



HAL
open science

**Deux modèles mathématiques de l'évolution d'un bassin
sédimentaire. Phénomènes
d'érosion-sédimentation-transport en géologie.
Application en prospection pétrolière**

Mohamed-Salem Louly

► **To cite this version:**

Mohamed-Salem Louly. Deux modèles mathématiques de l'évolution d'un bassin sédimentaire. Phénomènes d'érosion-sédimentation-transport en géologie. Application en prospection pétrolière. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2009. Français. NNT: . tel-00437343

HAL Id: tel-00437343

<https://theses.hal.science/tel-00437343>

Submitted on 30 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADEMIE DE BORDEAUX

|0|9|P|A|U|U|3|0|1|3|

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET DE LEURS APPLICATIONS

par

Mohamed-Salem Mohamed-Moussa LOULY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité :

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DEUX MODÈLES MATHÉMATIQUES DE L'ÉVOLUTION D'UN BASSIN SÉDIMENTAIRE
PHÉNOMÈNES D'ÉROSION-SÉDIMENTATION-TRANSPORT EN GÉOLOGIE
APPLICATION EN PROSPECTION PÉTROLIÈRE

Soutenue le 15 Octobre 2009

Après avis de

Robert DEVILLE, Professeur des Universités, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

Lionel THIBAUT Professeur des Universités, UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

Devant la Commission d'examen formée de

María Cruz LÓPEZ DE SILANES BUSTO, Professeur des Universités, UNIVERSITÉ DE SARAGOSSE, Présidente

Robert DEVILLE, Professeur des Universités, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, Rapporteur

Gérard GAGNEUX, Professeur des Universités, UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR, Directeur

Jacques GIACOMONI, Professeur des Universités, UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR, Examineur

Lionel THIBAUT Professeur des Universités, UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2, Rapporteur

Guy VALLET, Maître de Conférences HDR, UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR, Co-directeur

À mon père **Mohamed Moussa Ould Louly**

À ma mère **Fatimetou Mint Ahmed Mahmoud**

À mes soeurs **Mariem, Aicha et Khadija**

À mes Frères **Sidi et Naji**

Je dédie cette thèse

Remerciement

Je voudrais tout d'abord remercier mes directeurs de thèse, Monsieur Gérard Gagneux et Monsieur Guy Vallet. Je leur suis très reconnaissant d'avoir été des directeurs de thèse très responsables. Leur disponibilité et leur confiance m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Monsieur Robert Deville et Monsieur Lionel Thibault en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse et de participer au jury. J'apprécie sincèrement leur intérêt pour mes travaux ainsi que leurs commentaires avisés. Je voudrais aussi exprimer ma gratitude profonde à Madame Maria Cruz López De Silanes Busto pour avoir accepté d'être la présidente du jury et à Monsieur Jacques Giacomoni pour avoir accepté d'être examinateur et membre du jury.

Je profite de l'occasion pour remercier très sincèrement Mohamed Ould Mouawiya et Ahmed Salek Ould Bouh pour leur soutien.

Je voudrais exprimer mes remerciements profonds à toute ma famille pour leur soutien permanent et leurs encouragements.

Mes remerciement vont à mes chers amis et à mes chères amies, y compris tous mes collègues doctorants et doctorantes qui m'ont accompagné tout au long de ma thèse.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques.

Résumé.— Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d ($d = 2$ en pratique) représentant la base d'un bassin sédimentaire, et soient \vec{q} le flux de matière et $S(t, x)$ la hauteur de sédiment en un point $x \in \Omega$ à l'instant t . Alors, l'équation de conservation de masse s'écrit :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0, \quad t \in]0, T[, \quad x \in \Omega,$$

avec deux expressions possibles du flux \vec{q} :

$$i) \quad \vec{q}(t, x) = -\lambda \left[\nabla S(t, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right], \quad ii) \quad \vec{q}(t, x) = -\lambda \left[\nabla S(t + \tau, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right]$$

où λ est un coefficient jouant un rôle de limiteur de flux, \vec{V} représente les facteurs de transport et τ est un "petit" paramètre positif, correspondant à un temps de relaxation. Ainsi, on a étudié les deux modèles, d'inconnues S, λ , suivants :

$$\text{Modèle de Darcy-Barenblatt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left[\nabla S + \vec{V}(\cdot, S) \right] \right\} - \tau \Delta \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ S = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega, \quad S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (\tau > 0)$$

$$\text{Modèle de Darcy} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left[\nabla S + \vec{V}(\cdot, S) \right] \right\} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ S = 0 \quad \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega, \quad S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Pour réguler le flux, on cherche $\lambda \in \mathcal{H}(\frac{\partial S}{\partial t} + E)$, où $\mathcal{H}(r) = 0$ si $r < 0$, $\mathcal{H}(r) = 1$ si $r > 0$ et $\mathcal{H}(0) = [0, 1]$, et où $E \geq 0$ est une constante.

Le problème de Darcy-Barenblatt est résolu en remplaçant λ par $\lambda_\varepsilon : r \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_\varepsilon(r) = \min(\frac{r^+}{\varepsilon}, 1)$, $\varepsilon > 0$. En outre, on a un résultat de régularité : si $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, où $p \geq 2$, alors la solution $S_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$; la méthode utilisée ici ne fonctionne que pour $d \leq 2$ et repose sur des résultats de Meyers et de Nečas. La régularité entraîne l'unicité à partir d'une valeur critique τ^* de τ .

Le modèle de Darcy, localement hyperbolique, est moins régulier mais on a des solutions dans le cas discret en temps. En dimension 1, on a obtenu une solution continue pour le cas de la sédimentation marine en résolvant un problème de Bernoulli d'évolution.

Mots-clés : *Modèles stratigraphiques, Pseudo-parabolique, Loi de conservation dégénérée, Frontière libre.*

Ce travail à été préparé au sein de

*Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau
UMR-CNRS 5142*

**Two mathematical models of the evolution of a sedimentary basin
Phenomena of erosion, sedimentation and transport in geology
Applications in petroleum prospecting**

Abstract.— Let Ω be a bounded domain of \mathbb{R}^d ($d = 2$ in practice) representing the basis of a sedimentary basin. Let's denote by \vec{q} the flow of matter and by $S := S(t, x)$, $(t, x) \in]0, T[\times \Omega$ the sediments height. Then, the mass conservation law is given by :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0, \quad t \in]0, T[, \quad x \in \Omega,$$

with two possible expressions of the flow \vec{q} :

$$i) \quad \vec{q}(t, x) = -\lambda \left[\nabla S(t, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right], \quad ii) \quad \vec{q}(t, x) = -\lambda \left[\nabla S(t + \tau, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right],$$

where λ is a coefficient playing the role of a flux limiter, \vec{V} represents the factors of transport and τ is a “small” positive parameter, corresponding to a relaxation time. Thus, we studied two models, of unknowns S, λ :

$$\begin{array}{l} \text{Model of} \\ \text{Darcy-Barenblatt} \\ (\tau > 0) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left[\nabla S + \vec{V}(\cdot, S) \right] \right\} - \tau \Delta \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{in }]0, T[\times \Omega, \\ S = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{on }]0, T[\times \partial \Omega, \quad S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{a.e. in } \Omega. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Model of} \\ \text{Darcy} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left[\nabla S + \vec{V}(\cdot, S) \right] \right\} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{in }]0, T[\times \Omega, \\ S = 0 \quad \text{on }]0, T[\times \partial \Omega, \quad S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{a.e. in } \Omega. \end{array} \right.$$

To regulate the flow, we sought $\lambda \in \mathcal{H}(\frac{\partial S}{\partial t} + E)$, where $\mathcal{H}(r) = 0$ if $r < 0$, $\mathcal{H}(r) = 1$ if $r > 0$ and $\mathcal{H}(0) = [0, 1]$, and where $E \geq 0$ is a constant.

The problem of Darcy-Barenblatt is solved by replacing λ by $\lambda_\varepsilon : r \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_\varepsilon(r) = \min(\frac{r^+}{\varepsilon}, 1)$, $\varepsilon > 0$. Furthermore, there is a regularity result : if $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, where $p \geq 2$, then the solution $S_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$; the methode used here works only for $d \leq 2$ and based on the results of Meyers and Nečas. The regularity yields the uniqueness of the solution if τ is large enough.

The Darcy's model, which is locally hyperbolic, is less regular but there are solutions in the discrete case in time. In dimension 1, we have solved a Bernoulli evolution problem to obtain a continuous solution in the case of the marine sedimentation.

Keywords : *Stratigraphic models, Pseudo-parabolic, Degenerated conservation laws, Free boundary.*

This work was prepared within

*Laboratory of Mathematics and its Applications of Pau
UMR-CNRS 5142*

Table des matières

1	Introduction	8
1.1	Principes généraux des modèles stratigraphiques	8
1.2	Présentation des modèles	9
1.3	Analogie avec des modèles d’asservissements thermiques. Nécessité d’un limiteur de flux	14
1.4	Cadre fonctionnel, notations et principaux résultats utilisés	16
1.4.1	Notations	16
1.4.2	Principaux résultats utilisés	17
1.5	Plan de travail	19
I	Modèle de Darcy-Barenblatt	21
2	Formulation du problème “Darcy-Barenblatt” et existence d’une solu- tion	22
2.1	Formulation du problème	22
2.1.1	Propriétés descriptives des éventuelles solutions	23
2.2	Existence d’une solution	27
2.2.1	Approche par semi-discrétisations implicites	27
2.2.2	Passage à la formulation continue	30
3	Régularité et unicité de la solution	39
3.1	Résultat de régularité	39
3.2	La question de l’unicité de la solution	45
II	Modèle de Darcy	52
4	Le modèle de Darcy en dimension 2 d’espace	53
4.1	Formulation du problème	53
4.2	Le modèle de Darcy régi par une approximation du graphe de Heaviside \mathcal{H}	55
4.2.1	Approche par semi-discrétisations implicites	56

4.3	Le passage à la limite par rapport à ε et h	63
4.3.1	Le modèle discret régi par le graphe \mathcal{H} ($\varepsilon \rightarrow 0$) :	63
4.3.2	Le problème du passage au cas continu ($h \rightarrow 0$)	69
5	Le modèle de Darcy en dimension 1 d'espace	71
5.1	Le comportement hyperbolique et ses conséquences : zones mortes, effet de cloisonnement, etc	71
5.1.1	Une observation liminaire	71
5.1.2	Illustration du caractère hyperbolique	72
5.1.3	Effet de cloisonnement ou effet barrière	74
5.2	Cas de non-unicité	75
5.3	Les solutions "traveling waves" avec obstacle mobile	75
6	Un problème de Bernoulli d'évolution	
	Résultat d'existence dans le cas de la sédimentation $1-D$ avec transport marin	86
6.1	Principes de la construction des itérés (S^k, λ^k) avec $\lambda^k \in \mathcal{H}(\frac{S^k - S^{k-1}}{h})$, λ^k "maximal"	93
6.2	Description des solutions $(S^k, \lambda^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ du schéma semi-discrétisé implicite	95
III	Appendice, conclusion et perspectives	103
7	Appendice	104
7.1	Un contre-exemple à une extension vectorielle du lemme de Saks	104
7.2	Contribution pour valider des possibilités d'extension	106
8	Conclusion et perspectives	109
	Bibliographie	111

Chapitre 1

Introduction

1.1 Principes généraux des modèles stratigraphiques

On analyse dans cette recherche des modèles mathématiques, concernant la formation et l'évolution d'un bassin sédimentaire, sous le triple effet des phénomènes d'érosion, sédimentation et transport, dû aux vents, pluies, courants de ruissellement, bathymétrie, marées, *etc ...* . Il s'agit de stratigraphie, c'est-à-dire de la formation des couches géologiques sur une échelle de plusieurs millions d'années. Ces modèles ont été élaborés à l'Institut Français du pétrole et présentent un intérêt crucial pour la prospection pétrolière par une bonne compréhension de la formation et l'évolution des bassins sédimentaires. On convient d'entreprendre ici une analyse mathématique d'un tel phénomène physique sous la contrainte d'un taux d'érosion maximal dépendant de la composition du mélange et de l'environnement climatique. Cette démarche nous conduit à découvrir des équations non linéaires d'évolution, de diffusion-transport d'un type original donnant lieu à des problèmes de frontières libres.

Outre les applications en prospection pétrolière pour la localisation la plus probable des réserves d'huile et de gaz, le modèle étudié ici rend compte des modifications des reliefs de type désertique sous l'effet de vents parfois violents. Un exemple intéressant est donné par une mission de l'Unesco qui concerne l'espace désertique créé par l'assèchement de la mer d'Aral au Kazakhstan à la suite d'irrigations conduites de manière catastrophique sur le plan écologique : privée de la plus grande partie de son approvisionnement fluvial en eau, cette mer intérieure s'est retirée et sa superficie a été divisée par trois. Les vents violents de la région arrachent le sable et le sel déposé sur le fond de la mer naguère recouvert d'eau. Selon des estimations, on rapporte (Le Monde du 13 juillet 2007, p.3) que 200 000 tonnes de sel et de sable sont ainsi chaque année transportées dans un rayon de 300 km, outre les restes de pesticides et d'engrais auparavant répandus en quantité dans les cultures irriguées en amont et charriés dans le bassin par les fleuves alimentant la mer. Ces conditions conduisent à des transformations brutales de l'écologie locale et

sont causes de graves conséquences sanitaires. Des modèles mathématiques de simulation présentent donc des possibilités de prévision des évolutions et d'anticiper la prise de décision pour améliorer la situation.

Un autre exemple peut être illustré par l'action érosive de vents forts transportant du sable contre certaines parties de la Grande Muraille de Chine et qui pose le problème de la préservation du site.

La situation des transports marins reçoit une illustration actuelle par les travaux de désensablement de la baie du Mont Saint-Michel. Un barrage en construction, agissant comme un régulateur des flux et des reflux, est destiné à libérer l'endroit de la gangue des sédiments qui, jour après jour, emprisonne l'édifice, autrefois distant de quatre kilomètres du continent et désormais de quelques dizaines de mètres. Les marées, dont les courants montants sont toujours plus puissants que les jusants, ont provoqué l'accumulation de débris sableux mélangés à des débris de coquillages : la tanguie. On construit un ouvrage hydraulique à double effet sur la rivière locale, le Couesnon dont le flux est aujourd'hui faible, pour retenir dans un premier temps l'eau dans un réservoir en amont, à marée haute ; au reflux, huit vannes généreront des chasses d'eau dans le lit du Couesnon qui repousseront les sédiments au large. Selon les expertises, en deux ans de fonctionnement, la moitié des 3 millions de mètres cubes d'alluvions qui se sont amoncelés devrait avoir été déblayée. En huit ans, les quatre-cinquièmes, et, à l'horizon du milieu du siècle, la cote moyenne des fonds devrait avoir baissé de 70 centimètres (Le Monde daté du 29 juillet 2007).

Ces deux situations illustrent, dans le premier cas, le transport éolien et, dans le second cas, le transport marin, naturel ou forcé.

Un aspect particulier de la compréhension de la formation des bassins sédimentaires avec effet de transport concerne la mémoire des sédiments : à la manière des carottes glaciaires qui conservent en mémoire les climats de la planète au cours des siècles, la séquence des strates et leurs configurations donneraient des informations sur les évolutions climatiques et en particulier sur les phénomènes météorologiques extrêmes (fortes tempêtes, fortes houles, oscillation atlantique analogue au phénomène El Niño, conjecture des cycles climatiques, etc.). On pourra se reporter pour une étude dans ce sens à un numéro récent de la revue *Marine Geology* [4].

1.2 Présentation des modèles

Pour mettre en lumière les difficultés d'ordre mathématique que présentent ces modèles, on convient d'analyser ici la situation d'une colonne monolithologique.

On note Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ (ou éventuellement $d = 1$), figurant la base du

bassin sédimentaire, supposée horizontale au niveau topographique zéro, et de frontière Γ régulière ; on introduit T un réel strictement positif, fixant la durée de l'observation du phénomène et $Q =]0, T[\times \Omega$. On note $S(t, x)$ la hauteur des sédiments déposés à l'instant t , au-dessus d'un point x de Ω .

À l'origine, les deux modèles objets de cette recherche sont issus des observations physiques suivantes :

1. le flux des matières est proportionnel au gradient de la hauteur S des sédiments déposés ; il s'agit d'un modèle gravitaire régi par la pente du relief mesurée par ∇S , et présentant une analogie mathématique avec la loi de Darcy.
2. le flux est aussi proportionnel aux facteurs de transport (marin ou éolien) qui sont représentés ici par un terme vectoriel non linéaire $\vec{V}(x, S)$.

En notant λ le coefficient de proportionnalité entre le flux des matières d'une part, et la pente et le terme de transport d'autre part, on traduit ces observations en écrivant la loi d'état du flux, de type darcéen, suivante :

$$\vec{q} = -\lambda \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) \right],$$

avec deux lectures possibles selon les géologues :

$$\begin{aligned} * \vec{q}(t, x) &= -\lambda \left[\nabla S(t, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right] \\ * \vec{q}(t, x) &= -\lambda \left[\nabla S(t + \tau, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right], \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

τ étant un "petit" paramètre.

En plus, par des méthodes classiques de viscosité de Barenblatt, on approche, pour $\tau > 0$, $\nabla S(t + \tau, x)$ par $\nabla S(t, x) + \tau \nabla \frac{\partial S}{\partial t}(t, x)$, au premier ordre. On obtient dans ce cas la loi suivante, nommée "loi de Darcy-Barenblatt", avec un terme cinétique correctif :

$$\vec{q} = -\lambda \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) + \tau \nabla \frac{\partial S}{\partial t} \right],$$

le paramètre τ étant un réel strictement positif, dimensionné à un temps, et représentant un délai d'atteinte de l'équilibre, le cas où τ est nul modélisant l'équilibre instantané ou parfait.

D'autre part, pour gérer la régulation du flux, on prend en compte

1. une vitesse limite d'érosion, notée E et supposée constante et positive.
2. une contrainte unilatérale d'asservissement instantané régit les variations de l'érosion à l'intérieur du domaine et sur une partie fixe de la frontière.

Le coefficient λ dépend de $\frac{\partial S}{\partial t}$ et de E , en prenant ses valeurs dans $[0, 1]$, pour assurer une condition globale d'asservissement unilatérale et jouer le rôle, en outre, d'un limiteur de flux par la contrainte globale (pour le modèle de Barenblatt en dimension $d = 1, 2$ et pour le modèle de Darcy en dimension 1) :

$$-\frac{\partial S}{\partial t} \leq E \quad \text{p.p. dans } Q, \quad (1.1)$$

avec pour effet recherché de rendre compatibles deux obligations dans l'écriture des modèles :

- i) respecter la contrainte d'érosion maximale
- ii) respecter le principe fondamental de conservation de la masse.

Ce point important et essentiel du point de vue des géologues, va être détaillé dans ce qui suit, car l'équation de continuité doit être satisfaite à tout instant, en tout point, tout en permettant la réalisation de la contrainte globale (1.1).

De sa part, l'équation de conservation de la masse, donne que

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0 \quad \text{p. p. dans } Q.$$

En remplaçant \vec{q} par ses expressions données par les deux lois précédentes, on obtient les deux modèles objets de cette étude : le modèle de Darcy, appelé aussi le modèle statique ou le modèle de l'équilibre parfait, où τ est pris nul ; et le modèle de Darcy-Barenblatt, appelé aussi le modèle dynamique ou cinétique, où τ est strictement positif. Ce sont les suivants :

Darcy :

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) \right] \right\} = 0, \end{cases}$$

Darcy-Barenblatt :

$$\begin{cases} \tau > 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) \right] \right\} - \tau \operatorname{div} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \nabla \frac{\partial S}{\partial t} \right\} = 0. \end{cases}$$

Nous commençons par le modèle de Darcy-Barenblatt, car la présence du τ donne lieu à

des estimations *a priori* riches, indispensables pour la résolution du problème mathématique lié au modèle à effet régularisant.

Mathématiquement, le choix de λ est guidé par la nécessité de respecter les contraintes suivantes, donnant lieu à un problème à frontière libre, selon T. Gallouët [43] :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{et} \quad (1 - \lambda) \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } Q, \quad (1.2)$$

ce qui conduit à prendre, sous réserve d'une régularité suffisante, $\lambda \in \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)$, où \mathcal{H} est le graphe maximal monotone lié à la fonction de Heaviside. En particulier,

- * si en (t, x) , $\frac{\partial S}{\partial t} + E > 0$, autrement dit, le taux d'érosion maximal n'est pas atteint, alors, $\lambda = 1$ et donc la contrainte est inactive : le flux n'est pas limité.
- * si en (t, x) , $\frac{\partial S}{\partial t} + E = 0$, situation limite ; la contrainte est active ; alors λ doit prendre une valeur appropriée entre 0 et 1 pour rendre possible la réalisation de l'équation de continuité.

Il n'est pas certain qu'un tel λ , s'il existe, soit unique en son genre, et la question se posera de savoir quel est le λ physiquement significatif.

Sous réserve que la règle de dérivation à la chaîne soit valide dans le cadre fonctionnel que l'on va retenir, on observe que :

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \nabla \frac{\partial S}{\partial t} &= \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \nabla \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \quad (\text{car } E \text{ ne dépend pas de } x) \\ &= \nabla \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right)^+ \quad (\text{dérivation à la chaîne dans } H^1(\Omega)), \end{aligned}$$

pour tout choix de $\lambda \in \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)$ d'après la règle de Marcus et Mizel.

Donc,

$$\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \nabla \frac{\partial S}{\partial t} = \nabla \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{si} \quad \frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0.$$

D'où l'idée de considérer l'équation modifiée, pour le modèle de Darcy-Barenblatt :

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) [\nabla S + \vec{V}(x, S)] \right\} - \tau \Delta \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Équation dite pseudo-parabolique, présentant un terme régularisant par rapport à l'équation du modèle de Darcy.

Pour nous permettre de mieux gérer les opérations qu'un calcul informel fait rencontrer, on va prendre une approximation régulière de λ , type l'approximation lipschitzienne croissante, de Yosida, suivante :

$$\lambda_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq \varepsilon, \\ \frac{r}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{si } r \leq 0, \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$.

Inversement, pour un modèle, par exemple, à conditions de bord de type Dirchlet homogènes, le choix de la fonction-test $\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)^-$ dans (1.3) et l'application de la formule de Green pour le problème de Darcy-Barenblatt et le choix de multiplier (1.3) par $1_{\{\frac{\partial S}{\partial t} + E < 0\}}$ avec $\tau = 0$ pour le problème de Darcy $1 - D$, montrent que la contrainte (1.1) est automatiquement réalisée dès que la fonction λ est nulle sur \mathbb{R}^- , E étant non négative. Dans ce cas l'expression $\Delta \frac{\partial S}{\partial t}$ coïncide avec l'expression $\text{div} \{ \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right) \nabla \frac{\partial S}{\partial t} \}$, λ étant prise dans $\mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)$.

En conclusion, les modèles "Barenblatt" et "Barenblatt modifié" ne sont pas équivalents pour les choix de $\lambda = \lambda_\varepsilon$, type approximation de Yosida de \mathcal{H} , mais sont asymptotiquement équivalents lorsque le limiteur λ est régi par le graphe maximal monotone \mathcal{H} de la fonction de Heaviside, c'est-à-dire, au moins informellement, à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Dès lors, le problème de type Darcy-Barenblatt prenant en compte exactement les conditions unilatérales globales (1.2) peut s'énoncer sous forme d'une équation pseudo-parabolique (c'est-à-dire régularisée par un terme de viscosité) :

Trouver le couple (S, λ) tel que :

$$S, \frac{\partial S}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \lambda \in L^\infty(Q) \cap \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)$$

vérifiant pour presque tout t de $]0, T[$ et pour tout v de $H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda [\nabla S + \vec{V}(x, S)] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial S}{\partial t} \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad (1.4a)$$

$$S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \quad (1.4b)$$

Le modèle de Darcy s'obtient en prenant $\tau = 0$ dans l'écriture précédente et pourrait se

formuler de la façon suivante :

Trouver le couple (S, λ) tel que :

$$S \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(Q), \quad \lambda \in L^\infty(Q) \cap \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)$$

vérifiant pour presque tout t de $]0, T[$ et pour tout v de $H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda [\nabla S + \vec{V}(x, S)] \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad (1.5a)$$

$$S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \quad (1.5b)$$

Ici, s'ouvre une question délicate pour ce dernier modèle en dimension d'espace $d \geq 2$ et qui sera développée à la remarque 4.1 ; doit-on inclure dans la définition d'une solution la propriété

$$\frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q \quad (1.6)$$

ou bien cette contrainte est-elle implicitement contenue dans la formulation variationnelle ? En effet, on a p.p. en t et p.p. dans Ω et par la non-négativité de E ,

$$0 \leq \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right)^- \leq -\operatorname{div} \left[\lambda \left(\nabla S + \vec{V}(x, S) \right) \right] 1_{\left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + E < 0 \right\}}$$

et

$$\lambda 1_{\left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + E < 0 \right\}} = 0,$$

et la question (sans objet en dimension 1 par le lemme de Saks) est de savoir si cela implique que

$$\operatorname{div} \left[\lambda \left(\nabla S + \vec{V}(x, S) \right) \right] = 0 \quad \text{p.p. dans } \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + E < 0 \right\}.$$

On verra que la réponse est négative en dimension $d \geq 2$ sans informations supplémentaires plus précises sur le limiteur λ , et que la condition unilatérale (1.6) doit *a priori* être incorporée dans la définition d'une solution en dimension d'espace $d \geq 2$.

1.3 Analogie avec des modèles d'asservissements thermiques. Nécessité d'un limiteur de flux

On peut se convaincre à partir d'un cas très simple relevant de ce dernier modèle de la nécessité d'introduire un limiteur de flux pour assurer la compatibilité entre la

contrainte (1.1) et la loi de conservation de la masse :
prenons des données très régulières :

$$\begin{cases} S_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ \vec{V}(x, S) = \vec{0} \\ E \geq 0, \quad E \text{ une constante.}, \end{cases}$$

et supposons qu'il existe une solution $(S, 1)$, *i.e.* $\lambda = 1$ partout (flux non régulé). Dans ce cas, la fonction $\xi = \frac{\partial S}{\partial t}$ vérifie, au moins informellement, par dérivation par rapport à t ,

$$\mathcal{P}_{(\lambda=1)} \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta \xi = 0 & \text{dans } Q \\ \xi = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad \xi(0, \cdot) = \Delta S_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et donc la satisfaction de la contrainte (1.1) implique que l'on ait (il y a en outre équivalence), selon un principe du minimum :

$$\Delta S_0 + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

ce qui n'est pas vérifié en général : il suffit pour obtenir un contre-exemple de prendre une topographie initiale présentant des zones concaves, à concavité suffisamment forte.

En outre, une condition liant deux quantités étrangères l'une à l'autre n'aurait pas de sens physique et serait artificielle. Par analogie, on peut interpréter le problème $\mathcal{P}_{(\lambda=1)}$ comme une équation de diffusion isotrope de la chaleur avec des parois maintenues à 0 degré, et si la température initiale présente des zones à très fortes variations du gradient de température, on ne peut obtenir un refroidissement avec une vitesse de refroidissement limitée sans un procédé de régulation thermique. Il y a là une étroite analogie avec les modèles de climatisation où le flux de refroidissement doit être régulé de façon à éviter une trop forte et rapide variation de température en un point, ce qui aurait des conséquences physiologiques. Lorsque le vecteur \vec{V} est pris non nul, cela correspond dans cette analogie au cas où le flux thermique est composé d'un flux de diffusion et d'un flux de convection (ou transport forcé).

Cependant, ce type de modèle avec une contrainte sur une vitesse n'est pas pris en compte dans le chapitre 2, "Asservissements thermiques" du livre de G. Duvaut - J. L. Lions [34]. Donc, dans l'esprit de notre démarche, la classique équation de diffusion de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(c(x)\nabla u) = f$$

doit être revisitée sous la forme plus sophistiquée

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(c\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\nabla u\right) = f,$$

ou bien, pour un processus d'autorégulation,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\mathcal{H} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + E \right) \nabla u \right) - f \ni 0 \\ +C.I. + C.B., \end{cases}$$

E étant une valeur-seuil pour la vitesse de refroidissement (en degré par unité de temps), à ne pas dépasser. On peut imaginer le même type de contrainte pour des processus industriels de refroidissement d'un bloc d'aluminium, par exemple, sorti du four, pour lesquels la vitesse de refroidissement doit être maîtrisée. L'ajout d'un terme de convection forcée peut être transcrit par le vecteur de transport $\vec{V}(x, u)$.

1.4 Cadre fonctionnel, notations et principaux résultats utilisés

Nous nous plaçons tout au long de cette thèse dans le cadre général des espaces de Sobolev, en faisant la majorité du travail dans un cadre hilbertien. Nous utilisons les notations suivantes :

1.4.1 Notations

Ω : un domaine borné lipschitzien de \mathbb{R}^d , de frontière Γ , $d = 2$ ou, éventuellement, $d = 1$

Pour $\vec{V} = (V_1, V_2)$,

$$\|\vec{V}\|_\infty : \max_{i=1,2} (\|V_i\|_{L^\infty}), \quad \text{avec} \quad \|V_i\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |V_i|.$$

Pour $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)},$$

si $p = 2$ (le cas hilbertien), on note

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

lip_f : constante de lipschitz de f .

f^+ : $\max(f, 0)$.

f^- : $\max(-f, 0)$.

$C.I.$, $C.B.$: Condition initiale, Condition au bord.

p.p. : presque partout.

\mathcal{H} : le graphe maximal monotone lié à la fonction de Heaviside.

∂_t : $\frac{\partial}{\partial t}$.

1.4.2 Principaux résultats utilisés

Outre le théorème de la convergence monotone de Beppo-Lévi, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, le théorème de Schauder-Tikhonov de point fixe, le théorème de Lax-Milgram, le lemme de Gronwall (dans le cas continu), le lemme de Saks, le lemme de Marcus et Mizel et le lemme de Urysohn, on utilise les résultats principaux suivants :

Le lemme 1.1 est prouvé dans le livre de Haïm Brézis : Opérateurs maximaux monotones, pages : 140-145 ([29]).

Lemme 1.1. Soient $[0, T]$ un intervalle de \mathbb{R} , F un espace de Banach réflexif et un réel p tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, toute fonction $u \in W^{1,p}(0, T; F)$ est telle que : pour tout $t_0, t \in [0, T]$ on a

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) ds.$$

Pour le lemme 1.2 suivant voir Bainov [22].

Lemme 1.2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, supposons que g_0, k_n, p_n sont des nombres réels non négatifs tels que

$$x_0 \leq g_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad x_n \leq g_0 + \sum_{l=0}^{n-1} p_l + \sum_{l=0}^{n-1} k_l x_l$$

alors

$$\forall n \geq 1, \quad x_n \leq \left(g_0 + \sum_{l=0}^n p_l \right) \exp \left(\sum_{l=0}^n k_l \right).$$

Le résultat suivant est un théorème de J. B. Pettis, cf. [30]

Théorème 1.3. Soient (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré et Y un espace de Banach. Alors, l'application $f : X \longrightarrow Y$ est fortement μ -mesurable si et seulement si

1. f est faiblement μ -mesurable, et
2. f est μ -essentiellement à valeurs séparées, C'est-à-dire il existe $A \in \mathcal{N}(\mu)$ ($A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) = 0$) tel que $f(X \setminus A)$ est un sous-ensemble séparable de Y .

Pour énoncer les deux résultats suivants, on se donne $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ une matrice symétrique à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \exists 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \\ \alpha_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha_2 |\xi|^2, \text{ pour presque tout } x \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Le théorème de Meyers suivant est démontré dans [25].

Théorème 1.4. (N. G. Meyers)

Si $F \in H^{-1}(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \langle F, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \end{cases}$$

alors, il existe un réel $p_0 > 2$ dépendant de α_1, α_2 et Ω tel que

$$\begin{aligned} \forall p \in [2, p_0], \exists C_p > 0 \text{ tel que si } F \in W^{-1,p}(\Omega) \text{ on a,} \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^2} \leq C_p \|F\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

Le théorème de Nečas suivant concerne les problèmes elliptiques à coefficients continus, et il est démontré dans [53].

Théorème 1.5. (J. Nečas)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, de frontière Γ de classe C^∞ , et soient $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 2$ et $(f_0, \vec{f}) \in L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^d$. Considérons le problème suivant

$$(\mathcal{N}) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f_0 - \operatorname{div} \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où les coefficients b_{ij} sont tels que

$$b_{ij} \in C(\overline{\Omega}), \quad b_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ avec } \alpha > 0.$$

Alors, soit u la solution du problème (\mathcal{N}) ; il existe $C_p > 0$, telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_p \left(\|u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \sum_{i=0}^d \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \right)$$

1.5 Plan de travail

Le plan du travail est le suivant :

1. Dans la première partie, nous étudions le modèle de Darcy-Barenblatt régi par l'approximation λ_ε , $\varepsilon > 0$; nous faisons une approche par semi-discrétisations implicites en temps, ce qui va nous mettre en mesure d'appliquer un théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov pour trouver une solution dans le cas discret en temps. Grâce à des estimations *a priori*, que vérifie cette solution, et à l'aide d'une propriété d'unicité supplémentaire que l'on va mettre en évidence et qui entraînera l'appel au théorème de J. B. Pettis (cf. [30]), on achève la preuve de l'existence d'une solution de la formulation continue dans le cas hilbertien. La méthode utilisée développe de fait des arguments de compacité mis en oeuvre par G. Gagneux et G. Vallet dans [42] et généralisables aux problèmes pseudo-paraboliques, avec termes de transport. Ensuite, en utilisant des théorèmes de N. G. Meyers (cf. [25]) et J. Nečas (cf. [53]), on verra que la propriété de régularité sur l'état initial est héréditaire par le schéma semi-discrétisé, et de la même façon que dans le cas hilbertien, on passe à une formulation continue avec un gain de régularité L^p , $p > 2$. En d'autres termes, si l'état initial est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $p \geq 2$, la solution construite par semi-discrétisation est dans $W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. En fin de la partie, on prouve l'unicité de la solution pour un délai de relaxation τ assez grand, grâce aux inégalités de Sobolev, *via* le gain de régularité.
2. Dans la seconde partie, nous faisons pour le modèle "raide" de Darcy une démarche similaire à la précédente, sauf qu'ici on n'est pas en mesure de passer au cas continu en dimension 2 ; nous prouvons donc l'existence et l'unicité de la solution du modèle discret, puis nous spécifions l'étude pour le cas des phénomènes de sédimentation en transport marin en dimension 1 d'espace. En particulier, nous mettons en évidence le caractère hyperbolique dégénéré de l'équation qui régit ce modèle par divers effets révélateurs : existence de zones mortes et d'effets de cloisonnement, constructions de solutions particulières de type "traveling waves" avec obstacle mobile pour pointer des phénomènes de propagation à vitesse finie. À la fin de la partie, nous donnons, toujours en dimension 1 d'espace, un résultat d'existence d'une solution de formulation continue, en résolvant de fait un problème de Bernoulli d'évolution.
3. Nous présentons dans un appendice un contre-exemple que nous a fourni le professeur L. Ambrosio (ENS Pise) et qui répond à une question que le modèle étudié ici pose de façon récurrente :

Si $\vec{F} \in \{\mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)\}^d$, $d \geq 2$ et si $\operatorname{div} \vec{F}$ calculé au sens des distributions, est dans $\mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$, peut-on affirmer que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ sur $\{\vec{F} = \vec{0}\}$?

On verra que la réponse est non, sans informations supplémentaires, grâce à un résultat de Lusin sur les gradients dû à G. Alberti [1]. Il s'agit d'une question qui joue un rôle important dans les équations d'évolution qui traduisent une loi de conserva-

tion de la masse en dimension d'espace $d \geq 2$:

si

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^1(Q),$$

peut-on affirmer que $\operatorname{div} \vec{q} = 0$ sur $\{\vec{q} = \vec{0}\}$ et donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} 1_{\{\vec{q}=\vec{0}\}} = 0?$$

Un aspect particulier ([11], [6], [7], [12]) est donné lorsque \vec{q} est de la forme $\vec{q} = \lambda \vec{B}$, λ une fonction scalaire et \vec{B} un champ de vecteurs faiblement dérivable, et qu'il s'agit de donner des formules de dérivation à la chaîne pour la divergence au sens des distributions, *i.e.* pour $\operatorname{div}(\lambda \vec{B})$, en particulier lorsque λ est la fonction indicatrice d'un ensemble à périmètre fini.

Sous ces aspects, le cas monodimensionnel est singulier, l'opérateur divergence se réduisant au gradient, pour lequel les résultats de Marcus et Mizel [49] apportent les réponses dans les algèbres $L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ ou plus généralement dans $L^\infty(\Omega) \cap \overline{BV}(\Omega)$, selon A.I. Volpert [57].

Première partie

Modèle de Darcy-Barenblatt

Chapitre 2

Formulation du problème “Darcy-Barenblatt” et existence d’une solution

2.1 Formulation du problème

Soit Ω un domaine borné lipschitzien de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ . Le problème “Darcy-Barenblatt” consiste à trouver une fonction S , \mathcal{L}^3 -mesurable sur $Q :=]0, T[\times \Omega$, vérifiant de manière *informelle* les quatre relations suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) \right] \right\} - \tau \Delta \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.1a)$$

$$S = 0 \quad \text{sur } \Sigma =]0, T[\times \Gamma, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (2.1b)$$

$$S(0, x) = S_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega. \quad (2.1c)$$

avec $\lambda \in \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)$, où \mathcal{H} est le graphe maximal monotone de la fonction de Heaviside. La fonction \vec{V} est supposée \mathcal{L}^3 -mesurable, définie presque partout sur $\Omega \times \mathbb{R}$, à valeurs dans \mathbb{R}^2 , et bornée ainsi que ses dérivées partielles premières. Autrement dit :

$$\vec{V} \in W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2).$$

En particulier, elle est uniformément par rapport à x lipschitzienne en S , c’est-à-dire :

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que } \forall x \in \Omega \quad \forall S, \widehat{S} \in \mathbb{R}, \text{ on a} \\ \left\| \vec{V}(x, S) - \vec{V}(x, \widehat{S}) \right\|_{\mathbb{R}^2} \leq M |S - \widehat{S}|. \quad (2.2)$$

Dans ce chapitre et le chapitre suivant, nous travaillons avec l’approximation λ_ε définie dans la section 1.2. Nous nous proposons alors d’étendre les résultats établis dans sa thèse par A. Mokrani [51] lorsque le modèle prend de plus en compte un terme de transport non linéaire (marin ou éolien) exprimé par le champ de vecteurs \vec{V} .

Par analogie avec les modèles d’asservissements thermiques décrits en 1.3, on prend donc en compte dans ce qui suit l’effet d’une convection forcée.

Nous choisissons un cadre fonctionnel convenable pour donner un sens à chacune des expressions qu’un calcul informel fait rencontrer. Ainsi, on suppose que la configuration initiale S_0 est dans $H_0^1(\Omega)$, et on multiplie l’équation (2.1a) par $v \in H_0^1(\Omega)$, puis on intègre sur Ω ; on peut donc, après l’application de la formule de Green, écrire la formulation variationnelle suivante :

Trouver S_ε dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$ et p.p. $t \in]0, T[$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad (2.3a)$$

$$S_\varepsilon(0, x) = S_0(x) \quad \text{pour presque tout } x \text{ dans } \Omega. \quad (2.3b)$$

2.1.1 Propriétés descriptives des éventuelles solutions

Lemme 2.1. *Sous réserve qu’une solution du problème (2.3) existe, alors cette solution S_ε possède automatiquement les propriétés suivantes :*

1. *la contrainte du taux d’érosion maximal (1.1) est implicitement contenue dans l’équation (2.3a) par le fait que E est une constante positive et que λ_ε s’annule sur \mathbb{R}^- .*
2. *pour presque tout t dans $]0, T[$, S_ε vérifie l’estimation d’énergie :*

$$\left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right) \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] = 0, \quad (2.4)$$

et donc, en particulier pour presque tout t dans $]0, T[$, on dispose de l’estimation d’énergie :

$$\left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\tau} \left(\left\| \nabla S_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)^2} + \left\| \vec{V} \right\|_{\infty} \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \right). \quad (2.5)$$

3. *On dispose d’une information sur les zones d’érosion maximale :*

Si $E > 0$, alors l'ensemble, \mathcal{L}^2 -mesurable, $\{x \in \Omega, \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E = 0\}$ est \mathcal{L}^2 -négligeable, pour presque tout t dans $]0, T[$.

4. La solution S_ε appartient en fait à l'espace $W^{1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$ et on a

$$\|S_\varepsilon\|_{W^{1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \max \left\{ \left(2 \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2CT^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; C^{\frac{1}{2}} \right\}$$

où

$$C = \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 \left(4 \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2 \|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega) \right) e^{(\frac{2T}{\tau})^2}.$$

Preuve :

1. On prend comme fonction-test, la fonction $v = \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^-$, ce qui est un choix licite ; il vient donc du fait que λ_ε est nulle sur \mathbb{R}^- , que pour presque tout t dans $]0, T[$,

$$\int_\Omega \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- dx + \tau \int_\Omega \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- dx = 0,$$

comme E est constante, alors,

$$\nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- = - \left\{ \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- \right\}^2 \leq 0,$$

donc, selon la relation précédente

$$\int_\Omega \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- dx \geq 0.$$

Or

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right) \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- dx = \underbrace{\int_\Omega \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_\Omega E \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- dx}_{\geq 0 \text{ car } E \geq 0}$$

alors, p.p. en t ,

$$\int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- \right\}^2 dx \leq 0$$

c'est-à-dire,

$$\left\| \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right)^- \right\|_{L^2(\Omega)} \leq 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \geq 0, \quad \text{p.p dans } Q.$$

2. On prend maintenant comme fonction-test, la fonction $v = \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}$ et on obtient directement p.p. en t , l'égalité (2.4), qui nous donne p.p. en t , que

$$\tau \left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \left| \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right) \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] dx \right|.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le membre de droite, on trouve p.p. en t ,

$$\left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\tau} \left\| \nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega)^2},$$

et comme \vec{V} est bornée, on obtient (2.5).

3. On prend ici la fonction-test $v = \int_0^{\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}} \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u+E)+\eta}$, avec $\eta > 0$. Il vient, p.p. dans $]0, T[$, que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \left(\int_0^{\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}} \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u+E)+\eta} \right) dx + \int_{\Omega} \tau \frac{(\nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t})^2}{\lambda_\varepsilon(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E) + \eta} dx \\ \leq \int_{\Omega} \frac{\lambda_\varepsilon(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E)}{\lambda_\varepsilon(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E) + \eta} \left| (\nabla S_\varepsilon + \vec{V}) \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right) \right| dx, \end{aligned}$$

d'où, par le théorème de convergence monotone de Beppo Lévi quand $\eta \rightarrow 0$, p.p. en t ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \left(\int_0^{\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}} \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u+E)} \right) dx + \int_{\Omega} \tau \frac{(\nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t})^2}{\lambda_\varepsilon(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E)} dx \\ \leq \int_{\Omega} \left| (\nabla S_\varepsilon + \vec{V}) \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right) \right| dx. \end{aligned}$$

Cette estimation est beaucoup plus subtile que celles données en (2.4) et (2.5) et donne des informations sur le comportement des éventuelles solutions dans et au voisinage des zones critiques où l'on est proche du taux maximal d'érosion admissible. On observe donc que pour presque tout t , l'expression $\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \int_0^{\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}} \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u+E)}$ est finie \mathcal{L}^2 -presque partout ; or, en particulier,

$$\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \int_0^{\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}} \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u+E)} = E \int_0^E \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u)} \quad \text{sur} \quad \left\{ \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E = 0 \right\};$$

et si $E > 0$, ceci est en contradiction avec le fait que l'intégrale $\int_0^E \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u)}$ diverge car

$$\frac{1}{\lambda_\varepsilon(r)} \geq \frac{\varepsilon}{r} \quad \text{pour } r > 0, \quad (2.6)$$

d'où la conclusion que l'ensemble où le taux d'érosion est maximal est de \mathcal{L}^2 -mesure nulle, pour presque tout t .

4. Élevant l'estimation (2.5) au carré, il vient p.p. en t , que

$$\left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\tau^2} \left(\|\nabla S_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega) \right). \quad (2.7)$$

En utilisant le lemme 1.1, on trouve, pour presque tout t dans $]0, T[$.

$$\|\nabla S_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\nabla S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\left\| \int_0^t \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} d\theta \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On utilise de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on aura p.p. en t

$$\|\nabla S_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\nabla S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2T \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\theta. \quad (2.8)$$

Donc, il vient de (2.7) que, p.p. en t ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{2}{\tau^2} \left[2\|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega) \right] \\ &\quad + \frac{4T}{\tau^2} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\theta. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'utiliser le lemme de Gronwall pour obtenir, pour presque tout t dans $]0, T[$,

$$\left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\tau^2} \left(4\|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega) \right) e^{(\frac{2T}{\tau})^2}.$$

Cette dernière estimation nous donne que $\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}$ est, en fait, dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Mais S_ε aussi, y était déjà, car

$$H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \subset L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

D'où

$$S_\varepsilon \in W^{1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

De plus, en posant

$$C(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \left(4\|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega) \right) e^{(\frac{2T}{\tau})^2},$$

on trouve de (2.8),

$$\|S_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2\|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2C(\tau)T^2.$$

Donc on a

$$\|S_\varepsilon\|_{W^{1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \max \left\{ \left(2\|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2C(\tau)T^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; C(\tau)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2.9)$$

2.2 Existence d'une solution

2.2.1 Approche par semi-discrétisations implicites

On discrétise implicitement par rapport au temps, et soit $h > 0$ le pas de cette discrétisation. On suppose que S_0 est dans $H_0^1(\Omega)$. On cherche dans ce paragraphe la configuration $S_\varepsilon(h, x)$ pour presque tout x de Ω ; pour cela on considère le problème suivant :

Trouver S_ε dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on aura

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

dont on va montrer l'existence d'une solution par une méthode de point fixe.

Considérons d'abord, pour un élément quelconque g de $H_0^1(\Omega)$, le problème linéaire suivant :

Trouver S_ε^g dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on ait

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^g - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^g + \vec{V}(x, g) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^g - S_0}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ce problème admet d'après le théorème de Lax-Milgram une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$. Si cette solution $S_\varepsilon^g = g$ alors le problème (2.10) a une solution. C'est ce que nous prouvons par la suite.

On prend $v = S_\varepsilon^g$ dans (2.11), et on remarque que

$$(S_\varepsilon^g - S_0) S_\varepsilon^g = \frac{1}{2} |S_\varepsilon^g|^2 + \frac{1}{2} |S_\varepsilon^g - S_0|^2 - \frac{1}{2} |S_0|^2,$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \|S_\varepsilon^g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{h} \|S_\varepsilon^g - S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) \|\nabla S_\varepsilon^g\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dx \\ + \frac{\tau}{h} \|S_\varepsilon^g\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{h} \|S_\varepsilon^g - S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ = \frac{1}{h} \|S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{h} \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) \vec{V} \cdot \nabla S_\varepsilon^g \, dx. \end{aligned}$$

D'où l'estimation :

$$\frac{\tau}{h} \|S_\varepsilon^g\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{h} \|S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{h} \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|\vec{V}\|_\infty \sqrt{mes(\Omega)} \|S_\varepsilon^g\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donc

$$\tau \|S_\varepsilon^g\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + h\|\vec{V}\|_\infty^2 mes(\Omega) + h \|S_\varepsilon^g\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

et finalement, on trouve, pour $h \in]0, \tau[$,

$$\|S_\varepsilon^g\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{\max(1, \tau)}{\tau - h} \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{h}{\tau - h} \|\vec{V}\|_\infty^2 mes(\Omega)}.$$

Donc, pour tout g de $H_0^1(\Omega)$, la solution S_ε^g du problème (2.11) se trouve dans une boule fermée de $H_0^1(\Omega)$. On définit alors l'application :

$$\begin{aligned} \phi : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ g &\longmapsto S_\varepsilon^g \end{aligned}$$

pour chercher si elle possède un point fixe.

Si on note

$$r = \sqrt{\frac{\max(1, \tau)}{\tau - h} \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{h}{\tau - h} \|\vec{V}\|_\infty^2 mes(\Omega)}, \quad (2.12)$$

alors la boule fermée $\overline{B}_{H_0^1}(0, r)$, de $H_0^1(\Omega)$, est stable par ϕ , autrement dit $\phi(\overline{B}_{H_0^1}(0, r)) \subset \overline{B}_{H_0^1}(0, r)$; et comme cette boule est non vide, fermée, bornée, convexe, et dans un espace séparable et réflexif, alors, pour appliquer le théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov sur l'application ϕ , on va montrer que cette dernière est faiblement-faiblement séquentiellement continue de $\overline{B}_{H_0^1}(0, r)$ dans $\overline{B}_{H_0^1}(0, r)$; c'est-à-dire, on montre que : si une suite $(g_n)_n \subset \overline{B}_{H_0^1}(0, r)$, converge faiblement vers un élément g de $\overline{B}_{H_0^1}(0, r)$, alors la suite $(S_\varepsilon^{g_n})_n$ converge faiblement vers S_ε^g dans $H_0^1(\Omega)$. On utilise ici le fait que la topologie faible est métrisable sur les bornés, $H_0^1(\Omega)$ étant séparable.

Soit donc $(g_n)_n \subset \overline{B}_{H_0^1}(0, r)$ une suite convergeant faiblement vers un élément g de $\overline{B}_{H_0^1}(0, r)$, et $(S_\varepsilon^{g_n})_n$ la suite image associée par ϕ . Comme la suite $(S_\varepsilon^{g_n})_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, alors on peut en extraire une sous-suite, notée $(S_\varepsilon^{g_j})_j$, qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$; il existe alors $\chi \in H_0^1(\Omega)$ tel que : lorsque $j \rightarrow +\infty$,

$$S_\varepsilon^{g_j} \rightharpoonup \chi, \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \quad (2.13)$$

et évidemment, on a lorsque $j \rightarrow +\infty$,

$$g_j \rightharpoonup g, \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, alors, lorsque $j \rightarrow +\infty$,

$$g_j \rightarrow g \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega)$$

et pour une sous-suite de (g_j) , notée (g_k) , on a, lorsque $k \rightarrow +\infty$,

$$g_k \rightarrow g \quad \text{p.p. dans } \Omega; \quad (2.14)$$

et évidemment, de (2.13) on a, lorsque $k \rightarrow +\infty$,

$$S_\varepsilon^{g_k} \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \quad (2.15)$$

Maintenant, comme λ_ε est lipschitzienne, et comme \vec{V} l'est aussi par rapport à sa deuxième variable d'après (2.2), alors on trouve, lorsque $k \rightarrow +\infty$, que

$$\lambda_\varepsilon \left(\frac{g_k - S_0}{h} + E \right) \rightarrow \lambda_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (2.16)$$

et que

$$\vec{V}(x, g_k) \rightarrow \vec{V}(x, g) \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (2.17)$$

De (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), on peut passer à la limite dans la suite des problèmes linéaires de terme général :

Pour tout terme g_k de la suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$, trouver S^{g_k} dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^{g_k} - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{g_k - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^{g_k} + \vec{V}(x, g_k) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^{g_k} - S_0}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

On obtient à la limite, lorsque $k \rightarrow +\infty$, le problème variationnel :

Trouver χ dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\chi - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla \chi + \vec{V}(x, g) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\omega} \nabla \left(\frac{\chi - S_0}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

D'où

$$\chi = S_\varepsilon^g,$$

par l'argument d'unicité ; et en outre, l'unicité du point d'accumulation assure *a posteriori* qu'il n'est pas nécessaire dans la démarche précédente d'extraire des sous-suites : en d'autres termes, toute la suite $S_\varepsilon^{g_n}$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers S_ε^g . Ainsi l'application ϕ est faiblement-faiblement séquentiellement continue, et donc d'après le théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov, l'application ϕ possède au moins un point fixe, et par conséquent le problème (2.10) a une solution.

Nous avons donc démontré la

Proposition 2.2. Soient $S^0 \in H_0^1(\Omega)$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{T}{N}$; alors, il existe une famille $(S_\varepsilon^i)_{1 \leq i \leq N}$, telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, et pour tout i , on ait

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^{i+1} + \vec{V}(x, S_\varepsilon^{i+1}) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

De plus,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \geq 0, \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

2.2.2 Passage à la formulation continue

Notre objectif dans ce paragraphe est de faire tendre le pas de discrétisation h vers 0^+ pour obtenir de manière continue une configuration $S_\varepsilon(t, \cdot)$ pour tout instant t dans l’intervalle $[0, T]$. Pour cela, on va mettre en oeuvre une méthode de compacité fondée sur le fait qu’à chaque instant, on pourra construire des sous-suites extraites, de rang dépendant de t , mais dont le point d’accumulation est unique en son genre. On montre alors la

Théorème 2.3. Pour une configuration initiale $S_0 \in H_0^1(\Omega)$, il existe au moins une fonction S_ε représentative de la topographie, vérifiant

$$S_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \geq 0 \quad p.p. \text{ dans } Q$$

$$S_\varepsilon(0, \cdot) = S_0 \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

et régie par l’équation variationnelle, p.p. en $t \in]0, T[$ et quel que soit v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Preuve :

À partir des configurations discrètes connues d’après la proposition 2.2, on construit les fonctions suivantes, définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$:

$$S_\varepsilon^h(t) = \sum_{i=0}^{N-1} S_\varepsilon^{i+1} 1_{]ih, (i+1)h]}(t), \quad (2.20)$$

$$\tilde{S}_\varepsilon^h(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} (t - ih) + S_\varepsilon^i \right] 1_{]ih, (i+1)h]}(t), \quad \tilde{S}_\varepsilon^h(0) = S_0 \quad (2.21)$$

et on note que la dérivée $\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h$ calculée au sens de $\mathcal{D}'(0, T; H_0^1(\Omega))$, est la fonction étagée

$$\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} 1_{]ih, (i+1)h]}(t), \quad (2.22)$$

où $S_\varepsilon^i := S_\varepsilon(ih, \cdot)$, $0 \leq i \leq N$ et $S_\varepsilon^0 = S_0$; on a donc

$$\|S_\varepsilon^h\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 = \sum_{i=1}^N h \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

$$\|\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} = \max_{i \in \{0, 1, \dots, N-1\}} \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}$$

et

$$\|\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{h} \|S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

Donc, en utilisant les notations des fonctions \tilde{S}_ε^h et $\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h$, il vient de l'équation (2.18) que pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^h(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon^h(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_{\Omega} \nabla \partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On s'intéresse à montrer que les suites $(S_\varepsilon^h)_h$ et $(\tilde{S}_\varepsilon^h)_h$ sont, indépendamment de h , bornées respectivement dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$.

En prenant comme fonction-test, dans (2.18), la fonction $v = \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h}$, il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right)^2 \, dx + \tau \int_{\Omega} \left[\nabla \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right) \right]^2 \, dx \\ \leq \int_{\Omega} \left| \left[\nabla S_\varepsilon^{i+1} + \vec{V}(x, S_\varepsilon^{i+1}) \right] \cdot \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right) \right| \, dx \end{aligned}$$

d'où, en particulier, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\tau \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\|S_\varepsilon^{i+1}\|_{H_0^1(\Omega)} + \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|\vec{V}\|_\infty \right). \quad (2.24)$$

En outre, on peut écrire

$$\nabla S_\varepsilon^{i+1} = \nabla S^0 + h \sum_{k=1}^{i+1} \left(\nabla \frac{S_\varepsilon^k - S_\varepsilon^{k-1}}{h} \right)$$

de sorte qu'il vient l'estimation :

$$\|S_\varepsilon^{i+1}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|S^0\|_{H_0^1(\Omega)} + h \sum_{k=1}^{i+1} \left\| \frac{S_\varepsilon^k - S_\varepsilon^{k-1}}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (2.25)$$

Donc, d'après (2.24),

$$\tau \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|\vec{V}\|_\infty + \|S^0\|_{H_0^1(\Omega)} + h \sum_{k=1}^{i+1} \left\| \frac{S_\varepsilon^k - S_\varepsilon^{k-1}}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (2.26)$$

D'où

$$(\tau - h) \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|\vec{V}\|_\infty + \|S^0\|_{H_0^1(\Omega)} + h \sum_{k=1}^i \left\| \frac{S_\varepsilon^k - S_\varepsilon^{k-1}}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

En faisant l'hypothèse, légitime en faveur du passage au cas continu, que $h < \tau$, on peut utiliser le lemme de Gronwall discret (1.2) qui nous donne, sous cette hypothèse, que

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|\vec{V}\|_\infty + \|S^0\|_{H_0^1(\Omega)}}{\tau - h} \exp\left(\frac{T}{\tau - h}\right),$$

et en faisant maintenant définitivement l'hypothèse que $h < \frac{\tau}{2}$, on obtient que

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\tau} \left(\sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|\vec{V}\|_\infty + \|S^0\|_{H_0^1(\Omega)} \right) e^{\frac{2T}{\tau}}. \quad (2.27)$$

Cette estimation ouvre la voie à la résolution du problème ; elle nous donne directement que la suite $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t})_h$ demeure dans un borné fixe (ne dépend pas de h) de $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, ce qui implique, d'après l'inégalité (2.25), que la suite $(S_\varepsilon^h)_h$ demeure elle aussi dans un borné fixe de $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Cela dit aussi que la suite $(\tilde{S}_\varepsilon^h)_h$ est bornée dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, car

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} (t - ih) + S_\varepsilon^i \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq T \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\| + \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc, $(\tilde{S}_\varepsilon^h)_h$ est uniformément, par rapport à h , bornée dans $W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, ce qui implique qu'il existe une sous-suite, qu'on note $(\tilde{S}_\varepsilon^{h_j})_{h_j}$, et qu'il existe un élément de $W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, qu'on note S_ε , tels que, lorsque $h_j \rightarrow 0$,

$$\tilde{S}_\varepsilon^{h_j} \rightharpoonup_* S_\varepsilon \quad \text{faible } -* \text{ dans } W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.28)$$

et d'après la continuité séquentielle de l'opérateur de dérivation dans $\mathcal{D}'(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, on a en particulier

$$\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_j}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (2.29)$$

Par ailleurs, comme pour tout h , la fonction \tilde{S}_ε^h est continue sur $[0, T]$ à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ pour un choix approprié de représentant ; alors, pour tout $t \in [0, T]$, on peut considérer l'application :

$$\begin{aligned} W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) &\rightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto u(t). \end{aligned}$$

Cette application est linéaire et continue pour les topologies naturelles, donc faiblement-faiblement continue et ainsi,

$$\tilde{S}_\varepsilon^{h_j}(t) \rightharpoonup S_\varepsilon(t) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Or, pour $t \in]ih, (i+1)h]$, $0 \leq i \leq N-1$, on a

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^h(t) - \tilde{S}_\varepsilon^h(t) &= S_\varepsilon^{i+1} - \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h}(t - ih) - S^i \\ &= S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i - \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h}(t - ih) \\ &= \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h}(h - t + ih) \\ &= \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} [(i+1)h - t]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Donc, considérant $t \in]ih, (i+1)h]$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left\| S_\varepsilon^h(t) - \tilde{S}_\varepsilon^h(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)} &= \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} [(i+1)h - t] \\ &= \left\| \partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)} [(i+1)h - t] \\ &\leq Ch, \quad \text{d'après (2.27)}. \end{aligned}$$

Alors, on en déduit que

$$S_\varepsilon^{h_j}(t) \rightharpoonup S_\varepsilon(t) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

et de la compacité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il vient que

$$S_\varepsilon^{h_j}(t) \rightarrow S_\varepsilon(t) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),$$

et pour une sous-suite de $(S_\varepsilon^{h_j}(t))_{h_j}$, notée $(S_\varepsilon^{h_{j_k}}(t))_{h_{j_k}}$, on a

$$S_\varepsilon^{h_{j_k}}(t) \rightarrow S_\varepsilon(t) \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (2.31)$$

et on signale que

$$S_\varepsilon^{h_{j_k}}(t) \rightharpoonup S_\varepsilon(t) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \quad (2.32)$$

D'autre part, comme la suite $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t})_h$ demeure dans un borné fixe de $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, alors, pour tout t de $[0, T] \setminus Z$, où Z est un ensemble négligeable, il existe une sous-suite de $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(t))_h$, on la note $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_n}}{\partial t}(t))_{h_n}$, et il existe un élément $\chi_\varepsilon(t)$ de $H_0^1(\Omega)$ tels que, quand $h_n \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_n}}{\partial t}(t) &\rightharpoonup \chi_\varepsilon(t) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ \frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_n}}{\partial t}(t) &\rightarrow \chi_\varepsilon(t) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

et pour une sous-suite de $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_n}}{\partial t}(t))_{h_n}$, notée $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_j}}}{\partial t}(t))_{h_{n_j}}$, on a

$$\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_j}}}{\partial t}(t) \rightarrow \chi_\varepsilon(t) \quad \text{presque partout dans } \Omega,$$

Le point-clef de la démonstration consiste à montrer que $\chi_\varepsilon(t)$ est unique en son genre car il vérifie une propriété supplémentaire que l'on va mettre en évidence et qui entraînera que le contingent des points d'accumulation possibles pour $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(t))_h$ est un singleton. Par un argument classique, il s'ensuivra que toute la suite $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(t))_h$ converge vers $\chi_\varepsilon(t)$. De fait, la méthode développe implicitement un argument de compacité.

Pour $t \in]0, T[\setminus Z$, il est possible désormais de passer à la limite dans (2.23), puisque, si $h_{n_j} \rightarrow 0^+$,

$$\lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_j}}}{\partial t}(t) + E \right) \nabla v \rightarrow \lambda_\varepsilon (\chi_\varepsilon(t) + E) \nabla v \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ fort}$$

$$\begin{aligned} \nabla S_\varepsilon^{h_{n_j}}(t) &\rightharpoonup \nabla S_\varepsilon(t) \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega)^d \\ \vec{V}(x, S_\varepsilon^{h_{n_j}}(t, x)) &\rightarrow \vec{V}(x, S_\varepsilon(t, x)) \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ fort} \end{aligned}$$

par des arguments classiques de continuité et de convergence dominée, compte-tenu des informations déjà connues.

On observe alors que $\chi_\varepsilon(t)$ est solution du problème stationnaire quasi-linéaire annexe ainsi formulé :

Trouver $w \in H_0^1(\Omega)$, vérifiant

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} wv \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon(w+E) \left[\nabla S_\varepsilon(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = 0. \quad (2.33)$$

En outre, ce problème admet une solution unique, par le fait que la fonction λ_ε est lipschitzienne ($lip_{\lambda_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$) et que $\nabla S_\varepsilon(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon(t))$ appartient à $L^2(\Omega)^d$. C’est ce que nous affirme le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Le problème (2.33) a au plus une solution.*

Preuve :

On considère qu’il y a deux solutions éventuelles w et \hat{w} . On fait la soustraction entre les deux formulations associées, et on prend la fonction-test $v = p_\mu(w - \hat{w})$, où pour $\mu > 0$,

$$p_\mu(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq \mu \\ \ln \frac{er}{\mu} & \text{si } r \in \left[\frac{\mu}{e}, \mu \right] \\ 0 & \text{si } r \leq \frac{\mu}{e} \end{cases}$$

On prend, pour représentant borélien borné de p'_μ ,

$$p'_\mu(r) = \frac{1}{r} 1_{\left[\frac{\mu}{e}, \mu \right]}(r)$$

et en sachant que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \nabla p_\mu(v) = p'_\mu(v) \nabla v \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Donc, il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w - \hat{w}) p_{\mu}(w - \hat{w}) \, dx + \tau \int_{\Omega \cap \{\frac{\mu}{\varepsilon} \leq w - \hat{w} \leq \mu\}} \frac{1}{w - \hat{w}} |\nabla w - \nabla \hat{w}|^2 \, dx \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega \cap \{\frac{\mu}{\varepsilon} \leq w - \hat{w} \leq \mu\}} \left| \nabla S_{\varepsilon}(t) + \vec{V}(x, S_{\varepsilon}(t)) \right| |\nabla w - \nabla \hat{w}| \, dx, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\int_{\Omega} (w - \hat{w}) p_{\mu}(w - \hat{w}) \, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega \cap \{\frac{\mu}{\varepsilon} \leq w - \hat{w} \leq \mu\}} \left| \nabla S_{\varepsilon}(t) + \vec{V}(x, S_{\varepsilon}(t)) \right| |\nabla w - \nabla \hat{w}| \, dx. \quad (2.34)$$

Et comme, lorsque $\mu \rightarrow 0^+$,

$$1_{[\frac{\mu}{\varepsilon}, \mu]} \rightarrow 0 \quad \text{simplement dans } \mathbb{R},$$

et

$$p_{\mu} \rightarrow \text{sign}_0^+ \quad \text{simplement dans } \mathbb{R},$$

où

$$\text{sign}_0^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r \leq 0, \end{cases}$$

alors, par la convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons, quand $\mu \rightarrow 0^+$ dans (2.34), que

$$\|(w - \hat{w})^+\|_{L^1(\Omega)} \leq 0,$$

c'est-à-dire,

$$w \leq \hat{w},$$

et, en permutant les rôles de w et \hat{w} , on a

$$w = \hat{w} \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

d'où l'unicité de la solution du problème (2.33). \square

D'après ce lemme, $\chi_{\varepsilon}(t)$ est unique en son genre. et en simplifiant la notation, on retient que pour $t \in]0, T[\setminus Z$, $\mathcal{L}^1(Z) = 0$, la suite

$$\frac{\partial \tilde{S}_{\varepsilon}^h}{\partial t}(t) \rightharpoonup \chi_{\varepsilon}(t) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

outre les autres propriétés de convergence établies en amont pour le même choix d'indices h , indépendamment de t désormais.

Il reste à identifier χ_{ε} . Pour cela, on observe deux étapes enchaînées que regroupe le lemme qui suit.

Lemme 2.5.

1. χ_ε est fortement mesurable de $]0, T[$ à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$.
2. $\chi_\varepsilon = \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}$ p.p. dans Q .

Preuve :

1. pour tout $F \in H^{-1}(\Omega)$, la fonction numérique

$$t \longmapsto \langle F, \chi_\varepsilon(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$$

est mesurable comme limite simple des fonctions mesurables

$$t \longmapsto \langle F, \frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad t \in]0, T[\setminus Z.$$

Donc, χ_ε est faiblement mesurable de $]0, T[$ dans $H_0^1(\Omega)$, et comme $H_0^1(\Omega)$ est séparable, le théorème 1.3 (théorème de J. B. Pettis, cf. [30]) assure que χ_ε est fortement mesurable de $]0, T[$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2. pour tout v de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

$$\int_\Omega \nabla \frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t} \cdot \nabla v \, dx \quad \rightarrow \quad \int_\Omega \nabla \chi_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx \quad \text{p.p. dans }]0, T[; \\ \text{quand } h \rightarrow 0^+$$

et puisqu'on dispose, p.p. en t , de la majoration uniforme :

$$\left| \int_\Omega \nabla \frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(t, x) \cdot \nabla v(t, x) \, dx \right| \leq C \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

pour une constante universelle C , d'après l'estimation *a priori* dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ pour $\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}$, on déduit du théorème de convergence dominée la convergence faible dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ de $\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}$ vers χ_ε . Il en résulte immédiatement que

$$\chi_\varepsilon = \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}$$

selon (2.29) et le fait que la topologie faible de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ est séparée. \square

En outre, puisque la suite \tilde{S}_ε^h converge faiblement vers S_ε dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, il s’ensuit que

$$\tilde{S}_\varepsilon^h(0) \rightharpoonup S_\varepsilon(0) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega)$$

et puisque, par construction,

$$\tilde{S}_\varepsilon^h(0) = S_0,$$

on a

$$S_\varepsilon(0) = S_0$$

puisque la topologie $\sigma(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))$ est séparée.

Reportant $w = \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t)$ dans la formulation (2.33), on trouve (2.19).

Enfin, le cadre fonctionnel du théorème rend légitime le choix de la fonction-test : $v = (\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) + E)^-$ presque partout en t , et le fait que $\lambda_{\varepsilon|\mathbb{R}^-} = 0$, que $\tau > 0$ et que $E \geq 0$ assure la propriété effective de taux d’érosion limité

$$\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q. \quad \square$$

Chapitre 3

Régularité et unicité de la solution

3.1 Résultat de régularité

On indique de façon liminaire que les résultats prouvés dans cette section sont propres à une dimension d'espace $d \leq 2$ si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ce qui est spécifiquement le cas du modèle de géologie, puisque Ω représente la base horizontale du bassin sédimentaire. Un premier résultat classique de N. G. Meyers (le théorème 1.4) permet un gain de régularité en faisant passer du cadre $H_0^1(\Omega)$ à $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $p > 2$, mais en pratique très voisin de 2^+ . Dès lors, ce gain limité de régularité permet cependant de mettre en lumière que le système semi-discrétisé approchant est constitué d'équations elliptiques à coefficients höldériens sur $\bar{\Omega}$ et par les résultats de J. Nečas (le théorème 1.5), on en déduit que la régularité sur l'état initial se transmet totalement à chaque itéré. Les énoncés de ces théorèmes se trouvent dans la section 1.4 du chapitre 1.

Nous commençons par le lemme suivant qui concerne la régularité dans le cas discret :

Lemme 3.1. *Soit $S_\varepsilon^0 := S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$, et soit $h = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ la solution S_ε^{i+1} du problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_\varepsilon^{i+1} \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} v \, dx + \int_\Omega \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^{i+1} + \vec{V}(x, S_\varepsilon^{i+1}) \right] \nabla v \, dx \\ \quad + \tau \int_\Omega \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0, \end{array} \right.$$

appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve :

On a déjà trouvé dans le paragraphe 2.2.1 du chapitre précédent, que pour $S_0 \in H_0^1(\Omega)$, il existe un $S_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, solution de

Trouver $S_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Grâce à la régularité de λ_ε et de \vec{V} , la formulation (3.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) + \frac{\tau}{h} \right] \nabla S_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx \\ = \langle \operatorname{div} \left\{ \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right\} + \frac{\tau}{h} \Delta S_0 - \frac{S_\varepsilon - S_0}{h}, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On pose

$$F = \operatorname{div} \left\{ \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right\} + \frac{\tau}{h} \Delta S_0 - \frac{S_\varepsilon - S_0}{h},$$

et on pose aussi, pour $i, j = 1, 2$; $b_{ij} = \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) + \frac{\tau}{h} \right] \delta_{ij}$.

Ainsi, on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx = \langle F, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)},$$

et comme

$$\frac{\tau}{h} \leq \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) + \frac{\tau}{h} \leq 1 + \frac{\tau}{h} \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (3.2)$$

alors, la matrice diagonale $B = (b_{ij})_{ij}$ est à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$; et elle vérifie que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\tau}{h} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \xi_i \xi_j \leq \left(1 + \frac{\tau}{h} \right) |\xi|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le théorème 1.4 (de N. G. Meyers) pour dire qu'il existe un réel $p_0 > 2$ tel que pour tout $p \in [2, p_0]$ il existe une constante $C(p) > 0$, telle que, si $F \in W^{-1,p}(\Omega)$, alors, $S \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Or, pour que F soit dans $W^{-1,p}(\Omega)$ il suffit que S_0 soit dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. En conséquence, nous avons donc, d'après le résultat de Meyers, qu'il existe $p_0 > 2$ tel que, en particulier, pour $S_0 \in W_0^{1,p_0}(\Omega)$ la solution correspondante S_ε , du problème (3.1), appartient à $W_0^{1,p_0}(\Omega)$. En fait, cette valeur de p_0 est en pratique très voisine de 2 et dépend clairement de l'itération; cependant, on

va prouver que cette information partielle suffit à établir que $p_0 = p$ à chaque itération si $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$. En effet, la bonne chose que nous apporte ce dernier résultat est que S_ε est maintenant dans $C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ avec $\theta = 1 - \frac{2}{p} > 0$, ce qui implique, grâce au fait que λ_ε est höldérienne, que les coefficients b_{ij} sont maintenant dans $C(\overline{\Omega})$, et même höldériens. **On note ici que la dimension de l'espace \mathbb{R}^d dans lequel est plongé Ω est essentielle : $d \leq 2$; si $d = 3$, la méthode développée ici n'est pas applicable.**

D'autre part, (3.1) peut nous donner que

$$-\operatorname{div} \left\{ \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) + \frac{\tau}{h} \right] \nabla S_\varepsilon \right\} = -\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + \operatorname{div} \left\{ \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \vec{V}(x, S_\varepsilon) + \frac{\tau}{h} \nabla S_0 \right\}.$$

Donc, en posant

$$f_0 = -\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} \quad (\in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty \text{ par les injections de Sobolev})$$

et

$$\vec{f} = - \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \vec{V}(x, S_\varepsilon) + \frac{\tau}{h} \nabla S_0 \right] \quad (\in L^p(\Omega)^2 \text{ si } S_0 \in W^{1,p}(\Omega)),$$

on peut écrire

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial x_j} \right) = f_0 - \operatorname{div} \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ S_\varepsilon = S_0 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Donc, si $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 2$, alors $S_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, d'après le théorème 1.5 (résultat de J. Nêčas). De plus, il existe $C_p > 0$ telle que

$$\|S_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_p \left(\|S_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|f_0\|_{L^p(\Omega)} + \|\vec{f}\|_{L^p(\Omega)^2} \right).$$

Le gain de régularité faisant passer de $H_0^1(\Omega)$ à $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $p > 2$ est uniforme par rapport à chaque itération, et se transmet par hérédité. Ainsi, le lemme 3.1 est prouvé. \square

On montre maintenant que la solution de la formulation continue, déjà trouvée dans $W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, est, en fait, dans $W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, pour $p > 2$.

Théorème 3.2. *Pour $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 2$, la solution S_ε , donnée par le théorème 2.3, est dans $W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$.*

Preuve :

En utilisant les fonctions S_ε^h et \tilde{S}_ε^h définies par (2.20) et (2.21) respectivement, on trouve du lemme 3.1 que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $v \in W_0^{1, \frac{p}{p-1}}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) v \, dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon \left(\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^h(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon^h(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_{\Omega} \nabla \partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

On cherche comment peut-on passer à la limite lorsque $h \rightarrow 0^+$ dans (3.3). Pour cela, on écrit l'équation générique du schéma semi-discrétisé sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau \Delta \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right) = -\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \\ \quad + \operatorname{div} \left\{ \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^{i+1} + \vec{V}(x, S_\varepsilon^{i+1}) \right] \right\} \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ i = 0, 1, \dots, N-1. \end{array} \right.$$

Pour tout i fixé, et indépendamment de i , il résulte des classiques résultats sur les problèmes elliptiques (cf. par exemple J. Nečas [53] ou S. Clain [30]) qu'il existe une constante "universelle" C , strictement positive, telle que

$$\tau \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \left[\left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \nabla S_\varepsilon^{i+1} \right\|_{L^p(\Omega)^d} + \left\| \vec{V} \right\|_{L^p(\Omega)^d} \right]. \quad (3.4)$$

En outre, d'après les injections de Sobolev, on peut écrire successivement, grâce aux estimations déjà prouvées dans $H_0^1(\Omega)$, qu'il existe une constante \tilde{C} strictement positive, indépendante de i et de h , telle que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{L^p(\Omega)} &\leq \tilde{C} \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \tilde{C} = \tilde{C}(p, \Omega), \\ &\leq C(\Omega, \|\vec{V}\|_\infty, S_0) \quad \text{d'après (2.27)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Et comme

$$\nabla S_\varepsilon^i = \nabla S^0 + h \sum_{k=0}^{i-1} \left(\nabla \frac{S_\varepsilon^{k+1} - S_\varepsilon^k}{h} \right),$$

alors,

$$\|\nabla S_\varepsilon^{i+1}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq \|\nabla S^0\|_{L^p(\Omega)^d} + h \sum_{k=1}^{i+1} \left(\left\| \nabla \frac{S_\varepsilon^k - S_\varepsilon^{k-1}}{h} \right\|_{L^p(\Omega)^d} \right). \quad (3.6)$$

On note que, comme Ω est borné,

$$\|\vec{V}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq C(\Omega) \|\vec{V}\|_\infty. \quad (3.7)$$

Donc, de (3.5), (3.6), (3.7) et (3.4), il vient que

$$\tau \left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \|\vec{V}\|_\infty, S_0) + h \sum_{k=1}^{i+1} \left(\left\| \nabla \frac{S_\varepsilon^k - S_\varepsilon^{k-1}}{h} \right\|_{L^p(\Omega)^d} \right),$$

et, avec toujours l'hypothèse que $h < \frac{\tau}{2}$, on obtient

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{2}{\tau} C(\Omega, \|\vec{V}\|_\infty, S_0) + \frac{2h}{\tau} \sum_{k=1}^i \left(\left\| \nabla \frac{S_\varepsilon^k - S_\varepsilon^{k-1}}{h} \right\|_{L^p(\Omega)^d} \right).$$

D'où, il vient par le lemme 1.2,

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^{i+1} - S_\varepsilon^i}{h} \right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{2}{\tau} C(\Omega, \|\vec{V}\|_\infty, S_0) \exp\left(\frac{2T}{\tau}\right). \quad (3.8)$$

Ceci nous assure que la suite $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t})_h$, de fonctions définies par (2.22), est, indépendamment de h , bornée dans $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$; et donc, d'après (3.6), les suites $(\tilde{S}_\varepsilon^h)_h$ et $(S_\varepsilon^h)_h$, définies respectivement par (2.21) et (2.20), sont bornées elles aussi, indépendamment de h , dans $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. Donc, en particulier, la suite $(\tilde{S}_\varepsilon^h)_h$ est bornée dans $W^{1,2}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. Le reste de la démonstration est similaire à ce que nous avons fait dans la preuve du théorème 2.3.

Pour tout $t \in]0, T[\setminus Z$, avec $\mathcal{L}(Z) = 0$, il existe, dépendamment de t , une sous-suite d'une sous-suite de $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(t))_h$, qu'on note $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_n}}{\partial t}(t))$, et il existe un élément $\zeta_\varepsilon(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tels que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_n}}{\partial t}(t) &\rightharpoonup \zeta_\varepsilon(t) && \text{faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega), \\ &&& \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ &&& \text{presque partout dans } \Omega. \end{aligned}$$

Donc, $\forall t \in]0, T[\setminus Z$,

$$\lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_n}}{\partial t}(t) + E \right) \nabla v \rightarrow \lambda_\varepsilon (\zeta_\varepsilon(t) + E) \nabla v \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ fort.}$$

D'autre part, la sous-suite $(S_\varepsilon^{h_n}(t))_n$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc, on peut en extraire une sous-suite $(\tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_j}}(t))_j$, et il existe un élément $S_\varepsilon(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tels que, lorsque $h_j \rightarrow 0$,

$$\tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_j}}(t) \rightharpoonup S_\varepsilon(t) \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega),$$

et par l'injection compacte de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_j}}(t) \rightarrow S_\varepsilon(t) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$

Par ailleurs, on trouve, de (2.30), que pour $t \in]ih, (i+1)h[$,

$$\left\| S_\varepsilon^h(t) - \tilde{S}_\varepsilon^h(t) \right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq Ch,$$

donc, on en déduit que

$$S_\varepsilon^{h_{n_j}}(t) \rightarrow S_\varepsilon(t) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),$$

et, finalement pour une sous-suite $\{S_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}(t)\}$ on a

$$S_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}(t) \rightarrow S_\varepsilon(t) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \nabla S_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}(t) &\rightharpoonup \nabla S_\varepsilon(t) \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega)^d \\ \vec{V}(x, S_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}(t)) &\rightarrow \vec{V}(x, S_\varepsilon(t)) \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ fort.} \end{aligned}$$

On peut désormais, pour tout $t \in]0, T[\setminus Z$, passer à la limite, quand $h_{n_{j_k}} \rightarrow 0$, dans

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}}{\partial t}(t) v \, dx + \int_\Omega \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}}{\partial t}(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_\Omega \nabla \frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^{h_{n_{j_k}}}}{\partial t}(t) \cdot \nabla v \, dx = 0, \end{aligned}$$

et, on observe alors que $\zeta_\varepsilon(t)$ est solution du problème (2.33), dont on a déjà affirmé l'unicité de sa solution par le lemme 2.4 dans le chapitre 2. Cela signifie que $\zeta_\varepsilon(t)$ est unique en son genre, et donc, la suite $(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(t))_h$ converge entièrement vers $\zeta_\varepsilon(t)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ – faible, et en utilisant le théorème 1.3 (théorème de J. B. Pettis, cf. [30] page 131) on montre que $\zeta_\varepsilon = \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}$, et que $S_\varepsilon(0) = S_0$. \square

Remarque 3.1. On peut remarquer d'après (2.20), que pour tout t ,

$$\|S_\varepsilon^h(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|S_\varepsilon^{i+1}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \mathbf{1}_{]ih, (i+1)h[}$$

et d'après (3.6) et (3.8) on a

$$\|S_\varepsilon^{i+1}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + h \sum_{k=0}^{i+1} \left[\frac{2}{\tau} C(\Omega, \|\vec{V}\|_\infty, S_0) \exp\left(\frac{2T}{\tau}\right) \right].$$

Comme $i \leq N - 1$ et $Nh = T$, alors,

$$\|S_\varepsilon^{i+1}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{2T}{\tau} C(\Omega, \|\vec{V}\|_\infty, S_0) \exp\left(\frac{2T}{\tau}\right).$$

D'où

$$\|S_\varepsilon^h(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{2T}{\tau} C(\Omega, \|\vec{V}\|_\infty, S_0) \exp\left(\frac{2T}{\tau}\right).$$

Finalement et d'après la convergence faible de $S_\varepsilon^h(t)$ vers $S_\varepsilon(t)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour presque tout t dans $]0, T[$, on a, par semi-continuité inférieure, que

$$\|S_\varepsilon(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{2T}{\tau} C(\Omega, \|\vec{V}\|_\infty, S_0) \exp\left(\frac{2T}{\tau}\right) := \sqrt{C_0(\tau)}, \quad (3.9)$$

3.2 La question de l'unicité de la solution

On montre que pour une donnée initiale S_0 dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $p > 2$, il existe une valeur critique $\tau^* > 0$, telle que pour tout $\tau \geq \tau^*$, le problème de Darcy-Barenblatt correspondant admet une solution unique.

Proposition 3.3. *Pour $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$, il existe une valeur τ^* strictement positive, telle que pour $\tau \geq \tau^*$, il existe une et une seule fonction S_ε représentative de la topographie, vérifiant*

$$\begin{aligned} S_\varepsilon &\in W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \\ \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E &\geq 0 \quad p.p. \text{ dans } Q \\ S_\varepsilon(0, \cdot) &= S_0 \quad p.p. \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

et régie par l'équation variationnelle, p.p. en $t \in]0, T[$ et quel que soit v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) v \, dx + \int_\Omega \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_\Omega \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{aligned}$$

Preuve :

On suppose éventuellement qu'il existe deux solutions S_ε^1 et S_ε^2 pour la même condition initiale $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$.

En faisant la soustraction entre les équations variationnelles régies par les deux solutions S_ε^1 et S_ε^2 , et en prenant la fonction-test $v = \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right)^2 dx + \tau \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^2 + \vec{V}(x, S_\varepsilon^2) \right] \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) dx \\ & \quad - \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^1 + \vec{V}(x, S_\varepsilon^1) \right] \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) dx, \end{aligned}$$

ou bien sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right)^2 dx + \tau \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} + E \right) \nabla (S_\varepsilon^2 - S_\varepsilon^1) \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} + E \right) - \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} + E \right) \right] \nabla S_\varepsilon^1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} + E \right) [\vec{V}(x, S_\varepsilon^2) - \vec{V}(x, S_\varepsilon^1)] \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} + E \right) - \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} + E \right) \right] \vec{V}(x, S_\varepsilon^1) \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{3.10}$$

On va utiliser dans ce qui suit, l'inégalité de Young, sous la forme particulière :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \forall \eta > 0 \quad ab \leq \frac{1}{2\eta} a^2 + \frac{\eta}{2} b^2. \tag{3.11}$$

– Majoration de I_1 :

$$I_1 = \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} + E \right) \nabla (S_\varepsilon^2 - S_\varepsilon^1) \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) dx.$$

En utilisant l'inégalité (3.11), on trouve

$$I_1 \leq \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) \right|^2 dx + \frac{1}{2\eta} \int_{\Omega} |\nabla (S_\varepsilon^2 - S_\varepsilon^1)|^2 dx.$$

Or, $S_\varepsilon^1(0, \cdot) = S_\varepsilon^2(0, \cdot)$ presque partout dans Ω , donc

$$\int_{\Omega} |\nabla(S_\varepsilon^2 - S_\varepsilon^1)|^2 dx = \int_{\Omega} \left[\int_0^t |\nabla(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t})| d\theta \right]^2 dx,$$

et par Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(S_\varepsilon^2 - S_\varepsilon^1)|^2 dx &\leq \int_{\Omega} t \int_0^t |\nabla(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t})|^2 d\theta dx \\ &\leq t \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t})|^2 dx d\theta. \end{aligned}$$

Donc

$$I_1 \leq \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t})|^2 dx + \frac{1}{2\eta} t \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t})|^2 dx d\theta.$$

– Majoration de I_2 :

$$I_2 = \int_{\Omega} \left[\lambda_\varepsilon(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} + E) - \lambda_\varepsilon(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} + E) \right] \nabla S_\varepsilon^1 \cdot \nabla(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t}) dx$$

Comme λ_ε est lipschitzienne, de constante de lipschitz $lip_{\lambda_\varepsilon}$, et en utilisant l'inégalité (3.11), on obtient

$$I_2 \leq \frac{lip_{\lambda_\varepsilon}^2}{2\eta} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} \right)^2 |\nabla S_\varepsilon^1|^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right|^2 dx.$$

Le fait que $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 2$, implique d'après le théorème 3.2 que les deux solutions S_ε^1 et S_ε^2 sont dans $W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, et donc p.p. en t ,

$$|\nabla S_\varepsilon^1|^2 \in L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$$

et grâce aux injections de Sobolev, on a

$$\left(\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right) \in L^q, \quad 1 \leq q < \infty;$$

ce qui nous permet d'utiliser l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{lip_{\lambda_\varepsilon}}{2\eta} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} \right)^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla S_\varepsilon^1|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \\ &\quad + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

D'après l'estimation (3.9), on a

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla S_{\varepsilon}^1|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \leq C_0(\tau),$$

et d'après les injections de Sobolev, grâce à la dimension en espace,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{pour } 1 \leq q < \infty,$$

donc

$$I_2 \leq \frac{C(p, \Omega)C_0(\tau)lip_{\lambda_{\varepsilon}}}{2\eta} \int_{\Omega} \left(\nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right|^2 dx.$$

On observe ici selon (3.9) que plus précisément, la fonction $\tau \mapsto C_0(\tau)$ est décroissante, convergeant à l'infini vers $\|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2$. On peut donc par exemple prendre désormais $\tau \geq \tau_1 > 0$, tel que

$$C_0(\tau) \leq 2\|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2 \quad (3.12)$$

de façon à posséder, pour $\tau \geq \tau_1$, une borne indépendante de τ , ce qui sera utile pour la suite de la méthode.

– Majoration de I_3 :

$$I_3 = \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon} \left(\frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} + E \right) [\vec{V}(x, S_{\varepsilon}^2) - \vec{V}(x, S_{\varepsilon}^1)] \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right) dx.$$

D'après (2.2) on trouve directement

$$\begin{aligned} I_3 &\leq M \int_{\Omega} |S_{\varepsilon}^2 - S_{\varepsilon}^1| \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right| dx \\ &\leq \frac{1}{2\eta} M^2 \int_{\Omega} |S_{\varepsilon}^2 - S_{\varepsilon}^1|^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right|^2 dx, \end{aligned}$$

et de la même façon que dans le calcul de I_1 , on obtient

$$\int_{\Omega} |S_{\varepsilon}^2 - S_{\varepsilon}^1|^2 dx \leq t \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right|^2 dx d\theta.$$

Donc

$$I_3 \leq \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2\eta} M^2 t \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right|^2 dx d\theta,$$

et d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right|^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right|^2 dx,$$

d'où

$$I_3 \leq \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{C(\Omega)}{2\eta} M^2 t \int_0^t \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right|^2 dx d\theta.$$

– Majoration de I_4 :

$$I_4 = \int_{\Omega} \left[\lambda_{\varepsilon} \left(\frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} + E \right) - \lambda_{\varepsilon} \left(\frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} + E \right) \right] \vec{V}(x, S_{\varepsilon}^1) \cdot \nabla \left(\frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right) dx.$$

Comme \vec{V} est bornée sur $\Omega \times \mathbb{R}$, et du fait que λ_{ε} est lipschitzienne, on a

$$I_4 \leq \|\vec{V}\|_{\infty} \text{lip}_{\lambda_{\varepsilon}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right| \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right| dx,$$

et, d'après l'inégalité (3.11), on a

$$I_4 \leq \frac{\|\vec{V}\|_{\infty}^2 \text{lip}_{\lambda_{\varepsilon}}^2}{2\eta} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right|^2 dx,$$

et, en utilisant l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$I_4 \leq \frac{\|\vec{V}\|_{\infty}^2 \text{lip}_{\lambda_{\varepsilon}}^2}{2\eta} C(\Omega) \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right|^2 dx.$$

Après ces calculs, et en posant, $w = \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t}$, il vient de (3.10) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx &\leq \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2\eta} t \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx d\theta \\ &\quad + \frac{C(p, \Omega) C_0(\tau) \text{lip}_{\lambda_{\varepsilon}}^2}{2\eta} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\ &\quad + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \frac{C(\Omega)}{2\eta} M^2 t \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx d\theta \\ &\quad + \frac{\|\vec{V}\|_{\infty}^2 \text{lip}_{\lambda_{\varepsilon}}^2}{2\eta} C(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \end{aligned}$$

donc, finalement,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx &\leq \left(2\eta + \frac{\text{lip}_{\lambda_{\varepsilon}}^2 C(p, \Omega)}{2\eta} \left[C_0(\tau) + \|\vec{V}\|_{\infty}^2 \right] \right) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2\eta} (1 + C(\Omega) M^2) t \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx d\theta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Rappelant que prenant désormais $\tau \geq \tau_1$, et grâce à (3.12), on a indépendamment de τ pris plus grand que τ_1 ,

$$2\eta + \frac{\text{lip}_{\lambda_\varepsilon}^2 C(p, \Omega)}{2\eta} \left[C_0(\tau) + \|\vec{V}\|_\infty^2 \right] \leq 2\eta + \frac{\text{lip}_{\lambda_\varepsilon}^2 C(p, \Omega)}{2\eta} \left(2\|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2 + \|\vec{V}\|_\infty^2 \right) = A(\eta)$$

et dès lors que l'on choisit $\eta > 0$ approprié pour minimiser $A(\eta)$, *i.e.* plus précisément,

$$\eta = \eta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\text{lip}_{\lambda_\varepsilon}^2 C(p, \Omega) \left[C_0(\tau) + \|\vec{V}\|_\infty^2 \right]},$$

on peut à nouveau choisir τ suffisamment grand pour réaliser en outre $\tau - A(\eta_0) > 0$, c'est-à-dire, en fait, après des calculs élémentaires,

$$\tau - 2\sqrt{\text{lip}_{\lambda_\varepsilon}^2 C(p, \Omega) \left[C_0(\tau) + \|\vec{V}\|_\infty^2 \right]} > 0. \quad (3.14)$$

Dans ces conditions, on en déduit, en particulier, de (3.13) qu'il existe une constante strictement positive C_1 telle que

$$\forall t \geq 0, \quad \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq C_1 t \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx d\theta.$$

Utilisant le lemme de Gronwall, il vient

$$\forall t \geq 0, \quad \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = 0,$$

d'où, pour tout $t \in]0, T[$ et p.p. dans Ω

$$\frac{\partial S_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial S_\varepsilon^2}{\partial t} = w = 0$$

par suite

$$S_\varepsilon^1 = S_\varepsilon^2$$

par raccord de la topographie initiale. Ainsi la démonstration de l'unicité de la solution donnée par la proposition 3.3 est achevée et on peut dès lors considérer τ^* la borne inférieure des valeurs de τ pour lesquelles la propriété d'unicité est avérée. \square

Remarque 3.2. La démonstration de la proposition 3.3 n'indique pas la valeur optimale τ^* , mais l'expression (3.14) jointe à (3.9) et à (3.12), permet d'obtenir des informations sur les grandeurs physiques qui entrent en jeu. On observe qu'a priori τ^* est d'autant plus petit que la topographie initiale n'est pas trop accidentée.

Une variante à la démonstration précédente peut être donnée dans le souci d'estimer au mieux la valeur critique τ^* . Pour cela, on garde l'estimation de I_3 sous la forme

$$I_3 \leq \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2\eta} M^2 t \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_{\varepsilon}^2}{\partial t} - \frac{\partial S_{\varepsilon}^1}{\partial t} \right|^2 dx d\theta$$

sans faire apparaître la constante de Poincaré. Dans ce cas l'inégalité (3.13) devient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx &\leq \left(2\eta + \frac{lip_{\lambda_{\varepsilon}}}{2\eta} \left[C(p, \Omega) C_0(\tau) + \|\vec{V}\|_{\infty}^2 \right] \right) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2\eta} \max(1, M^2) t \left[\int_0^t \int_{\Omega} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx d\theta \right]. \end{aligned}$$

Pour le même choix de η et de τ que précédemment ($\eta = \eta_0$ et τ vérifie (3.12) et (3.14)), on obtient pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\Omega} |w|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq C_2 \left[\int_0^t \int_{\Omega} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx d\theta \right]$$

où

$$C_2 = \frac{\max(1, M^2) T}{2\eta_0 \min(1, \tau - A(\eta_0))}$$

avec

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\left(2C(p, \Omega) \|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2 + \|\vec{V}\|_{\infty}^2 \right) lip_{\lambda_{\varepsilon}}^2}$$

et

$$A(\eta_0) = 2\eta_0 + \frac{1}{2\eta_0} \left(2C(p, \Omega) \|S_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2 + \|\vec{V}\|_{\infty}^2 \right) lip_{\lambda_{\varepsilon}}^2.$$

D'où, par le lemme de Gronwall,

$$w = 0.$$

Remarque 3.3. Les résultats précédents reposent fortement sur le fait que la base Ω est bidimensionnelle pour utiliser une injection dans un espace de type $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et les résultats de régularité des problèmes elliptiques à coefficients höldériens. En dimension 3, le modèle introduit ici n'a pas de signification physique, mais on peut se poser la question de ce qu'il est possible de faire en dimension 3 pour le cas où on étudierait un problème de même nature mathématique, mais d'origine différente (phénomène d'auto-régulation thermique par exemple). Dans ce cas, on sait que l'exposant de Meyers est lié au conditionnement de la matrice d'ellipticité, subordonné à la norme euclidienne et donc d'après (3.2), il y a lieu de gagner un peu de régularité de type $W^{1,p}$ pour choisir le couple (τ, h) tel que

$$\frac{1 + \frac{\tau}{h}}{\frac{\tau}{h}}, \quad 0 < h < \frac{\tau}{2}$$

soit le plus voisin possible de 1^+ .

Deuxième partie
Modèle de Darcy

Chapitre 4

Le modèle de Darcy en dimension 2 d'espace

4.1 Formulation du problème

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ lipschitzienne. Nous cherchons une fonction $S \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, telle qu'on aura, pour presque tout t de $]0, T[$ et $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q \quad (4.1b)$$

$$S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (4.1c)$$

avec $\lambda \in \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right) \cap L^\infty(Q)$, où \mathcal{H} est le graphe maximal de la fonction de Heaviside, et $Q =]0, T[\times \Omega$.

C'est le cas de $\tau = 0$ dans le modèle de Darcy-Barenblatt. Nous avons considéré ce cas séparément parce qu'il n'y a de solution unique pour le modèle de Darcy-Barenblatt que, *a priori*, pour τ assez grand; ce qui ne va pas dans le sens de faire tendre τ vers 0. En outre, ces deux modèles ont des natures mathématiques très différentes, comme on le verra.

Remarque 4.1. Une question délicate est la suivante : la contrainte globale

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq -E \quad \text{p.p. dans } Q$$

doit-elle être explicitement énoncée dans la définition d'une solution ou bien est-elle implicitement contenue dans la formulation variationnelle ?

On peut apporter les réponses suivantes, selon la dimension en espace :

Pour des fonctions-test dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a presque partout en t , par la formulation variationnelle,

$$\operatorname{div} \left[\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \left(\nabla S + \vec{V}(x, S) \right) \right] = \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ puis, p.p. dans } \Omega.$$

Il vient en particulier, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \left(\nabla S + \vec{V}(x, S) \right) \right] 1_{\{\frac{\partial S}{\partial t} + E < 0\}} &= -\frac{\partial S}{\partial t} 1_{\{\frac{\partial S}{\partial t} + E < 0\}} \\ &= -\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) 1_{\{\frac{\partial S}{\partial t} + E < 0\}} \\ &\quad + E 1_{\{\frac{\partial S}{\partial t} + E < 0\}} \\ &\geq \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right)^-, \quad (E \geq 0). \end{aligned}$$

En dimension un d'espace et par le fait que la fonction λ est nulle sur \mathbb{R}^- , on a, en posant :

$$F = -\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x} + V(x, S) \right)$$

que $F \in H^1(\Omega)$ et donc par le lemme de Saks (ou de Marcus et Mizel [49]), il vient

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{p.p. dans l'ensemble mesurable } \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + E < 0 \right\} \subset \{F = 0\}.$$

En conséquence, il s'ensuit que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right)^- \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

pour presque tout t , et donc,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. en } t, \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En dimension 1, la contrainte résulte de la formulation variationnelle qui la contient implicitement.

En dimension 2, l'argumentation est en défaut d'après une communication personnelle de François Bouchut (ENS Ulm) et Luigi Ambrosio (ENS Pise); en effet, posant

$$\vec{F} = -\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \left(\nabla S + \vec{V}(x, S) \right),$$

on observe que

$$\vec{F} \in H(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \vec{F} \in L^2(\Omega)^2, \operatorname{div} \vec{F} \in L^2(\Omega) \right\}$$

mais il n'est pas vrai en général que

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \text{p.p. dans } \{\vec{F} = (0, 0)\},$$

la divergence étant calculée au sens des distributions. Pour cela, on pourra se rapporter à L. Ambrosio, C. de Lellis et J. Maly [11], G. Alberti [1], et donc, en dimension 2 d'espace, on inclut explicitement la contrainte globale dans la définition d'une solution. Il n'est pas vrai, selon ces auteurs, que même en dimension $d = 2$, si $\vec{F} \in (L_{loc}^\infty)^d$, et si $f = \operatorname{div} \vec{F}$ au sens des distributions, avec $f \in L_{loc}^\infty$, alors

$$f = 0 \quad \text{p.p. sur } \{\vec{F} = \vec{0}\}.$$

On se reportera à l'"Appendice" en fin de la thèse pour la construction d'un contre-exemple précis, communiqué par le professeur Luigi Ambrosio.

L'argumentation se fonde sur une méthode utilisant un résultat de G. Alberti sur les approximations de type Lusin de fonctions L^1 avec des gradients (cf. [1]) ; à titre d'exemple, pour Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction L^1 , il existe une fonction $u \in BV(\mathbb{R}^d)$ et une fonction borélienne $\vec{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ telles que :

$$\begin{cases} \nabla u = \vec{F} \cdot \mathcal{L}^d + \vec{g} \cdot \mathcal{H}^{d-1} \\ \int |\vec{g}| d\mathcal{H}^{d-1} \leq C(d) \|\vec{F}\|_{L^1} \end{cases}$$

où \mathcal{L}^d est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^d et \mathcal{H}^{d-1} est la mesure de Hausdorff $(d-1)$ -dimensionnelle. De là, on peut construire des fonctions de classe C^1 dont le gradient coïncide avec \vec{F} en dehors d'un ensemble de mesure arbitrairement petite.

4.2 Le modèle de Darcy régi par une approximation du graphe de Heaviside \mathcal{H}

Dans cette section, on remplace le limiteur de flux λ , géré à l'aide d'un graph monotone, par une approximation lipschitzienne de la fonction de Heaviside, type l'approximation suivante :

$$\lambda_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq \varepsilon \geq 0, \\ \frac{r}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{si } r \leq 0, \end{cases}$$

Donc, notre objectif dans ce cas, est de chercher, pour une topographie initiale $S_0 \in H_0^1(\Omega)$, une fonction $S_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ telle que $\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, vérifiant, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

et pour presque tout t de $]0, T[$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S_{\varepsilon}}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon} \left(\frac{\partial S_{\varepsilon}}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S_{\varepsilon} + \vec{V}(x, S_{\varepsilon}) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial S_{\varepsilon}}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q, \quad (4.2b)$$

$$S_{\varepsilon}(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (4.2c)$$

Pour cela, on fait l'approche suivante :

4.2.1 Approche par semi-discrétisations implicites

Soit $S_0 \in H_0^1(\Omega)$, et soit $h > 0$ le pas de discrétisation en temps. Alors, le problème semi-discret implicite par rapport au temps, correspondant au problème (4.2), s'écrit, à la première itération,

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_{\varepsilon} \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{S_{\varepsilon} - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon} \left(\frac{S_{\varepsilon} - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_{\varepsilon} + \vec{V}(x, S_{\varepsilon}) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{array} \right.$$

Ce problème est dégénéré, par le fait que $\lambda_{\varepsilon} \geq 0$; ce qui nous fait penser naturellement à une méthode de viscosité artificielle pour se retrouver avec un problème non dégénéré.

Le problème non dégénéré :

Selon un procédé d'approximation classique, pour rendre le problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon})$ non dégénéré, on introduit un réel strictement positif δ , tel qu'on aura à considérer de façon transitoire, la formulation suivante :

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\delta}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_{\varepsilon}^{\delta} \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{S_{\varepsilon}^{\delta} - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \left[\lambda_{\varepsilon} \left(\frac{S_{\varepsilon}^{\delta} - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[\nabla S_{\varepsilon}^{\delta} + \vec{V}(x, S_{\varepsilon}^{\delta}) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce problème, on va utiliser un théorème de point fixe.

Soient $g \in H_0^1(\Omega)$ et le problème linéaire :

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\delta, g}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_{\varepsilon}^{\delta, g} \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{S_{\varepsilon}^{\delta, g} - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \left[\lambda_{\varepsilon} \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[\nabla S_{\varepsilon}^{\delta, g} + \vec{V}(x, g) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{array} \right.$$

Ce problème possède, d'après le théorème de Lax-Milgram, une unique solution ; on peut donc définir l'application :

$$\begin{aligned} \psi : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ g &\longmapsto S_\varepsilon^{\delta,g} \end{aligned}$$

pour chercher si elle possède un point fixe.

On prend comme fonction-test, pour la formulation $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\delta,g})$, la fonction $v = S_\varepsilon^{\delta,g}$, et on suppose que $0 < \delta \leq 1$, il vient alors, que

$$\int_\Omega \frac{S_\varepsilon^{\delta,g} - S_0}{h} S_\varepsilon^{\delta,g} dx + \int_\Omega \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[\nabla S_\varepsilon^{\delta,g} + \vec{V}(x, g) \right] \cdot \nabla S_\varepsilon^{\delta,g} dx = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left\| S_\varepsilon^{\delta,g} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{h} \left\| S_\varepsilon^{\delta,g} - S_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \int_\Omega \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[|\nabla S_\varepsilon^{\delta,g}|^2 + |\nabla S_\varepsilon^{\delta,g} + \vec{V}(x, g)|^2 \right] dx \\ = \frac{1}{h} \left\| S_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] |\vec{V}(x, g)|^2 dx, \end{aligned}$$

ce qui implique, en particulier, que

$$\delta \left\| S_\varepsilon^{\delta,g} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{h} \left\| S_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \left\| \vec{V} \right\|_\infty \sqrt{mes(\Omega)}.$$

Donc,

$$\psi(H_0^1(\Omega)) \subset \overline{B}_{H_0^1(\Omega)}(0, r),$$

avec

$$r = \frac{1}{\delta h} \left\| S_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\delta} \left\| \vec{V} \right\|_\infty \sqrt{mes(\Omega)}.$$

Cette boule étant non vide, fermée, bornée, convexe et dans un espace séparable et réflexif, alors, pour appliquer le théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov sur la restriction de ψ sur $\overline{B}_{H_0^1(\Omega)}(0, r)$, il suffit de montrer la continuité séquentielle de cette restriction. Pour cela, soit $(g_j)_j$ une suite d'éléments de $\overline{B}_{H_0^1(\Omega)}(0, r)$, telle que

$$g_j \rightharpoonup g \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Comme, pour h et δ fixés strictement positifs, la suite $(S_\varepsilon^{\delta,g_j})_j$ est bornée indépendamment de j , dans $H_0^1(\Omega)$, alors, il existe une sous-suite $(S_\varepsilon^{\delta,g_{j_k}})_{j_k}$ et il existe $\chi \in H_0^1(\Omega)$, tels que

$$S_\varepsilon^{\delta,g_{j_k}} \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

et évidemment,

$$g_{j_k} \rightharpoonup g \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

et comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, alors

$$g_{j_k} \rightarrow g \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$

Finalement, en troisième génération, il existe une sous-suite, notée cette fois-ci, $(g_n)_n$ pour simplifier l'écriture, telle que

$$g_n \rightarrow g \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et évidemment,

$$S_\delta^{g_n} \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \quad (4.3)$$

ce qui est suffisant pour passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans le problème

$$(\mathcal{P}_\varepsilon^{\delta, g_n}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_\varepsilon^{\delta, g_n} \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \frac{S_\varepsilon^{\delta, g_n} - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{g_n - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[\nabla S_\varepsilon^{\delta, g_n} + \vec{V}(x, g_n) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{array} \right.$$

pour obtenir à la limite, le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \frac{\chi - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[\nabla \chi + \vec{V}(x, g) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{array} \right.$$

qui n'est rien d'autre que le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\delta, g})$, qui admet, d'après Lax-Milgram, une unique solution et qui a déjà $S_\varepsilon^{\delta, g}$ comme solution par construction. D'où

$$\chi = S_\varepsilon^{\delta, g}. \quad (4.4)$$

L'unicité en son genre du point d'accumulation assure *a posteriori* la convergence de toute la suite.

D'après (4.3) et (4.4), on a

$$\psi(g_n) := S_\varepsilon^{\delta, g_n} \rightharpoonup S_\varepsilon^{\delta, g} := \psi(g) \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

c'est-à-dire que ψ est faiblement-faiblement séquentiellement continue de $\overline{B}_{H_0^1(\Omega)}(0, r)$ dans $\overline{B}_{H_0^1(\Omega)}(0, r)$. Donc, d'après le théorème de Schauder-Tikhonov de point fixe, il existe un $g \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\psi(g) = g$; autrement dit, il existe un $S_\varepsilon^\delta \in H_0^1(\Omega)$ solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^\delta)$.

En outre, comme on le verra en détail à la proposition 4.3 sur un cas plus général, on peut montrer par les L^1 -techniques que S_ε^δ est unique en son genre. Donc, nous avons alors démontré la proposition suivante :

Lemme 4.1. *Soit $S_0 \in H_0^1(\Omega)$, et soient deux réels strictement positifs h et δ ; alors, il existe une fonction et une seule $S_\varepsilon^\delta \in H_0^1(\Omega)$ telle que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[\nabla S_\varepsilon^\delta + \vec{V}(x, S_\varepsilon^\delta) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

On passe maintenant au problème dégénéré :

Le problème dégénéré :

En fait, le problème dégénéré est le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ lui-même ; car, dans le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, la fonction λ_ε est à valeurs positives ou nulles. Nous allons obtenir une solution de ce problème en faisant tendre δ vers 0 dans le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^\delta)$.

On prend, pour la formulation variationnelle dans la proposition 4.1, la fonction-test $v = \int_0^{S_\varepsilon^\delta - S_0} \frac{du}{\lambda_\varepsilon(\frac{u}{h} + E) + \delta}$, pour avoir,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} \left(\int_0^{S_\varepsilon^\delta - S_0} \frac{du}{\lambda(\frac{u}{h} + E) + \delta} \right) dx + \int_{\Omega} \nabla S_\varepsilon^\delta \cdot (\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0) \, dx \\ + \int_{\Omega} \vec{V} \cdot (\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Or

$$\nabla S_\varepsilon^\delta \cdot (\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0) = |\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0|^2 + \nabla S_0 \cdot (\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0), \quad (4.5)$$

alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(1+\delta)} \|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)} \|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{H_0^1(\Omega)} \\ + \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)},$$

et par l'inégalité triangulaire, il vient,

$$\|S_\varepsilon^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|S_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)}. \quad (4.6)$$

Cette dernière estimation nous donne l'information que la suite $(S_\varepsilon^\delta)_{\delta>0}$ est, indépendamment de δ , bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et donc, il existe une sous-suite de $(S_\varepsilon^\delta)_{\delta>0}$, notée de même, et il existe un $S_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, tels que, lorsque $\delta \rightarrow 0^+$,

$$S_\varepsilon^\delta \rightharpoonup S_\varepsilon \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \quad (4.7)$$

et

$$S_\varepsilon^\delta \rightarrow S_\varepsilon \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),$$

et pour une nouvelle sous-suite,

$$S_\varepsilon^\delta \rightarrow S_\varepsilon \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Avec cette dernière sous-suite, on peut passer à la limite dans le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^\delta)$ lorsque $\delta \rightarrow 0^+$, et on trouve à la limite la formulation du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Donc S_ε est une solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

De plus, par le choix licite de la fonction-test $v = \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E\right)^-$, on trouve par le fait de la non-négativité de E que :

$$\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Soit $S^0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $h = \frac{T}{N}$, il existe une séquence $(S_\varepsilon^i)_{1 \leq i \leq N}$, telle que pour tout i et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \quad (4.8)$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

avec la convention que $S_\varepsilon^0 = S^0$.

Revenons maintenant à la question de l'unicité :

Théorème 4.3. *La solution donnée par le théorème 4.2 est unique à chaque itération.*

Preuve :

Il suffit de montrer cette propriété d'unicité pour la première itération ; et pour cela, on pose

$$w_\varepsilon = \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E$$

et

$$A_\varepsilon(r) = \int_0^r \lambda_\varepsilon(u) \, du, \quad r \geq 0.$$

Donc, quel que soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a, d'après (4.8), que :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (w_\varepsilon - E)v \, dx \\ &+ \int_\Omega \left\{ h \nabla A_\varepsilon(w_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon(w_\varepsilon) \left[\nabla(S_0 - hE) + \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) \right] \right\} \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Soient alors, S_ε^1 et \hat{S}_ε^1 deux éventuelles solutions et w_ε et \hat{w}_ε les expressions associées. Il vient par soustraction membre à membre que :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon)v \, dx + h \int_\Omega \nabla \left[A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ &+ \int_\Omega (\lambda_\varepsilon(w_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \nabla(S_0 - hE) \cdot \nabla v \, dx \\ &+ \int_\Omega (\lambda_\varepsilon(w_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) \cdot \nabla v \, dx \\ &+ \int_\Omega \lambda_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \left[\vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) - \vec{V}(x, h(\hat{w}_\varepsilon - E) + S_0) \right] \cdot \nabla v \, dx. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Prenant $v = p_\eta(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon))$ avec

$$p_\eta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq \eta > 0 \\ \ln \frac{er}{\eta} & \text{si } \frac{\eta}{e} \leq r \leq \eta \\ 0 & \text{si } r \leq \frac{\eta}{e} \end{cases}$$

approximation appropriée lipschitzienne de la fonction

$$\text{sign}_0^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r \leq 0 \end{cases}$$

et remarquant que les fonctions A_ε^{-1} et $\lambda_\varepsilon \circ A_\varepsilon^{-1}$, définies sur \mathbb{R}^+ , sont höldériennes d'ordre $\frac{1}{2}$, alors,

$$\begin{aligned} |\lambda_\varepsilon(w_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)| &\leq C_1 \sqrt{|A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)|}, \\ \left| \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) - \vec{V}(x, h(\hat{w}_\varepsilon - E) + S_0) \right| &\leq C_2 h \sqrt{|A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)|}, \end{aligned}$$

on exploite (4.9) sous la forme :

$$\int_\Omega (w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon) p_\eta(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \, dx \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} &+ h \int_\Omega \left| \nabla \left[A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \right] \right|^2 p'_\eta(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \, dx \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3, \quad (4.11) \end{aligned}$$

où les expressions I_1, I_2, I_3 seront rappelées immédiatement et où l'on a noté

$$p'_\eta(r) = \frac{1}{r} \chi_{[\frac{\eta}{\varepsilon}, \eta]}(r)$$

et en sachant que, par dérivation à la chaîne des superpositions lipschitziennes dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \nabla p_\eta(v) = p'_\eta(v) \nabla v \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Il vient plus précisément

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \int_{\Omega} (\lambda_\varepsilon(w_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \nabla(S_0 - hE) \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \frac{h}{3} \int_{\Omega} p'_\eta(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \left| \nabla(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \right|^2 dx \\ &\quad + \frac{3C_1^2}{4h} \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} |\nabla(S_0 - hE)|^2 dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \int_{\Omega} (\lambda_\varepsilon(w_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \vec{V}(x, h(w - E) + S_0) \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \frac{h}{3} \int_{\Omega} p'_\eta(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \left| \nabla(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \right|^2 dx \\ &\quad + \frac{3C_1^2 \|\vec{V}\|_\infty^2}{4h} \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} dx, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} I_3 &= \left| \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \left[\vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) - \vec{V}(x, h(\hat{w}_\varepsilon - E) + S_0) \right] \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \frac{h}{3} \int_{\Omega} p'_\eta(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \left| \nabla(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \right|^2 dx \\ &\quad + \frac{3}{4} C_2^2 \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} dx. \end{aligned}$$

Il vient donc, d'après (4.10), que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon) p_\eta(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \, dx \right| &\leq \frac{3C_1^2}{4h} \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} |\nabla(S_0 - hE)|^2 dx \\ &\quad + \frac{3}{4} \left(\frac{C_1^2 \|\vec{V}\|_\infty^2}{h} + C_2^2 \right) \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} dx, \end{aligned}$$

et comme, lorsque $\eta \rightarrow 0^+$,

$$\chi_{[\frac{\eta}{\varepsilon}, \eta]} \rightarrow 0 \quad \text{simplement dans } \mathbb{R},$$

alors, le membre de droite de la dernière inégalité tend vers zéro par la convergence dominée de Lebesgue lorsque $\eta \rightarrow 0^+$. D'autre part, on a

$$p_\eta(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} \text{sign}_0^+(A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Et comme la fonction A_ε est strictement croissante, alors, $A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)$ et $w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon$ ont le même signe. D'où, après avoir fait tendre η vers 0^+ , il vient finalement

$$\int_{\Omega} (w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon)^+ dx = 0,$$

c'est-à-dire,

$$w_\varepsilon \leq \hat{w}_\varepsilon,$$

et, en permutant les rôles de w_ε et \hat{w}_ε , on a

$$w_\varepsilon = \hat{w}_\varepsilon \quad \text{et donc} \quad S_\varepsilon^1 = \widehat{S}_\varepsilon^1 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

L'unicité de S_ε^1 , par celle de S_0 , entraîne trivialement l'unicité de S_ε^i pour $i \geq 2$. \square

4.3 Le passage à la limite par rapport à ε et h

4.3.1 Le modèle discret régi par le graphe \mathcal{H} ($\varepsilon \rightarrow 0$) :

Nous résolvons dans ce paragraphe le problème envisagé (4.1) dans son cas discret en temps, ce qui revient à passer à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans (4.8). Nous allons donc démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.4. *Pour $S^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = \frac{T}{N}$, il existe une unique suite $(S^i)_{1 \leq i \leq N}$ d'éléments de $H_0^1(\Omega)$, et il existe une suite $(\lambda^i)_i$ avec $\lambda^i \in H\left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E\right) \cap L^\infty(\Omega)$, telles que, pour tout i et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} \frac{S^i - S^{i-1}}{h} v dx + \int_{\Omega} \lambda^i \left[\nabla S^i + \vec{V}(x, S^i) \right] \cdot \nabla v dx = 0,$$

$$\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Preuve :

D'après (4.6) et (4.7), on a, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)}. \quad (4.12)$$

Prenant la fonction-test $v = \int_0^{\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h}} \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u+E)+\eta}$, avec $\eta > 0$; il vient, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \left(\int_0^{\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h}} \frac{du}{\lambda_\varepsilon(u+E)+\eta} \right) dx + \\ & \int_\Omega \frac{\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)}{\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right) + \eta} \left[\nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{1+\eta} \left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \frac{\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)}{\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right) + \eta} \left[\nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \leq 0.$$

En observant que, pour tout i , p.p. sur l'ensemble mesurable

$$\Lambda_\varepsilon^i = \left\{ x \in \Omega, \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} = -E \right\},$$

on a, d'après le lemme de Marcus et Mizel,

$$\nabla S_\varepsilon^i - \nabla S_\varepsilon^{i-1} = 0,$$

alors, nous avons, quand $\eta \rightarrow 0^+$,

$$\frac{\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)}{\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right) + \eta} \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \rightarrow \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et comme nous avons, en outre, indépendamment de η

$$\left| \frac{\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)}{\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right) + \eta} \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right|_{\mathbb{R}^2} \leq \left| \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right|_{\mathbb{R}^2}.$$

alors, il vient par la convergence dominée de Lebesgue, lorsque $\eta \rightarrow 0^+$, que

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \left[\nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \nabla S_\varepsilon^i \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \leq - \int_{\Omega} \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx.$$

Par ailleurs,

$$2\nabla S_\varepsilon^i \cdot (\nabla S_\varepsilon^i - \nabla S_\varepsilon^{i-1}) = |\nabla S_\varepsilon^i|^2 - |\nabla S_\varepsilon^{i-1}|^2 + |\nabla S_\varepsilon^i - \nabla S_\varepsilon^{i-1}|^2,$$

alors,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \leq - \int_{\Omega} \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Appliquant la formule de Green sur le membre de droite de cette inégalité (les termes de bord étant nuls), il vient,

$$- \int_{\Omega} \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}_x \vec{V}(x, S_\varepsilon^i(x)) \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx.$$

On sait que

$$\vec{V} = \vec{V}(x, \lambda) ; (x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}, \text{ et } \vec{V} = (V_1(x, \lambda), V_2(x, \lambda)),$$

donc,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \operatorname{div}_x \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \lambda} \frac{\partial S_\varepsilon^i}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \lambda} \frac{\partial S_\varepsilon^i}{\partial x_2} \right) \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \lambda} \frac{\partial S_\varepsilon^i}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \lambda} \frac{\partial S_\varepsilon^i}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right)^2 \right\} dx. \end{aligned}$$

Comme les dérivées premières de \vec{V} sont bornées par supposition, alors, il existe deux constantes C_1 et C_2 , dépendant uniquement de \vec{V} , telles qu'on aura, de (4.13),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \leq C_1 + C_2 \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Par addition terme à terme des inégalités de type (4.14) entre 1 et n , $1 \leq n \leq N$, et multiplication par h , il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h \left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|S_\varepsilon^n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h \|S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_1 T + C_2 \sum_{i=1}^n h \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

De (4.12) et (4.14), il vient

$$\|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2h(C_1 + 2C_2\|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega)) + (1 + 8hC_2)\|S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

d'où, par le lemme de Gronwall discret (le lemme 1.2),

$$\|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \left(2T(C_1 + 2C_2\|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega)) + \|S^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right) \exp(1 + 8TC_2). \quad (4.16)$$

C'est-à-dire que la suite $(S_\varepsilon^i)_{\varepsilon>0}$ demeure, indépendamment de ε , dans un borné fixe de $H_0^1(\Omega)$. Donc, il existe $S^i \in H_0^1(\Omega)$ et il existe une sous-suite de $(S_\varepsilon^i)_{\varepsilon>0}$ convergeant vers S^i pour la topologie $\sigma(H_0^1, H^{-1})$, et fortement dans $L^2(\Omega)$, ce qui implique une convergence p.p. dans Ω pour une nouvelle sous-suite. Ainsi, nous avons, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \rightarrow \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (4.17)$$

D'autre part, comme $0 \leq \lambda_\varepsilon \leq 1$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors, il existe une sous-suite de $(\lambda_\varepsilon(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E))_\varepsilon$ et il existe $\lambda^i \in (L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$, tels que

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right) \rightharpoonup^* \lambda^i \quad \text{faiblement } * \text{ dans } L^\infty(\Omega), \quad (4.18)$$

En outre, on a, d'après le théorème 4.2 que pour tout i ,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et donc, d'après (4.17), on a pour tout i ,

$$\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Posons

$$A^i = \left\{ x \in \Omega / \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)(x) \rightarrow \left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E\right)(x) \text{ et } \left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E\right)(x) > 0 \right\}.$$

Alors, la suite $\lambda_\varepsilon(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E)$ converge, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, partout dans A^i vers 1 et $\lambda^i \in \mathcal{H}\left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E\right)$. En effet, soit $x \in A$, alors $\exists \eta_x > 0$ tel que

$$\left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E\right)(x) > \eta_x,$$

ce qui implique qu'il existe $\varepsilon_{\eta_x} > 0$ tel que $\forall \varepsilon < \varepsilon_{\eta_x}$

$$\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)(x) > \eta_x.$$

Soit

$$\varepsilon'_{\eta_x} = \min(\varepsilon_{\eta_x}, \eta_x),$$

alors,

$$\forall \varepsilon < \varepsilon'_{\eta_x} \quad \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right)(x) > \varepsilon.$$

D'où, par construction de λ_ε ,

$$\forall \varepsilon < \varepsilon'_{\eta_x} \quad \lambda_\varepsilon \left(\left[\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right](x) \right) = 1. \quad (4.19)$$

Donc, on peut écrire

$$\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \rightarrow 1 \quad \text{partout dans } A^i. \\ \varepsilon \rightarrow 0^+$$

Pour montrer que $\lambda^i \in \mathcal{H} \left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right)$, on remarque, d'après (4.18), que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\forall v \in L^1(\Omega) \quad \int_\Omega \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) v \, dx \rightarrow \int_\Omega \lambda^i v \, dx.$$

On prend $v = 1_{A^i}$, alors

$$\int_{A^i} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \, dx \rightarrow \int_{A^i} \lambda^i \, dx.$$

Donc, d'après (4.19), on a

$$\int_{A^i} (1 - \lambda^i) \, dx = 0,$$

d'où $1 = \lambda^i$ sur A^i par le fait que $1 - \lambda^i \geq 0$ dans A^i . Par conséquent, et à l'aide de l'encadrement $0 \leq \lambda^i \leq 1$ sur Ω , il vient que $\lambda^i \in \mathcal{H} \left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right)$.

On s'intéresse maintenant au passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans le terme

$$\int_\Omega \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \nabla S_\varepsilon^i \cdot \nabla v \, dx$$

qui fait *a priori* problème, faute d'un résultat de convergence forte sur l'un des deux termes. On va donc considérer l'approche suivante : partant de S_0 dans $H_0^1(\Omega)$ et du coefficient de diffusion λ_ε , on a d'après le lemme 4.1 qu'il existe un S_ε^1 dans $H_0^1(\Omega)$, solution de

$$\int_\Omega \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^1 + \vec{V}(x, S_\varepsilon^1) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0,$$

pour tout v de $H_0^1(\Omega)$, avec les estimations correspondantes sur S_ε^1 assurant, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, la convergence de S_ε^1 vers un élément noté S^1 , comme dans (4.17).

La difficulté du passage à la limite est alors levée en écrivant :

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_\varepsilon^1 &= h \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \\ &\quad + \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_0 \\ &= h \nabla H_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) + \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_0, \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour $r \in \mathbb{R}$,

$$H_\varepsilon(r) = \int_0^r \lambda_\varepsilon(s) ds$$

et

$$H_\varepsilon(r) \rightarrow r^+ \quad \text{simplement dans } \mathbb{R}, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

En conséquence, rappelant que, si $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\int_\Omega \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_0 \cdot \nabla v dx \rightarrow \int_\Omega \lambda^1 \nabla S_0 \cdot \nabla v dx, \quad \text{avec } \lambda^1 \in \mathcal{H} \left(\frac{S^1 - S_0}{h} + E \right)$$

et que

$$h \int_\Omega \nabla H_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \cdot \nabla v dx \rightarrow h \int_\Omega \nabla \left(\frac{S^1 - S_0}{h} + E \right)^+ \cdot \nabla v dx$$

et d'après la règle de Marcus et Mizel,

$$h \int_\Omega \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right)^+ \cdot \nabla v dx = h \int_\Omega \lambda^1 \nabla \left(\frac{S^1 - S_0}{h} \right)^+ \cdot \nabla v dx,$$

ainsi, le terme $\int_\Omega \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_\varepsilon^1 \cdot \nabla v dx$ converge vers $\int_\Omega \lambda^1 \nabla S^1 \cdot \nabla v dx$.

On rappelle en effet que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on peut écrire

$$\nabla(u^+) = \lambda \nabla u \quad \lambda \text{ étant pris quelconque dans } \mathcal{H}(u) \cap L^\infty(\Omega)$$

par le fait que $\nabla u = 0$ sur l'ensemble mesurable $\{x \in \Omega / u(x) = 0\}$.

Ainsi, S^1 étant construit, on reconduit la procédure à partir de ce nouvel état initial, \square

4.3.2 Le problème du passage au cas continu ($h \rightarrow 0$)

À l'aide des solutions approchées trouvées dans le paragraphe précédent, nous définissons les fonctions S^h et \tilde{S}^h par les relations

$$\forall t \in]0, T] \quad S^h(t) = \sum_{i=1}^N S^i 1_{](i-1)h, ih]}(t), \quad S^h(0) = S^0,$$

et

$$\forall t \in]0, T] \quad \tilde{S}^h(t) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{S^i - S^{i-1}}{h} (t - (i-1)h) + S^{i-1} \right] 1_{](i-1)h, ih]}(t), \quad \tilde{S}^h(0) = S_0,$$

et on note que la dérivée $\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}$ calculée au sens de $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$, est la fonction étagée

$$\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{S^i - S^{i-1}}{h} 1_{](i-1)h, ih]}.$$

Alors, d'après (4.16) et le fait que S^i est la limite faible de S_ε^i dans $H_0^1(\Omega)$, on a, indépendamment de h , que $S^h \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Ainsi, de (4.15) on trouve que la suite $(\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t})_h$ demeure, indépendamment de h , dans un borné de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. De plus, en remarquant que, pour tout $t \in](i-1)h, ih]$, $1 \leq i \leq N$,

$$\left\| \tilde{S}^h(t) - S^h(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|S^i - S^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

alors, on obtient l'estimation

$$\left\| \tilde{S}^h - S^h \right\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq Ch, \quad (4.20)$$

avec C une constante indépendante de h . Cette estimation permet de montrer lors des extractions de sous-suites à venir, que l'on peut prendre, pour $\{S^h\}$ et $\{\tilde{S}^h\}$, des sous-suites de même indice, et que les points d'accumulation sont identiques.

Nous avons du lemme 4.4 que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, pour tout $t \in](i-1)h, ih]$ et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda^i \left[\nabla S^h + \vec{V}(x, S^h) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0,$$

et en utilisant l'estimation (4.20), on trouve que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda^i \left[\nabla \tilde{S}^h + \vec{V}(x, \tilde{S}^h) \right] \cdot \nabla v \, dx = o(h),$$

avec $\lambda^i \in \mathcal{H} \left(\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t, \cdot) + E \right)$.

Finalement, en intégrant de 0 à T il vient, pour tout $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

$$\int_Q \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t, x) v(x) dx dt + \int_Q \lambda^h \left[\nabla \tilde{S}^h(t, x) + \vec{V}(x, \tilde{S}^h(t, x)) \right] \cdot \nabla v(x) dx dt = o(h),$$

où $\lambda^h = \sum_{i=1}^N \lambda^i 1_{[(i-1)h, ih]} \in \mathcal{H} \left(\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} + E \right)$, et avec

$$\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

Ici, le problème, non surmonté en général, du passage à la limite sur h vient du terme $\lambda^h \nabla \tilde{S}^h$, parce que les estimations que nous avons ne donnent qu'une convergence faible dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ pour $\{\tilde{S}^h\}$ et une convergence faible $*$ dans $L^\infty(Q)$ pour $\{\lambda^h\}$.

Chapitre 5

Le modèle de Darcy en dimension 1 d'espace

Dans le cas de la dimension un d'espace, le problème est résolu dans certaines situations particulières grâce au fait que la suite $\{\lambda^h\}$ est, indépendamment de h , bornée dans l'espace des fonctions à variations bornées sur Q . En effet, cette appartenance donne la convergence presque partout pour une sous-suite de $\{\lambda^h\}$, ce qui est suffisant pour passer à la limite dans le terme qui fait problème, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (cf G. Vallet [32]).

Dans ce qui suit, nous éclairons quelques cas particuliers en dimension un d'espace, descriptifs de comportements propres au modèle de Darcy.

5.1 Le comportement hyperbolique et ses conséquences : zones mortes, effet de cloisonnement, etc

5.1.1 Une observation liminaire

On se limite ici aux seuls effets de sédimentation-transport sous l'action gravitaire dans la prise en compte de courants marins ; en conséquence, on prend en neutralisant le processus d'érosion :

$$E = 0$$

ce qui induit désormais la contrainte

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q$$

et la propriété sur le terme de transport (de type marin)

$$V(x, S) = 0 \quad \text{pour } S \geq 0 \tag{5.1}$$

(pas de terme de transport aérien, au-dessus de la cote zéro).

Le caractère hyperbolique de l'équation qui régit la topographie S peut être vu en écrivant l'équation de continuité sous la forme (la fonction d'état limitant le flux λ étant supposée suffisamment régulière) :

$$a \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x} + c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + d \frac{\partial S}{\partial t} + e \frac{\partial S}{\partial x} = g, \quad (t, x) \in]0, T[\times \Omega \quad (5.2)$$

où a, b, c, d, e et g sont des fonctions des variables indépendantes x et t , avec plus précisément :

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -\frac{1}{2} \lambda' \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial S}{\partial x} + V(x, S) \right] \\ c &= -\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) \\ d &= 1 \\ e &= -\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial S}(x, S) \\ g &= \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial x}(x, S). \end{aligned}$$

On sait que l'équation linéaire (5.2) est dite hyperbolique si

$$b^2 - ac > 0,$$

hyperbolique dégénérée si

$$b^2 - ac \geq 0.$$

Ici, il vient

$$b^2 - ac = \frac{1}{4} \left(\lambda' \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) (t, x) \left[\frac{\partial S}{\partial x} (t, x) + V(x, S(t, x)) \right] \right)^2 \geq 0,$$

d'où le comportement hyperbolique par la présence du terme $\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x}$, alors qu'on pourrait penser faussement que l'équation est de type parabolique de diffusion-transport.

5.1.2 Illustration du caractère hyperbolique

Soit S une solution forte dans $H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ du problème

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) [\nabla S + V(x, S)] \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad (5.3a)$$

$$S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (5.3b)$$

Alors, les premières propriétés qualitatives témoignant du caractère hyperbolique peuvent être résumées dans la proposition suivante :

Proposition 5.1. *Sous l'hypothèse (5.1), toute solution S du problème (5.3) est telle que*

- i) $\lambda(\frac{\partial S}{\partial t})\nabla S^+ = 0$ p.p. dans Q*
- ii) $\forall t \geq 0, S^+(t, \cdot) = S_0^+$ p.p. dans Ω*

et en conséquence,

$$\text{iii) } \forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. sur } \{x \in \Omega, S_0(x) \geq 0\},$$

$$\forall t \geq 0, 0 \geq S(t, \cdot) \geq S_0 \quad \text{p.p. sur } \{x \in \Omega, S_0(x) \leq 0\}$$

ce qui traduit un effet de propagation hyperbolique. En effet, certaines régions restent indéfiniment hors d'atteinte du phénomène physique.

Preuve

Pour le choix licite de la fonction-test $v = S^+$ il vient, p.p en t ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} S^+ dx + \int_{\Omega} \lambda(\frac{\partial S}{\partial t}) |\nabla S^+|^2 dx = 0 \quad (5.4)$$

par le fait que p.p. en t , $\vec{V}(x, S) \cdot \nabla S^+ = 0$, d'où *i*).

Par la régularité de la solution, on a presque partout dans Q ,

$$\frac{\partial S}{\partial t} S^+ = \frac{\partial S^+}{\partial t} S^+, \quad \text{car } \frac{\partial S^+}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} 1_{[S \geq 0]},$$

de sorte qu'on déduit de (5.4) que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S^+}{\partial t} (S^+ - S_0^+) dx + \int_{\Omega} \lambda(\frac{\partial S}{\partial t}) |\nabla S^+|^2 dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial S^+}{\partial t} S_0^+ dx.$$

Or, la contrainte $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$ p.p. dans Q et la régularité de S impliquent que $\frac{\partial S^+}{\partial t} \geq 0$ dans Q , d'où,

$$\text{p.p. en } t, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial(S^+ - S_0^+)}{\partial t} (S^+ - S_0^+) dx \leq 0,$$

et donc pour tout $t \in [0, T]$,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |S^+(t, \cdot) - S_0^+|^2 dx \leq 0$$

d'où *ii*), ainsi que les conséquences annoncées, par le fait que $\forall t \geq 0$, $S(t, \cdot) \geq S_0$ p.p. dans Ω par la contrainte de sédimentation. En particulier, l'ensemble \mathcal{L}^1 -mesurable $\{x \in \Omega, S_0(x) \geq 0\}$ est une zone sans activité, *i.e.* une zone morte. \square

5.1.3 Effet de cloisonnement ou effet barrière

Nous allons mettre en évidence qu'une zone entourée d'un cordon sédimentaire élevé au-dessus du niveau topographique zéro est isolée complètement des effets du phénomène ; il s'agit d'un effet barrière.

Proposition 5.2. *On suppose, sous l'hypothèse (5.1), qu'il existe un ensemble compact K , d'intérieur non vide et un ouvert lipschitzien ω tels que*

$$K \subset \omega \subset \Omega \text{ et } \omega \setminus K \subset \{S_0 \geq 0\}.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$, $S(t, \cdot) = S_0$ p.p. dans K , et donc, par la proposition précédente, $\forall t \geq 0$, $S(t, \cdot) = S_0$ p.p. dans ω .

Preuve

Par le lemme d'Urysohn, on peut construire une fonction-test \tilde{v} dans $H_0^1(\Omega)$, telle que $0 \leq \tilde{v} \leq 1$ dans Ω , $\tilde{v}|_K = 1$ et $\tilde{v} \in H_0^1(\omega)$. Pour ce choix, il vient, p.p. en $t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} \int_{\omega \setminus K} \frac{\partial S}{\partial t} \tilde{v} dx + \int_K \frac{\partial S}{\partial t} \tilde{v} dx + \int_{\omega \setminus K} \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) (\nabla S + V(x, S)) \cdot \nabla \tilde{v} dx \\ + \int_K \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) (\nabla S + V(x, S)) \cdot \nabla \tilde{v} dx = 0 \end{aligned}$$

Or, d'après les résultats de la proposition précédente et leurs conséquences, p.p. en t ,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0 \text{ et } \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) (\nabla S + V(x, S)) \cdot \nabla \tilde{v} = 0 \text{ p.p. dans } \omega \setminus K,$$

ce qui annule les intégrales sur $\omega \setminus K$. En outre, par construction, $\nabla \tilde{v} = 0$ p.p. dans K , d'où finalement, p.p. en t ,

$$\int_K \frac{\partial S}{\partial t} \tilde{v} dx = 0, \quad \text{i.e.} \quad \int_K \frac{\partial S}{\partial t} dx = 0$$

ce qui implique, par le fait que $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$ p.p. dans K , que $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ p.p. dans K , et donc,

$$\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } K.$$

Puisque $\omega \setminus K \subset \{S_0 \geq 0\}$, on a par la proposition précédente que

$$\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \omega \setminus K,$$

d'où la conclusion : la zone "piégée" par la barrière $\omega \setminus K$ est inactive, et, en conséquence, la région ω toute entière est une zone morte. \square

Cette proposition est surtout intéressante lorsque

$$S_0 \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \overset{\circ}{K},$$

car alors, on sait que ce sous-bassin sédimentaire ne va pas se combler et reste à l'état d'origine, hors d'influence.

5.2 Cas de non-unicité

Considérons un ouvert w sur lequel S_0 est positive ou nulle. On a vu (proposition 5.1) qu'alors

$$\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } w$$

et de la proposition 5.1, propriété *i*), il s'ensuit que

$$\lambda\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) \nabla S_0 = 0 \quad \text{p.p. dans } w.$$

Donc, en toute région de w non plane, *i.e.* là où $\nabla S_0 \neq 0$, le limiteur de flux est nécessairement nul et l'équation est complètement dégénérée. Sur toute région plane de w , le limiteur de flux est indéterminé et peut prendre toute valeur entre 0 et 1, ce qui pose la difficulté de l'étude de l'unicité sans introduire, le cas échéant, un critère discriminant. Pour clarifier ce point, on va s'intéresser à des solutions particulières, dites solutions "traveling waves".

5.3 Les solutions "traveling waves" avec obstacle mobile

On se propose de construire des solutions explicites, dites "traveling waves", en examinant les possibilités de rechercher les solutions sous la forme (selon une idée de (S.N. Antontsev [25]) :

$$S(t, x) = h(\xi), \quad \lambda(t, x) = \lambda(\xi) \quad \text{où } \xi = x + \mu t, \quad \mu > 0,$$

$$x \in]0, L[, \quad L > 0, \quad t \in]0, T[, \quad T > 0, \quad Q =]0, T[\times]0, L[,$$

soumises à un obstacle mobile de la forme

$$E(t, x) = E^* 1_{Q \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\}} + E^{**} 1_{Q \cap \{\xi_0 < x + \mu t \leq \xi_1\}}, \quad \text{avec } E^{**} > E^* > 0 \text{ et } 0 < \xi_0 < \xi_1.$$

Omettant provisoirement les conditions de bord sur la frontière parabolique, le problème du limiteur de flux modélisé par le graphe maximal monotone associé à l'échelon de Heaviside, s'énonce :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (S, \lambda) \text{ avec } \lambda \in H\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right) \text{ et vérifiant :} \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial x} + V(S) \right) \right] = 0, \quad \text{dans } Q :=]0, T[\times]0, L[, \\ S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{dans }]0, L[, \end{array} \right.$$

et s'écrit dans la technique "traveling waves" :

Chercher $\xi \mapsto h(\xi)$, $\lambda \mapsto \lambda(\xi)$ vérifiant :

$$\mu h'(\xi) - \left\{ \lambda(\xi) \left[h'(\xi) + V(h(\xi)) \right] \right\}' = 0, \quad \xi > 0, \quad (5.5)$$

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq 1, \quad \mu h'(\xi) + E(\xi) \geq 0, \quad (1 - \lambda(\xi))(\mu h'(\xi) + E(\xi)) = 0, \quad \xi > 0 \quad (5.6)$$

$$h(0) = S_0(0). \quad (5.7)$$

Ici, on a supposé que la fonction $V(x, S(t, x))$ modélisant l'effet de transport marin ou éolien ne dépend que de l'altitude ou la profondeur du point considéré, et on observe que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu h'(\xi), \quad \frac{\partial S}{\partial x} = h'(\xi), \quad V = V(h(\xi)).$$

L'équation (5.5) montre immédiatement que, après une quadrature,

$$\exists C_0 \in \mathbb{R} / \forall \xi > 0, \quad \mu h(\xi) - \lambda(\xi) \left[h'(\xi) + V(h(\xi)) \right] = C_0. \quad (5.8)$$

On propose alors de mettre en évidence des données qui permettent de réaliser le scénario suivant :

* dans la région

$$Q_0 = Q \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\},$$

la contrainte est inactive, c'est-à-dire que

$$\lambda(\xi) = 1$$

avec le respect de la relation d'érosion limitée :

$$\mu h'(\xi) + E^* \geq 0.$$

* dans la région

$$Q_1 = Q \cap \{\xi_0 < x + \mu t \leq \xi_1\},$$

la contrainte du limiteur de flux est activée, c'est-à-dire que

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq 1 \text{ et } \mu h'(\xi) + E^{**} = 0.$$

La question est donc de montrer que ce scénario est réalisable et d'expliciter les solutions $h(\xi)$ et $\lambda(\xi)$.

Pour aller à l'essentiel, on va supposer que l'effet de transport se traduit par

$$V(S) = aS, \quad (5.9)$$

où a est un réel de signe positif ou négatif, selon le sens de l'effet convectif, avec

$$|a| < \mu$$

(hypothèse signifiant que le transport est une "petite" perturbation de l'effet gravitaire). On remarquera, pour la suite, que la fonction $\xi \mapsto h(\xi)$ est continue nécessairement, que les fonctions $\xi \mapsto \lambda(\xi)$ et $\xi \mapsto h'(\xi)$ peuvent présenter des discontinuités mais que le produit $\xi \mapsto \lambda(\xi) [h'(\xi) + ah(\xi)]$ est continu.

Première phase : contrainte inactive dans $Q_0 = Q \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\}$

On va montrer que l'on peut construire une solution dans Q_0 telle que plus précisément

$$\mu h'(\xi) + E^* > 0, \quad \lambda(\xi) = 1 \text{ pour } \xi \in [0, \xi_0[\text{ et } \mu h'(\xi_0) + E^* = 0. \quad (5.10)$$

Il vient donc, d'après (5.8) et (5.9),

$$h'(\xi) = (\mu - a)h(\xi) - C_0,$$

d'où

$$h(\xi) = C_1 e^{(\mu-a)\xi} + \frac{C_0}{\mu - a}$$

avec

$$\begin{aligned} h(0) &= C_1 + \frac{C_0}{\mu - a}, \quad \text{par calcul} \\ &= S_0(0), \quad \text{par définition} . \end{aligned}$$

Par ailleurs, la condition désirée

$$\mu h'(\xi_0) + E^* = 0$$

implique que

$$\mu C_1(\mu_a)e^{(\mu-a)\xi_0} + E^* = 0 \quad \text{d'où} \quad C_1 = -\frac{E^*}{\mu(\mu-a)}e^{-(\mu-a)\xi_0}$$

et, finalement, pour $\xi \in [0, \xi_0]$,

$$\begin{aligned} h(\xi) &= -\frac{E^*}{\mu(\mu-a)} e^{(\mu-a)(\xi-\xi_0)} + \frac{E^*}{\mu(\mu-a)} e^{-(\mu-a)\xi_0} + S_0(0) \\ &= S_0(0) + \frac{E^*}{\mu(\mu-a)} e^{-(\mu-a)\xi_0} [1 - e^{(\mu-a)\xi}]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Il reste à vérifier que ce choix est compatible avec la relation (5.10); or, pour $\xi \in [0, \xi_0]$,

$$\begin{aligned} \mu h'(\xi) + E^* &= -E^* e^{(\mu-a)(\xi-\xi_0)} + E^* \\ &= E^* (1 - e^{(\mu-a)(\xi-\xi_0)}) > 0 \quad \text{par le fait qu'ici } \xi - \xi_0 \leq 0 \text{ et } \mu - a > 0. \end{aligned}$$

On retiendra pour la suite que

$$C_0 = (\mu - a)h(\xi_0) + \frac{E^*}{\mu} \quad (5.12)$$

et on prendra des données compatibles avec la relation :

$$\frac{E^*}{\mu} - ah(\xi_0) > 0,$$

ce qui est possible pour $|a|$ assez petit. On note la cohérence de cette expression en précisant les unités :

$$E^* = \frac{L}{T}, \quad \mu = \frac{L}{T}, \quad a = \frac{1}{L}, \quad h = L, \quad C_0 = \frac{L^2}{T}, \quad \lambda = \frac{L^2}{T}$$

et donc, l'expression $\mu - a$ doit être lue comme $\mu - \lambda a$ avec $\lambda = 1$ et a pour dimension

$$\frac{L}{T} + \frac{L^2}{T} \times \frac{1}{L} = \frac{L}{T}$$

c'est-à-dire une vitesse, alors que

$$\frac{E^*}{\mu} - ah(\xi_0)$$

est un scalaire adimensionné.

Deuxième phase : activation de la contrainte pour limiter le flux diffusif et convectif

Dans cette phase on doit réaliser les conditions simultanées :

$$\mu h'(\xi) + E^{**} = 0, \quad 0 \leq \lambda(\xi) \leq 1 \quad \text{pour } \xi \in [\xi_0, \xi_1].$$

Il vient donc

$$\begin{cases} \mu h(\xi) - \lambda(\xi) \left[-\frac{E^{**}}{\mu} + ah(\xi) \right] = C_0, \\ \mu h'(\xi) + E^{**} = 0, \quad \text{pour } \xi \in]\xi_0, \xi_1[, \end{cases}$$

d'où

$$h(\xi) = -\frac{E^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + h(\xi_0)$$

avec

$$h(\xi_0) = h(\xi_0^-) = h(\xi_0^+) = S_0(0) - \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} [1 - e^{-(\mu-a)\xi_0}],$$

d'après (5.11) et la nécessaire continuité de h , c'est-à-dire

$$h(\xi) = -\frac{E^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + S_0(0) - \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} [1 - e^{-(\mu-a)\xi_0}], \quad \text{pour } \xi \in [\xi_0, \xi_1]$$

puis,

$$\lambda(\xi) = \frac{\mu h(\xi) - C_0}{ah(\xi) - \frac{E^{**}}{\mu}},$$

ou encore

$$\lambda(\xi) = \frac{-E^{**}(\xi - \xi_0) + \mu h(\xi_0) - C_0}{-\frac{aE^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + ah(\xi_0) - \frac{E^{**}}{\mu}}, \quad \text{pour } \xi > \xi_0.$$

On observe alors que la fonction λ est homographique sur $]\xi_0, \xi_1[$ et que selon (5.12), on peut encore écrire :

$$\lambda(\xi) = \frac{-E^{**}(\xi - \xi_0) - \frac{E^*}{\mu} + ah(\xi_0)}{-\frac{aE^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + ah(\xi_0) - \frac{E^{**}}{\mu}},$$

et en particulier,

$$\lambda(\xi_0^+) = \frac{\frac{E^*}{\mu} - ah(\xi_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - ah(\xi_0)}, \quad \text{avec } E^{**} > E^* > 0,$$

d'où le fait important que $\lambda(\xi_0^+) \in]0, 1[$ et donc par la continuité de la fonction λ , on peut choisir $\xi_1 > \xi_0$ tel que $\lambda(\xi) \in [0, 1]$ pour $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$. Plus précisément, ici,

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{E^{**} - E^*}{E^{**}} \frac{1}{\mu - a},$$

dimensionné à une longueur.

En résumé, on a construit une solution explicitement définie par

$$S(t, x) = S_0(0) + \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} e^{-(\mu-a)\xi_0} [1 - e^{(\mu-a)(x+\mu t)}], \quad \lambda(t, x) = 1$$

pour $(t, x) \in]0, T[\times]0, L[\cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\}$

$$S(t, x) = \frac{E^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) + S_0(0) - \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} [1 - e^{-(\mu-a)\xi_0}],$$

$$\lambda(t, x) = \frac{-E^{**}(x + \mu t - \xi_0) - \frac{E^*}{\mu} + aH_0}{-\frac{aE^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) - \frac{E^{**}}{\mu} + aH_0},$$

pour $(t, x) \in]0, T[\times]0, L[\cap \{\xi_0 \leq x + \mu t \leq \xi_1\}$, où

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{E^{**} - E^*}{E^{**}} \frac{1}{\mu - a},$$

et où l'on note

$$H_0 = S_0(0) - \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} [1 - e^{-(\mu-a)\xi_0}].$$

La donnée initiale est ici

$$S(0, x) = S_0(0) + \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} e^{-(\mu-a)\xi_0} [1 - e^{(\mu-a)x}], \quad \text{pour } x \in]0, L[,$$

$S_0(0)$ étant un réel strictement positif, à discrétisation.

Les conditions de bord associées, de Dirichlet ou de Neumann selon la modélisation choisie, découlent du calcul de $S(t, 0)$, $S(t, L)$, $\lambda(t, 0) \frac{\partial S}{\partial x}(t, 0)$, $\lambda(t, L) \frac{\partial S}{\partial x}(t, L)$, *etc* On note la nécessité pour ce scénario que $E^{**} > E^*$ (relâchement de la contrainte) pour que l'on ait

$$\xi_1 > \xi_0 \quad \text{et} \quad \lambda(\xi_0^+) \leq 1.$$

Pour commenter cette situation, posons pour fixer les idées que $0 < L < \xi_0$. Il s'ensuit que jusqu'à l'instant

$$t^* = \frac{\xi_0 - L}{\mu}$$

le graphe de la fonction $x \mapsto S(t, x)$ est très régulier, puis, pour $t > t^*$, le graphe, lipschitzien seulement, présente un point anguleux mobile parcourant l'intervalle $]0, L[$ de droite à gauche, en

$$\widehat{x}(t) = \xi_0 - \mu t,$$

les pentes en $\widehat{x}(t)$ étant respectivement :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, (\widehat{x}(t))^-) = -\frac{E^*}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, (\widehat{x}(t))^+) = -\frac{E^{**}}{\mu}, \quad S(t, \widehat{x}(t)) = H_0,$$

là où le limiteur de flux présente une discontinuité :

$$\lambda(t, (\widehat{x}(t))^-) = 1 \quad \text{et} \quad \lambda(t, (\widehat{x}(t))^+) = \frac{\frac{E^*}{\mu} - aH_0}{\frac{E^{**}}{\mu} - aH_0} \in]0, 1[.$$

Vérification : le produit

$$\lambda(t, \widehat{x}(t)) \left[S'(t, \widehat{x}(t)) + aS(t, \widehat{x}(t)) \right]$$

est continu :

$$1 \times \left[-\frac{E^*}{\mu} + aH_0 \right] = \frac{\frac{E^*}{\mu} - aH_0}{\frac{E^{**}}{\mu} - aH_0} \times \left[-\frac{E^{**}}{\mu} + aH_0 \right].$$

D'autres scénarios peuvent facilement être construits par ce procédé. Prenons le cas où $E^* = 0$ et $E^{**} > 0$ qui correspond à une seule procédure de sédimentation + transport dans un premier temps, puis ensuite, un processus de sédimentation + érosion + transport.

Il vient alors, sous la condition de cohérence $S_0(0) > 0$ et $a < 0$,

$$S(t, x) = S_0(0), \quad \lambda(t, x) = 1 \quad \text{pour} \quad (t, x) \in]0, T[\times]0, L[\cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\},$$

$$S(t, x) = -\frac{E^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) + S_0(0), \quad \lambda(t, x) = \frac{-E^{**}(x + \mu t - \xi_0) + aS_0(0)}{-\frac{aE^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) - \frac{E^{**}}{\mu} + aS_0(0)},$$

pour $(t, x) \in Q \cap \{\xi_0 < x + \mu t \leq \xi_1\}$, où

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{1}{\mu - a}.$$

$$S(0, x) = S_0(0) \quad \text{pour} \quad x \in]0, L[.$$

Prenant encore $0 < L < \xi_0$, on voit apparaître un point anguleux après l'instant $t^* = \frac{\xi_0 - L}{\mu}$ en l'abscisse $\widehat{x}(t) = \xi_0 - \mu t$, les pentes valant à gauche et à droite respectivement 0 et $-\frac{E^{**}}{\mu}$, les limiteurs de flux présentent un saut, puisque, pour $t > \frac{\xi_0 - L}{\mu}$

$$\lambda(t, (\widehat{x}(t))^-) = 1, \quad \lambda(t, (\widehat{x}(t))^+) = \frac{aS_0(0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - aS_0(0)} \in]0, 1[.$$

On vérifie encore, pour $t > \frac{\xi_0 - L}{\mu}$, la continuité de la fonction

$$t \longmapsto \lambda(t, \hat{x}(t)) \left[\frac{\partial S}{\partial x}(t, \hat{x}(t)) + aS(t, \hat{x}(t)) \right]$$

par le calcul :

$$1 \times [0 + aS_0(0)] = \frac{aS_0(0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - aS_0(0)} \times \left[-\frac{E^{**}}{\mu} + aS_0(0) \right].$$

Pour le choix : $0 < \xi_0 < L$, l'état initial est donné par

$$S_0(x) = \begin{cases} S_0(0) & \text{pour } x \in]0, \xi_0[\\ -\frac{E^{**}}{\mu}(x - \xi_0) + S_0(0) & \text{pour } x \in [\xi_0, L], \end{cases}$$

de sorte qu'ici, le point anguleux est présent dans la topographie initiale et va se déplacer immédiatement à la vitesse μ de droite à gauche. Là encore, on est en présence d'un phénomène de propagation à vitesse finie, déformant une région plate continuée par un plan incliné.

On peut observer que l'on peut obtenir la même solution $(t, x) \longmapsto S(t, x)$ que précédemment avec la même condition initiale et les mêmes conditions de Dirichlet non homogènes, pour le choix de λ différent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in]0, T[\times]0, L[\cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\} \\ \lambda(t, x) = \frac{E^{**}(x + \mu t - \xi_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} + \frac{aE^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) - aS_0(0)} \\ \text{pour } (t, x) \in]0, T[\times]0, L[\cap \{\xi_0 \leq x + \mu t \leq \xi_1\}, \text{ avec } \xi_1 = +\infty, \end{array} \right.$$

la fonction λ étant ici continue en $\hat{x}(t) = \xi_0 - \mu t$; en fait, par réalisme, on doit avoir

$$S(t, x) \geq 0, \quad \text{i.e.} \quad \xi_1 = \xi_0 + \frac{\mu}{E^{**}} S_0(0);$$

cela pointe des possibilités de non-unicité, pour les couples (S, λ) , avec $\lambda \in \mathcal{H}(\frac{\partial S}{\partial t} + E)$. Ces cas de non-unicité sont rencontrés a priori lorsqu'on impose une condition de sédimentation sans érosion (E nul sur une certaine région Λ de $Q =]0, T[\times \Omega$), autrement dit, $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$ dans Λ . En ce sens, les problèmes associés à un obstacle qui reste strictement positif ou à un obstacle pouvant s'annuler semblent de nature très différente.

Le cas général où le terme de transport est modélisé par un terme non linéaire $V(S(t, x))$

peut être abordé de la même façon. Considérons la phase de contrainte désactivée (avec $E^* > 0$), il vient, pour $\xi \in [0, \xi_0]$,

$$\mu h(\xi) - \left[h'(\xi) + V(h(\xi)) \right] = C_0, \quad \lambda(\xi) = 1$$

$$\mu h(\xi) + E^* \geq 0, \quad \mu h'(\xi_0^-) + E^* = 0.$$

On suppose comme précédemment que l'influence gravitaire est prépondérante, ce qui se traduit par

$$\mu - \|V'\|_{L^\infty(0,L)} > 0.$$

On note

$$\psi_\mu = \mu Id - V,$$

fonction strictement croissante, et on prend pour grandeur de calage $H_0 = h(\xi_0)$. Il vient, en ξ_0^- ,

$$\mu H_0 - \left[-\frac{E^*}{\mu} + V(H_0) \right] = C_0$$

d'où

$$C_0 = \psi_\mu(H_0) + \frac{E^*}{\mu},$$

l'équation différentielle s'écrit donc

$$h'(\xi) = \psi_\mu(h(\xi)) - \psi_\mu(H_0) - \frac{E^*}{\mu}, \quad \xi \in]0, \xi_0[\text{ et } h(\xi_0) = H_0 > 0. \quad (5.13)$$

Prenant pour simplifier un peu (la constante μ est petite, ce qui légitime ce qui est fait), la situation où

$$\frac{E^*}{\mu} \geq \text{oscillation } \psi_\mu, \quad \frac{E^*}{\mu} \geq V(H_0).$$

On sait par des résultats généraux sur les équations différentielles que (5.13) admet une unique solution h décroissante, de sorte qu'ipso facto,

$$\mu h'(\xi) + E^* = \mu[\psi_\mu(h(\xi)) - \psi_\mu(H_0)] \geq 0 \text{ et } \mu h'(\xi_0^-) + E^* = 0.$$

Le traitement de la deuxième phase (activation de la contrainte) conduit à prendre, lorsque le taux d'érosion maximale est $E^{**} > E^*$,

$$h(\xi) = -\frac{E^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + H_0, \quad \xi \in [\xi_0, \xi_1]$$

et donc

$$\lambda(\xi) = \frac{\mu h(\xi) - \psi_\mu(H_0) - \frac{E^*}{\mu}}{V(h(\xi)) - \frac{E^{**}}{\mu}}, \quad \xi \in]\xi_0, \xi_1].$$

En particulier,

$$\lambda(\xi_0^+) = \frac{\frac{E^*}{\mu} - V(H_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - V(H_0)} \text{ et donc } \lambda(\xi_0^+) \in]0, 1[,$$

ce qui permet par un argument de continuité de choisir ξ_1 le plus grand possible, de sorte que les valeurs de λ sur $[\xi_0^+, \xi_1]$ restent dans $[0, 1]$.

En résumé, la solution construite par le procédé “travelling waves” est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t, x) = h(x + t\mu), \quad \lambda(t, x) = 1 \quad \text{pour } (t, x) \in Q \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\} \\ \text{où } h \text{ est la solution de l'équation différentielle ordinaire :} \\ h'(\xi) = \psi_\mu(h(\xi)) - \psi_\mu(H_0) - \frac{E^*}{\mu}, \quad \psi_\mu = \mu Id - V, \quad H_0 = h(\xi_0), \quad \xi \in]0, \xi_0[, \\ S(t, x) = -\frac{E^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) + H_0, \quad \lambda(t, x) = \frac{-E^{**}(x + \mu t - \xi_0) + V(H_0) - \frac{E^*}{\mu}}{V\left[-\frac{E^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) + H_0\right] - \frac{E^{**}}{\mu}} \\ \text{pour } (t, x) \in Q \cap \{\xi_0 < x + \mu t \leq \xi_1\}, \end{array} \right.$$

avec la même remarque sur les discontinuités des fonctions $\frac{\partial S}{\partial x}$ et λ le long de la droite

$$x + \mu t = \xi_0,$$

c'est-à-dire en les points

$$\hat{x}(t) = \xi_0 - \mu t \text{ lorsque } \hat{x}(t) \in [0, L].$$

Il vient, par exemple,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t, (\hat{x}(t))^-) = 1, \quad 0 < \lambda(t, (\hat{x}(t))^+) = \frac{\frac{E^*}{\mu} - V(H_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - V(H_0)} < 1, \\ \frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^-) = -\frac{E^*}{\mu}, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^+) = -\frac{E^{**}}{\mu}, \end{array} \right.$$

où

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{\mu}{E^{**}} H_0 - \frac{\mu}{E^{**}} \psi_\mu^{-1} \left[\psi_\mu(H_0) + \frac{E^* - E^{**}}{\mu} \right],$$

avec le fait que la propriété $\xi_1 > \xi_0$ est assurée par l'hypothèse : $E^{**} > E^* > 0$, et la stricte croissance de la fonction ψ_μ .

En outre, on vérifie aisément que la fonction de “flux”

$$t \longmapsto \lambda(t, \hat{x}(t)) \left[\frac{\partial S}{\partial x}(t, \hat{x}(t)) + V(S(t, \hat{x}(t))) \right]$$

est continue alors que certains termes de ce produit sont discontinus : en effet,

$$\lambda(t, (\hat{x}(t))^-) \left[\frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^-) + V(S(t, (\hat{x}(t))^-)) \right] = 1 \times \left[-\frac{E^*}{\mu} + V(H_0) \right]$$

et

$$\begin{aligned} \lambda(t, (\hat{x}(t))^+) \left[\frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^+) + V(S(t, (\hat{x}(t))^+)) \right] &= \frac{\frac{E^*}{\mu} - V(H_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - V(H_0)} \times \left[-\frac{E^{**}}{\mu} + V(H_0) \right] \\ &= -\frac{E^*}{\mu} + V(H_0). \end{aligned}$$

Chapitre 6

Un problème de Bernoulli d'évolution Résultat d'existence dans le cas de la sédimentation 1 – D avec transport marin

Dans ce chapitre, on se propose en se limitant à la dimension 1 d'espace, de donner une argumentation qui permet de passer à la limite dans la formulation semi-discrétisée pour atteindre une formulation continue, via un procédé de compacité fondé sur une estimation *a priori* supplémentaire : en clair, sur les cas que l'on introduit, on va mettre en évidence le fait que la suite des itérés représentatifs des limiteurs de flux à chaque pas de temps reste dans un borné fixe de $L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q)$, d'où une possibilité de convergence forte dans $L^1(Q)$; en outre, on va dégager un principe constructif pour les solutions explicites du schéma semi-discrétisé implicite, en résolvant un problème à frontière libre avec des données de bord surdéterminées, c'est-à-dire un problème de Bernoulli [28], [48] : une équation aux dérivées partielles régie par un opérateur linéaire du second ordre et trois conditions de bord (2 Dirichlet et 1 Fourier-Robin) sur une frontière inconnue du problème. En outre, le schéma obtenu correspond à la valeur maximale (en un certain sens) possible du limiteur de flux, à chaque itération, ce qui correspond à la solution "géologiquement admissible" dans la mesure où le flux doit être limité au strict nécessaire pour rendre compatibles l'équation de continuité et la contrainte globale de sédimentation sans érosion. On verra que ce procédé n'est pas généralisable à une base bidimensionnelle pour le bassin sédimentaire : il se fonde sur une idée due à G. Vallet, publiée en 2003 dans [56] et reprise dans S. N. Antontsev et coauteurs [16], puis étendue ici pour les effets du transport.

On rappelle que $L^\infty(\Omega) \cap \overline{BV}(\Omega)$ représente l'ensemble des classes de fonctions de $L^\infty(\Omega)$ dont les dérivées premières au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont des mesures de Radon sommables sur Ω (il s'agit donc des fonctions \mathcal{L}^d – mesurables, essentiellement bornées

et à variation bornée). On rappelle aussi ([36] Chapitre 5, [39] Chapitre 4, [57]) que si l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est borné et régulier, l'injection canonique de $\overline{BV}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ est compacte. En outre, un ensemble \mathcal{L}^d -mesurable $\omega \subset \mathbb{R}^d$ a un périmètre fini dans Ω si et seulement si sa fonction indicatrice 1_ω appartient à $L^\infty(\Omega) \cap \overline{BV}(\Omega)$ (voir par exemple [36] p. 167 pour ces notions). L'espace $\overline{BV}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ est un espace de Banach, normé par l'application

$$f \in \overline{BV}(\Omega) \cap L^1(\Omega) \longmapsto \|f\| = \|f\|_{L^1(\Omega)} + TV_\Omega(f)$$

avec

$$TV_\Omega(f) = \sup \left\{ \int_\Omega f \operatorname{div} \vec{\Phi} \, dx, \vec{\Phi} \in \mathcal{D}(\Omega)^d \text{ et } \|\vec{\Phi}\|_\infty \leq 1 \right\}$$

où pour tout élément $\vec{\Phi}$ de $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_d)$,

$$\|\vec{\Phi}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} (\|\Phi_i\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Dans ce chapitre, nous avons donc les données suivantes :

$$\Omega =]-1, 1[\quad \text{et} \quad E = 0 \quad (\text{il n'y a pas d'érosion}).$$

Le flux des sédiments est ici donné sous la forme, conformément au cadre de l'hypothèse (5.1),

$$q = -\lambda(\nabla S - 2aS^-)$$

présentant un terme de transport non linéaire lipschitzien, représentatif d'une convection sous-marine, ce terme disparaissant pour les cotes positives, et où a est un réel négatif, *a priori* "petit". L'effet de diffusion est donc prépondérant par rapport à l'influence du transport forcé.

Hypothèses sur S_0 :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{On distingue deux types de région :} \\
 \\
 \text{Sur } [-1, 0] : \\
 \text{On suppose que la donnée initiale } S_0, \text{ prise dans } H_0^1(\Omega), \text{ est positive au} \\
 \text{voisinage de } (-1)^+ \text{ et de } 0^-, \text{ nulle en } -1 \text{ et en } 0 \text{ et sans hypothèse} \\
 \text{supplémentaire sur l'allure de la topographie initiale, sinon que } S_0 \\
 \text{est de fait dans } H_0^1(] - 1, 0[). \\
 \\
 \text{Sur } [0, 1] : \\
 \text{On suppose que la fonction } S_0 \text{ est négative de classe } C^1 \text{ et que la fonction} \\
 x \mapsto S_0'(x) + 2aS_0(x) \text{ est strictement croissante, et on considère la fonction} \\
 f : x \mapsto S_0(x)e^{2ax} \text{ et on note } \alpha \in]0, 1[\\
 \text{l'unique point tel que :} \\
 \\
 \forall x \in]0, \alpha[\quad S_0'(x) + 2aS_0(x) < 0, \quad (\text{stricte décroissance de } f) \\
 \\
 \forall x \in]\alpha, 1[\quad S_0'(x) + 2aS_0(x) > 0 \\
 \\
 \text{et} \\
 \\
 S_0'(\alpha) + 2aS_0(\alpha) = 0.
 \end{array} \right\} H(S_0)$$

Cette propriété correspond à une propriété de convexité de la partie immergée lorsque $a = 0$ (sédimentation sans transport) et reste vraie pour une topographie initiale strictement convexe dans sa partie immergée, de pente pas trop abrupte en $x = 1^-$, avec $|a|$ assez petit.

Remarque 6.1. L'hypothèse

$$\forall x \in]0, \alpha[\quad S_0'(x) + 2aS_0(x) < 0$$

implique que

$$\forall x \in]0, \alpha[\quad (S_0(x)e^{2ax})' < 0$$

et donc, en particulier,

$$\forall x \in]0, \alpha[\quad e^{2a(\alpha-x)} S_0(\alpha) < S_0(x) < 0.$$

De la même façon, il s'ensuit que

$$\forall x \in]\alpha, 1[\quad e^{2a(\alpha-x)} S_0(\alpha) < S_0(x) < 0.$$

Exemples d'une configuration de topographie initiale admissible

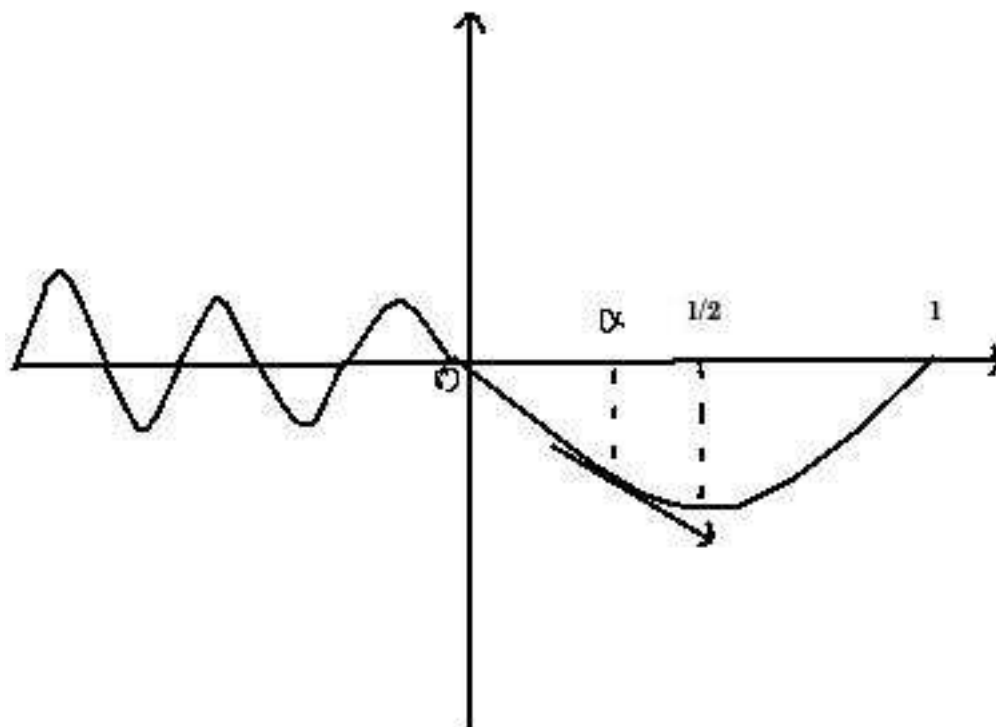


FIG. 6.1 -

$$\begin{cases} S_0(x) = kx(x-1), & x \in [0,1], k > 0, \\ \alpha = -\frac{1}{2a}(1-a-\sqrt{1+a^2}), & a \in]-1,0[\end{cases}$$

Avec des adaptations mineures des démonstrations à venir, on verra que la situation suivante est également appropriée :

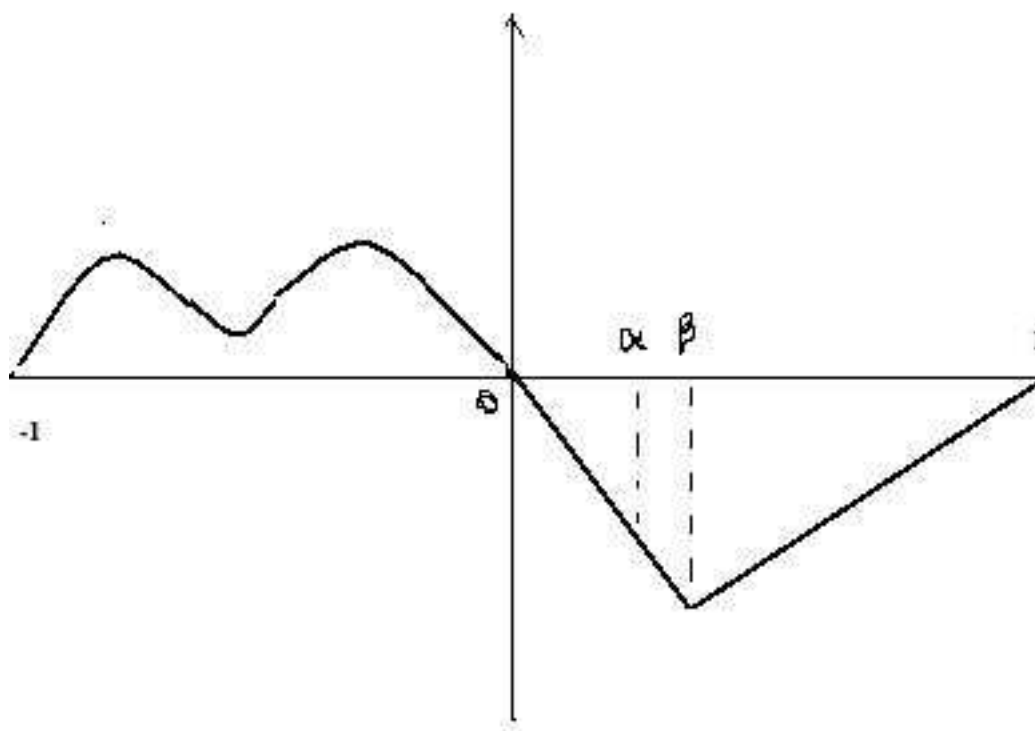


FIG. 6.2 -

$$S_0(x) = \begin{cases} mx & \text{sur } [0, \beta], \quad m < 0, \\ \frac{m\beta}{\beta-1}(x-1) & \text{sur } [\beta, 1] \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2a} \quad \text{avec } 1 + 2a\beta < 0.$$

On est alors en mesure d'énoncer le résultat principal :

Théorème 6.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un couple (S, λ) solution du problème de Cauchy-Dirichlet de sédimentation-transport, vérifiant*

$$S \in H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \lambda \in L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q) \cap \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right),$$

et p.p. en $t \in]0, T[$ et $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda (\nabla S \cdot \nabla v - 2aS^- \nabla v) \, dx = 0 \\ S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{partout dans } \Omega. \end{cases}$$

En outre, on a une précision de régularité supplémentaire, propre à la dimension 1 en espace, d'après le lemme d'Ascoli : $S \in C^0(\overline{Q})$, pour un représentant canonique.

De plus, le limiteur de flux λ apparaît comme la fonction indicatrice d'un ensemble $\Lambda \subset Q$, \mathcal{L}^2 -mesurable à périmètre fini, la frontière libre $\partial\Lambda \cap Q$ étant le graphe d'une fonction continue décroissante au sens large $t \mapsto \xi(t)$.

Informellement, S est de fait solution du problème à frontière libre de type Bernoulli d'évolution :

$$\begin{cases} S = S_0 \quad \text{dans } Q \setminus \Lambda \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial x} - 2aS^- \right) = 0 \quad \text{dans } \Lambda. \\ S|_{\partial\Lambda \cap Q} = S_0|_{\partial\Lambda \cap Q}, \quad \frac{\partial S}{\partial x}|_{\partial\Lambda \cap Q} = -2aS_0|_{\partial\Lambda \cap Q}, \\ S(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{p.p. en } t, \\ S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

Enfin, d'après la remarque 4.1, la condition

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q$$

résulte de la formulation variationnelle en dim 1 d'espace, car

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^- = \frac{d}{dx} \left(\lambda \left[\frac{\partial S}{\partial x} - 2aS^- \right] \right) 1_{\left\{ \frac{\partial S}{\partial t} < 0 \right\}} = 0 \quad \text{p.p. en } t, \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

6.1 Principes de la construction des itérés (S^k, λ^k) avec $\lambda^k \in \mathcal{H}\left(\frac{S^k - S^{k-1}}{h}\right)$, λ^k "maximal"

On s'intéresse d'abord à la première itération avec $\Omega =]-1, 1[$ et $E = 0$, et donc, on doit avoir :

$$\frac{S^1 - S_0}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^1 \left[\frac{\partial S^1}{\partial x} - 2a(S^1)^- \right] \right) = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[,$$

$$S^1(1) = S^1(-1) = 0, \quad S^1 \in H_0^1(]-1, 1[), \quad \lambda^1 \in \mathcal{H}\left(\frac{S^1 - S_0}{h}\right).$$

Observant que la suite des $\{S^k\}_k$ est croissante (car $\frac{S^k - S^{k-1}}{h} \geq 0$ p.p. dans Ω), on en déduit que la fonction $x \mapsto \lambda^1 \left[\frac{\partial S^1}{\partial x} - 2a(S^1)^- \right]$ est continue et croissante sur $[-1, 1]$. D'après les propositions 5.1 et 5.2, on sait que $(S^1, \lambda^1) = (S_0, 0)$ sur $[-1, 0]$. On va alors chercher λ^1 le plus grand possible au sens des relèvements de $\mathcal{H}\left(\frac{S^1 - S_0}{h}\right)$ (la solution géologiquement intéressante), et dès lors que λ^1 ne sera pas nécessairement nul, on va chercher à le prendre égale à 1, *i.e.* sans limitation de flux.

On pose alors

$$x(h) = \sup \left\{ x \in [0, 1], \left\{ \lambda^1 \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} - 2a(S^1)^- \right) \right\} (x) = 0 \right\}.$$

On remarque que $x(h)$ ne peut être nul : en effet, puisque S_0 est négatif sur $[0, 1]$, S^1 l'est aussi, comme on peut le voir en prenant la fonction-test $(S^1)^+$ dans la formulation variationnelle, et nous aurions sinon par conditions de raccord :

$$\begin{cases} \frac{S^1 - S_0}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} + 2aS^1 \right) = 0 \quad \text{sur }]0, 1[, \\ S^1(0) = 0, \quad \frac{\partial S^1}{\partial x}(0) + 2aS^1(0) = 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial S^1}{\partial x}(0) = 0, \quad S^1(1) = 0, \end{cases}$$

ce qui est incompatible avec les relations $S^1 < 0$ et $S^1 > S_0$, car

$$S^1 > S_0 \quad \text{implique} \quad \text{que} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} + 2aS^1 \right) > 0 \quad \text{sur }]0, 1[$$

et donc, la fonction $x \mapsto \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} + 2aS^1 \right) (x)$ est croissante sur $[0, 1]$, et comme $\left(\frac{\partial S^1}{\partial x} + 2aS^1 \right) (0) = 0$, alors

$$\forall x \in [0, 1] \quad \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} + 2aS^1 \right) (x) > 0,$$

ce qui implique que la fonction $x \mapsto S^1(x)e^{2ax}$ est croissante sur $[0, 1]$, d'où

$$\forall x \in]0, 1] \quad 0 = S^1(0) < S^1(x)e^{2ax}, \text{ et donc } S^1 > 0 ! \text{ contradiction.}$$

Donc, $x(h) > 0$ devient une inconnue du problème (frontière libre) et l'on est amené à résoudre le problème à conditions de bord surdéterminées de type Bernoulli :

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} \text{Chercher } x(h) \in]0, 1[, S^1 \in H^1(x(h), 1) \text{ vérifiant} \\ S^1 - h \left(\frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial S^1}{\partial x} \right) = S_0 \text{ dans }]x(h), 1[, \\ S^1(x(h)) = S_0(x(h)), S^1(1) = 0, \frac{\partial S^1}{\partial x}(x(h)) + 2aS^1(x(h)) = 0, \end{cases}$$

car, par conditions de raccord :

- i) $S^1(x(h)) = S_0(x(h))$ car $H_0^1([-1, 1]) \hookrightarrow C^0([-1, 1])$
- ii) par continuité de $\Psi : x \mapsto \lambda^1 \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} + 2aS^1 \right) (x)$, sur $[-1, 1]$,

$$\Psi(x(h)^-) = 0 = \Psi(x(h)^+) = \frac{\partial S^1}{\partial x}(x(h)) + 2aS^1(x(h)).$$

et donc

$$\frac{\partial S^1}{\partial x}(x(h)) = -2aS_0(x(h)),$$

- iii) $S^1(1) = 0$ car $S^1 \in H_0^1(] - 1, 1])$.

On voit ici l'influence du terme de transport (signe et valeur) sur la condition de raccord du flux et l'allure géométrique des solutions, par la valeur du coefficient directeur de la demi-tangente à droite, selon la profondeur en la côte $S_0(x(h))$.

On va montrer qu'il existe un élément $x(h)$, pris le plus proche possible de α , dans $]0, \alpha[$ qui permette de réaliser ce système et donc, à la première itération, on a

$$\lambda^1 = \begin{cases} 0 \text{ sur } [0, x(h)] \\ 1 \text{ sur }]x(h), 1] \end{cases}$$

$$S^1 = \begin{cases} S_0 & \text{sur } [0, x(h)] \\ S^1 & \text{sur }]x(h), 1], \end{cases}$$

selon la construction \mathcal{P}_1 .

Il est alors essentiel de noter que puisque $\frac{S^1 - S_0}{h}$ est positif sur $[0, 1]$, il s'ensuit par les conditions de raccord que la fonction $x \mapsto \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} + 2aS^1 \right) (x)$ est croissante sur $[0, 1]$, négative sur $[0, x(h)]$, nulle en $x(h)$ et positive sur $[x(h), 1]$, de sorte qu'on retrouve l'hypothèse de départ faite sur l'état initial pour la topographie à l'instant h , le point $x(h)$ jouant maintenant le rôle initial de α et le procédé peut être reconduit par récurrence. La suite $\alpha, x(h) = x^1(h), x^2(h), x^3(h), \text{etc...}$, marquant la frontière libre est monotone (décroissante au sens large) et ce point est l'argument de fond qui permet d'atteindre la formulation continue dans cette situation particulière à la dimension 1 d'espace : la suite $(\lambda^h)_h$ des itérés des limiteurs de flux est alors enfermée dans un borné fixe de $L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q)$, ce qui permet une convergence forte dans $L^1(Q)$ par compacité. D'après C. Bardos [24] (correspondance particulière avec G. Gagneux, Octobre 2004), cette propriété d'estimation uniforme dans l'espace $\overline{BV}(Q)$ en dimension 2 d'espace est irréalisable ; il se fonde sur les travaux de J. Rauch et des inégalités de Strichartz qui marquent les limites des effets régularisants pour les problèmes hyperboliques.

6.2 Description des solutions $(S^k, \lambda^k)_{k \in N^*}$ du schéma semi-discrétisé implicite

La détermination explicite des solutions semi-discrétisées fait l'objet de la proposition suivante :

Proposition 6.2. *Sous les hypothèses $H(S_0)$, il existe une suite décroissante, au sens large, de points $(x^k(h))_k$ dans $]0, \alpha[$ telle que pour tout $k \in N^*$, on ait explicitement :*

$$\lambda^k = 1_{]x^k(h), 1[}, \quad S^k = S_0 1_{]-1, x^k(h)]} + \omega^k 1_{]x^k(h), 1[},$$

où ω^k vérifie le problème à frontière libre $x^k(h)$ de type Bernoulli :

$$\begin{cases} \omega^k - h \left(\frac{\partial^2 \omega^k}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial \omega^k}{\partial x} \right) = \omega^{k-1} & \text{dans }]x^k(h), 1[, \\ \omega^k(x^k(h)) = S_0(x^k(h)), \\ \frac{\partial \omega^k}{\partial x}(x^k(h)) + 2a\omega^k(x^k(h)) = 0, \\ \omega^k(1) = 0. \end{cases}$$

Représentation graphique des itérés illustrant les topographies successives, la formation d'une frontière libre et les changements de type de l'équation.

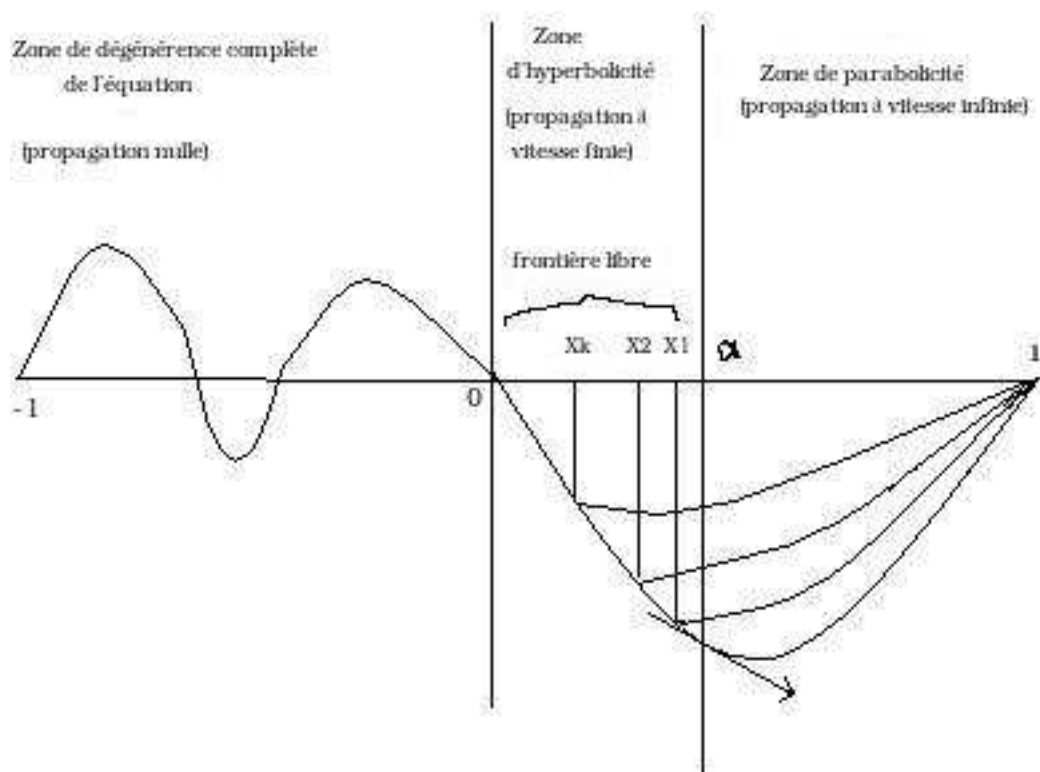


FIG. 6.3 -

$$S'_0(\alpha) = -2aS_0(\alpha), \quad a < 0.$$

Si ce résultat est provisoirement admis, il fournit la clef de la démonstration de la proposition. En effet, on en dégage une propriété nouvelle de compacité, qui permet d'obtenir une convergence forte dans $L^1(Q)$ des fonctions $(\lambda^h)_h$ vers un limiteur de flux λ dans $L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q)$.

Le fait que la suite de points $\{x^k(h)\}_k$ est décroissante est ici primordial : la suite des fonctions en escalier $(\lambda^h)_h$ est alors une suite bornée dans $L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q)$ (Cf. [36], Chapitre 5) et plus précisément, la variation totale de $(\lambda^h)_h$ dans $Q =]0, T[\times \Omega$ est majorée par $T + 1$; *i.e.*

$$\forall h > 0, \quad TV_Q(\lambda^h) \leq T + 1.$$

Il s'ensuit ([36], Théo 4, p.176) qu'il existe une sous-suite $\{\lambda^{h_k}\}$ et une fonction λ dans $\overline{BV}(Q) \cap L^\infty(Q)$ telle que

$$\lambda^{h_k} \longrightarrow \lambda \text{ dans } L^1(Q),$$

ce qui implique la convergence presque partout dans Q pour une sous-suite de $\{\lambda^{h_k}\}$. Cette propriété de convergence forte dans $L^1(Q)$ et presque partout dans Q permet de passer à la limite dans la formulation discrétisée et d'atteindre la formulation continue. En outre, la suite des fonctions $\{\lambda^h\}$ ne prenant que les valeurs 0 et 1, il en découle que λ est une fonction de $L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q)$ qui ne prend que les valeurs 0 et 1; λ est la fonction caractéristique d'un ensemble $\Lambda \subset Q$, \mathcal{L}^2 – mesurable à périmètre fini, *i.e.*

$$\lambda = 1_\Lambda;$$

en outre, la frontière libre $Q \cap \partial\Lambda$ est le graphe d'une fonction numérique décroissante au sens large et continue grâce à la propriété de continuité de S dans $C^0(\overline{Q})$, propre à la dimension 1 et résultant du lemme d'Ascoli, selon une observation de Ph. Bénilan en 1973 : S^h est ici scalairement continue de $[0, T]$ dans $H_0^1([-1, 1])$, où $H_0^1([-1, 1]) \hookrightarrow C^{0, \frac{1}{2}}([-1, 1])$, pour un bon représentant, höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$, uniformément par rapport à t et plus précisément, $\{S^h\}$ est une partie uniformément équicontinue de $C^0(\overline{Q})$ et donc relativement compacte.

Montrons que la séparatrice est un arc continu. Soit $t \mapsto \xi(t)$ l'équation cartésienne de la séparatrice $\Gamma = Q \cap \partial\Lambda$ et supposons par l'absurde que t_0 soit un éventuel point de discontinuité, avec pour fixer les idées

$$\xi(t_0^-) = \xi_0 > \xi_1 = \xi(t_0^+).$$

On sait en effet que ξ est une fonction à variation bornée et plus précisément décroissante, $L^1(0, T)$ -limite de fonctions en escalier.

Or, pour $t \in [0, T] \setminus Z$, $\mathcal{L}^1(Z) = 0$, on a

$$S(t, \xi(t)) = S_0(\xi(t)), \quad S_0 \in C^0([-1, 1]),$$

et donc par la continuité de S dans \overline{Q} ,

$$\text{si } t \rightarrow t_0^-, \quad S(t_0, \xi_0) = S_0(\xi_0),$$

$$\text{si } t \rightarrow t_0^+, \quad S(t_0, \xi_1) = S_0(\xi_1),$$

avec $S_0(\xi_0) < S_0(\xi_1)$ par la stricte décroissance de S_0 sur $]0, \alpha[$.

Or, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$S(t_0 + \varepsilon, \xi_1 + \varepsilon) = S_0(\xi_1) + o(\varepsilon)$$

par continuité de S dans \overline{Q} ; et

$$S(t_0 + \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon) \geq S(t_0 + \varepsilon, \xi_1)$$

car $(t_0 + \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon)$ et $(t_0 + \varepsilon, \xi_1)$ appartiennent à l'ensemble $\{\lambda = 1\}$, où $\forall t > 0, x \mapsto S(t, x)$ est croissante. Donc, si $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$S(t_0, \xi_0) = S_0(\xi_0) \geq S_0(\xi_1),$$

d'où la contradiction par la décroissance stricte de S_0 sur $]0, \alpha[$.

Remarque 6.2. Les considérations précédentes amènent au calcul informel suivant : pour $t \in]0, T[$, on a

$$S(t, \xi(t)) = S_0(\xi(t)), \text{ par la propriété de raccord continu,}$$

et au sens de la dérivée à droite en t^+ , par exemple, il vient informellement

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t^+, \xi(t)) + \xi'(t^+) \frac{\partial S}{\partial x}(t^+, \xi(t)) = \xi'(t) \frac{\partial S_0}{\partial x}(\xi(t));$$

or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x}(t^+, \xi(t)) &= -2aS(t, \xi(t)) \\ &= -2aS_0(\xi(t)), \end{aligned}$$

selon le procédé de construction des solutions via une condition de contact de type Fourier-Robin, ce qui conduit à l'information (sans justification rigoureuse sans information supplémentaire de régularité) :

$$\xi'(t^+) = \frac{-\frac{\partial S}{\partial t}(t^+, \xi(t))}{\frac{\partial S_0}{\partial x}(\xi(t)) + 2aS_0(\xi(t))},$$

quantité négative ou nulle, mesurant la pente de la séparatrice des deux régions (stationnaire et hyperbolique dégénéré). Cependant, d'après un théorème de structure pour les ensembles de périmètre fini ([36], Th 2, p.205), on sait que la séparatrice Γ est réunion dénombrable de courbes de classe C^1 , en dehors d'un ensemble résiduel de points, négligeable pour la mesure du périmètre.

La démonstration de la proposition 6.2 résulte immédiatement du résultat préparatoire suivant :

Lemme 6.3. *Sous les hypothèses $H(S_0)$, il existe un point unique $x(h)$ dans $]0, \alpha[$ tel que le couple (S^1, λ^1) défini par*

$$S^1 = S_0 1_{]-1, x(h)[} + \omega 1_{]x(h), 1[} \text{ et } \lambda^1 = 1_{]x(h), 1[},$$

où ω est la solution dans $C^2([x(h), 1])$ du problème différentiel

$$\begin{cases} \omega - h(\omega'' + 2a\omega') = S_0 \text{ dans }]x(h), 1[, \\ \omega(x(h)) = S_0(x(h)), \omega'(x(h)) + 2a\omega(x(h)) = 0, \omega(1) = 0, \end{cases}$$

Remarque 6.3. Le point important ici est de bien observer que ω est solution d'un problème elliptique associé à des conditions de bord surdéterminées : un opérateur linéaire du second ordre et trois conditions aux limites (une condition de Dirichlet homogène, une condition de Dirichlet non homogène et une condition de Fourier-Robin) ; cependant, il n'y a pas d'incohérence car le point $x(h)$ est une frontière libre de type Bernoulli.

Preuve du lemme 6.3 :

D'après les § 5.1.2 prop. 5.1 et § 5.1.3 prop. 5.2 et les considérations de constructions précédentes, $S^1 = S_0$ sur $] - 1, 0[$ et plus précisément sur $] - 1, x(h)[$. En outre, pour rechercher ω , on considère l'équation homogène associée dont l'équation caractéristique admet deux racines réelles

$$r_1 = -a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}, \quad r_2 = -a - \sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}, \quad r_1 > 0, \quad r_2 < 0,$$

et on utilise la méthode de la variation des doubles constantes. On obtient, après calculs,

$$\omega(x) = S_0(x) - \frac{1}{2\sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}} \int_{x(h)}^x \left[S_0'(y) + 2aS_0(y) \right] (r_1 e^{r_1(x-y)} - r_2 e^{r_2(x-y)}) dy \quad (6.1)$$

où $x(h)$ est défini de façon unique dans $]0, \alpha[$ par la condition

$$\int_{x(h)}^1 \left[(S_0'(y) + 2aS_0(y)) \right] (r_1 e^{r_1(1-y)} - r_2 e^{r_2(1-y)}) dy = 0.$$

L'existence d'un tel $x(h)$ peut être obtenue en étudiant les variations de la fonction F définie par :

$$F(\xi) = \int_{\xi}^1 \left[(S'_0(y) + 2aS_0(y)) (r_1 e^{r_1(1-y)} - r_2 e^{r_2(1-y)}) \right] dy \text{ sur }]0, \alpha[.$$

On a en particulier

- i) $F'(\xi) < 0$ sur $]0, \alpha[$ par le fait que l'application $x \mapsto S'_0(x) + 2aS_0(x)$ est supposée strictement négative sur $]0, \alpha[$, d'où l'unicité.
- ii) $F(0)F(\alpha) < 0$, d'où l'existence par le théorème des valeurs intermédiaires.

En outre, la condition de raccord continu fait que $S^1 \in H_0^1(-1, 1)$ et l'on a, au sens des distributions de $\mathcal{D}'(]-1, 1[)$, et presque partout sur $]-1, 1[$

$$\frac{S^1 - S_0}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^1 \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} - 2a(S^1)^- \right) \right) = 0. \quad (6.2)$$

De plus, la propriété qui précise que la fonction $S'_0 + 2aS_0$ est strictement croissante sur $]-1, 1[$ implique que

$$\omega > S_0 \text{ dans }]x(h), 1[$$

ce qui permet d'affirmer que

- 1) $\lambda^1 \in \mathcal{H} \left(\frac{S^1 - S_0}{h} \right)$
- 2) La fonction $\frac{\partial S^1}{\partial x} + 2aS^1$ est strictement croissante sur $]x(h), 1[$ d'après l'équation (6.2) et donc, le procédé par induction pourra être utilisé puisque l'hypothèse " $x \mapsto S'_0(x) + 2aS_0(x)$ strictement croissante sur $]0, 1[$ " est reconduite héréditairement ; en outre, la fonction $x \mapsto S^1(x) + 2aS^1(x)$ est négative sur $]0, x(h)[$, nulle en $x(h)$ et positive sur $]x(h), 1[$, ce qui reproduit l'hypothèse faite sur la topographie initiale, $x(h)$ jouant maintenant le rôle de α . \square

Remarque 6.4.

- 1) Dans le cas où $a = 0$ (pas de transport marin), on retrouve la formule

$$\omega(x) = S_0(x) - \int_{x(h)}^x S'_0(y) \cosh \left(\frac{y-x}{\sqrt{h}} \right) dy,$$

$S(h)$ étant défini par

$$\int_{x(h)}^1 S'_0(y) \cosh \left(\frac{y-1}{\sqrt{h}} \right) dy = 0,$$

2) l'introduction du limiteur de flux λ^1 a pour objet de rendre compatibles la loi de conservation et la contrainte globale sur la vitesse d'érosion ; physiquement, l'intérêt est de limiter au strict nécessaire le flux, *i.e.* prendre λ le plus proche de 1 en un certain sens (le cas trivialement possible est le prendre, ce qui est une solution admissible, mais non pertinente, le limiteur de flux nul et donc la solution correspondante est la topographie initiale). Donc, on peut être amené à définir la solution maximale pour les couples (S, λ) à S donné en cherchant λ tel que

$$1 \geq \lambda \geq \mu \geq 0$$

pour toute solution possible (S, μ) . On peut vérifier qu'ici, la solution construite par la construction décrite par le lemme précédent est la solution maximale, pertinente en géologie.

Remarque 6.5. La formule (6.1) permet d'évaluer la quantité $(\delta\rho)_k$ de sédiments déposés à chaque itéré (le pas de temps étant en pratique de 25 siècles pour couvrir une période géologique). Il vient, par exemple, à la première itération

$$(\delta\rho)_1 = \frac{-1}{2\sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}} \int_{x(h)}^1 \left(\int_{x(h)}^x \left[(S'_0(y) + 2aS_0(y)) (r_1 e^{r_1(x-y)} - r_2 e^{r_2(x-y)}) dy \right] dx \right)$$

quantité strictement positive.

Plus généralement,

$$(\delta\rho)_k = \frac{-1}{2\sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}} \int_{x(kh)}^1 \left(\int_{x(kh)}^x \left[(\omega'_{k-1}(y) + 2a\omega_{k-1}(y)) (r_1 e^{r_1(x-y)} - r_2 e^{r_2(x-y)}) dy \right] dx \right)$$

Généralisations : La situation présentée ici a été simplifiée pour mettre en relief le principe constructif ; le signe de a dans l'expression du flux peut être quelconque pour prendre en compte des situations de marées montantes ou descendantes : plus largement, on peut construire à la main les solutions des itérés du schéma d'approximation pour des termes de transport périodiques du type, dans l'expression du flux surfacique :

$$q = -\lambda [\nabla S - a(t)S^-],$$

avec a une fonction numérique τ -périodique, $\tau > 0$, avec

$$\|a\|_{L^\infty(0,T)} \lll 1.$$

La situation se complique lorsque a dépend de x car il y a lieu alors de résoudre des équations différentielles du second ordre à coefficients non constants. Le signe de a se matérialise sur la figure 3. de la façon suivante :

1. si $a = 0$ (pas de terme de transport), le raccord à chaque itéré avec la courbe de la topographie initiale s'effectue avec une demi-tangente horizontale.
2. si $a < 0$ (marée descendante), la demi-tangente a un coefficient directeur négatif.
3. si $a > 0$ (marée montante), le coefficient directeur est positif.

Troisième partie

Appendice, conclusion et perspectives

Chapitre 7

Appendice

7.1 Un contre-exemple à une extension vectorielle du lemme de Saks

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$.

Dans le cadre de ce travail, on a été conduit à réfléchir à valider ou infirmer la conjecture suivante :

Si

$$\vec{F} \in H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \vec{F} \in \{L^2(\Omega)\}^d, \text{div} \vec{F} \in L^2(\Omega) \right\},$$

la divergence étant calculée au sens des distributions, alors peut-on dire que $\text{div} \vec{F} = 0$ presque partout dans $\left\{ \vec{F} = \vec{0} \right\}$?

Dans le cas scalaire qui correspondrait à $d = 1$, la réponse est évidemment positive par le lemme de Saks ou le lemme plus général de Marcus et Mizel [49].

En dimension $d \geq 2$, la réponse est négative comme on va le voir sur un contre-exemple que nous ont fourni François Bouchut (ENS Ulm) et Luigi Ambrosio (ENS Pise).

Dans un préprint intitulé *On the chain rule for the divergence of BV like vector fields : applications, partial results, open problems*, [11], L. Ambrosio, C. De Lellis et J. Malý indiquent en introduction, sans autre précision, qu'il peut arriver que $\vec{U} \in \{L_{loc}^\infty\}^d$ ait une divergence $f \in L_{loc}^\infty$ (au sens des distributions), mais que

$$f \neq 0 \quad \mathcal{L}^N - \text{p.p. dans } \left\{ \vec{U} = \vec{0} \right\}.$$

On détaille ici un exemple d'une telle pathologie en utilisant des approximations de type Lusin pour les gradients ; par-là même, on comprend que les règles connues de dérivation à la chaîne de fonctions scalaires (au sens des distributions) pour les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_i}$ qui reposent sur des "théorèmes de Sard inverses" ne sont pas immédiatement généralisables à des opérateurs de type divergence pour des champs vectoriels.

On prend $d = 2$ et $\vec{V} = (y, -x)$ dans le plan \mathbb{R}^2 et donc $\text{curl } \vec{V} \neq \vec{0}$ partout.

D'après un résultat de G. Alberti [1] (*A Lusin Type Theorem for Gradients*, Journal of Functional Analysis, **100**, (1991), n° 1, pp.110-119), pour toute boule ouverte B de \mathbb{R}^2 et pour tout ε strictement positif, il existe une fonction $\Phi_\varepsilon \in C_0^1(B)$ dont le gradient coïncide avec \vec{V} en dehors d'un ensemble de \mathcal{L}^2 -mesure inférieure ou égale à ε , noté A_ε , *i.e.*

$$\nabla \Phi_\varepsilon = \vec{V} \quad \text{dans } B \setminus A_\varepsilon, \quad \mathcal{L}^2(A_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

En fait, le théorème d'Alberti donne davantage d'informations en indiquant ici que l'on peut prendre pour A_ε un ouvert, dense dans B .

On introduit alors, selon les indications de Luigi Ambrosio, le champ de vecteurs

$$\vec{U}_\varepsilon = \left(x + \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial y}, y - \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} \right) \quad \text{dans } B$$

construit en prenant, au sens du produit scalaire usuel de \mathbb{R}^2 , un vecteur orthogonal à $\vec{V} - \nabla \Phi_\varepsilon$ et de même longueur.

On vérifie qu'au sens des distributions de $\mathcal{D}'(B)$, on a

$$\text{div } \vec{U}_\varepsilon = 1 + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x \partial y} + 1 - \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial y \partial x}$$

c'est-à-dire, puisque les opérateurs de dérivation au sens des distributions commutent, que l'on a, indépendamment de ε ,

$$\text{div } \vec{U}_\varepsilon = 2 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(B) \text{ et } \mathcal{L}^2 \text{ - presque partout dans } B$$

alors que \vec{U}_ε est nul sur l'ensemble d'Alberti $B \setminus A_\varepsilon$ que l'on peut construire de \mathcal{L}^2 -mesure aussi grande que l'on veut.

7.2 Contribution pour valider des possibilités d'extension

A partir de ce mode de construction, il est possible de créer une infinité de contre-exemples, selon la même méthode. Une conjecture nouvelle est que le résultat de type Saks est valide lorsque l'ensemble d'annulation $\{\vec{F} = \vec{0}\}$ est à périmètre fini et que le flux $\vec{n} \cdot \vec{F}$ est continu de part et d'autre de ce périmètre, cette dernière condition étant vraisemblablement liée au fait que la divergence de \vec{F} , calculée au sens des distributions, soit localement \mathcal{L}^2 -intégrable, sans partie singulière.

On donne dans ce sens une idée de démonstration proposée par le professeur W. P. Ziemer (correspondance particulière avec G. Gagneux et G. Vallet, Juin 2007) et pour laquelle il conviendrait de trouver les hypothèses appropriées pour justifier la démarche.

On prend \vec{F} dans $L^1(\Omega)^d$, $d \geq 2$ avec $\operatorname{div} \vec{F} \in L^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et soit $E \subset \Omega$ tel que

$$E = \left\{ \vec{F} = \vec{0} \text{ presque partout} \right\} \text{ avec } \mathcal{L}^d(E) > 0,$$

et le but est de voir comment et quand on peut affirmer que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ p.p. sur E .

Soit μ la mesure de Radon positive associée à $|\operatorname{div} \vec{F}|$; μ étant \mathcal{L}^d -absolument continue et se donnant $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K (= K_\varepsilon)$ inclus dans E tel que $|\mu|(E \setminus K) < \varepsilon$, par un théorème de régularité de Lusin. Soit aussi U un ouvert de Ω , tel que $K \subset E \subset U$. Pour tout ϕ de $\mathcal{D}(U)$, on a selon la définition de la divergence au sens des distributions de $\mathcal{D}'(U)$

$$\begin{aligned} \int_U \operatorname{div} \vec{F} \phi \, dx &= - \int_U \vec{F} \cdot \nabla \phi \, dx \\ &= - \int_{U \setminus K} \vec{F} \cdot \nabla \phi \, dx \quad \text{puisque } \vec{F} = \vec{0} \text{ dans } K. \end{aligned}$$

On écrit cette dernière ligne sous la forme

$$\int_K (\operatorname{div} \vec{F}) \phi \, dx = - \int_{U \setminus K} \left[\vec{F} \cdot \nabla \phi + (\operatorname{div} \vec{F}) \phi \right] \, dx.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ assez grand, on pose

$$E_m = \left\{ x \in U, \frac{1}{m+1} \leq d(x, K) \leq \frac{1}{m} \right\} \subset U \setminus K,$$

ce qui est possible par un lemme de rétrécissement : il existe un voisinage ouvert V de K avec l'adhérence $\bar{V} \subset U$, et selon le procédé de Urysohn, on introduit la suite de fonctions $\psi_m \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, telles que :

$$0 \leq \psi_m \leq 1 \quad \text{dans } U$$

$$\psi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } d(x, K) \leq \frac{1}{m+1}, \\ 0 & \text{si } d(x, K) \geq \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Donc, pour m assez grand, $(1 - \psi_m)\phi \in \mathcal{D}(U \setminus K)$, et par un calcul simple, il vient que, $\forall \phi \in \mathcal{D}(U)$,

$$\int_K (\operatorname{div} \vec{F}) \phi \, dx = - \int_{U \setminus K} (\vec{F} \cdot \nabla \psi_m) \phi \, dx - \int_{U \setminus K} [\vec{F} \cdot \nabla \phi + (\operatorname{div} \vec{F}) \phi] \psi_m \, dx.$$

On observe pour cela que notant L la forme linéaire définie par

$$L(\phi) = \int_{U \setminus K} (\vec{F} \cdot \nabla \phi + \phi \operatorname{div} \vec{F}) \, dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(U),$$

on a

$$L([1 - \psi_m]\phi) = 0$$

d'après la dérivation au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(U \setminus K)$, $(1 - \psi_m)\phi$ appartenant à $\mathcal{D}(U \setminus K)$, et donc

$$L(\phi) = L(\psi_m \phi).$$

La difficulté est alors de passer à la limite lorsque m tend vers $+\infty$; le terme

$$\int_{U \setminus K} [\vec{F} \cdot \nabla \phi + (\operatorname{div} \vec{F}) \phi] \psi_m \, dx$$

tend vers 0 par convergence dominée et donc, puisque le membre de gauche est indépendant de m , le terme $\int_{U \setminus K} (\vec{F} \cdot \nabla \psi_m) \phi \, dx$ admet, quand $m \rightarrow +\infty$, une limite, qu'il faudrait identifier grâce à des hypothèses supplémentaires adéquates.

Sous réserve que cette limite soit nulle, on aurait finalement que

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{0} \quad \mathcal{L}^d - \text{p.p. dans } K,$$

et donc

$$|\mu|(E) = |\mu|(E \setminus K) < \varepsilon$$

et ceci pour tout ε strictement positif, d'où le résultat (conditionnel), dans ce cas.

Dans cette démarche pour une démonstration dans des cas favorables, on a vu que la limite de

$$\int_{U \setminus K} (\vec{F} \cdot \nabla \psi_m) \phi \, dx, \quad \text{lorsque } m \rightarrow +\infty$$

existe. Le contre-exemple et ce qui précède montrent que cette limite n'est pas nulle en général.

Une conjecture consiste donc à chercher des circonstances qui permettent d'assurer que cette limite est nulle. Une direction possible serait peut-être de se placer dans le cas où K est à périmètre fini (à la manière de L. Ambrosio et coauteurs [5], [6] et [8]) et soit $\partial_* K$ la partie de la frontière "measure theoretic boundary" au sens de L. C. Evans et R. F. Gariepy ([36], Chapitre 5, p.p. 208-211).

On sait que pour \mathcal{H}^{d-1} -presque tout x de $\partial_* K$ ([36], p. 209, theorem 1, generalized Gauss-Green theorem), on peut définir un vecteur normal extérieur $\vec{n}(x)$ (measure theoretic unit outer normal) et on peut imaginer alors que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{U \setminus K} \phi \vec{F} \cdot \nabla \psi_m \, dx &= \int_{\partial_* K} \phi \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

en définissant une trace de \vec{F} sur $\partial_* K$, nulle par le fait que $K = \overline{K} \subset E$.
Tout cela reste à prouver ou à infirmer ...

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Le modèle de Darcy-Barenblatt conduit à une formulation continue bien posée au sens de Hadamard, au moins pour un temps de relaxation τ assez grand ; cela résulte de façon attendue de l'effet régularisant qui permet d'obtenir des informations de régularité supplémentaires pour une topographie initiale pas trop accidentée. Pour cela, on a utilisé sur des schémas convergents de discrétisation semi-implicite les résultats de Meyers puis les résultats classiques sur la régularité des solutions d'équations elliptiques à coefficients höldériens en jouant sur le fait spécifique qu'on se place en dimension d'espace 1 ou 2 ; on a montré que ces propriétés de régularité étaient stables lorsque les paramètres de discrétisation tendent vers 0.

Il en va tout autrement pour la formulation continue du modèle bidimensionnel de Darcy dont on a vu qu'il présente des comportements de nature hyperbolique (vitesse finie de propagation, zones mortes et effets d'enclavement). Certes, dans la pratique des géologues, les schémas numériques utilisés pour la résolution numérique correspondent à ceux pour lesquels on a obtenu des résultats d'existence et de fait, les géologues ont élaboré leurs modèles directement sous forme discrète en écrivant des bilans de masse et en introduisant un limiteur de flux, sans passer par l'écriture d'une équation "continue", selon Th. Gallouët [43], p. 95 et cela suffit pour simuler l'évolution de bassins sédimentaires, surtout pour des périodes géologiques de plusieurs millions d'années.

Il semble cependant important de comprendre de quelles équations continues ces schémas sont la discrétisation semi-implicite en établissant la convergence des solutions "prétendues approchées" vers la (ou une ?) solution du modèle continu lorsque les paramètres de discrétisation tendent vers 0. La question de la convergence des solutions approchées est à notre connaissance complètement ouverte et repose sur l'identification de la limite dans une expression qui se présente comme le produit de deux convergences faibles et qui résulte de la contrainte globale d'érosion limitée, d'expression mathématique très inhabituelle. La compréhension des équations continues résultantes serait d'un point de vue pratique utile

pour élaborer des schémas implicites performants. Il est raisonnable de penser qu'il faudrait adjoindre à l'équation de continuité, un critère discriminant pour sélectionner la solution géologiquement admissible ; pour cela, il faudrait traduire le fait que la solution réaliste correspond à la situation, où, à chaque instant, entre plusieurs solutions possibles le cas échéant, le flux est limité au strict nécessaire pour rendre compatibles l'équation de conservation et la contrainte globale. Cette condition sélective ne semble pas facile à formuler mathématiquement ; cependant, dans des cas simples monodimensionnels, on a vu comment prendre en compte ce critère en construisant à la main une solution explicite, maximale en un certain sens et solution d'un problème de Bernoulli d'évolution original.

Bibliographie

- [1] **Alberti G.** : A Lusin Type Theorem for Gradients. *Journal of Functional Analysis* 100 (1991), no. 1, pp. 110-119. Academic Press, New York and London.
- [2] **Alberti G.** : Rank-one properties for derivatives of functions with bounded variations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **123** (1993), 239-274.
- [3] **Alberti G. & Ambrosio L.** : A geometrical approach to monotone functions in \mathbb{R}^n . *Math. Z.* **230** (1999), 259-316.
- [4] **Allard J., Bertin X., Chaumillon E. & Pouget F.** : Sand spit rhythmic development : A potential record of wave climate variations ? Arçay Spit, western coast of France. *International Journal of Marine Geology, Geochemistry and Geophysics*. Vol. 253, Issues 3-4, (7 Août 2008).
- [5] **Ambrosio L.** : Transport equation and Cauchy problem for *BV* vector fields. *Inventiones Mathematicae*, **158** (2004), 227-260.
- [6] **Ambrosio L. & Dal Maso G.** : A general chain rule for distributional derivatives. *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 691-702.
- [7] **Ambrosio L., Coscia A. & Dal Maso G.** : Fine properties of functions *BD* . *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **139** (1997), 201-238.
- [8] **Ambrosio L., Fusco N. & Pallara D.** : *Functions of bounded variations and free discontinuity problems* . Oxford Mathematical Monographs, 2000.
- [9] **Ambrosio L. & De Lellis C.** : Existence of solutions for a class of hyperbolic systems of conservation laws in several space dimensions. *IMRN*, **41** (2003), 2205-2220.
- [10] **Ambrosio L. & De Lellis C.** : A note on admissible solutions of *1D* scalar conservation laws and *2D* Hamilton-Jacobi equations. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, **1** (4) (2004), 813-826.

- [11] **Ambrosio L., De Lellis C. & Maly J.** : On the chain rule for the divergence of BV like vector fields : applications, partial results, open problems. (2005). To appear in the forthcoming book by the AMS series in contemporary mathematics "Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations".
- [12] **Ambrosio L., Bouchut F. & De Lellis C.** : Well-posedness for a class of hyperbolic systems of conservation laws in several space dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, **29** (2004), 1635-1651.
- [13] **Antontsev S. N., Gagneux G. & Vallet G.** : A pseudoparabolic problem of Barenblatt type with constraint in stratigraphy. International Conference "Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics", dedicated to professor M.M. Lavrent'ev on occasion of his 75-th birthday, Novosibirsk (Université d'Etat de Sibérie), August 20-25, 2007, p.1-5, section 4.
- [14] **Antontsev S. N., Gagneux G. & Vallet G.** : Analyse Mathématique d'un modèle d'asservissement stratigraphique. Approche gravitationnelle d'un processus de sédimentation sous contrainte d'érosion maximale. Publication interne du Laboratoire de Mathématiques Appliquées UMR-CNRS 5142, Université de Pau, N° 01/23, (2001).
- [15] **Antontsev S. N., Gagneux G. & Vallet G.** : On some stratigraphic control problem, *Prikladnaya Mekhanika Tekhnicheskaja Fisika*, (Novosibirsk) **44** (2003) 85-94 (in Russian) and *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* (New York) **44** (2003) 821-828.
- [16] **Antontsev S. N., Gagneux G., Luce R. & Vallet G.** : A Non-Standard Free Boundary Problem Arising from Stratigraphy, *Analysis and Applications*, Vol. **4**, N° 3, 2006, 209 - 236.
- [17] **Antontsev S. N., Gagneux G., Luce R. & Vallet G.** : Weather limited constraint in stratigraphy, (International conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics", section 5, Mathematical Geophysics, Moscow, 2006).
- [18] **Antontsev S. N., Gagneux G., Luce R. & Vallet G.** : On a pseudoparabolic problem with constraint. *Differential and Integral Equations*, Vol 19, N° 12, (Déc. 2006), pp. 1391-1412.
- [19] **Antontsev S. N., Gagneux G., Luce R. & Vallet G.** : New unilateral problems in stratigraphy. ESAIM, Mathematical Modelling and Numerical Analysis. Vol. 40, N°4, pp. 765-784, 2006.

- [20] **Antontsev S. N., Gagneux G., Mokrani A. & Vallet G.** : Stratigraphic modeling by the way of a pseudoparabolic problem with constraint. A paraître dans *Advances in Mathematical Science and Applications*, Vol. 19, 2009.
- [21] **Artola M.** : Sur une classe de problèmes paraboliques quasi-linéaires. Bolétin UMI (6), 5-B, pp. 148-155, 1977.
- [22] **Bainov D. & Simeonov P.** : Integral Inequalities and Applications, Vol. 57 (Kluwer Academic Publishing Dordrecht 1992).
- [23] **Bamberger A.** : Etude d'une équation doublement non linéaire. Rapport Interne n° 4 du Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique, 1977.
- [24] **Bardos C.** : Communication personnelle à G. Gagneux, workshop on "Fluides Incompressibles" (Algeria, USTHB, 2004).
- [25] **Bensoussan A., Lions J. L. & Papanicolaou G.** : Asymptotic analysis for periodic structures, studies in Mathematics and its applications, Editors 5, North Holland), 1978.
- [26] **Bénilan P. & Gariepy R.** : Strong Solution in L^1 of Degenerate Parabolic Equations. Journal of Differential Equations, 119, pp. 473-502, 1995.
- [27] **Bénilan P., Grandall M. G. & Pazy A.** : Bonnes solutions d'un problème d'évolution semi-linéaire, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.(306) (1988) 527-530.
- [28] **Beurling A.** : On free-boundary problems for the Laplace equation, Seminars on Analytic Functions (Institute for Advanced Studies, Princeton, 1958), pp. 248-263.
- [29] **Brézis H.** : Opérateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Mathematics Studies, Editors 5, North Holland, 1973.
- [30] **Clain S.** : Elliptic Operators of divergence type with Hölder coefficients in fractional Sobolev spaces. Rendiconti di Matematica, Serie VII, Vol. 17, Roma 1997, 207-236.
- [31] **Cohn D. L.** : Measure theory. Birkhäuser, 1980.
- [32] **Cuesta C., van Duijn C. J. & Hulshof J.** : Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure : Travelling waves, Eur. J. Appl. Math. 11 (2000) 381-397.
- [33] **Duvaut G.** : Mécanique des milieux continus. Masson, 1990.

- [34] **Duvaut G. & Lions J. L.** : Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, 1972.
- [35] **Etienne D.** : Contribution à l'analyse mathématique de modèles stratigraphiques. Thèse de l'Université de Pau, France (2004).
- [36] **Evans L. C. & Gariepy R. F.** : Measure theory and fine properties of functions, CRC Press, 1992.
- [37] **Eymard R. & Gallouët T.** : Analytical and numerical study of a model of erosion and sedimentation, SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 43 , Issue 6, Pages : 2344 - 2370, (2006).
- [38] **Eymard R., Gallouët T., Granjeon D., Masson R. & Tran Q. H.** : Multi-lithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint. Internat. J. Numer. Methods Engrg. **60** (2004) 527 - 548.
- [39] **Gagneux G. & Madaune-Tort M.** : Analyse Mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière. Mathématiques et Applications, Vol **22**, Springer, Paris (1996).
- [40] **Gagneux G. & Madaune-Tort M.** : Unicité des solutions faibles d'équations de diffusion-convection. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série I, pp. 919-924, 1994.
- [41] **Gagneux G. & Vallet G.** : Sur des problèmes d'asservissements stratigraphiques, Control, Optim. and Calc. Var. **8** (2002) 715-739.
- [42] **Gagneux G. & Vallet G.** : A result of existence for an original convection-diffusion equation, Revista de la Real Academia de Ciencias, Serie A : Matemáticas (RACSAM) **99**, (2005) 125-131.
- [43] **Gallouët T.** : Equations satisfaites par des limites de solutions approchées, Conférence plénière, 34ème congrès d'analyse numérique, Anglet (Pyrénées Atlantiques) in Canum (2002) 87-96.
- [44] **Gervais V. & Masson R.** : Mathematical and numerical analysis of a stratigraphic model, ESAIM : M2AN **38** (2004) 585 - 611.
- [45] **Granjeon D., Huy Tran Q., Masson R. & Glowinski R.** : Modèle stratigraphique multilogique sous contrainte de taux d'érosion maximum, Rapport interne de l'Institut Français du Pétrole (2000).
- [46] **Istrăescu V. I.** : Fixed point theory, Reidel (1981).

- [47] **Lions J. L.** : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris (1969).
- [48] **Lunardi A.** : An Introduction to Parabolic Moving Boundary Problems. Lecture notes in mathematics, Functional Analytic methods for Evolution Equations, Editors : J.-M. Morel, Cachan ; F. Takens, Groningen ; B. Teissier, Paris. (2004), pp. 371-399.
- [49] **Marcus M. & Mizel V. J.** : Absolute continuity on tracks and Mappings of Sobolev spaces. Archiv. Rat. Mech. Anal., vol. **45**, n° 4, pp. 294-318, 1972.
- [50] **Marcus M. & Mizel V. J.** : Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous. Journal of Functional Analysis, **33**, pp. 217-229, 1979.
- [51] **Mokrani A.** : Problèmes pseudo-paraboliques à vitesse asservie. Applications en prospection pétrolière, Thèse de l'Université de Pau, France (2008).
- [52] **Mualem Y. & Dagan G.** : Dependent domain model of capillary hysteresis, Water Resour. Res. **11**(3) (1975) 452-460.
- [53] **Nečas J.** : Ecoulements de fluide - compacité par entropie. Collection RMA, Vol. 10, Masson, 1989.
- [54] **Poulovassilis A. & Childs E. C.** : The hysteresis of pore water : The non-independence of domains, Soil Sci. **112**(5) (1971) 301-312.
- [55] **Tikhonov A. N.** : Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., **111** (1935) pp. 767-776.
- [56] **Vallet G.** : Sur une loi de conservation issue de la géologie, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. (**337**) (2003) 559-564.
- [57] **Vol'pert A. I.** : The space BV and quasilinear equations, Math. USSR Sb. **2** (1967) 225-267.