



**HAL**  
open science

# L'instabilité elliptique en milieu stratifié tournant

David Guimbard

► **To cite this version:**

David Guimbard. L'instabilité elliptique en milieu stratifié tournant. Mécanique [physics.med-ph]. Université du Sud Toulon Var, 2008. Français. NNT: . tel-00436895

**HAL Id: tel-00436895**

**<https://theses.hal.science/tel-00436895>**

Submitted on 27 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

présentée par

**David Guimbard**

pour l'obtention du titre de

**Docteur de l'Université du Sud Toulon-Var**

Spécialité : **Mécanique des fluides**

## **L'instabilité elliptique en milieu stratifié tournant**

*Document provisoire*

Composition du jury : MM. **Billant** P.  
**Cambon** C.  
**Flór** J.B. Rapporteur  
**Leblanc** S. Directeur de thèse  
**Le Bars** M.  
**Le Dizès** S.  
**Rossi** M. Rapporteur

**2008**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	L'instabilité elliptique . . . . .	1
1.2	Rotation et stratification . . . . .	2
1.3	Formation de feuillets par résonance d'ondes internes . . . . .	2
1.4	Plan du travail . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Stabilité locale d'une famille de tourbillons lagrangiens</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	6
2.2	Solution d'Abrashkin & Yakubovich . . . . .	7
2.3	Exemples de tourbillons déformés . . . . .	9
2.4	Critère général d'instabilité . . . . .	11
2.5	Instabilité de tourbillons déformés . . . . .	13
2.6	Effet d'une rotation d'ensemble . . . . .	15
2.7	Effet de la stratification . . . . .	18
2.8	Application aux tourbillons multipolaires . . . . .	21
2.9	Conclusion . . . . .	22
2.10	Annexe A : Démonstration du critère d'instabilité . . . . .	24
2.11	Annexe B : Dérivation de l'équation de Hill . . . . .	25
2.12	Annexe C : Tourbillons stationnaires dans un champ d'étirement . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Stabilité linéaire d'un tourbillon elliptique confiné</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	Mise en place du problème . . . . .	31
3.2.1	Écoulement de base . . . . .	31
3.2.2	Linéarisation . . . . .	32
3.2.3	Méthode de résolution . . . . .	33
3.3	Problème non déformé . . . . .	33
3.3.1	Description des modes propres . . . . .	33
3.3.2	Correction due à la viscosité . . . . .	36
3.3.3	Bilan . . . . .	42
3.4	Résonance d'ondes gravito-inertielles . . . . .	42
3.4.1	Conditions de résonance . . . . .	43
3.4.2	Taux de croissance non visqueux . . . . .	43
3.4.3	Correction due à l'ellipticité . . . . .	45
3.4.4	Expression générale du taux de croissance . . . . .	47

3.5	Conclusion . . . . .	48
<b>4</b>	<b>La résonance <math>(-1, 1, 1)</math> et son observation expérimentale</b>	<b>51</b>
4.1	Description théorique . . . . .	52
4.1.1	Taux de croissance . . . . .	52
4.1.2	Résultats . . . . .	53
4.2	Étude expérimentale . . . . .	56
4.2.1	Protocole expérimental . . . . .	56
4.2.2	Mise en place du gradient . . . . .	57
4.2.3	Spin-up . . . . .	61
4.2.4	Influence de la stratification . . . . .	61
4.2.5	Mesure du seuil d'instabilité . . . . .	62
4.2.6	Étude qualitative de la résonance $(-1, 1, 1)$ . . . . .	64
4.3	Discussion . . . . .	65
4.3.1	Le cas de la vorticité absolue nulle . . . . .	65
4.3.2	Autres résultats . . . . .	68
4.4	Conclusion . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>73</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>78</b>

# Chapitre 1

## Introduction

“La théorie sans la pratique est absurde ; la pratique sans théorie est aveugle.”

---

Kant

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>L’instabilité elliptique . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Rotation et stratification . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>1.3</b>	<b>Formation de feuillets par résonance d’ondes internes .</b>	<b>2</b>
<b>1.4</b>	<b>Plan du travail . . . . .</b>	<b>3</b>

---

### 1.1 L’instabilité elliptique

Cette thèse porte sur “l’instabilité elliptique dans un fluide stratifié tournant”. De quoi s’agit-il ? L’instabilité elliptique est une instabilité hydrodynamique se développant spontanément dans un écoulement dont les lignes de courant sont des ellipses dans un plan donné, disons  $(x, y)$ . Cette instabilité est de nature tridimensionnelle, c’est à dire que les mouvements sous-jacents présentent une composante de vitesse et une dépendance selon la direction perpendiculaire au plan des ellipses, c’est à dire selon  $z$ . Le mécanisme d’instabilité est subtil : il résulte d’une résonance de type paramétrique, à l’instar du pendule dont le support oscille ou de la balançoire dont les mouvements se nourrissent de l’énergie injectée au système toutes les demi-périodes.

Comme toute grande découverte scientifique, l’instabilité elliptique a été découverte indépendamment dans différents contextes et par différentes personnalités. Nous n’entrerons pas ici dans les détails ; le lecteur intéressé pourra se reporter aux articles de synthèse de Cambon & Scott (1999), Rossi (2000) et Kerswell (2002). Disons ici que les développements théoriques les plus aboutis ont été effectués par Bayly (1986) et Waleffe (1990). Si la viscosité est suffisamment faible, l’instabilité elliptique peut se développer à toute les échelles spatiales, longues ou courtes, et à

ce titre peut être qualifiée d’“universelle” (Pierrehumbert, 1986). Ainsi, elle est susceptible de se développer dans tout écoulement présentant localement des lignes de courant elliptiques (Lifschitz & Hameiri, 1991), comme dans des cœurs de tourbillon par exemple. Nous verrons cependant au chapitre 2 qu’elle peut se cacher là où on ne l’attendait pas forcément, c’est à dire sans des tourbillons instationnaires dont la forme ne laissait pas présager sa présence.

Du point de vue expérimental, l’instabilité a été décrite en détail dans la thèse de Christophe Eloy réalisée à l’IRPHE à Marseille (Eloy, 2000; Eloy *et al.*, 2003) reprenant l’expérience initiée par Malkus (1989). L’expérience consiste en un cylindre vertical dont les parois sont entraînées par des cylindres tournant à vitesse de rotation constante. Après un transitoire, l’écoulement à l’intérieur est en rotation uniforme et des ondes d’inerties peuvent s’y installer. Les cylindres viennent alors déformer la paroi pour rendre son périmètre elliptique : les modes d’inertie entrent alors en résonance et l’instabilité elliptique se développe.

## 1.2 Rotation et stratification

L’étude des effets de la rotation autour de l’axe vertical  $z$  sur l’instabilité elliptique semble avoir été initiée par les travaux de distorsion rapide de la turbulence (voir Cambon *et al.*, 1994; Cambon & Scott, 1999) montrant en particulier une spectaculaire stabilisation lorsque la rotation propre du tourbillon est compensée par celle du repère : ce régime correspond à une vorticité absolue nulle (ou voisine de zéro) et l’écoulement est potentiel (ou presque) dans le repère fixe. Ce résultat fût confirmé par les études de stabilité (Craik, 1989; Bayly *et al.*, 1996; Le Dizès, 2000). L’effet de la stratification en densité le long de la direction verticale  $z$  est également spectaculaire puisqu’elle stabilise au delà d’un certain seuil elle aussi l’instabilité elliptique, comme le montrèrent initialement Miyazaki & Fukumoto (1992).

Les effets conjoints de rotation et de stratification sont subtils car antagonistes (Miyazaki, 1993; Kerswell, 2002; Leblanc, 2003), comme je le rappellerai dans ce document. Par exemple, à vorticité absolue nulle, l’instabilité elliptique est tuée par la rotation, mais réapparaît dès que la stratification devient suffisamment forte. L’étude théorique réalisée par Leblanc (2003) montre même qu’elle persiste pour des très forte stratification, et que certaines de ces caractéristiques (échelles spatiales) sont similaires à celles observées dans l’instabilité “zig-zag” découverte par Billant & Chomaz (2000) et dans les feuillets observés en turbulence fortement stratifiée.

## 1.3 Formation de feuillets par résonance d’ondes internes

Cette idée fût à l’origine d’un projet dirigé par S. Leblanc dans le cadre de l’ACI “Jeunes chercheurs et jeunes chercheuses”. Elle consistait en l’étude d’un écoulement potentiel soumis à des champs d’étirements périodiques destinés à exciter des instabilités paramétriques d’ondes internes ayant la même nature que l’instabilité elliptique à vorticité absolue nulle. Deux montages expérimentaux furent réalisés au LADHYX à Palaiseau sous la direction de Paul Billant, mais aucun d’entre eux ne

permet de mettre en évidence ces feuillets. Comme nous l'expliquerons, plusieurs causes peuvent être incriminées.

Une seconde série d'expériences fût ensuite réalisée à l'IRPHE à Marseille sous la direction de M. Le Bars et S. Le Dizès. Elle consistait en bref à placer le cylindre elliptique sur une table tournante et de le remplir d'un fluide stratifié. Afin de caractériser au mieux les modes d'instabilité, une étude théorique détaillée dans le chapitre 3 fût menée à bien, et confirmée par les expériences décrites dans le chapitre 4. L'un des résultats marquant est que les effets de viscosité et de confinement amortissent, dans les configurations expérimentales étudiées, tous les modes au voisinage de la vorticité absolue, réduisant à néant l'espoir initial d'observer la formation de feuillets par résonance paramétrique d'ondes internes. La recherche est aussi faite d'échecs !

## 1.4 Plan du travail

Ce manuscrit est, comme je l'ai souligné précédemment, consacré à l'étude théorique et expérimentale de l'instabilité elliptique dans un fluide stratifié tournant. Le chapitre 2 est ainsi consacré à l'étude de stabilité de tourbillons " tranges" dans un fluide stratifié tournant. Cette partie peut être notamment lue de manière indépendante et reprend les travaux présentés dans l'article *Local stability of the Abrashkin-Yakubovich family of vortices* paru dans JFM (Guimbard & Leblanc, 2006). On y décrit une solution exacte des équations d'Euler en représentation lagrangienne que l'on soumet au formalisme WKB afin d'en étudier sa stabilité hydrodynamique. Les résultats obtenus montrent que l'instabilité de les tourbillons construits à l'aide de cette solution n'est autre que l'instabilité elliptique. Les chapitres 3 et 4 s'axent naturellement sur ce résultat. L'étude de la stabilité d'un tourbillon uniforme par la méthode globale dite des modes propres est alors réalisées dans le chapitre 3. Les effets de la viscosité et du confinement sont pris en compte dans l'expression du taux de croissance de l'instabilité afin de confronter ces résultats à l'expérience qui constitue le chapitre 4. Ce dernier chapitre s'axe principalement sur l'observation expérimentale du mode principal de l'instabilité et montre le relatif bon accord entre les prévisions théoriques et les observations expérimentales.





## Chapitre 2

# Stabilité locale d'une famille de tourbillons lagrangiens

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	6
2.2	Solution d'Abrashkin & Yakubovich . . . . .	7
2.3	Exemples de tourbillons déformés . . . . .	9
2.4	Critère général d'instabilité . . . . .	11
2.5	Instabilité de tourbillons déformés . . . . .	13
2.6	Effet d'une rotation d'ensemble . . . . .	15
2.7	Effet de la stratification . . . . .	18
2.8	Application aux tourbillons multipolaires . . . . .	21
2.9	Conclusion . . . . .	22
2.10	Annexe A : Démonstration du critère d'instabilité . . . . .	24
2.11	Annexe B : Dérivation de l'équation de Hill . . . . .	25
2.12	Annexe C : Tourbillons stationnaires dans un champ d'étirement . . . . .	26

---

On étudie, dans ce chapitre, la stabilité tridimensionnelle d'une classe de tourbillons non visqueux découverts par Abrashkin & Yakubovich (1984), qui inclut le tourbillon de Rankine, l'ellipse de Kirchhoff et les tourbillons multipolaires. Ces tourbillons non uniformes et instationnaires sont décrits en représentation lagrangienne. Nous utilisons alors un formalisme mathématique de type WKB basé sur la théorie des instabilités locales développée par Lifschitz & Hameiri (1991). Il apparaît que ces tourbillons, mis à part le tourbillon de Rankine, sont toujours instables. Nous montrons par la suite que les effets d'une rotation d'ensemble aussi bien que d'une stratification en densité du milieu peuvent être stabilisants. Nous remarquons par ailleurs que, comme dans le cas de l'instabilité elliptique, les contributions de la rotation et de la stratification sont antagonistes sur la stabilité de tels tourbillons. Nous montrons enfin que l'instabilité elliptique est le mécanisme générique de déstabilisation de cette famille de tourbillons.<sup>1</sup>

---

1. Ce chapitre reprend une étude parue au *Journal of Fluid Mechanics* (Guimbard & Leblanc, 2006). Par souci d'homogénéité les notations diffèrent de celles de l'article.

## 2.1 Introduction

Depuis la découverte de l'instabilité elliptique il y a une trentaine d'années, la théorie des instabilités hydrodynamiques a connu des développements conséquents. En effet cette instabilité modifie l'évolution de structures cohérentes dont les lignes de courant sont elliptiques dans les écoulements cisailés (Bayly, Orszag & Herbert, 1988; Huerre & Rossi, 1998; Cambon & Scott, 1999; Kerswell, 2002). En 1987, Bayly remarque que l'instabilité elliptique ainsi que d'autres mécanismes, comme l'instabilité centrifuge ou d'autres instabilités de tourbillons, pourraient être décrits à l'aide d'un formalisme unifié; il écrit alors : *“The common features of these broadband instabilities suggest that they are all special cases of a very general phenomenon, and that a theory broad enough to comprehend these effects would lead to new insights into instabilities of other flows as well”* (Bayly, 1987). Le formalisme qu'il développa en parallèle d'Eckhoff & Storesletten (1978), de Friedlander & Vishik (1991), et de Lifschitz & Hameiri (1991) plus connu sous le nom *Théorie des instabilités locales (ou courtes longueurs d'ondes)*, permet de mettre en exergue de nombreux nouveaux mécanismes d'instabilité (Friedlander & Lipton-Lifschitz, 2003).

Ce chapitre porte sur l'étude de stabilité linéaire d'une classe de solutions exactes et bidimensionnelles des équations d'Euler découverte par Abrashkin & Yakubovich (1984). Cette solution décrite en représentation lagrangienne inclut la houle de Gerstner, ainsi qu'une famille générale de tourbillons instationnaires et non uniformes évoluant dans un écoulement irrotationnel. L'ellipse de Kirchhoff, le tourbillon de Rankine ainsi que les tourbillons multipolaires peuvent aussi bien être décrit par cette solution.

Mis à part les tourbillons multipolaires qui ont été étudiés avec des approches classiques (Robinson & Saffman, 1984; Vladimirov & Il'in, 1988; Waleffe, 1990; Miyazaki *et al.*, 1994; Le Dizès, 2000; Eloy & Le Dizès, 2001), la stabilité de perturbations tridimensionnelles de la famille de tourbillons d'Abrashkin & Yakubovich n'a pas à notre connaissance été étudiée. Et du fait de l'instationnarité de cette solution et de l'impossibilité de pouvoir exprimer de manière explicite le champ de vitesse en représentation Eulérienne, les méthodes classiques utilisées dans la théorie des instabilités (étude en modes propres) semblent pour le moins inappropriées.

Il apparaît heureusement que la théorie dite des instabilités courtes longueurs d'onde peut s'appliquer pour de tels écoulements décrits en représentation Lagrangienne, comme l'a montré récemment Leblanc (2004) dans le cas particulier de la houle de Gerstner. Le problème de stabilité est alors réduit à un système d'équations différentielles ordinaires dont le paramètre principal est la matrice de distorsion (ou matrice Jacobienne) de l'écoulement de base. Nous généralisons ici cette approche à la famille de solutions d'Abrashkin–Yakubovich, et nous prenons en compte les effets d'une rotation extérieure et d'une stratification verticale.

Il est par ailleurs important de remarquer, que les perturbations injectées seront considérées comme étant de courtes longueurs d'onde, infinitésimales et localisées le long de trajectoires de l'écoulement de base. En ce sens l'étude de stabilité linéaire ne peut être complète utilisant un tel formalisme. En particulier les instabilités grandes longueurs d'onde sont filtrées et par exemple, le critère d'instabilité de Love pour les ellipses de Kirchhoff ne peut être déduit avec la théorie courte longueur d'onde.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : la solution d'Abrashkin–Yakubovich ainsi que des exemples de tourbillons sont respectivement présentés dans les sections §2.2 et §2.3. La théorie des instabilités courtes longueurs d'onde est rappelée en §2.4 et nous y formulons un critère exact de stabilité. La stabilité linéaire des tourbillons est présentée en §2.5 et les effets d'une rotation externe et d'une stratification verticale sont discutés en §2.6 et §2.7. En §2.8 nous appliquons les résultats aux tourbillons multipolaires stationnaires et après la conclusion (§2.9) sont rassemblés en Annexe différentes démonstrations.

## 2.2 Solution d'Abrashkin & Yakubovich

Dans le plan  $(O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , soit  $\mathbf{a} = (a, b)$  la variable de Lagrange d'une particule fluide et  $\mathbf{X}(t; a, b) = X(t; a, b)\mathbf{e}_x + Y(t; a, b)\mathbf{e}_y$  sa position à l'instant  $t$ . Afin de décrire des mouvements bidimensionnels il apparaît plus judicieux de passer dans le plan complexe. Ainsi :

$$\xi = a + ib \quad \text{et} \quad Z(t; \xi, \bar{\xi}) = X(t; a, b) + iY(t; a, b)$$

désigneront respectivement le paramètre lagrangien et la position instantanée dans le plan complexe d'une particule fluide. En utilisant ces variables, Abrashkin & Yakubovich ont montré que  $Z(t; \xi, \bar{\xi})$  permet de décrire l'évolution d'un fluide incompressible et non visqueux si

$$J(\xi, \bar{\xi}) = |\partial_\xi Z|^2 - |\partial_{\bar{\xi}} Z|^2 \quad \text{et} \quad \Gamma(\xi, \bar{\xi}) = 2i \frac{(\partial_\xi \bar{Z})(\partial_{\bar{\xi}} \dot{Z}) - (\partial_{\bar{\xi}} \bar{Z})(\partial_\xi \dot{Z})}{|\partial_\xi Z|^2 - |\partial_{\bar{\xi}} Z|^2} \quad (2.1a, b)$$

sont des invariants Lagrangien, i.e. qu'ils ne dépendent pas du temps le long d'une trajectoire fixée. Notons que le point désigne la dérivée temporelle ( $\dot{Z} = \partial_t Z$ ) alors que la barre représente le complexe conjugué. Dans l'équation (2.1),  $J(\xi, \bar{\xi})$  représente le déterminant Jacobien de la transformation entre l'espace Lagrangien et l'espace physique (ou Eulérien), i.e.  $J = |\partial(X, Y)/\partial(a, b)| = |\partial(Z, \bar{Z})/\partial(\xi, \bar{\xi})| \neq 0$ , alors que  $\Gamma(\xi, \bar{\xi})$  représente la vorticité locale des particules fluides. Leur invariance est une conséquence directe du caractère incompressible, non visqueux et bidimensionnel de l'écoulement fluide considéré.

Une classe de solutions satisfaisant ces contraintes a été découverte par Abrashkin & Yakubovich (1984) et s'écrit :

$$Z(t; \xi, \bar{\xi}) = G(\xi)e^{i(\Omega_1 + \Omega_2)t} + H(\bar{\xi})e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)t} \quad (2.2)$$

où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont des variables réelles et les fonctions  $G$  et  $H$  sont des fonctions analytiques complexes quelconques ; la seule contrainte pour cet écoulement est que  $|G'(\xi)|^2 \neq |H'(\bar{\xi})|^2$  qui correspond au fait que le Jacobien (2.1a) ne peut s'annuler. Comme précisé en introduction cette solution admet comme cas particulier la houle de Gerstner, tout comme la sous classe de solution suivante :

$$Z(t; \xi, \bar{\xi}) = \xi e^{i\Omega t} + H(\bar{\xi}) \quad \text{avec} \quad |H'(\bar{\xi})| < 1 \quad \text{et} \quad |\xi| \leq 1. \quad (2.3)$$

qui sera à la base de notre étude. Remarquons finalement que le seul écoulement à surface libre pouvant être décrit par (2.2) est la houle de Gerstner, que l'on obtient en prenant :

$$G(\xi) = \xi, \quad \Omega_1 = -\Omega_2, \quad \Omega_1 = mc/2 \text{ et } H(\bar{\xi}) = -ie^{im\bar{\xi}}/m.$$

Nous pouvons raisonnablement choisir  $\Omega_\ell > 0$  sans perte de généralité<sup>2</sup>. Pour le cas trivial où la fonction  $H$  est une constante ( $H' = 0$ ), l'écoulement est une rotation solide de vitesse angulaire  $\Omega_\ell$ . Alors que si  $H$  n'est pas uniforme, les particules fluides continuent de tourner à la vitesse angulaire  $\Omega_\ell$  sur des cercles de rayon  $|\xi|$ , mais dont les centres de chaque trajectoire, situés en  $H(\bar{\xi})$ , diffèrent l'une de l'autre. C'est pourquoi on retrouve cette solution dans la littérature (Yakubovich & Zenkovich, 2001; Bennet, 2006, Chapitre 7.5) sous le nom de tourbillons ptoléméens.

A chaque instant, la solution (2.3) transforme le disque unité  $|\xi| \leq 1$  du plan Lagrangien en une surface fermée dans le plan physique. La frontière  $\mathcal{C}(t)$  de cette surface correspond à la transformation du cercle unité  $|\xi| = 1$ . C'est donc, de par sa construction, un contour matériel. A l'intérieur de la surface déformée ou sur  $\mathcal{C}(t)$ , la vorticité de l'écoulement peut être calculée explicitement à partir de (2.1b) et s'écrit :

$$\Gamma(\xi, \bar{\xi}) = 2\Omega_\ell / (1 - |H'|^2). \quad (2.4)$$

La vorticité est donc positive mais la plupart du temps *non-uniforme* en espace.

Par ailleurs Abrashkin & Yakubovich ont montré que l'on pouvait construire un écoulement potentiel à l'extérieur de la frontière  $\mathcal{C}(t)$ . L'écoulement potentiel extérieur est construit de la manière suivante : la vitesse complexe  $W = U - iV$  peut s'écrire de manière implicite en représentation eulérienne comme :

$$W_{ext}(\eta, t) = -i\Omega_\ell \eta^{-1} e^{-i\Omega_\ell t}, \quad (2.5)$$

où  $\eta$  est une variable auxiliaire complexe définie telle que  $|\eta| > 1$  et que l'on relie à la coordonnée physique  $z = x + iy$  par :

$$z = \eta e^{i\Omega_\ell t} + H(\eta^{-1}). \quad (2.6)$$

On peut montrer de plus (Zeitlin, 1991), que la continuité de la vitesse et de la pression sont assurées sur la frontière  $\mathcal{C}(t)$ . De par les relations (2.5) et (2.6), on remarque que la vitesse ne dépend pas de  $\bar{z}$  à l'extérieur de  $\mathcal{C}(t)$ , ce qui montre (condition nécessaire et suffisante) que l'écoulement extérieur est potentiel.

A chaque instant  $t$ , (2.6) peut être vu comme une transformation conforme entre l'écoulement extérieur au disque unité dans le  $\eta$ -plan complexe et l'écoulement extérieur à la courbe  $\mathcal{C}(t)$  dans le  $z$ -plan complexe. Selon Yakubovich & Zenkovich (2001), la condition  $|H'| < 1$  permet d'éviter l'occurrence de singularités dans l'écoulement potentiel extérieur. On peut en effet montrer que si cette condition est réalisée,  $z$  réalise une bijection entre l'extérieur du disque unité et l'écoulement extérieur défini par (2.6). Finalement, comme  $W_{ext} \sim -i\Omega_\ell/z$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ , les tourbillons d'Abrashkin–Yakubovich se comportent à l'infini comme des tourbillons ponctuels de circulation  $2\pi\Omega_\ell$ .

2. Plus généralement, (2.3) peut s'écrire de la manière suivante  $Z(t; \xi, \bar{\xi}) = A(\xi e^{i\Omega_\ell t} + H(\bar{\xi}))$  où le réel positif  $A$  est un paramètre réglable n'affectant pas les résultats présentés.

## 2.3 Exemples de tourbillons déformés

Lorsque  $H$  est uniforme, la solution (2.3) décrit ainsi un tourbillon de Rankine circulaire de vorticité uniforme  $2\Omega_\ell$ . Et lorsque  $H'(\bar{\xi}) \neq 0$ , le tourbillon sera déformé. Un cas particulier intéressant (tourbillons multipolaires) s'écrit :

$$H(\bar{\xi}) = S\bar{\xi}^{n-1}/(n-1), \quad (2.7)$$

où  $n \geq 2$  est un entier et  $S$  un nombre complexe tel que  $|S| < 1$  afin d'assurer la condition  $|H'| < 1$ . La phase de  $S$  engendre une simple rotation des axes qui n'intervient pas dans le calcul de stabilité. Nous supposons ainsi que  $S$  est un réel vérifiant  $0 \leq S < 1$ . Si  $n = 2$ , l'écoulement correspond à une ellipse de Kirchhoff de vorticité uniforme  $2\Omega_\ell/(1-S^2)$ , de rapport d'aspect  $(1+S)/(1-S)$ , et dont les axes tournent uniformément à la vitesse angulaire  $\Omega_\ell/2$ . Par ailleurs lorsque  $n > 2$ , (2.7) décrit des tourbillons *multipolaires* stationnaires (dans le sens Eulérien du terme) dans un repère tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_\ell(1-1/n)$ .

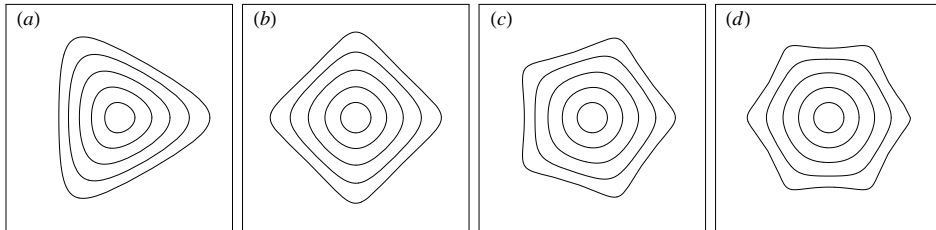


FIGURE 2.1 – Isolignes de vorticité pour les tourbillons multipolaires (2.7) avec  $S = 0.4$  et  $n = 3$  (a), 4 (b), 5 (c), 6 (d). La vorticité augmente continûment du centre à la frontière. Ces tourbillons tournent uniformément sans changer de forme dans un écoulement potentiel au repos à l'infini. La rotation peut être arrêtée en imposant un champ d'étirement à l'infini (§2.8).

Mis à part pour  $n = 2$ , la vorticité n'est pas uniforme : ainsi les isolignes de vorticité sont des cercles concentriques dans le plan Lagrangien et des hypocycloïdes dans le plan physique. La vorticité augmente du centre du tourbillon jusqu'à sa frontière où elle demeure constante. De tels exemples de tourbillons sont représentés sur la figure 2.1. Du fait de leurs non uniformités, ces tourbillons diffèrent de ceux discuté par Saffman (1992, Chap. 9.4). Pour des déformations infinitésimales de la frontière du vortex, on peut cependant montrer que ces deux classes de solutions sont intimement liées (voir la fin de l'Annexe C).

Cependant l'ellipse de Kirchhoff et les tourbillons multipolaires sont des cas particuliers car ils tournent sans changer de forme. Dans le cas général, pour des choix plus exotiques de  $H(\bar{\xi})$ , la frontière du vortex se déforme continûment dans le temps. De tels exemples peuvent être trouvés dans Abrashkin & Yakubovich (1984) et Yakubovich & Zenkovich (2001). D'autres exemples sont tracés sur les figures 2.2 et 2.3. Ils correspondent respectivement à :

$$H(\bar{\xi}) = S \exp(\bar{\xi} - 1) \quad \text{et} \quad H(\bar{\xi}) = S \cos^2 1 \tan \bar{\xi}, \quad (2.8a, b)$$

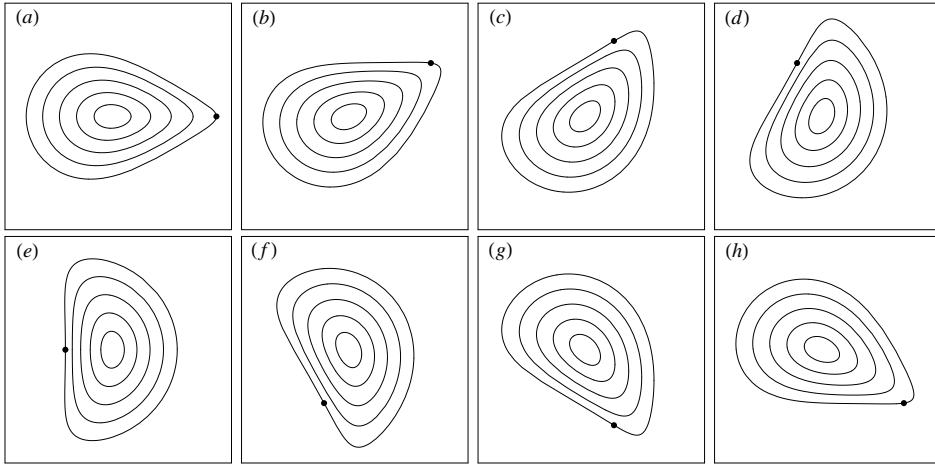


FIGURE 2.2 – Evolution sur une période des contours matériels du tourbillon exponentiel pour  $S = 0.6$  :  $\Omega_\ell t = 0$  (a),  $\pi/4$  (b),  $\pi/2$  (c),  $3\pi/4$  (d),  $\pi$  (e),  $5\pi/4$  (f),  $3\pi/2$  (g),  $7\pi/4$  (h). Les contours sont les projections instantanées des cercles concentriques du plan Lagrangien. Le point, sur la frontière du tourbillon, représente le point matériel de vortacité maximum.

où  $S$  est un réel tel que  $0 \leq S < 1$ . On se référera par la suite à (2.8a) et (2.8b) pour désigner respectivement les tourbillons *exponentiels* et *tangentes*. Contrairement aux tourbillons multipolaires, la vortacité n'est plus constante le long des contours matériels représentés sur la figure 2.2 et 2.3, et en particulier sur leur frontière. Par exemple la distribution de vortacité du tourbillon exponentiel s'écrit, à partir de (2.4) et (2.8a) :

$$\Gamma(\xi, \bar{\xi}) = 2\Omega_\ell / (1 - S^2 \exp(\xi + \bar{\xi} - 2)).$$

Les isolignes de vortacité sont alors des bandes verticales dans le plan Lagrangien ( $\text{Re}\xi$  constante) ; le maximum est atteint sur le point matériel  $\xi = 1$  de la frontière dont le mouvement est représenté, par le point, sur la figure 2.2 . Pour le vortex tangente, deux maximums de la vortacité sont situés sur les points  $\xi = \pm 1$  et sont représentés sur la figure 2.3.

Dans les exemples (2.7) et (2.8a,b), le maximum de vortacité  $\Gamma_{max} = 2\Omega_\ell / (1 - S^2)$  est borné et est situé sur la frontière. On voit donc que si  $S = 1$ , la vortacité devient infinie et une singularité apparaît sur le contour du vortex. Par exemple l'ellipse de Kirchhoff devient une nappe de vortacité tournant dans un écoulement potentiel (Saffman, 1992, Chap. 9.3). Nous ne considérerons donc pas, de tels cas, qui apparaissent dénués de tout sens physique.

Cependant même pour une distribution finie de vortacité, le caractère réaliste de ces tourbillons exotiques peut, il est vrai, être discuté. En effet bien qu'ils soient solutions des équations d'Euler, ils souffrent d'une discontinuité de vortacité au travers de leurs frontières que la viscosité certes atténuerait si elle était prise en compte. A faible nombre de Reynolds, il est probable que ces vortex s'axisymétriseraient par pure diffusion. Par contre à très haut nombre de Reynolds, la dynamique se-

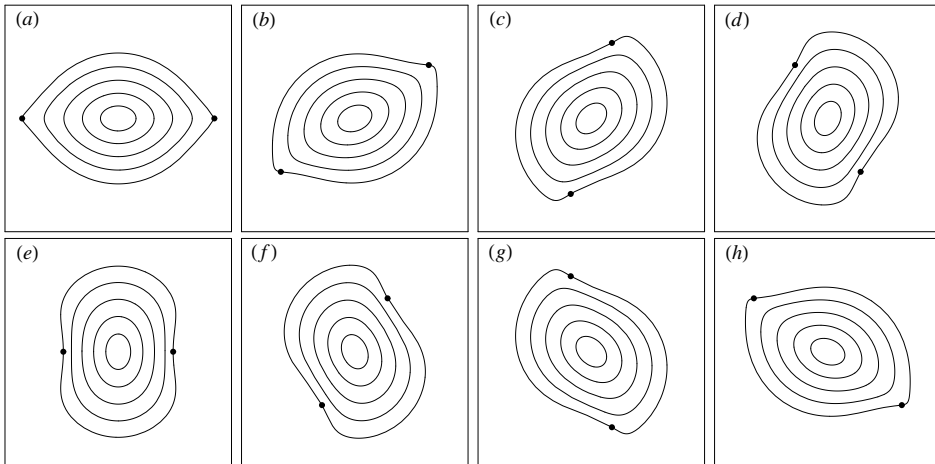


FIGURE 2.3 – Même figure que 2.2 pour le tourbillon tangente (2.8b). Les deux points correspondent aux maxima de vorticité.

rait essentiellement non visqueuse et l'axisymétrisation de ces tourbillons est une question ouverte. Ce mécanisme non visqueux n'est valable que pour des distributions de vorticité suffisamment étendue spatialement (Bassom & Gilbert, 1998), mais Dritschel (1998) a montré alors qu'il étudiait la dynamique d'ellipses de Kirchhoff régulière, que *“les tourbillons soumis à des gradients suffisamment forts se comportaient différemment ; en particulier ils peuvent rester non-axisymétrique, apparemment indéfiniment”* ; nous pouvons ainsi conjecturer qu'il en est de même pour les tourbillons d'Abrashkin–Yakubovich et que cette solution pourrait représenter des écoulements réalistes. Cependant ces solutions sont-elles stables ?

## 2.4 Critère général d'instabilité

Comme nous l'avons rappelé en introduction, les techniques traditionnelles utilisées dans la théorie des instabilités ne peuvent pas s'appliquer à la solution d'Abrashkin–Yakubovich du fait de son instationnarité et de sa représentation Lagrangienne. Ainsi, nous restreignons notre étude à des perturbations infinitésimales de courtes longueurs d'onde, et nous commençons par des considérations générales.

La théorie des instabilités locales affirme qu'un écoulement est linéairement instable, si il contient au moins une trajectoire instable. Une trajectoire  $\mathbf{a}$  est dite instable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{k}_0 \perp \mathbf{v}_0} |\mathbf{v}(t; \mathbf{a})| = \infty,$$

où les vecteurs unitaires  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{v}_0$  sont respectivement les valeurs initiales du vecteur d'onde  $\mathbf{k}(t; \mathbf{a})$  et de l'amplitude de vitesse  $\mathbf{v}(t; \mathbf{a})$  de la perturbation. Ces derniers sont respectivement solutions de (Friedlander & Lipton-Lifschitz, 2003) :

$$\dot{\mathbf{k}} = -L^T \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{v}} = (2\mathbf{k}\mathbf{k}^T/|\mathbf{k}|^2 - I)L\mathbf{v}, \quad (2.9a, b)$$



où  $L(t; \mathbf{a}) = [\partial U / \partial \mathbf{x}](\mathbf{X}(t; \mathbf{a}), t)$  est le gradient local de vitesse de l'écoulement de base et  $I$  la matrice identité.

Généralement, l'écoulement de base est connu en représentation eulérienne via son champ de vitesse  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ , et la détermination des trajectoires de l'écoulement requiert la résolution de  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ . Ce n'est cependant pas nécessaire dans notre cas car les trajectoires sont ici explicites. En outre, le vecteur d'onde  $\mathbf{k}(t; \mathbf{a})$  et le gradient de vitesse  $L(t; \mathbf{a})$  peuvent être explicitement calculés grâce à la *matrice de distorsion*  $F(t; \mathbf{a}) = \partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{a}$  (Leblanc, 2004) :

$$\mathbf{k}(t; \mathbf{a}) = (F_0 F^{-1})^T \mathbf{k}_0, \quad L(t; \mathbf{a}) = \dot{F} F^{-1}. \quad (2.10a, b)$$

Pour la famille de solutions d'Abrashkin–Yakubovich (2.2), il est plus pratique d'utiliser la matrice de distorsion complexe  $F_c(t; \xi, \bar{\xi}) = \partial(Z, \bar{Z}) / \partial(\xi, \bar{\xi})$  dont l'expression est donnée en (2.31). La composante horizontale de la matrice de distorsion réelle  $F_h(t; a, b) = \partial(X, Y) / \partial(a, b)$  est alors calculée avec la relation (Yakubovich & Zenkovich, 2001) :

$$F_c = T F_h T^{-1} \quad \text{où} \quad T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Ainsi  $\mathbf{k}$  et  $L$  sont calculés de manière explicite avec les relations (2.10a,b). En décomposant le vecteur d'onde sur la verticale et l'horizontale  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_h + k_z \mathbf{e}_z$ , il s'avère que  $|\mathbf{k}_h(t; \mathbf{a})|$  est borné, et que  $k_z$  est constant.

Ainsi, seule l'équation de transport (2.9b) est à résoudre. On peut, par ailleurs, montrer (Lifschitz, 1994) que l'on peut résoudre de manière équivalente :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = L\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{k} / |\mathbf{k}|^2, \quad (2.12)$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \times \mathbf{v}$  est l'amplitude de la perturbation de vortacité et  $\mathbf{T}$  la vortacité de l'écoulement de base. Pour des perturbations bidimensionnelles ( $\mathbf{T} \cdot \mathbf{k} = 0$ ) ou le long de trajectoires irrotationnelles, (2.12) s'écrit alors  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = L\boldsymbol{\omega}$  qui admet pour solution :

$$\boldsymbol{\omega}(t; \mathbf{a}) = F F_0^{-1} \boldsymbol{\omega}_0 \quad (2.13)$$

ce qui prouve que  $|\boldsymbol{\omega}(t; \mathbf{a})|$  et  $|\mathbf{v}(t; \mathbf{a})|$  sont bornés dans le temps. Et les deux premiers points des propositions suivantes sont assurés.

#### CRITÈRES DE STABILITÉ LOCALE

- (i) *Les perturbations bidimensionnelles sont stables.*
- (ii) *Les perturbations tridimensionnelles sont stables si*

$$\frac{|H'|^2}{|G'|^2} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2}.$$

- (iii) *Les perturbations tridimensionnelles sont instables si*

$$\frac{|H'|}{|G'|} > \frac{|2\Omega_1 + \Omega_2|}{|2\Omega_1 - \Omega_2|}. \quad (2.14)$$

Le dernier point est montré pour des vecteurs d'onde verticaux ( $\mathbf{k}_h = 0$ ) pour lesquels (2.9b) s'écrit  $\dot{\mathbf{v}} = -L\mathbf{v}$  qui peut être résolue explicitement (Annexe A). C'est une condition suffisante d'instabilité restreinte aux seuls vecteurs d'onde verticaux.

Ces résultats sont les plus généraux que l'on puisse obtenir sans particulariser l'expression générale (2.2). Pour la houle de Gerstner, (iii) permet d'obtenir le critère d'instabilité calculé par Leblanc (2004) mais s'avère être improductif pour les tourbillons (2.3). Il est alors nécessaire de considérer des perturbations dont le vecteur d'onde est oblique.

## 2.5 Instabilité de tourbillons déformés

L'écoulement de base considéré étant bidimensionnel, Bayly *et al.* (1996) ont montré que l'équation de transport (2.12) peut se réduire à une simple équation différentielle ordinaire du deuxième ordre pour la variable  $q = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_z |\mathbf{k}| / |\mathbf{k}_h|$  :

$$\ddot{q} + Q(t)q = 0, \quad (2.15a)$$

$$Q(t) = -k_z^2 \left( \frac{\mathbf{k}_h^T (\dot{L} + LL - 3LL^T) \mathbf{k}_h}{|\mathbf{k}_h|^2 |\mathbf{k}|^2} + \frac{(4|\mathbf{k}|^2 - k_z^2) (\mathbf{k}_h^T L \mathbf{k}_h)^2}{|\mathbf{k}_h|^4 |\mathbf{k}|^4} \right). \quad (2.15b)$$

L'écoulement est alors instable si  $|q(t)|$  croît exponentiellement le long d'une trajectoire<sup>3</sup>

Pour les tourbillons (2.3), on peut montrer après calculs que le coefficient  $Q$  dans (2.15b) admet la dépendance explicite suivante :  $Q(t; \Omega_\ell, \delta, \vartheta, \gamma - 2\varphi)$ . Ici,  $\delta$  and  $\gamma$  sont respectivement le module et l'argument de  $H'(\bar{\xi})$ , alors que  $\varphi$  et  $\vartheta$  sont les angles caractérisant l'orientation initiale du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0 = (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)^T$ .

Il apparaît de plus que  $Q$  est périodique en temps de période  $2\pi/\Omega_\ell$ , ce qui engendre que l'équation (2.15b) est maintenant une équation de Hill. Par ailleurs, le potentiel  $Q$  est invariant par la transformation  $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ ,  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ , et  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ . Bien que l'orientation initiale du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  soit une variable en soit, on a choisit de prendre par souci de simplicité dans le reste du chapitre  $\varphi$  tel que  $\gamma - 2\varphi = \pi/2$ . Notons que d'autres valeurs de  $\varphi$  ne changent pas qualitativement les résultats exposés ci-dessous.

Les paramètres  $\delta \in [0; 1[$  et  $\vartheta \in [0; \pi/2]$  sont les deux paramètres clés de ce problème. Nous rappelons que  $\delta = |H'|$  caractérise la déformation locale d'une particule fluide et est généralement non uniforme dans le vortex ; on rappelle aussi que si  $\delta = 0$  partout, alors l'écoulement est un tourbillon de Rankine. De plus  $\vartheta$  est l'angle du vecteur d'onde avec la verticale, la perturbation étant bidimensionnelle si  $\vartheta = \pi/2$  et tridimensionnelle sinon.

En premier lieu, on considère la stabilité d'un écoulement peu déformé, i.e.  $\delta \ll 1$ . Pour les exemples considérés en (2.7) et (2.8a,b), ceci correspond à  $S \ll 1$ . Ainsi en effectuant un développement limité en  $\delta$ , (2.15b) donne au premier ordre :

$$\ddot{q} + \Omega_\ell^2 (a_0 + 2\delta a_1 \sin \Omega_\ell t) q = 0. \quad (2.16)$$

3. La dépendance des variables par rapport au label Lagrangien est maintenant implicite

C'est une équation de Mathieu de coefficients :

$$a_0 = 4 \cos^2 \vartheta, \quad a_1 = \left(\frac{5}{2} + 4 \sin^2 \vartheta\right) \cos^2 \vartheta. \quad (2.17)$$

Lorsque  $\delta \ll 1$ , les solutions de (2.16) sont bornées sauf au voisinage de résonances définies par  $a_0 = \frac{1}{4}j^2$  où  $j$  est un entier positif. Les solutions résonantes sont exponentiellement croissantes avec un taux de croissance d'ordre  $\delta^j$ . Une analyse perturbative permet ainsi de déterminer le taux de croissance associé à la première résonance ( $j = 1$ ) qui s'écrit  $\sigma = \delta \Omega_\ell a_1$  (Bender & Orszag, 1978, Chap. 11.4).

A partir de (2.17), la première résonance apparaît pour des vecteurs d'onde vérifiant  $\cos \vartheta = \frac{1}{4}$  et le taux de croissance de ces solutions s'écrit ainsi simplement  $\sigma = \frac{25}{64} \Omega_\ell \delta$ . De plus comme  $\delta = |H'|$ , on peut alors conclure que tous les tourbillons faiblement déformés de la forme (2.3) sont instables vis à vis de perturbations tri-dimensionnelles localisées. Pour les exemples (2.7) et (2.8a,b), le maximum du taux de croissance vaut donc :

$$\sigma_{max} = \frac{25}{64} \Omega_\ell S \quad \text{quand} \quad S \ll 1.$$

Ainsi, on retrouve les résultats de Vladimirov & Il'in (1988) et Le Dizès (2000) pour l'ellipse de Kirchhoff ou les tourbillons multipolaires, mais ce résultat est étonnamment valable pour la famille entière de tourbillons que l'on obtient en remplaçant  $S$  par  $|H'|_{max}$ . Une explication en est donnée à la fin du chapitre en §2.9.

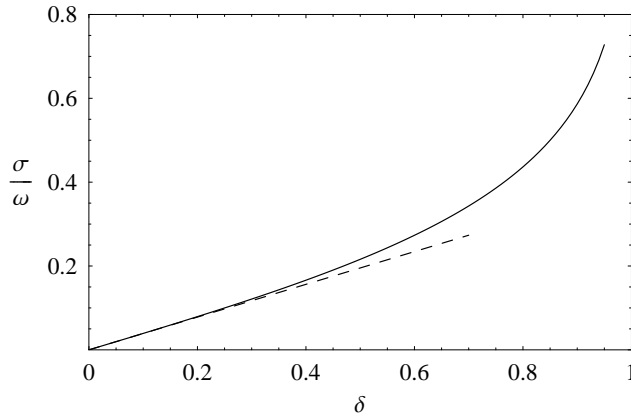


FIGURE 2.4 – Taux de croissance adimensionné  $\sigma/\Omega_\ell$  (maximisé sur toutes les orientations possibles du vecteur d'onde) des tourbillons d'Abrashkin–Yakubovich (2.3) calculé en fonction de la déformation locale  $\delta = |H'|$ , sans rotation externe et sans stratification. La ligne en pointillée, de pente  $25/64$ , correspond au calcul réalisé avec des petites déformations.

Pour des fortes déformations, l'équation de Mathieu (2.16) n'est plus valide et (2.15b) ne peut être résolue que numériquement. Comme  $Q(t)$  est périodique, on y parvient avec la théorie de Floquet (Bender & Orszag, 1978, Chap. 11.4). Les résultats reportés sur la figure 2.4 montrent que *la famille de tourbillon d'Abrashkin–Yakubovich est instable dès que  $H'(\bar{\xi}) \neq 0$  quelque part*. Le tourbillon de Rankine est quand à lui le seul individu stable de cette famille.

La figure 2.4 montre alors que le taux de croissance est renforcé par la déformation. Comme  $\delta = |H'|$ , le taux de croissance des perturbations n'est pas uniforme dans le vortex. Par ailleurs, comme la vorticité (2.4) est une fonction croissante de  $|H'|$ , les régions les plus instables sont celles où la vorticité est maximum. Par exemple, les plus dangereuses instabilités sont situées le long de la frontière des tourbillons multipolaires (2.7) représentés sur la figure 2.1. Pour (2.8a,b), les points matériels représentés sur les figures 2 et 3 sont les endroits les plus instables.

## 2.6 Effet d'une rotation d'ensemble

Un cas particulier de la solution d'Abrashkin–Yakubovich (2.2) s'écrit :

$$Z(t; \xi, \bar{\xi}) = (\xi e^{i\Omega_\ell t} + H(\bar{\xi})) e^{i\Omega_p t} \quad \text{with} \quad |H'(\bar{\xi})| < 1 \quad \text{and} \quad |\xi| \leq 1. \quad (2.18)$$

Le mouvement ainsi défini est la composition de (2.3) avec une rotation uniforme de vitesse angulaire  $\Omega_p$  autour de l'axe vertical ( $O\mathbf{e}_z$ ). Par ailleurs, (2.3) peut être vue comme étant la position *relative* d'une particule fluide dans un repère tournant à  $\Omega_p$ , et (2.18) sa position *absolue* par rapport au repère inertiel ( $O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ). Les écoulements extérieurs aux tourbillons, construits précédemment en §2.2, sont toujours irrotationnels vus du repère en rotation, mais ont une vorticité uniforme  $2\Omega_p$  dans le repère inertiel.

Par conséquent l'analyse de stabilité directe de (2.18) est équivalente à la stabilité de (2.3) dans le repère tournant. De plus la méthode présentée dans la section précédente peut être directement appliquée à (2.18), tout en calculant la matrice de distorsion  $F_c$  à partir de (2.18).

Le calcul explicite de la vorticité associée à (2.18) entraîne :

$$\Gamma(\xi, \bar{\xi}) = 2\Omega_p + 2\Omega_\ell / (1 - |H'|^2). \quad (2.19)$$

C'est la vorticité absolue de l'écoulement qui est reliée à la vorticité relative (2.4) au travers de la relation usuelle :  $\Gamma_{abs} = 2\Omega_p + \Gamma_{rel}$ . Rappelons que  $\Omega_\ell$  est la vitesse angulaire d'une particule fluide dans son mouvement dans le repère tournant, il est par ailleurs utile d'introduire le paramètre adimensionnel suivant :

$$f = \Omega_p / \Omega_\ell$$

qui peut être vu comme l'inverse d'un nombre de Rossby. La rotation externe sera dite *cyclonique* si  $f > 0$  et *anticyclonique* si  $f < 0$ .

Pour de faibles déformations ( $\delta = |H'| \ll 1$ ), l'équation de Mathieu (2.16) a pour coefficients :

$$a_0 = 4(1 + f)^2 \cos^2 \vartheta, \quad a_1 = ((\frac{5}{2} + 2f) + 4(1 + f)^2 \sin^2 \vartheta) \cos^2 \vartheta.$$

Comme  $0 \leq \cos^2 \vartheta \leq 1$ , la résonance de premier ordre ( $a_0 = \frac{1}{4}$ ) apparaît alors quand

$$|1 + f| \geq \frac{1}{4}, \quad (2.20)$$

ou encore quand  $f \leq -\frac{5}{4}$  ou quand  $f \geq -\frac{3}{4}$ . A l'intérieur de ces régions, les solutions croissent exponentiellement et leurs taux de croissance adimensionnés s'écrit :

$$\frac{\sigma}{\Omega_\ell} = \frac{\delta}{64} \left( \frac{5 + 4f}{1 + f} \right)^2. \quad (2.21)$$

En outre lorsque  $\delta \ll 1$ , les tourbillons d'Abrashkin–Yakubovich sont stables dans un repère en rotation seulement pour des rotations anticycloniques telles que  $-\frac{5}{4} \leq f \leq -\frac{3}{4}$ .

Cette région stable est centrée autour de  $f = -1$  ce qui, d'après (2.19) avec  $\delta \ll 1$ , montre que la vorticité absolue de l'écoulement dans cette région est alors proche de zéro. En fait pour des fortes déformations, les trajectoires à vorticité absolue nulle telles que  $f + 1/(1 - \delta^2) = 0$  sont toujours stables d'après le deuxième point (ii) du critère de stabilité formulé en §2.4. Ceci est une extension du résultat classique stipulant que l'instabilité elliptique est stabilisée à vorticité absolue dans un repère tournant (Craik, 1989; Cambon *et al.*, 1994).

Pour des fortes déformations, le critère (2.14) pour les perturbations dont le vecteur d'onde est vertical prévoit qu'il y a instabilité si

$$\delta > |3 + 4f|/|1 + 4f|. \quad (2.22)$$

A l'intérieur de cette région, le taux de croissance adimensionné s'écrit alors :

$$\frac{\sigma}{\Omega_\ell} = \left( \frac{\delta^2(1 + 4f)^2 - (3 + 4f)^2}{4(1 - \delta^2)} \right)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Dans le cas général, pour toutes les autres valeurs de paramètres, la résolution du problème se fait numériquement en intégrant l'équation de Hill (2.15b). Les formules (2.21) et (2.23) fournissent ainsi des tests utiles pour déterminer le bon fonctionnement des calculs numériques. Les résultats sont présentés sur la figure 2.5 où le taux de croissance, maximisé sur toutes les orientations possibles du vecteur d'onde initial, est projeté dans le plan  $(f, \delta)$ . Pour  $f = 0$  (sans rotation), les tourbillons (2.3) sont toujours instables quelle que soit la déformation. De plus les cyclones sont toujours instables, alors que les anticyclones peuvent être stabilisés.

Afin d'alléger les notations, nous désignerons par la suite comme perturbations verticales (resp. obliques), les perturbations dont le vecteur d'onde est vertical (resp. oblique). Le plan  $(f, \delta)$  peut alors être divisé en 4 régions représentées sur la figure 2.6a : la région (T) est instable et correspond à des perturbations verticales bien que des perturbations obliques puissent aussi exister au voisinage de la frontière de (T) ; les 2 régions (I) n'admettent que des perturbations obliques instables ; et la région S est stable. La figure 2.5 montre que les perturbations les plus amplifiées sont les perturbations verticales se développant dans la région T. Plus précisément on peut montrer que la région stable est comprise entre 2 courbes sur lesquelles les perturbations verticales ( $\mathbf{k}_h = 0$ ) sont stables mais périodiques de période  $\pi$ , et coupent l'axe  $\delta = 0$  respectivement en  $f = -\frac{5}{4}$  et  $f = -\frac{3}{4}$  comme prévu pour la résonance principale de l'équation de Mathieu. On peut montrer que ces courbes sont respectivement définies par  $\delta_2(f)$  et  $\delta_0(f)$ , où

$$\delta_m(f) = \left( \frac{(3 + 4f)^2 - m^2}{(1 + 4f)^2 - m^2} \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

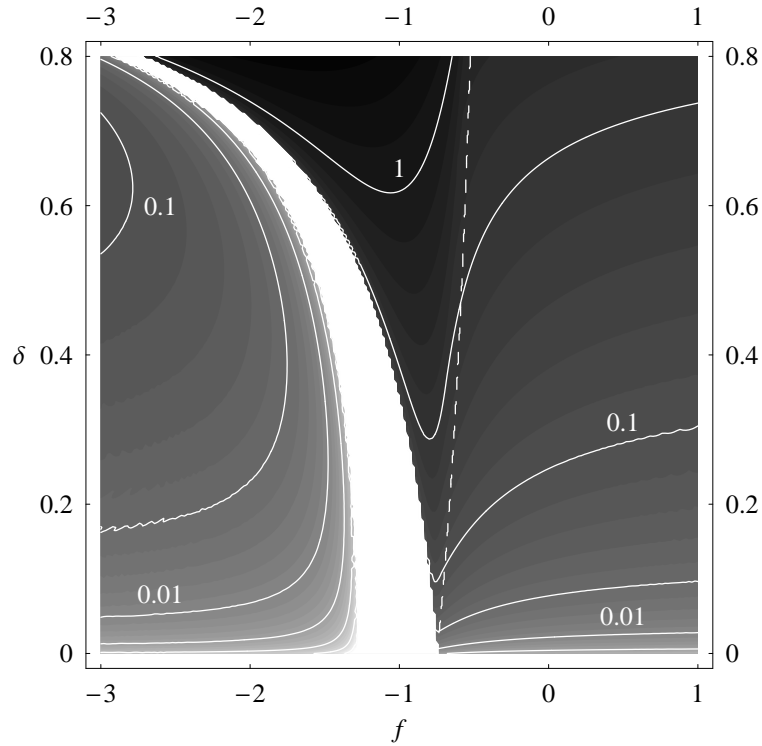


FIGURE 2.5 – Carte d'instabilité pour les tourbillons (2.18) évoluant dans un milieu homogène. On a tracé les isovaleurs du taux de croissance adimensionné  $\sigma/\Omega_\ell$  (calculé numériquement) en fonction de la déformation du vortex  $\delta = |H'|$  et du paramètre de rotation  $f = \Omega_p/\Omega_\ell$ . La région blanche est stable. La région délimitée par les lignes pointillées et qui inclut le niveau  $\sigma/\Omega_\ell = 1$  est la région pour laquelle les perturbations de vecteurs d'onde verticaux sont instables.

Notons par ailleurs que la courbe définie par  $m = 1$  correspond à des trajectoires irrotationnelles et se situe dans la zone stable  $\delta_2(f) \leq \delta \leq \delta_0(f)$ . Finalement *les tourbillons d'Abrashkin–Yakubovich sont stabilisés par la rotation si  $f \leq -\frac{3}{4}$  et si en tout point :*

$$\left( \frac{(3+4f)^2 - 4}{(1+4f)^2 - 4} \right)^{1/2} \leq |H'| \leq \frac{3+4f}{1+4f}. \quad (2.25)$$

Le point crucial de cette étude réside dans le fait que même des anticyclones très fortement déformés peuvent être stabilisés pour des rotations anticycloniques. Par exemple, il sera toujours possible de trouver un repère tournant dans lequel une ellipse de Kirchhoff de rapport d'aspect quelconque sera stable. Les tourbillons non uniformes décrits par (2.7) ou (2.8a,b) sont eux aussi stables dans la région  $-\frac{5}{4} \leq f \leq -\frac{3}{4}$  si l'on suppose que  $S \leq (3+4f)/(1+4f)$ . Ainsi si  $f = -\frac{5}{4}$  par exemple, il faut que  $S \leq \frac{1}{2}$  pour assurer la stabilité (pour les ellipses de Kirchhoff, le rapport d'aspect doit être inférieur ou égal à 3).

## 2.7 Effet de la stratification

On étudie maintenant les effets d'une stratification en densité stable suivant la verticale  $\mathbf{e}_z$ . On montre (voir Annexe B), que sous l'approximation de Boussinesq, les équations de transport se réduisent à :

$$\ddot{q} + \left( Q(t) + N^2 \frac{|\mathbf{k}_h(t)|^2}{|\mathbf{k}(t)|^2} \right) q = 0, \quad (2.26)$$

où  $N$  est la fréquence de Brunt–Väisälä et  $Q(t)$  le potentiel défini en (2.15b). Il est ici utile d'introduire le paramètre adimensionnel caractérisant la stratification :

$$s = N/\Omega_\ell,$$

qui peut être vu comme étant l'inverse d'un nombre de Froude.

On montre alors que, quand la déformation est faible, les coefficients de l'équation de Mathieu (2.16) deviennent :

$$a_0 = 4(1+f)^2 \cos^2 \vartheta + s^2 \sin^2 \vartheta, \quad a_1 = \left( \frac{5}{2} + 2f + (4(1+f)^2 - s^2) \sin^2 \vartheta \right) \cos^2 \vartheta.$$

Ainsi, au premier ordre, l'instabilité apparaît quand  $a_0 = \frac{1}{4}$ . Et comme  $0 \leq \cos^2 \vartheta \leq 1$  et  $s^2 \geq 0$ , les conditions pour qu'une résonance paramétrique existe, en présence de stratification<sup>4</sup> deviennent :

$$\left( s \leq \frac{1}{2} \text{ and } |1+f| \geq \frac{1}{4} \right) \quad \text{ou} \quad \left( s \geq \frac{1}{2} \text{ and } |1+f| \leq \frac{1}{4} \right). \quad (2.27)$$

Ces conditions étant satisfaites, le taux de croissance adimensionné de l'instabilité s'écrit :

$$\frac{\sigma}{\Omega_\ell} = \frac{\delta(5+4f)^2(1-4s^2)}{64(1+f)^2 - 16s^2}.$$

4. Une stratification telle que  $s^2 < 0$  est toujours instable car il existe toujours un  $\vartheta$  tel que  $a_0 < 0$ .

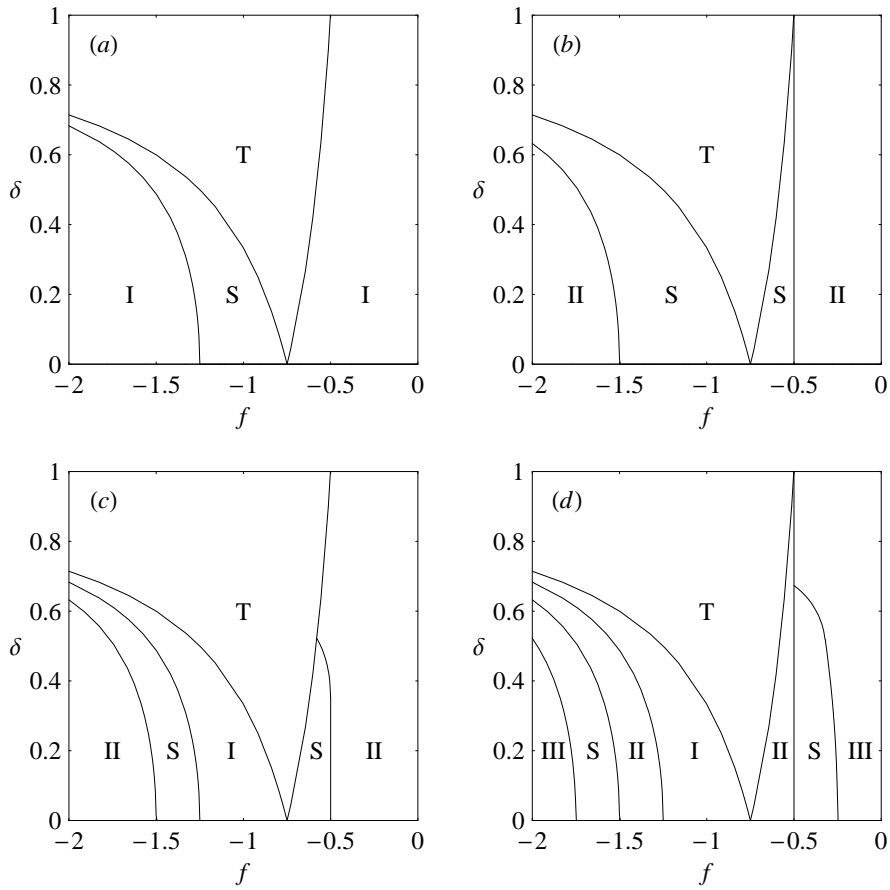


FIGURE 2.6 – Diagramme de stabilité des tourbillons dans un fluide stratifié en rotation pour  $s = N/\Omega_\ell < \frac{1}{2}$  (a);  $s = \frac{1}{2}$  (b);  $s = \frac{3}{4}$  (c);  $s = \frac{5}{4}$  (d). Les régions indiquées par un (S) sont stables; celles indiquées par un (T) sont instables pour des perturbations dont le vecteur d'onde est vertical. Les résonances d'ordre 1, 2 et 3 se développent respectivement dans les régions I, II et III.



Ainsi, pour des faibles stratifications ( $s \leq \frac{1}{2}$ ), les tourbillons sont toujours stables à vorticité absolue nulle, mais pour des fortes stratifications ( $s \geq \frac{1}{2}$ ) les régions stables et instables s'interchangent. Cependant, des résonances d'ordres supérieurs, c'est à dire telles que  $a_0 = \frac{1}{4}j^2$  avec  $j \geq 2$ , peuvent se développer dans des régions où la résonance principale ( $j = 1$ ) est stable. Par exemple, si  $s = \frac{1}{2}$  et  $\delta \ll 1$ , la résonance principale disparaît alors que la résonance secondaire ( $j = 2$ ) commence à se développer quand  $f \leq -\frac{3}{2}$  ou  $f \geq -\frac{1}{2}$  (région II dans la figure 2.6b). Si  $\frac{1}{2} < s < 1$  et  $\delta \ll 1$ , cette dernière est toujours présente alors que la première réapparaît pour  $-\frac{5}{4} \leq f \leq -\frac{3}{4}$  (région I dans la figure 2.6c). Si  $1 < s < \frac{3}{2}$  et  $\delta \ll 1$ , la résonance secondaire disparaît alors que la troisième résonance ( $j = 3$ ) apparaît (figure 2.6d), et ainsi de suite...

Par ailleurs, ces résonances d'ordres supérieurs sont particulièrement difficiles à détecter, car leurs taux de croissances sont d'ordre  $\delta^j$  lorsque  $\delta \ll 1$ . Heureusement, lorsque  $\delta$  est assez petit, nous avons observé que les frontières des régions, dans lesquelles ces résonances se développent dans le plan  $(f, \delta)$ , sont données par les courbes (2.24), sur lesquelles les perturbations verticales sont stables. Ce résultat nous donne de précieuses informations pour réaliser les calculs numériques de (2.26). Les résultats sont présentés sur la figure 2.6.

Tout d'abord, la région T définit par (2.22), dans laquelle les perturbations sont verticales, reste inchangée quelque soit la stratification du fait que ces perturbations ne sont pas affectées par la stratification (voir Annexe B). C'est à l'intérieur de cette région que les perturbations sont le plus amplifiées, leurs taux de croissance étant égale à (2.23). Cette assertion bien que vraie la plupart du temps ne se vérifie malheureusement pas au voisinage de la frontière T, où des perturbations obliques peuvent être plus instables que celles verticales. Pour des faibles stratification  $0 < s < \frac{1}{2}$ , nous avons observé que la résonance principale se développe dans la même région I que dans le cas homogène, bien que son taux de croissance soit plus faible (figure 2.6a). La région stable S demeure elle aussi inchangée. Ainsi, si  $s < 1$  et  $f \leq -\frac{3}{4}$ , les tourbillons d'Abrashkin–Yakubovich sont stables si l'on suppose que (2.25) est vérifié partout.

Si  $s = \frac{1}{2}$  (cf. figure 2.6b), on observe numériquement que la résonance principale disparaît quelle que soit la déformation, et la résonance secondaire se développe dans 2 régions (II) bornées par les courbes définies respectivement par  $\delta_3(f)$  et  $f = -\frac{1}{2}$ . Il y a aussi 2 régions de stabilités définies par :

$$(f \leq -\frac{3}{4} \text{ et } \delta_3(f) \leq |H'| \leq \delta_0(f)) \quad \text{ou} \quad (-\frac{3}{4} \leq f \leq -\frac{1}{2} \text{ et } |H'| \leq \delta_0(f)).$$

Et, étonnamment, *tous les tourbillons sont stables si  $s = \frac{1}{2}$  et  $f = -\frac{1}{2}$ .*

Si  $\frac{1}{2} < s < 1$  (cf. figure 2.6c), les différentes courbes délimitant les régions de stabilités sont définies par les fonctions  $\delta_m(f)$  si  $f \leq -\frac{3}{4}$ . Cependant, pour  $-\frac{3}{4} \leq f \leq -\frac{1}{2}$ , on observe en comparant les figures 6b et 6c que les régions de stabilité deviennent plus étroites. En fait, une nouvelle région d'instabilité qui dépend de l'intensité de la stratification se développe. Par exemple, lorsque  $s = 0.75$ , la frontière de cette région commence au point  $(f, \delta) \approx (-0.5, 0.35)$  et coupe la région T au point  $(f, \delta) \approx (-0.58, 0.52)$ . Nous n'avons pas réussi à obtenir une expression analytique de ces courbes car contrairement aux autres courbes qui sont calculées pour des vecteurs d'ondes verticaux, ici les vecteurs d'onde des perturbations sont obliques.

Ainsi, il ne semble pas possible (sauf dans le cas de faibles déformations) de donner une description systématique des frontières de stabilité si la stratification vérifie  $s > \frac{1}{2}$ . Un dernier exemple est finalement présenté pour  $s = 1.25$  sur la figure 2.6*d*. On rappelle finalement que les résonances d'ordre supérieures à 1 sont très faibles et seraient ainsi très vraisemblablement atténuées par la viscosité. Ainsi, si  $s > \frac{1}{2}$ , les régions instables seraient la réunion des régions T et I des figures 6*c* or 6*d*, les régions II et III resteraient probablement stables dues à la viscosité.

## 2.8 Application aux tourbillons multipolaires

On considère enfin un cas particulier de la famille de solutions d'Abrashkin–Yakubovich s'écrivant :

$$Z(t; \xi, \bar{\xi}) = (\xi + S\bar{\xi}^{n-1}e^{-i\Omega_\ell t})e^{i\Omega_\ell t/n}/(n-1) \quad (2.28)$$

où  $0 \leq S < 1$  et  $|\xi| \leq 1$ . Cette solution est un cas particulier de (2.2), et plus précisément de (2.18) où  $H(\bar{\xi})$  est donné par (2.7) et  $\Omega_p = -\Omega_\ell(1 - 1/n)$ . Comme nous avons vu en §2.3, que (2.3) avec (2.7) correspondait à des tourbillons multipolaires tournant sans changer de forme à la vitesse angulaire  $\Omega_\ell(1 - 1/n)$ , on en déduit alors que (2.28) décrit des tourbillons multipolaires stationnaires. Une démonstration de cette assertion est donnée dans l'Annexe C.

Cette solution est particulièrement intéressante car on peut construire à l'extérieur du vortex un écoulement potentiel stationnaire se comportant à l'infini comme un champ d'étirement multipolaire (voir Annexe C). Cette solution exacte n'est autre qu'une généralisation du tourbillon elliptique de Moore–Saffman. On peut, à partir de (2.19), calculer explicitement la distribution de vortacité de (2.28) : on remarque alors qu'elle est toujours non uniforme si  $n > 2$  mais que maintenant les contours tracés sur la figure 2.1 coïncident avec les lignes de courant. Lorsque la déformation est faible, i.e.  $S \ll 1$ , la vortacité est constante en première approximation ( $\Gamma = 2\Omega_\ell/n$ ), et la fonction de courant est donnée en coordonnées polaires par (2.44). Pour  $S \ll 1$ , l'écoulement correspond ainsi avec la solution décrivant des tourbillons multipolaires étudiée par Le Dizès (2000); Eloy & Le Dizès (2001).

Comme cette solution est un cas particulier de (2.18), la stabilité des tourbillons multipolaires stationnaire (2.28) est alors aisément effectuée d'après les résultats de la section précédente en remplaçant simplement  $f$  par  $1/n - 1$ . Par exemple, dans le cas non stratifié, la condition de stabilité (2.25) montre que les tourbillons stationnaires elliptiques ( $n = 2$ ), triangulaires ( $n = 3$ ) et carrés ( $n = 4$ ) sont toujours instables quelle que soit la déformation (pour tout  $0 < S < 1$ ) alors que tous les autres (pour  $n \geq 5$ ) ne seront instables que si leur déformation est suffisamment forte. Plus précisément, (2.28) avec  $n \geq 5$  sont stables si :

$$S < (n-4)/(3n-4). \quad (2.29)$$

On pourra toujours dans le cas homogène, mais seulement pour des petites déformations ( $S \ll 1$ ), appliquer la formule (2.21) donnant l'expression du taux de croissance. Il suffira de poser  $f = 1/n - 1$  et  $\delta = S|\xi|^{n-2}$ . La condition de

résonance (2.20) devient alors  $n \leq 4$ , en accord avec Eloy & Le Dizès (2001), et le taux de croissance maximum est atteint en  $|\xi| = 1$  et s'écrit :

$$\sigma_{max} = \frac{1}{64}(n+4)^2 \Omega_\ell S.$$

On retrouve ainsi pour  $n = 2$ , le célèbre  $\frac{9}{16}$ ème obtenu par Waleffe (1990) pour l'instabilité elliptique (dans notre cas, lorsque  $S \ll 1$ , l'intensité de l'étirement et la vorticité valent respectivement  $\Omega_\ell S$  et  $\Omega_\ell$ ). De plus pour  $n = 3$  et 4, on retrouve aussi la non moins célèbre formule (formule (50) dans Le Dizès, 2000) pour les tourbillons triangulaires et carrés. En présence d'une faible stratification ( $s = N/\Omega_\ell < \frac{1}{2}$ ), les résultats ne changent pas sauf pour le maximum du taux de croissance qui s'écrit alors pour des petites déformations :

$$\sigma_{max} = \frac{(n+4)^2(1-4s^2)}{16(4-n^2s^2)} \Omega_\ell S. \tag{2.30}$$

Dans le cas où  $s = \frac{1}{2}$ , les tourbillons elliptiques sont stables quels que soient l'intensité de l'étirement, les triangulaires sont stables si  $S < \frac{1}{5}$ , les carrés sont toujours instables; et tous les autres sont stables si (2.29) est vérifié. En fait les tourbillons carrés sont toujours instables et quelle que soit finalement la stratification. De plus si  $s > \frac{1}{2}$ , on peut déduire de (2.27) que la résonance principale n'apparaît que si  $n \geq 4$  avec pour taux de croissance (2.30). Ce qui montre donc que les tourbillons multipolaires tels que  $n \geq 5$ , stables dans un fluide homogène (en accord avec 2.29), deviennent instables si la stratification est suffisamment forte ( $s > \frac{1}{2}$ ). A l'opposé, la résonance principale des tourbillons elliptiques et triangulaires est stabilisée par la stratification bien que des résonances d'ordres supérieurs croissent également si  $s > 1$ . Notons que ce mécanisme a été découvert par Miyazaki & Fukumoto (1992) dans le cas elliptique.

Finalement, si une rotation externe est rajoutée, c'est à dire si (2.28) correspond au mouvement stationnaire dans un repère tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_p$  par rapport au repère inertiel, les résultats asymptotiques peuvent être déduits de (2.21) et (2.30) en remplaçant  $f$  dans ces formules par  $f + 1 - 1/n$ . Ainsi quand  $n = 2$ , on retrouve les résultats trouvés par Miyazaki (1993); Kerswell (2002); Leblanc (2003) concernant la stabilité d'un tourbillon elliptique dans un fluide stratifié en rotation, alors que pour  $n \geq 3$ , on étend les résultats de Le Dizès (2000) pour un fluide stratifié.

## 2.9 Conclusion

Nous résumons dans un premier temps les principaux résultats de ce chapitre. Nous avons ainsi énoncé plusieurs critères exacts de stabilité d'une classe de solutions exactes de l'équation d'Euler (2.2) découverte par Abrashkin–Yakubovich. Nous avons ainsi étendu le critère d'instabilité de la houle de Gerstner découvert précédemment.

La suite du chapitre s'est principalement axée sur la famille de tourbillons non uniformes évoluant dans un écoulement potentiel au repos à l'infini et décrite par  $Z(t, \xi, \bar{\xi}) = \xi e^{i\Omega_\ell t} + H(\bar{\xi})$ . On a ainsi montré que :

- (i) Tous ces tourbillons (sauf le tourbillon de Rankine) sont déstabilisés dans un fluide homogène par des perturbations tridimensionnelles de courtes longueurs d'onde. Les perturbations bidimensionnelles sont quant à elles toujours stables.
- (ii) Dans un repère tournant, les perturbations sont stabilisées pour des rotations anticycloniques ( $f \leq -\frac{3}{4}$ ) si (2.25) est vérifié partout dans le vortex. Cette conclusion étant identique dans un fluide stratifié en rotation si  $s < \frac{1}{2}$ .
- (iii) Si  $s = \frac{1}{2}$  et  $f = -\frac{1}{2}$ , aucune instabilité de courtes longueurs d'onde n'a été détectée.

Ces résultats, valides pour tous les membres de la famille de tourbillons, ont été appliqués en §2.8 dans le cas particulier des tourbillons multipolaires stationnaires (2.28), pour lesquels on a montré qu'ils pouvaient être entourés d'un champ d'étirement potentiel multipolaire. Nous avons trouvé, en particulier, que les tourbillons carrés sont toujours instables, que les tourbillons elliptiques et triangulaires sont instables si  $s < \frac{1}{2}$  et que les autres sont toujours stables si (2.29) est vérifié. Pour des fortes stratifications ( $s > \frac{1}{2}$ ), on montre que tous les tourbillons multipolaires tels que  $n \geq 4$  sont instables, alors que la résonance principale est stable pour les tourbillons elliptiques et triangulaires.

Finalement on donne une explication du mécanisme d'instabilité décrit dans ce chapitre. On rappelle alors que lorsque  $H(\bar{\xi}) = S\bar{\xi}$ , la solution d'Abrashkin–Yakubovich n'est autre qu'une ellipse de Kirchhoff. Ainsi, la vorticité et l'étirement sont constants à l'intérieure de l'ellipse, et l'étude de stabilité locale est mathématiquement équivalente à l'étude de stabilité d'un écoulement non borné dont les lignes de courant sont elliptiques dans un repère tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_\ell/2$ . On peut, en fait, généraliser cette analogie avec l'instabilité elliptique pour tous les tourbillons décrits avec une fonction  $H(\bar{\xi})$  quelconque, bien que la vorticité et l'étirement ne soient plus localement constants dans le vortex. En effet, le gradient de vitesse local d'une particule fluide peut être calculé explicitement. En le séparant en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique, on obtient (dans le cas sans rotation) :

$$L(t; \xi, \bar{\xi}) = \frac{\Omega_\ell \delta}{1 - \delta^2} \begin{pmatrix} \sin(\Omega_\ell t + \gamma) & -\cos(\Omega_\ell t + \gamma) \\ -\cos(\Omega_\ell t + \gamma) & -\sin(\Omega_\ell t + \gamma) \end{pmatrix} + \frac{\Omega_\ell}{1 - \delta^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $\delta$  et  $\gamma$  sont respectivement le module et l'argument de  $H'(\bar{\xi})$ , différant d'une trajectoire à l'autre. La partie symétrique montre ainsi que chaque particule fluide subit un étirement local tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_\ell/2$ .

Cependant, l'analyse de stabilité locale prend en compte chaque trajectoire comme étant indépendante des autres, ce qui entraîne que la stabilité de chaque trajectoire de la solution d'Abrashkin & Yakubovich est en fait équivalente à l'analyse de stabilité d'un écoulement elliptique tournant de rapport d'aspect  $(1 + \delta)/(1 - \delta)$ . Ainsi, l'instabilité elliptique est le mécanisme de déstabilisation des tourbillons d'Abrashkin–Yakubovich bien que leurs formes ne soient pas des ellipses, ce qui illustre finalement bien le caractère universel de ce mécanisme.

## 2.10 Annexe A : Démonstration du critère d'instabilité

On démontre que la solution (2.2) est instable si l'inégalité (2.22) est vérifiée. On suppose alors que le vecteur d'onde des perturbations est orthogonal au plan de l'écoulement ( $\mathbf{k}_h = 0$ ), ce qui entraîne que l'équation (2.9b) se réduit à  $\dot{\mathbf{v}} = -L\mathbf{v}$ .

La matrice Jacobienne complexe  $F_c = \partial(Z, \bar{Z})/\partial(\xi, \bar{\xi})$  s'écrit alors :

$$F_c(t) = \begin{pmatrix} G'e^{i(\Omega_1+\Omega_2)t} & H'e^{i(\Omega_1-\Omega_2)t} \\ \overline{H'}e^{-i(\Omega_1-\Omega_2)t} & \overline{G'}e^{-i(\Omega_1+\Omega_2)t} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

où par souci de clarté :  $\overline{G'} = \overline{G'(\xi)}$  et  $\overline{H'} = \overline{H'(\xi)}$ . Rappelons que  $F_c(t)$  et  $F_h(t)$  sont reliés simplement par la relation (2.11), et que  $L(t)$  et  $F(t)$  sont quant à eux reliées par  $\dot{F} = LF$ , ce qui entraîne que la matrice gradient de vitesse complexe définie par  $L_c = TL_h T^{-1}$  est elle même reliée à  $F_c$  par :

$$\dot{F}_c = L_c F_c. \quad (2.32)$$

Si par ailleurs on introduit la vitesse complexe  $\mathbf{v}_c = T\mathbf{v}_h$  reliée à la composante horizontale de la perturbation de vitesse  $\mathbf{v}_h(t)$ , on remarque alors que pour des vecteurs d'onde verticaux  $\mathbf{v}_c(t)$  est solution de :

$$\dot{\mathbf{v}}_c = -L_c \mathbf{v}_c. \quad (2.33)$$

Ainsi, à partir de (2.31) et (2.32), on peut calculer explicitement  $L_c(t)$  qui devient :

$$L_c(t) = \frac{i}{J} \begin{pmatrix} \Omega_2 I + \Omega_1 J & -2\Omega_2 G' H' e^{2i\Omega_1 t} \\ 2\Omega_2 \overline{G' H'} e^{-2i\Omega_1 t} & -\Omega_2 I - \Omega_1 J \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

où  $I = |G'|^2 + |H'|^2$  et  $J = |G'|^2 - |H'|^2$ . Bien que le système (2.33) fasse intervenir la matrice (2.34) dont les coefficients sont périodiques, on peut le transformer en un système d'équations différentielles à coefficients constants en introduisant les matrices suivantes :

$$R = \begin{pmatrix} i\Omega_1 & 0 \\ 0 & -i\Omega_1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P(t) = e^{tR} = \begin{pmatrix} e^{i\Omega_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\Omega_1 t} \end{pmatrix}.$$

En remarquant que  $\dot{P} = RP$  et  $P^{-1}RP = R$ , on montre, à partir de (2.33), que la nouvelle variable  $\mathbf{w} = P^{-1}\mathbf{v}_c$  est solution de  $\dot{\mathbf{w}} = -M\mathbf{w}$  où  $M = P^{-1}L_c P + R$ . Un calcul direct donne :

$$M = \frac{i}{J} \begin{pmatrix} \Omega_2 I + 2\Omega_1 J & -2\Omega_2 G' H' \\ 2\Omega_2 \overline{G' H'} & -\Omega_2 I - 2\Omega_1 J \end{pmatrix},$$

qui est indépendante du temps. De plus les valeurs propres de  $M$  sont solutions de  $\sigma^2 = -4\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - 4\Omega_1\Omega_2 I/J$ . Les perturbations croîtront donc exponentiellement si  $\sigma^2 > 0$  et l'écoulement défini par (2.2) sera donc instable si il existe un point  $(\xi, \bar{\xi})$  dans le plan Lagrangien où l'inégalité (2.22) est vérifiée.

## 2.11 Annexe B : Dérivation de l'équation de Hill

Les équations décrivant le mouvement d'un fluide stratifié non visqueux sont les équations d'Euler sous l'approximation de Boussinesq et d'après (LeBlond & Mysak, 1978, Chap. 1.5) s'écrivent :

$$D\mathbf{u}/Dt + \nabla\varpi = -b\mathbf{e}_z, \quad Db/Dt = N^2\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_z, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0,$$

où  $b(\mathbf{x}, t)$  est le champs de flottabilité et  $N$  la fréquence de Brunt–Väisälä. La stratification est supposée stable et uniforme ( $N$  est donc une constante réelle).

Posons  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  et  $B(\mathbf{x}, t)$ , les champs de vitesse et de flottabilité d'une solution exacte des équations d'Euler sous l'approximation de Boussinesq. Afin d'étudier la stabilité d'un tel écoulement soumis à des perturbations initialement localisées, on linéarise ces équations autour de cet écoulement de base en y injectant des perturbations de la forme :  $(\mathbf{u}, \varpi, b) = (\mathbf{v}, 0, \varrho)e^{i\phi/\epsilon} + O(\epsilon)$ , où  $0 < \epsilon \ll 1$ . En utilisant le formalisme asymptotique décrit par Lifschitz & Hameiri (1991), on peut montrer que le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = \nabla\phi$  est toujours solution de (2.9a), et que les amplitudes des champs de vitesse et de flottabilité des perturbations  $(\mathbf{v}, \varrho)$  sont solutions de (voir aussi Friedlander, 2001) :

$$\dot{\mathbf{v}} = (2\mathbf{k}\mathbf{k}^T/|\mathbf{k}|^2 - I)L\mathbf{v} + (\mathbf{k}\mathbf{k}^T/|\mathbf{k}|^2 - I)\varrho\mathbf{e}_z, \quad \dot{\varrho} = (N^2\mathbf{e}_z - \nabla B)\cdot\mathbf{v}. \quad (2.35a, b)$$

De plus toute solution bidimensionnelle (dans le plan perpendiculaire à la stratification) des équations d'Euler est aussi solution des équations d'Euler sous l'approximation de Boussinesq. Les solutions (2.3) et (2.18) peuvent ainsi représenter des tourbillons colonnes évoluant dans un milieu stablement stratifié. On montre alors comment les équations de transport (2.35) se réduisent à une équation différentielle ordinaire du second ordre de la forme (2.26). Cette démonstration utilise le même formalisme que celui utilisé par Bayly *et al.* (1996) dans le cas homogène.

En présence de stratification, l'équation de Lifschitz (2.12) s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = L\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k})\boldsymbol{\Gamma}\cdot\mathbf{k}/|\mathbf{k}|^2 + \varrho\mathbf{e}_z \times \mathbf{k}, \quad (2.36)$$

où  $\boldsymbol{\Gamma}$  est la vorticité absolue de l'écoulement de base. On remarque au passage que les trajectoires irrotationnelles peuvent être instables dues à la stratification. En projetant sur la verticale (2.35b) avec  $B = 0$  et (2.36), on obtient :

$$\dot{\varrho} = N^2v_z, \quad \dot{\omega}_z = \Gamma k_z v_z, \quad (2.37)$$

où les contributions verticales sont représentées par l'indice  $z$ . En conséquence,  $\Gamma k_z \varrho - N^2 \omega_z$  est un invariant Lagrangien. Cette propriété peut aussi bien être prouvée en utilisant la conservation de la vorticité potentielle. Ainsi si une trajectoire est instable, l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\Gamma k_z \varrho = N^2 \omega_z. \quad (2.38)$$

En effet,  $\Gamma$  et  $k_z$  sont constants le long des trajectoires de l'écoulement de base ; par conséquent, si  $\varrho$  et  $\omega_z$  croissent exponentiellement lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , ils doivent donc s'annuler lorsque  $t \rightarrow -\infty$ .

Par ailleurs, on peut montrer à partir de (2.35a) et de la condition d'incompressibilité  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$  que la composante verticale de la perturbation de vitesse est solution de :

$$\dot{v}_z = -2k_z^2 \frac{\mathbf{k}_h^T L \mathbf{k}_h}{|\mathbf{k}_h|^2 |\mathbf{k}|^2} v_z - 2k_z \frac{\mathbf{k}_h^T H \mathbf{k}_h}{|\mathbf{k}_h|^2 |\mathbf{k}|^2} \omega_z - \frac{|\mathbf{k}_h|^2}{|\mathbf{k}|^2} \varrho, \quad H = L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Ainsi le problème de stabilité locale est maintenant réduit à un système de trois équations différentielles (2.37) et (2.39) pour les variables  $(\varrho, \omega_z, v_z)$ .

On peut enfin éliminer une de ces variables en utilisant (2.38). Ainsi en suivant Bayly *et al.* (1996), on introduit :

$$p = -k_z v_z |\mathbf{k}| / |\mathbf{k}_h| \quad \text{and} \quad q = \omega_z |\mathbf{k}| / |\mathbf{k}_h|.$$

Et après quelques calculs, bien lourds, on peut réduire le système d'équation à :

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{K} & D \\ -\Gamma & -\dot{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

où  $\Gamma$  est la vorticité absolue et

$$K = \ln \frac{|\mathbf{k}_h|}{|\mathbf{k}|}, \quad D = 2k_z^2 \frac{\mathbf{k}_h^T H \mathbf{k}_h}{|\mathbf{k}_h|^2 |\mathbf{k}|^2} + \frac{N^2 |\mathbf{k}_h|^2}{\Gamma |\mathbf{k}|^2}.$$

Donc, comme  $\dot{\Gamma} = 0$ , le système se réduit finalement à  $\ddot{q} + (\dot{K} - \dot{K}^2 + \Gamma D)q = 0$  qui après quelques manipulations donne le résultat escompté (2.26).

## 2.12 Annexe C : Tourbillons stationnaires dans un champ d'étirement

On montre dans cette annexe que les tourbillons décrits par (2.28) sont stationnaires et peuvent être construits entourés d'un écoulement potentiel stationnaire qui à l'infini se comporte comme un champ d'étirement multipolaire. De par (2.28) avec  $|\xi| \leq 1$ , la position  $Z(t, \xi, \bar{\xi})$  et la vitesse complexe  $W(t; \xi, \bar{\xi}) = \partial_t \bar{Z}$  d'une particule fluide à l'intérieur du vortex peuvent s'écrire :

$$Z(\beta, \bar{\beta}) = \beta + S\bar{\beta}^{n-1}/(n-1), \quad W(\beta, \bar{\beta}) = -i\Omega_\ell(\bar{\beta} - S\beta^{n-1})/n, \quad (2.40a, b)$$

où  $\beta = \xi e^{i\Omega_\ell t/n}$ . Si on choisit le paramètre complexe  $\beta$  à l'intérieur du disque unité, tel que  $|\beta| \leq 1$ , et la coordonnée complexe  $z = x + iy$  reliée à  $\beta$  par

$$z = \beta + S\bar{\beta}^{n-1}/(n-1), \quad (2.41)$$

on a alors montré que (2.40b) et (2.41) fournissent une représentation implicite du champ Eulérien de la vitesse complexe :  $W(z, \bar{z}) = U - iV$ . Le temps n'étant plus une variable du problème, l'écoulement peut être considéré comme stationnaire.

Dans la région extérieure, le champ Eulérien de la vitesse complexe est représenté par :

$$W_{ext}(\eta) = -i\Omega_\ell(\eta^{-1} - S\eta^{n-1})/n \quad \text{where} \quad z = \eta + S\eta^{1-n}/(n-1) \quad \text{and} \quad |\eta| > 1. \quad (2.42)$$

Comme  $W_{ext}$  ne dépend implicitement que de  $z$  (et non de  $\bar{z}$  ou de  $t$ ), l'écoulement extérieur est alors potentiel et stationnaire. La continuité de la vitesse sur la frontière du vortex peut facilement être vérifiée à partir de (2.40) et de (2.42), car  $\beta$  et  $\eta$  peuvent s'écrire sous la forme  $e^{i\chi}$  ( $\chi \in [0, 2\pi]$ ) sur le cercle unité.

Loin du vortex ( $|z| \rightarrow \infty$ ), on obtient  $z \sim \eta$  et  $W_{ext} \sim -i\Omega_\ell/(nz) + i\Omega_\ell S z^{n-1}/n$ . Ce qui est la superposition d'un tourbillon ponctuel de circulation  $2\pi\Omega_\ell/n$  et d'un champ d'étirement multipolaire irrotationnel. Ainsi la solution exacte (2.28) généralise le tourbillon stationnaire de Moore–Saffman plongé dans un champ d'étirement.

Il est finalement intéressant de montrer que pour des faibles déformations, i.e.  $S \ll 1$ , cet écoulement est intimement lié aux tourbillons multipolaires décrits par Eloy & Le Dizès (2001). En effet, la relation (2.41) entre la coordonnée complexe  $z$  et le paramètre auxiliaire  $\beta$  peut être facilement inversée pour des faibles déformations. On obtient donc en première approximation  $\beta = z - S\bar{z}^{n-1}/(n-1)$ , ce qui nous permet d'obtenir la vitesse complexe (2.40b) qui s'écrit :

$$W(z, \bar{z}) = -i\Omega_\ell(\bar{z}/n - S z^{n-1}/(n-1)). \quad (2.43)$$

L'écoulement étant incompressible, il peut être caractérisé par une fonction de courant défini usuellement par la relation  $U = \partial_y \Psi$  et  $V = -\partial_x \Psi$ . En coordonnées complexes on montre facilement que ces relations s'écrivent  $\partial_z \Psi = -\frac{i}{2}W$  et  $\partial_{\bar{z}} \Psi = \frac{i}{2}\bar{W}$ . Après intégration, la fonction de courant reliée à (2.43) s'écrit alors :

$$\Psi(z, \bar{z}) = -\frac{\Omega_\ell}{2n} \left( |z|^2 - S \frac{z^n + \bar{z}^n}{n-1} \right) = -\frac{\Omega_\ell}{n} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{S r^n}{n-1} \cos n\theta \right) = \Psi(r, \theta), \quad (2.44)$$

avec  $z = r e^{i\theta}$ . C'est la solution discutée dans Le Dizès (2000).

On rappelle que (2.44) est aussi une solution exacte des équations d'Euler. Cependant, contrairement à (2.40), la vorticité de l'écoulement est constante ( $\Gamma = 2\Omega_\ell/n$ ) et on ne sait pas si l'écoulement (2.44) peut être construit à l'intérieur d'un écoulement potentiel soumis à un champ d'étirement quelque soit  $S$ . Lorsque  $S \ll 1$ , une telle construction est possible, comme l'ont mentionnée Eloy & Le Dizès (2001). Leurs résultats peuvent être directement retrouvés à partir de notre solution potentielle (2.42). En effet, au premier ordre en  $S$ , on obtient :  $\eta = z - S z^{1-n}/(n-1)$ . La fonction de courant extérieure peut alors être calculée, lorsque  $S \ll 1$ , et on obtient en accord avec Eloy & Le Dizès (2001) :

$$\Psi_{ext}(r, \theta) = -\frac{\Omega_\ell}{n} \left( \ln r - \frac{S}{n} \left( r^n + \frac{r^{-n}}{n-1} \right) \cos n\theta \right).$$

Remarquons finalement que dans le cas général d'un tourbillon évoluant dans un écoulement potentiel au repos à l'infini, la solution d'Abrashkin & Yakubovich (2.3) avec (2.7) peut être entièrement caractérisée, quand  $S \ll 1$ , par la fonction de courant suivante :

$$\Psi(r, \theta, t) = -\frac{\Omega_\ell}{n} \left( \frac{n r^2}{2} - \frac{S r^n}{n-1} \cos n(\theta - \Omega_n t) \right) \quad \text{avec} \quad \Omega_n = \Omega_\ell(1 - 1/n).$$

Ce qui correspond à un tourbillon de Rankine de vorticité  $2\Omega_\ell$  déstabilisé par des ondes de Kelvin possédant une symétrie d'ordre  $n$  et tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_n$  (Saffman, 1992, Chap. 9.4).





## Chapitre 3

# Stabilité linéaire d'un tourbillon elliptique confiné

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>Mise en place du problème</b>	<b>31</b>
3.2.1	Écoulement de base	31
3.2.2	Linéarisation	32
3.2.3	Méthode de résolution	33
<b>3.3</b>	<b>Problème non déformé</b>	<b>33</b>
3.3.1	Description des modes propres	33
3.3.2	Correction due à la viscosité	36
3.3.3	Bilan	42
<b>3.4</b>	<b>Résonance d'ondes gravito-inertielles</b>	<b>42</b>
3.4.1	Conditions de résonance	43
3.4.2	Taux de croissance non visqueux	43
3.4.3	Correction due à l'ellipticité	45
3.4.4	Expression générale du taux de croissance	47
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>

---

L'étude de stabilité linéaire d'un tourbillon elliptique confiné dans un milieu stratifié tournant est menée à terme dans ce chapitre. Nous voulons ainsi décrire la dynamique de perturbations tridimensionnelles ajoutées à un écoulement incompressible bidimensionnel défini comme étant la superposition d'une rotation solide et d'un champ d'étirement elliptique stationnaire. Le fluide sera compris dans un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $\tilde{H}$ , mis en rotation à la vitesse  $\Omega_c$  et stratifié linéairement en densité suivant la verticale, le tout étant placé sur une table tournant à la vitesse  $\Omega_t$ . Nous supposerons par ailleurs que l'écoulement est parfaitement établi dans toute la partie théorique. Nous nous affranchirons ainsi de tous problèmes liés au spin-up (phase de mise en rotation), problèmes sur lesquels nous reviendrons très largement dans la partie expérimentale (chapitre 4). Dans un premier temps, nous faisons le lien entre ce problème et le chapitre précédent dans une brève introduction. Puis nous décrivons rapidement l'écoulement de base de notre étude ainsi que l'étude

de stabilité linéaire effectuée dans le chapitre. Nous continuons notre étude par la description des modes propres (ondes gravito-inertielles) de l'écoulement de rotation solide d'un cylindre fini, puis nous caractérisons l'atténuation visqueuse surfacique et volumique de ces modes. Nous étudions ensuite la résonance de ces ondes lorsque le cylindre est faiblement déformé elliptiquement.

### 3.1 Introduction

Nous avons mis en évidence au chapitre précédent que le mécanisme de l'instabilité elliptique était générique pour de nombreux écoulements, et que stratification et rotation d'ensemble jouaient des rôles antagonistes. Par ailleurs l'analyse du chapitre précédent basé sur un formalisme courte longueur d'onde de type WKB ne permet pas d'obtenir la structure des modes instables. Afin de capter véritablement la physique de l'instabilité elliptique dans un milieu stratifié et soumis à la force de Coriolis, et de caractériser les effets visqueux et les effets dus au confinement sur l'instabilité, on effectue une analyse plus standard d'instabilité en modes propres sur un cas d'école : le tourbillon uniforme déformé elliptiquement.

D'après (2.44) avec  $n = 2$ , la fonction de courant associée à un tel tourbillon s'écrit :

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{\Omega_\ell r^2}{2} (1 - 2S \cos 2\theta). \quad (3.1)$$

En rappelant que  $s = N/\Omega_\ell$  et  $f = \Omega_p/\Omega_\ell$ , les conditions d'instabilités s'écrivent (d'après (2.27)) :

$$(s \leq \frac{1}{2} \text{ et } |1 + f| \geq \frac{1}{4}) \quad \text{ou} \quad (s \geq \frac{1}{2} \text{ et } |1 + f| \leq \frac{1}{4}). \quad (3.2)$$

Afin de faire le lien entre le chapitre précédent et l'étude d'un tourbillon uniforme (de taux de rotation constant  $\Omega_c$ ) soumis à un champ d'étirement elliptique stationnaire d'intensité  $\varepsilon$  dans un fluide stratifié en densité (de fréquence de Brünt-Väisälä constante  $N$ ), le tout tournant au taux de rotation  $\Omega_t$ , on pose :

$$\Omega_c = \frac{\Omega_\ell}{2}, \quad (3.3a)$$

$$\Omega_t = \Omega_p + \frac{\Omega_\ell}{2}, \quad (3.3b)$$

$$\varepsilon = 2S. \quad (3.3c)$$

En introduisant  $\Gamma_a = 2(\Omega_c + \Omega_t)/\Omega_c$  la vorticité absolue adimensionnée et  $N_b = N/\Omega_c$  la fréquence de Brünt-Väisälä adimensionnée, les conditions d'instabilités d'après (3.2) deviennent :

$$(N_b \leq 1 \text{ et } |\Gamma_a| \geq 1) \quad \text{ou} \quad (N_b \geq 1 \text{ et } |\Gamma_a| \leq 1). \quad (3.4)$$

Toutes les grandeurs utilisées par la suite seront sans dimensions : le rayon  $R$  du cylindre et  $\Omega_c^{-1}$  étant respectivement les échelles de longueur et de temps.

## 3.2 Mise en place du problème

### 3.2.1 Écoulement de base

Comme expliqué dans l'introduction l'écoulement de base de notre problème admet pour fonction de courant :

$$\Psi = -\frac{r^2}{2}(1 - \varepsilon \sin 2\theta). \quad (3.5)$$

Les lignes de courant associées à cette fonction de courant sont exactement des ellipses (voir figure 3.1).

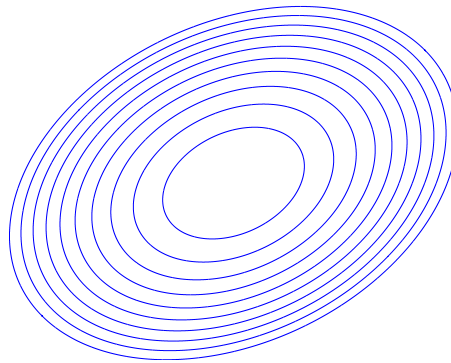


FIGURE 3.1 – Lignes de courant du tourbillon elliptique défini par la fonction de courant (3.5). La ligne de courant la plus excentrée correspond à  $\Psi = -\frac{1}{2}$  qui déterminera la frontière de notre écoulement caractérisée expérimentalement par un cylindre de rayon  $R$  déformé elliptiquement.

Nous supposons par ailleurs que le fluide est linéairement stratifié en densité suivant la verticale, le champ de flottabilité de base s'écrit alors :

$$B = 1 - N_b^2 z. \quad (3.6)$$

En injectant le champ de vitesse associé à la fonction de courant (3.5) et le champ de densité défini par (3.6) dans les équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq, on trouve ainsi le champ de pression associé à un tel écoulement. L'écoulement défini par :

$$\mathbf{U} = \nabla \wedge (\Psi \mathbf{e}_z) = r \mathbf{e}_\theta + \varepsilon r (\cos 2\theta \mathbf{e}_r - \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta), \quad (3.7a)$$

$$B = 1 - N_b^2 z, \quad (3.7b)$$

$$P = P_0 + \frac{N_b^2 z^2}{2} - z + \frac{r^2}{2} [\Gamma_a - 1 - \varepsilon^2 - \varepsilon(\Gamma_a - 2) \sin 2\theta], \quad (3.7c)$$

est alors une solution exacte des équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq. Ce sera pour la suite de l'étude notre écoulement de base.

### 3.2.2 Linéarisation

On linéarise les équations de Navier–Stokes sous l'approximation de Boussinesq autour de l'écoulement de base trouvé précédemment (3.7a-c). Les champs perturbés de vitesse, de densité et de pression seront décrits à partir de maintenant par le penta-vecteur suivant :

$$\mathbf{v}(r, \theta, z, t) = (u_r, u_\theta, u_z, u_b, u_p).$$

Les équations linéarisées peuvent s'écrire de manière compacte comme suit :

$$(\partial_t \mathcal{T} + \mathcal{M}) \mathbf{v} = \varepsilon \left( e^{2i\theta} \mathcal{N} + e^{2i\theta} \overline{\mathcal{N}} \right) \mathbf{v} + \nu \mathcal{L} \mathbf{v} \quad (3.8)$$

où

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \partial_\theta & -\Gamma_a & 0 & 0 & \partial_r \\ \Gamma_a & \partial_\theta & 0 & 0 & \partial_\theta/r \\ 0 & 0 & \partial_\theta & 1 & \partial_z \\ 0 & 0 & -N_b^2 & \partial_\theta & 0 \\ \partial_r + 1/r & \partial_\theta/r & \partial_z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(D+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2i & -D+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \Delta - 1/r^2 & -2\partial_\theta/r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2\partial_\theta/r^2 & \Delta - 1/r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

avec

$$D = r\partial_r + i\partial_\theta,$$

et

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Remarquons que cette version compacte des équations linéarisées, apparaissant initialement dans les travaux de Moore & Saffman (1975), est particulièrement élégante comparée à celle utilisée par Tsai & Widnall (1976). Cependant, nous ne reprenons pas les notations de Moore & Saffman (1975), mais nous avons préféré utiliser les notations de Eloy (2000) bien que dans notre cas les opérateurs soient des matrices 5x5, la prise en compte de la stratification dans le problème rajoutant une inconnue supplémentaire.

### 3.2.3 Méthode de résolution

Nous utilisons ici une décomposition en modes normaux classique afin d'étudier la stabilité linéaire du vortex. On utilise une approche perturbative traditionnelle en puissance de  $\varepsilon$  du type :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1) e^{i\omega t} + O(\varepsilon^2)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2).$$

On injecte ces perturbations, par exemple dans (3.8) avec  $\nu = 0$ , et on obtient le système d'équations suivant :

$$(i\omega_0 \mathcal{T} + \mathcal{M}) \mathbf{v}_0 = 0, \quad (3.13a)$$

$$(i\omega_0 \mathcal{T} + \mathcal{M}) \mathbf{v}_1 = -i\omega_1 \mathcal{T} \mathbf{v}_0 + e^{2i\theta} \mathcal{N} \mathbf{v}_0 + e^{-2i\theta} \overline{\mathcal{N}} \mathbf{v}_0. \quad (3.13b)$$

La résolution du problème (3.13a) nous permet de trouver les modes propres d'oscillation du tourbillon non perturbé. Ces modes propres possèdent une fréquence d'oscillation propre  $\omega_0$  réelle. Dans un deuxième temps on cherche à résoudre le problème (3.13b). L'idée la plus naturelle pour résoudre un tel système serait d'inverser l'opérateur  $i\omega_0 \mathcal{T} + \mathcal{M}$ , mais d'après la résolution à l'ordre 0 cet opérateur n'est pas inversible. Fort heureusement, une alternative à la résolution de ce problème dite "alternative de Fredholm" s'offre à nous. Dès lors, pour que le système d'équations (3.13b) soit soluble, il est nécessaire que le membre de droite de (3.13b) appartienne à l'image de l'opérateur  $i\omega_0 \mathcal{T} + \mathcal{M}$ . Cette condition nécessaire est appelée condition de solvabilité et permettra de calculer explicitement  $\omega_1$ . Or il n'est pas forcément aisé de trouver les éléments de l'image d'un opérateur quelconque, nous utilisons donc une propriété intéressante des opérateurs compacts qui veut que l'image d'un opérateur soit égale à l'orthogonal du noyau de l'opérateur adjoint. L'obtention de  $\omega_1$  se fera donc simplement en faisant le produit scalaire d'un élément du noyau de l'opérateur adjoint avec (3.13b).

## 3.3 Problème non déformé

Nous nous intéresserons à la description du problème non déformé  $\varepsilon = 0$ . Nous décrirons dans un premier temps les ondes d'inertie gravité solutions du problème non visqueux  $\nu = 0$ . Puis nous calculerons l'atténuation visqueuse de ces modes à l'aide d'un formalisme classique développé par Kudlick (1966) et Greenspan (1968).

### 3.3.1 Description des modes propres

Les modes propres de l'écoulement complet sont les solutions du problème non visqueux ( $\nu \rightarrow 0$ ) et non perturbé ( $\varepsilon = 0$ ). L'écoulement de base étant périodique suivant  $\theta$  et stationnaire, on peut décomposer notre solution en série de Fourier de la manière suivante :

$$\mathbf{v}_0(r, \theta, z, t) = \sum_m A_m \mathbf{V}_m(r, z) e^{i(m\theta + \omega t)} \quad (3.14)$$

où  $m(\in \mathbb{Z})$  et  $\omega(m, k)$  représentent respectivement le nombre d'onde azimuthal, le nombre d'onde axial et la pulsation associés au mode propre  $\mathbf{V}_m = (V_r, V_\theta, V_z, V_b, V_p)_m$  d'amplitude  $A_m$ . Le problème (3.8) se réduit donc pour un mode propre  $(k, m, \omega)$  à :

$$(i\omega\mathcal{T} + \mathcal{M}_m)\mathbf{V}_m = 0 \quad (3.15)$$

où  $\mathcal{M}_m = (\mathcal{M}e^{im\theta})e^{-im\theta}$  couplé des conditions aux limites non visqueuses :

$$V_r = 0 \text{ en } r = 1, \quad (3.16a)$$

$$V_z = 0 \text{ en } z = 0, H. \quad (3.16b)$$

On obtient ainsi à l'aide de ce système d'équation (3.15) une équation de Bessel de première espèce pour la pression :

$$\frac{\partial^2 V_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_p}{\partial r} + \left( -\frac{\Gamma_a^2 - \lambda_m^2}{\lambda_m^2 - N_b^2} \frac{\partial^2 V_p}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} V_p \right) = 0 \quad (3.17)$$

où  $\lambda = m + \omega$ .

On recherche à présent une solution à variables séparées de (3.17) sous la forme :

$$V_p(r, z) = f(r)g(z). \quad (3.18)$$

En injectant (3.18) dans (3.17) et en utilisant les conditions aux limites pour la vitesse en  $z = 0$  et  $z = H$ , on obtient la solution suivante :

$$V_p(r, z) = (\Gamma_a^2 - \lambda^2) J_m(\alpha r) \cos kz \quad (3.19)$$

où  $J_m$  et  $k = q\pi/H$  ( $q$  étant un entier) représentent respectivement la fonction de Bessel de première espèce et le nombre axial relié au nombre radial  $\alpha$  par :

$$\alpha^2 = k^2 \frac{\Gamma_a^2 - \lambda^2}{\lambda^2 - N_b^2}. \quad (3.20)$$

Finalement, la solution du système (3.15) s'écrit :

$$\mathbf{V}_m(r, z) = \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha}{2} [(\Gamma_a + \lambda)J_{m-1}(\alpha r) + (\Gamma_a - \lambda)J_{m+1}(\alpha r)] \cos kz \\ \frac{\alpha}{2} [(\Gamma_a + \lambda)J_{m-1}(\alpha r) - (\Gamma_a - \lambda)J_{m+1}(\alpha r)] \cos kz \\ -\frac{i\alpha^2 \lambda}{k} J_m(\alpha r) \sin kz \\ \frac{-\alpha^2 N_b^2}{k} J_m(\alpha r) \sin kz \\ (\Gamma_a^2 - \lambda^2) J_m(\alpha r) \cos kz \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

De plus, la relation de dispersion de ces ondes s'obtient à l'aide de la condition d'imperméabilité en  $r = 1$ , soit :

$$V_r|_{r=1} = 0 \Leftrightarrow (\Gamma_a + \lambda)J_{m-1}(\alpha) + (\Gamma_a - \lambda)J_{m+1}(\alpha) = 0. \quad (3.22)$$

Cette équation implicite en  $\alpha$  doit être couplée à (3.20) que l'on réécrit de la manière suivante :

$$\lambda^2 = \Gamma_a^2 \frac{k^2}{k^2 + \alpha^2} + N_b^2 \frac{\alpha^2}{k^2 + \alpha^2}. \quad (3.23)$$

C'est la relation de dispersion des ondes d'inertie gravité. Notons par ailleurs que l'existence d'ondes dans le fluide est intimement liée au caractère hyperbolique de l'équation pour la pression (3.17). Cette condition n'étant vérifiée que si  $\alpha^2 > 0$ , on peut en déduire que la pulsation  $\lambda = m + \omega$  de l'onde doit vérifiée :

$$\min(N_b, |\Gamma_a|) < |\lambda| < \max(N_b, |\Gamma_a|).$$

Par ailleurs cette équation admet une infinité de solutions pour  $\alpha$ , la relation de dispersion possède donc une infinité de branches. Toutes ces branches possèdent les mêmes limites, ainsi :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lambda^\pm = \pm N_b \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^\pm = \pm \Gamma_a. \quad (3.24)$$

Les relations de dispersion sont représentées sur les figures 3.2 et 3.3 ci-dessous.

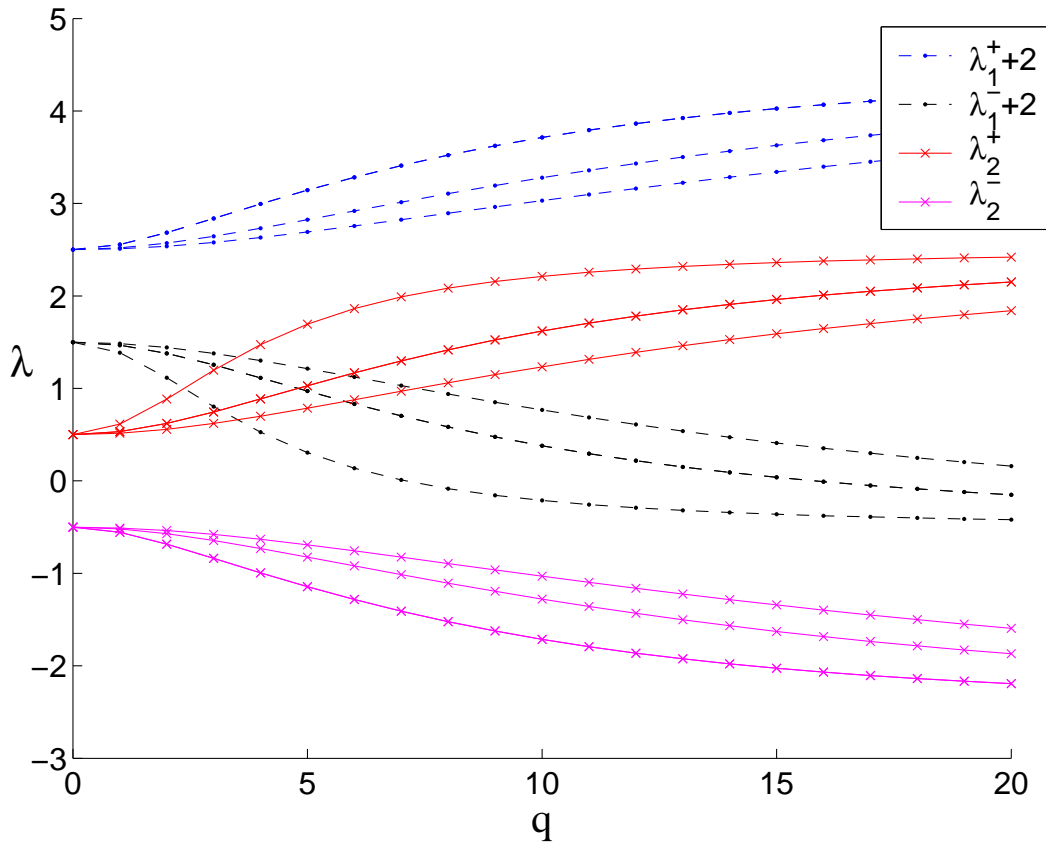


FIGURE 3.2 – Relation de dispersion pour les modes  $m = -1$  (label 1) et  $m = 1$  (label 2) pour les trois premiers nombres d'onde radiaux, i.e. les trois premiers zéros de (3.22). On a tracé la pulsation  $\lambda$  (pulsation de l'onde dans un repère en rotation avec le fluide) en fonction du nombre de demi longueur d'onde  $q$  pour un cylindre de rayon  $R = 2.75$  cm et de hauteur  $H = 19$  cm. La relation de dispersion a été tracée pour  $N_b = 0.5$  et  $\Gamma_a = 2.5$ .



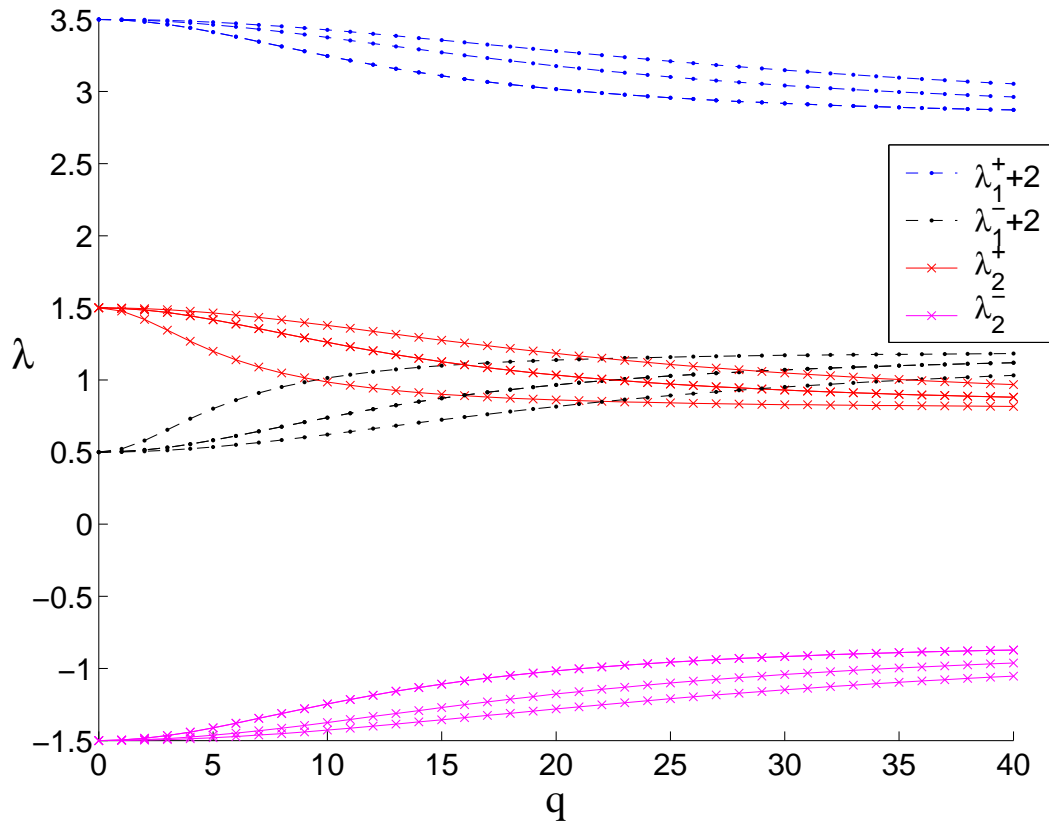


FIGURE 3.3 – Même figure que 3.2 pour  $N_b = 1.5$  et  $\Gamma_a = 0.8$ .

### 3.3.2 Correction due à la viscosité

Les effets visqueux sont de deux natures :

- Les premiers appelés surfaciques prennent en compte le caractère visqueux du fluide au niveau des parois du cylindre et sont supposés être localisés dans une couche d'épaisseur  $O(\sqrt{\nu})$  au niveau des parois. Ils seront d'ordre  $O(\sqrt{\nu})$ .
- Les deuxièmes appelés volumiques prennent en compte le caractère visqueux du fluide dans tout le fluide et sont d'ordre  $O(\nu)$ .

On traitera ces effets séparément.

#### Atténuation surfacique

Nous avons jusqu'à présent considéré que le fluide était non visqueux, nous avons obtenu ainsi la relation de dispersion en appliquant une condition d'imperméabilité sur la surface radiale en  $r = 1$ . Mais l'écoulement de base ne vérifie pas la condition d'adhérence sur les parois. Ainsi, un écoulement tangent subsiste sur les parois du cylindre. On peut résoudre ce problème en supposant que des couches limites visqueuses d'épaisseur  $O(\sqrt{\nu})$  existent proche des parois du cylindre dans lesquelles les effets visqueux sont équilibrés par le gradient de pression. Il s'en suit qu'un écoulement normal à la paroi d'ordre  $O(\sqrt{\nu})$  est généré. Le lecteur pourra se référer

aux travaux de Kudlick (1966) et Greenspan (1968) pour les calculs de l'atténuation d'un mode de Kelvin dans le cas d'un cylindre de hauteur finie. Nous utilisons dans la suite, le même formalisme que celui développé par Kudlick (1966), étendu ici au cas plus général d'un fluide stratifié en rotation.

Nous introduisons une variable  $\xi$  (intérieure à la couche limite) :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}). \quad (3.25)$$

$\xi = 0$  correspond donc à la surface du cylindre  $\Sigma$  ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ) de normale  $\mathbf{n}$  alors que  $\xi \rightarrow \infty$  correspond au coeur du cylindre.

Une difficulté intervenant dans le calcul de l'atténuation visqueuses des ondes de Kelvin dans un cylindre vient du fait que sa surface n'est pas continue. En effet la présence de coins rend le calcul a priori impossible d'où l'idée de supposer que les couches limites sont continues et que leur rayon de courbure au niveau des coins est suffisamment grand (voir Figure 3.4).

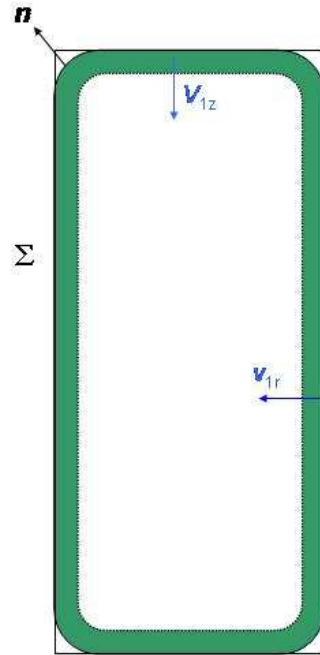


FIGURE 3.4 – Couche limite surfacique visqueuse en vert du cylindre de normale  $\mathbf{n}$ . Le cylindre est supposé arrondi aux coins afin que la normale  $\mathbf{n}$  de  $\Sigma$  soit continue sur le cylindre. La présence des couches limites visqueuses modifie l'écoulement non visqueux en induisant une vitesse de pompage d'ordre  $O(\sqrt{\nu})$  orthogonale à la couche limite ( $v_{1r}$  et  $v_{1z}$ ).

Cette hypothèse permet de rendre compte partiellement de l'effet des coins sur l'atténuation visqueuse des modes propres. Kerswell & Barenghi (1995), dans le cas

d'un fluide en rotation, montrent ainsi qu'en faisant cette hypothèse l'atténuation visqueuse est plus réaliste. On peut ainsi en déduire que les gradients à l'intérieur de la couche limite sont beaucoup plus forts dans la direction normale, suivant  $\mathbf{n}$ . D'où :

$$\nabla = -\frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{n}) \simeq -\frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{n} + O(1). \quad (3.26)$$

Afin de prendre en compte les effets visqueux dus au confinement, on introduit le produit scalaire suivant :

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^1 (\bar{X}_r Y_r + \bar{X}_\theta Y_\theta + \bar{X}_z Y_z + \frac{\bar{X}_b Y_b}{N_b^2} + \bar{X}_p Y_p) r dr dz d\theta. \quad (3.27)$$

On développe les perturbations du champ de vitesse, de flottabilité et de pression en puissance de  $\sqrt{\nu}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}_0 + \sqrt{\nu}(\mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_1)) e^{im\theta + \omega t} + O(\nu), \\ b &= (b_0 + \tilde{b}_0 + \sqrt{\nu}(b_1 + \tilde{b}_1)) e^{im\theta + \omega t} + O(\nu), \\ p &= (p_0 + \tilde{p}_0 + \sqrt{\nu}(p_1 + \tilde{p}_1)) e^{im\theta + \omega t} + O(\nu), \end{aligned}$$

où les tildes font appel à des fonctions définies dans la couche limite et  $\omega = i\omega_0 + \sqrt{\nu}s_{vs}$ . On notera  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, b, p)$  le penta-vecteur. En injectant ces développements dans (3.8) avec  $\varepsilon = 0$ , on obtient :

– à l'ordre  $O(1)$  à l'extérieur de la couche limite :

$$[i\omega_0 \mathcal{T} + \mathcal{M}] \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (3.28b)$$

– à l'ordre  $O(\sqrt{\nu})$  à l'extérieur de la couche limite :

$$[i\omega_0 \mathcal{T} + \mathcal{M}] \mathbf{v}_1 = -s_{vs} \mathcal{T} \mathbf{v}_0, \quad (3.29)$$

– à l'ordre  $O(1/\sqrt{\nu})$  à l'intérieur de la couche limite :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{p}_0 = 0 \implies \tilde{p}_0 = 0, \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0) = 0 \implies \tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.30b)$$

– à l'ordre  $O(1)$  à l'intérieur de la couche limite :

$$\left( i\lambda - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \tilde{\mathbf{u}}_0 + \Gamma_a \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{p}_1 + \tilde{b}_0 \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (3.31a)$$

$$i\lambda \tilde{b}_0 = N_b^2 \tilde{w}_0, \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1) = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \nabla) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{n} \cdot \nabla \wedge (\mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_0), \quad (3.31c)$$

$$\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (3.31d)$$

La solution du problème extérieur à l'ordre  $O(1)$  est la solution du problème non visqueux confiné (3.21). Par ailleurs l'expression (3.31c) montre clairement que le fait de corriger la solution du problème non visqueux fait apparaître un terme de pompage à l'ordre  $O(\sqrt{\nu})$  dans la couche limite. Afin de corriger cet écart on impose alors à la solution du problème extérieur à la couche limite de vérifier :

$$(\mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.32)$$

La condition de solvabilité appliquée au problème extérieur à l'ordre  $O(\sqrt{\nu})$  devient :

$$s_{vs} = - \frac{\int_{\Sigma} p_0^* \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} d\Sigma}{\langle \mathbf{v}_0^* | \mathcal{T} \mathbf{v}_0 \rangle} \quad (3.33)$$

où  $S$  est la surface du cylindre de normale  $\mathbf{n}$ .

On montre alors en utilisant les différentes conditions aux limites des problèmes précédents que :

$$\int_{\Sigma} p_0^* \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} d\Sigma = - \int_{\Sigma} p_0^* \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (3.34)$$

$$= \int_{\Sigma} p_0^* d\Sigma \int_0^{\infty} \mathbf{n} \cdot \nabla \wedge (\mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_0) d\xi \quad (3.35)$$

$$= - \int_{\Sigma} \nabla p_0^* d\Sigma \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{u}}_0 d\xi + \int_{\Sigma} \int_0^{\infty} \nabla \wedge (p_0^* \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (3.36)$$

$$= - \int_{\Sigma} \nabla p_0^* d\Sigma \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{u}}_0 d\xi \quad (3.37)$$

où l'on a utilisé les relations (3.32) et (3.31c). La dernière intégrale étant obtenue en appliquant le théorème de la divergence. Dans le cas non stratifié le résultat de Wedemeyer (1966) est obtenu avec (3.35) alors que l'estimation de Kudlick (1966) est obtenue à l'aide de (3.37). Kerswell & Barenghi (1995) ont comparé ces deux formulations avec un calcul numérique dans le cas particulier où  $N_b = 0$  et  $\Gamma_a = 2$ . Ils concluent que l'estimation de Kudlick est plus pertinente et toujours supérieure à celle de Wedemeyer. Bien que les deux estimations ne prennent à aucun moment en compte la présence de coins sur la surface du cylindre, l'hypothèse de surface continue évoquée plus haut en surestimant la valeur de l'amortissement visqueux permet donc de rendre compte indirectement des coins.

Ainsi pour calculer l'amortissement visqueux, nous devons simplement d'après (3.33) et (3.37) calculer  $\tilde{\mathbf{u}}_0$ . En projetant l'équation (3.30a) sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{n}$  on obtient l'équation différentielle suivante pour  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - i\lambda \right) \tilde{\mathbf{u}}_0 = \Gamma_a (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_0) - i \frac{N_b^2}{\lambda} (\tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{k}) \mathbf{n} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{n}), \quad (3.38a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.38b)$$

La surface du cylindre peut être décomposée en trois surfaces. On notera ainsi :

$$s_{vs} = s_{vs|r=1} + s_{vs|z=0} + s_{vs|z=H}. \quad (3.39)$$

Les contributions des surfaces  $z = 0$  et  $z = H$  étant identiques on limitera notre étude à la surface  $z = H$  et on remarquera que  $s_{vs}|_{z=0} = s_{vs}|_{z=H}$ .

Sur la surface radiale  $r = 1$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  et la variable intérieure s'écrit donc  $\xi = \frac{1-r}{\sqrt{\nu}}$ . Le problème (3.38) se réduit donc à :

$$\tilde{v}_{0r} = 0, \quad (3.40a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - i\lambda \right) \tilde{v}_{0\theta} = 0, \quad (3.40b)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - i\beta \right) \tilde{v}_{0z} = 0, \quad (3.40c)$$

avec  $\beta = (\lambda^2 - N_b^2)/\lambda$ , les solutions de ce système d'équations sont :

$$\tilde{v}_{0r} = 0, \quad (3.41a)$$

$$\tilde{v}_{0\theta} = -V_\theta e^{-\xi\sqrt{i\lambda}}, \quad (3.41b)$$

$$\tilde{v}_{0z} = -V_z e^{-\xi\sqrt{i\beta}}. \quad (3.41c)$$

Ainsi en utilisant l'expression d'un mode propre  $(k, m, \omega)$ ,  $s_{vs}|_{r=1}$  s'écrit simplement :

$$s_{vs}|_{r=1} = -G \left[ m^2 \sqrt{|\lambda|} (1 + i \operatorname{sgn}(\lambda)) + \frac{k^2 \lambda^2}{\beta^2} \sqrt{|\beta|} (1 + i \operatorname{sgn}(\beta)) \right] \quad (3.42)$$

avec

$$G = \frac{(\Gamma_a^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - N_b^2)}{\sqrt{2}\lambda^2(\Gamma_a^2 - N_b^2) \left( B - \frac{m\Gamma_a(\lambda^2 - N_b^2)}{\lambda(\Gamma_a^2 - N_b^2)} \right)} \quad (3.43)$$

et

$$B = m^2 + \frac{k^2 \lambda^2}{\lambda^2 - N_b^2}. \quad (3.44)$$

Sur la surface  $z = H$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  et la variable intérieure s'écrit donc  $\xi = \frac{H-z}{\sqrt{\nu}}$ . Le problème (3.38) se réduit donc à :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - i\lambda \right) \tilde{v}_{0r} = -\Gamma_a \tilde{v}_{0\theta}, \quad (3.45a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - i\lambda \right) \tilde{v}_{0\theta} = \Gamma_a \tilde{v}_{0r}, \quad (3.45b)$$

$$\tilde{v}_{0z} = 0. \quad (3.45c)$$

Les solutions de ce système d'équations sont :

$$\tilde{v}_{0r} = -\frac{V_r + iV_\theta}{2} e^{-\xi\sqrt{i(\lambda+\Gamma_a)}} - \frac{V_r - iV_\theta}{2} e^{-\xi\sqrt{i(\lambda-\Gamma_a)}}, \quad (3.46a)$$

$$\tilde{v}_{0\theta} = i\frac{V_r + iV_\theta}{2} e^{-\xi\sqrt{i(\lambda+\Gamma_a)}} - i\frac{V_r - iV_\theta}{2} e^{-\xi\sqrt{i(\lambda-\Gamma_a)}}, \quad (3.46b)$$

$$\tilde{v}_{0z} = 0. \quad (3.46c)$$

Ainsi en utilisant l'expression d'un mode propre  $(k, m, \omega)$ ,  $s_{vs}|_{z=H}$  s'écrit simplement :

$$s_{vs}|_{z=H} = -\frac{G}{2H} \left[ (1 + i\operatorname{sgn}(x)) \frac{y\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{|x|}} \left( B - \frac{2m\lambda}{y} \right) + (1 - i\operatorname{sgn}(y)) \frac{x\operatorname{sgn}(y)}{\sqrt{|y|}} \left( B - \frac{2m\lambda}{x} \right) \right] \quad (3.47)$$

avec  $x = \Gamma_a + \lambda$ ,  $y = \Gamma_a - \lambda$  et  $G$  et  $B$  définis respectivement en (3.43) et (3.44).

Finalement le taux d'atténuation visqueuse, dû aux effets surfaciques, d'un mode propre  $(k, m, \omega)$  de l'écoulement s'écrit :

$$s_{vs} = s_{vs}|_{r=1} + 2s_{vs}|_{z=H}. \quad (3.48)$$

Finalement, il ne nous a pas été possible d'exprimer  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  en fonction de  $\mathbf{u}_0$  et ainsi d'avoir une expression compacte de l'atténuation surfacique visqueuse dans le cas général, contrairement au cas non stratifié ( $N_b = 0$ ) où on peut en obtenir une expression exacte (voir formule 2.9.13 dans Greenspan, 1968).

### Atténuation volumique

En développant maintenant le penta-vecteur et la fréquence en puissance de  $\nu$  de la manière suivante :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_0 + \nu\mathbf{v}_1)e^{im\theta + \omega t} + O(\nu^2), \quad (3.49a)$$

$$\omega = i\omega_0 + \nu s_{vv}, \quad (3.49b)$$

et en injectant ce développement dans (3.8) avec  $\varepsilon = 0$ , on obtient :

- à l'ordre  $O(1)$  :

$$[i\omega_0\mathcal{T} + \mathcal{M}]\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.50)$$

- à l'ordre  $O(\nu)$  :

$$[i\omega_0\mathcal{T} + \mathcal{M}]\mathbf{v}_1 = -s_{vv}\mathcal{T}\mathbf{v}_0 + \mathcal{L}\mathbf{v}_0. \quad (3.51)$$

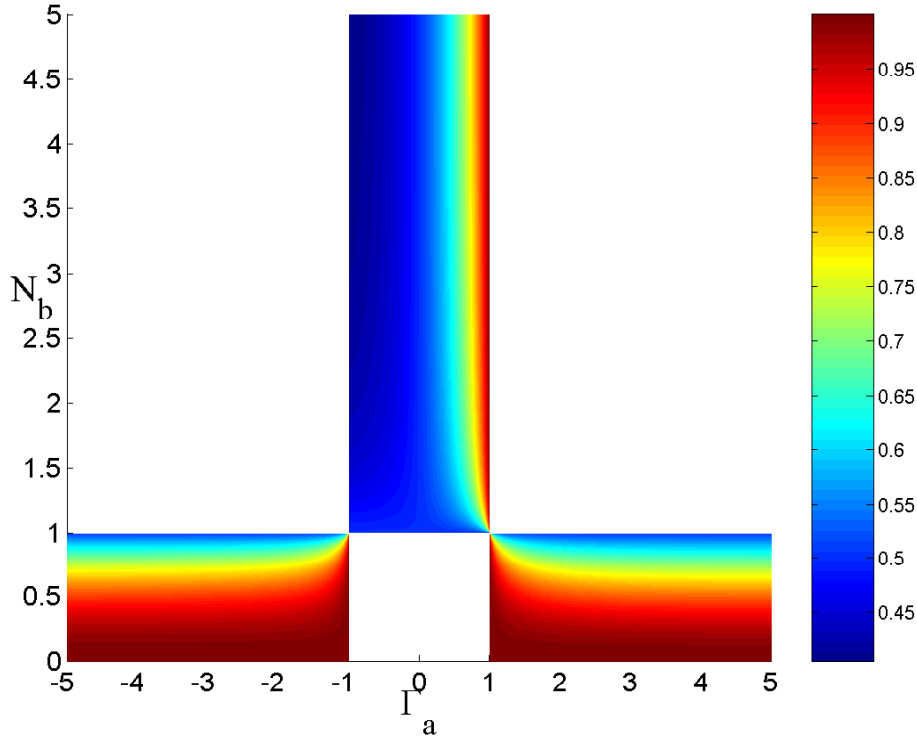
On trouve alors le terme d'atténuation visqueuse volumique en appliquant la condition de solvabilité avec le produit scalaire (3.27), ainsi :

$$s_{vv} = \frac{\langle \mathbf{v}_0^* | \mathcal{L}\mathbf{v}_0 \rangle}{\langle \mathbf{v}_0^* | \mathcal{T}\mathbf{v}_0 \rangle}. \quad (3.52)$$

En utilisant l'expression des modes propres on peut montrer que pour un mode  $(m, k, \omega)$ ,  $s_{vv}$  s'écrit simplement :

$$s_{vv} = -(\alpha^2 + k^2) \left( 1 - \frac{N_b^2(\Gamma_a^2 - \lambda^2)}{2\lambda^2(\Gamma_a^2 - N_b^2)} \frac{B}{B - \frac{m\Gamma_a(\lambda^2 - N_b^2)}{\lambda(\Gamma_a^2 - N_b^2)}} \right) \quad (3.53)$$

où on rappelle que  $B = m^2 + \frac{k^2\lambda^2}{\lambda^2 - N_b^2}$ . On remarque que pour cette distribution de vortacité, le terme d'atténuation volumique  $s_{vv}$  est égal à  $-(\alpha^2 + k^2)$  dans le cas non stratifié. Par ailleurs en présence de stratification, le terme d'atténuation volumique est alors modifié. Par exemple, pour le cas à vortacité absolue nulle ( $\Gamma_a = 0$ ), on a  $s_{vv} = -(\alpha^2 + k^2)/2$ . La figure 3.5 montre que la dépendance de  $s_{vv}$  à la stratification et la rotation est relativement faible mais non négligeable.

FIGURE 3.5 – Iso valeurs de  $|s_{vv}|/(\alpha^2 + k^2)$ .

### 3.3.3 Bilan

Il apparaît que les ondes de gravité internes sont amorties par la présence de parois et par la viscosité intrinsèque du fluide. Un mode propre  $(m, k, \omega)$  sera donc atténué au taux  $s_v$  :

$$s_v = \sqrt{\nu} s_{vs} + \nu s_{vv}. \quad (3.54)$$

On peut raisonnablement se demander dans quelle mesure le terme d'atténuation volumique  $s_{vv}$  est pertinent dans cette expression du fait qu'il soit à l'ordre  $O(\nu)$ . Eloy (2000) a montré que dans la limite des grands nombres d'ondes axiaux  $k$  leur présence était justifiée.

Notons finalement que le taux d'atténuation visqueuse surfacique admet une partie imaginaire non nulle ce qui a pour effet de décaler légèrement le point de résonance (effet de detuning).

## 3.4 Résonance d'ondes gravito-inertielles

Nous étudions maintenant l'effet de la déformation elliptique des lignes de courant sur la dynamique du tourbillon décrit précédemment.

### 3.4.1 Conditions de résonance

Moore & Saffman (1975) et Tsai & Widnall (1976) démontrent que deux ondes hélicoïdales de nombres azimuthaux respectifs  $m = 1$  et  $m = -1$  peuvent résonner avec le champ d'étirement elliptique et ainsi croître exponentiellement si leurs nombres d'ondes axiaux sont suffisamment proches et si les ondes sont stationnaires. Waleffe (1989) généralise ce mécanisme d'instabilité en montrant que deux ondes  $(m_1, k_1, \omega_1)$  et  $(m_2, k_2, \omega_2)$  peuvent résonner si leurs nombres d'onde axiaux et azimuthaux et leurs pulsations propres vérifient :

$$k_1 = k_2, \quad m_2 - m_1 = 2 \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega_2. \quad (3.55)$$

La condition de résonance en terme de  $\lambda$  s'écrit alors :

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 2. \quad (3.56)$$

Il décrit alors l'instabilité elliptique comme une résonance triadique entre les deux ondes  $(k_1, m_1, \omega_1)$  et  $(k_2, m_2, \omega_2)$  et l'onde stationnaire  $(0, 2, 0)$ . Nous analyserons cette condition de résonance en regardant les croisements de branches de la relation de dispersion. De plus comme l'ont expliqué Waleffe (1990) et Eloy (2000), les ondes susceptibles de croître le plus rapidement sont celles ayant des structures radiales les plus proches. Nous reprendrons la même terminologie que Eloy en parlant de résonance  $(m_1, m_2, i)$  pour décrire la résonance entre deux ondes  $(k_1, m_1, \omega_1)$  et  $(k_2, m_2, \omega_2)$  ayant des nombres d'ondes radiaux proches tels que  $\alpha_1 \sim \alpha_2$ . Le  $i$  correspond à la  $i$ -ème racine de l'équation (3.22) et caractérise la complexité de la structure radiale. On notera par la suite  $(k_0, \omega_0)$  le point de résonance, c'est à dire le point de croisement des branches de la relation de dispersion. Afin de faire apparaître le taux de croissance on développe la pulsation en puissance de  $\varepsilon$  :

$$i\omega = i\omega_0 + \varepsilon\sigma_1. \quad (3.57)$$

La perturbation à l'ordre dominant sera donc la superposition de deux modes propres du problème non visqueux  $(m_1, k_1, \omega_1)$  et  $(m_2, k_2, \omega_2)$  vérifiant la condition de résonance :

$$\mathbf{v}_0(r, \theta, z, t) = \left[ A_1 \mathbf{V}_1(r, z) e^{im_1\theta} + A_2 \mathbf{V}_2(r, z) e^{im_2\theta} \right] e^{i\omega_0 t + \varepsilon\sigma_1 t} \quad (3.58)$$

où  $\mathbf{V}_1$  correspond au mode propre de nombre d'onde azimuthal  $m_1$ . En injectant (3.58) dans le système d'équations linéarisées de base de notre problème (3.8), on peut admettre que la perturbation à l'ordre suivant  $O(\varepsilon)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(r, \theta, z, t) = & \left[ \mathbf{v}_{11}(r, z) e^{im_1\theta} + \mathbf{v}_{12}(r, z) e^{im_2\theta} \right. \\ & \left. + \mathbf{v}_{13}(r, z) e^{i(m_1-2)\theta} + \mathbf{v}_{14}(r, z) e^{i(m_2+2)\theta} \right] e^{i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

### 3.4.2 Taux de croissance non visqueux

Les équations pour  $\mathbf{v}_{11}$  et  $\mathbf{v}_{12}$  s'écrivent simplement :

$$(i\omega_0 \mathcal{T} + \mathcal{M}_{m_1}) \mathbf{v}_{11} = -A_1 \sigma_1 \mathcal{T} \mathbf{V}_1 + A_2 \overline{\mathcal{N}}_{m_2} \mathbf{V}_2, \quad (3.60a)$$

$$(i\omega_0 \mathcal{T} + \mathcal{M}_{m_2}) \mathbf{v}_{12} = -A_2 \sigma_1 \mathcal{T} \mathbf{V}_2 + A_1 \mathcal{N}_{m_1} \mathbf{V}_1, \quad (3.60b)$$



où on rappelle que  $\mathcal{M}_{m_1} = (\mathcal{M}e^{im_1\theta})e^{-im_1\theta}$ . Les équations pour  $\mathbf{v}_{13}$  et  $\mathbf{v}_{14}$  ont des solutions uniques et non triviales et n'apportent donc pas d'informations sur le terme correctif en fréquence  $\omega_1$  (Saffman, 1992, Chapitre 12.3). Elles ne seront donc pas traitées dans la suite de l'analyse.

En appliquant la condition de solvabilité en utilisant le produit scalaire défini par (3.27), on obtient le système d'équations suivantes pour  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\int_{\Sigma} V_{1p}^* \mathbf{u}_{11} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = -A_1 \sigma_1 \mathcal{T}_{1|1} + A_2 \overline{\mathcal{N}}_{1|2}, \quad (3.61a)$$

$$\int_{\Sigma} V_{2p}^* \mathbf{u}_{12} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = -A_2 \sigma_1 \mathcal{T}_{2|2} + A_1 \mathcal{N}_{2|1}, \quad (3.61b)$$

où  $\mathcal{N}_{2|1} = \langle \mathbf{V}_2^* | \mathcal{N}_{m_1} \mathbf{V}_1 \rangle$  ( $\mathbf{V}_2^*$  étant une solution du problème adjoint à l'ordre 0). On peut montrer que les termes de conditions aux limites (terme de gauches des équations précédentes) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\int_{\Sigma} V_{1p}^* \mathbf{u}_{11} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = A_2 I_1, \quad (3.62a)$$

$$\int_{\Sigma} V_{2p}^* \mathbf{u}_{12} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = A_1 I_2, \quad (3.62b)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont explicités plus loin. Le système (3.61) avec (3.62) n'admet des solutions non nulles que si son déterminant s'annule, on obtient alors un polynôme du second degré en  $\sigma_1$  :

$$\sigma_1^2 = \frac{(\overline{\mathcal{N}}_{1|2} - I_1)(\mathcal{N}_{2|1} - I_2)}{\mathcal{T}_{1|1} \mathcal{T}_{2|2}}. \quad (3.63)$$

Seuls les termes de couplage  $\mathcal{N}_{2|1}$  et  $\overline{\mathcal{N}}_{1|2}$  n'ont pu être simplifiés analytiquement et nécessite un traitement informatique dans le cas général. Nous verrons plus tard que pour la résonance particulière  $(-1, 1, i)$  tous les termes peuvent être calculés explicitement. Finalement les termes dus aux conditions aux limites sont calculés explicitement par la suite et les termes  $\mathcal{T}_{m|m}$  s'écrivent en fonction des paramètres du problème pour un mode  $(m, k, \omega)$  :

$$\mathcal{T}_{j|j} = \pi H \frac{(\Gamma_a^2 - \lambda_j^2)(\Gamma_a^2 - N_b^2)}{\lambda_j^2 - N_b^2} [J_{m_j}(\alpha)]^2 \left[ m_j^2 + \frac{k^2 \lambda_j^2}{\lambda_j^2 - N_b^2} - \frac{m_j \Gamma_a (\lambda_j^2 - N_b^2)}{\lambda_j (\Gamma_a^2 - N_b^2)} \right].$$

Le rôle antagoniste de la stratification et de la rotation sur la stabilité d'un tourbillon de vortacité uniforme déformé elliptiquement est bien mis en évidence par la figure 3.6. On rappelle que les anticyclones sont définis tels que  $\Gamma_a < 2$  et les cyclones tels que  $\Gamma_a > 2$ . Ainsi on remarque, d'après la figure 3.6, que :

- Seuls les anticyclones tels que  $|\Gamma_a| < 1$  sont stables pour des faibles stratifications, i.e.  $N_b < 1$ .
- Seuls les anticyclones tels que  $|\Gamma_a| < 1$  sont instables si la stratification est forte, i.e.  $N_b > 1$ .

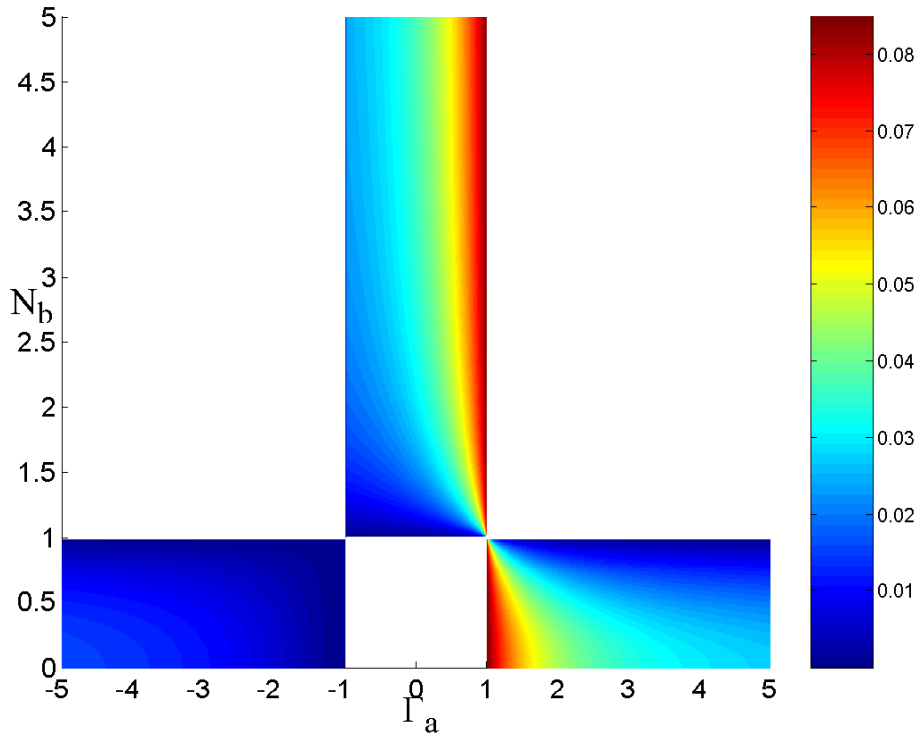


FIGURE 3.6 – Isovaleurs du taux de croissance ( $\sigma = \varepsilon\sigma_1$ ) non visqueux de la résonance  $(-1, 1, 1)$  projetées dans le plan  $(\Gamma_a, N_b)$ . Le calcul a été réalisé pour un cylindre de rayon  $R = 2.75$  cm, de hauteur  $H = 19$  cm et d'excentricité  $\varepsilon = 0.085$ , la fréquence de Brünt-Väisälä étant égale à  $N = 2.9$  rad/s.

- Les tourbillons les plus instables sont situés au voisinage de  $\Gamma_a = 1$  aussi bien pour les fortes que les faibles stratifications. On remarque, d'après (3.20), que les nombres d'onde tendent vers l'infini lorsque  $\Gamma \rightarrow 1$ . Ces résonances, qui sont les plus dangereuses, auront donc tendance à être amorties par la viscosité.

### 3.4.3 Correction due à l'ellipticité

L'équation de la paroi elliptique  $\Sigma$  est décrite par  $\Psi = -\frac{1}{2}$  d'où :

$$r = (1 - \varepsilon \sin 2\theta)^{-1/2}. \quad (3.64)$$

Ainsi on peut supposer en première approximation lorsque  $\varepsilon \ll 1$  que l'équation de la paroi  $\Sigma$  s'écrit :

$$F(r, \theta) := r - 1 - \varepsilon \sin 2\theta/2 = 0. \quad (3.65)$$

On peut alors calculer la normale à cette paroi qui s'écrit alors simplement :

$$\mathbf{n}_{|\Sigma} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \mathbf{e}_r - \varepsilon \cos 2\theta \mathbf{e}_\theta + O(\varepsilon^2). \quad (3.66)$$

En effectuant un développement perturbatif du champ de vitesse du type :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + O(\varepsilon^2), \quad (3.67)$$

la condition d'imperméabilité sur la paroi  $\Sigma$  devient alors :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} = 0 \Leftrightarrow u_{0r}|_{\Sigma} + \varepsilon (u_{1r}|_{r=1} - \varepsilon \cos 2\theta u_{0\theta}|_{r=1}) = 0. \quad (3.68)$$

En remarquant que

$$u_{0r}|_{\Sigma} = u_{0r}|_{r=1} + (r-1) \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} \Big|_{r=1} = u_{0r}|_{r=1} + \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\theta \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (3.69)$$

et en l'injectant dans (3.68), la condition d'imperméabilité se réduit aux deux premiers ordres à :

$$u_{0r}|_{r=1} = 0, \quad (3.70a)$$

$$u_{1r}|_{r=1} = \cos 2\theta u_{0\theta}|_{r=1} - \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (3.70b)$$

On réécrit  $v_{1r}|_{r=1}$  sous la forme :

$$u_{1r}|_{r=1} = \frac{e^{2i\theta}}{2} \left( u_{0\theta}|_{r=1} + \frac{i}{2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right) + \frac{e^{-2i\theta}}{2} \left( u_{0\theta}|_{r=1} - \frac{i}{2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} \Big|_{r=1} \right). \quad (3.71)$$

En injectant (3.58) dans l'équation précédente on trouve ainsi :

$$u_{11r} = \frac{A_2}{2} \left( V_{2\theta} + \frac{i}{2} \frac{\partial V_{2r}}{\partial r} \right), \quad (3.72a)$$

$$u_{12r} = \frac{A_1}{2} \left( V_{1\theta} - \frac{i}{2} \frac{\partial V_{1r}}{\partial r} \right). \quad (3.72b)$$

On obtient alors :

$$\int_{\Sigma} V_{1p}^* \mathbf{u}_{11} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = V_{1p}^* \frac{A_2}{2} \left( V_{2\theta} + \frac{i}{2} \frac{\partial V_{2r}}{\partial r} \right), \quad (3.73a)$$

$$\int_S V_{2p}^* \mathbf{u}_{12} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = V_{2p}^* \frac{A_1}{2} \left( V_{1\theta} - \frac{i}{2} \frac{\partial V_{1r}}{\partial r} \right). \quad (3.73b)$$

En identifiant avec (3.62) et en utilisant l'expression des modes propres (3.21), on obtient donc une expression analytique en fonction des différents paramètres du problème, soit :

$$I_1 = \pi H \frac{(\Gamma_a^2 - \lambda_1^2)(\Gamma_a^2 - \lambda_2^2)}{4\lambda_2} J_{m_1}(\alpha_1) J_{m_2}(\alpha_2) \left[ m_1 m_2 + \frac{k^2 \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - N_b^2} \right], \quad (3.74a)$$

$$I_2 = -\pi H \frac{(\Gamma_a^2 - \lambda_1^2)(\Gamma_a^2 - \lambda_2^2)}{4\lambda_1} J_{m_1}(\alpha_1) J_{m_2}(\alpha_2) \left[ m_1 m_2 + \frac{k^2 \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - N_b^2} \right]. \quad (3.74b)$$

### 3.4.4 Expression générale du taux de croissance

Afin de prendre en compte l'atténuation des modes propres due aux effets visqueux dans l'expression du taux de croissance (d'ordre  $O(\varepsilon)$ ) nous supposons que l'épaisseur des couches limites est du même ordre que la déformation des lignes de courant, à savoir  $\nu = O(\varepsilon^2)$ . On introduit alors  $\nu_2 = O(1)$  tel que :

$$\nu_2 = \frac{\nu}{\varepsilon^2}.$$

Il convient de remarquer que le calcul des effets visqueux surfaciques a été effectué dans un cylindre non déformé et non dans un cylindre elliptique. La raison principale de cette approximation étant que les modes propres de l'écoulement considéré sont les solutions du problème non déformé et non visqueux.

On développe  $k(= q\pi/H)$  en puissance de  $\varepsilon$  afin de prendre en compte les effets dus au confinement, d'un léger décalage au point de résonance dans l'expression du taux de croissance, soit :

$$k = k_0 + \varepsilon k_1. \quad (3.75)$$

Les équations pour  $\mathbf{v}_{11}$  et  $\mathbf{v}_{12}$  s'écrivent simplement :

$$(-i\omega_0 \mathbf{T} + \mathcal{M}_{m_1}) \mathbf{v}_{11} = -A_1 \sigma_1 \mathbf{T} \mathbf{V}_1 + A_1 \varepsilon \nu_2 \mathcal{L}_{m_1} \mathbf{V}_1 + A_2 \overline{\mathcal{N}}_{m_2} \mathbf{V}_2 - k_1 \mathcal{Q} \mathbf{V}_1, \quad (3.76a)$$

$$(-i\omega_0 \mathbf{T} + \mathcal{M}_{m_2}) \mathbf{v}_{12} = -A_2 \sigma_1 \mathbf{T} \mathbf{V}_2 + A_2 \varepsilon \nu_2 \mathcal{L}_{m_2} \mathbf{V}_2 + A_1 \mathcal{N}_{m_1} \mathbf{V}_1 - k_1 \mathcal{Q} \mathbf{V}_2, \quad (3.76b)$$

où on rappelle que  $\mathcal{M}_{m_1} = (\mathcal{M} e^{im_1\theta}) e^{-im_1\theta}$  et la matrice  $\mathcal{Q}$  s'écrit :

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_z/k_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z/k_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Les effets visqueux volumiques sont conservés bien qu'ils apparaissent à l'ordre  $\varepsilon$  dans les équations (3.76). Mais comme évoqué par Eloy (2000) dans la limite de grand nombre d'onde (tels que  $k_0 = O(\nu^{-1/4})$ ) leur présence peut être démontrée.

En appliquant la condition de solvabilité, on obtient le système d'équations suivantes pour  $A_1$  et  $A_2$  :

$$A_2 I_1 + \sqrt{\nu_2} s_{vs1} \mathcal{T}_{1|1} = -A_1 \sigma_1 \mathcal{T}_{1|1} + A_1 \varepsilon \nu_2 s_{vv1} \mathcal{T}_{1|1} + A_2 \overline{\mathcal{N}}_{1|2} - k_1 \mathcal{Q}_{1|1}, \quad (3.78a)$$

$$A_1 I_2 + \sqrt{\nu_2} s_{vs2} \mathcal{T}_{2|2} = -A_2 \sigma_1 \mathcal{T}_{2|2} + A_2 \varepsilon \nu_2 s_{vv2} \mathcal{T}_{2|2} + A_1 \mathcal{N}_{2|1} - k_1 \mathcal{Q}_{2|2}. \quad (3.78b)$$

Ce système n'admet des solutions non nulles que si son déterminant s'annule on obtient alors un polynôme du second degré en  $\sigma_1$ . La solution s'écrit :

$$\sigma_1 = \frac{(K_1 + K_2) \pm \sqrt{(K_1 - K_2)^2 + 4\sigma_{nv}^2}}{2} \quad (3.79)$$

où  $\sigma_{nv}$  le taux de croissance non visqueux est défini par (3.63) et les  $K_j$  (pour  $j = 1, 2$ ) sont définis par :

$$K_j = \varepsilon \nu_2 s_{vvj} - \sqrt{\nu_2} s_{vsj} - k_1 \frac{\mathcal{Q}_{j|j}}{\mathcal{T}_{j|j}}. \quad (3.80)$$

Seul le produit scalaire  $\mathcal{Q}_{j|j}$  pour un mode  $(m, k, \omega)$  n'a jusqu'à présent pas été explicité, après calculs on obtient ainsi :

$$\mathcal{Q}_{j|j} = -\pi H \frac{(\Gamma_a^2 - \lambda_j^2)^2}{k \lambda_j} [J_{m_j}(\alpha)]^2 \left[ m_j^2 + \frac{k^2 \lambda_j^2}{\lambda_j^2 - N_b^2} \right]. \quad (3.81)$$

Finalement, il conviendra dans le cas général, afin de calculer le taux de croissance, de procéder de la manière suivante (à  $N_b$ ,  $H$  et  $\Gamma_a$  fixés) :

- Trouver les points de résonance en cherchant les points de croisement des courbes de la relation de dispersion. On obtient donc, pour la résonance de deux ondes de nombres azimutaux  $m_1$  et  $m_2$  (tels que  $m_2 = m_1 + 2$ ), le point de résonance  $(k_0, \omega_0)$  dans le plan  $(k, \lambda)$ , le detuning  $\Delta k = k - k_0$  et les deux nombres d'ondes radiaux  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .
- Intégrer numériquement les termes de couplages  $\mathcal{N}_{2|1}$  et  $\overline{\mathcal{N}}_{1|2}$  aux points de résonance.
- Calculer enfin le taux de croissance à l'aide de (3.79).

Cette procédure est donc à effectuer pour chaque valeur de  $N_b$  et de  $\Gamma_a$  dans le but d'obtenir des cartes d'instabilités dans le plan  $(N_b, \Gamma_a)$ , pour un rapport d'aspect  $H$  et un couple  $(m_1, m_2)$  donnés. Ce calcul coûte énormément en temps de calcul dans le cas général. Mais on a remarqué que dans la région de fortes stratification la résonance principale était toujours la résonance  $(-1, 1, 1)$ . Cette remarque est, par ailleurs, vérifiée aussi dans la région de faible stratification au voisinage de  $\Gamma_a = 1$ . Nous avons donc porté notre attention sur cette résonance. En revanche dans la région de faible stratification d'autres résonances sont possibles et la sélection des modes peut aussi bien se faire en modifiant le rapport d'aspect du cylindre comme l'a souligné Eloy (2000).

### 3.5 Conclusion

L'utilisation d'un formalisme plus traditionnel en modes propres a permis de dégager de nombreux résultats que la théorie des courtes longueurs d'onde filtrait. Tout d'abord la théorie des courtes longueurs d'onde ne prend pas en compte les effets de confinement et les effets visqueux. Comme son nom l'indique elle ne s'intéresse, a fortiori, qu'à de courtes longueurs d'onde. Or l'instabilité elliptique peut faire résonner des grandes longueurs d'onde. Grâce aux outils développés dans ce chapitre, nous pouvons avoir accès à la structure interne des modes résonants, leurs pulsations ainsi que leurs longueurs d'onde. Nous verrons, dans la partie expérimentale, que ces considérations théoriques sont en bon accord avec les expériences réalisées.

Cependant un point important n'a pu être dégagé avec ce formalisme contrairement à la théorie des courtes longueurs d'ondes ; l'effet d'une excentricité plus

---

importante. En effet on a vu au chapitre 2 (cf Figures 2.5 et 2.6) que de fortes déformations de tourbillons modifiaient de manière conséquente les zones de stabilité et d'instabilité. Or tout le formalisme développé au cours de ce chapitre est incapable de reproduire cette physique. En effet toute l'analyse de stabilité est basée sur la résonance de deux ondes gravito inertielles vérifiant les conditions (3.55). Or comme nous l'avons montré ces résonances n'existent que dans les régions du plan  $(\Gamma_a, N_b)$  vérifiant :

$$|\Gamma_a| > 1 \text{ et } N_b < 1 \quad \text{ou} \quad |\Gamma_a| < 1 \text{ et } N_b > 1. \quad (3.82)$$

On voit bien qu'en dehors de ces régions, bien qu'en certains endroits des ondes d'inertie gravité puissent exister elles ne peuvent pas résonner, i.e. les branches de la relation de dispersion ne peuvent se croiser. Nous aurons sans doute, un biais relatif vis à vis de la mesure des seuils d'instabilités dans le plan  $(\Gamma_a, N_b)$ .



# Chapitre 4

## La résonance $(-1, 1, 1)$ et son observation expérimentale

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Description théorique</b> . . . . .	<b>52</b>
4.1.1	Taux de croissance . . . . .	52
4.1.2	Résultats . . . . .	53
<b>4.2</b>	<b>Étude expérimentale</b> . . . . .	<b>56</b>
4.2.1	Protocole expérimental . . . . .	56
4.2.2	Mise en place du gradient . . . . .	57
4.2.3	Spin-up . . . . .	61
4.2.4	Influence de la stratification . . . . .	61
4.2.5	Mesure du seuil d'instabilité . . . . .	62
4.2.6	Étude qualitative de la résonance $(-1, 1, 1)$ . . . . .	64
<b>4.3</b>	<b>Discussion</b> . . . . .	<b>65</b>
4.3.1	Le cas de la vorticité absolue nulle . . . . .	65
4.3.2	Autres résultats . . . . .	68
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>72</b>

---

La mise en place d'une expérience relative à une théorie fait apparaître de nombreuses difficultés. La base de toute étude d'instabilité linéaire repose sur l'hypothèse d'un écoulement de base bien défini. Or la difficulté principale du travail expérimental repose sur la mise en place de cet écoulement théorique.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps nous décrivons théoriquement la résonance  $(-1, 1, 1)$ . Puis après avoir décrit le protocole expérimental nous confrontons ces prévisions aux observations. Finalement nous disutons ces résultats et plus particulièrement le cas particulier à vorticité absolue nulle qui fit l'objet d'une expérience particulière au LADHYX.



## 4.1 Description théorique

### 4.1.1 Taux de croissance

Le cas particulier de la résonance  $(-1, 1, i)$  est intéressant dans la mesure où le taux de croissance  $\sigma_1$  peut être calculé de manière complètement explicite. Tout d'abord du fait de leur symétrie ces modes ne peuvent résonner que si leur pulsation est nulle (Moore & Saffman, 1975). Par ailleurs, les termes de couplage ( $\mathcal{N}_{2|1}$  et  $\overline{\mathcal{N}}_{1|2}$ ) peuvent être calculés explicitement. On montre ainsi que pour la résonance  $(-1, 1, i)$  ces termes se réduisent simplement à :

$$\mathcal{N}_{2|1} = \overline{\mathcal{N}}_{1|2} = -\frac{\pi H \alpha_i^2 \Gamma_a (\Gamma_a + 1)}{2} [J_1(\alpha_i)]^2. \quad (4.1)$$

Ainsi le taux de croissance non visqueux  $\sigma_{nv}$  peut s'écrire :

$$\sigma_{nv} = \left| \frac{(N_b^2 - 1)(\Gamma_a + 1)^2 (\alpha_i^2 + (\Gamma_a - 1)^2)}{4(\Gamma_a - 1)^2 (1 + \Gamma_a)(N_b^2 + \Gamma_a) + 4(\Gamma_a^2 - N_b^2)\alpha_i^2} \right|. \quad (4.2)$$

On peut alors retrouver un grand nombre de résultats, déjà établis, concernant le taux de croissance de l'instabilité elliptique dans un fluide stratifié en rotation ; ils sont résumés dans le tableau 4.1.

Hypothèses	Résultats	Articles
$H$ fini, $N_b = 0$ , $\Gamma_a = 2$	$\sigma_{nv} = \frac{9}{16 + \frac{8}{(1+\alpha_i^2)}} \varepsilon$	Waleffe (1989)
$H$ infini, $\Gamma_a = 2$	$\sigma_{nv} = \frac{9}{4} \left( \frac{1 - N_b^2}{4 - N_b^2} \right) \varepsilon$	Miyazaki & Fukumoto (1992)
$H$ infini, $N_b = 0$	$\sigma_{nv} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{\Gamma_a} \right)^2 \varepsilon$	Le Dizès (2000)
$H$ infini	$\sigma_{nv} = \left  \frac{(N_b^2 - 1)(1 + \Gamma_a)^2}{4(N_b^2 - \Gamma_a^2)} \right  \varepsilon$	Kerswell (2002)

TABLE 4.1 – Expressions du taux de croissance non visqueux de l'instabilité elliptique obtenues à l'aide de 4.2.

Du fait des symétries, on peut par ailleurs montrer que les différents opérateurs intervenant dans l'expression du taux de croissance (3.79) vérifient :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1|1} &= \mathcal{T}_{2|2}, \\ \mathcal{L}_{1|1} &= \mathcal{L}_{2|2}, \\ \mathcal{Q}_{1|1} &= -\mathcal{Q}_{2|2}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_{2|1} = \overline{\mathcal{N}}_{1|2},$$

$$I_1 = I_2,$$

$$\mathcal{Q}_{1|1} = -\mathcal{Q}_{2|2},$$

$$\text{Re}(J_1) = \text{Re}(J_2),$$

$$\text{Im}(J_1) = -\text{Im}(J_2).$$

L'expression du taux de croissance général  $\sigma = \varepsilon\sigma_1$  dans ce cas particulier se simplifie donc en :

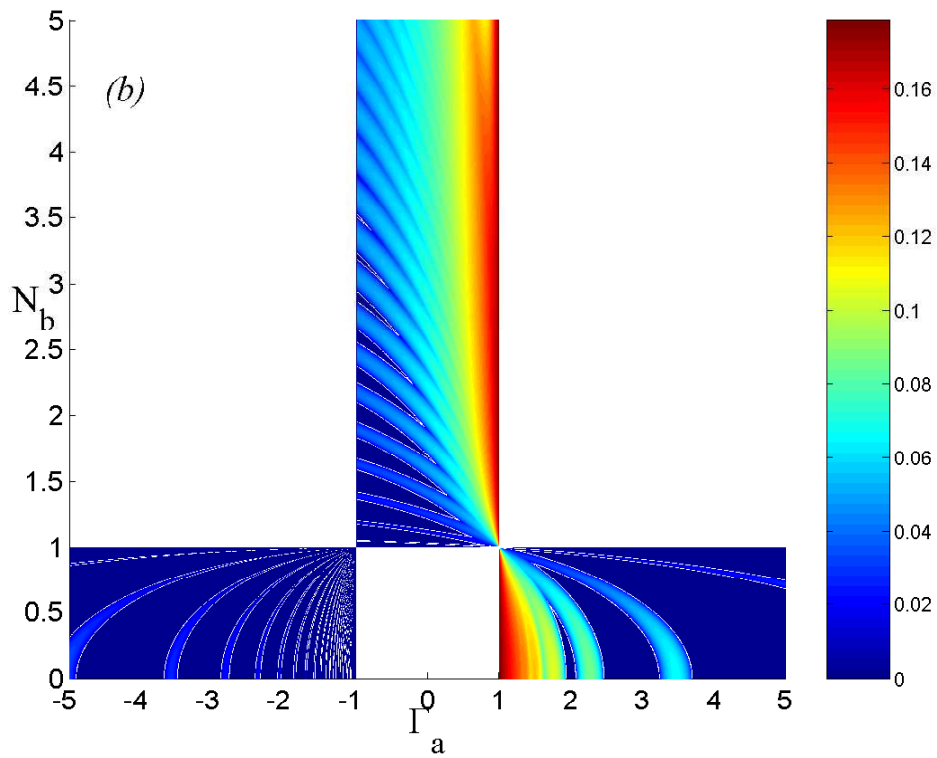
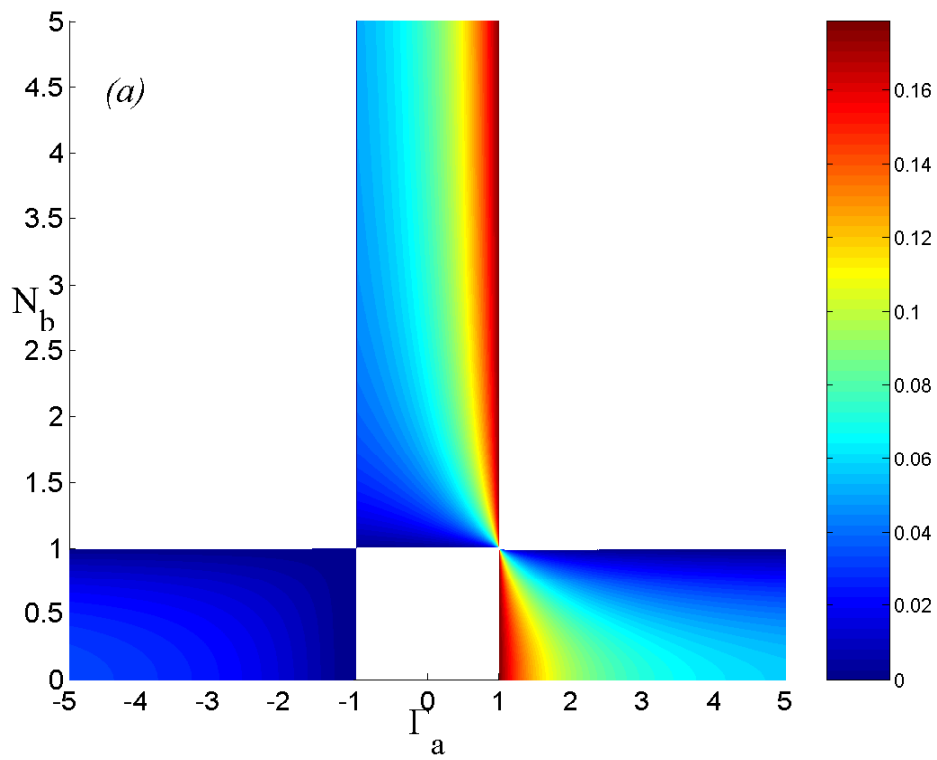
$$\sigma = \sqrt{\varepsilon^2\sigma_{nv}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\text{Im}(J_2)}{\mathcal{T}_{2|2}} + \Delta k \frac{\mathcal{Q}_{2|2}}{\mathcal{T}_{2|2}}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\text{Re}(J_2)}{\mathcal{T}_{2|2}} + \frac{1}{\nu} \frac{\mathcal{L}_{2|2}}{\mathcal{T}_{2|2}} \quad (4.3)$$

avec  $\Delta k = k - k_0$  l'écart au point de résonance d'ordre  $O(\varepsilon)$ .

#### 4.1.2 Résultats

Deux représentations sont possibles. Soit le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse  $\Omega_c$  et le rayon  $R$  du cylindre, est fixé et donc la fréquence de Brünt-Väisälä  $N$  varie comme  $N_b$ , soit la fréquence de Brünt-Väisälä  $N$  est fixe et le nombre de Reynolds varie alors comme  $1/N_b$ . Nous avons choisi d'utiliser dans notre étude la deuxième représentation pour comparer les résultats expérimentaux et théoriques du fait que pour une expérience donnée la fréquence de Brünt-Väisälä  $N$  est fixée une bonne fois pour toute. Les figures 4.1 montrent bien l'influence de chaque terme sur l'instabilité elliptique. Il apparaît alors que le taux de croissance de l'instabilité est fortement modifié par le confinement et les effets visqueux. Ainsi :

- La figure 4.1(b) montre bien l'influence du confinement. La condition d'imperméabilité sur les surfaces  $z = 0, H$  entraîne que le nombre d'onde axial est alors discrétisé. Ainsi la relation de dispersion est discrétisée et pour un couple  $(\Gamma_a, N_b)$  fixé le croisement des branches ne se fait pas toujours aux différents nombres d'onde axiaux permis. Il s'en suit que dans certaines régions le detuning est tellement fort qu'il atténue complètement la résonance. On remarque de plus que cet effet est beaucoup plus important pour les régions de faibles stratifications.
- Dans la figure 4.1(c) on a pris en compte cette fois les effets visqueux volumiques. Comme nous l'avons remarqué précédemment, il est pertinent de les prendre en compte si les nombres d'onde sont très grand. C'est ce qu'on remarque car la principale modification provient de la région proche de  $\Gamma = 1$ , où les nombres d'onde tendent vers l'infini. Cet effet est ici plus important dans la région de forte stratification, la raison étant que le nombre de Reynolds  $y$  est faible, alors qu'il tend vers l'infini lorsque  $N_b$  tend vers 0.
- Finalement la prise en compte des effets visqueux surfaciques vient atténuer le taux de croissance de manière drastique dans la région de forte stratification aussi bien que dans la région des forts anticyclones en faiblement stratifié.



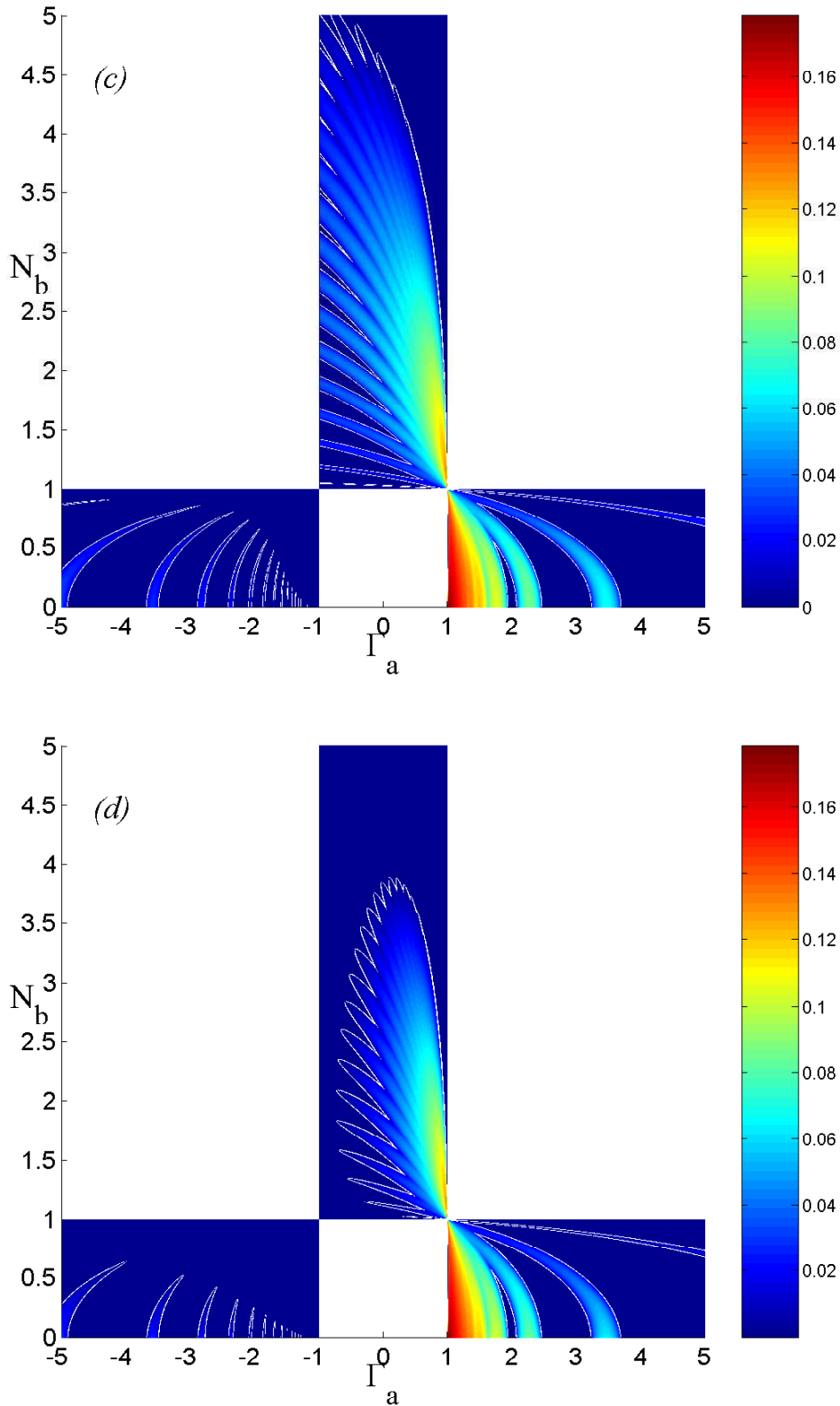


FIGURE 4.1 – Isovaleurs du taux de croissance général pour la résonance  $(-1, 1, 1)$  pour une hauteur de cylindre  $H = 19$  cm un excentricité  $\varepsilon = 0.179$  et une fréquence de Brünt-Väisälä  $N = 2.8$  rad/s. La figure (a) représente le taux de croissance non visqueux, la figure (b) prend en compte les effets de confinement pour un écoulement de fluide non visqueux, la figure (c) prend en compte l'atténuation visqueuse volumique et enfin la figure (d) prend tous les effets en compte.

Le principal défaut de cette représentation est clairement le fait que le nombre de Reynolds tende vers l'infini au voisinage de  $N_b = 0$  et donc que les effets visqueux ne sont quasiment pas pris en compte dans cette région. La figure 4.2 quant à elle a été tracée à nombre de Reynolds constant. On voit alors que tous les anticyclones tels que  $\Gamma_a < -1$  sont stables. Par contre pour la région fortement stratifié il existe une fréquence de Brünt-Väisälä limite suivant le fluide considéré. La ligne noire pour laquelle la fréquence de Brünt-Väisälä  $N = 3.2$  rad/s correspond à la fréquence maximale que l'on peut obtenir avec de l'eau salée pour une hauteur  $H = 19$  cm.

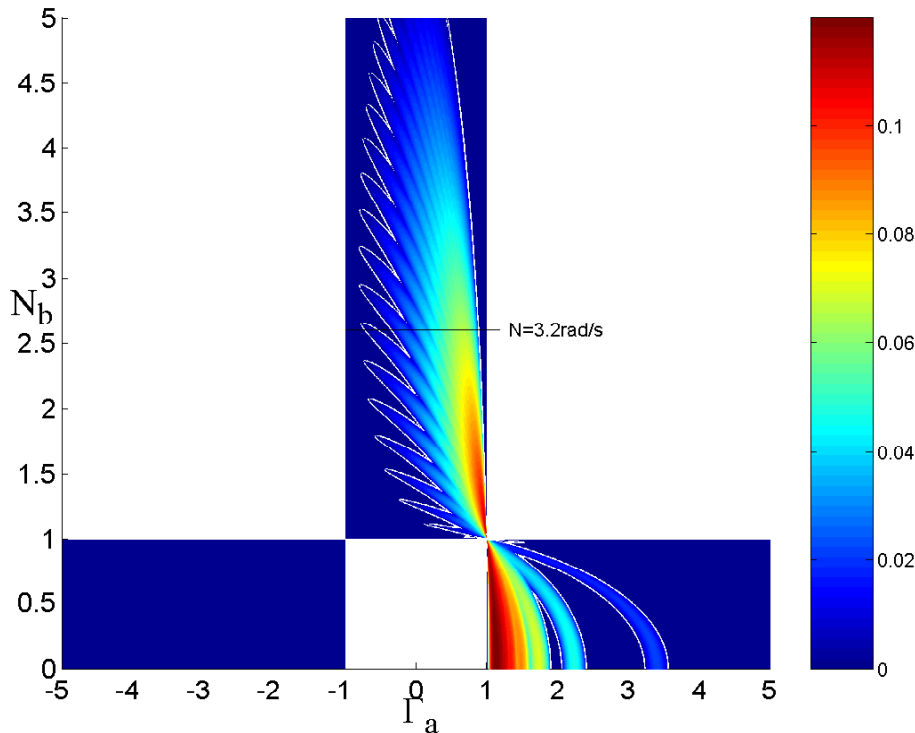


FIGURE 4.2 – Iso valeurs du taux de croissance général pour la résonance  $(-1, 1, 1)$  pour une hauteur de cylindre  $H = 19$  cm un excentricité  $\varepsilon = 0.179$  et un nombre de Reynolds  $Re = 950$ . La ligne noire pour laquelle la fréquence de Brünt-Väisälä  $N = 3.2$  rad/s correspond à la fréquence maximale que l'on peut obtenir avec de l'eau salée pour cette hauteur de cylindre.

## 4.2 Étude expérimentale

### 4.2.1 Protocole expérimental

L'expérience réalisée à l'IRPHE reprend celle réalisée par Eloy (2000) que l'on a mise sur une table tournante (voir aussi Le Bars *et al.*, 2007). L'expérience est constituée d'un cylindre déformable de rayon  $R = 2.75$  cm entraîné par un moteur à la vitesse angulaire  $\Omega_C$  et déformé elliptiquement par deux rouleaux fixes, le tout étant

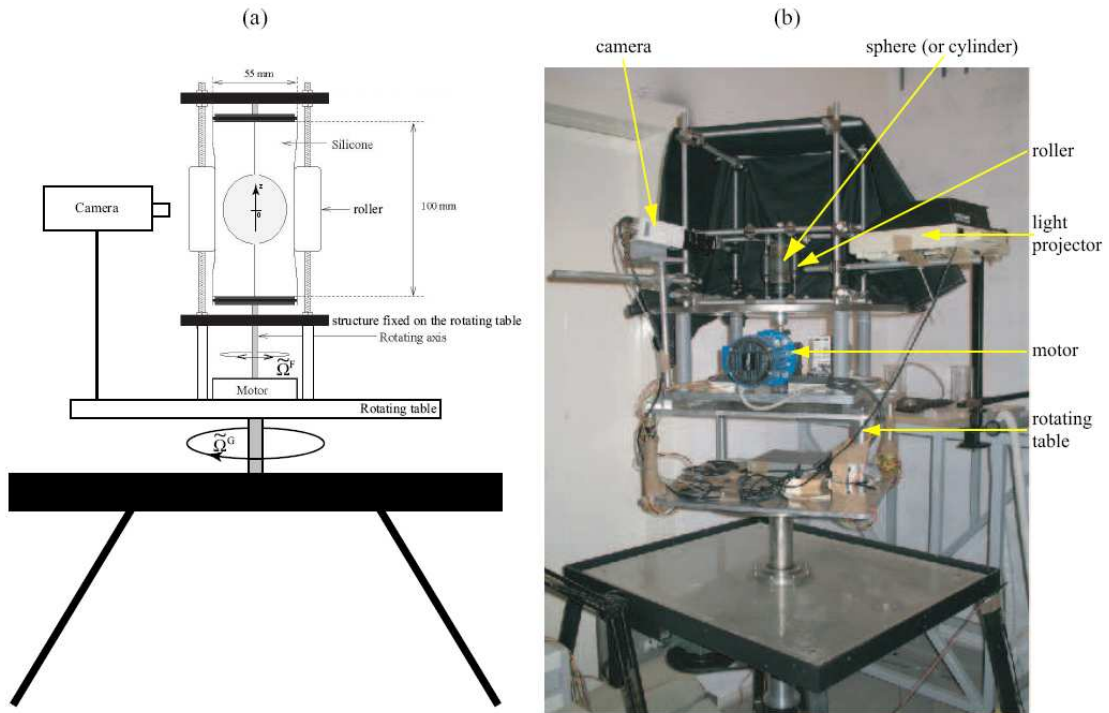


FIGURE 4.3 – (a) Dessin et (b) photo du dispositif expérimental.

solidaire d'une table tournante tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_T$  (cf. Figure 4.3). Le cylindre est rempli d'une solution d'eau salée et stratifiée en densité linéairement suivant la verticale par la méthode des deux bacs (décrite dans la section suivante). La variation des différents paramètres de l'expérience est synthétisée dans le tableau 1 :

Paramètres	Valeurs
$H$	18 – 19cm
$N_b$	0 – 4.4rad/s
$\Omega_C$	1 – 10rad/s
$\Omega_T$	0 – 2rad/s
$\varepsilon$	0.085 ou 0.179

La visualisation de l'écoulement se fait à l'aide de particules anisotrope, des particules de Kalliroscope dans notre étude, qui réfléchissent la lumière dans le plan de la caméra si elles sont orientées à  $45^\circ$  du plan de lumière.

#### 4.2.2 Mise en place du gradient

Le choix de méthode pour mettre en place le gradient de densité est intimement lié aux contraintes imposées par les différents paramètres expérimentaux. Dans la mesure où nous cherchons à faire résonner des ondes gravito inertielles dans un régime de forte stratification nous devons faire en sorte que le gradient obtenu soit maximum. Par ailleurs compte tenu des dimensions du cylindre les volumes d'eau

mis en jeu sont très faibles (n'excédant pas 1 litre) ce qui implique que les systèmes communément utilisés pour fabriquer des gradients de densité via un système de pompes paraissent à la fois trop coûteux et sûrement peu précis. Une autre contrainte tient à la faible durée de vie des expériences, d'où le besoin de pouvoir former des gradients rapidement avec une bonne précision. Nous avons donc opté pour un système à deux bacs en vase communiquant où le remplissage se fait par simple gravité.

### Méthode des deux bacs

La méthode des deux bacs ("two tank method") mise au point par Fortuin (1960) et étudiée en détail par Öster (1965), ou plus récemment Hill (2002), permet d'obtenir un gradient linéaire en densité suivant la verticale.

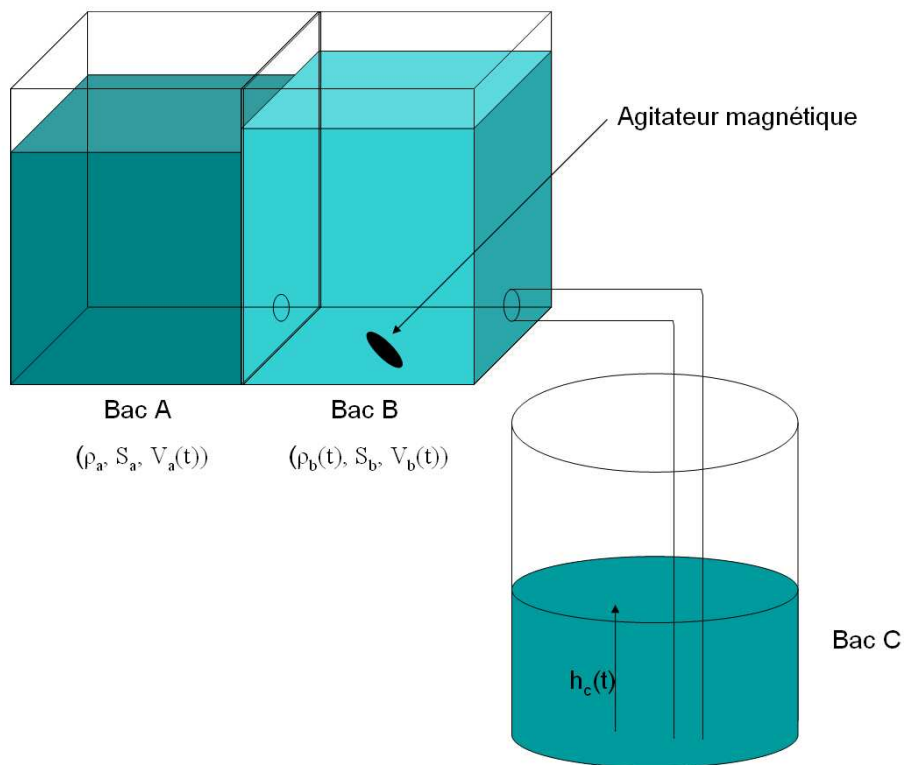


FIGURE 4.4 – Méthode des deux bacs. Le bac  $A$  est rempli d'une solution d'eau salée à saturation de densité  $\rho_A = 1.2\text{g/cm}^3$  alors que le bac  $B$  est rempli d'eau pure à l'instant initial.

Deux méthodes sont couramment utilisées pour remplir le cylindre. On peut effectuer soit le remplissage par le haut (utilisation d'un matériau poreux qui monte au fur et à mesure du remplissage) ou par le bas. Compte tenu des dimensions du cylindre la méthode par le bas a été retenue. A l'instant initial on ouvre les vannes

du bac  $B$  et le mélange dans le bac  $B$  se fait à l'aide d'un agitateur magnétique. Si on suppose que  $A$  et  $B$  sont à l'équilibre hydrostatique à l'instant initial alors :

$$\rho_A h_{A0} = \rho_B h_{B0}$$

Les deux bacs étant en vase communiquant le rapport de leurs hauteurs est constant au cours du temps, on en déduit alors que leurs volumes sont reliés par :

$$V_A(t) = \frac{S_A \rho_{B0}}{S_B \rho_A} V_B(t). \quad (4.4)$$

En remarquant que le volume se conserve du fait des faibles variations de densité de l'eau, on peut alors écrire, en utilisant (4.4), l'équation d'évolution de la hauteur  $h_c$ , soit :

$$S_C \frac{dh_C}{dt} = -\frac{d}{dt} (V_A + V_B) = -(1 + K) \frac{dV_B}{dt} \quad (4.5)$$

où  $K = \frac{\rho_{B0} S_A}{\rho_A S_B}$ .

La conservation de la masse et du volume (justifié par les faibles écarts de densités) dans le bac  $B$  s'écrivent respectivement :

$$\frac{d}{dt} (\rho_b V_B) = \rho_A Q_E - \rho_B Q_S, \quad (4.6)$$

$$\frac{dV_B}{dt} = Q_E - Q_S, \quad (4.7)$$

où  $Q_E$  et  $Q_S$  représentent respectivement les débits en entrée et en sortie du bac  $B$ . En utilisant (4.6), (4.7) et  $Q_E = -dV_A/dt$  on obtient :

$$\frac{1}{(\rho_A - \rho_B)} \frac{d(\rho_A - \rho_B)}{dt} = K \frac{1}{V_B} \frac{dV_B}{dt}, \quad (4.8)$$

qui a pour solution :

$$V_B(t) = V_{B0} \left( \frac{\rho_A - \rho_B(t)}{\rho_A - \rho_{B0}} \right)^{1/K}. \quad (4.9)$$

En injectant (4.9) dans (4.5) et en intégrant on obtient la loi d'évolution de  $h_c$  en fonction de  $\rho_B$  à savoir :

$$h_C(t) = K_1 (\rho_B(t) - \rho_A)^{1/K} + K_2 \quad (4.10)$$

où  $K_1 = -\frac{(1+K)V_{B0}}{S_C(\rho_A - \rho_{B0})^{1/K}}$  et  $K_2 = \frac{(1+K)V_{B0}}{S_C}$  sont deux constantes.

Ce résultat indique ainsi qu'en changeant la valeur de  $K$  (proportionnel au rapport des surfaces), on peut construire une multitude de gradients. Pour obtenir un gradient linéaire il suffira ainsi que  $K = 1$ . Pour obtenir un gradient quadratique il suffit que  $K = 1/2$ .



### Limites expérimentales

Malheureusement en pratique le gradient ne peut jamais être complètement linéaire et maximum. En effet :

- Comme précisé précédemment l'idéal pour construire un gradient linéaire de densité avec cette méthode des deux bacs en vase communicants serait de pouvoir régler les différentes surfaces des bacs de sorte que  $S_A \rho_{B0} = S_B \rho_A$ . Il suffirait de régler les volumes d'eau dans les deux bacs de sorte qu'ils soient en équilibre hydrostatique et le tour serait joué. Dans la pratique il apparaît difficile de pouvoir régler les surface des bacs. Ainsi dans nos expériences les surfaces étaient identiques de sorte que si l'on se place à l'instant initial à l'équilibre hydrostatique on ne peut construire théoriquement de gradient linéaire. Il convient alors de mettre le même volume d'eau dans les deux bacs et d'ouvrir simultanément à l'instant initial les sorties des bacs  $A$  et  $B$  ce qui est impossible en pratique donc de l'eau salée à saturation entre toujours au début dans le bac d'eau pure. Le gradient maximum ne pourra alors être obtenu.
- Bien que n'apparaissant explicitement pas dans le calcul théorique, on doit surveiller aussi le débit de sortie du bac  $B$  afin qu'il soit suffisamment faible pour que le mélange puisse se faire correctement. Ainsi si le débit est trop rapide le mélange n'a pas le temps de s'effectuer dans le bac  $B$  et le gradient sera trop faible.
- Vers la fin les volumes d'eau étant trop faibles il y a systématiquement des problèmes d'écoulement entre les deux bacs donc afin de pallier à ce problème nous devons prendre des volumes d'eau supérieurs à ce prévu ce qui affaiblit de surcroît le gradient et donc la fréquence de Brünt-Väisälä.

A la lumière de ces différentes remarques le gradient maximum que l'on aurait théoriquement n'est jamais obtenu ce que l'on a pu vérifié expérimentalement. On a ainsi pu observé un écart de l'ordre de 20% à 30% par rapport à la théorie.

Un autre problème caractéristique des expériences décrites dans ce chapitre provient de la mesure expérimentale de la fréquence de Brünt-Väisälä. En effet le diamètre et la hauteur des cylindres utilisés n'excédant pas respectivement 10cm et 30cm, le seul moyen de mesurer expérimentalement la densité est de prélever une partie du fluide avec un densimètre électronique à la sortie du bac  $B$  (cf Fig.1), dans le bac même, ou à l'aide d'un conductimètre de mesurer la salinité à l'intérieur du cylindre. La première méthode est celle que nous avons le plus souvent utilisée car elle est non intrusive, rapide et peut être effectuée seul (avec tout de même un peu d'entraînement et beaucoup d'équilibre). Par contre il y a toujours un peu de mélange dans le cylindre au cours du remplissage et donc il y a une tout de même une erreur de mesure difficilement mesurable. La deuxième méthode à l'aide d'un conductimètre est certainement plus précise mais est intrusive, très lente et ne peut être effectuée seul.

Il apparaît ainsi à la lumière de ces différentes remarques que l'obtention d'un gradient linéaire maximum de densité et sa mesure ne sont choses aisées. Et pour finir on ne répétera jamais assez que l'eau salée n'est pas la meilleure amie des machines et qu'il s'agit de la manipuler avec précaution au contact par exemple

d'un contacteur tournant.

### 4.2.3 Spin-up

Avant de rentrer dans le vif du sujet, c'est à dire l'étude de l'instabilité linéaire, nous devons nous demander si l'écoulement établi expérimentalement est bien le même que celui décrit par la fonction de courant :

$$\Psi = -\frac{r^2}{2}(1 - \varepsilon \sin 2\theta) \quad (4.11)$$

et soumis à la force de Coriolis. En effet avant que l'écoulement bidimensionnel s'établisse, et que l'instabilité se mette en place, le fluide est petit à petit mis en rotation. C'est ce la phase de spin-up. Dans les travaux de Kudlick ou de Greenspan le temps caractéristiques avant que l'écoulement ne s'établisse est égal à  $\tau = \frac{H}{\sqrt{\Omega\nu}}$  où  $\Omega$  est ici la vitesse angulaire du cylindre mis en rotation. Dans notre cas il conviendrait donc de prendre pour temps caractéristique, celui basé sur la vorticité absolue, soit  $\tau = \frac{H}{\sqrt{\Omega_c \Gamma_a \nu}}$ . Il apparaît donc que pour des vorticités absolues nulles le temps de mise en place de l'écoulement est alors infini. Cette explication sera reprise dans la section discussion afin de tenter d'expliquer la mise à mal de l'expérimentation pour ces écoulements proche de la vorticité absolue nulle.

### 4.2.4 Influence de la stratification

La principale difficulté à laquelle nous avons été confrontée au cours des expériences a été le choix de la représentation. En effet les cartes d'instabilités peuvent soit être représentées à fréquence de Brünt-Väisälä,  $N_b$ , fixée, soit être représentées à nombre de Reynolds fixé, c'est à dire  $\Omega_C$  fixe. La représentation à fréquence de Brünt-Väisälä fixe nous a paru être la représentation la plus judicieuse au cours d'une expérience donnée. Le problème majeur étant qu'il est pratiquement impossible de reproduire le gradient d'eau salée à l'identique d'une expérience à l'autre. Une des contraintes majeures de cette expérience est le temps de vie d'une expérience donnée. Il apparaît que les contraintes exercées par les rouleaux sur le cylindre sont tellement importantes que le temps avant que le cylindre ne se fissure n'excède pas 15mn dans le cas de faibles ellipticités ( $\varepsilon = 0.085$ ) et 5mn pour de fortes ellipticités ( $\varepsilon = 0.179$ ). Cette contrainte est majeure pour deux raisons :

- L'instabilité ne se produit qu'à partir du moment où l'écoulement est établi. Or il nous est apparu que lorsque la vorticité absolue  $\Gamma_a$  de l'écoulement était proche de zéro, l'écoulement ne semblait jamais atteindre le régime établi avant que le cylindre ne se fissure.
- Même si l'instabilité se mettait en place rapidement, et vu les fréquences de Brünt-Väisälä élevées mises en jeu et les contraintes géométriques (rayon petit), la potentialité d'un mélange du fluide, au terme de l'expérience, paraît difficile à obtenir.

Notons aussi que dans le cas non stratifié, une fois que l'instabilité se met en place, l'écoulement ne se relaminarise plus. Nous n'avons jamais observé le cycle d'instabilité relaminarisation décrit par Eloy (2000). La raison étant sans doute que

la stratification inhibe les mouvements verticaux et qu'ainsi l'explosion du vortex se fait par couches.

#### 4.2.5 Mesure du seuil d'instabilité

##### Méthode standard :

Il faut, pour caractériser proprement les seuils, débiter les expériences dans des régions de stabilité suffisamment éloignées des points critiques. Deux types d'expériences ont été réalisées. Les premières, à vorticité absolue fixe, ne sont pas particulièrement évidentes en pratique, puisqu'il faut changer simultanément les vitesses de rotation de la table et du cylindre. Les deuxièmes types d'expériences, à nombre de Reynolds fixé (vitesse de rotation du cylindre fixe) sont quand à elle, beaucoup plus simple à mettre en place, puisqu'en augmentant progressivement la vitesse de rotation de la table  $\Omega_t$  on réduit par la même occasion la vorticité absolue du fluide  $\Gamma_a$ .

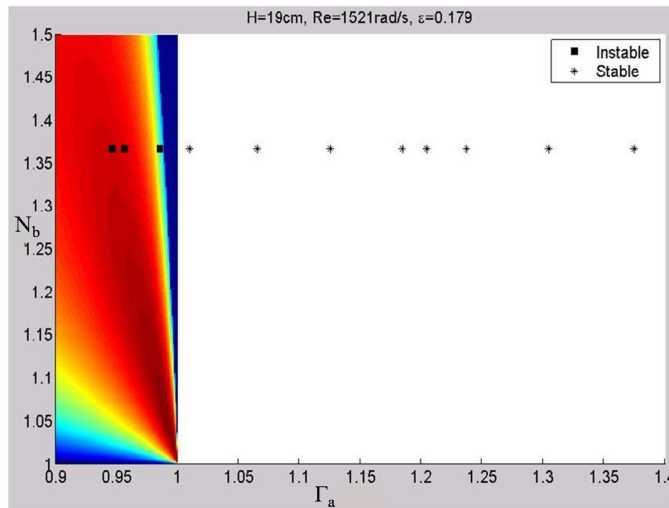


FIGURE 4.5 – Les iso-valeurs du taux de croissance de la résonance  $(-1, 1, 1)$  sont représentés en couleurs dans le plan  $(\Gamma_a, N_b)$ . Dans la zone d'instabilité le bleu foncé correspond à un taux de croissance nul. Cette expérience a été réalisée à nombre de Reynolds et fréquence de Brünt-Väisälä fixes.

En dérogeant à le méthode standard, deux types de problèmes surviennent. Tout d'abord, si nous commençons dans une région où l'écoulement est instable et qu'en modifiant progressivement les paramètres nous évoluons vers une zone stable, il apparaît que l'écoulement reste instable beaucoup plus longtemps que prévu et même après avoir dépassé le seuil de stabilité. Ainsi pour les mêmes paramètres expérimentaux que ceux utilisés dans la figure (4.5), nous avons observé que l'écoulement restait instable jusqu'à  $\Gamma_a = 1.21$ . L'explication la plus probable étant qu'une fois l'écoulement devenu instable et turbulent, les perturbations s'auto entretiennent durant un temps suffisamment long. Nous n'avons pu attendre assez longtemps pour voir si l'écoulement se relaminarisait du fait de l'espérance de vie

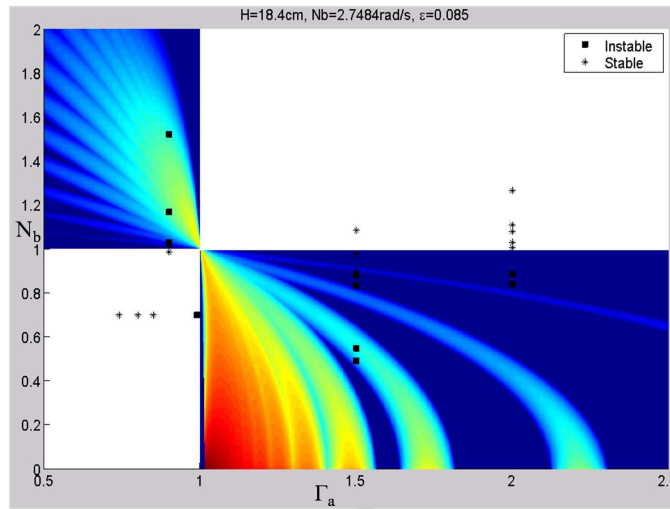


FIGURE 4.6 – Iso-valeurs du taux de croissance de la résonance  $(-1, 1, 1)$  projetées dans le plan  $(\Gamma_a, N_b)$ . La fréquence de Brünt-Väisälä du fluide est fixe et égale à  $N = 2.75\text{rad/s}$ .

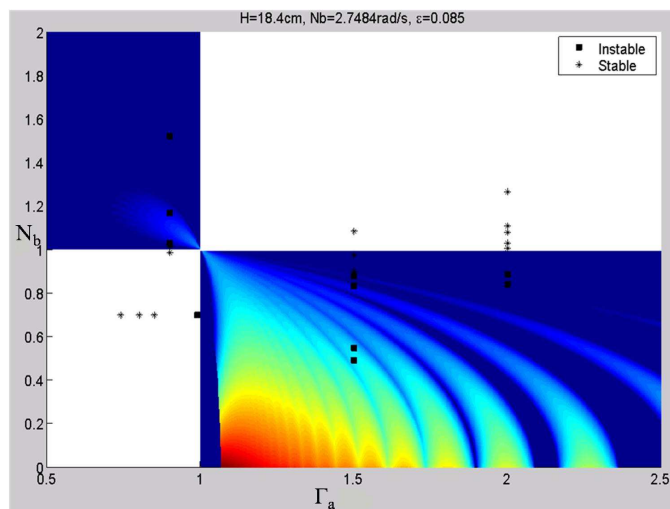


FIGURE 4.7 – Iso-valeurs du taux de croissance de la résonance  $(-1, 1, 2)$  projetées dans le plan  $(\Gamma_a, N_b)$ . La fréquence de Brünt-Väisälä du fluide est fixe et égale à  $N = 2.75\text{rad/s}$ .

trop courte des expériences. Mais une fois l'instabilité déclenchée elle ne semblait, toutefois pas réduire en intensité.

La deuxième méthode, consistant à débiter l'expérience au voisinage d'un point critique dans une région stable, a donné des résultats similaires à l'expérience précédente avec un décalage non négligeable des points critiques. L'explication la plus plausible serait que lorsque le fluide est brutalement mis en rotation l'énergie fournie au système est alors suffisante pour déclencher l'instabilité.

Pour de fortes excentricité, les variations de vitesse du cylindre sont tellement

importantes que l'on oscille systématiquement entre une région stable et une région instable lorsqu'on essaie de caractériser les seuils.

#### 4.2.6 Étude qualitative de la résonance $(-1, 1, 1)$

Contrairement aux précédentes études expérimentales (Eloy, 2000; Le Bars *et al.*, 2007), il n'a pas été possible de sélectionner différents modes de résonances. Dans la région de très forte stratification ( $N_b > 1$  et  $|\Gamma_a| < 1$ ), les résultats issus de l'analyse théorique montraient de manière pertinente que les taux de croissance des autres modes résonnants sont beaucoup plus faibles. Les pics d'instabilité sont par ailleurs tous enchevêtrés. Le mode le plus instable, c.a.d le mode  $(-1, 1, 1)$ , prendra donc le dessus systématiquement. Par ailleurs il n'a pas été possible d'effectuer des mesures précises des taux de croissance des modes observés. Mais nous avons pu mesurer et comparer aux prévisions théoriques le nombre de longueurs d'onde prévu. La

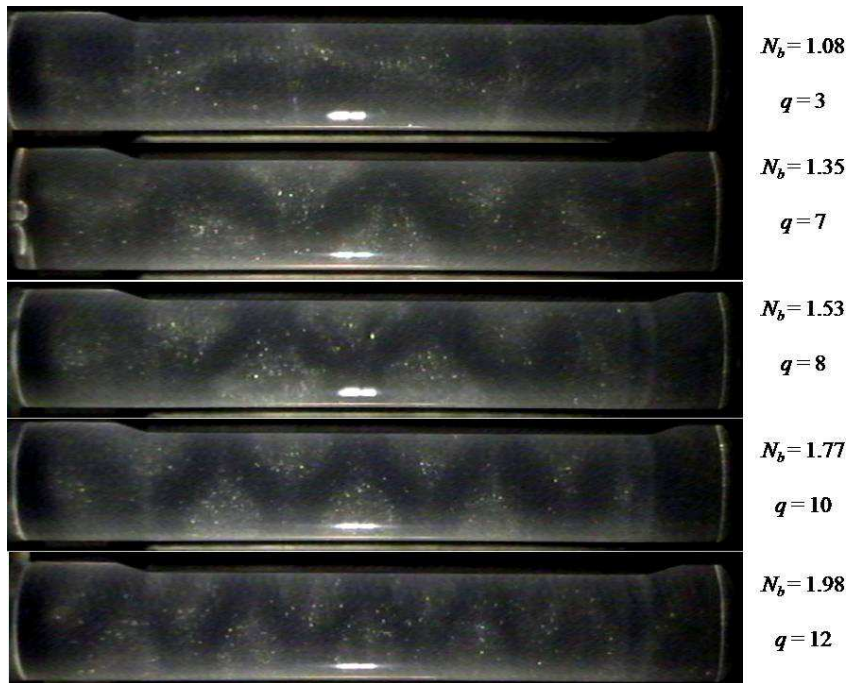


FIGURE 4.8 – Observations expérimentales.

comparaison entre la longueur d'onde observée et celle prévue théoriquement est en relativement bon accord. Il apparaît ainsi que sur 150 expériences réalisées, 70% d'entre elles ont été en accord avec les prévisions théoriques. Il convient de remarquer que les prédictions théoriques sont relativement mises à mal lorsqu'il s'agit de prévoir une instabilité à grande ou petite longueur d'onde. Pour les petites longueurs d'onde on a observé que les prévisions théoriques étaient systématiquement surévaluées. Comme nous avons remarqué que l'instabilité se mettait en place la plupart du temps au milieu du cylindre et se développait seulement sur la zone où les rouleaux appuyaient on conjecture ainsi que pour les petites longueurs d'onde la longueur de référence du cylindre serait la taille des rouleaux à savoir 13.5cm.

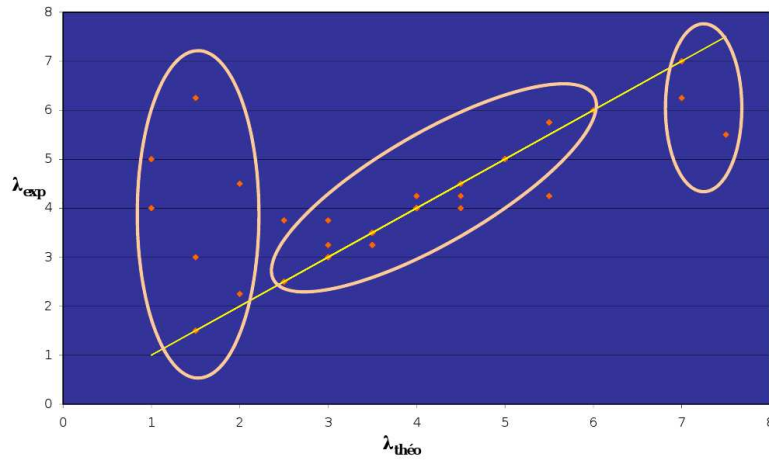


FIGURE 4.9 – Comparaison entre la longueur d’onde observée et la longueur d’onde prévue théoriquement.

Quand aux grandes longueurs d’onde, les taux de croissance associés étant la plupart du temps très faible, l’instabilité semblait se déclencher toujours de manière très poussive à la bonne longueur d’onde. Mais une instabilité de longueur d’onde moitié ou quart prenait le dessus à terme.

## 4.3 Discussion

### 4.3.1 Le cas de la vorticité absolue nulle

#### Expériences au LADHYX

##### Introduction

L’expérience réalisée au LADHYX avec la collaboration de Paul Billant tentait de reproduire un mécanisme d’excitation paramétrique d’ondes internes dans un fluide linéairement stratifié en densité analysé théoriquement par Leblanc (2003). Cette étude théorique montre qu’un écoulement irrotationnel plan soumis à un étirement périodique (d’amplitude  $\varepsilon$ ) est instable si le fluide est stratifié en densité et tel que :

$$N > \frac{\gamma}{2} \quad (4.12)$$

où  $N$  est la fréquence de Brünt-Väisälä et  $\gamma$  la pulsation du forçage.

Cette condition étant respectée, on montre avec un formalisme courte longueur d’onde de type WKB que le taux de croissance de l’instabilité vaut :

$$\sigma = \frac{\varepsilon\gamma}{4} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4N^2} \right). \quad (4.13)$$

### Analogie avec l'instabilité elliptique

Avant de rentrer dans la description de l'expérience et des résultats, il convient de montrer l'analogie de ce mécanisme avec l'instabilité elliptique. En effet le champ de vitesse prévu théoriquement pour cet écoulement peut se mettre en coordonnées cylindriques sous la forme :

$$\mathbf{V}(r, \theta, t) = \varepsilon\gamma(r \cos 2\theta \mathbf{e}_r - r \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta) \cos \gamma t + O(\varepsilon^2) \quad (4.14)$$

avec  $\varepsilon \ll 1$ .

On peut alors montrer que l'écoulement généré par ce champ d'étirement peut se voir comme la superposition de deux écoulements faiblement elliptiques l'un tournant à la vitesse angulaire  $+\gamma/2$  et l'autre à la vitesse angulaire  $-\gamma/2$ . En effet :

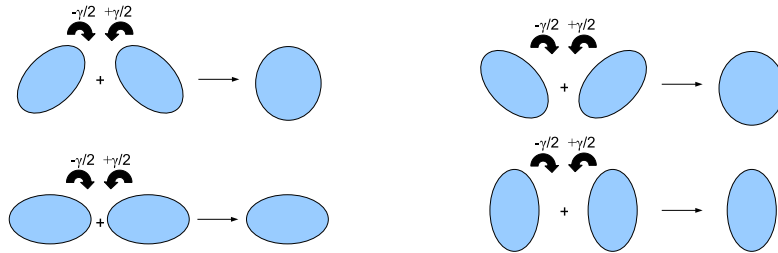
$$\mathbf{V}(r, \theta, t) = \mathbf{V}_1(r, \theta, t) + \mathbf{V}_2(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \quad (4.15)$$

avec

$$\mathbf{V}_1(r, \theta, t) = \frac{\varepsilon\gamma}{2} \left( r \cos 2\left(\theta - \frac{\gamma t}{2}\right) \mathbf{e}_r - r \sin 2\left(\theta - \frac{\gamma t}{2}\right) \mathbf{e}_\theta \right),$$

$$\mathbf{V}_2(r, \theta, t) = \frac{\varepsilon\gamma}{2} \left( r \cos 2\left(\theta + \frac{\gamma t}{2}\right) \mathbf{e}_r - r \sin 2\left(\theta + \frac{\gamma t}{2}\right) \mathbf{e}_\theta \right).$$

$\mathbf{V}_1$  (resp.  $\mathbf{V}_2$ ) étant un champ d'étirement elliptique tournant à la vitesse angulaire  $-\gamma/2$  (resp.  $+\gamma/2$ ).



Il apparaît alors que la physique sous jacente à ce mécanisme de résonance paramétrique d'ondes internes n'est autre que la physique régissant la stabilité d'un tourbillon elliptique en milieu stratifié à vorticité absolue nulle.

### Protocole expérimental

L'expérience effectuée au LADHYX bien que n'ayant pas donné entière satisfaction, a permis sans aucun doute de mettre en évidence le caractère non trivial de cette résonance. La mise en place de l'expérience ne fut pas sans problèmes. En effet l'écoulement défini par le champ de vitesse (4.14) est particulièrement ardu à mettre en place.

Dans les deux expériences décrites ci-dessous certains paramètres demeurent inchangés. Ainsi le cylindre utilisé est un cylindre en PVC extrudé transparent de



11cm diamètre et de 20cm de hauteur. Le fluide est stratifié à l'aide de la méthode des deux bacs décrites précédemment. Pour le forçage on utilise un moteur relié à une came elliptique permettant ainsi de transformer le mouvement de rotation du moteur en mouvement de translation horizontale.

La première expérience réalisée (4.10) bien que ne reproduisant pas l'écoulement désiré a permis de mettre en évidence un mécanisme de résonance direct d'ondes internes dans un fluide stratifié soumis à un forçage horizontale. Ce mécanisme est intimement lié au ballonnement d'un liquide à surface libre (ou sloshing).

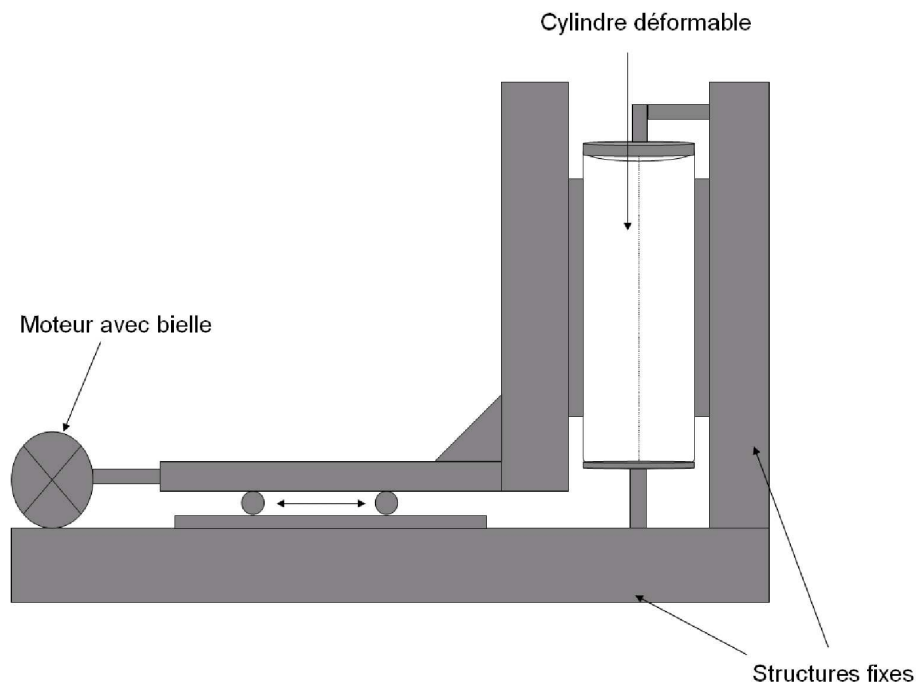


FIGURE 4.10 –

Les différences fondamentales entre l'expérience et l'écoulement de base théorique peuvent être répertoriées de la manière suivante :

- La différence principale réside dans le fait que la compression se faisant d'un seul côté l'axe du cylindre est soumis à un translation. Ainsi le fluide est soumis à une légère translation horizontale d'ordre  $O(\varepsilon)$ .
- Seulement une compression peut être réalisée. En effet le cylindre est collé à des règles en plastique attachées à une structure mobile. Il apparaît alors qu'un étirement requiert un couple (au niveau du moteur ) beaucoup plus important qu'une simple compression. Ainsi en pratique on ne pourra réaliser que la moitié du forçage prévu.
- L'écoulement théorique ne prend pas en compte les effets de confinement et suppose implicitement que le cylindre est infini. Or à chaque compression d'ordre  $O(\varepsilon)$  suivant l'horizontale, la hauteur du fluide augmente d'un ordre



$O(\varepsilon^2)$ . Nous devons ainsi travailler avec une surface libre, ce qui modifie la relation de dispersion et les résonances possibles s'en trouvent modifiées.

### Résultats

Le résultat principal de cette expérience est l'impossibilité de caractériser proprement la résonance paramétrique d'ondes internes prévue. Nous avons pu observer par contre dans le domaine d'existence des ondes internes ( $\gamma < N$ ) une résonance directe due à la translation du fluide. Cette résonance, encore appelée sloshing, apparaissait toujours pour les forçages où il y aurait normalement du y avoir l'instabilité paramétrique d'où une mise en évidence impossible de notre instabilité avec cette expérience.

Notons finalement que l'instabilité elliptique à vorticité absolue nulle n'a été observée qu'une fois dans l'expérience réalisée à l'IRPHE. Nous avons réussi à accrocher l'instabilité, avec le nombre de longueur d'onde prévu théoriquement, en générant un écoulement turbulent avant de se mettre à vorticité absolue nulle. Ce résultat nous incita donc à penser que la difficulté rencontrée pour l'observer était probablement due au fait que l'écoulement expérimental était sans doute très différent de celui prévu théoriquement pour ces paramètres. Malheureusement ce n'est qu'une conjecture. Nous n'avons pas pu effectuer de la PIV afin d'avoir une bonne représentation des écoulements réels.

#### 4.3.2 Autres résultats

##### Scénario de transition à la turbulence

Plusieurs cas de figures ont été observés après le développement linéaires de l'instabilité :

- L'instabilité linéaire sature en amplitude... (Fig. 4.11).
- Après le développement de l'instabilité primaire une instabilité de longueur d'onde moitié se développe ensuite et son amplitude finit par saturé (Fig. 4.12).
- L'amplitude de l'onde résonante ne sature pas et l'écoulement devient pleinement turbulent après l'explosion du vortex.(Fig. 4.13)).

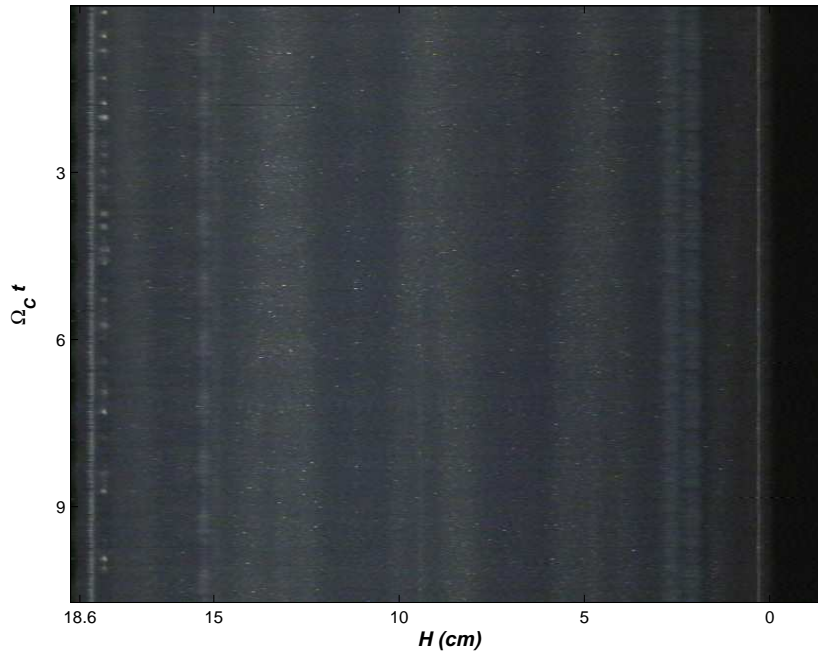


FIGURE 4.11 – Les paramètres expérimentaux sont :  $H = 18.6\text{cm}$ ,  $\varepsilon = 0.179$ ,  $N = 2.56\text{rad/s}$ ,  $\Gamma_a = 0.5$ ,  $N_b = 1.79$ ,  $\Omega_c = 0.23\text{s}^{-1}$  et  $Re = 1084$ . L'instabilité s'est entièrement développée et son amplitude a saturée.

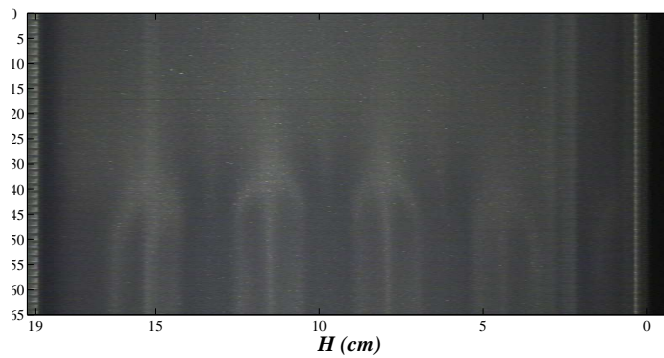


FIGURE 4.12 – Les paramètres expérimentaux sont :  $H = 19\text{cm}$ ,  $\varepsilon = 0.085$ ,  $N = 2.68\text{rad/s}$ ,  $\Gamma_a = 0.68$ ,  $N_b = 1.77$ ,  $\Omega_c = 0.24\text{s}^{-1}$  et  $Re = 1140$ . L'amplitude de l'instabilité principale arrive à saturation et une instabilité de longueur d'onde moitié se met en place.

Il serait tentant de conjecturer que l'énergie des modes résonants principaux est suffisante, dans certaines configurations, pour activer la résonance d'autres modes. La turbulence résultant alors de la superposition de ces modes résonants.

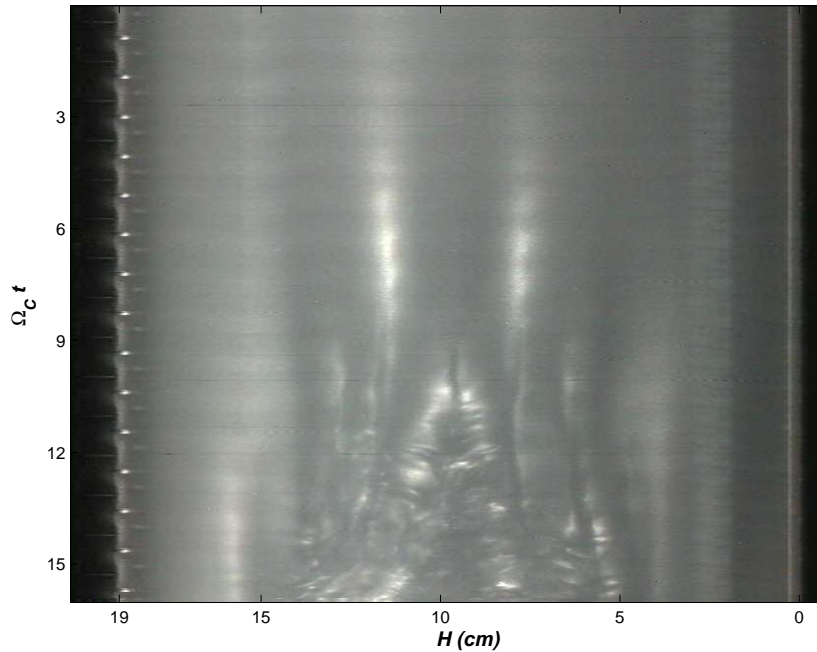


FIGURE 4.13 – Les paramètres expérimentaux sont :  $H = 19\text{cm}$ ,  $\varepsilon = 0 - 179$ ,  $N = 2.75\text{rad/s}$ ,  $\Gamma_a = 0.95$ ,  $N_b = 1.37$ ,  $\Omega_c = 0.32\text{s}^{-1}$  et  $Re = 1520$ . Dans ce dernier scénario l’instabilité principale croît puis le vortex explose. L’explosion du vortex a été systématiquement observée au milieu du cylindre en premier lieu.

### Instabilité élliptico-centrifuge ?

Il nous est apparu lors de la mesure du seuil d’instabilité sans rotation de la table ( $\Gamma_a = 2$ ) qu’une instabilité se mettait en place dans des régions a priori stable. Cette instabilité peut être décrite de la manière suivante :

- Les modes se développant sont stationnaires et symétriques (Fig. 4.14).
- L’instabilité se développe systématiquement par les extrémités du cylindre, dans les zones où l’ellipticité varie suivant la verticale.
- L’instabilité n’apparaît seulement que lorsque le cylindre est contraint elliptiquement (l’écoulement axisymétrique correspondant étant stable).
- Cette instabilité n’a été observée qu’en milieu stratifié pour des nombres de Reynolds suffisamment faible pour que l’on soit dans une stable de l’instabilité élliptique ( $N_b > 1$ ).

Cette instabilité avait été observée (voir FIG 5.23 Eloy, 2000) dans le cas non stratifié et non tournant pour des nombres de Reynolds très importants. Il apparaissait alors que cette instabilité ne se développait que pendant la phase transitoire de l’écoulement et ne se reformait plus après l’explosion du vortex et la phase de relaminarisation.

Dans le cas stratifié, nous n’avons pas observé de relaminarisation après l’explosion du vortex due à cette instabilité. L’instabilité conduit de manière systématique à une explosion du vortex et l’écoulement turbulent suivant persiste.



FIGURE 4.14 – Instabilité pendant le transitoire.

On pourrait éventuellement émettre l'hypothèse que cette instabilité provient de la déstabilisation de l'écoulement de coin par le forçage elliptique. En effet le coin est une zone critique pour les écoulements stratifiés puisque le spin-up est très différent du cas homogène dans cette région de l'écoulement, comme l'ont observé Flór *et al.* (2002).

#### **Et le mélange dans tout ça ?**

Afin de voir si l'instabilité elliptique pouvait être considéré comme un acteur privilégié du mélange en milieu stratifié tournant, nous avons réalisé des mesures après le développement d'une longue instabilité. Comme le montre la figure 4.15, il semblerait que la réponse soit non. Ainsi après 5 minutes de développement de l'instabilité (notons qu'ici le vortex a explosé et que l'écoulement était turbulent assez rapidement), le gradient mesuré à l'aide d'un conductimètre n'avait quasiment pas bougé. Mais nous pouvons émettre l'hypothèse que compte tenu des petites dimensions considérées (faibles rayon et hauteur du cylindre) et des fréquences de Brünt-Väisälä extrêmement élevées, les particules fluides n'ont pas le temps de changer de propriétés durant le cours laps de temps que dure l'expérience. Je pense donc que l'on ne pourrait conclure que trop hâtivement du caractère inutile de ce mécanisme.

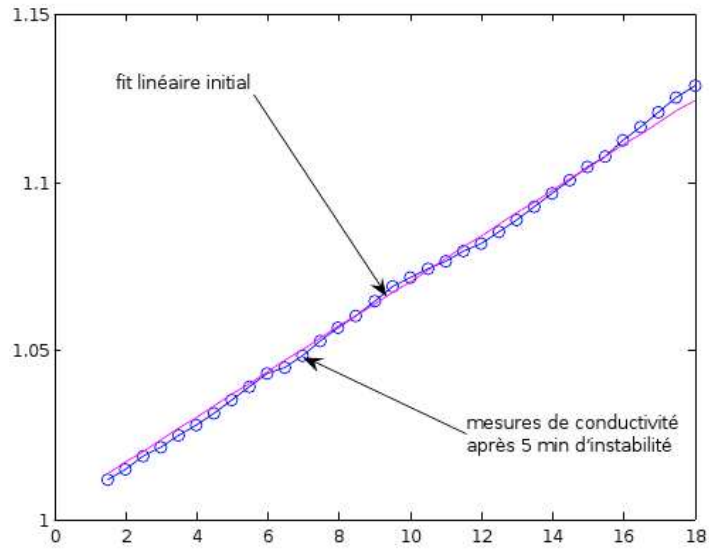


FIGURE 4.15 – Mesure de la salinité par conductimétrie avant la mise en route de l'expérience (trait rouge) et après 5 minutes d'instabilité.

#### 4.4 Conclusion

En guise de conclusion, nous pouvons affirmer que l'instabilité elliptique existe en milieu stratifié tournant. Cette instabilité est particulièrement violente autour du seuil  $\Gamma_a = 1$  aussi bien dans le cas fortement que faiblement stratifié. Elle reste par ailleurs poussive dans le cas fortement stratifié au fur et à mesure que  $\Gamma_a$  diminue. L'expérience a remarquablement prouvé le caractère antagoniste de la stratification et de la rotation sur l'instabilité d'un tourbillon elliptique. Les prédictions théoriques concernant la structure des ondes résonantes se sont révélées être en bon accord avec les observations. Par contre, nous n'avons pas réussi à observer l'instabilité à vorticité absolue nulle.

## Chapitre 5

# Conclusion

Ce travail s'est principalement axé sur l'étude aussi bien théorique qu'expérimentale de l'instabilité elliptique dans un milieu stratifié tournant.

Nous avons tout d'abord montré à l'aide d'un formalisme théorique basé sur la théorie des instabilités locales que l'instabilité elliptique était un mécanisme générique d'instabilité pour les tourbillons d'Abrashkin–Yakubovich bien que ces tourbillons ne soient pas elliptiques. Ces tourbillons sont ainsi déstabilisés de la même manière que les tourbillons elliptiques en présence d'une rotation extérieure et/ou plongé dans un milieu stratifié linéairement en densité.

Pour prendre en compte des effets plus réalistes (comme le confinement et le caractère visqueux), nous avons développé une étude plus traditionnelle sur un tourbillon elliptique de vorticité uniforme plongé dans un fluide stratifié tournant. S'en suit que le mécanisme de déstabilisation du tourbillon elliptique n'est autre qu'une résonance paramétrique d'ondes gravito-inertielles. Nous avons alors effectué une étude de stabilité linéaire et obtenu ainsi une expression du taux de croissance de ces ondes résonantes en prenant en compte les effets de confinement axial et radial et les effets visqueux aussi bien volumiques que surfaciques. Ces contributions ont pour effets d'atténuer drastiquement les taux de croissance de l'instabilité. Ainsi il sera très difficile voire impossible d'observer expérimentalement l'instabilité elliptique pour des anticyclones tels que leurs vorticité absolue  $\Gamma_a$  vérifie  $\Gamma_a < -1$  en fluide faiblement stratifié. Pour des fluides fortement stratifié, la théorie montre que les seules ondes résonantes sont les ondes symétriques hélicoïdales  $(-1, 1, 1)$ . Cette résonance a été observée expérimentalement et relativement bien caractérisée dans le régime linéaire. Elle n'a malheureusement pu être observée que lorsque la vorticité absolue de l'écoulement vérifiaient  $0.3 < \Gamma_a < 1$ . Nous n'avons pu mettre en évidence le caractère instable de ces tourbillons à vorticité absolue nulle qui était, je le répète, le but initial. De plus cette instabilité se développe la plupart du temps assez lentement, c'est une des raisons pour lesquelles nous n'avons pu obtenir des taux de croissance expérimentaux pertinents.

De nombreux points d'études subsistent à l'issue de ce travail.

Premièrement, il conviendrait de caractériser plus proprement cette instabilité transitoire brièvement décrite dans le chapitre précédent. En effet, il n'y a toujours pas eu à ma connaissance d'études aussi bien théoriques qu'expérimentales de cette instabilité.

Ensuite une étude faiblement non linéaire de l'instabilité elliptique en stratifié tournant permettrait sans doute de mieux comprendre les échanges énergétiques entre modes résonants.

Finalement il conviendrait de comprendre pourquoi cette instabilité n'a pas pu être attrapée à vorticité absolue nulle. Des mesures de PIV serait sans doute nécessaire afin de voir si l'écoulement obtenu est bien celui prévu théoriquement. Cette étude permettrait aussi de caractériser le spin-up en stratifié tournant.

# Bibliographie

- ABRASHKIN, A. A. & YAKUBOVICH, E. I. 1984 Planar rotational flows of an ideal fluid. *Sov. Phys. Dokl.* **29**, 370–371.
- BASSOM, A. P. & GILBERT, A. D. 1998 The spiral wind-up of vorticity in an inviscid planar vortex. *J. Fluid Mech.* **371**, 109–140.
- BAYLY, B. J. 1986 Three-dimensional instability of elliptical flow. *Phys. Rev. Letters* **57** (17), 2160–2163.
- BAYLY, B. J. 1987 Three-dimensional instabilities in quasi-two dimensional inviscid flows. In *Nonlinear wave interactions in fluids; Proceedings of the Symposium, Boston, MA. New York, American Society of Mechanical Engineers*, pp. 71–77.
- BAYLY, B. J., HOLM, D. D. & LIFSCHITZ, A. 1996 Three-dimensional stability of elliptical vortex columns in external strain flows. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **354**, 895–926.
- BAYLY, B. J., ORSZAG, S. & HERBERT, T. 1988 Instability mechanisms in shear-flow transition. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 359–391.
- BENDER, C. M. & ORSZAG, S. 1978 *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*.. McGraw-Hill.
- BENNET, A. 2006 *Lagrangian Fluid Dynamics*.. Cambridge University Press.
- BILLANT, P. & CHOMAZ, J. M. 2000 Experimental evidence for a new instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **418**, 167–188.
- CAMBON, C., BENOIT, J. P., SHAO, L. & JACQUIN, L. 1994 Stability analysis and large eddy simulation of rotating turbulence with organized eddies. *J. Fluid Mech.* **278**, 175–200.
- CAMBON, C. & SCOTT, J. F. 1999 Linear and nonlinear models of anisotropic turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **31**, 1–53.
- CRAIK, A. D. D. 1989 The stability of unbounded two- and three-dimensional flows subject to body forces : some exact solutions. *J. Fluid Mech.* **198**, 275–292.
- DRITSCHEL, D. G. 1998 On the persistence of non-axisymmetric vortices in inviscid two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.* **371**, 141–155.



- ECKHOFF, K. S. & STORESLETTEN, L. 1978 A note on the stability of steady inviscid helical gas flows. *J. Fluid Mech.* **89**, 401–411.
- ELOY, C. 2000 Instabilité multipolaire de tourbillons. PhD thesis, Université Aix-Marseille II.
- ELOY, C. & LE DIZÈS, S. 2001 Stability of the rankine vortex in a multipolar strain field. *Phys. Fluids* **13**, 660–676.
- ELOY, C., LE GAL, P. & LE DIZÈS, S. 2003 Elliptic and triangular instabilities in a rotating cylinders. *J. Fluid Mech.* **476**, 357–388.
- FLÓR, J. B., UNGARISH, M. & BUSH, J. W. M. 2002 Spin-up from rest in a stratified fluid : boundary flows. *J. Fluid Mech.* **472**, 51–82.
- FORTUIN, J. 1960 Theory and application of two supplementary methods of constructing density gradient columns. *J. Polymer Sci.* **44**, 505–515.
- FRIEDLANDER, S. 2001 On nonlinear instability and stability for stratified shear flow. *J. Math. Fluid Mech.* **3**, 82–87.
- FRIEDLANDER, S. & LIPTON-LIFSCHITZ, A. 2003 *Localized instabilities in fluids.*, *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, vol. 2. North-Holland.
- FRIEDLANDER, S. & VISHIK, M. M. 1991 Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2204–2206.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press.
- GUIMBARD, D. & LEBLANC, S. 2006 Local stability of the Abrashkin-Yakubovich family of vortices. *J. Fluid Mech.* **567**, 91–110.
- HILL, D. F. 2002 General density gradients in general domains : the “two-tank” method revisited. *Experiments in fluids* **32**, 434–440.
- HUERRE, P. & ROSSI, M. 1998 *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*. Cambridge University Press.
- KERSWELL, R. R. 2002 Elliptical instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 83–113.
- KERSWELL, R. R. & BARENGHI, C. F. 1995 On the viscous decay rates of inertial waves in a rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* **285**, 203–214.
- KUDLICK, M. 1966 On the transient motions in a contained rotating fluid. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- LE BARS, M., LE DIZÈS, S. & LE GAL, P. 2007 Coriolis effects on the elliptical instability in cylindrical and spherical rotating containers. *J. Fluid Mech.* **585**, 323–382.
- LE DIZÈS, S. 2000 Three-dimensional instability of a multipolar vortex in a rotating flow. *Phys. Fluids* **12**, 2762–2774.

- LEBLANC, S. 2003 Internal wave resonances in strain flows. *J. Fluid Mech.* **477**, 259–283.
- LEBLANC, S. 2004 Local stability of gerstner’s waves. *J. Fluid Mech.* **506**, 245–254.
- LEBLOND, P. H. & MYSAK, L. A. 1978 *Waves in the Ocean*. Elsevier Science Publishers.
- LIFSCHITZ, A. 1994 On the instability of certain motions of an ideal incompressible fluid. *Adv. Appl. Math.* **15**, 404–436.
- LIFSCHITZ, A. & HAMEIRI, E. 1991 Local stability conditions in fluid dynamics. *Phys. Fluids A* **3**, 2644–2651.
- MALKUS, W. V. R. 1989 An experiment study of global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **48**, 123–134.
- MIYAZAKI, T. 1993 Elliptical instability in a stably stratified rotating fluid. *Phys. Fluids A* **5**, 2702–2709.
- MIYAZAKI, T. & FUKUMOTO, Y. 1992 Three-dimensional instability of strained vortices in a stably stratified fluid. *Phys. Fluids A* **4**, 2515–2522.
- MIYAZAKI, T., IMAI, T. & FUKUMOTO, Y. 1994 Three-dimensional instability of kirchhoff’s elliptic vortex. *Phys. Fluids* **7**, 195–202.
- MOORE, D. & SAFFMAN, P. G. 1975 The instability of straight vortex filament in a strain field. *Pro. R. Soc. London A* **346**, 413–425.
- PIERREHUMBERT, R. T. 1986 Universal short-wave instability of two dimensional eddies in an inviscid fluid. *Phys. Rev. Letters* **57** (17), 2157–2159.
- ROBINSON, A. C. & SAFFMAN, P. G. 1984 Three-dimensional stability of an elliptical vortex in a straining field. *J. Fluid Mech.* **142**, 451–466.
- ROSSI, M. 2000 *Of vortices and vortical layers : an overview*. In *Vortex Structures and Dynamics* ed. A. Maurel and P. Petitjeans. Springer.
- SAFFMAN, P. G. 1992 *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.
- ÖSTER, G. 1965 Density gradients. *Sci. Am.* **213**, 70–76.
- TSAÏ, C. & WIDNALL, S. E. 1976 The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. Fluid Mech.* **73**, 721–733.
- VLADIMIROV, V. A. & IL’IN, K. I. 1988 Three-dimensional instability of an elliptic kirchhoff vortex. *Fluid Dyn.* **23**, 356–360.
- WALEFFE, F. 1989 The 3d instability of a strained vortex and its relation to turbulence. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.

- WALEFFE, F. 1990 On the three-dimensional instability of strained vortices. *Phys. Fluids A* **2**, 76–80.
- WEDEMEYER, E. H. 1966 Viscous corrections to Stewartson's stability criterion. *BRL Report* **1325**.
- YAKUBOVICH, E. I. & ZENKOVICH, D. A. 2001 Matrix approach to Lagrangian fluid dynamics. *J. Fluid Mech.* **443**, 167–196.
- ZEITLIN, V. 1991 On the backreaction of acoustic radiation for distributed two-dimensional vortex structures. *Phys. Fluids A* **3**, 1677–1680.

## L'INSTABILITÉ ELLIPTIQUE EN MILIEU STRATIFIÉ TOURNANT

Une étude théorique et expérimentale de la stabilité de tourbillons elliptiques est menée à terme dans la présente étude.

On analyse dans un premier temps la stabilité de tourbillons lagrangiens stationnaires non uniformes avec un formalisme courte longueur d'onde de type WKB. Il apparaît alors que le mécanisme de déstabilisation de ces tourbillons est le même que celui déstabilisant un tourbillon elliptique uniforme. Ce résultat montre ainsi que l'instabilité elliptique est un mécanisme universel de déstabilisation 3D de tourbillons 2D.

Dans un deuxième temps est étudié théoriquement et expérimentalement la stabilité de tourbillons elliptiques confinés dans un fluide stratifié en rotation. Le dispositif expérimental permettant cette étude est constitué d'un cylindre en rotation (rempli d'un fluide stratifié en densité suivant la verticale), déformé elliptiquement par deux rouleaux fixes, le tout étant solidaire d'une table elle aussi en rotation. En faisant varier les différents paramètres de notre expérience (la fréquence de Brünt-Väisälä  $N_b$  et la vorticité absolue  $\Gamma_a$ , les deux grandeurs étant adimensionnées par le taux relatif de rotation des particules fluides), nous avons observé que la stratification et la rotation ont une contribution antagoniste sur la stabilité d'un tourbillon elliptique. Ainsi si la stratification est suffisamment forte ( $N_b > 1$ ), nous observons que seuls les anticyclones (tels que  $|\Gamma_a| < 1$ ) sont instables. Les cyclones étant toujours stables. Par ailleurs si la stratification est faible ( $N_b < 1$ ), les zones d'instabilité s'inversent. Finalement les longueurs d'ondes ainsi que les taux de croissance des modes, mesurés par analyse d'images, sont en bon accord avec les prévisions théoriques.

**Mots clés :** Stabilité hydrodynamique, dynamique tourbillonnaire, instabilité elliptique, optique géométrique, ondes gravito-inertielle.

KEY-WORDS :

LABORATOIRE D'ACCUEIL  
Laboratoire de Sondage Électromagnétique de l'Environnement Terrestre (LSEET)  
CNRS, UMR 6017, Université du Sud Toulon-Var. Avenue de l'Université, 83957  
La Garde, France.