

Deux modèles mathématiques de l'évolution d'un bassin sédimentaire (Phénomènes d'érosion-sédimentation-transport en géologie) Application en prospection pétrolière

Mohamed-Salem LOULY

sous la direction de **M. Gérard GAGNEUX** et **M. Guy VALLET**

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau - UMR CNRS 5142
Université de Pau et des Pays de l'Adour

- 1 Introduction
 - Modèles stratigraphiques à flux auto-régulés (compatibilité d'une contrainte d'érosion avec l'équation de conservation de masse)
- 2 Partie 1 : Modèle de Darcy-Barenblatt
 - Existence d'une solution
 - Résultat de régularité
 - Résultat d'unicité
- 3 Partie 2 : Modèle de Darcy
 - Formulation du problème
 - Existence d'une solution du modèle discret de Darcy en $2D$
 - Propriétés du modèle de Darcy : caractère localement hyperbolique, zones mortes, enclavement
 - Un résultat d'existence dans le cas de la sédimentation marine (Un problème de Bernoulli d'évolution)
- 4 Conclusion et perspectives

Modèles stratigraphiques à flux auto-régulés

Soient

- Ω : un domaine borné de \mathbb{R}^d ($d = 2$ en pratique) représentant la base d'un bassin sédimentaire.
- \vec{q} : le flux de matière.
- $S(t, x)$: la hauteur de sédiment en un point $x \in \Omega$ à l'instant t .

Alors, l'équation de conservation de masse s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0,$$

avec deux expressions possibles du flux \vec{q} :

$$\vec{q}(t, x) = -\lambda \left[\nabla S(t, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right], \quad \text{Darcy}$$

$$\vec{q}(t, x) = -\lambda \left[\nabla S(t + \tau, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right], \quad \text{Darcy - Barenblatt}$$

où

- λ : un coefficient de proportionnalité (limiteur de flux),
- \vec{V} : un terme vectoriel non linéaire représentant les facteurs de transport,
- τ : un "petit" paramètre positif, correspondant à un temps de relaxation.

Modèles stratigraphiques à flux auto-régulés

L'expression :

$$\vec{q}(t, x) = -\lambda \left[\nabla S(t, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right]$$

conduit via l'équation de continuité :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0$$

au modèle de Darcy :

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) \right] \right\} = 0.$$

L'expression :

$$\vec{q}(t, x) = -\lambda \left[\nabla S(t + \tau, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right]$$

conduit via l'équation de continuité et par des méthodes de viscosité de Barenblatt au modèle de Darcy-Barenblatt :

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) \right] \right\} - \tau \operatorname{div} \left\{ \lambda \nabla \frac{\partial S}{\partial t} \right\} = 0.$$

Compatibilité d'une contrainte d'érosion avec l'équation de continuité

On considère une contrainte d'érosion maximale

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq -E \quad \text{p.p. dans } Q, \quad E \text{ une constante positive,}$$

et une contrainte de limiteur de flux pour rendre compatibles la contrainte d'érosion et la loi de conservation de masse

$$\lambda = \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{et} \quad (1 - \lambda) \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

$$\Rightarrow \lambda \in \mathcal{H} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right), \quad \text{où} \quad \mathcal{H}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ [0,1] & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{le graphe maximal} \\ \text{monotone de la} \\ \text{fonction de Heaviside} \end{array} \right.$$

Dans ce cas, l'équation de Darcy-Barenblatt est équivalente à l'équation pseudo-parabolique grâce à la règle de dérivation des superpositions fonctionnelles de **Marcus** et **Mizel** :

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) [\nabla S + \vec{V}(x, S)] \right\} - \tau \Delta \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Partie 1 : Modèle de Darcy-Barenblatt

Formulation

Trouver le couple (S, λ) tel que :

$$S, \frac{\partial S}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \lambda \in L^\infty(Q) \cap \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)$$

vérifiant p.p. en $t \in]0, T[$ et $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda [\nabla S + \vec{V}(x, S)] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial S}{\partial t} \cdot \nabla v \, dx = 0,$$

$$S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

Propriétés descriptives d'éventuelles solutions

Si on remplace λ par l'approximation lipschitzienne croissante

$$\lambda_\varepsilon : r \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda_\varepsilon(r) = \min\left(\frac{r^+}{\varepsilon}, 1\right), \quad \varepsilon > 0,$$

on obtient *a priori*, pour toute éventuelle solution S_ε , les propriétés descriptives :

- $\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \geq 0$ p.p. dans Q ;
- p.p. en t , $\mathcal{L}^2(\{x \in \Omega, \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E = 0\}) = 0$ si $E > 0$, ce qui fournit une information instantanée sur les zones d'érosion maximale ;
- $S_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $\|S_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C(S_0, \vec{V}, \frac{1}{\tau})$.

Existence d'une solution

Approche par semi-discrétisations implicites

Lemme (1)

Pour $S_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $0 < h < \tau$, $\exists S_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon - S_0}{h} v \, dx &+ \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ &+ \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0, \\ S_\varepsilon(0, \cdot) &= S_0 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

Existence d'une solution

Approche par semi-discrétisations implicites

Lemme (1)

Pour $S_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $0 < h < \tau$, $\exists S_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon - S_0}{h} v \, dx &+ \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ &+ \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0, \\ S_\varepsilon(0, \cdot) &= S_0 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

Idées de la preuve

- On “élimine” la non-linéarité et on utilise le **théorème de Lax-Milgram** pour trouver une solution dans le cas du problème paralinéarisé.
- Par une **méthode de point fixe de Schauder-Tikhonov**, on obtient une solution S_ε .

Existence d'une solution

Passage à la formulation continue

Étape 1:

On prend $h = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$, et on note $S_\varepsilon^i = S_\varepsilon(ih, \cdot)$, $i = 0, \dots, N$, pour obtenir pour tout itéré $i = 1, \dots, N$ et $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0. \quad (2)$$

De plus,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \geq 0, \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On pose $S_\varepsilon^h = \sum_{i=1}^N S_\varepsilon^i 1_{[(i-1)h, ih]}$, $\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} 1_{[(i-1)h, ih]}$, pour avoir, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^h(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon^h(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(t) \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

Existence d'une solution

Passage à la formulation continue

Étape 2 : On montre que

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}\right)_h, (S_\varepsilon^h)_h \subset K, \text{ où } K \text{ est un borné de } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Ainsi, on a p.p. en t , pour des sous-suites et quand $h \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(\cdot, t) \rightarrow \chi_\varepsilon(\cdot, t) \quad \text{presque partout dans } \Omega,$$

$$\lambda_\varepsilon \left(\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(\cdot, t) + E \right) \nabla v \rightarrow \lambda_\varepsilon (\chi_\varepsilon(\cdot, t) + E) \nabla v \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ fort}$$

$$\nabla S_\varepsilon^h(\cdot, t) \rightharpoonup \nabla S_\varepsilon(\cdot, t) \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega)^d$$

$$\vec{V}(\cdot, S_\varepsilon^h(\cdot, t)) \rightarrow \vec{V}(\cdot, S_\varepsilon(\cdot, t)) \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ fort.}$$

Existence d'une solution

Passage à la formulation continue

Étape 2 : On montre que

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}\right)_h, (S_\varepsilon^h)_h \subset K, \text{ où } K \text{ est un borné de } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Ainsi, on a p.p. en t , pour des sous-suites et quand $h \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial \tilde{S}_\varepsilon^h}{\partial t}(\cdot, t) \rightarrow \chi_\varepsilon(\cdot, t) \quad \text{presque partout dans } \Omega,$$

$$\lambda_\varepsilon \left(\partial_t \tilde{S}_\varepsilon^h(\cdot, t) + E \right) \nabla v \rightarrow \lambda_\varepsilon (\chi_\varepsilon(\cdot, t) + E) \nabla v \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ fort}$$

$$\nabla S_\varepsilon^h(\cdot, t) \rightharpoonup \nabla S_\varepsilon(\cdot, t) \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega)^d$$

$$\vec{V}(\cdot, S_\varepsilon^h(\cdot, t)) \rightarrow \vec{V}(\cdot, S_\varepsilon(\cdot, t)) \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ fort.}$$

Étape 3 : On montre que, p.p. $t \in]0, T[$, $\chi_\varepsilon(t)$ est unique en son genre ; et que χ_ε est fortement mesurable de $]0, T[$ dans $H_0^1(\Omega)$ (**théorème de J. B. Pettis**). Ainsi, par la convergence dominée de Lebesgue, $\chi_\varepsilon = \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}$.

Existence d'une solution

Passage à la formulation continue

Théorème (1)

Pour $S_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\exists S_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, / p.p. en $t \in]0, T[$ et $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

$$S_\varepsilon(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Résultat de régularité

Formulation semi-discrétisée

Proposition (1)

Soient $S^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$, et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = \frac{\tau}{N} < \tau$. Alors, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, toute solution S_ε^i du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_\varepsilon^i \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \nabla v \, dx \\ \quad + \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0, \end{array} \right.$$

appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ (régularité héréditaire).

Résultat de régularité

Formulation semi-discrétisée

Proposition (1)

Soient $S^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$, et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = \frac{\tau}{N} < \tau$. Alors, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, toute solution S_ε^i du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_\varepsilon^i \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \nabla v \, dx \\ \quad + \tau \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right) \cdot \nabla v \, dx = 0, \end{array} \right.$$

appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ (régularité héréditaire).

Idées de la preuve

- Théorème de Meyers $\Rightarrow \exists p_0 \in]2, p] / S_\varepsilon \in W_0^{1,p_0}(\Omega) \Rightarrow S_\varepsilon \in C^{0,1-\frac{2}{p_0}}(\bar{\Omega})$
- [Théorème de Nečas et $S_\varepsilon \in C^{0,1-\frac{2}{p_0}}(\bar{\Omega})] \Rightarrow S_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Résultat de régularité

Formulation continue

Par des techniques d'estimations *a priori* et arguments d'unicité, on montre le

Théorème (2)

Pour $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 2$, toute solution Hilbertienne S_ε , p.p. en $t \in]0, T[$, de

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx \\ + \tau \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) \cdot \nabla v \, dx = 0$$

est dans $W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Résultat d'unicité

La régularité entraîne l'unicité à partir d'une valeur critique τ^* du délai d'atteinte de l'équilibre τ :

Proposition (2)

Pour $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$, $\exists \tau^* > 0 / \forall \tau \geq \tau^*$, $\exists ! S_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ telle que, p.p. en $t \in]0, T[$ et $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

$$S_\varepsilon(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Résultat d'unicité

La régularité entraîne l'unicité à partir d'une valeur critique τ^* du délai d'atteinte de l'équilibre τ :

Proposition (2)

Pour $S_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$, $\exists \tau^* > 0 / \forall \tau \geq \tau^*$, $\exists ! S_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ telle que, p.p. en $t \in]0, T[$ et $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon(t) + \vec{V}(x, S_\varepsilon(t)) \right] \cdot \nabla v \, dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t) \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

$$S_\varepsilon(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Idée de la preuve

Utilisation des inégalités de Sobolev en dimension d'espace $d \leq 2$.

Remarque

La contrainte globale

$$\frac{\partial \mathcal{S}_\varepsilon}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q$$

est implicitement contenue dans la formulation variationnelle du modèle de Darcy-Barenblatt.

Partie 2 : Modèle de Darcy

Formulation du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (S, \lambda) \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(Q) \times L^\infty(Q) \cap \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right) \\ \text{tel que : pour presque tout } t \in]0, T[\text{ et pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \\ \\ \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda [\nabla S + \vec{V}(x, S)] \cdot \nabla v \, dx = 0, \\ \\ \frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q \text{ si } d = 2, \\ \\ S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Partie 2 : Modèle de Darcy

Remarque

- Si $d = 1$, on a *ipso facto* d'après le **lemme de Saks**,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)^- \leq -\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial x} + V(x, S) \right) \right] 1_{\left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + E < 0 \right\}} = 0.$$

La contrainte est contenue implicitement dans la formulation variationnelle.

- Si $d = 2$, la contrainte figure dans la définition car

$$\left[\vec{F} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \right] \not\Rightarrow \left[\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \text{dans} \quad \{ \vec{F} = \vec{0} \} \right],$$

où $H(\operatorname{div}, \Omega) = \{ \vec{F} \in L^2(\Omega)^2, \operatorname{div} \vec{F} \in L^2(\Omega) \}$.

Un contre-exemple est dû à **L. Ambrosio** (ENS Pise) par l'utilisation d'un résultat de type **Lusin** pour les gradients.

$$\text{Ici } \vec{F} = \lambda \left[\nabla S + \vec{V}(x, S) \right] = \vec{0} \quad \text{sur} \quad \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + E < 0 \right\}.$$

Le modèle de Darcy régi par une approximation du graphe de Heaviside

Prenant à la place de λ , l'approximation

$$\lambda_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq \varepsilon \\ \frac{r}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq r < \varepsilon \\ 0 & \text{si } r < 0, \end{cases} \quad \varepsilon > 0,$$

on considère le problème :

Trouver $S_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ telle que $\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad t \in]0, T[,$$

$$\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q,$$

$$S_\varepsilon(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Existence d'une solution du modèle discret de Darcy en 2D

Existence et unicité de S_ε si $\lambda = \lambda_\varepsilon$:

Proposition (3)

Soient $S^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $h = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\exists!(S_\varepsilon^i)_{1 \leq i \leq N} \subset H_0^1(\Omega)$, telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Existence d'une solution du modèle discret de Darcy en 2D

Preuve :

Première itération

Trouver S_ε dans $H_0^1(\Omega)$, tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

C'est un problème dégénéré ! Donc, on relaxe avec $\delta > 0$ sous la forme :

$$\int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \left[\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[\nabla S_\varepsilon^\delta + \vec{V}(x, S_\varepsilon^\delta) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \quad (4)$$

$\exists S_\varepsilon^\delta$ par une méthode de point fixe de Schauder-Tikhonov. De plus, on a

$$\|S_\varepsilon^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|S_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)}.$$

D'où l'existence de S_ε comme limite, quand $\delta \rightarrow 0^+$, de $(S_\varepsilon^\delta)_\delta$ dans (4).

Par des L^1 - Techniques, on montre l'unicité de S_ε . \square

Existence d'une solution du modèle discret de Darcy en 2D

Passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

La clef du passage est l'écriture, à la première itération :

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_\varepsilon^1 &= h\lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \\ &+ \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_0 \\ &= h\nabla H_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) + \lambda_\varepsilon \left(\frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_0,\end{aligned}$$

où l'on a posé, pour $r \in \mathbb{R}$,

$$H_\varepsilon(r) = \int_0^r \lambda_\varepsilon(s) ds.$$

et

$$H_\varepsilon(r) \rightarrow r^+ \quad \text{simplement dans } \mathbb{R}, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

D'où l'existence d'une solution du modèle de Darcy discret en dimension 2.

Existence d'une solution du modèle discret de Darcy en 2D

Théorème (3)

Soient $S^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $h = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$.

Alors, $\exists (S^i)_{1 \leq i \leq N} \subset H_0^1(\Omega)$ et $\exists (\lambda^i)_i \subset \mathcal{H} \left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right) \cap L^\infty(\Omega)$, telles que :

$\forall i \in \{1, \dots, N\}$ et $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{S^i - S^{i-1}}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda^i \left[\nabla S^i + \vec{V}(x, S^i) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

Problème du passage au cas continu

Si on prend la fonction \tilde{S}^h définie sur $]0, T]$ par

$$\tilde{S}^h(t) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{S^i - S^{i-1}}{h} (t - (i-1)h) + S^{i-1} \right] 1_{](i-1)h, ih]}(t), \quad \tilde{S}^h(0) = S_0,$$

on obtient du schéma semi-discrétisé en temps, les équations :

$$\int_Q \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t, x) v(x) dx dt + \int_Q \lambda^h \left[\nabla \tilde{S}^h(t, x) + \vec{V}(x, \tilde{S}^h(t, x)) \right] \cdot \nabla v(x) dx dt = o(h),$$
$$\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

$$\text{où } \lambda^h = \sum_{i=1}^N \lambda^i 1_{](i-1)h, ih]} \in \mathcal{H} \left(\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} + E \right).$$

Problème du passage au cas continu

Si on prend la fonction \tilde{S}^h définie sur $]0, T]$ par

$$\tilde{S}^h(t) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{S^i - S^{i-1}}{h} (t - (i-1)h) + S^{i-1} \right] 1_{](i-1)h, ih]}(t), \quad \tilde{S}^h(0) = S_0,$$

on obtient du schéma semi-discrétisé en temps, les équations :

$$\int_Q \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t, x) v(x) dx dt + \int_Q \lambda^h \left[\nabla \tilde{S}^h(t, x) + \vec{V}(x, \tilde{S}^h(t, x)) \right] \cdot \nabla v(x) dx dt = o(h),$$

$$\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

où $\lambda^h = \sum_{i=1}^N \lambda^i 1_{](i-1)h, ih]} \in \mathcal{H} \left(\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} + E \right)$.

La difficulté cruciale : Limite de $\lambda^h \nabla \tilde{S}^h$ quand $h \rightarrow 0^+$ est indéfinie.

En effet, on n'a que $\tilde{S}^h \rightharpoonup S$ faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

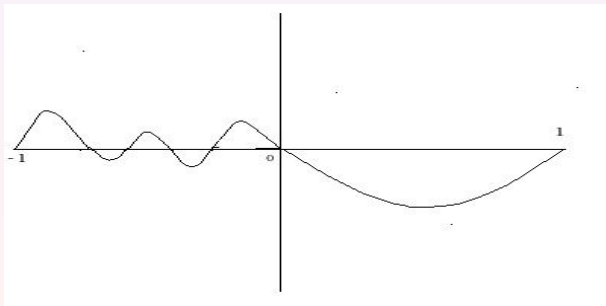
$\lambda^h \rightharpoonup^* \lambda$ faiblement $-\ast$ dans $L^\infty(Q)$.

Une situation concrète du modèle de Darcy en dimension 1

$$\Omega =]-1, 1[, \quad E = 0, \quad V(x, S) = -aS^-, \quad a \in]-1, 1[$$

Hypothèses sur la topographie initiale (fonds marins "assez réguliers")

$$H(S_0) \begin{cases} \text{sur }]-1, 0[: S_0 \in H_0^1(]-1, 0[), S_0 > 0 \text{ à } (-1)^+ \text{ et à } 0^- \\ \text{sur }]0, 1[: S_0 \text{ est } C^1, \text{ négative et telle que la fonction} \\ x \mapsto \overline{S_0}(x) + aS_0(x) \text{ soit strictement croissante.} \end{cases}$$



Une situation concrète du modèle de Darcy en dimension 1

La problématique

Sous les hypothèses $H(S_0)$, on cherche $S \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(Q)$ telle que :

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\mathcal{H} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial S}{\partial x} - aS^- \right] \right) \ni 0 \quad \text{dans } Q,$$

$$S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

La formulation

$$(\mathcal{P}_a) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (S, \lambda) \in H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q) \cap \mathcal{H} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right), \\ \text{tel que p.p. en } t \in]0, T[\text{ et } \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda (\nabla S \cdot \nabla v - aS^- \nabla v) \, dx = 0, \\ S(0, \cdot) = S_0 \text{ partout dans } \Omega, \end{array} \right.$$

Caractère localement hyperbolique, zones mortes, enclavement

Lemme (2) (caractère localement hyperbolique, zones mortes)

Sous les hypothèses $H(S_0)$, toute solution S du problème (\mathcal{P}_a) est telle que

- i) $\lambda\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\nabla S^+ = 0$ p.p. dans Q
- ii) $\forall t \geq 0, S^+(t, \cdot) = S_0^+$ p.p. dans Ω
et en conséquence,
- iii) $\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0$ p.p. sur $\{x \in \Omega, S_0(x) \geq 0\}$,
 $\forall t \geq 0, 0 \geq S(t, \cdot) \geq S_0$ p.p. sur $\{x \in \Omega, S_0(x) \leq 0\}$.

Lemme (3) (propriété d'enclavement)

On suppose qu'il existe un ensemble compact K , d'intérieur non vide et un ouvert lipschitzien ω tels que

$$K \subset \omega \subset \Omega \text{ et } \omega \setminus K \subset \{S_0 \geq 0\}.$$

Alors, toute solution S de (\mathcal{P}_a) vérifie, $\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0$ p.p. dans K .
D'où, par le lemme 2, $\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0$ p.p. dans ω .

Un résultat d'existence dans le cas de la sédimentation marine

Théorème (4)

Sous les hypothèses $H(S_0)$, $\exists S \in H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $\exists \lambda \in L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q) \cap \mathcal{H}(\frac{\partial S}{\partial t})$, tel que p.p. en $t \in]0, T[$ et $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda (\nabla S \cdot \nabla v - a S^- \nabla v) \, dx = 0 \\ S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{partout dans } \Omega. \end{cases}$$

Description des solutions $(S^k, \lambda^k)_{k \in N^*}$ du schéma semi-discrétisé

Remarque

Les hypothèses $H(S_0) \implies \exists ! \alpha \in]0, 1[/ \forall x \in]0, \alpha[\quad S_0'(x) + aS_0(x) < 0,$
 $\forall x \in]\alpha, 1[\quad S_0'(x) + aS_0(x) > 0,$ et $S_0'(\alpha) + aS_0(\alpha) = 0.$

Description des solutions $(S^k, \lambda^k)_{k \in N^*}$ du schéma semi-discrétisé

Remarque

Les hypothèses $H(S_0) \implies \exists! \alpha \in]0, 1[/ \forall x \in]0, \alpha[\quad S_0'(x) + aS_0(x) < 0,$
 $\forall x \in]\alpha, 1[\quad S_0'(x) + aS_0(x) > 0,$ et $S_0'(\alpha) + aS_0(\alpha) = 0.$

Proposition (4)

Sous les hypothèses $H(S_0), \exists (x^k(h))_k \searrow$ dans $]0, \alpha[$ telle que $\forall k \in N^*,$ on ait explicitement :

$$\lambda^k = 1_{]x^k(h), 1[}, \quad S^k = S^{k-1} 1_{]-1, x^k(h)]} + \omega^k 1_{]x^k(h), 1[},$$

où ω^k vérifie le problème à frontière libre $x^k(h)$ de type **Bernoulli** :

$$(\mathcal{P}_k) \begin{cases} \omega^k - h \left(\frac{\partial^2 \omega^k}{\partial x^2} + a \frac{\partial \omega^k}{\partial x} \right) = \omega^{k-1} & \text{dans }]x^k(h), 1[, \\ \omega^k(x^k(h)) = S^{k-1}(x^k(h)), \\ \frac{\partial \omega^k}{\partial x}(x^k(h)) + a \omega^k(x^k(h)) = 0, \\ \omega^k(1) = 0. \end{cases}$$

Construction des itérés (S^k, λ^k) et résolution d'un problème de Bernoulli

L'itéré $k = 1$: On cherche $S^1 \in H_0^1(]-1, 1[)$, $\lambda^1 \in \mathcal{H}(\frac{S^1 - S_0}{h})$ tels que

$$\frac{S^1 - S_0}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^1 \left[\frac{\partial S^1}{\partial x} - a(S^1)^- \right] \right) = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[.$$

On montre que $(S^1, \lambda^1) = (S_0, 0)$ sur $[-1, 0]$ et que $S_0 < S^1 < 0$ sur $[0, 1]$.

On pose $x(h) = \sup \left\{ x \in [0, 1], \left\{ \lambda^1 \left(\frac{\partial S^1}{\partial x} - a(S^1)^- \right) \right\} (x) = 0 \right\}$

et on montre que $x(h) > 0$.

Ainsi, le problème devient à frontière libre de type **Bernoulli** suivant :

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} \text{Chercher } x(h) \in]0, 1[, S^1 \in H^1(x(h), 1) \text{ vérifiant} \\ S^1 - h \left(\frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2} + a \frac{\partial S^1}{\partial x} \right) = S_0 \text{ dans }]x(h), 1[, \\ S^1(x(h)) = S_0(x(h)), S^1(1) = 0, \frac{\partial S^1}{\partial x}(x(h)) + a S^1(x(h)) = 0. \end{cases}$$

Construction des itérés (S^k, λ^k) et résolution d'un problème de Bernoulli

Lemme (4)

Sous les hypothèses $H(S_0)$, $\exists ! x(h) \in]0, \alpha[$ tel que le couple (S^1, λ^1) défini par

$$S^1 = S_0 \mathbf{1}_{]-1, x(h)[} + \omega \mathbf{1}_{]x(h), 1[} \text{ et } \lambda^1 = \mathbf{1}_{]x(h), 1[},$$

où ω est la solution dans $C^2([x(h), 1])$ du problème différentiel

$$(\mathcal{P}_\omega) \begin{cases} \omega - h(\omega'' + a\omega') = S_0 \text{ dans }]x(h), 1[, \\ \omega(x(h)) = S_0(x(h)), \omega'(x(h)) + a\omega(x(h)) = 0, \omega(1) = 0, \end{cases}$$

Du problème (\mathcal{P}_ω) on obtient

$$\omega(x) = S_0(x) - \frac{1}{2\sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}} \int_{x(h)}^x \left[S_0'(y) + 2aS_0(y) \right] \left(r_1 e^{r_1(x-y)} - r_2 e^{r_2(x-y)} \right) dy$$

où $x(h)$ est défini de façon unique dans $]0, \alpha[$ par la condition

$$\int_{x(h)}^1 \left[(S_0'(y) + 2aS_0(y)) \left(r_1 e^{r_1(1-y)} - r_2 e^{r_2(1-y)} \right) \right] dy = 0.$$

Construction des itérés (S^k, λ^k) et résolution d'un problème de Bernoulli

Pour l'itéré $k = 2$, même démarche ($\alpha \leftarrow x(h), S_0 \leftarrow S^1$) : $\exists! x^2(h) \in]0, x(h)[$
 tel que le couple (S^2, λ^2) défini par

$$S^2 = S^1 \mathbf{1}_{]-1, x^2(h)[} + \omega^2 \mathbf{1}_{]x^2(h), 1[} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \mathbf{1}_{]x^2(h), 1[},$$

...

$\Rightarrow (x^k(h))_k$ est décroissante $\Rightarrow (\lambda^h)_h$ est bornée dans $L^\infty(Q) \cap \overline{BV}(Q)$,
 $(\lambda^h = \sum_{k=1}^N \lambda^k \mathbf{1}_{[(k-1)h, kh]})$

$$\forall h > 0, \quad TV_Q(\lambda^h) \leq T + 1.$$

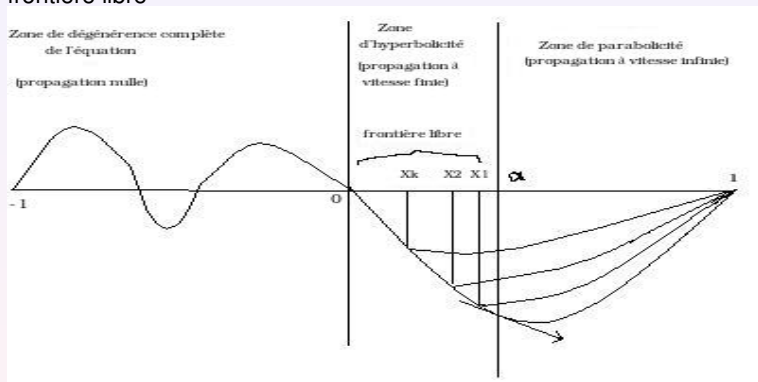
$\Rightarrow \exists \{\lambda^{h_j}\} \subset \{\lambda^h\}, \exists \lambda \in \overline{BV}(Q) \cap L^\infty(Q)$ tels que (compacité)

$$\lambda^{h_j} \longrightarrow \lambda \text{ dans } L^1(Q), \quad \lambda = \mathbf{1}_\Lambda.$$

\Rightarrow Convergence p.p. dans Q pour une sous-suite de $\{\lambda^{h_j}\}$,

et la limite $\lambda \in \mathcal{H}(\frac{\partial S}{\partial t})$ par un argument de monotonie.

Illustration graphique des topographies successives et de la formation d'une frontière libre



En outre,

- 1 $\lambda = 1_\Lambda$, avec $\Lambda \subset Q$ à périmètre fini.
- 2 $S \in C^0(\overline{Q})$ (théorème d'Ascoli).
- 3 $\partial\Lambda \cap Q$ est le graphe d'une fonction continue monotone.

Remarque (La quantité de sédiments déposés à chaque itéré)

La formule

$$S^1(x) = S_0(x) - \frac{1}{2\sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}} \int_{x(h)}^x \left[S'_0(y) + 2aS_0(y) \right] \left(r_1 e^{r_1(x-y)} - r_2 e^{r_2(x-y)} \right) dy$$

implique que

$$(\delta\rho)_1 = \frac{-1}{2\sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}} \int_{x(h)}^1 \left(\int_{x(h)}^x \left[(S'_0(y) + aS_0(y)) \right] \left(r_1 e^{r_1(x-y)} - r_2 e^{r_2(x-y)} \right) dy \right) dx$$

quantité strictement positive.

Plus généralement, à la k-ième itération :

$$(\delta\rho)_k = \frac{-1}{2\sqrt{a^2 + \frac{1}{h}}} \int_{x(kh)}^1 \left(\int_{x(kh)}^x \left[(\omega'_{k-1}(y) + a\omega_{k-1}(y)) \right] \left(r_1 e^{r_1(x-y)} - r_2 e^{r_2(x-y)} \right) dy \right) dx.$$

Conclusion

Soient Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \in \{1, 2\}$, $S_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $T > 0$. Alors,

- $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{1, \dots, N\} \exists S(kh, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$, $h = \frac{T}{N}$, $\exists \lambda^k \in \mathcal{H}(\frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} + E)$, tels que, pour $\tau \geq 0$,

$$0 = \frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} - \operatorname{div} \left(\lambda^k \left[\nabla S(kh, \cdot) + \vec{V}(\cdot, S(kh, \cdot)) \right] + \tau \nabla \frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} \right)$$

Conclusion

Soient Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \in \{1, 2\}$, $S_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $T > 0$. Alors,

- $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{1, \dots, N\} \exists S(kh, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$, $h = \frac{T}{N}$, $\exists \lambda^k \in \mathcal{H}\left(\frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} + E\right)$, tels que, pour $\tau \geq 0$,

$$0 = \frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} - \operatorname{div} \left(\lambda^k \left[\nabla S(kh, \cdot) + \vec{V}(\cdot, S(kh, \cdot)) \right] + \tau \nabla \frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} \right)$$

- Si $\tau > 0$, et si on remplace λ^k par $\lambda_\varepsilon\left(\frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} + E\right)$, alors, $\exists \tau^* > 0$ / $\forall \tau \geq \tau^* \exists ! S_\varepsilon \in W^{1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, vérifiant :

$$\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] + \tau \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega.$$

Conclusion

Soient Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \in \{1, 2\}$, $S_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $T > 0$. Alors,

- $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{1, \dots, N\} \exists S(kh, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$, $h = \frac{T}{N}$, $\exists \lambda^k \in \mathcal{H}(\frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} + E)$, tels que, pour $\tau \geq 0$,

$$0 = \frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} - \operatorname{div} \left(\lambda^k \left[\nabla S(kh, \cdot) + \vec{V}(\cdot, S(kh, \cdot)) \right] + \tau \nabla \frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} \right)$$

- Si $\tau > 0$, et si on remplace λ^k par $\lambda_\varepsilon(\frac{S(kh, \cdot) - S((k-1)h, \cdot)}{h} + E)$, alors, $\exists \tau^* > 0$ / $\forall \tau \geq \tau^* \exists ! S_\varepsilon \in W^{1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, vérifiant :

$$\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\lambda_\varepsilon \left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right) \left[\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon) \right] + \tau \nabla \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega.$$

- Si $\tau = 0$, la formulation continue dans le cas général fait problème : identification difficile de la limite dans un produit de deux convergences faibles.

Perspectives

- Quelle condition discriminante faut-il inclure dans le modèle de Darcy pour obtenir l'unicité ?
- Cette information supplémentaire peut-elle aider à passer à la limite dans "la difficulté cruciale" ?

En outre, cette solution doit être la solution physiquement admissible.
- Une piste: utiliser les solutions de Darcy-Barenblatt régulières pour dégager une formulation d'entropie lorsque $\tau \rightarrow 0^+$ (à la manière des modèles de Stefan, en surfusion).

MERCI POUR VOTRE ATTENTION