

Bifurcations d'ordre supérieur, cycles limites et intégrabilité

Mathieu Gentes

Laboratoire Jacques-Louis Lions

14 novembre 2009

Choix du titre

On considère des systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

où P et Q sont des polynômes.

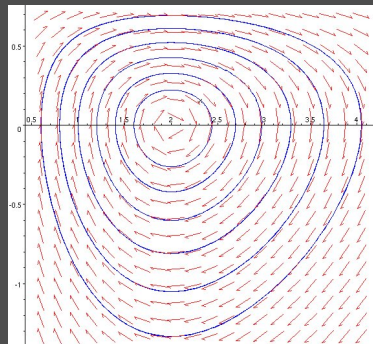
Définitions. On appelle *intégrale première* du système (1) toute fonction \mathbf{H} constante sur les courbes solutions $(x(t), y(t))$ du système :

$$\mathbf{H}(x(t), y(t)) = h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Un système différentiel est dit *intégrable* s'il possède une intégrale première H .

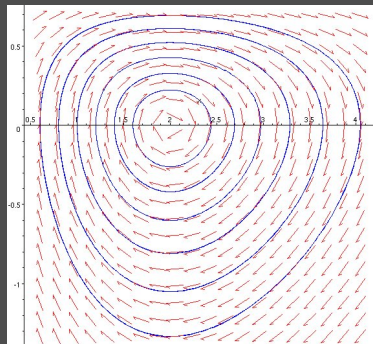
Choix du titre

Un centre :

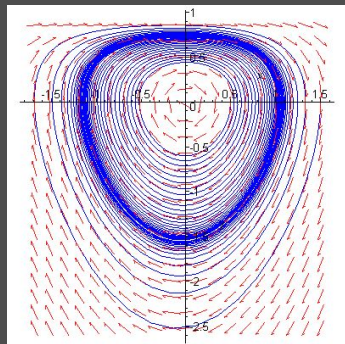


Choix du titre

Un centre :



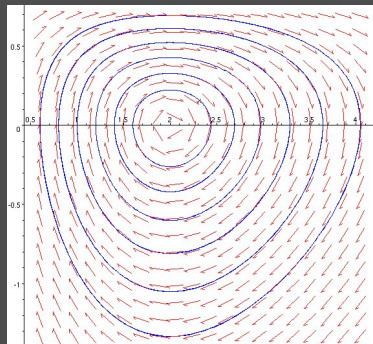
Un cycle limite :



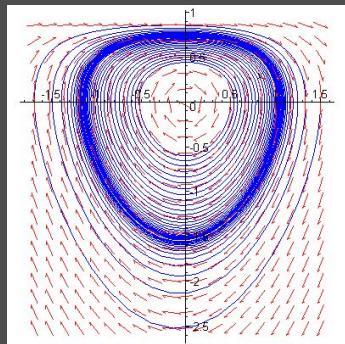
Définition. On appelle **cycle limite** toute trajectoire périodique qui est *isolée* dans l'ensemble des trajectoires périodiques.

Choix du titre

Un centre :



Un cycle limite :



Définition. On appelle **cycle limite** toute trajectoire périodique qui est **isolée** dans l'ensemble des trajectoires périodiques.

Bifurcations d'ordre supérieur : "outil" mathématique.

Le 16^e problème de Hilbert

On considère des systèmes différentiels de la forme

$$(S_d) \begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels de degré d .

16^e Problème de Hilbert

Trouver une *borne uniforme* $N(d)$ au nombre de cycles limites apparaissant dans la classe des systèmes (S_d) et étudier leurs configurations.

Théorème. [S. Songling] $N(2) \geq 4$.

Dans la suite on travaille dans le cas quadratique ($d = 2$).

Plan de l'exposé

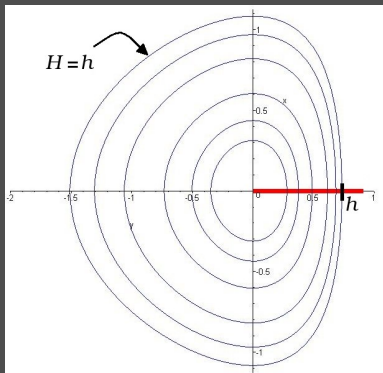
- 1 Méthode de recherche de cycles limites
- 2 Un système différentiel de Liénard
- 3 Perturbation d'un secteur elliptique
- 4 Systèmes différentiels avec domaines elliptiques

Méthode de recherche de cycles limites

Partir d'un système différentiel ayant une singularité de type centre :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

intégrable, d'intégrale première H ,

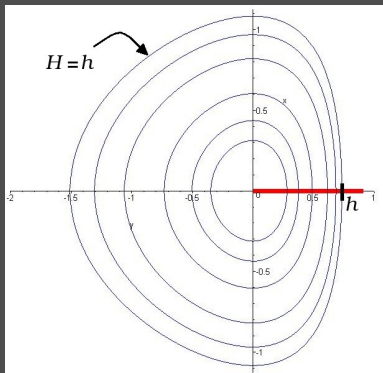


Méthode de recherche de cycles limites

Partir d'un système différentiel ayant une singularité de type centre :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

intégrable, d'intégrale première H ,



et le **perturber** à l'aide de fonctions f et g de même nature que P et Q :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon f(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon g(x, y) \end{cases}$$

où ε est un petit paramètre.

L'application de premier retour

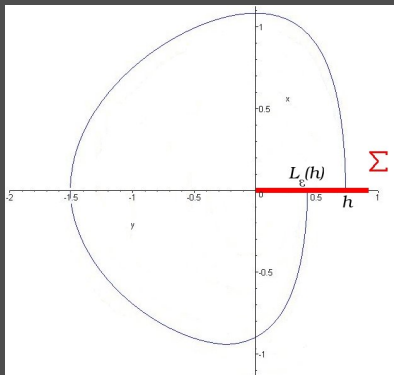
Pour ε assez petit, il existe une application de premier retour L_ε définie sur une section transverse Σ pouvant être paramétrisée par H :

$$L_\varepsilon : h \in \Sigma \mapsto L_\varepsilon(h).$$

Cette application peut être représentée comme une série entière en ε :

$$L_\varepsilon(h) = h + \varepsilon M_1(h) + \dots + \varepsilon^k M_k(h) + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}),$$

où les fonctions $(M_i)_{i \geq 1}$ sont les fonctions de Melnikov.



Algorithme de Françoise

$$L_\varepsilon(h) = h + \varepsilon M_1(h) + \varepsilon^2 M_2(h) + \varepsilon^3 M_3(h) + \dots$$

Principe

*Le nombre de cycles limites qui se déforment continûment en un ovale de H lorsque ε tend vers zéro, est donné par le nombre de **zéros isolés** réels de la première fonction de Melnikov non identiquement nulle.*

Algorithme de Françoise

$$L_\varepsilon(h) = h + \varepsilon M_1(h) + \varepsilon^2 M_2(h) + \varepsilon^3 M_3(h) + \dots$$

Principe

*Le nombre de cycles limites qui se déforment continûment en un ovale de H lorsque ε tend vers zéro, est donné par le nombre de **zéros isolés** réels de la première fonction de Melnikov non identiquement nulle.*

Formule de H. Poincaré :

$$M_1(h) = - \oint_{H=h} \omega, \quad \text{où } \omega = \psi(fdy - gdx).$$

Algorithme de Françoise

$$L_\varepsilon(h) = h + \varepsilon M_1(h) + \varepsilon^2 M_2(h) + \varepsilon^3 M_3(h) + \dots$$

Principe

*Le nombre de cycles limites qui se déforment continûment en un ovale de H lorsque ε tend vers zéro, est donné par le nombre de **zéros isolés** réels de la première fonction de Melnikov non identiquement nulle.*

Formule de H. Poincaré :

$$M_1(h) = - \oint_{H=h} \omega, \quad \text{où } \omega = \psi(fdy - gdx).$$

$$\# \{M_1(h) = 0\}$$

Algorithme de Françoise

$$L_\varepsilon(h) = h + \varepsilon M_1(h) + \varepsilon^2 M_2(h) + \varepsilon^3 M_3(h) + \dots$$

Principe

Le nombre de cycles limites qui se déforment continûment en un ovale de H lorsque ε tend vers zéro, est donné par le nombre de **zéros isolés** réels de la première fonction de Melnikov non identiquement nulle.

Formule de H. Poincaré :

$$M_1(h) = - \oint_{H=h} \omega, \quad \text{où } \omega = \psi(fdy - gdx).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \# \{M_1(h) = 0\} \\ M_1 \equiv 0 \xrightarrow{\text{AF}} M_2(h) \end{array} \right.$$

Algorithme de Françoise

$$L_\varepsilon(h) = h + \varepsilon M_1(h) + \varepsilon^2 M_2(h) + \varepsilon^3 M_3(h) + \dots$$

Principe

Le nombre de cycles limites qui se déforment continûment en un ovale de H lorsque ε tend vers zéro, est donné par le nombre de **zéros isolés** réels de la première fonction de Melnikov non identiquement nulle.

Formule de H. Poincaré :

$$M_1(h) = - \oint_{H=h} \omega, \quad \text{où } \omega = \psi(fdy - gdx).$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \# \{M_1(h) = 0\} \\ \\ M_1 \equiv 0 \xrightarrow[\text{AF}]{} M_2(h) \\ \\ \# \{M_2(h) = 0\} \end{array} \right.$$

Algorithme de Françoise

$$L_\varepsilon(h) = h + \varepsilon M_1(h) + \varepsilon^2 M_2(h) + \varepsilon^3 M_3(h) + \dots$$

Principe

Le nombre de cycles limites qui se déforment continûment en un ovale de H lorsque ε tend vers zéro, est donné par le nombre de **zéros isolés** réels de la première fonction de Melnikov non identiquement nulle.

Formule de H. Poincaré :

$$M_1(h) = - \oint_{H=h} \omega, \quad \text{où } \omega = \psi(fdy - gdx).$$

$$\begin{array}{l} \left\langle \begin{array}{l} \# \{M_1(h) = 0\} \\ \\ M_1 \equiv 0 \xrightarrow[\text{AF}]{} M_2(h) \end{array} \right. \left\langle \begin{array}{l} \# \{M_2(h) = 0\} \\ \\ M_2 \equiv 0 \xrightarrow[\text{AF}]{} M_3(h) \end{array} \right. \end{array}$$

Algorithme de Françoise

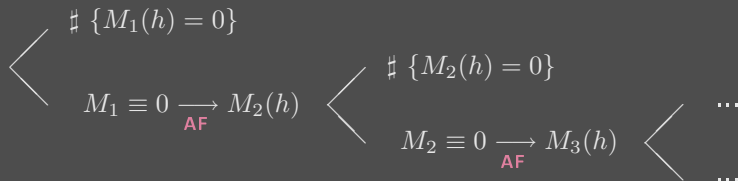
$$L_\varepsilon(h) = h + \varepsilon M_1(h) + \varepsilon^2 M_2(h) + \varepsilon^3 M_3(h) + \dots$$

Principe

Le nombre de cycles limites qui se déforment continûment en un ovale de H lorsque ε tend vers zéro, est donné par le nombre de **zéros isolés** réels de la première fonction de Melnikov non identiquement nulle.

Formule de H. Poincaré :

$$M_1(h) = - \oint_{H=h} \omega, \quad \text{où } \omega = \psi(fdy - gdx).$$



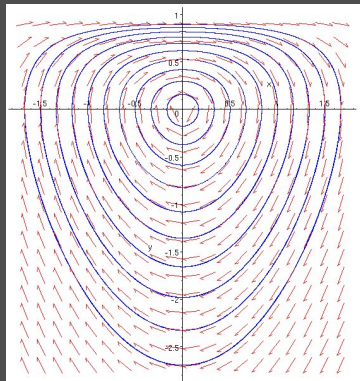
Un système différentiel de Liénard

On considère le système différentiel de type Liénard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + xy. \end{cases}$$

Ce système est intégrable :

$$H(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + y + \ln(|1 - y|)$$
$$\psi(y) = \frac{1}{y - 1}, \quad y \neq 1.$$



Lemme. *L'origine est un centre de type $Q_3^{LV} \cap Q_3^R$.*

Une première réduction

Lemme. Soient u et v deux fonctions telles que u est paire et v est impaire en la variable x . Alors

$$\oint_{H=h} u dx + v dy \equiv 0.$$

On rappelle que

$$M_1(h) = - \oint_{H=h} \psi (f dy - g dx) \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1}{y-1}.$$

Il suffit de travailler avec des perturbations de la forme

$$\begin{cases} f(x, y) = a_{10}x + a_{11}xy \\ g(x, y) = b_{00} + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2. \end{cases}$$

La première fonction de Melnikov M_1

Lemme. *La première fonction de Melnikov s'écrit sous la forme*

$$M_1(h) = \frac{1}{3} \oint_{H=h} \frac{x(Bx^2 + 3A)}{(1-y)^2} dy,$$

avec $A = a_{10} + b_{00} + b_{01}$ et $B = b_{20} + b_{02} - a_{10}$.

Alors,

Proposition. *La première fonction de Melnikov M_1 admet au plus un zéro qui est unique si et seulement si $AB < 0$ et $A(A + B) < 0$.*

La première fonction de Melnikov M_1

Lemme. *La première fonction de Melnikov s'écrit sous la forme*

$$M_1(h) = \frac{1}{3} \oint_{H=h} \frac{x(Bx^2 + 3A)}{(1-y)^2} dy,$$

avec $A = a_{10} + b_{00} + b_{01}$ et $B = b_{20} + b_{02} - a_{10}$.

Alors,

Proposition. *La première fonction de Melnikov M_1 admet au plus un zéro qui est unique si et seulement si $AB < 0$ et $A(A+B) < 0$.*

$$M_1 \equiv 0 \iff A = B = 0.$$

Fonctions de Melnikov d'ordre 2 et 3 - cas $b_{20} = 0$

Pour des raisons de symétries :

$$\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{0}.$$

Lemme. *La troisième fonction de Melnikov s'écrit sous la forme*

$$M_3(h) = a_{10}(a_{10} + a_{11}) \oint_{H=h} x \left(\frac{a_{11}}{3} x^2 - b_{00} \right) dy.$$

Par conséquent,

Proposition. *M_3 admet au moins un zéro si et seulement si $\mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{00} > \mathbf{0}$.*

$$\mathbf{M}_3 \equiv \mathbf{0} \iff \mathbf{a}_{11} = \mathbf{b}_{00} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}_{10} + \mathbf{a}_{11} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}_{10} = \mathbf{0}.$$

Fonctions de Melnikov d'ordre supérieur

Cas $a_{11} = b_{00} = 0$

- Le système reste à centre de type Q_3^{LV} .

Cas $a_{10} + a_{11} = 0$

- ω est exacte : $\omega = \psi(fdy - gdx) = d\mathbf{R}_0$.
- Le système est intégrable d'intégrale première $H + \varepsilon R_0$ et de facteur intégrant ψ .
- Le système reste à centre.

Cas $a_{10} = 0$

- Par récurrence : $M_n \equiv 0, \quad \forall n \geq 1$.
- Le système est intégrable :

$$H_\varepsilon = y - \frac{x}{\varepsilon a_{11}} + \ln(1 - y) + \left(\frac{b_{00}}{a_{11}} + \frac{1}{(\varepsilon a_{11})^2} \right) \ln(1 + \varepsilon a_{11} x)$$

$$\psi_\varepsilon = \frac{1}{(y - 1)(1 + \varepsilon a_{11} x)}.$$

- Le système reste à centre de type Q_3^{LV} .

Une équation d'Abel

Liouville mentionne une équation d'Abel particulière

$$y' = 2(x^2 - \alpha^2)y^3 + 2(x + 1)y^2, \quad \alpha \geq 0.$$

Cette équation s'écrit sous forme de système différentiel de Liénard :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 2(x^2 - \alpha^2) + 2(x + 1)y \end{cases}$$

Une équation d'Abel

Liouville mentionne une équation d'Abel particulière

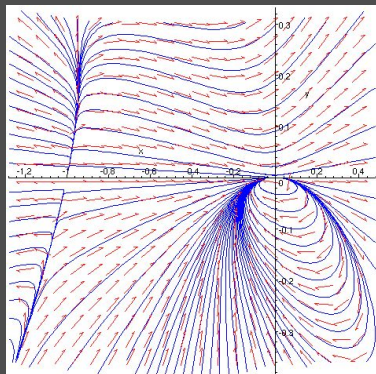
$$y' = 2(x^2 - \alpha^2)y^3 + 2(x + 1)y^2, \quad \alpha \geq 0.$$

Cette équation s'écrit sous forme de système différentiel de Liénard :

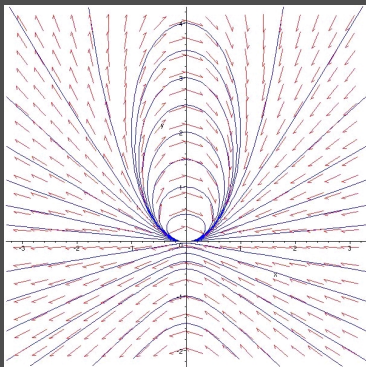
$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 2(x^2 - \alpha^2) + 2(x + 1)y \end{cases}$$

dont l'étude des singularités à l'infini mène au système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{X} = Z + 2X(X + Z + X^2 - \alpha^2 Z^2) \\ \dot{Z} = 2Z(X + Z + X^2 - \alpha^2 Z^2). \end{cases}$$



Etude d'une forme normale



On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x^2 \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases}$$

Ce système est intégrable :

$$H(x, y) = \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y}$$

$$\text{et } \psi(y) = \frac{1}{y^3}.$$

Lemme. *L'origine est une singularité non hyperbolique avec **domaine elliptique**.*

1^{ère} étape : déformation en un centre

On perturbe le système :

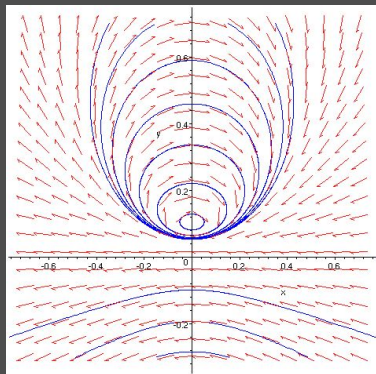
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x^2 - \eta \\ \dot{y} = -2xy \end{cases}$$

avec un petit paramètre $\eta > 0$.

Le système obtenu est intégrable :

$$H_\eta(x, y) = \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{\eta}{2y^2}$$

$$\text{et } \psi(y) = \frac{1}{y^3}.$$



Lemme. La singularité en $(0, \eta)$ est un centre de type réversible.

Les résultats

Théorème. [M.G.] M_1 a au plus deux zéros dans $] -1/2\eta, 0[$, avec multiplicités.
Si $M_1 \equiv 0$, alors M_2 a au plus deux zéros dans le même intervalle.
Si $M_2 \equiv 0$, alors M_3 a au plus deux zéros.

Les résultats

Théorème. [M.G.] M_1 a au plus deux zéros dans $] -1/2\eta, 0[$, avec multiplicités.
Si $M_1 \equiv 0$, alors M_2 a au plus deux zéros dans le même intervalle.
Si $M_2 \equiv 0$, alors M_3 a au plus deux zéros.

Nature algébrique des fonctions de Melnikov :

Théorème. [M.G.] Les fonctions de Melnikov $(M_k(h))_{k \geq 1}$ appartiennent au module de type fini engendré par $P_1(\sqrt{-h})$ et $P_2(\sqrt{-h})$ sur $\mathbb{R}_{a,b}[\sqrt{-h}]$, où

$$P_1(X) = 1 - \sqrt{2\eta}X,$$

$$P_2(X) = 1 - 2\eta X^2 = P_1(X)(1 + \sqrt{2\eta}X),$$

$$\mathbb{R}_{a,b} = \mathbb{R}[a_{ij}, b_{ij}, 0 \leq i, j \leq 2].$$

Quelques idées sur les preuves de ces théorèmes...

On introduit la 1-forme différentielle :

$$\omega = \psi(f dy - g dx) = \frac{1}{y^3}(f dy - g dx),$$

et les 1-formes élémentaires ω_{ij} et δ_{ij} :

$$\omega_{ij} = \frac{x^i y^j}{y^3} dx, \quad \delta_{ij} = \frac{x^i y^j}{y^3} dy, \quad 0 \leq i + j \leq 2,$$

telles que

$$\omega = \sum_{0 \leq i+j \leq 2} a_{ij} \delta_{ij} - b_{ij} \omega_{ij}.$$

Lemme. *On a la décomposition : $\omega = g_1 dH_\eta + dR_1 + N_1$*

où g_1 et R_1 sont analytiques sur le demi-plan $\{y > 0\}$,

$$N_1 = A_1 \omega_{00} + (B_1 + C_1 H_\eta) \omega_{02},$$

A_1 , B_1 et C_1 dépendent uniquement des coefficients de f et g .

On peut alors calculer M_1 :

$$\begin{aligned}M_1(h) &= - \oint_{H_\eta=h} \omega = - \oint_{H_\eta=h} g_1 dH_\eta - \oint_{H_\eta=h} dR_1 - \oint_{H_\eta=h} N_1 \\ &= - \oint_{H_\eta=h} N_1 \\ &= - A_1 \oint_{H_\eta=h} \omega_{00} - (B_1 + C_1 h) \oint_{H_\eta=h} \omega_{02},\end{aligned}$$

avec

$$\oint \omega_{00} = \frac{\pi}{\sqrt{2\eta}} P_1(\sqrt{-h}) \quad \text{et} \quad \oint \omega_{02} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2\eta}^{5/2}} P_2(\sqrt{-h}).$$

Proposition. M_1 s'exprime comme un polynôme de degré 3 en $\sqrt{-h}$

$$M_1(h) = \lambda_1 P_1(\sqrt{-h}) Q_1(\sqrt{-h}),$$

où Q_1 est un polynôme de degré 2 à coefficients indépendants.

Calcul de M_2

$$\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{0} \iff \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}.$$

D'après l'algorithme de Françoise :

$$M_2(h) = - \oint_{H_\eta=h} g_1 \omega.$$

Lemme. On a la décomposition : $g_1 \omega = g_2 dH_\eta + dR_2 + N_2$

où g_2 et R_2 sont analytiques sur le demi-plan $\{y > 0\}$,

$$N_2 = A_2 \omega_{00} + (B_2 + C_2 H_\eta) \omega_{02},$$

A_2 , B_2 et C_2 dépendent uniquement des coefficients de f et g .

On calcule M_2 :

$$\begin{aligned} M_2(h) &= - \oint_{H_\eta=h} N_2 \\ &= - A_2 \oint_{H_\eta=h} \omega_{00} - (B_2 + C_2 h) \oint_{H_\eta=h} \omega_{02}. \end{aligned}$$

Calcul des fonctions de Melnikov d'ordre supérieur

$$\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{0} \iff \mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{0},$$

ce qui correspond aux cinq cas :

- $c_0 = c_1 = b_{10} = 0,$
- $c_1 = c_4 = a_{11} = 0,$
- $c_0 = c_1 = c_4 - \eta a_{11} = 0,$
- $c_1 = a_{11} = 3b_{10} + 2\eta c_0 = 0,$
- $c_0 = a_{02} = 3b_{10}(c_4 - \eta a_{11}) + 2c_1(2c_3 + \eta c_2) = 0.$

Cas 1 : $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_{10} = \mathbf{0}$

ω est exacte.

Le système est intégrable.

$$M_n \equiv 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Cas 2 : $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_4 = \mathbf{a}_{11} = \mathbf{0}$

Par récurrence : $M_n \equiv 0, \quad \forall n \geq 1.$

M_1 a au plus deux zéros

$M_1 \equiv 0$

$$b_{20} = 0, b_{02} = a_{11}, 3b_{00} + \eta(2b_{01} - a_{10}) = 0$$

M_2 a au plus deux zéros

$M_2 \equiv 0$

$$c_0 = c_1 = b_{10} = 0$$

$\forall k \geq 1, M_k \equiv 0$

$$c_1 = c_4 = a_{11} = 0$$

$\forall k \geq 1, M_k \equiv 0$

$$c_0 = c_1 = c_4 - \eta a_{11} = 0$$

M_3 a au plus un zéro

$$c_1 = a_{11} = 3b_{10} + 2\eta c_0 = 0$$

M_3 a au plus deux zéros

$$c_0 = a_{02} = 3b_{10}(c_4 - \eta a_{11}) + 2c_2(c_3 + \eta c_2) = 0$$

M_3 n'a aucun zéro

$M_3 \equiv 0$

$$a_{11} = 0$$

$\forall k \geq 1, M_k \equiv 0$

$$b_{10} = 0$$

$\forall k \geq 1, M_k \equiv 0$

$$a_{02} = b_{10} - 2\eta c_2 - c_4 = 0$$

$M_4 \equiv 0$

$$c_0 = 0$$

$\forall k \geq 1, M_k \equiv 0$

$$c_4 = 0$$

$\forall k \geq 1, M_k \equiv 0$

$$2(\eta c_1 c_4 + 6b_{10} c_3)(3\eta a_{11} - c_1 - 3c_4) + 9b_{10} c_4 (b_{10} - 2\eta c_2 - 4c_3) = 0$$

$M_4 ?$

Idées pour la preuve du second théorème

Pour $k \geq 2$ on a les décompositions suivantes :

$$g_{k-1}\omega = g_k dH_\eta + dR_k + N_k.$$

D'autre part, grâce à l'indentité

$$\frac{x^2}{y^2} = H_\eta + \frac{1}{y} - \frac{\eta}{2y^2},$$

on peut réduire le degré de dépendance en x dans le calcul des décompositions précédentes.

Proposition. *Les 1-formes $(N_k)_{k \geq 1}$ appartiennent au module de type fini engendré par ω_{00} et ω_{02} sur $\mathbb{R}_{a,b}[\overline{H}_\eta]$.*

Le second théorème tient alors à l'écriture des fonctions de Melnikov :

$$M_k(h) = - \oint_{H_\eta=h} g_{k-1}\omega = - \oint_{H_\eta=h} N_k, \quad k \geq 2.$$

Systèmes différentiels avec domaines elliptiques

On considère la famille de systèmes différentiels :

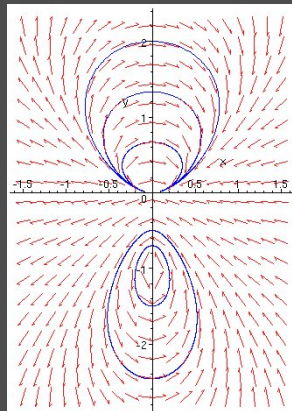
$$(E_\lambda) \begin{cases} \dot{x} = y - 2x^2 + \lambda(y^2 - y) \\ \dot{y} = -2xy \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

Ces systèmes sont intégrables :

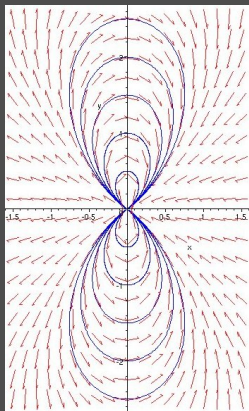
$$H^\lambda(x, y) = \frac{x^2}{y^2} + \frac{\lambda - 1}{y} + \lambda \ln |y|$$
$$\psi(y) = \frac{1}{y^3}.$$

Remarque : le cas $\lambda = 0$ correspond au système différentiel précédent.

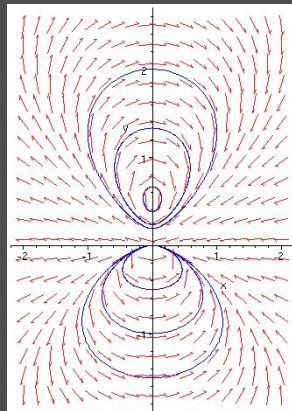
Lemme. Si $\lambda = 1$, l'origine est une singularité non hyperbolique avec deux domaines elliptiques.
 Si $\lambda \neq 1$, le système présente un centre et une singularité non hyperbolique avec un domaine elliptique.



$0 < \lambda < 1$



$\lambda = 1$



$\lambda > 1$

1^{ère} étape : déformation en deux centres

On perturbe le système :

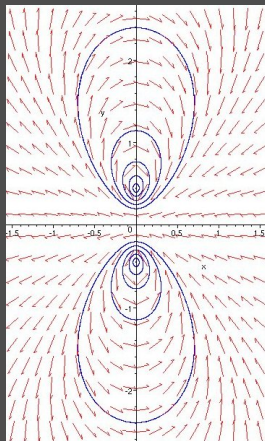
$$(E_1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y^2 - 2x^2 - \eta \\ \dot{y} = -2xy \end{cases}$$

avec un petit paramètre $\eta > 0$.

Le système obtenu est lui-même intégrable :

$$H_\eta^1(x, y) = \frac{x^2}{y^2} + \ln |y| + \frac{\eta}{2y^2}$$

$$\text{et } \psi(y) = \frac{1}{y^3}.$$



Lemme. Les singularités en $(0, -\sqrt{\eta})$ et $(0, \sqrt{\eta})$ sont des centres.

Seconde étape : recherche de cycles limites

On introduit deux applications de premier retour L_ε^- et L_ε^+ admettant des développements en série entière en ε de la forme :

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^-(h) &= h + \varepsilon M_1^-(h) + \varepsilon^2 M_2^-(h) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ \text{et } L_\varepsilon^+(h) &= h + \varepsilon M_1^+(h) + \varepsilon^2 M_2^+(h) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Proposition. M_1^- et M_1^+ s'expriment comme combinaisons linéaires de trois intégrales indépendantes K_1 , K_2 et K_3 :

$$\begin{aligned} M_1^-(h) &= -A_1 K_1(h) + B_1 K_2(h) - C_1 K_3(h) \\ \text{et } M_1^+(h) &= A_1 K_1(h) + B_1 K_2(h) + C_1 K_3(h). \end{aligned}$$

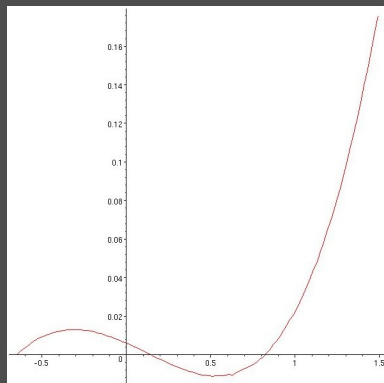
Recherche de zéros isolés

Cas symétrique $B_1 = 0$: $M_1^- = -M_1^+$
 \implies au plus un zéro.

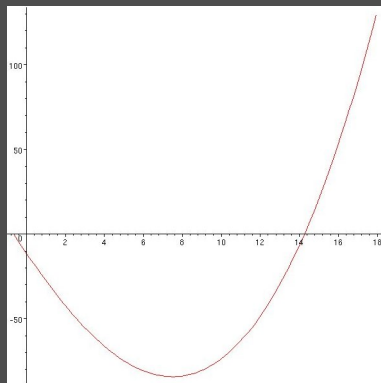
Recherche de zéros isolés

Cas symétrique $B_1 = 0$: $M_1^- = -M_1^+$
 \implies au plus un zéro.

Cas général :



M_1^+ a deux zéros.



M_1^- a un seul zéro.

Conclusion et perspectives

On considère l'équation différentielle complexe :

$$\dot{z} = i(z - c)(z + c) = i(z^2 - c^2), \quad c \in \mathbb{R}_+.$$

Elle s'intègre en

$$z(t) = c \frac{1 + K \exp(2ict)}{1 - K \exp(2ict)}.$$

En écrivant $z = x + iy$, on obtient un champ de vecteurs du plan :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2xy \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - c^2. \end{cases}$$

Lemme. Pour $c > 0$, ce système a deux centres en $(-c, 0)$ et $(c, 0)$.

Idée : faire appel à la théorie des perturbations dans le champ complexe.