}) = \ln \rho + i\theta,$$

et sur U_2 en posant

$$\forall \rho > 0,\, \forall \theta \in]-\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[,\ \ln_2(\rho e^{i\theta}) = \ln \rho + i\theta.$$

Grâce à cela, on explicite des homéomorphismes

$$\phi_1 : f^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1 \times F$$

et

$$\phi_2 : f^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times F$$

qui montreront que f est une fibration localement triviale au dessus de $\mathbb{C}^*$. On pose, pour $y \in f^{-1}(U_1)$,

$$\phi_1(y) = (f(y), e^{-\frac{1}{d}\ln_1 f(y)} y),$$

et pour $z \in f^{-1}(U_2)$,

$$\phi_2(z) = (f(z), e^{-\frac{1}{d}\ln_2 f(z)} z).$$

On vérifie immédiatement que ces applications sont bien définies, et sont des homéomorphismes.

Soit $h : F \to F$ l'action de monodromie. Dans U_1, ϕ_1 induit un homéomorphisme $f^{-1}(1) \to f^{-1}(-1)$ donné par $x \mapsto ax$, avec $a = e^{\frac{1}{d}\ln_1(-1)}$, et $\ln_1(-1) = -i\pi$. Dans U_2, ϕ_2 induit un homéomorphisme $f^{-1}(-1) \to f^{-1}(1)$ donné par $x \mapsto bx$, avec $b = e^{-\frac{1}{d}\ln_2(-1)}$, et $\ln_2(-1) = i\pi$. Donc $h : F \to F$ est donnée par $x \mapsto bax$, et

$$\forall x \in F,\ h(x) = e^{-\frac{2i\pi}{d}} x.$$

En particulier, $h^d = Id$. □

Notons $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, et posons

$$M = \mathbb{P}^n \setminus f^{-1}(0).$$

PROPOSITION 4.2. *La projection canonique* $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ *induit un morphisme*

$$\pi : F \longrightarrow M,$$

qui est un revêtement de degré d.

DÉMONSTRATION. Si $x \in F$, alors $f(x) = 1 \neq 0$, donc $\pi(x) \in M$. Soit $y \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus f^{-1}(0)$. Il existe un voisinage V de y dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus f^{-1}(0)$ tel qu'il existe des déterminations du logarithme sur $f(V) \subset \mathbb{C}^*$. Suivant le choix de la détermination, il y a d fonctions racine $d^{\text{ième}}$ sur $f(V)$. Notons $r_1, \ldots, r_d$ ces d fonctions. Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, notons s_i l'application

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & \frac{1}{r_i(f(y))} y \end{array}.$$

Remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $s_i(y) = s_i(\lambda y)$ (on peut supposer que V est le cône d'un ouvert de M pour que ceci ait un sens). Ainsi s_i passe au quotient, et fournit une section locale de π. Les applications induites par $s_1, \ldots, s_d$ sont d sections locales, point par point distinctes, de π, ce qui montre que les fibres de π sont toutes de cardinal fini d, et que π est un homéomorphisme local. Donc π est un revêtement de degré d. $\square$

Ce revêtement $\pi : F \to M$ s'identifie au revêtement $F \to F/<h>$ de passage au quotient sous l'action de $<h> \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Cette action étant proprement discontinue, le groupe des isomorphismes du revêtement $Deck(F, M)$ est isomorphe à $<h>$, et $\pi_1(M, x_0)/\pi_\sharp\pi_1(F, \hat{x_0})$ (où l'on a fixé des points base, $x_0 \in M$, et $\hat{x_0} \in F$ tel que $\pi(\hat{x_0}) = x_0$) s'injecte dans $Deck(F, M)$. Cette injection serait un isomorphisme si l'on savait F connexe (on peut se référer à [**Hat02**], Proposition 1.40). C'est en fait le cas, car f est supposé sans facteur carré, et cela résulte de la proposition suivante. Notons

$$R : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow \pi_1(M, x_0)/\pi_\sharp\pi_1(F, \hat{x_0}) \hookrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

la composée du morphisme de passage au quotient et de l'injection.
Supposons que $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ soit la décomposition de f en facteurs irréductibles. Les exposants valent 1 car f est sans facteur carré. Le groupe $\pi_1(M, x_0)$ est engendré par des lacets élémentaires $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ autour, respectivement des hypersurfaces $(f_1 = 0)$, $\ldots$, $(f_k = 0)$ (voir [**Dim92**], Chapter 4).

Proposition 4.3. *On a pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $R(\gamma_i) = 1 \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Les arguments sont inspirés de ceux de la démonstration de la Proposition 1.1, dans [**CS95**]. Notons $\hat{M} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus (f = 0)$, et $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & F/\mathbb{Z}_d \arrow[d, "\simeq"] \\ \hat{M} \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

que l'on complète en ajoutant les fibres

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_d \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & F/\mathbb{Z}_d \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[r, hook] & \hat{M} \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd},$$

où $\mathbb{Z}_d$ est le produit fibré de $\mathbb{C}^*$ et F par M, autrement dit l'intersection de $\mathbb{C}^*$ et F dans M. La composée de $\mathbb{C}^* \hookrightarrow \hat{M}$ par f se factorise donc via une projection $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_d$, en un isomorphisme, selon le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_d \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & F/\mathbb{Z}_d \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[r, hook] \arrow[d] & \hat{M} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & M \\ \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_d \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{C}^* & \end{tikzcd}.$$

On réécrit ce diagramme de façon plus compacte :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_d \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & F \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\pi"] & \\
\mathbb{C}^* \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\mathbb{Z}_d"'] & \hat{M} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & M \\
& \mathbb{C}^* &
\end{tikzcd}$$

On a choisi un point base x_0 dans M, et un relevé $\hat{x_0}$ dans $F \subset \hat{M}$. On choisit des lacets élémentaires $\hat{\gamma_1}, \ldots, \hat{\gamma_k}$ autour des composantes de $(f = 0)$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$, qui engendrent $\pi_1(\hat{M}, \hat{x_0})$, et dont les images par π sont $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. On veut connaître l'action de γ_i sur la fibre de $F \to M$, $\mathbb{Z}_d$. Le lacet $\hat{\gamma_i}$ relève γ_i, mais n'est pas forcément inclus dans F. Soit $\delta_i = f(\hat{\gamma_i})$. C'est un lacet de $\mathbb{C}^*$, qui se relève via la revêtement $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ du diagramme en un chemin $\hat{\delta_i}$ d'origine $\hat{x_0}$ et d'extrémité un point $\hat{x_1}$ de $\mathbb{C}^* \subset \hat{M}$. La composée $\hat{\delta_i}^{-1} \cdot \hat{\gamma_i}$ est un chemin dans $\hat{M}$ dont l'image par f est un lacet homotope au lacet constant. Donc $\hat{\delta_i}^{-1} \cdot \hat{\gamma_i}$ est homotope à un chemin $\hat{\gamma}$ inclus dans F. Comme $\hat{\delta_i}$ est inclus dans la fibre de $\hat{M} \to M$, le chemin $\hat{\gamma}$ est homotope à un relevé de γ_i, et donc l'action de γ_i sur la fibre $\mathbb{Z}_d$ est égale à celle de δ_i. On a ainsi montré que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\hat{M}, \hat{x_0}) \arrow[r, "\pi_\sharp"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & \pi_1(M, x_0) \arrow[d, "R"] \\
\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \arrow[r] & \mathbb{Z}_d
\end{tikzcd}$$

Enfin, on peut voir que $f_\sharp([\hat{\gamma_i}]) = 1$ ([**Dim92**], p.77), ce qui entraîne $R([\gamma_i]) = 1$. $\square$

4.1.2. L'action de monodromie h induit en cohomologie $h^* : H^\bullet(F, \mathbb{Q}) \to H^\bullet(F, \mathbb{Q})$. Comme $h^d = Id$ (Proposition 4.1), on a $(h^*)^d = Id$, et la décomposition suivante :

$$H^\bullet(F, \mathbb{Q}) = Ker(h^* - Id) \oplus Ker((h^*)^{d-1} + \cdots + Id).$$

On note

$$H^\bullet(F, \mathbb{Q})_1 = Ker(h^* - Id),$$

et

$$H^\bullet(F, \mathbb{Q})_{\neq 1} = Ker((h^*)^{d-1} + \cdots + Id).$$

Pour la Proposition suivante, on se référera au Theorem 1.6 de [**CS95**].

PROPOSITION 4.4. *On a pour tout $m \geq 0$*

$$H^m(F, \mathbb{Q})_1 = \pi^* H^m(M, \mathbb{Q}).$$

La fibre de Milnor F est une variété algébrique, donc $H^{n-1}(F, \mathbb{Q})$ (entre autres) a, d'après P. Deligne [**Del71**], une structure de Hodge mixte. Le théorème suivant est extrait de [**DP09**].

Théorème 4.5 (Dimca, Papadima). *Supposons que l'hypersurface définie par* $(f = 0)$ *n'ait que des singularités isolées. Alors on peut munir* $H^{n-1}(F, \mathbb{Q})_1$ *et* $H^{n-1}(F, \mathbb{Q})_{\neq 1}$ *de structures de Hodge pures de poids respectifs* n *et* $n-1$*, de sorte que*

$$H^{n-1}(F, \mathbb{Q}) = H^{n-1}(F, \mathbb{Q})_1 \oplus H^{n-1}(F, \mathbb{Q})_{\neq 1}$$

soit une égalité dans la catégorie des structures de Hodge mixtes.

Remarquons tout de suite que ce théorème s'applique si $n = 2$ et f définit un arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2$. Il donne alors des informations sur la structure de Hodge de $H^1(F, \mathbb{Q})$. C'est ce dont on se servira dans la section 4.4.

4.2. Cas des arrangements de droites

Soit $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_d\}$ un arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2$. Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, soit $f_i \in \mathbb{C}[x, y, z]$ une forme linéaire telle que $H_i = (f_i = 0)$. Posons $f = f_1 \ldots f_d$. Soit $M = \mathbb{P}^2 \setminus (f = 0)$ le complémentaire de l'arrangement et $F = f^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^3$ la fibre de Milnor globale. En utilisant les résulats évoqués dans le chapitre 2, je montre comment des composantes de la variété caractéristique $V_1(F)$ de F peuvent être déduites de composantes locales ou globales (voir 2.1, 2.2) de la variété caractéristique $V_1(M)$ de M. Pour ce faire, on relève les morphismes admissibles associés aux composantes concernées de $V_1(M)$ en des morphismes admissibles pour F.

4.2.1. Supposons que W soit une composante globale de la variété caractéristique $V_1(M)$. On a vu en 2.2 qu'il existe un pinceau $\phi : \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B} \to \mathbb{P}^1$, où $\mathcal{B}$ désigne le lieu d'indétermination de ϕ, qui soit admissible au sens d'Arapura, et dont certaines fibres induisent une partition de $\mathcal{A}$, avec multiplicités. Le pinceau ϕ induit un morphisme $\phi : M \to S_\phi = \mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$. On reprend à cet égard (notamment pour les multiplicités du multinet) les notations de (2.2.2), page 6.

Comme ϕ est admissible, sa fibre générique est connexe. Soit N_0 un fermé de Zariski de S_ϕ tel que pour $x \in S_\phi \setminus N_0$, $\phi^{-1}(x)$ soit connexe. Étant donné un tel x générique, on note F_ϕ la fibre générique associée.

Proposition 4.6. *Supposons que pour tout* i, $k_i = 1$*, et qu'il existe un point* p *dans le lieu d'indétermination* $\mathcal{B}$ *tel que la multiplicité de* C_j *en* p *soit* 1 *pour tout* j*. Alors il existe un morphisme non constant* $\tilde{\phi} : F \to \tilde{S}_\phi$*, à fibre générique connexe, tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{S}_\phi \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ M & \xrightarrow{\phi} & S_\phi \end{array}$$

Ici $\tilde{\pi}$ *est induite par la projection* $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$*, et* $\tilde{S}_\phi$ *est une fibre de Milnor d'un polynôme homogène de deux variables de degré* k*.*

DÉMONSTRATION. On pose, pour $j \geq 3$, $Q_j = \alpha_j Q_1 + \beta_j Q_2$, et

$$\tilde{S_\phi} = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2,\ uv \prod_{j=3}^{k} (\alpha_j u + \beta_j v) = 1\}.$$

Alors il est facile de voir que

$$\tilde{\phi} : (x,y,z) \longmapsto (Q_1(x,y,z), Q_2(x,y,z))$$

envoie F dans $\tilde{S_\phi}$, car, puisque pour tout i, $k_i = 1$, $Q_1 \cdots Q_k = f_1 \cdots f_d$. On obtient donc le diagramme désiré.
L'image de $\tilde{\phi}$ est un constructible de la courbe $\tilde{S_\phi}$, donc est le complémentaire dans $\tilde{S_\phi}$ d'un nombre fini de points, points dont nous notons N_1 l'ensemble des images par $\tilde{\pi}$. On pose $N = N_0 \cup N_1$. C'est une partie finie de S_ϕ. On, choisit un point y de $\tilde{S_\phi} \setminus \tilde{\pi}^{-1}(N)$, et l'on montre que la fibre $\tilde{\phi}^{-1}(y)$ est connexe. On pose $F_\phi = \phi^{-1}(\tilde{\pi}(y))$, et $\tilde{F_\phi} = \pi^{-1}(F_\phi)$.

Comme $F \to M$ est un revêtement de degré d (Proposition 4.2), $\tilde{F_\phi} \to F_\phi$ est un revêtement de degré d. On cherche le nombre de composantes connexes de $\tilde{F_\phi}$, donc on étudie l'action de $\pi_1(F_\phi, p_0)$, avec $p_0 \in F_\phi$, sur $\pi^{-1}(p_0)$. Cette action est donnée par la composition de $\pi_1(F_\phi) \to \pi_1(M)$ et R (notation de la section 4.1.1).
Soit p un point dans le lieu d'indétermination du pinceau ϕ tel que la multiplicité de C_j en p soit 1 pour tout j. Alors la clôture (dans $\mathbb{P}^2$) $\overline{F_\phi}$ est lisse en p. En effet, $\overline{F_\phi}$ est le lieu des zéros de $\alpha Q_1 + \beta Q_2$, pour certains α et β non nuls, donc il est suffisant qu'au moins l'une des deux courbes C_1 et C_2 soit lisse en p, et ici les hypothèses impliquent qu'elles le sont toutes les deux.
Soit β_p un petit lacet élémentaire dans F_ϕ autour de p. On a $C_1 \cap C_2 = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_k$, et avec les hypothèses de multiplicité en p, l'on peut dire que p est l'intersection de k droites de $\mathcal{A}$. Supposons que leurs indices soient $i_1, \ldots, i_k$. On a

$$[\beta_p] = [\gamma_{i_1}] + \cdots + [\gamma_{i_k}],$$

où $[\gamma]$ désigne la classe du lacet γ dans $H_1(M)$ (voir [**Dim04**], p.209). Donc $R(\beta_p) = k$ d'après la Proposition 4.3, et β_p agit via un élément d'ordre d/k, qui, par conséquent, induit k orbites sur la fibre $\pi^{-1}(p_0)$. Ainsi, l'action de $\pi_1(F_\phi)$ a au plus k orbites. Cela implique que $\tilde{F_\phi}$ a au plus k composantes connexes.

Soit $x \in S_\phi \setminus N_1$. La fibre $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ est un ensemble fini de cardinal exactement k, dont chaque élément est dans l'image de $\tilde{\phi}$, donc $\tilde{\phi}^{-1}\tilde{\pi}^{-1}(x)$ a au moins k composantes connexes.

Enfin, soit $y \in \tilde{S_\phi}$ un point générique comme précisé plus haut. Supposons que $\tilde{\phi}^{-1}(y)$ (qui n'est pas vide) ne soit pas connexe. Soit $x = \tilde{\pi}(y)$. La fibre $\tilde{\phi}^{-1}\tilde{\pi}^{-1}(x)$ a strictement plus de k composantes connexes. Mais

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{-1}\tilde{\pi}^{-1}(x) &= \pi^{-1}\phi^{-1}(x) \\ &= \pi^{-1}(F_\phi) \\ &= \tilde{F_\phi}, \end{aligned}$$

qui a au plus k composantes connexes. On obtient une contradiction, ce qui signifie que la fibre générique $\tilde{\phi}^{-1}(y)$ est connexe. $\square$

4.2.2. Il y a un résultat similaire pour les composantes locales (définies en 2.1). Supposons que W soit une composante locale de la variété caractéristique $V_1(M)$, associée à un point p de multiplicité $k \geq 3$. Soit $\phi : M \to \mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ l'application admissible associée. Posons $\tilde{\phi} = \pi \circ \phi$. Le diagramme est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{\phi}"] & \\
M \arrow[r, "\phi"] & S_\phi
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.7. *Supposons que l'arrangement $\mathcal{A}$ ne soit pas central (c'est à dire, toutes les droites ne sont pas concourantes). Alors la fibre générique de $\tilde{\phi} : F \to \mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ est connexe.*

Démonstration. Soit $i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $p \notin H_i$. Soit $a \in \mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$. Soit p' le point d'intersection de $\phi^{-1}(a)$ et H_i. Soit β un petit lacet élémentaire autour de p' dans $\phi^{-1}(a) \setminus \{p'\}$. Alors $R(\beta) = R(\gamma_i) = 1$. Donc ce β, comme élément de $\pi_1(\phi^{-1}(a))$ agit avec ordre d sur $\tilde{\phi}^{-1}(a)$, ainsi l'action de $\pi_1(\phi^{-1}(a))$ sur $\tilde{\phi}^{-1}(a)$ est transitive, et $\tilde{\phi}^{-1}(a)$ est connexe. $\square$

Remarque. Supposons l'arrangement central, et posons, pour $i \geq 3$, $f_i = \lambda_i f_1 + \mu_i f_2$. Soit $a = (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ avec $\alpha \neq 0$. Alors ϕ est le pinceau $(x : y : z) \mapsto (f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z))$, et $\tilde{\phi}^{-1}(a)$ est l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3,\ f_2(x, y, z) = \frac{\beta}{\alpha} f_1(x, y, z) \text{ et } f_1 f_2 \prod_i (\lambda_i f_1 + \mu_i f_2)(x, y, z) = 1\}.$$

Dans cette présentation, la seconde condition se réduit à

$$f_1^d(x, y, z) = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha} \prod_i (\lambda_i + \mu_i \frac{\beta}{\alpha})}.$$

Donc la fibre $\tilde{\phi}^{-1}(a)$ est la réunion de d droites parallèles dans $\mathbb{C}^3$, et n'est pas connexe.

4.3. Exemple

L'exemple qui est présenté ici est celui sur lequel portera le Théorème 4.12 démontré dans la section suivante.

4.3.1. Soit $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ le polynôme homogène de degré 9 défini par

$$f = (x^3 - y^3)(x^3 - z^3)(y^3 - z^3). \tag{4.3.1}$$

Le lieu des zéros de f est l'union de 9 droites, qui forment ce que l'on appelle un arrangement de Ceva $A(3, 3, 3)$. Les composantes passant par l'origine de la première variété caractéristique de $\mathbb{P}^2 \setminus (f = 0)$, et, plus généralement, celles associées à l'arrangement $A(r, r, 3)$, ont été déterminées par D. Cohen et A. Suciu ([**CS99**], Proposition 6.2), et indépendamment, pour $r = 3$, par A. Libgober ([**Lib01**], section 3.3, Example 3).

Appelons $\mathcal{A}$ l'arrangement composé des neuf droites de $(f = 0)$. Cet arrangement n'a pas de point double ordinaire, seulement des points triples, et il y a 12 points triples. On peut le vérifier directement sur l'équation : on a

$$\begin{aligned} df = \; & 3x^2(y^3 - z^3)(2x^3 - y^3 - z^3)dx \\ & +3y^2(z^3 - x^3)(2y^3 - x^3 - z^3)dy \\ & +3z^2(x^3 - y^3)(2z^3 - x^3 - y^3)dz, \end{aligned}$$

de sorte que, par exemple, dans la partie $(x^3 - y^3 = 0)$, les seuls points singuliers soient $(0 : 0 : 1)$ et tous les points $(1 : \theta^k : \theta^l)$, avec $k, l \in \{0, 1, 2\}$, et en notant $\theta = e^{2i\pi/3}$. En regardant de façon similaire les parties $(x^3 - z^3 = 0)$ et $(y^3 - z^3 = 0)$, on voit que les points singuliers de $(f = 0)$ sont tous ceux que l'on vient de mentionner, auxquels il faut ajouter $(0 : 1 : 0)$ et $(1 : 0 : 0)$. On vérifie aisément que chacun de ces points appartient à exactement trois droites de $\mathcal{A}$.

4.3.2. Soit f, comme dans la section précédente, défini par (4.3.1). On pose $M = \mathbb{P}^2 \setminus (f = 0)$, et $F = f^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^3$. L'objet de cette section est le calcul des dimensions des espaces propres de h^* dans $H^1(F, \mathbb{C})$.
Notons $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, et pour $k \in \mathbb{N}$, S_k l'espace des polynômes homogènes de degré k.

DEFINITION 4.1. *Soit Σ un sous-ensemble fini de $\mathbb{P}^n$. Considérons le système linéaire*

$$S_k(\Sigma) = \{h \in S_k,\ h_{|\Sigma} = 0\}.$$

La différence

$$def\, S_k(\Sigma) = \sharp\Sigma - codim S_k(\Sigma)$$

est appelée le défaut du système linéaire $S_k(\Sigma)$.

LEMME 4.8. *Supposons $\Sigma = \{a_1, \dots, a_p\}$. Considérons le morphisme d'évaluation*

$$\begin{array}{rccc} \epsilon : & S_k & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ & h & \longmapsto & (h(a_1), \dots, h(a_p)) \end{array}.$$

On a

$$def\, S_k(\Sigma) = dim(coker\epsilon).$$

DÉMONSTRATION. La dimension de $coker\epsilon$ est égale à $p - rg(\epsilon)$, puis $rg(\epsilon)$ est égale à $dim S_k - dim Ker(\epsilon)$, qui n'est autre que la codimension de $S_k(\Sigma)$, puisque $S_k(\Sigma) = Ker(\epsilon)$. □

Le théorème suivant est extrait de [**Dim92**], Chapter 6, Theorem 4.15.

THÉORÈME 4.9. *Soit $V \subset \mathbb{P}^2$ une courbe constituée de neuf droites, telle qu'à chaque point d'intersection, le nombre de droites passant par ce point soit au plus 5. Soit Σ l'ensemble des points d'intersection d'exactement trois droites de l'arrangement (i.e. l'ensemble des points triples). Alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme h^* de $H^1(F, \mathbb{C})$ est donné par*

$$\Delta_V(\lambda) = (\lambda - 1)^8(\lambda^2 + \lambda + 1)^{def\, S_3(\Sigma)}.$$

Un théorème plus général, ainsi que son application au cas particulier de l'arrangement $\mathcal{A}$ donné par $(f = 0)$ est énoncé dans [**BDS09**], Theorem 2, et Remark 3.2 (i).

Remarque. Le facteur $(\lambda - 1)^8$ était attendu étant donné ce que l'on a dit précédemment : on a vu que $H^1(F)_1 \simeq H^1(M)$ (Proposition 4.4), or d'après la section 2.2.1, la dimension de $H^1(M)$ est $9 - 1 = 8$.

On appelle Σ l'ensemble des points triples de l'arrangement $\mathcal{A}$, précisé dans la section 4.3.1, et $\epsilon : S_3 \to \mathbb{C}^{12}$ le morphisme d'évaluation associé.

LEMME 4.10. *Le morphisme ϵ est injectif.*

DÉMONSTRATION. Soit $P \in Ker(\epsilon)$. On a

$$P(0,0,1) = P(0,1,0) = P(1,0,0) = 0,$$

donc P n'a pas de terme en x^3, y^3 ou z^3. On peut donc écrire $P(1, y, z)$ sous la forme

$$P(1, y, z) = a_1 y + a_2 z + a_3 yz + a_4 y^2 + a_5 z^2 + a_6 y^2 z + a_7 z^2 y.$$

Il est connu que si $a, b, c \in \mathbb{C}$ sont tels que

$$a\theta^{2k} + b\theta^k + c = 0$$

pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, alors $a = b = c = 0$. On applique cela ici. Dire que $P(1, \theta^k, 1) = 0$ pour tout k entraîne que

$$a_1 + a_3 + a_7 = 0, \quad a_2 + a_5 = 0, \quad a_4 + a_6 = 0.$$

Dire que $P(1, 1, \theta^k) = 0$ pour tout k entraîne que

$$a_2 + a_3 + a_6 = 0, \quad a_1 + a_4 = 0, \quad a_5 + a_7 = 0.$$

Ce qui permet d'écrire

$$P(1, y, z) = a_1(y - z - y^2 + z^2 + y^2 z - z^2 y) + a_3(-z + yz + z^2 - z^2 y).$$

En prenant $y = z = \theta$, on obtient $a_3 = 0$, et il suit que $a_1 = 0$. $\square$

De ce qui précède on déduit

PROPOSITION 4.11. *Considérons l'arrangement $\mathcal{A}$ défini par $(f = 0)$. On a*

$$H^1(F) = H^1(F)_1 \oplus H^1(F)_\theta \oplus H^1(F)_{\overline{\theta}}$$

et

$$dim H^1(F)_1 = 8, \quad dim H^1(F)_\theta = 2, \quad dim H^1(F)_{\overline{\theta}} = 2.$$

4.4. Non formalité de la fibre de Milnor

Soit $\mathcal{A}$ l'arrangement de droites de la section précédente, défini par $(f = 0)$, avec

$$f = (x^3 - y^3)(x^3 - z^3)(y^3 - z^3).$$

Je montre ici le résultat suivant.

THÉORÈME 4.12. *La première variété de résonance $R_1(F)$ de la fibre de Milnor F ne coïncide pas avec le cône tangent à l'origine $TC_1 V_1(F)$. En particulier, F n'est pas 1-formelle.*

Ce théorème apporte ainsi une réponse aux problèmes posés dans [**DP09**], Question 2.10, et [**PS09**], Question 5.5

DÉMONSTRATION. On raisonne par l'absurde, en supposant que

$$R_1(F) = TC_1V_1(F).$$

Le pinceau

$$\phi : \begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & S := \mathbb{P}^1 \setminus \{[1:0],[0:1],[1:-1]\} \\ (x:y:z) & \longmapsto & (x^3-y^3 : y^3-z^3) \end{array}$$

est une application admissible qui décrit une composante irréductible globale de la variété caractéristique $V_1(M)$. D'après la Proposition 4.6, on lui associe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{S} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ M \arrow[r, "\phi"] & S \end{tikzcd}$$

où π et $\tilde{\pi}$ sont induits par les projections naturelles, et

$$\tilde{S} = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2,\ uv(u+v) = 1\}.$$

Soit $E = \tilde{\phi}^{-1}H^1(\tilde{S},\mathbb{C})$. D'après la Proposition 1.4, comme $\chi(\tilde{S}) = -3 < 0$, E est une composante irréductible du cône tangent $TC_1V_1(F)$. Par [**Del71**], il y a une structure de Hodge mixte sur $H^1(\tilde{S},\mathbb{C})$, et donc une structure de Hodge mixte sur E.

LEMME 4.13. *La structure de Hodge mixte sur E se décompose en*

$$E = E^{1,1} \oplus E^{1,0} \oplus E^{0,1},$$

avec

$$dimE^{1,1} = 2, \quad dimE^{1,0} = 1, \quad dimE^{0,1} = 1.$$

DÉMONSTRATION. On se réfère à [**Dim92**], Theorem C24, pour affirmer que la filtration par le poids de cette MHS vérifie $W_0 = 0$ et $W_2 = H^1(\tilde{S},\mathbb{C})$. La filtration de Hodge vérifie quant à elle $F^0 = H^1(\tilde{S},\mathbb{C})$ et $F^2 = 0$. Notons $H^{1,1}$, $H^{1,0}$, et $H^{0,1}$, respectivement, les espaces $F^1 \cap \overline{F}^1$, $W_1 \cap F^1$, et $W_1 \cap \overline{F}^1$. Une compactification de $\tilde{S}$ est donnée par la courbe $(uv(u+v) - t^3 = 0)$ de $\mathbb{P}^2$, dont le genre est 1, donc le point (iii) du Theorem C24 de [**Dim92**] implique $dimW_1 = 2$. Toujours dans [**Dim92**], l'Exemple C26 fournit

$$dimH^{1,1} = dimM(uv(u+v))_1 = 2,$$

où

$$M(uv(u+v)) = \mathbb{C}[u,v]/\left(u^2+2uv, v^2+2uv\right)$$

est l'algèbre graduée de Milnor associée.
Le morphisme $\tilde{\phi}$ est dominant, donc induit une injection au niveau H^1. En posant pour tout i,j, $E^{i,j} = \tilde{\phi}^{-1}H^{i,j}$, le lemme est démontré. $\square$

La fibre F est également munie d'une structure de Hodge mixte. Comme la construction de Deligne d'une MHS sur une variété algébrique est fonctorielle, $\tilde{\phi}$ est un morphisme de MHS, et la MHS sur E précisée dans le lemme est induite par la MHS sur F. On note cette dernière ainsi :

$$H^1(F,\mathbb{C}) = H^{1,1}(F) \oplus \underbrace{H^{1,0}(F) \oplus H^{0,1}(F)}_{W_1(F)}.$$

La Proposition 4.5 permet d'affirmer que

$$H^{1,1}(F) = H^1(F,\mathbb{C})_1 \simeq H^1(M,\mathbb{C}),$$

et que

$$W_1(F) = H^1(F,\mathbb{C})_{\neq 1}.$$

Dans cet exemple, les deux seules valeurs propres différentes de 1 sont $\theta = e^{2i\pi/3}$ et $\overline{\theta}$, et $dim W_1(F) = 4$.

Lemme 4.14. *Pour tout $\alpha \in H^1(F,\mathbb{C})_\theta$ et $\beta \in H^1(F,\mathbb{C})_{\overline{\theta}}$, $\alpha \cup \beta = 0$. Par conséquent, $W_1(F) \subset R_1(F)$.*

Démonstration. Soient α et β comme dans l'énoncé. On a

$$h^*(\alpha \cup \beta) = h^*(\alpha) \cup h^*(\beta) = \theta\overline{\theta}\alpha \cup \beta = \alpha \cup \beta,$$

donc $\alpha \cup \beta \in H^2(F,\mathbb{C})_1 \simeq H^2(M,\mathbb{C})$, et ce dernier espace a une structure de Hodge pure de poids 4 (ceci est montré dans [**Sha93**], et pour une généralisation, on peut se reporter au début de la démonstration du Theorem 4.1 de [**DP09**], qui elle-même fait appel à des résultats énoncés dans [**PS08**]). Comme $\alpha \cup \beta$ est de poids 2, on a $\alpha \cup \beta = 0$. Maintenant, de par la définition de $R_1(F)$, on déduit que α et β sont dans $R_1(F)$, donc $H^1(F,\mathbb{C})_\theta \subset R_1(F)$ et $H^1(F,\mathbb{C})_{\overline{\theta}} \subset R_1(F)$. Soit E' la composante de $R_1(F)$ qui contient $H^1(F,\mathbb{C})_\theta$. Comme l'on suppose $R_1(F) = TC_1V_1(F)$, E' est linéaire et a une MHS, donc $E' \supset \overline{H^1(F,\mathbb{C})_\theta} = H^1(F,\mathbb{C})_{\overline{\theta}}$. Finalement $E' \supset W_1(F)$. □

Soit E' la composante irréductible, linéaire, de $R_1(F)$ qui contient $W_1(F)$. On a $E' \cap E \neq \{0\}$, mais $E' \cap H^{1,0}(F)$ est de dimension 2, alors que $E \cap H^{1,0}(F) = E^{1,0}$ est de dimension 1, donc $E' \neq E$. On n'a donc ni $E = E'$, ni $E \cap E' = \{0\}$, ce qui est impossible car E et E' sont deux composantes de $TC_1V_1(F) = R_1(F)$ (voir Theorem C de [**DPS09**], qui généralise Theorem 4.2 de [**DPS08a**] énoncé dans le cas quasi-projectif). □

Bibliographie

[Ara97] D. Arapura, *Geometry of cohomology support loci for local systems I*, J. Alg. Geometry **6** (1997), no. 3, 563–597.

[BDS09] N. Budur, A. Dimca, and M. Saito, *First Milnor cohomology of hyperplane arrangements*, preprint (2009), math.AG 0905.1284.

[Bea92] A. Beauville, *Annulation du H^1 pour les fibrés en droites plats*, Lecture Notes in Math. **1507** (1992), 1–15.

[Bod01] A. Bodin, *Applications of the global mu-constant theorem*, Preprint (2001).

[Bri73] E. Brieskorn, *Sur les groupes de tresses*, Séminaire Bourbaki, 1971/72, Lect. Notes in Math. **317** (1973), 21–44.

[Cat91] F. Catanese, *Moduli and classification of irregular Kaehler manifolds (and algebraic varieties) with Albanese general type fibrations*, Invent. Math. **104** (1991), 263–289.

[CS95] D. Cohen and A. Suciu, *On Milnor fibrations of arrangements*, J. London Math. Soc **51** (1995), 105–119.

[CS99] ———, *Characteristic varieties of arrangements*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **127** (1999), 33–53.

[Del71] P. Deligne, *Théorie de Hodge : II*, Publ. Math. de l'I.H.É.S **40** (1971), 5–57.

[DGMS75] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan, *Real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 245–274.

[Dim92] A. Dimca, *Singularities and Topology of Hypersurfaces*, Universitext, Springer Verlag, 1992.

[Dim03] ———, *Hyperplane Arrangements, M-Tame Polynomials and Twisted Cohomology*, Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra (2003), 113–126.

[Dim04] ———, *Sheaves in topology*, Springer verlag, 2004.

[Dim06] ———, *Pencils of plane curves and characteristic varieties*, preprint (2006).

[Dim08] ______, *Characteristic varieties and logarithmic differential 1-forms*, preprint (2008), 0805.4377.

[DP09] A. Dimca and S. Papadima, *Finite Galois covers, cohomology jump loci, formality properties, and multinets*, preprint (2009), math.AG 0906.1040.

[DPS08a] A. Dimca, S. Papadima, and A. Suciu, *Alexander polynomials: Essential variables and multiplicities*, International Mathematics Research Notices **2008** (2008).

[DPS08b] ______, *Quasi-Kähler groups, 3-manifold groups, and formality*, preprint (2008), math.AG 0810.2158.

[DPS09] ______, *Topology and geometry of cohomology jump loci*, Duke Mathematical Journal **148** (2009), no. 3, 405–457.

[ESV92] H. Esnault, V. Schechtman, and E. Viehweg, *Cohomology of local systems on the complement of hyperplanes*, Invent. Math. **109** (1992), 557–561, Erratum: ibid. 112 (1993).

[Fal97] M. Falk, *Arrangements and Cohomology*, Annals of Combinatorics **1** (1997), 135–157.

[FM94] W. Fulton and R. MacPherson, *Compactification of configuration spaces*, Annals of Mathematics **139** (1994).

[FY07] M. Falk and S. Yuzvinsky, *Multinets, resonance varieties, and pencils of plane curves*, Compositio Math. **143** (2007), 1069–1088.

[GL87] M. Green and R. Lazarsfeld, *Deformation theory, generic vanishing theorems and some conjectures of Enriques, Catanese and Beauville*, Invent. Math. **90** (1987), 389–407.

[GL91] ______, *Higher obstructions to deforming cohomology groups of line bundles*, J. A.M.S. **4** (1991), 87–103.

[God60] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1960.

[Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[HL73] H.A. Hamm and D.T. Lê, *Un théorème de Zariski du type Lefschetz*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **3** (1973), 317–355.

[Lê74] D.T. Lê, *Un théorème du type Lefschetz*, ch. 11, in Fonctions de plusieurs variables complexes, pp. 242–278, Springer Berlin / Heidelberg, 1974.

[Lib01] A. Libgober, *Characteristic varieties of algebraic curves*, Applications of Algebraic Geometry to Coding Theory, Physics and Computation, Kluwer Acad. Publ. (2001), 215–254.

[Lib02] ______, *First order deformations for rank one local systems with a non-vanishing cohomology*, Topology Appl. **118** (2002), 159–168.

[Mac08] A. D. Macinic, *Cohomology rings and formality properties of nilpotent groups*, Preprint (2008), math.AT 0801.4847.

[Mil68] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. Math. Stud., vol. 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.

[Mor78] J. W. Morgan, *The algebraic topology of smooth algebraic varieties*, Publ. Math. IHES **48** (1978), 137–204.

[OS80] P. Orlik and L. Solomon, *Combinatorics and topology of complements of hyperplanes*, Invent. Math. **56** (1980), 167–189.

[OT92] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Springer verlag, 1992.

[PS08] C. Peters and J. Steenbrink, *Mixed Hodge Structures*, Springer-Verlag, 2008.

[PS09] S. Papadima and A. Suciu, *Geometric and algebraic aspects of 1-formality*, preprint 0903.2307 (2009), to appear in Bull. Soc. Sci. Math. Roumanie (2009), no. 3.

[Sha93] B. Z. Shapiro, *The mixed Hodge structure of the complement to an arbitrary arrangement of affine complex hyperplanes is pure*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 4, 931–933.

[Sim93] C. Simpson, *Subspaces of moduli spaces of rank one local systems*, Anal. ENS **26** (1993), 361–401.

[Spa94] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1994.

[Suc02] A. Suciu, *Translated tori in the characteristic varieties of complex hyperplane arrangements*, Topology Appl. **118** (2002), no. 1-2, 209–223.

[Sul77] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. **47** (1977), 269–331.

[Voi04] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Collection SMF, 2004.

Variétés caractéristiques et non formalité des fibres de Milnor

Résumé : le but de cette thèse est l'étude de la fibre de Milnor associée à un complémentaire d'arrangement d'hyperplans. Il est montré par un exemple que cette variété n'est pas toujours formelle, ou même 1-formelle. La formalité est une propriété introduite dans les années 1970 dans le cadre de la théorie de l'homotopie rationnelle. Des avancées récentes ont identifié cette propriété comme critère particulièrement fin pour établir un lien entre variétés caractéristiques et variétés de résonance, associées à l'espace étudié. Ces deux types de variétés sont des invariants dont les définitions présentent beaucoup de points communs, mais dans des espaces différents. Un lien très fort - la variété de résonance est le cône tangent à l'origine de la variété caractéristique correspondante - avait été établi sous diverses hypothèses, que l'introduction de la 1-formalité permet d'élargir. C'est en montrant que pour l'exemple décrit dans cette thèse, ce lien n'existe pas, que l'on prouve que la variété considérée n'est pas formelle.

Mots-clés : variété caractéristique, variété de résonance, formalité, fibre de Milnor, arrangement d'hyperplans.

Characteristic varieties and non-formality of Milnor fibers

Abstract : this thesis aims at studying the Milnor fiber associated to the complement of a hyperplane arrangement. An example is given, that shows this variety may not be formal, or even 1-formal. Formality is a property introduced in the seventies in the framework of rational homotopy theory. Recent results have shown formality can be a sharp criterium to guarantee a link between characteristic varieties and resonance varieties associated to a given space. Those two kinds of varieties are invariants whose definitions are in a sense quite close, but that are embeded in different spaces. Under various hypotheses, it has been proved that the resonance varieties can be identified with the tangent cone in the origin of the corresponding characteristic varieties. These hypotheses have been reduced to 1-formality. Proving that this important link between characteristic and resonance varieties does not hold for a given space results in stating this space is not formal. This is what is done in this thesis, on a specific example.

Keywords : characteristic variety, resonance variety, formality, Milnor fiber, hyperplane arrangement.

AMS Classification : 32S55, 55P62, 55N25, 32S22, 52C30