

Inversion bayésienne myope et non supervisée
pour l'imagerie sur-résolue.
Application à l'instrument SPIRE de
l'observatoire spatial Herschel.

François Orieux

Laboratoire des Signaux et Systèmes
Institut d'Astrophysique Spatiale
Laboratoire de l'Intégration du Matériau aux Systèmes

Jean-François Giovannelli (IMS)
Thomas Rodet (L2S)
Alain Abergel (IAS)

16 novembre 2009

Contexte

Herschel

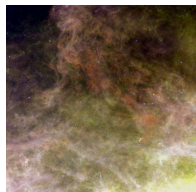
- ▶ Sub-millimétrique
- ▶ Cryogénie
- ▶ Miroir non refroidi (3,5 m)
- ▶ Trois instruments

Photomètre de SPIRE

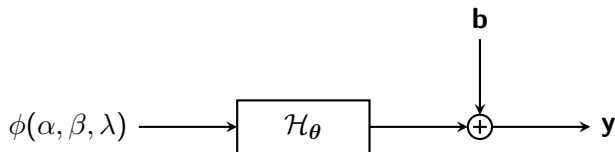
- ▶ 0,3 Kelvin
- ▶ 250, 360 et 520 μm
- ▶ 139, 88 et 43 bolomètres

Enjeux

Estimation de cartes du ciel



Problématiques



- ▶ Modèle physique
 - ▶ Interprétation des données
 - ▶ Basé sur la physique
 - ▶ Modèle pour ϕ
 - ▶ Calcul rapide malgré la complexité
- ▶ Compromis données/*a priori*
- ▶ Paramètres instruments θ

Plan

Introduction

Modèle d'acquisition

- Modèles physiques
- Contributions

Inversion

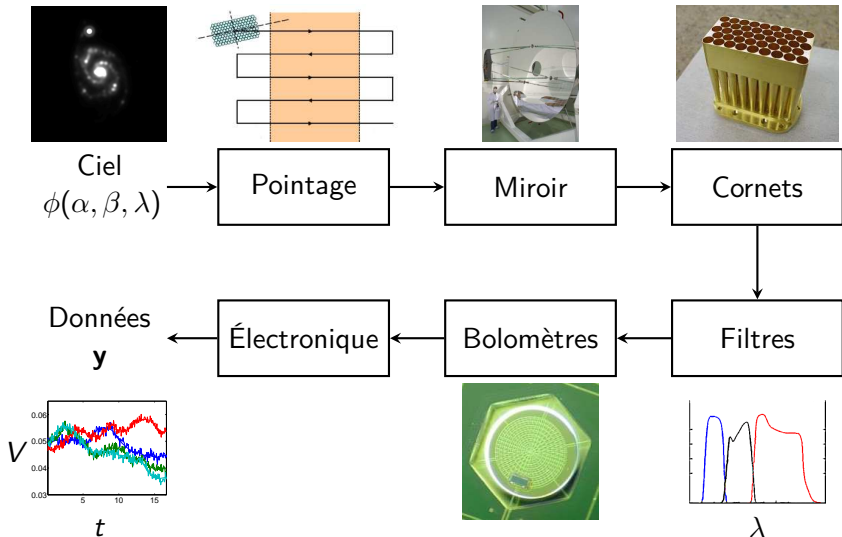
- Modèles probabilistes
- Algorithme
- Contributions

Résultats expérimentaux

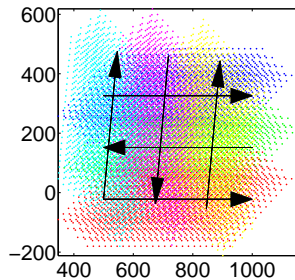
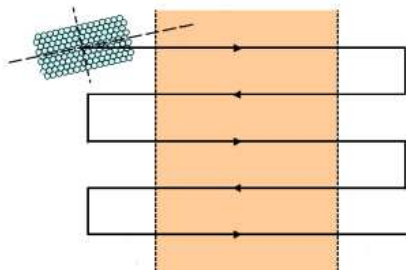
- Données simulées
- Données réelles

Synthèse et perspectives

Modèle d'acquisition



Pointage *Large map*



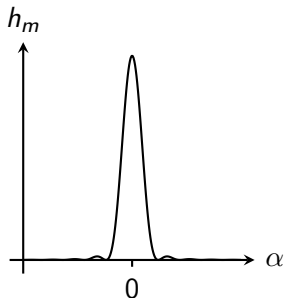
$$p_{\alpha}(t) = v_{\alpha}t + c_{\alpha}$$

$$p_{\beta}(t) = v_{\beta}t + c_{\beta}$$

$$\theta = \{v_{\alpha}, v_{\beta}, \dots\}$$

Optique

- ▶ Miroir
 - ▶ Convolution par h_m
 - ▶ Figure d'Airy \approx gaussienne
- ▶ Cornets
 - ▶ Intégration capteur h_c
 - ▶ Échantillonnage spatial (α_l, β_m)
- ▶ Dépend de λ (FWHM $\approx \lambda/D$)
- ▶ Dépend de t

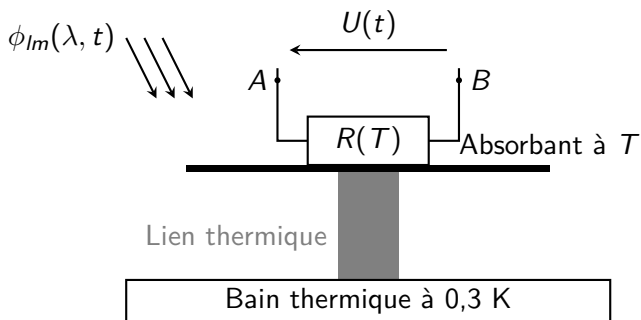


$$\phi_{Im}(\lambda, \mathbf{t}) = \iint \phi(\alpha, \beta, \lambda) h_o(\alpha - \alpha_l - p_\alpha(\mathbf{t}), \beta - \beta_m - p_\beta(\mathbf{t}), \lambda) d\alpha d\beta$$

$$h_o(\alpha, \beta, \lambda) = h_m \star h_c = \frac{1}{2\pi\sigma_\lambda^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sigma_\lambda^2}\right)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \{\sigma_\lambda, \dots\}$$

Bolomètres



- ▶ Intégration en longueur d'onde
- ▶ Développement au premier ordre [Sudiwala02]

$$U_{lm}(nT_e) = \int_t \int_\lambda \phi_{lm}(\lambda, t) d\lambda h_b(t - nT_e) dt$$

$$h_b(t) = G \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

$$\theta = \{G, \tau, \dots\}$$

Modèle pour le ciel $\phi(\alpha, \beta, \lambda)$

Modélisation adéquate

Calculs explicites

Longueur d'onde λ

- ▶ Modèle classique : Dirac en λ_0
- ▶ Proposé : développement de Taylor ($K = 0, 1$ ou $2, \dots$)

$$\phi(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{k=0}^K \phi_{\lambda_0}^k(\alpha, \beta)(\lambda - \lambda_0)^k$$

Spatial (α, β)

Decomposition : **gaussienne**, sinc, indicatrice

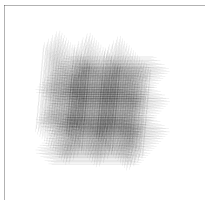
$$\phi_{\lambda_0}^k(\alpha, \beta) = \sum_{ij} x^k(i, j) \psi(\alpha - iT_\alpha, \beta - jT_\beta)$$

Modèle complet

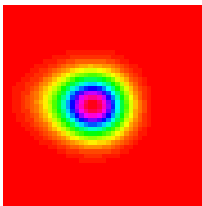
$$C(l, m, n) = \sum_k \sum_{ij} x^k(i, j) \int_{\lambda} h_f(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^k$$

$$\left[\iiint \psi(\alpha - iT_{\alpha}, \beta - jT_{\beta}) h_o(\alpha - \alpha_l, \beta - \beta_m, \lambda, t) \right. \\ \left. h_b(t - nT_e) d\alpha d\beta dt \right] d\lambda$$

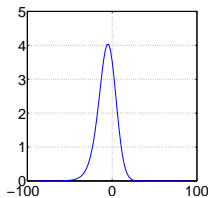
$$\Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{H}_{\theta} \mathbf{x} + \mathbf{b} \approx \mathbf{P}_{\theta} \tilde{\mathbf{H}}_{\theta} \mathbf{x} + \mathbf{b}$$



Redondance



RI



Coupe

Contributions modèle instrument

Différences avec existant [Sibthorpe09]

- ▶ Mise en équation fine
- ▶ Variables continues pour α, β, λ
- ▶ Intégration λ
- ▶ Linéaire

Analyse

- ▶ Mise en regard des vitesses, fréquences de coupure, *etc.*
- ▶ Sur-résolution (ICIP09)
- ▶ Inversion

Plan

Introduction

Modèle d'acquisition

Modèles physiques

Contributions

Inversion

Modèles probabilistes

Algorithme

Contributions

Résultats expérimentaux

Données simulées

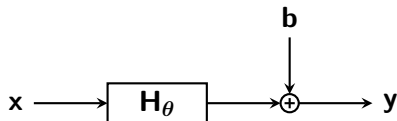
Données réelles

Synthèse et perspectives

Estimation bayésienne

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}}, \gamma_{\mathbf{x}}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}})p(\mathbf{x}|\gamma_{\mathbf{x}})}{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}}, \gamma_{\mathbf{x}})}$$

1. Modèle $\mathbf{y} = \mathbf{H}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{x} + \mathbf{b}$



2. Loi du bruit $p(\mathbf{b}|\gamma_{\mathbf{b}}) \Rightarrow$ vraisemblance $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}})$
3. Loi *a priori* $p(\mathbf{x}|\gamma_{\mathbf{x}})$
4. Estimateur ponctuel : maximum, moyenne *a posteriori*
5. Incertitude

Difficultés

- ▶ Estimation de $\boldsymbol{\theta}$: aspects myopes (aveugles)
- ▶ Estimation de $\gamma_{\mathbf{b}}, \gamma_{\mathbf{x}}$: aspects non supervisés

Régularité spatiale

Mesure de rugosité

$$\left\| \frac{\partial \phi_{\lambda_0}^k(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \phi_{\lambda_0}^k(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right\|^2 = \mathbf{x}^t (\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta) \mathbf{x}$$

Adaptée à l'émission étendue

Favorise la régularité

$$\gamma_{\mathbf{x}} \mathbf{R}^{-1} = \gamma_{\mathbf{x}} (\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta)$$

et

$$p(\mathbf{x} | \gamma_{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-N/2} \gamma_{\mathbf{x}}^{N/2} \det[\mathbf{R}]^{-1/2} \exp\left(-\frac{\gamma_{\mathbf{x}}}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)$$

Loi conjuguée. Estimateur conditionnellement linéaire

Estimation d'hyper-paramètres

- ▶ Courbe en L [Hansen92]
- ▶ Validation croisée [Fortier93]
- ▶ Vraisemblance marginale [Molina99, Jalobeanu01] :

$$\begin{aligned} [\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}_b}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}_x}] &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}_b, \boldsymbol{\gamma}_x} \int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}, \mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}_b, \boldsymbol{\gamma}_x) d\mathbf{x} \\ &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}_b, \boldsymbol{\gamma}_x} p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}_b, \boldsymbol{\gamma}_x) \end{aligned}$$

Loi *a posteriori* étendue

Bayésien hiérarchique

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}}, \gamma_{\mathbf{x}} | \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}}) p(\mathbf{x} | \gamma_{\mathbf{x}}) p(\boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}}, \gamma_{\mathbf{x}})$$

- ▶ Maximum joint [Molina06, Babacan09] : $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\gamma}_{\mathbf{b}}, \hat{\gamma}_{\mathbf{x}}$
- ▶ Intégration hors du problème [Mazet05] :

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \int_{\boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}}, \gamma_{\mathbf{x}}} p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \gamma_{\mathbf{b}}, \gamma_{\mathbf{x}} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} d\gamma_{\mathbf{b}} d\gamma_{\mathbf{x}}$$

Modèles utilisés

- ▶ Lois conjuguées $\gamma_i \sim \mathcal{G}(\alpha_i, \beta_i)$ avec $\alpha_i \equiv 0$ et $\beta_i \equiv +\infty$
- ▶ Loi uniforme : $p(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathcal{U}_{[\mathbf{a} \ \mathbf{b}]}(\boldsymbol{\theta})$

Moyenne *a posteriori*

- ▶ Approximation de Laplace
- ▶ Bayésien variationnel
- ▶ Intégration numérique (MCMC)

$$\hat{\mathbf{x}} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}^{(k)}$$

Échantillonneur de Gibbs

1. $\mathbf{x}^{(k)} | \gamma_{\mathbf{x}}^{(k-1)}, \gamma_{\mathbf{b}}^{(k-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(k-1)}, \mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{x}|\ast}, \mathbf{R}_{\mathbf{x}|\ast})$
2. $\gamma_{\mathbf{b}}^{(k)} | \boldsymbol{\theta}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)} \sim \mathcal{G}\left(\alpha_{\mathbf{b}} + \frac{M}{2}, \left(\beta_{\mathbf{b}}^{-1} + \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}^{(k)}\|^2 / 2\right)^{-1}\right)$
3. $\gamma_{\mathbf{x}}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)} \sim \mathcal{G}\left(\alpha_{\mathbf{x}} + \frac{N-1}{2}, \left(\beta_{\mathbf{x}}^{-1} + \|\mathbf{D} \mathbf{x}^{(k)}\|^2 / 2\right)^{-1}\right)$
4. $\boldsymbol{\theta}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}, \gamma_{\mathbf{b}}^{(k)} \sim ?$

Échantillonnage du ciel

Gaussien mais matrice trop volumineuse

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}|\ast} = \gamma_{\mathbf{b}} \mathbf{R}_{\mathbf{x}|\ast} \mathbf{H}_{\theta}^t \mathbf{y}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}|\ast} = (\gamma_{\mathbf{b}} \mathbf{H}_{\theta}^t \mathbf{H}_{\theta} + \gamma_{\mathbf{x}} \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1}$$

Optimisation d'un système perturbé

$$J(\mathbf{x}) = \gamma_{\mathbf{b}} \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{H}_{\theta} \mathbf{x}\|^2 + \gamma_{\mathbf{x}} \|\mathbf{D}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{m}}_{\mathbf{x}})\|^2$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \delta_{\mathbf{y}} \quad \text{où} \quad \delta_{\mathbf{y}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \gamma_{\mathbf{b}}^{-1/2} \mathbf{I})$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{0} + \delta_{\mathbf{x}} \quad \text{où} \quad \delta_{\mathbf{x}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, (\gamma_{\mathbf{x}} \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1/2})$$

$$\implies \arg \min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{x}|\ast}, \mathbf{R}_{\mathbf{x}|\ast})$$

Échantillonnage de θ

$$p(\theta | \mathbf{y}, \mathbf{x}^{(k)}, \gamma_{\mathbf{b}}^{(k)}) \propto \exp \left[-\frac{\gamma_{\mathbf{b}}^{(k)}}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\theta} \mathbf{x}^{(k)}\|^2 \right] \mathcal{U}_{[a \ b]}(\theta)$$

Metropolis-Hastings

1. Proposition : $\theta_p \sim \mathcal{U}_{[a \ b]}(\theta)$
2. Critère d'acceptation

$$J(\theta^{(k)}, \theta_p) = \frac{\gamma_{\mathbf{b}}^{(k)}}{2} \left(\|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\theta^{(k)}} \mathbf{x}^{(k+1)}\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\theta_p} \mathbf{x}^{(k+1)}\|^2 \right)$$

3. Acceptation/Conservation : tirer $t \sim \mathcal{U}_{[0 \ 1]}(t)$ prendre

$$\theta^{(k+1)} = \begin{cases} \theta_p & \text{si } \log t < \min\{J, 0\} \\ \theta^{(k)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Contributions inversion

Principaux

- ▶ Inversion avec modèle de SPIRE
- ▶ Sur-résolution
- ▶ Estimation des hyper-paramètres
- ▶ Estimation des paramètres instruments

Autres

- ▶ Prise en compte d'une dérive thermique
- ▶ Modélisation des données manquantes ou aberrantes

Plan

Introduction

Modèle d'aquisition

Modèles physiques

Contributions

Inversion

Modèles probabilistes

Algorithme

Contributions

Résultats expérimentaux

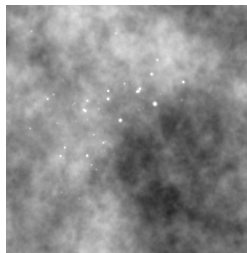
Données simulées

Données réelles

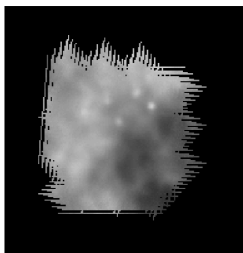
Synthèse et perspectives

Résultats non supervisés (données simulées)

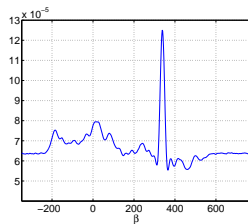
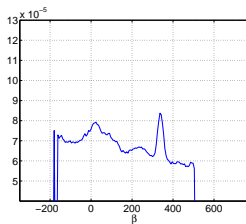
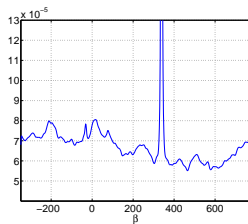
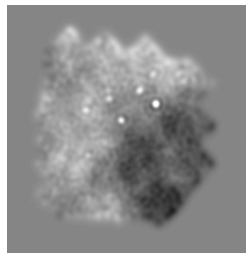
Vrai



Co-addition



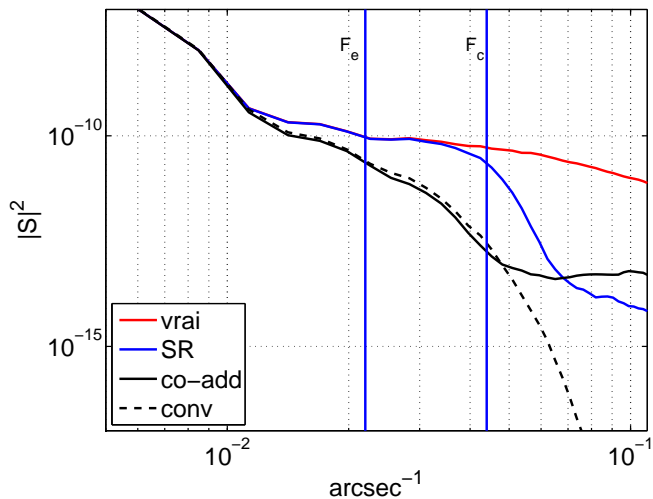
Inversion



DSP empiriques

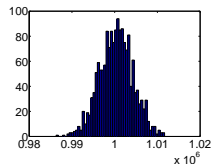
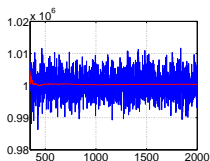
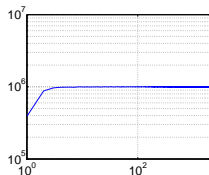
$$F_c = 0.044 \text{ arcsec}^{-1}$$

$$F_e = 0.022 \text{ arcsec}^{-1}$$

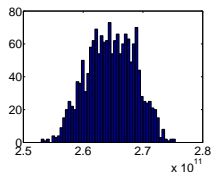
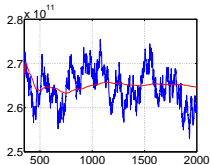
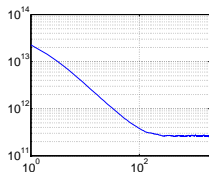


Hyper-paramètres

$$\widehat{\gamma}_{\mathbf{b}} \approx 10^6 \quad (\gamma_{\mathbf{b}}^* = 10^6)$$

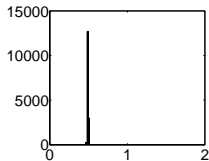
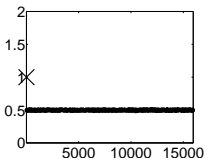


$$\widehat{\gamma}_{\mathbf{x}} \approx 2,6 \times 10^{11}$$

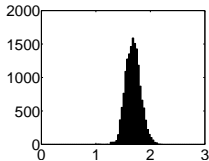
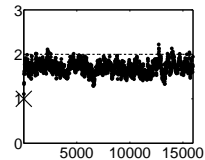


Déconvolution myope non supervisé (soumis à JOSA-A)

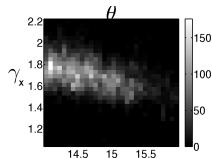
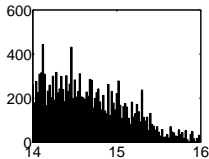
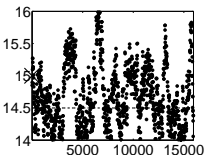
$$\gamma_{\mathbf{b}} = 0.5$$
$$\widehat{\gamma}_{\mathbf{b}} \approx 0.49$$



$$\gamma_{\mathbf{x}} = 2$$
$$\widehat{\gamma}_{\mathbf{x}} \approx 1.75$$



$$\theta = 14.5$$
$$\widehat{\theta} \approx 14.6$$



Données réelles (NGC7023). Inversion supervisée.

- ▶ Également appliqué à des données réelles
- ▶ Résultats préliminaires
- ▶ Méthode supervisée non myope
- ▶ Résultat comparable aux cas simulés

Plan

Introduction

Modèle d'aquisition

Modèles physiques

Contributions

Inversion

Modèles probabilistes

Algorithme

Contributions

Résultats expérimentaux

Données simulées

Données réelles

Synthèse et perspectives

Synthèse

Modèle instrument

- ▶ Modélisation de la physique d'acquisition
- ▶ Modèle avec la longueur d'onde
- ▶ Calcul en quelques secondes
- ▶ Analyse du modèle

Inversion

- ▶ Approche bayésienne (modèle physique, *a priori*)
- ▶ Reconstruction et sur-résolution d'images
- ▶ Non supervisé
- ▶ Myope
- ▶ Données réelles

Perspectives

Astrophysique

- ▶ Autres instruments (PACS, FTS, Planck, . . .)
- ▶ Utilisation de la loi de Planck
- ▶ Glitch (modélisation impulsionnelle)
- ▶ Conditions d'échantillonnage

Inversion

- ▶ Estimation de paramètres instruments
- ▶ Algorithme
 - ▶ Échantillonnage de loi normale multivariée
 - ▶ Pré-conditionnement, quasi-Newton
 - ▶ Hamiltonien, sur-relaxation
- ▶ Modèle robuste pour contour
- ▶ Modèle multi-composante (doux et étoiles)