Quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents

Jean-Philippe Michel

Université Aix-Marseille II
Faculté des sciences de Luminy
Centre de Physique Théorique - UMR 6207

Thèse

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité
« Physique Théorique et Mathématique »

par

Jean-Philippe MICHEL

Quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents

Thèse soutenue le 16 octobre 2009 devant le jury composé de :

M.	Robert Coquereaux	(Examinateur)
M.	Christian Duval	(Directeur)
M.	Dimitry Leites	(Examinateur)
M.	Pierre Lecomte	(Rapporteur)
M.	Valentin Ovsienko	(Rapporteur)
M.	Gijs Tuynman	(Examinateur)

Remerciements

C'est non sans émotion que j'écris ces quelques mots, destinés à toutes celles et ceux qui ont croisé ma route et m'ont fait grandir scientifiquement et personnellement.

Ma pensée se tourne en premier lieu vers Christian Duval qui a imaginé les grandes lignes de cette thèse. La richesse scientifique des deux sujets qu'il m'a proposés fut très stimulante. Ses qualités humaines et d'encadrement firent de l'élaboration de ma thèse un réel plaisir, partagé je crois. Je me rappelle son calme, essentiel face à mon euphorie suite à un nouveau résultat, et son réel enthousiasme après vérification. Il a su me donner toute la liberté que je pouvais prendre, tout en étant présent pour échanger sur mes avancées et mes détours, m'aiguillant vers de nouvelles lectures, et me débloquant lorsque je restais dans une impasse. Ses conseils de présentation et de rédaction m'ont été des plus précieux. Je lui suis également très reconnaissant pour son investissement dans mon avenir scientifique. Grâce à lui, l'étudiant que j'étais est désormais un chercheur, encore en apprentissage mais un chercheur tout de même. Nos échanges scientifiques, toujours passionnant, ne prendront sûrement pas fin avec le point final de cette thèse.

Un merci tout particulier à Valentin Ovsienko qui a porté un intérêt constant à mon travail durant ces trois années et qui a accepté de rapporter sur mon travail de thèse. Son accueil chaleureux et son dynamisme ont rendu agréable mon installation à l'Institut Camille Jordan et annoncent prometteuse cette année qui commence.

C'est avec un immense plaisir que je remercie Pierre Lecomte d'avoir accepté d'être rapporteur et d'avoir effectué une lecture aussi précise et intéressée de mon manuscrit de thèse.

Enfin c'est l'ensemble de mon jury de thèse que je remercie, auquel s'ajoute Robert Coquereaux, Dimitry Leites et Gijs Tuynman qui ont spontanément et chaleureusement accepté cette invitation. Je suis spécialement touché par l'effort des membres qui viennent de loin.

Je remercie l'ensemble des membres du CPT, notamment la direction, les secrétaires et les bibliothécaires pour en faire un cadre de travail agréable et les thésards qui contribuent à lui donner vie. Un mot particulier pour celles et ceux qui ont cru en l'intérêt scientifique et humain de la journée du laboratoire, par-delà les barrières, réputées infranchissables,

séparant les différentes recherches menées au CPT, et qui ont participé et aidé à en faire un succès.

L'intensité des quatres années que j'ai passées à Marseille doit également beaucoup aux ami(e)s que j'ai rencontré(e)s au GENEPI et à nos actions communes pour l'ouverture du monde carcéral. Je remercie tous ceux qui ont participé à faire entrer la Fête de la Science aux Baumettes.

Un immense merci à tou(te)s mes ami(e)s, pour tout ce que nous avons pu partager, rêver et vivre, vous m'êtes précieux.

A mes parents pour m'avoir toujours soutenu dans mes choix, à Carine pour avoir ouvert la voie et à Emilie pour en avoir choisie une autre.

A Marine,
la beauté du monde est plus éclatante quand $1 + 1 = 2$, quitte à renier $\mathbb{Z}_2$.

Préface

Cette thèse en physique mathématique a pour cadre général la supergéométrie, dont le développement a été motivé par l'étude de la dynamique des particules à spin. La physique tout comme la géométrie repose de manière essentielle sur la présence de symétries, codées par l'actions de (super-)groupes, dont les invariants sont les objets fondamentaux. C'est guidées par cette idée que les deux parties distinctes composant cette thèse ont été élaborées.

La première en constitue le corps et justifie son titre. Elle porte sur une méthode de quantification, dite conformément équivariante, qui s'applique aux systèmes dont l'espace de configuration est une variété conformément plate (M, g). Elle est caractérisée par l'action du groupe conforme de (M, g) sur les espaces d'observables classiques et quantiques. Cette procédure a été développée initialement dans le cas usuel où l'espace des phases est donné par le fibré cotangent de M, nous l'étendons ici à l'espace des phases d'un système à spin, qui est donné par le supercotangent de M.

La seconde partie de cette thèse a donné lieu à un article reproduit ici, portant sur l'étude de la géométrie projective du supercercle. Nous y proposons une vision géométrique et synthétique de divers invariants, notamment le birapport, qui avaient été introduits dans le cadre de la théorie superconforme des champs. Partant des supergroupes définissant les géométries euclidienne, affine et projective, leurs invariants caractéristiques sont construits, notamment les superbirapports pairs et impairs. Munissant ensuite le supercercle de sa structure de contact canonique, les invariants pairs donnent lieu, par variations infinitésimales, à des 1-cocycles du groupe des contactomorphismes à valeurs dans les densités, de noyaux le supergroupe initial. Nous montrons de plus que tous les 1-cocycles à valeurs dans les densités peuvent être ainsi obtenus. Il y en a donc trois, un par géométrie, et celui associé à la géométrie projective du supercercle n'est rien d'autre que la (super-) dérivée schwarzienne.

Table des matières

Première partie

Quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents

Chapitre 1

Introduction

La problématique de la quantification provient de l'analogie formelle entre mécanique classique et mécanique quantique, et consiste à trouver une correspondance entre observables classiques et observables quantiques, comme formulée initialement par le problème de Dirac [31]. Les théories de quantification sont en fait multiples ; elles diffèrent alors, suivant les types de systèmes considérés d'une part, et les propriétés demandées à la quantification d'autre part. En particulier, pour les systèmes dont l'espace des phases est un fibré cotangent T^*M, la quantification G-équivariante, introduite par P. Lecomte et V. Ovsienko [67], est définie par une condition de cohérence avec l'action du groupe G, qui est un groupe de symétries de l'espace de configuration M.

L'objet principal de cette thèse est d'étendre la quantification conformément équivariante, telle qu'elle est développée dans les références [34, 37], aux formalismes classiques et quantiques qui permettent de tenir compte du spin, et reposant respectivement sur la supergéométrie symplectique et la géométrie spinorielle. Avant de présenter les résultats obtenus, nous introduisons séparément les deux domaines constitués par la quantification équivariante et la mécanique spinorielle.

1.1 Panorama : systèmes à spin et quantification équivariante

1.1.1 Aperçu général de la quantification équivariante

Pour quantifier un système dont l'espace des phases est donné par un fibré cotangent T^*M, le plus naturel est d'utiliser la quantification géométrique, développée par B. Kostant [61] et J-M. Souriau [97], comme géométrisation ultime de la méthode des orbites de A.A. Kirillov [52, 54]. En effet, cette dernière est alors canonique. Cependant, elle ne peut s'appliquer qu'aux fonctions polynomiales de degré au plus 1 en les impulsions, fonctions qu'elle quantifie en des opérateurs différentiels d'ordre 1 sur M. Pour prolonger la quantification géométrique de manière univoque à un espace plus vaste d'observables classiques, une méthode naturelle consiste à demander la cohérence de la quantification vis à vis de l'action d'un certain groupe de symplectomorphismes sur l'espace des phases. C'est le cas par exemple de la quantification de Weyl de $T^*\mathbb{R}^n$, qui est complètement caractérisée par le groupe symplectique affine, comme montré par S. Gutt [46]. La quantification G-équivariante s'inscrit dans ce cadre, avec la particularité, pour le groupe G qui la caractérise, d'agir localement sur l'espace de configuration M. Afin que son inverse définisse une application symbole globale sur l'espace $\mathcal{D}(M)$ des opérateurs différentiels de M, la quantification G-équivariante se doit de prolonger la quantification géométrique à tout l'espace $\mathcal{S}(M)$ des fonctions sur T^*M qui sont polynomiales en les impulsions. Elle a été ainsi immédiatement conçue comme un moyen d'étude du module des opérateurs différentiels, d'où la considération, dès ses origines, d'opérateurs différentiels agissant sur des densités. En conséquence, l'action du groupe G est modifiée par les deux paramètres λ et μ, qui sont les poids des densités sources et images des opérateurs en question. L'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta(M)$ est alors naturellement muni d'un poids $\delta = \mu - \lambda$, modifiant également l'action du groupe G. Nous pouvons alors définir une quantification G-équivariante, comme un morphisme de G-modules

$$Q : \mathcal{S}^\delta(M) \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M), \tag{1.1}$$

préservant le symbole principal. Précisons que, par hypothèse, G est un groupe agissant localement par difféomorphismes sur M. Les structures de G-modules sur les espaces classiques et quantiques résultent, respectivement, de l'action hamiltonienne canonique de $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathcal{C}^\infty(T^*M) \supset \mathcal{S}^0(M)$ et de son action canonique sur $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\lambda, \mathcal{F}^\mu) \supset \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, où $\mathcal{F}^\lambda$ est l'espace des λ-densités de M. Il s'agit alors de discuter de l'existence et de l'unicité de la quantification G-équivariante (1.1) en fonction du groupe G et des poids δ et λ, μ caractérisant les modules classiques et quantiques. Remarquons que la famille de quantification G-équivariante est d'autant plus réduite que le groupe G est "grand".

Si l'on excepte le groupe trivial, le choix $G = \mathrm{Diff}(M)$ est le seul ne restreignant pas les espaces de configurations M que l'on peut considérer. C'est également le plus naturel pour prolonger la quantification géométrique. Cependant, il n'existe pas de quantification $\mathrm{Diff}(M)$-équivariante et ceci quel que soit la valeur des poids λ, μ. Ce résultat se traduit par l'absence d'application symbole naturelle sur l'espace des opérateurs différentiels. Il s'agit donc de travailler avec un groupe G agissant localement sur M, et qui munit ainsi M d'une G-structure plate [55]. Cela revient à demander une action locale de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et l'on parlera aussi bien de quantification G-équivariante que $\mathfrak{g}$-équivariante.

Le travail qui a initié la quantification équivariante est celui de C. Duval et V. Ovsienko [36], où la quantification géométrique de T^*M est prolongée de manière univoque aux symboles de degré 2 par équivariance sous l'action du groupe conforme $\mathrm{o}(p+1, q+1)$, pour (M, g) une variété conformément plate de signature (p, q). P. Lecomte et V. Ovsienko [67] ont ensuite les premiers montré qu'il existe, pour $\delta = 0$, une unique quantification G-équivariante définie sur tout l'espace des symboles $\mathcal{S}^0(M)$, le groupe choisi étant le groupe projectif $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$, la variété M étant de dimension n et projectivement plate. Ce résultat est généralisé dans la référence [38] au cas d'un poids δ quelconque, hors d'un ensemble discret de valeurs appelées résonances. Par la suite, le cas du groupe conforme a été réétudié par C. Duval, P. Lecomte et V. Ovsienko dans [34], où l'existence et l'unicité de la quantification conformément équivariante sont prouvées en dehors d'un ensemble discret de valeurs de δ. La propriété clé des algèbres de Lie projectives et conformes est leur maximalité en tant qu'algèbre de Lie de dimension finie dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux. F. Boniver et P. Mathonet [14, 15] ont mis ce fait en évidence, montrant que toute algèbre de Lie maximale $\mathfrak{g}$ conduisait à une quantification $\mathfrak{g}$-équivariante.

Afin d'étudier explicitement la structure des G-modules d'opérateurs différentiels et d'obtenir les observables quantiques en termes géométriques, il faut tout d'abord déterminer explicitement les résonances puis produire en termes covariants les formules explicites de la quantification G-équivariante. Ceci a été fait pour la quantification projectivement [17] et conformément [37] équivariante restreintes aux symboles de degrés 2 en les impulsions (i.e. en les variables fibrées). Dans le cas conforme, le degré 3 a également été traité [69, 70]. Les modules exceptionnels $\mathcal{D}_2^{\lambda,\mu}$ des opérateurs différentiels d'ordre 2, dont les poids sont associés aux résonances, ont ainsi été identifiés, et le flot géodésique a pu être quantifié explicitement. Le laplacien invariant conforme de Yamabe est alors obtenu [37] comme associé au flot géodésique quantique de l'un des modules exceptionnels, résultat tout à fait remarquable. V. Ovsienko et P. Redou [82] ont montré dans le même esprit que les outils de la quantification conformément équivariante permettent d'obtenir la classification, en termes de leurs symboles, des opérateurs différentiels et bidifférentiels conformément invariants.

Une généralisation de la quantification G-équivariante consiste à la définir sur des modules plus généraux et c'est dans cette veine que se situe notre travail. La voie a été ouverte par F. Boniver, S. Hansoul, P. Mathonet et N. Poncin [12] où est étudiée l'application symbole projectivement équivariante entre l'espace des opérateurs différentiels agissant sur les formes différentielles et l'espace des symboles associé. La quantification G-équivariante a ensuite été étendue à l'espace des opérateurs différentiels agissant sur un espace de sections tensorielles quelconque, et à son espace de symboles correspondant, ceci à travers les travaux [49, 74, 75, 20], qui se situent dans le cadre plus général de la quantification invariante et naturelle, initiée par P. Lecomte [66].

Par ailleurs, citons le travail pionnier de P.B. Cohen, Yu. Manin et D. Zagier [25], qui a conduit H. Gargoubi, N. Mellouli et V. Ovsienko [41] au premier développement portant sur la quantification équivariante dans le cadre de la supergéométrie.

1.1.2 Description et quantification des systèmes à spin

Cherchant l'équation relativiste quantique régissant l'évolution des particules fermioniques, de spin $\frac{1}{2}$, P.A.M. Dirac [30] introduit un opérateur différentiel d'ordre 1 dont le carré est le d'Alembertien, et montre que ses coefficients doivent être des matrices engendrant une algèbre de Clifford. Baptisé opérateur de Dirac, son étude est devenue un champ des mathématiques à part entière : la géométrie spinorielle [22, 24, 48, 65]. Elle permet de définir le formalisme de la mécanique quantique pour les systèmes à spin, dont les fonctions d'onde sont les sections d'un fibré spinoriel, l'espace des spineurs étant par définition l'espace de représentation irréductible de l'algèbre de Clifford.

La découverte du formalisme permettant de décrire le spin en mécanique classique est beaucoup plus récente. L'idée consiste à ajouter des coordonnées grassmanniennes à l'espace des phases, remplaçant ainsi le fibré cotangent T^*M de l'espace de configuration M par son supercotangent $\mathcal{M}$, i.e. par le produit fibré

$$\mathcal{M} = T^*M \times_M \Pi TM, \tag{1.2}$$

du fibré cotangent T^*M avec le fibré tangent “impair” ΠTM au-dessus de M. Le développement de cette nouvelle mécanique, dite pseudo-classique, et des (super-)mathématiques qui en forment le langage, ont été concomitants. Citons F.A. Berezin et M.S. Marinov [9] pour la formulation de la mécanique pseudo-classique et, B. Kostant [63] et D. Leites [68] pour l'élaboration de la supergéométrie sous-jacente.

Soulignons que B. Kostant a généralisé la géométrie symplectique et la préquantification aux supervariétés [63], et a montré que le préquantifié d'une variable grassmannienne est une matrice de Clifford. Ce fait a constitué un des points de départ de la mécanique classique du spin et de l'étude de la quantification dans ce nouveau cadre. Ainsi, E. Getzler [42] a étendu le calcul symbolique, développé par H. Widom [105], aux opérateurs différentiels spinoriels sur M, les symboles étant alors les fonctions sur le supercotangent $\mathcal{M}$ qui sont polynomiales en les variables fibrées. Cela a permis à E. Getzler de fournir une démonstration élégante du Théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, et d'établir un premier lien entre supergéométrie et géométrie spinorielle. F.F. Voronov [102] reprend ce travail, et développe alors en détail la quantification géométrique de l'algèbre de Grassmann. Dans un aute contexte, G. Tuynman [100] formule la quantification géométrique dans le cadre des supervariétés, l'applique à l'algèbre de Grassmann munie d'une autre forme symplectique, et en donne une application au formalisme BRST. Ces deux travaux établissent une correspondance ente les structures algébriques de la supergéométrie et celles de la géométrie spinorielle. Enfin, La préquantification du supercotangent est donnée explicitement par M. Rothstein [90], mais sa quantification géométrique, permettant de géométriser la correspondance précédente, ne semble pas avoir été traitée dans la littérature.

1.1.3 L'apport de cette thèse

Cette thèse se situe ainsi dans le prolongement des travaux dans les deux domaines précités, tout en comportant des aspects nouveaux. La quantification conformément équivariante des fibrés cotangents est connue [34, 37] et a même été étendue afin de conduire à des opérateurs différentiels agissant sur des champs tensoriels [75]. Cependant, ces travaux ne permettent pas de quantifier les fonctions du supercotangent, car les arguments des opérateurs différentiels spinoriels, dont l'opérateur de Dirac, ne sont pas des champs tensoriels. Cela se manifeste par le fait que l'espace $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, des opérateurs différentiels agissant sur des densités spinorielles, n'admet pas d'action naturelle de $\mathrm{Vect}(M)$, contrairement à tous les modules étudiés jusqu'à présent dans le cadre de la quantification équivariante. En outre, même si le supercotangent $\mathcal{M}$ d'une variété pseudo-riemannienne (M, g) est muni d'une structure symplectique canonique [90], ce qui constitue notre cadre de travail, sa quantification géométrique n'est, a priori, pas connue alors même que la quantification conformément équivariante doit en constituer une extension.

L'article fondateur de E. Getzler [42] permet de définir les espaces en jeu pour la quantification conformément équivariante de $\mathcal{M}$, l'espace des observables classiques étant l'espace des symboles de $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, qu'il montre être formé par l'espace $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ des δ-densités polynomiales dans les variables fibrées sur le supercotangent $\mathcal{M}$. En d'autres termes, on a $\mathcal{S}^\delta[\xi] = \mathcal{S}^\delta(M) \otimes \Omega(M)$, où $\Omega(M)$ désigne l'espace des formes différentielles sur M. Supposons désormais que (M, g) soit de signature (p, q), conformément plate et admette une structure spinorielle. Une quantification conformément équivariante, du supercotangent de (M, g), est définie comme une bijection linéaire

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \tag{1.3}$$

préservant le symbole principal et équivariante sous l'action, à préciser, de l'algèbre de Lie $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ des champs de vecteurs Killing-conformes de (M, g).

Après avoir rappelé les pré-requis concernant les méthodes de quantification en général, et la quantification conformément équivariante en particulier, nous construisons la structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module sur l'espaces classique $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et la transportons à l'espace quantique $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ via la quantification géométrique du supercotangent. Nous établissons alors une expression explicite pour la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 en les impulsions, en coordonnées conformes, i.e. adaptées à la structure conforme de $(M, [g])$, puis arbitraires. Nous démontrons ensuite que, pour un poids δ générique, la quantification conformément équivariante existe sur tout l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et est unique. Enfin nous présentons quelques exemples et applications de nos résultats dans ce cadre. Nous obtenons ainsi la classification des symboles des opérateurs différentiels, agissant sur les spineurs, qui sont conformément invariants. La quantification de l'un des deux symboles de degré 1 de cette classification conduit à l'opérateur de Dirac, dont les poids correspondent précisément à l'une des deux résonances, comme c'était le cas pour l'opérateur de Yamabe-Laplace [37] déjà évoqué. Plus surprenant peut-être, le lien entre tenseurs de Killing-Yano et intégrabilité, tant classique que quantique, est explicité via la superisation et la quantification conformément équivariante.

Nous présentons désormais le contenu de la thèse chapitre par chapitre.

1.2 Chapitre 2 : Quantification équivariante des fibrés cotangents

Ce premier chapitre est consacré à l'exposé des pré-requis concernant la quantification en général, et les trois théories que constituent la quantification géométrique, la quantification par déformation et la quantification équivariante en particulier. Nous considérons ici des systèmes sans spin, le formalisme décrivant les objets de la mécanique classique est donc celui de la géométrie symplectique, la supergéométrie sera introduite au chapitre suivant.

La problématique de la quantification

Nous introduisons tout d'abord les structures mathématiques de la mécanique classique et de la mécanique quantique, i.e. d'une part les notions de base de la géométrie symplectique : crochet de Poisson, champs hamiltoniens et application moment, et d'autre part la structure d'algèbre de Lie sur les opérateurs antisymétriques agissant sur un espace de Hilbert. La présentation suit essentiellement l'article [72], ainsi que les références [97, 3, 106].

Puis, nous formulons le problème de Dirac [30], qui a acté la naissance de la quantification en termes mathématiques, et articulons les réponses qu'en donne la quantification géométrique, la quantification par déformation et la quantification équivariante, avant de les exposer plus en détail. La quantification géométrique des variétés symplectiques [97, 61, 53, 106] est présentée dans sa formulation générale, et le cas des fibrés cotangents T^*M est explicité. Sa généralisation immédiate aux supervariétés symplectiques est décrite au chapitre suivant dans le cas des algèbres de Grassmann et des supercotangents. Nous introduisons ensuite la quantification par déformation et donnons l'exemple de la quantification de Weyl sur $T^*\mathbb{R}^n$, qui sera prolongée par la suite au supercotangent de $\mathbb{R}^n$. Enfin, nous motivons l'introduction de la quantification G-équivariante en montrant qu'elle prolonge la quantification géométrique de T^*M par un relâchement de la contrainte de $\mathrm{Diff}(M)$-équivariance en celle de G-équivariance, et en soulignant qu'elle permet de construire un star-produit fortement G-invariant [33].

Le cadre de la quantification équivariante

Le formalisme de la quantification G-équivariante est développé ici. Il met en jeu les Vect(M)-modules que sont l'espace classique des symboles $\mathcal{S}^\delta$ et l'espace quantique des opérateurs différentiels $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, ainsi que la notion de G-structure plate sur une variété M. Cette dernière assure que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, du groupe G, est une sous-algèbre de Lie de Vect(M), qui agit canoniquement sur les espaces classiques et quantiques, et les munit ainsi d'une structure de $\mathfrak{g}$-modules. Deux outils sont essentiels pour obtenir la quantification équivariante :

1. l'ordre normal, noté $\mathcal{N}$ (2.40), fournit une identification locale entre espaces classiques et quantiques, permettant ainsi de comparer leurs structures de modules, données par les dérivées de Lie L_X^δ et $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$ pour $X \in \mathfrak{g}$,
2. le Lemme 2.2.5 montre que la quantification G-équivariante de $\mathbb{R}^n$ se transporte, via les G-coordonnées, à une variété munie d'une G-structure plate.

Après avoir donné la Définition 2.2.3 de la quantification G-équivariante, nous exposons les résultats obtenus sur l'existence et l'unicité d'une quantification G-équivariante [67, 34, 15], détaillant en particulier les valeurs résonantes du shift δ dans les cas projectifs et conformes.

La quantification conformément équivariante

L'étude est alors restreinte au cas du groupe conforme $G = \mathrm{O}(p+1, q+1)$, afin de présenter les résultats de [34, 37] que nous étendrons par la suite au cadre des supercotangents, ainsi que le schéma de leurs preuves. Cela permettra de mettre en valeur les difficultés propres à la quantification des supercotangents.

Tout d'abord, une variété pseudo-riemannienne (M, g) est conformément plate s'il existe localement une fonction $F > 0$ et un système de coordonnées (x^i) dites conformes dans lequel les composantes de la métrique sont de la forme $g_{ij} = F\eta_{ij}$, avec η_{ij} les composantes de la métrique plate. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs Killing-conformes de (M, g) est désignée par conf(M, g), et si (M, g) est conformément plate et de signature (p, q), on a conf$(M, g) \simeq \mathrm{o}(p + 1, q + 1)$.

Le premier Théorème 2.3.3 énoncé est issu de [37], et a pour objet l'obtention de la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 en les impulsions. Il suffit de mener l'étude sur la variété de configuration plate $\mathbb{R}^n$, grâce au Lemme 2.2.5. L'ordre normal (2.40) permet alors de ramener la recherche de la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta_{\leq 1}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}_1(\mathbb{R}^n)$ à celle de $Q^{\lambda,\mu}$, définie par le diagramme commutatif suivant de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}^{\lambda,\mu} \\ \mathcal{S}^{\delta} \arrow[ur, "\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}"] \arrow[r, "Q^{\lambda,\mu}"] & \mathcal{S}^{\delta}. \arrow[u, "\mathcal{N}"'] \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Ce dernier est bien défini au-dessus de $\mathbb{R}^n$, et au-dessus d'un ouvert de carte d'une variété conformément plate (M,g). Nous écrivons alors les expressions explicites des actions classiques et quantiques de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$, qui coïncident si l'on se restreint à la sous-algèbre de Lie des similitudes $\mathrm{ce}(p,q)$. Un résultat de [67], montre que $Q^{\lambda,\mu}$ est dans $\mathrm{ce}(p,q)^!$, le commutant de $\mathrm{ce}(p,q)$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x^1,\ldots x^n,p_1,\ldots,p_n])$, où les p_i désignent les coordonnées de T^*M canoniquement associées aux (x^i). Nous donnons le commutant de la sous-algèbre de Lie des isométries $\mathrm{e}(p,q)$, qui contient $\mathrm{ce}(p,q)^!$, en utilisant la convention de sommation d'Einstein, d'usage systématique par la suite.

Proposition 1.2.1. *[37] Le commutant* $\mathrm{e}(p,q)^!$ *est isomorphe, pour* $n \geq 3$, *à l'algèbre enveloppante* $\mathfrak{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{h}_1)$. *Elle est engendrée par*

$$R = p^i p_i, \qquad E = p_i \partial_{p_i} + \frac{n}{2}, \qquad T = \partial_{p^i}\partial_{p_i}, \tag{1.5}$$

dont les relations de commutations sont celles de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, *et*

$$G = p^i \partial_i, \qquad D = \partial_{p_i}\partial_i, \qquad L = \partial_{x^i}\partial_{x_i}, \tag{1.6}$$

dont les relations de commutation sont celles de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_1$.

La preuve du Théorème 2.3.3 procède comme suit,

1. obtention de $\mathrm{ce}(p,q)^!$ au Corollaire 2.3.2,
2. les endomorphismes de $\mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}(\mathbb{R}^n)$ préservant le symbole principal et équivariants sous l'action de $\mathrm{ce}(p,q)$ sont de la forme $Q = \mathrm{Id} + c_d D$, avec c_d une constante, voir (2.60),
3. implémentation des contraintes d'équivariance sous l'action des inversions infinitésimales $\bar{X}_i$, ce qui détermine c_d.

Théorème 1.2.2. *[37] Soit* (M,g), *une variété conformément plate. Si* $\delta \neq 1$, *il existe une unique quantification conformément équivariante,* $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1} \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}_1$, *donnée localement par*

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P^i(x)p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(P^i\partial_i + \frac{\lambda}{1-\delta}\,\partial_i P^i\right). \tag{1.7}$$

Si $\delta = 1$, *alors la quantification conformément équivariante existe si et seulement si* $\lambda = 0$ *et elle est donnée par* $\mathcal{Q}^{0,1}(P^i(x)p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(P^i\partial_i + a\,\partial_i P^i\right)$, *le coefficient* a *étant une constante quelconque.*

Le cas résonant $\delta = 1$ provient simplement de la dégénérescence de l'équation affine exprimant l'invariance sous les inversions, et qui donne le coefficient c_d. Remarquons qu'il est possible de lever l'indétermination sur le coefficient a en demandant que les opérateurs différentiels obtenus soient symétriques, i.e. formellement auto-adjoints, si le symbole est réel. Spécifions que les coordonnées (x^i, p_i) intervenant ici sont des coordonnées de Darboux de T^*M, issues naturellement des coordonnées conformes (x^i) de (M, g) et indépendantes de la métrique g. Ainsi, les formules obtenues pour la quantification sont invariantes par changement conforme de métrique. Un simple calcul permet alors de donner l'expression en termes covariants de la quantification,

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P^i(x)p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left(P^i \nabla_i^\lambda + \frac{\lambda}{1-\delta} \partial_i^\nabla (P^i) \right), \tag{1.8}$$

où ∇^λ est la dérivée covariante des λ-densités (2.32) et ∂^∇ est la dérivée covariante des symboles (2.37), les deux étant associées à la connexion de Levi-Civita de la métrique g. Le Théorème 2.3.5, de la référence [37], prouve l'invariance conforme de cette application, i.e. elle ne dépend que de la classe conforme $[g]$ de la métrique g. De plus, cette application est en fait $\mathrm{Vect}(M)$-équivariante et coïncide pour $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ avec la quantification géométrique de T^*M, l'espace de Hilbert étant donné par le complété des $\frac{1}{2}$-densités de M à support compact. Dans le cas plat, $\mathcal{Q}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ coïncide également avec la quantification de Weyl. Un théorème analogue d'invariance conforme a été montré pour la quantification conformément équivariante des symboles de degré 2 [37] et de degré 3 [70], où des termes de courbures viennent alors s'ajouter.

Le dernier résultat présenté sur la quantification conformément équivariante des fibrés cotangents est le Théorème 2.3.9, tiré de [34], qui établit son existence et son uncité pour tous les symboles, en dehors d'un ensemble de valeurs résonantes donné en (2.44). La présentation du principe de la preuve est rapide, car celui-ci est repris en détail au Paragraphe 4.5.3, dans un cadre général indépendant du groupe de symétrie G et englobant le cas des supercotangents. Il repose sur la diagonalisation des opérateurs de Casimirs des modules classiques (2.73) et quantiques (2.74), qui ont pour expressions, respectivement,

$$\begin{aligned} C_\delta &= RT + [1 + n(\delta - 1) - \mathcal{E}]\, \mathcal{E} - n^2\delta(\delta - 1), && (1.9) \\ C_{\lambda,\mu} &= C_\delta + GT - 2(n\lambda + \mathcal{E})D. && (1.10) \end{aligned}$$

Nous explicitons la diagonalisation de C_δ qui repose sur celle des opérateurs commutant $\mathcal{E}$ et RT. Cela sera utile pour diagonaliser l'opérateur de Casimir classique dans le contexte des supercotangents.

Les opérateurs conformément invariants

Enfin nous donnons la classification des opérateurs différentiels (linéaires) conformément invariants en terme de leurs symboles dans la Proposition 2.4.1, formulée dans [82]. Son extension aux opérateurs différentiels spinoriels est l'une des applications importantes des développements de cette thèse.

1.3 Chapitre 3 : Du fibré supercotangent à la géométrie spinorielle

Le but de ce chapitre est de présenter les formalismes de la mécanique classique et quantique des systèmes à spin, qui reposent respectivement sur la supergéométrie symplectique [90], et la géométrie spinorielle [22, 24, 48, 65]. La quantification géométrique des supercotangents $\mathcal{M}$, de variétés pseudo-riemanniennes (M, g), établit une correspondance nouvelle entre ces deux géométries. Nous la prolongeons ensuite, localement, par l'ordre normal [42], bijection entre l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et l'espace des opérateurs différentiels spinoriels $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$. Ils constitueront les espaces des observables classiques et quantiques, respectivement.

Le fibré supercotangent

Nous exposons en premier lieu le cadre de la mécanique classique à spin. L'espace de configuration d'un système étant un espace-temps relativiste, ou plus généralement une variété pseudo-riemannienne (M, g), son espace des phases est donné par son supercotangent $\mathcal{M}$ (1.2) muni de sa structure symplectique canonique, ce que nous illustrons par un exemple. Nous relevons ensuite les champs de vecteurs Killing-conformes de M à $\mathcal{M}$, ce qui permettra, au chapitre suivant, de munir l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi] \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ d'une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module lorsque (M, g) est conformément plate. Cela constitue un résultat nouveau, pour autant que nous le sachions.

Avant d'introduire le supercotangent d'une variété M, la notion de supervariété est présentée en toute généralité, suivant les travaux de références de B. Kostant et D. Leites [63, 68], ainsi que la synthèse sur le sujet faite dans [28]. Il est à noter que la naissance même des supermathématiques provient en grande partie de la recherche d'un cadre pour la description géométrique du spin. La Définition 3.1.1 d'une supervariété est donnée dans le corps du texte, donnons-en ici l'idée. Une supervariété, de base la variété M, est caractérisée localement par un système de coordonnées, formé des coordonnées (x^i) de M, dites paires, ainsi que de coordonnées (ξ^a) dites impaires, ou grassmanniennes, qui ont la particularité d'anticommuter. De manière équivalente, on peut la définir par son algèbre de superfonctions engendrée localement par ses coordonnées. Ainsi, une méthode pour construire une supervariété de base M est, partant d'un fibré E sur M, de choisir l'algèbre des sections du fibré extérieur $\Gamma(\Lambda E^*)$ comme son algèbre de fonctions, la parité découlant de sa $\mathbb{Z}$-graduation canonique. Une telle supervariété est notée ΠE, où Π est le foncteur renversant la parité, et on note $\mathcal{C}^\infty(\Pi E) = \Gamma(\Lambda E^*)$. Nous pouvons construire de la sorte les deux types de supervariétés avec lesquelles nous travaillerons.

1. Les supervariétés ΠV, avec V un espace vectoriel, ont leur base réduite à un point, et sont essentiellement des algèbres de Grassmann, $\Lambda V^* = \mathcal{C}^\infty(\Pi V)$. Un système de coordonnées (ξ^i) est alors une base de V^*.
2. Les supercotangents sont définis comme les produits fibrés $\mathcal{M} = T^*M \times_M \Pi TM$, d'algèbre de superfonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(T^*M) \otimes \Omega(M)$. Ils admettent comme système de coordonnées (x^i, p_i, ξ^i), où (x^i, p_i) sont des coordonnées canoniques de T^*M et ξ^i la superfonction locale $dx^i \in \mathcal{C}^\infty(\Pi TM)$, où d est ici la différentielle de De Rahm sur M. Un tel système de coordonnées canoniquement associé à (x^i) est dit naturel.

L'espace des observables classiques sera pour nous l'algèbre des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, constituée des superfonctions de $\mathcal{M}$ polynomiales en les variables fibrées (p_i, ξ^i).

Nous présentons ensuite le travail de M. Rothstein [90] sur les supervariétés symplectiques, et l'illustrons par les deux exemples précédents.

1. Une supervariété symplectique de base réduite à un point est une algèbre de Grassmann ΛV^* où l'espace vectoriel V est muni d'une métrique g, i.e. d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Soient g_{ij} les composantes de g dans une base de V, de base duale (ξ^i). La forme symplectique de ΛV^* s'écrit alors $g_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$. Un système de coordonnées de Darboux (ξ^i), cf [63], correspond donc à la base duale d'une base orthonormée de V.
2. Un supercotangent $\mathcal{M}$ est muni d'une structure symplectique si et seulement si M est muni d'une métrique pseudo-riemannienne g, et sa forme symplectique ω est alors exacte, $\omega = d\alpha$. La 1-forme potentielle s'écrit en coordonnées
$$\alpha = p_i dx^i + \kappa g_{ij} \xi^i d^\nabla \xi^j, \tag{1.11}$$
où d^∇ est la différentielle extérieure covariante associée à la connexion de Levi-Civita et κ une constante. L'obtention des coordonnées de Darboux nous est essentielle pour l'écriture du relevé de l'action de $\mathrm{conf}(M, g)$ de l'espace de configuration M à l'espace des phases $\mathcal{M}$, et fait l'objet de la Proposition 3.1.13.

Pour illustrer la puissance de ce formalisme, utilisé notamment par F.A. Berezin et M.S. Marinov [9], pour la description d'un système classique à spin, nous traitons l'exemple d'une particule d'essai, à spin et de charge q, dans l'espace-temps relativiste (M, g) et en présence d'un champ électromagnétique F. L'espace des phases associé est le supercotangent $\mathcal{M}$, muni de sa structure symplectique canonique donnée par $d\alpha$, où α est définie en (1.11) avec $\kappa = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$, et les composantes du bivecteur de spin sont représentées localement par $S^{ij} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\xi^i\xi^j$. Les équations du mouvements découlent alors du flot hamiltonien de $H = \frac{1}{2}g^{ij}(p_i - qA_i)(p_j - qA_j) + qF_{ij}S^{ij} \in \mathcal{S}^0[\xi]$, où $A = A_i dx^i$ est le potentiel local du champ électromagnétique F. Dans le cas d'une charge nulle, nous retrouvons dans le formalisme supersymplectique les équations de A. Papapetrou [84], exprimant la déviation géodésique de la particule due au couplage de son spin avec la courbure de l'espace-temps. Nous référons également à F. Ravndal [88] qui traite séparément l'effet des champs gravitationnel et électromagnétique pour une particule à spin, d'espace des phases un supercotangent, dans le formalisme lagrangien.

Nous proposons enfin un relèvement hamiltonien de l'algèbre de Lie $\mathrm{conf}(M,g)$, des champs de vecteurs Killing-conformes de l'espace de configuration (M,g), à son supercotangent $\mathcal{M}$. Ceci est motivé par le double but d'obtenir l'application moment de $\mathrm{conf}(M,g)$ sur $\mathcal{M}$ et de définir une structure de $\mathrm{conf}(M,g)$-module sur l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi] \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, qui devient une structure de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module si (M,g) est conformément plate. Cela ne semble pas traité dans la littérature et nous est essentiel pour aborder la quantification conformément équivariante des supercotangents. La première étape est naturelle et consiste à chercher les relevés $\hat{X}$ de $X \in \mathrm{Vect}(M)$ qui préservent la 1-forme α, i.e. tel que $L_{\hat{X}}\alpha = 0$. Le Lemme 3.1.18 prouve qu'un tel relevé n'est pas unique. Afin de lever cette indétermination, nous choisissons d'imposer au relevé une contrainte supplémentaire : la préservation de la direction de la 1-forme $\beta = g_{ij}\xi^i dx^j$, qui est l'image réciproque de la 1-forme potentielle de la forme symplectique impaire sur ΠTM. Cela nous permet d'obtenir un relevé unique $\tilde{X}$ de $X \in \mathrm{conf}(M,g)$, qui est de plus un morphisme d'algèbres de Lie. En revanche, cette procédure ne permet pas de relever les autres champs de vecteurs de M. C'est l'un des deux résultats centraux de cette section, formulé dans le Théorème 3.1.19, dont nous donnons l'essence ici.

Théorème 1.3.1. *Soit X un champ de vecteurs de M, du supercotangent $\mathcal{M}$. Le relevé de X à $\mathcal{M}$, qui préserve α et la direction de β, existe si et seulement si X est un champ de vecteurs Killing-conforme. Il est alors unique, noté $\tilde{X}$, et est donné par le morphisme d'algèbres de Lie*

$$X \mapsto \tilde{X} = X^i\partial_i^\nabla + \partial_{[j}X_{i]}\xi^j\partial_{\xi_i} - p_j\nabla_i X^j\partial_{p_i} + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(R^k_{lij}\xi_k\xi^l X^j + \partial_i^\nabla(\xi^k\xi^l\partial_{[k}X_{l]})\right)\partial_{p_i}. \quad (1.12)$$

Ce résultat est à mettre en regard avec le fait que la dérivée de Lie des spineurs L, proposée par Y. Kosmann [60], n'est effectivement une dérivée de Lie que pour les champs de vecteurs Killing-conformes. Il ne semble donc pas envisageable de définir une quantification G-équivariante du supercotangent pour un groupe G qui ne soit pas le groupe conforme. La quantification géométrique des supercotangents, présentée dans ce chapitre, explicite le lien entre actions classique $\tilde{X}$ et quantique L_X.

Grâce à l'action hamiltonienne de $\mathrm{conf}(M,g)$ sur $\mathcal{M}$ définie par le Théorème 3.1.19, nous obtenons une application moment $\mathcal{J}^0$ de $(\mathcal{M},\alpha)$, dite paire, par opposition à l'application moment $\mathcal{J}^1$, associée à la structure symplectique impaire de $(\Pi TM,\beta)$. Leur écriture explicite est donnée dans la Proposition 3.1.20 et montre que les moments pairs des rotations coïncident avec ceux, usuels, des fibrés cotangents, à un nouveau terme de spin près. On retrouve alors les résultats de [88, 43], obtenus dans le formalisme lagrangien, où les moments sont exprimés en fonction de coordonnées naturelles de $\mathcal{M}$. Dans le cas conformément plat, l'utilisation des deux applications moment conduit à un système de coordonnées de Darboux, et ainsi au deuxième résultat essentiel de la section.

Théorème 1.3.2. *Soit (M,g) une variété conformément plate, et (x^i) des coordonnées conformes. Les fonctions $\tilde{p}_i=\mathcal{J}^0_{\partial_i}$ et $\tilde{\xi}^i=\mathcal{J}^1_{\partial_i}$, données en (3.46), définissent un système de coordonnées $(x^i,\tilde{p}_i,\tilde{\xi}^i)$, qui est un système de coordonnées de Darboux conformes sur $\mathcal{M}$. Il permet de se ramener à l'expression du cas plat pour le relevé $\tilde{X}$ de $X\in\mathrm{conf}(M,g)$,*

$$\boxed{\tilde{X}=X^i\tilde{\partial}_i+\frac{1}{2}\Big((\partial_jX^i)\tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{\xi}^i}-(\partial_iX^j)\tilde{\xi}_j\partial_{\tilde{\xi}^i}\Big)-\tilde{p}_j\partial_iX^j\partial_{\tilde{p}_i}-\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\tilde{\xi}_j\tilde{\xi}^k(\partial_i\partial_kX^j)\partial_{\tilde{p}_i},} \tag{1.13}$$

Précisons que $\tilde{\partial}_i,\partial_{\tilde{p}_i},\partial_{\tilde{\xi}^i}$ sont les dérivations associées au système de coordonnées $(x^i,\tilde{p}_i,\tilde{\xi}^i)$. Ce dernier permet ainsi de travailler avec des expressions invariantes sous changement conformes de métrique pour $\tilde{X}$ et donc pour l'action de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$ sur l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$. Cette remarque est capitale car elle permet de transporter les résultats de la quantification conformément équivariante du supercotangent de l'espace de configuration plat $\mathbb{R}^n$, au supercotangent de toute variété (M,g) conformément plate, via le Lemme 2.2.5. La dépendance de l'action en la métrique est, en fait, contenue dans la définition des coordonnées de Darboux. Rappelons que dans le cas des fibrés cotangents “ordinaires” les coordonnées de Darboux en étaient indépendantes.

Éléments de géométrie spinorielle

Nous exposons ici les structures algébriques et géométriques intervenant dans la description quantique du spin. Tous les résultats de cette section sont très largement traités dans la littérature [10, 99] et appartiennent à la géométrie spinorielle [65]. Le seul point délicat est la définition de la dérivée de Lie des spineurs sur laquelle repose la structure de module de $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, qui est, rappelons-le, l'espace des opérateurs différentiels agissant sur les densités spinorielles.

Nous introduisons tout d'abord les structures algébriques, qui définissent les structures des fibres des différents fibrés en jeu. L'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(V,g)$ est définie, ainsi que sa correspondance avec l'algèbre de Grassmann ΛV, qui en constitue son algèbre de symbole. Nous montrons également que l'algèbre de Clifford est une déformation [77] de l'algèbre de Grassmann, vue comme algèbre de fonctions d'une supervariété symplectique de base réduite à un point. Puis le groupe de spin ainsi que son algèbre de Lie sont donnés comme sous-espaces de l'algèbre de Clifford, et leurs propriétés caractéristiques, qui seront invoquées dans le cadre des variétés, sont énoncées. Le module des spineurs, qui est l'espace de représentation irréductible de l'algèbre de Clifford, est enfin introduit, et s'identifie à ΛP pour P un espace isotrope maximal de $V \otimes \mathbb{C}$, i.e. P est une polarisation.

Partant d'une variété pseudo-riemannienne (M, g), on sait construire canoniquement le fibré de Clifford. En revanche, le fibré spinoriel S, sur lequel il agit irréductiblement, nécessite une structure additionnelle sur M, de type spinoriel [99], que nous explicitons. Les conditions d'existence d'une telle structure sur M, ou plus précisément d'un revêtement $\mathrm{Spin}(M, g) \to \mathrm{SO}(M, g)$, sont de nature topologique et ont été élucidées par A. Haefliger [48], dont nous citons le résultat.

Nous construisons ensuite la dérivée covariante des spineurs [99], qui est issue de la connexion de Levi-Civita et compatible avec la multiplication de Clifford. Nous donnons enfin l'expression de la dérivée de Lie des spineurs telle qu'introduite par Y. Kosmann [60]. Cette formule est canonique pour les seuls vecteurs de Killing de (M, g), et définit un morphisme d'algèbres de Lie, i.e. $[\mathsf{L}_X, \mathsf{L}_Y] = \mathsf{L}_{[X,Y]}$, à condition que X, Y soient des champs de vecteurs Killing-conformes de (M, g).

Quantification géométrique des supercotangents et géométrie spinorielle

La quantification géométrique des supervariétés symplectiques de base réduite à un point, puis des supercotangents, nous permet de prouver un certain nombre des résultats précédents et de retrouver de la sorte la géométrie spinorielle à partir de la supergéométrie symplectique. Les résultats les plus remarquables sont l'obtention des sections du fibré des spineurs de (M, g) comme fonctions polarisés de son supercotangent $\mathcal{M}$, et la construction de la dérivée covariante et de la dérivée de Lie des spineurs par quantification.

Nous reprenons tout d'abord les résultats de F.F. Voronov [102] et G. Tuynmann [100] sur la quantification géométrique de l'algèbre de Grassmann ΛV^* qui est vue comme l'algèbre de fonctions d'une supervariété ΠV, dont la forme symplectique est donnée par la métrique g sur V. Notre démarche a ceci de plus général qu'elle ne restreint pas la signature de la métrique g, les résultats essentiels sont cependant inchangés. Ainsi, la polarisation P, qui est un sous-espace isotrope maximal de $\Lambda V^* \otimes \mathbb{C}$, conduit à réduire l'espace de représentation quantique au module des spineurs ΛP, sur lequel le quantifié $\widehat{\xi^i}$ des coordonnées ξ^i de l'algèbre de Grassmann agissent comme des matrices de Clifford. Notons tout de même que nous nous restreignons à des espaces V de dimension paire, la quantification géométrique ne s'appliquant pas stricto sensu dans le cas d'une dimension impaire.

Proposition 1.3.3. *Etant donné une polarisation P de la supervariété symplectique $(\Pi V, g)$, de dimension $0|2n$, la quantification géométrique admet un unique prolongement* *en un isomorphisme d'algèbre, donné en coordonnées de Darboux par,*

$$\begin{array}{rcl} Q : \Lambda V^* \otimes \mathbb{C} & \to & \mathrm{End}(\Lambda P^*) \\ \xi^{i_1} \dots \xi^{i_k} & \mapsto & \widehat{\xi^{i_1}} \dots \widehat{\xi^{i_k}}, \end{array} \tag{1.14}$$

où ΛV^* est muni du star-produit le rendant isomorphe à l'algèbre de Clifford complexe $\mathbb{C}\mathrm{l}(V^*, g)$. Cela fournit une action canonique de $\mathbb{C}\mathrm{l}(V^*, g)$ sur ΛP^*, donné par

$$\boxed{\widehat{\xi^i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^i,} \tag{1.15}$$

qui en fait le module des spineurs.

Nous construisons ensuite un produit hermitien sur le module des spineurs tel que les $\widehat{\xi^i}$ soient hermitiens.

La préquantification du supercotangent $\mathcal{M}$ de (M, g) est connue [90], nous la rappelons avant de traiter de sa quantification géométrique. Il faut, tout d'abord, avoir une polarisation de $\mathcal{M} = T^*M \times_M \Pi TM$; on la choisit comme étant formée de la polarisation verticale de T^*M, et d'une polarisation de $\Pi T_x^{\mathbb{C}} M$ en chaque point. Cette dernière est un espace isotrope maximal de $\Pi T_x^{\mathbb{C}} M$ pour tout $x \in M$, i.e. une N-structure sur M, notion introduite par P. Nurowski et A. Trautman [79] dans un tout autre contexte et dont nous donnons la Définition 3.3.7. Si g est une métrique euclidienne, une N-structure sur M est simplement une structure presque hermitienne sur M. Ainsi, il existe des obstructions topologiques à l'existence de polarisations sur $\mathcal{M}$, qui sont plus fortes que celles d'admettre une structure spinorielle. La quantification géométrique du supercotangent construit alors une action du fibré de Clifford sur l'espace des fonctions polarisées qui permet de l'identifier à l'espace des sections du fibré spinoriel de M.

Théorème 1.3.4. *Soit $\mathcal{M}$ le supercotangent de (M, g), et P un sous-fibré de $T^{\mathbb{C}}M$ définissant une N-structure sur (M, g), ce qui est équivalent au fait que $\mathcal{M}$ admette une polarisation formée de la polarisation verticale de T^*M et de la distribution verticale $V\Pi P$ de $\Pi T^{\mathbb{C}}M$. La variété M admet alors un fibré spinoriel S donné par*

$$\mathsf{S} = \Lambda P^*, \tag{1.16}$$

dont l'espace des sections spinorielles s'identifie à l'espace des fonctions polarisées de $\mathcal{M}$, noté $\mathsf{F} = \mathcal{C}^\infty(\Pi P) = \Gamma(\mathsf{S})$. La quantification géométrique de $\mathcal{M}$ se prolonge alors en l'application $Q : \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_0[\xi] \to \mathrm{End}(\mathsf{F})$, qui s'écrit en coordonnées de Darboux,

$$P^i(x)\tilde{p}_i + P_{j_1,\dots,j_\kappa}(x)\tilde{\xi}^{j_1} \dots \tilde{\xi}^{j_\kappa} \mapsto P^i(x)\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\partial_i + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\kappa P_{j_1,\dots,j_\kappa}(x)\gamma^{j_1} \dots \gamma^{j_\kappa}. \tag{1.17}$$

Cette application est un morphisme d'algèbres de Lie si on se restreint aux fonctions de degré au plus 2 *en* ξ*, et un isomorphisme de* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-module si on se restreint aux fonctions de degrés* 0 *en* p.

La quantification géométrique se prolonge en un morphisme d'algèbres de Lie sur un espace de fonctions suffisant pour quantifier les moments usuels $J_X = p_i X^i$ du fibré cotangent et les moments conformes $\mathcal{J}_X^0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ du supercotangent. Nous obtenons ainsi respectivement la dérivée covariante ∇_X pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$, au Corollaire 3.3.11, et la dérivée de Lie des spineurs,

$$\mathsf{L}_X = \frac{\mathsf{i}}{\hbar} Q(\mathcal{J}_X^0) = \nabla_X + \frac{1}{4}\partial_{[j}X_{i]}\gamma^i\gamma^j, \tag{1.18}$$

pour tout $X \in \mathrm{conf}(M, g)$, au Corollaire 3.3.12. Ce dernier résultat est d'un intérêt particulier, il permet en effet de construire une dérivée de Lie des spineurs reposant sur le choix des structures symplectiques paires et impaires du supercotangent, et coïncidant avec celle proposée par Y. Kosmann.

Les opérateurs différentiels spinoriels et leurs symboles

Nous introduisons désormais les espaces classique et quantique formant le cadre de la quantification conformément équivariante des supercotangents. Nous donnons en premier lieu la définition générale de l'espace des opérateurs différentiels entre fibrés vectoriels au-dessus d'une variété M. Il suffit de particulariser cette situation aux fibrés des spineurs de poids λ et μ pour obtenir la définition de l'espace quantique $\mathsf{D}^{\lambda,\mu} \simeq \mathcal{D}^{\lambda,\mu} \otimes \Gamma(\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M))$ des opérateurs différentiels entre λ-densités spinorielles et μ-densités spinorielles. Nous définissons un produit scalaire sur les champs de spineurs, issu de celui construit précédemment en un point sur le module des spineurs, ce qui nous conduit à la définition d'un opérateur symétrique dans $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ si $\lambda + \mu = 1$.

Suivant E. Getzler [42], l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ de $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ est obtenu par produit tensoriel de l'espace des symboles de l'algèbre de Clifford $\mathbb{C}\mathrm{l}_g(T_xM)$ avec l'espace des symboles de $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, i.e. de l'algèbre de Grassmann ΛT_x^*M avec $\mathcal{S}^\delta$. Il peut se réaliser, pour $\delta = 0$, comme la sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ formée des fonctions polynomiales en les variables fibrées ou bien comme l'algèbre des tenseurs sur M qui sont symétriques en les indices contravariants et antisymétriques en les indices covariants. Les degrés en les variables fibrées paires et impaires définissent ainsi une $\mathbb{Z}^2$-graduation sur l'espace des symboles, $\mathcal{S}^\delta[\xi] = \bigoplus_{k=0}^\infty \bigoplus_{\kappa=0}^n \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$. Nous introduisons alors un espace auxiliaire $\mathcal{T}^\delta$ en modifiant l'espace des symboles de la manière suivante $\mathcal{T}^\delta \simeq \bigoplus_{\kappa=0}^n \mathcal{S}^{\delta-\frac{\kappa}{n}}_{*,\kappa}[\xi]$, où $\mathcal{S}^{\delta-\frac{\kappa}{n}}_{*,\kappa}[\xi]$ est l'espace des symboles de degré κ en les variables fibrées impaires et de degré quelconque en les variables fibrées paires. Son intérêt apparaitra lorsque nous chercherons une formulation covariante de la quantification conformément équivariante. L'application $\mathsf{ev}_g : \mathcal{T}^\delta \to \mathcal{S}^\delta[\xi]$ identifiant coordonnées naturelles et de Darboux, permettra alors, en un sens, de s'affranchir de ces dernières qui dépendent de la métrique g.

Enfin nous écrivons localement l'ordre normal $\mathcal{N}$ (3.109) qui établit une bijection entre l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et celui des opérateurs différentiels spinoriels $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$. Il permettra au chapitre suivant de transporter la structure de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules de $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, et de travailler ainsi sur l'espace des symboles. Nous en profitons pour définir une notion de conjugaison sur l'espace des symboles permettant au bivecteur de spin, de composantes $S^{ij} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\xi^i\xi^j$, d'être réel.

1.4 Chapitre 4 [Résultats principaux] La quantification conformément équivariante des supercotangents

Ce dernier chapitre est le cœur de la thèse ; il y est question à proprement parler de la quantification conformément équivariante des supercotangents. Il reprend essentiellement la structure de la Section 2.3 qui traite de la quantification des fibrés cotangents. Tout d'abord, nous construisons l'unique quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 en les impulsions pour un poids δ générique, puis traitons en détail les cas exceptionnels. Obtenir la formulation covariante de la quantification conformément équivariante initialement trouvée en coordonnées de Darboux conformes n'est pas immédiat ; nous introduisons pour ce faire une quantification auxiliaire, ainsi que la notion de superisation conformément équivariante. Nous donnons alors les théorèmes d'existence et d'unicité de la superisation et de la quantification conformément équivariantes, leur démonstration reposant sur la diagonalisation des opérateurs de Casimir des $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$. Nous terminons ce chapitre par un certain nombre d'exemples et d'applications.

Nous supposons dans toute la suite que (M,g) est une variété conformément plate et admet une structure spinorielle.

Le premier objectif est de construire la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 du supercotangent de (M,g). Le schéma de la preuve est celui du Théorème 2.3.3, qui concerne les fibrés cotangents, et est développé au cours des deux premières sections.

1. Ecrire les actions classiques L_X^δ et quantiques $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$ des générateurs de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$ sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, en utilisant l'ordre normal pour transporter l'action quantique de $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ à l'espace des symboles.
2. Obtenir le commutant $\mathrm{e}(p,q)^!$ dans l'algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}(\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi])$.

3. Donner la forme des endomorphismes de $\mathcal{S}^\delta_{\leq 1}(\mathbb{R}^n)$ préservant le symbole principal et équivariants sous l'action de $\mathrm{ce}(p,q)$.
4. Implémenter les contraintes d'équivariances sous l'action des inversions infinitésimales $\bar{X}_i$.

Actions conformes et invariants euclidiens

Nous traitons ici des deux premiers points énoncés ci-dessus.

D'une part, le relevé à $\mathcal{M}$, des champs de vecteurs Killing-conformes de (M,g), a été obtenu au Théorème 3.1.22 et permet de définir une structure de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ par la dérivée de Lie $L^\delta_X = \tilde{X} + \delta \mathrm{Div}(X)$, où $\mathrm{Div}(X) = \partial_i X^i$. D'autre part, La structure de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module sur $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ est donné par la dérivée de Lie des densités spinorielles, qui découle naturellement de la dérivée de Lie des champs spinoriels, déterminée précédemment et due à Y. Kosmann [60]. La difficulté est de donner l'expression explicite $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$ de cette dernière, après transport par l'ordre normal sur l'espace des symboles ; ceci constitue l'objet de la Proposition 4.1.1. Nous constatons alors que, écrites en coordonnées de Darboux conformes les expressions de L^δ_X et $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$ ne dépendent de la métrique qu'à travers les coordonnées et qu'elles coïncident sur la sous-algèbre de Lie des similitudes $\mathrm{ce}(p,q)$.

Nous nous plaçons alors sur la variété plate $(\mathbb{R}^n,\eta)$ de signature (p,q), ce qui est équivalent à travailler localement en coordonnées de Darboux conformes sur M. Un résultat de [67] nous permet de montrer que les endomorphismes de $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ préservant la structure de $\mathrm{ce}(p,q)$-modules appartiennent au commutant $\mathrm{ce}(p,q)^!$ de l'algèbre de Lie $\mathrm{ce}(p,q)$ dans l'espace $\mathrm{End}\left(\mathbb{C}[x^1,\ldots,x^n,\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_n,\tilde{\xi}^1,\ldots,\tilde{\xi}^n]\right) = \mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi},\partial_x,\partial_{\tilde{p}},\partial_{\tilde{\xi}}]_n$. En particulier, $Q^{\lambda,\mu}$ définie par $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} = \mathcal{N}\circ Q^{\lambda,\mu}$, avec $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ la quantification conformément équivariante, vérifie $Q^{\lambda,\mu} \in \mathrm{e}(p,q)^!$. Les éléments de $\mathrm{e}(p,q)^!$ sont aussi appelés invariants en référence au travail de H. Weyl [104]. Ce dernier distingue les invariants "pairs" et "impairs" suivant qu'ils dépendent, ou non, de l'orientation de $\mathbb{R}^n$. Nous traitons dans le corps du texte uniquement des invariants pairs, qui forment l'ensemble $\mathrm{e}(p,q)^!_+$, l'ensemble total $\mathrm{e}(p,q)^!$ des invariants étant traité dans l'Annexe B.

Proposition 1.4.1. *L'ensemble des invariants pairs* $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ *est engendré, comme algèbre, par les opérateurs*

$$\boxed{\begin{array}{llll} R = \tilde{p}^i\tilde{p}_i, & \mathcal{E} = \tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}_i}, & T = \partial_{\tilde{p}^i}\partial_{\tilde{p}_i}, & \Sigma = \tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}, \\ \Delta = \tilde{\xi}^i\tilde{p}_i, & \Phi = \tilde{p}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}, & \Psi = \tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{p}^i}, & \Omega = \partial_{\tilde{\xi}^i}\partial_{\tilde{p}_i}, \end{array}} \tag{1.19}$$

engendrant l'algèbre de Lie orthosymplectique spo(2|2)*, et par les opérateurs*

$$\boxed{\begin{array}{lll} G = \tilde{p}^i\tilde{\partial}_i, & D = \partial_{\tilde{p}_i}\tilde{\partial}_i, & L = \tilde{\partial_{x_i}}\tilde{\partial_{x^i}}, \\ \Gamma = \tilde{\xi}^i\tilde{\partial}_i, & \Lambda = \partial_{\tilde{\xi}_i}\tilde{\partial}_i, & \end{array}} \tag{1.20}$$

engendrant la superalgèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}(2|2)$*.*

Le commutant $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ *est isomorphe à* $\mathfrak{U}(\mathrm{spo}(2|2) \ltimes \mathfrak{h}(2|2))$*, pour* $n \geq 3$*.*

Cette proposition est à comparer à la Proposition 2.3.1 précitée dans le cas des fibrés cotangents. On retrouve les 6 invariants précédents, donnés en (1.5) et (1.6), ainsi que 7 nouveaux invariants mettant en jeu les variables impaires et notés par des lettres grecques. Il n'y a pas d'invariants impairs dans le cas des fibrés cotangents, sauf en petite dimension, car ils sont construits à partir de la forme volume et les variables $\partial_x, p, \partial_p$ sont paires.

On déduit de la Proposition 4.1.5 que $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ est engendrée en tant qu'algèbre par les treize générateurs indépendants précédents. Nous écrivons ensuite la contrainte correspondant à la commutation à la dilatation, ce qui caractérise le sous-espace $\mathrm{ce}(p,q)^!_+$ de $\mathrm{e}(p,q)^!_+$.

La Quantification conformément équivariante des symboles de degrés 0 et 1 en coordonnées de Darboux conformes

Nous débutons la section par le Lemme 4.2.1 montrant que les quantifications conformément équivariantes du supercotangent de (M,g) formulées en coordonnées de Darboux correspondent à celles du supercotangent de la variété plate $\mathbb{R}^n$. Or une telle quantification est de la forme $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} = \mathcal{N} \circ Q^{\lambda,\mu}$, avec, d'après ce qui précède, $Q^{\lambda,\mu} \in \mathrm{ce}(p,q)^!$. Nous montrons alors que la quantification conformément équivariante d'ordre 0, où seul le symbole principal associé à la graduation en ξ est préservé, est donné par l'ordre normal et coïncide avec la quantification de Weyl. La Proposition 4.2.4 donne alors la forme des quantifications $\mathrm{ce}(p,q)$-équivariantes sur les symboles de degré 1 en les impulsions, qui préservent le symbole associé à la graduation en p. On obtient ainsi

$$Q^{\lambda,\mu} = \mathrm{Id} + c_d(\Sigma)D + c_{\gamma\psi}(\Sigma)\Gamma\Psi + c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi + c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega + c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega, \tag{1.21}$$

où les coefficients $c_d(\Sigma), \ldots, c_{\lambda\omega}(\Sigma)$, sont des polynômes en l'opérateur d'Euler grassmannien $\Sigma = \tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}$ et non des constantes, ce qui est la principale nouveauté par rapport au cas du fibré cotangent “ordinaire”. Il reste à imposer à $Q^{\lambda,\mu}$ la condition d'équivariance sous les inversions conformes $\bar{X}_i$ qui s'écrit $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}Q^{\lambda,\mu} = Q^{\lambda,\mu}L^{\delta}_{\bar{X}_i}$, ou encore $\left(\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} - L^{\delta}_{\bar{X}_i}\right)Q = [Q, L^{\delta}_{\bar{X}_i}]$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Expliciter le membre de gauche est immédiat, et exprimer le membre de droite est l'objet du Lemme 4.2.7, dont la démonstration est technique et repose sur l'Annexe A. Cela conduit à la Proposition 4.2.5, qui donne sous forme de $n+1$ égalités opératorielles la contrainte d'équivariance sous les inversions, qui porte sur les coefficients $c_d(\Sigma),\ldots,c_{\lambda\omega}(\Sigma)$. Ces $n+1$ égalités sont équivalentes et leur résolution conduit à un système linéaire en les coefficients $c_d(\kappa),\ldots,c_{\lambda\omega}(\kappa)$ pour $\Sigma=\kappa$, avec $\kappa=0,\ldots,n=\dim M$. Il est diagonalisé à la Proposition 4.2.9, qui mène directement aux théorèmes sur la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1. Nous en énonçons ici le premier, qui correspond au cas générique et constitue l'un de nos résultats principaux.

Théorème 1.4.2. *Soit (M,g) une variété conformément plate. Pour $n\delta\neq 1,\ldots,n+1$, il existe une unique quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}:\mathcal{S}^\delta_{\leq 1}[\xi]\to\mathsf{D}^{\lambda,\mu}_1$, qui s'écrit localement, en coordonnées de Darboux conformes et avec $\mathcal{N}$ l'ordre normal associé,*

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}=\mathcal{N}\circ\Big(\mathrm{Id}+c_d(\Sigma)D+c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi+c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega+c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega\Big),}\tag{1.22}$$

ou encore explicitement, pour $P\in\mathcal{S}^\delta_1[\xi]$,

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) & = & \mathcal{N}(P^i)\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_i\\ & + & \mathcal{N}\Big((c_d+c_{\lambda\psi})\,\tilde\partial_iP^i-c_{\lambda\psi}\,\eta^{jk}\tilde\xi_i\tilde\partial_jP^i_k+c_{\gamma\omega}\,\tilde\xi^j\tilde\partial_jP^i_i+c_{\lambda\omega}\,\eta^{jk}\tilde\partial_jP^i_{ik}\Big)\,,\end{array}}\tag{1.23}$$

où $P^i=\partial_{\tilde p_i}P$ et $P_i=\partial_{\tilde\xi^i}P$. Les coefficients sont des fonctions de l'opérateur d'Euler grassmannien $\Sigma=\tilde\xi^i\partial_{\tilde\xi^i}$, donnés par

$$\begin{cases} c_d(\Sigma)=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{2n\lambda+1}{2n(1-\delta)+2},\\ c_{\lambda\psi}(\Sigma)=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{n(1-\delta-2\lambda)}{(\Sigma-n(1-\delta))(2n(1-\delta)+2)},\\ c_{\gamma\omega}(\Sigma)=-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{n(1-\delta-2\lambda)}{(\Sigma-n\delta)(2n(1-\delta)+2)},\\ c_{\lambda\omega}(\Sigma)=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{1}{4(\Sigma-n(1-\delta))}.\end{cases}$$

Il est à noter que la quantification géométrique du supercotangent, donnée au Théorème 3.3.9, coïncide avec la quantification conformément équivariante sur son espace de définition. Elle en constitue une extension stricte, car la quantification géométrique ne s'applique pas aux monômes de degré 1 en $\tilde p$ et de degré non nul en $\tilde\xi$

Le Théorème 4.2.11 donne ensuite les deux cas résonants $\delta=\frac{1}{n},\frac{n+1}{n}$, pour lesquels la quantification conformément équivariante existe si et seulement si $\big(\lambda=\frac{n-1}{2n},\mu=\frac{n+1}{2n}\big)$ et $\big(\lambda=\frac{-1}{2n},\mu=\frac{2n+1}{2n}\big)$, mais elle est alors non unique. Enfin, le Théorème 4.2.12 établit la non-existence de la quantification conformément équivariante pour les cas restants, i.e. $\delta=\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,1$.

Pour $\lambda+\mu=1$, nous avons défini la notion d'opérateurs symétriques via celle d'adjonction *, ainsi qu'une notion de conjugaison $\bar{\cdot}$ sur les symboles. Nous pouvons donc conjecturer que la quantification conformément équivariante vérifie l'axiome de réalité : $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(\bar{P}) = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P)^*$. La Proposition 4.2.13 répond par l'affirmative, et montre que pour les deux cas résonants traités par le Théorème 4.2.11, imposer l'axiome de réalité à la quantification conformément équivariante permet de la fixer.

Une quantification conformément invariante

Le second objectif de cette thèse est d'obtenir une formulation covariante de la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 obtenue au théorème précédent, i.e. de l'écrire en termes de la dérivée covariante des spineurs de poids λ, et de la dérivée covariante des symboles.

La difficulté nouvelle par rapport aux travaux antérieurs est que l'écriture de la quantification conformément équivariante, donnée précédemment, dépend de la métrique via les coordonnées de Darboux conformes utilisées. Pour résoudre ce problème, nous introduisons une quantification conformément équivariante auxiliaire $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu} : \mathcal{T}^\delta \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, où l'espace $\mathcal{T}^\delta$, vu comme espace de tenseurs, admet une action naturelle de $\mathrm{Vect}(M)$, indépendante de la métrique. Ainsi, $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu}$ ne dépend pas de la métrique g. Le schéma de la preuve du Théorème 4.4.1, donnant l'écriture covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$, est le suivant,

1. Déterminer la superisation conformément équivariante $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}^\delta : \mathcal{T}^\delta \to \mathcal{S}^\delta[\xi]$.
2. En déduire la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu} : \mathcal{T}^\delta \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}$.
3. Ecrire $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu}$ sous forme covariante, et montrer qu'elle est invariante conforme, i.e. invariante sous dilatation conforme de la métrique.
4. Donner l'expression de la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ qui en découle.

L'application $\mathsf{ev}_g : \mathcal{T}^\delta \to \mathcal{S}^\delta[\xi]$ permet de transporter la structure de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules de $\mathcal{T}^\delta$ à l'espace des symboles, jouant alors le rôle tenu par l'ordre normal pour la quantification. L'action de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$ qui en résulte sur l'espace des symboles est notée $\mathbb{L}_X^\delta$. Par définition, la superisation coïncide avec ev_g si on se restreint au terme de plus haut degré, condition analogue à la préservation du symbole principal pour la quantification. Nous sommes ramenés à chercher l'automorphisme S^δ qui est défini par le diagramme commutatif suivant de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^\delta[\xi] \arrow[r, "\mathrm{S}^\delta"] & \mathcal{S}^\delta[\xi] \\
\mathcal{T}^\delta . \arrow[u, "\mathsf{ev}_g"] \arrow[ur, "\mathrm{S}_{\mathcal{T}}^\delta"']
\end{tikzcd} \tag{1.24}$$

La condition d'égalité avec ev_g sur le terme de plus haut degré se traduit par le fait que $\mathrm{S}^\delta - \mathrm{Id}$ est nilpotent, tout comme $Q^{\lambda,\mu} - \mathrm{Id}$. Encore une fois, l'action des similitudes sur les deux modules est la même, d'où $\mathrm{S}^\delta \in \mathrm{ce}(p,q)^!$, et d'après la Proposition 4.2.4, il est de la forme donnée par l'équation (1.21), tout comme $Q^{\lambda,\mu}$. La contrainte d'équivariance sous les inversions conformes conduit à $-[\mathrm{S}^\delta, L^\delta_{\bar{X}_i}] = \left(\mathsf{ev}_g \mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i} (\mathsf{ev}_g)^{-1} - L^\delta_{\bar{X}_i}\right) \mathrm{S}^\delta$, et le Lemme 4.2.7 permet encore de déterminer le commutateur. En revanche, le membre de droite est différent du cas décrit ci-dessus et rend la résolution de cette équation plus aisée que précédemment pour la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$.

Proposition 1.4.3. *Si $n\delta = 2, \ldots, n$ il n'existe pas de superisation $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$ conformément équivariante des symboles de degré 1. Dans le cas contraire, il existe une unique superisation conformément équivariante $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}^\delta_{\leq 1} \to \mathcal{S}^\delta_{\leq 1}[\xi]$, qui est donnée par*

$$\boxed{\mathrm{S}_{\mathcal{T}} = (\mathrm{Id} + c_{\mathrm{S}}(\Sigma)\Gamma\Psi) \circ \mathsf{ev}_g,} \tag{1.25}$$

avec $c_{\mathrm{S}}(\Sigma) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{1}{n\delta - \Sigma}$.

La composition de $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$ avec $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ fournit alors la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$ à la Proposition 4.3.8, que l'on peut exprimer en termes des coordonnées naturelles (x^i, p_i, ξ^i), montrant ainsi son indépendance par changement conforme de métrique. D'autre part, remarquons que transportées à l'espace des symboles, les deux quantifications $Q^{\lambda,\mu}$ et $Q^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$ diffèrent d'un terme.

Il s'agit alors de trouver la formulation covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$, ce que nous faisons en montrant qu'elle coïncide dans le cas plat avec une expression Q_g ne dépendant que de la classe conforme $[g]$ de la métrique g. La formule donnant Q_g est fournie dans la Définition 4.3.11, elle est écrite en termes de dérivées covariantes associées à la connexion de Levi-Civita de la métrique g. L'invariance conforme de Q_g est énoncé ensuite dans le Théorème 4.3.12 et prouvée dans l'Annexe C. La preuve montre que Q_g est égale à $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$ dans le cas plat, et comme cette dernière est également invariante conforme, elles sont égales sur toute variété conformément plate. L'expression covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$ est ainsi obtenue simplement par substitution des dérivées ordinaires ∂_i par les dérivées covariantes.

Formulation covariante de la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1

Les expressions des quantifications $Q^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$ et $Q^{\lambda,\mu}$, vues sur l'espace des symboles, diffèrent, rappelons-le, d'un terme. Nous montrons que l'expression covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$, tronquée de ce terme, varie avec la métrique précisément comme varie $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$, via la dépendance en la métrique des coordonnées de Darboux entrant dans son expression. Il en découle que la formulation covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ est également obtenue en substituant les dérivées ordinaires ∂_i par des dérivées covariantes, avec désormais des dérivations par rapport aux coordonnées naturelles ∂_{p_i} et ∂_{ξ^i}, et non plus par rapport aux coordonnées de Darboux $\partial_{\tilde{p}_i}$ et $\partial_{\tilde{\xi}^i}$.

Théorème 1.4.4. *Soit $P \in \mathcal{S}_1^\delta[\xi]$. Pour $n\delta \neq 1, \ldots, n+1$, l'unique quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}_1^\delta[\xi] \to \mathsf{D}_1^{\lambda,\mu}$ donnée dans le Théorème 1.4.2 (ou 4.2.10) admet pour écriture covariante*

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) & = & \mathcal{N}(P^i)\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla_i^\lambda \\ & & +\mathcal{N}\Big((c_d + c_{\lambda\psi})\,\partial_i^\nabla P^i - c_{\lambda\psi}\, g^{ij} g_{kl}\xi^l \partial_i^\nabla P_j^k + c_{\gamma\omega}\,\xi^i \partial_i^\nabla P_j^j + c_{\lambda\omega}\, g^{ij}\partial_i^\nabla P_{kj}^k\Big)\,,\end{array}} \tag{1.26}$$

où les coefficients sont déterminés par (1.24), et $P^i = \partial_{p_i} P$, $P_i = \partial_{\xi^i} P$.

Le Théorème 4.4.4 fournit alors l'expression covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ dans les deux cas résonants traités par le Théorème 4.2.11. Enfin le Corollaire 4.4.5 donne l'écriture covariante de la superisation $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}^\delta$.

Existence et unicité de la quantification conformément équivariante en degré quelconque

Cette section a pour objet les deux théorèmes probablement les plus importants de cette thèse, établissant l'existence et l'unicité de la superisation $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}^\delta$ et de la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ conformément équivariantes pour des valeurs génériques du poids $\delta = \mu - \lambda$. Les résonances sont identifiées uniquement pour la superisation, les déterminer pour la quantification semblant actuellement hors de portée.

Théorème 1.4.5. *Soit (M, g) une variété conformément plate de dimension au moins 2 et $I_{\mathrm{S}} = \{\frac{k+1}{n} |\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Si $\delta \notin I_S$, il existe alors une unique superisation conformément équivariante*

$$\boxed{\mathrm{S}_{\mathcal{T}} : (\mathcal{T}^\delta, \mathbb{L}_X^\delta) \to (\mathcal{S}^\delta[\xi], L^\delta).} \tag{1.27}$$

Théorème 1.4.6. *Il existe un sous ensemble I_Q de $\mathbb{Q}^*$ (contenant I_S) tel que, pour $\delta \notin I_Q$, il existe une unique quantification conformément équivariante*

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}.} \tag{1.28}$$

La preuve de ces deux théorèmes repose sur la même stratégie, élaborée initialement dans [34] pour traiter le cas de la quantification conformément équivariante des fibrés cotangents, et exposée ici dans le Paragraphe 4.5.3 sous forme assez générale pour s'appliquer aux deux théorèmes. Il s'agit alors essentiellement de diagonaliser les opérateurs de Casimir des trois modules en jeu $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, qui sont explicités dans la Proposition 4.5.3 et calculés dans l'Annexe D. Les deux opérateurs de Casimir de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ sont de la forme $C_{\mathcal{T}}^\delta + N$, où N est un opérateur nilpotent et $C_{\mathcal{T}}^\delta$ est l'opérateur de Casimir de $\mathcal{T}^\delta$. Nous montrons, par le Lemme 4.5.8, que tout repose alors sur la diagonalisation de $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$, qui a pour expression

$$C^{\delta}_{\mathcal{T}} = 2(\Delta\Omega + \Phi\Psi) + RT + \Sigma(\Sigma - n) + 2n\,(n(\delta - 1) - \mathcal{E})\,\mathcal{E} - n^2\delta(\delta - 1). \tag{1.29}$$

Les quatre opérateurs $\mathcal{E}$, Σ, RT et $\Delta\Omega+\Phi\Psi$ commutent simultanément. La diagonalisation de l'opérateur de Casimir de l'espace des symboles dans le cas du fibré cotangent demande de diagonaliser $\mathcal{E}$ et RT simultanément, et le résultat a déjà été formulé au Chapitre 2. Il est assez direct de diagonaliser également Σ, dont les valeurs propres correspondent au degré en les variables grassmanniennes. La diagonalisation de ces trois opérateurs est formulée par la Proposition 4.5.10. Le dernier opérateur $\Delta\Omega + \Phi\Psi$ est par contre plus délicat à traiter, et conduit finalement à la diagonalisation de $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$, explicitée à la Proposition 4.5.16.

La diagonalisation explicite de l'opérateur de Casimir de $\mathcal{S}^{\delta}[\xi]$ est traitée dans l'Annexe E et permet d'obtenir les résonances pour la superisation conformément équivariante.

Applications et exemples

Nous illustrons les résultats principaux de cette thèse par des exemples et applications des théorèmes obtenus, en particulier sur la formulation covariante de la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ et de la superisation $\mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$ conformément équivariantes des symboles de degré 1.

Tout d'abord nous montrons que la superisation $\mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$ permet de passer de l'application moment $J : T^*M \to \mathrm{o}(p+1, q+1)$ à l'application moment paire $\mathcal{J}^0$ du supercotangent $\mathcal{M}$ que nous avons précédemment définie. Explicitement, on a

$$\mathcal{J}^0_X = \mathrm{S}^0_{\mathcal{T}} \circ J_X, \tag{1.30}$$

pour tout champ de vecteurs Killing-conforme X. La quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ permet alors d'obtenir la dérivée de Lie des spineurs de poids λ via : $\mathsf{L}^{\lambda}_X = \mathcal{Q}^{\lambda,\lambda} \circ \mathrm{S}^0_{\mathcal{T}} \circ J_X$. Ces égalités sont sans surprise, découlant directement des propriétés d'équivariance de la superisation et de la quantification.

Nous proposons ensuite une application importante, qui est la classification des éléments invariant conformes des trois $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-modules avec lesquels nous avons travaillé. Dans le cas des fibrés cotangents, nous avons traité cette question dans la dernière section du Chapitre 2 en nous inspirant de l'article [82], et retrouvons alors la classification des opérateurs différentiels (scalaires) conformément invariants, obtenue initialement par M.G. Eastwood et J.W. Rice [39]. La classification obtenue ici dans le cas spinoriel ne semble pas apparaître dans la littérature. Elle repose essentiellement sur la Proposition B.0.14 donnant les invariants isométriques de $\mathrm{End}(\mathcal{S}^{\delta}[\xi])$ et sur les actions des trois modules précités, écrites explicitement sur les symboles. Désignons par $\chi = (\mathrm{vol}_g)_{j_1\dots j_n}\xi^{j_1}\dots\xi^{j_n}$ le symbole de la chiralité et par $\Delta^\chi = (\mathrm{vol}_g)_{j_1\dots j_n} p^{j_1}\xi^{j_2}\dots\xi^{j_n}$ son crochet de Poisson avec Δ. Rappelons par ailleurs que Δ et R sont deux invariants isométriques, introduits à la Proposition 1.4.1

Théorème 1.4.7. *Les invariants conformes de la famille de modules $(\mathcal{T}^\delta)_{\delta\in\mathbb{R}}$ sont, via ev_g, donnés par*

$$\mathsf{ev}_g^{-1}\left(\Delta^a * \chi^b\, R^s\right) \in \mathcal{T}^{\frac{2s+a}{n}}, \tag{1.31}$$

où $a,b = 0,1$ et $s\in\mathbb{N}$. La famille de modules $(\mathcal{S}^\delta[\xi])_{\delta\in\mathbb{R}}$ a pour invariants conformes

$$\Delta^a * \chi^b\, R^s \in \mathcal{S}^{\frac{2s+a}{n}}[\xi], \tag{1.32}$$

où $s\in\mathbb{N}$ et $a,b=0,1$ avec $a+b\neq 0$. Les invariants conformes de la famille de modules $(\mathsf{D}^{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}$ ont pour expression locale, via l'ordre normal,

$$\mathcal{N}(\chi)\in\mathsf{D}^{\lambda,\lambda}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{N}(\Delta^\chi)\in\mathsf{D}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{N}(\Delta\, R^s)\in\mathsf{D}^{\frac{n-2s-1}{2n},\frac{n+2s+1}{2n}}, \tag{1.33}$$

et ceci pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et $s\in\mathbb{N}$.

La superisation $\mathrm{S}^\delta_\mathcal{T}$ et la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ transportent, grâce à leur propriété d'équivariance conforme, les éléments conformément invariants d'un module à l'autre. Nous nous servons alors de l'expression covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ pour obtenir les écritures covariantes des trois opérateurs différentiels conformément invariants de plus bas degré. Celui de degré 0 est évidemment la chiralité, les deux de degré 1 font l'objet du Corollaire 4.6.7, reproduit ici.

Corollaire 1.4.8. *Les deux invariants conformes de la famille de modules $(\mathcal{T}_1^\delta)_{\delta\in\mathbb{R}}$ sont $\Delta = p_i\xi^i \in \mathcal{T}^{\frac{1}{n}}$ et $\Delta^\chi = (\mathrm{vol}_g)_{j_1\dots j_n}p^{j_1}\xi^{j_2}\dots\xi^{j_n}\in\mathcal{T}^{\frac{1}{n}}$. Leurs superisés sont donnés par les symboles invariants conformes*

$$\begin{aligned} \mathrm{S}^{\frac{1}{n}}_\mathcal{T}(p_i\xi^i) &= \Delta\in\mathcal{S}^{\frac{1}{n}}[\xi], &(1.34)\\ \mathrm{S}^{\frac{1}{n}}_\mathcal{T}((\mathrm{vol}_g)_{j_1\dots j_n}p^{j_1}\xi^{j_2}\dots\xi^{j_n}) &= \Delta^\chi\in\mathcal{S}^{\frac{1}{n}}[\xi]. &(1.35)\end{aligned}$$

Leurs quantifiés sont également invariants conformes, et correspondent respectivement à l'opérateur de Dirac

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}(\Delta) = \frac{\gamma^i}{\sqrt{2}}\nabla_i \in \mathcal{D}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}},} \tag{1.36}$$

et à son commutateur avec la chiralité,

$$\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}(\Delta^\chi) = g^{ij_1}(\mathrm{vol}_g)_{j_1\dots j_n}\frac{\gamma^{j_2}}{\sqrt{2}}\dots\frac{\gamma^{j_n}}{\sqrt{2}}\nabla_i \in \mathcal{D}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}. \tag{1.37}$$

Les poids $(\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n})$ correspondent à l'une des deux résonances de la quantification conformément équivariante.

Remarquons que, comme pour l'opérateur de Yamabe-Laplace dans le cas des fibrés cotangents, l'opérateur de Dirac a des poids qui correspondent précisément à l'une des deux résonances de la quantification conformément équivariante. Par contre, la quantification de son symbole $\tilde{p}_i\tilde{\xi}^i = p_i\xi^i$ est indépendante des poids λ et μ choisis, contrairement à celle du symbole $g^{ij}p_ip_j$ du laplacien de Yamabe.

La correspondance entre éléments invariants conformes des trois modules considérés est cependant limitée. Ainsi, par exemple, le module $\mathcal{T}^\delta$ comporte plus d'invariants que les deux autres. Notamment, le symbole R, qui est celui du laplacien, n'est pas invariant conforme comme élément de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, mais l'est en tant qu'élément de $\mathcal{T}^{\frac{2}{n}}$. Ceci peut-être interprété par l'obstruction à la superisation pour $\delta = \frac{2}{n}$, montrée à la Proposition 4.6.9 où nous donnons l'expression du superisé de R pour un poids δ générique.

La suite est consacrée à quelques exemples issus du couplage minimal à un champ électromagnétique.

Nous finissons par une application prometteuse de la superisation $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$, à l'intégrabilité des systèmes à spin. Nous montrons qu'elle établit une correspondance explicite entre tenseurs de Killing-Yano et les supercharges, qui sont des symboles dont le crochet de Poisson est nul avec le symbole de l'opérateur de Dirac [43]. Le lien entre ces deux notions était connu [98], mais la bijection reliant les deux n'avait pas été identifiée. Nous l'étendons au cas plus général des tenseurs de Killing-Yano conformes, en fournissant ainsi une caractérisation en termes supersymplectiques.

Théorème 1.4.9. *Soit (M, g) une variété conformément plate. A tout tenseur antisymétrique f sur M d'ordre κ, on peut associer le symbole $P_f = f^i_{j_1 \cdots j_{\kappa-1}}\xi^{j_1}\dots\xi^{j_{\kappa-1}}p_i$. On a alors*

$$\boxed{\{\Delta, \mathcal{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f)\} = \Delta P_h \iff f \text{est un tenseur de Killing-Yano conforme}} \qquad (1.38)$$

où le crochet de Poisson est donné par la structure symplectique canonique du supercotangent de (M, g), $\Delta = p_i\xi^i$ et h est un tenseur antisymétrique d'ordre $\kappa - 2$.

Par ailleurs, la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ permet de passer des supercharges classiques à leurs équivalents quantiques, qui sont les opérateurs différentiels commutant à l'opérateur de Dirac. Ceci a déjà été utilisé pour les supercharges issues de tenseurs de Killing-Yano, mais pas pour celles provenant de tenseurs de Killing-Yano conformes. Nous donnons ici des candidats potentiels pour leur analogue quantique, ce qui met pleinement en jeu et en relief l'expression que nous avons obtenue pour $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$.

Chapitre 2

Quantification équivariante des fibrés cotangents

Ce chapitre est dévolu à la présentation des résultats en quantification équivariante des cotangents qui ont été obtenu ces dix dernières années [35, 67, 34, 37, 38, 69, 70, 15]. Après une introduction générale à la problématique de la quantification, motivant la contrainte d'équivariance, nous présentons le cadre mathématique de la quantification équivariante et les résultats principaux. Nous spécifierons ensuite la discussion à la quantification conformément équivariante, afin de donner les stratégies des preuves qui seront généralisées ensuite au cas des supercotangents.

2.1 La problématique de la quantification

Nous introduisons tout d'abord le cadre mathématique des mécaniques classique et quantique afin d'exposer la problématique générale de la quantification telle que formulée par P.A.M. Dirac [31]. Nous présentons alors les réponses que constituent la quantification géométrique et la quantification par déformation, mais n'en développons que les aspects qui nous sont utiles par la suite. Enfin la quantification équivariante est introduite en articulation avec les deux précédents procédés de quantification. Pour une introduction générale à la quantification, on peut se référer à l'article de revue [1].

2.1.1 Le formalisme des mécaniques classique et quantique

La description de la dynamique d'un système isolé nécessite trois ingrédients : l'espace des états, l'espace des observables et une structure d'algèbre de Lie sur ce dernier. Cette structure permet d'écrire l'équation d'évolution de toutes observables d'un système une fois le hamiltonien donné, et définit le groupe de symétrie maximal d'un système, comme le groupe des transformations covariantes de cette équation.

La formulation symplectique de la mécanique classique

La présentation suivante de la mécanique classique est inspirée de l'article [72], ainsi que des ouvrages de références [97, 3, 106].

L'espace des états d'un système classique constitue une variété $\mathcal{M}$ que l'on suppose non singulière. L'espace de ses observables est donné par l'ensemble des fonctions lisses à valeurs réelles sur cette variété, $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. La connaissance des équations d'évolutions des observables nécessite alors, en plus du choix d'une observable comme hamiltonien du système, une structure d'algèbre de Lie sur les observables, donnée par un crochet de Poisson. En imposant à ce dernier d'être non dégénéré, on obtient une structure symplectique sur l'espace des états, $\mathcal{M}$, ce qui constitue notre cadre de travail.

Définition 2.1.1. *Une variété symplectique est un couple $(\mathcal{M}, \omega)$, où ω est une 2-forme fermée non dégénérée sur la variété $\mathcal{M}$, qui est donc de dimension paire.*

Un exemple standard de variété symplectique est le fibré cotangent d'une variété $\pi : T^*M \to M$, muni de sa forme symplectique canonique $\omega = d\alpha$, dérivant de la 1-forme de Liouville α. Celle-ci est définie par $\langle V, \alpha\rangle(x,p) = \langle \pi_* V(x), p\rangle$, où $V \in \mathrm{Vect}(T^*M)$, x représente un point de la base M et p un point de la fibre T^*_xM. En coordonnées fibrées, la 1-forme de Liouville s'écrit donc $\alpha = p_i dx^i$, avec $i = 1, \ldots, \dim(\mathcal{M})$.

Toutes les variétés symplectiques ne sont pas de cette forme. En effet, la sphère $\mathbb{S}^2$, munie de sa forme d'aire, est une variété symplectique mais n'est pas un fibré cotangent.

Le sous-groupe des difféomorphismes de $\mathcal{M}$ qui préservent la forme symplectique ω est appelé groupe des symplectomorphismes et est noté $\mathrm{Sympl}(\mathcal{M}, \omega)$.

La forme symplectique ω induit un isomorphisme entre espaces tangent et cotangent, ce qui permet de définir le champ de vecteur hamiltonien X_F d'une observable F comme gradient symplectique,

$$\iota_{X_F}\omega = -dF, \tag{2.1}$$

où ι désigne le produit intérieur et d la différentielle extérieure. On peut alors définir le crochet de Poisson sur l'espace des observables,

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G) = X_F G = -X_G F. \tag{2.2}$$

Il munit $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ d'une structure d'algèbre de Poisson, et donc de Lie, où l'identité de Jacobi découle de la fermeture de ω.

Dans le cas d'un fibré cotangent muni de sa structure symplectique canonique $\omega = dp_i \wedge dx^i$, on obtient, grâce à la formule (2.1), l'expression, en coordonnées, du champ hamiltonien d'une fonction F,

$$X_F = (\partial_{p_i} F)\partial_i - (\partial_i F)\partial_{p_i}, \tag{2.3}$$

et donc celle du crochet de Poisson,

$$\{F, G\} = \partial_{p_i} F \partial_i G - \partial_i F \partial_{p_i} G. \tag{2.4}$$

La correspondance (2.1) définit un morphisme d'algèbre de Lie entre l'espace des observables $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ et l'espace des champs de vecteurs Vect$(\mathcal{M})$. Cela se traduit par l'égalité :

$$X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]. \tag{2.5}$$

Ce morphisme a pour noyau les constantes et n'est pas surjectif. Son image est l'algèbre de Lie des champs hamiltoniens, qui est incluse dans l'algèbre de Lie de Sympl$(\mathcal{M}, \omega)$. En effet, la Formule de Cartan : $L_{X_F}\omega = d(\iota_{X_F}\omega) + \iota_{X_F} d\omega = 0$, assure que les champs hamiltoniens préservent la structure symplectique.

Nous sommes alors en mesure d'écrire, pour un hamiltonien H, l'équation d'évolution d'une observable F,

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\}, \tag{2.6}$$

avec t un paramètre d'évolution. Celle-ci est covariante respectivement au groupe des symplectomorphismes, qui s'interprète comme le groupe de symétrie de la mécanique classique.

De l'équation d'évolution (2.6) d'une observable F, on déduit qu'une constante du mouvement est caractérisée par $\{H, F\} = 0$. Si le flot ϕ^t du champ hamiltonien X_F est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, il constitue un groupe à un paramètre qui est alors groupe de symétrie du système de hamiltonien H, i.e. un sous-groupe de Sympl$(\mathcal{M}, \omega)$ préservant H. Plus généralement, à une algèbre de Lie d'observables, on peut associer un groupe agissant symplectiquement sur l'espace des phases.

Intéressons nous à la procédure inverse. Partant de l'action symplectique d'un groupe de Lie G sur $\mathcal{M}$, peut-on trouver l'algèbre de Lie des observables dont les flots engendrent l'action de ce groupe ? Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, elle se représente dans Vect$(\mathcal{M})$, par $Z \mapsto Z_\mathcal{M}$, telle que $L_{Z_\mathcal{M}}\omega = 0$. En utilisant la Formule de Cartan pour la dérivée de Lie on obtient $d(\iota_{Z_\mathcal{M}}\omega) = 0$, i.e. la 1-forme $\iota_{Z_\mathcal{M}}\omega$ est fermée. Supposons qu'elle soit exacte pour tous les éléments Z de $\mathfrak{g}$. L'action du groupe est alors dite hamiltonienne et on peut définir l'application moment $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, dû à J.-M. Souriau [97], par l'équation

$$\iota_{Z_\mathcal{M}}\omega = -dJ(Z). \tag{2.7}$$

Elle est couramment définie de manière duale, $J : M \to \mathfrak{g}^*$, et $-d\langle Z, J\rangle = \iota_{Z_\mathcal{M}}\omega$.

L'application moment permet de formuler la version symplectique du Théorème de Noether : si un groupe de symétrie agit de manière hamiltonienne et préserve le hamiltonien du système, son application moment définit un ensemble de constantes du mouvement.

Terminons cette partie par l'exemple fondamental d'une particule libre dans un espace de configuration donné par la variété pseudo-riemannienne (M, g). L'espace des phases est alors le fibré cotangent T^*M muni de sa forme symplectique canonique et le hamiltonien est donné par $H = g^{ij}p_ip_j$. Son flot est le flot géodésique.

La formulation hilbertienne de la mécanique quantique

L'espace des états d'un système quantique est un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$, ou plus précisément le projectivisé de cet espace, qui est l'ensemble de ses droites. Tous les espaces de Hilbert de même cardinal étant isométriques, le choix spécifique de $\mathcal{H}$ est donc sans importance. L'espace des observables se réalise comme espace d'opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$, qui, muni du commutateur

$$\mathsf{i}[A, B] = \mathsf{i}(AB - BA), \tag{2.8}$$

forme une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Elle est isomorphe à l'algèbre de Lie des opérateurs anti auto-adjoints, où le commutateur est le même au facteur i près. Le groupe de Lie associé est le groupe unitaire $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Pour un système de hamiltonien H, l'équation d'évolution d'une observable F est donnée par la structure d'algèbre de Lie précédemment définie,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\mathsf{i}}{\hbar}[H, F]. \tag{2.9}$$

Les transformations covariantes de cette équation sont précisément données par l'action adjointe d'opérateurs unitaires, le groupe unitaire est donc le groupe de symétrie de la mécanique quantique.

Comme dans le cas classique, une observable F est une constante du mouvement si et seulement si $\mathsf{i}[H, F] = 0$, i.e. si elle correspond à une symétrie infinitésimale du système.

Terminons par l'exemple important du système constitué d'une particule libre dans l'espace plat de Minkowski. L'espace de Hilbert est $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^4)$, et le hamiltonien du système est donné par le laplacien $\Delta = \eta^{ij}\partial_i\partial_j$, avec η la métrique plate de signature $(+---)$.

La similarité des hamiltoniens classique et quantique pour le même système est à noter. Etablir une correspondance entre les deux est un des but de la quantification.

2.1.2 La quantification : méthodes et obstructions

La quantification d'un système classique, i.e. d'une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$, consiste en la construction d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, puis d'une correspondance entre observables classiques et quantiques, qui s'écrit $Q : f \mapsto Q(f)$, où $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ et $Q(f)$ est un opérateur sur $\mathcal{H}$. Le parallèle structurel entre les formalismes des mécaniques classique et quantique mène P.A.M. Dirac [31], à formuler le problème portant son nom : trouver une bijection linéaire Q satisfaisant les trois propriétés suivantes,

1. la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{M}$ se quantifie en l'identité sur $\mathcal{H}$, $Q(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$,
2. la conjugaison $\bar{\cdot}$ se quantifie en l'adjonction * (axiome de réalité),
$$Q(\bar{f}) = Q(f)*, \tag{2.10}$$
3. l'application Q est un morphisme d'algèbre de Lie,
$$Q(\{f,g\}) = \frac{\mathsf{i}}{\hbar}[Q(f), Q(g)]. \tag{2.11}$$

Il fait naître ainsi le concept même de quantification. Les propriétés que doivent satisfaire une quantification n'ont rien de canonique, et nous verrons par la suite des quantifications répondant à des versions modifiées du problème de Dirac.

La troisième propriété (2.11) signifie que la quantification préserve la dynamique, l'équation d'évolution (2.9) en mécanique quantique se déduisant par quantification de (2.6), celle en mécanique classique. Cette propriété peut également s'interpréter comme équivariance de la quantification sous l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens, ou encore, comme représentation unitaire de $\mathrm{Sympl}(\mathcal{M}, \omega)$ sur $\mathcal{H}$.

La préquantification constitue une réponse au problème de Dirac. Cependant, même pour l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^n$, elle n'est pas satisfaisante. En effet, elle fournit comme espace de Hilbert $L^2(T^*\mathbb{R}^n)$ au lieu de l'espace attendu $L^2(\mathbb{R}^n)$. La solution est apportée par l'ajout d'une polarisation qui conduit à la quantification géométrique [61, 97, 72, 106]. Celle-ci répond à un raffinement du problème de Dirac, qui est formulé dans [1]. Si une polarisation permet de construire l'espace de représentation hilbertien $\mathcal{H}$ pertinent pour l'interprétation physique, la quantification géométrique ne peut s'appliquer qu'à un sous ensemble restreint d'observables, celles précisément qui préservent la polarisation choisie. On peut d'ailleurs montrer que la quantification géométrique ne peut être prolongée à $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ tout en satisfaisant le problème de Dirac, voir Proposition 2.1.8.

Une des voies pour étendre la quantification géométrique est la quantification par déformations [8, 47, 32], qui s'applique à toutes les observables. Celle-ci ne satisfait pas la contrainte (2.11) mais une version déformée. L'existence d'une quantification par déformation, ou star-produit, a été prouvée sur toute variété symplectique [27, 40], et même de Poisson [58]. Tout le problème est d'imposer des conditions supplémentaires afin d'obtenir l'unicité. Par ailleurs, elle est formulée directement sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ et ne fournit pas d'espace de représentation hilbertien $\mathcal{H}$.

L'unicité d'une procédure de quantification repose souvent sur la présence d'un groupe de symétrie. Ainsi la quantification G-équivariante [67, 34], pour certains groupes G [15], permet d'étendre la quantification géométrique à une large classe d'observables de manière univoque. Elle définit également une quantification par déformation fortement G-invariante [33].

La quantification géométrique

La quantification géométrique d'une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$ s'effectue en deux étapes, la première étant la préquantification. Supposons la forme symplectique exacte, $\omega = d\alpha$. On pose $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathcal{M})$, l'espace des fonctions complexes dont le carré du module est intégrable sur $\mathcal{M}$, relativement à la mesure de Liouville. On définit alors la préquantification de toute observable f via la formule de Koopman-Van Hove-Segal, voir e.g. [53],

$$Q(f) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} X_f + f - \langle X_f, \alpha \rangle. \tag{2.12}$$

La préquantification Q est bien à valeurs dans les opérateurs formellement auto-adjoints et résout le problème de Dirac. Cela s'applique en particulier au cas d'un fibré cotangent T^*M, muni de sa forme symplectique canonique $\omega = dp_i \wedge dx^i$, et la formule (2.12) devient

$$Q(f) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left((\partial_{p_i} f)\partial_i - (\partial_i f)\partial_{p_i} \right) + f - p_i \partial_{p_i} f. \tag{2.13}$$

La préquantification des coordonnées s'écrit alors,

$$Q(x^i) = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \partial_{p_i} + x^i, \qquad Q(p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \partial_i. \tag{2.14}$$

Si la forme symplectique n'est pas exacte, elle doit satisfaire une condition d'intégralité pour que la préquantification existe. Plus précisément, la classe de 2-cohomologie de la 2-forme $(2\pi\hbar)^{-1}\omega$ doit être dans $H^2(M, \mathbb{Z})$, voir [61, 97]. Un exemple est la sphère $\mathbb{S}^2$, munie de la forme symplectique $\omega = n\frac{\hbar}{2}\mathrm{surf}_{\mathbb{S}^2}$, avec $\mathrm{surf}_{\mathbb{S}^2}$ la forme d'aire canonique de $\mathbb{S}^2$ et n un entier positif. La théorie générale de la préquantification se formule de façon équivalente en terme de fibré en droites complexes sur $\mathcal{M}$ [61], ou en terme de fibré en cercles sur $\mathcal{M}$ [97]. Suivons cette dernière approche.

Définition 2.1.2. *Soit $(\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique telle que $(2\pi\hbar)^{-1}[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Il existe alors un fibré en cercle $\pi : Y \to \mathcal{M}$, muni d'une 1-forme $\tilde{\alpha}$ vérifiant*

$$L_{\partial_\theta} \tilde{\alpha} = 0, \qquad \langle \partial_\theta, \tilde{\alpha} \rangle = \hbar, \quad \text{et} \quad d\tilde{\alpha} = \pi^*\omega, \tag{2.15}$$

où ∂_θ est l'action infinitésimale de $e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathrm{U}(1)$.

Le couple $(Y, \tilde{\alpha})$ est appelé fibré préquantique. Si ω est exacte, il est simplement donné par $Y = \mathcal{M} \times \mathbb{S}^1$ et $\tilde{\alpha} = \alpha + \hbar d\theta$. La préquantification d'une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ est alors fournie par le relevé quantique du champ hamiltonien de f,

$$Q(f) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} X_f^*, \tag{2.16}$$

vérifiant $\left\langle X_f^*, \tilde{\alpha} \right\rangle = f$. L'opérateur obtenu est vu comme agissant sur l'espace des fonctions équivariantes sur Y,

$$\mathcal{H} = \{\Psi \in \mathrm{L}^2(Y) | \partial_\theta \Psi = \mathrm{i}\Psi\}. \tag{2.17}$$

Dans le cas où le fibré est trivial, $\mathcal{H}$ s'identifie à $\mathrm{L}^2(\mathcal{M})$ et (2.16) redonne la formule de Koopman-Van Hove-Segal.

Bien que constituant une réponse au problème de Dirac, la préquantification n'est pas satisfaisante, même pour un fibré cotangent T^*M. Elle conduit à une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{C}^\infty(T^*M)$ sur $\mathrm{L}^2(T^*M)$, qui n'induit pas une représentation irréductible de l'algèbre de Lie de Heisenberg, engendrée par les coordonnées de Darboux p_i et x^i. En effet $\mathrm{L}^2(M)$ est alors un sous-espace stable. De plus, elle ne coïncide avec la quantification canonique de p_i et x^i qu'après restriction à $\mathrm{L}^2(M)$. Il nous faut donc une procédure pour réduire l'espace de Hilbert, ce qui nécessite l'introduction d'une structure supplémentaire sur $\mathcal{M}$: une polarisation.

Définition 2.1.3. *Une polarisation complexe de $(\mathcal{M}, \omega)$ est une distribution complexe intégrable et isotrope $P \subset T^{\mathbb{C}}\mathcal{M}$, le complexifié du tangent de $\mathcal{M}$, telle que la dimension de $D = P \cap \bar{P} \cap T\mathcal{M}$ soit constante.*

Dans la pratique, une polarisation complexe peut être définie localement par $n = \frac{1}{2}\dim \mathcal{M}$ fonctions complexes en involutions, leurs champs hamiltoniens engendrant P. Si $D = \{0\}$, alors $P \cap T\mathcal{M}$ est une distribution réelle intégrable et isotrope, i.e. une polarisation réelle. Sur un fibré cotangent T^*M, il existe une polarisation réelle canonique, dite verticale. Elle est engendrée par les fonctions coordonnées x^i, de champs hamiltoniens ∂_{p_i}.

Définition 2.1.4. *Soit $(\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique de fibré préquantique $(Y, \tilde{\alpha})$ et admettant une polarisation P. Le relevé horizontal de P est le champ de sous-espaces $\widetilde{P} \subset T^*_{\mathbb{C}}Y$ se projetant sur P et vérifiant $\langle \widetilde{P}, \tilde{\alpha} \rangle = \{0\}$.*

Si la forme ω est exacte, le relevé horizontal d'un champ $X \in P$ est donné par $\widetilde{X} = X - \langle X, \alpha \rangle \partial_\theta$.

Définition 2.1.5. *Les fonctions P-polarisées de $\mathcal{H}$ sont les fonctions $\psi \in \mathcal{H}$ telles que $\widetilde{X}\psi = 0$ pour tout $\widetilde{X} \in \widetilde{P}$. Elles forment l'espace de Hilbert noté $\mathcal{H}^P$.*

Ainsi l'existence d'une polarisation permet de réduire l'espace de représentation. Dans le cas d'un fibré cotangent T^*M muni de la polarisation verticale, l'espace des fonctions polarisées s'identifie bien à $\mathrm{L}^2(M)$.

Une observable classique f est dite quantifiable si sa préquantification $Q(f)$ définit un opérateur qui préserve $\mathcal{H}^P$. L'ensemble $\mathcal{A}$ des observables quantifiables forment alors une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ qui se représente via Q sur $\mathcal{H}^P$. Pour un fibré cotangent muni de la polarisaton verticale P, on obtient, au vu de la formule (2.13) donnant la préquantification,

$$\mathcal{A} = \{f(x,p) = p_i A^i(x) + B(x) | A^1, \ldots, A^n, B \in \mathcal{C}^\infty(M)\}, \tag{2.18}$$

et la quantification géométrique est alors donnée par

$$Q_G(f) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} A^i(x)\partial_i + B(x). \tag{2.19}$$

Elle induit donc une représentation irréductible de l'algèbre de Lie de Heisenberg, avec $Q_G(p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_i$, $Q_G(x^i) = x^i$ et $Q_G(1) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}^P}$.

Introduisons enfin l'espace des demi-densités, qui est l'espace des sections du fibré en ligne $|\Lambda^n T^* M|^{\otimes \frac{1}{2}}$. R.J. Blattner et B. Kostant ont montré dans [11, 62] qu'il était plus avantageux de choisir le complété des demi-densités polarisées à support compact comme espace de Hilbert, ce choix permettant à la fois d'éviter l'introduction d'une mesure pour définir l'espace L^2, et d'obtenir une formule de quantification correcte, à la correction métaplectique près, pour l'oscillateur harmonique [94, 95].

La quantification par déformation

Elle constitue une voie pour étendre la quantification géométrique à un espace plus vaste d'observables [78], en déformant la relation (2.11), qui exprime la propriété de morphisme d'algèbres de Lie d'une quantification.

Soit $(\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique et Q une quantification définie sur une sous-algèbre de Poisson $\mathcal{A}$ de $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot,\cdot\})$ qui vérifie $Q(\{f,g\}) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[Q(f), Q(g)]$ pour tout $f, g \in \mathcal{A}$, et est bijective. On définit alors, par transport, un nouveau produit $*$ sur les observables $f, g \in \mathcal{A}$, telles que $Q(f)Q(g) \in Q(\mathcal{A})$, via

$$Q(f * g) = Q(f)Q(g). \tag{2.20}$$

Ce produit est associatif et non commutatif. Si la quantification Q satisfait la contrainte (2.11) du problème de Dirac, alors le $*$-commutateur est simplement

$$f * g - g * f = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\{f, g\}. \tag{2.21}$$

Une telle quantification induit une déformation particulière du produit commutatif sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, dans la catégorie des algèbres associatives. Une manière de relâcher la contrainte (2.11) est donc de chercher des déformations plus générales du produit, dit star-produits, vérifiant une version déformée de (2.21). C'est la méthode de quantification par déformation.

Définition 2.1.6. *[8] Soit $(\mathcal{M},\omega)$ une variété symplectique et $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})[[\nu]]$ l'espace des séries formelles en ν à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Un star-produit différentiable $*$ est un produit associatif sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})[[\nu]]$, donné par l'extension à $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})[[\nu]]$ de l'application bilinéaire $* : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})[[\nu]]$, de la forme*

$$u * v = uv + \Sigma_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u,v). \tag{2.22}$$

Les C_r sont des opérateurs bidifférentiels, avec $C_1(u,v) - C_1(v,u) = 2\{u,v\}$ qui vérifient $u * 1 = 1 * u = u$.

L'associativité du star-produit assure que le commutateur, défini par $[u,v] = u*v - v*u$, confère une structure d'algèbre de Lie à $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, et

$$[u,v] = 2\nu\{u,v\} + \Sigma_{r=2}^{\infty} \nu^r B_r(u,v), \tag{2.23}$$

où les B_r sont des opérateurs bidifférentiels antisymétriques en leur deux arguments. Pour $\nu = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$, cette équation correspond alors à une déformation de l'égalité (2.21), la quantification par déformation peut alors être vue comme un prolongement de la quantification géométrique.

Les deux quantifications les plus couramment utilisées de $T^*\mathbb{R}^n$ sont la quantification de Weyl et "l'ordre normal". Elles prolongent la quantification géométrique, où l'espace de Hilbert choisi est respectivement celui des demi-densités et celui des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Elles donnent ainsi lieu toutes les deux à un star-produit formel sur $\mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ via l'équation (2.20). On peut les définir simultanément par la formule intégrale [47, 32],

$$Q_w(f) = \int_{T^*\mathbb{R}^n} \check{f}(\xi,\eta) \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(P\xi + X\eta)\right) w(\xi,\eta) d\xi^n d\eta^n, \tag{2.24}$$

oú $\check{f}$ est la transformée de Fourier inverse de f, $P_i = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_i$ et $X^i = x^i$ sont les quantifiés (géométriques) de p_i et x^i, et la fonction w est un poids. Si $w = 1$, on obtient la quantification de Weyl, notée Q_W, et si $w(\xi,\eta) = \exp(-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2))$ on obtient l'ordre normal, noté $\mathcal{N}$. Ces deux quantifications consistent, pour un polynôme sur $T^*\mathbb{R}^n$, à remplacer p_i par P_i et x^i par X^i, avec une écriture du polynôme symétrisée en p et x pour la quantification de Weyl et avec les p "à droite" pour l'ordre normal. Le domaine de définition de (2.24) contient l'espace des symboles des opérateurs différentiels sur M, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, qui est l'espace des fonctions polynomiales en les p sur $T^*\mathbb{R}^n$. L'ordre normal permet ainsi de définir le symbole d'un opérateur différentiel, et il peut même s'étendre au cas pseudo-différentiel.

La quantification de Weyl définit, via (2.20), le produit de Moyal [76] qui est le premier exemple, et probablement le plus simple, de star-produit. Il est donné par

$$f * g = m \circ \exp(\nu P)(f \otimes g), \tag{2.25}$$

où P est le crochet de Poisson donné par la structure symplectique canonique de $T^*\mathbb{R}^n$, et m est la multiplication usuelle sur $\mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$. Ainsi, on a $P(f,g) = \Lambda^{ij}\partial_i f \partial_j g$, où $\Lambda^{ij} = 1$ si $|j-i| = n$ et est nul sinon. L'écriture en coordonnées de $P^r(f,g)$ est donc naturellement donnée par $P^r(f,g) = \Lambda^{i_1 j_1} \cdots \Lambda^{i_r j_r} \partial_{i_1 \cdots i_r} f \partial_{j_1 \cdots j_r} g$. Il est clair que le produit de Moyal converge sur l'espace des symboles $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Il existe des extensions de ces deux exemples de quantifications au cas des fibrés cotangents, mais pas de manière univoque [16, 85, 103]. Ce problème est générique. En effet, si il a été montré que toute variété symplectique admet une quantification par déformation [27, 40], la question de l'unicité est problématique. Elle requiert d'imposer des contraintes supplémentaires, via un groupe de symétrie par exemple.

La non unicité du star-produit peut s'interpréter comme la trop grande généralité de l'affaiblissement (2.23) de la propriété (2.11). En effet cette égalité assurait une correspondance entre les dynamiques classique et quantique. Une méthode consiste à chercher un star-produit qui préserve l'évolution d'un ensemble privilégié d'observables, choisi comme les moments d'un groupe de symétrie G du système par exemple. Un tel star-produit est dit fortement G-invariant [8, 2, 32]. Il a été montré que certains choix pour le groupe G conduisent à l'unicité du star-produit. Ainsi le produit de Moyal sur $\mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ est l'unique star-produit fortement $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{2n}$-invariant [46].

Vers la quantification équivariante

Pour obtenir une unique quantification, il s'agit donc de spécifier les symétries de l'espace des phases. Si celui-ci est un fibré cotangent T^*M, muni de sa structure symplectique canonique $\omega = d\alpha$, elles peuvent être données infinitésimalement comme sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Vect}(M)$, i.e. comme symétries de l'espace de configuration M, relevées canoniquement à T^*M par préservation de α. Nous montrons que la quantification géométrique est caractérisée par $\mathrm{Vect}(M)$ tout entier, puis discutons de son extension par réduction de l'algèbre de Lie des symétries.

Proposition 2.1.7. *Soit $X \in \mathrm{Vect}(M)$ et α la 1-forme de Liouville sur T^*M. Il existe alors un unique relevé de $X = X^i\partial_i$ à T^*M qui préserve α, donné par*

$$\widetilde{X} = X^i\partial_i - p_j \partial_i X^j \partial_{p_i}. \tag{2.26}$$

Les relevés des champs de vecteurs de M sont hamiltoniens, et définissent l'application *moment* $J : \mathrm{Vect}(M) \to \mathcal{C}^\infty(T^*M)$, *telle*

$$J_X = \langle \widetilde{X}, \alpha \rangle = p_i X^i. \tag{2.27}$$

Réciproquement, le champ hamiltonien associé à l'observable $f = p_i X^i$ est $X_f = \widetilde{X}$.

Introduisons $\mathcal{S}_{\leq k}(M)$, l'espace des fonctions de T^*M qui sont polynomiales de degré inférieur ou égal à k en les variables fibrées. Rappelons que la quantification géométrique de T^*M, notée Q_G, est définie sur l'espace $\mathcal{A} = \mathcal{S}_{\leq 1}(M)$ des observables quantifiables, donné en (2.18), et son image (2.19) est incluse dans $\mathcal{D}(M)$, l'espace des opérateurs différentiels sur M. Or, d'une part, une algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Vect}(M)$ agissant sur l'espace de configuration M agit par adjonction sur $\mathcal{D}(M)$, et d'autre part la proposition précédente définit une action de cette algèbre de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(T^*M) \supset \mathcal{S}_{\leq k}(M)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Une application $Q : \mathcal{S}_{\leq k}(M) \to \mathcal{D}(M)$ est dite G-équivariante si c'est un morphisme de G-modules.

Proposition 2.1.8. *La quantification géométrique d'un fibré cotangent T^*M muni de sa structure symplectique canonique est l'unique application* $\mathrm{Vect}(M)$*-équivariante $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{D}(M)$, à normalisation près. De plus, il n'existe pas de prolongement à $\mathcal{S}_{\leq 2}(M)$, qui soit* $\mathrm{Vect}(M)$*-équivariant.*

Démonstration. Il suffit de prouver cette propriété pour $M = \mathbb{R}^n$, quitte à se place localement sur M. Montrons d'abord la propriété de $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^n)$-équivariance. Pour toutes fonctions $f, h \in \mathcal{A}$, on a $Q(\{f,h\}) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[Q(f), Q(h)]$. Choisissons $X \in \mathrm{Vect}(M)$ et $f = J_X = p_i X^i$, on a alors $\{f, h\} = \widetilde{X}h$ et $Q(f) = \frac{\hbar}{i}X$. La propriété de morphisme d'algèbre de Lie de Q se réécrit :

$$Q(\widetilde{X}h) = [X, Q(h)] = \mathcal{L}_X Q(h), \tag{2.28}$$

où $\mathcal{L}_X$ est l'action canonique de X sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; pour une expression explicite se référer à la formule (2.41). Cette dernière équation montre précisément que la quantification géométrique est $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^n)$-équivariante.

Dans notre cadre, on peut voir l'unicité comme découlant de l'unicité de la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 [35, 37], qui coïncide alors avec la quantification géométrique. Par ailleurs, le fait que, les quantifications projectivement [67] et conformément équivariantes [35, 37] coïncident sur les symboles de degré 1 et diffèrent sur les symboles d'ordre 2, montre qu'il n'y a pas de prolongement $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$-équivariant de la quantification géométrique à $\mathcal{S}_{\leq 2}(\mathbb{R}^n)$. □

Pour étendre le domaine d'application de la quantification géométrique, on peut donc chercher à prolonger Q avec une condition de G-équivariance, où G est un groupe agissant localement sur M par difféomorphismes. Il s'agit alors de choisir G assez petit pour qu'il existe un prolongement à l'espace des symboles $\mathcal{S}(M) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{\leq k}(M)$, et assez gros pour que ce prolongement soit unique. A partir d'une telle application bijective Q, on peut définir un star-produit via (2.20), qui est fortement G-invariant [33]. En particulier les moments $f \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$ du groupe G vérifient $Q(\{f,h\}) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[Q(f),Q(h)]$ pour tout $h \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$, leurs évolutions sont transportées par Q.

2.2 Le cadre de la quantification équivariante

Nous avons vu que, pour un fibré cotangent T^*M, l'action de $\mathrm{Diff}(M)$ admet un relevé naturel hamiltonien à T^*M. L'espace des fonctions polynomiales en les variables fibrées ou espace des symboles, noté $\mathcal{S}(M)$, et l'espace $\mathcal{D}(M)$ des opérateurs différentiels sur M sont donc munis d'une structure de $\mathrm{Diff}(M)$-module. La quantification équivariante est un prolongement de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$, qui est G-équivariant, avec G un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$. Une telle quantification, ou plutôt son inverse, fournit, comme la quantification de Weyl ou l'ordre normal sur $\mathbb{R}^n$, un symbole total pour les opérateurs différentiels sur M. Si la quantification de Weyl est $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{2n}$-équivariante, elle ne rentre pas cependant dans ce cadre, car son groupe d'équivariance ne provient pas d'un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$, i.e. de symétries de l'espace de configuration.

La quantification géométrique [11, 62], ainsi que l'étude géométrique des opérateurs différentiels [39, 35], mènent à considérer plutôt $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M)$, i.e. les opérateurs différentiels d'arguments les λ-densités et à valeurs dans les μ-densités. L'espace des symboles est alors naturellement pris comme étant de poids $\delta = \mu - \lambda$, et noté $\mathcal{S}^\delta(M)$. Nous commençons donc par introduire la notion de densités tensorielles, puis les structures de $\mathrm{Diff}(M)$-module sur $\mathcal{S}^\delta(M)$ et $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M)$.

Comme il n'existe pas de quantification $\mathrm{Diff}(M)$-équivariante, nous introduisons la notion de G-structure plate sur une variété, qui caractérise l'existence d'une action, locale, du groupe G sur la variété. Nous terminons par les résultats généraux d'existence et d'unicité de la quantification G-équivariante.

2.2.1 Les $\mathrm{Vect}(M)$-modules de la quantification équivariante

Nous donnons ici les définitions, en tant que module sur $\mathrm{Diff}(M)$ et/ou $\mathrm{Vect}(M)$, des trois espaces intervenant en quantification équivariante : l'espace des λ-densités tensorielles $\mathcal{F}^\lambda(M)$, l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta(M)$ de poids δ qui correspond à l'espace des observables classiques, et l'espace des opérateurs différentiels entre λ et μ densités $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M)$, constituant l'espace des observables quantiques. Nous écrivons également la forme des dérivées covariantes des densités tensorielles et des symboles, associées à une connexion affine Γ sur M.

L'espace des densités tensorielles $\mathcal{F}^\lambda(M)$

Une densité tensorielle de poids λ est une section du fibré en droite réelle $|\Lambda^n T^*M|^{\otimes\lambda}$. Nous notons $\mathcal{F}^\lambda$ l'espace des densités tensorielles complexes, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variété M en question. Cet espace est naturellement muni d'une structure de $\mathrm{Diff}(M)$-module.

Clairement, on a $\mathcal{F}^0 = \mathcal{C}^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$. De plus, si M est orientable, on peut identifier $\mathcal{F}^\lambda$ et $\mathcal{C}^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$ en tant qu'espaces vectoriels via une forme volume notée vol. Les λ-densités s'écrivent alors sous la forme $f|\mathrm{vol}|^\lambda$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$. En particulier, on a $\mathcal{F}^1 = \Omega^n(M) \otimes \mathbb{C}$, avec $\Omega^n(M)$ l'espace des n-formes différentielles, et ainsi, pour $\lambda + \mu = 1$, on peut définir une forme bilinéaire entre les λ et μ-densités à support compact par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_c^\lambda \otimes \mathcal{F}_c^\mu & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \otimes \mathbb{C} \\ (\phi, \psi) & \mapsto & \displaystyle\int_M \bar{\phi}(x)\psi(x). \end{array} \tag{2.29}$$

Si $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, cette forme bilinéaire munit l'espace des demi-densités à support compact $\mathcal{F}_c^{\frac{1}{2}}$ d'une structure préhilbertienne, le complété $\overline{\mathcal{F}_c^{\frac{1}{2}}}$ fournissant l'espace de Hilbert de la quantification géométrique du fibré cotangent T^*M.

En tant que $\mathrm{Diff}(M)$-module, $\mathcal{F}^\lambda$ s'identifie à $\mathcal{C}^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$ muni de l'action de $\mathrm{Diff}(M)$ suivante

$$\varphi_\lambda(f) = \varphi_* f \left| \frac{\varphi_* \mathrm{vol}}{\mathrm{vol}} \right|^\lambda, \tag{2.30}$$

pour tout difféomorphisme φ. La version infinitésimale de cette action fournit la dérivée de Lie des λ-densités, qui munit $\mathcal{F}^\lambda$ d'une structure de $\mathrm{Vect}(M)$-module. Pour $X \in \mathrm{Vect}(M)$, elle est donnée par

$$\mathrm{L}_X^\lambda(f) = X(f) + \lambda \mathrm{Div}(X) f, \tag{2.31}$$

avec Div la divergence associée à la forme volume vol, ce qui donne $\mathrm{Div}(X) = \frac{\mathrm{L}_X \mathrm{vol}}{\mathrm{vol}}$. En coordonnées telles que $\mathrm{vol} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, la dérivée de Lie s'écrit donc $\mathrm{L}_X^\lambda = X^i \partial_i + \lambda(\partial_i X^i)$.

Supposons que la variété M est munie d'une connexion affine (symétrique) Γ. En notant $\Gamma_i = \Gamma_{ij}^j$, la dérivée covariante d'une λ-densité est alors donnée par

$$\nabla_i^\lambda = \partial_i - \lambda \Gamma_i. \tag{2.32}$$

L'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta(M)$

L'espace des symboles $\mathcal{S}(M)$ est le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(T^*M) \otimes \mathbb{C}$, formé des fonctions polynomiales en les variables fibrées, il hérite donc de la structure de $\mathrm{Diff}(M)$-module de $\mathcal{C}^\infty(T^*M)$, dont la version infinitésimale est donnée par le relevé hamiltonien des champs de M à T^*M obtenu à la Proposition 2.1.7. Dans un système de coordonnées locales canoniques (x^i, p_i), un symbole $P \in \mathcal{S}(M)$ s'écrit

$$P(x,p) = \sum_{l=0}^{k} P^{i_1 \cdots i_l}(x) p_{i_1} \cdots p_{i_l}, \tag{2.33}$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$ appelé "degré" du symbole.

L'espace des symboles de poids δ est simplement donné alors par le produit tensoriel des symboles et des densités tensorielles de poids δ, et noté $\mathcal{S}^\delta = \mathcal{S}(M) \otimes \mathcal{F}^\delta$, la référence à M étant omise s'il n'y a pas de confusion possible. Les structures de $\mathrm{Diff}(M)$-module et de $\mathrm{Vect}(M)$-module de $\mathcal{S}^\delta$ sont celles d'un produit tensoriel de modules. En particulier, l'action d'un champ de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(M)$ est donnée par la dérivée de Lie suivante,

$$L_X^\delta = X^i \partial_i - p_j \partial_i X^j \partial_{p_i} + \delta \mathrm{Div}(X). \tag{2.34}$$

L'espace $\mathcal{S}^\delta$ s'identifie, en tant que $\mathrm{Diff}(M)$-module, avec l'espace des tenseurs symétriques contravariants de poids δ, noté $\Gamma(\mathcal{S}TM) \otimes \mathcal{F}^\delta$, via l'application

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(\mathcal{S}TM) \otimes \mathcal{F}^\delta & \to & \mathcal{S}^\delta \\ P^{i_1 \cdots i_k}(x) \partial_{i_1} \odot \cdots \odot \partial_{i_k} & \mapsto & P^{i_1 \cdots i_k}(x) p_{i_1} \cdots p_{i_k}, \end{array} \tag{2.35}$$

où les p_i sont canoniquement associés aux ∂_i par $p_i = \langle \partial_i, p \rangle$, au point $(x,p) \in T_x^* M$. Cette identification confère à l'espace des symboles une graduation $\mathrm{Diff}(M)$-invariante,

$$\mathcal{S}^\delta = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k^\delta, \tag{2.36}$$

où $\mathcal{S}_k^\delta$ désigne l'espace des symboles homogènes de degré k en les variables fibrées.

Si la variété M est munie d'une connexion affine, l'espace des tenseurs symétriques contravariants admet alors naturellement une dérivée covariante, qui se transporte à l'espace des symboles en une dérivée horizontale où elle s'écrit

$$\partial_i^\nabla = \partial_i - \Gamma_{ij}^k p_k \partial_{p_j} - \delta \Gamma_i. \tag{2.37}$$

L'espace des opérateurs différentiels $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M)$

L'espace $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ des opérateurs différentiels est un sous-espace des opérateurs linéaires $\mathcal{L}(\mathcal{F}^\lambda, \mathcal{F}^\mu)$, et hérite donc d'une structure de $\mathrm{Diff}(M)$- et $\mathrm{Vect}(M)$-modules. Soit un opérateur linéaire $A : \mathcal{F}^\lambda \to \mathcal{F}^\mu$, l'action de $X \in \mathrm{Vect}(M)$ est donné par la dérivée de Lie des opérateurs,

$$\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} A = \mathrm{L}_X^\mu A - A \mathrm{L}_X^\lambda, \tag{2.38}$$

où L_X^λ est donnée par (2.31).

Nous allons définir $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ par récurrence. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^\lambda, \mathcal{F}^\mu)$ est un opérateur différentiel d'ordre 0, ce que l'on note $A \in \mathcal{D}_0^{\lambda,\mu}$, si $[A, f] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}^\lambda$. Clairement, on a $\mathcal{D}_0^{\lambda,\mu} \simeq \mathcal{F}^{\mu-\lambda}$, et $A \in \mathcal{D}_0^{\lambda,\mu}$ correspond à la multiplication par une $(\mu - \lambda)$-densité. L'espace des opérateurs d'ordre k est défini par : $A \in \mathcal{D}_k^{\lambda,\mu}$ si $[A, f] \in \mathcal{D}_{k-1}^{\lambda,\mu}$ pour tout $f \in \mathcal{F}^\lambda$. En coordonnées locales, l'opérateur A s'écrit alors,

$$A = \sum_{l=0}^{k} a^{i_1\cdots i_l}(x)\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_l}, \tag{2.39}$$

où les $a^{i_1\cdots i_l} \in \mathcal{C}^\infty(M)$. L'espace total $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ est l'union de chacun des espaces précédents, $\mathcal{D}^{\lambda,\mu} = \bigcup_{k=0}^\infty \mathcal{D}_k^{\lambda,\mu}$, qui en constituent une filtration $\mathrm{Diff}(M)$-invariante : $\mathcal{D}_0^{\lambda,\mu} \subset \mathcal{D}_1^{\lambda,\mu} \subset \cdots \subset \mathcal{D}_k^{\lambda,\mu} \subset \cdots$. L'espace gradué associé, i.e. l'espace des symboles, s'identifie à $\mathcal{S}^\delta$ en tant qu'espace vectoriel, car $\mathcal{D}_k^{\lambda,\mu}/\mathcal{D}_{k-1}^{\lambda,\mu} \simeq \mathcal{S}_k^\delta$. En revanche, cette graduation n'est pas $\mathrm{Diff}(M)$-invariante. Seul le symbole de plus haut degré d'un opérateur différentiel, appelé symbole principal, est un terme géométrique qui se transforme comme un tenseur. On peut se référer à [67] pour l'étude des transformations des termes suivants.

Comparer les structures de $\mathrm{Vect}(M)$-modules de $\mathcal{S}^\delta$ et $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ nécessite un isomorphisme vectoriel entre les deux. Sur $\mathbb{R}^n$, et donc également localement, sur un ouvert $U \subset M$ muni d'un système de coordonnées, l'ordre normal définit un tel isomorphisme et s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : \mathcal{S}^\delta(U) &\rightarrow \mathcal{D}^{\lambda,\mu}(U) \\ P^{i_1\cdots i_k}(x)p_{i_1}\cdots p_{i_k} &\mapsto P^{i_1\cdots i_k}(x)\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{i_1}\cdots\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{i_k}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

On obtient, via cet isomorphisme linéaire, l'expression de la dérivée de Lie des opérateurs transportée sur les symboles, voir [67], que l'on notera toujours $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$, à savoir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} &= L_X^\delta - \frac{1}{2}p_k\partial_i\partial_j X^k\partial_{p_i}\partial_{p_j} - \lambda\partial_i\mathrm{Div}(X)\partial_{p_i} \\ &\quad + \text{termes du 3ème ordre en } X \in \mathrm{Vect}(M). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Il en découle que l'ordre normal est exactement $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$-équivariant, la graduation des opérateurs différentiels est exactement $\mathrm{aff}(n,\mathbb{R})$-invariante, et le symbole principal se transforme comme un tenseur.

Nous donnons désormais la définition de l'adjonction.

Définition 2.2.1. *Soit $\lambda + \mu = 1$. L'adjoint d'un opérateur différentiel $A \in \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ est l'opérateur différentiel $A^* \in \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, tel que pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{F}_c^\lambda$, on a*

$$(A\phi, \psi) = (\phi, A^*\psi), \tag{2.42}$$

la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)$ étant défini en (2.29).

Remarque 2.2.2. *En quantification géométrique, l'espace de Hilbert est $\overline{\mathcal{F}_c^{\frac{1}{2}}}$, et donc l'espace des observables quantiques sera naturellement dans notre cadre $\mathcal{D}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. L'adjonction est donc bien définie, et l'axiome de réalité (2.10) est vérifié. Chaque résultat pour la famille de modules $\mathcal{S}^\delta$ et $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ sera à interpréter pour $\delta = 0$ et $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ pour obtenir une extension de la quantification géométrique. Il est intéressant par ailleurs de montrer que si $\lambda + \mu = 1$ la quantification respecte encore l'axiome de réalité, i.e. fournit des opérateurs symétriques si elle est restreinte aux symboles à coefficients réels.*

2.2.2 La quantification G-équivariante

Nous pouvons maintenant définir ce que nous appellerons une quantification G-équivariante.

Définition 2.2.3. *[67, 34] Soit G un groupe agissant localement sur une variété M, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Une quantification G (ou $\mathfrak{g}$) -équivariante de M est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-module, $Q : \mathcal{S}^\delta \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, préservant le symbole principal.*

Une quantification peut s'interpréter comme une correspondance entre symboles et opérateurs différentiels et fournit un calcul symbolique pour les opérateurs différentiels. Une telle quantification serait naturelle si $G = \mathrm{Diff}(M)$ mais il n'existe pas de quantification $\mathrm{Diff}(M)$-équivariante, voir la Proposition 2.1.8.

Nous allons donc nous intéresser à des groupes G agissant localement sur la variété M par difféomorphismes. L'existence d'une telle action est équivalente à celle d'une G-structure plate. Après avoir défini cette notion, nous montrons qu'une quantification G-équivariante se transporte de $\mathbb{R}^n$ à une variété munie d'une G-structure plate, et réciproquement. Nous exposons ensuite les résultats d'existence et d'unicité qui ont été obtenus pour la quantification équivariante relativement à des groupes dits maximaux [13, 15].

Définition d'une G-structure plate sur une variété

Soit H un sous-groupe du groupe structural des k-jets, avec k un entier quelconque. Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est donc isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Vect}_*(\mathbb{R}^n)$, les champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$. Elle admet naturellement une graduation, donnée par la valeur propre de l'action adjointe du champ d'Euler $\mathcal{E} = x^i\partial_i$. Ainsi, on a $\mathrm{Vect}_*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=-1}^{\infty} \mathrm{Vect}_k(\mathbb{R}^n)$, avec $\mathrm{Vect}_k(\mathbb{R}^n)$ l'espace des champs de vecteurs à coefficients homogènes de degré $k+1$. On pose $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}_{-1}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathfrak{h}$, et on note G le groupe de Lie associé, dont l'action sur $\mathbb{R}^n$ est engendrée par celle de H et par les translations.

Une H-structure sur une variété M, de dimension n, est la donnée d'une réduction d'un fibré de k-repères à un fibré principal de fibre H [80, 55]. Par abus de langage, on parle de G-structure au lieu de H-structure pour les groupes conforme et projectif notamment.

Si M admet une action globale et transitive de G, alors M s'identifie à G/H. Une telle variété est un espace homogène, elle est canoniquement munie d'une H-structure dite H-structure plate standard. Par exemple, $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}P^n$ est un espace homogène projectif, et, notant $\mathrm{CE}(p,q)$ le groupe des similitudes de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique plate de signature (p,q), $\mathrm{SO}(p+1,q+1)/CE(p,q) \simeq \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ est un espace homogène conforme.

Si l'action de G est locale transitive, M est encore canoniquement munie d'une H-structure, pour H un sous-groupe d'isotropie de G. Une telle H-structure est plate, i.e. localement isomorphe à une H-structure plate standard [80]. Ceci signifie qu'il existe un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M, tel que les U_α sont des ouverts de G/H et les fonctions de transitions sont données par des éléments de G. Réciproquement, l'existence d'une H-structure plate implique l'existence d'une action locale transitive de G, par transport par les cartes de l'atlas.

Comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se plonge dans $\mathrm{Vect}_*(\mathbb{R}^n)$, le groupe G agit localement sur $\mathbb{R}^n$, qui est ainsi munit d'une H-structure plate. D'autre part, G/H admet un atlas sur $\mathbb{R}^n$ dont les cartes sont des morphismes de G-modules. Une variété M munie d'une H-structure admet donc un atlas (V_α, ψ_α), où les V_α sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et les fonctions de transitions sont données par l'action d'éléments de G sur ces ouverts.

Résumons ce qui précède par la définition d'une G-structure plate sur une variété, où par abus de langage il est fait référence à G et non à H.

Définition 2.2.4. *La donnée d'une G-structure plate sur une variété M est la donnée d'une des trois conditions équivalentes suivantes :*

1. *il existe une action locale transitive de G sur M.*
2. *il existe un isomorphisme local de G-structure entre M et G/H muni de sa structure plate standard.*
3. *il existe un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M, où les U_α sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et les fonctions de transitions $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ coïncident sur leurs domaines avec l'action d'éléments de G.*

Une variété M admettant une G-structure plate est dite G-plate.

Du cas plat $\mathbb{R}^n$ au cas G-plat M

Le lemme suivant est essentiel par la suite, il permet de ramener l'étude des morphismes G-équivariant sur une variété munie d'une G-structure plate à $\mathbb{R}^n$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, et on suppose que représentée sur $\mathbb{R}^n$ elle contient les translations.

Lemme 2.2.5. *Soit M une variété munie d'une G-structure plate de dimension n, telle que l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}^n$ contient les translations. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ deux faisceaux sur M de $\mathfrak{g}$-modules, qui sont localement isomorphes à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, deux faisceaux de $\mathfrak{g}$-modules* *sur* $\mathbb{R}^n$*, via l'action des cartes du* G*-atlas relevée à* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{D}$*. Les morphismes entre* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{D}$ *sont alors en correspondance biunivoques avec ceux entre* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*.*

Démonstration. Soit (U,ϕ) et (V,ψ) deux cartes du G-atlas de M. L'application ϕ étant équivariante sous l'action de G, sur M et $\mathbb{R}^n$ respectivement, elle induit un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules entre $\mathcal{S}(U)$ et $\mathcal{S}(\phi(U))$, ainsi que entre $\mathcal{D}(U)$ et $\mathcal{D}(\phi(U))$, noté encore ϕ. La carte (V,ψ) définit de même un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules entre $\mathcal{S}(V)$ et $\mathcal{S}(\psi(V))$, ainsi que entre $\mathcal{D}(V)$ et $\mathcal{D}(\psi(V))$.

Soit Q un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, que nous notons encore Q restreint à $\phi(U)$ et $\psi(V)$. Il induit sur U et V les morphismes de $\mathfrak{g}$-modules : $\mathcal{Q}_U = \phi^{-1}Q\phi$, et $\mathcal{Q}_V = \psi^{-1}Q\psi$. L'équivariance de Q sous l'action de $\mathfrak{g}$ assure qu'ils sont égaux sur $U\cap V$. En effet sur $U \cap V$, on a $\mathcal{Q}_V = \phi^{-1}(\phi\psi^{-1})Q(\psi\phi^{-1})\phi$, et $\psi\phi^{-1}$ coïncide avec l'action d'un élément de G sur $\mathbb{R}^n$, d'où l'équivariance de Q permet de conclure que $\mathcal{Q}_U = \mathcal{Q}_V$ sur $U\cap V$. Ainsi, à tout morphisme Q entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on associe un morphisme entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$, le recollement étant assuré entre cartes du G-atlas.

La réciproque se montre de la même façon : à un morphisme $\mathcal{Q}$ entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ on associe des morphismes entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ via les cartes du G-atlas, qui sont tous égaux par $\mathfrak{g}$-équivariance de $\mathcal{Q}$. Précisons que les morphismes sont étendus d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à tout $\mathbb{R}^n$ par équivariance sous les translations. □

Les faisceaux $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ intervenant dans ce lemme sont généraux, ils sont, dans ce chapitre, issus de l'algèbre des opérateurs différentiels et de leurs symboles. De plus, les expressions des actions de $\mathrm{Vect}(M)$ sur l'espace des symboles et des opérateurs différentiels sont les mêmes que sur $\mathbb{R}^n$ dans tout système de coordonnées locales (x^i, p_i) de T^*M. Ainsi les cartes d'un G-atlas induisent bien des isomorphismes locaux entre les faisceaux de $\mathfrak{g}$-modules au-dessus de M et $\mathbb{R}^n$, des symboles et des opérateurs différentiels respectivement. Les hypothèses du Lemme 2.2.5 sont donc satisfaites par la quantification $\mathfrak{g}$-équivariante si $\mathfrak{g}$ comprend les translations. L'obtention d'une quantification $\mathfrak{g}$-équivariante sur une variété admettant une G-structure plate est donc équivalente à son obtention sur $\mathbb{R}^n$, le passage de l'une à l'autre étant assuré par les cartes d'un G-atlas. Leur expression en G-coordonnées sont donc les mêmes.

Résultats en quantification G-équivariante

Le premier résultat d'existence et d'unicité d'une quantification G-équivariante sur M, suivant la Définition 2.2.3, a été prouvé dans [67] pour le groupe projectif $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$, sur une variété admettant une structure projective plate, de modèle $\mathbb{R}P^n \simeq \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$. Plus précisément, l'existence et l'unicité de la quantification, $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, sont assurées en dehors d'un ensemble de valeurs de $\delta = \mu - \lambda$

dites résonantes. Dans le cas projectif, ces valeurs sont

$$\delta = \frac{k}{n+1}, \tag{2.43}$$

où n est la dimension de la variété, et k est un entier supérieur ou égal à $n+1$. Dans les cas résonants, l'unicité est perdue. D'autre part, l'existence d'une formule explicite pour la quantification projectivement équivariante des symboles de tout degré a permis de l'étendre à des symboles plus généraux, via des fonctions hypergéométriques non commutatives [38].

L'existence et l'unicité de la quantification équivariante ont ensuite été prouvé, pour δ non résonant, dans le cas du groupe conforme $\mathrm{O}(p+1, q+1)$, sur une variété M conformément plate de modèle $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \simeq \mathrm{SO}(p+1, q+1)/\mathrm{CE}(p, q)$ [34], avec $\mathrm{CE}(p, q)$ le groupe des similitudes pour une métrique plate de signature (p, q). L'ensemble des résonances est donné par

$$\Sigma = \{\delta_{k,l;s,t} | k, l, s, t \in \mathbb{N}; k \geq l; 2s \leq k; 2t \leq l\}, \tag{2.44}$$

où

$$\begin{aligned} \delta_{k,l;s,t} &= \frac{1}{n(k-l)} \left[(k-l+t-s)(k+l-2(s+t)+n-1)\right. \\ &\quad \left. + (s-t)(k+l+1) + 2(kt-ls)\right]. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Les résonances peuvent correspondre soit à un défaut d'unicité, soit à un défaut d'existence de la quantification conformément équivariante. Contrairement au cas projectif, cette dernière n'est pas donnée par une formule explicite, le résultat est obtenu grâce à la diagonalisation des opérateurs de Casimirs des représentations sur $\mathcal{S}^\delta$ et $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$.

La propriété fondamentale est la maximalité des algèbres de Lie projectives $\mathrm{sl}(n+1, \mathbb{R})$ [67] et conformes $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ [13] en tant que sous-algèbres de Lie de dimension finie de $\mathrm{Vect}_*(\mathbb{R}^n)$, les champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$. Pour toutes sous-algèbres strictes de ses deux algèbres de Lie, on perd l'unicité de la quantification, et pour tout prolongement strict, on perd l'existence. Il est donc naturel de poser la question : l'existence et l'unicité d'un quantification $\mathfrak{g}$-équivariante sur $\mathbb{R}^n$ est-elle équivalente à la maximalité de $\mathfrak{g}$, en tant que sous-algèbre de Lie de dimension finie de $\mathrm{Vect}_*(\mathbb{R}^n)$? Une réponse partielle a été donnée dans [15], nous en donnons les grandes lignes. D'une part, les sous-algèbres de Lie maximales de $\mathrm{Vect}_*(\mathbb{R}^n)$ ont été identifiées dans [14], comme étant les IFFT-algèbres classifiées dans [56]. D'autre part, suivant la démonstration mise en œuvre dans le cas conforme, l'existence d'une quantification $\mathfrak{g}$-équivariante, $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, est prouvée dans [15] pour toutes les IFFT-algèbres, en dehors de valeurs critiques pour les poids λ et μ. En revanche, la question de l'unicité d'une telle quantification dans le cas général reste ouverte.

2.3 La quantification conformément équivariante

Nous allons nous focaliser maintenant sur le cas intéressant, tant du point de vue de la physique que de la géométrie, de la quantification équivariante sous l'action du groupe conforme. Nous donnons tout d'abord la définition des transformations conformes, ainsi que leurs expressions infinitésimales sur $\mathbb{R}^n$. Deux définitions équivalentes sont données pour les variétés conformément plates, qui constituent le care naturel de la quantification conformément équivariante. Suivant [37], l'étude du commutant de l'action des similitudes sur les symboles, nous permet de donner une expression explicite pour la quantification des symboles de degré 1, la démarche est la même pour le degré 2 [37] et le degré 3 [69]. Nous exposons alors la méthode mise en œuvre dans [34] et [15] pour obtenir le résultat déjà mentionné d'existence et d'unicité de la quantification conformément équivariante.

2.3.1 L'algèbre de Lie conforme $\mathrm{conf}(M, g)$

Le groupe conforme d'une variété pseudo-riemannienne (M, g) est défini comme le sous-groupe des difféomorphismes préservant la direction de la métrique, il est noté $\mathrm{Conf}(M, g)$. De même, l'algèbre de Lie $\mathrm{conf}(M, g)$ des champs de vecteurs conformes est définie comme la sous-algèbre de Lie des champs $X \in \mathrm{Vect}(M)$ vérifiant, $L_X g = \lambda g$, pour λ une fonction strictement positive sur M dépendant de X. Ce groupe et cette algèbre de Lie sont de dimension maximale dans le cas plat, i.e. pour la variété pseudo-riemannienne $(\mathbb{R}^n, \eta)$ avec η la métrique plate de signature (p, q). Ils sont alors isomorphes à $\mathrm{O}(p+1, q+1)$ et $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ qui sont appelés simplement le groupe conforme et l'algèbre de Lie conforme.

Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite conformément plate si, au voisinage de tout point de M, il existe un système de coordonnées et une fonction F strictement positive tels que $g_{ij} = F\eta_{ij}$. Les transformations conformes de $(\mathbb{R}^n, \eta)$ sont transportées via ce système de coordonnées, il en découle que $\mathrm{conf}(M, g) \simeq \mathrm{o}(p+1, q+1)$, et ainsi M est munie d'une $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-structure plate.

Sur $\mathbb{R}^n$, ou dans un ouvert de carte de l'atlas définissant la structure conformément plate de (M, g), on peut écrire l'expression, en coordonnées, des générateurs de l'algèbre de Lie conforme [13] :

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_i \\ X_{ij} &= x_i\partial_j - x_j\partial_i \\ X_0 &= x^i\partial_i \\ \bar{X}_i &= x_j x^j \partial_i - 2x_i x^j \partial_j, \end{aligned} \tag{2.46}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n = p + q$. Les indices ont été abaissés au moyen de la métrique plate η de $\mathbb{R}^n$, i.e. $x_i = \eta_{ij}x^j$. Ces générateurs sont les versions infinitésimales, respectivement, des translations, des rotations, des dilatations et des inversions conformes. L'algèbre de Lie conforme $\mathfrak{g}$ admet la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ en espaces propres de l'action adjointe de X_0, l'opérateur d'Euler. La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est égale à $\mathrm{co}(p,q)$, engendrée par les rotations et dilatations infinitésimales. En lui adjoignant les translations infinitésimales, on obtient $\mathrm{ce}(p,q) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$, l'algèbre de Lie des similitudes infinitésimales.

Nous pouvons désormais écrire les actions explicites de l'algèbre de Lie conforme sur les symboles et les opérateurs différentiels. D'après la formule (2.41), qui utilise l'identification donnée par l'ordre normal (2.40), elles sont identiques si on se restreint aux similitudes, et données par substitution dans (2.34) ;

$$L^\delta_{X_i} = \partial_i, \tag{2.47}$$
$$L^\delta_{X_{ij}} = x_i\partial_j - x_j\partial_i + p_i\partial_{p^j} - p_j\partial_{p^i}, \tag{2.48}$$
$$L^\delta_{X_0} = x^i\partial_i - p_i\partial_{p_i} + \delta n. \tag{2.49}$$

L'action des inversions sur les symboles $\mathcal{S}^\delta$ s'obtient de même,

$$L^\delta_{\bar{X}_i} = (x_jx^j\partial_i - 2x_ix^j\partial_j) + (2x_ip_j\partial_{p_j} + 2p_kx^k\partial_{p^i} - 2p_ix_j\partial_{p_j}) - 2n\delta x_i. \tag{2.50}$$

Enfin, l'action des inversions sur les opérateurs différentiels s'obtient via la formule générale (2.41),

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} = L^\delta_{\bar{X}_i} + \frac{\hbar}{\mathrm{i}}(-p_i\partial_{p^j}\partial_{p_j} + 2p_j\partial_{p_j}\partial_{p^i}) + 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}n\lambda\partial_{p_i}. \tag{2.51}$$

La différence entre les actions sur les symboles et les opérateurs différentiels est donnée par un opérateur faisant baisser strictement le degré des symboles, et qui est donc nilpotent.

2.3.2 La contrainte d'équivariance conforme pour la quantification de $T^*\mathbb{R}^n$

Dans le paragraphe précédent, toutes les expressions données sont valables globalement sur $\mathbb{R}^n$, et localement dans un système de coordonnées conformes pour une variété conformément plate M. Nous allons donc exposer, en premier lieu, les résultats et méthodes de démonstration sur $\mathbb{R}^n$, ou de manière équivalente, localement en coordonnées conformes sur M.

Les quantifications équivariantes sous les similitudes

Les actions des similitudes sont les mêmes sur les symboles et les opérateurs différentiels, que l'on identifie via l'ordre normal (2.40), bien défini sur $\mathbb{R}^n$. Une quantification $\mathrm{ce}(p,q)$-équivariante, $\mathcal{Q} : \mathcal{S}^\delta \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, est donc donnée par la composition d'une application $Q : \mathcal{S}^\delta \to \mathcal{S}^\delta$ commutant à l'action des similitudes, et de l'ordre normal $\mathcal{N} : \mathcal{S}^\delta \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$. Étudions donc les endomorphismes de $\mathcal{S}^\delta$ commutant à l'action de $\mathrm{ce}(p,q)$.

Les similitudes contiennent les translations et les dilatations, un des résultats de [67] impose alors à Q d'être un opérateur différentiel sur T^*M. Comme il commute avec les translations, ses coefficients sont indépendants de x. De plus, il agit sur les symboles, polynomiaux en p, donc il vient

$$Q \in \mathbb{C}[x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n, \partial_1, \cdots, \partial_n, \partial_{p_1}, \cdots, \partial_{p_n}], \tag{2.52}$$

avec un degré nul en x. Nous opterons désormais pour la notation plus compacte $Q \in \mathbb{C}[x, p, \partial_x, \partial_p]_n$.

L'algèbre de Lie des similitudes se plonge dans $\mathbb{C}[x, p, \partial_x, \partial_p]_n$ via la dérivée de Lie des symboles de poids δ. L'application Q cherchée est dans le commutant de l'image de $\mathrm{ce}(p, q)$, noté $\mathrm{ce}(p, q)^!$. Ce dernier a été déterminé dans [35, 34], reprenant la théorie des invariants de Weyl [104]. Il se déduit du commutant de $\mathrm{e}(p, q)$, l'algèbre de Lie des isométries.

Proposition 2.3.1. *[37] Le commutant* $\mathrm{e}(p, q)^!$*, de* $\mathrm{e}(p, q)$ *dans* $\mathbb{C}[x, p, \partial_x, \partial_p]_n$*, est isomorphe, pour* $n \geq 3$*, à l'algèbre enveloppante* $\mathfrak{U}(\mathrm{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{h}_1)$*. Elle est engendrée par*

$$R = p^i p_i, \qquad E = p_i \partial_{p_i} + \frac{n}{2}, \qquad T = \partial_{p^i} \partial_{p_i}, \tag{2.53}$$

dont les relations de commutations sont celles de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$*, et*

$$G = p^i \partial_i, \qquad D = \partial_{p_i} \partial_i, \qquad L = \partial_{x^i} \partial_{x_i}, \tag{2.54}$$

dont les relations de commutations sont celles de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_1$*.*

Par la suite, nous utiliserons plutôt $\mathcal{E} = p_i \partial_{p_i}$, qui est l'opérateur d'Euler, que E. Il découle de ce théorème la connaissance de $\mathrm{ce}(p, q)^!$.

Corollaire 2.3.2. *Le commutant des similitudes dans* $\mathbb{C}[x, p, \partial_x, \partial_p]_n$*, noté* $\mathrm{ce}(p, q)^!$*, est engendré par*

$$\mathcal{E}, \quad R_0 = RT, \quad D, \quad G_0 = GT, \quad L_0 = LT. \tag{2.55}$$

L'équivariance de Q par rapport aux similitudes lui impose donc d'être un polynôme en les cinq opérateurs engendrant $\mathrm{ce}(p, q)^!$. Remarquons que $\mathcal{E}$ et R_0 préservent le degré d'un symbole, D et G_0 le font diminuer de 1 et L_0 de 2. Pour que Q soit une quantification équivariante sous les similitudes, il faut qu'elle préserve de plus le symbole principal. Il en découle l'expression de Q, de la forme suivante

$$Q = \mathrm{Id} + P_D D + P_{G_0} G_0 + P_{L_0} L_0, \tag{2.56}$$

avec P_D, P_{G_0} et P_{L_0} des polynômes en les cinq opérateurs donnés par (2.55).

L'équivariance de la quantification relativement aux inversions

En plus de l'équivariante sous les similitudes, une quantification Q conformément équivariante doit vérifier la condition d'équivariance pour les inversions conformes,

$$Q \circ L^{\delta}_{\bar{X}_i} = \mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} \circ Q, \tag{2.57}$$

pour $i = 1, \cdots, n$. Celle-ci se réécrit, en utilisant la formule (2.51) donnant la dérivée de Lie $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}$,

$$[Q, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left(-p_i T + 2(\mathcal{E} + n\lambda)\partial_{p^i}\right) Q. \tag{2.58}$$

Il reste donc à évaluer le commutateur de Q avec $L^{\delta}_{\bar{X}_i}$, qui repose sur les commutateurs de $L^{\delta}_{\bar{X}_i}$ avec les cinq opérateurs engendrant polynomialement Q. Reproduisons le résultat obtenu dans [34], qui découle d'un simple calcul,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{E}, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] &= 0, \\
[R_0, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] &= 0, \\
[G_0, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] &= 2(R_0\partial_{p_i} + (2 - n\delta)p_i T), \\
[D, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] &= 2(-p_i T + 2\mathcal{E}\partial_{p_i} + n(1-\delta)\partial_{p_i}), \\
[L_0, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] &= 4(\mathcal{E}\partial_i T + G_0\partial_{p_i} - p_i D T) + 2(2 + n(1-2\delta))\partial_i T,
\end{aligned} \tag{2.59}$$

pour $i = 1, \cdots, n$. Pour déterminer explicitement Q, la complexité des calculs impose la restriction à des symboles de bas degré.

2.3.3 La quantification conformément équivariante des symboles de degré 1

Dans ce paragraphe, la quantification Q est considérée comme une application sur les symboles de degré au plus 1. Nous donnons d'abord, dans le droit fil de ce qui précède, l'expression de la quantification conformément équivariante sur $\mathbb{R}^n$, ou de manière équivalente localement en coordonnées conformes sur (M, g) une variété conformément plate. Nous en obtenons ensuite une formulation covariante, et montrons qu'elle est conformément invariante, i.e. son expression ne dépend que de la classe conforme de la métrique g.

Formulation en coordonnées conformes

La formule (2.56) fournit la forme des quantifications équivariantes sous les similitudes. La restriction à des symboles de degré au plus 1 conduit à une simplification drastique de la formule (2.56),

$$Q = \mathrm{Id} + P_D D, \tag{2.60}$$

où P_D est un polynôme constant. En effet, les opérateurs R_0, G_0 et L_0 sont nuls sur les symboles de degré au plus 1, d'où $Q = \mathrm{Id} + P_D(\mathcal{E})D$, et l'opérateur $\mathcal{E}$ étant nul sur les symboles de degré 0, $P_D(\mathcal{E})$ se réduit à son terme constant. La condition d'équivariance sous les inversions conformes, donnée par l'équation (2.58) se traduit alors par

$$P_D[D, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] = 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}} n\lambda \partial_{p^i}. \tag{2.61}$$

Il suffit désormais de substituer le commutateur par son expression explicite, donnée en (2.59), pour obtenir

$$2P_D n(1-\delta)\partial_{p_i} = 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}} n\lambda \partial_{p^i}. \tag{2.62}$$

Cette équation admet une solution donnée par $P_D = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\lambda}{1-\delta}$ si $\delta \neq 1$. Sinon, elle impose $\lambda = 0$ et P_D est alors arbitraire. Nous obtenons donc le théorème suivant, le Lemme 2.2.5 permettant de passer de $\mathbb{R}^n$ à une variété conformément plate quelconque.

Théorème 2.3.3. *[37] Soit (M, g), une variété conformément plate. Si $\delta \neq 1$, il existe une unique quantification conformément équivariante, $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1} \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}_1$, donnée localement par*

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P^i(x)p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(P^i\partial_i + \frac{\lambda}{1-\delta}\,\partial_i P^i\right). \tag{2.63}$$

Si $\delta = 1$, alors la quantification conformément équivariante existe si et seulement si $\lambda = 0$ et elle est donnée par

$$\mathcal{Q}^{0,1}(P^i(x)p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(P^i\partial_i + a\,\partial_i P^i\right), \tag{2.64}$$

le coefficient a étant une constante quelconque.

Remarque 2.3.4. *Dans le cas $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, qui est celui de la quantification géométrique, nous retrouvons effectivement l'expression donnée par celle-ci. Pour le cas résonant, $\delta = 1$, l'unicité peut être obtenue en imposant que $\mathcal{Q}(P)^* = \mathcal{Q}(\bar{P})$, et on a alors $a = \frac{1}{2}$.*

La quantification conformément équivariante de $\mathbb{R}^n$ a été calculé explicitement sur les symboles de degré 2 dans [35, 37] et sur les symboles de degré 3 dans [69]. La méthode est exactement la même, mais les calculs sont bien plus complexes.

Formulation covariante

La quantification conformément équivariante d'une variété conformément plate (M, g) est donnée en coordonnées conformes par les formules trouvées sur $\mathbb{R}^n$. Maintenant, nous souhaitons avoir une expression de la quantification sous forme covariante, valable dans tout système de coordonnées. A cette fin, nous allons utiliser la connexion de Levi-Civita qui est l'unique connexion symétrique transportant parallèlement la métrique pseudo-riemannienne g de la variété M. Elle permet de définir les dérivées covariantes des densités (2.32) et des symboles (2.37).

Théorème 2.3.5. *Soit* (M, g) *une variété pseudo-riemannienne et* ∇ *la dérivée covariante associée à la connexion de Levi-Civita. On note* $[g]$ *la classe conforme de la métrique* g*. Soit* $\mathcal{Q}_g : \mathcal{S}_1^\delta \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$*, définie par*

$$\mathcal{Q}_g(P^i(x)p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(P^i\nabla_i^\lambda + \frac{\lambda}{1-\delta}\,\partial_i^\nabla(P^i)\right). \tag{2.65}$$

Cette application est conformément invariante, elle ne dépend que de $[g]$*. De plus, si* (M, g) *est une variété conformément plate et* $\delta \neq 1$*, elle est l'unique quantification conformément équivariante.*

Démonstration. Rappelons que la quantification conformément équivariante est donnée, en coordonnées conformes, par l'expression : $\mathcal{Q}(P^i(x)p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(P^i\partial_i + \frac{\lambda}{1-\delta}\partial_i(P^i)\right)$. Cette dernière ne dépend pas explicitement de la métrique conformément plate g et les coordonnées conformes non plus. On peut donc la réécrire sous la forme

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_g + A_g(P), \tag{2.66}$$

où A_g est nul dans le cas plat, $\mathcal{Q}_g$ est l'expression donnée en (2.65), et elle vérifie

$$\mathcal{Q}_g + A_g = \mathcal{Q}_{\widetilde{g}} + A_{\widetilde{g}}, \tag{2.67}$$

si $\widetilde{g} \in [g]$. Ceci permet de déterminer A_g. En effet, d'après les équations (2.32) et (2.37), on a

$$\widetilde{\nabla}_i^\lambda = \nabla_i^\lambda + \lambda(\widetilde{\Gamma}_i - \Gamma_i) \qquad \text{et} \qquad \partial_i^{\widetilde{\nabla}} P^i = \partial_i^\nabla P^i - (\widetilde{\Gamma}_i - \Gamma_i)P^i + \delta(\widetilde{\Gamma}_i - \Gamma_i)P^i, \tag{2.68}$$

i.e. $\mathcal{Q}_g = \mathcal{Q}_{\widetilde{g}}$, ce qui impose $A_g(P) = A_{\widetilde{g}}(P)$. Utilisant que $A_g(P)$ est nul dans le cas plat, on en déduit sa nullité dans le cas conformément plat. Ainsi $\mathcal{Q}_g$ est conformément invariante et coïncide avec la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}$ dans le cas conformément plat. □

Remarque 2.3.6. *Il existe des théorèmes analogues pour la quantification des symboles de degré* 2 *[37] et des symboles de degré* 3 *[70]. Les preuves reposent sur la même démarche : dans le cas conformément plat, la quantification s'écrit comme sur* $\mathbb{R}^n$*, où les dérivées sont remplacées par des dérivées covariantes, plus des termes nuls dans le cas plat. Ces termes additionnels sont déterminés de sorte que l'expression obtenue soit invariante conforme. Une telle expression est uniquement déterminée dans le cas conformément plat et se prolonge à toute variété pseudo-riemannienne. Si pour les symboles de degré* 1 *il n'y a pas apparition de termes additionnels, pour les symboles de degré* 2 *deux termes de courbures sont ajoutés.*

2.3.4 Existence et unicité de la quantification conformément équivariante

Notre but ici est de montrer l'existence et l'unicité de la quantification conformément équivariante. Cela étant hors de portée via la méthode exposée précédemment, nous suivons la preuve originelle [34]. Elle repose sur la diagonalisation des opérateurs de Casimirs C_δ et $C_{\lambda,\mu}$, des représentations sur $\mathcal{S}^\delta$ et $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ de l'algèbre de Lie conforme. Si $\mathcal{Q}$ est un morphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module entre ces deux espaces, alors

$$\mathcal{Q}C_\delta = C_{\lambda,\mu}\mathcal{Q}. \tag{2.69}$$

Si P est un vecteur propre de C_δ, $\mathcal{Q}(P)$ est alors un vecteur propre de $C_{\lambda,\mu}$ de même valeur propre. Cela va permettre de construire $\mathcal{Q}$.

Rappelons que l'opérateur de Casimir d'une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, d'une algèbre semi-simple est donné par

$$C = B^{\alpha\beta}\rho(X_\alpha)\rho(X_\beta), \tag{2.70}$$

où B est la métrique de Killing et $B^{\alpha\beta}$ sa matrice de Gram inverse dans une base (X_α) de $\mathfrak{g}$. L'opérateur de Casimir vérifie la propriété fondamentale d'être $\mathfrak{g}$-invariant,

$$[C, \rho(X)] = 0, \tag{2.71}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Le calcul de la métrique de Killing de l'algèbre de Lie conforme [34], ainsi que la base exhibée en (2.46), permettent d'obtenir une formule générale pour l'opérateur de Casimir associé à une représentation $\rho : \mathrm{o}(p+1,q+1) \to \mathrm{End}(V)$,

$$C_\rho = \frac{1}{2}\eta^{ik}\eta^{jl}\rho(X_{ij})\rho(X_{kl}) - \rho(X_0)^2 - \frac{1}{2}\eta^{ij}\rho(X_i)\rho(\bar{X}_j) - \frac{1}{2}\eta^{ij}\rho(\bar{X}_i)\rho(X_j). \tag{2.72}$$

En particularisant cette expression aux actions de l'algèbre de lie conforme sur les deux $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules $\mathcal{S}^\delta$ et $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, on obtient respectivement les opérateurs de Casimirs C_δ et $C_{\lambda,\mu}$. On a d'une part,

$$C_\delta = R_0 + [1 + n(\delta - 1) - \mathcal{E}]\,\mathcal{E} - n^2\delta(\delta - 1), \tag{2.73}$$

et, d'autre part, après transport sur l'espace des symboles par l'ordre normal,

$$C_{\lambda,\mu} = C_\delta + G_0 - 2(n\lambda + \mathcal{E})D. \tag{2.74}$$

Nous débutons par la diagonalisation de C_δ. Le point essentiel est la commutation des opérateurs $\mathcal{E}$ et R_0,

$$[\mathcal{E}, R_0] = 0, \tag{2.75}$$

qui permet de les diagonaliser simultanément. La décomposition de $\mathcal{S}^\delta$ en sous-espaces propres de $\mathcal{E}$ est donnée par la graduation (2.36),

$$\mathcal{S}^\delta = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k^\delta \tag{2.76}$$

et $\mathcal{E}$ à pour valeur propre k sur $\mathcal{S}_k^\delta$. Il suffit alors de décomposer $\mathcal{S}^\delta$ en sous-espaces où l'action de R_0 s'écrit en fonction de $\mathcal{E}$. L'intersection avec $\mathcal{S}_k^\delta$ fournira alors les sous-espaces propres du Casimir C_δ. Nous explicitons le lemme suivant qui nous sera utile également dans le cas des supercotangents.

Lemme 2.3.7. *[34] L'espace $\mathcal{S}^\delta$ admet la décomposition $\mathcal{S}^\delta = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathcal{S}_{*,s}^\delta$, où $\mathcal{S}_{*,s}^\delta = R^s \ker T$ et $\bigoplus_{s'=0}^{s} \mathcal{S}_{*,s'}^\delta = \ker T^{s+1}$. La restriction de l'opérateur $R_0 = RT$ à $\mathcal{S}_{*,s}^\delta$ est notée $\gamma_{*,s}(R_0)$ et a pour expression*

$$\gamma_{*,s}(R_0) = 2s\,(n + 2(\mathcal{E} - s - 1)) \tag{2.77}$$

Démonstration. Les espaces $R^s \ker T$ pour $s \in \mathbb{N}$ sont clairement en somme directe, car, pour tout $P \in R^s \ker T \setminus \{0\}$ on a $T^s P \neq 0$ et $T^{s+1} P = 0$. De plus tout symbole est bien dans $\mathcal{A} = \oplus_{s=0}^{\infty} \mathcal{S}_{*,s}^\delta$. En effet supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, et soit P un polynôme de degré minimal qui ne soit pas dans $\mathcal{A}$. Il existe alors $s \in \mathbb{N}$ tel que $T^s P \neq 0$ et $T^{s+1} P = 0$. On pose alors

$$Q = P - aR^s T^s P,$$

et on choisit a tel que $T^s Q = 0$ pour conclure : Q étant de degré inférieur à P il est dans $\mathcal{A}$, et $R^s T^s P \in \mathcal{S}_{*,s}^\delta$, donc P est dans $\mathcal{A}$.

Comme $[T, R] = 2(n + \mathcal{E})$, on a

$$[T, R^s] = 2s(n + \mathcal{E} - s + 1)R^{s-1}, \tag{2.78}$$

et l'expression de $\gamma_{*,s}(R_0)$ en découle, grâce à $[R, \mathcal{E}] = -2R$. □

Proposition 2.3.8. *[34] L'opérateur de Casimir C_δ est diagonalisable, la décomposition de l'espace des symboles en sous-espaces propres est donnée par $\mathcal{S}^\delta = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{s=0}^{[k/2]} \mathcal{S}_{k,s}^\delta$, et sa valeur propre sur $\mathcal{S}_{k,s}^\delta = \mathcal{S}_k^\delta \cap \mathcal{S}_{*,s}^\delta$ est égale à*

$$\gamma_{k,s} = 2s[n + 2(k - s - 1)] + 2k[1 + n(\delta - 1) - k] - n^2\delta(\delta - 1). \tag{2.79}$$

Démonstration. Comme T et $\mathcal{E}$ commutent sur $\ker T$, on a $\mathcal{S}_{*,0}^\delta = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_{k,0}^\delta$. Maintenant,

$[\mathcal{E}, R] = 2R$ et $\mathcal{S}^\delta_{*,s} = R^s \mathcal{S}^\delta_{*,0}$ montrent que pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^\delta_{*,s} = \oplus_{k=2s}^\infty \mathcal{S}^\delta_{k,s}$. Il suffit alors de réarranger la somme pour obtenir celle donnée dans la proposition.

Notons alors $\gamma_{k,s}(\mathcal{E})$ et $\gamma_{k,s}(R_0)$ les restrictions de respectivement $\mathcal{E}$ et R_0 à $\mathcal{S}^\delta_{k,s}$. On a $\gamma_{k,s}(\mathcal{E}) = k$ et d'après (2.77), $\gamma_{k,s}(R_0) = 2s\,(n + 2(k - s - 1))$. Nous notons simplement $\gamma_{k,s}$ la restriction du Casimir C_δ à $\mathcal{S}^\delta_{k,s}$. Le résultat découle alors de l'expression (2.73) de C_δ. □

Nous décrivons maintenant la diagonalisation de l'opérateur de Casimir $C_{\lambda,\mu}$. Grâce à (2.74), il s'écrit $C_{\lambda,\mu} = C_\delta + N_\lambda$, avec N_λ un opérateur nilpotent diminuant strictement le degré des symboles. Une solution de l'équation aux valeurs propres

$$C_{\lambda,\mu} P = \gamma P, \tag{2.80}$$

est nécessairement de la forme $\gamma = \gamma_{k,s}$ et $P = P_{k,s} + P'$, avec $P_{k,s} \in \mathcal{S}^\delta_{k,s}$ et $P' = P_{k-1} + \cdots + P_0$, où $P_i \in \mathcal{S}^\delta_i$. Ces derniers vérifient l'équation

$$N_\lambda P_{i+1} = (\gamma_{k,s} - C_\delta) P_i, \tag{2.81}$$

pour tout $i \le k - 1$. Ce système a une solution unique si $\gamma_{k,s} \ne \gamma_{l,t}$ pour tout $l \le k$ et $t \le [l/2]$, ce qui est équivalent à δ non résonant.

Théorème 2.3.9. *[34] Il existe une unique quantification conformément équivariante pour $\delta \notin \Sigma$, où Σ est donnée en (2.44).*

Elle est donnée par

$$Q(P_{k,s}) = P_{k,s} + P', \tag{2.82}$$

avec P' l'unique polynôme tel que $C_{\lambda,\mu}(P_{k,s} + P') = \gamma_{k,s}(P_{k,s} + P')$.

2.4 Les opérateurs différentiels conformément invariants

La classification des opérateurs différentiels conformément invariants est un problème important. Elle a été obtenue pour la première fois dans [39] pour l'espace de Minkowski, éventuellement courbé. La quantification conformément équivariante offre un moyen efficace pour obtenir une classification des opérateurs différentiels (linéaires) conformément invariants, que nous présentons ici, suivant [82].

Un opérateur différentiel $D \in \mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, qui dépend de la métrique, est dit conformément invariant si il ne dépend que de la classe conforme de cette dernière. Sur une variété conformément plate, cette propriété est équivalente à l'invariance de D sous l'action $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$ de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ sur $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$. Le symbole associé à l'opérateur D via la quantification conformément équivariante est alors invariant sous l'action L^δ_X de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ sur $\mathcal{S}^\delta$.

Proposition 2.4.1. *[82] Soit (M, g) une variété conformément plate. Les symboles invariants sous l'action de* $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ *sont*

$$A_k = (\eta^{ij} p_i p_j)^k \ \in \mathcal{S}^{\frac{2k}{n}}, \tag{2.83}$$

et les opérateurs conformément équivariants sont donnés par

$$\Delta^k : \mathcal{F}^{\frac{n-2k}{2n}} \to \mathcal{F}^{\frac{n+2k}{2n}}, \tag{2.84}$$

avec, en coordonnées conformes, $\Delta = \eta^{ij} \partial_i \partial_j$.

Démonstration. Nous reproduisons ici sommairement la preuve donnée dans [82]. Plaçons nous en coordonnées conformes et supposons que A est un symbole invariant conforme. L'invariance par translations (2.47) donne l'indépendance de A par rapport à x. L'invariance par rapport aux rotations (2.48) impose alors $A = (\eta^{ij} p_i p_j)^k$. L'invariance par rapport aux dilatations (2.49) fixe $\delta = \frac{2k}{n}$, et on vérifie alors que A est préservé par les inversions conformes (2.50).

Pour obtenir les opérateurs conformément invariants, il suffit alors de demander en plus l'invariance sous les inversions conformes agissant sur les opérateurs (2.51), ce qui impose $\lambda = \frac{n-2k}{2n}$. $\square$

Chapitre 3

Du fibré supercotangent à la géométrie spinorielle

Dans ce chapitre nous introduisons les objets mathématiques permettant de décrire des particules fermioniques, de spin $\frac{1}{2}$. Leur description quantique est bien connue, et remonte à P.A.M. Dirac [30]. Elle nécessite, sur une variété pseudo-riemannienne (M, g), l'introduction du fibré des spineurs. Il est muni par définition d'une action du fibré de Clifford et admet une dérivée covariante canonique. Le hamiltonien quantique d'une particule libre de spin $\frac{1}{2}$ est alors donné par l'opérateur de Dirac, qui agit sur les sections spinorielles.

La seconde quantification des champs fermioniques a, la première [91, 73], poussée à formuler un équivalent classique de la théorie de Dirac. On en trouve une version achevée en formalisme lagrangien dans l'article historique de F.A. Berezin et M.S. Marinov [9], qui repose sur le fait que l'algèbre de Clifford est le quantifié de l'algèbre de Grassmann [63, 102, 100]. L'espace des états est alors décrit par une supervariété [63, 68, 71, 29, 28, 101, 89] qui admet, outre les coordonnées usuelles, des coordonnées grassmanniennes.

Nous présentons d'abord les notions nécessaires relatives aux supervariétés, notamment les supercotangents, et à la géométrie spinorielle, avant de relier les deux via l'extension de la quantification géométrique aux supervariétés symplectiques [63, 102, 100]. Si (M, g) est une variété conformément plate, de signature (p, q), on construit une action hamiltonienne de l'algèbre de Lie $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ de son groupe conforme sur les fonctions du supercotangent de M. Cela nous permet de construire une dérivée covariante spinorielle et la dérivée de Lie des spineurs par quantification des composantes de l'application moment du groupe conforme. Nous obtenons, localement, un calcul symbolique pour les opérateurs différentiels spinoriels, introduit initialement par E. Getzler [42], via un prolongement de la quantification géométrique.

3.1 Le fibré supercotangent

Nous commençons par donner ici les rudiments de supergéométrie, notamment symplectique, qui nous sont nécessaires. Nous étudions ensuite la structure symplectique du supercotangent $\mathcal{M}$ d'une variété pseudo-riemannienne (M, g), qui constitue l'espace des phases d'un système à spin d'espace de configuration (M, g). Nous l'illustrons en retrouvant les équations de Papapetrou, donnant la déviation géodésique d'une particule à spin, à partir du flot du hamiltonien cinétique $\frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j$ sur le supercotangent d'un espace-temps courbe [88]. Nous étudions également dans ce contexte le couplage à un champ électromagnétique. Enfin, nous construisons un relevé à $\mathcal{M}$ des champs de vecteurs conformes de M, ce qui nous permettra de définir une structure de $\mathrm{conf}(M, g)$-module sur l'espace des observables classiques $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

3.1.1 Éléments de supergéométrie

Le préfixe "super" attaché à tous les objets des supermathématiques réfère à une extension $\mathbb{Z}_2$-graduée dudit objet. Au niveau algébrique, cela a pour conséquence l'utilisation systématique de la règle des signes : "lorsque un objet de parité a traverse un objet de parité b un signe $(-1)^{ab}$ apparaît". Nous introduisons les notions élémentaires de superalgèbre, puis définissons les supervariétés ainsi que les champs de vecteurs et formes différentielles. Nous terminons par la définition du supercotangent d'une variété, qui sera note cadre de travail pour la quantification.

Préliminaires de superalgèbre

Commençons par les préliminaires nécessaires d'algèbre. Un *superespace* vectoriel V, ou espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, est un espace vectoriel muni d'une décomposition canonique $V = V_0 \oplus V_1$ en les espaces supplémentaires V_0 des éléments "pairs" de graduation nulle et V_1 des éléments "impairs" de graduation 1. Nous notons ici et par la suite $|\cdot|$ la graduation. Une *superalgèbre*, ou algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée, est une algèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\mathbb{Z}_2$-gradué et tel que

$$|ab| = |a||b|, \tag{3.1}$$

pour tout élément a, b pair ou impair de l'algèbre. Toutes les égalités mettant en jeu la graduation seront écrite de même pour des éléments (sous-entendus) homogènes. Une superalgèbre est dite supercommutative si

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba. \tag{3.2}$$

A une superalgèbre associative est naturellement associée une *superalgèbre de Lie*, par,

$$[a,b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba. \tag{3.3}$$

En effet, une superalgèbre de Lie est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-graduée munie d'une application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, vérifiant

$$[a,b] = -(-1)^{|a||b|}[b,a], \tag{3.4}$$

ainsi que la super identité de Jacobi

$$(-1)^{|x||z|}[x,[y,z]] + (-1)^{|x||y|}[y,[z,x]] + (-1)^{|y||z|}[z,[x,y]] = 0. \tag{3.5}$$

Un $\mathcal{A}$-module V, pour $\mathcal{A}$ une superalgèbre, est un module $\mathbb{Z}_2$-gradué $V = V_0 \oplus V_1$ sur l'algèbre $\mathcal{A}$, tel que l'action de $\mathcal{A}$ soit paire,

$$\mathcal{A}_i \cdot V_j \subset V_{[i+j]}, \tag{3.6}$$

avec $[i+j]$ la classe modulo 2 de $i+j$.

Définition d'une supervariété

Nous n'aurons besoin que des rudiments de supergéométrie différentielle, à commencer par la définition d'une supervariété. Il existe deux approches. L'une [63, 68, 71, 28] est basée sur une formulation en termes de faisceaux : une supervariété $\mathcal{M}$ est une variété lisse $|\mathcal{M}|$ munie d'un faisceau en superalgèbres (supercommutatives), tel que le quotient de chaque superalgèbre par l'idéal de ses éléments nilpotents redonne le faisceau des fonctions lisses sur $|\mathcal{M}|$. L'autre approche [29, 101, 89] consiste en une modification de la variété elle-même qui est vue comme recollement non plus d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, mais de $V_0^p \oplus V_1^q$, pour V_0 et V_1 les parties paires et impaires d'une algèbre de Grassmann de dimension infinie sur $\mathbb{R}$. M. Batchelor [7] a montré que ces deux approches sont équivalentes. Nous adopterons la première qui est la plus simple eu égard à notre usage des supervariétés. Nous suivrons essentiellement la présentation faite dans [28].

Nous renvoyons à [44, 68] pour les notions générales de faisceaux et espaces annelés, ainsi que leurs morphismes.

Commençons par définir la *supervariété plate* de dimension $p|q$, i.e. comportant p coordonnées paires et q impaires. Soit $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^p}$ le faisceau des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^p$, et $(x^i)_{i=1,\dots,p}$ un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^p$. La supervariété $\mathbb{R}^{p|q}$ est l'espace topologique $\mathbb{R}^p$ muni du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^p}[\xi^1,\dots,\xi^q]$ de superalgèbres, où les ξ^i sont des indéterminées impaires. L'espace des (super-)fonctions sur $\mathbb{R}^{p|q}$ est l'espace des sections globales de ce faisceau, qui est la superalgèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes \Lambda(\mathbb{R}^*)^q$, notée $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{p|q})$. Les coordonnées $(x^1,\dots,x^p,\xi^1,\dots,\xi^q)$ de

$\mathbb{R}^{p|q}$ forment un système de générateurs de cette superalgèbre. Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{p|q})$ est donc de la forme

$$f = f_I \xi^I, \tag{3.7}$$

où $f_I \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p)$ et où, suivant la convention d'Einstein, on somme sur les multi-indices I.

Définition 3.1.1. *[68, 63, 28] Une supervariété $\mathcal{M}$ de dimension $p|q$ est un espace topologique $|\mathcal{M}|$ muni d'un faisceau de superalgèbres $\mathcal{O}_\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}$ soit localement isomorphe à $\mathbb{R}^{p|q}$. On note $\mathcal{M} = (|\mathcal{M}|, \mathcal{O}_\mathcal{M})$.*

Par définition, les ouverts de $\mathcal{M}$ sont de la forme $\mathcal{U} = (U, \mathcal{O}_\mathcal{M}|_U)$, avec U un ouvert de $|\mathcal{M}|$. Un système de coordonnées sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}$ est un système minimal de générateurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, l'espace des sections de $\mathcal{O}_\mathcal{M}$ au-dessus de U. Ainsi, une supervariété de dimension $p|q$ admet localement un système de coordonnées obtenu par transport de celui de $\mathbb{R}^{p|q}$, formé par p coordonnées paires et q coordonnées impaires. Par abus de langage, on parlera de fonctions au lieu de sections (locales) du faisceau.

La relation de commutation entre deux fonctions f et g sur $\mathcal{M}$ est un cas particulier de (3.2) et s'écrit donc

$$fg = (-1)^{|f|\,|g|} gf. \tag{3.8}$$

Les fonctions impaires engendrent un idéal nilpotent $\mathcal{J}$ tel que $(|\mathcal{M}|, \mathcal{O}_\mathcal{M}/\mathcal{J})$ est une variété de dimension p. La variété $|\mathcal{M}|$ sera appelée la base de $\mathcal{M}$.

Un morphisme $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre les supervariétés $\mathcal{M} = (|\mathcal{M}|, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ et $\mathcal{N} = (|\mathcal{N}|, \mathcal{O}_\mathcal{N})$ est la donnée d'une fonction continue $\phi : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ et d'un morphisme de faisceaux de superalgèbres $\phi^* : \mathcal{O}_\mathcal{N} \to \mathcal{O}_\mathcal{M}$, i.e. un morphisme d'espaces annelés. Un tel morphisme se projette, par quotient selon les idéaux nilpotents engendrés par les fonctions impaires, en un morphisme de faisceaux d'algèbres $\phi^* : \mathcal{O}_{|\mathcal{N}|} \to \mathcal{O}_{|\mathcal{M}|}$, assurant donc que $\phi : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ est une application lisse.

Donnons quelques exemples. Les supervariétés de dimension impaire nulle sont des variétés ordinaires. Les supervariétés de dimension paire nulle sont des algèbres de Grassmann, nous les notons dans ce cadre $(\{\cdot\}, \Lambda V^*)$, de dimension $0|\dim V$, où V est un espace vectoriel. Notons Π le foncteur qui renverse la parité dans la catégorie des espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués. Il s'étend naturellement aux fibrés vectoriels. Ainsi ΠTM s'identifie à la supervariété de base M et de superalgèbre de fonctions $\Omega(M)$, l'algèbre des formes différentielles sur M munie du produit extérieur et dont la $\mathbb{Z}_2$-graduation est induite par sa $\mathbb{Z}$-graduation canonique de $\Omega(M)$.

Plus généralement, à partir d'un fibré vectoriel $E \to M$, on construit une supervariété ΠE de base M et de faisceau en superalgèbres donné par les sections de ΛE^* [90]. Les sections locales de ce faisceau s'identifient à la restriction (aux ouverts de M) des sections globales ; la donnée du faisceau précédent sur M est donc équivalente à celle de la superalgèbre de fonction $\mathcal{C}^\infty(\Pi E) = \Gamma(M, \Lambda E^*)$. La projection de E sur M donne lieu à une inclusion canonique $\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(\Pi E)$.

Remarque 3.1.2. *Un théorème dû à M. Batchelor [6] montre que les classes d'isomorphismes des supervariétés de base M et des fibrés vectoriels sur M sont en bijection. Autrement dit, toute supervariété $\mathcal{M}$, de base $|\mathcal{M}| = M$, est isomorphe à ΠE pour un certain fibré vectoriel E au-dessus de M. En particulier $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ est isomorphe à $\mathcal{C}^\infty(\Pi E)$ et pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ est obtenu par restriction de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ à $|\mathcal{U}|$. Ceci est faux pour les supervariétés complexes. Cependant cet isomorphisme n'est pas unique, il n'y a ainsi pas d'inclusion canonique $\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, ni de $\mathbb{Z}$-graduation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.*

Champs de vecteurs et formes différentielles

Un fibré vectoriel sur une supervariété $\mathcal{M}$ sera défini comme un faisceau de supermodules au dessus de $\mathcal{O}_\mathcal{M}$, de rang $r|s$ s'il est localement isomorphe à $\mathcal{O}_\mathcal{M} \otimes F$, avec F un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de dimension $r|s$. Les dérivations sur $\mathbb{R}^{p|q}$ sont engendrées par les dérivées partielles ∂_i et ∂_{ξ^a} associées au système de coordonnées canoniques $(x^i, \xi^a)_{i=1,\ldots,p,\, a=1,\ldots,q}$. Ces dernières sous-tendent le fibré tangent de $\mathbb{R}^{p|q}$ de rang $p|q$, leur graduation étant celle de la coordonnée associée. Il en est de même pour une supervariété $\mathcal{M}$ quelconque, la notion étant locale. La graduation $|X|$ d'une dérivation, ou champ de vecteurs, $X \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$, se traduit par

$$X(fg) = X(f)g + (-1)^{|f|\,|X|} f X(g), \tag{3.9}$$

pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Par dualité on peut définir le fibré cotangent des 1-formes sur $\mathcal{M}$, qui engendrent toutes les formes différentielles par produit extérieur. La différentielle de De Rham est définie par $\langle X, df\rangle = Xf$, pour tout champ de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. La parité de df coïncide donc avec celle de f. La $\mathbb{Z}_2$-graduation ainsi que la différentielle de De Rham d s'étendent à tout l'espace $\Omega(\mathcal{M})$ des formes différentielles, qui est donc muni d'une bigraduation $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$. Nous notons $\Omega^k(\mathcal{M})$ le sous-espace des formes homogènes de degré k sur $\mathcal{M}$, et $|\alpha|$ la parité de α. Nous choisissons la règle des signes suivante [63, 28] pour $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{M})$ et $\beta \in \Omega^l(\mathcal{M})$,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl + |\alpha|\,|\beta|} \beta \wedge \alpha. \tag{3.10}$$

Le supercotangent d'une variété

Donnons enfin l'exemple du supercotangent $\mathcal{M}$ d'une variété M, qui est fondamental pour la suite.

Définition 3.1.3. *[42] Le supercotangent d'une variété M est le produit fibré $\mathcal{M} = T^*M \times_M \Pi TM$, la variété de base associée est donc le fibré cotangent T^*M, et la superalgèbre de fonctions est donnée par $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(T^*M) \otimes \Omega(M)$.*

Le produit fibré donnant $\mathcal{M}$ se représente via le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_0"] & \Pi TM \arrow[d] \\ T^*M \arrow[r] & M. \end{tikzcd} \tag{3.11}$$

Remarque 3.1.4. *A partir d'un système de coordonnées locales (x^i) de M, on construit canoniquement le système de coordonnées locales naturelles (x^i, p_i, ξ^i) sur $\mathcal{M}$, où p_i et ξ^i correspondent respectivement à ∂_i et dx^i.*

Dans un système de coordonnées locales (x^i, p_i, ξ^i), on note $(\partial_i, \partial_{p_i}, \partial_{\xi^i})$ la base associée des dérivations locales de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, vu comme $\mathcal{C}^\infty(M)$-module, et $(dx^i, dp_i, d\xi^i)$ la base duale correspondante. On a alors,

$$df = dx^i(\partial_i f) + dp_i(\partial_{p_i} f) + d\xi^i(\partial_{\xi^i} f). \tag{3.12}$$

3.1.2 Les supervariétés symplectiques

Nous introduisons désormais la notion de structure symplectique sur une supervariété, en suivant l'article de M. Rothstein [90] et donnons l'exemple fondamental de la structure symplectique canonique sur le supercotangent d'une variété pseudo-riemannienne (M, g).

Définition 3.1.5. *[90] Une supervariété symplectique est un couple $(\mathcal{M}, \omega)$, où ω est une 2-forme paire, fermée et non dégénérée sur la supervariété $\mathcal{M}$.*

Comme pour les supervariétés lisses, il existe, à isomorphisme près, un théorème de représentation en termes d'objets de la géométrie différentielle usuelle pour une supervariété symplectique [90]. C'est ce que nous allons expliciter.

Soit $(M, \omega_M, E, g, \nabla)$, où (M, ω_M) est une variété symplectique de dimension $2n$, E un fibré vectoriel sur M dont la fibre est de dimension r, g une métrique sur les fibres de E et ∇ une connexion sur E compatible avec la métrique. Suivant [90], nous construisons une forme symplectique ω sur la supervariété ΠE à partir de ces données.

Intéressons-nous à l'espace des champs de vecteurs $\mathrm{Vect}(\Pi E)$, vu comme espace des dérivations de $\mathcal{C}^\infty(\Pi E)$. Il est engendré librement par $(\partial_1, \ldots, \partial_{2n}, \partial_{\xi^1}, \ldots, \partial_{\xi^r})$, qui sont les dérivées partielles associées au système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^{2n}, \xi^1, \ldots, \xi^r)$ sur ΠE. L'inclusion $\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(\Pi E)$ permet de définir une notion canonique de dérivations verticales, comme les dérivations de $\mathcal{C}^\infty(\Pi E)$ s'annulant sur l'image de $\mathcal{C}^\infty(M)$. L'espace des dérivations verticales est noté $\mathrm{Vect}_V(\Pi E)$, il est engendré localement par $(\partial_{\xi^1}, \ldots, \partial_{\xi^r})$. On a donc la suite exacte courte,

$$0 \to \mathrm{Vect}_V(\Pi E) \to \mathrm{Vect}(\Pi E) \to \mathcal{C}^\infty(\Pi E) \otimes \mathrm{Vect}(M) \to 0. \tag{3.13}$$

La donnée d'une connexion sur E permet de trivialiser cette suite exacte. En effet, quitte à composer par le foncteur Π, la connexion $\nabla : \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(\Pi E)$ définit un relevé canonique des dérivations de M qui sont appelées dérivations horizontales. A un système de coordonnées locales sur ΠE on peut alors associer une base de dérivations se transformant tensoriellement, à savoir

$$\partial_i^\nabla = \partial_i - \Gamma_{ia}^b \xi^a \partial_{\xi^b} \quad \text{et} \quad \partial_{\xi^a}, \tag{3.14}$$

pour $i = 1, \ldots, 2n$ et $a = 1, \ldots, r$, les Γ_{ia}^b représentant les composantes locales de la connexion. La base duale se transforme alors aussi tensoriellement et est donnée par,

$$dx^i \quad \text{et} \quad d^\nabla \xi^a = d\xi^a + \Gamma_{ib}^a \xi^b dx^i. \tag{3.15}$$

On définit par $R_{aij}^c = \left\langle \partial_{\xi^a}(\partial_i^\nabla \partial_j^\nabla - \partial_j^\nabla \partial_i^\nabla), d\xi^c \right\rangle$ le tenseur de Riemann, qui exprime la courbure de la connexion. Son écriture locale est donc donnée par

$$R_{aij}^c = (\partial_i \Gamma_{aj}^c - \partial_j \Gamma_{ai}^c) + (\Gamma_{ai}^k \Gamma_{jk}^c - \Gamma_{aj}^k \Gamma_{ik}^c). \tag{3.16}$$

Lemme 3.1.6. *[90] Etant donné un fibré $E \to M$ muni d'une connexion ∇ compatible avec une métrique g sur les fibres, on peut définir la 1-forme suivante*

$$\alpha_{(g,\nabla)} = g_{ab} \xi^a d^\nabla \xi^b, \tag{3.17}$$

qui admet pour différentielle

$$d\alpha_{(g,\nabla)} = \frac{1}{2} g_{bc} R_{aij}^c \xi^a \xi^b dx^i \wedge dx^j + g_{ab} d^\nabla \xi^a \wedge d^\nabla \xi^b, \tag{3.18}$$

où R_{aij}^c représentent les composantes du tenseur de Riemann exprimées en (3.16).

Démonstration. La 1-forme $\alpha_{(g,\nabla)} = g_{ab}\xi^a d^\nabla \xi^b$ est bien définie globalement, car ξ^a et $d^\nabla \xi^b$ se transforment comme des 1-tenseurs contravariants. Calculons sa différentielle,

$$\begin{aligned} d\alpha_{g,\nabla} \quad = \quad & \Big(\partial_k(g_{ab})\xi^a dx^k \wedge d^\nabla \xi^b + g_{ab} d\xi^a \wedge d^\nabla \xi^b + g_{ab}\xi^a \Gamma_{ck}^b d\xi^c \wedge dx^k\Big) \\ & + g_{ab}\xi^a \partial_m(\Gamma_{ck}^b)\xi^c dx^m \wedge dx^k \end{aligned}$$

Eliminons les $d\xi^a$ grâce à la relation $d^\nabla \xi^a = d\xi^a + \Gamma_{bk}^a \xi^b dx^k$, pour arriver à

$$d\alpha_{(g,\nabla)} \quad = \quad g_{ab} d^\nabla \xi^a \wedge d^\nabla \xi^b - g_{ab}\Gamma_{ck}^a \xi^c dx^k \wedge d^\nabla \xi^b + \partial_k(g_{ab})\xi^a dx^k \wedge d^\nabla \xi^b$$

$$-g_{ab}\xi^b\Gamma^a_{ck}dx^k \wedge d^\nabla\xi^c + g_{ab}\xi^b\xi^c\Gamma^d_{cl}\Gamma^a_{dk}dx^k \wedge dx^l + g_{ab}\xi^a\xi^c\partial_m(\Gamma^b_{ck})dx^m \wedge dx^k.$$

Or, la compatibilité de la connexion avec la métrique s'exprime en coordonnées par l'identité $\partial_i g_{ab} - \Gamma^c_{ai}g_{cb} - \Gamma^c_{bi}g_{ca} = 0$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} d\alpha_{g,\nabla} &= g_{ab}d^\nabla\xi^a \wedge d^\nabla\xi^b \\ &\quad +\xi_a\xi^c\Gamma^a_{bk}\Gamma^b_{mc}dx^k \wedge dx^m + g_{ab}\xi^a\xi^c\partial_m(\Gamma^b_{ck})dx^m \wedge dx^k. \end{aligned}$$

Les composantes locales du tenseur de Riemann étant données par (3.16), l'expression de $d\alpha$ se réduit donc, comme annoncé, à

$$d\alpha_{g,\nabla} = g_{ab}d^\nabla\xi^a \wedge d^\nabla\xi^b + \frac{1}{2}R^a_{bij}\xi_a\xi^b dx^i \wedge dx^j.$$

□

Proposition 3.1.7. *[90] Soit la donnée de $(M, \omega_M, E, g, \nabla)$, et π la projection canonique de ΠE sur M. Il existe une 2-forme symplectique sur la supervariété ΠE définie par*

$$\omega = \pi^*\omega_M + d\alpha_{(g,\nabla)}, \tag{3.19}$$

Il existe donc des coordonnées locales $(q^\nu, p_\nu, \xi^a)_{\nu=1,\dots,n;\,a=1,\dots,r}$ de ΠE telles que

$$\omega = dp_\nu \wedge dq^\nu + \frac{1}{2}g_{bc}R^c_{aij}\xi^a\xi^b dx^i \wedge dx^j + g_{ab}d^\nabla\xi^a \wedge d^\nabla\xi^b, \tag{3.20}$$

où $(x^i)_{i=1,\dots,2n}$ est un système de coordonnées de M.

Démonstration. La 2-forme ω est fermée par définition. Il suffit de montrer qu'elle est non dégénérée. Ceci est clair sur l'expression en coordonnées, et cette dernière est obtenue directement à partir du lemme précédent et du Théorème de Darboux, qui fournit l'existence d'un système de coordonnées locales $(q^\nu, p_\nu)_{\nu=1,\dots,n}$ de M tels que $\omega_M = dp_\nu \wedge dq^\nu$. □

Le résultat essentiel de M. Rothstein [90] est que toute supervariété symplectique $(\mathcal{M}, \tilde{\omega})$ est symplectomorphe à une supervariété symplectique de la forme $(\Pi E, \omega)$. Il retrouve alors aisément le résultat de B. Kostant [63] qui étend le Théorème de Darboux aux supervariétés.

Théorème 3.1.8. *[63] Soit $(\mathcal{M}, \tilde{\omega})$ une supervariété symplectique de dimension $2n|r$. Elle admet au voisinage de tout point un système de coordonnées de Darboux $(q^\nu, p_\nu, \xi^a)_{\nu=1,\dots,n,\,a=1,\dots,r}$ qui est tel que*

$$\omega = dp_\nu \wedge dq^\nu + \eta_{ab}d\xi^a \wedge d\xi^b, \tag{3.21}$$

avec η_{ab} les composantes d'une métrique plate, dont la signature est un invariant symplectique.

Ainsi il existe au voisinage de tout point un symplectomorphisme entre $(\mathcal{M}, \tilde{\omega})$ et la supervariété $T^*\mathbb{R}^n \times \Pi\mathbb{R}^r$ munie de la structure symplectique plate donnée en coordonnées canoniques par $\omega = dp_\nu \wedge dq^\nu + \eta_{ab} d\xi^a \wedge d\xi^b$.

Remarque 3.1.9. *Les coordonnées de Darboux impaires correspondent donc à un repère orthonormé pour la métrique g sur les fibres de E.*

Exemples 3.1.10. *Nous donnons les cas dégénérés où la dimension paire ou impaire est nulle.*

- *Les supervariétés symplectiques de dimension impaire nulle s'identifient simplement aux variétés symplectiques usuelles.*
- *Les supervariétés symplectiques de dimension paire nulle sont construites à partir de $(\{\cdot\}, 0, V, g, 0)$, avec V un espace vectoriel muni d'une métrique g. Leur base est réduite à un point et leur algèbre de fonctions est l'algèbre de Grassmann ΛV^*. Leur forme symplectique ω s'écrit en coordonnées quelconques $\omega = g_{ab} d\xi^a \wedge d\xi^b$. Un système de coordonnées de Darboux s'identifie alors à une base orthonormée de V^*.*

Structure symplectique canonique du supercotangent de (M, g)

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n. Elle possède une connexion canonique, la connexion de Levi-Civita ∇, et on note ω_{T^*M} la forme symplectique de son fibré cotangent, qui dérive de la 1-forme de Liouville α_{T^*M}. Nous notons $(x^i)_{i=1,\dots,n}$ un système de coordonnées locales sur M et (x^i, p_i) le système de coordonnées naturelles associé sur T^*M.

Définition 3.1.11. *[90] La structure symplectique canonique du supercotangent $\mathcal{M}$ de la variété pseudo-riemannienne (M, g) est donnée par $(T^*M, \omega_{T^*M}, T^*M \times_M TM, \kappa g, \nabla)$. Sa forme symplectique ω dérive alors d'une 1-forme α, qui s'écrit en coordonnées naturelles,*

$$\boxed{\alpha = p_i dx^i + \kappa g_{ij} \xi^i d^\nabla \xi^j,} \tag{3.22}$$

de différentielle

$$\boxed{d\alpha = dp_i \wedge dx^i + \frac{\kappa}{2} g_{lm} R^m_{kij} \xi^k \xi^l dx^i \wedge dx^j + \kappa\, g_{ij} d^\nabla \xi^i \wedge d^\nabla \xi^j.} \tag{3.23}$$

La 1-forme α est construite à partir de α_{T^*M}, la 1-forme de Liouville sur T^*M, et $\alpha_{(g,\nabla)}$, la 1-forme sur ΠTM définie par les données (M, TM, g, ∇) suivant le Lemme 3.1.6. Explicitement, utilisant $\pi_0 : \mathcal{M} \to T^*M$ et $\pi_1 : \mathcal{M} \to \Pi TM$ les projections du supercotangent de M sur les sous-fibrés pairs et impairs de M, on pose

$$\alpha = \pi_0^* \alpha_{T^*M} + \kappa\, \pi_1^* \alpha_{g,\nabla}. \tag{3.24}$$

L'écriture en coordonnées naturelles de α est immédiate, et celle de sa différentielle découle du Lemme 3.1.6.

Remarque 3.1.12. *Nous avons introduit dans α le paramètre κ, il sera fixé par la suite pour des motivations physique à $\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$. Le Paragraphe 3.1.3, la remarque 3.1.21 ainsi que la Proposition 3.3.3 justifient ce choix.*

Des coordonnées locales (x^i) sur M étant fixées, on peut obtenir des coordonnées de Darboux sur son supercotangent $\mathcal{M}$, à partir des coordonnées naturelles. Pour cela, on introduit $(e_a)_{a=1,\ldots,n}$ un repère orthonormal de (M, g). Il est relié au repère naturel $(\partial_i)_{i=1,\ldots,n}$, défini par les champs de vecteurs associés aux coordonnées x^i, via le changement de repère e_a^i, d'inverse θ_i^a. La 1-forme de la connexion de Levi-Civita est alors donnée par

$$\omega_b^a = \theta_i^a \left(de_b^i + \Gamma_{jk}^i e_b^j dx^k \right), \tag{3.25}$$

avec Γ_{jk}^i le symbole de Christoffel de la connexion de Levi-Civita.

Proposition 3.1.13. *Soit $(e_a)_{a=1,\ldots,n}$ un repère orthonormal de (M, g), et (x^i, p_i, ξ^i) un système de coordonnées naturelles de son supercotangent $\mathcal{M}$. Les fonctions suivantes forment un système de coordonnées de Darboux pour $\mathcal{M}$ muni de sa structure symplectique canonique (voir la Définition 3.1.11),*

$$\boxed{x^i, \qquad \tilde{\xi}^a = \theta_i^a \xi^i, \qquad \tilde{p}_i = p_i + \kappa \omega_{bi}^a \tilde{\xi}_a \tilde{\xi}^b,} \tag{3.26}$$

où $\tilde{\xi}_a = e_a^i g_{ij} \xi^j$ et $\omega_{bi}^a = \langle \partial_i, \omega_b^a \rangle$.

Démonstration. Partons de la 1-forme $\alpha = p_i dx^i + \kappa g_{ij} \xi^i d^\nabla \xi^j$, dont la différentielle est la forme symplectique de $\mathcal{M}$; dans un premier temps le but est de montrer que l'on a $\alpha = \tilde{p}_i dx^i + \kappa \eta_{ab} \tilde{\xi}^a d\tilde{\xi}^b$. Développons $d^\nabla \xi^j$ donné par la formule (3.15), et utilisons $\xi^j = e_b^j \tilde{\xi}^b$, pour réexprimer α,

$$\alpha = p_i dx^i + \kappa g_{ij} \xi^i \Gamma_{kl}^j \xi^k dx^l + \kappa \xi_j d(e_b^j \tilde{\xi}^b).$$

Il ne reste alors plus qu'à développer $d(e_b^j \tilde{\xi}^b)$ et à opérer un changement d'indice pour obtenir

$$\alpha = p_i dx^i + \kappa(\Gamma_{ik}^j \xi_j \xi^k dx^i + \theta_j^a \tilde{\xi}_a \tilde{\xi}^b de_b^j) + \kappa \eta_{ab} \tilde{\xi}^a d\tilde{\xi}^b.$$

L'expression (3.25) de la 1-forme de connexion de Levi-Civita montre alors, comme voulu, $\alpha = \tilde{p}_i dx^i + \kappa \eta_{ab} \tilde{\xi}^a d\tilde{\xi}^b$.

Il reste à prouver que les fonctions $(x^i, \tilde{p}_i, \tilde{\xi}^a)$ forment un système de coordonnées. Comme elles engendrent clairement $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, il suffit de montrer que les dérivations associées commutent. Or, la forme symplectique s'écrit localement $\omega = d\tilde{p}_i \wedge dx^i + \eta_{ab} d\tilde{\xi}^a \wedge d\tilde{\xi}^b$ par dérivation de α. Il en découle que les champs hamiltoniens respectifs des fonctions $\tilde{p}_i$, $-x^i$ et $-\tilde{\xi}^a$ sont les dérivations associées au système de fonctions $(x^i, \tilde{p}_i, \tilde{\xi}^a)$. Ils commutent grâce à la propriété fondamentale $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$, cf (2.5), des champs de vecteurs hamiltoniens.. □

Remarque 3.1.14. *Dans le cas particulier où la métrique g de M est conformément plate, i.e. $g_{ij} = F\eta_{ij}$ en coordonnées conformes, on a $\theta^a_i = F^{\frac{1}{2}}\delta^a_i$ et $e^i_a = F^{-\frac{1}{2}}\delta^i_a$. Alors, les coordonnées de Darboux sont données par*

$$\tilde{\xi}^i = F^{\frac{1}{2}}\xi^i, \qquad \tilde{p}_i = p_i + \kappa\,\Gamma^k_{ij}\xi_k\xi^j = p_i + \kappa\,\xi_i\frac{F_j\xi^j}{F}. \tag{3.27}$$

Mentionnons enfin l'existence de structures symplectiques impaires dont le modèle local est ΠT^*M muni de la 2-forme impaire fermée et non dégénérée $d\xi_i \wedge dx^i$ avec x^i des coordonnées de M et ξ_i les coordonnées fibrés associées. De telles structures sont utilisées dans la procédure de quantification de Batalin-Vilkovisky [92, 51]. Si M est munie d'une métrique g, la supervariété ΠTM est également munie d'une forme symplectique impaire, donnée par $d\beta = g_{ij}d^\nabla\xi^i \wedge dx^j$, dérivant de la 1-forme impaire $\beta = g_{ij}\xi^i dx^j$.

3.1.3 Le supercotangent $\mathcal{M}$ comme description classique du spin

Nous montrons dans ce paragraphe que le supercotangent d'une variété pseudo-riemannienne (M, g), muni de sa forme symplectique canonique (3.23), fournit un espace des états "classiques" d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ évoluant dans l'espace-temps relativiste M, de dimension $3+1$. L'utilisation de variables de Grassmann pour décrire le spin a été initiée par J. Schwinger [91] puis J.L. Martin [73] et développé dans le cadre du formalisme lagrangien, notamment par R. Casalbuoni et al. [5], ainsi que F.A. Berezin et M.S. Marinov [9]. Pour une particule relativiste, ils introduisent une cinquième dimension, réduite ensuite par une contrainte, F. Ravndal [88] propose une approche plus simple, en dimension 4 et sans contraintes.

Nous retrouvons ici, en formalisme symplectique, les résultats de [88] sur la dynamique d'une particule d'essai à spin. En fait, nous déterminons les équations d'évolution de la position, de l'impulsion et du spin pour une particule soumise à la fois à un champ gravitationnel et à un champ électromagnétique extérieurs, qui sont traités séparément dans [88]. Dans le cas du seul champ gravitationnel, les équations de Papapetrou sont obtenues [84].

Le champ gravitationnel (extérieur) est décrit par une métrique lorentzienne g sur la variété de configuration M. On rappelle que le mouvement d'une particule libre sans spin est donné par le flot du hamiltonien $H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j$ sur le fibré cotangent T^*M muni de sa structure symplectique canonique $\omega = dp_i \wedge dx^i$, où les p désignent les variables fibrées. Pour obtenir la trajectoire d'une particule libre à spin nous allons considérer le flot du même hamiltonien mais sur le supercotangent de M muni de sa structure symplectique canonique (3.23), avec $\kappa = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$. L'ajout d'un champ électromagnétique est implémenté via le hamiltonien,

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}(p_i - qA_i)(p_j - qA_j) + \frac{q}{2}F_{ij}S^{ij}, \tag{3.28}$$

où q est la charge de la particule et le potentiel électromagnétique est une U(1)-connexion qui s'écrit localement $A = A_i dx^i$, de courbure le champ électromagnétique, donné localement par $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Le flot de cet hamiltonien sur le supercotangent $\mathcal{M}$ fournit les équations du mouvement d'une particule à spin massive et chargée.

Définition 3.1.15. *[9, 88] Sur un supercotangent $\mathcal{M}$, de coordonnées locales (x^i, p_i, ξ^i), nous nommons spin le 2-tenseur contravariant $S^{ij} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\xi^i\xi^j$. De plus, nous notons sa contraction avec le tenseur de Riemann par $R(S)_{ij} = g_{km}R^k_{lij}S^{ml}$.*

Théorème 3.1.16. *Soit (M, g) une variété riemannienne, $\mathcal{M}$ son supercotangent muni de sa forme symplectique canonique (3.23), avec $\kappa = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$, et A une* U(1)*-connexion de courbure F. Les équations d'évolution de la position et du spin d'une particule de charge q et de hamiltonien $H = \frac{1}{2}g^{ij}(p_i - qA_i)(p_j - qA_j) + \frac{q}{2}F_{ij}S^{ij}$ sont données par*

$$\dot{x}^j\nabla_j\dot{x}^i = -\frac{1}{2}g^{ik}R(S)_{jk}\dot{x}^j + \frac{q}{2}g^{ij}F_{jk}\dot{x}^k - \frac{q}{2}\left(g^{ij}(\partial^\nabla_j F_{kl})S^{kl}\right), \tag{3.29}$$

$$\dot{x}^k\nabla_k S^{ij} = 2qF_{kl}(g^{ik}S^{lj} - g^{jk}S^{li}). \tag{3.30}$$

Précisons ici que, dans notre formalisme, l'accélération géodésique s'écrit $\dot{x}^j\nabla_j\dot{x}^i = \ddot{x}^i - \dot{x}^j\partial^\nabla_j\dot{x}^i$. De même, l'expression $\dot{x}^k\nabla_k S^{ij} = \dot{S}^{ij} - \dot{x}^j\partial^\nabla_j S^{ij}$ décrit l'évolution temporelle covariante du spin.

L'étape clé de la démonstration du théorème consiste à obtenir le champ hamiltonien X_H d'un hamiltonien H, pour la structure symplectique canonique du supercotangent de (M, g). C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.1.17. *Soit (M, g) une variété (pseudo-)riemannienne, $\mathcal{M}$ son supercotangent muni de sa forme symplectique canonique (3.23), avec $\kappa = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$, et $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Le champ hamiltonien associé à H, noté X_H, est donné par*

$$\boxed{X_H = (\partial_{p_i}H)\partial^\nabla_i - \left(\partial^\nabla_i H + \frac{1}{2}R(S)_{ji}\partial_{p_j}H\right)\partial_{p_i} + (-1)^{|H|}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^{-1}g^{ij}\partial_{\xi^j}H\partial_{\xi^i}.} \tag{3.31}$$

Démonstration. Soit $X_H = \delta x^i\partial^\nabla_i + \delta^\nabla p_i\partial_{p_i} + \delta^\nabla\xi^i\partial_{\xi^i}$, le champ hamiltonien de H. Ses coefficients sont déterminés par l'équation $\langle X_H, \omega\rangle = -dH$, où ω est donnée par (3.23). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\delta^\nabla p_i dx^i + \frac{1}{2}R(S)_{ji}\delta x^j dx^i - \delta x^i d^\nabla p_i + \frac{\hbar}{\mathfrak{i}}g_{ij}\delta^\nabla \xi^i d^\nabla \xi^j &= -(\partial_i^\nabla H)dx^i - (\partial_{p_i}H)d^\nabla p_i \\ &\quad +(-1)^{|H|}\partial_{\xi^i}H d^\nabla \xi^i.\end{aligned}$$

Le résultat en découle par identification des termes en dx^i, $d^\nabla p_i$ et $d^\nabla \xi^i$. □

Nous pouvons alors donner la preuve du Théorème 3.1.16.

Démonstration. Grâce au lemme qui précède nous avons accès à l'expression de X_H pour le hamiltonien H considéré. Nous notons encore $X_H = (\delta x^i)\partial_i^\nabla + (\delta^\nabla p_i)\partial_{p_i} + (\delta^\nabla \xi^i)\partial_{\xi^i}$, et obtenons donc

$$\delta x^i = p^i - qA^i \tag{3.32}$$

$$\delta^\nabla \xi^i = qg^{ij}\xi^k F_{jk} \tag{3.33}$$

$$\delta^\nabla p_i = -\frac{1}{2}R(S)_{ji}\delta x^j + \frac{q}{2}(\nabla_i A_j)\delta x^j - \frac{q}{2}(\nabla_i F_{jk})S^{jk}. \tag{3.34}$$

Nous avons utilisé $\partial_i^\nabla(g^{ij}p_ip_j) = 0$ et le lien entre dérivée horizontale et dérivée covariante des tenseurs, notamment $\partial_i^\nabla(F_{jk}S^{jk}) = (\nabla_i F_{jk})S^{jk}$. D'autre part H étant le hamiltonien du système rappelons que toute observable f admet pour équation d'évolution $\dot{f} = X_H f$. Il en découle que

$$\begin{cases}\delta x^i = \dot{x}^i \\ \delta^\nabla p_i = \dot{p}_i - \Gamma^j_{ik}p_j\dot{x}^k \\ \delta^\nabla \xi^i = \dot{\xi}^i + \Gamma^i_{jk}\xi^j\dot{x}^k.\end{cases}$$

L'expression trouvée pour $\delta^\nabla \xi^i$ montre que $\delta^\nabla \xi^i = \dot{x}^j\nabla_j\xi^i$, et l'équation (3.33) conduit donc à l'équation d'évolution (3.30) du spin. En appliquant de nouveau l'équation d'évolution à $\dot{x}^i$, on obtient $\ddot{x}^i = \dot{x}^j\partial_j^\nabla\dot{x}^i + \delta^\nabla p_i$. On en conclut que $\delta^\nabla p_i = \dot{x}^j\nabla_j\dot{x}^i$ et (3.34) est donc l'équation (3.29) décrivant la trajectoire. □

Pour un champ gravitationnel nul, i.e. une métrique plate, ou bien un champ électromagnétique nul, nous retrouvons les équations obtenues dans [88]. En particulier, en posant $q = 0$ dans l'équation (3.29), on obtient l'équation de Papapetrou décrivant l'accélération géodésique d'une particule massive à spin en relativité générale. Dans le référentiel au repos de la particule, l'équation d'évolution du spin de la particule peut se réécrire $\dot{S} = 2qS \times B$, la particule à spin a donc un moment gyromagnétique égal à 2.

3.1.4 Action hamiltonienne de $\mathrm{conf}(M, g)$ sur le supercotangent $\mathcal{M}$

Nous avons vu dans la Proposition 2.1.7, que tout champ de vecteurs sur une variété M se relève de manière canonique à T^*M en un champ préservant la 1-forme de Liouville. Un tel champ étant hamiltonien, il est alors aisé de calculer le moment associé. Relever un champ de vecteurs X de M à son supercotangent $\mathcal{M}$ est plus problématique, et n'est traité (à notre connaissance) dans aucune référence. La méthode présentée ici est due essentiellement (cas plat) à C. Duval. Les relevés préservant la 1-forme potentielle α de $\mathcal{M}$, qui est donnée en (3.23), sont non uniques, comme nous allons le voir. Nous leur imposerons donc une condition supplémentaire, à savoir de préserver la direction de β, la 1-forme définissant la structure symplectique canonique impaire de ΠTM. Nous allons prouver que seuls les champs conformes peuvent être relevés ainsi, et que leur relevé est alors unique. Les applications moment, associées à l'action hamiltonienne de l'algèbre de Lie $\mathrm{conf}(M, g)$ pour les structures symplectiques paires et impaires ci-dessus, permettent alors de définir des coordonnées conformes de Darboux sur $\mathcal{M}$ si M est conformément plate.

Relevé hamiltonien de $\mathrm{conf}(M, g)$ à $\mathcal{M}$

Soit $(\mathcal{M}, \omega)$ le supercotangent de la variété pseudo-riemannienne (M, g), muni de sa structure symplectique canonique défini par $(T^*M, \omega, T^*M \times_M TM, \kappa g, \nabla)$. Soit (x^i) un système de coordonnées locales sur M et (x^i, p_i, ξ^i) le système de coordonnées locales naturelles associées sur $\mathcal{M}$, cf Remarque 3.1.4. Grâce à ∇, la connexion de Levi-Civita associée à g, on peut relever horizontalement les dérivées associées à x^i et obtenir une base de dérivations de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ qui se transforme tensoriellement,

$$\partial_i^\nabla = \partial_i + \Gamma^k_{ij} p_k \partial_{p_j} - \Gamma^k_{ij} \xi^j \partial_{\xi^k}, \quad \text{et} \quad \partial_{p_i} \qquad \partial_{\xi^i}. \tag{3.35}$$

On remarquera la différence avec l'expression (3.14), où (x^i) était un système de coordonnées locales de la variété symplectique. La base duale est donnée par

$$dx^i, \qquad d^\nabla p_i = dp_i - \Gamma^k_{ij} p_k dx^j \quad \text{et} \quad d^\nabla \xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{jk} \xi^j dx^k. \tag{3.36}$$

La différentielle d'une fonction f sur $\mathcal{M}$ est alors donnée par

$$df = (\partial_i^\nabla f) dx^i + (\partial_{p_i} f) d^\nabla p_i - (-1)^{|f|} (\partial_{\xi^i} f) d^\nabla \xi^i, \tag{3.37}$$

et correspond précisément à l'expression locale (3.12). Rappelons que la structure symplectique de $\mathcal{M}$ est donné par $d\alpha$, et la 1-forme α est définie en (3.22).

Lemme 3.1.18. *Soit $(\mathcal{M}, d\alpha)$ le supercotangent de (M, g) muni de sa structure symplectique canonique. Un relevé des champs de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(M)$ au supercotangent $\mathcal{M}$,* *qui préserve α, est de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vect}(M) & \to & \mathrm{Vect}(\mathcal{M}) \\ X & \mapsto & X^i \partial_i^\nabla + Y_{ij}\xi^j \partial_{\xi_i} - p_j \nabla_i X^j \partial_{p_i} \\ & & +\kappa \left(R^k_{lij}\xi_k \xi^l X^j - \partial_i^\nabla (Y_{kl}\xi^k \xi^l) \right) \partial_{p_i}, \end{array} \tag{3.38}$$

où Y est une 2-forme arbitraire sur M, qui dépend linéairement de X.

Il n'y a donc pas unicité du relevé, et de plus les conditions que doivent satisfaire Y afin d'obtenir un morphisme d'algèbres de Lie sont non triviales.

Démonstration. Nous cherchons les champs de vecteurs $\hat{X}$ relevant $X = X^j \partial_j$. Ils sont de la forme

$$\hat{X} = X^j \partial_j^\nabla + P_j \partial_{p_j} + \Xi^j \partial_{\xi^j},$$

avec $P_j, \Xi^j \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, et ils préservent α, i.e.,

$$L_{\hat{X}} \alpha = 0. \tag{3.39}$$

La formule de Cartan se prolonge au cas des formes différentielles des supervariétés et conduit alors à $d\langle \hat{X}, \alpha \rangle + \langle \hat{X}, d\alpha \rangle = 0$. Comme $dp_i \wedge dx^i = (d^\nabla p_i - \Gamma^k_{ij} p_k dx^j) \wedge dx^i = d^\nabla p_i \wedge dx^i$ par symétrie des symboles de Christoffel Γ^k_{ij} en i et j, on obtient

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & d(p_i X^i + \kappa g_{kl} \xi^k \Xi^l) \\ & & +P_i dx^i - X^i d^\nabla p_i + \kappa g_{kl} (\Xi^k d^\nabla \xi^l - (d^\nabla \xi^k) \Xi^l) + \kappa \frac{1}{2} R^k_{lij} \xi_k \xi^l (X^i dx^j - X^j dx^i). \end{array}$$

La différentielle d'une fonction est donnée par (3.37), d'où, après factorisation,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \left[P_i + p_j \nabla_i X^j + \kappa \left(\partial_i^\nabla (\xi^k \Xi_k) - R^k_{lij} \xi_k \xi^l X^j \right) \right] dx^i \\ & & + \left[X^i + \kappa g_{kl} \xi^k \partial_{p_i} \Xi^l - X^i \right] d^\nabla p_i \\ & & +\kappa \left[-g_{kl} \Xi^l + g_{lm} \xi^l \partial_{\xi^k} \Xi^m + 2 g_{kl} \Xi^l \right] d^\nabla \xi^k. \end{array} \tag{3.40}$$

Comme dx^i, $d^\nabla p_i$ et $d^\nabla \xi^i$ forment une base, nous obtenons 3 équations vectorielles. La seconde ligne fournit l'indépendance des Ξ^i en les p_j, et la dernière donne, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\Xi_i + \xi_j \partial_{\xi^i} \Xi^j = 0.$$

Comme Ξ_i est une fonction impaire, on peut la décomposer suivant : $\Xi_i = Y_{ij}\xi^j + Z_{ijkl}\xi^j \xi^k \xi^l + \ldots$, avec Y et Z des tenseurs covariants pairs sur M. L'équation précédente se réécrit alors

$$Y_{ij}\xi^j + Y_{ji}\xi^j + (Z_{ijkl} + 3Z_{jikl})\xi^j \xi^k \xi^l + \ldots = 0.$$

Il en découle l'antisymétrie de Y et l'équation $Z_{ijkl} + 3Z_{jikl} = 0$. En antisymétrisant en i et j cette dernière, on obtient $2Z_{[ji]kl} = 0$, i.e. $Z_{ijkl} = Z_{jikl}$. En réinjectant ce résultat dans l'équation initiale, nous sommes conduit à $Z_{ijkl} = 0$. Le même raisonnement s'applique pour les tenseurs de plus haut degré, ce qui mène à $\Xi_i = Y_{ij}\xi^j$ avec Y antisymétrique et pair. De l'annulation du terme en dx^i, dans l'équation (3.40), il découle :

$$-P_i = p_j \nabla_i X^j + \kappa \left(\partial_i^\nabla (Y_{jk}\xi^j\xi^k) - R_{lij}^k \xi_k \xi^l X^j \right).$$

Les contraintes sur $\hat{X}$ assurant $L_{\hat{X}}\alpha = 0$ ont toutes été implémentées, la combinaison des expressions de Ξ_i et P_i obtenues conduit alors au résultat. □

Pour obtenir un relevé univoque des champs de vecteurs de M à son supercotangent, nous allons imposer une condition supplémentaire : les relevés des champs doivent préserver la direction de la 1-forme $\beta = g_{ij}\xi^i dx^j$. Le relèvement ainsi obtenu est un morphisme d'algèbre de Lie. En contrepartie, seuls les champs de vecteurs Killing-conformes de (M, g) peuvent alors être relevés. La 1-forme β est définie sur ΠTM et son relevé à $\mathcal{M}$ est encore noté β par commodité. Rappelons que $d\beta$ définit sur ΠTM une structure symplectique impaire. Elle exprime un couplage entre les variables x^i et ξ^j qui est absent dans α, et c'est précisément ce qui manquait pour fixer Y.

Théorème 3.1.19. *Soit X un champ de vecteurs de M, et $\beta = g_{ij}\xi^i dx^j$ une 1-forme sur son supercotangent $\mathcal{M}$. Le relevé de X à $\mathcal{M}$, qui préserve α et la direction de β, existe si et seulement si X est un champ de vecteurs Killing-conforme. Il est alors unique, noté $\tilde{X}$, et obtenu via le morphisme d'algèbres de Lie*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{conf}(M, g) & \rightarrow & \mathrm{Vect}(\mathcal{M}) \\ X & \mapsto & \tilde{X}, \end{array} \tag{3.41}$$

où $\tilde{X}$ est donné par

$$\boxed{\tilde{X} = X^i \partial_i^\nabla + \partial_{[j}X_{i]}\xi^j \partial_{\xi_i} - p_j \nabla_i X^j \partial_{p_i} + \kappa \left(R_{lij}^k \xi_k \xi^l X^j - \partial_i^\nabla (\xi^k \xi^l \partial_{[l}X_{k]}) \right) \partial_{p_i}.} \tag{3.42}$$

De plus, on a $L_{\tilde{X}}\tilde{\beta} = 0$, avec $\tilde{\beta} = \beta|\mathrm{vol}_g|^{-\frac{1}{n}}$.

Pour rappel, $|\mathrm{vol}_g| = \sqrt{|\det(g_{ij})|}$ désigne la densité (pseudo-)riemannienne canonique de (M, g).

Démonstration. Soit $X \in \mathrm{Vect}(M)$. Grâce au Lemme 3.1.18, nous avons

$$\tilde{X} = X^i \partial_i^\nabla + Y_{ij}\xi^j \partial_{\xi_i} - p_j \nabla_i X^j \partial_{p_i} + \kappa \left(R_{lij}^k \xi_k \xi^l X^j - \partial_i^\nabla (Y_{kl}\xi^k \xi^l) \right) \partial_{p_i}.$$

Le tenseur Y va être fixé par la préservation de la direction de β, i.e. par l'équation $L_{\tilde{X}}\beta = f\beta$. En utilisant l'expression locale $\beta = g_{ij}\xi^j dx^i$, cette condition s'écrit

$$X(g_{ij})\xi^j - g_{ik}X^l\Gamma^k_{jl}\xi^j + Y_{ij}\xi^j + g_{jk}\xi^j\partial_i X^k = fg_{ij}\xi^j. \tag{3.43}$$

Nous pouvons symétriser cette équation en les indices i et j, pour obtenir

$$X(g_{ij}) - \frac{1}{2}X(g_{ij}) + \frac{1}{2}(g_{jk}\partial_i X^k + g_{ik}\partial_j X^k) = fg_{ij},$$

i.e. $L_X g = 2fg$, ce qui impose $X \in \mathrm{conf}(M,g)$. On remarque alors que β est transformée comme une $\frac{1}{n}$-densité. Nous pouvons aussi antisymétriser (3.43) en les indices i et j, ce qui conduit à la détermination de Y,

$$Y_{ij} = \frac{1}{2}\left[g_{ik}(\partial_j X^k + X^l\Gamma^k_{jl}) - g_{jk}(\partial_i X^k + X^l\Gamma^k_{il})\right] = \nabla_{[j}X_{i]} = \partial_{[j}X_{i]}.$$

L'expression de $\tilde{X}$ s'ensuit par substitution dans la formule (3.38).

Il reste à montrer que ce relevé définit un morphisme d'algèbres de Lie. Soit $X, Y \in \mathrm{conf}(M,g)$. Le champ de vecteur $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ est un relevé de $[X,Y]$ préservant α et la direction de β. Mais un tel relevé est unique et donné par $\widetilde{[X,Y]}$, d'où $[\tilde{X},\tilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]}$. L'application $X \mapsto \tilde{X}$ étant de plus linéaire, c'est bien un morphisme d'algèbres de Lie. □

Applications moments

Ayant défini un relevé de $\mathrm{conf}(M,g)$ préservant les structures symplectiques paires et impaires définies par $d\alpha$ et $d\tilde{\beta}$ sur $\mathcal{M}$ et ΠTM, on obtient deux applications moments. Via le plongement canonique de $\mathrm{conf}(M,g)$-module de $\mathcal{C}^\infty(\Pi TM)\otimes\mathcal{F}^{-\frac{1}{n}}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\otimes\mathcal{F}^{-\frac{1}{n}}$ l'application moment impaire peut-être vue comme à valeurs dans ce dernier module.

Proposition 3.1.20. *L'application moment paire $\mathcal{J}^0 : \mathrm{conf}(M,g) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, est un morphisme de* $\mathrm{conf}(M,g)$*-modules et d'algèbres de Lie, qui s'écrit*

$$\boxed{\mathcal{J}^0_X = \langle \tilde{X}, \alpha\rangle = p_i X^i + \kappa\xi^j\xi^k(\partial_{[k}X_{j]}).} \tag{3.44}$$

L'application moment impaire $\mathcal{J}^1 : \mathrm{conf}(M,g) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\otimes\mathcal{F}^{-\frac{1}{n}}$, est un morphisme de $\mathrm{conf}(M,g)$*-modules et d'algèbres de Lie, qui s'écrit*

$$\boxed{\mathcal{J}^1_X = \langle \tilde{X}, \tilde{\beta}\rangle = \xi_i X^i |\mathrm{vol}_g|^{-\frac{1}{n}}.} \tag{3.45}$$

Démonstration. En appliquant la Formule de Cartan, on obtient $L_{\tilde{X}}\alpha = d\langle\tilde{X},\alpha\rangle + \langle\tilde{X}, d\alpha\rangle$. Le champ de vecteurs $\tilde{X}$ est donc hamiltonien pour la structure symplectique paire de $\mathcal{M}$, et son hamiltonien est donné par $\mathcal{J}^0 = \langle \tilde{X}, \alpha \rangle$. Le calcul en coordonnées de cette expression est immédiat.

Soit X et Y des champs de vecteurs Killing-conformes. L'égalité suivante est immédiate, $\tilde{X}\mathcal{J}^0_Y = \langle L_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \alpha\rangle + \langle \tilde{Y}, L_{\tilde{X}}\alpha\rangle = \langle L_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \alpha\rangle$. Comme le Théorème 3.1.19 montre que $L_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \widetilde{L_X Y}$, on obtient $\tilde{X}\mathcal{J}^0_Y = \mathcal{J}^0_{L_X Y}$, i.e. $\mathcal{J}^0$ est un morphisme de $\mathrm{conf}(M, g)$-modules. D'autre part, par définition du crochet de Poisson (associé à $d\alpha$), on a $\tilde{X}\mathcal{J}^0_Y = \{\mathcal{J}^0_X, \mathcal{J}^0_Y\}$. Combiné avec ce qui précède, il en découle $\mathcal{J}^0_{L_X Y} = \{\mathcal{J}^0_X, \mathcal{J}^0_Y\}$, i.e., $\mathcal{J}^0$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

La démonstration est identique pour l'application moment impaire $\mathcal{J}^1$. □

Remarque 3.1.21. *Dans le cas où la variété M est plate, le moment pair d'une rotation infinitésimale donnée par le champ de vecteur $X_{ij} = x_i\partial_j - x_j\partial_i$ est*

$$\mathcal{J}^0_{X_{ij}} = (p_j x_i - p_i x_j) + 2\kappa\xi_i\xi_j.$$

Le premier terme s'identifie au moment orbital usuel et le deuxième aux composantes du spin $S^{ij} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\xi^i\xi^j$ [9, 88], à condition que

$$\kappa = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}},$$

comme choisi au Paragraphe 3.1.3. Le coefficient κ est imaginaire pur afin que le spin soit réel [102], en effet $\overline{S^{ij}} = 2\overline{\kappa}\xi^j\xi^i = S^{ij}$.

Désormais nous posons donc $\kappa = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$.

Coordonnées de Darboux conformes sur $\mathcal{M}$

Soit (M, g) est une variété conformément plate, de coordonnées conformes (x^i). Nous souhaitons construire des coordonnées conformes sur $\mathcal{M}$ au voisinage de tout point. Les changements de coordonnées doivent donc se faire par application du relevé d'une application conforme de M. L'idée est d'utiliser les moments pairs et impairs des translations (∂_i) associées aux coordonnées (x^i). Mais $\mathcal{J}^1$ est à valeurs dans les $-\frac{1}{n}$-densités, nous devons donc choisir une forme volume locale pour identifier son image avec des fonctions. Afin que les coordonnés impaires obtenues commutent avec $\tilde{\partial}_i$, on choisit $\mathrm{vol}_x = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ comme forme volume locale. Elle est invariante sous les translations, contrairement à vol_g, qui est elle globalement définie. Dans les coordonnées conformes (x^i), on a $g_{ij} = F\eta_{ij}$, d'où $\mathrm{vol}_g = F^{\frac{n}{2}}\mathrm{vol}_x$. Nous posons alors

$$\boxed{\tilde{p}_i = \mathcal{J}^0_{\partial_i} = p_i - \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\Gamma^k_{ij}\xi^j\xi_k, \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}_i = \mathcal{J}^1_{\partial_i}|\mathrm{vol}_x|^{\frac{1}{n}} = F^{-\frac{1}{2}}\xi_i,} \tag{3.46}$$

qui coïncident précisément avec les coordonnées de Darboux de $\mathcal{M}$ données par (3.27). De plus, nous retrouvons ainsi les moments pairs associés aux translations en présence d'un champ gravitationnel, comme déterminé dans [88]. Les deux expressions obtenues peuvent s'expliciter en fonction de F et s'écrivent alots $\tilde{\xi}^i = \eta^{ij}\tilde{\xi}_i = F^{\frac{1}{2}}\xi^i$ et $\tilde{p}_i = p_i + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\xi_i\frac{F_j\xi^j}{F}$.

Ces moments sont égaux à p_i et ξ_i dans le cas plat, et à p_i si on restreint l'action de $\mathrm{conf}(M,g)$ à T^*M. Nous pouvons désormais reformuler pour une variété conformément plate le Théorème 3.1.19 ainsi que la Proposition 3.1.20 dans ce nouveau système de coordonnées. Il permet essentiellement de se ramener au cas plat.

Théorème 3.1.22. *Soit (M,g) une variété conformément plate, et (x^i) des coordonnées conformes. Les fonctions $\tilde{p}_i$ et $\tilde{\xi}^i$, données en (3.46), définissent $(x^i,\tilde{p}_i,\tilde{\xi}^i)_{i=1,\cdots,n}$, qui est un système de coordonnées de Darboux conforme sur $\mathcal{M}$,*

$$\alpha = \tilde{p}_i dx^i + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\eta_{ij}\tilde{\xi}^i d\tilde{\xi}^j \qquad \text{et} \qquad \omega = d\tilde{p}_i \wedge dx^i + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\eta_{ij} d\tilde{\xi}^i \wedge d\tilde{\xi}^j. \tag{3.47}$$

Il permet de se ramener à des expressions analogues à celles du cas plat,

$$\boxed{\tilde{X} = X^i\tilde{\partial}_i + \frac{1}{2}\left((\partial_j X^i)\tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{\xi}^i} - (\partial_i X^j)\tilde{\xi}_j\partial_{\tilde{\xi}_i}\right) - \tilde{p}_j\partial_i X^j\partial_{\tilde{p}_i} - \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\tilde{\xi}_j\tilde{\xi}^k(\partial_i\partial_k X^j)\partial_{\tilde{p}_i},} \tag{3.48}$$

$$\mathcal{J}^0_X = \tilde{p}_i X^i + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}^j(\partial_j X^k) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{J}^1_X = X^i\tilde{\xi}_i. \tag{3.49}$$

Démonstration. Nous avons déjà montrer que $(x^i,\tilde{p}_i,\tilde{\xi}^i)_{i=1,\cdots,n}$ forme un système de coordonnées de Darboux sur $\mathcal{M}$, d'où (3.47), il reste à voir qu'il est conforme.

Soit Φ une transformation conforme sur la carte définissant les coordonnées (x^i). Elle définit de nouvelles coordonnées conformes sur M, $y^i = \Phi^* x^i$, et donc de nouvelles coordonnées sur $\mathcal{M}$, à savoir

$$\left(y^i,\, \mathcal{J}^0_{\frac{\partial}{\partial y^i}},\, |\mathrm{vol}_y|^{\frac{1}{n}}\mathcal{J}^1_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\right).$$

Ces coordonnées sont conformes, car $\mathcal{J}^0_{\frac{\partial}{\partial y^i}} = \mathcal{J}^0_{\Phi_*\frac{\partial}{\partial x^i}} = \Phi^*\tilde{p}_i$, et $|\mathrm{vol}_y|^{\frac{1}{n}}\mathcal{J}^1_{\frac{\partial}{\partial y^i}} = \Phi^*\tilde{\xi}^i$ par équivariance conforme des applications moments $\mathcal{J}^0$ et $\mathcal{J}^1$, et grâce à l'égalité $\Phi^*|\mathrm{vol}_x|^{\frac{1}{n}} = |\mathrm{vol}_{\Phi^* x}|^{\frac{1}{n}}$.

On peut alors calculer les relevés des champs conformes en ces nouvelles variables, α ayant même forme que dans le cas plat, les relevés aussi. Leur expression est donné par la formule générale (3.42) écrite dans le cas plat mais en les nouvelles coordonnées $(x^i,\tilde{p}_i,\tilde{\xi}^i)$, ce qui est bien le résultat annoncé (3.48). De même, les applications moment s'écrivent comme dans le cas plat en coordonnées de Darboux. □

Remarque 3.1.23. *La dépendence en la métrique de la 1-forme α, du relevé (3.41) et des applications moments paires et impaires est ainsi complètement contenue dans les mo-*

ments $\tilde{p}_i$ *et* $\tilde{\xi}^i$*. Contrairement au fibré cotangent ordinaire, ces coordonnées dépendent de la métrique.*

Remarque 3.1.24. *Comme dans le cas général traité au paragraphe précédent, voir la Remarque 3.1.9, les coordonnées de Darboux impaires* $\tilde{\xi}^i$ *forment la base duale d'un repère orthonormé sur* (M, g)*.*

3.2 Éléments de géométrie spinorielle

La géométrie spinorielle est en un sens un raffinement de la géométrie pseudo-riemannienne. Sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) il existe un opérateur canonique fondamental, le laplacien, donné par $\Delta = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$, avec ∇ la connexion de Levi-Civita. Dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$, il décrit la propagation de bosons libres. La description des fermions libres nécessite, elle, l'introduction de l'opérateur de Dirac D, dont le carré est égal au laplacien dans le cas plat. C'est un opérateur différentiel du premier ordre qui s'écrit $D = \gamma^i\partial_i$, où les matrices γ^i doivent satisfaire l'équation

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -2g^{ij}. \tag{3.50}$$

Les solutions γ^i de (3.50) engendrent par définition une algèbre de Clifford. Elle se représente fidèlement sur l'espace des spineurs, qui sont les arguments de l'opérateur de Dirac. La géométrisation de ces structures permet de définir en toute généralité l'opérateur de Dirac et constitue le cadre de la géométrie spinorielle.

Nous introduisons en premier lieu les structures algébriques utiles pour notre étude. Tout d'abord nous définissons l'algèbre de Clifford, qui est une déformation d'une algèbre de Grassmann, constituant son espace de symboles. Une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Clifford fournit alors par exponentiation le revêtement universel du groupe orthogonal, appelé groupe de spin. Il jouera un rôle central pour géométriser le module des spineurs qui est l'espace de représentation irréductible d'une algèbre de Clifford. L'étude de ce module conduit à la classification des algèbres de Clifford complexes.

Sur une variété, la donnée d'une métrique est équivalente à la donnée du fibré principal des repères orthonormés. Si une contrainte topologique est respectée, ce dernier est un quotient du fibré spinoriel, qui permet alors de géométriser les constructions précédentes et de relever la connexion de Levi-Civita aux spineurs. La dérivée de Lie des spineurs, suivant Y. Kosmann [60], peut également être définie, mais uniquement pour les champs de vecteurs Killing-conformes.

L'objet de cette section est de fixer les notations et de rappeler les définitions classiques. Nous renvoyons à la littérature pour les démonstrations standards des résultats qui suivent. Signalons qu'un certain nombre d'entre eux seront démontrés dans la section suivante, par quantification de supervariétés symplectiques.

3.2.1 Structures algébriques

Nous présentons ici les définitions et propriétés utiles pour la suite, concernant les algèbres de Clifford, ainsi que l'algèbre de Lie et le groupe de spin. Les ouvrages classiques sont [22, 24, 4, 65], nous suivrons en partie [10] ainsi que [99]. La présentation de l'algèbre de Clifford comme déformation de l'algèbre de Grassmann est souvent énoncé mais rarement explicitée [77], ce que nous faisons ici.

Algèbre de Clifford

L'algèbre de Clifford est définie via les relations algébriques (3.50).

Définition 3.2.1. *Soit V un espace vectoriel (réel ou complexe), et g une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. L'algèbre de Clifford est définie par* $\mathrm{Cl}(V,g) = \mathcal{T}V/\mathcal{I}$*, où $\mathcal{T}V$ est l'algèbre tensorielle de V et $\mathcal{I}$ l'idéal engendré, pour $u, v \in V$, par les relations*

$$u \otimes v + v \otimes u = -2g(u,v). \tag{3.51}$$

Le plongement canonique de V dans $\mathcal{T}V$ passe au quotient par $\mathcal{I}$ et définit le plongement canonique

$$\gamma : V \hookrightarrow \mathrm{Cl}(V,g). \tag{3.52}$$

L'algèbre tensorielle est $\mathbb{Z}$-graduée et l'idéal $\mathcal{I}$ est engendré par des éléments pairs ; l'algèbre de Clifford admet donc une $\mathbb{Z}_2$-graduation, c'est une superalgèbre. Elle se décompose suivant $\mathrm{Cl}(V,g) = \mathrm{Cl}^+(V,g) \oplus \mathrm{Cl}^-(V,g)$, les éléments pairs étant engendrés par un nombre pair de vecteurs de V et formant une sous-algèbre de $\mathrm{Cl}(V,g)$. L'algèbre de Clifford est ainsi munie également d'une structure de superalgèbre de Lie et $\mathrm{Cl}^+(V,g)$ en est une sous-algèbre de Lie. Précisons alors la notion de module.

Définition 3.2.2. *Un* $\mathrm{Cl}(V,g)$*-module est un module pour la structure de superalgèbre de* $\mathrm{Cl}(V,g)$.

De plus, l'action diagonale du groupe orthogonal $\mathrm{O}(V,g)$ sur $\mathcal{T}V$ préservant $\mathcal{I}$, $\mathrm{Cl}(V,g)$ hérite d'une structure de $\mathrm{O}(V,g)$-module. Si V est un espace vectoriel sur le corps des réels, la structure algébrique de l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(V,g)$ ne dépend que de la signature (p,q) de la métrique g, et donc $\mathrm{Cl}(V,g) \simeq \mathrm{Cl}(p,q)$. L'algèbre de Clifford de l'espace vectoriel complexifié $V \otimes \mathbb{C}$ est $\mathrm{Cl}(V,g) \otimes \mathbb{C}$, que nous notons $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g)$, elle ne dépend que de la dimension de V, et donc $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g) \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}(p+q)$.

Comme l'algèbre tensorielle dont elle provient, l'algèbre de Clifford répond à une propriété universelle. Elle correspond à la résolution de l'équation (3.50).

Proposition 3.2.3. *Soit (V,g) un espace vectoriel muni d'une métrique, $\mathcal{A}$ une algèbre et $\rho : V \to \mathcal{A}$ une application linéaire telle que $\rho(u)\rho(v) + \rho(v)\rho(u) = -2g(u,v)$ pour tout*

$u, v \in V$.
Il existe alors un unique morphisme d'algèbre $\bar{\rho}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Cl}(V,g) \arrow[d, "\bar{\rho}"] \\ V \arrow[ur, hook, "\gamma"] \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{A} \end{tikzcd} \tag{3.53}$$

Ce résultat est central et sera utilisé de nombreuses fois par la suite. Il permet de construire une action de l'algèbre de Clifford à partir de la seule donnée d'une action de V vérifiant l'identité (3.51). Par exemple, V agit sur son algèbre de Grassmann ΛV par $c : v \mapsto c(v) = \varepsilon(v) - \iota(v)$, où $\varepsilon(v)w = v \wedge w$ est le produit extérieur et $\iota(v)w = \langle g(v), w\rangle$ est le produit intérieur. Comme $c(u)c(v) + c(v)c(u) = -2g(u, v)$, cette action se prolonge en une action de $\mathrm{Cl}(V, g)$ sur ΛV.

Définition 3.2.4. *L'application symbole $\sigma : \mathrm{Cl}(V, g) \to \Lambda V$ est définie, pour tout $a \in \mathrm{Cl}(V, g)$, en terme de la structure de $\mathrm{Cl}(V, g)$-module sur ΛV,*

$$\sigma(a) = c(a)1. \tag{3.54}$$

L'appellation "application symbole" sera justifiée par la suite. Elle permet d'écrire l'identité suivante pour tout $v \in V$ et $a \in \mathrm{Cl}(V, g)$,

$$\sigma([v, a]) = -2\iota(v)\sigma(a). \tag{3.55}$$

Pour une forme bilinéaire g nulle, l'algèbre de Clifford “dégénérée” $\mathrm{Cl}(V, g)$ s'identifie à l'algèbre de Grassmann de V. Le cas générique où g est non nulle et non dégénérée peut être vu comme une déformation du cas $g = 0$. Plus précisément, $(\{\cdot\}, 0, V, g, 0)$ est une supervariété symplectique, traité en Exemples 3.1.10, dont la forme symplectique s'écrit $\omega = g_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$ dans un système de coordonnées $(\xi^i)_{i=1,\dots,n}$ dual à une base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de V. Le bivecteur de Poisson s'écrit alors $\pi = g^{ij}\partial_{\xi^i} \otimes \partial_{\xi^j}$. Suivant [77], nous notons par $m_\wedge$ le produit extérieur sur ΛV^*, et par $m_t^* = m_\wedge \circ \exp(-t\pi)$ sa déformation dans la direction de π.

Proposition 3.2.5. *Soit (V, g) un espace vectoriel muni d'une métrique. L'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(V^*, g)$ est isomorphe alors à l'algèbre de Grassmann ΛV^* munie du star-produit m_1^*. Cet isomorphisme de $\mathrm{O}(V, g)$-modules $\mathbb{Z}_2$-gradués est appelé quantification de Weyl et s'écrit, dans la base duale $(\xi^i)_{i=1,\dots,n}$ d'une base orthonormée de V,*

$$\begin{aligned} q_W : \Lambda V^* &\to \mathrm{Cl}(V^*, g) \\ \xi^{i_1} \dots \xi^{i_\kappa} &\mapsto \gamma^{i_1} \dots \gamma^{i_\kappa}, \end{aligned}$$

avec $\gamma^i = \gamma(\xi^i)$*, l'image de* ξ^i *dans* $\mathrm{Cl}(V^*, g)$ *par le plongement canonique.*

Restreint à $\Lambda^0 V^* \oplus \Lambda^1 V^* \oplus \Lambda^2 V^*$*, il induit un morphisme d'algèbres de Lie, et*

$$q_W(\{\xi^i\xi^j, \xi^{i_1}\dots\xi^{i_\kappa}\}) = [\gamma^i\gamma^j, \gamma^{i_1}\dots\gamma^{i_\kappa}]. \tag{3.56}$$

Démonstration. Une base orthonormée $(\xi^i)_{i=1,\dots,n}$ de V^* est un système de coordonnées sur $(\cdot, \Lambda V^*, g)$ tel que $\omega = g_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$, et $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$.

Comme ΛV^* est de dimension finie, m_1^* est bien défini, l'exponentielle se réduisant à une somme finie. Il suffit de calculer alors $m_1^*(\xi^i, \xi^j) + m_1^*(\xi^j, \xi^i)$, on obtient

$$m_1^*(\xi^i, \xi^j) + m_1^*(\xi^j, \xi^i) = -2g^{kl}\partial_{\xi^k}(\xi^i)\partial_{\xi^l}(\xi^j) = -2g^{ij},$$

i.e., les relations de Clifford (3.50). La propriété universelle des algèbres de Clifford assure alors l'existence et l'unicité d'un morphisme d'algèbres q_W entre ΛV^* muni du produit déformé et $\mathrm{Cl}(V^*, g)$. De plus, pour ξ^i, ξ^j des éléments distincts de la base orthonormée de V^*, on a $\xi^i\xi^j = m_1^*(\xi^i, \xi^j)$, et donc $q_W(\xi^i\xi^j) = q_W(\xi^i)q_W(\xi^j) = \gamma^i\gamma^j$. Par récurrence immédiate, pour k éléments distincts $\xi^{i_1}, \dots, \xi^{i_\kappa}$ de la base orthonormée de V^*, on a

$$q_W(\xi^{i_1}\dots\xi^{i_\kappa}) = \gamma^{i_1}\dots\gamma^{i_\kappa}.$$

Générateurs et relations de l'algèbre de Grassmann déformée et de l'algèbre de Clifford se correspondent via q_W, qui est donc un isomorphisme.

L'invariance du crochet de Poisson sous l'action de $\mathrm{O}(V, g)$ assure que q_W est un morphisme d'$\mathrm{O}(V, g)$-modules, et comme il est pair, il préserve la $\mathbb{Z}_2$-graduation.

Soit $u \in \Lambda^0 V^* \oplus \Lambda^1 V^* \oplus \Lambda^2 V^* = E$, montrons que $q_W(\{u, v\}) = [q_W(u), q_W(v)]$. Par définition de q_W, nous avons $[q_W(u), q_W(v)] = q_W(m_*^1(u, v) - m_*^1(v, u))$, et par définition de m_1^*, on a $m_1^*(u, v) - m_1^*(v, u) = \{u, v\} + \pi^2(u, v) - \pi^2(v, u)$. Or, sur E, π^2 est symétrique, d'où le résultat suit. □

La proposition précédente s'applique à V^* et fournit alors un isomorphisme $\Lambda V \simeq \mathrm{Cl}(V, g)$, encore noté q_W. Ce dernier définit une filtration sur $\mathrm{Cl}(V, g)$, via $\mathrm{Cl}^m(V) = q_W(\oplus_{k=0}^m \Lambda^k V)$, qui est compatible avec la structure d'algèbre,

$$\mathrm{Cl}^j(V) \cdot \mathrm{Cl}^k(V) \subset \mathrm{Cl}^{j+k}(V).$$

Cette filtration ne provient pas d'une graduation comme le montrent les relations de Clifford $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2g_{ij}$.

Proposition 3.2.6. *L'espace gradué* $\mathrm{gr}\,\mathrm{Cl}(V, g)$*, associé à la filtration de l'algèbre de Clifford* $\mathrm{Cl}(V, g)$*, est isomorphe à l'algèbre de Grassmann* ΛV*.*

L'application symbole σ et la quantification q_W sont inverses l'une de l'autre et permettent d'associer algèbre filtrée et algèbre graduée associée. Ceci justifie son appellation, par analogie avec l'espace des opérateurs différentiels et son espace de symboles sur une variété. L'algèbre de Grassmann est ainsi l'espace des symboles de l'algèbre de Clifford [42].

Suivant [24], nous introduisons enfin deux antiautomorphismes de l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(V, g)$. Par la propriété universelle, il suffit de les définir sur V. Le premier est noté ^{t} et vaut l'identité sur V, le deuxième est noté * et est égal à moins l'identité sur V. Ainsi on a

$$(\gamma_1 \dots \gamma_k)^t = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(\gamma_1 \dots \gamma_k) \qquad \text{et} \qquad (\gamma_1 \dots \gamma_k)^* = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}(\gamma_1 \dots \gamma_k). \quad (3.57)$$

Ils correspondent à l'opération d'adjonction sur $\mathrm{Cl}(V, g)$ pour une action de V respectivement symétrique et antisymétrique. Dans les deux cas, les produits de deux matrices γ sont antisymétriques.

Groupe et algèbre de Lie spinoriels

Pour un espace vectoriel V réel, l'algèbre de Lie $\mathrm{o}(V, g)$ se plonge naturellement dans l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(V, g)$ et le groupe de Lie associé par exponentiation est le groupe $\mathrm{Spin}(V, g)$, qui est le revêtement universel de $\mathrm{SO}(V, g)$.

Proposition 3.2.7. *L'espace* $\mathrm{Cl}_2(V, g) = q_W(\Lambda^2 V)$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{Cl}(V, g)$, *isomorphe à* $\mathrm{o}(V, g)$ *via l'application* $\tau : \mathrm{Cl}_2(V, g) \to \mathrm{o}(V, g)$, *obtenue par l'action adjointe sur* $q_W(V) \simeq V$ *:*

$$\tau(a) \cdot v = [a, v]. \quad (3.58)$$

Explicitement, une matrice $A \in \mathrm{o}(V, g)$ *est l'image de*

$$\tau^{-1}(A) = \frac{1}{2}\sum_{i<j}(Ae_i, e_j)\gamma_i\gamma_j. \quad (3.59)$$

Démonstration. Il est immédiat que l'action adjointe de $\mathrm{Cl}_2(V, g)$ sur $q_W(V)$ laisse stable $q_W(V) \simeq V$, on obtient donc un morphisme d'algèbres de Lie τ entre $\mathrm{Cl}_2(V, g)$ et $\mathrm{gl}(V)$. Comme $\mathrm{Cl}_2(V, g) = q_W(\Lambda^2 V)$, tout élément de ce sous-espace peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{2}\sum_{i<j} g(Ae_i, e_j)\gamma_i\gamma_j$, pour $A \in \mathrm{o}(V, g)$. Son action adjointe sur e_k coïncide avec l'action de A sur e_k. D'où τ est un isomorphisme et $\tau(\frac{1}{2}\sum_{i<j} g(Ae_i, e_j)\gamma_i\gamma_j) = A$. □

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre, de dimension finie en tant qu'espace vectoriel. Elle admet une structure canonique d'algèbre de Lie. L'exponentielle d'une sous algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ définit alors un groupe de Lie inclus dans $\mathfrak{g}$. Nous utilisons cette procédure générale pour définir le groupe de Spin.

Définition 3.2.8. *Le groupe* $\mathrm{Spin}(V, g)$ *est le groupe de Lie obtenu par exponentiation de* $\mathrm{Cl}_2(V, g)$ *dans l'algèbre de Clifford* $\mathrm{Cl}(V, g)$.

L'action adjointe de $\mathrm{Cl}_2(V,g)$ sur V, antisymétrique pour g, passe à l'exponentielle et fournit une action adjointe du groupe $\mathrm{Spin}(V,g)$ sur V, isométrique relativement à g. L'application τ se relève donc aux groupes de Lie, et pour $h \in \mathrm{Spin}(V,g)$, $v \in V$, on a

$$\tau(h)v = hvh^{-1}. \tag{3.60}$$

Proposition 3.2.9. *Si la dimension de V est supérieure ou égale à 3, le morphisme de groupe de Lie $\tau : \mathrm{Spin}(V,g) \to \mathrm{SO}(V,g)$ est le revêtement universel de $\mathrm{SO}(V,g)$.*

Démonstration. Nous suivons la démonstration fournit dans [10].

Comme τ provient d'un isomorphisme d'algèbres de Lie, et que l'exponentielle est surjective sur $\mathrm{SO}(V,g)$, τ est un morphisme surjectif. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{SO}(V,g))$ étant égal à $\mathbb{Z}_2$, il suffit alors de prouver que le noyau de τ contient 2 éléments qui sont connectés. Soit $h \in \mathrm{Spin}(V,g)$ tel que $\tau(h) = 1$. Comme h est pair, on a $[h,v] = 0$ pour tout $v \in V$, l'équation (3.55) permet de conclure que h est un scalaire.
D'après (3.57), l'antiautomorphisme ^{t} coïncide sur $\mathrm{Cl}_2(V,g)$ avec $a \mapsto -a$, d'où $\exp(a)^t = \exp(-a)$ et donc $h^t h = 1$ pour tout $h \in \mathrm{Spin}(V,g)$. Si h est un scalaire, alors $h = \pm 1$.
De plus, si V est de dimension au moins 3, il existe deux éléments γ^i, γ^j distincts et de même carré, qui vérifient donc $\exp(t\gamma^i\gamma^j) = \cos t + (\sin t)\gamma^i\gamma^j$. On en déduit que $-1 \in \mathrm{Spin}(V,g)$ et est connecté à 1, ce qui achève la preuve. $\square$

Comme le revêtement induit par τ est d'ordre 2, on a la suite exacte courte suivante

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(p,q) \to \mathrm{SO}(p,q) \to 1. \tag{3.61}$$

Il existe d'autres manières d'introduire le groupe de spin, notamment en tant que groupe spinoriel, suivant [99].

Définition 3.2.10. *Un groupe spinoriel $G(V,g)$ est un groupe inclus dans l'algèbre $\mathbb{C}\mathrm{l}^+(V,g) = \mathrm{Cl}^+(V,g) \otimes \mathbb{C}$, et dont l'action adjointe stabilise V et définit un mophisme surjectif $\tau : G(V,g) \to \mathrm{SO}(V,g)$.*

Le plus grand groupe spinoriel est le groupe de Clifford complexe $\Gamma^c(V,g)$, qui est l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}\mathrm{l}^+(V,g)$ qui préservent V par action adjointe. Si on étend * de manière sesquilinéaire, alors le sous-groupe de $\Gamma^c(V,g)$ tel que $h^*h = 1$ est le groupe de spin complexe $\mathrm{Spin}^c(V,g)$. Son intersection avec $\mathrm{Cl}^+(V,g)$ est $\mathrm{Spin}(V,g)$. Ce sont les trois groupes spinoriels dont nous aurons l'usage par la suite. Bien sûr, tout comme $\mathrm{Cl}(V,g)$ ils ne dépendent que de la signature de la métrique, et on notera $G(p,q)$ le groupe spinoriel G d'un espace de signature (p,q).

Module des spineurs

Nous introduisons désormais le module des spineurs qui est l'unique espace de représentation irréductible non trivial pour l'algèbre de Clifford complexe $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g)$. Pour que le module des spineurs soit un module pour la structure de superalgèbre de $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g)$, il faut qu'il soit $\mathbb{Z}_2$-gradué et que l'action de $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g)$ soit paire. Si V est orienté et de dimension paire, une telle graduation est fournie par la *chiralité*.

Définition 3.2.11. *Soit (V,g) un espace vectoriel métrique orienté, de signature (p,q), de dimension paire $p+q=2n$ et de base orthonormée directe $(e_1,\dots,e_{2n})$. La chiralité est alors l'élément de l'algèbre de Clifford $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g)$, défini par*

$$\Gamma = (-1)^p (\mathrm{i})^{\frac{p-q}{2}} \gamma_1 \dots \gamma_{2n}. \tag{3.62}$$

La chiralité ne dépend pas de la base choisie et vérifie $\Gamma^2 = 1$, et pour tout $a \in \mathbb{C}\mathrm{l}^{\pm}(V,g)$, on a $\Gamma a = \pm a \Gamma$.

Théorème 3.2.12. *[24, 99] Soit (V,g) un espace vectoriel orienté muni d'une métrique, de dimension $2n$ ou $2n+1$. Il existe un unique $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g)$-module irréductible S, il est appelé module des spineurs, a pour dimension 2^n, et vérifie :*

1. *si V est de dimension $2n$, $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g) \simeq \mathrm{End}(S)$,*
2. *si V est de dimension $2n+1$, $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g) \simeq \mathrm{End}(S) \oplus \mathrm{End}(S)$ et $\mathbb{C}\mathrm{l}^+(V,g) \simeq \mathrm{End}(S)$.*

Démonstration. Nous donnons la démonstration uniquement dans le cas où la dimension de V est paire. L'existence de S est obtenue par construction. Le module des spineurs est donné par ΛP pour P une polarisation de $V \otimes \mathbb{C}$, i.e. un sous espace isotrope maximal. Les isomorphismes d'algèbres sont construits par la quantification géométrique de $(\{\cdot\}, 0, V^*, g, 0)$ à la section suivante, le résultat est formulé dans la Proposition 3.3.3. L'orientation de V permet alors de définir alors la chiralité, qui munit S d'une $\mathbb{Z}_2$-graduation via ses deux sous-espaces propres, et fait ainsi de $\mathrm{End}(S)$ une superalgèbre. D'où l'existence du module des spineurs.

L'unicité du module des spineurs découle directement de la simplicité de l'algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}(S)$. □

On déduit de ce théorème la classification des algèbres de Clifford complexes [24].

3.2.2 Structures géométriques

Nous allons désormais géométriser les constructions précédentes, i.e. les étendre au cas des variétés. Partant de (M,g) une variété pseudo-riemannienne, il s'agit de construire les fibrés sur M en algèbres de Clifford, groupes de spin et module des spineurs. Si la construction du fibré de Clifford est immédiate, il y a des obstructions topologiques à l'existence du fibré des spineurs. Celui-ci s'obtient comme fibré associé au fibré principal de groupe structural $\Gamma^c(p,q)$, mais nous expliciterons les obstructions uniquement lorsqu'il est associé au fibré principal de groupe structural $\mathrm{Spin}(p,q)$. C'est le cas qui nous intéresse, et dans lequel on se placera par la suite, car on peut alors définir une dérivation covariante des spineurs à partir de la connexion de Levi-Civita associée à g. Enfin, la dérivée de Lie des spineurs n'est définie canoniquement que pour les isométries, il est cependant possible d'étendre de façon ad hoc cette définition au cas des transformations conformes [60], ce qui est précisément ce dont nous avons besoin. Dérivée covariante et dérivée de Lie des spineurs seront construit dans la section suivante grâce à la quantification géométrique du supercotangent de (M,g).

Fibré de Clifford

Sur une variété M, la donnée d'une métrique g, de signature (p,q), est équivalente à une réduction du fibré des repères linéaires au fibré des repères orthonormés $\mathrm{O}_g(M) \to M$, de groupe structural $\mathrm{O}(p,q)$. Si on note $\mathbb{R}^{p,q}$ le $\mathrm{O}(p,q)$-module $\mathbb{R}^{p+q}$ pour la métrique canonique de signature (p,q), on peut définir le fibré tangent comme fibré associé à $\mathrm{O}_g(M)$, à savoir $TM = \mathrm{O}_g(M) \times_{\mathrm{O}(p,q)} \mathbb{R}^{p,q}$. De même en notant $(\mathbb{R}^{p,q})^*$ le dual du module $\mathbb{R}^{p,q}$, on obtient le fibré cotangent $T^*M = \mathrm{O}_g(M) \times_{\mathrm{O}(p,q)} (\mathbb{R}^{p,q})^*$. L'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(p,q)$ de $\mathbb{R}^{p,q}$ étant un $\mathrm{O}(p,q)$-module, on peut construire également le fibré de Clifford de (M,g) comme fibré associé à $\mathrm{O}_g(M)$.

Définition 3.2.13. *Le fibré de Clifford d'une variété pseudo-riemannienne (M,g) de signature (p,q) est $\mathrm{Cl}_g(M) = \mathrm{O}_g(M) \times_{\mathrm{O}(p,q)} \mathrm{Cl}(p,q)$. Sa fibre en $x \in M$ est l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(T_x^*M, g_x^{-1})$.*

La métrique g induit une métrique g_x sur chaque fibre T_xM de l'espace tangent à M. Par dualité, on obtient une métrique, g_x^{-1}, sur les fibres de l'espace cotangent à M. La nature de la fibre en $x \in M$ de $\mathrm{Cl}_g(M)$ découle alors du fait que $\mathrm{Cl} : V \to \mathrm{Cl}(V,g)$ est un morphisme de $\mathrm{O}(V,g)$-module.

La quantification q_W et l'application symbole σ étant équivariantes sous l'action du groupe orthogonal, elles se prolongent aux fibrés et définissent par transport une filtration sur l'algèbre des sections $\Gamma(\mathrm{Cl}_g(M))$.

Proposition 3.2.14. *La quantification $Q_W : \Lambda T^*M \to \mathrm{Cl}_g(M)$ est un isomorphisme induit par $q_W : \Lambda T_x^*M \to \mathrm{Cl}_g(M)$ dans chaque fibre. Elle permet d'associer l'algèbre filtrée $\Gamma(\mathrm{Cl}_g(M))$ à son algèbre graduée $\mathrm{gr}\,\Gamma(\mathrm{Cl}_g(M)) \simeq \Omega(M)$.*

Structure de spin et fibré des spineurs

Définition 3.2.15. *Soit M une variété orientée. Un fibré spinoriel* $\mathsf{S} \to M$ *est un fibré tel que les fibrés en algèbres* $\mathrm{End}(\mathsf{S})$ *et* $\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M)$ *(ou* $\mathbb{C}\mathrm{l}_g^+(M)$*) soient isomorphes, pour M de dimension paire (ou impaire).*

Nous nous plaçons sur une variété orientée, afin que les fibres puissent être $\mathbb{Z}_2$-graduées par la chiralité, et donc des $\mathbb{C}\mathrm{l}(T_x^*M, g_x^{-1})$-modules.

Deux questions se posent alors naturellement : sous quelles conditions un tel fibré existe-t-il ? Est-il alors unique ?

Commençons par donner une construction du fibré des spineurs en termes de fibré associé à un fibré principal $G(M)$ de fibre un groupe spinoriel $G(p,q)$. Pour que le fibré de Clifford agisse sur le fibré des spineurs, il est naturel de demander que ce dernier soit aussi un fibré associé à $G(M)$, pour l'action adjointe. Il suffit pour cela que $G(M)$ se projette sur le fibré des repères orthonormés directs $\mathrm{SO}(M)$. Cela nous mène naturellement à introduire la notion de structure spinorielle sur M.

Définition 3.2.16. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne orientée de signature (p,q), et* $\mathrm{SO}(M)$ *son fibré des repères orthonormés directs. Une structure spinorielle sur M est la donnée (i) d'un fibré principal $G(M)$ au-dessus de M, de groupe structural un groupe spinoriel $G(p,q)$, et (ii) d'un revêtement* $\rho : G(M) \to \mathrm{SO}(M)$*, tel que* $\rho(\phi \cdot h) = \rho(\phi)\tau(h)$*, voir (3.60), pour tout $\phi \in G(M)$ et $h \in G(p,q)$.*

Remarque 3.2.17. *Sauf dans ce paragraphe, une structure spinorielle sera toujours de groupe structural* $\mathrm{Spin}(p,q)$.

Il y a des obstructions topologiques à l'existence d'une structure spinorielle, et une telle structure n'est pas nécessairement unique. Cette question est bien connue dans la littérature et a été résolue initialement par A. Haefliger [48]. La réponse repose sur l'étude des espaces de cohomologie $H^1(M,G)$ qui classifient les classes d'isomorphismes des fibrés principaux sur M de fibre G, combinés avec la suite exacte longue de Bockstein, découlant de (3.61). Ainsi, pour le groupe $\mathrm{Spin}(p,q)$, on a la suite exacte

$$0 \to H^1(M,\mathbb{Z}_2) \to H^1(M,\mathrm{Spin}(p,q)) \xrightarrow{\tilde{\tau}} H^1(M,\mathrm{SO}(p,q)) \to H^2(M,\mathbb{Z}_2). \tag{3.63}$$

Pour qu'un fibré $\mathrm{Spin}(M)$ se projette sur $\mathrm{SO}(M)$, il suffit que $\mathrm{SO}(M)$ soit dans l'image de $H^1(M,\mathrm{Spin}(p,q))$, i.e. que l'image de $\mathrm{SO}(M)$ dans $H^2(M,\mathbb{Z}_2)$, qui est la seconde classe de Stieffel-Whitney, $w_2(M)$, soit nulle. D'autre part, le nombre de structures spinorielles non isomorphes se projetant sur $\mathrm{SO}(M)$ est donné par $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$, le noyau de l'application $\tilde{\tau}$. Enfin, cette discussion est indépendante de la métrique choisie sur la variété M, ce qui reflète la nature purement topologique de l'obstruction à une structure spinorielle unique sur M.

Proposition 3.2.18. *[48] Une variété orientable M a une structure spinorielle de groupe structurale* $\mathrm{Spin}(p,q)$ *si et seulement si sa deuxième classe de Stieffel-Whitney* $w_2(M) \in H^2(M,\mathbb{Z}_2)$ *est nulle. Les différentes structures spinorielles sont alors paramétrées par les éléments de* $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$.

Le fibré des repères spinoriels vérifie alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(M) \arrow[d, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[dr, "\mathrm{Spin}(p,q)"] & \\
\mathrm{SO}(M) \arrow[r, "\mathrm{SO}(p,q)"'] & M.
\end{tikzcd} \tag{3.64}$$

Remarque 3.2.19. *Comme* $\mathrm{Spin}(p,q)$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{Spin}^c(p,q)$ *et* $\Gamma^c(p,q)$*, les conditions d'existence de structures spinorielles modelées sur ces groupes sont plus lâches. La structure spinorielle de groupe* $\Gamma^c(p,q)$ *est la plus générale.*

Revenons à la construction du fibré spinoriel. Nous supposons que M admet une structure spinorielle de groupe $\Gamma^c(p,q)$, caractérisée par le fibré principal $\Gamma^c(M)$. Tout fibré associé à $\mathrm{SO}(M)$ est alors également un fibré associé à $\Gamma^c(M)$, l'action de $\mathrm{SO}(p,q)$ définissant une action de $\Gamma^c(p,q)$ par composition avec le morphisme $\tau : \Gamma^c(p,q) \to \mathrm{SO}(p,q)$, issu de l'action adjointe de $\Gamma^c(p,q)$ sur $\mathbb{R}^{p,q}$, cf Définition 3.2.10. Ainsi le fibré de Clifford est donné par $\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M) = \Gamma^c(M) \times_{\Gamma^c(p,q)} \mathbb{C}\mathrm{l}(p,q)$, l'action de $\Gamma^c(p,q)$ étant alors l'action adjointe. D'autre part, l'action de $\mathbb{C}\mathrm{l}(p,q)$ sur le module des spineurs S induit une action de $\Gamma^c(p,q)$, d'où le fibré associé

$$\boxed{\mathsf{S} = \Gamma^c(M) \times_{\mathrm{Spin}(p,q)} S.} \tag{3.65}$$

Il en découle naturellement $\mathrm{End}(\mathsf{S}) = \Gamma^c(M) \times_{\Gamma^c(p,q)} \mathrm{End}(S)$, où l'action de $\Gamma^c(p,q)$ sur $\mathrm{End}(S)$ est l'action adjointe, d'où l'isomorphisme avec $\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M)$. Le fibré S est donc un fibré spinoriel.

La proposition suivante répond à la question initiale d'existence de fibré spinoriel.

Proposition 3.2.20. *[99] La donnée d'un fibré spinoriel, sur une variété orientée M, est équivalente à la donnée d'une structure spinorielle sur M de groupe structural* $\Gamma^c(p,q)$.

Nous avons montré comment obtenir un fibré spinoriel à partir d'une structure spinorielle sur M donnée par le groupe de Clifford complexe $\Gamma^c(p,q)$, pour la réciproque nous renvoyons à [99].

Remarque 3.2.21. *D'après la proposition 3.3.5 il existe une unique métrique sur le module des spineurs dont l'opération d'adjonction soit *. Pour qu'elle se transporte au fibré des spineurs associé à $G(M)$, il faut que le groupe G soit inclus dans les isométries, et donc dans* $\mathrm{Spin}^c(p,q)$.

Connexion spinorielle et dérivation covariante des spineurs

Nous souhaitons désormais définir la notion de dérivée covariante des sections du fibré spinoriel S. Nous supposons désormais et dans toute la suite qu'elle est définie à partir d'une structure spinorielle de groupe $\mathrm{Spin}(p,q)$, cela permet d'obtenir une unique connexion spinorielle relevant la connexion de Levi-Civita [99]. Deux approches sont envisageables.

La structure spinorielle sur M définit un revêtement $\mathrm{Spin}(M) \to \mathrm{SO}(M)$ qui permet de relever la connexion de Levi-Civita $\omega \in \Omega^1(\mathrm{SO}(M), \mathrm{o}(p,q))$ à $\mathrm{Spin}(M)$. De plus l'algèbre de Lie $\mathrm{spin}(p,q)$ s'identifie à $\mathrm{o}(p,q)$ via (3.59), on obtient donc par image réciproque $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathrm{Spin}(M), \mathrm{spin}(p,q))$. Cette 1-forme définit bien une connexion, l'équivariance par action adjointe passant au relevé. On peut en donner une écriture explicite dans un repère orthonormé $(e_1, \ldots, e_n)$. On a $\omega(e_i) = \omega_i \in \mathrm{o}(p,q)$ qui donne, via (3.59), $\tilde{\omega}(e_i) = \frac{1}{4}\omega_{ij}^k \gamma^j \gamma_k \in \mathrm{spin}(p,q)$. La connexion $\tilde{\omega}$ se transporte alors au fibré spinoriel S et permet d'y définir une dérivée covariante, dite spinorielle,

$$\boxed{\nabla_i = \partial_i + \frac{1}{4}\omega_{ij}^k \gamma^j \gamma_k,} \tag{3.66}$$

où on écrit ∇_i pour ∇_{∂_i}. On vérifie alors qu'elle est compatible avec le produit de Clifford, i.e.,

$$\nabla(\gamma(v)\psi) = \gamma(\nabla v)\psi + \gamma(v)\nabla\psi, \tag{3.67}$$

où ψ est une section spinorielle, ∇v est la dérivée covariante de $v \in \mathrm{Vect}(M)$ pour la connexion de Levi-Civita et $\gamma(v)$ est défini par le plongement canonique (3.52).

L'autre approche, suivant A. Trautman [99], part directement de la dérivée covariante ∇ sur T^*M définie par la connexion de Levi-Civita. Elle s'étend naturellement en une dérivée covariante sur l'algèbre tensorielle de T^*M et descend alors sur le fibré de Clifford car elle préserve la métrique. Comme une dérivée covariante sur $\mathrm{End}(E)$, avec E un fibré vectoriel quelconque sur M, provient toujours d'une dérivée covariante sur E, on en déduit une dérivée covariante sur l'espace des spineurs. Celle-ci peut-être déterminée de manière univoque si le fibré spinoriel est associé à une structure spinorielle de groupe structural $\mathrm{Spin}(p,q)$, mais pas si le groupe structural est plus gros : $\mathrm{Spin}^c(p+q)$ ou $\Gamma^c(p,q)$. Donnons-en une démonstration constructive dans le cas d'une structure spinorielle de groupe $\mathrm{Spin}(p,q)$, inspirée de [96].

Proposition 3.2.22. *[96, 99] Soit* S *le fibré spinoriel associé à* $\mathrm{Spin}(M)$*. Il existe une unique dérivée covariante sur* S *compatible avec la multiplication de Clifford. Elle est de la forme* $\nabla_i = \partial_i + \lambda_i$ *avec, dans un repère quelconque,*

$$\partial_i(\gamma^j) + [\lambda_i, \gamma^j] + \omega_{ik}^j \gamma^k = 0, \tag{3.68}$$

et, en repère orthonormé, $\lambda_i = \frac{1}{4}\omega_{ij}^k \gamma^j \gamma_k$*.*

Démonstration. La connexion de Levi-Civita induit une dérivée covariante sur le fibré de Clifford vérifiant $\nabla_X(\gamma(v)) = \gamma(\nabla_X v)$. Il en découle : $\nabla_i\gamma^j = -\omega^j_{ik}\gamma^k$, dans un repère arbitraire. On peut montrer [99] qu'elle provient d'une dérivée covariante des spineurs. Soit ψ un spineur, on a alors $\nabla_X\psi = X(\psi) + \lambda(X)\psi$, avec λ une connexion spinorielle, i.e. une application linéaire de $\mathrm{Vect}(M)$ dans les endomorphismes de spineurs provenant de la représentation de $\mathrm{spin}(p,q)$. On a en particulier $\nabla_i(\psi) = \partial_i\psi + \lambda_i\psi$, avec, en repères orthonormés, $\lambda_i = a_{ikl}\gamma^k\gamma^l$, et a_i est une matrice antisymétrique. La compatibilité avec la dérivée covariante du fibré de Clifford va nous fournir l'expression de λ_i. D'une part, $\gamma^j\psi$ étant un spineur, on a

$$\nabla_i(\gamma^j\psi) = \partial_i(\gamma^j\psi) + \lambda_i\gamma^j\psi = \partial_i(\gamma^j)\psi + \gamma^j\partial_i(\psi) + \lambda_i\gamma^j\psi;$$

et d'autre part, par compatibilité avec la dérivée covariante du fibré de Clifford,

$$\nabla_i(\gamma^j\psi) = \nabla_i(\gamma^j)\psi + \gamma^j\nabla_i(\psi) = -\omega^j_{ik}\gamma^k\psi + \gamma^j\partial_i(\psi) + \gamma^j\lambda_i(\psi).$$

On en déduit l'équation :

$$\partial_i(\gamma^j) + [\lambda_i, \gamma^j] + \omega^j_{ik}\gamma^k = 0.$$

Prenons le commutateur avec γ_j pour obtenir, $[\gamma_j, [\lambda_i, \gamma^j]] = -[\gamma_j, \omega^j_{ik}\gamma^k + \partial_i(\gamma^j)]$ (sommation sur j). Plaçons nous alors dans un repère orthonormé, de sorte que $\lambda_i = a_{ikl}\gamma^k\gamma^l$ avec $a_{ikl} = -a_{ilk}$. On a donc $[\gamma_j, [\lambda_i, \gamma^j]] = 2a_{ikl}[\gamma_j, -\gamma^k g^{jl} + \gamma^l g^{jk}] = 4a_{ikl}[\gamma^k, \gamma^l] = 8\lambda_i$, par antisymétrie de a_{ikl} en les deux derniers indices. On obtient ainsi,

$$\lambda_i = -\frac{1}{8}[\gamma_j, \omega^j_{ik}\gamma^k + \partial_i\gamma^j]. \tag{3.69}$$

La nullité de $\partial_i\gamma^j$, et l'antisymétrie de ω^j_{ik} en j,k donne alors $\lambda_i = -\frac{1}{4}\omega^j_{ik}\gamma^k\gamma_j$, ce qui permet de retrouver l'expression (3.66) pour la dérivée covariante des spineurs. □

Remarque 3.2.23. *[99] Si le fibré des spineurs est un fibré associé à* $\Gamma(M)$, $\mathrm{Spin}^c(M)$ *ou* $\Gamma^c(M)$*, alors la dérivée covariante ainsi obtenue n'est pas univoque mais déterminée à une fonction additive près, respectivement réelle, unitaire ou complexe. Dans le cas* $\mathrm{Spin}^c(p,q)$*, elle est interprétée comme le potentiel électromagnétique [10].*

Dérivée de Lie des spineurs

La dérivée de Lie des spineurs relativement à une isométrie est définie sans ambiguïté, une isométrie se relevant canoniquement aux fibrés des repères orthonormées et donc à $\mathrm{Spin}(M)$. Par contre, étendre cette notion à toute transformation infinitésimale est non trivial et demande un choix. Le travail de référence est celui de Y. Kosmann [59, 60]. Il est basé sur la formulation de la dérivée de Lie en terme de dérivée covariante et conduit à la formule suivante

$$\boxed{\mathsf{L}_X = \nabla_X + \frac{1}{4}\nabla_{[j}X_{i]}\gamma^i\gamma^j.} \tag{3.70}$$

Elle coïncide avec la dérivée de Lie naturelle si le champ de vecteurs X est une isométrie, et elle définit un morphisme d'algèbres de Lie uniquement pour les champs de vecteurs Killing-conformes.

Différents travaux ont été menés afin de mieux comprendre l'origine géométrique de cette dérivée de Lie, tous redonnant la même formule pour les champs conformes. On peut citer l'article de J-P. Bourguignon et P. Gauduchon [18], où une équivalence naturelle entre structures euclidiennes sur un espace vectoriel est exhibée puis utilisée pour compenser le changement de métrique dû à une transformation non isométrique. La dérivée de Lie alors obtenue diffère de celle de Y. Kosmann pour les champs non conformes. M. Godina et P. Matteucci [45], se plaçant dans le cadre de la théorie générale des dérivations de Lie et des fibrés naturels de jauge, explicitent la forme générale d'une dérivée de Lie sur les spineurs et mettent en évidence le choix effectué par Y. Kosmann. Ce choix est justifié dans [83] par les lois de transformation de courants de Noether associés au lagrangien d'Einstein-Dirac.

Nous déduirons dans la section suivante l'expression (3.70) donnant la dérivée de Lie des spineurs pour des champs conformes par quantification des moments des champs conformes sur le supercotangent de M, en fournissant ainsi une nouvelle origine.

3.3 Quantification géométrique des supercotangents et géométrie spinorielle

La quantification géométrique et la quantification par déformation s'étendent naturellement au cadre des supervariétés symplectiques. Elles vont nous permettre de retrouver des résultats de géométrie spinorielle précédemment exposés et fournir des constructions explicites d'objets spinoriels fondamentaux. Par commodité, nous travaillerons uniquement en dimension paire.

Nous nous intéressons tout d'abord à la supervariété symplectique à un point ΠV. Sa préquantification a été effectuée par B. Kostant [63] et permet de retrouver la structure de $\mathrm{Cl}(V, g)$-module de ΛV. La quantification géométrique de cette supervariété, effectuée par F.F. Voronov [102], ainsi que G. Tuynman [100], permet de construire, étant donné une polarisation, une représentation canonique de l'algèbre de Clifford sur son module des spineurs.

Si une polarisation existe sur le supercotangent d'une variété pseudo-riemannienne (M, g), la quantification géométrique permet alors de construire le fibré des spineurs, dont les sections forment l'espace de représentation de la quantification. Nous obtenons alors la dérivée covariante par quantification des moments de l'action hamiltonienne de $X \in$

Vect(M) sur le fibré cotangent, et la dérivée de Lie par quantification des moments de l'action hamiltonienne de $X \in \mathrm{Vect}(M)$ sur le fibré supercotangent.

3.3.1 De l'algèbre de Grassmann à l'algèbre de Clifford

Une supervariété symplectique à un point est de la forme $(\{\cdot\}, 0, V, \kappa g, 0)$, avec V un espace vectoriel réel muni d'une métrique g, et κ est un paramètre complexe. Sa quantification permet d'obtenir des résultats classiques sur les représentations de $\mathbb{C}\mathrm{l}(V^*, g)$. La quantification géométrique permet ainsi de construire l'espace des spineurs, et elle peut être prolongée par la quantification de Weyl afin d'obtenir une représentation irréductible de toute l'algèbre de Clifford. Cette dernière peut alors s'interpréter comme une déformation de l'algèbre de Grassmann, résultat obtenu directement à la Proposition 3.2.5.

L'algèbre de Clifford comme préquantification de l'algèbre de Grassmann

La supervariété $(\{\cdot\}, 0, V, \kappa g, 0)$ admet pour superalgèbre de fonction l'algèbre de Grassmann ΛV^* et pour forme symplectique $\omega = \kappa g_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$, qui dérive de la 1-forme $\alpha = \kappa g_{ij} \xi^i d\xi^j$. Le crochet de Poisson est donc donné par

$$\{\xi^i, \xi^j\} = -\frac{1}{2\kappa} g^{ij}. \tag{3.71}$$

La forme symplectique $\omega = d\alpha$ étant exacte, le fibré préquantique est trivial et donné par le produit direct $Y = (\{\cdot\}, \Lambda V^*) \times \mathbb{S}^1$ muni de la 1-forme $\tilde{\alpha} = \alpha + \hbar d\theta$, où θ désigne le paramètre angulaire du cercle. L'espace de représentation préquantique est alors

$$\mathcal{H} = \{\Psi \in \mathrm{L}^2(Y) | \partial_\theta \Psi = \mathrm{i}\Psi\}, \tag{3.72}$$

i.e. l'espace des fonctions sur Y équivariantes sous l'action de $\mathbb{S}^1$. Utilisant l'expression (3.31) d'un champ hamiltonien sur $\mathcal{M}$ et la formule (2.12) donnant la préquantification Q, nous obtenons, en particulier, pour $f \in \Lambda V^*$, voir e.g. [63, 53],

$$Q(f) = \frac{(-1)^{|f|}}{2} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}\kappa}\right) g^{ij} \partial_{\xi^j} f \partial_{\xi^i} + f + \frac{(-1)^{|f|}}{2} \xi^i \partial_{\xi^i} f. \tag{3.73}$$

La préquantification des coordonnées grassmanniennes s'écrit donc

$$Q(\xi^i) = \frac{1}{2}\left(\xi^i - g^{ij} \frac{\hbar}{\mathrm{i}\kappa} \partial_{\xi^j}\right). \tag{3.74}$$

Rappelons la propriété fondamentale de la préquantification, qui s'écrit ici $[Q(f), Q(g)] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} Q(\{f, g\})$ pour toutes $f, g \in \Lambda V^*$. Posant $\kappa' = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}\kappa}$, on obtient alors, grâce à (3.71),

$$\left[Q\left(\sqrt{\frac{2}{\kappa'}}\xi^i\right), Q\left(\sqrt{\frac{2}{\kappa'}}\xi^j\right)\right] = -2g^{ij}. \tag{3.75}$$

Ainsi les $Q\left(\sqrt{\frac{2}{\kappa'}}\xi^i\right)$ vérifient les relations de Clifford. Par la propriété universelle des algèbres de Clifford, la préquantification se prolonge à ΛV^* en une représentation de $\mathrm{Cl}(V^*, g)$ sur ΛV^*. On obtient la représentation canonique auto-adjointe via $\xi^i \mapsto Q(2\xi^i)$ si $\kappa = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}$.

Polarisation et fonctions polarisées

L'étape suivante pour parvenir à la quantification géométrique consiste à réduire l'espace de représentation $\mathcal{H}$, obtenu pour la préquantification, grâce à une polarisation complexe de la supervariété symplectique $(\{\cdot\}, 0, V, \kappa g, 0)$, i.e. un sous-espace isotrope maximal de $V \otimes \mathbb{C}$ pour la métrique g. Nous construisons ici une polarisation à partir d'un système de coordonnés de Darboux, puis déterminons l'espace des fonctions polarisées, pour V un espace vectoriel de dimension paire, égale à $2n$.

Soit $(\xi^i)_{i=1,\dots,2n}$ un système de coordonnées de Darboux sur ΠV, i.e. tel que $\omega = \varepsilon_i \delta_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$, où δ est le symbole de Kronecker et $\varepsilon_i = \pm 1$. On pose pour $a = 1, \dots, n$,

$$\zeta^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^a + \sqrt{\frac{-\varepsilon_a}{\varepsilon_{\bar{a}}}}\xi^{\bar{a}}\right), \qquad \text{et} \qquad \overline{\zeta^a} = \frac{\varepsilon_a}{\sqrt{2}}\left(\xi^a - \sqrt{\frac{-\varepsilon_a}{\varepsilon_{\bar{a}}}}\xi^{\bar{a}}\right), \tag{3.76}$$

où $\bar{a} = a + n$ et par convention $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. En prolongeant le crochet de Poisson par $\mathbb{C}$-linéarité, on vérifie que $\{\zeta^a, \zeta^a\} = \{\overline{\zeta^a}, \overline{\zeta^a}\} = 0$ et $\{\zeta^a, \overline{\zeta^b}\} = \delta^{ab}$. Notons P et $\overline{P}$ les sous-espaces vectoriels complexes engendrés par les ζ^a et les $\overline{\zeta^a}$, ces derniers fournissent la décomposition en somme directe $V \otimes \mathbb{C} = P \oplus \overline{P}$. Ainsi P et $\overline{P}$ sont deux polarisations supplémentaires de $V \otimes \mathbb{C}$.

Remarque 3.3.1. *On définit la conjugaison* $\bar{\cdot} : V \otimes \mathbb{C} \to V \otimes \mathbb{C}$ *par* $\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ *et* $\overline{\xi^j} = \varepsilon_j \xi^j$*, c'est donc une involution, qui dépend du système de coordonnées choisi. Au sens de cette conjugaison, les coordonnées* ξ^i *de* V *sont réelles ou imaginaires pures suivant le signe de* ε_i*. La notation* $\overline{\zeta^a}$ *est justifiée par* $\overline{\sqrt{\frac{-\varepsilon_a}{\varepsilon_{\bar{a}}}}}\varepsilon_{\bar{a}} = \varepsilon_a \sqrt{\frac{-\varepsilon_a}{\varepsilon_{\bar{a}}}}$.

Notant $\bar{a} = a + n$, l'inversion du système (3.76) donne

$$\xi^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^a + \varepsilon_a \overline{\zeta^a}\right) \qquad \text{et} \qquad \xi^{\bar{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{-\varepsilon_a}{\varepsilon_{\bar{a}}}}^{-1}\left(\zeta^a - \varepsilon_a \overline{\zeta^a}\right), \tag{3.77}$$

pour tout $a = 1, \dots, n$. Par substitution nous en déduisons les expressions de α et ω, prolongées à $\Pi V \otimes \mathbb{C}$, dans les nouvelles coordonnées $(\zeta^a, \overline{\zeta^a})_{a=1,\ldots,n}$,

$$\alpha = \kappa\delta_{ab}\left(\zeta^a d\overline{\zeta^b} + \overline{\zeta^a} d\zeta^b\right) \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\kappa\delta_{ab} d\zeta^a d\overline{\zeta^b}. \tag{3.78}$$

Remarquons pour la suite que α s'écrit également sous la forme $\alpha = \kappa\delta_{ab}\left(2\overline{\zeta^a}d\zeta^b + d(\zeta^a\overline{\zeta^b})\right)$.

Remarque 3.3.2. *Dans le cas d'une métrique euclidienne, on a* $\zeta^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^a + \mathrm{i}\xi^{\bar{a}})$ *et* $\overline{\zeta^a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^a - \mathrm{i}\xi^{\bar{a}})$*, son conjugué. Elles engendrent respectivement* P *et* $\overline{P}$*, qui définissent une polarisation kälherienne, conduisant aux expressions utilisées dans [102, 10]. Pour une métrique de signature* (n,n)*, on a* $\zeta^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^a + \xi^{\bar{a}})$ *et* $\overline{\zeta^a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^a - \xi^{\bar{a}})$*. La supervariété symplectique* $(\Pi V, \omega)$ *s'identifie alors au cotangent de* P*, ou de* $\overline{P}$*, muni de sa forme symplectique canonique et on retrouve ainsi le cas traité dans [100].*

Soit, désormais, P une polarisation complexe de $(\{\cdot\}, 0, V, \kappa g, 0)$. On peut montrer, à l'inverse, qu'elle admet une base $(\zeta^a)_{a=1,\ldots,n}$ vérifiant (3.78) et le choix de variables conjuguées permet d'en déduire un système de coordonnées de Darboux via (3.77). L'espace des fonctions polarisées est le sous-espace $\mathcal{H}^P$ de $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathcal{H}^P = \{\Psi \in \mathcal{H} \,|\, \forall a = 1, \ldots, n,\ \widetilde{X_{\zeta^a}}\Psi = 0\}, \tag{3.79}$$

où $\widetilde{X_{\zeta^a}}$ est le relèvement horizontal de X_{ζ^a} au fibré préquantique Y, défini par $\langle \widetilde{X_{\zeta^a}}, \tilde{\alpha}\rangle = 0$. Ainsi, $\widetilde{X_{\zeta^a}} = X_{\zeta^a} + f\partial_\theta$ avec $\frac{1}{2}\zeta^a + \hbar f = 0$, et comme une fonction $\Psi \in \mathcal{H}$ est U(1)-équivariante, i.e. $\partial_\theta\Psi = i\Psi$, les fonctions polarisées vérifient donc $-\frac{1}{2\kappa}\partial_{\overline{\zeta^a}}\Psi(\xi,\theta) - \frac{i}{2\hbar}\zeta^a\Psi(\xi,\theta) = 0$. Une fonction $\Psi \in \mathcal{H}^P$ est finalement de la forme

$$\Psi(\xi, \theta) = e^{i\theta} e^{\frac{i}{\hbar}\kappa\delta_{ab}\zeta^a\overline{\zeta^b}}\psi(\zeta). \tag{3.80}$$

La fonction $\psi \in \Lambda P^* = \mathcal{C}^\infty(\Pi P)$ peut s'interpréter comme une fonction holomorphe (impaire) sur $V \otimes \mathbb{C}$ pour g définie positive.

Quantification géométrique et module des spineurs

La quantification géométrique d'une observable est alors donnée par l'action de son flot préquantique (2.16), i.e. son préquantifié, sur l'espace des fonctions polarisées, à condition que ce dernier soit préservé. Toutes les observables ne sont donc pas quantifiables. Nous redonnons la préquantification écrite en fonction des nouvelles variables $\zeta^a, \overline{\zeta^a}$ adaptées à la polarisation, puis exprimons son action sur les fonctions polarisées, ce qui permet de déterminer les fonctions quantifiables et leur quantifié.

Grâce à l'expression (3.78) de la forme symplectique ω, le champ hamiltonien d'une fonction $f \in \Lambda V^* \otimes \mathbb{C}$ a pour expression

$$X_f = \frac{(-1)^{|f|}}{2\kappa}\delta^{ab}(\partial_{\zeta^a} f \partial_{\overline{\zeta^b}} + \partial_{\overline{\zeta^a}} f \partial_{\zeta^b}). \tag{3.81}$$

Notant $\kappa' = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\kappa^{-1}$, le relevé quantique (2.16) s'écrit donc

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}} X_f^* = (-1)^{|f|}\kappa'\delta^{ab}\Big((\partial_{\zeta^a} f)\partial_{\overline{\zeta^b}} + (\partial_{\overline{\zeta^a}} f)\partial_{\zeta^b}\Big) - \mathrm{i}\left(f - \frac{1}{2}\left[\zeta^a\partial_{\zeta^a} f + \overline{\zeta^a}\partial_{\overline{\zeta^a}} f\right]\right)\partial_\theta. \tag{3.82}$$

Nous évaluons alors son action sur une fonction polarisée $\Psi \in \mathcal{H}^P$, dont la forme est donnée en (3.80),

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}} X_f^*\Psi(\xi,\theta) = e^{i\theta} e^{\frac{\delta_{ab}}{2\kappa'}\zeta^a\overline{\zeta^b}}\Big((-1)^{|f|}\kappa'\delta^{ab}\partial_{\overline{\zeta^a}} f\partial_{\zeta^b} + [f - \overline{\zeta^a}\partial_{\overline{\zeta^a}} f]\Big)\psi(\zeta). \tag{3.83}$$

Il en découle la détermination de l'espace $\mathcal{A}$ des fonctions admissibles, qui sont celles dont le relevé quantique préserve l'espace des fonctions polarisées, et qui sont donc quantifiables,

$$\mathcal{A} = \{f(\zeta,\overline{\zeta}) = \overline{\zeta^a} A_a(\zeta) + B(\zeta)\,|\, A_1,\ldots,A_n, B \in \Lambda P^*\}. \tag{3.84}$$

En particulier, les coordonnées de Darboux initiales ξ^i, pour $i = 1,\ldots,2n$, sont quantifiables. En identifiant l'espace des fonctions polarisées avec ΛP^*, et en notant le quantifié (géométrique) de ξ^i par $\widehat{\xi^i}$ $(= \frac{\hbar}{\mathrm{i}} X_{\xi^i}^*)$, nous obtenons pour $a = 1,\ldots,n$,

$$\widehat{\xi^a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^a - \kappa'\varepsilon_a\partial_{\zeta^a}\right), \qquad \text{et} \qquad \widehat{\xi^{\bar{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{-\varepsilon_a}{\varepsilon_{\bar{a}}}}^{-1}(\zeta^a + \kappa'\varepsilon_a\partial_{\zeta^a}). \tag{3.85}$$

La 2-forme ω, prolongée à $\Pi V \otimes \mathbb{C}$ via la formule (3.78), induit une métrique hermitienne définie positive sur P, qui se prolonge canoniquement à ΛP^*. Or, pour cette métrique, l'adjoint de la multiplication par ζ^a est $(\zeta^a)^\star = \partial_{\zeta^a}$. Utilisant les équations (3.85) donnant $\widehat{\xi^i}$, il en découle la relation suivante $\widehat{\xi^i}^\star = -\widehat{\overline{\xi^i}} = -\varepsilon_i\widehat{\xi^i}$, à condition que $\kappa' = 1$, i.e. $\kappa = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$. Par ailleurs, on peut vérifier que, à un facteur près, les $\widehat{\xi^i}$ vérifient les relations de Clifford, voir (3.75), et en particulier $\widehat{\xi^i}\widehat{\xi^i} = -\varepsilon_i$. Par conséquent, ce sont donc des transformations unitaires pour tout i.

Proposition 3.3.3. *Soit P une polarisation de la supervariété symplectique $(\{\cdot\}, 0, V, \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}g, 0)$, de dimension paire $0|2n$. L'espace ΛP^* est muni d'une métrique hermitienne canonique et la quantification géométrique construit une application $V \to \mathrm{U}(\Lambda P^*)$, à valeurs dans le groupe unitaire de ΛP^*. Elle admet un unique prolongement en un isomorphisme d'algèbres, donné en coordonnées de Darboux par,*

$$Q_G : \Lambda V^* \otimes \mathbb{C} \quad \to \quad \mathrm{End}(\Lambda P^*) \tag{3.86}$$

$$\xi^{i_1} \dots \xi^{i_k} \quad \mapsto \quad \widehat{\xi^{i_1}} \dots \widehat{\xi^{i_k}},$$

où ΛV^* *est muni du star-produit le rendant isomorphe à* $\mathrm{Cl}(V^*, g)$ *via* q_W*, défini dans la Proposition 3.2.5. Cela fournit une action canonique de* $\mathbb{C}\mathrm{l}(V^*, g)$ *sur* ΛP^**, donné par*

$$\boxed{\widehat{\xi^i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^i,} \tag{3.87}$$

qui en fait le module des spineurs.

Démonstration. La construction de P et de l'application $V \to \mathrm{U}(\Lambda P^*)$ a déjà été faite. Cette dernière est donnée par $\xi^i \mapsto \widehat{\xi^i}$, c'est la restriction de la préquantification à ΛP^*, et ne dépend donc pas du système de coordonnées de Darboux (ξ^i) considéré.

La relation (3.75) vérifié par les préquantifiés assure que les $\widehat{\xi^i}$ vérifient les relations de Clifford. La propriété universelle des algèbres de Clifford permet alors de prolonger la quantification géométrique de manière unique en un morphisme d'algèbres $\mathbb{C}\mathrm{l}(V^*, g) \to \mathrm{End}(\Lambda P^*)$. Ce dernier est un isomorphisme car ces deux espaces sont de même dimension en tant qu'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, et le noyau du morphisme est réduit à 0. En le composant par l'isomorphisme q_W^{-1}, défini dans la Proposition 3.2.5, on obtient l'isomorphisme voulu. Comme un système de coordonnées de Darboux sur ΠV forme une base orthonormée de V^*, l'expression en composantes de la Proposition 3.2.5 conduit à celle fournit ici. □

Remarque 3.3.4. *Pour obtenir l'isomorphisme* $\mathbb{C}\mathrm{l}(V, g) \simeq \mathrm{End}(\Lambda P^*) \oplus \mathrm{End}(\Lambda P^*)$ *via la quantification géométrique pour un espace* V *de dimension impaire, une méthode consisterait à quantifier un espace de dimension paire contenant* V*, puis à opérer une réduction quantique. Cependant nous ne le développerons pas ici.*

Métrique sur le module des spineurs

Nous introduisons désormais une métrique sur l'espace des spineurs S telle que les γ^i soient hermitiens. Elle nous permettra de définir la notion d'adjonction pour les opérateurs différentiels spinoriels.

La métrique g sur V induit un produit hermitien $(\ ;\ )$ défini positif sur S, et d'après la Proposition 3.3.3, la quantification géométrique réalise les γ_i comme des transformations unitaires de S. Montrons que nous pouvons modifier ce produit hermitien pour qu'elles soient toutes (anti-)hermitiennes.

Proposition 3.3.5. *Soit* (V, g) *un espace vectoriel de dimension paire muni d'une métrique* g *de signature* (p, q)*. Il existe, à multiplication près par un réel, un unique produit hermitien sur l'espace des spineurs associé vérfiant l'une ou l'autre des assertions suivantes :*

- *l'action de V est hermitienne, i.e. l'adjonction coïncide avec l'antiautomorphisme ^{t}, défini en (3.57). Le produit hermitien est alors défini positif (ou négatif) si $q = 0$, et neutre sinon.*
- *l'action de V est antihermitienne, i.e. l'adjonction coïncide avec l'antiautomorphisme *, défini en (3.57). Le produit hermitien est alors défini négatif (ou positif) si $p = 0$, et neutre sinon.*

Démonstration. Tout d'abord, le fait que l'adjonction soit donnée par ^{t} ou *, suivant que l'action de V soit hermitienne ou antihermitienne, découle clairement de la définition de ces deux antiautomorphismes.

Ensuite, l'unicité est claire. L'opération d'adjonction étant déterminée dans les deux cas, l'algèbre de Lie des antihermitiens aussi. Cela fixe le groupe unitaire qui provient d'un unique produit hermitien, à multiplication près par un réel.

Pour l'existence, partons des données de la quantification géométrique : un produit hermitien défini positif $(\ ;\ )$ sur S pour lequel les γ_i sont des transformations unitaires. Supposons que g est de signature (p, q). Notant $\star$ la conjugaison par rapport à ce produit hermitien, on a $\gamma_i^\star = \gamma_i^{-1} = -\varepsilon_i\gamma_i$, avec $\varepsilon_i = 1$ pour $i \leq p$ et $\varepsilon_i = -1$ sinon. Si $p > 0$, nous introduisons alors le nouveau produit hermitien défini par $\langle u, v\rangle = (u;\, \gamma_1 \ldots \gamma_p v)$ pour $u, v \in S$. On a alors

$$\langle \gamma_i u, v\rangle = -\varepsilon_i(u;\, \gamma_i\gamma_1 \ldots \gamma_p v), \tag{3.88}$$

d'où $\langle \gamma_i u, v\rangle = (-1)^p \langle u, \gamma_i v\rangle$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Si p est pair les γ_i sont donc hermitiens pour ce nouveau produit scalaire, et sont antihermitiens sinon. On obtient l'inverse avec le produit hermitien défini par $\langle u, v\rangle = (u;\, \gamma_{p+1} \ldots \gamma_{p+q} v)$.

Il ne reste alors plus qu'à trouver la signature de ces deux produits hermitiens pour chacune des signatures possibles. Or, pour montrer qu'un produit hermitien est neutre, il suffit d'exhiber un élément $A \in \mathrm{End}(S)$ tel que $\langle Au, Av\rangle = -\langle u, v\rangle$. Donc, si il existe i, j tel que $\varepsilon_i\varepsilon_j = -1$, le produit $\gamma_i\gamma_j$ convient. Ainsi, le produit hermitien est neutre sous l'hypothèse p et q sont non nuls. Dans le cas contraire, g est définie positive ou négative. Pour le produit hermitien défini positif initial $(\ ;\ )$, les γ_i sont alors respectivement antihermitiennes et hermitiennes, et le produit hermitien modifié, $\langle u, v\rangle = (u, \gamma_1 \ldots \gamma_{p+q} v)$, est neutre. En effet, les γ étant respectivement hermitiennes et antihermitiennes, on a $\langle \gamma_i u, \gamma_i v\rangle = -\langle u, v\rangle$.

La preuve est ainsi achevée. □

Ce résultat apparaît dans les références [86, 26], et peut être vu comme un cas particulier d'un théorème donné dans l'ouvrage [87] de I.R. Porteous : tout antiautomorphisme d'une algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}(F)$ pour F un espace vectoriel complexe est une opération d'adjonction pour un certain produit hermitien sur V. Ici, nous avons explicité les produits hermitiens sur l'espace des spineurs associés aux antiautomorphismes ^{t} et * de $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g) \simeq \mathrm{End}(S)$.

Corollaire 3.3.6. *En considérant la conjugaison usuelle sur $\Lambda V^* \otimes \mathbb{C}$ et la métrique sur ΛP^* donnée par la Proposition 3.3.5, dont l'adjonction est notée *, on obtient $Q(\overline{f}) = Q(f)^*$.*

3.3.2 Polarisation de $\mathcal{M}$ et fibré des spineurs de (M,g)

Nous avons construit le module des spineurs d'une algèbre de Clifford $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g)$ grâce à la quantification géométrique de la supervariété symplectique $(\{\cdot\}, 0, V, \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}g, 0)$. Appliquée au supercotangent de (M,g) elle permet de géométriser cette construction, menant au fibré des spineurs sur M. Elle consiste essentiellement à unir la quantification géométrique du fibré cotangent de M et d'une supervariété au-dessus d'un point. Par souci de simplicité, nous nous restreindrons aux variétés M de dimension paire. Même dans ce cas, l'existence d'une polarisation sur le supercotangent est non triviale, elle nécessite une N-structure sur (M,g) (cf. Définition 3.3.7), i.e. une structure presque hermitienne dans le cas riemannien. Cela se traduit par une contrainte topologique plus forte que l'existence d'une structure spinorielle sur M, mais définit en contre-partie une structure de supervariété sur le fibré des spineurs.

Préquantification du supercotangent $\mathcal{M}$

Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne de dimension $2n$ et $\mathcal{M}$ son supercotangent muni de sa 2-forme symplectique canonique $\omega = d\alpha$, donnée par (3.23). Puisque ω est exacte, la préquantification est triviale. On introduit l'espace des fonctions U(1)-équivariantes suivant

$$\mathcal{H} = \{\Psi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{M} \times \mathbb{S}^1) | \partial_\theta \Psi = \mathrm{i}\Psi\}, \tag{3.89}$$

où θ le paramètre angulaire du cercle. Utilisant l'expression (3.31) d'un champ hamiltonien sur $\mathcal{M}$ en coordonnées naturelles et la formule (2.12) donnant la préquantification [1], nous obtenons pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned} Q(f) \quad = \quad & \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left[(\partial_{p_i} f)\partial_i^\nabla - \left(\partial_i^\nabla f + \frac{1}{2}R(S)_{ji}\partial_{p_j} f\right)\partial_{p_i}\right] \\ & + (-1)^{|f|} g^{ij}\partial_{\xi^j} f \partial_{\xi^i} + f - p_i\partial_{p_i} f - \frac{1}{2}\xi^i\partial_{\xi^i} f. \end{aligned}$$

La préquantification des coordonnées naturelles est donc donnée par

$$Q(x^i) \quad = \quad -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{p_i} + x^i$$

1. Elle se généralise au cas des supervariétés symplectiques [63, 102, 100].

$$\begin{aligned} Q(p_i) &= \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(\partial_i - \Gamma_{ij}^k \xi^j \partial_{\xi^k}\right) - \frac{\hbar}{2\mathsf{i}} R(S)_{ij} \partial_{p_j} \\ Q(\xi^i) &= \frac{1}{2}\xi^i - g^{ij}\partial_{\xi^j} + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\Gamma_{jk}^i \xi^j \partial_{p_k}. \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi les résultats de M. Rothstein [90]. La préquantification des coordonnées de Darboux $\tilde{p}_i$ et ξ^a données par (3.26) est triviale et s'écrit

$$Q(\tilde{p}_i) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\partial_i, \qquad Q(\tilde{\xi}^a) = \frac{1}{2}\tilde{\xi}^a - \eta^{ab}\partial_{\tilde{\xi}^b}. \tag{3.90}$$

Elle coïncide avec la préquantification des coordonnées de Darboux de T^*M, voir (2.14), et ΠV, voir (3.74).

Polarisation de $\mathcal{M}$

Pour appliquer la quantification géométrique à $\mathcal{M}$, nous avons désormais besoin d'une polarisation sur $\mathcal{M}$, i.e. d'un sous-fibré isotrope maximal de $T^{\mathbb{C}}\mathcal{M}$, au sens de la forme symplectique canonique ω de $\mathcal{M}$. Nous allons l'obtenir à partir de la donnée, en chaque point x, de la polarisation verticale de T^*_xM et d'une polarisation complexe de $\Pi T^{\mathbb{C}}_xM$.

Tout d'abord, la polarisation verticale de T^*M, engendrée par les champs [2] $(\partial_{p_1}, \ldots, \partial_{p_{2n}})$, se relève canoniquement en un sous-fibré isotrope de $T\mathcal{M}$. Pour la compléter en une polarisation de $\mathcal{M}$, il suffit d'avoir une décomposition de l'espace des champs verticaux de $\Pi T^{\mathbb{C}}M$ au-dessus de M en sous-espaces isotropes pour la forme ω. Cela nous est donné par la notion de N-structure sur M, définie par P. Nurowski et A. Trautmann dans [79].

Définition 3.3.7. *[79] Une N-structure sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) de dimension paire supérieure ou égale à 4, est un sous fibré complexe N de $T^{\mathbb{C}}M$ dont les fibres sont isotropes maximales pour l'extension $\mathbb{C}$ linéaire de g.*

Dans le cas riemannien, cette définition est celle d'une structure presque hermitienne [57]. Soit P une N-structure sur (M, g), l'espace tangent vertical $V\Pi P$ de ΠP est un sous-fibré de $T^{\mathbb{C}}(\Pi TM)$ qui se relève canoniquement à $T^{\mathbb{C}}\mathcal{M}$ et complète la polarisation verticale de T^*M pour former une polarisation $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}$. Comme dans le cas non super, traité dans [106], il existe alors localement un système de coordonnées $(x^i, \tilde{p}_i, \zeta^a, \overline{\zeta^a})$ de $T^*M \times_M \Pi T^{\mathbb{C}}M$ tel que,

- $\omega = d\tilde{p}_i \wedge dx^i + \frac{\hbar}{2i}\delta_{ab} d\zeta^a \wedge d\overline{\zeta^b}$,
- (x^i, ζ^a) est un système de coordonnées de ΠP,
- $\mathcal{P}$ est donnée par $(\partial_{p_i}, \partial_{\overline{\zeta^a}})$.

Remarque 3.3.8. *Nous avons vu qu'une N-structure sur (M, g) permet de construire une polarisation $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}$ contenant la polarisation verticale de T^*M. A l'inverse, on peut*

2. Rappelons que $\partial_{p_i} = \partial_{\tilde{p}_i}$, ce sont donc bien des champs en involution pour la forme ω.

prouver, grâce au Théorème de Serre-Swan, que l'on peut extraire une N-structure sur (M, g) à partir d'une polarisation de $\mathcal{M}$ contenant la polarisation verticale de T^*M.

Nous cherchons maintenant le sous-espace $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ des fonctions polarisées de $\mathcal{H}$, défini en (3.89), par rapport à la polarisation $\mathcal{P}$ précédemment introduite. Cette dernière contenant la polarisation canonique de T^*M, les fonctions polarisées sont indépendantes des p, ou $\tilde{p}$, et s'identifient donc à des fonctions dans $\mathrm{L}^2(\Pi T^{\mathbb{C}}M \times \mathbb{S}^1)$, qui sont U(1)-équivariantes et s'annulent sous l'action des $\partial_{\overline{\zeta^a}}$. L'écriture locale de $\Psi \in \mathcal{H}^P$ découle ainsi des expressions des fonctions polarisés pour T^*M et $\Pi T_x^{\mathbb{C}}M$,

$$\Psi(x, p, \zeta, \overline{\zeta}, \theta) = e^{i\theta} e^{\frac{1}{2}\delta_{ab}\zeta^a\overline{\zeta^b}} \psi(x, \zeta). \tag{3.91}$$

En conclusion, l'espace $\mathcal{H}^P$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à la sous-algèbre $\mathsf{F} \simeq \mathcal{C}^\infty(\Pi P)$ des fonctions de la supervariété ΠP, ou encore de l'algèbre des sections $\Gamma(\Lambda P^*)$.

Quantification de $\mathcal{M}$ et fibré des spineurs de M

La préquantification de $\mathcal{M}$ restreinte à l'espace des fonctions polarisées $\mathcal{H}^P$ que nous venons d'obtenir va nous fournir la quantification géométrique de $\mathcal{M}$.

Déterminons l'espace des observables quantifiables. Leur préquantifié doit préserver la polarisation $\mathcal{P}$. Seules les fonctions de degré au plus 1 en $\tilde{p}$ et $\overline{\zeta}$ peuvent donc être quantifiée d'après (2.18) et (3.84). Comme la préquantification commute avec la multiplication par x et ζ, et que $Q(\overline{\zeta^a}\tilde{p}_i)$ ne préserve pas la polarisation, l'espace des observables quantifiables est donné par

$$\mathcal{A} = \{f(x, p, \zeta, \overline{\zeta}) = A^i\tilde{p}_i + \Xi_a\overline{\zeta^a} + B \mid A^1, \ldots, A^{2n}, \Xi_1, \ldots, \Xi_n, B \in \mathsf{F}\}. \tag{3.92}$$

Nous notons $\tilde{\xi}^i$ les coordonnées de Darboux impaires de $\mathcal{M}$ construites via les coordonnées ζ et $\overline{\zeta}$ grâce au système (3.77). L'expression de $\mathcal{A}$ montre que ces dernières sont quantifiables, tout comme sur une supervariété à un point, et leur quantifié est le même, $\widehat{\tilde{\xi}^i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^i$, voir (3.85).

La propriété universelle des algèbres de Clifford permet d'étendre la quantification géométrique, comme dans la Proposition 3.3.3, aux polynômes de degré 0 en p et arbitraire en ξ. L'espace total des observables quantifiables est donc $\mathcal{S}_0[\xi] \oplus \mathcal{S}_1$, et l'on peut se référer à (2.36) pour la définition de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_0[\xi] = \mathcal{C}^\infty(\Pi TM)$. Le théorème suivant découle de ce qui précède.

Théorème 3.3.9. *Soit $\mathcal{M}$ le supercotangent de (M, g), et P un sous-fibré de $T^{\mathbb{C}}M$ définissant une N-structure sur (M, g), de sorte que $\mathcal{M}$ admette une polarisation formée de la polarisation verticale de T^*M et de la distribution $V\Pi P$. La variété M admet alors un* *fibré spinoriel* S *donné par*

$$\mathsf{S} = \Lambda P^*, \tag{3.93}$$

dont l'espace des sections spinorielles s'identifie à l'espace des fonctions polarisées de $\mathcal{M}$*, noté* $\mathsf{F} = \mathcal{C}^\infty(\Pi P) \simeq \Gamma(\Lambda P^*)$*. La quantification géométrique de* $\mathcal{M}$ *se prolonge alors en l'application* $Q : \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_0[\xi] \to \mathrm{End}(\mathsf{F})$*, qui s'écrit en coordonnées de Darboux,*

$$P^i(x)\tilde{p}_i + P_{j_1\dots j_\kappa}(x)\tilde{\xi}^{j_1}\dots\tilde{\xi}^{j_\kappa} \mapsto P^i(x)\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\partial_i + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\kappa P_{j_1\dots j_\kappa}(x)\gamma^{j_1}\dots\gamma^{j_\kappa}. \tag{3.94}$$

C'est un morphisme d'algèbres de Lie si on se restreint aux fonctions de degré au plus 2 *en* ξ*, et un isomorphisme de* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-module si on se restreint aux fonctions de degrés* 0 *en* p*.*

Remarque 3.3.10. *C'est la structure d'algèbre sur* F *qui permet de construire le fibré des spineurs comme un fibré extérieur ou une supervariété et c'est précisément cette structure qui manque pour le faire dans le cas général. Son existence se traduit par des contraintes topologiques supplémentaires, qui traduisent le passage d'une structure spinorielle à une* N*-structure.*

3.3.3 De l'application moment conforme à la dérivée de Lie des spineurs

Nous supposons dans ce paragraphe que M admet une N-structure, et donc un fibré spinoriel noté S, pour pouvoir appliquer la quantification géométrique. Elle nous permet de construire la dérivée covariante des spineurs en toute généralité, ainsi que la dérivée de Lie des spineurs des champs conformes sur une variété M conformément plate. Ces deux résultats sont des conséquences du théorème précédent.

L'application moment J, pour l'action canonique de $\mathrm{Vect}(M)$ sur T^*M, est donné par $J_X = p_i X^i$ pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$; cf Proposition 2.1.7. De plus, la projection en tant que fibré $\mathcal{M} \to T^*M$ définit un plongement canonique $\mathcal{C}^\infty(T^*M) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Nous notons encore J sa composition avec ce plongement.

Corollaire 3.3.11. *Soit* X *un champ de vecteurs de* M*. La dérivée covariante spinorielle de* X *est fournie par la quantification géométrique de son application moment sur* T^*M*, i.e.*

$$\boxed{Q(J_X) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\nabla_X,} \tag{3.95}$$

où $J_X = p_i X^i$*. Elle s'écrit donc explicitement*

$$\nabla_X = X^i\partial_i + \frac{1}{4}X^i\omega^a_{bi}\gamma^b\gamma_a \tag{3.96}$$

Ce corollaire découle directement du théorème précédent, en utilisant le changement de coordonnées (3.26), donné par $\tilde{p}_i = p_i + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\omega^a_{bi}\tilde{\xi}_a\tilde{\xi}^b$ et qui permet de passer des coordonnées de Darboux aux coordonnées naturelles.

Soit (M, g) une variété conformément plate et X un champ de vecteurs Killing-conforme sur M. La Proposition 3.1.20 assure que l'application moment $X \mapsto \mathcal{J}^0_X$ est un morphisme d'algèbre de Lie à valeurs dans $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_0[\xi]$. Plus précisément $\mathcal{J}^0_X$ est de degré au plus 2 en ξ, la quantification géométrique est donc également un morphisme d'algèbres de Lie. La composition de ces deux morphismes conduit à la dérivée de Lie des spineurs.

Corollaire 3.3.12. *Soit (M, g) une variété conformément plate, et $\mathcal{J}^0$ l'application moment paire de $\mathcal{M}$. Le morphisme d'algèbre de Lie*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{conf}(M, g) & \to & \mathrm{End}(\mathsf{F}) \\ X & \mapsto & Q(\mathcal{J}^0_X), \end{array}$$

fournit la dérivée de Lie des spineurs des champs de vecteurs Killing-conformes,

$$\boxed{Q(\mathcal{J}^0_X) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \mathsf{L}_X.} \tag{3.97}$$

Comme $\mathcal{J}^0_X = p_i X^i + \kappa \xi^j \xi^k (\partial_{[k} X_{j]}) = \tilde{p}_i X^i + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}} \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}^j (\partial_j X^k)$, son expression en coordonnées est donc donnée par

$$\mathsf{L}_X = X^i \nabla_i + \frac{1}{4} \partial_{[j} X_{i]} \gamma^i \gamma^j = X^i \partial_i + \frac{1}{8} (\partial_j X^k)(\gamma_k \gamma^j - \gamma^j \gamma_k), \tag{3.98}$$

où ∇_i désigne la dérivée covariante spinorielle obtenue en (3.66).

3.4 Les opérateurs différentiels spinoriels et leurs symboles

Nous introduisons désormais l'espace des opérateurs différentiels agissant sur les sections du fibré spinoriel S de M. On raffine alors l'espace des symboles usuel en un espace bigradué grâce à l'algèbre de Grassmann, espace des symboles de l'algèbre de Clifford. Ce nouvel espace des symboles est un sous espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, son introduction remonte au travail d'E. Getzler [42]. Localement, l'ordre normal permet d'identifier l'espace des opérateurs différentiels spinoriels avec son espace de symboles bigradué. Nous travaillons, en fait, avec des espaces de densités tensorielles et non de fonctions, ce qui se traduit simplement par la tensorialisation, avec les espaces $\mathcal{F}^\lambda$ et $\mathcal{F}^\mu$ définis au paragraphe 2.2.1, des espaces de départ et arrivée des opérateurs différentiels, ainsi que par la tensorialisation avec $\mathcal{F}^\delta$ de l'espace des symboles, où $\delta = \mu - \lambda$ est appelé le "shift".

3.4.1 L'espace des opérateurs différentiels spinoriels $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$

Commençons par donner la définition générale de l'espace des opérateurs différentiels entre deux fibrés vectoriels E et F sur une variété M. Elle repose sur celle de $\mathcal{D}(M)$, l'espace des opérateurs différentiels sur M à valeurs scalaires, donné dans le paragraphe 2.2.1.

Définition 3.4.1. *Soit* $\mathrm{End}(E,F)$ *l'espace des morphismes entre* E *et* F*, deux fibrés vectoriels au-dessus de* M*. L'espace des opérateurs différentiels, envoyant les sections de* E *sur les sections de* F*, est la sous-algèbre des morphismes linéaires de sections* $\mathrm{End}(\Gamma(E),\Gamma(F))$*, caractérisée par* $\mathcal{D}(E,F)=\mathcal{D}(M)\otimes\Gamma(\mathrm{End}(E,F))$.

L'algèbre $\mathcal{D}(E,F)$ hérite naturellement de la filtration de $\mathcal{D}(M)$ via $\mathcal{D}_k(E,F) = \mathcal{D}_k(M)\otimes\Gamma(\mathrm{End}(E,F))$. De manière équivalente, c'est la sous algèbre de $\mathcal{D}(E,F)$ annulée par $(\mathrm{ad}f)^k$, avec $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$. Comme tout algèbre filtrée, elle admet une algèbre graduée associée, appelée espace des symboles. Il est donné par $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}(E,f)=\mathcal{S}(M)\otimes\Gamma(\mathrm{End}(E,F))$, où $\mathcal{S}(M)$ est l'espace des symboles de $\mathcal{D}(M)$.

Cette définition se particularise au fibré spinoriel S de (M,g). Plus précisément, on choisit les fibrés $\mathsf{S}^\lambda=\mathsf{S}\otimes|\Lambda T^*_{\mathbb{C}}M|^{\otimes\lambda}$ et $\mathsf{S}^\mu=\mathsf{S}\otimes|\Lambda T^*_{\mathbb{C}}M|^{\otimes\mu}$, avec $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Leurs espaces de sections sont notés $\mathsf{F}^\lambda=\Gamma(\mathsf{S})\otimes\mathcal{F}^\lambda$ et $\mathsf{F}^\mu=\Gamma(\mathsf{S})\otimes\mathcal{F}^\mu$, avec $\mathcal{F}^\lambda$ et $\mathcal{F}^\mu$ les espaces des λ et μ-densités sur M. Les éléments de F^λ et F^μ sont appelés sections spinorielles de poids λ et μ. L'espace des opérateurs différentiels entre ces deux fibrés sera noté simplement $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ et s'identifie à

$$\mathsf{D}^{\lambda,\mu}\simeq\mathcal{D}^{\lambda,\mu}\otimes\Gamma(\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M)). \tag{3.99}$$

En effet, rappelons que $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ est l'espace des opérateurs différentiels entre λ et μ-densités sur M, et que par définition $\mathrm{End}(\mathsf{S})\simeq\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M)$. L'espace $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ admet ainsi une filtration induite par celle de $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$, qui s'écrit explicitement $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}_0\subset\mathsf{D}^{\lambda,\mu}_1\subset\ldots$, où $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}_k=\mathcal{D}^{\lambda,\mu}_k\otimes\Gamma(\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M))$. Ainsi on a $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}_0=\Gamma(\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M))$.

On note F^λ_c les sections spinorielles de poids λ à support compact. Grâce au produit scalaire sur l'espace des spineurs défini dans la Proposition 3.3.5, on peut définir, si $\lambda+\mu=1$, une forme bilinéaire sur $\mathsf{F}^\lambda_c\otimes\mathsf{F}^\mu_c$ par

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{F}^\lambda_c\otimes\mathsf{F}^\mu_c & \to & \mathcal{C}^\infty(M)\otimes\mathbb{C}\\ (\phi,\psi) & \mapsto & \displaystyle\int_M\left\langle\bar\phi(x),\psi(x)\right\rangle_x,\end{array} \tag{3.100}$$

où $\left\langle\bar\phi(x),\psi(x)\right\rangle_x$ est le produit scalaire entre les spineurs $\bar\phi(x)$ et $\psi(x)$ défini par la Proposition 3.3.5. On intègre donc sur M un élément de $\mathcal{F}^1$, i.e. une forme volume, l'intégration est donc bien définie. Nous pouvons alors donnée la définition de l'adjonction.

Définition 3.4.2. *Soit* $\lambda+\mu=1$*. L'adjoint d'un opérateur différentiel* $A\in\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ *est* *l'opérateur différentiel* $A^* \in \mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, *tel que pour tout* $\phi, \psi \in \mathsf{F}^\lambda_c$, *on a*

$$(A\phi, \psi) = (\phi, A\psi)\,. \tag{3.101}$$

D'après la définition du produit scalaire des spineurs, l'adjoint pour les opérateurs différentiel d'ordre 0 est donnée par la conjugaison complexe composée avec l'antiautomorphisme ^{t} de l'algèbre de Clifford, définie en (3.57). Ainsi $A = A_{j_1\dots j_\kappa}(x)\gamma^{j_1}\dots\gamma^{j_\kappa} \in \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_0$ admet pour opérateur adjoint,

$$A^* = \overline{A_{j_1\dots j_\kappa}}(x)(\gamma^{j_1}\dots\gamma^{j_\kappa})^t = (-1)^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}} A_{j_1\dots j_\kappa}(x)(\gamma^{j_1}\dots\gamma^{j_\kappa}). \tag{3.102}$$

On en déduit que γ^i est symétrique, ainsi que $S^{ij} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\gamma^i\gamma^j$. D'autre part, comme pour les opérateurs différentiels scalaires, les opérateurs $\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_j$ et leurs produits sont également symétriques (i.e. formellement auto-adjoints).

3.4.2 L'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$

L'espace des symboles de $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ étant $\mathcal{S}^\delta = \mathcal{S}(M)\otimes\mathcal{F}^\delta$, celui de l'algèbre filtrée $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ est donc l'espace gradué $\mathcal{S}^\delta\otimes\Gamma(\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M))$. Or, d'après la Proposition 3.2.14, l'algèbre $\Gamma(\mathbb{C}\mathrm{l}_g(M))$ est également filtrée et admet pour algèbre graduée associée $\Omega_{\mathbb{C}}(M)$, l'espace complexifié des formes différentielles sur M. On utilise l'identification $\Omega_{\mathbb{C}}(M) \simeq \mathcal{C}^\infty(\Pi TM)$ pour écrire l'espace des symboles total, noté $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, sous la forme

$$\mathcal{S}^\delta[\xi] = \mathcal{S}^\delta \otimes \mathcal{C}^\infty(\Pi TM). \tag{3.103}$$

Rappelons que, pour un poids δ nul, l'espace $\mathcal{S}^\delta$ est l'espace des fonctions sur T^*M polynomiales en les variables fibrées, qui est canoniquement isomorphe, cf (2.35), à l'espace $\mathcal{S}TM$ des tenseurs contravariants symétriques sur M. Ainsi, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ est le sous espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\otimes\mathcal{F}^\delta$, constitué des densités dépendant polynomialement de toutes les variables fibrées.

Définition 3.4.3. *Soit* $\mathcal{M}$ *le supercotangent de* M, *de coordonnées naturelles* (x^i, p_i, ξ^i), *les* p_i *et les* ξ^i *étant les coordonnées fibrées. L'espace des symboles sur* M *est l'espace des sections des tenseurs de poids* δ, $\Gamma(\mathcal{S}TM\otimes\Lambda T^*M)\otimes\mathcal{F}^\delta$. *Il s'identifie à* $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, *le sous-espace des densités polynomiales en les fibres de* $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\otimes\mathcal{F}^\delta$, *via*

$$\begin{aligned} \mathsf{ev}_{can} : \Gamma(\mathcal{S}TM\otimes\Lambda T^*M)\otimes\mathcal{F}^\delta &\;\to\; \mathcal{S}^\delta[\xi] \\ P^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_\kappa}(x)\,dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_\kappa}\otimes\partial_{i_1}\odot\dots\odot\partial_{i_k} &\;\mapsto\; P^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_\kappa}(x)\,\xi^{j_1}\dots\xi^{j_\kappa}\,p_{i_1}\dots p_{i_k}. \end{aligned} \tag{3.104}$$

La correspondance entre dx^i et ξ^i d'une part, et ∂_i et p_i d'autre part, est canonique. En effet, en un point (x,p,ξ) de $\mathcal{M}$, avec $p \in T^*_xM$ et $\xi \in \Pi T_xM$, on a $p_i = \langle\partial_i, p\rangle$ et

$\xi^i = \langle \xi, dx^i \rangle$. La bigraduation de l'algèbre tensorielle $\mathcal{S}TM \otimes \Lambda T^*M$ se transporte ainsi à $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et correspond aux degrés en les variables fibrées p_i et ξ^i. Le sous-espace des symboles de degré k en les variables p et κ en les variables ξ sera noté $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$; d'où, pour une variété M de dimension n,

$$\mathcal{S}^\delta[\xi] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{\kappa=0}^{n} \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]. \tag{3.105}$$

Nous notons par $\mathcal{S}^\delta_k[\xi] = \bigoplus_{\kappa=0}^n \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$ l'espace des symboles homogènes de degré k en les p_i, $\mathcal{S}^\delta_{\leq k}[\xi] = \bigoplus_{i=0}^k \mathcal{S}^\delta_i[\xi]$ l'espace des symboles de degré inférieur ou égal à k, et par $\mathcal{S}_{*,\kappa}[\xi] = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathcal{S}_{k,\kappa}[\xi]$ l'espace des symboles de degré κ en les ξ^i.

Comme $\mathcal{M}$ est également muni d'une 1-forme paire α et d'une 1-forme impaire $\tilde{\beta}$, on peut construire un autre isomorphisme entre espace tensoriel et espace des symboles. Plus précisément, on introduit l'espace des sections de tenseurs

$$\mathcal{T}^\delta = \bigoplus_{\kappa=0}^{n} \Gamma\left(\mathcal{S}TM \otimes \Lambda^\kappa T^*M\right) \otimes \mathcal{F}^{\delta - \frac{\kappa}{n}}. \tag{3.106}$$

Via l'isomorphisme donné par (3.104), il s'identifie à

$$\mathcal{T}^\delta \simeq \bigoplus_{\kappa=0}^{n} \mathcal{S}^{\delta-\frac{\kappa}{n}}_{*,\kappa}[\xi], \tag{3.107}$$

On peut alors définir l'isomorphisme linéaire suivant, qui dépend de la métrique g,

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ev}_g : \mathcal{T}^\delta & \to & \mathcal{S}^\delta[\xi] \\ P^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\kappa}(x)\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\kappa} \otimes \partial_{i_1} \odot \ldots \odot \partial_{i_k} & \mapsto & P^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\kappa}(x)\, \tilde{\xi}^{j_1} \ldots \tilde{\xi}^{j_\kappa} \tilde{p}_{i_1} \ldots \tilde{p}_{i_k}, \end{array} \tag{3.108}$$

où les densités tensorielles sont identifiées à des fonctions via la forme volume locale $\mathrm{vol}_x = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, associée au système de coordonnées. Rappelons que $\tilde{p}_i$ et $\tilde{\xi}^i$ sont les moments pairs et impairs des translations, ils sont explicités en (3.46). Ainsi $\tilde{p}_i$ correspond canoniquement à ∂_i via sa définition $\langle \partial_i, \alpha \rangle = \tilde{p}_i$ fournie dans la Proposition 3.1.20, et $\tilde{\xi}^i$ correspond canoniquement à dx^i par multiplication de ξ^i avec la densité $|\mathrm{vol}_g|^{\frac{1}{n}}$ définie par la métrique g, ce qui est exprimé par la formule $= \xi^i |\mathrm{vol}_g|^{\frac{1}{n}} = \tilde{\xi}^i |\mathrm{vol}_x|^{\frac{1}{n}}$.

L'espace $\mathcal{T}$ est également bigradué, et sa bigraduation se transporte alors à l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$; elle correspond aux degrés en $\tilde{p}$ et $\tilde{\xi}$. S'il n'y a pas de confusion possible nous noterons encore $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$ l'espace des symboles de degrés k en $\tilde{p}$ et κ en $\tilde{\xi}$.

D'après (3.46), les deux bigraduations ainsi construites sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ définissent la même filtration paire, i.e. associée au degré en p et $\tilde{p}$ respectivement. Le symbole principal associé à la filtration paire, qui est le terme de plus haut degré en p ou $\tilde{p}$, est donc identique pour les deux bigraduations. De plus, les espaces de symboles, de degré nul en p et $\tilde{p}$ respectivement, coïncident, ainsi que leur graduation impaire.

3.4.3 L'ordre normal

Le Théorème 3.3.9 montre que la quantification géométrique définit un plongement de $\mathcal{S}_1^\delta \oplus \mathcal{S}_0^\delta[\xi]$ dans $\mathsf{D}_1^{\lambda,\mu}$. Or, les variables $\tilde{p}_j$ ont pour quantifiés les opérateurs différentiels $\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_j$, qui commutent. On peut donc prolonger localement cet isomorphisme par propriété universelle de l'algèbre symétrique, pour obtenir l'ordre normal. Celui-ci peut s'écrire en fait localement sur toute variété. Pour un ouvert U de M, on note $\mathcal{S}^\delta(U)[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}(U)$ les espaces des opérateurs différentiels spinoriels et de leurs symboles restreints à U.

Définition 3.4.4. *Soit (M,g) une variété spinorielle et (x^i) un système de coordonnées sur un ouvert U ; soit $(x^i, \tilde{p}_i, \tilde{\xi}^i)$ le système de coordonnées de Darboux associé sur $\mathcal{M}$, définies par (3.26). L'ordre normal s'écrit alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_U : \mathcal{S}^\delta(U)[\xi] &\rightarrow \mathsf{D}^{\lambda,\mu}(U) \\ P^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\kappa}(x)\, \tilde{\xi}^{j_1}\ldots\tilde{\xi}^{j_\kappa}\, \tilde{p}_{i_1}\ldots\tilde{p}_{i_k} &\mapsto P^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\kappa}(x)\frac{\gamma^{j_1}}{\sqrt{2}}\ldots\frac{\gamma^{j_\kappa}}{\sqrt{2}}\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{i_1}\ldots\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{i_k}. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Remarquons que $\mathcal{N}_U(p_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla_i$. L'ordre normal dépend du système de coordonnées choisi sur l'ouvert U, sauf sur $\mathcal{S}_1^\delta \oplus \mathcal{S}_0^\delta[\xi]$.

Pour que l'ordre normal vérifie $\mathcal{N}(\bar{P}) = \mathcal{N}(P)^*$, pour l'adjonction donnée par la Définition 3.4.2, il suffit de poser

$$\overline{P^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\kappa}(x)\, \tilde{\xi}^{j_1}\ldots\tilde{\xi}^{j_\kappa}\, \tilde{p}_{i_1}\ldots\tilde{p}_{i_k}} = \overline{P^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\kappa}}(x)\, \tilde{\xi}^{j_\kappa}\ldots\tilde{\xi}^{j_1}\, \tilde{p}_{i_1}\ldots\tilde{p}_{i_k}. \tag{3.110}$$

Ainsi les composantes du spin $S^{ij} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\xi^i\xi^j$ sont réelles.

Chapitre 4

La quantification conformément équivariante des supercotangents

Dans ce chapitre nous donnons les résultats principaux sur la quantification conformément équivariante des supercotangents de variétés conformément plates (M, g) admettant une structure spinorielle. Les stratégies de preuve sont les mêmes que celles exposées dans la section 2.3, pour la quantification du fibré cotangent d'une variété conformément plate. Leur adaptation au cas des supercotangents est, cependant, de difficulté très variable.

Partant d'une variété spinorielle et conformément plate (M, g), de signature (p, q), on peut construire une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ des fonctions du supercotangent via l'action hamiltonienne des champs de vecteurs Killing-conformes, défini par le relevé hamiltonien $X \mapsto \tilde{X}$ du Théorème 3.1.19. D'autre part, l'espace des sections F du fibré spinoriel S au-dessus de M admet également une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module gouvernée par la dérivée de Lie des spineurs (3.98), définie pour les champs de vecteurs Killing-conformes.

Nous allons en déduire une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module sur l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et sur l'espace des opérateurs différentiels spinoriels $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, donnée respectivement par la dérivée de Lie L^δ_X, cf (4.2), et par la dérivée de Lie $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$, cf (4.7), pour $X \in \mathrm{conf}(M, g)$.

Une quantification conformément équivariante est un isomorphisme de $\mathrm{o}(p + 1, q + 1)$-modules, qui préserve le symbole principal. Nous construisons un tel isomorphisme sur les symboles de degré 0 et 1 et prouvons l'existence et l'unicité de cet isomorphisme en toute généralité pour des valeurs génériques de δ.

Plus précisément, nous nous plaçons dans une carte d'un atlas conforme de M, pour travailler en coordonnées de Darboux conformes sur le supercotangent, définies en (3.46). Cela permet d'utiliser l'identification entre symboles et opérateurs donnée par l'ordre normal (3.109), et ainsi de transporter l'action quantique $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$ sur l'espace des symboles. Nous donnons alors les expressions en ces coordonnées des actions classiques L^δ_X et quantiques $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$ des champs de vecteurs conformes de M sur les symboles. Elles ne dépendent pas explicitement de la métrique [1] ; ainsi il est équivalent de travailler localement en coordonnées de Darboux conformes ou sur le supercotangent de $\mathbb{R}^n$. Comme les deux actions coïncident pour les similitudes, bien définies sur $\mathbb{R}^n$, nous cherchons donc le commutant aux similitudes dans $\mathrm{End}(\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi])$.

Pour en déduire la quantification conformément équivariante des symboles de degré 0 il suffit que le symbole principal pour la filtration impaire soit préserver. Dans toute la suite nous imposons par contre la préservation du symbole principal pour la seule filtration paire. Cela nous permet d'obtenir la forme des quantifications équivariantes sous les similitudes des symboles $\mathcal{S}_1^\delta[\xi]$, de degré 1 en les impulsions. Il reste alors à exprimer les conditions d'équivariance sous les inversions infinitésimales pour fixer les coefficients restants et obtenir l'unique quantification conformément équivariante des symboles de degré 1, pour $\delta \neq \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n+1}{n}$. Les autres cas sont dits résonants et conduisent, pour $\delta = \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}$, à une famille de quantifications conformément équivariantes, et pour $\delta = \frac{2}{n}, \ldots, 1$ à la non existence d'une quantification conformément équivariante de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$. Enfin, la quantification conformément équivariante vérifie dans le cas générique l'axiome de réalité $Q(\bar{f}) = Q(f)^*$, correspondant à la condition de Dirac (2.10) pour une quantification, et pour les deux résonances $\delta = \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}$ il existe une unique quantification conformément équivariante qui satisfasse cet axiome.

Nous avons ainsi une expression explicite de la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : (\mathcal{S}_1^\delta[\xi], L^\delta) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$ en coordonnées de Darboux conformes de $\mathcal{M}$. Nous aimerions en avoir une formulation covariante en termes des dérivées covariantes des spineurs et des symboles, déduites de la connexion de Levi-Civita. Pour cela nous introduisons une quantification conformément équivariante auxiliaire $\mathcal{Q}_\mathcal{T}^{\lambda,\mu} : (\mathcal{T}_1^\delta, \mathbb{L}_\mathbb{X}^\delta) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$, l'espace $\mathcal{T}^\delta$ étant défini en (3.106) et l'action étant induite par l'action naturelle de $\mathrm{Vect}(M)$ sur les tenseurs sur M. Le lien entre ces deux quantifications est donnée par la superisation conformément équivariante $\mathrm{S}_\mathcal{T} : (\mathcal{T}^\delta, \mathbb{L}_\mathbb{X}^\delta) \to (\mathcal{S}^\delta[\xi], L^\delta)$, qui doit son nom à l'inclusion de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-modules $\mathcal{S}^\delta \subset \mathcal{T}^\delta$. Nous obtenons alors une formulation covariante de $\mathcal{Q}_\mathcal{T}^{\lambda,\mu}$ grâce à son invariance conforme, et la formulation covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ en découle.

Nous montrons ensuite, pour un "shift" δ générique, que les opérateurs de Casimirs classiques et quantique peuvent être diagonalisés et leurs vecteurs propres ont mêmes symboles principaux. Ceci nous permet de déduire existence et unicité, pour tout degré, de la quantification et de la superisation conformément équivariantes du supercotangent de M.

Enfin, des exemples et applications illustrent les résultats précédents. Notamment, l'écriture explicite de l'action de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ sur $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ nous permet de classifier les symboles des opérateurs différentiels spinoriels qui sont conformément invariants. Cette classification est nouvelle à notre connaissance. De plus, la quantification de l'un deux mène à l'opérateur de Dirac dans le cas résonant $\delta = \frac{1}{n}$. Mentionnons également que la su-

1. les coordonnées de Darboux conformes, elles, en dépendent.

perisation et la quantification conformément équivariantes établissent une correspondance effective entre tenseurs de Killing-Yano (conforme) et les supercharges classiques et quantiques associées, qui par définition commutent à l'opérateur de Dirac (quantique), ou à son symbole (classique).

4.1 Actions conformes et invariants euclidiens

Nous écrivons ici les actions explicites de $\mathrm{conf}(M,g) \simeq \mathrm{o}(p+1,q+1)$ sur les symboles et opérateurs différentiels spinoriels, puis étudions les opérateurs sur l'espace des symboles qui sont invariants sous les similitudes. Cela permet de se restreindre à un espace de dimension fini pour chercher les quantifications conformément équivariantes.

Après avoir rappelé la forme des champs de vecteurs Killing-conformes X en coordonnées conformes, nous donnons l'écriture explicite de leur action L_X^δ sur l'espace des symboles, qui découle de leur action hamiltonienne sur $\mathcal{M}$ donnée par leur relevé $\tilde{X}$, cf (3.48). Utilisant la dérivée de Lie des spineurs, définie par (3.98) pour un champ de vecteurs X Killing-conforme, on obtient une formule générale pour la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$ des opérateurs différentiels, qui est exprimée sur l'espace des symboles grâce à l'ordre normal. Les deux dérivées de Lie, L_X^δ et $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$, coïncident si X est une similitude infinitésimale. La quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ est donc, localement, donnée par la composition de l'ordre normal avec un endomorphisme de $\mathcal{S}^\delta_{\leq 1}[\xi]$ invariant sous l'action des similitudes.

D'autre part, l'adaptation évidente d'un résultat de [67], montre que les endomorphismes de $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$, équivariants sous les translations et dilatations, sont des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, i.e. dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}]_n)$, où par définition $\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}]_n = \mathbb{C}[x^1,\ldots,x^n,\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_n,\tilde{\xi}^1,\ldots,\tilde{\xi}^n]$. Notre but est alors d'obtenir la forme des endomorphismes de $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ équivariant sous les similitudes, qui constituent donc le commutant aux similitudes dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}]_n)$. Nous nous restreignons en fait dans le corps du texte au commutant dans $\mathrm{End}_+(\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}]_n)$, l'espace des endomorphismes invariant par changement d'orientation de $\mathbb{R}^n$. On peut se reporter à l'Annexe B pour l'étude du commutant dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}]_n)$. Nous introduisons les superalgèbres de Lie orthosymplectique et de Heisenberg, l'algèbre enveloppante de leur produit donnant la structure du commutant des isométries dans $\mathrm{End}_+(\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}]_n)$. Nous exprimons ensuite la contrainte donnée par la commutation à la dilatation, ce qui nous donne la forme d'une quantification équivariante sous les similitudes et invariante par changement d'orientation, la contrainte de préservation du symbole principale n'étant pas encore imposée. On peut se reporter à l'Annexe B pour la forme d'une quantification équivariante sous les similitudes, sans la contrainte d'invariance par changement d'orientation.

4.1.1 Actions classiques et quantiques de $\mathrm{conf}(M,g) \simeq \mathrm{o}(p+1,q+1)$

L'algèbre de Lie $\mathrm{o}(p+1,q+1)$ des champs de vecteurs Killing-conformes

Un système de coordonnées conformes (x^i) d'une variété conformément plate (M,g), de signature (p,q), est caractérisé par le fait que la métrique s'y écrit sous la forme suivante, $g_{ij} = F\eta_{ij}$, avec F une fonction lisse et strictement positive et η une métrique plate de signature (p,q). L'écriture des générateurs de $\mathrm{conf}(M,g) \simeq \mathrm{o}(p+1,q+1)$ dans un tel système de coordonnées a déjà été donné au paragraphe 2.3.1. Nous les redonnons ici pour mémoire,

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_i, \\ X_{ij} &= x_i\partial_j - x_j\partial_i, \\ X_0 &= x^i\partial_i, \\ \bar{X}_i &= x_jx^j\partial_i - 2x_ix^j\partial_j, \end{aligned} \tag{4.1}$$

pour $i,j = 1,\ldots,n = p+q$, les indices étant descendus au moyen de la métrique plate η. Les champs X_{ij} engendrent l'algèbre de Lie $\mathrm{o}(p,q)$ des rotations, l'ajout des translations infinitésimales X_i permet d'obtenir toutes les isométries infinitésimales $\mathrm{e}(p,q)$. L'algèbre de Lie des similitudes $\mathrm{ce}(p,q)$ contient en plus la dilatation X_0.

Le $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module $\mathcal{S}^\delta[\xi]$

L'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ est un sous espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{F}^\delta$. Nous avons construit, au Théorème 3.1.19, un relevé hamiltonien $X \mapsto \tilde{X} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$, des champs de vecteurs conformes de M. Comme il préserve l'espace des symboles, ce relevé permet de définir une dérivée de Lie des symboles de poids nul. Pour $X \in \mathrm{conf}(M,g)$, la dérivée de Lie des symboles de poids δ est ainsi donnée par $L^\delta_X = \tilde{X} + \delta\mathrm{Div}(X)$, avec $\mathrm{Div}(X) = \partial_i X^i$, et d'après 3.48, on a donc

$$L^\delta_X = X^i\tilde{\partial}_i + \frac{1}{2}\Big((\partial_j X^i)\tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{\xi}^i} - (\partial_i X^j)\tilde{\xi}_j\partial_{\tilde{\xi}_i}\Big) - \tilde{p}_j(\partial_i X^j)\partial_{\tilde{p}_i} - \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}^j(\partial_i\partial_j X^k)\partial_{\tilde{p}_i} + \delta\partial_i X^i. \tag{4.2}$$

Il en découle l'action classique des générateurs des similitudes, qui, pour $i,j = 1,\ldots,n$, est donnée par

$$\begin{aligned} L^\delta_{X_i} &= \tilde{\partial}_i, \\ L^\delta_{X_{ij}} &= x_i\tilde{\partial}_j - x_j\tilde{\partial}_i + \tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}^j} - \tilde{p}_j\partial_{\tilde{p}^i} + \tilde{\xi}_i\partial_{\tilde{\xi}^j} - \tilde{\xi}_j\partial_{\tilde{\xi}^i}, \\ L^\delta_{X_0} &= x^i\tilde{\partial}_i - \tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}_i} + \delta n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pour évaluer $L^{\delta}_{\bar{X}_i}$, il nous faut commencer par le calcul de $\partial_j(\bar{X}_i)^k$. Nous obtenons : $\partial_j(\bar{X}_i)^k = 2(\delta^k_i x_j - \delta^k_j x_i - \eta_{ij}x^k)$, et donc $\partial_l\partial_j(\bar{X}_i)^k = 2(\delta^k_i\eta_{jl} - \delta^k_j\eta_{il} - \eta_{ij}\delta^k_l)$. On trouve alors, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\boxed{\begin{aligned} L^{\delta}_{\bar{X}_i} &= (x_j x^j \tilde{\partial}_i - 2x_i x^j \tilde{\partial}_j) + (-2\tilde{p}_i x_j \partial_{\tilde{p}_j} + 2x_i \tilde{p}_j \partial_{\tilde{p}_j} + 2\tilde{p}_k x^k \partial_{\tilde{p}^i}) \\ &\quad -2\tfrac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\partial_{\tilde{p}_j} + 2x_j\tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{\xi}^i} - 2\tilde{\xi}_i x^k\partial_{\tilde{\xi}^k} - 2n\delta x_i. \end{aligned}} \tag{4.4}$$

Le $\mathrm{o}(p+1, q+1)$**-module** $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$

On a obtenu au Corollaire 3.3.12 la dérivée de Lie des spineurs L_X, qui agit sur l'espace des sections spinorielles F, pour X un champ conforme. Elle induit donc naturellement la dérivée de Lie des spineurs de poids λ, à savoir $\mathsf{L}^{\lambda}_X = \mathsf{L}_X + \lambda\mathrm{Div}(X)$, munissant ainsi $\mathsf{F}^{\lambda} = \mathsf{F} \otimes \mathcal{F}^{\lambda}$ d'une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module. Comme l'espace des opérateurs différentiels spinoriels $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ est un sous-espace de $\mathrm{End}(\mathsf{F}^{\lambda}, \mathsf{F}^{\mu})$, sa structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module se déduit de celle de F^{λ} et F^{μ}. Elle est donnée par la dérivée de Lie $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$, qui, appliquée à un opérateur A, vérifie,

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X A = \mathsf{L}^{\mu}_X A - A\mathsf{L}^{\lambda}_X. \tag{4.5}$$

L'ordre normal permet alors d'identifier localement, au-dessus d'un ouvert $U \subset M$, les deux espaces vectoriels $\mathcal{S}^{\delta}[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ et donc de comparer leur structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-modules, i.e. de comparer $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$ et L^{δ}_X, ce qui peut se représenter par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}^{\lambda,\mu}(U) \arrow[r, "\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X"] & \mathsf{D}^{\lambda,\mu}(U) \\ \mathcal{S}^{\delta}(U)[\xi] \arrow[u, "\mathcal{N}_U"] \arrow[r, "L^{\delta}_X + ?"] & \mathcal{S}^{\delta}(U)[\xi], \arrow[u, "\mathcal{N}_U"'] \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

à compléter afin de le rendre commutatif. Nous notons encore $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$ l'action de X sur $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ transportée par l'ordre normal sur $\mathcal{S}^{\delta}(U)[\xi]$.

Proposition 4.1.1. *Soit $X \in \mathrm{conf}(M, g)$ et U un ouvert d'une carte de l'atlas conforme de M. On a alors, en coordonnées de Darboux conformes au-dessus de U,*

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X = L^{\delta}_X + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}(\partial_j\partial_k X^i)\left(-\tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}_j} + \frac{1}{2}\chi^j_i\right)\partial_{\tilde{p}_k} - \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\lambda\partial_j(\partial_i X^i)\partial_{\tilde{p}_j} \tag{4.7}$$

où $\chi^j_i = \tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\partial_{\tilde{\xi}_j} + \frac{1}{2}\partial_{\tilde{\xi}_j}\partial_{\tilde{\xi}^i}$.

Démonstration. Soit $P = P^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_\kappa}(x)\,\frac{\gamma^{i_1}}{\sqrt{2}}\cdots\frac{\gamma^{i_\kappa}}{\sqrt{2}}\,\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\partial_{j_1}\cdots\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\partial_{j_k} \in \mathsf{D}^{\lambda,\mu}(U)$. Par définition de la dérivée des opérateurs différentiels spinoriels (4.5) et de celle des sections spinorielles de poids donné, on obtient

$$\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} P = [\mathsf{L}_X, P] + \delta \mathrm{Div}(X) P - \lambda P(\mathrm{Div}(X)).$$

Le premier terme peut être décomposé grâce à la règle de Leibniz, en voyant P comme le produit de deux termes,

$$\begin{aligned}[\mathsf{L}_X, P] &= \left[\mathsf{L}_X, P_{i_1\cdots i_\kappa}^{j_1\cdots j_k}(x)\frac{\gamma^{i_1}}{\sqrt{2}}\cdots\frac{\gamma^{i_\kappa}}{\sqrt{2}}\right]\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\partial_{j_1}\cdots\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\partial_{j_k} \\ &\quad + P_{i_1\cdots i_\kappa}^{j_1\cdots j_k}(x)\frac{\gamma^{i_1}}{\sqrt{2}}\cdots\frac{\gamma^{i_\kappa}}{\sqrt{2}}\left[\mathsf{L}_X, \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{\partial_{j_1}}\cdots\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{\partial_{j_k}}\right],\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\mathsf{L}_{\partial_i} = \partial_i$. L'ordre normal $\mathcal{N}_U$ coïncide avec la quantification géométrique Q sur les symboles de degré nul en p, et d'après le Théorème 3.3.9, c'est un morphisme d'algèbre de Lie. De plus, le Corollaire 3.3.12 montre que $\mathsf{L}_X = \frac{\mathsf{i}}{\hbar}Q(\mathcal{J}_X^0)$, donc pour un opérateur différentiel d'ordre 0 et de symbole P_0, on a $[\mathsf{L}_X, Q(P_0)] = Q(\{\mathcal{J}_X^0, P_0\}) = Q(\tilde{X}P_0)$. On pose $P_0^{j_1\ldots j_k} = P_{i_1\ldots i_\kappa}^{j_1\ldots j_k}\tilde{\xi}^{i_1}\ldots\tilde{\xi}^{i_\kappa}$, et on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_U^{-1}\left([\mathsf{L}_X, P] + \delta\mathrm{Div}(X)P\right) &= L_X^\delta(P_0^{j_1\ldots j_k})\tilde{p}_{j_1}\ldots\tilde{p}_{j_k} \\ &\quad + \mathcal{N}_U^{-1}\left(Q(P_0^{j_1\ldots j_k})\left[\mathsf{L}_X, \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{\partial_{j_1}}\cdots\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{\partial_{j_k}}\right]\right).\end{aligned}$$

Le champ de vecteurs X étant conforme il est de degré au plus 2, d'où l'égalité

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_U^{-1}\left(Q(P_0^{j_1\ldots j_k})[\mathsf{L}_X, \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{\partial_{j_1}}\cdots\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{\partial_{j_k}}]\right) &= \mathcal{N}_U^{-1}\left(Q(P_0^{j_1\ldots j_k})\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{[X,\partial_i]}\right)\partial_{\tilde{p}_i}(\tilde{p}_{j_1}\ldots\tilde{p}_{j_k}) \\ &\quad -\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\,\mathcal{N}_U^{-1}\left(Q(P_0^{j_1\ldots j_k})\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{[[X,\partial_i],\partial_j]}\right)\partial_{\tilde{p}_i}\partial_{\tilde{p}_j}(\tilde{p}_{j_1}\ldots\tilde{p}_{j_k}).\end{aligned}$$

Commençons par évaluer le premier terme ci-dessus. D'après la formule (3.98), on a

$$\mathsf{L}_{[X,\partial_i]} = -(\partial_i X^j)\mathsf{L}_{\partial_j} + \frac{1}{8}\partial_i\left[\partial_k(X^j)\gamma^k\gamma_j - \partial_k(X^j)\gamma_j\gamma^k\right]. \tag{4.8}$$

Il nous reste alors à ordonner les matrices γ, i.e. les faire traverser $Q(P_0^{j_1\ldots j_k})$. On utilise l'identité $\gamma^{i_1}\cdots\gamma^{i_\kappa}(\gamma^k\gamma^j) = (\gamma^k\gamma^j)\gamma^{i_1}\cdots\gamma^{i_\kappa} - \left[\gamma^k\gamma^l, \gamma^{i_1}\cdots\gamma^{i_\kappa}\right]$, ainsi que la Proposition 3.2.5, pour obtenir

$$\mathcal{N}_U^{-1}\left(Q(P_0^{j_1\ldots j_k})[\gamma^k, \gamma_j]\right) = 2(2\tilde{\xi}^k\tilde{\xi}_j + \chi_j^k)P_0^{j_1\ldots j_k}, \tag{4.9}$$

avec $\chi_j^k = \tilde{\xi}^k\partial_{\tilde{\xi}^j} - \tilde{\xi}_j\partial_{\tilde{\xi}_k} + \frac{1}{2}\partial_{\tilde{\xi}_k}\partial_{\tilde{\xi}^j}$. Grâce à l'égalité (4.8) et à l'expression de L_X^δ, on parvient à

$$\left(L_X^\delta(P_0^{j_1\ldots j_k}) + \mathcal{N}_U^{-1}\left(Q(P_0^{j_1\ldots j_k})\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathsf{L}_{[X,\partial_i]}\right)\partial_{\tilde{p}_i}\right)\tilde{p}_{j_1}\ldots\tilde{p}_{j_k} = L_X^\delta\left(\mathcal{N}_U^{-1}(P)\right) + \tfrac{1}{4}\,\partial_i(\partial_k X^j)\chi_j^k\partial_{\tilde{p}_i}\left(\mathcal{N}_U^{-1}(P)\right).$$

De plus, on a $\mathsf{L}_{[[X,\partial_i]\partial_j]} = \partial_j(\partial_i X^k)\mathsf{L}_{\partial_k}$, car X est de degré au plus 2, et la dérivation de Lie est linéaire. On peut alors regrouper tous les termes pour obtenir $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$,

$$\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} = L_X^\delta + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}(\partial_j\partial_k X^i)(-\tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}_j} + \frac{1}{2}\chi_i^j)\partial_{\tilde{p}_k} - \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\lambda\partial_k\left(\mathrm{Div}(X)\right)\partial_{\tilde{p}_k},$$

ce qui achève la démonstration. □

La Proposition 4.1.1 montre que $L_X^\delta = \mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$ pour $X \in \mathrm{ce}(p,q)$. Par contre, pour les inversions infinitésimales $\bar{X}_i$, avec $i = 1,\ldots,n$, la formule (4.7) donnant $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$ dans le cas général se réduit, grâce à ce qui précède, à

$$\boxed{\mathcal{L}_{\bar{X}_i}^{\lambda,\mu} = L_{\bar{X}_i}^\delta + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}(-\tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}^j}\partial_{\tilde{p}_j} + 2\tilde{p}_j\partial_{\tilde{p}_j}\partial_{\tilde{p}^i}) + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\chi_i^j\partial_{\tilde{p}_j} + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}n\lambda\partial_{\tilde{p}_i}.} \tag{4.10}$$

Remarque 4.1.2. *On constate alors que les dérivées de Lie L_X^δ et $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$ coïncident sur les symboles de degré 0 en p. Ainsi, l'ordre normal restreint à $\mathcal{S}_0(U)[\xi]$, et donné alors par la quantification géométrique, est conformément équivariant.*

4.1.2 Les superalgèbres de Lie orthosymplectique et de Heisenberg

L'algèbre de Lie orthosymplectique est l'algèbre de Lie des endomorphismes préservant la structure symplectique d'un superespace vectoriel. C'est l'extension supersymétrique de l'algèbre de Lie symplectique.

Définition 4.1.3. *Soit $\mathbb{C}^{2n|m}$ muni de son système de coordonnées canonique $(x^a)_{a=1,\ldots,2n+m}$ et de son crochet de Poisson canonique, donné par le bivecteur $\Pi = \sum_{a=1}^n \partial_a \wedge \partial_{a+n} + \sum_{a=2n+1}^{2n+m} \partial_a \wedge \partial_a$.*

L'espace des polynômes homogènes de degré deux en les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{C}^{2n|m}$ forme, via l'action par le crochet de Poisson canonique de $\mathbb{C}^{2n|m}$, l'algèbre de Lie des transformations linéaires symplectiques de $\mathbb{C}^{2n|m}$, notée $\mathrm{spo}(2n|m)$.

Dans les deux cas extrêmes, $m = 0$ et $n = 0$, on retrouve respectivement l'algèbre de Lie symplectique $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{C})$ et l'algèbre de Lie orthogonale $\mathrm{o}(m,\mathbb{C})$. Si on se place sur le corps des réels, la signature de la métrique sur la partie impaire intervient naturellement. Par symétrie de $x^a x^b$ si $|x^a||x^b| = 0$, et antisymétrie sinon, on déduit la dimension de $\mathrm{spo}(2n|m)$ donnée par $\dim\left(\mathrm{spo}(2n|m)\right) = \frac{(2n+m)(2n+m-1)}{2} + 2n$.

La superalgèbre de Lie de Heisenberg est l'extension supersymétrique naturelle de l'algèbre de Lie de Heisenberg, définie comme l'espace des polynômes de degrés 0 et 1 sur $\mathbb{C}^{2n}$, muni du crochet de Poisson canonique.

Définition 4.1.4. *Soit* $\mathbb{C}^{2n|m}$ *muni de son système de coordonnées canonique* $(x^a)_{a=1,\ldots,2n+m}$. *L'espace des polynômes de degrés* 0 *et* 1 *en les coordonnées, muni du crochet de Poisson canonique de* $\mathbb{C}^{2n|m}$, *est la superalgèbre de Lie de Heisenberg, notée* $\mathfrak{h}(2n|m)$.

De sa définition on déduit immédiatement la dimension de la superalgèbre de Lie de Heisenberg, donnée par $\dim(\mathfrak{h}(2n|m)) = 2n + m + 1$.

4.1.3 Commutant à l'action des similitudes dans $\mathrm{End}(\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi])$

Le but de ce paragraphe est d'obtenir la forme des endomorphismes de $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ commutant à l'action des similitudes donnée en (4.3). Ils constituent une algèbre notée $\mathrm{ce}(p,q)^!$. Désignons encore avec des tildes les coordonnées de Darboux conformes du supercotangent de $\mathbb{R}^n$, qui est le produit direct $T^*\mathbb{R}^n \times \Pi\mathbb{R}^n$, même si elles coïncident avec les coordonnées naturelles. Ainsi tout ce qui suit sera valable aussi bien sur le supercotangent de $\mathbb{R}^n$ que, localement, sur celui d'une variété conformément plate (M, g).

Tout d'abord, les endomorphismes de $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ commutant aux translations et dilatations sont des opérateurs différentiels sur $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$. Ce résultat est démontré dans [67] pour l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)$, sa généralisation au super-symboles $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ est immédiate. La commutation avec les translations assure, de plus, que les coefficients sont indépendants de x. On en déduit que le commutant à l'action des similitudes dans $\mathrm{End}(\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi])$ est inclus dans l'algèbre

$$\mathbb{C}[\tilde{\partial}_1, \ldots, \tilde{\partial}_n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n, \partial_{\tilde{p}_1}, \ldots, \partial_{\tilde{p}_n}, \tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^n, \partial_{\tilde{\xi}^1}, \ldots, \partial_{\tilde{\xi}^n}], \tag{4.11}$$

que nous notons de manière plus compacte $\mathbb{C}[\tilde{\partial}_x, \tilde{p}, \partial_{\tilde{p}}, \tilde{\xi}, \partial_{\tilde{\xi}}]_n$. Cette dernière algèbre est naturellement incluse dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x, \tilde{p}, \tilde{\xi}]_n)$. Or le commutant de $\mathrm{e}(p,q)$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x, \tilde{p}, \tilde{\xi}]_n)$, pour l'action L_X^δ définie en (4.3), correspond précisément à l'algèbre des invariants sous $\mathrm{o}(p,q)$ de $\mathbb{C}^n$ en les cinq arguments $\tilde{\partial}_x, \tilde{p}, \partial_{\tilde{p}}, \tilde{\xi}, \partial_{\tilde{\xi}}$, au sens de H. Weyl [104]. Nous allons utilisé la distinction entre invariants pairs et impairs introduites par H. Weyl, et dénommé par commutant pair de $\mathrm{e}(p,q)$ le sous-ensemble $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ des invariants pairs. C'est le commutant de $\mathrm{e}(p,q)$ dans $\mathrm{End}_+(\mathbb{C}[x, \tilde{p}, \tilde{\xi}]_n)$, l'espace des endomorphismes invariants par changements d'orientation de $\mathbb{R}^n$, i.e. invariants par l'application identique sur les coordonnées à l'exception de, par exemple, $x^1 \mapsto -x^1$, $p_1 \mapsto -p_1$ et $\xi^1 \mapsto -\xi^1$. Le commutant complet de $\mathrm{e}(p,q)$ est donné dans l'annexe B.

Proposition 4.1.5. *L'algèbre de Lie euclidienne* $\mathrm{e}(p,q)$ *se plonge dans l'espace des endomorphismes des polynômes* $\mathbb{C}[x, \tilde{p}, \tilde{\xi}]_n$ *via la dérivée de Lie des symboles* L_X^δ. *On note*

$\mathrm{e}(p,q)^!_+$ *le commutant de l'image de* $\mathrm{e}(p,q)$ *dans* $\mathrm{End}_+(\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}]_n)$ *; il est engendré, comme algèbre, par les opérateurs*

$$\boxed{\begin{array}{llll} R=\tilde{p}^i\tilde{p}_i, & E=\tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}_i}+\frac{n}{2}, & T=\partial_{\tilde{p}^i}\partial_{\tilde{p}_i}, & \Sigma=\tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}-\frac{n}{2}, \\ \Delta=\tilde{\xi}^i\tilde{p}_i, & \Phi=\tilde{p}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}, & \Psi=\tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{p}^i}, & \Omega=\partial_{\tilde{\xi}^i}\partial_{\tilde{p}_i}, \end{array}} \tag{4.12}$$

engendrant l'algèbre de Lie $\mathrm{spo}(2|2)$*, et par les opérateurs*

$$\boxed{\begin{array}{lll} G=\tilde{p}^i\tilde{\partial}_i, & D=\partial_{\tilde{p}_i}\tilde{\partial}_i, & L=\tilde{\partial_{x_i}}\tilde{\partial_{x^i}}, \\ \Gamma=\tilde{\xi}^i\tilde{\partial}_i, & \Lambda=\partial_{\tilde{\xi}_i}\tilde{\partial}_i, & \end{array}} \tag{4.13}$$

engendrant l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(2|2)$.

Le commutant $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ *est isomorphe à* $\mathfrak{U}(\mathrm{spo}(2|2)\ltimes\mathfrak{h}(2|2))$*, pour* $n\geq 3$.

Précisons que les indices des différentes variables sont montés ou descendus à l'aide de la métrique plate η. Nous travaillerons par la suite plutôt avec les opérateurs $\mathcal{E}=\tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}_i}$ et $\Sigma=\tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}$ que E et Σ.

Démonstration. Remarquons que le commutant $e(p,q)^!_+$ de $\mathrm{e}(p,q)$ dans l'algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}_+(\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}]_n)$, est égal au commutant pair de $\mathrm{o}(p,q)$ dans $\mathbb{C}[\tilde{\partial_x},\tilde{p},\partial_{\tilde{p}},\tilde{\xi},\partial_{\tilde{\xi}}]_n$. Maintenant, l'action de $\mathrm{o}(p,q)$ donnée par (4.3) coïncide avec l'action canonique de $\mathrm{o}(p,q)$ sur $\mathbb{C}^n$, ou son dual, pour chaque type de variables $\partial_x,\tilde{p},\partial_{\tilde{p}},\tilde{\xi},\partial_{\tilde{\xi}}$. D'après [104], l'algèbre des invariants est donc engendrée par les 15 produits scalaires entre ces 5 types de variables, dont les deux carrés de variables impaires qui sont nuls. Les 8 produits scalaires qui n'impliquent pas ∂_x s'identifient aux polynômes homogènes de degré 2 sur le superespace vectoriel symplectique $T^*\mathbb{C}^{1|1}$, et forment donc l'algèbre de Lie $\mathrm{spo}(2|2)$. Les cinq autres s'identifient aux polynômes homogènes de degrés 0 et 1 de $T^*\mathbb{C}^{1|1}$, et forment ainsi la superalgèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}(2|2)$.

Pour montrer que $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ est isomorphe à $\mathfrak{U}(\mathrm{spo}(2|2)\ltimes\mathfrak{h}(2|2))$, pour $n\geq 3$, il suffit de montrer que les 13 opérateurs exhibés sont indépendants. dans $\mathbb{C}[x,\tilde{\partial_x},\tilde{p},\partial_{\tilde{p}},\tilde{\xi},\partial_{\tilde{\xi}}]_n$. L'argument est donné dans [37] pour les 6 opérateurs engendrant $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ dans $\mathbb{C}[x,\tilde{\partial_x},\tilde{p},\partial_{\tilde{p}}]_n$. A savoir, ils sont indépendants fonctionnellement comme le montre $d(\tilde{p}^i\tilde{p}_i)\wedge d(\tilde{p}_i\tilde{\xi}^i)\wedge\ldots\wedge d(\partial_{\tilde{p}^i}\partial_{\tilde{p}_i})\neq 0$. □

Remarque 4.1.6. *Deux éléments sont trivialement dans le centre de* $\mathrm{e}(p,q)^!_+$*, à savoir* $\mathcal{E}$ *et* Σ*, dont les espaces propres définissent la bigraduation de l'espace des symboles. L'opérateur* $\mathcal{E}$ *est l'opérateur d'Euler, et nous baptiserons logiquement* Σ *opérateur d'Euler grassmannien.*

Ainsi un endomorphisme Q de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, commutant à l'action des similitudes donnée par (4.3), est dans l'algèbre enveloppante engendrée par ces 13 générateurs, i.e.,

$$Q = C_{r,\delta,g,\gamma,\sigma,\phi,\lambda,l,e,\psi,\omega,d,t} R^r \Delta^\delta G^g \Gamma^\gamma \Sigma^\sigma \Phi^\phi \Lambda^\lambda L^l \mathcal{E}^e \Psi^\psi \Omega^\omega D^d T^t. \tag{4.14}$$

Tous les exposants des opérateurs impairs sont nécessairement égaux à 0 ou 1. On veut de plus que Q commute aux dilatations. Il nous faut donc calculer les commutateurs entre $L^\delta_{X_0}$ et les 13 générateurs de $\mathrm{e}(p,q)^!_+$. On retrouve les résultats connus [37] pour les six générateurs qui sont dans $\mathbb{C}[\partial_x, \tilde{p}, \partial_{\tilde{p}}]_n$,

$$\begin{aligned}
&[R, L^\delta_{X_0}] = 2R, \qquad [\mathcal{E}, L^\delta_{X_0}] = 0, \qquad [T, L^\delta_{X_0}] = -2T,\\
&[G, L^\delta_{X_0}] = 2G, \qquad [D, L^\delta_{X_0}] = 0, \qquad [L, L^\delta_{X_0}] = 2L.
\end{aligned}$$

Le calcul des 7 autres commutateurs donne

$$\begin{aligned}
&[\Sigma, L^\delta_{X_0}] = 0, \qquad [\Delta, L^\delta_{X_0}] = \Delta, \qquad [\Phi, L^\delta_{X_0}] = \Phi,\\
&[\Psi, L^\delta_{X_0}] = -\Psi, \qquad [\Omega, L^\delta_{X_0}] = -\Omega, \qquad [\Gamma, L^\delta_{X_0}] = \Gamma, \qquad [\Lambda, L^\delta_{X_0}] = \Lambda.
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 4.1.7. *Le commutant pair de l'algèbre de Lie* $\mathrm{ce}(p,q)$ *des similitudes, dans* $\mathrm{End}_+(\mathbb{C}[x,\tilde{p},\tilde{\xi}])_n$*, est la sous-algèbre de* $\mathfrak{U}(\mathrm{spo}(2|2) \ltimes \mathfrak{h}(2|2))$*, engendrée par les monômes (4.14) vérifiant la condition suivante sur les exposants :*

$$2r + 2g + 2l + \delta + \phi + \gamma + \lambda - \psi - \omega - 2t = 0. \tag{4.15}$$

Remarque 4.1.8. *Au lieu de la métrique plate* η_{ij} *et des fonctions coordonnées* $\tilde{\xi}^i$ $(= F^{\frac{1}{2}}\xi^i$ *sur* $U)$*, on peut utiliser* $\eta_{ij}|\mathrm{vol}|^{-\frac{2}{n}}$ *et* $\tilde{\xi}^i|\mathrm{vol}|^{\frac{1}{n}}$ *pour définir les générateurs de* $\mathrm{e}(p,q)^!$ *(i.e.* $g_{ij}|\mathrm{vol}_g|^{-\frac{2}{n}}$ *et* $\tilde{\xi}^i = \xi^i|\mathrm{vol}_g|^{\frac{1}{n}}$ *sur* U*). Leurs lois de transformations sont les mêmes par isométries, par contre les opérateurs ainsi obtenus sont tous invariants sous dilatations et globalement définis sur une variété conformément plate* (M,g)*. L'équation (4.15) traduit alors que chaque monômes de* Q *doit être de poids total nul.*

4.2 La quantification conformément équivariante des symboles de degrés 0 et 1 en coordonnées de Darboux conformes

Nous déterminons ici la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta_{\leq k}[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_k$, pour $k = 0, 1$, comme isomorphisme linéaire $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-équivariant qui préserve le symbole principal. Le Lemme 4.2.1 d'une part et l'ordre normal d'autre part, permettent de se ramener à l'étude de $Q^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta_{\leq k}(\mathbb{R}^n)[\xi] \to \mathcal{S}^\delta_{\leq k}(\mathbb{R}^n)[\xi]$. La situation sur $\mathbb{R}^n$ est figurée par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_k \\ \mathcal{S}^\delta_{\leq k}[\xi] \arrow[ur, "\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}"] \arrow[r, "Q^{\lambda,\mu}"] & \mathcal{S}^\delta_{\leq k}[\xi]. \arrow[u, "\mathcal{N}"'] \end{tikzcd} \tag{4.16}$$

La Proposition 4.1.7 nous fournit la forme des endomorphismes de $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ équivariants sous l'action des similitudes et invariants sous changements d'orientation. La condition additionnelle de préservation du symbole principal pour la graduation en $\tilde{\xi}$ et le Lemme 4.2.1 permettent alors d'obtenir sans difficulté la quantification conformément équivariante des symboles de degré 0 en les impulsions sur M. Elle coïncide avec l'ordre normal obtenu dans le Théorème 3.3.9. Nous recherchons ensuite toutes les quantifications équivariantes sous les similitudes des symboles de degré 1 en les impulsions, en imposant la préservation du symbole principal pour la graduation en $\tilde{p}$ seulement. Elles sont, comme nous le verrons en (4.18), données par la combinaison linéaire de cinq opérateurs différentiels sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$. L'équivariance sous les inversions conformes se traduit par un système linéaire en leurs cinq coefficients. Sa résolution mène à une unique solution, que nous explicitons, sauf pour $\delta = \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n+1}{n}$ qui constituent les cas dits résonants. Pour $\delta = \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}$ le système admet des solutions si et seulement si $\lambda = \frac{n-1}{2n}$, respectivement $\lambda = -\frac{1}{2n}$, il est possible de préserver l'unicité de la quantification en lui imposant la condition de Dirac $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(\bar{P}) = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P)^*$. Pour $\delta = \frac{2}{n}, \ldots, 1$, les deux $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-modules $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ ne sont pas isomorphes. Enfin, l'Annexe B permet de formuler les théorèmes concernant la quantification conformément équivariante sans l'hypothèse d'invariance par changement d'orientation.

4.2.1 Lemme préparatoire

Nous souhaitons déterminer la quantification conformément équivariante sur M à partir de celle de $\mathbb{R}^n$, par transport via les cartes adaptées à la structure conformément plate sur M. Pour (U, ϕ) une telle carte, nous définissons par transport $\phi^* Q^{\lambda,\mu} : (\mathcal{S}^\delta_k(U)[\xi], L^\delta) \to (\mathcal{S}^\delta_k(U)[\xi], \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$, grâce au diagramme commutatif suivant que nous allons expliquer,

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{S}^\delta_k(U)[\xi], L^\delta) \arrow[r, "\phi^* Q^{\lambda,\mu}"] \arrow[rr, bend left, "\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{|U}"] \arrow[d, "\phi"'] & (\mathcal{S}^\delta_k(U)[\xi], \mathcal{L}^{\lambda,\mu}) \arrow[r, "\mathcal{N}_U"] \arrow[d, "\phi"'] & (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}(U), \mathcal{L}^{\lambda,\mu}) \arrow[d, "\phi"'] \\ (\mathcal{S}^\delta_k(\mathbb{R}^n)[\xi], L^\delta) \arrow[r, "Q^{\lambda,\mu}"] & (\mathcal{S}^\delta_k(\mathbb{R}^n)[\xi], \mathcal{L}^{\lambda,\mu}) \arrow[r, "\mathcal{N}"] & (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n), \mathcal{L}^{\lambda,\mu}). \end{tikzcd} \tag{4.17}$$

L'action de ϕ sur l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta_k(U)[\xi]$ est d'envoyer les coordonnées de Darboux conformes du supercotangent au-dessus de U sur celles du supercotangent de $\mathbb{R}^n$. L'expression des actions classiques L_X^δ, données en (4.2), et quantiques $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$, données en (4.7), en ces coordonnées est indépendante de la métrique conformément plate. Il en découle que les deux flèches verticales de gauche du diagramme précédent sont des isomorphismes de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules. Ainsi $\phi^*Q^{\lambda,\mu}$ étant défini tel que la partie gauche du diagramme commute, c'est un isomorphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules si et seulement si $Q^{\lambda,\mu}$ l'est.

Par ailleurs, la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$ étant obtenue par transport via l'ordre normal, cf Proposition 4.1.1, les applications $\mathcal{N}_U$ et $\mathcal{N}$ sont des morphismes de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules. L'action de la dernière flèche verticale est telle que la partie droite du diagramme commute, ce qui lui impose d'être un morphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module également.

Les deux flèches verticales à la gauche du diagramme définissent des identifications locales entre les deux modules des symboles et des opérateurs différentiels, sur M et $\mathbb{R}^n$. Cela nous permet d'appliquer le Lemme 2.2.5 et d'en déduire une correspondance entre les quantifications conformément équivariantes sur M et $\mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{N}\circ Q^{\lambda,\mu}$ est une quantification conformément équivariante sur $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{N}_U\circ\phi^*Q^{\lambda,\mu}$ coïncide avec la restriction à U d'une quantification conformément équivariante sur M, $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{|U}$.

Nous obtenons ainsi le lemme suivant.

Lemme 4.2.1. *Soit (M,g) une variété conformément plate et (U,ϕ) une carte de M définissant des coordonnées de Darboux conformes sur $\mathcal{M}$. Il existe une correspondance biunivoque entre les isomorphismes de* $\mathrm{o}(p+1,q+1)$*-modules $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}:\mathcal{S}^\delta_{\leq k}(M)[\xi]\to \mathsf{D}_k^{\lambda,\mu}(M)$ et $Q^{\lambda,\mu}:(\mathcal{S}^\delta_{\leq k}(\mathbb{R}^n)[\xi],L^\delta)\to(\mathcal{S}^\delta_{\leq k}(\mathbb{R}^n)[\xi],\mathcal{L}^{\lambda,\mu})$, préservant le symbole principal. On a $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}=\mathcal{N}_U\circ\phi^*Q^{\lambda,\mu}$, où $\mathcal{N}_U$ est l'ordre normal associé à la carte (U,ϕ) donné en (3.109).*

Ainsi il suffit d'obtenir la quantification conformément équivariante sur $\mathbb{R}^n$, on peut l'obtenir ensuite sur une variété conformément plate directement à condition de se placer en coordonnées de Darboux conformes.

4.2.2 La quantification conformément équivariante des symboles de degré 0

La quantification conformément équivariante des symboles de degré 0 en les impulsions nous fournit une nouvelle construction de l'isomorphisme canonique entre l'espace des formes différentielles sur M et les sections du fibré de Clifford. Le symbole principal est choisi ici comme le symbole principal pour la graduation en $\tilde{\xi}$ de $\mathcal{S}^\delta_0[\xi]$. Commençons par le lemme suivant, dont la preuve est triviale, mais qui est utile pour la suite.

Lemme 4.2.2. *Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes, et $\Sigma=\tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}$, l'opérateur d'Euler grassmanien. L'action de $P(\Sigma)$ sur l'espace des symboles de degré κ en $\tilde{\xi}$, $\mathcal{S}^\delta_{*,\kappa}[\xi]$, est l'opération de multiplication par $P(\kappa)$. Elle est donc entièrement déterminée par les $n+1$ nombres complexes $P(\kappa)$, $\kappa=0,\ldots,n$.*

Proposition 4.2.3. *Il existe un unique isomorphisme de* $\mathrm{o}(p+1,q+1)$*-module* $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$: $\mathcal{S}_0^\delta[\xi] \to \mathsf{D}_0^{\lambda,\mu}$ *préservant le symbole principal donné par la filtration en* $\tilde{\xi}$*. Il est donné par l'ordre normal.*

Démonstration. Grâce au Lemme 4.2.1, ceci est équivalent à montrer qu'il existe un unique morphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module Q sur $\mathcal{S}_0^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ préservant le symbole principal donné par la filtration en $\tilde{\xi}$, et qu'il est donné par l'identité. Nous donnons ici la preuve dans le cas où cet isomorphisme Q est en plus invariant sous changement d'orientation, se référer à l'Annexe B pour le cas général.

Un tel Q étant équivariant sous l'action des similitudes, la Proposition 4.1.7 s'applique. Il ne peut y avoir de dérivation en $\tilde{p}$ dans les monômes composant Q, ils vérifient donc, voir (4.14), $t = d = \psi = \omega = e = 0$. L'équation exprimant l'invariance sous dilatation (4.15) montre alors que Q est un polynôme en l'opérateur Σ. La préservation du symbole principal pour la graduation en $\tilde{\xi}$ impose enfin à Q, d'après le Lemme 4.2.2, d'être l'identité.

La quantification, à valeurs dans $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, est donc donnée par l'ordre normal. □

4.2.3 Quantifications équivariantes sous les similitudes des symboles de degré 1

Nous sommes en mesure de donner la forme de toutes les quantifications équivariantes sous les similitudes de $\mathcal{S}_{\leq 1}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$. Par définition, elles préservent le symbole principal pour la filtration en $\tilde{p}$.

Proposition 4.2.4. *Soit* $\mathcal{N}$ *l'ordre normal sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{Q} : \mathcal{S}_{\leq 1}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi] \to \mathsf{D}_1^{\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ *un morphisme de* $\mathrm{ce}(p,q)$*-module préservant le symbole principal pour la filtration en* $\tilde{p}$ *et invariant par changement d'orientation. Alors* $\mathcal{Q} = \mathcal{N} \circ Q$*, avec*

$$\boxed{Q = \mathrm{Id} + c_d(\Sigma)D + c_{\gamma\psi}(\Sigma)\Gamma\Psi + c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi + c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega + c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega,} \tag{4.18}$$

où les coefficients $c_d(\Sigma), \ldots, c_{\lambda\omega}(\Sigma)$*, sont des polynômes en* $\Sigma = \tilde{\xi}^i \partial_{\tilde{\xi}^i}$*, l'opérateur d'Euler grassmannien.*

Démonstration. La composition avec l'ordre normal nous ramène à chercher les morphismes Q de $\mathcal{S}_1^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ pour sa structure de $\mathrm{ce}(p,q)$-module. En effet les actions classiques L_X^δ et quantiques $\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}$ coïncident sur $\mathcal{S}_1^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$ pour X une similitude infinitésimale. D'après la Proposition 4.1.7, Q est une somme de monômes de la forme (4.14), vérifiant la contrainte (4.15). Comme Q agit sur les symboles de degré 1 en $\tilde{p}$, il en découle que chaque monôme doit comporter au plus une dérivation en $\tilde{p}$, i.e. $e + d + \psi + \omega + 2t \leq 1$. Il en découle $t = 0$, et en utilisant (4.15) on obtient $r = g = l = 0$ et $\delta + \phi + \gamma + \lambda = \psi + \omega \leq 1$.

Seul le monôme égal à l'identité vérifie $d + \psi + \omega + 2t = 0$, par préservation du symbole principal. Si $d = 1$, le monôme est nécessairement de la forme $c_d(\Sigma)D$, avec $c_d(\Sigma)$ un polynôme en Σ. Si ψ ou $\omega = 1$, alors δ, ϕ, γ ou λ est égal à 1, les autres étant nuls. Par préservation du symbole principal, on doit avoir $\delta = \phi = 0$, d'où le résultat annoncé. $\square$

4.2.4 Les conditions d'équivariance sous les inversions

Nous étudions maintenant les contraintes additionnelles imposées par l'équivariance sous les inversions conformes infinitésimales, $\bar{X}_i$, pour Q donnée dans la proposition précédente. Celles-ci s'écrivent, pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\boxed{\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} Q = Q L^{\delta}_{\bar{X}_i}.} \tag{4.19}$$

Le système des contraintes d'équivariance

Proposition 4.2.5. *La condition d'équivariance conforme (4.19), pour les applications Q de la forme (4.18), est équivalente aux égalités opératorielles suivantes sur $\mathcal{S}^{\delta}_1(\mathbb{R}^n)[\xi]$,*

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(2n\lambda\partial_{\tilde{p}^i} + \Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega - \frac{1}{2}\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega\right) &= 2c_d(\Sigma)(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega + n(1-\delta)\partial_{\tilde{p}^i}) \\ &+ 2c_{\gamma\psi}(\Sigma)(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Psi \\ &+ 2c_{\lambda\psi}(\Sigma)(\Sigma - n(1-\delta))(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \partial_{\tilde{p}^i}) \\ &+ 2c_{\gamma\omega}(\Sigma)(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Omega \\ &+ 2c_{\lambda\omega}(\Sigma)(-\Sigma + n(1-\delta))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega, \end{aligned} \tag{4.20}$$

pour $i = 1, \ldots, n$ et où l'on rappelle que $\Psi = \tilde{\xi}_i\partial_{\tilde{p}_i}$ et $\Omega = \partial_{\tilde{\xi}^i}\partial_{\tilde{p}_i}$, cf Proposition 4.1.5.

La preuve de cette proposition repose sur deux lemmes, chacun d'eux donnant la forme opératorielle attendue pour l'un des membres de l'équation d'équivariance conforme (4.19), réécrite sous la forme,

$$\left(\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} - L^{\delta}_{\bar{X}_i}\right) Q = [Q, L^{\delta}_{\bar{X}_i}]. \tag{4.21}$$

Commençons par le premier membre.

Lemme 4.2.6. *Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a l'égalité suivante,*

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} - L^{\delta}_{\bar{X}_i} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(2n\lambda\partial_{\tilde{p}^i} + \Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega - \frac{1}{2}\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega\right) \tag{4.22}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'écriture (4.10) de $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}$, ainsi que les formules des générateurs Ψ et Ω de $\mathrm{e}(p,q)^{!}_{+}$, données dans la Proposition 4.1.5, pour obtenir la formule annoncée. $\square$

Comme la différence (4.22) est un opérateur faisant strictement diminuer le degré en p, son produit avec Q, restreint aux symboles de degré 1 en p, le laisse invariant. Il reste alors à évaluer le second membre de (4.21).

Lemme 4.2.7. *Soit Q un endomorphisme de $\mathcal{S}^\delta_{\leq 1}(\mathbb{R}^n)[\xi]$ de la forme (4.18). Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a l'égalité suivante,*

$$\begin{aligned}[Q, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= 2c_d(\Sigma)(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega + n(1-\delta)\partial_{\tilde{p}^i}) \\ &+ 2c_{\gamma\psi}(\Sigma)(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Psi \\ &+ 2c_{\lambda\psi}(\Sigma)(\Sigma - n(1-\delta))(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \partial_{\tilde{p}^i}) \\ &+ 2c_{\gamma\omega}(\Sigma)(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Omega \\ &+ 2c_{\lambda\omega}(\Sigma)(-\Sigma + n(1-\delta))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega.\end{aligned} \tag{4.23}$$

La démonstration de ce lemme est effectué dans l'Annexe A, elle est de nature essentiellement calculatoire,.

Solution des contraintes d'équivariance

Grâce au Lemme 4.2.2, les cinq coefficients, polynômiaux en Σ, intervenant dans l'expression (4.18) de Q, sont déterminés sur l'espace des symboles par leur valeurs en les entiers $0, \ldots, n$. Le lemme suivant traduit le système d'équations opératorielles (4.20) en équations sur les $n+1$ valeurs de ces cinq coefficients.

Lemme 4.2.8. *Le système d'équations opératorielles (4.20) sur $\mathcal{S}^\delta_1(\mathbb{R}^n)[\xi]$ est équivalent au système d'équations suivant si $n \geq 2$,*

$$n(1-\delta)\left(c_d(0) + c_{\lambda\psi}(0)\right) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} n\lambda, \tag{4.24}$$

$$n(1-\delta)\left(c_d(n) + c_{\gamma\omega}(n)\right) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} n\lambda, \tag{4.25}$$

$$(n(1-\delta)+1)\, c_d(\kappa) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(n\lambda + \frac{1}{2}\right), \quad \text{pour } \kappa \in [\![1, n-1]\!], \tag{4.26}$$

$$c_{\gamma\psi}(\kappa)(\kappa + 2 - n\delta) = 0, \quad \text{pour } \kappa \in [\![0, n-2]\!], \tag{4.27}$$

$$c_{\lambda\omega}(\kappa)(-\kappa + 2 + n(1-\delta)) = -\frac{\hbar}{4\mathrm{i}}, \quad \text{pour } \kappa \in [\![2, n]\!] \tag{4.28}$$

$$-c_d(\kappa) + (\kappa - n\delta)c_{\gamma\omega}(\kappa) = -\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}, \quad \text{pour } \kappa \in [\![1, n-1]\!], \tag{4.29}$$

$$c_d(\kappa) + (\kappa - n(1-\delta))c_{\lambda\psi}(\kappa) = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}, \quad \text{pour } \kappa \in [\![1, n-1]\!]. \tag{4.30}$$

Démonstration. Il s'agit donc de résoudre, sur son domaine de définition $\mathcal{S}^\delta_1(\mathbb{R}^n)[\xi]$, la famille d'équations opératorielles (4.20), que doivent satisfaire les coefficients $c_d(\Sigma)$, $c_{\gamma\psi}(\Sigma)$,

$c_{\lambda\psi}(\Sigma)$, $c_{\gamma\omega}(\Sigma)$, $c_{\lambda\omega}(\Sigma)$. Utilisant le Lemme 4.2.2, et raisonnant pour i fixé [2] entre 1 et n, l'équation (4.20) est équivalente à $n+1$ équations opératorielles,

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(2n\lambda\partial_{\tilde{p}^i} + \Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega - \frac{1}{2}\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega\right) &= 2c_d(\kappa)(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega + n(1-\delta)\partial_{\tilde{p}^i}) \\
&+ 2c_{\gamma\psi}(\kappa)(\kappa+2-n\delta)\tilde{\xi}_i\Psi \qquad (4.31)\\
&+ 2c_{\lambda\psi}(\kappa)(\kappa-n(1-\delta))(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \partial_{\tilde{p}_i}) \\
&+ 2c_{\gamma\omega}(\kappa)(\kappa-n\delta)\tilde{\xi}_i\Omega \\
&+ 2c_{\lambda\omega}(\kappa)(-\kappa+2+n(1-\delta))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega,
\end{aligned}$$

où $\kappa = 0,\ldots,n$, le domaine de définition des deux membres étant $\mathcal{S}^\delta_{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)[\xi]$. Cinq opérateurs apparaissent dans cette équation, $\partial_{\tilde{p}_i}$, $\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i}$, $\tilde{\xi}_i\Omega, \tilde{\xi}_i\Psi$, $\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega$. Les deux derniers sont indépendants de tous les autres, ou nuls, sur chaque espace $\mathcal{S}^\delta_{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)[\xi]$. En effet, $\tilde{\xi}_i\Psi$ augmente de 2 le degré en $\tilde{\xi}$ et $\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega$ le diminue de 2, quand les trois autres opérateurs le laisse invariant.

On peut donc isoler, pour tout $\kappa = 0,\ldots,n$, les termes en facteur de chacun de ces deux opérateurs. Pour $\tilde{\xi}_i\Psi$, cela mène à $c_{\gamma\psi}(\kappa)(\kappa+2-n\delta)\tilde{\xi}_i\Psi = 0$, et pour $\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega$, cela conduit à $2c_{\lambda\omega}(\kappa)(-\kappa+2+n(1-\delta))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega = -\frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega$. On détermine trivialement les valeurs de κ pour lesquelles ces opérateurs sont nuls et donc ces équations triviales. On obtient d'une part,

$$c_{\gamma\psi}(\kappa)(\kappa+2-n\delta) = 0, \quad \text{pour} \quad \kappa \in [\![0, n-2]\!],$$

et d'autre part,

$$c_{\lambda\omega}(\kappa)(-\kappa+2+n(1-\delta)) = -\frac{\hbar}{4\mathsf{i}}, \quad \text{pour} \quad \kappa \in [\![2, n]\!].$$

Il nous reste à traduire les $n+1$ équations opératorielles pour les trois autres opérateurs intervenant : $\partial_{\tilde{p}^i}$, $\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i}$, $\tilde{\xi}_i\Omega$. On constate tout d'abord que seul $\partial_{\tilde{p}^i}$ est non nul sur $\mathcal{S}^\delta_{1,0}(\mathbb{R}^n)[\xi]$; il en découle que

$$n(1-\delta)\left(c_d(0) + c_{\lambda\psi}(0)\right) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}n\lambda. \qquad (4.32)$$

Ensuite, les trois opérateurs coïncidant sur $\mathcal{S}^\delta_{1,n}(\mathbb{R}^n)[\xi]$, on obtient

$$n(1-\delta)\left(c_d(n) + c_{\gamma\omega}(n)\right) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}n\lambda. \qquad (4.33)$$

Nous pouvons alors traiter en bloc les cas où $\kappa = 1,\ldots,n-1$, en spécifiant à chaque fois une fonction non nulle pour un seul des trois opérateurs. Pour cela nous utiliserons le fait que la dimension de M est $n \geq 2$. Ainsi $\partial_{\tilde{p}^i}$ et $\tilde{\xi}_i\Omega$ sont nuls sur une fonction du type $\tilde{p}_j\tilde{\xi}^i\tilde{\xi}^{j_1}\ldots\tilde{\xi}^{j_{\kappa-1}}$, avec $j \neq i, j_1,\ldots,j_{\kappa-1}$, mais pas $\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i}$. On extrait ainsi de (4.31) les

2. Chaque valeur de i conduit aux mêmes équations en les coefficients.

équations suivantes,

$$c_d(\kappa) + (\kappa - n(1-\delta))c_{\lambda\psi}(\kappa) = \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}, \quad \text{pour} \quad \kappa \in [\![1, n-1]\!]. \tag{4.34}$$

De même, sur une fonction du type $\tilde{p}_j\tilde{\xi}^j\tilde{\xi}^{j_1}\ldots\tilde{\xi}^{j_{\kappa-1}}$, où on ne somme pas sur j et où $i \neq j, j_1, \ldots, j_{\kappa-1}$, les opérateurs $\partial_{\tilde{p}^i}$ et $\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i}$ sont nuls, mais pas l'opérateur $\tilde{\xi}_i\Omega$. De (4.31) s'ensuit donc,

$$-c_d(\kappa) + (\kappa - n\delta)c_{\gamma\omega}(\kappa) = -\frac{\hbar}{2\mathsf{i}}, \quad \text{pour} \quad \kappa \in [\![1, n-1]\!]. \tag{4.35}$$

Il ne reste plus qu'à constater que les n équations opératorielles (4.31) sont équivalentes aux équations précédemment obtenues pour les coefficients, avec en plus les $n-1$ équations suivantes, venant des facteurs en $\partial_{\tilde{p}^i}$,

$$n(1-\delta)c_d(\kappa) - (\kappa - n(1-\delta))\, c_{\lambda\psi}(\kappa) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}n\lambda, \quad \text{pour} \quad \kappa \in [\![1, n-1]\!]. \tag{4.36}$$

Nous sommons enfin cette équation avec l'antépénultième (4.34), pour aboutir à

$$(n(1-\delta)+1)\,(c_d(\kappa)) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}(n\lambda + \frac{1}{2}), \quad \text{pour} \quad \kappa \in [\![1, n-1]\!],$$

et achever ainsi la preuve du lemme. □

De ce dernier lemme découle la proposition suivante.

Proposition 4.2.9. *La condition d'équivariance conforme (4.19), pour les applications $Q^{\lambda,\mu}$ de la forme (4.18), est équivalente, pour $n \geq 2$, à*

$$\begin{aligned}
(\Sigma - n\delta)c_{\gamma\psi}(\Sigma)\Gamma\Psi &= 0 \qquad (\Sigma = 2, \ldots, n) && (4.37)\\
(n(1-\delta) - \Sigma)c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega &= -\frac{\hbar}{4\mathsf{i}}\Lambda\Omega \qquad (\Sigma = 0, \ldots, n-2) && (4.38)\\
(n(1-\delta)+1)\,c_d(\Sigma) &= \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(n\lambda + \frac{1}{2}\right) \qquad (\Sigma = 0, \ldots, n) && (4.39)\\
(\Sigma - n\delta)c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega &= \left(c_d(\Sigma) - \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\right)\Gamma\Omega \qquad (\Sigma = 1, \ldots, n) && (4.40)\\
(n(1-\delta) - \Sigma)c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi &= \left(c_d(\Sigma) - \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\right)\Lambda\Psi \qquad (\Sigma = 0, \ldots, n-1), && (4.41)
\end{aligned}$$

les valeurs entre parenthèses désignant les valeurs que peuvent prendre Σ sur un monôme. Rappelons que $\Gamma = \tilde{\xi}^i\tilde{\partial}_i$ et $\Lambda = \partial_{\tilde{\xi}_i}\tilde{\partial}_i$, cf Proposition 4.1.5.

Démonstration. Soit Q donné par (4.18), vérifiant la condition d'équivariance conforme (4.19). La Proposition 4.2.5 montre alors que ses coefficients sont déterminés par l'équation opératorielle (4.20), traduite en un système d'équations sur les coefficients dans le lemme précédent. L'équation (4.27) de ce système, combinée avec le fait que $\Gamma\Psi$ augmente de 2 le degré en $\tilde{\xi}$, conduit à (4.37). De même, l'équation (4.28) combinée avec le fait que $\Lambda\Omega$ diminue de 2 le degré en $\tilde{\xi}$ conduit à (4.38).

Les équations (4.26), (4.29), (4.30), conduisent aux égalités opératorielles correspondantes, respectivement (4.39), (4.40), (4.41), sur l'espace $\bigoplus_{\kappa=1}^{n-1}\mathcal{S}^\delta_{1,\kappa}[\xi]$. Il reste à montrer ces égalités opératorielles sur $\mathcal{S}^\delta_{1,0}[\xi]$ et $\mathcal{S}^\delta_{1,n}[\xi]$.

Tout d'abord, l'équation (4.26), qui fixe $c_d(\kappa)$ pour $\kappa = 1, \ldots, n-1$,

$$(n(1-\delta)+1)\, c_d(\kappa) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(n\lambda + \frac{1}{2}\right),$$

peut être prolongée à tout κ pour obtenir l'équation (4.39). Ce choix est sans influence pour la quantification Q. En effet, D et $\Lambda\Psi$ étant égaux sur $\mathcal{S}^\delta_{1,0}[\xi]$, et D et $\Gamma\Omega$ étant égaux sur $\mathcal{S}^\delta_{1,n}[\xi]$, seules les sommes $c_d(0) + c_{\lambda\psi}(0)$ et $c_d(n) + c_{\gamma\omega}(n)$ importent, et non les valeurs individuelles des coefficients. Une fois les valeurs de $c_d(0)$ et $c_d(n)$ fixées par l'égalité(4.39), les coefficients $c_{\lambda\psi}(0)$ et $c_{\gamma\omega}(n)$ sont alors déterminés via respectivement les équations (4.24) et (4.25). Ainsi la valeur de $c_{\gamma\omega}(n)$ est donnée par

$$n(1-\delta)\,(c_d(n) + c_{\gamma\omega}(n)) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}} n\lambda,$$

où $c_d(n)$ est donné par (4.39). En ajoutant $c_d(n)$ à chaque membre on obtient alors

$$\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(n\lambda + \frac{1}{2}\right) + n(1-\delta)c_{\gamma\omega}(n) = c_d(n) + \frac{\hbar}{\mathsf{i}} n\lambda,$$

qui coïncide avec (4.40) pour $\Sigma = n$. Il suffit alors de constater que $\Gamma\Omega$ est nul sur les symboles de degré 0 en $\tilde{\xi}$ pour aboutir à l'équation opératorielle (4.40) sur $\mathcal{S}^\delta_1[\xi]$.

Le raisonnement pour obtenir la dernière équation (4.41) est le même. Le coefficient $c_{\lambda\psi}(0)$ fixé par (4.39) et (4.24) correspond à celui donné par (4.41) pour $\Sigma = 0$. La nullité de $\Lambda\Psi$ sur les symboles de degré n en $\tilde{\xi}$ conduit alors à l'équation opératorielle (4.41) sur $\mathcal{S}^\delta_1[\xi]$. □

4.2.5 La quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ des symboles de degré 1 : cas non résonant

Nous sommes désormais en mesure de montrer l'existence et unicité d'une quantification conformément équivariante des symboles de degré 1, et d'en fournir une formule explicite en coordonnées de Darboux conformes $(x^i, \tilde{p}_i, \tilde{\xi}^i)$, et ceci pour toute variété conformément plate (M, g) via le transport donné par ses cartes conformes, comme explicité en (4.17). Ce paragraphe traite le cas de valeurs génériques du poids δ des symboles. Par commodité d'écriture nous utilisons les notations suivantes : $\partial_{\tilde{p}_i} P = P^i$ et $\partial_{\tilde{\xi}^j} P = P_j$.

Théorème 4.2.10. *Soit (M,g) une variété conformément plate. Pour $n\delta \neq 1,\ldots,n+1$, il existe une unique quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_{1}$, qui s'écrit localement, en coordonnées de Darboux conformes et avec $\mathcal{N}$ l'ordre normal associé,*

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} = \mathcal{N} \circ \Big(\mathrm{Id} + c_d(\Sigma)D + c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi + c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega + c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega\Big),} \tag{4.42}$$

ou encore explicitement, pour $P \in \mathcal{S}^{\delta}_{1}[\xi]$,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) & = & \mathcal{N}(P^i)\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_i \\ & + & \mathcal{N}\Big(\left(c_d + c_{\lambda\psi}\right)\tilde{\partial}_i P^i - c_{\lambda\psi}\,\eta^{jk}\tilde{\xi}_i\tilde{\partial}_j P^i_k + c_{\gamma\omega}\,\tilde{\xi}^j\tilde{\partial}_j P^i_i + c_{\lambda\omega}\,\eta^{jk}\tilde{\partial}_j P^i_{ik}\Big)\,. \end{array}} \tag{4.43}$$

Les coefficients sont des fonctions de l'opérateur d'Euler grassmannien $\Sigma = \tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}$, donnés par

$$\begin{cases} c_d(\Sigma) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{2n\lambda+1}{2n(1-\delta)+2}, \\ c_{\lambda\psi}(\Sigma) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{n(1-\delta-2\lambda)}{(\Sigma-n(1-\delta))(2n(1-\delta)+2)}, \\ c_{\gamma\omega}(\Sigma) = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{n(1-\delta-2\lambda)}{(\Sigma-n\delta)(2n(1-\delta)+2)}, \\ c_{\lambda\omega}(\Sigma) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{1}{4(\Sigma-n(1-\delta))}. \end{cases} \tag{4.44}$$

Démonstration. Grâce au Lemme 4.2.1, la démonstration se ramène au cas plat. La Proposition B.0.16 donnée en annexe permet de se ramener au travail précédent effectué avec l'hypothèse d'invariance sous changement d'orientation de la quantification. Nous pouvons donc appliquer la Proposition 4.2.9. Vu les valeurs que peut prendre Σ dans chacune des cinq équations données, la condition $n\delta \neq 1,\ldots,n+1$ permet de diviser à chaque fois par le terme en facteur de chacun des coefficients. Cela conduit au résultat annoncé. □

4.2.6 La quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 : cas résonants

Pour les cas non résonants, la quantification conformément équivariante existe et est unique. Il existe deux types de cas résonants. Dans le premier cas l'unicité de la quantification conformément équivariante est perdue, et dans le second c'est son existence même qui fait défaut. Commençons par traiter du premier cas.

Théorème 4.2.11 (Cas résonants)**.** *Soit (M,g) une variété conformément plate. Il existe, pour $\delta = \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}$, des quantifications conformément équivariantes $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_{1}$, à condition que l'on ait, respectivement, $\lambda = \frac{n-1}{2n}$ et $\lambda = \frac{-1}{2n}$. En coordonnées de Darboux* *conformes, et avec $\mathcal{N}$ l'ordre normal associé, elle sont respectivement données par*

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}} = \mathcal{N}\circ\left(\mathrm{Id}+\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}D + a\Lambda\Psi\delta_{\Sigma,n-1}+b\Gamma\Omega\delta_{\Sigma,1}+\frac{\hbar}{4\mathrm{i}(\Sigma-n+1)}\Lambda\Omega\right),} \tag{4.45}$$

où a et b sont des constantes libres, et $\delta_{\Sigma,k}$ est nul si $\Sigma\neq k$ et égal à 1 sinon ; et par,

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\frac{-1}{2n},\frac{2n+1}{2n}} = \mathcal{N}\circ\left(\mathrm{Id}+c_d(\Sigma)D+\frac{\frac{\hbar}{\mathrm{i}}-2c_d(\Sigma)}{2(\Sigma+1)}\Lambda\Psi-\frac{\frac{\hbar}{\mathrm{i}}-2c_d(\Sigma)}{2(\Sigma-n-1)}\Gamma\Omega+\frac{\hbar}{4\mathrm{i}(\Sigma+1)}\Lambda\Omega\right),} \tag{4.46}$$

où $c_d(\Sigma)$ est maintenant un polynôme arbitraire en Σ.

Démonstration. Comme pour le Théorème 4.2.10 les coefficients sont déterminés à partir de la Proposition 4.2.9. Pour les deux valeurs de δ étudiées, les termes en facteurs de $c_{\gamma\psi}(\Sigma)$ dans (4.37) et de $c_{\lambda\omega}(\Sigma)$ dans (4.38) sont toujours non nuls ; leurs expressions précédentes sont donc inchangées.

Commençons par traiter le cas $\delta=\frac{1}{n}$. Le terme en facteur de $c_d(\Sigma)$ dans (4.39) ne s'annule jamais, l'expression de ce coefficient est donc également inchangée. Il en est de même pour $c_{\lambda\psi}(\Sigma)$ si $\Sigma<n-1$ et pour $c_{\gamma\omega}(\Sigma)$ si $\Sigma>1$. Les équations (4.40) et (4.41), pour $\Sigma=1$ et $\Sigma=n-1$ respectivement, fournissent alors $c_d=\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}$. Cela impose, vu l'équation (4.39) donnant c_d, $\lambda=\frac{n-1}{2n}$. Par ailleurs, les deux coefficients $c_{\lambda\psi}(1)$ et $c_{\gamma\omega}(1)$ sont alors des paramètres libres. Il ne reste plus qu'à substituer les valeurs de δ et λ dans les coefficients pour obtenir (4.45).

Si $\delta=\frac{n+1}{n}$, l'équation (4.39) donnant $c_d(\Sigma)$ devient $0=n\lambda+\frac{1}{2}$. Le polynôme $c_d(\Sigma)$ est alors arbitraire et on a nécessairement $\lambda=\frac{-1}{2n}$. Par contre, les équations (4.41) et (4.40) montrent clairement que $c_{\lambda\psi}(\Sigma)$ et $c_{\gamma\omega}(\Sigma)$ sont alors déterminées de façon univoque en fonction de $c_d(\Sigma)$, on obtient $c_{\gamma\omega}=\frac{c_d(\Sigma)-\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}}{\Sigma-n\delta}$ et $c_{\lambda\psi}=\frac{c_d(\Sigma)-\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}}{n(1-\delta)-\Sigma}$. En remplaçant les valeurs de λ et δ données précédemment, on aboutit à l'expression (4.46). □

Enfin, pour les valeurs de δ restantes il n'existe pas de quantification conformément équivariante.

Théorème 4.2.12. *Supposons* $\dim M=n\geq 2$. *Pour $n\delta=2,\ldots,n$, il n'existe pas de quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}:\mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}[\xi]\to\mathsf{D}^{\lambda,\mu}_{1}$.*

Démonstration. Supposons qu'une telle quantification existe. Le Lemme 4.2.1 permet de se ramener à $\mathbb{R}^n$, où la Proposition B.0.16 en annexe montre qu'un morphisme $Q:(\mathcal{S}^{\delta}_{1}(\mathbb{R}^n)[\xi],L^{\delta})\to(\mathcal{S}^{\delta}(\mathbb{R}^n)[\xi],\mathcal{L}^{\lambda,\mu})$ préservant le symbole principal, et équivariant sous l'action des similitudes, peut s'écrire sous la forme

$$Q=\mathrm{Id}+c_d(\Sigma)D+c_{\gamma\psi}(\Sigma)\Gamma\Psi+c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi+c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega+c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega. \tag{4.47}$$

La condition d'équivariance conforme (4.21) voit son membre de gauche inchangé. On peut donc encore isoler le terme dont il est en facteur pour obtenir l'équation (4.38). Celle-ci conduit à une contradiction pour $n\delta = 2, \dots, n$, dès que la dimension de M est supérieure ou égale à 2. D'où le résultat annoncé. $\square$

4.2.7 La quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 et l'axiome de réalité

Rappelons que, pour les symboles, la conjugaison a été définie en (3.110) et pour les opérateurs différentiels spinoriels, l'adjonction a été fournie par la Définition 3.4.2, pour $\lambda+\mu = 1$. Nous pouvons alors tester si la quantification conformément équivariante satisfait l'axiome de réalité : $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(\bar{P}) = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P)^*$, pour P un symbole de degré 1. C'est l'une des 3 conditions demandées par Dirac pour une quantification.

Proposition 4.2.13. *Soit $\lambda + \mu = 1$, et $\delta = \mu - \lambda$. Si $n\delta \neq 1, \dots, n+1$, alors l'unique quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta_{\leq 1} \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_1$, donnée par le Théorème 4.2.10, vérifie $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(\bar{P}) = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P)^*$ pour tout $P \in \mathcal{S}^\delta_{\leq 1}$ et s'écrit alors*

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} = \mathcal{N} \circ \left(\mathrm{Id} + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}} D + \frac{\hbar}{4\mathsf{i}(\Sigma - 2n\lambda)} \Lambda\Omega \right). \tag{4.48}$$

Si $\delta = \frac{1}{n}$ ou $\delta = \frac{n+1}{n}$, il existe alors une unique quantification conformément équivariante vérifiant $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(\bar{P}) = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P)^*$ pour tout $P \in \mathcal{S}^\delta_{\leq 1}$. Elles sont données par l'équation précédente évaluée en, respectivement, $\lambda = \frac{n-1}{2n}$ et $\lambda = -\frac{1}{2n}$.

Démonstration. Sur les symboles de degré 0, la quantification conformément équivariante coïncide avec l'ordre normal, et la conjugaison sur les symboles a été précisément définie telle que $\mathcal{N}(\bar{P}) = \mathcal{N}(P)^*$. Il nous reste donc à étudier la contrainte $Q^{\lambda,\mu}(\bar{P}) = \overline{Q^{\lambda,\mu}(P)}$ sur les symboles P de degré 1.

Comme dans le cas des fibrés cotangents, $Q = \mathrm{Id} + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}} D$ vérifie $Q(\bar{P}) = \overline{Q(P)}$ pour tout $P \in \mathcal{S}^\delta_1[\xi]$. D'autre part, la définition donnée en (3.110) de la conjugaison des symboles, montre que $\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\Lambda\Omega\bar{P} = \overline{\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\Lambda\Omega P}$ mais par contre $\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\Lambda\Psi\bar{P} = -\overline{\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\Lambda\Psi P}$, et de même pour $\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\Gamma\Psi$ et $\frac{\hbar}{\mathsf{i}}D$. Pour que $Q^{\lambda,\mu}$ vérifie $Q^{\lambda,\mu}(\bar{P}) = \overline{Q^{\lambda,\mu}(P)}$ quel que soit $P \in \mathcal{S}^\delta_1[\xi]$, il suffit donc que les coefficients en $\Lambda\Psi$ et $\Gamma\Psi$ soient nuls, et celui de D égal à $\frac{\hbar}{2\mathsf{i}}$.

C'est le cas pour $n\delta \neq 1, \dots, n+1$, grâce à la condition $\lambda + \mu = 1$ combinée avec l'expression des coefficients donnée par le Théorème 4.2.10. Pour $\delta = \frac{1}{n}$, cela impose $a = b = 0$, voir (4.45), et pour $\delta = \frac{n+1}{2n}$, cela impose $c_d(\Sigma) = \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}$, voir (4.46). Dans les trois cas on obtient bien l'expression (4.48). $\square$

4.3 Une quantification conformément invariante

Un des buts de ce chapitre est d'obtenir une formule définie globalement pour la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q} : (\mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}[\xi], L^{\delta}) \to (\mathsf{D}_1^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$, en terme de dérivées covariantes des spineurs et des symboles. A cette fin, nous construisons dans cette section une quantification conformément équivariante auxiliaire, $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$, qui est conformément invariante, i.e. qui ne dépend que de la classe conforme de la métrique. Cela permet d'en trouver une expression en terme de dérivées covariantes comme dans le cas des fibrés cotangents, traité au Paragraphe 2.3.3.

Le module de départ de la quantification $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ est l'espace $\mathcal{T}^{\delta} = \bigoplus_{\kappa=0}^{n} \mathcal{S}_{*,\kappa}^{\delta-\frac{\kappa}{n}}[\xi]$, défini en (3.107), muni de l'action naturelle de $\mathrm{Vect}(M)$ donnée par le relevée $\mathbb{L}_X^{\delta}$ à $\mathcal{M}$ des champs de vecteurs X de M, cf (4.50). L'isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathsf{ev}_g : \mathcal{T}^{\delta} \to \mathcal{S}^{\delta}[\xi]$, défini par (3.108), permet de comparer les actions, respectivement naturelle et hamiltonienne [3], de ces deux $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-modules. A partir des résultats de la section précédente, il alors aisé de construire, sur les éléments de degré 1, la *superisation* conformément équivariante $\mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$, qui est un morphisme de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module défini par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^{\delta}[\xi] \arrow[r, "\mathrm{S}^{\delta}"] & \mathcal{S}^{\delta}[\xi] \\ \mathcal{T}^{\delta}, \arrow[u, "\mathsf{ev}_g"] \arrow[ur, "\mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.49}$$

où S^{δ} préserve le symbole principal. La quantification conformément équivariante auxiliaire $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu} : (\mathcal{T},^{\delta} \mathbb{L}_X^{\delta}) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$ est alors obtenue par composition $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu} = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu} \circ \mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$. Elle admet une expression covariante qui ne dépend que de la classe conforme de la métrique. La démonstration en est donnée dans l'Annexe C, elle repose sur les lois de transformations des dérivées covariantes des spineurs et des symboles pour des changements conformes de métriques.

4.3.1 Actions hamiltonienne et naturelle sur l'espace de tenseurs $\mathcal{T}^{\delta}$

L'espace $\mathcal{T}^{\delta}$ est défini de manière équivalente en terme de tenseurs en (3.106) et en terme de symboles en (3.107). En tant qu'espace de tenseurs munis d'un poids il admet une structure naturelle de $\mathrm{Vect}(M)$-module, qui est isomorphe à celle définie par le relevé naturel de $\mathrm{Vect}(M)$ à $\mathcal{M}$ sur l'espace des symboles (3.107). Nous donnons la définition du $\mathrm{Vect}(M)$-module $\mathcal{T}^{\delta}$ en ces derniers termes, mais le nommons espace des tenseurs par opposition à l'espace des symboles $\mathcal{S}^{\delta}[\xi]$.

Définition 4.3.1. *L'espace des tenseurs* $\mathcal{T}^{\delta} = \bigoplus_{\kappa=0}^{n} \mathcal{S}_{*,\kappa}^{\delta-\frac{\kappa}{n}}[\xi]$ *est muni d'une structure de*

3. pour la structure symplectique canonique du supercotangent $\mathcal{M}$.

$\mathrm{Vect}(M)$*-module via le relevé naturel de* $X \in \mathrm{Vect}(M)$ *à* $\mathcal{M}$*, qui a pour expression*

$$\mathbb{L}_X^\delta = X^i\partial_i - p_j\partial_i X^j\partial_{p_i} + \xi^i\partial_i X^j\partial_{\xi^j} + \left(\delta - \frac{\Sigma}{n}\right)\mathrm{Div}(X). \tag{4.50}$$

Pour $X \in \mathrm{conf}(M,g)$, nous pouvons exprimer cette action en fonction de l'action hamiltonienne de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$ sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, grâce à l'isomorphisme ev_g défini en (3.108). Il s'agit de trouver comment compléter le diagramme suivant afin qu'il commute,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^\delta[\xi] \arrow[r, "L_X^\delta+?"] & \mathcal{S}^\delta[\xi] \\ \mathcal{T}^\delta \arrow[u, "\mathsf{ev}_g"] \arrow[r, "\mathbb{L}_{\mathbb{X}}^\delta"] & \mathcal{T}^\delta, \arrow[u, "\mathsf{ev}_g"'] \end{tikzcd} \tag{4.51}$$

pour les champs de vecteurs Killing-conformes X de M.

Proposition 4.3.2. *Soit* $X \in \mathrm{conf}(M,g)$*. On a alors, dans un système de coordonnées de Darboux conformes sur* $\mathcal{M}$*,*

$$\mathsf{ev}_g\mathbb{L}_X^\delta(\mathsf{ev}_g)^{-1} = L_X^\delta + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}^j(\partial_i\partial_j X^k)\partial_{\tilde{p}_i}. \tag{4.52}$$

Cela se traduit localement par $\mathsf{ev}_g\mathbb{L}_X^\delta(\mathsf{ev}_g)^{-1} = L_X^\delta$ *pour* X *une similitude infinitésimale et par*

$$\boxed{\mathsf{ev}_g\mathbb{L}_{\bar{X}_i}^\delta(\mathsf{ev}_g)^{-1} = L_{\bar{X}_i}^\delta + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i\Psi,} \tag{4.53}$$

pour les inversions conformes $\bar{X}_i$*, avec* $i = 1, \ldots, n$*.*

Démonstration. D'après la formule (4.2) donnant L_X^δ dans un système de coordonnées de Darboux conformes, on a

$$\left(L_X^\delta + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}^j(\partial_i\partial_j X^k)\partial_{\tilde{p}_i}\right) = X^i\tilde{\partial}_i + \frac{1}{2}\left((\partial_j X^i)\tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{\xi}^i} - (\partial_i X^j)\tilde{\xi}_j\partial_{\tilde{\xi}_i}\right) - \tilde{p}_j(\partial_i X^j)\partial_{\tilde{p}_i} + \delta\partial_i X^i.$$

L'isomorphisme $\mathsf{ev}_g : \mathcal{T}^\delta \to \mathcal{S}^\delta[\xi]$ vérifie $\mathsf{ev}_g(x^i) = x^i$, $\mathsf{ev}_g(p_i) = \tilde{p}_i$ et $\mathsf{ev}_g(\xi^i) = \tilde{\xi}^i|\mathrm{vol}_x|^{\frac{1}{n}}$. On a donc $(\mathsf{ev}_g)^{-1}\tilde{\partial}_i\mathsf{ev}_g = \partial_i$, $(\mathsf{ev}_g)^{-1}\partial_{\tilde{p}_i}\mathsf{ev}_g = \partial_{p_i}$ et $(\mathsf{ev}_g)^{-1}\partial_{\tilde{\xi}_i}\mathsf{ev}_g = |\mathrm{vol}_x|^{\frac{1}{n}}\partial_{\xi_i}$. On en déduit,

$$\begin{aligned} (\mathsf{ev}_g)^{-1}\left(L_X^\delta + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}^j(\partial_i\partial_j X^k)\partial_{\tilde{p}_i}\right)\mathsf{ev}_g \;&=\; X^i\partial_i + \frac{1}{2}\left((\partial_j X^i)\xi^j\partial_{\xi^i} - (\partial_i X^j)\xi_j\partial_{\xi_i}\right) \\ &\quad + (\partial_i X^i)\frac{\Sigma}{n} - p_j(\partial_i X^j)\partial_{p_i} + \left(\delta - \frac{\Sigma}{n}\right)\partial_i X^i. \end{aligned}$$

Or le terme $\Xi = \xi^i\partial_i X^j\partial_{\xi^j}$, figurant dans la formule (4.50) donnant $\mathbb{L}_X^\delta$, peut se réécrire comme la somme de deux termes, qui sont de type symétrique et antisymétrique, $\Xi = \frac{1}{2}\left((\partial_j X^i)\xi^j\partial_{\xi^i} + (\partial_i X^j)\xi_j\partial_{\xi_i}\right) + \frac{1}{2}\left((\partial_j X^i)\xi^j\partial_{\xi^i} - (\partial_i X^j)\xi_j\partial_{\xi_i}\right)$. De plus, si $X \in \mathrm{conf}(M,g)$, on a alors $\partial_i X_j + \partial_j X_i = \frac{2}{n}(\partial_k X^k)\delta_{ij}$, où les indices sont descendus au moyen de la métrique plate. Le premier terme de Ξ est donc égal à $(\partial_i X^i)\frac{\Sigma}{n}$ et le résultat suit.

Les cas particuliers des similitudes et inversions infinitésimales sont immédiats. □

Remarque 4.3.3. *L'action introduite sur $\mathcal{T}^\delta$ ne préserve pas la direction de la 1-forme canonique α introduite dans la Définition 3.1.11 d'un supercotangent. En effet pour une inversion on a $\mathsf{ev}_g\mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i}(\mathsf{ev}_g)^{-1}\alpha = 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\xi_i\beta$, avec $\beta = g_{ij}\xi^i dx^j$ la 1-forme canonique impaire.*

4.3.2 La superisation conformément équivariante des tenseurs de degré 1

Nous définissons la notion de superisation conformément équivariante, puis justifions cette appellation et en obtenons une formule explicite.

Définition 4.3.4. *Soit (M,g) une variété conformément plate. Une superisation conformément équivariante $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$ est un morphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}} : (\mathcal{T}^\delta, \mathbb{L}^\delta) \to (\mathcal{S}^\delta[\xi], L^\delta)$, tel qu'il existe une application S^δ préservant le symbole principal et rendant le diagramme suivant commutatif,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^\delta[\xi] \arrow[r, "\mathrm{S}^\delta"] & \mathcal{S}^\delta[\xi] \\ \mathcal{T}^\delta. \arrow[u, "\mathsf{ev}_g"] \arrow[ur, "\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.54}$$

La condition de préservation du symbole principal fait de S^δ une application inversible et de $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$ un isomorphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules.

Expliquons pourquoi $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$ est appelée une superisation. L'espace des symboles des opérateurs différentiels scalaires $\mathcal{S}^\delta$ a été défini en (2.33), il satisfait $\mathcal{S}^\delta \simeq \mathcal{S}^\delta_{*,0}[\xi]$. Sa structure de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module est fournie par l'action des champs $X \in \mathrm{conf}(M,g)$, écrite en (2.34). Il suffit de comparer avec l'expression (4.50) donnant l'action de $X \in \mathrm{conf}(M,g)$ sur $\mathcal{T}^\delta$ pour conclure que $\mathcal{S}^\delta$ s'identifie à $\mathcal{T}^\delta_{*,0}$ en tant que $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module. Ainsi l'application $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$ est nommée superisation, car elle induit le plongement de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}} : \mathcal{S}^\delta \hookrightarrow \mathcal{S}^\delta[\xi]$.

Supposons que $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}} = \mathrm{S}^\delta \circ \mathsf{ev}_g$ soit une superisation conformément équivariante, alors $\mathrm{S}^\delta : (\mathcal{S}^\delta[\xi], \mathsf{ev}_g\mathbb{L}^\delta_X(\mathsf{ev}_g)^{-1}) \to (\mathcal{S}^\delta[\xi], L^\delta)$ est un morphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules préservant le symbole principal. Comme les dérivées de Lie $\mathsf{ev}_g\mathbb{L}^\delta_X(\mathsf{ev}_g)^{-1}$ et L^δ_X coïncident sur les similitudes d'après la Proposition 4.3.2, nous pouvons appliquer la Proposition 4.2.4 qui fournit les isomorphismes de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ préservant le symbole principal et équivariants sous l'action des similitudes. En effet, l'Annexe B permet une fois de plus d'assurer l'hypothèse requise d'invariance par changement d'orientation. Ainsi, S^δ est de la forme (4.18). Il suffit alors, comme pour obtenir la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$, d'implémenter la contrainte d'équivariance sous les inversions pour obtenir $\mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$.

Proposition 4.3.5. *Soit* (M, g) *une variété conformément plate. Si* $n\delta = 2, \ldots, n$ *il n'existe pas de superisation conformément équivariante des symboles de degré* 1. *Dans le cas contraire, il existe une unique superisation conformément équivariante* $\mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}^{\delta}_{\leq 1} \to \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}[\xi]$, *qui est donnée par*

$$\boxed{\mathrm{S}_{\mathcal{T}} = (\mathrm{Id} + c_{\mathrm{S}}(\Sigma)\Gamma\Psi) \circ \mathsf{ev}_g,} \tag{4.55}$$

avec $c_{\mathrm{S}}(\Sigma) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}} \frac{1}{n\delta - \Sigma}$.

Démonstration. Soit $\mathrm{S}_{\mathcal{T}} = \mathrm{S} \circ \mathsf{ev}_g$ une superisation conformément équivariante. La Proposition 4.2.4 montre alors que

$$\mathrm{S} = \mathrm{Id} + c^{\mathrm{S}}_{d}(\Sigma)D + c^{\mathrm{S}}_{\gamma\psi}(\Sigma)\Gamma\Psi + c^{\mathrm{S}}_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi + c^{\mathrm{S}}_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega + c^{\mathrm{S}}_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega,$$

et l'équivariance sous les inversions (4.21) conduit à $-[\mathrm{S}, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] = \left(\mathsf{ev}_g \mathbb{L}^{\delta}_{\bar{X}_i} (\mathsf{ev}_g)^{-1} - L^{\delta}_{\bar{X}_i}\right) \mathrm{S}$. En utilisant le Lemme 4.2.7 on obtient l'expression du commutateur, et celle du second membre est fournie par (4.53). L'application S est ainsi déterminée par l'égalité opératorielle suivante sur $\mathcal{S}^{\delta}_{1}[\xi]$,

$$\begin{aligned} -2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i\Psi &= 2c^{\mathrm{S}}_{d}(\Sigma)(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega + n(1-\delta)\partial_{\tilde{p}^i}) \\ &+ 2c^{\mathrm{S}}_{\gamma\psi}(\Sigma)(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Psi \\ &+ 2c^{\mathrm{S}}_{\lambda\psi}(\Sigma)(\Sigma - n(1-\delta))(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \partial_{\tilde{p}^i}) \\ &+ 2c^{\mathrm{S}}_{\gamma\omega}(\Sigma)(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Omega \\ &+ 2c^{\mathrm{S}}_{\lambda\omega}(\Sigma)(-\Sigma + n(1-\delta))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Le terme en facteur de $c^{\mathrm{S}}_{\gamma\psi}$ est le seul augmentant de 2 le degré en $\tilde{\xi}$, on en déduit donc,

$$\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i\Psi = c^{\mathrm{S}}_{\gamma\psi}(\Sigma)(n\delta - \Sigma)\tilde{\xi}_i\Psi.$$

Sur le domaine $\mathcal{S}^{\delta}_{1}[\xi]$ de cette équation, Σ peut prendre toutes les valeurs entre 2 et n, ce qui mène à une contradiction pour $n\delta = 2, \ldots, n$, et donc à l'absence de superisation conformément équivariante. Si $n\delta \neq 2, \ldots, n$ le coefficient $c^{\mathrm{S}}_{\gamma\psi}$ est égal au coefficient c_{S} annoncé. Il reste à montrer que les autres coefficients sont nuls. Or ils sont déterminés de manière équivalente par le système (4.20) en substituant $\frac{\hbar}{\mathsf{i}}$ par 0. Sa résolution a été effectuée indépendamment de la valeur de $\frac{\hbar}{\mathsf{i}}$, elle est donnée dans la Proposition 4.2.9. En remplaçant alors $\frac{\hbar}{\mathsf{i}}$ par 0, on en conclut que tous les coefficients sont nuls. $\square$

Corollaire 4.3.6. *Si $\delta \neq \frac{2}{n}$, il existe une unique superisation conformément équivariante $\mathrm{S}^\delta_\mathcal{T} : \mathcal{S}^\delta_{\leq 1} \hookrightarrow \mathcal{S}^\delta_{\leq 1}[\xi]$, et sur un symbole $P = P^i p_i \in \mathcal{S}^\delta_1$, elle est donnée par*

$$\mathrm{S}^\delta_\mathcal{T}(P) = P^i \tilde{p}_i + \frac{\hbar}{\mathsf{i}} \frac{1}{n\delta - 2} \tilde{\xi}^i \tilde{\xi}_j \partial_i P^j. \tag{4.57}$$

Remarque 4.3.7. *La superisation conformément équivariante $\mathrm{S}^0_\mathcal{T}$ n'est pas induite par le plongement canonique $\mathcal{C}^\infty(T^*M) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.*

4.3.3 La quantification conformément équivariante auxiliaire $\mathcal{Q}_\mathcal{T}$

Nous définissons la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}_\mathcal{T} = \mathcal{N} \circ \mathsf{ev}_g (Q_\mathcal{T})$ comme le morphisme de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-modules $\mathcal{Q}_\mathcal{T} : (\mathcal{T}^\delta, \mathbb{L}^\delta) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$ tel que $Q_\mathcal{T}$ préserve le symbole principal. Nous pouvons alors résumer la situation par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
& & \mathsf{D}^{\lambda,\mu} \\
\mathcal{S}^\delta[\xi] \arrow[r, "\mathrm{S}"'] & \mathcal{S}^\delta[\xi] \arrow[r, "\mathcal{Q}"] \arrow[ur, "\mathcal{Q}"] & \mathcal{S}^\delta[\xi] \arrow[u, "\mathcal{N}"'] \\
\mathcal{T}^\delta \arrow[u, "\mathsf{ev}_g"'] \arrow[ur, "\mathrm{S}_\mathcal{T}"'] \arrow[rr, "Q_\mathcal{T}"'] \arrow[uurr, bend left=60, "\mathcal{Q}_\mathcal{T}"] & & \mathcal{T}^\delta . \arrow[u, "\mathsf{ev}_g"']
\end{tikzcd} \tag{4.58}$$

Ainsi $\mathcal{Q}_\mathcal{T}$ est simplement donné par la composition $\mathcal{Q} \circ \mathrm{S}_\mathcal{T}$, où la superisation $\mathrm{S}_\mathcal{T}$ est explicitée en (4.55) et la quantification $\mathcal{Q}$ est écrite en (4.43), (4.45) et (4.46) suivant la valeur de δ.

Proposition 4.3.8. *Soit (M, g) une variété conformément plate. La quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_\mathcal{T} : (\mathcal{T}^\delta_{\leq 1}, \mathbb{L}^\delta) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}_1, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$, existe si et seulement si la superisation conformément équivariante $\mathrm{S}^\delta_\mathcal{T}$ et la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : (\mathcal{S}^\delta_{\leq 1}[\xi], L^\delta) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}_1, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$ existent. Elle vérifie alors $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_\mathcal{T} = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu} \circ \mathrm{S}^\delta_\mathcal{T}$, ce qui se réécrit selon*

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_\mathcal{T} = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu} \circ \mathsf{ev}_g + \mathcal{N} \left(c_\mathrm{S} \Gamma \Psi \right) \mathsf{ev}_g. \tag{4.59}$$

ou encore explicitement pour $n\delta \neq 1, \ldots, n+1$,

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_\mathcal{T} = \mathcal{N} \Big(\mathrm{Id} + c_\mathrm{S}(\Sigma) \Gamma \Psi + c_d(\Sigma) D + c_{\lambda\psi}(\Sigma) \Lambda \Psi + c_{\gamma\omega}(\Sigma) \Gamma \Omega + c_{\lambda\omega}(\Sigma) \Lambda \Omega \Big) \mathsf{ev}_g,} \tag{4.60}$$

les coefficients étant les polynômes en Σ déterminées dans la Proposition 4.3.5 et le Théorème 4.2.10.

Démonstration. Si $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{Q}$ existent $\mathcal{Q}\circ\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ définit bien une quantification conformément équivariante sur $\mathcal{T}^\delta$, et la formule fournit est immédiate en passant par $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}} = \mathcal{N}\left(Q\circ\mathrm{S}\right)\mathsf{ev}_g$ et en constatant que $Q\circ\mathrm{S} = Q + \mathrm{S} - \mathrm{Id}$.

Montrons que l'existence de $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{Q}$ simultanément est équivalente à celle de $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$. L'existence de $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ est déterminée par celle d'une application $Q\circ\mathrm{S}$ de la forme (4.18) et vérifiant $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}(Q\circ\mathrm{S}) = (Q\circ\mathrm{S})\mathsf{ev}_g\mathbb{L}^{\delta}_{\bar{X}_i}(\mathsf{ev}_g)^{-1}$, i.e.

$$\left(\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} - \mathsf{ev}_g\mathbb{L}^{\delta}_{\bar{X}_i}(\mathsf{ev}_g)^{-1}\right) Q\circ\mathrm{S} = \left[Q\circ\mathrm{S}, L^{\delta}_{\bar{X}_i}\right].$$

Le membre de gauche se déduit alors des expressions (4.10) et (4.53) donnant respectivement $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} - L^{\delta}_{\bar{X}_i}$ et $L^{\delta}_{\bar{X}_i} - \mathsf{ev}_g\mathbb{L}^{\delta}_{\bar{X}_i}(\mathsf{ev}_g)^{-1}$. Le membre de droite a déjà été calculé dans le Lemme 4.2.7, d'où au final le système

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(2n\lambda\partial_{\tilde{p}^i} + 2\tilde{\xi}_i\Psi + \Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega - \frac{1}{2}\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega\right) &= 2c^{\mathcal{T}}_d(\Sigma)(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega + n(1-\delta)\partial_{\tilde{p}^i})\\
&+ 2c^{\mathcal{T}}_{\gamma\psi}(\Sigma)(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Psi \qquad (4.61)\\
&+ 2c^{\mathcal{T}}_{\lambda\psi}(\Sigma)(\Sigma - n(1-\delta))(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \partial_{\tilde{p}^i})\\
&+ 2c^{\mathcal{T}}_{\gamma\omega}(\Sigma)(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Omega\\
&+ 2c^{\mathcal{T}}_{\lambda\omega}(\Sigma)(-\Sigma + n(1-\delta))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega.
\end{aligned}$$

Le résoudre est équivalent à résoudre indépendamment les deux systèmes (4.20) et (4.56) déterminant respectivement Q et S, et les coefficients déterminés par ces 3 systèmes vérifient alors $c^{\mathcal{T}} = c^{\mathrm{S}} + c$. Explicitement, le coefficient $c^{\mathcal{T}}_{\gamma\psi}$ est égal au coefficient c_{S} intervenant dans la superisation, il est donné dans la Proposition 4.3.5, et les 4 autres coefficients coïncident avec ceux déterminant la quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$, obtenus à partir de (4.2.9). L'existence de $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ est donc équivalente à l'existence simultanée de Q et S. Cela redémontre également les formules données pour $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$. □

La proposition précédente permet de quantifier les symboles obtenus par superisation de $\mathcal{S}^{\delta}_1$, on obtient ainsi la quantification conformément équivariante des symboles $\mathcal{S}^{\delta}_1$ à valeurs dans les opérateurs différentiels spinoriels.

Corollaire 4.3.9. *Si $\delta \neq \frac{2}{n}$, il existe une unique quantification conformément équivariante $\mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1} \hookrightarrow \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_1$, et sur un symbole $P = P^i p_i \in \mathcal{S}^{\delta}_1$, elle est donnée par*

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}(P) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(\partial_i + \frac{\lambda}{1-\delta}\partial_i P^i\right) + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathcal{N}\left(\frac{1}{n\delta - 2}\tilde{\xi}^i\tilde{\xi}_j\partial_i P^j\right). \qquad (4.62)$$

4.3.4 Invariance conforme de la quantification $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$

Nous obtenons ici la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ des symboles de degré 1 en les impulsions en terme de dérivées covariantes.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ est une quantification conformément invariante, ce qui se traduit par une expression locale en coordonnées naturelles ne dépendant pas de la métrique conformément plate g choisie. En effet, l'identification locale $\mathcal{N}\circ \mathsf{ev}_g : \mathcal{T}^\delta \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ ainsi que les actions $\mathbb{L}^\delta_{\mathbb{X}}$ et $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X$, caractérisant $Q_{\mathcal{T}}$, vérifient cette propriété. Comme dans le Paragraphe 2.3.3, traitant du cas des fibrés cotangents, il reste alors à trouver une expression covariante pour $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ qui soit invariante conforme et qui redonne l'expression trouvée dans le cas plat.

Commençons par le calcul des expressions des dérivées covariantes des spineurs et des tenseurs de $\mathcal{T}^\delta$ en coordonnées naturelles sur $\mathcal{M}$.

Dérivées covariantes des spineurs et des symboles

La dérivée covariante des spineurs a été définie au chapitre précédent, et la formule (3.66) fournit son expression dans un repère orthonormé. Nous donnons désormais l'écriture de la dérivée covariante des spineurs de poids λ en coordonnées naturelles sur une variété conformément plate.

Proposition 4.3.10. *Sur une variété conformément plate (M,g), munie des coordonnées conformes (x^i), telles que $g_{ij}=F\eta_{ij}$, la dérivée covariante des spineurs de poids λ a pour expression,*

$$\nabla^\lambda_i=\partial_i-\frac{1}{8F}[\gamma_i,\gamma^j]F_j-\frac{n\lambda}{2F}F_i, \tag{4.63}$$

où $F_i=\partial_iF$, $\gamma_i=\gamma(\partial_i)$, et $\gamma^j=g^{ij}\gamma_i$.

Démonstration. Tout d'abord, si ∇ est la dérivée covariante des spineurs de poids nul et ∇^λ est celle des spineurs de poids λ, on a alors

$$\nabla^\lambda_i=\nabla_i-\lambda\Gamma_i,$$

avec $\Gamma_i=\Gamma^j_{ij}=\frac{nF_i}{2F}$. Il suffit donc désormais de calculer la dérivée covariante des spineurs de poids nul. Pour cela, on introduit $(e_a)_{a=1,\dots,n}$ un repère orthonormal de (M,g). Il est relié au repère naturel $(\partial_i)_{i=1,\dots,n}$, défini par les champs de vecteurs associés aux coordonnées x^i, via le changement de repère $e^i_a=F^{-\frac12}\delta^i_a$, d'inverse $\theta^a_i=F^{\frac12}\delta^a_i$. Rappelons la formule (3.25) de la 1-forme de la connexion de Levi-Civita

$$\omega^b_a=\theta^b_k\left(de^k_a+\Gamma^k_{ji}e^j_adx^i\right), \tag{4.64}$$

avec Γ^k_{ji} le symbole de Christoffel de la connexion de Levi-Civita, qui vérifie dans le cas conformément plat $\Gamma^k_{ji}=\frac{1}{2F}\left(F_j\delta^k_i+F_i\delta^k_j-F^kg_{ij}\right)$. La dérivée covariante des spineurs (3.66) est alors donnée par

$$\nabla_i=\partial_i+\frac14\omega^b_{ai}\gamma^a\gamma_b, \tag{4.65}$$

où $\gamma^a = \gamma(\eta^{ac}e_c)$ et $\gamma_b = \gamma(e_b)$. De l'expression de ω^a_b, donnée en (4.64), il découle alors $\omega^b_{ai}\gamma^a\gamma_b = \frac{1}{2F}\left(F_j\gamma^j\gamma_i - F^k\gamma_i\gamma_k\right)$, où $\gamma_i = \gamma(\partial_i)$ et $\gamma^j = g^{ij}\gamma_i$. On obtient donc au final,

$$\nabla_i = \partial_i - \frac{1}{8F}[\gamma_i, \gamma^j]F_j, \tag{4.66}$$

ce qui permet de conclure. □

La formule (3.35) définit la dérivation horizontale sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, associée à la connexion de Levi-Civita. L'espace $\mathcal{T}^\delta$, vu comme espace de fonctions sur $\mathcal{M}$, admet donc une dérivation horizontale donnée par

$$\partial_i^\nabla = \partial_i + \Gamma^k_{ij}p_k\partial_{p_j} - \Gamma^k_{ij}\xi^j\partial_{\xi^k} - \left(\delta - \frac{\xi^i\partial_{\xi^i}}{n}\right)\Gamma_i, \tag{4.67}$$

où $\Gamma_i = \Gamma^j_{ij}$. On en déduit son expression en coordonnées conformes,

$$\partial_i^\nabla = \partial_i + \frac{1}{2F}\left(F_i\mathcal{E} + F_kp_i\partial_{p_k} - F^jp_j\partial_{p^i}\right) - \frac{1}{2F}\left(F_k\xi^k\partial_{\xi^i} - F^j\xi_i\partial_{\xi^j}\right) - \frac{n\delta}{2F}F_i. \tag{4.68}$$

Détermination d'une quantification conformément invariante

Nous appellerons quantification, dans la suite de ce paragraphe, la famille d'applications suivante.

Définition 4.3.11. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne quelconque, ∇ la connexion de Levi-Civita et $P \in \mathcal{T}_1^\delta$. On appelle quantification les applications linéaires préservant le symbole principal $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g} : \mathcal{T}_1^\delta \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, données par*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g}(P) \quad &= \quad \mathcal{N}\circ \mathsf{ev}_g(P^i)\,\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\nabla_i^\lambda \\ &+\mathcal{N}\circ \mathsf{ev}_g\left(c_0\,\tilde{g}_{ik}\xi^j\xi^k\partial_j^\nabla P^i + c_1\partial_i^\nabla P^i + c_2\,g^{ij}g_{kl}\xi^l\partial_i^\nabla P^k_j + c_3\,\xi^i\partial_i^\nabla P^j_j + c_4\,\tilde{g}^{ij}\partial_i^\nabla P^k_{kj}\right),\end{aligned} \tag{4.69}$$

où les coefficients $c_0, \ldots, c_4$, sont des polynômes en Σ, $P^i = \partial_{p_i}$, $P_i = \partial_{\xi^i}P$, et enfin $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}|\mathrm{vol}_g|^{-\frac{2}{n}}$, $\tilde{g}^{ij} = g^{ij}|\mathrm{vol}_g|^{\frac{2}{n}}$.

Les termes facteurs de c_0 et de c_4 se voient affectés d'un poids pour qu'ils soient encore dans $\mathcal{T}^\delta$, sachant qu'ils changent le degré en ξ de respectivement $+2$ et -2. Remarquons que $\tilde{g}$ est un invariant conforme. Pour une métrique conformément plate on a $\tilde{g}_{ij} = \eta_{ij}|\mathrm{vol}_x|^{-\frac{2}{n}}$, avec $|\mathrm{vol}_x|$ la forme volume locale donnée par un système de coordonnées conforme $\mathrm{vol}_x = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Nous déterminons désormais, dans la classe d'applications précédemment définie, celles qui sont invariantes sous changement conforme de métrique.

Théorème 4.3.12. *Soit $g' = Fg$ une métrique conforme à g, sur une variété M. La quantification $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},*}$ est invariante conforme, i.e.*

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g'} = \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g}, \tag{4.70}$$

si et seulement si $c_0 = c_{\mathrm{S}}$, $c_1 = c_d + c_{\lambda\psi}$, $c_2 = -c_{\lambda\psi}$, $c_3 = c_{\gamma\psi}$ et $c_4 = c_{\lambda\omega}$; ces polynômes étant donnés respectivement dans la Proposition 4.3.5 et la Proposition 4.2.9.

La quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu}$ coïncide avec la quantification conformément invariante $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g}$ sur les variétés (M,g) conformément plates.

La démonstration, technique, de ce théorème est donnée dans l'Annexe C. Remarquons que les coefficients $c_1, \ldots, c_4$ de la quantification $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g}$ sont données, en fonctions des coefficients $c_d, \ldots, c_{\lambda\omega}$, par les mêmes expressions que ceux intervenant dans l'écriture (4.43) de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$. L'écriture covariante de $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu}$ est donc obtenue en substituant les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes.

4.4 Formulation covariante de la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1

Nous pouvons désormais formuler en termes covariants la quantification des symboles $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : (\mathcal{S}_1^\delta[\xi], L^\delta) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$, déterminée par les Théorèmes 4.2.10 et 4.2.11 en coordonnées conformes, sur une variété conformément plate quelconque. Pour cela nous allons nous appuyer sur la Proposition 4.3.8 qui l'exprime à partir de la quantification $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu} : (\mathcal{T}_1^\delta, \mathbb{L}_{\mathbb{X}}^\delta) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$, ainsi que sur le Théorème 4.3.12 qui fournit une écriture covariante de $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu}$. Nous en déduisons une formulation covariante pour la superisation également.

Rappelons que la dérivée horizontale des symboles $\mathcal{S}_1^\delta[\xi]$ est donnée par (3.35) et celle des spineurs de poids λ par (4.63).

4.4.1 Le cas non résonant

Théorème 4.4.1. *Soit (M,g) une variété conformément plate, et $P \in \mathcal{S}_1^\delta[\xi]$. Pour $n\delta \neq 1, \ldots, n+1$, l'unique quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}_{\leq 1}^\delta[\xi] \to \mathsf{D}_1^{\lambda,\mu}$ donnée dans le Théorème 4.2.10 admet pour écriture covariante*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) \;=\; & \mathcal{N}(P^i)\, \tfrac{\hbar}{\mathrm{i}} \nabla_i^\lambda \\ & + \mathcal{N}\Big((c_d + c_{\lambda\psi})\, \partial_i^\nabla P^i - c_{\lambda\psi}\, g^{ij} g_{kl} \xi^l \partial_i^\nabla P_j^k + c_{\gamma\omega}\, \xi^i \partial_i^\nabla P_j^j + c_{\lambda\omega}\, g^{ij} \partial_i^\nabla P_{kj}^k \Big), \end{aligned}} \tag{4.71}$$

où les coefficients sont déterminés par (4.44), et $P^i = \partial_{p_i} P$, $P_i = \partial_{\xi^i} P$.

Démonstration. Par linéarité de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ il suffit de montrer (4.71) pour un monôme $P \in \mathcal{S}^{\delta}_{1,\kappa}[\xi]$. Notons $\tilde{\mathcal{Q}}$ l'application donnée par la formule (4.71). On doit ainsi montrer $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) = \tilde{\mathcal{Q}}(P)$. La démonstration est la même que l'on soit dans un cas résonant ou pas. Or, d'après la Proposition 4.3.8, on a $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}(\mathsf{ev}_g)^{-1} - \mathcal{N}\left(c_{\mathrm{S}}\Gamma\Psi\right)$. Calculons donc tout d'abord $(\mathsf{ev}_g)^{-1}(P)$. Utilisant (3.46), on obtient $p_i = \tilde{p}_i + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\frac{F_j}{F}\tilde{\xi}^j\tilde{\xi}_i$. De la Définition (3.108) de ev_g, P étant de degré 1 en p, il découle que

$$(\mathsf{ev}_g)^{-1}(P) = |\mathrm{vol}_g|^{-\frac{\kappa}{n}}P + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}(\mathsf{ev}_g)^{-1}\left(\frac{F_i}{2F}\tilde{\xi}^i\Psi P\right).$$

Comme ΨP est de degré zéro en p, on a donc

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}\left(|\mathrm{vol}_g|^{-\frac{\kappa}{n}}P\right) - \mathcal{N}\left(c_{\mathrm{S}}\Gamma\Psi P\right) + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\mathcal{N}\left(\frac{F_i}{2F}\tilde{\xi}^i\Psi P\right). \tag{4.72}$$

La dérivation horizontale invariant vol_g, et ev_g étant la multiplication par $|\mathrm{vol}_g|^{\frac{\kappa}{n}}$ sur $\mathcal{S}^{*}_{0,\kappa}[\xi]$, le Théorème 4.3.12 donnant l'expression covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$ conduit à

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}\left(|\mathrm{vol}_g|^{-\frac{\kappa}{n}}P\right) \;=\;& \mathcal{N}(P^i)\,\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\nabla^{\lambda}_i \\ &+\mathcal{N}\left(c_0\, g_{ik}\xi^j\xi^k\partial^{\nabla}_j P^i + c_1\partial^{\nabla}_i P^i + c_2\, g^{ij}g_{kl}\xi^l\partial^{\nabla}_i P^k_j\right) \\ &+\mathcal{N}\left(c_3\,\xi^i\partial^{\nabla}_i P^j_j + c_4\, g^{ij}\partial^{\nabla}_i P^k_{kj}\right).\end{aligned}$$

Les coefficients $c_1, \ldots, c_4$ étant identiques à ceux intervenant dans la formule (4.71), qui définit dans cette démonstration $\tilde{\mathcal{Q}}$, et c_0 étant égal à c_{S}, nous avons

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}\left(|\mathrm{vol}_g|^{-\frac{\kappa}{n}}P\right) = \tilde{\mathcal{Q}}(P) + \mathcal{N}\left(c_{\mathrm{S}}\xi^j\xi_i\partial^{\nabla}_j P^i\right). \tag{4.73}$$

Par combinaison avec l'équation (4.72), nous obtenons

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) - \tilde{\mathcal{Q}}(P) = \mathcal{N}\left(c_{\mathrm{S}}\xi^j\xi_i(\partial^{\nabla}_j - \partial_j)P^i + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\frac{F_i}{2F}\xi^i\Psi P\right),$$

qui est bien nul grâce à l'égalité (C.11) et à l'expression de c_{S} donnée dans la Proposition 4.3.5. □

Remarque 4.4.2. *Comme au final $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$, l'équation (4.73) obtenue dans la preuve permet de faire le lien entre les deux quantifications $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ et $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}_{\mathcal{T}}$ pour un symbole de degré 1 en p et homogène de degré κ en ξ.*

Remarque 4.4.3. *La comparaison avec la formule (4.43) donnant $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ en coordonnées conformes montre que l'écriture covariante de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ est obtenue simplement en substituant les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes.*

4.4.2 Les cas résonants

Rigoureusement la même démonstration s'applique aux cas résonants $\delta = \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}$, qui sont traités par le Théorème 4.2.11. Il en résulte le théorème suivant.

Théorème 4.4.4. *Soit (M, g) une variété conformément plate, et $P \in \mathcal{S}_1^\delta[\xi]$. On note encore $P^i = \partial_{p_i} P$, $P_i = \partial_{\xi^i} P$. Les deux quantifications résonantes données dans le Théorème 4.2.11, ont pour expressions*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}(P) &= \mathcal{N}(P^i)\,\tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla_i^\lambda \\ &\quad + \tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\mathcal{N}\left(\tfrac{1}{2}\partial_i^\nabla P^i + a\,\delta_{\Sigma,n-1}\,g^{ij}g_{kl}\xi^l\partial_i^\nabla P_j^k + b\,\delta_{\Sigma,1}\,\xi^i\partial_i^\nabla P_j^j + \tfrac{1}{4(\Sigma-n+1)}\,g^{ij}\partial_i^\nabla P_{kj}^k\right), \end{aligned}} \tag{4.74}$$

où a et b sont des constantes libres, et $\delta_{\Sigma,k}$ est nul si $\Sigma \neq k$ et égal à 1 sinon ; et,

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\frac{-1}{2n},\frac{2n+1}{2n}}(P) &= \mathcal{N}(P^i)\,\tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla_i^\lambda \\ &\quad + \tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\mathcal{N}\left(c_d(\Sigma)\,\partial_i^\nabla P^i + \tfrac{1-2c_d(\Sigma)}{2(\Sigma+1)}\,g^{ij}g_{kl}\xi^l\partial_i^\nabla P_j^k - \tfrac{1-2c_d(\Sigma)}{2(\Sigma-n-1)}\,\xi^i\partial_i^\nabla P_j^j + \tfrac{1}{4(\Sigma+1)}\,g^{ij}\partial_i^\nabla P_{kj}^k\right), \end{aligned}} \tag{4.75}$$

où $c_d(\Sigma)$ est maintenant un polynôme arbitraire en Σ.

4.4.3 Formulation covariante de la superisation conformément équivariante des tenseurs de degré 1

Comme la quantification $\mathcal{Q}_\mathcal{T}^{\lambda,\mu} : (\mathcal{T}_{\leq 1}^\delta, \mathbb{L}_\mathbb{X}^\delta) \to (\mathsf{D}_1^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$ est égale à $\mathcal{Q}_\mathcal{T}^{\lambda,\mu} = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu} \circ \mathrm{S}_\mathcal{T}^\delta$, on déduit la formulation covariante de $\mathrm{S}_\mathcal{T}^\delta$ directement de celle de $\mathcal{Q}_\mathcal{T}^{\lambda,\mu}$ et $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$.

Corollaire 4.4.5. *La superisation conformément équivariante $\mathrm{S}_\mathcal{T}^\delta : (\mathcal{T}_1^\delta, \mathbb{L}_\mathbb{X}^\delta) \to (\mathcal{S}_1^\delta[\xi], L^\delta)$ a pour expression, sur un tenseur $P_{j_1\ldots j_\kappa}^i \xi^{j_1}\ldots\xi^{j_\kappa} p_i \in \mathcal{T}_1^\delta$,*

$$\mathrm{S}_\mathcal{T}^\delta(P) = P_{j_1\ldots j_\kappa}^i \xi^{j_1}\ldots\xi^{j_\kappa} p_i + \frac{\hbar}{\mathrm{i}(n\delta - \Sigma)}\xi^i\xi_j\partial_i^\nabla P^j. \tag{4.76}$$

4.5 Existence et unicité de la quantification conformément équivariante en degré quelconque

Nous allons désormais prouver l'existence et l'unicité de la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : (\mathcal{S}^\delta[\xi], L^\delta) \to (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$ sur les symboles de degré arbitraire et pour un shift δ générique. Comme le montrent les Théorèmes 4.2.11 et 4.2.12 portant sur la quantification des symboles de degré 1, il existe des valeurs de δ pour lesquelles la quantification conformément équivariante n'est pas unique et d'autres pour lesquelles elle n'existe pas. Encore une fois, le Lemme 4.2.1 permet de travailler sur $\mathbb{R}^n$, avec l'espace des opérateurs différentiels spinoriels identifié à l'espace des symboles. Comme dans le cas d'un fibré cotangent, traité au Paragraphe 2.3.4, la démonstration repose sur la diagonalisation de l'opérateur de Casimir classique C^δ, écrit en (4.81), et de l'opérateur de Casimir quantique $C^{\lambda,\mu}$, donné par (4.82).

Nous énonçons en fait deux théorèmes d'existence et unicité portant respectivement sur la superisation conformément équivariante $\mathrm{S}_{\mathcal{T}} : (\mathcal{T}^\delta, \mathbb{L}^\delta) \to (\mathcal{S}^\delta[\xi], L^\delta)$ et la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$. Les valeurs résonantes pour la superisation sont déterminées explicitement mais l'obtention de celles de la quantification semble hors de portée, nous montrons uniquement qu'elles sont dans un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$.

La suite de la section est consacrée à la démonstration de ces deux théorèmes. Nous commençons pour cela par calculer les 3 opérateurs de Casimirs des 3 modules en jeu. Nous donnons ensuite, dans un cadre englobant les situations des deux théorèmes, une stratégie de preuve commune. Elle ramène la démonstration des deux théorèmes à la diagonalisation des 3 opérateurs de Casimir. L'essentiel du travail consiste alors à diagonaliser l'opérateur de Casimir $C^\delta_{\mathcal{T}}$ du module $\mathcal{T}^\delta$. En effet, les deux autres Casimirs étant la somme de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ avec un opérateur nilpotent, faisant strictement diminuer le degré en p, leur diagonalisation se ramène à la résolution de systèmes linéaires triangulaires.

4.5.1 Les résultats

La superisation

Rappelons que la notion de superisation conformément équivariante est donnée dans la Définition 4.3.4, et que cette superisation a été déterminée explicitement sur les symboles de degré 1 dans la Proposition 4.3.5.

Théorème 4.5.1. *Soit (M,g) une variété conformément plate et $I_\mathrm{S} = \{\frac{k+1}{n} \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Si $\delta \notin I_S$, il existe alors une unique superisation conformément équivariante*

$$\boxed{\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}^\delta \to \mathcal{S}^\delta[\xi].} \tag{4.77}$$

La preuve de ce théorème nécessite le calcul et la diagonalisation des opérateurs de Casimir $C^\delta_{\mathcal{T}}$ et C^δ des 2 modules $\mathcal{T}^\delta$ et $\mathcal{S}^\delta[\xi]$. Elle est donnée dans le Paragraphe 4.5.5.

La quantification

Pour mémoire, la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1 est donnée, suivant les valeurs de δ, par les Théorèmes 4.2.10, 4.2.11 et 4.2.12.

Théorème 4.5.2. *Soit (M,g) une variété conformément plate. Il existe un sous ensemble I_Q de $\mathbb{Q}^*$ (contenant I_S) tel que, pour $\delta \notin I_Q$, il existe une unique quantification confor-*

mément équivariante

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}.} \tag{4.78}$$

La preuve de ce théorème nécessite le calcul et la diagonalisation des opérateurs de Casimir C^δ et $C^{\lambda,\mu}$ des 2 modules $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$. Elle est donnée dans le Paragraphe 4.5.5.

4.5.2 Les opérateurs de Casimirs classiques $C^\delta_{\mathcal{T}}$, C^δ et quantique $C^{\lambda,\mu}$ des modules $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$

Nous donnons ici les opérateurs de Casimirs des représentations de l'algèbre de Lie conforme $\mathrm{o}(p+1,q+1)$ sur les trois modules $(\mathcal{T}^\delta, \mathbb{L}^\delta)$, $(\mathcal{S}^\delta[\xi], L^\delta)$ et $(\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu})$. Comme dans le cas du fibré cotangent, ils nous permettront de montrer existence et unicité de la quantification (et de la superisation) conformément équivariante. Nous allons les exprimer en fonction de l'opérateur de Casimir, donné en (2.73),

$$\widehat{C_\delta} = R_0 + [1 + n(\delta - 1) - \mathcal{E}]\,\mathcal{E} - n^2\delta(\delta - 1), \tag{4.79}$$

qui est associé à la représentation de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$ sur l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta$.

Proposition 4.5.3. *Soit (M,g) une variété conformément plate. Pour les représentations respectives de l'algèbre de Lie conforme $\mathrm{o}(p+1,q+1)$, l'opérateur de Casimir du module $\mathcal{T}^\delta$, transporté sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ via ev_g, est donné par :*

$$\boxed{C^\delta_{\mathcal{T}} = \widehat{C_\delta} + \Sigma(\Sigma - n) + 2(\Delta\Omega + \Phi\Psi) - 2\mathcal{E},} \tag{4.80}$$

celui du module des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ a pour expression :

$$\boxed{C_\delta = C^\delta_{\mathcal{T}} + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\Gamma\Psi,} \tag{4.81}$$

et enfin, celui du module des opérateurs différentiels spinoriels $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ s'écrit

$$\boxed{C_{\lambda,\mu} = C^\delta_{\mathcal{T}} + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(GT - 2\left(\mathcal{E} + n\lambda + \frac{1}{2}\right)D + 2\Gamma\Psi + \Lambda\Psi + \Gamma\Omega - \frac{1}{2}\Lambda\Omega\right).} \tag{4.82}$$

Le calcul de ces trois opérateurs de Casimirs est similaire à celui mené dans la Référence [34], qui conduit aux opérateurs de Casimirs des $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules des symboles $\mathcal{S}^\delta$ et des opérateurs différentiels scalaires $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$. Il est effectué dans l'Annexe D.

Remarque 4.5.4. *Les termes comportant $\frac{\hbar}{\mathsf{i}}$ en facteur sont nilpotents. Ainsi C^δ et $C^{\lambda,\mu}$ sont égaux à $C^\delta_{\mathcal{T}}$ plus un opérateur nilpotent, qui fait strictement diminuer le degré en $\tilde{p}$.*

4.5.3 Le rôle des opérateurs de Casimir

La démonstration des deux Théorèmes 4.5.1 et 4.5.2 reposent sur la même stratégie de preuve, développée dans [34]. Nous en donnons ici une formulation assez générale pour s'adapter aux deux cas. Ce qui suit n'est pas spécifique à l'algèbre de Lie conforme et reste valide pour toute algèbre de Lie semi-simple.

Nous débutons par la définition du caractère "comparable" de deux $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules.

Définition 4.5.5. *Deux $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules (A, L_X) et $(B, \mathcal{L}_X)$ sont dits "comparables" si ils vérifient les conditions suivantes,*

- *Ce sont des espaces vectoriels gradués, $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k$ et $B = \bigoplus_{k=0}^{\infty} B_k$, satisfaisant $\dim A_k, \dim B_k < \infty$.*
- *Il existe une injection linéaire $\iota : A \to B$ qui respecte la graduation, i.e. $\iota(A_k) \subset B_k$.*
- *Les actions de l'algèbre de Lie conforme sur A et B sont telles que $\mathcal{L}_X \circ \iota - \iota \circ L_X$ est un opérateur sur B qui diminue le degré pour tout $X \in \mathrm{o}(p+1,q+1)$.*
- *Les opérateurs de Casimir C_a et C_b de A et B respectivement, sont tels que $C_b \circ \iota - \iota \circ C_a$ est un opérateur sur B diminuant le degré.*
- *C_a est diagonalisable, i.e. tout $P \in A$ se décompose en une somme finie de vecteurs propres.*

Montrer la dernière propriété pour les deux paires de modules intervenant dans la superisation et la quantification est l'objet du paragraphe suivant ; elles vérifient trivialement les autres propriétés.

Afin de simplifier les écritures, nous identifions désormais A avec son image dans B si les modules A et B sont "comparables". Introduisons maintenant une généralisation de la notion de symbole principal dans ce contexte.

Définition 4.5.6. *Soient A et B deux $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules "comparables". On dira qu'une application $Q : A \to B$ préserve le symbole principal si pour tout $P \in A$, les éléments $\iota(P)$ et $Q(P)$ ont même terme de plus haut degré.*

Comme un morphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-module $\mathcal{Q} : A \to B$ vérifie

$$\mathcal{Q}C_a = C_b\mathcal{Q}, \tag{4.83}$$

on en déduit que si P est un vecteur propre de C_a, alors $\mathcal{Q}(P)$ est un vecteur propre de C_b de même valeur propre. Cela donne des conditions d'existence sur $\mathcal{Q}$ et permet même de construire des applications $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-équivariantes.

Lemme 4.5.7. *Soient A et B deux $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules "comparables", et $(P_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha\in V}$ une base, paramétrée par V, de vecteurs propres de C_a accompagnés de leur valeurs propres.*

Supposons que pour tout $\alpha \in V$*, il existe un unique* $P_\alpha^B \in B$ *tel que*

$$C_b P_\alpha^B = \lambda_\alpha P_\alpha^B, \tag{4.84}$$

et tel que P_α^B *a le même symbole principal que* P_α*. Alors il existe un unique morphisme de* $\mathrm{o}(p+1, q+1)$*-module,* $\mathcal{Q} : (A, L_X) \to (B, \mathcal{L}_X)$ *qui préserve le symbole principal.*

Démonstration. Montrons l'unicité. Comme $\mathcal{Q}$ est un morphisme de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-modules alors, d'après (4.83), $P = \mathcal{Q}(P_\alpha)$ est une solution de (4.84) et par définition de la préservation du symbole principal, $\mathcal{Q}(P_\alpha) - P_\alpha$ est bien de degré strictement inférieur à celui de P_α. De plus, $\mathcal{Q}$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur la base $(P_\alpha)_{\alpha \in V}$; si l'équation (4.84) admet une unique solution pour tout $\alpha \in V$, il existe alors au plus un tel morphisme $\mathcal{Q}$.

L'existence s'obtient par construction. Définissons $\mathcal{Q}$ via $\mathcal{Q}(P_\alpha) = P_\alpha^B$ et montrons alors que $\mathcal{Q}(L_X P_\alpha) = \mathcal{L}_X \mathcal{Q}(P_\alpha)$ pour tout $X \in \mathrm{o}(p+1, q+1)$ et tout $\alpha \in V$.

Pour cela constatons tout d'abord qu'ils ont même terme de plus haut degré. En effet, notons $P_\alpha^k \in A_k$ celui de P_α et γ_k la restriction à B_k. On a alors $\gamma_k(\mathcal{L}_X \mathcal{Q}(P_\alpha)) - \gamma_k(\mathcal{Q}(L_X P_\alpha)) = \gamma_k\left(\mathcal{L}_X P_\alpha^k - L_X P_\alpha^k\right)$ car $\mathcal{Q}$ préserve le symbole principal, et cette expression est nulle par définition de la comparabilité de A et B.

Montrons ensuite que $\mathcal{Q}(L_X P_\alpha)$ et $\mathcal{L}_X \mathcal{Q}(P_\alpha)$ sont tous deux vecteurs propres de C_b. Comme $[\mathcal{L}_X, C_b] = 0$, la définition de $\mathcal{Q}$ montre que $\mathcal{L}_X \mathcal{Q}(P_\alpha)$ est vecteur propre de C_b de valeur propre λ_α. De même, $[L_X, C_a] = 0$ montre que $L_X P_\alpha$ est vecteur propre de C_a de valeur propre λ_α. Par définition de $\mathcal{Q}$, on en déduit que $\mathcal{Q}(L_X P_\alpha)$ est également vecteur propre de C_b de valeur propre λ_α.

L'unicité du vecteur propre de C_b de terme de plus haut degré fixé permet alors de conclure. □

Le lemme suivant fournit un moyen pour satisfaire l'hypothèse du lemme précédent.

Lemme 4.5.8. *Soit* $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k$ *un espace gradué,* C_0 *un opérateur diagonalisable sur* A *préservant la graduation et* N *un opérateur nilpotent sur* A *faisant strictement baisser le degré. L'opérateur* $C = C_0 + N$ *est diagonalisable si et seulement si, pour tout vecteur propre* $P_k \in A_k$ *de* C*, de valeur propre* γ*, le système suivant possède une solution*

$$\forall i = 0, \ldots, k-1, \quad N P_{i+1} = (\gamma - C_0) P_i. \tag{4.85}$$

Si c'est le cas, $P = \sum_{i=0}^{k} P_i$ *est vecteur propre de* C *de même valeur propre que le vecteur propre* P_k *de* C_0*.*

Démonstration. Supposons que $CP = \gamma P$. On a alors, en identifiant les termes de degré k, $C_0 P_k = \gamma P_k$, et en identifiant ceux de degré $j < k$, $N P_{j+1} = (\gamma - C_0) P_j$. □

Notons que les paires d'opérateurs de Casimir $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ et C^{δ}, ainsi que $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ et $C^{\lambda,\mu}$, vérifient précisément les hypothèses du Lemme 4.5.8. Or, nous souhaitons appliquer le Lemme 4.5.7 pour démontrer les Théorèmes 4.5.1 et 4.5.2, portant sur l'existence et l'unicité de la superisation et la quantification. Il nous reste donc à diagonaliser l'opérateur $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ et à montrer que les systèmes triangulaires de type (4.85) ont une solution unique pour $N = C^{\delta} - C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ et $N = C^{\lambda,\mu} - C^{\delta}_{\mathcal{T}}$. C'est l'objet du paragraphe suivant.

4.5.4 Diagonalisation des 3 opérateurs de Casimir $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$, C^{δ}, et $C^{\lambda,\mu}$

Nous montrons ici trois Propositions 4.5.16, 4.5.17 et 4.5.18, concernant la diagonalisation des trois opérateurs de Casimir $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$, C^{δ} et $C^{\lambda,\mu}$ données respectivement en (4.80), (4.81) et (4.82). Nous diagonalisons tout d'abord l'opérateur de Casimir $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ du module $\mathcal{T}^{\delta}$ et identifions ses sous-espaces propres. Les deux autres opérateurs de Casimir s'exprimant comme la somme de $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ avec un opérateur faisant baisser strictement le degré en p, leur diagonalisation découlera du Lemme 4.5.8.

Préambule à la diagonalisation de l'opérateur $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$

Commençons par rappeler l'expression de l'opérateur de Casimir du module $(\mathcal{T}^{\delta}, \mathbb{L}^{\delta})$, fournie en (4.80),

$$C^{\delta}_{\mathcal{T}} = 2(\Delta\Omega + \Phi\Psi) + RT + \Sigma(\Sigma - n) + 2n\left(n(\delta - 1) - \mathcal{E}\right)\mathcal{E} - n^2\delta(\delta - 1). \tag{4.86}$$

L'opérateur $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ est ainsi polynomial en les quatre opérateurs

$$\Delta\Omega + \Phi\Psi, \quad RT, \quad \Sigma, \quad \mathcal{E}. \tag{4.87}$$

Le seul commutateur dont le calcul est non trivial est $[RT, \Delta\Omega + \Phi\Psi]$, tous les autres sont nuls. Les étapes intermédiaires sont riches d'enseignement, ainsi $[RT, \Delta\Omega] = R\Psi\Omega - \Delta\Phi T$ prouve que les opérateurs RT et $\Delta\Omega$ ne commutent pas, tout comme RT et $\Phi\Psi$, dont le commutateur est $[RT, \Phi\Psi] = R\Omega\Psi - \Phi\Delta T$. Comme, par ailleurs, $[\Psi, \Omega] = T$ et $[\Delta, \Phi] = R$, la conclusion est aisée,

$$[RT, \Delta\Omega + \Phi\Psi] = 0. \tag{4.88}$$

Ainsi pour diagonaliser $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ nous allons diagonaliser simultanément les quatre opérateurs $\Delta\Omega + \Phi\Psi$, RT, Σ et $\mathcal{E}$.

Stratégie pour diagonaliser l'opérateur $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$

L'opérateur $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ est polynomial en quatre opérateurs $\Delta\Omega + \Phi\Psi, RT, \Sigma, \mathcal{E}$ qui commutent entre eux, et se diagonalisent donc simultanément. Nous obtenons aisément la Proposition 4.5.10, donnant la diagonalisation simultanée des 3 opérateurs $RT, \mathcal{E}$ et Σ, la difficulté réside en fait dans la diagonalisation de $\Delta\Omega + \Phi\Psi$. D'après la Proposition 4.5.10, elle se ramène à exprimer $\Delta\Omega + \Phi\Psi$ sur le noyau de T, qu'il stabilise, en fonction de $\mathcal{E}$ et Σ. Pour cela, nous introduisons le projecteur Π_0 sur $\ker T$, afin de définir par restriction et projection les endomorphismes $\Delta_0, \Omega_0, \Phi_0, \Psi_0$ de $\ker T$. On a alors $\Delta_0\Omega_0 + \Phi_0\Psi_0 = \Delta\Omega + \Phi\Psi$ sur $\ker T$.

Le Lemme 4.5.13 montre alors que $\Phi_0\Psi_0$ est nul ou s'exprime en fonction de $\mathcal{E}$ et Σ sur l'espace $\ker \Omega_0$. Ensuite, le Lemme 4.5.14 conduit à la décomposition selon $\ker \Omega_0 \oplus \Delta_0 \ker \Omega_0$ du noyau de T. Nous en déduisons la Définition 4.5.15 des sous-espaces propres de C^δ_T et la Proposition 4.5.16 fournissant la diagonalisation de C^δ_T.

Diagonalisation simultanée de $\mathcal{E}, \Sigma$ et RT

Rappelons tout d'abord les expressions des quatre invariants euclidiens, donnés en (4.12)

$$\mathcal{E} = \tilde{p}_i \partial_{\tilde{p}_i}, \quad \Sigma = \tilde{\xi}^i \partial_{\tilde{\xi}^i}, \quad R = \tilde{p}^i \tilde{p}_i, \quad T = \partial_{\tilde{p}^i} \partial_{\tilde{p}_i}. \tag{4.89}$$

La diagonalisation simultané des opérateurs $\mathcal{E}$, Σ et RT demande un raffinement de la bigraduation, cf (3.105), de l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi] = \bigoplus_{k=0}^\infty \bigoplus_{\kappa=0}^n \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$, qui, rappelons-le, correspond à la décomposition en sous-espaces propres de $\mathcal{E}$ et Σ, de valeurs propres respectives k et κ sur $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$.

Définition 4.5.9. *L'espace $\mathcal{S}^\delta_{*,*,s}[\xi]$ est le sous-espace $R^s \ker T$ de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, avec $s \in \mathbb{N}$; on note $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s}[\xi]$ son intersection avec $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$. Enfin, on désigne par $\gamma_{*,*,s}(A)$ et $\gamma_{k,\kappa,s}(A)$ les restrictions d'un opérateur A aux sous-espaces $\mathcal{S}^\delta_{*,*,s}[\xi]$ et $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s}[\xi]$.*

Remarquons que le Lemme 2.3.7, énoncé sur $\mathcal{S}^\delta$, se prolonge trivialement à $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, et fournit, en particulier $\ker T^s = \bigoplus_{s'=0}^s \mathcal{S}^\delta_{*,*,s'}[\xi]$. On peut alors formuler une généralisation directe d'un résultat classique [104].

Proposition 4.5.10. *L'espace des symboles admet la décomposition suivante*

$$\mathcal{S}^\delta[\xi] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{\kappa=0}^{n} \bigoplus_{s=0}^{[k/2]} \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s}[\xi], \tag{4.90}$$

et les restrictions des 4 opérateurs composant C^δ_T à ces sous-espaces sont données par

$$\begin{aligned} \gamma_{k,\kappa,s}(\mathcal{E}) &= k & (4.91)\\ \gamma_{k,\kappa,s}(\Sigma) &= \kappa & (4.92)\\ \gamma_{k,\kappa,s}(RT) &= 2s\,(n + 2(k - s - 1)) & (4.93)\\ \gamma_{k,\kappa,s}(\Delta\Omega + \Phi\Psi) &= 2s + R^s \gamma_{k-2s,\kappa,0}(\Delta\Omega + \Phi\Psi). & (4.94) \end{aligned}$$

Spécifions que l'on a d'une part $\gamma_{*,*,s}(RT) = 2s\,(n + 2(\mathcal{E} - s - 1))$, et d'autre part $\gamma_{*,*,s}(\Delta\Omega + \Phi\Psi) = 2s + R^s \gamma_{*,*,0}(\Delta\Omega + \Phi\Psi)$.

Démonstration. Le Lemme 2.3.7 s'applique, il fournit la décomposition $\mathcal{S}^\delta[\xi] = \bigoplus_{s=0}^\infty \mathcal{S}^\delta_{*,*,s}[\xi]$ ainsi que

$$\gamma_{*,*,s}(RT) = 2s\left(n + 2(\mathcal{E} - s - 1)\right). \tag{4.95}$$

La preuve de la Proposition 2.3.7 se prolonge trivialement à ce nouveau cadre, on obtient ainsi la décomposition cherchée. Comme $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s}[\xi] \subset \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$, on trouve $\gamma_{k,\kappa,s}(\mathcal{E}) = k$ et $\gamma_{k,\kappa,s}(\Sigma) = \kappa$; de la formule (4.95) on déduit alors $\gamma_{k,\kappa,s}(RT) = 2s\left(n + 2(k - s - 1)\right)$.

Il reste alors à étudier la restriction de $\Delta\Omega + \Phi\Psi$ sur les sous-espaces $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s}[\xi]$. Soit $P \in \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s}[\xi]$, alors par définition $P \in R^s \ker T$, et il existe donc $Q \in \ker T$ tel que $P = R^s Q$. Comme on a $[\Delta\Omega + \Phi\Psi, R] = 2R$, l'action de l'opérateur $\Delta\Omega + \Phi\Psi$ sur le symbole P est donnée par

$$(\Delta\Omega + \Phi\Psi)P = 2sP + R^s(\Delta\Omega + \Phi\Psi)Q, \tag{4.96}$$

et le résultat en découle. □

Sous-espaces propres de $\Delta\Omega + \Phi\Psi$

Diagonaliser $\Delta\Omega + \Phi\Psi$ sur chaque sous-espace $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s}[\xi]$ est équivalent à l'exprimer en fonction de $\mathcal{E}$ et Σ sur $\ker T = \mathcal{S}^\delta_{*,*,0}[\xi]$, ce que nous allons faire maintenant. Nous travaillons pour cela avec les opérateurs $\Delta\Omega$ et $\Phi\Psi$ séparément, parfois même avec Δ, Ω, Φ et Ψ individuellement. Mais si $\Delta\Omega + \Phi\Psi$ stabilise $\ker T$, ce n'est pas le cas de Δ et Φ. Nous introduisons donc le projecteur suivant.

Proposition 4.5.11. *La restriction de l'opérateur* $\mathrm{Id} - \frac{1}{2(n+2(\mathcal{E}-2))}RT$ *à* $\ker T^2$ *définit le projecteur* $\Pi_0 : \ker T^2 \to \ker T$.

Démonstration. Tout d'abord montrons que l'expression donnant Π_0 est bien définie. Comme Π_0 commute à $\mathcal{E}$, il suffit de le montrer sur $\mathcal{S}^\delta_k[\xi]$ pour tout k. Ceci est alors trivial. Si $k < 2$, Π_0 est l'identité, et si $k \geq 2$ on a $\Pi_0 = \mathrm{Id} - \frac{1}{2(n+2(k-2))}RT$.

Ensuite, on a $\ker T^2 = \mathcal{S}^\delta_{*,*,1}[\xi] \oplus \mathcal{S}^\delta_{*,*,0}[\xi]$, et la Proposition 4.5.10 montre que $\gamma_{*,*,1}(RT) = 2\left(n + 2(\mathcal{E} - 2)\right)$. L'opérateur Π_0 est donc nul sur $\mathcal{S}^\delta_{*,*,1}[\xi]$. Comme par définition $\mathcal{S}^\delta_{*,*,0}[\xi] = \ker T$, Π_0 vaut l'identité sur $\mathcal{S}^\delta_{*,*,0}[\xi]$, et c'est donc bien un projecteur. □

Rappelons maintenant l'expression des 4 opérateurs, invariants sous les isométries, qui constituent $\Delta\Omega + \Phi\Psi$. Conformément à (4.12), on a

$$\Delta = \tilde{\xi}^i \tilde{p}_i, \quad \Phi = \tilde{p}_i \partial_{\tilde{\xi}^i}, \quad \Psi = \tilde{\xi}_i \partial_{\tilde{p}_i}, \quad \Omega = \partial_{\tilde{\xi}^i}\partial_{\tilde{p}_i}. \tag{4.97}$$

Comme $[T, \Omega] = [T, \Psi] = 0$, les opérateurs Ω et Ψ stabilisent $\ker T$. D'autre part, on a $[T^2, \Delta] = 2\Psi T$ et $[T^2, \Phi] = 2\Omega T$, d'où $\Delta(\ker T) \subset \ker T^2$ et $\Phi(\ker T) \subset \ker T^2$. On peut donc introduire la définition suivante.

Définition 4.5.12. *On désigne par* Ω_0 *et* Ψ_0 *les restrictions de* Ω *et* Ψ *à* $\mathcal{S}^{\delta}_{*,*,0}[\xi]$, *et par* Δ_0 *et* Φ_0 *les restrictions de* $\Pi_0\Delta$ *et* $\Pi_0\Phi$ *à* $\mathcal{S}^{\delta}_{*,*,0}[\xi]$.

Les quatre opérateurs nouvellement définis sont donc des endomorphismes de $\mathcal{S}^{\delta}_{*,*,0}[\xi]$. Commençons par donner leur table de commutation, d'usage constant par la suite,

$[\cdot,\cdot]$	Δ_0	Φ_0	Ψ_0	Ω_0
Δ_0	0	0	$-4\mathsf{c}\Delta_0\Psi_0$	$(n+\mathcal{E}-\Sigma)-4\mathsf{c}\Phi_0\Psi_0$
Φ_0	0	0	$\Sigma+\mathcal{E}-4\mathsf{c}\Delta_0\Omega_0$	$-4\mathsf{c}\Phi_0\Omega_0$
Ψ_0	$-4\mathsf{c}\Delta_0\Psi_0$	$\Sigma+\mathcal{E}-4\mathsf{c}\Delta_0\Omega_0$	0	0
Ω_0	$(n+\mathcal{E}-\Sigma)-4\mathsf{c}\Phi_0\Psi_0$	$-4\mathsf{c}\Phi_0\Omega_0$	0	0

(4.98)

où $\mathsf{c}=\frac{1}{2(n+2(\mathcal{E}-1))}$ (il est issu du coefficient de RT dans Π_0, l'écart de 1 dans le facteur comportant $\mathcal{E}$ est dû à la commutation avec Ψ ou Ω qui font baisser de 1 le degré en $\tilde{p}$). Le premier point essentiel qui en découle est la non commutation de $\Delta_0\Omega_0$ et $\Phi_0\Psi_0$,

$$[\Phi_0\Psi_0,\Delta_0\Omega_0]=-4\mathsf{c}\Delta_0\Phi_0\Psi_0\Omega_0. \tag{4.99}$$

Nous allons décomposer l'espace $\mathcal{S}^{\delta}_{*,*,0}[\xi]$ selon $\ker\Omega_0\oplus\Delta_0\ker\Omega_0$, puis raffiner cette décomposition en sous-espace propres de $\Phi_0\Psi_0$. Ce raffinement repose sur le lemme suivant.

Lemme 4.5.13. *Le noyau de l'opérateur* Ω_0 *admet la décomposition suivante* $\ker\Omega_0=(\ker\Omega_0\cap\ker\Phi_0\Psi_0)\oplus(\ker\Omega_0\cap\mathrm{im}\Phi_0\Psi_0)$, *et restreint à chacun de ces deux sous-espaces, l'opérateur* $\Phi_0\Psi_0$ *est égal respectivement à* 0 *et* $\mathcal{E}+\Sigma$.

Démonstration. La preuve repose sur le calcul du carré de $\Phi_0\Psi_0$,

$$(\Phi_0\Psi_0)^2=(\mathcal{E}+\Sigma)\Phi_0\Psi_0-4\Phi_0\mathsf{c}\Delta_0\Psi_0\Omega_0. \tag{4.100}$$

Remarquons alors que l'opérateur $\frac{1}{\mathcal{E}+\Sigma}\Phi_0\Psi_0$ est bien défini : pour P un symbole, $\Phi_0\Psi_0P$ est nul ou de degré au moins 1 en p. Ainsi, restreint à $\ker\Omega_0\cap\mathcal{S}^{\delta}_{k,\kappa}[\xi]$, l'opérateur $\frac{1}{\mathcal{E}+\Sigma}\Phi_0\Psi_0$ est un projecteur, d'où le résultat. □

Nous pouvons désormais formuler le lemme central pour la diagonalisation de C^{δ}_{T}, il fournit la décomposition $\mathcal{S}^{\delta}_{*,*,0}[\xi]=\ker\Omega_0\oplus\Delta_0\ker\Omega_0$.

Lemme 4.5.14. *On a la suite exacte scindée suivante*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker\Omega_0 \arrow[r] & \mathcal{S}^{\delta}_{*,*,0}[\xi] \arrow[r, "\mathsf{a}\Omega_0"] & \ker\Omega_0 \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\Delta_0"] & 0, \end{tikzcd} \tag{4.101}$$

où $\mathsf{a}=((n+\mathcal{E}-\Sigma)-2\mathsf{c}\Phi_0\Psi_0))^{-1}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'opérateur $\mathsf{a}\Omega_0$ est bien défini. Introduisons $A = (n+\mathcal{E}-\Sigma) - \frac{1}{(n+2(\mathcal{E}-1))}\Phi_0\Psi_0$, l'inverse de a. Il est bien défini car l'image $\Phi_0\Psi_0 P$ d'un symbole P est nulle ou de degré au moins 1 en p, ainsi $\mathcal{E}$ est toujours de valeur supérieure ou égale 1. Il stabilise $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}$ ainsi que $\ker\Omega_0$ car $[\Omega_0, A] = \frac{2}{(n+2\mathcal{E})}\mathsf{c}\Phi_0\Psi_0\Omega_0$. D'après le Lemme 4.5.13, A est donc diagonalisable sur $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa} \cap \ker\Omega_0$. Il a pour valeur propre $\lambda = n+k-\kappa$ sur le noyau de $\Phi\Psi$, et $n+k-\kappa-\frac{k+\kappa}{n+2(k-1)}$ sur l'image de $\Phi\Psi$, où $k \geq 1$. Ainsi la plus petite valeur propre de A est strictement positive si $\kappa < n$, cet opérateur est donc un isomorphisme de $\bigoplus_{\kappa<n}\mathcal{S}^\delta_{*,\kappa} \cap \ker\Omega_0$, qui est un espace contenant $\mathrm{im}\Omega_0$, et contenu dans $\ker\Omega_0$. Il en découle que $A^{-1}\Omega_0 = \mathsf{a}\Omega_0$ est bien défini et d'image contenue dans $\ker\Omega_0$.

Par définition de Δ_0, on a $\Delta_0(\ker\Omega_0) \subset \mathcal{S}^\delta_{*,*,0}[\xi]$, il suffit donc de montrer que $\mathsf{a}\Omega_0\Delta_0$ est égal à l'identité sur $\ker\Omega_0$ pour conclure. Or, on a $\Omega_0\Delta_0 = [\Omega_0, \Delta_0]$ sur $\ker\Omega_0$, et en explicitant a et ce commutateur, on obtient comme voulu

$$\mathsf{a}\Omega_0\Delta_0 = ((n+\mathcal{E}-\Sigma) - 2\mathsf{c}\Phi_0\Psi_0))^{-1}((n+\mathcal{E}-\Sigma) - 2\mathsf{c}\Phi_0\Psi_0) = \mathrm{Id}.$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Nous pouvons définir alors une nouvelle famille de sous-espaces de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$.

Définition 4.5.15. *Les sous-espaces $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,ab}[\xi]$, où les indices sont entiers et ont pour domaines $k \in \mathbb{N}$, $\kappa \leq n$, $s \leq [k/2]$ et $a, b \in \{0,1\}$, sont donnés par*

$$\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,a0}[\xi] = R^s\left(\mathcal{S}^\delta_{k-2s,\kappa}[\xi] \cap (\Delta_0)^a(\ker\Omega_0 \cap \ker\Phi_0\Psi_0)\right), \tag{4.102}$$

$$\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,a1}[\xi] = R^s\left(\mathcal{S}^\delta_{k-2s,\kappa}[\xi] \cap (\Delta_0)^a(\ker\Omega_0 \cap \mathrm{im}\,\Phi_0\Psi_0)\right). \tag{4.103}$$

Diagonalisation de l'opérateur $C^\delta_{\mathcal{T}}$

Les sous-espaces $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,ab}[\xi]$ sont trivialement inclus dans $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s}[\xi]$, pour les indices k, κ, s correspondant et en forment une décomposition en somme directe en quatre sous-espaces comme le montre les Lemmes 4.5.14 et 4.5.13. Il en découle une décomposition en somme directe de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, et les $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,ab}[\xi]$ sont justement des sous-espaces propres pour, simultanément, les quatre opérateurs $\Delta\Omega + \Phi\Psi, RT, \Sigma, \mathcal{E}$, d'où la diagonalisation de $C^\delta_{\mathcal{T}}$.

Proposition 4.5.16. *L'espace des symboles admet la décomposition*

$$\mathcal{S}^\delta[\xi] = \bigoplus_{k=0}^{\infty}\bigoplus_{\kappa=0}^{n}\bigoplus_{s=0}^{[k/2]}\bigoplus_{a,b=0,1}\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,ab}[\xi], \tag{4.104}$$

en sous-espaces propres de $C^\delta_{\mathcal{T}}$, et on note $\gamma_{k,\kappa,s;\,ab}$ sa valeur propre sur le sous-espace dont les indices correspondent. Elle est donnée par

$$\gamma_{k,\kappa,s;\,a0} = \hat{\gamma}_{k,s} + \kappa(\kappa-n) - 2(k-2s) + 2a(n+k-\kappa-2s), \tag{4.105}$$

$$\gamma_{k,\kappa,s;\,a1} \;=\; \hat{\gamma}_{k,s} + \kappa(\kappa - n) + 2\kappa + 2a(n + k - \kappa - 2s - 2), \tag{4.106}$$

où $\hat{\gamma}_{k,s} = 2s[n + 2(k - s - 1)] + 2k[1 + n(\delta - 1) - k] - n^2\delta(\delta - 1)$ *est la valeur propre de* $\widehat{C^\delta}$ *sur* $\mathcal{S}^\delta_{k,s}$*, donnée en (2.79).*

Démonstration. Rappelons tout d'abord la formule suivante de $C^\delta_{\mathcal{T}}$, obtenue en (4.81),

$$C^\delta_{\mathcal{T}} = \widehat{C_\delta} + \Sigma(\Sigma - n) + 2(\Delta\Omega + \Phi\Psi) - 2\mathcal{E}. \tag{4.107}$$

Soit $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,ab}[\xi]$ un sous-espace quelconque de la décomposition (4.104) de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$. C'est un sous-espace propre pour les trois opérateurs $\mathcal{E}$, Σ et RT, et d'après la Proposition 4.5.10 et la formule (4.107) donnant $C^\delta_{\mathcal{T}}$, la restriction de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ au sous-espace $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,ab}[\xi]$ est donnée par

$$\gamma_{k,\kappa,s;\,ab}\left(C^\delta_{\mathcal{T}}\right) = \hat{\gamma}_{k,s} + \kappa(\kappa - n) + 4s - 2k + 2R^s\gamma_{k-2s,\kappa,0;\,ab}\left(\Delta\Omega + \Phi\Psi\right). \tag{4.108}$$

Il nous reste donc à évaluer $\gamma_{k-2s,\kappa,0;\,ab}\left(\Delta\Omega + \Phi\Psi\right)$, qui est égal à $\Delta_0\Omega_0 + \Phi_0\Psi_0$ restreint, par définition, à

- $(\Delta_0)^a\left(\ker\Omega_0 \cap \ker\Phi_0\Psi_0\right)$, si $b = 0$,
- $(\Delta_0)^a\left(\ker\Omega_0 \cap \operatorname{im}\Phi_0\Psi_0\right)$, si $b = 1$.

Dans les deux cas nous avons besoin de connaître

$$\left(\Delta_0\Omega_0 + \Phi_0\Psi_0\right)\Delta_0 = \Delta_0\left(n + \mathcal{E} - \Sigma + \Phi_0\Psi_0\right). \tag{4.109}$$

Si $b = 0$, on a alors

$$\gamma_{k-2s,\kappa,0;\,a0}\left(\Delta\Omega + \Phi\Psi\right) = a\left(n + k - 2s - \kappa\right),$$

ce qui montre, conjointement avec (4.108), que $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,a0}[\xi]$ est un sous-espace propre de $C^\delta_{\mathcal{T}}$, de valeur propre donnée par (4.105). De même, si $b = 1$, on obtient, grâce au Lemme 4.5.13 et à la loi de commutation (4.109), l'expression suivante

$$\gamma_{k-2s,\kappa,0;\,a1}\left(\Delta\Omega + \Phi\Psi\right) = (1 - a)(k - 2s + \kappa) + a\left(n + k - 2s - \kappa\right) + a\left(k - 2s + \kappa - 2\right).$$

Ainsi, $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,a1}[\xi]$ est également un sous-espace propre de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ et sa valeur propre $\gamma_{k-2s,\kappa,0;\,a1}(C^\delta_{\mathcal{T}})$ est bien donnée par (4.106). $\square$

Donnons une écriture explicite d'un symbole $P \in \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;ab}$. Par définition de $\mathcal{S}^\delta_{*,*,s}$, on a $P = R^sQ$ avec $Q \in \mathcal{S}^\delta_{k-2s,\kappa,0;ab}$, et donc $TQ = 0$. Remarquons alors que d'une part $\ker\Psi \subset \ker\Phi\Psi \subset \ker\Psi\Phi\Psi$, et d'autre part $\Psi\Phi\Psi = [\Psi,\Phi]\Psi = (\mathcal{E} + \Sigma)\Psi$, ce qui implique $\ker\Psi = \ker\Phi\Psi$. Pour $b = 1$ qui correspond à l'image de $\Phi\Psi$, le Lemme 4.5.13 fournit la valeur propre de $\Phi\Psi$. Nous faisons également usage, afin de simplifier le cas $ab = 10$, de l'égalité $\Delta_0 = \Delta - RT\Delta\mathsf{c} = \Delta - 2R\Psi\mathsf{c}$, qui découle de la formule donnant Π_0 dans la Proposition 4.5.11.

- Si $ab = 00$, le symbole Q vérifie $\Omega Q = \Psi Q = 0$.
- Si $ab = 01$, on a $\Omega Q = 0$ et $\Phi\Psi Q = (k - 2s + \kappa)Q$.
- Si $ab = 10$, Q se factorise suivant $Q = \Delta Q_0$, où Q_0 est tel que $\Omega Q_0 = \Psi Q_0 = 0$.
- Si $ab = 11$, on a également $Q = \Delta_0 Q_0$, mais Q_0 est tel que $\Omega Q_0 = 0$ et $\Phi\Psi Q_0 = (k - 2s + \kappa - 2)Q_0$.

Diagonalisation de l'opérateur de Casimir C^δ

La diagonalisation de l'opérateur de Casimir $C^\delta = C^\delta_{\mathcal{T}} + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\Gamma\Psi$, repose sur la Proposition 4.5.16, donnant la diagonalisation de $C^\delta_{\mathcal{T}}$, et le Lemme 4.5.8, qui fournit une méthode pour diagonaliser un opérateur $C = C_0 + N$, où C_0 est diagonalisable et N nilpotent. Essentiellement, il suffit alors de résoudre, génériquement, un système linéaire triangulaire. La difficulté tient dans la détermination des valeurs résonantes de δ, pour lesquelles le système en question n'a pas de solution et C^δ n'est pas diagonalisable. Ici le cas d'une solution non unique au système ne se présente pas. La démonstration de la proposition suivante est technique, et effectuée dans l'Annexe E.

Proposition 4.5.17. *Soit $n\delta \notin \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'opérateur de Casimir C^δ, donné par (4.81), est diagonalisable sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$. A chaque vecteur propre de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ est associé un unique vecteur propre de C^δ de même symbole principal et de même valeur propre.*

Diagonalisation de l'opérateur de Casimir $C^{\lambda,\mu}$

Il ne reste plus qu'à diagonaliser l'opérateur de Casimir $C^{\lambda,\mu}$, égal à $C^\delta_{\mathcal{T}} + N$ avec N un opérateur nilpotent faisant strictement baisser le degré en $\tilde{p}$. La Proposition 4.5.16 donnant la diagonalisation de $C^\delta_{\mathcal{T}}$, il suffit alors d'utiliser le Lemme 4.5.8, qui fournit une méthode pour diagonaliser un opérateur $C = C_0 + N$, où C_0 est diagonalisable et N nilpotent. Nous ne déterminons pas l'ensemble des valeurs de $\mu - \lambda = \delta \in I_Q$, qui conduisent à une obstruction pour que chaque vecteur propre de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ soit le symbole principal d'un unique vecteur propre de $C^{\lambda,\mu}$, comme nous l'avons fait pour C^δ. Cela semble pour l'instant hors de portée.

Proposition 4.5.18. *Soit $\delta \notin I_Q$, avec I_Q un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. L'opérateur de Casimir $C^{\lambda,\mu}$, donné par (4.82), est diagonalisable sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$. A chaque vecteur propre de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ (et donc de C^δ) est associé un unique vecteur propre de $C^{\lambda,\mu}$ de même symbole principal et même valeur propre.*

Démonstration. Soit $C^{\lambda,\mu} = C^\delta_{\mathcal{T}} + N$, où N est déterminé par la formule (4.82) donnant $C^{\lambda,\mu}$. Ainsi N fait baisser strictement le degré en $\tilde{p}$. Le Lemme 4.5.8 montre que tout vecteur propre $P_k \in \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;ab}[\xi]$ est associé à un unique vecteur propre de $C^{\lambda,\mu}$ si et seulement si le système $NP_{i+1} = (\gamma_{k,\kappa,s;ab} - C^\delta_{\mathcal{T}})P_i$, pour $i = 0, \ldots, k-1$, et $P_i \in \mathcal{S}^\delta_i[\xi]$, admet une unique solution. Le sous-ensemble I_Q est donc déterminé par l'ensemble des solutions δ des équations $\gamma_{k,\kappa,s;ab} - \gamma_{k',\kappa',s';a'b'} = 0$ correspondant aux dégénérescences du système précédent, les indices primés étant tels qu'il existe P_i se décomposant avec une partie non triviale sur $\mathcal{S}^\delta_{k',\kappa',s';a'b'}[\xi]$. $\square$

4.5.5 Démonstrations des Théorèmes 4.5.1 et 4.5.2

Nous appuyant sur les résultats précédent sur les opérateurs de Casimirs, nous pouvons démontrés les deux Théorèmes portant respectivement sur la superisation et la quantification.

Preuve du Théorème 4.5.1. D'après la Proposition 4.5.16, les sous-espaces propres de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ sont $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;ab}[\xi]$. Si $\delta \notin I_{\mathrm{S}}$, la Proposition 4.5.17 montre alors que chaque élément de $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;ab}[\xi]$ est le symbole principal d'un unique vecteur propre de C^δ, de valeur propre $\gamma_{k,\kappa,s;ab}$. Le Lemme 4.5.7 permet alors de conclure. $\square$

Preuve du Théorème 4.5.2. La Proposition 4.5.17 montre que l'opérateur de Casimir C^δ est diagonalisable pour $\delta \notin I_{\mathrm{S}}$, tout élément de $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,ab}[\xi]$ étant le symbole principal d'un vecteur propre de valeur propre $\gamma_{k,\kappa,s;\,ab}$. De plus, la Proposition 4.5.18 montre que si $\delta \notin I_Q$, chaque élément de $\mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;\,ab}[\xi]$ est le symbole principal d'un unique vecteur propre de $C^{\lambda,\mu}$, de valeur propre $\gamma_{k,\kappa,s;\,ab}$. Le Lemme 4.5.7 permet alors de conclure. $\square$

4.6 Applications et exemples

Nous terminons ce chapitre par quelques applications de la superisation et de la quantification conformément équivariantes. Tout d'abord nous montrons que la superisation transforme l'application moment pour $\mathrm{o}(p+1, q+1)$ du fibré cotangent en celle du supercotangent. Sa quantification conduit à la dérivée de Lie des spineurs, résultat qui avait été obtenu avec la quantification géométrique et énoncé dans le Corollaire 3.3.12.

Ensuite, nous classifions l'ensemble des éléments conformément invariants pour les trois $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-modules que nous avons étudiés, $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, et spécifions les poids δ, λ et μ pour lesquels ils sont invariants. Lorsque δ est tel que la superisation et la quantification conformément équivariantes existent, ces dernières établissent une correspondance entre les invariants conformes de ces trois modules. Nous écrivons explicitement ces invariants sur l'espace des symboles, ainsi que sur l'espace des opérateurs différentiels spinoriels grâce à la quantification conformément équivariante, pour ceux de degré inférieur ou égal à 1. L'opérateur de Dirac et la chiralité sont ainsi naturellement trouvés comme opérateurs conformément invariants. Les poids de l'opérateur de Dirac correspondent, comme pour l'opérateur de Yamabe-Laplace dans le cas des fibrés cotangents, à l'une des deux résonances (correspondant à la perte de l'unicité) pour la quantification des symboles de degré 1. De plus, certains invariants conformes de $\mathcal{T}^\delta$ n'ont pas d'équivalents dans $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, ce qui peut s'interpréter par la non-existence de la superisation pour les poids correspondants.

Dans un contexte plus physique, nous donnons le symbole obtenu par couplage minimal du symbole de l'opérateur de Dirac au champ électromagnétique. La quantification conformément équivariante préserve la procédure de couplage minimal. Le carré du symbole correspondant au couplage minimal conduit à l'hamiltonien H (3.28) étudié précédemment, qui peut s'obtenir également par superisation, pour $\delta = 0$, de l'hamiltonien classique du couplage minimal.

Enfin, partant de tenseurs de Killing-Yano (conformes), nous obtenons explicitement par superisation la correspondance entre tenseurs de Killing-Yano et supercharges qui est montrée dans les références [43] et [98], une supercharge étant un symbole en involution avec le symbole de l'opérateur de Dirac, pour le crochet de Poisson canonique du supercotangent. Ceci peut s'étendre aux tenseurs de Killing-Yano conformes et en fournit une caractérisation en termes supersymplectiques. Par quantification on retrouve les expressions proposées dans [21]. Pour les tenseurs d'ordre 2 on obtient l'opérateur de type Dirac introduit par B. Carter et R.G. McLenaghan [23] pour intégrer l'équation de Dirac dans l'espace-temps de Kerr. Nos donnons également le superisé d'un tenseur de Killing-Yano conforme puis nous le quantifions en utilisant la quantification conformément équivariante précédemment développée.

4.6.1 Moments et dérivée de Lie des spineurs

Rappelons que J désigne l'application moment associée à l'action hamiltonienne de $\mathrm{Vect}(M)$ sur T^*M, elle est définie en (2.27) par $J_X = p_i X^i$. Pour mémoire, l'application moment paire donnée par l'action hamiltonienne de $\mathrm{conf}(M,g)$ sur $\mathcal{M}$ est donnée en (3.49) et s'écrit $\mathcal{J}^0_X = \tilde{p}_i X^i + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}^j(\partial_j X^k)$. La superisation conformément équivariante permet de relier les deux.

Corollaire 4.6.1. *Soit (M,g) une variété conformément plate, la superisation conformément équivariante d'un symbole $P = p_i X^i \in \mathcal{S}^\delta_1$ est donnée par*

$$\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}(p_i X^i) = \tilde{p}_i X^i + \frac{\hbar}{\mathsf{i}(2-n\delta)}\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}^j(\partial_j X^k). \tag{4.110}$$

Pour $\delta = 0$, elle permet de passer de l'application moment J à l'application moment $\mathcal{J}^0$,

$$\boxed{\mathcal{J}^0 = \mathrm{S}^0_{\mathcal{T}} \circ J_{|\mathrm{conf}(M,g)}.} \tag{4.111}$$

L'équation (4.110) donnant la superisation d'un symbole a déjà été donnée dans le

Corollaire 4.3.6, et l'équation suivante est immédiate et sans surprise car J et $\mathcal{J}^0$ sont toutes deux conformément équivariantes. Nous pouvons alors quantifier le résultat obtenu, ce qui conduit au diagramme commutatif suivant de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}^0[\xi] \arrow[r, "\mathcal{Q}^{\lambda,\lambda}"] & \mathsf{D}^{\lambda,\lambda} \\ \mathrm{conf}(M,g) \arrow[ur, "\mathcal{J}^0"] \arrow[r, "J"] & \mathcal{S}^0. \arrow[u, "\mathrm{S}^0_{\mathcal{T}}"] & \end{tikzcd} \tag{4.112}$$

Sur les symboles superisés de degré 1 en les impulsions, la quantification conformément équivariante coïncide avec le prolongement de la quantification géométrique définie par le Théorème 3.3.9. Nous étendons ainsi le Corollaire 3.3.12, en obtenant la dérivée de Lie des spineurs de poids quelconque λ, comme quantifiée des moments du supercotangent.

Corollaire 4.6.2. *Soit (M,g) une variété conformément plate, la composition de la quantification et de la superisation conformément équivariantes avec l'application moment J, associe à $X \in \mathrm{conf}(M,g)$ la dérivée de Lie des spineurs selon X,*

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\lambda,\lambda} \circ \mathrm{S}^0_{\mathcal{T}} \circ J_X = \mathsf{L}^\lambda_X.} \tag{4.113}$$

Cette formule permet de définir une extension de la dérivée de Lie des spineurs[4] *pour $X \in \mathrm{Vect}(M)$, qui coïncide avec celle de Y. Kosmann [60] si $\lambda = 0$.*

En utilisant l'expression de la quantification conformément équivariante donnée par le Théorème 4.2.10, on obtient la formule suivante pour la dérivée de Lie spinorielle

$$\mathsf{L}^\lambda_X = X^i\partial_i + \frac{\hbar}{8\mathrm{i}}[\gamma_k,\gamma^j](\partial_j X^k) + \lambda\partial_i X^i, \tag{4.114}$$

et en utilisant l'écriture covariante de la quantification conformément équivariante, fournie par le Théorème 4.4.1, on obtient pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$ l'expression

$$\mathsf{L}^\lambda_X = X^i\nabla_i + \frac{\hbar}{4\mathrm{i}}\gamma^k\gamma^j\partial_{[j}X_{k]} + \lambda\partial^\nabla_i X^i, \tag{4.115}$$

qui est bien, pour $\lambda = 0$, l'expression donnée par Y. Kosmann et rappelée en (3.70).

4.6.2 Tenseurs, symboles et opérateurs conformément invariants

Dans un premier temps, nous classifions les éléments conformément invariants de chacun des trois $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$. Ils correspondent aux éléments sur lesquels la dérivée de Lie des champs de vecteurs Killing-conformes s'annule. Nous en donnons

4. Cependant elle ne vérifie la propriété fondamentale $[\mathsf{L}^\lambda_X, \mathsf{L}^\lambda_Y] = \mathsf{L}^\lambda_{[X,Y]}$ que pour $X, Y \in \mathrm{conf}(M,g)$.

une expression explicite sur l'espace des symboles, et une expression locale, par transport via ev_g et $\mathcal{N}$, sur les modules $\mathcal{T}^\delta$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$. Pour δ fixé, les invariants conformes des 3 modules se correspondent via la superisation et la quantification conformément équivariante, si elles existent. Cela nous permet d'obtenir la chiralité et l'opérateur de Dirac comme opérateurs conformément invariants, les poids de l'opérateur de Dirac correspondant à l'une des deux résonances de la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1. Nous montrons ensuite explicitement l'obstruction pour superiser un invariant conforme de $\mathcal{T}^\delta$.

Insistons sur le fait que dans tout ce paragraphe nous nous plaçons toujours sur une variété conformément plate.

Classification des tenseurs, symboles et opérateurs conformément invariants

Donnons une définition de l'invariance conforme pour les trois modules $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$.

Définition 4.6.3. *Un symbole $P \in \mathcal{S}^\delta[\xi]$ est conformément invariant si il vérifie $L^\delta_X P = 0$ pour tout $X \in \mathrm{conf}(M,g)$. De même un tenseur $T \in \mathcal{T}^\delta$ est conformément invariant si $\mathbb{L}^\delta_X T = 0$ pour tout $X \in \mathrm{conf}(M,g)$, et un opérateur différentiel $D \in \mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ est conformément invariant si $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X D = 0$ pour tout $X \in \mathrm{conf}(M,g)$.*

Nous travaillons désormais localement en coordonnées de Darboux conformes, on a donc $g_{ij} = F\eta_{ij}$ où η est la métrique plate de signature (p,q) et F une fonction strictement positive. On dispose également de $\mathrm{vol}_x = \varepsilon_{j_1\dots j_n} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_n}$ la forme volume associée. L'algèbre de Lie des similitudes est alors bien définie, et son action sur les 3 modules est la même, par transport. Commençons donc par déterminer les expressions locales des symboles invariants sous l'action (locale) des similitudes. On utilise pour cela la Proposition 4.1.5 qui traite des opérateurs différentiels sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ commutant à l'action des isométries. Comme les symboles s'identifient dans ce contexte aux opérateurs différentiels d'ordre 0, on obtient immédiatement le lemme suivant.

Lemme 4.6.4. *Soit les symboles définis localement par $R = \eta^{ij}\tilde{p}_i\tilde{p}_j$, $\chi = \varepsilon_{j_1\dots j_n}\tilde{\xi}^{j_1}\ldots\tilde{\xi}^{j_n}$, $\Delta = \tilde{p}_i\tilde{\xi}^i$ et $\Delta^\chi = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\{\Delta,\chi\} = \varepsilon_{j_1\dots j_n}\tilde{p}^{j_1}\tilde{\xi}^{j_2}\ldots\tilde{\xi}^{j_n}$, introduits en (B.0.14). L'algèbre commutative des symboles invariants sous les isométries est engendrée vectoriellement par les monômes*

$$\Delta^a * \chi^b R^s, \tag{4.116}$$

tels que $a,b = 0,1$, $s \in \mathbb{N}$ et par définition $\Delta * 1 = \Delta$, $1 * \chi = \chi$ et $\Delta * \chi = \Delta^\chi$.

On remarque que $*$ est le star-produit de Moyal [76], voir (2.25), bien défini localement. Rappelons maintenant l'action des similitudes $L^\delta_{X_0} = x^i\tilde{\partial}_i - \tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}_i} + \delta n$ donnée en (4.3). Il en découle que R doit être muni d'un poids $\delta = \frac{2}{n}$, Δ et Δ^χ d'un poids $\delta = \frac{1}{n}$ et χ d'un poids nul, pour être invariants sous les similitudes. Ce sont alors des symboles globalement définis.

Proposition 4.6.5. *Sur la variété conformément plate (M, g), les invariants locaux sous les similitudes R, Δ, χ sont des symboles bien défini globalement, et égaux à*

$$R = |\mathrm{vol}_g|^{\frac{2}{n}} g^{ij} p_i p_j \in \mathcal{S}^{\frac{2}{n}}[\xi], \quad \Delta = |\mathrm{vol}_g|^{\frac{1}{n}} p_i \xi^i \in \mathcal{S}^{\frac{1}{n}}[\xi], \quad \chi = (\mathrm{vol}_g)_{j_1 \dots j_n} \xi^{j_1} \dots \xi^{j_n} \in \mathcal{S}^0[\xi], \tag{4.117}$$

où $(\mathrm{vol}_g)_{j_1 \dots j_n}$ désignent les composantes de la forme volume de M définie par la métrique g.

Nous pouvons alors déterminer les invariants conformes de $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$. Nous en obtenons, grâce à la proposition précédente, une expression globale pour ceux de $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, et de $\mathcal{T}^\delta$ car l'identification ev_g est globale. Par contre, nous ne fournissons qu'une expression locale des opérateurs différentiels conformément invariants, qui sont automatiquement des objets globaux sur la variété conformément plate (M, g).

Théorème 4.6.6. *Les invariants conformes de la famille de modules $(\mathcal{T}^\delta)_{\delta \in \mathbb{R}}$ sont, via ev_g, donnés par*

$$\mathsf{ev}_g^{-1} \left(\Delta^a * \chi^b R^s \right) \in \mathcal{T}^{\frac{2s+a}{n}}, \tag{4.118}$$

où $a, b = 0, 1$ et $s \in \mathbb{N}$. La famille de modules $(\mathcal{S}^\delta[\xi])_{\delta \in \mathbb{R}}$ a pour invariants conformes

$$\Delta^a * \chi^b R^s \in \mathcal{S}^{\frac{2s+a}{n}}[\xi], \tag{4.119}$$

où $s \in \mathbb{N}$ et $a, b = 0, 1$ avec $a + b \neq 0$. Les invariants conformes de la famille de modules $(\mathsf{D}^{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in \mathbb{R}}$ ont pour expressions locales, via l'ordre normal,

$$\mathcal{N}(\chi) \in \mathsf{D}^{\lambda,\lambda}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{N}(\Delta^\chi) \in \mathsf{D}^{\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n}}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{N}(\Delta\, R^s) \in \mathsf{D}^{\frac{n-2s-1}{2n}, \frac{n+2s+1}{2n}}, \tag{4.120}$$

et ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous avons déjà montré que pour les trois familles de modules $(\mathcal{T}^\delta)_{\delta \in \mathbb{R}}$, $(\mathcal{S}^\delta[\xi])_{\delta \in \mathbb{R}}$ et $(\mathsf{D}^{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in \mathbb{R}}$, les invariants sous les similitudes sont, à l'application de $(\mathsf{ev}_g)^{-1}$ ou $\mathcal{N}^{-1}$ près, de la forme $\Delta^a * \chi^b R^s \in \mathcal{S}^{\frac{2s+a}{n}}[\xi]$, avec $a, b = 0, 1$ et $s \in \mathbb{N}$.

1. L'action des inversions sur le module $\mathcal{T}^\delta$ s'obtient en combinant (4.53), qui exprime $\mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i}$ en fonction de $L^\delta_{\bar{X}_i}$, et (4.4), qui fournit une expression explicite de $L^\delta_{\bar{X}_i}$. Transportée sur les symboles, elle s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathsf{ev}_g \mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i} (\mathsf{ev}_g)^{-1} &= (x_j x^j \tilde{\partial}_i - 2 x_i x^j \tilde{\partial}_j) + (-2 \tilde{p}_i x_j \partial_{\tilde{p}_j} + 2 x_i \tilde{p}_j \partial_{\tilde{p}_j} + 2 \tilde{p}_k x^k \partial_{\tilde{p}^i}) \\ &\quad + 2 x_j \tilde{\xi}^j \partial_{\tilde{\xi}^i} - 2 \tilde{\xi}_i x^k \partial_{\tilde{\xi}^k} - 2 n \delta x_i, \end{aligned}$$

   et annule donc les invariants sous les similitudes. Ils coïncident avec les invariants conformes de $(\mathcal{T}^\delta)_{\delta \in \mathbb{R}}$, comme annoncé en (4.118).

2. Pour le module $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, l'action des inversions est donnée, d'après la formule (4.53),

par $L^\delta_{\bar{X}_i} = \mathsf{ev}_g \mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i}(\mathsf{ev}_g)^{-1} - 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i\Psi$. Il en découle, pour $\delta = \frac{2s+a}{n}$,

$$L^\delta_{\bar{X}_i}\left(\Delta^a * \chi^b R^s\right) = -2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i\Delta^a * \chi^b\,[\Psi, R^s],$$

car $[\Psi,\Delta] = [\Psi,\chi] = 0$. Comme $[\Psi, R^s] = 2sR^{s-1}\Delta$, le symbole $\Delta^a * \chi^b\, R^s \in \mathcal{S}^{\frac{2s+a}{n}}[\xi]$ est invariant conforme si et seulement si $a + b \neq 0$, d'où le résultat (4.119).

3. Enfin, l'action des inversions sur le module $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, transportée à l'espace des symboles, est donnée en (4.10) par

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} = L^\delta_{\bar{X}_i} + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}(-\tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}^j}\partial_{\tilde{p}_j} + 2\tilde{p}_j\partial_{\tilde{p}_j}\partial_{\tilde{p}^i}) + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\chi^j_i\partial_{\tilde{p}_j} + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}n\lambda\partial_{\tilde{p}_i},$$

où on rappelle que $\chi^j_i = \tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\partial_{\tilde{\xi}_j} + \frac{1}{2}\partial_{\tilde{\xi}_j}\partial_{\tilde{\xi}^i}$. Le symbole χ, de poids $\delta = 0$, s'annule clairement sous l'action de cette dérivée de Lie pour tout $\lambda = \mu$. Calculons maintenant, pour $\delta = \mu - \lambda = \frac{2s}{n}$, son action sur $R^s \in \mathcal{S}^\delta[\xi]$,

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} R^s = 2s\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left[(2n\lambda + 2s - n)\tilde{p}_i - 2\tilde{\xi}_i\Delta\right]R^{s-1}.$$

Ainsi, comme pour le module des symboles, R^s n'est pas invariant conforme si $s \neq 0$. De même, l'action de $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}$ sur χR^s est égale à,

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}\chi R^s = 2s\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left[(2n\lambda + 2s - n)\tilde{p}_i - \partial_{\tilde{\xi}^i}\Delta^\chi\right]R^{s-1},$$

expression qui ne s'annule pas si $s \neq 0$. Il nous reste à évaluer son action sur $\Delta * \chi^b R^s \in \mathcal{S}^{\frac{2s+1}{n}}[\xi]$, pour $b = 0, 1$. On obtient d'une part

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}\Delta R^s = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\,(2s + 1 - n + 2n\lambda)\left(\tilde{\xi}_i R^s + 2s\tilde{p}_i\Delta R^{s-1}\right),$$

qui est nul si et seulement si $\lambda = \frac{n-2s-1}{2n}$, et d'autre part

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}\Delta^\chi R^s = 2s\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\,(2s - n + 2n\lambda)\,\tilde{p}_i\Delta^\chi R^{s-1} + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\,(4s + 1 - n + 2n\lambda)\,\partial_{\tilde{\xi}_i}\chi R^s,$$

qui est nul si et seulement si $s = 0$ et $\lambda = \frac{n-1}{2n}$. Cela achève la démonstration.

□

La chiralité et l'opérateur de Dirac

Bien entendu, une application conformément équivariante entre deux des 3 modules $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ permet d'envoyer un élément invariant conforme du module source sur un élément invariant conforme du module image. On peut ainsi utiliser la superisation et la quantification conformément équivariante pour relier les trois invariants conformes non triviaux de plus bas degré des 3 modules, qui s'écrivent χ, Δ et Δ^χ sur l'espace des symboles. Pour χ, la superisation est triviale et la quantification aussi, elle mène pour tout poids $\lambda \in \mathbb{R}$ à la chiralité,

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\lambda}(\chi) = (\sqrt{2})^{-n}(\mathrm{vol}_g)_{j_1\ldots j_n}\gamma^{j_1}\ldots\gamma^{j_n}. \tag{4.121}$$

Précisons que $\gamma^i = g^{ij}\gamma(\partial_j)$. Concernant Δ et Δ^χ, on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.6.7. *Les deux invariants conformes de la famille de modules $(\mathcal{T}_1^\delta)_{\delta\in\mathbb{R}}$ sont $p_i\xi^i \in \mathcal{T}^{\frac{1}{n}}$, qui est de poids nul et $(\mathrm{vol}_g)_{j_1\ldots j_n}p^{j_1}\xi^{j_2}\ldots\xi^{j_n} \in \mathcal{T}^{\frac{1}{n}}$, qui est de poids $\frac{-n+1}{n}$. Leurs superisés sont donnés par les symboles invariants conformes*

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{n}}(p_i\xi^i) &= \Delta \in \mathcal{S}^{\frac{1}{n}}[\xi], &(4.122)\\ \mathrm{S}_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{n}}((\mathrm{vol}_g)_{j_1\ldots j_n}p^{j_1}\xi^{j_2}\ldots\xi^{j_n}) &= \Delta^\chi \in \mathcal{S}^{\frac{1}{n}}[\xi]. &(4.123)\end{aligned}$$

Leurs quantifiés sont également invariants conformes, et correspondent respectivement à l'opérateur de Dirac

$$\boxed{\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}(\Delta) = \frac{\gamma^i}{\sqrt{2}}\nabla_i \in \mathcal{D}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}},} \tag{4.124}$$

et à son commutateur avec la chiralité,

$$\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}(\Delta^\chi) = g^{ij_1}(\mathrm{vol}_g)_{j_1\ldots j_n}\frac{\gamma^{j_2}}{\sqrt{2}}\ldots\frac{\gamma^{j_n}}{\sqrt{2}}\nabla_i \in \mathcal{D}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}. \tag{4.125}$$

Les poids $(\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n})$ correspondent à l'une des deux résonances[5] *de la quantification conformément équivariante.*

Rappelons que ∇_i est la dérivée covariante des spineurs dans la direction ∂_i, son expression est donnée en (3.66). Le poids $\frac{1}{n}$ de l'opérateur de Dirac est conféré par $|\mathrm{vol}_g|^{\frac{1}{n}}$ qui est sous entendu. On a explicitement $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{n}}(p_i\xi^i) = p_i\xi^i|\mathrm{vol}_g|^{\frac{1}{n}}$ et $\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}(p_i\xi^i|\mathrm{vol}_g|^{\frac{1}{n}}) = |\mathrm{vol}_g|^{\frac{1}{n}}\frac{\gamma^i}{\sqrt{2}}\nabla_i$.

D'autre part, l'indétermination de la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}$, explicitée dans le Théorème 4.4.4, n'a pas de conséquence sur la quantification des symboles Δ et Δ^χ.

Remarque 4.6.8. *Il est remarquable que l'opérateur de Dirac et son commutateur avec la chiralité soient précisément dans l'un des deux espaces $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ de poids résonant. Rappelons que c'était également le cas pour l'opérateur invariant conforme de Yamabe-Laplace. La deuxième résonance, correspondant aux poids $(\frac{-1}{2n},\frac{2n+1}{2n})$, n'est associée à aucun opérateur différentiel conformément invariant.*

5. Correspondant à la non unicité.

Obstruction à la superisation du tenseur invariant conforme $g^{ij}p_ip_j \in \mathcal{T}^{\frac{2}{n}}$

Les invariants conformes $\mathsf{ev}_g^{-1}(R^s)$ de la famille de modules $(\mathcal{T}^\delta)_{\delta\in\mathbb{R}}$ n'ont pas d'équivalent dans les deux autres familles de modules. Comme les poids δ pour lesquels le module $\mathcal{T}^\delta$ admet un élément invariant conforme, de degré supérieur ou égal à deux, correspondent à des résonances pour la superisation, elle n'est pas définie sur tous les tenseurs. Explicitons ceci en calculant les superisés de $H = g^{ij}p_ip_j \in \mathcal{T}^\delta$, χH et ΔH, qui sont invariants conformes si respectivement $\delta = \frac{2}{n}$, $\delta = \frac{2}{n}$ et $\delta = \frac{3}{n}$, cf (4.118).

Proposition 4.6.9. *Soit $H = g^{ij}p_ip_j \in \mathcal{T}^\delta$, où $g_{ij} = F\eta_{ij}$ est une métrique conformément plate. Pour $\delta \neq \frac{2}{n}$, on a $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}(H) = H + \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{1}{n\delta-2}\xi_i\xi^j\partial_{p_j}\partial_i^\nabla H$, ou encore $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}(H) = H - \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{n\delta}{n\delta-2}\frac{F_i\xi^i}{F^2}\Delta$. Et pour tout δ, $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}(\chi H) = \chi H$ et $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}(\Delta H) = \Delta H$.*

Remarquons que, comme l'expression de ∂_i^∇, donnée en (4.67), tient compte du poids des densités, on a $\partial_j^\nabla H = -n\delta\frac{F_i}{F}H$.

Démonstration. Pour déterminer le superisé d'un élément de $\mathcal{T}^\delta$ on peut procéder comme dans la preuve générale d'existence et d'unicité de la superisation conformément équivariante. On a vu alors que le superisé de $P \in \mathcal{T}_2^\delta$ est de la forme $P_2 + P_1 + P_0$, avec $P_2 = \mathsf{ev}_g(P)$ et, P_1 et P_0 sont déterminés par les équations $2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\Gamma\Psi P_2 = (\gamma_{2,0,1;00} - C^\delta_{\mathcal{T}})P_1$ et $2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\Gamma\Psi P_1 = (\gamma_{2,0,1;00} - C^\delta_{\mathcal{T}})P_0$, où $\gamma_{2,0,1;00}$ est la valeur propre associée au vecteur propre P_2 de $C^\delta_{\mathcal{T}}$, donnée par la formule générale (4.105). On en déduit immédiatement que pour P_2 égal à χH ou ΔH, on a $P_1 = P_0 = 0$, d'où la superisation triviale de ces deux tenseurs.

On suppose maintenant que $P_2 = \mathsf{ev}_g(H) = g^{ij}\tilde{p}_i\tilde{p}_j$. Pour trouver P_1 il nous faut donc calculer tout d'abord

$$\Gamma\Psi P_2 = 2\Gamma(F^{-1}\Delta) = -2\frac{F_i\tilde{\xi}^i}{F^2}\Delta \in \mathcal{S}^\delta_{1,2,0;10}[\xi].$$

Il en découle que $P_1 \in \mathcal{S}^\delta_{1,2,0;10}[\xi]$ et donc $C^\delta_{\mathcal{T}}P_1 = \gamma_{1,2,0;10}P_1$ et $P_0 = 0$. Nous pouvons alors évaluer

$$(\gamma_{2,0,1;00} - C^\delta_{\mathcal{T}})P_1 = (2n\delta - 4)P_1,$$

d'où $P_1 = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{2}{n\delta-2}\frac{F_i\tilde{\xi}^i}{F^2}\Delta$. Or un simple calcul montre que $g^{ij}\tilde{p}_i\tilde{p}_j + \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\tilde{\xi}^iF_i}{F^2}\Delta = g^{ij}p_ip_j$, d'où le résultat annoncé. □

Il apparait ainsi clairement l'obstruction à la superisation si $\delta = \frac{2}{n}$ et il en est de même pour $\delta = \frac{2s}{n}$ avec s un entier naturel quelconque.

4.6.3 Le couplage à un champ électromagnétique

Un potentiel électromagnétique A est une U(1)-connexion qui s'écrit localement comme 1-forme, $A = A_idx^i$, de M. Elle a pour courbure le champ électromagnétique, donné localement par $F_{ij} = \partial_iA_j - \partial_jA_i$. Nous pouvons coupler le symbole de l'opérateur de

Dirac de façon minimale avec le potentiel électromagnétique A, ce qui conduit au nouveau symbole $H_1 = \xi^i(p_i - qA_i)$, où q représente la charge électrique du système. L'opérateur quantique associé par la quantification conformément équivariante, donnée en (4.71), est simplement

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(H_1) = \frac{\gamma^i}{\sqrt{2}}(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla_i - qA_i), \tag{4.126}$$

i.e. l'opérateur obtenu par couplage minimal du potentiel électromagnétique A avec l'opérateur de Dirac. Ainsi la quantification conformément équivariante commute au couplage minimal.

Par ailleurs, nous pouvons calculer le carré de H_1, donné par le crochet de Poisson, en utilisant la formule générale (3.31) donnant le flot d'une observable,

$$-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\{H_1, H_1\} = g^{ij}(p_i - qA_i)(p_j - qA_j) + qS^{ij}F_{ij}, \tag{4.127}$$

où l'on rappelle que les $S^{ij} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\xi^i\xi^j$ représentent les composantes du spin. D'autre part on peut superiser le hamiltonien classique $H_0 = g^{ij}(p_i - qA_i)(p_j - qA_j)$ grâce à la Proposition 4.6.9 donnant le superisé de $g^{ij}p_ip_j$ et au Corollaire 4.4.5 donnant la formule générale de la superisation en degré 1. On obtient alors

$$\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}(H_0) = g^{ij}(p_i - qA_i)(p_j - qA_j) + \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{n\delta}{n\delta - 2}\frac{F_i\xi^i}{F^2}\Delta + \frac{2q}{2 - n\delta}(S^{ij}\partial_i^\nabla A_j), \tag{4.128}$$

qui redonne, pour $\delta = 0$, l'expression (4.127), et n'est pas défini pour $\delta = \frac{2}{n}$.

4.6.4 Les tenseurs de Killing-Yano

Suivant [43] nous appelons supercharges les symboles qui sont en involution avec le symbole de l'opérateur de Dirac pour le crochet de Poisson canonique du supercotangent. L'article fondateur de G.W. Gibbons et al. [43] détermine l'ensemble des supercharges de symbole principal $f^i_j\xi^jp_i$ dans ce cadre. Il montre alors que f est un tenseur de Killing-Yano d'ordre 2. M. Tanimoto [98] a étendu ensuite cette correspondance entre supercharges et tenseurs de Killing-Yano, à des tenseurs d'ordre quelconque. Nous montrons ici que la superisation conformément équivariante de l'espace de tenseurs $\mathcal{T}^0$ réalise précisément cette correspondance entre tenseurs de Killing-Yano et supercharges. Elle nous conduit à une caractérisation en termes supersymplectiques des tenseurs de Killing-Yano (conformes).

La quantification des supercharges, issues des tenseurs de Killing-Yano d'ordre 2, est donnée de façon ad hoc dans [43], et permet de retrouver l'opérateur commutant à l'opérateur de Dirac utilisé par B. Carter et R.G. McLenaghan dans [23], pour intégrer l'équation de Dirac dans l'espace-temps de Kerr. Par la suite, M. Cariglia [21] a donné la version quantique des supercharges associées aux tenseurs de Killing-Yano d'ordre quelconque et montré qu'ils commutaient avec l'opérateur de Dirac. Nous montrons que la quantification conformément équivariante conduit aux versions quantiques des supercharges données par ces deux articles.

Les tenseurs de Killing-Yano conformes sont une généralisation naturelle des tenseurs de Killing-Yano. Ils ont été utilisé dans deux articles très récents [64, 81] pour intégrer l'équation de Dirac dans des espace-temps généralisant celui de Kerr. Il ne semble pas que leur équivalent quantique ait été envisagé pour l'instant. La quantification conformément équivariante en propose une expression.

Par souci de généralité, nous allons formuler nos résultats pour les tenseurs de Killing-Yano conformes et les spécifier ensuite aux tenseurs de Killing-Yano, d'ordre arbitraire et d'ordre 2.

Des tenseurs de Killing-Yano aux supercharges

Commençons par rappeler la définition usuelle d'un tenseur de Killing-Yano [107] et de Killing-Yano conforme [50].

Définition 4.6.10. *Sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) de dimension n, un tenseur de Killing-Yano conforme d'ordre κ est une κ-forme f vérifiant*

$$\nabla_X f = \frac{1}{\kappa+1}\langle X, df\rangle - \frac{1}{n-\kappa+1} X^* \wedge d^* f \tag{4.129}$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita, d^* est l'opérateur de divergence, ou encore le dual de la différentielle extérieure d et X^* est la 1-forme duale de X, relativement à la métrique g. En composantes, cette équation se traduit par

$$\nabla_{(j_1} f_{j_2)j_3\dots j_{\kappa+1}} = g_{j_1 j_2}\Phi_{j_3\dots j_{\kappa+1}} - (\kappa-1) g_{[j_3(j_1}\Phi_{j_2)j_4\dots j_{\kappa+1}]}, \tag{4.130}$$

où Φ est un tenseur d'ordre $\kappa - 1$, qui se trouve être égal à $\Phi = \frac{1}{n-\kappa+1}\nabla_{j_1} f^{j_1}_{j_2\dots j_\kappa}$.

Le tenseur f est de Killing-Yano s'il est de plus cofermé (i.e. $\Phi = 0$), ou de manière équivalente, si

$$\nabla_{(j_1} f_{j_2)j_3\dots j_{\kappa+1}} = 0. \tag{4.131}$$

A partir de f, un tenseur de Killing-Yano conforme d'ordre κ, on obtient naturellement un élément de $\mathcal{T}^0$, noté P_f, donné par

$$P_f = f^i_{j_1\dots j_{\kappa-1}} \xi^{j_1} \dots \xi^{j_{\kappa-1}} p_i, \tag{4.132}$$

où $f^i_{j_1\dots j_{\kappa-1}} = g^{ij_\kappa} f_{j_1\dots j_\kappa}$.

Proposition 4.6.11. *Soit (M, g) une variété conformément plate, f un tenseur de Killing-Yano conforme. La superisation conformément équivariante de $P_f \in \mathcal{T}^0$, défini en (4.132),* *est donnée par*

$$\mathrm{S}^0_{\mathcal{T}}(P_j) = f^i_{j_1\ldots j_{\kappa-1}}\xi^{j_1}\ldots\xi^{j_{\kappa-1}}p_i - \frac{\hbar}{\mathsf{i}(\kappa+1)}\nabla_{j_1}f_{j_2\ldots j_{\kappa+1}}\xi^{j_1}\ldots\xi^{j_{\kappa+1}}. \qquad (4.133)$$

Cela découle directement du Corollaire 4.4.5 donnant, en termes covariants, la superisation conformément équivariante des tenseurs de poids 0 et de degré 1 en p. En effet, on a $\partial^{\nabla}_{j_1}(f_{j_2\ldots j_{\kappa+1}}\xi^{j_2}\ldots\xi^{j_{k+1}}) = (\nabla_{j_1}f_{j_2\ldots j_{\kappa+1}})\xi^{j_2}\ldots\xi^{j_{k+1}}$. Si f est un tenseur de Killing-Yano, l'expression (4.133) coïncide avec celle, obtenue en [98], de la supercharge Q_f associée au tenseur de Killing-Yano f. Ainsi, la correspondance entre tenseurs de Killing-Yano et supercharges, montrée dans [98], est fournie par la superisation. En particulier, pour f un tenseur de Killing-Yano d'ordre 2, la formule (4.133) s'écrit alors

$$\mathrm{S}^0_{\mathcal{T}}(f^i_j\xi^j p_i) = f^i_j\xi^j p_i + \frac{\hbar}{3\mathsf{i}}\xi^i\xi^j\xi^k\nabla_i f_{jk}, \qquad (4.134)$$

qui est précisément l'expression obtenue dans [43] pour la supercharge associée au tenseur de Killing-Yano f. Nous pouvons étendre cette correspondance aux tenseurs de Killing-Yano conformes, pour en obtenir la caractérisation qui suit.

Théorème 4.6.12. *Soit (M,g) une variété conformément plate. A tout tenseur antisymétrique f sur M d'ordre κ, on peut associer le symbole $P_f = f^i_{j_1\ldots j_{\kappa-1}}\xi^{j_1}\ldots\xi^{j_{\kappa-1}}p_i$. On a alors*

$$\boxed{\{\Delta, \mathcal{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f)\} = 0\ (\Delta P_h) \Longleftrightarrow f \text{est un tenseur de Killing-Yano (conforme)},} \qquad (4.135)$$

où le crochet de Poisson est donné par la structure symplectique canonique du supercotangent de (M,g), h est un tenseur antisymétrique d'ordre $\kappa-2$ et $\Delta = p_i\xi^i$ est le symbole de l'opérateur de Dirac.

Démonstration. D'après la formule (3.31) donnant le champ hamiltonien de tout symbole on obtient,

$$\begin{aligned}\{p_i\xi^i, \mathcal{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f)\} \quad = \quad & \xi^i\partial^{\nabla}_i P_f - \frac{\mathsf{i}}{\hbar}p_i g^{ij}\partial_{\xi^j}P_f + \frac{\hbar}{\mathsf{i}(\kappa+1)}\xi^i\partial^{\nabla}_i\left(\xi^i\partial^{\nabla}_i(f_{j_1\ldots j_\kappa}\xi^{j_1}\ldots\xi^{j_\kappa})\right) \\ & + \frac{1}{\kappa+1}\left(-\kappa\xi^{j_1}(\nabla_{j_1}f_{j_2\ldots j_{\kappa+1}})p^{j_2}\xi^{j_3}\ldots\xi^{j_{\kappa+1}} + p^i(\nabla_i f_{j_2\ldots j_{\kappa+1}})\xi^{j_2}\ldots\xi^{j_{\kappa+1}}\right).\end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite est nul par antisymétrie de f et le troisième terme est nul également car l'opérateur $\xi^i\partial^{\nabla}_i$ est impair et donc de carré nul. L'équation précédente se simplifie donc en

$$\{p_i\xi^i, \mathcal{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f)\} = \frac{1}{\kappa+1}\left(\nabla_{(j_1}f_{j_2)\ldots j_{\kappa+1}}\right)p^{j_1}\xi^{j_2}\ldots\xi^{j_{\kappa+1}}.$$

La condition $\{p_i\xi^i, \mathcal{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f)\} = p_i\xi^i P_h$ portant sur f est donc équivalente à l'équation (4.130) définissant les tenseurs de Killing-Yano conformes, la preuve du théorème en découle. □

Quantification des supercharges

Nous allons appliquer maintenant la quantification équivariante aux supercharges obtenues, ainsi que plus généralement aux superisés des éléments de $\mathcal{T}^0$ obtenus à partir des tenseurs de Killing-Yano conformes.

Proposition 4.6.13. *Soit* (M,g) *une variété conformément plate,* f *un tenseur de Killing-Yano conforme et* $P_f \in \mathcal{T}^0$ *défini par (4.132). On a alors*

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{\lambda,\lambda}\circ \mathrm{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f) &= (\sqrt{2})^{\frac{1-\kappa}{2}}\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(f^i_{j_1\ldots j_{\kappa-1}}\gamma^{j_1}\ldots\gamma^{j_{\kappa-1}}\nabla_i - \frac{1}{2(\kappa+1)}\nabla_{[j_1}f_{j_2\ldots j_{\kappa+1}]}\gamma^{j_1}\ldots\gamma^{j_{\kappa+1}}\right)\\ &+ (\sqrt{2})^{\frac{1-\kappa}{2}}\left(c_d(\kappa-1)+2c_{\lambda\psi}(\kappa-1)\right)\left(\nabla_i(f^i_{j_1\ldots j_{\kappa-1}})\gamma^{j_1}\ldots\gamma^{j_{\kappa-1}}\right),\end{aligned} \tag{4.136}$$

où c_d *et* $c_{\lambda\psi}$ *sont donnés en (4.44) et valent respectivement* $c_d(\kappa-1) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\frac{2n\lambda+1}{2(n+1)}$ *et* $c_{\lambda\psi}(\kappa-1) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\frac{n(1-2\lambda)}{2(n+1)(\kappa-1-n)}$.

D'après l'équation (4.131), caractérisant les tenseurs de Killing-Yano, le terme en facteur de $(c_d(\kappa-1)+2c_{\lambda\psi}(\kappa-1))$ dans l'expression (4.136) s'annule, et on retrouve ainsi la formule donnée dans [21] pour le quantifié d'une supercharge. En particulier, si f est un tenseur de Killing-Yano d'ordre 2, on obtient,

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\lambda}(\mathrm{S}^0_{\mathcal{T}}(f^i_j\xi^j p_i)) = \frac{\hbar}{\mathsf{i}\sqrt{2}}\left(f^i_j\gamma^j\nabla_i + \frac{1}{6}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\nabla_i f_{jk},\right), \tag{4.137}$$

qui est l'opérateur, commutant à l'opérateur de Dirac, utilisé par B. Carter et R.G. McLenaghan [23] pour intégrer l'équation de Dirac sur un espace-temps de Kerr.

Constatons enfin que, pour le choix du poids des densités spinorielles λ correspondant à celui de la quantification géométrique, i.e $\lambda = \frac{1}{2}$, l'équation (4.136) se réduit à

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\circ \mathrm{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f) &= (\sqrt{2})^{\frac{1-\kappa}{2}}\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(f^i_{j_1\ldots j_{\kappa-1}}\gamma^{j_1}\ldots\gamma^{j_{\kappa-1}}\nabla_i - \frac{1}{2(\kappa+1)}\nabla_{[j_1}f_{j_2\ldots j_{\kappa+1}]}\gamma^{j_1}\ldots\gamma^{j_{\kappa+1}}\right)\\ &\quad +(\sqrt{2})^{\frac{1-\kappa}{2}}\frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\left(\nabla_i(f^i_{j_1\ldots j_{\kappa-1}})\gamma^{j_1}\ldots\gamma^{j_{\kappa-1}}\right).\end{aligned} \tag{4.138}$$

Perspectives

Cette thèse s'inscrit dans le droit fil des recherches actuelles qui sont menées sur la quantification équivariante. Elle y contribue en étendant son cadre d'application des fibrés cotangents aux fibrés supercotangents. Ceci permet d'une part de quantifier des systèmes à spin et d'autre part d'étudier des modules d'opérateurs différentiels qui agissent désormais sur des sections spinorielles. Le travail que nous avons présenté soulève ainsi de nouvelles problématiques que nous formulons ici.

Le premier résultat original présenté dans cette thèse est le relevé hamiltonien, au supercotangent $\mathcal{M}$, des champs de vecteurs Killing-conformes $X \in \mathrm{conf}(M, g)$. Nous avons imposé au relevé de préserver la direction d'une 1-forme auxiliaire, $\beta = g_{ij}\xi^i dx^j$, afin qu'il soit unique. La quantification géométrique de $\mathcal{M}$ nous a permis d'obtenir la dérivée de Lie des spineurs, introduite par Y. Kosmann, à partir de ce relevé, qui dépend du choix de la 1-forme β. Il serait instructif de comparer cette démarche à d'autres qui conduisent également à une dérivée de Lie des spineurs, notamment l'approche de [83], basée sur un lagrangien. Il s'agirait ainsi de mieux comprendre le statut de β, et d'identifier le choix d'une dérivée de Lie des spineurs avec un choix sur le relevé des champs de vecteurs à $\mathcal{M}$.

La construction du fibré spinoriel de (M, g) par la quantification géométrique de son supercotangent $\mathcal{M}$ conduit à une question : la condition d'existence d'une polarisation sur $\mathcal{M}$ est-elle plus forte que celle d'existence d'un fibré spinoriel sur M ? L'étude menée a montré qu'une structure plus forte qu'une structure spinorielle était nécessaire pour qu'il existe une polarisation de $\mathcal{M}$ contenant la polarisation verticale de T^*M. Cependant, la quantification conformément équivariante permet de prolonger la quantification géométrique au cas où (M, g) est munie uniquement d'une structure spinorielle. Existe-t'il donc une structure (une polarisation ?) qui permettent de réduire l'espace de représentation de la préquantification pour construire une quantification "géométrique" sous-jacente à la quantification conformément équivariante ?

Nous avons obtenu ensuite l'expression explicite de la quantification conformément équivariante des supercotangents sur les symboles de degré 1. Il est naturel de chercher à quantifier des symboles de degré plus élevé, comme dans le cas des fibrés cotangents. Cependant, la complexité des calculs, via la méthode présentée ici, nécessiterait l'usage de logiciels de calcul formel et aboutirait très vraisemblablement à des formules très complexes, y compris pour les symboles de degré 2. Cependant, il est envisageable de calculer le quantifié de symboles particuliers, via la "méthode des Casimirs". Elle repose sur la démonstration générale d'existence et d'unicité de la quantification conformément équivariante, qui est présentée à la Section 4.5, et a été mise en œuvre pour superiser le symbole $R = g^{ij}p_ip_j$ à la Proposition 4.6.9. Nous pouvons envisager de quantifier ainsi le symbole R (ou son superisé ?) pour obtenir, a priori, le laplacien de Lichnerowicz. La dépendance en la dimension de la variété, et en les poids λ et μ des spineurs sources et images, du coefficient de la courbure scalaire ainsi obtenu, serait un des points majeurs à discuter. De plus, cela illustrerait la différence entre quantification du fibré cotangent et du supercotangent.

Nous avons pu déterminer, au Théorème 4.6.6, l'ensemble des symboles des opérateurs différentiels spinoriels qui sont conformément invariants. Il en découle l'absence d'opérateur d'ordre 2 conformément invariant, ils sont en effet tous d'ordre impair, sauf la chiralité, d'ordre 0. Rappelons que dans le cas des opérateurs différentiels scalaires, il existe un seul opérateur conformément invariant pour chaque ordre pair, et aucun d'ordre impair ; celui d'ordre 2 est le laplacien de Yamabe, et celui d'ordre 4 est l'opérateur de Paneitz-Branson [19]. Ce dernier a fait l'objet de nombreux travaux, notamment à cause du terme de Q-courbure qu'il comporte. Via la "méthode des Casimirs", évoquée ci-dessus, nous avons déjà pu retrouver directement l'opérateur de Yamabe par quantification de son symbole $R = g^{ij}p_ip_j$. Il s'agirait de retrouver de même l'opérateur de Paneitz-Branson par quantification de son symbole R^2. Dans le cas des opérateurs spinoriels, nous pourrions obtenir l'opérateur d'ordre 3 qui est conformément invariant et identifier ses termes de courbures. Retrouve-t'on alors la Q-courbure ? Des termes de courbures nouveaux interviennent-ils ?

Tant pour les fibrés cotangents que pour les supercotangents, le lien entre résonances de la quantification conformément équivariante et poids des opérateurs conformément invariants reste à élucider. L'exemple de l'opérateur de Yamabe avait été mis en évidence dans [37], ses poids correspondant précisément à l'une des résonances de la quantification conformément équivariante des symboles de degré 2. Ici, nous avons montré qu'il en était de même pour l'opérateur de Dirac, dont les poids correspondent à l'une des deux résonances de la quantification conformément équivariante des symboles de degré 1. L'obtention d'autres opérateurs conformément invariants par quantification permettrait de corroborer cette observation. Ensuite, plusieurs voies sont à explorer. Il est envisageable que l'existence d'un opérateur conformément invariant d'ordre donné permette de modifier une quantification conformément équivariante en une autre, expliquant ainsi la perte de l'unicité. On peut également s'intéresser aux statuts des autres résonances, qui pourraient être associées également à des objets invariants conformes. Permettent-ils de modifier une quantification conformément équivariante en une autre ? L'idée globale est d'établir une correspondance entre non unicité de la quantification conformément équivariante et objets conformément invariants.

Des approches de la quantification conformément équivariante en termes de connexions de Cartan [75] et de tracteurs [93] ont été développées très récemment. Dans le cas des fibrés cotangents ces formulations géométriques donnent accès à des formules pour des symboles de tout degré et permettent d'étendre la quantification de manière naturelle à des variétés qui ne sont pas conformément plates. Il serait donc très fructueux de parvenir à étendre ces formalismes au cas des supercotangents traité ici, et conduirait sûrement à une nouvelle compréhension de la non invariance conforme de la quantification conformément équivariante des supercotangents.

La superisation conformément équivariante s'est montrée des plus efficaces pour passer des tenseurs de Killing-Yano (conformes) sur (M, g) aux supercharges associées sur le supercotangent $\mathcal{M}$. Détaillons maintenant comment un résultat classique [43] pourrait être reformuler via la superisation. Partant de deux tenseurs de Killing-Yano f et h d'ordre 2, on peut construire un tenseur de Killing usuel d'ordre 2 via $K_{ij} = g^{kl}(f_{ik}h_{jl} + f_{jk}h_{il})$. Notons d'une part P_f et P_h les symboles associés aux tenseurs f et h, et d'autre part $Q_f = \mathrm{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f)$ et $Q_h = \mathrm{S}^0_{\mathcal{T}}(P_h)$ les supercharges classiques. Il est alors montré dans [43] que $\{Q_f, Q_h\} = P_K +$ termes d'ordre 1, où P_K est le symbole associé au tenseur de Killing K. L'idée est de montrer que le second membre est égal au superisé de P_K, et de prouver ainsi que la superisation commute au crochet de Poisson. Ceci ouvre la voie à une complète reformulation des définitions et propriétés des tenseurs de Killing et Killing-Yano, ainsi que leurs liens, en termes symplectiques, qui serait appropriée pour des applications aux questions d'intégrabilité.

Annexe A

Preuve du Lemme 4.2.7

Il s'agit de calculer le commutateur $[Q, L^{\delta}_{\bar{X}_i}]$, où Q est une quantification équivariante sous les similitudes, de forme donnée en (4.18),

$$Q = \mathrm{Id} + c_d(\Sigma)D + c_{\gamma\psi}(\Sigma)\Gamma\Psi + c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi + c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega + c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega,$$

et $L^{\delta}_{\bar{X}_i}$ est la dérivée de Lie des symboles suivant une inversion infinitésimale $\bar{X}_i$. Son expression en coordonnées a été déterminée en (4.4) et se réécrit

$$\begin{aligned} L^{\delta}_{\bar{X}_i} &= (x_j x^j \tilde{\partial}_i - 2x_i x^j \tilde{\partial}_j) + (-2\tilde{p}_i x_j \partial_{\tilde{p}_j} + 2x_i \mathcal{E} + 2\tilde{p}_j x^j \partial_{\tilde{p}^i}) \\ &\quad -2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i \Psi + 2x_j \tilde{\xi}^j \partial_{\tilde{\xi}^i} - 2\tilde{\xi}_i x^j \partial_{\tilde{\xi}^j} - 2n\delta x_i, \end{aligned}$$

en utilisant les opérateurs $\mathcal{E}$ et Ψ introduits dans la Proposition 4.1.5. Vu l'expression de Q, nous avons à calculer le commutateur de $L^{\delta}_{\bar{X}_i}$ avec les cinq monômes non triviaux

$$D, \quad \Gamma\Psi, \quad \Lambda\Psi, \quad \Gamma\Omega, \quad \Lambda\Omega. \tag{A.1}$$

Ils sont multipliés par des polynômes en l'opérateur Σ, dont le commutateur avec $L^{\delta}_{\bar{X}_i}$ est

$$[\Sigma, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] = -4\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i \Psi. \tag{A.2}$$

Or $\Psi = \tilde{\xi}_i \partial_{\tilde{p}_i}$, tout comme les cinq monômes (A.1), fait baisser le degré en $\tilde{p}$ de 1. Leurs produits sont donc nuls sur $\mathcal{S}^{\delta}_1(\mathbb{R}^n)[\xi]$, et $L^{\delta}_{\bar{X}_i}$ commute ainsi avec les coefficients de Q,

$$\begin{aligned} [Q, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] &= c_d(\Sigma)[D, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] \\ &\quad + c_{\gamma\psi}(\Sigma)[\Gamma\Psi, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] \\ &\quad + c_{\lambda\psi}(\Sigma)[\Lambda\Psi, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] \\ &\quad + c_{\gamma\omega}(\Sigma)[\Gamma\Omega, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] \\ &\quad + c_{\lambda\omega}(\Sigma)[\Lambda\Omega, L^{\delta}_{\bar{X}_i}]. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Il nous faut donc calculer ces cinq commutateurs. En fait, nous allons calculer les commutateurs de $L^\delta_{\bar{X}_i}$ avec $D, \Gamma, \Lambda, \Psi, \Omega$, les commutateurs cherchés seront alors obtenus par la règle de Leibniz $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$, qui n'est pas modifiée par la $\mathbb{Z}_2$-graduation car $L^\delta_{\bar{X}_i}$ est une dérivation paire.

Calcul du commutateur de $L^\delta_{\bar{X}_i}$ avec $\Gamma, \Lambda, \Psi, \Omega$

Débutons par le commutateur avec Ψ,

$$\begin{aligned}[\Psi, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= (-2\tilde{\xi}_i x_j \partial_{\tilde{p}_j} + 2x_i\Psi + 2\tilde{\xi}_k x^k \partial_{\tilde{p}^i}) - (2x_j\tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{p}^i} - 2\tilde{\xi}_i x^k \partial_{\tilde{p}^k}) \\ &= 2x_i\Psi.\end{aligned}$$

Le commutateur avec Ω est donné par

$$\begin{aligned}[\Omega, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= (-2\partial_{\tilde{\xi}^i} x_j \partial_{\tilde{p}_j} + 2x_i\Omega + 2\partial_{\tilde{\xi}^k} x^k \partial_{\tilde{p}^i}) - 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{\tilde{p}^i}\Psi + 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\tilde{\xi}_i T + 2x_j\partial_{\tilde{p}_j}\partial_{\tilde{\xi}^i} - 2\partial_{\tilde{p}^i} x^k \partial_{\tilde{\xi}^k} \\ &= 2x_i\Omega + 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}(\tilde{\xi}_i T - \Psi\partial_{\tilde{p}^i}).\end{aligned}$$

Quant au commutateur avec Γ,

$$\begin{aligned}[\Gamma, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= 2\tilde{\xi}_j x^j \tilde{\partial}_i - 2\tilde{\xi}_i x^j \tilde{\partial}_j - 2x_i\Gamma + (-2\tilde{p}_i\Psi + 2\tilde{\xi}_i\mathcal{E} + 2\Delta\partial_{\tilde{p}^i}) + 2\tilde{\xi}_i\Sigma - 2n\delta\tilde{\xi}_i \\ &- (2x_j\tilde{\xi}^j\tilde{\partial}_i - 2\tilde{\xi}_i x^k\tilde{\partial}_k),\end{aligned}$$

il se simplifie en

$$[\Gamma, L^\delta_{\bar{X}_i}] = -2x_i\Gamma - 2\tilde{p}_i\Psi + 2\Delta\partial_{\tilde{p}^i} + 2\tilde{\xi}_i(\mathcal{E} + \Sigma - n\delta).$$

Calculons enfin le commutateur avec Λ,

$$\begin{aligned}[\Lambda, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= 2x_j\partial_{\tilde{\xi}_j}\tilde{\partial}_i - 2x_i\Lambda - 2\partial_{\tilde{\xi}^i} x^j\tilde{\partial}_j + (-2\tilde{p}_i\Omega + 2\partial_{\tilde{\xi}^i}\mathcal{E} + 2\Phi\partial_{\tilde{p}^i}) \\ &- 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\tilde{\partial}_i\Psi + 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\tilde{\xi}_i D - 2\Sigma\partial_{\tilde{\xi}^i} + 2x^j\tilde{\partial}_j\partial_{\tilde{\xi}^i} + 2n\partial_{\tilde{\xi}^i} - 2x^k\tilde{\partial}_i\partial_{\tilde{\xi}^k} - 2\partial_{\tilde{\xi}^i} - 2n\delta\partial_{\tilde{\xi}^i},\end{aligned}$$

qui se réduit à

$$[\Lambda, L^\delta_{\bar{X}_i}] = -2x_i\Lambda - 2\tilde{p}_i\Omega + 2\Phi\partial_{\tilde{p}^i} + 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}(\tilde{\xi}_i D - \tilde{\partial}_i\Psi) + 2(\mathcal{E} - \Sigma + n(1-\delta) - 1)\partial_{\tilde{\xi}^i}.$$

Calcul du commutateur de $L^\delta_{\bar{X}_i}$ avec $D, \Gamma\Psi, \Lambda\Psi, \Gamma\Omega, \Lambda\Omega$

Nous pouvons désormais calculer les commutateurs de $L^\delta_{\bar{X}_i}$ avec les cinq monômes (A.1), et simplifier les opérateurs obtenus sachant qu'ils agissent sur des symboles de degré 1 en $\tilde{p}$. Les égalités opératorielles suivantes sont donc vraies sur $\mathcal{S}^\delta_1(\mathbb{R}^n)[\xi]$, mais bien entendu pas sur l'espace des symboles total $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi]$. On a respectivement,

$$\begin{aligned}[\Gamma\Psi, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= (-2x_i\Gamma - 2\tilde{p}_i\Psi + 2\Delta\partial_{\tilde{p}^i} + 2\tilde{\xi}_i(\mathcal{E}+\Sigma-n\delta))\Psi + 2\Gamma x_i\Psi \\ &= 2(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\Lambda\Psi, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= 2\Lambda x_i\Psi \\ &+ \left(-2x_i\Lambda - 2\tilde{p}_i\Omega + 2\Phi\partial_{\tilde{p}^i} + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}(\tilde{\xi}_i D - \tilde{\partial}_i\Psi) + 2(\mathcal{E}-\Sigma+n(1-\delta)-1)\partial_{\tilde{\xi}^i}\right)\Psi \\ &= 2(\Sigma - n(1-\delta))(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \partial_{\tilde{p}^i}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\Gamma\Omega, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= \left(-2x_i\Gamma - 2\tilde{p}_i\Psi + 2\Delta\partial_{\tilde{p}^i} + 2\tilde{\xi}_i(\mathcal{E}+\Sigma-n\delta)\right)\Omega + \Gamma\left(2x_i\Omega + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}(\tilde{p}_i T - \Psi\partial_{\tilde{p}^i})\right) \\ &= 2(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\Lambda\Omega, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= \left(-2x_i\Lambda - 2\tilde{p}_i\Omega + 2\Phi\partial_{\tilde{p}^i} + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}(\tilde{\xi}_i D - \tilde{\partial}_i\Psi) + 2(\mathcal{E}-\Sigma+n(1-\delta)-1)\partial_{\tilde{\xi}^i}\right)\Omega \\ &\quad +\Lambda\left(2x_i\Omega + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}(\tilde{p}_i T - \Psi\partial_{\tilde{p}^i})\right) \\ &= 2(-\Sigma + n(1-\delta))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega.\end{aligned}$$

Et finalement, on obtient pour D,

$$\begin{aligned}[D, L^\delta_{\bar{X}_i}] &= (2x_j\partial_{\tilde{p}_j}\tilde{\partial}_i - 2x_iD - 2x^j\tilde{\partial}_j\partial_{\tilde{p}^i}) \\ &+ (-2x_j\partial_{\tilde{p}_j}\tilde{\partial}_i - 2\tilde{p}_iT - 2\partial_{\tilde{p}^i} + 2\mathcal{E}\partial_{\tilde{p}_i} + 2x_iD + 2\partial_{\tilde{p}^i} + 2x^j\tilde{\partial}_j\partial_{\tilde{p}^i} + 2\mathcal{E}\partial_{\tilde{p}^i} + 2n\partial_{\tilde{p}^i}) \\ &+ 2\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - 2\tilde{\xi}_i\Omega - 2n\delta\partial_{\tilde{p}^i},\end{aligned}$$

ce qui se simplifie en

$$[D, L^\delta_{\bar{X}_i}] = 2\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - 2\tilde{\xi}_i\Omega + 2n(1-\delta)\partial_{\tilde{p}^i}. \tag{A.4}$$

Il ne reste plus qu'à collecter les termes obtenus suivant l'équation (A.3) pour obtenir le résultat annoncé.

Annexe B

Sur la condition d'invariance par changement d'orientation

H. Weyl a introduit, dans l'ouvrage [104], la notion d'invariants pairs et impairs sous le groupe orthogonal. On parle d'invariant pair pour un objet invariant sous tout le groupe $\mathrm{O}(p,q)$ et d'invariant impair pour un invariant sous $\mathrm{SO}(p,q)$, qui est changé en son opposé pour les transformations de déterminant -1. Les invariants sous l'action de l'algèbre de Lie $\mathrm{o}(p,q)$ coïncident avec ceux de $\mathrm{SO}(p,q)$, et constitués donc à la fois des invariants pairs et impairs. Le commutant de $\mathrm{o}(p,q)$ dans $\mathbb{C}[\partial_x, \tilde{p}, \partial_{\tilde{p}}, \tilde{\xi}, \partial_{\tilde{\xi}}]_n$, pour l'action donnée en (4.3), est précisément l'algèbre des invariants de $\mathrm{o}(p,q)$ sur $\mathbb{C}^n$, en les cinq arguments vectoriels $\partial_x, \tilde{p}, \partial_{\tilde{p}}, \tilde{\xi}, \partial_{\tilde{\xi}}$. Les générateurs des invariants pairs sont obtenus par produit scalaires de ces vecteurs, ils ont été déterminés dans la Proposition 4.1.5. L'ensemble des invariants pairs y est noté $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ par référence au commutant pair de $\mathrm{e}(p,q)$ dans $\mathbb{C}[x, \partial_x, \tilde{p}, \partial_{\tilde{p}}, \tilde{\xi}, \partial_{\tilde{\xi}}]_n$. Le Théorème (2.13.$A$) de [104], montre que $\mathrm{e}(p,q)^!$ admet en plus pour générateurs les éléments construits grâce au déterminant, d'arguments pris parmi les cinq vecteurs $\partial_x, \tilde{p}, \partial_{\tilde{p}}, \tilde{\xi}, \partial_{\tilde{\xi}}$.

Proposition B.0.14. *Soit $\varepsilon_{j_1\ldots j_n} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_n}$ la forme volume de $\mathbb{C}^n$ et $n = p+q \geq 4$. Le commutant de $\mathrm{e}(p,q)^!$ dans $\mathbb{C}[x, \partial_x, \tilde{p}, \partial_{\tilde{p}}, \tilde{\xi}, \partial_{\tilde{\xi}}]_n$, pour l'action donnée en (4.3), est égale à*

$$\mathrm{e}(p,q)^! = \mathrm{e}(p,q)^!_+ \bigoplus_{\kappa=0}^{n} [\chi_\kappa, \mathrm{e}(p,q)^!_+], \tag{B.1}$$

où $\chi_\kappa = \varepsilon_{j_1\ldots j_n} \tilde{\xi}^{j_1} \ldots \tilde{\xi}^{j_\kappa} \partial_{\tilde{\xi}^{j_{\kappa+1}}} \ldots \partial_{\tilde{\xi}^{j_n}}$.

Remarquons que χ_n est le symbole de la chiralité. Nous introduisons alors la notation suivante $\varepsilon(\partial_x)^a(\tilde{p})^b(\partial_{\tilde{p}})^c(\tilde{\xi})^\alpha(\partial_{\tilde{\xi}})^\beta$, pour désigner l'opérateur obtenu en prenant le déterminant de a vecteurs ∂_x, b vecteurs $\tilde{p}$, c vecteurs $\partial_{\tilde{p}}$, α vecteurs $\tilde{\xi}$ et β vecteurs $\partial_{\tilde{\xi}}$, où $a, b, c = 0, 1$ et $a + b + c + \alpha + \beta = n$. Tous les éléments que l'on peut construire par commutation avec les opérateurs χ_κ sont des produits d'éléments de $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ avec les éléments précédents de la forme $\varepsilon(\partial_x)^a(\tilde{p})^b(\partial_{\tilde{p}})^c(\tilde{\xi})^\alpha(\partial_{\tilde{\xi}})^\beta$.

Remarquons que les opérateurs différentiels χ_κ, agissant sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, commutent à l'action sur les symboles de l'algèbre de Lie $\mathrm{o}(p+1,q+1)$ toute entière, ce que nous utilisons par la suite.

La quantification conformément équivariante des symboles de degré 0

Commençons par étudier la quantification conformément équivariante $\mathcal{Q} = \mathcal{N} \circ Q$ sur les symboles de degré 0, afin de compléter la démonstration de la Proposition 4.2.3. L'équivariance sous $\mathrm{ce}(p,q)$ impose tout d'abord $Q = c(\Sigma) + \sum_{\kappa=0}^n d_\kappa(\Sigma)\chi_\kappa$, où $c(\Sigma)$ et $d_\kappa(\Sigma)$ sont des polynômes en Σ. En notant * le dual de Hodge, transporté à $\mathcal{S}_0^\delta[\xi]$ via son identification canonique avec $\Omega(M)$, on obtient alors, pour $P \in \mathcal{S}_0^\delta[\xi]$, que $Q(P) = c(\Sigma)P + d(\Sigma)P^*$. Une telle application est conformément équivariante, et en imposant de plus la préservation du symbole principal on obtient $Q = \mathrm{Id}$.

La quantification conformément équivariante des symboles de degré 1

Nous donnons en premier lieu la forme d'une quantification $\mathrm{ce}(p,q)^!$-équivariante, ce qui est l'analogue de la Proposition 4.2.4 sans l'hypothèse d'indépendance sous changement d'orientation. Nous utilisons ensuite la contrainte d'équivariance conforme pour montrer que les termes supplémentaires, écrits en fonction des χ_κ, sont nuls.

Lemme B.0.15. *Soit $\mathcal{N}$ l'ordre normal sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{Q} : \mathcal{S}_1^\delta(\mathbb{R}^n)[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ un morphisme de $\mathrm{ce}(p,q)$-module préservant le symbole principal pour la filtration en $\tilde{p}$. Alors $\mathcal{Q} = \mathcal{N} \circ Q$, avec*

$$Q = Q_0 + \sum_{\kappa=0}^n [\chi_\kappa, Q_{0,\kappa}], \tag{B.2}$$

où Q_0 et $Q_{0,\kappa}$ sont de la forme $\mathrm{Id} + c_d(\Sigma)D + c_{\gamma\psi}(\Sigma)\Gamma\Psi + c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi + c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega + c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega$ *et vérifient en plus de Q l'invariance sous changement d'orientation.*

Remarquons que vu la forme de $Q_{0,\kappa}$ on a

$$\sum_{\kappa=0}^n [\chi_\kappa, Q_{0,\kappa}] = \sum_{\kappa=0}^{n-2} c_\kappa \varepsilon(\partial_x)(\partial_{\tilde{p}})(\tilde{\xi})^\kappa(\partial_{\tilde{\xi}})^{n-\kappa-2} + \sum_{\kappa=0}^n d_\kappa \chi_\kappa D,$$

qui peut se réécrire par exemple sous la forme $\sum_{\kappa=0}^{n-2} \tilde{c}_\kappa[\chi_\kappa, \Lambda\Omega] + \sum_{\kappa=0}^n \tilde{d}_\kappa \chi_\kappa D$, avec $\tilde{c}_\kappa$ et $\tilde{d}_\kappa$ des polynômes en Σ. Le choix de $\Lambda\Omega$ est arbitraire et sans importance, nous pouvons choisir aussi bien $\Gamma\Psi$, $\Lambda\Psi$ ou $\Gamma\Omega$. La commutation de χ_κ et de $L^\delta_{\bar{X}_i}$, pour tout i et κ, rend immédiate l'écriture de la contrainte d'équivariance conforme pour Q écrit en (B.2). On obtient

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} - L^\delta_{\bar{X}_i} = [Q_0, L^\delta_{\bar{X}_i}] + \sum_{\kappa=0}^{n-2} \tilde{c}_\kappa \left[\chi_\kappa, [\Lambda\Omega, L^\delta_{\bar{X}_i}]\right] + \sum_{\kappa=0}^n \tilde{d}_\kappa \chi_\kappa [D, L^\delta_{\bar{X}_i}]. \tag{B.3}$$

Le fait que Q_0, $\Lambda\Omega$ et D soient invariants par changement d'orientation, tout comme $L^{\delta}_{\bar{X}_i}$, et $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i}$, permet de retrouver alors l'équation (4.20) pour Q_0, i.e. $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} - L^{\delta}_{\bar{X}_i} = [Q_0, L^{\delta}_{\bar{X}_i}]$. Il reste donc

$$\sum_{\kappa=0}^{n-2} \tilde{c}_\kappa \left[\chi_\kappa, [\Lambda\Omega, L^{\delta}_{\bar{X}_i}]\right] + \sum_{\kappa=0}^{n} \tilde{d}_\kappa \chi_\kappa [D, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] = 0.$$

Or, d'après le Lemme 4.2.7, on a $[\Lambda\Omega, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] = 2(-\Sigma + n(1-\delta))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega$ et $[D, L^{\delta}_{\bar{X}_i}] = (\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega + n(1-\delta)\partial_{\tilde{p}^i})$. Si $\delta \neq 1$, la nullité des termes facteurs de $\partial_{\tilde{p}_i}$ montre que $\tilde{d}_\kappa = 0$ pour tout $\kappa = 0, \ldots, n$, et il s'ensuit $\tilde{c}_\kappa = 0$ pour tout $\kappa = 0, \ldots, n-2$. Il en découle que $Q_{0,\kappa}$ est nul pour tout κ et donc $Q = Q_0$. Si $\delta = 1$, l'équation (4.20) déterminant Q_0 conduit à une contradiction, il n'y a donc pas de quantification conformément équivariante Q si $\delta = 1$. Formellement, la détermination de Q se ramène donc aussi à celle de Q_0.

On en déduit la Proposition suivante.

Proposition B.0.16. *Une quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}(\mathbb{R}^n)[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_1(\mathbb{R}^n)$ est de la forme (4.18), ses coefficients étant contraint par le système d'équations fournies dans le Lemme 4.2.5, ou de manière équivalente dans la Proposition 4.2.9.*

Annexe C

Démonstration du Théorème 4.3.12

Nous énonçons d'abord deux lemmes caractérisant la loi de transformation de la dérivation covariante des spineurs et de la dérivation horizontale des symboles par changement conforme de métrique. Ils nous permettent ensuite de démontrer le Théorème 4.3.12 en exprimant explicitement la condition d'invariance conforme de $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g}$, i.e. d'invariance sous dilatation de la métrique g. En effet, le calcul montre que celle-ci est équivalente à la condition d'équivariance conforme (4.61) caractérisant $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$.

Remarque C.0.17. *Nous travaillons dans ce paragraphe sur une variété M, munie de deux métriques $g' = Fg$ conformément reliées. Les coordonnées $(x^i, \tilde{p}_i, \tilde{\xi}^i)$ utilisées ici, explicitement ou à travers les opérateurs de la Proposition 4.1.5, sont les coordonnées de Darboux du supercotangent $\mathcal{M}$ pour sa structure symplectique canonique déduite de la métrique g.*

Lois de transformation des dérivées covariantes

Soit $g' = Fg$ deux métriques conformément reliées. Les deux lemmes qui suivent reposent sur la loi de transformation des symboles de Christoffel ${}^{g}\Gamma$ et ${}^{g'}\Gamma$ associés aux métriques g et g' respectivement. En notant Γ le symbole de Christoffel associé à la métrique $F\eta$, on a simplement

$$ {}^{g'}\Gamma - {}^{g}\Gamma = \Gamma. \tag{C.1} $$

Cela résulte immédiatement de l'expression locale des symboles de Christoffel. De plus rappelons que

$$ \Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2F}\left(F_i\delta_j^k + F_j\delta_i^k - F^k\eta_{ij}\right), \tag{C.2} $$

où $F_i = \partial_i F$ et $F^k = \eta^{ik}\partial_i F$.

Le premier lemme caractérise la loi de transformation de la dérivée de Lie des spineurs de poids λ sous un changement conforme de métrique $g' = Fg$.

Lemme C.0.18. *Soit $g' = Fg$ une métrique conforme à g et $P \in \mathcal{T}_1^\delta$. La différence, contractée avec P, des dérivées covariantes des spineurs de poids λ, ∇'^λ et ∇^λ, associées respectivement aux métriques g' et g, a pour expression*

$$\mathcal{N} \circ \mathsf{ev}_g(P^j)(\nabla'^\lambda_j - \nabla^\lambda_j) = -\mathcal{N}\left(\left[(\Psi\tilde{\xi}^i - \frac{1}{2}\tilde{\xi}^i\Omega + \frac{1}{2}\Psi\partial_{\tilde{\xi}_i} - \frac{1}{4}\partial_{\tilde{\xi}_i}\Omega) + n\lambda\partial_{\tilde{p}_i}\right]\mathsf{ev}_g(P)\right)\frac{F_i}{2F}. \tag{C.3}$$

Les opérateurs $\Psi = \tilde{\xi}_j\partial_{\tilde{p}_j}$, $\Omega = \partial_{\tilde{\xi}^j}\partial_{\tilde{p}_j}$, ont été introduits à la Proposition 4.1.5 et on note $P^j = \partial_{p_j}P$.

Démonstration. En utilisant conjointement la formule générale donnant la dérivée des spineurs, le comportement sous changement de métrique conforme des symboles de Christoffel donné en (C.1) et la Proposition 4.3.10, fournissant la dérivée covariante des spineurs pour une métrique $F\eta$, on obtient $\nabla'^\lambda_j - \nabla^\lambda_j = -\frac{1}{8F}[\gamma_j, \gamma^i]F_i - \frac{n\lambda}{2F}F_j$. L'équation (4.9), qui se prolonge au cas des repères conformes, nous permet alors d'en déduire

$$\mathcal{N} \circ \mathsf{ev}_g(P^j)(\nabla'^\lambda_j - \nabla^\lambda_j) = -\mathcal{N}\left(\frac{1}{2F}(\tilde{\xi}_j\tilde{\xi}^i + \frac{1}{2}\chi_i^j)F_i\,\mathsf{ev}_g(P^j) + \frac{n\lambda}{2F}F_i\,\mathsf{ev}_g(P^i)\right), \tag{C.4}$$

où $\chi_i^j = \tilde{\xi}^j\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\partial_{\tilde{\xi}_j} + \frac{1}{2}\partial_{\tilde{\xi}_j}\partial_{\tilde{\xi}^i}$. Il suffit alors de mettre $\frac{F_i}{2F}$ en facteur, puis d'utiliser $\mathsf{ev}_g(P^j) = \partial_{\tilde{p}_j}\mathsf{ev}_g(P)$ et les formules donnant Ψ et Ω pour parvenir au résultat. □

La formule (3.35) définit la dérivation horizontale sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$, associée à la connexion de Levi-Civita. L'espace $\mathcal{T}^\delta$, vu comme espace de fonctions sur $\mathcal{M}$, admet donc une dérivation horizontale donnée par

$$\partial_i^\nabla = \partial_i + \Gamma_{ij}^k p_k\partial_{p_j} - \Gamma_{ij}^k\xi^j\partial_{\xi^k} - \left(\delta - \frac{\xi^i\partial_{\xi^i}}{n}\right)\Gamma_i, \tag{C.5}$$

où $\Gamma_i = \Gamma_{ij}^j$. On en déduit son expression en coordonnées conformes,

$$\partial_i^\nabla = \partial_i + \frac{1}{2F}\left(F_i\mathcal{E} + F_k p_i\partial_{p_k} - F^j p_j\partial_{p^i}\right) - \frac{1}{2F}\left(F_k\xi^k\partial_{\xi^i} - F^j\xi_i\partial_{\xi^j}\right) - \frac{n\delta}{2F}F_i. \tag{C.6}$$

Le lemme suivant, qui exprime la loi de transformation de la dérivée horizontale sous un changement conforme de métrique, découle alors directement de (C.1) appliqué à l'équation précédente.

Lemme C.0.19. *Soit $g' = Fg$ une métrique conforme à g. Sur $\mathcal{T}^\delta$, les dérivées horizontales $\partial_i^{\nabla'}$ et ∂_i^∇, associées respectivement aux métriques g' et g, ont pour différence*

$$\partial_i^{\nabla'} - \partial_i^\nabla = \frac{1}{2F}\left(F_i\mathcal{E} + F_k p_i\partial_{p_k} - F^j p_j\partial_{p^i}\right) - \frac{1}{2F}\left(F_k\xi^k\partial_{\xi^i} - F^j\xi_i\partial_{\xi^j}\right) - \frac{n\delta}{2F}F_i. \tag{C.7}$$

La stratégie de la démonstration du Théorème 4.3.12

La preuve du Théorème 4.3.12 est essentiellement calculatoire et repose sur les deux lemmes précédent. Il s'agit d'implémenter la contrainte d'équivariance conforme qui s'écrit

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g'} - \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g} = 0, \tag{C.8}$$

pour $g' = Fg$ deux métriques conformément reliées. Rappelons l'expression (4.69) de $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g}$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g}(P) \quad &= \quad \mathcal{N} \circ \mathsf{ev}_g(P^i)\,\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\nabla_i^\lambda \qquad\qquad (\text{C.9})\\ &+\mathcal{N}\circ \mathsf{ev}_g\left(c_0\,\tilde{g}_{ik}\xi^j\xi^k\partial_j^\nabla P^i + c_1\partial_i^\nabla P^i + c_2\,g^{ij}g_{kl}\xi^l\partial_i^\nabla P_j^k + c_3\,\xi^i\partial_i^\nabla P_j^j + c_4\,\tilde{g}^{ij}\partial_i^\nabla P_{kj}^k\right),\end{aligned}$$

où les coefficients $c_0, \dots, c_4$, sont des polynômes en Σ, on a noté les dérivées par $P^i = \partial_{p_i}$, $P_i = \partial_{\xi^i}P$, et il y a des termes avec densités $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}|\mathrm{vol}_g|^{-\frac{2}{n}}$, $\tilde{g}^{ij} = g^{ij}|\mathrm{vol}_g|^{\frac{2}{n}}$.

Par linéarité d'une quantification $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},*}$, on peut se restreindre à $P \in \mathcal{S}_{1,\kappa}^{\delta'}[\xi] \subset \mathcal{T}^\delta$, avec $\delta' = \delta - \frac{\kappa}{n}$. Nous allons exprimer la différence terme à terme des deux quantifications $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g'}$ et $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},g}$. L'égalité de ces deux quantifications est équivalente à un système en leurs coefficients $c_0, \dots, c_4$, qui, nous allons le voir, est identique au système (4.61) fournissant les coefficients de la quantification équivariante $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}^{\lambda,\mu}$, avec la correspondance $c_0 = c_{\mathrm{S}}$, $c_1 = c_d + c_{\lambda\psi}$, $c_2 = -c_{\lambda\psi}$, $c_3 = c_{\gamma\psi}$ et $c_4 = c_{\lambda\omega}$ fournit dans le Théorème 4.3.12.

La contrainte d'invariance conforme pour la quantification $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},*}$

Nous exprimons maintenant l'équation (C.8) qui traduit l'invariance conforme de $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T},*}$. Le Lemme C.0.18 conduit à la formule suivante pour la différence du premier terme de chaque quantification $\tilde{\mathcal{Q}_{\mathcal{T},g'}}$ et $\tilde{\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}}$,

$$\mathcal{N} \circ \mathsf{ev}_g(P^j)(\nabla_j'^\lambda - \nabla_j^\lambda) = -\mathcal{N}\left(\left[(\Psi\tilde{\xi}^i - \frac{1}{2}\tilde{\xi}^i\Omega + \frac{1}{2}\Psi\partial_{\tilde{\xi}_i} - \frac{1}{4}\partial_{\tilde{\xi}_i}\Omega) + n\lambda\partial_{\tilde{p}_i}\right]\mathsf{ev}_g(P)\right)\frac{F_i}{2F}. \tag{C.10}$$

Nous reconnaissons dans cette expression le premier membre de l'équation (4.61), exprimant l'équivariance sous les inversions conformes de $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$. Nous utilisons alors le Lemme C.0.19 pour le calcul de la différence des cinq autres termes composant chacune des deux quantifications. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\mathsf{ev}_g\left(c_1\left[\partial_i^{\nabla'} - \partial_i^\nabla\right]P^i\right) \quad &= \quad c_1\,\mathsf{ev}_g\left(\partial_{p_i}\left[\frac{1}{2F}\left(F_i\mathcal{E} + F_kp_i\partial_{p_k} - F^jp_j\partial_{p^i}\right)P\right]\right)\\ &\quad -c_1\,\mathsf{ev}_g\left(\frac{1}{2F}\left[F_k\xi^k\partial_{\xi^i} - F^j\xi_i\partial_{\xi^j}\right]P^i + n\delta\frac{F_i}{2F}P^i\right)\\ &= \quad c_1\left(\left[\Psi\partial_{\tilde{\xi}_i} - \tilde{\xi}^i\Omega - n(\delta-1)\partial_{\tilde{p}_i}\right]\mathsf{ev}_g(P)\right)\frac{F_i}{2F},\end{aligned}$$

correspond au terme en facteur de $c_d^{\mathcal{T}}(\Sigma)$ de l'équation (4.61). Puis, dans le terme suivant,

$$\begin{aligned}
\mathsf{ev}_g\left(c_2\, g^{ij}\xi_k\left[\partial_i^{\nabla'}-\partial_i^{\nabla}\right]P_j^k\right) &= c_2\,\mathsf{ev}_g\left(g^{ij}\xi_k\partial_{p_k}\left[\frac{1}{2F}\left(F_i\mathcal{E}+F_lp_i\partial_{p_l}-F^lp_l\partial_{p^i}\right)P_j\right]\right)\\
&\quad -c_2\quad \mathsf{ev}_g\left(g^{ij}\xi_k\partial_{\xi^j}\left[\frac{1}{2F}\left(F_l\xi^l\partial_{\xi^i}-F^l\xi_i\partial_{\xi^l}\right)P^k\right]+n\delta\frac{F^i}{2F}\xi_kP_i^k\right)\\
&= c_2\left(\left[\Sigma\partial_{\tilde{p}_i}-\tilde{\xi}^i\Omega-(n(\delta-1)+\Sigma-1)\Psi\partial_{\tilde{\xi}_i}\right]\mathsf{ev}_g(P)\right)\frac{F_i}{2F},
\end{aligned}$$

on retrouve l'expression facteur de $c_d^{\mathcal{T}}(\Sigma)$ moins celle facteur de $c_{\lambda\psi}^{\mathcal{T}}(\Sigma)$, dans l'équation (4.61). On a ensuite

$$\begin{aligned}
\mathsf{ev}_g\left(c_3\,\xi^i\left[\partial_i^{\nabla'}-\partial_i^{\nabla}\right]P_j^j\right) &= c_3\,\mathsf{ev}_g\left(\xi^i\partial_{p_j}\left[\frac{1}{2F}\left(F_i\mathcal{E}+F_lp_i\partial_{p_l}-F^lp_l\partial_{p^i}\right)P_j\right]\right)\\
&\quad -c_3\quad \mathsf{ev}_g\left(\xi^i\partial_{\xi^j}\left[\frac{1}{2F}\left(F_l\xi^l\partial_{\xi^i}-F^l\xi_i\partial_{\xi^l}\right)P^j\right]+n\delta\frac{F^i}{2F}\xi_iP_j^j\right)\\
&= c_3\left(\left[(\Sigma-n\delta)\tilde{\xi}^i\Omega\right]\mathsf{ev}_g(P)\right)\frac{F_i}{2F},
\end{aligned}$$

où on retrouve le terme facteur de $c_{\gamma\omega}^{\mathcal{T}}(\Sigma)$ dans l'équation (4.61). L'expression qui suit,

$$\begin{aligned}
\mathsf{ev}_g\left(c_4\,\tilde{g}^{ij}\left[\partial_i^{\nabla'}-\partial_i^{\nabla}\right]P_{kj}^k\right) &= c_4\,\mathsf{ev}_g\left(\tilde{g}^{ij}\partial_{p_k}\left[\frac{1}{2F}\left(F_i\mathcal{E}+F_lp_i\partial_{p_l}-F^lp_l\partial_{p^i}\right)P_{kj}\right]\right)\\
&\quad -c_4\quad \mathsf{ev}_g\left(\tilde{g}^{ij}\partial_{\xi^j}\partial_{\xi^k}\left[\frac{1}{2F}\left(F_l\xi^l\partial_{\xi^i}-F^l\xi_i\partial_{\xi^l}\right)P^k\right]+n\delta\frac{F^i}{2F}P_{ki}^k\right)\\
&= c_4\left(\left[(n(\delta-1)+\Sigma)\Omega\partial_{\tilde{\xi}_i}\right]\mathsf{ev}_g(P)\right)\frac{F_i}{2F},
\end{aligned}$$

admet le même facteur que $c_{\lambda\omega}^{\mathcal{T}}(\Sigma)$ dans l'équation (4.61). Enfin, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathsf{ev}_g\left(c_0\,\tilde{g}_{jk}\xi^i\xi^k\left[\partial_i^{\nabla'}-\partial_i^{\nabla}\right]P^j\right) &= c_0\,\mathsf{ev}_g\left(\tilde{g}_{jk}\xi^i\xi^k\partial_{p_j}\left[\frac{1}{2F}\left(F_i\mathcal{E}+F_lp_i\partial_{p_l}-F^lp_l\partial_{p^i}\right)P\right]\right)\\
&\quad -c_0\quad \mathsf{ev}_g\left(\tilde{g}_{jk}\xi^i\xi^k\left[\frac{1}{2F}\left(F_l\xi^l\partial_{\xi^i}-F^l\xi_i\partial_{\xi^l}\right)P^j\right]+n\delta\frac{F_i}{2F}\xi^i\xi_jP^j\right)\\
&= c_0\left(\left[(\Sigma-n\delta)\tilde{\xi}^i\Psi\right]\mathsf{ev}_g(P)\right)\frac{F_i}{2F}, \qquad \text{(C.11)}
\end{aligned}$$

retrouvant ainsi le terme en facteur de $c_{\gamma\psi}^{\mathcal{T}}(\Sigma)$ dans l'équation (4.61).

Au final, en collectant les différents termes, l'invariance conforme de $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{T}}$ se traduit donc par le système suivant sur $\mathcal{S}_1^\delta[\xi]$,

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(n\lambda\partial_{\tilde{p}^i} - \tilde{\xi}^i\Psi + \frac{1}{2}\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \frac{1}{2}\tilde{\xi}^i\Omega - \frac{1}{4}\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega\right) &= c_1(\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - \tilde{\xi}_i\Omega + n(1-\delta)\partial_{\tilde{p}^i}) \\
&+ c_2\Sigma\partial_{\tilde{p}_i} - \tilde{\xi}^i\Omega - (n(\delta-1) + \Sigma - 1)\Psi\partial_{\tilde{\xi}_i} \\
&+ c_3(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Omega \\
&+ c_4(-\Sigma - n(\delta-1))\partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega \\
&+ c_0(\Sigma - n\delta)\tilde{\xi}_i\Psi.
\end{aligned}$$

En substituant les coefficients suivant $c_1 = c_d^{\mathcal{T}} + c_{\lambda\psi}^{\mathcal{T}}$, $c_2 = -c_{\lambda\psi}^{\mathcal{T}}$, $c_3 = c_{\gamma\omega}^{\mathcal{T}}$, $c_4 = c_{\lambda\omega}^{\mathcal{T}}$, $c_0 = c_{\gamma\psi}^{\mathcal{T}}$ on retrouve bien le système (4.61), déterminant $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$, ce qui achève la preuve du Théorème 4.3.12.

Annexe D

Calculs des 3 opérateurs de Casimir $C^\delta_{\mathcal{T}}$, C^δ et $C^{\lambda,\mu}$

Nous calculons dans cet annexe les 3 opérateurs de Casimir $C^\delta_{\mathcal{T}}$, C^δ et $C^{\lambda,\mu}$ de, respectivement, chacun des trois $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules suivant, $\mathcal{T}^\delta$, $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$, démontrant ainsi la Proposition 4.5.3. A cette fin nous avons besoin tout d'abord de la formule (2.72), donnant le Casimir d'une représentation ρ quelconque de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$. En termes des générateurs de l'algèbre de Lie conforme $\mathrm{o}(p+1,q+1)$, introduits en (2.46), elle s'écrit

$$C_\rho = \frac{1}{2}\eta^{ik}\eta^{jl}\rho(X_{ij})\rho(X_{kl}) - \rho(X_0)^2 - \frac{1}{2}\eta^{ij}\rho(X_i)\rho(\bar{X}_j) - \frac{1}{2}\eta^{ij}\rho(\bar{X}_i)\rho(X_j). \tag{D.1}$$

Chacun de ces termes est connu pour les 3 modules qui nous intéressent, il suffit alors d'utiliser les expressions des opérateurs invariants figurant dans la Proposition 4.1.5 pour obtenir les formules des 3 opérateurs de Casimir données dans la Proposition 4.5.3.

Calcul de $C^\delta_{\mathcal{T}}$

Pour obtenir l'expression de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ en fonction de $\widehat{C_\delta}$, écrivons les expressions des représentations des générateurs de l'algèbre de Lie conforme sur $\mathcal{T}^\delta$, fournies par la Proposition 4.3.2, en fonction de la représentation des générateurs sur le module $\mathcal{S}^\delta$, notée ici $\hat{L}^\delta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}^\delta_{X_i} &= \hat{L}^\delta_{X_i},\\
\mathbb{L}^\delta_{X_{ij}} &= \hat{L}^\delta_{X_{ij}} + \xi_i\partial_{\xi^j} - \xi_j\partial_{\xi^i},\\
\mathbb{L}^\delta_{X_0} &= \hat{L}^\delta_{X_0},\\
\mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i} &= \hat{L}^\delta_{\bar{X}_i}, +2x_j\xi^j\partial_{\xi^i} - 2\xi_i x^k\partial_{\xi^k}.
\end{aligned}$$

On peut alors, en substituant les expressions précédentes dans la formule générale (D.1), calculer l'opérateur de Casimir de la représentation de l'algèbre de Lie conforme sur l'espace des tenseurs $\mathcal{T}^\delta$,

$$\begin{aligned} C^\delta_{\mathcal{T}} &= \widehat{C_\delta} + \frac{1}{2}\eta^{ik}\eta^{jl}(x_i\partial_j - x_j\partial_i + p_i\partial_{p^j} - p_j\partial_{p^i} + \xi_i\partial_{\xi^j} - \xi_j\partial_{\xi^i})(\xi_k\partial_{\xi^l} - \xi_l\partial_{\xi^k}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta^{ik}\eta^{jl}(\xi_i\partial_{\xi^j} - \xi_j\partial_{\xi^i})(x_k\partial_l - x_l\partial_k + p_k\partial_{p^l} - p_l\partial_{p^k}) \\ &\quad - \eta^{ij}\partial_i(2x_k\xi^k\partial_{\xi^j} - 2\xi_j x^k\partial_{\xi^k}). \end{aligned}$$

Cette égalité, une fois transportée sur l'espace des symboles $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ grâce à ev_g, se réduit en

$$C^\delta_{\mathcal{T}} = \widehat{C_\delta} + 2\Delta\Omega + 2\Phi\Psi + \Sigma(\Sigma - n) - 2\mathcal{E},$$

où $\mathcal{E} = \tilde{p}_i\partial_{\tilde{p}_i}$, $\Sigma = \tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{\xi}^i}$, $\Delta = \tilde{\xi}^i\tilde{p}_i$, $\Phi = \tilde{p}_i\partial_{\tilde{\xi}_i}$, $\Psi = \tilde{\xi}_i\partial_{\tilde{p}_i}$ et $\Omega = \partial_{\tilde{\xi}^i}\partial_{\tilde{p}_i}$ sont des opérateurs invariants définis dans la Proposition 4.1.5.

Calcul de C^δ

La Proposition 4.3.2 montre qu'une fois transportées sur $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ via ev_g, les actions sur les modules $\mathcal{T}^\delta$ et $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ coïncident pour les similitudes. D'autre part, la Proposition 4.3.2 relie également l'action des inversions des modules $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ et $\mathcal{T}^\delta$, de la manière suivante, cf (4.53),

$$L^\delta_{\bar{X}_i} = \mathsf{ev}_g\mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i}(\mathsf{ev}_g)^{-1} - 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\tilde{\xi}_i\Psi.$$

Il en découle immédiatement le résultat

$$C_\delta = C^\delta_{\mathcal{T}} + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}\Gamma\Psi.$$

Calcul de $C^{\lambda,\mu}$

Une fois transportée par l'ordre normal, l'action des similitudes est la même pour les deux modules $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ et $\mathcal{S}^\delta[\xi]$. Elle coïncide donc également avec l'action des similitudes sur $\mathcal{T}^\delta$ transportée par ev_g, i.e. $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X = \mathsf{ev}_g\mathbb{L}^\delta_X(\mathsf{ev}_g)^{-1}$ pour X une similitude. Il suffit donc, comme pour déterminer C^δ, de connaître l'action des inversions sur $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$ en fonction de celle sur $\mathcal{T}^\delta$. En combinant (4.10), qui donne $\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} - L^\delta_{\bar{X}_i}$, et (4.53), qui donne $L^\delta_{\bar{X}_i} - \mathsf{ev}_g\mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i}(\mathsf{ev}_g)^{-1}$, on obtient

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} = \mathsf{ev}_g\mathbb{L}^\delta_{\bar{X}_i}(\mathsf{ev}_g)^{-1} + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}(-\tilde{p}_i T + 2\mathcal{E}\partial_{\tilde{p}^i}) + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}(-2\tilde{\xi}_i\Psi + 2\Psi\partial_{\tilde{\xi}^i} - 2\tilde{\xi}_i\Omega - \partial_{\tilde{\xi}^i}\Omega) + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}n\lambda\partial_{\tilde{p}_i}.$$

Il en découle alors

$$C_{\lambda,\mu} = C_\delta - g^{ij}\tilde{\partial}_i(\frac{\hbar}{\mathsf{i}}(-\tilde{p}_j T + 2\mathcal{E}\partial_{\tilde{p}^j}) + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}(2\Psi\partial_{\tilde{\xi}^j} - 2\tilde{\xi}_j\Omega - \partial_{\tilde{\xi}^j}\Omega) + 2\frac{\hbar}{\mathsf{i}}n\lambda\partial_{\tilde{p}_j}),$$

qui peut se reformuler uniquement en termes des opérateurs invariants additionnels D, G, T, Λ de la Proposition 4.1.5, selon

$$C_{\lambda,\mu} = \widetilde{C_\delta} + \frac{\hbar}{\mathsf{i}}\left(GT - 2\mathcal{E}D - \Psi\Lambda + \Gamma\Omega + \frac{1}{2}\Lambda\Omega - 2n\lambda D + 2\Gamma\Psi\right).$$

La relation de commutation $[\Psi, \Lambda] = D$ achève la preuve de la Proposition 4.5.3.

Annexe E

Diagonalisation de l'opérateur de Casimir C^δ

Nous diagonalisons ici, pour $n\delta \notin \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ l'opérateur de Casimir $C^\delta = C^\delta_{\mathcal{T}} + \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\Gamma\Psi$, grâce à la Proposition 4.5.16, donnant la diagonalisation de $C^\delta_{\mathcal{T}}$, et le Lemme 4.5.8, qui fournit une méthode pour diagonaliser un opérateur $C = C_0 + N$, où C_0 est diagonalisable et N nilpotent. La preuve montre que les valeurs de δ pour lesquelles C^δ n'est pas diagonalisable sont précisément celles vérifiant $n\delta \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, qui sont les valeurs de δ exclues dans le Théorème 4.5.1.

D'après la Proposition 4.5.16, un vecteur propre de $C^\delta_{\mathcal{T}}$ est un symbole P_k vérifiant $P_k \in \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa,s;ab}[\xi]$. Le Lemme 4.5.8 montre qu'il faut et il suffit alors, que le système suivant admette une unique solution,

$$\forall i = 0, \ldots, k-1, \quad \frac{\hbar}{2\mathsf{i}}\Gamma\Psi P_{i+1} = (\gamma_{k,\kappa,s;ab} - C^\delta_{\mathcal{T}})P_i, \tag{E.1}$$

le vecteur propre de C^δ cherché étant donné alors par $P = \sum_{i=0}^k P_i$. Or P_k s'écrit sous la forme $P_k = R^s Q$ avec $TQ = 0$, et la résolution du système précédent dépend alors des valeurs de ab. Rappelons ici la forme de Q dans chacun des quatre cas $ab = 10, 00, 11, 01$.

- Si $ab = 00$, le symbole Q vérifie $\Omega Q = \Psi Q = 0$.
- Si $ab = 01$, on a $\Omega Q = 0$ et $\Phi\Psi Q = (k - 2s + \kappa)Q$.
- Si $ab = 10$, Q se factorise suivant $Q = \Delta Q_0$, où Q_0 est tel que $\Omega Q_0 = \Psi Q_0 = 0$.
- Si $ab = 11$, on a également $Q = \Delta_0 Q_0$, mais Q_0 est tel que $\Omega Q_0 = 0$ et $\Phi\Psi Q_0 = (k - 2s + \kappa - 2)Q_0$.

Rappelons également légalité

$$\Delta_0 = \Delta - RT\Delta\mathsf{c} = \Delta - 2R\Psi\mathsf{c}. \tag{E.2}$$

Nous utiliserons systématiquement

$$[\Gamma\Psi, R^s] = 2sR^{s-1}\Gamma\Delta, \tag{E.3}$$

afin de résoudre le système E.1 pour chacune des quatre valeurs de ab.

- $\mathbf{ab = 10}$. On a alors $P_k = R^s\Delta Q_0$, où $\Psi Q_0 = 0$. Donc grâce à (E.3) et $[\Psi, \Delta] = 0$, on obtient $\Gamma\Psi P_k = 0$. Le symbole P_k est alors également vecteur propre de C^δ.

- $\mathbf{ab = 00}$. Cette fois-ci, $P_k = R^sQ$, avec $\Psi Q = 0$. On obtient donc $\Gamma\Psi P_k = 2sR^{s-1}\Gamma\Delta Q \in \mathcal{S}^\delta_{k-1,\kappa+2,s-1;10}[\xi]$. En effet, comme $\Psi Q = 0$, on a $T\Gamma\Delta Q = \Psi\Gamma Q_0 = 0$ et $\Delta Q = \Delta_0 Q$; l'égalité $\Delta_0 \ker T = \mathcal{S}^\delta_{*,*,0;10}$, découlant du Lemme 4.5.14, permet de conclure.
  Si $s = 0$, alors $P = P_k$ est le vecteur propre de C_δ de symbole principal P_k. Sinon, le système E.1 conduit à $(\gamma_{k,\kappa,s;00} - \gamma_{k-1,\kappa+2,s-1;10})P_{k-1} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\Gamma\Psi P_k$. Ceci détermine uniquement P_{k-1} sauf si $\gamma_{k,\kappa,s;00} - \gamma_{k-1,\kappa+2,s-1;10} = 0$, i.e. $\delta = \frac{k+\kappa}{n}$, $k > 1$, ce qui est exclu par hypothèse. Le premier cas traité $ab = 10$, montre alors que $P = P_k + P_{k-1}$.

- $\mathbf{ab = 11}$. Le symbole P_k est de la forme $P_k = R^s\Delta_0 Q_0$. Il découle donc de l'expression (E.2) de Δ_0, la formule suivante $\Gamma\Psi P_k = -(4sR^{s-1}\Gamma\Delta R\Psi\mathsf{c} + 2R^s\Gamma\Delta\Psi\mathsf{c} + R^s\Delta_0\Gamma\Psi)Q_0$. Comme $\Delta\Psi = \Delta_0\Psi$, on a $\Gamma\Psi P_k = -R^s((4s+2)\mathsf{c} - 1)\Gamma\Delta_0\Psi Q_0 \in \mathcal{S}^\delta_{k-1,\kappa+2,s;10}[\xi]$.
  Le système (E.1) fournit alors $(\gamma_{k,\kappa,s;11} - \gamma_{k-1,\kappa+2,s;10})P_{k-1} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\Gamma\Psi P_k$. Ceci détermine uniquement P_{k-1} sauf si $\gamma_{k,\kappa,s;11} - \gamma_{k-1,\kappa+2,s;10} = 0$, mais cela implique $\delta = \frac{k+\kappa}{n}$ pour $k, \kappa > 0$, ce qui est incompatible avec $\delta \notin I_{\mathrm{S}}$. Le premier cas traité $ab = 10$, montre ainsi que $P = P_k + P_{k-1}$.

- $\mathbf{ab = 01}$. Le symbole P_k s'écrit sous la forme $P_k = R^sQ$, et on a $\Gamma\Psi P_k = 2sR^{s-1}\Gamma\Delta Q + R^s\Gamma\Psi Q$. En remplaçant Δ grâce à (E.2) on obtient $\Gamma\Psi P_k \in \mathcal{S}^\delta_{k-1,\kappa+2,s-1;11}[\xi] \oplus \mathcal{S}^\delta_{k-1,\kappa+2,s-1;10}[\xi] \oplus \mathcal{S}^\delta_{k-1,\kappa+2,s;10}[\xi] \oplus \mathcal{S}^\delta_{k-1,\kappa+2,s;00}[\xi]$.
  En décomposant P_k en 4 vecteurs propres, le système (E.1) permet de déterminer P_{k-1} de manière univoque, à moins que $\gamma_{k,\kappa,s;01} - \gamma_{k-1,\kappa+2,s-1;11} = 0$ ou $\gamma_{k,\kappa,s;01} - \gamma_{k-1,\kappa+2,s-1;10} = 0$ ou $\gamma_{k,\kappa,s;01} - \gamma_{k-1,\kappa+2,s;10} = 0$ ou $\gamma_{k,\kappa,s;01} - \gamma_{k-1,\kappa+2,s;00} = 0$. Ces quatre égalités sont équivalentes respectivement à $\delta = \frac{k+\kappa+1}{n}$ et $k > 0$, $\delta = 1 + \frac{2k-2(s+1)}{n}$, $\delta = \frac{2s}{n}$ et $s > 0$, $\delta = \frac{2k+\kappa}{n}$ et $k > 1$, qui sont exclues par la condition $\delta \notin I_S$.
  Utilisant ce qui précède, on obtient que $P_{k-2} \in \mathcal{S}^\delta_{k-2,\kappa+4,s-1,2}$ est uniquement déterminé par $2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\Gamma\Psi P_{k-1} = (\gamma - \widetilde{C_\delta})P_{k-2}$ excepté si $\gamma_{k,\kappa,s,1} - \gamma_{k-2,\kappa+4,s-1,2} = 0$ qui équivaut à $\delta = \frac{k+\kappa}{n}$, $k > 1$, encore une fois exclu par la condition $\delta \notin I_S$. Au final, $P_k + P_{k-1} + P_{k-2}$ est l'unique vecteur propre de C_δ, de symbole principal P_k.

Bibliographie

[1] S. T. Ali and M. Engliš. Quantization methods : a guide for physicists and analysts. *Rev. Math. Phys.*, 17(4) :391–490, 2005.

[2] D. Arnal, J.-C. Cortet, P. Molin, and G. Pinczon. Covariance and geometrical invariance in $*$ quantization. *J. Math. Phys.*, 24(2) :276–283, 1983.

[3] V. I. Arnol′d. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1996. Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Corrected reprint of the second (1989) edition.

[4] M. F. Atiyah, R. Bott, and A. Shapiro. Clifford modules. *Topology*, 3(suppl. 1) :3–38, 1964.

[5] A. Barducci, R. Casalbuoni, and L. Lusanna. Classical spinning particles interacting with external gravitational fields. *Nuclear Physics B*, 124 :521–538, June 1977.

[6] M. Batchelor. The structure of supermanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 253 :329–338, 1979.

[7] M. Batchelor. Two approaches to supermanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 258(1) :257–270, 1980.

[8] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. *Ann. Physics*, 111(1) :61–110, 1978.

[9] F. A. Berezin and M. S. Marinov. Particle spin dynamics as the grassmann variant of classical mechanics. *Annals of Physics*, 104 :336–362, April 1977.

[10] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Corrected reprint of the 1992 original.

[11] R. J. Blattner. Quantization and representation theory. In *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*, pages 147–165. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973.

[12] F. Boniver, S. Hansoul, P. Mathonet, and N. Poncin. Equivariant symbol calculus for differential operators acting on forms. *Lett. Math. Phys.*, 62(3) :219–232, 2002.

[13] F. Boniver and P. B. A. Lecomte. A remark about the Lie algebra of infinitesimal conformal transformations of the Euclidean space. *Bull. London Math. Soc.*, 32(3) :263–266, 2000.

[14] F. Boniver and P. Mathonet. Maximal subalgebras of vector fields for equivariant quantizations. *J. Math. Phys.*, 42(2) :582–589, 2001.

[15] F. Boniver and P. Mathonet. IFFT-equivariant quantizations. *J. Geom. Phys.*, 56(4) :712–730, 2006.

[16] M. Bordemann, N. Neumaier, and S. Waldmann. Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles. I. Weyl and standard ordering with differential operator representation. *Comm. Math. Phys.*, 198(2) :363–396, 1998.

[17] S. Bouarroudj. Projectively equivariant quantization map. *Lett. Math. Phys.*, 51(4) :265–274, 2000.

[18] J.-P. Bourguignon and P. Gauduchon. Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques. *Comm. Math. Phys.*, 144(3) :581–599, 1992.

[19] T. P. Branson. Differential operators canonically associated to a conformal structure. *Math. Scand.*, 57(2) :293–345, 1985.

[20] A. Cap and J. Silhan. Equivariant quantization for ahs-structures. *arXiv :0904.3278 [math.DG]*, 2009.

[21] M. Cariglia. Quantum mechanics of Yano tensors : Dirac equation in curved spacetime. *Classical Quantum Gravity*, 21(4) :1051–1077, 2004.

[22] E. Cartan. *Leçons sur la Théorie des Spineurs.* Hermann, Paris, 1938.

[23] B. Carter and R. G. McLenaghan. Generalized total angular momentum operator for the Dirac equation in curved space-time. *Phys. Rev. D (3)*, 19(4) :1093–1097, 1979.

[24] C. Chevalley. *The algebraic theory of spinors.* Columbia University Press, New York, 1954.

[25] P. B. Cohen, Yu. Manin, and D. Zagier. Automorphic pseudodifferential operators. In *Algebraic aspects of integrable systems*, volume 26 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 17–47. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.

[26] R. Coquereaux. Spinors, reflections and Clifford algebras : a review. In *Spinors in physics and geometry (Trieste, 1986)*, pages 135–190. World Sci. Publishing, Singapore, 1988.

[27] M. De Wilde and P. B. A. Lecomte. Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 7(6) :487–496, 1983.

[28] P. Deligne and J. W. Morgan. Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein). In *Quantum fields and strings : a course for mathematicians, Vol. 1, 2 (Princeton, NJ, 1996/1997)*, pages 41–97. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[29] B. DeWitt. *Supermanifolds.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1992.

[30] P. A. M. Dirac. The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 117(778) :610–624, 1928.

[31] P.A.M. Dirac. The fundamental equations of quantum mechanics. *Proc. Roy. Soc. London ser. A*, 109 :642–653, 1925.

[32] G. Dito and D. Sternheimer. Deformation quantization : genesis, developments and metamorphoses. In *Deformation quantization (Strasbourg, 2001)*, volume 1 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 9–54. de Gruyter, Berlin, 2002.

[33] C. Duval, A. M. El Gradechi, and V. Yu. Ovsienko. Projectively and conformally invariant star-products. *Comm. Math. Phys.*, 244(1) :3–27, 2004.

[34] C. Duval, P. B. A. Lecomte, and V. Yu. Ovsienko. Conformally equivariant quantization : existence and uniqueness. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(6) :1999–2029, 1999.

[35] C. Duval and V. Yu. Ovsienko. Space of second-order linear differential operators as a module over the Lie algebra of vector fields. *Adv. Math.*, 132(2) :316–333, 1997.

[36] C. Duval and V. Yu. Ovsienko. Conformally equivariant quantization. *arXiv :math/9801122 [math.DG]*, 1998.

[37] C. Duval and V. Yu. Ovsienko. Conformally equivariant quantum Hamiltonians. *Selecta Math. (N.S.)*, 7(3) :291–320, 2001.

[38] C. Duval and V. Yu. Ovsienko. Projectively equivariant quantization and symbol calculus : noncommutative hypergeometric functions. *Lett. Math. Phys.*, 57(1) :61–67, 2001.

[39] M. G. Eastwood and J. W. Rice. Conformally invariant differential operators on Minkowski space and their curved analogues. *Comm. Math. Phys.*, 109(2) :207–228, 1987.

[40] B. V. Fedosov. A simple geometrical construction of deformation quantization. *J. Differential Geom.*, 40(2) :213–238, 1994.

[41] H. Gargoubi, N. Mellouli, and V. Yu. Ovsienko. Differential operators on supercircle : conformally equivariant quantization and symbol calculus. *Lett. Math. Phys.*, 79(1) :51–65, 2007.

[42] E. Getzler. Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem. *Comm. Math. Phys.*, 92(2) :163–178, 1983.

[43] G. W. Gibbons, R. H. Rietdijk, and J. W. van Holten. SUSY in the sky. *Nuclear Phys. B*, 404(1-2) :42–64, 1993.

[44] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Actualit'es Sci. Ind. No. 1252. Publ. Math. Univ. Strasbourg. No. 13. Hermann, Paris, 1958.

[45] M. Godina and P. Matteucci. The Lie derivative of spinor fields : theory and applications. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2(2) :159–188, 2005.

[46] S. Gutt. Contribution à l'étude des espaces symplectiques homogènes. *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8º (2)*, 44(6) :40, 1983.

[47] S. Gutt. Deformation quantization. *Lectures at the 3rd workshop on representation theory, at ICTP Trieste*, 1993.

[48] A. Haefliger. Sur l'extension du groupe structural d'une espace fibré. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 243 :558–560, 1956.

[49] S. Hansoul. Existence of natural and projectively equivariant quantizations. *Adv. Math.*, 214(2) :832–864, 2007.

[50] T. Kashiwada. On conformal Killing tensor. *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, 19 :67–74, 1968.

[51] H. M. Khudaverdian and Th. Voronov. Differential forms and odd symplectic geometry. In *Geometry, topology, and mathematical physics*, volume 224 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 159–171. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[52] A. A. Kirillov. Unitary representations of nilpotent Lie groups. *Uspehi Mat. Nauk*, 17(4 (106)) :57–110, 1962.

[53] A. A. Kirillov. Geometric quantization. In *Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 4*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 141–178, 291. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1985.

[54] A.A. Kirillov. *Éléments de la théorie des représentations.* Éditions Mir, Moscow, 1974. Traduit du russe par A. Sossinsky [A. B. Sosinskiĭ].

[55] S. Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry.* Springer-Verlag, New York, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70.

[56] S. Kobayashi and T. Nagano. On filtered Lie algebras and geometric structures. I. *J. Math. Mech.*, 13 :875–907, 1964.

[57] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 15 Vol. II. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

[58] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66(3) :157–216, 2003.

[59] Y. Kosmann. Dérivées de Lie des spineurs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 262 :A289–A292, 1966.

[60] Y. Kosmann. Dérivées de Lie des spineurs. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 91 :317–395, 1972.

[61] B. Kostant. Quantization and unitary representations. I. Prequantization. In *Lectures in modern analysis and applications, III*, pages 87–208. Lecture Notes in Math., Vol. 170. Springer, Berlin, 1970.

[62] B. Kostant. Symplectic spinors. In *Symposia Mathematica, Vol. XIV (Convegno di Geometria Simplettica e Fisica Matematica, INDAM, Rome, 1973)*, pages 139–152. Academic Press, London, 1974.

[63] B. Kostant. Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization. In *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975)*, pages 177–306. Lecture Notes in Math., Vol. 570. Springer, Berlin, 1977.

[64] P. Krtouš, V. P. Frolov, and D. Kubizňák. Hidden symmetries of higher-dimensional black holes and uniqueness of the Kerr-NUT-(A)dS spacetime. *Phys. Rev. D*, 78(6) :064022, 5, 2008.

[65] H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[66] P. B. A. Lecomte. Towards projectively equivariant quantization. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, (144) :125–132, 2001. Noncommutative geometry and string theory (Yokohama, 2001).

[67] P. B. A. Lecomte and V. Yu. Ovsienko. Projectively equivariant symbol calculus. *Lett. Math. Phys.*, 49(3) :173–196, 1999.

[68] D. A. Leĭtes. Introduction to the theory of supermanifolds. *Uspekhi Mat. Nauk*, 35(1(211)) :3–57, 255, 1980.

[69] S. E. Loubon Djounga. Modules of third-order differential operators on a conformally flat manifold. *J. Geom. Phys.*, 37(3) :251–261, 2001.

[70] S. E. Loubon Djounga. Conformally invariant quantization at order three. *Lett. Math. Phys.*, 64(3) :203–212, 2003.

[71] Yu. I. Manin. *Gauge field theory and complex geometry*, volume 289 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by N. Koblitz and J. R. King.

[72] C. M. Marle. Quantification géométrique : théorie et exemples. *Séminaire Paul Krée*, 2(exp.2) :1–35, 1975-1976.

[73] J. L. Martin. The Feynman principle for a Fermi system. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 251 :543–549, 1959.

[74] P. Mathonet and F. Radoux. Cartan connections and natural and projectively equivariant quantizations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 76(1) :87–104, 2007.

[75] P. Mathonet and F. Radoux. Existence of natural and conformally invariant quantizations of arbitrary symbols. *arXiv :0811.3710 [math.DG]*, 2008.

[76] J. E. Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 45 :99–124, 1949.

[77] I.M. Musson, G. Pinczon, and R. Ushirobira. Hochschild cohomology and deformations of clifford-weyl algebras. *arXiv :0810.0184v2 [math.RT]*, 2008.

[78] C. Nölle. On the relation between geometric and deformation quantization. *arXiv :0809.1946v1 [math-ph]*, 2008.

[79] P. Nurowski and A. Trautman. Robinson manifolds as the Lorentzian analogs of Hermite manifolds. *Differential Geom. Appl.*, 17(2-3) :175–195, 2002. 8th International Conference on Differential Geometry and its Applications (Opava, 2001).

[80] K. Ogiue. G-structures of higher order. *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 19 :488–497, 1967.

[81] T. Oota and Y. Yasui. Separability of Dirac equation in higher dimensional Kerr-NUT-de Sitter spacetime. *Phys. Lett. B*, 659(3) :688–693, 2008.

[82] V. Yu. Ovsienko and P. Redou. Generalized transvectants-Rankin-Cohen brackets. *Lett. Math. Phys.*, 63(1) :19–28, 2003.

[83] M. Palese and E. Winterroth. Noether identities in Einstein-Dirac theory and the Lie derivative of spinor fields. In *Differential geometry and its applications*, pages 643–653. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.

[84] A. Papapetrou. Spinning test-particles in general relativity. I. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 209 :248–258, 1951.

[85] M. J. Pflaum. A deformation-theoretical approach to Weyl quantization on Riemannian manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 45(4) :277–294, 1998.

[86] I. R. Porteous. *Topological geometry.* Van Nostrand Reinhold Co., London, 1969.

[87] I. R. Porteous. *Clifford algebras and the classical groups*, volume 50 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[88] F. Ravndal. Supersymmetric Dirac particles in external fields. *Phys. Rev. D (3)*, 21(10) :2823–2832, 1980.

[89] A. Rogers. *Supermanifolds.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. Theory and applications.

[90] M. Rothstein. The structure of supersymplectic supermanifolds. In *Differential geometric methods in theoretical physics (Rapallo, 1990)*, volume 375 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 331–343. Springer, Berlin, 1991.

[91] J. Schwinger. A note on the quantum dynamical principle. *Philos. Mag. (7)*, 44 :1171–1179, 1953.

[92] P. Ševera. On the origin of the BV operator on odd symplectic supermanifolds. *Lett. Math. Phys.*, 78(1) :55–59, 2006.

[93] J. Silhan. Conformally invariant quantization - towards complete classification. *arXiv :0903.4798 [math.DG]*, 2009.

[94] D. J. Simms. Metalinear structures and a geometric quantisation of the harmonic oscillator. In *Géométrie symplectique et physique mathématique (Colloq. Internat. CNRS, No. 237, Aix-en-Provence, 1974)*, pages 163–174. Éditions Centre Nat. Recherche Sci., Paris, 1975. With questions by J. Tarski and A. Crumeyrolle and replies by the author.

[95] D. J. Simms and N. M. J. Woodhouse. *Lectures in geometric quantization.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Lecture Notes in Physics, 53.

[96] J.-M. Souriau. *Géométrie et relativité.* Enseignement des sciences. Hermann, Paris, 1964.

[97] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques.* Maitrises de mathématiques. Dunod, Paris, 1970.

[98] M. Tanimoto. The role of Killing-Yano tensors in supersymmetric mechanics on a curved manifold. *Nuclear Phys. B*, 442(3) :549–560, 1995.

[99] A. Trautman. Connections and the dirac operator on spinor bundles. *Journal of Geometry and Physics*, 58 :238–252, February 2008.

[100] G. M. Tuynman. Geometric quantization of the BRST charge. *Comm. Math. Phys.*, 150(2) :237–265, 1992.

[101] G. M. Tuynman. *Supermanifolds and supergroups*, volume 570 of *Mathematics and its Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. Basic theory.

[102] F. F. Voronov. Quantization on supermanifolds and an analytic proof of the Atiyah-Singer index theorem. In *Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 38 (Russian)*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 3–118, 186. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990. Translated in J. Soviet Math. **6**4 (1993), no. 4, 993–1069.

[103] Th. Voronov. Quantization of forms on the cotangent bundle. *Comm. Math. Phys.*, 205(2) :315–336, 1999.

[104] H. Weyl. *The classical groups.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Their invariants and representations, Fifteenth printing, Princeton Paperbacks.

[105] H. Widom. A complete symbolic calculus for pseudodifferential operators. *Bull. Sci. Math. (2)*, 104(1) :19–63, 1980.

[106] N. M. J. Woodhouse. *Geometric quantization.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1992. Oxford Science Publications.

[107] K. Yano. Some remarks on tensor fields and curvature. *Ann. of Math. (2)*, 55 :328–347, 1952.

Deuxième partie

Sur la géométrie projective du supercercle : une construction unifiée du super birapport et de la dérivée schwarzienne

Michel, J.-P., and C. Duval. (2008) "On the Projective Geometry of the Supercircle: A Unified Construction of the Super Cross-Ratio and Schwarzian Derivative,"
International Mathematics Research Notices, Vol. 2008, Article ID rnn054, 47 pages.
doi:10.1093/imrn/rnn054

On the Projective Geometry of the Supercircle: A Unified Construction of the Super Cross-Ratio and Schwarzian Derivative

Jean-Philippe Michel and Christian Duval

Centre de Physique Théorique, CNRS, Luminy, Case 907 F-13288
Marseille Cedex 9, France

Correspondence to be sent to: duval@cpt.univ-mrs.fr

We consider the standard contact structure on the supercircle, $S^{1|1}$, and the supergroups $E(1|1)$, $Aff(1|1)$, and $SpO(2|1)$ of contactomorphisms, defining the Euclidean, affine, and projective geometries, respectively. Using the new notion of $p|q$-transitivity, we construct in synthetic fashion even and odd invariants characterizing each geometry, and obtain an even and an odd super cross-ratios.

Starting from the even invariants, we derive, using a superized Cartan formula, 1-cocycles of the group of contactomorphisms, $K(1)$, with values in tensor densities $\mathcal{F}_\lambda(S^{1|1})$. The even cross-ratio yields a $K(1)$ 1-cocycle with values in quadratic differentials, $\mathcal{Q}(S^{1|1})$, whose projection on $\mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(S^{1|1})$ corresponds to the super Schwarzian derivative arising in superconformal field theory. This leads to the classification of the cohomology spaces $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda(S^{1|1}))$.

The construction is extended to the case of $S^{1|N}$. All previous invariants admit a prolongation for $N > 1$, as well as the associated Euclidean and affine cocycles. The super Schwarzian derivative is obtained from the even cross-ratio, for $N = 2$, as a projection to $\mathcal{F}_1(S^{1|2})$ of a $K(2)$ 1-cocycle with values in $\mathcal{Q}(S^{1|2})$. The obstruction to obtain, for $N \geq 3$, a projective cocycle is pointed out.

Received April 17, 2008; Revised April 17, 2008; Accepted May 7, 2008
Communicated by Prof. Yuri Manin

1 Introduction

The cross-ratio is the fundamental object of projective geometry; it is a projective invariant of the circle S^1 (or, rather, of $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$). The main objective of this article is to propose and justify from a group theoretical analysis a super-analogue of the cross-ratio in the case of the supercircle $\mathrm{S}^{1|N}$, and to deduce then, from the Cartan formula (1.2), the associated Schwarzian derivative for $N = 1, 2$.

It is well known that the circle, S^1, admits three different geometries, namely the Euclidean, affine, and projective geometries, as highlighted by Ghys [13]. They are defined by the groups $(\mathbb{R}, +)$, $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{R})$, and $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, or equivalently by their characteristic invariants, the distance, the distance ratio, and the cross-ratio. From these invariants we can obtain, using Cartan-like formulae, three 1-cocycles of $\mathrm{Diff}_+(\mathrm{S}^1)$ with coefficients in some tensorial density modules $\mathcal{F}_\lambda(\mathrm{S}^1)$ with $\lambda \in \mathbb{R}$; see [8]. They are the generators of the three nontrivial cohomology spaces $H^1(\mathrm{Diff}_+(\mathrm{S}^1), \mathcal{F}_\lambda)$, with $\lambda = 0, 1, 2$, as proved in [11].

The purpose of this article is to extend these results to the supercircle, $\mathrm{S}^{1|N}$, endowed with its standard contact structure. To that end, we use the embedding of the quotient, $\mathrm{PC}(2|N) = \mathrm{SpO}(2|N)/\{\pm\mathrm{Id}\}$, of the orthosymplectic supergroup $\mathrm{SpO}(2|N)$, into the group, $K(N)$, of contactomorphisms of $\mathrm{S}^{1|N}$. The supergroup $\mathrm{PC}(2|N)$ is the projective conformal supergroup introduced by Manin in [22], extending $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. The two main objects of super projective geometry, namely the cross-ratio and the Schwarzian derivative, have, indeed, already been introduced in the general context of superstring theories, though in a somewhat independent fashion. This was mainly done in the framework of super Riemann surfaces, or in terms of the so-called SUSY structures. On the one hand, the even and odd cross-ratios, for $N = 1$, have been originally put forward by Aoki [2] and Nelson [23], respectively; these two references have opened the way to subsequent work of, e.g. Giddings [14] and Uehara and Yasui [31]. On the other hand, the super Schwarzian derivative has been introduced, in the framework of superconformal field theory, by Friedan [10] for $N = 1$, and by Cohn [5] for $N = 2$.

Quite independently, and from a more mathematical point of view, Manin [22] introduced the even and odd cross-ratios, for $N = 1, 2$, by resorting to linear supersymplectic algebra. Also did Radul [26, 27] discover the formulae for the super Schwarzian $K(N)$ 1-cocycles, for $N = 1, 2, 3$, using the transformation laws of the super Sturm–Liouville operators on $\mathrm{S}^{1|N}$.

Our first objective is to construct, in a systematic manner, invariants characterizing each supergroup $\mathrm{E}_+(1|N) \subset \mathrm{Aff}_+(1|N) \subset \mathrm{PC}(2|N)$ acting on the supercircle $\mathrm{S}^{1|N}$.

To this end, we introduce the new notion of $p|q$-transitivity, well adapted to supergroups, and state a general theorem, providing a way to build up characteristic invariant of a simply $p|q$-transitive group action. Applying this theorem to the three preceding supergroups, we obtain Euclidean, affine, and projective invariants, respectively I_{e}, I_{a}, and I_{p}, with their even and odd part. In the case $N = 1$, the two components of I_{p} are, unsurprisingly, the even and odd above-mentioned super cross-ratios. Let us emphasize that, for arbitrary N, the even cross-ratio turns out to be given by the superfunction

$$[t_1, t_2, t_3, t_4] = \frac{[t_1, t_3][t_2, t_4]}{[t_2, t_3][t_1, t_4]} \tag{1.1}$$

of a quadruple of "points" (t_1, t_2, t_3, t_4) of $\mathrm{S}^{1|N}$, with even coordinates x_i, and odd ones $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^N)$, for $i = 1, \ldots, 4$; note that in equation (1.1), the two-point superfunction $[t_i, t_j] = x_j - x_i - \xi_j \cdot \xi_i$ is the Euclidean even invariant. The supergroups preserving I_{e}, I_{a}, and I_{p} are respectively, $\mathrm{E}_+(1|N)$, $\mathrm{Aff}_+(1|N)$, and $\mathrm{PC}(2|N)$, as expected.

Our second objective is to link the three even parts of the previously found invariants to 1-cocycles of $K(N)$ by means of a natural superized version of the Cartan formula. It culminates in the projective case, where we get the super Schwarzian derivative (3.11) from the even cross-ratio. Let us go into some more details. Given a flow, $\phi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + O(\varepsilon^2)$, we posit $t_{i+1} = \phi_{i\varepsilon}(t_1)$ for $i = 0, \ldots, 3$. We contend that the Cartan formula [4, 25] can be consistently superized for $N = 1$ and $N = 2$, using the cross-ratio (1.1), namely by

$$\frac{\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4]}{[t_1, t_2, t_3, t_4]} - 1 = \langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \mathcal{S}(\Phi) \rangle + O(\varepsilon^3), \tag{1.2}$$

hence, providing us with a definition of the Schwarzian derivative, $\mathcal{S}(\Phi)$, of a contactomorphism Φ. In doing so, we naturally obtain a 1-cocycle of $K(N)$ for $N = 1, 2$ respectively, with values in the module, $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|N})$, of quadratic differentials. Their projections onto the modules $\mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(\mathrm{S}^{1|1})$ and $\mathcal{F}_1(\mathrm{S}^{1|2})$, for $K(1)$ and $K(2)$ respectively, yield the expressions of the super Schwarzian derivatives given in [5, 10, 27]. Remarkably enough, our formula allows us to recover the classical Schwarzian derivative on the circle, S^1, which would not be the case, had we started with Friedan's, Cohn's, and Radul's formulae. Much in the same way, we define the Euclidean and affine 1-cocycles of $K(N)$ for any N, with the help of the Cartan-like formulae (5.4) and (5.5). Using the results of Agrebaoui et al. [1] on the cohomology of the Lie superalgebra of contact vector field on $\mathrm{S}^{1|1}$, we can claim that our three 1-cocycles on $K(1)$ are, indeed, the generators of the three nontrivial cohomology spaces $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$, where $\lambda = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

The paper is organized as follows.

In Section 2, we recall the main definitions and facts related to the geometry of the supercircle $\mathrm{S}^{1|1}$, in particular its canonical contact structure and the action of the (special) orthosymplectic group $\mathrm{SpO}_+(2|1) \cong \mathrm{PC}(2|1)$, as a subgroup of the group, $K(1)$, of contactomorphisms of $\mathrm{S}^{1|1}$.

In Section 3, we review the main results of this article, namely the form of the invariants, and of the associated 1-cocycles of $K(1)$, obtained for each of the three above-mentioned geometries. This section also gives the classification of the cohomology spaces $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$, for $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sections 4 and 5 provide the proofs of the main results announced in Section 3. We first define the notion of $p|q$-transitivity and state the general Theorem 4.3, leading to the construction of the Euclidean, affine, and projective invariants, from the action of the corresponding subgroups of $K(1)$. Those invariants are then shown to yield, via a Taylor expansion, the sought 1-cocycles; in particular the Cartan formula readily leads to a new expression for the Schwarzian derivative, $\mathcal{S}(\Phi)$, of a contactomorphism, Φ, with values in the module of quadratic differentials, $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$. The link with Friedan's and Radul's Schwarzian derivative is elucidated. The kernels of the three above 1-cocycles are shown to be, indeed, isomorphic to $\mathrm{E}(1|1)$, $\mathrm{Aff}(1|1)$, and $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, respectively.

In Section 6, we present a detailed treatment of the general case, $N > 1$, along the same lines as before. As mentioned in Section 3, there is hardly no change in the construction and the resulting expressions of the invariants. The Euclidean and affine 1-cocycles of $K(N)$ are explicitly derived, as well as the Schwarzian derivative obtained as a 1-cocycle of $K(2)$ with values in the module $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|2})$ of quadratic differentials. Upon projection of $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|2})$ onto the $K(2)$-module $\mathcal{F}_1(\mathrm{S}^{1|2})$ of 1-densities, we obtain Cohn's and Radul's formula for the Schwarzian derivative. Specific difficulties encountered in deriving the projective 1-cocycles for $N > 2$ are pointed out, together with those arising in the determination of the kernels of the Euclidean and affine 1-cocycles. At last, the kernel of the Schwarzian 1-cocycle of $K(2)$ is shown to be isomorphic to $\mathrm{PC}(2|2)$.

Section 7 gives us the opportunity to sum up the content of this article, and to draw several conclusions. It opens perspectives for future work related to the link between discrete projective invariants of the supercircle, and the cohomology of the group of its contactomorphisms.

2 The Supercircle $S^{1|1}$ and Its Contactomorphisms: A Compendium

We briefly define in this section the geometrical objects on $S^{1|1}$ that will be needed for our purpose. This includes the basics of super differential geometry [6, 20, 21], the standard contact structure on the supercircle [27], and the orthosymplectic group $SpO(2|1)$; see [22].

2.1 The supercircle $S^{1|1}$

The supercircle $S^{1|1}$ can be defined as the circle, S^1, endowed with the sheaf of the supercommutative associative algebra of superfunctions $\mathcal{C}^\infty(S^{1|1}) = \mathcal{C}^\infty(S^1)[\xi]$. Thus, $S^{1|1}$ admits local coordinates $t = (x, \xi)$, where x is a local coordinate on S^1, and ξ is an odd (Grassmann) coordinate, i.e. such that $\xi^2 = 0$ and $x\xi = \xi x$. Then a superfunction is of the form

$$f(x, \xi) = f_0(x) + \xi f_1(x) \tag{2.1}$$

with $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$. There exists a $\mathbb{Z}_2$-grading on superfunctions, f_0 being the even part and ξf_1 the odd part of f. The parity is denoted by p, with the convention $p(f_0) = 0$ and $p(\xi f_1) = 1$. We define the projection

$$\pi : \mathcal{C}^\infty(S^{1|1}) \to \mathcal{C}^\infty(S^1) \tag{2.2}$$

by quotienting by the ideal of nilpotent elements; this gives an embedding of the circle into the supercircle.

Denote by $\mathrm{Diff}(S^{1|1})$ the group of diffeomorphisms of $S^{1|1}$, i.e. the group of automorphisms of $\mathcal{C}^\infty(S^{1|1})$. Let $\Phi \in \mathrm{Diff}(S^{1|1})$, then

$$\Phi(x, \xi) = (\varphi(x, \xi), \psi(x, \xi)), \tag{2.3}$$

where φ is an even superfunction and ψ an odd one, so Φ preserves parity and $(\varphi(x, \xi), \psi(x, \xi))$ become new coordinates on $S^{1|1}$. For any morphism, i.e. algebra morphism preserving parity, the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(S^{1|1}) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C}^\infty(S^1) \\ \uparrow{\scriptstyle\Phi} & & \uparrow{\scriptstyle\Pi(\Phi)} \\ \mathcal{C}^\infty(S^{1|1}) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C}^\infty(S^1). \end{array} \tag{2.4}$$

So every morphism of $\mathcal{C}^\infty(S^{1|1})$ induces a morphism of $\mathcal{C}^\infty(S^1)$, and we have a canonical morphism $\Pi : \mathrm{Diff}(S^{1|1}) \to \mathrm{Diff}(S^1)$.

A super vector field, X, on $\mathrm{S}^{1|1}$ is a superderivation of $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$, i.e. a linear operator satisfying super Leibniz rule, $X(fg) = X(f)g + (-1)^{p(f)p(X)} fX(g)$, for homogeneous elements. As in ordinary differential geometry, X can be locally written in terms of partial derivatives as

$$X = f(x,\xi)\partial_x + g(x,\xi)\partial_\xi, \tag{2.5}$$

where $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$, with $p(\partial_x) = 0$ and $p(\partial_\xi) = 1$. The space, $\mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1})$, of vector fields on $\mathrm{S}^{1|1}$ is thus a left-module over $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$. It has the structure of a super Lie algebra, $\mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1})_0 \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1})_1$, whose superbracket is denoted by $[\cdot,\cdot]$, and $[X, Y] = XY - (-1)^{p(X)p(Y)}YX$, for homogeneous elements.

Since the group $\mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1})$ of diffeomorphisms preserves parity, we can define the flow of $X \in \mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1})$, namely $\varphi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$, only if $p(\varepsilon X) = 0$. For odd vector fields, X, the parameter ε must therefore be odd; see [6].

We can now define the $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$ right-module $\Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$ of 1-forms on $\mathrm{S}^{1|1}$, as the dual of the $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$ left-module $\mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1})$. The 1-forms dx and $d\xi$ will constitute the dual basis of ∂_x and ∂_ξ, that is, $\langle\partial_x, dx\rangle = \langle\partial_\xi, d\xi\rangle = 1$ and $\langle\partial_\xi, dx\rangle = \langle\partial_x, d\xi\rangle = 0$. Then p is extended naturally to $\Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$ by $p(dx) = 0$ and $p(d\xi) = 1$. Using the exterior product we construct $\Omega^*(\mathrm{S}^{1|1})$, the space of all differential forms on $\mathrm{S}^{1|1}$, graded by $\mathbb{Z}$ with $|\cdot|$ the cohomological degree. Parity being also defined on this space, we have two choices for the Sign Rule, viz.,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{(p(\alpha)+|\alpha|)(p(\beta)+|\beta|)}\beta \wedge \alpha, \tag{2.6}$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|+p(\alpha)p(\beta)}\beta \wedge \alpha, \tag{2.7}$$

where α, β are homogeneous elements of $\Omega^*(\mathrm{S}^{1|1})$. The second convention corresponds to a bigrading $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, and following [6, 18], we will choose it from now on.

2.2 The contact structure on $\mathrm{S}^{1|1}$ and its automorphisms

The standard contact structure on $\mathrm{S}^{1|1}$ is given by the conformal class of the 1-form

$$\alpha = dx + \xi d\xi \tag{2.8}$$

which satisfies $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$. This contact structure is equivalently defined by the kernel of α, spanned by the odd vector field

$$D = \partial_\xi + \xi\partial_x, \tag{2.9}$$

whose square $D^2 = \frac{1}{2}[D, D] = \partial_x$ is the Reeb vector field of the structure.

Then D and ∂_x set up a basis of the $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$ left-module $\mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1})$, while α and $\beta = d\xi$ constitute the dual basis, with $d\alpha = \beta \wedge \beta$. Thus for any $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$, we have

$$df = \alpha f' + \beta Df, \tag{2.10}$$

where $f' = \partial_x f$. The contact structure being given by the direction of α, it is therefore preserved by $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1})$ if and only if

$$\Phi^* \alpha = E_\Phi \alpha \tag{2.11}$$

for some superfunction E_Φ, which following [27], we call the multiplier of Φ. We denote by $K(1)$ the subgroup of $\mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1})$ preserving the contact structure, its elements are called contactomorphisms. From equations (2.3) and (2.8), we find $\Phi^*\alpha = d\varphi + \psi d\psi = \alpha(\varphi' + \psi\psi') + \beta(D\varphi - \psi D\psi)$.

Proposition 2.1. Let $\Phi = (\varphi, \psi)$ be a diffeomorphism of $\mathrm{S}^{1|1}$; then $\Phi \in K(1)$ if and only if

$$D\varphi - \psi D\psi = 0. \tag{2.12}$$

The multiplier of Φ is then given by $E_\Phi = \varphi' + \psi\psi'$, i.e. by

$$E_\Phi = \frac{\Phi^*\alpha}{\alpha} = (D\psi)^2. \tag{2.13}$$

□

Since α and β set up a basis of the $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$-module $\Omega^1(\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1}))$, we will also need the expression of the action of $K(1)$ on the odd 1-form β; it reads

$$\Phi^*\beta = \alpha\psi' + \beta D\psi. \tag{2.14}$$

We might, as well, define $K(1)$ as the group of diffeomorphisms preserving the horizontal distribution spanned by D, denoted by $\langle D \rangle$. In the complex setting, D is interpreted as the covariant derivative of a super Riemann surface [5, 10], and $K(1)$ as the superconformal group; the distribution $\langle D \rangle$ is also often referred to as a SUSY structure [6, 22]. See also [17] for a review.

Using equation (2.11), we find that the transformation law (2.14) entails

$$\Phi^* D = \frac{1}{D\psi} D, \tag{2.15}$$

which makes sense as $D\psi \neq 0$ for any diffeomorphism Φ.

Remark 2.2. If $\Phi = (\varphi, \psi) \in K(1)$, see equation (2.3), we put $\varphi(x, \xi) = \varphi_0(x) + \xi\varphi_1(x)$, and $\psi(x, \xi) = \psi_1(x) + \xi\psi_0(x)$, with an index 0 for even functions and 1 for odd functions. The constraint (2.12) then reads $\varphi_0' = \psi_0^2 - \psi_1\psi_1'$ and $\varphi_1 = \psi_0\psi_1$. Using the natural projection $\Pi : K(1) \to \mathrm{Diff}(S^1)$, defined in equation (2.4), we note that Φ gives rise to a diffeomorphism of S^1, which is actually orientation-preserving since $\Pi(\Phi)' = \pi(\varphi_0') = \pi(\psi_0)^2 > 0$. □

From the constraint (2.12), we can obtain an interesting property of contactomorphisms: they are essentially determined by their even part.

Lemma 2.3. Let $\Phi = (\varphi, \psi) \in K(1)$ and $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in K(1)$ be two contactomorphisms such that their even parts coincide, $\varphi = \widetilde{\varphi}$. We then have $\widetilde{\psi} = \pm\psi$. □

This can be checked by a direct calculation.

2.2.1 *The super Lie algebra, $k(1)$, of contact vector fields*

In view of definition (2.11) of contactomorphisms, we will call $X \in \mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1})$ a contact vector field, $X \in k(1)$, if

$$L_X\alpha = e_X\alpha \tag{2.16}$$

for some superfunction e_X. The Lie derivative is still given by the derivative of the flow, so $k(1)$ is the Lie algebra of $K(1)$, and e is the derivative of E at the identity. Let us now recall the following classic result [12, 16]: if $X \in k(1)$, there exists a unique superfunction $f(x, \xi) = a(x) - 2\xi b(x)$, called the contact Hamiltonian such that $X = X_f$, where

$$X_f = a(x)\partial_x + \tfrac{1}{2}a'(x)\xi\partial_\xi + b(x)(\partial_\xi - \xi\partial_x), \tag{2.17}$$

so that the associated (infinitesimal) multiplier is given by

$$e_{X_f} = f'. \tag{2.18}$$

2.2.2 *Tensor densities,* 1*-forms, and quadratic differentials of* $S^{1|1}$

Let us introduce now a 1-parameter family, $\mathcal{F}_\lambda(S^{1|1})$ or $\mathcal{F}_\lambda$ for short, of $K(1)$-modules, which define the λ-densities associated with the contact structure, $\lambda \in \mathbb{C}$. As vector spaces, these modules are isomorphic to $C^\infty(S^{1|1})$, the $K(1)$ anti-action $(\Phi \mapsto \Phi_\lambda)$ on $\mathcal{F}_\lambda(S^{1|1})$ being given by

$$\Phi_\lambda f = (E_\Phi)^\lambda\ \Phi^* f, \tag{2.19}$$

where $f \in C^\infty(S^{1|1})$. We may thus write a λ-density $F \in \mathcal{F}_\lambda$, symbolically, as $F = f\alpha^\lambda$. We will thus write $(\Phi \to \Phi^*)$ the $K(1)$ anti-action on $\mathcal{F}_\lambda$ with this identification.

Remark 2.4. In view of equations (2.13) and (2.15), we will regard, in conformity with definition (2.19), the odd vector field D as a $(-\frac{1}{2})$-density. □

There is an isomorphism of $K(1)$-modules: $\mathrm{Vect}(S^{1|1}) \cong \mathcal{F}_{-1} \oplus \mathcal{F}_{-\frac{1}{2}}$, where $\mathcal{F}_{-1}$ corresponds to $k(1)$ and $\mathcal{F}_{-\frac{1}{2}}$ to the vector fields fD, with $f \in C^\infty(S^{1|1})$ and D as in equation (2.9); see [12, 16]. The space of 1-forms $\Omega^1(S^{1|1})$ is generated, as $C^\infty(S^{1|1})$-module, by α and β.

Similarly the space $\mathcal{Q}(S^{1|1})$ of quadratic differentials is generated, as a $C^\infty(S^{1|1})$-module by

$$\alpha^2 = \alpha \otimes \alpha \quad \text{and} \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha), \tag{2.20}$$

where the tensor product is understood as the supersymmetric tensor product constructed via the commutativity isomorphism given by the Sign Rule [6]. This notation will be used throughout this paper.

Proposition 2.5. The two $K(1)$-modules $\Omega^1(S^{1|1})$ and $\mathcal{Q}(S^{1|1})$, admit the following decomposition into $K(1)$-submodules, namely

$$\Omega^1(S^{1|1}) \cong \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{F}_1, \tag{2.21}$$
$$\mathcal{Q}(S^{1|1}) \cong \mathcal{F}_{\frac{3}{2}} \oplus \mathcal{F}_2. \tag{2.22}$$

The summands $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) are naturally $K(1)$-submodules of $\Omega^1(S^{1|1})$ (resp. $\mathcal{Q}(S^{1|1})$). The projections $\Omega^1(S^{1|1}) \to \mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$ (resp. $\mathcal{Q}(S^{1|1}) \to \mathcal{F}_{\frac{3}{2}}$) are given by $\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \cdot\rangle$, and the corresponding sections by $\alpha^{\frac{1}{2}} L_D$ (resp. $\frac{2}{3}\alpha^{\frac{1}{2}} L_D$). □

Proof. We have $\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \alpha f + \beta g\rangle = \alpha^{\frac{1}{2}} g$ and $\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \alpha^2 f + \alpha\beta g\rangle = \frac{1}{2}\alpha^{\frac{3}{2}} g$. The transformation rules (2.13) for α and (2.14) for β then entail that the projections $\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \cdot\rangle$ actually define morphisms of $K(1)$-modules, $\Phi^*(\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D,\omega\rangle) = \alpha^{\frac{1}{2}}\langle D,\Phi^*\omega\rangle$ for all $\omega\in\Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$, and for all $\omega\in\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$.

Moreover, since $L_D\alpha = 2\beta$ and $L_D\beta = 0$, we readily find $\alpha^{\frac{1}{2}}L_D(\alpha^{\frac{1}{2}}g) = \alpha Dg + \beta g$ and $\alpha^{\frac{1}{2}}L_D(\alpha^{\frac{3}{2}}g) = \alpha^2 Dg + 3\alpha\beta g$. Using, once more, equations (2.13) and (2.14), we then obtain that the inclusions $\alpha^{\frac{1}{2}}L_D$ define, again, morphisms of $K(1)$-modules. To have the identity $\mu\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D,\alpha^{\frac{1}{2}}L_D F\rangle = F$, we choose $\mu = 1$ for F a $\frac{1}{2}$-density, and $\mu = \frac{2}{3}$ for F a $\frac{3}{2}$-density. The result follows. ■

2.3 The orthosymplectic group SpO(2|1)

To define the supergroup SpO(2|1) and its action on the supercircle we will introduce the notion of functor of points, following [6]. Let A be a supermanifold, an A-point of the supercircle is a morphism of supermanifolds $A\to\mathrm{S}^{1|1}$; we will denote by $\mathrm{S}^{1|1}(A)$ the set of A-points of $\mathrm{S}^{1|1}$. The assignation $A\to$ (A-points) is the functor of points. An A-point of $\mathrm{S}^{1|1}$ is given by the image of the generators (x,ξ) of $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$ in $\mathcal{O}_A$, the sheaf of functions defining A; see [6, 20]. By Yoneda's lemma, giving $f\in\mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1})$ is equivalent to giving, functorially in A, a map f_A on $\mathrm{S}^{1|1}(A)$.

For $\mathcal{A}$ any commutative superalgebra, $\mathrm{GL}_{p,q}(\mathcal{A})$ is the well-known group of even invertible linear transformation of the free $\mathcal{A}$-module of dimension $p|q$; see [20]. We then define the supergroup $\mathrm{GL}(p|q)$ by its functor of points, $\mathrm{GL}(p|q)(A) = \mathrm{GL}_{p,q}(\mathcal{O}_A)$, and this functor is representable by a supermanifold, $\mathrm{GL}(p|q)$. By Yoneda's lemma, the action of $\mathrm{GL}(p|q)$ on $\mathbb{R}^{p|q}$ can be given by the action of $\mathrm{GL}(p|q)(A)$ on $\mathbb{R}^{p|q}(A)$.

If we restrict ourselves to the supermanifolds A whose underlying manifold is a point, then $\mathcal{O}_A$ is a Grassmann algebra, and we obtain the supermanifolds defined by Rogers [28] or the $\mathcal{A}$-manifolds of Tuynman [30].

From now on we will speak of points instead of A-points, and of the action of a supergroup on points, instead of the action of A-points of a supergroup on A-points.

The contact structure on $\mathrm{S}^{1|1}$ (or rather on $\mathbb{R}P^{1|1}$) defined by α, see equation (2.8), does stem from the 1-form on $\mathbb{R}^{2|1}$ given by $\varpi = \frac{1}{2}(pdq - qdp + \theta d\theta)$, via the formula $\varpi = \frac{1}{2}p^2\alpha$, with $p\neq 0$, expressed in affine coordinates $x = q/p$ and $\xi = \theta/p$. We define the orthosymplectic group [16, 22], denoted by SpO(2|1), via its functor of points; SpO(2|1)(A) is the group of all linear transformations of $\mathbb{R}^{2|1}(A)$, viz.,

$$h = \begin{pmatrix} a & b & \gamma \\ c & d & \delta \\ \alpha & \beta & e \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

preserving the symplectic form $d\varpi$, i.e. such that [22]

$$ad - bc - \alpha\beta = 1, \tag{2.24}$$

$$e^2 + 2\gamma\delta = 1, \tag{2.25}$$

$$\alpha e - a\delta + c\gamma = 0, \tag{2.26}$$

$$\beta e - b\delta + d\gamma = 0. \tag{2.27}$$

We easily find that SpO(2|1) also preserves ϖ. Since $\varpi = \frac{1}{2}p^2\alpha$, the orthosymplectic group acts by contactomorphisms, $\mathrm{SpO}(2|1) \to K(1)$, via the following projective action on $\mathrm{S}^{1|1}$, namely (in terms of A-points)

$$\widehat{h}(x,\xi) = \left(\frac{ax + b + \gamma\xi}{cx + d + \delta\xi}, \frac{\alpha x + \beta + e\xi}{cx + d + \delta\xi}\right), \tag{2.28}$$

where $h \in \mathrm{SpO}(2|1)$.

The Berezinian of h is $\mathrm{Ber}(h) = e + \alpha\beta e^{-1}$; see [22]. We introduce the special orthosymplectic group $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ as the subgroup of SpO(2|1) of Berezinian 1, or as the quotient, PC(2|1), of SpO(2|1) by the kernel of the projective action (2.28), or as the connected component of the identity of SpO(2|1). So $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ is a super-extension of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. We have the following (local) group factorization

$$\mathrm{SpO}_+(2|1) \ni h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{c} & 1 & \tilde{\delta} \\ \tilde{\delta} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & \tilde{b} & -\tilde{\beta} \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon\tilde{\beta} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

where $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}) \in \mathbb{R}^{3|2}$, with $\epsilon^2 = 1$, and $\tilde{a} > 0$. Thus, as read off in equation (2.29), every homography is the composition of an inversion, a dilatation, and a translation. We will denote by E(1|1) the subgroup of translations and by Aff(1|1) the subgroup generated by translations and dilatations. The connected component of the identity of these subgroups of $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, characterized by $\epsilon > 0$, will be denoted by $\mathrm{E}_+(1|1)$ and $\mathrm{Aff}_+(1|1)$, and referred to as special supergroups.

3 Main Results

We expound in this section the two main results of this paper regarding the case of $\mathrm{S}^{1|1}$; the first one gives the invariants of the action on $\mathrm{S}^{1|1}$ of the special supergroups $\mathrm{E}_+(1|1)$,

$\mathrm{Aff}_+(1|1)$, and $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, and the second one provides, by means of a super version of the Cartan formula, the associated $K(1)$-cocycles. These results will be extended (whenever possible) to the case of $\mathrm{S}^{1|N}$ in Section 6.

3.1 Super Euclidean, affine, and projective invariants

Let t_1, t_2, t_3, t_4 be four generic points of $\mathrm{S}^{1|1}$, $t_i = (x_i, \xi_i)$.

Theorem 3.1. The following three couples, I_e, I_a, and I_p, of superfunctions are the invariants of the action of Euclidean, affine, and projective special supergroups on $\mathrm{S}^{1|1}$.

- Euclidean invariant, $I_\mathrm{e}(t_1, t_2) = ([t_1, t_2], \{t_1, t_2\})$ with

$$[t_1, t_2] = x_2 - x_1 - \xi_2\xi_1, \tag{3.1}$$

$$\{t_1, t_2\} = \xi_2 - \xi_1. \tag{3.2}$$

- Affine invariant, $I_\mathrm{a}(t_1, t_2, t_3) = ([t_1, t_2, t_3], \{t_1, t_2, t_3\})$, where, if $x_1 < x_2$,

$$[t_1, t_2, t_3] = \frac{[t_1, t_3]}{[t_1, t_2]}, \tag{3.3}$$

$$\{t_1, t_2, t_3\} = [t_1, t_2, t_3]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_1, t_3\}}{[t_1, t_3]^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.4}$$

- Projective invariant, $I_\mathrm{p}(t_1, t_2, t_3, t_4) = ([t_1, t_2, t_3, t_4], \pm\{t_1, t_2, t_3, t_4\})$, where when $\mathrm{ord}(t_1, t_2, t_3) = 1$, see equation (4.9),

$$[t_1, t_2, t_3, t_4] = \frac{[t_1, t_3][t_2, t_4]}{[t_2, t_3][t_1, t_4]}, \tag{3.5}$$

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4\} = [t_1, t_2, t_3, t_4]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_2, t_4\}[t_1, t_2] - \{t_1, t_2\}[t_2, t_4]}{([t_1, t_2][t_2, t_4][t_1, t_4])^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.6}$$

If a bijective transformation of $\mathrm{S}^{1|1}$ preserves one of these three couples of superfunctions, it can be identified with the action of an element of the corresponding supergroup, $\mathrm{E}_+(1|1)$, $\mathrm{Aff}_+(1|1)$, or $\mathrm{SpO}_+(2|1)$. Moreover, if a contactomorphism $\Phi \in K(1)$ preserves the even part of one of the invariants I_e, I_a, or I_p, respectively, then $\Phi = \widehat{h}$ for some h in $\mathrm{E}(1|1)$, $\mathrm{Aff}(1|1)$, or $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, respectively. □

This theorem summarizes Theorems 4.8, 4.14, and 4.19 given below, as well as their corollaries. Their proofs rely on the $p|q$-transitivity of the action of these supergroups on $\mathrm{S}^{1|1}$; all details are given in Section 4.

Remark 3.2. The super cross-ratio, i.e. the even part (3.5) of the projective invariant, I_{p}, has already been introduced by Nelson [23], and used by Giddings [14] while studying the punctured super Riemann sphere, and also by Uehara and Yasui [31] to define coordinates on the super Teichmüller space. It has also been put forward by Manin in [22] from a somewhat different standpoint that we can summarize as follows in our formalism. Using the even symplectic form $d\varpi = dp \wedge dq + \frac{1}{2} d\theta \wedge d\theta$ on $\mathbb{R}^{2|1}$, one defines a $\mathrm{SpO}_+(2|1)$-invariant pairing $\langle Z_i, Z_j \rangle = d\varpi(Z_i, Z_j) = p_i p_j [t_j, t_i]$, for $Z_i = (p_i \; q_i \; \theta_i) \in \mathbb{R}^{2|1}$, where $t_i = (q_i/p_i, \theta_i/p_i)$. Positing $[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] = \frac{\langle Z_3, Z_1 \rangle \langle Z_4, Z_2 \rangle}{\langle Z_3, Z_2 \rangle \langle Z_4, Z_1 \rangle}$, one obtains a four-point function, not only $\mathrm{SpO}_+(2|1)$-invariant, but also invariant under rescalings of each variable. We then have $[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] = [t_1, t_2, t_3, t_4]$; see equation (3.5). □

Remark 3.3. The odd part (3.6) of the projective invariant, I_{p}, can clearly be reduced to a three-point (almost) invariant function, corresponding to J_{p} given below in equation (4.15). The latter was already introduced by D'Hoker and Phong [7] and used in [14, 31] on the same footing as the super cross-ratio. We have written J_{p} as a function of the Euclidean invariants, but it can be recast into the form

$$J_{\mathsf{p}}(t_1, t_2, t_3) = \pm \frac{\xi_1 [t_2, t_3] + \xi_2 [t_3, t_1] + \xi_3 [t_1, t_2] - \xi_1 \xi_2 \xi_3}{([t_1, t_3][t_3, t_2][t_2, t_1])^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.7}$$

which precisely corresponds to the expression originally given in [2, 7], where the cyclic symmetry is obvious. This invariant, J_{p}, has also been introduced by Manin in [22], using a construction akin to that developed by us in Section 4. □

Remark 3.4. If we apply the projection $\pi : \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1}) \to \mathcal{C}^\infty(S^1)$, see equation (2.2), to each invariant I_{e}, I_{a}, and I_{p}, we obtain the usual Euclidean, affine, and projective invariants, namely the distance, the distance-ratio, and the cross-ratio. □

3.2 The associated 1-cocycles of $K(1)$

Let $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathrm{S}^1)$ be a diffeomorphism of the circle, and $\phi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + O(\varepsilon^2)$ be the flow of a vector field X on the circle. We set $t_i = \phi_{(i-1)\varepsilon}(t_1)$ for $i = 1, 2, 3, 4$. Then the Schwarzian derivative can be defined in terms of the cross-ratio, as the quadratic differential $\mathcal{S}(\Phi) \in \mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$ appearing in the Cartan formula; see [4, 25],

$$\frac{\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4]}{[t_1, t_2, t_3, t_4]} - 1 = \langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \mathcal{S}(\Phi) \rangle + O(\varepsilon^3). \tag{3.8}$$

For the group of contactomorphisms of $\mathrm{S}^{1|1}$, we will proceed by analogy with this method. Starting from the super cross-ratio (3.5), we will deduce the super Schwarzian derivative, $\mathcal{S}(\Phi) \in \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$, as a $K(1)$-cocycle with kernel $\mathrm{SpO}_+(2|1)$. Euclidean and affine $K(1)$-cocycles will likewise be obtained from the even Euclidean and affine invariants. We recall that $\Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$ is the space of 1-forms, $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$ the space of quadratic differentials of the supercircle, and $E_\Phi = \frac{\Phi^*\alpha}{\alpha} = (D\psi)^2$; see Section 2.2.

Theorem 3.5. From the Euclidean (3.1), affine (3.3), and projective (3.5) even invariants, we deduce via the Cartan formula (3.8) three 1-cocycles of $K(1)$, with kernel $\mathrm{E}(1|1)$, $\mathrm{Aff}(1|1)$, and $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, respectively. They retain the following form:

- the Euclidean cocycle $\mathcal{E} : K(1) \to \mathcal{F}_0(\mathrm{S}^{1|1})$,

$$\mathcal{E}(\Phi) = \log E_\Phi = \log(D\psi)^2; \tag{3.9}$$

- the affine cocycle $\mathcal{A} : K(1) \to \Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$,

$$\mathcal{A}(\Phi) = d\mathcal{E}(\Phi); \tag{3.10}$$

- the projective Schwarzian cocycle $\mathcal{S} : K(1) \to \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$,

$$\mathcal{S}(\Phi) = \frac{2}{3}\alpha^{\frac{1}{2}} L_D \mathrm{S}(\Phi), \tag{3.11}$$

where L_D stands for the Lie derivative with respect to the vector field D, and $\mathrm{S}(\Phi)$ is given by equation (3.13). Moreover, using the projections on tensor densities defined in Proposition 2.5, we obtain two new affine and projective 1-cocycles, namely

- the projection of the affine cocycle, $\mathrm{A} : K(1) \to \mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(\mathrm{S}^{1|1})$,

$$\mathrm{A}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}} \langle D, \mathcal{A}(\Phi)\rangle = \frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\,\alpha^{\frac{1}{2}}; \tag{3.12}$$

- the projection of the Schwarzian cocycle, $\mathrm{S} : K(1) \to \mathcal{F}_{3/2}(\mathrm{S}^{1|1})$;

$$\mathrm{S}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}} \langle D, \mathcal{S}(\Phi)\rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{D^3E_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\frac{DE_\Phi D^2E_\Phi}{E_\Phi^2}\right)\alpha^{3/2}. \tag{3.13}$$

□

We will give the proof of this theorem in Section 5.

Remark 3.6. As in the case of the Schwarzian cocycle (3.11), using Proposition 2.5, we can express the affine cocycle $\mathcal{A}$ in terms of its projection A, namely

$$\mathcal{A}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}} L_D \mathrm{A}(\Phi). \tag{3.14}$$

□

Remark 3.7. (1) The projection $\pi : \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1}) \to \mathcal{C}^\infty(S^1)$, see equation (2.2), can be extended naturally to differential forms and quadratic differentials, sending α to dx and β to 0. So we can project the $K(1)$-cocycle $\mathcal{S}(\Phi)$ given by equation (3.11) on $\mathcal{Q}(S^1)$, and as the result depends only on $f = \Pi(\Phi)$, see equation (2.4), we easily recover the classical Schwarzian derivative $\mathrm{S}_0 : \mathrm{Diff}_+(\mathrm{S}^1) \mapsto \mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$, namely

$$\mathrm{S}_0(f) = \left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right) dx^2, \tag{3.15}$$

using the expression (5.9) where $\pi(E_\Phi) = f'$; see, e.g. [4, 8, 25]. The projections of the two other $K(1)$-cocycles, $\mathcal{E}$ and $\mathcal{A}$, lead to the Euclidean and affine cocycle of $\mathrm{Diff}_+(\mathrm{S}^1)$, namely $\mathcal{E}_0(f) = f'$ and $\mathcal{A}_0(f) = \frac{f''}{f'} dx$.

(2) The $K(1)$-cocycle, S, given in equation (3.13) is the super Schwarzian derivative, independently introduced by Friedan [10] and Radul [27]. Recall that $E_\Phi = (D\psi)^2$, see equation (2.13), so we can also write

$$\mathrm{S}(\Phi) = \left(\frac{D^4\psi}{D\psi} - 2\frac{D^2\psi\, D^3\psi}{(D\psi)^2}\right)\alpha^{3/2}. \tag{3.16}$$

This is the form of the super Schwarzian derivative used in superconformal field theories [10]; see also [22]. Gieres and Theisen use it in [15], as well as the affine cocycle A, to construct superconformal covariant operators. □

It is well known that the classical Schwarzian derivative (3.15) can be expressed in terms of the classical affine cocycle $\mathrm{A}_0(f) = (f''/f')dx$ on S^1, viz.,

$$\mathrm{S}_0(f) = dx L_{\partial_x} \mathrm{A}_0(f) - \frac{1}{2}\mathrm{A}_0(f)^2, \tag{3.17}$$

where $f \in \mathrm{Diff}_+(\mathrm{S}^1)$. A formula relating in the super case the expression of S and A can be found in [15]. The next proposition gives another formula for the 1-cocycle S in a form akin to equation (3.17). □

Proposition 3.8. Let $\mathcal{A}$ denote the affine $K(1)$-cocycle (3.10); the following holds true for the super Schwarzian derivative (3.13):

$$\mathrm{S}(\Phi) = \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{2}}\left\langle D, (\alpha^{\frac{1}{2}}L_D)^2\mathcal{A}(\Phi) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(\Phi)^2\right\rangle. \tag{3.18}$$

□

3.3 The determination of $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$

The following corollary of Theorem 3.5 is straightforward; its proof relies on the expression (2.18) of the Euclidean 1-cocycle of $k(1)$, the Lie superalgebra of infinitesimal contactomorphisms of $\mathrm{S}^{1|1}$.

Corollary 3.9. The Lie algebra 1-cocycles associated with the $K(1)$-cocycles $\mathcal{E}$, A, and S, read $c_i : k(1) \to \mathcal{F}_{i/2}(\mathrm{S}^{1|1})$, with

$$c_i(X_f) = (D^{i+2} f)\, \alpha^{i/2}, \tag{3.19}$$

where $i = 0, 1, 3$. □

We recover, in this way, three of the four nontrivial 1-cocycles of $k(1)$ with coefficients in $\mathcal{F}_\lambda$ (see [1] for a classification). The fourth one, $\tilde{c}_0 : k(1) \to \mathcal{F}_0(\mathrm{S}^{1|1})$, defined by $\tilde{c}_0(X_f) = f - \frac{1}{2}\xi\partial_\xi f$, does not integrate as a group 1-cocycle, just like the $\mathrm{Vect}(\mathrm{S}^1)$-cocycle $X_f \mapsto f$. Indeed, suppose that $\tilde{c}_0$ does integrate as a $K(1)$-cocycle, $\tilde{C}_0$. Then $\partial_x \in k(1)$ induces, using an angular coordinate x, the flow $\Phi_t(x, \xi) = (x + t, \xi)$, and as $\tilde{c}_0(\partial_x) = 1$, we have $\tilde{C}_0(\Phi_t) = \frac{1}{2}t$; see e.g. [29]. But this is inconsistent with the periodicity condition $\Phi_t = \Phi_{t+2\pi}$. This is a straightforward generalization to the super-algebraic framework of the observation [24] that the only $\mathrm{Vect}(S^1)$ 1-cocycles that integrate as $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-cocycles are those which are Euclidean-basic; see also [17]. Here, one checks that $\tilde{c}_0$ is not $\mathrm{E}(1|1)$-basic.

As the derivation of Lie group cocycle is an injection from the Lie group cocycle into the Lie algebra cocycle, we obtain the complete classification of the nontrivial 1-cocycles of $K(1)$ with values in $\mathcal{F}_\lambda$.

Theorem 3.10. (1) The cohomology spaces $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$ are given by

$$H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{if } \lambda = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \\ \{0\} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.20}$$

These three cohomology spaces are respectively generated by $\mathcal{E}$, A, and S.

(2) Moreover, the two cohomology spaces

$$H^1(K(1), \Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})) = \mathbb{R}, \tag{3.21}$$

$$H^1(K(1), \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})) = \mathbb{R}, \tag{3.22}$$

are respectively generated by $\mathcal{A}$ and $\mathcal{S}$. □

Proof. We have already proved equation (3.20) in the course of the above discussion. Let us now derive equation (3.21). Suffice it to notice that Proposition 2.5 yields the decomposition $\Omega^1(\mathrm{S}^{1|1}) = \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{F}_1$ into $K(1)$-submodules. The classification (3.20) then shows that the image by the section $\alpha^{\frac{1}{2}} L_D$ of the generator A of $H^1(K(1), \mathcal{F}_{\frac{1}{2}})$ spans $H^1(K(1), \Omega^1(\mathrm{S}^{1|1}))$. The same argument holds for the proof of equation (3.22). ■

Let us end up with the following synthesis of the results obtained in this section.

Remark 3.11. We have thus established a 1-1 correspondence between the set of non-trivial cohomology spaces $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$ (or $H^1(K(1), \mathcal{M})$, with $\mathcal{M} = \Omega^0(\mathrm{S}^{1|1}), \Omega^1(\mathrm{S}^{1|1}), \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$) and the "natural" geometries of the supercircle, namely the Euclidean, affine, and projective geometries of $\mathrm{S}^{1|1}$. These geometries are defined by the kernels of the corresponding 1-cocycles $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{S}$. These groups, in turn, give rise to the invariants $I_{\mathrm{e}}, I_{\mathrm{a}}, I_{\mathrm{p}}$. At last, these invariants lead us back to the generators of the above cohomology spaces, with the help of the Cartan-like formulae (5.4), (5.5), and (3.8). □

4 Super Euclidean, Affine, and Projective Invariants of $\mathrm{S}^{1|1}$

In this section we construct the Euclidean, affine, and projective invariants given by Theorem 3.1. We introduce an extension of the notion of transitivity, allowing us to formulate a theorem giving the sought invariants when applied to each supergroup: $\mathrm{E}_+(1|1)$, $\mathrm{Aff}_+(1|1)$, and $\mathrm{SpO}_+(2|1)$.

Let us first introduce an equivalence relation, on the n-tuples of a product set $E = E_0 \times E_1$. We denote by p_0 and p_1 the two canonical projections. Let $s = (s_1, \ldots, s_n)$ and $t = (t_1, \ldots, t_n)$ be two n-tuples of E, we will say that s and t are $p|q$ equivalent, $s \overset{p|q}{=} t$, where $n = \max(p, q)$, if and only if

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad p_0(s_i) = p_0(t_i) \qquad \text{and} \qquad \forall i \in [\![1, q]\!], \quad p_1(s_i) = p_1(t_i). \tag{4.1}$$

We will use the notation $[t]$ for the class of t for this equivalence relation.

Definition 4.1. Let G be a group acting on a set $E = E_0 \times E_1$ by $(g \mapsto \widehat{g})$. The action of G on E is $p|q$-transitive, $n = \max(p,q)$, if for any n-tuples s and t of distinct points, there exists an element $h \in G$ such that $\widehat{h}(t) \overset{p|q}{=} s$. If h is unique, the action is said to be simply $p|q$-transitive. □

In particular, a $p|q$-transitive action is $\min(p,q)$-transitive. To prove n-transitivity, we usually prove that any n-tuple t can be sent to a given n-tuple m. To prove $p|q$-transitivity we need an extra condition, this is specified by the next proposition.

Proposition 4.2. Let G act on a set $E = E_0 \times E_1$ and choose m, an n-tuple of E. Suppose that for every n-tuple s, there exists $h \in G$ such that $\widehat{h}(s) \overset{p|q}{=} m$, where $n = \max(p,q)$ and $G.[s] \supseteq [m]$. Then the action of G on E is $p|q$-transitive. □

Proof. Let t and s be two n-tuples of E. We look for those $k \in G$ such that $\widehat{k}(t) \overset{p|q}{=} s$. By assumption, there exist $h, g \in G$ such that $\widehat{h}(t) \overset{p|q}{=} m$ and $\widehat{g}(s) \overset{p|q}{=} m$. Then, as $\widehat{h}(t) \in [m]$ and $G.[s] \supseteq [m]$, there exist $s' \overset{p|q}{=} s$ and $g' \in G$ such that $\widehat{g'}(s') = \widehat{h}(t)$. Finally $\widehat{g'}^{-1}(\widehat{h}(t)) \overset{p|q}{=} s$. ■

Theorem 4.3. Let $g \mapsto \widehat{g}$ denote the simply $p|q$-transitive action of a group G on a set $E = E_0 \times E_1$, and let m be an n-tuple, $n = \max(p,q)$, of distinct points of E. We can define the following $(n+1)$-point function of E with values in E, associated to the class of m, namely

$$I_{[m]}(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \widehat{h}(t_{n+1}), \tag{4.2}$$

where $\widehat{h}(t) \overset{p|q}{=} m$, and $t = (t_1, \ldots, t_n)$ is an n-tuple of distinct points of E. This function enjoys the following properties:

(1) $I_{[m]}$ is G-invariant;
(2) if $\Phi \in E!$ preserves $I_{[m]}$, then $\Phi = \widehat{g}$ for some $g \in G$;
(3) let l be an n-tuple of E and $g \in G$, then $\widehat{g}[m] = [l]$ if and only if $I_{[l]} = \widehat{g} \circ I_{[m]}$.

The first two properties assert that $I_{[m]}$ is a characteristic invariant of the action of G. Moreover, if $n = p > q$, we can define n-point invariant functions with values in E_1

$$J_{[m],j}(t) = p_1(\widehat{h}(t_j)) \tag{4.3}$$

for $j \in [\![q+1, p]\!]$. Any $(n+1)$-point G-invariant function I can be factorized through the invariants $I_{[m]}$ and $J_{[m],j}$, i.e. $I = f(J_{[m],q+1}, \ldots, J_{[m],p}, I_{[m]})$ for some function f, depending on the n-tuple m. Similarly, any n-point G-invariant function can be factorized through the invariants $J_{[m],j}$. □

Proof. We first prove that $I_{[m]}(\widehat{g}(t_1), \ldots, \widehat{g}(t_{n+1})) = I_{[m]}(t_1, \ldots, t_{n+1})$ for all $g \in G$, i.e. $I_{[m]}$ is G-invariant. Since $\widehat{h}(t) \overset{p|q}{=} m$, we have $\widehat{h} \circ \widehat{g}^{-1}(\widehat{g}(t)) \overset{p|q}{=} m$. It follows that $I_{[m]}(\widehat{g}(t_1), \ldots, \widehat{g}(t_{n+1})) = \widehat{h} \circ \widehat{g}^{-1}(\widehat{g}(t_{n+1})) = \widehat{h}(t_{n+1})$, hence the result. The proof of the G-invariance of $J_{[m],j}$ is identical.

Secondly, we show that $I_{[m]}$ is a characteristic G-invariant. Let Φ be a bijection of E, such that $\Phi^* I_{[m]} = I_{[m]}$, we have to prove that Φ comes from an element of G. There exist $h, g \in G$, depending on t such that, $\widehat{h}(t) \overset{p|q}{=} m$ and $\widehat{g}(\Phi(t)) \overset{p|q}{=} m$. Since $\Phi^* I_{[m]} = I_{[m]}$, we have $\widehat{g}(\Phi(t_{n+1})) = \widehat{h}(t_{n+1})$ for all $t_{n+1} \in E$, and thus $\Phi = \widehat{k}$, with $k = g^{-1}h$.

Thirdly, suppose that there exists $g \in G$ such that $\widehat{g}[m] = [l]$. Let t be an n-tuple, we have $\widehat{h}(t) \overset{p|q}{=} m$ for a unique $h \in G$, then $\widehat{g}(\widehat{h}(t)) \overset{p|q}{=} l$, and it follows that $I_{[l]}(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \widehat{g} \circ \widehat{h}(t_{n+1})$. Conversely, suppose that $I_{[l]} = \widehat{g} \circ I_{[m]}$ for some $g \in G$ and let $m' \in [m]$. For every n-tuple t, there exists $h \in G$ such that $\widehat{h}(t) \overset{p|q}{=} m$ and then $I_{[l]}(t, t_{n+1}) = \widehat{g} \circ \widehat{h}(t_{n+1})$, for all $t_{n+1} \in E$. As $I_{[l]}(t, t_{n+1}) = \widehat{k}(t_{n+1})$ for the unique $k \in G$ such that $\widehat{k}(t) \overset{p|q}{=} l$, we deduce that $\widehat{g}(\widehat{h}(t)) \overset{p|q}{=} l$. In particular for the n-tuple m', h is the identity, hence $\widehat{g}(m') \overset{p|q}{=} l$. It follows that $\widehat{g}[m] \subseteq [l]$, and as we also have $\widehat{g^{-1}} \circ I_{[l]} = I_{[m]}$, then $\widehat{g^{-1}}[l] \subseteq [m]$, leading to the result $\widehat{g}[m] = [l]$.

Fourthly, let I be an arbitrary $(n+1)$-point invariant function. For any n-tuple t, there exists some $h \in G$ such that $I(t_1, \ldots, t_{n+1}) = I(m'_1, \ldots, m'_n, \widehat{h}(t_{n+1}))$ with $\widehat{h}(t) = m' \overset{p|q}{=} m$. Now $I_{[m]}(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \widehat{h}(t_{n+1})$ and since m' depends only on m and on $J_{[m],j}$, the result follows. ■

Remark 4.4. This theorem generalizes the more common situation of a simply n-transitive action of a group, choosing $p = q$. In this case, $\overset{p|q}{=}$ reduces to the mere equality, $=$, and every $(n+1)$-point invariant can be factorized through the invariant I_m given by Theorem 4.3. In particular, the invariant I_l, for l another n-tuple, can be factorized $I_l = \widehat{g} \circ I_m$, with $g \in G$ such that $\widehat{g}(m) = l$. □

Remark 4.5. In the definition of $p|q$-transitivity and in this theorem, we consider n-tuples of distinct points. The notion of distinct points of $E = E_0 \times E_1$ is well known, but we will strengthen it by assuming distinct even coordinates when dealing with supergroups acting on the supercircle. □

As direct and classical application of our result, the action of $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ by homographies on the circle S^1, viewed as $\mathbb{R}P^1$, is simply 3-transitive, and choosing $m = (\infty, 0, 1)$ as the distinguished triple of points, we obtain the usual cross-ratio: $I(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}$.

4.1 Euclidean invariants

We introduce the subgroups $\mathrm{E}(1|1)$ and $\mathrm{E}_+(1|1)$ of $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ which act on $S^{1|1}$ by translations in an affine coordinate system.

Definition 4.6. Let us define $\mathrm{E}(1|1)$ as the subgroup of $\mathrm{GL}(2|1)$ whose elements are of the form

$$g = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon b & -\epsilon\beta \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

where $(b, \beta) \in \mathbb{R}^{1|1}$, and $\epsilon^2 = 1$. It acts on $\mathbb{R}^{1|1} \subset S^{1|1}$ by translations, according to $\widehat{g}(x, \xi) = (x + b - \beta\xi, \epsilon\beta + \epsilon\xi)$. We will denote by $\mathrm{E}_+(1|1)$ the connected component of the identity characterized by $\epsilon = 1$. □

Remark 4.7. The Euclidean groups can be defined in an alternative manner, in terms of the transformation laws of the 1-forms α and β, and then directly as subgroups of $K(1)$. The group $\mathrm{E}(1|1)$ is the subgroup of those $\Phi \in \mathrm{Diff}(S^{1|1})$ such that $\Phi^*\alpha = \alpha$ and $\Phi^*\beta = \epsilon\beta$, with $\epsilon = \pm 1$; restricting to $\epsilon = 1$, we obtain the subgroup $\mathrm{E}_+(1|1)$. □

Proposition 4.8. The action of $\mathrm{E}_+(1|1)$ on $\mathbb{R}^{1|1} \subset S^{1|1}$ is simply $1|1$-transitive; choosing $\mathsf{e} = (0, 0)$, it defines a characteristic Euclidean invariant consisting of the following two-point couple of superfunctions:

$$I_{\mathsf{e}}(t_1, t_2) = ([t_1, t_2], \{t_1, t_2\}) = (x_2 - x_1 - \xi_2\xi_1, \xi_2 - \xi_1), \tag{4.5}$$

where $t_1 = (x_1, \xi_1)$ and $t_2 = (x_2, \xi_2)$. □

Proof. Following Theorem 4.3, we have to show that for any point t_1 of $S^{1|1}$, there exists a unique $h \in \mathrm{E}_+(1|1)$ such that $\widehat{h}(t_1) = (0, 0)$, and then compute $\widehat{h}(t_2) = ([t_1, t_2], \{t_1, t_2\})$ for another point t_2.

The action of any $h \in \mathrm{E}_+(1|1)$ is given by $\widehat{h}(x,\xi) = (x + b - \beta\xi, \beta + \xi)$. Hence $\widehat{h}(t_1) = (0,0)$ is equivalent to $x_1 + b - \beta\xi_1 = 0$ and $\beta + \xi_1 = 0$, i.e. $\beta = -\xi_1$ and $b = -x_1$. So h is uniquely determined, and $\widehat{h}(t_2) = (x_2 - x_1 - \xi_2\xi_1, \xi_2 - \xi_1)$, as announced. ■

The choice of the point $e = (0,0)$ is immaterial; see Remark 4.4.

Remark 4.9. The even Euclidean invariant $[t_1, t_2]$ is the discretized version of the contact form $\alpha = dx + \xi d\xi$, while the odd Euclidean invariant $\{t_1, t_2\}$ is that of $\beta = d\xi$. This will be specified in Lemma 5.1. □

Corollary 4.10. The even part of I_e is invariant under $\mathrm{E}(1|1)$, and characterizes this subgroup of $K(1)$, namely if $\Phi \in K(1)$ satisfies $\Phi^*[t_1, t_2] = [t_1, t_2]$, then $\Phi = \widehat{h}$ for some $h \in \mathrm{E}(1|1)$. □

Proof. Let $\iota \in K(1)$ be defined by $\iota : (x,\xi) \mapsto (x, -\xi)$. Identifying $\mathrm{E}(1|1)$ with its image in $K(1)$, we have $\mathrm{E}(1|1) = \mathrm{E}_+(1|1) \sqcup \iota(\mathrm{E}_+(1|1))$. Since $[t_1, t_2]$ is invariant under $\mathrm{E}_+(1|1)$ as well as under the action of ι, this is an $\mathrm{E}(1|1)$-invariant.

Let $\Phi = (\varphi, \psi) \in K(1)$ be such that $\Phi^*[t_1, t_2] = [t_1, t_2]$. There exists t_1 such that $\Phi(t_1) = (0,0)$, and $h \in \mathrm{E}_+(1|1)$ such that $\widehat{h}(t_1) = \Phi(t_1)$. Since Φ leaves $[t_1, t_2]$ invariant, we have $\varphi(t_2) = [\Phi(t_1), \Phi(t_2)] = [t_1, t_2] = \widehat{h}_0(t_2)$ in view of equation (4.2); hence $\varphi = \widehat{h}_0$, with $\widehat{h} = (\widehat{h}_0, \widehat{h}_1)$. Using Lemma 2.3, we obtain $\Phi = \widehat{h}$ or $\Phi = \iota(\widehat{h})$, and Φ is then a (super) translation. ■

4.2 Affine invariants

Let us start with the definitions of $\mathrm{Aff}(1|1)$ and $\mathrm{Aff}_+(1|1)$ and with their action on $\mathrm{S}^{1|1}$.

Definition 4.11. The affine supergroup, $\mathrm{Aff}(1|1)$, is the subgroup of $\mathrm{GL}(2|1)$ whose elements are of the form

$$g = \begin{pmatrix} a & ab & -a\beta \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

where $(a, b, \beta) \in \mathbb{R}^{2|1}$, and $a \neq 0$. This supergroup acts on $\mathbb{R}^{1|1} \subset \mathrm{S}^{1|1}$ by translations and dilatations, $\widehat{g}(x,\xi) = (a^2x + a^2b - a^2\beta\xi, a\beta + a\xi)$. We will denote by $\mathrm{Aff}_+(1|1)$ the connected component of the identity, characterized by $a > 0$. □

Remark 4.12. The affine groups can be defined in an alternative manner, in terms of the transformation laws of the 1-forms α and β, and then directly as subgroups of $K(1)$. The group $\mathrm{Aff}(1|1)$ is the subgroup of those $\Phi \in K(1)$ which satisfy $\Phi^*\beta = F_\Phi \beta$, with F_Φ a superfunction; restricting to $\pi(F_\Phi) > 0$, we obtain the subgroup $\mathrm{Aff}_+(1|1)$. □

Acting by contactomorphisms on $S^{1|1}$, $\mathrm{Aff}_+(1|1)$ preserves the orientation of the underlying circle; see Remark 2.2. Moreover, two points on the supercircle t_1 and t_2 define an orientation given by the sign of $x_2 - x_1$ (in the chosen affine coordinate system). Hence, the action of $\mathrm{Aff}_+(1|1)$ cannot be $2|1$-transitive, but for all couples s and t defining the same orientation there exists a unique $h \in \mathrm{Aff}_+(1|1)$ such that $\widehat{h}(t) \overset{2|1}{=} s$. So let us introduce $\widetilde{\mathrm{Aff}_+(1|1)}$ as the group generated by $\mathrm{Aff}_+(1|1)$ and the orientation-reversing transformation $r : (x, \xi) \mapsto (-x, \xi)$.

Lemma 4.13. The action of $\widetilde{\mathrm{Aff}_+(1|1)}$ on $\mathbb{R}^{1|1} \subset S^{1|1}$ is simply $2|1$-transitive. □

Proof. Let $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1, \zeta)$ and t_1, t_2 be two distinct points of $S^{1|1}$, with $x_1 < x_2$, a condition which can always been satisfied, using the transformation r, if necessary. We look for $h \in \mathrm{Aff}_+(1|1)$ such that $\widehat{h}((t_1, t_2)) \overset{2|1}{=} (a_1, a_2)$. We thus have to solve the system: $a^2 x_1 + a^2 b - a^2 \beta\xi_1 = 0$, $a\beta + a\xi_1 = 0$, and $a^2 x_2 + a^2 b - a^2 \beta\xi_2 = 1$. In doing so, we obtain $\beta = -\xi_1$, $b = -x_1$ and $a^2 = [t_1, t_2]^{-1}$; see equation (4.5). This entails that h is uniquely determined and $\widehat{h}(t_3) = (\frac{[t_1,t_3]}{[t_1,t_2]}, \frac{\{t_1,t_3\}}{[t_1,t_2]^{\frac{1}{2}}})$ for any point t_3 of $S^{1|1}$. Here, p_1 is the projection to the odd component, hence $p_1(\widehat{h}(t_2))$ is given by $\frac{\{t_1,t_2\}}{[t_1,t_2]^{\frac{1}{2}}}$. The function $p_1 \circ \widehat{h}$ is thus surjective from $[t]$ onto $\mathbb{R}^{0|1}$ and Proposition 4.2 applies, proving the simply $2|1$-transitivity of the action of $\widetilde{\mathrm{Aff}_+(1|1)}$. ■

Now, the action of $\widetilde{\mathrm{Aff}_+(1|1)}$ on $S^{1|1}$ satisfies all assumptions of Theorem 4.3, and then, restricting ourselves to $x_1 < x_2$, we obtain affine invariants with all properties stated in Theorem 4.3.

Proposition 4.14. Choosing a, the class of a couple $a = ((0, 0), (1, \zeta))$ for the relation $\overset{2|1}{=}$, Theorem 4.3 gives rise to a characteristic affine invariant consisting of the following three-point couple of superfunctions, defined for $x_1 < x_2$ by

$$I_{\mathsf{a}}(t_1, t_2, t_3) = ([t_1, t_2, t_3], \{t_1, t_2, t_3\}) = \left(\frac{[t_1, t_3]}{[t_1, t_2]}, \frac{\{t_1, t_3\}}{[t_1, t_2]^{\frac{1}{2}}} \right). \tag{4.7}$$

We likewise have a two-point odd invariant, defined for $x_1 < x_2$ by

$$J_{\mathsf{a}}(t_1, t_2) = \frac{\{t_1, t_2\}}{[t_1, t_2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.8}$$

which is fundamental in that it generates all other two-point invariants. □

Proof. The action of $\widetilde{\mathrm{Aff}_+(1|1)}$ being simply $2|1$-transitive, we can apply Theorem 4.3. Let $t = (t_1, t_2)$ be a couple; if $x_1 < x_2$, we obtain, resorting to the proof of the last lemma, $I_{\mathsf{a}}(t_1, t_2, t_3) = (\frac{[t_1,t_3]}{[t_1,t_2]}, \frac{\{t_1,t_3\}}{[t_1,t_2]^{\frac{1}{2}}})$ and $J_{\mathsf{a}}(t_1, t_2) = \frac{\{t_1,t_2\}}{[t_1,t_2]^{\frac{1}{2}}}$. For $x_1 < x_2$, I_{a} and J_{a} are invariants (with all properties given in Theorem 4.3) of the subgroup of $\widetilde{\mathrm{Aff}_+(1|1)}$ preserving the condition $x_1 < x_2$, i.e. $\mathrm{Aff}_+(1|1)$. ■

For $x_2 < x_1$, we can easily show that I_{a} and J_{a} are simply obtained by exchanging t_1 and t_2.

Remark 4.15. The invariants I_{a} and J_{a} depend on a; for another class, b, of a couple of points, we have, following the third assertion of Theorem 4.3, $I_{\mathsf{b}} = \widehat{g} \circ I_{\mathsf{a}}$ and $J_{\mathsf{b}} = \widehat{g} \circ J_{\mathsf{a}}$ if and only if $p_1(b_1) = 0$. For $p_1(b_1) \neq 0$, I_{b} and J_{b} depend on I_{a} and J_{a} in a more involved way. □

Remark 4.16. We can rewrite the odd three-point invariant, $p_1(I_{\mathsf{a}})$, as $\{t_1, t_2, t_3\} = [t_1, t_2, t_3]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_1,t_3\}}{[t_1,t_3]^{\frac{1}{2}}}$, showing that it is a function of the odd two-point invariant function, J_{a}, and of the even three-point invariant, $p_0(I_{\mathsf{a}})$. Hence, every affine three-point invariant function is a function of J_{a} and $p_0(I_{\mathsf{a}})$. □

Corollary 4.17. The even part, $p_0(I_{\mathsf{a}})$, of I_{a} is invariant under $\mathrm{Aff}(1|1)$, and characterizes this subgroup of $K(1)$, namely if $\Phi \in K(1)$ satisfies $\Phi^*[t_1, t_2, t_3] = [t_1, t_2, t_3]$, then $\Phi = \widehat{h}$ for some $h \in \mathrm{Aff}(1|1)$. □

The proof is identical to that of Corollary 4.10 in the Euclidean case.

4.3 Projective invariants

Once more, we will follow the previous method and derive the super cross-ratio as the even part of the $\mathrm{SpO}_+(2|1)$-invariant given by Theorem 4.3.

We begin by the introduction of an orientation index, ord, on the oriented circle, defined on triples of distinct points by

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}(x_1, x_2, x_3) &= +1 \text{ if } x_2 \in [x_1, x_3],\\ &= -1 \text{ if } x_2 \in [x_3, x_1].\end{aligned} \tag{4.9}$$

It is uniquely preserved by orientation-preserving diffeomorphisms of the circle and enjoys the property: $\mathrm{ord}(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3)) = \varepsilon(\sigma)\mathrm{ord}(x_1, x_2, x_3)$ for any permutation σ whose parity is denoted by $\varepsilon(\sigma)$; see [3]. This index, ord, can be extended to triples of points of the supercircle by $\mathrm{ord}(t_1, t_2, t_3) = \mathrm{ord}(x_1, x_2, x_3)$.

As $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ acts by contactomorphisms on $\mathrm{S}^{1|1}$, it preserves the orientation of the underlying circle; see Remark 2.2. Hence, the action of $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ cannot be $3|2$-transitive, a triple of distinct points defining an orientation. However, if s and t are two triples defining the same orientation, there exist exactly two elements $h_\pm \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$ such that $\widehat{h_\pm}(t) \overset{3|2}{=} s$. So let us introduce $\widetilde{\mathrm{SpO}_+(2|1)}$, the group generated by $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ already considered, and the orientation-reversing transformation $r : (x, \xi) \mapsto (-x, \xi)$.

Lemma 4.18. (1) The action of $\widetilde{\mathrm{SpO}_+(2|1)}$ on $\mathrm{S}^{1|1}$ is $3|2$-transitive.

(2) Moreover, let p be the class of $p = ((\infty, 0), (0, 0), (1, \zeta))$ for the relation $\overset{3|2}{=}$, then for any triple t, there exist exactly two elements of $\widetilde{\mathrm{SpO}_+(2|1)}$, k_+, k_- such that $\widehat{k_\pm}(t) \overset{3|2}{=} \mathsf{p}$, and $\widehat{k_-} = \iota \circ \widehat{k_+}$, with $\iota : (x, \xi) \mapsto (x, -\xi)$. □

Proof. Assume first that the triple $t = (t_1, t_2, t_3)$ be such that $x_1 < x_2 < x_3$, even if it means to apply r and an element of $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ inducing a cyclic permutation on t. Then Proposition 4.14 insures that there exists a unique $g \in \mathrm{Aff}_+(1|1)$ such that: $\widehat{g}(t_2) = (0, 0)$ and $\widehat{g}(t_3) = (1, \zeta')$, with $\zeta' = \frac{\{t_2, t_3\}}{[t_2, t_3]^{\frac{1}{2}}}$. Since $g \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$, we just have to determine all $h \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$ such that $\widehat{h}(0, 0) = (0, 0)$, $p_0(\widehat{h}(1, \zeta')) = 1$, and $\widehat{h}(\widehat{g}(t_1)) = (\infty, 0)$, implying that $hg = k$ are the sought transformations such that $\widehat{hg}(t) \overset{3|2}{=} \mathsf{p}$.

As h is an element of $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, $\widehat{h}$ is of the form $\widehat{h}(x, \xi) = (\frac{ax+b+\gamma\xi}{cx+d+\delta\xi}, \frac{\alpha x+\beta+e\xi}{cx+d+\delta\xi})$, with the relations (2.24) to (2.27). Since $\widehat{h}(0, 0) = (0, 0)$, we have $b = \beta = 0$ and the relations become $ad = 1$, $e^2 = 1$, $\alpha e = a\delta$, and $\gamma = 0$; now $e = 1$, since we restrict us to special transformations, i.e. of Berezinian 1. The equation $\widehat{h}(\widehat{g}(t_1)) = (\infty, 0)$ gives $ac\frac{[t_2, t_1]}{[t_2, t_3]} + 1 + \alpha\frac{\{t_2, t_1\}}{[t_2, t_3]^{\frac{1}{2}}} = 0$ and $\alpha\frac{[t_2, t_1]}{[t_2, t_3]} + \frac{\{t_2, t_1\}}{[t_2, t_3]^{\frac{1}{2}}} = 0$, where we have used the fact that $\widehat{g}(t_1) = I_{\mathrm{a}}(t_2, t_3, t_1)$ as given by equation (4.7). Hence we have

$$\alpha = -\frac{\{t_1, t_2\}}{[t_2, t_3]^{\frac{1}{2}}}\frac{[t_2, t_3]}{[t_1, t_2]} \qquad \text{and} \qquad ac = \frac{[t_2, t_3]}{[t_1, t_2]}. \tag{4.10}$$

There is one extra equation to satisfy, namely $p_0(\widehat{h}(1,\zeta'))=1$; it yields explicitly $a^2=ac+1+\alpha\zeta'$, giving $a^2=\frac{[t_2,t_3]}{[t_1,t_2]}+1-\frac{\{t_1,t_2\}\{t_2,t_3\}}{[t_1,t_2]}$, since $\zeta'=J_{\mathsf{a}}(t_2,t_3)$, see equation (4.3), as given by equation (4.8). We then get, with the help of the identity $[t_2,t_3]+[t_1,t_2]-\{t_1,t_2\}\{t_2,t_3\}=[t_1,t_3]$,

$$a^2=\frac{[t_1,t_3]}{[t_1,t_2]}, \tag{4.11}$$

so a is determined up to an overall sign. We have proved that h is therefore given by

$$\widehat{h}(x,\xi)=\left(\frac{a^2x}{acx+1+\alpha\xi},\frac{a(\alpha x+\xi)}{acx+1+\alpha\xi}\right), \tag{4.12}$$

the sign of $a\neq 0$ remaining unspecified. This proves the existence and uniqueness of $h_\pm$, as stated above. Moreover, $J_{\mathsf{p}}(t_1,t_2,t_3)=p_1(\widehat{h}(t_3))$ is a surjective function from $[t]$ to $\mathbb{R}^{0|1}$; see equation (4.15). Using Proposition 4.2, we conclude that the action of $\widetilde{\mathrm{SpO}_+(2|1)}$ is 3|2-transitive. ■

Now, even if the action of $\widetilde{\mathrm{SpO}_+(2|1)}$ is not simply 3|2-transitive, we can construct following Theorem 4.3 invariants in the same way as before, and restricting consideration to $\mathrm{ord}(t_1,t_2,t_3)=1$, we will end up with projective invariants.

Proposition 4.19. Let $p=((\infty,0),(0,0),(1,\zeta))$ be a triple of points of $\mathrm{S}^{1|1}$, and denote by p the class of p for the relation $\overset{3|2}{=}$. Theorem 4.3 then yields the projective invariant $I_{\mathsf{p}}(t_1,t_2,t_3,t_4)=([t_1,t_2,t_3,t_4],\pm\{t_1,t_2,t_3,t_4\})$, given, if $\mathrm{ord}(t_1,t_2,t_3)=1$, by

$$[t_1,t_2,t_3,t_4]=\frac{[t_1,t_3][t_2,t_4]}{[t_2,t_3][t_1,t_4]}, \tag{4.13}$$

$$\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=[t_1,t_2,t_3,t_4]^{\frac{1}{2}}\,\frac{\{t_2,t_4\}[t_1,t_2]-\{t_1,t_2\}[t_2,t_4]}{([t_1,t_2][t_2,t_4][t_1,t_4])^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.14}$$

which characterizes the group $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ within the diffeomorphisms of $\mathrm{S}^{1|1}$.

We also have an odd projective invariant, namely, if $\mathrm{ord}(t_1,t_2,t_3)=1$,

$$J_{\mathsf{p}}(t_1,t_2,t_3)=\pm\frac{\{t_2,t_3\}[t_1,t_2]-\{t_1,t_2\}[t_2,t_3]}{([t_1,t_2][t_2,t_3][t_1,t_3])^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.15}$$

which is fundamental in that it generates all other three-point invariants. □

Proof. Assume that $\mathrm{ord}(t_1,t_2,t_3)=1$. Using Lemma 4.18, we know that there exist exactly two elements $k_+,k_-\in\mathrm{SpO}_+(2|1)$ such that $\widehat{k_\pm}(t)\stackrel{3|2}{=}p$. We set $I_{\mathrm{p}}(t_1,\ldots,t_4)=\widehat{k_\pm}(t_4)$ and $J_{\mathrm{p}}(t_1,t_2,t_3)=p_1(\widehat{k_\pm}(t_3))$, as suggested by Theorem 4.3. Despite the nonuniqueness of k, all conclusions of Theorem 4.3 apply just as well, and the proofs are identical, except for I_{p} being a characteristic invariant. The proof of Theorem 4.3 shows that any bijection, Φ, of the supercircle such that $\Phi^*I_{\mathrm{p}}=I_{\mathrm{p}}$, satisfies $\Phi(t_4)=\widehat{k_\pm}(t_4)$ for all t_4. We have to impose that Φ be a diffeomorphism to obtain $\Phi=\widehat{k_+}$ or $\Phi=\widehat{k_-}$.

It then remains to compute $\widehat{k_\pm}(t_4)$; using the proof of Lemma 4.18 we will easily calculate $\widehat{k_\pm}=\widehat{h_\pm}\circ\widehat{g}$, for the specific case $x_1<x_2<x_3$. Starting with the even part of $\widehat{k_\pm}(t_4)$, we obtain, see equation (4.12),

$$
\begin{aligned}
[t_1,t_2,t_3,t_4]&=\frac{a^2[t_2,t_3,t_4]}{ac[t_2,t_3,t_4]+1+\alpha\{t_2,t_3,t_4\}}\\
&=\frac{[t_1,t_3][t_2,t_4]}{[t_1,t_2][t_2,t_3]\left(\frac{[t_2,t_4]}{[t_1,t_2]}+1-\frac{\{t_1,t_2\}\{t_2,t_4\}}{[t_1,t_2]}\right)},
\end{aligned}
$$

where we have used equations (4.10) and (4.11). With the help of the identity $[t_2,t_4]+[t_1,t_2]-\{t_1,t_2\}\{t_2,t_4\}=[t_1,t_4]$, we find the announced result, viz., equation (4.13).

We then compute the odd part of $\widehat{h_\pm}(\widehat{g}(t_4))$, which is determined up to global sign governed by the sign of a (see proof of Lemma 4.18). For $a>0$, we find using equation (4.12) that

$$
\begin{aligned}
\{t_1,t_2,t_3,t_4\}&=\frac{a(\alpha[t_2,t_3,t_4]+\{t_2,t_3,t_4\})}{ac[t_2,t_3,t_4]+1+\alpha\{t_2,t_3,t_4\}}\\
&=\frac{([t_1,t_2][t_1,t_3])^{\frac12}\left(-\frac{\{t_1,t_2\}}{[t_2,t_3]^{\frac12}}\frac{[t_2,t_4]}{[t_1,t_2]}+\frac{\{t_2,t_4\}}{[t_2,t_3]^{\frac12}}\right)}{[t_1,t_4]}\\
&=[t_1,t_2,t_3,t_4]^{\frac12}\left([t_1,t_2,t_4]^{-\frac12}\frac{\{t_2,t_4\}}{[t_2,t_4]^{\frac12}}-[t_4,t_2,t_1]^{-\frac12}\frac{\{t_1,t_2\}}{[t_1,t_2]^{\frac12}}\right),
\end{aligned}
$$

with the help of the equalities (4.10) and (4.11). For $x_1<x_2<x_3$, we can write

$$
\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=[t_1,t_2,t_3,t_4]^{\frac12}\frac{\{t_2,t_4\}[t_1,t_2]-\{t_1,t_2\}[t_2,t_4]}{([t_1,t_2][t_2,t_4][t_1,t_4])^{\frac12}},\tag{4.16}
$$

which is the announced result, viz., equation (4.14).

For the more general case $\mathrm{ord}(t_1,t_2,t_3)=1$, we still have to compute $\widehat{k_\pm}(t_4)$ for $x_3<x_1<x_2$ and $x_2<x_3<x_1$. Let us introduce the homography $\widehat{c}(x,\xi)=(\frac{x-1+\zeta\xi}{x},\frac{\zeta x-\xi}{x})$, which cyclically permutes $(0,0)$, $(\infty,0)$, and $(1,\zeta)$. Start with the case $x_3<x_1<x_2$; we can

assume that $x_3 < 0 < x_1 < x_2$, even if it means to apply a translation, and then $\widehat{c}(x_1) < \widehat{c}(x_2) < \widehat{c}(x_3)$. As I_{p} is invariant under the action of $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, we have $I_{\mathrm{p}} = \widehat{c}^* I_{\mathrm{p}}$, and using the above results we deduce that $\widehat{k_\pm}(t_4) = \widehat{c}^*(\frac{[t_1,t_3][t_2,t_4]}{[t_2,t_3][t_1,t_4]}, [t_1, t_2, t_3, t_4]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_2,t_4\}[t_1,t_2]-\{t_1,t_2\}[t_2,t_4]}{([t_1,t_2][t_2,t_4][t_1,t_4])^{\frac{1}{2}}})$. The Euclidean invariants are transformed by $\widehat{c}$ as follows: $\widehat{c}^*[t_i, t_j] = \frac{[t_i,t_j]}{x_i x_j}$ and $\widehat{c}^*\{t_i, t_j\} = \frac{t_i}{x_i} - \frac{t_j}{x_j}$, we then have $\widehat{k_\pm}(t_4) = (\frac{[t_1,t_3][t_2,t_4]}{[t_2,t_3][t_1,t_4]}, [t_1, t_2, t_3, t_4]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_2,t_4\}[t_1,t_2]-\{t_1,t_2\}[t_2,t_4]}{([t_1,t_2][t_2,t_4][t_1,t_4])^{\frac{1}{2}}})$. The case $x_2 < x_3 < x_1$ is similar, except for the fact that we have to apply $\widehat{c^2}$ instead of $\widehat{c}$. ■

For $\mathrm{ord}(t_1, t_2, t_3) = -1$, the projective invariants I_{p} and J_{p} are simply given by the exchange of t_1 and t_2 in formulae (4.13), (4.14), and (4.15).

Corollary 4.20. The cross-ratio (4.13) is invariant under $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, and characterizes this subgroup of $K(1)$, namely if $\Phi \in K(1)$ satisfies $\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4] = [t_1, t_2, t_3, t_4]$, then $\Phi = \widehat{h}$ for some $h \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$. □

The proof is the same as in the Euclidean case, except for the fact that $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ contains now the transformation $\iota : (x, \xi) \mapsto (x, -\xi)$.

Remark 4.21. Projective groups and projective invariants of the circle and of the supercircle share various properties. Like $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ in the super case, the action of $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ preserves the orientation of the circle. The action of $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ on the circle is thus not simply 3-transitive, in contradistinction to that of $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. The cross-ratio can also be defined following Theorem 4.3, leading to the classical expression $[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}$, which is invariant under $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ only. The $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-invariant is given either by this last expression or by the same expression where x_1 and x_2 have been exchanged, depending on $\mathrm{ord}(x_1, x_2, x_3)$. □

Remark 4.22. Again, the odd four-point invariant $p_1(I_{\mathrm{p}})$ is a function of the odd three-point invariant J_{p} and of the even four-point invariant $p_0(I_{\mathrm{p}})$. So every four-point invariant is a function of these two invariants. □

5 The Schwarzian Derivative from the Cartan Formula

This section provides the proof of Theorem 3.5. We will begin by two preliminary lemmas and then give the proof for the Euclidean and affine cases, and finally, for the projective one.

5.1 Preparation

Let us first recall the formula for the Taylor expansion of a smooth superfunction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$ as given in [6, 20], namely

$$\begin{aligned} f(t_2) - f(t_1) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left((x_2 - x_1)^i \partial_x^i f(t_1) + i(\xi_2 - \xi_1)(x_2 - x_1)^{i-1} \partial_x^{i-1} \partial_\xi f(t_1) \right) \\ &\quad + O((x_2 - x_1)^{n+1}, (\xi_2 - \xi_1)(x_2 - x_1)^n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left([t_1, t_2]^i \partial_x^i f(t_1) + i\{t_1, t_2\}[t_1, t_2]^{i-1} \partial_x^{i-1} D f(t_1) \right) \\ &\quad + O((x_2 - x_1)^{n+1}, (\xi_2 - \xi_1)(x_2 - x_1)^n). \end{aligned} \tag{5.1}$$

The following lemma linking discrete variations and forms will enable us to write Taylor expansions in terms of the differential forms α and β. We will skip its straightforward proof.

Lemma 5.1. Let $X \in \mathrm{Vect}(\mathrm{S}^{1|1})$, and ϕ_ε the associated flow. Putting $t_2 = \phi_\varepsilon(t_1)$, we have

$$[t_1, t_2] = \langle \varepsilon X, \alpha \rangle (t_1) + O(\varepsilon^2), \quad \text{and} \quad \{t_1, t_2\} = \langle \varepsilon X, \beta \rangle (t_1) + O(\varepsilon^2). \tag{5.2}$$

□

The next result is of central importance in the subsequent proof of Theorem 3.5.

Lemma 5.2. Let $\Phi = (\varphi, \psi) \in K(1)$ be a contactomorphism of $\mathrm{S}^{1|1}$, and let $t_2 = \phi_\varepsilon(t_1)$, where ϕ_ε is the flow of a vector field X, then

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^*[t_1, t_2]}{E_\Phi(t_1)[t_1, t_2]} &= 1 + \frac{1}{2} \left([t_1, t_2] \frac{E'_\Phi}{E_\Phi}(t_1) + \{t_1, t_2\} \frac{D E_\Phi}{E_\Phi}(t_1) \right) \\ &\quad + \left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2 \frac{A}{6 E_\Phi} + \alpha\beta \frac{B}{2 E_\Phi} \right\rangle (t_1) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{5.3}$$

where $A = \varphi''' + \psi\psi'''$ and $B = D\varphi'' - \psi D\psi''$, α^2 and $\alpha\beta$ being as in equation (2.20). □

Proof. We have $\Phi^*[t_1,t_2] = [\Phi(t_1),\Phi(t_2)] = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) - (\psi(t_2) - \psi(t_1))\psi(t_1)$, by virtue of equation (4.5). Using Taylor's formula (5.1), we obtain

$$\begin{aligned}\Phi^*[t_1,t_2] = {}& \{t_1,t_2\}(D\varphi - \psi D\psi)(t_1) + [t_1,t_2](\varphi' + \psi\psi')(t_1)\\ &+ [t_1,t_2]\left(\tfrac{1}{2}[t_1,t_2](\varphi'' + \psi\psi'')(t_1) + \{t_1,t_2\}(D\varphi' - \psi D\psi')(t_1)\right)\\ &+ [t_1,t_2]\left(\tfrac{1}{6}[t_1,t_2]^2(\varphi''' + \psi\psi''')(t_1) + \tfrac{1}{2}\{t_1,t_2\}[t_1,t_2](D\varphi'' - \psi D\psi'')(t_1)\right) + O(\varepsilon^4).\end{aligned}$$

Then, as $\Phi \in K(1)$, Proposition 2.1 yields $D\varphi - \psi D\psi = 0$ and $\varphi' + \psi\psi' = E_\Phi$. This entails that $\varphi'' + \psi\psi'' = E'_\Phi$ and $D\varphi' - \psi D\psi' = \frac{1}{2}DE_\Phi$. Lemma 5.1 then leads to the result. ∎

At first order in ε, we simply obtain: $\frac{\Phi^*[t_1,t_2]}{[t_1,t_2]} = \left[E_\Phi + \frac{1}{2}\langle \varepsilon X, dE_\Phi\rangle\right](t_1) + O(\varepsilon^2)$.

5.2 Proof of Theorem 3.5

5.2.1 *Euclidean and affine $K(1)$-cocycles, $\mathcal{E}, \mathcal{A}$*

The Cartan formula (3.8) yields a privileged means to define the Schwarzian derivative via a Taylor expansion of the cross-ratio. Much in the same way, we will construct 1-cocycles via the Euclidean and affine even invariants. Thanks to the last lemma, we have

$$\frac{\Phi^*[t_1,t_2]}{[t_1,t_2]} = E_\Phi(t_1) + O(\varepsilon). \tag{5.4}$$

Hence $\mathcal{E} : \Phi \mapsto \log(E_\Phi)$ is a 1-cocycle of $K(1)$, with values in $\mathcal{F}_0(S^{1|1})$; this justifies equation (3.9). Note that $\log(E_\Phi)$ is well defined, since the reduced function $\pi(E_\Phi) = \pi(D\psi)^2$, see equation (2.2), is positive.

For the affine even invariant (4.7), we have, putting $t_2 = \phi_\varepsilon(t_1)$ and $t_3 = \phi_{2\varepsilon}(t_1)$,

$$\begin{aligned}\frac{\Phi^*[t_1,t_2,t_3]}{[t_1,t_2,t_3]} - 1 &= \frac{1 + \frac{1}{2}\langle 2\varepsilon X, d(\log E_\Phi)\rangle(t_1) + O(\varepsilon^2)}{1 + \frac{1}{2}\langle \varepsilon X, d(\log E_\Phi)\rangle(t_1) + O(\varepsilon^2)} - 1\\ &= \frac{1}{2}\langle \varepsilon X, d(\log E_\Phi)\rangle(t_1) + O(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{5.5}$$

This implies that $\mathcal{A} : \Phi \mapsto d(\log E_\Phi)$ is a 1-cocycle of the group $K(1)$ of contactomorphisms, with values in the space, $\Omega^1(S^{1|1})$, of 1-forms on $S^{1|1}$. Using the projection on half-densities $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(S^{1|1})$ given by $\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D,\cdot\rangle$, see Proposition 2.5, we still obtain an affine

1-cocycle: $\mathrm{A} : \Phi \mapsto \alpha^{\frac{1}{2}} \langle D, d(\log E_\Phi)\rangle = \frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\alpha^{\frac{1}{2}}$. The justification of equations (3.10) and (3.12) is complete.

5.2.2 *The Schwarzian derivative, $\mathcal{S}$*

We will now resort, *verbatim*, to the Cartan formula (3.8) in order to derive the expression of the Schwarzian derivative (3.11) of a diffeomorphism $\Phi \in K(1)$. This formula involves the cross-ratio $[t_1, t_2, t_3, t_4]$ of four close by points; we will hence posit $t_2 = \phi_\varepsilon(t_1)$, $t_3 = \phi_{2\varepsilon}(t_1)$, and $t_4 = \phi_{3\varepsilon}(t_1)$, where $\phi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + O(\varepsilon^2)$ is the flow of a vector field X of $\mathrm{S}^{1|1}$.

Let us then expand in powers of ε the following expression:

$$\frac{\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4]}{[t_1, t_2, t_3, t_4]} - 1 = \frac{\frac{\Phi^*[t_1,t_3]}{E_\Phi(t_1)[t_1,t_3]}\frac{\Phi^*[t_2,t_4]}{E_\Phi(t_2)[t_2,t_4]} - \frac{\Phi^*[t_2,t_3]}{E_\Phi(t_2)[t_2,t_3]}\frac{\Phi^*[t_1,t_4]}{E_\Phi(t_1)[t_1,t_4]}}{1 + O(\varepsilon)}. \tag{5.6}$$

We note that the terms $\frac{\Phi^*[t_1,t_3]}{E_\Phi(t_1)[t_1,t_3]}$ and $\frac{\Phi^*[t_1,t_4]}{E_\Phi(t_1)[t_1,t_4]}$, with base point t_1, are explicitly given by Lemma 5.2. The remaining terms with base point t_2 will be computed separately, using again equation (5.3) and the Taylor formula (5.1), viz.,

$$f(t_2) = f(t_1) + [t_1, t_2] f'(t_1) + \{t_1, t_2\} Df(t_1) + O(\varepsilon^2), \tag{5.7}$$

for a superfunction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$.

We have

$$\begin{aligned}\frac{\Phi^*[t_2, t_3]}{E_\Phi(t_2)[t_2, t_3]} &= 1 + \frac{1}{2}\left([t_2, t_3]\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}(t_1) + \{t_2, t_3\}\frac{DE_\Phi}{E_\Phi}(t_1)\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}[t_1, t_2]\left([t_2, t_3]\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)'(t_1) + \{t_2, t_3\}\left(\frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\right)'(t_1)\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}\{t_1, t_2\}\left([t_2, t_3]D\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)(t_1) + \{t_2, t_3\}D\left(\frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\right)(t_1)\right)\\ &\quad + \left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2\frac{A}{6E_\Phi} + \alpha\beta\frac{B}{2E_\Phi}\right\rangle(t_1) + O(\varepsilon^3),\end{aligned}$$

where the terms A and B are defined in Lemma 5.2. The other term $\frac{\Phi^*[t_2,t_4]}{E_\Phi(t_2)[t_2,t_4]}$ is likewise obtained by replacing in the latter expression t_3 by t_4, and εX by $2\varepsilon X$. From Lemma 5.1 and Taylor's formula (5.7), we get $[t_2, t_3] = \langle \varepsilon X, \alpha\rangle(t_1) + O(\varepsilon^2)$ and $\{t_2, t_3\} = \langle \varepsilon X, \beta\rangle(t_1) + O(\varepsilon^2)$. In particular, $\{t_2, t_3\}\{t_1, t_2\}$ is thus of third order in ε, since $\langle \varepsilon X, \beta\rangle$ is an odd superfunction.

We finally have

$$\frac{\Phi^*[t_2,t_3]}{E_\Phi(t_2)[t_2,t_3]} = 1 + \frac{1}{2}\left([t_2,t_3]\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}(t_1) + \{t_2,t_3\}\frac{DE_\Phi}{E_\Phi}(t_1)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)' + 2\alpha\beta\left(\frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\right)'\right\rangle(t_1)$$
$$+ \left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2\frac{A}{6E_\Phi} + \alpha\beta\frac{B}{2E_\Phi}\right\rangle(t_1) + O(\varepsilon^3).$$

This formula and Lemma 5.2 help us find the contribution of the first-order terms of each product in the numerator of equation (5.6); this contribution is found as $([t_1,t_3]+[t_2,t_4]-[t_2,\ t_3]-[t_1,\ t_4])\frac{E'_\Phi}{2E_\Phi}(t_1) + (\{t_1,t_3\}+\{t_2,\ t_4\}-\{t_2,t_3\}-\{t_1,\ t_4\})\frac{DE_\Phi}{2E_\Phi}(t_1) = (\xi_1-\xi_2)(\xi_3-\xi_4)\frac{E'_\Phi}{2E_\Phi}(t_1)$, which is of third order in ε, since $\xi_3-\xi_4 = \xi_1-\xi_2+O(\varepsilon^2)$. The right-hand side of equation (5.6) is of second order in ε and we now compute it. We find that

$$\frac{\Phi^*[t_1,t_2,t_3,t_4]}{[t_1,t_2,t_3,t_4]} - 1 = \frac{1}{4}\left\langle \varepsilon X, \alpha\frac{E'_\Phi}{E_\Phi} + \beta\frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\right\rangle^2(t_1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)' + 2\alpha\beta\left(\frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\right)'\right\rangle(t_1)$$
$$- 2\left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2\frac{A}{6E_\Phi} + \alpha\beta\frac{B}{2E_\Phi}\right\rangle(t_1) + O(\varepsilon^3).$$

Collecting the terms involving α^2 and $\alpha\beta$, we put the latter expression in a nicer form, namely

$$\frac{\Phi^*[t_1,t_2,t_3,t_4]}{[t_1,t_2,t_3,t_4]} - 1 = \left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2\left(\frac{E''_\Phi}{2E_\Phi} - \frac{A}{3E_\Phi} - \frac{1}{4}\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)^2\right)\right\rangle(t_1)$$
$$+ \left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha\beta\left(\frac{DE'_\Phi}{E_\Phi} - \frac{B}{E_\Phi} - \frac{E'_\Phi DE_\Phi}{2E_\Phi^2}\right)\right\rangle(t_1). \tag{5.8}$$

Since $D\varphi = \psi D\psi$ and $E_\Phi = (D\psi)^2$, see Proposition 2.1, we calculate the terms A and B whose expression is given in Lemma 5.2; we find $A = \varphi''' + \psi\psi''' = (E_\Phi - \psi\psi')'' + \psi\psi''' = E''_\Phi - \psi'\psi''$, together with $B = D\varphi'' - \psi D\psi'' = \psi'' D\psi + 2\psi' D\psi' = \frac{1}{2}D^3E_\Phi + \frac{1}{4}\frac{E'_\Phi DE_\Phi}{E_\Phi}$.

Plugging these quantities into equation (5.8), we obtain

$$\frac{\Phi^*[t_1,t_2,t_3,t_4]}{[t_1,t_2,t_3,t_4]} - 1 = \left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2 \left(\frac{1}{6}\frac{E''_\Phi}{E_\Phi} - \frac{1}{4}\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{\psi'\psi''}{E_\Phi}\right)\right\rangle (t_1) \\ + \left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha\beta \left(\frac{1}{2}\frac{DE'_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{4}\frac{E'_\Phi DE_\Phi}{E_\Phi^2}\right)\right\rangle (t_1). \tag{5.9}$$

Upon defining

$$\widetilde{S}(\Phi) = \frac{DE'_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\frac{E'_\Phi DE_\Phi}{E_\Phi^2}, \tag{5.10}$$

we find $D\widetilde{S}(\Phi) = \frac{E''_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi})^2 - \frac{1}{2}\frac{DE'_\Phi DE_\Phi}{E_\Phi^2}$. We also have $DE'_\Phi DE_\Phi = -4\psi'\psi'' E_\Phi$. Inserting the latter result into equation (5.9) and using the Cartan formula (3.8) to define the Schwarzian derivative, $\mathcal{S}(\Phi)$, of the contactomorphism Φ, we obtain

$$\mathcal{S}(\Phi) = \frac{1}{6}\alpha^2 D\widetilde{S}(\Phi) + \frac{1}{2}\alpha\beta\widetilde{S}(\Phi). \tag{5.11}$$

Thus, $\mathcal{S}$ defines a 1-cocycle of $K(1)$ with values in the space, $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$, of quadratic differentials; cf. Section 2.2.2. Using the projection onto the $\frac{3}{2}$-densities, $\mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(\mathrm{S}^{1|1})$, given by $\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \cdot\rangle$, see Proposition 2.5, we still obtain a projective 1-cocycle of $K(1)$, viz.,

$$\mathrm{S}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \mathcal{S}(\Phi)\rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{DE'_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\frac{E'_\Phi DE_\Phi}{E_\Phi^2}\right)\alpha^{3/2}. \tag{5.12}$$

This ends the proof of equation (3.13).

Equation (3.11) can now be deduced from equations (5.11) and (5.12). Indeed, using

$$L_D\alpha = 2\beta, \tag{5.13}$$

we find $\alpha^{\frac{1}{2}} L_D \mathrm{S}(\Phi) = \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{2}} L_D(\widetilde{S}(\Phi)\alpha^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}\mathcal{S}(\Phi)$.

5.2.3 *The kernels of the $K(1)$-cocycles $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{S}$*

The subgroup of those $\Phi \in K(1)$ such that $\mathcal{E}(\Phi) = 0$ is characterized by the equation $E_\Phi = 1$; see equation (3.9). Writing $\Phi = (\varphi, \psi)$ and using equation (2.13), we find $D\psi = \epsilon$, with $\epsilon^2 = 1$. This entails that $\psi(x,\xi) = \epsilon(\beta+\xi)$, with $\beta \in \mathbb{R}^{0|1}$. The constraint (2.12) then leads to $\varphi(x,\xi) = x + b - \beta\xi$, with $b \in \mathbb{R}$. This proves that $\ker(\mathcal{E}) = \mathrm{E}(1|1)$.

The kernel of the 1-cocycle $\mathcal{A}$, given by equation (3.10), is determined by the equation $E_\Phi = a^2$, with $a \in \mathbb{R}^*$. The kernel of A is given by the same equation, hence is equal to the kernel of $\mathcal{A}$. The same computation as before clearly leads to $\Phi(x,\xi) = (a^2x + a^2b - a^2\beta\xi, a\beta + a\xi)$. Hence $\ker(\mathrm{A}) = \ker(\mathcal{A}) = \mathrm{Aff}(1|1)$.

The kernels of the 1-cocycles $\mathcal{S}$ and S, given respectively by equations (3.11) and (3.13), clearly coincide. Suffice it to determine ker(S). Let us consider $\Phi \in K(1)$, then its Schwarzian derivative (3.13) reads alternatively

$$\mathrm{S}(\Phi) = -\frac{1}{2} E_\Phi^{\frac{1}{2}} D^3\big(E_\Phi^{-\frac{1}{2}}\big)\alpha^{3/2}. \tag{5.14}$$

Hence $\mathrm{S}(\Phi) = 0$ if and only if $\partial_x D(E_\Phi^{-\frac{1}{2}}) = 0$. As $\partial_x D\chi_0 = 0$ implies, for χ_0 an even superfunction, $\chi_0 = c'x + d' + \delta'\xi$, where $(c', d', \delta') \in \mathbb{R}^{2|1}$, we obtain $E_\Phi = (c'x + d' + \delta'\xi)^{-2}$. Consider now $h \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$, whose action is given by equation (2.28), then $E_{\widehat{h}} = (cx + d + \delta\xi)^{-2}$. We thus have $E_\Phi = E_{\widehat{h}}$ for some $h \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$, so that $\Phi = \widehat{h} \circ \widehat{g}$ with $g \in \mathrm{E}(1|1)$ in view of the above result; this implies that $\Phi \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$. The conclusion, $\ker(\mathrm{S}) = \mathrm{SpO}_+(2|1)$, easily follows.

The proof of Theorem 3.5 is complete.

5.3 **Proof of Proposition 3.8**

With the help of equation (2.10), the affine cocycle $\mathcal{A}$, given by equation (3.10), can be recast into the form $\mathcal{A}(\Phi) = E_\Phi^{-1} dE_\Phi = \alpha E_\Phi^{-1} E'_\Phi + \beta E_\Phi^{-1} DE_\Phi$. Using equation (5.13), we obtain $(\alpha^{\frac{1}{2}} L_D)^2 = \alpha L_{D^2} + \beta L_D$.

Straightforward calculation yields the expressions of $L_D\mathcal{A}$, $L_{D^2}\mathcal{A}$, and $\mathcal{A}^2$, so that

$$(\alpha^{\frac{1}{2}} L_D)^2 \mathcal{A}(\Phi) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(\Phi)^2 = \alpha^2\left(D\widetilde{S}(\Phi) - \frac{1}{2}\frac{DE_\Phi DE'_\Phi}{E_\Phi^2}\right) + 2\alpha\beta\widetilde{S}(\Phi). \tag{5.15}$$

This formula leads directly to equation (3.18), using $\langle D, \alpha^2\rangle = 0$ and $\langle D, \alpha\beta\rangle = \frac{1}{2}\alpha$, together with the expressions (5.10) and (5.12) for $\widetilde{S}$ and S.

6 Super Euclidean, Affine, and Projective Invariants, and $K(N)$-Cocycles for $\mathrm{S}^{1|N}$

The aim of this section is to extend to $\mathrm{S}^{1|N}$ the previous constructions, namely those of the Euclidean, affine, and projective invariants, of the Euclidean and affine cocycles and of the Schwarzian derivative for $N = 2$. For $N \geq 3$, the cross-ratio is badly transformed by contactomorphisms, which prevents the construction of a Schwarzian derivative along the same lines as before (see Remark 6.6).

Let us define the notation used throughout this section. Except if otherwise stated, all indices i, j of odd objects will run from 1 to N, and Einstein's summation convention will be freely used. The space of superfunctions $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|N})$ defining $\mathrm{S}^{1|N}$ is the superalgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^1)[\xi^1, \ldots, \xi^N]$, where the ξ^i are odd indeterminates. It is topologically generated as an algebra by the coordinates (x, ξ) with $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^N)$. The diffeomorphisms retain the form $\Phi = (\varphi, \psi)$, with $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^N)$ and $\varphi, \psi^j \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|N})$, such that (φ, ψ) is a new coordinate system. Let $F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|N})^N$, we denote their pairing with values in $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|N})$ by

$$F \cdot G = F_i G^i, \tag{6.1}$$

where F^i and G^i are the ith components of F and G, and $F_i = \delta_{ij} F^j$ (with the choice of a Euclidean signature). The $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|N})$-module $\Omega^1(\mathrm{S}^{1|N})$ is generated by the 1-forms

$$\alpha = dx + \xi_i d\xi^i = dx + \xi \cdot d\xi \qquad \text{and} \qquad \beta^i = d\xi^i, \tag{6.2}$$

with dual vectors ∂_x and $D_i = \partial_{\xi_i} + \xi_i \partial_x$. For $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|N})$, we therefore have

$$df = \alpha f' + \beta^i D_i f; \tag{6.3}$$

see equation (2.10). We furthermore denote by $K(N)$ the group of contactomorphisms, Φ, characterized by $\Phi^*\alpha = E_\Phi \alpha$ for some superfunction E_Φ. Let $\Phi = (\varphi, \psi) \in K(N)$, then $\Phi^*\alpha = d\varphi + \psi \cdot d\psi = \alpha(\varphi' + \psi \cdot \psi') + \beta^i(D_i\varphi - \psi \cdot D_i\psi)$. It follows that $\Phi \in K(N)$ if and only if

$$D_i\varphi - \psi \cdot D_i\psi = 0 \tag{6.4}$$

for all $i = 1, \ldots, N$. The multiplier of Φ is then given by $E_\Phi = \varphi' + \psi \cdot \psi'$, i.e. by

$$E_\Phi = \frac{\Phi^*\alpha}{\alpha} = (D_i\psi)^2 \tag{6.5}$$

for any $i = 1, \ldots, N$. The expression $(D_i\psi)^2$ stands for $D_i\psi \cdot D_i\psi$. This has been first developed in the framework of super Riemann surfaces by Cohn [5]; we will nevertheless refer to work of Radul [27], whose geometric approach, in terms of contact structure, is closer to our viewpoint; see also [17].

Proposition 6.1. Let $\Phi \in K(N)$, then

$$D_j D_i \varphi + \psi \cdot D_j D_i \psi = D_i \psi \cdot D_j \psi = E_\Phi \delta_{ij}. \tag{6.6}$$

Hence $(E_\Phi^{-\frac{1}{2}} D_i \psi)_{i=1,\dots,N}$ is an "orthonormal basis" for the pairing (6.1) on $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|N})^N$. □

Proof. As $\Phi \in K(N)$, we have $D_j D_i \varphi = D_j(\psi \cdot D_i \psi) = D_j \psi \cdot D_i \psi - \psi \cdot D_j D_i \psi$, in view of equation (6.4); by exchanging i and j, we deduce $D_i \psi \cdot D_j \psi = 0$ if $i \neq j$. For $i = j$, the result is given by equation (6.5) and the equality $E_\Phi = \varphi' + \psi \cdot \psi'$. ■

6.1 Euclidean, affine, and projective invariants

We now extend to $\mathrm{S}^{1|N}$, where $N \geq 2$, the content of Section 2.3. Now α (6.2) stems from the 1-form on $\mathbb{R}^{2|N}$ given by $\varpi = \frac{1}{2}(p\,dq - q\,dp + \theta_i d\theta^i)$, via the formula $\varpi = \frac{1}{2} p^2 \alpha$ $(p \neq 0)$, expressed in affine coordinates $x = q/p$ and $\xi^i = \theta^i/p$. We define the orthosymplectic group [16, 22], $\mathrm{SpO}(2|N)$, as the supergroup whose A-points are all linear transformations of $\mathcal{O}_A^{2|N}$, see Section 2.3,

$$h = \begin{pmatrix} a & b & \gamma \\ c & d & \delta \\ \alpha & \beta & e \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

preserving the symplectic form $d\varpi$. If we demand that these linear transformations preserve the direction of $d\varpi$ only, we end up with the conformal supergroup $\mathrm{C}(2|N)$; see [22]. In the expression (6.7), the entries a, b, c, d are even elements, α, β are odd column vectors of size N, while δ, γ are odd row vectors of size N, and e is an even matrix of size $N \times N$. Moreover, as $d\varpi$ is preserved, we have

$$ad - bc - \alpha^t \beta = 1, \tag{6.8}$$

$$e^t e + 2\gamma^t \delta = 1, \tag{6.9}$$

$$\alpha^t e - a\delta + c\gamma = 0, \tag{6.10}$$

$$\beta^t e - b\delta + d\gamma = 0, \tag{6.11}$$

where the superscript t denotes transposition. We easily find that $\mathrm{SpO}(2|N)$ also preserves ϖ. Again, since $\varpi = \frac{1}{2} p^2 \alpha$, the orthosymplectic group acts by contactomorphisms,

$\mathrm{SpO}(2|N) \to K(N)$, via the following projective action on $\mathrm{S}^{1|N}$, namely

$$\widehat{h}(x,\xi) = \left(\frac{ax+b+\gamma\xi}{cx+d+\delta\xi}, \frac{\alpha x+\beta+e\xi}{cx+d+\delta\xi} \right), \tag{6.12}$$

where $h \in \mathrm{SpO}(2|N)$, and ξ is understood as a column vector.

The kernel of this action is $\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$, hence the action is effective for the supergroup $\mathrm{SpO}(2|N)/\{\pm\mathrm{Id}\} = \mathrm{PC}(2|N)$ of conformal projective transformations. If N is odd, this supergroup coincides with the special orthosymplectic group $\mathrm{SpO}_+(2|N)$, which is the subgroup of $\mathrm{SpO}(2|N)$ of Berezinian 1. We still can define Euclidean and affine subgroups of $\mathrm{SpO}(2|N)$, whose elements are

$$g = \begin{pmatrix} a & ab & -a\beta^t \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

where $(a, b, \beta) \in \mathbb{R}^{2|N}$, $a > 0$ defining $\mathrm{Aff}_+(1|N)$ and $a = 1$ defining $\mathrm{E}_+(1|N)$.

Remark 6.2. The group $\mathrm{Aff}_+(1|N)$ may be defined as the subgroup of those $\widehat{h} \in K(N)$ that preserve the direction of each β_i, namely $\widehat{h}^*\beta_i = \beta_i f_i$, for some superfunction f_i, with $i = 1, \ldots, N$. Its subgroup $\mathrm{E}_+(1|N)$ is characterized by exactly preserving α. □

Let t_1, t_2, t_3, t_4 be four generic points of $\mathrm{S}^{1|N}$.

Theorem 6.3. We have three invariants, I_{e}, I_{a}, and I_{p}, of the action of the Euclidean, affine, and projective supergroups on the supercircle $\mathrm{S}^{1|N}$.

- Euclidean invariant: $I_{\mathrm{e}}(t_1, t_2) = ([t_1, t_2], \{t_1, t_2\})$ with

$$[t_1, t_2] = x_2 - x_1 - \xi_2 \cdot \xi_1, \qquad \{t_1, t_2\} = \xi_2 - \xi_1. \tag{6.14}$$

- Affine invariant: $I_{\mathrm{a}}(t_1, t_2, t_3) = ([t_1, t_2, t_3], \{t_1, t_2, t_3\})$, where, if $x_1 < x_2$,

$$[t_1, t_2, t_3] = \frac{[t_1, t_3]}{[t_1, t_2]}, \qquad \{t_1, t_2, t_3\} = \frac{\{t_1, t_3\}}{[t_1, t_2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{6.15}$$

- Projective invariant: $I_{\mathrm{p}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = ([t_1, t_2, t_3, t_4], \mathrm{O}(N).\{t_1, t_2, t_3, t_4\})$, where, if $\mathrm{ord}(t_1, t_2, t_3) = 1$,

$$[t_1, t_2, t_3, t_4] = \frac{[t_1, t_3][t_2, t_4]}{[t_2, t_3][t_1, t_4]}, \tag{6.16}$$

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4\} = [t_1, t_2, t_3, t_4]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_2, t_4\}[t_1, t_2] - \{t_1, t_2\}[t_2, t_4]}{([t_1, t_2][t_2, t_4][t_1, t_4])^{\frac{1}{2}}}. \tag{6.17}$$

The odd invariant, denoted by $\mathrm{O}(N).\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, is the orbit of $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ under the natural group action of $\mathrm{O}(N)$. If a bijective transformation, Φ, of $\mathrm{S}^{1|N}$ leaves I_{e} (resp. I_{a}) invariant, it can be identified with the action of an element $h \in \mathrm{E}_+(1|N)$ (resp. $h \in \mathrm{Aff}_+(1|N)$), i.e. $\Phi = \widehat{h}$. If $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|N})$ preserves I_{p}, then $\Phi = \rho \circ \widehat{h}$, with $h \in \mathrm{SpO}(2|N)$ and $\rho(x, \xi) = (x, R\xi)$, $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|N}, \mathrm{O}(N))$. □

The proof of this theorem can be carried out along the same lines as in the proof of Theorem 3.1, we will skip it and just provide some hints for it. As in the case $N = 1$, we can show that the action of $\mathrm{E}_+(1|N)$ is simply $1|1$-transitive, while that of $\widetilde{\mathrm{Aff}_+(1|N)}$ is simply $2|1$-transitive, on $\mathbb{R}^{1|N} \subset \mathrm{S}^{1|N}$. Moreover, the action of $\widetilde{\mathrm{PC}(2|N)}$ is $3|2$-transitive on $\mathrm{S}^{1|N}$ and satisfies the following property: for any triple t, and $g, h \in \widetilde{\mathrm{PC}(2|N)}$, $\widehat{g}(t) \overset{3|2}{=} p \overset{3|2}{=} \widehat{h}(t)$ is equivalent to $\widehat{g} = \widehat{k} \circ \widehat{h}$, with $\widehat{k}(x, \xi) = (x, e\xi)$, $e \in \mathrm{O}(N)$. As in Section 4, the tilde denotes the extension of the group by the involution $\iota : (x, \xi) \mapsto (-x, \xi)$. We can now apply Theorem 4.3 and the claims of Theorem 6.3 follow.

Remark 6.4. For $N = 1$, the Corollaries 4.10, 4.17, and 4.20 have been obtained thanks to Lemma 2.3. They cannot be prolonged for $N > 1$ as there exists no such lemma in this case. However, the supergroup preserving each even invariant is included in the kernel of the associated $K(N)$-cocycles, and for $N = 2$, see Remark 6.9 and Theorem 6.10, one can easily check the converse inclusion. So for $N = 2$, the preserving supergroups of the even part of I_{e}, I_{a}, and I_{p} are respectively, $\mathrm{EO}(1|2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$, $\mathrm{AO}(1|2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$, and $\mathrm{PC}(2|2)$. □

6.2 Associated cocycles from the Cartan formula

The following calculation will rely on Proposition 6.1, and on the relation $[D_i, D_j] = D_i D_j + D_j D_i = 2\delta_{ij}\partial_x$, for $i, j = 1, \ldots, N$, which results from a direct calculation. As in the case $N = 1$, we need a lemma giving the third-order Taylor expansion of $\Phi^*[t_1, t_2]$. To that end, we will be using the notation

$$\beta^i \beta^j = \tfrac{1}{2}(\beta^i \otimes \beta^j - \beta^j \otimes \beta^i), \tag{6.18}$$

and $\beta^i \beta^j \beta^k = \frac{1}{6}(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) \beta^{\sigma(i)} \otimes \beta^{\sigma(j)} \otimes \beta^{\sigma(k)})$, i.e. the symmetrized tensor product of odd elements; see [6].

Lemma 6.5. Let $\Phi = (\varphi, \psi) \in K(N)$ and $t_2 = \phi_\varepsilon(t_1)$, with ϕ_ε the flow of a vector field X, and t_1 a point of $\mathrm{S}^{1|N}$; we then have

$$\begin{aligned}\Phi^*[t_1, t_2] = [t_1, t_2]E_\Phi(t_1)\left(1 + \frac{1}{2}[t_1, t_2]\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}(t_1) + \frac{1}{2}\{t_1, t_2\}^i\frac{D_i E_\Phi}{E_\Phi}(t_1)\right)\\ + [t_1, t_2]\left\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \alpha^2\frac{A}{6} + \alpha\beta^i\frac{B_i}{2} + \beta^i\beta^j\frac{C_{ij}}{2}\right\rangle(t_1)\\ + \frac{1}{6}\langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \beta^i\beta^j\beta^k[D_k D_j D_i\varphi - \psi \cdot D_k D_j D_i\psi]\rangle(t_1) + O(\varepsilon^4),\end{aligned} \tag{6.19}$$

where $A = \varphi''' + \psi \cdot \psi'''$, $B_i = D_i\varphi'' - \psi \cdot D_i\psi''$, and $C_{ij} = D_j D_i\varphi' + \psi \cdot D_j D_i\psi'$. □

Proof. By definition we have: $\Phi^*[t_1, t_2] = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) - (\psi(t_2) - \psi(t_1)) \cdot \psi(t_1)$. Using formula (5.1), trivially extended to the case $N \geq 2$, we obtain

$$\begin{aligned}\Phi^*[t_1, t_2] = [t_1, t_2]\left[E_\Phi + \tfrac{1}{2}[t_1, t_2](\varphi'' + \psi \cdot \psi'') + \tfrac{1}{2}\{t_1, t_2\}^i D_i(\varphi' + \psi \cdot \psi')\right](t_1)\\ + \tfrac{1}{2}\{t_1, t_2\}^i\{t_1, t_2\}^j[D_j D_i\varphi + \psi \cdot D_j D_i\psi](t_1)\\ + [t_1, t_2]\left[\tfrac{1}{6}[t_1, t_2]^2(\varphi''' + \psi \cdot \psi''') + \tfrac{1}{2}\{t_1, t_2\}^i[t_1, t_2](D_i\varphi'' - \psi \cdot D_i\psi'')\right](t_1)\\ + \tfrac{1}{2}[t_1, t_2]\{t_1, t_2\}^i\{t_1, t_2\}^j[D_j D_i\varphi' + \psi \cdot D_j D_i\psi')](t_1)\\ + \tfrac{1}{6}\{t_1, t_2\}^i\{t_1, t_2\}^j\{t_1, t_2\}^k[D_k D_j D_i\varphi - \psi \cdot D_k D_j D_i\psi](t_1) + O(\varepsilon^4).\end{aligned} \tag{6.20}$$

The coefficient of $\{t_1, t_2\}^i\{t_1, t_2\}^j$ on the second line of equation (6.20) vanishes if $i \neq j$, using equation (6.6). The analog of Lemma 5.1 holds true, namely $[t_1, t_2] = \langle \varepsilon X, \alpha\rangle + O(\varepsilon^2)$ and $\{t_1, t_2\}^i = \langle \varepsilon X, \beta^i\rangle + O(\varepsilon^2)$. The proof is complete. ■

Remark 6.6. The last term in equation (6.20) definitely does not vanish in the case $N \geq 3$, implying that $\Phi^*[t_1, t_2]$ is not proportional to $[t_1, t_2]$ at third order in ε. This entails that the Cartan formula fails to provide an expression of the Schwarzian derivative for $N \geq 3$. □

6.2.1 *Euclidean and affine $K(N)$-cocycles*

Up to the second order in ε, $\Phi^*[t_1, t_2]$ is proportional to $[t_1, t_2]$; this enables us to obtain 1-cocycles from Euclidean and affine invariants, as was done in Section 5.2.1.

Theorem 6.7. From the Euclidean and affine even invariants, we construct the two following $K(N)$ nontrivial 1-cocycles.

- The Euclidean cocycle $\mathcal{E} : K(N) \to \mathcal{F}_0(\mathrm{S}^{1|N})$:

$$\mathcal{E}(\Phi) = \log(E_\Phi) = \log(D_i\psi)^2, \tag{6.21}$$

  where the equality holds for any $i = 1, \dots, N$.
- The affine cocycle $\mathcal{A} : K(N) \to \Omega^1(\mathrm{S}^{1|N})$:

$$\mathcal{A}(\Phi) = d\mathcal{E}(\Phi) = \frac{dE_\Phi}{E_\Phi}. \tag{6.22}$$

□

The proof is the same as in the case $N = 1$, it relies on Lemma 6.5.

Remark 6.8. The directions of the individual vector fields D_i are no longer preserved by the contactomorphisms; only that of $D_1 \otimes \cdots \otimes D_N$ is preserved. Hence, the projection of $\mathcal{A}$ on D_i is no longer a $K(N)$-cocycle. □

Let us introduce $\mathrm{AO}(1|N)$, the ortho-affine subgroup of $\mathrm{SpO}(2|N)$ whose elements are

$$g = \begin{pmatrix} a & ab & -a\beta^t \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & \beta & e \end{pmatrix}, \tag{6.23}$$

where $(a, b, \beta) \in \mathbb{R}^{2|N}$, $e \in \mathrm{O}(N)$, and restricting us to $a = \pm 1$, we obtain the ortho-Euclidean subgroup $\mathrm{EO}(1|N)$. Since the action of $\mathrm{SpO}(2|N)$ on the supercircle has a kernel equal to $\{\pm\mathrm{Id}\}$, the same holds for its above introduced subgroups.

Remark 6.9. For $N = 2$, a direct computation shows that the kernel of the two cocycles $\mathcal{E}$ and $\mathcal{A}$ are respectively, $\mathrm{EO}(1|2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$ and $\mathrm{AO}(1|2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$. These groups are also the groups preserving the even part of I_e and I_a; see Remark 6.4. But for $N \geq 3$, this is no longer the case, i.e. the subgroup of $K(N)$ preserving the even invariant and the kernel of the associated cocycle are no longer the same defining groups. For example, if $N = 3$, the contactomorphism $\Phi = (\varphi, \psi)$, with $\varphi(x, \xi) = x + \xi_1\xi_2\xi_3\lambda$ and $\psi(x, \xi) = \xi - (\xi_2\xi_3, \xi_3\xi_1, \xi_1\xi_2)\lambda$, where $\lambda \in \mathbb{R}^{0|1}$, does not preserve $p_0(I_\mathrm{e})$ although $E(\Phi) = 1$. Moreover, Φ is not even a homography. □

6.2.2 *The Schwarzian $K(2)$-cocycle*

For $N = 2$, the expression (6.5) of $\Phi^*[t_1, t_2]$ is proportional to $[t_1, t_2]$. This enables us to use the Cartan formula to define the projective 1-cocycle, $\mathcal{S}$, from the cross-ratio (6.16). By construction, our projective 1-cocycle will take its values in the $K(2)$-module of quadratic differentials, $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|2})$, generated by α^2, $\alpha\beta^1$, $\alpha\beta^2$, and $\beta^1\beta^2$, where α^2 and $\alpha\beta^i$ are as in equation (2.20), and $\beta^1\beta^2$ as in equation (6.18). One can check that the linear mapping

$$\alpha\langle D_2 \otimes D_1, .\rangle : \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|2}) \to \mathcal{F}_1(\mathrm{S}^{1|2}) \tag{6.24}$$

intertwines the natural action of $K(2)$; see Remark 6.8.

Now the Schwarzian derivative given by Radul [27] or Cohn [5], for $N = 2$, has again coefficients in tensor densities. Projecting the 1-cocycle, $\mathcal{S}$, via equation (6.24), we will readily recover Radul's and Cohn's Schwarzian derivative.

Theorem 6.10. From the cross-ratio (6.16), we deduce, via the Cartan formula (3.8), the following projective 1-cocycle $\mathcal{S} : K(2) \to \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|2})$, which reads

$$\mathcal{S} = \tfrac{1}{6}\alpha^2 \left(D_1 D_2 \mathrm{S}_{12} + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}_{12}^2\right) + \tfrac{1}{2}\alpha(\beta^1 D_2 + \beta^2 D_1)\mathrm{S}_{12} + \beta^1\beta^2\, \mathrm{S}_{12}, \tag{6.25}$$

where we have put $\mathrm{S}_{12} = 2\mathrm{S}\alpha^{-1}$; see equation (6.26).

Moreover, using the projection (6.24) of the quadratic differentials on 1-densities, we obtain the Schwarzian derivative $\mathrm{S} : K(2) \to \mathcal{F}_1(\mathrm{S}^{1|2})$ given by

$$\mathrm{S}(\Phi) = \left(\frac{D_2 D_1 E_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\frac{D_2 E_\Phi D_1 E_\Phi}{E_\Phi^2}\right)\alpha. \tag{6.26}$$

These two 1-cocycles are nontrivial; their kernels coincide and are isomorphic to $\mathrm{PC}(2|2)$. □

Proof. The formula of the cross-ratio being similar to that of the case $N = 1$, we again have to compute the expression (5.6), the term $\frac{\Phi^*[t_1,t_2]}{E_\Phi(t_1)[t_1,t_2]}$ being now given by Lemma 6.5.

Straightforward calculation, essentially the same as in Section 5.2.2, leads to

$$\frac{\Phi^*[t_2,t_3]}{E_\Phi(t_2)[t_2,t_3]} = 1 + \frac{1}{2}\left([t_2,t_3]\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}(t_1) + \{t_2,t_3\}^i \frac{D_i E_\Phi}{E_\Phi}(t_1)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\langle \varepsilon X\otimes\varepsilon X, \alpha^2\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)' + 2\alpha\beta^i\left(\frac{D_iE_\Phi}{E_\Phi}\right)' + \beta^i\beta^j D_j\left(\frac{D_iE_\Phi}{E_\Phi}\right)\right\rangle(t_1)$$
$$+\left\langle \varepsilon X\otimes\varepsilon X, \alpha^2\frac{A}{6E_\Phi} + \alpha\beta^i\frac{B_i}{2E_\Phi} + \beta^i\beta^j\frac{C_{ij}}{2E_\Phi}\right\rangle(t_1) + O(\varepsilon^3).$$

The combinatorics is the same as before; we thus obtain

$$\frac{\Phi^*[t_1,t_2,t_3,t_4]}{[t_1,t_2,t_3,t_4]} - 1 = \frac{1}{4}\left\langle \varepsilon X, \alpha\frac{E'_\Phi}{E_\Phi} + \beta^i\frac{D_iE_\Phi}{E_\Phi}\right\rangle^2(t_1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\langle \varepsilon X\otimes\varepsilon X, \alpha^2\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)' + 2\alpha\beta^i\left(\frac{D_iE_\Phi}{E_\Phi}\right)' + \beta^i\beta^j D_j\left(\frac{D_iE_\Phi}{E_\Phi}\right)\right\rangle(t_1)$$
$$-2\left\langle \varepsilon X\otimes\varepsilon X, \alpha^2\frac{A}{6E_\Phi} + \alpha\beta^i\frac{B_i}{2E_\Phi} + \beta^i\beta^j\frac{C_{ij}}{2E_\Phi}\right\rangle(t_1) + O(\varepsilon^3).$$

As in the case $N=1$, see equations (5.8) and (5.9), we still have $A = E''_\Phi - \psi'\cdot\psi''$ and also $B_i = \frac{1}{2}D_iE'_\Phi + \psi'\cdot D_i\psi'$. We now collect the terms according to

$$\frac{\Phi^*[t_1,t_2,t_3,t_4]}{[t_1,t_2,t_3,t_4]} - 1 = \left\langle \varepsilon X\otimes\varepsilon X, \alpha^2\left(\frac{1}{6}\frac{E''_\Phi}{E_\Phi} + \frac{\psi'\cdot\psi''}{3E_\Phi} - \frac{1}{4}\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)^2\right)\right\rangle(t_1)$$
$$+\left\langle \varepsilon X\otimes\varepsilon X, \alpha\beta^i\left(\frac{1}{2}\frac{D_iE'_\Phi}{E_\Phi} - \frac{\psi'\cdot D_i\psi'}{E_\Phi} - \frac{E'_\Phi D_iE_\Phi}{2E_\Phi^2}\right)\right\rangle(t_1)$$
$$+\left\langle \varepsilon X\otimes\varepsilon X, \beta^1\beta^2\left(\frac{D_2D_1E_\Phi}{E_\Phi} - \frac{2C_{12}}{E_\Phi} - \frac{D_2E_\Phi D_1E_\Phi}{2E_\Phi^2}\right)\right\rangle(t_1) + O(\varepsilon^3). \tag{6.27}$$

We denote by $S(\Phi)$ the coefficient of α^2, $S_i(\Phi)$ that of $\alpha\beta^i$, and $S_{12}(\Phi)$ that of $\beta^1\beta^2$. Let us start with the computation of $S_{12}(\Phi)$, our goal being to write C_{12} as a function of E_Φ and its derivatives.

We first give a useful lemma.

Lemma 6.11. For any $\phi, \widetilde{\phi} \in C^\infty(\mathrm{S}^{1|2})^2$, the following relations hold:

$$(\phi\cdot D_1\psi)(\widetilde{\phi}\cdot D_1\psi) + (\phi\cdot D_2\psi)(\widetilde{\phi}\cdot D_2\psi) = \phi\cdot\widetilde{\phi}\ E_\Phi, \tag{6.28}$$

and also

$$\phi \times D_2\psi = \lambda\phi \cdot D_1\psi \qquad \text{and} \qquad \phi \times D_1\psi = -\lambda\phi \cdot D_2\psi, \tag{6.29}$$

with $\lambda^2 = 1$, and where the cross-product is defined by $\phi \times \widetilde{\phi} = \phi_1\widetilde{\phi}_2 - \phi_2\widetilde{\phi}_1$. Moreover, ψ' being odd, for even ϕ and $\widetilde{\phi}$, we have

$$(\psi' \cdot \phi)(\psi' \cdot \widetilde{\phi}) = \psi_1'\psi_2'(\phi \times \widetilde{\phi}). \tag{6.30}$$

□

Proof. Proposition 6.1 proves the first equality. As $D_2\psi \cdot D_2\psi = E_\Phi$, either $D_2\psi_1$ or $D_2\psi_2$ is invertible, where $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. Suppose that $D_2\psi_2$ is invertible, we then have $D_1\psi_1 = \lambda D_2\psi_2$ for some λ. Using $D_i\psi \cdot D_j\psi = \delta_{ij}E_\Phi$, we obtain $D_1\psi_2 = -\lambda D_2\psi_1$ and $\lambda^2 = 1$. If $D_2\psi_1$ is invertible, the same equalities hold. Then easy calculation ends the proof. ■

We have $C_{12} = D_2D_1\varphi' + \psi \cdot D_2D_1\psi'$, as given by Lemma 6.5. Differentiating the constraint $D_i\varphi = \psi \cdot D_i\psi$, see equation (6.4), we find $D_1\varphi' = \psi' \cdot D_1\psi + \psi \cdot D_1\psi'$, and then $D_2D_1\varphi' = D_2\psi' \cdot D_1\psi - \psi' \cdot D_2D_1\psi + D_2\psi \cdot D_1\psi' - \psi \cdot D_2D_1\psi'$. Plugging the latter expression into C_{12} and using $D_i\psi \cdot D_j\psi = 0$, for $i \neq j$, we obtain $C_{12} = -\psi' \cdot D_2D_1\psi$. Using the proof of Lemma 6.11, we have $D_1\psi_1 = \lambda D_2\psi_2$ and $D_1\psi_2 = -\lambda D_2\psi_1$, and then $\psi' \cdot D_2D_1\psi = 2\lambda\psi_1'\psi_2'$. Moreover as $\frac{1}{4}D_1E_\Phi D_2E_\Phi = (\psi' \cdot D_1\psi)(\psi' \cdot D_2\psi)$, we find, using equations (6.30) and (6.29) that $\frac{1}{4}D_1E_\Phi D_2E_\Phi = \lambda\psi_1'\psi_2'E_\Phi$. We thus have $C_{12} = -\frac{1}{2E_\Phi}D_1E_\Phi D_2E_\Phi$, and replacing this in the last expression of S_{12}, as given by equation (6.27), we finally get

$$S_{12}(\Phi) = \frac{D_2D_1E_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\frac{D_2E_\Phi D_1E_\Phi}{E_\Phi^2}. \tag{6.31}$$

We will show that $S_1 = \frac{1}{2}D_2S_{12}$, and then exchanging D_1 and D_2, we readily obtain $S_2 = -\frac{1}{2}D_1S_{12}$. Let us first recall the expression of S_1, given in equation (6.27),

$$S_1(\Phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{D_1E_\Phi'}{E_\Phi} - \frac{E_\Phi'D_1E_\Phi}{E_\Phi^2} - \frac{2\psi' \cdot D_1\psi'}{E_\Phi}\right).$$

Secondly, we find that

$$D_2S_{12}(\Phi) = \frac{D_1E_\Phi'}{E_\Phi} - \frac{D_2E_\Phi D_2D_1E_\Phi}{E_\Phi^2} + \frac{3}{2}\frac{D_2E_\Phi D_2D_1E_\Phi}{E_\Phi^2} - \frac{3}{2}\frac{E_\Phi'D_1E_\Phi}{E_\Phi^2}.$$

We then have to show that the following expression vanishes, namely

$$2S_1(\Phi) - D_2 S_{12}(\Phi) = -\frac{2\psi' \cdot D_1\psi'}{E_\Phi} + \frac{1}{2}\frac{D_2E_\Phi D_1D_2E_\Phi}{E_\Phi^2} + \frac{1}{2}\frac{E'_\Phi D_1E_\Phi}{E_\Phi^2}. \tag{6.32}$$

To that end, let us use formula (6.5) to rewrite the last two terms as $D_2E_\Phi D_1D_2E_\Phi = 4(\psi' \cdot D_2\psi)(D_1\psi' \cdot D_2\psi + \psi' \cdot D_2D_1\psi)$ and $E'_\Phi D_1E_\Phi = 4(\psi' \cdot D_1\psi)(D_1\psi' \cdot D_1\psi)$, respectively. We have already proved that $\psi' \cdot D_2D_1\psi = 2\lambda\psi'_1\psi'_2$, and using equation (6.28), we thus obtain

$$2S_1 - D_2S_{12} = 0. \tag{6.33}$$

At last, we want to show that $6S = D_1D_2S_{12} + \frac{1}{2}S_{12}^2$. Begin by writing explicitly

$$6S(\Phi) = \frac{E''_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)^2 + \frac{2\psi' \cdot \psi''}{E_\Phi}$$

with the help of equation (6.27), and also

$$\begin{aligned} D_1D_2S_{12}(\Phi) = {} & \frac{E''_\Phi}{E_\Phi} - \frac{D_1E_\Phi D_1E'_\Phi}{E_\Phi^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)^2 - \frac{3}{2}\frac{D_1E'_\Phi D_1E_\Phi}{E_\Phi^2} \\ & + \frac{1}{2}\frac{D_2E_\Phi D_2E'_\Phi}{E_\Phi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{D_2D_1E_\Phi}{E_\Phi}\right)^2 - \frac{D_1E_\Phi D_2E_\Phi D_2D_1E_\Phi}{E_\Phi^3}. \end{aligned}$$

We now compute the difference

$$\begin{aligned} D_1D_2S_{12}(\Phi) - 6S(\Phi) = {} & \frac{1}{2}\frac{D_1E_\Phi D_1E'_\Phi + D_2E_\Phi D_2E'_\Phi}{E_\Phi^2} - \frac{D_1E_\Phi D_2E_\Phi D_2D_1E_\Phi}{E_\Phi^3} \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{D_2D_1E_\Phi}{E_\Phi}\right)^2 - 2\frac{\psi' \cdot \psi''}{E_\Phi}. \end{aligned}$$

Using equation (6.5), we get $\frac{1}{2}(D_1E_\Phi D_1E'_\Phi + D_2E_\Phi D_2E'_\Phi) = 2[(\psi' \cdot D_1\psi)(\psi'' \cdot D_1\psi) + (1 \leftrightarrow 2)] + 2[(\psi' \cdot D_1\psi)(\psi' \cdot D_1\psi') + (1 \leftrightarrow 2)]$. Thanks to formula (6.28), the first term reduces to $2\psi' \cdot \psi'' E_\Phi$, and using equation (6.30) the second one turns out to be $2\psi'_1\psi'_2(D_1\psi \times D_1\psi' + D_2\psi \times D_2\psi')$, which is equal to $4\lambda\psi'_1\psi'_2(D_2\psi \cdot D_1\psi')$ in view of equation (6.29). On the other hand, using the previous equalities, we find $D_1E_\Phi D_2E_\Phi D_2D_1E_\Phi = -8\lambda E_\Phi\psi'_1\psi'_2$

$(D_1\psi' \cdot D_2\psi)$; hence we obtain

$$D_1 D_2 S_{12}(\Phi) - 6S(\Phi) = -\frac{3}{2}\frac{D_1 E_\Phi D_2 E_\Phi D_2 D_1 E_\Phi}{E_\Phi^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{D_2 D_1 E_\Phi}{E_\Phi}\right)^2,$$

which is the desired result: $6S = D_1 D_2 S_{12} + \frac{1}{2}S_{12}^2$. Together with equations (6.33) and (6.31), the latter equation finishes the derivation of equation (6.25). Using the projection (6.24) on 1-densities, we obtain the Schwarzian derivative S, given by equation (6.26).

An argument analogous to that of Remark 3.7 helps us to prove that the cocycles S and $\mathcal{S}$ are nontrivial.

To find the kernel of the cocycle S, whence that of $\mathcal{S}$, we have to use another form of S, namely

$$\mathrm{S}(\Phi) = -2E_\Phi^{\frac{1}{2}}\big(D_2 D_1\big(E_\Phi^{-\frac{1}{2}}\big)\big)\alpha.$$

Hence, if $\Phi \in \ker(\mathrm{S})$, we have $D_2 D_1(E_\Phi^{-\frac{1}{2}}) = 0$. As was the case for $N = 1$, the solution is $E_\Phi = (cx + d + \delta \cdot \xi)^{-2}$. A direct computation shows that there exists $h \in \mathrm{PC}(2|2)$ such that $E_\Phi = E_{\widehat{h}}$. Since the kernel of the Euclidean cocycle is $\widehat{\mathrm{E}}_+ 1|N/\{\pm\mathrm{Id}\}$ for $N = 2$, we obtain as announced: $\ker(\mathrm{S}) = \mathrm{PC}(2|2)$. The proof of Theorem 6.10 is complete. ■

7 Conclusion, Discussion, and Outlook

Starting off with the orthosymplectic group, $\mathrm{SpO}(2|N)$, and two nested subgroups $\mathrm{E}_+(1|N) \subset \mathrm{Aff}_+(1|N) \subset \mathrm{SpO}(2|N)$, we have been able to uniquely characterize Euclidean, I_e, affine, I_a, and projective, I_p, invariants for their actions as contactomorphisms of the supercircle $\mathrm{S}^{1|N}$, using the central notion of $p|q$-transitivity. Moreover, these invariants are characteristic of their defining groups. For $N = 0, 1, 2$, their even part does characterize the image of the supergroups $\mathrm{EO}(1|N)$, $\mathrm{AO}(1|N)$, and $\mathrm{SpO}(2|N)$ by the projective action on $\mathrm{S}^{1|N}$, within the group, $K(N)$, of all contactomorphisms. In doing so, we have recovered in a systematic fashion the previously introduced [2, 23] even and odd cross-ratios.

Then using a natural super extension of the Cartan formula (1.2), we have provided a novel construction of the nontrivial 1-cocycles $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$, and $\mathcal{S}$ of $K(N)$, associated with the even invariants, for $N = 0, 1, 2$. We have also succeeded to recover the known expressions [5, 10, 26, 27] of the Schwarzian derivatives for $N = 0, 1, 2$. The kernels of the above-mentioned 1-cocycles have been shown to coincide with the groups defining the invariants leading to them. So for each geometry, the group action, the even invariant, and the 1-cocycle are three equivalent geometric objects on the supercircle $S^{1|N}$ (where $N = 0, 1, 2$), endowed with its standard contact structure.

In the cases $N = 0, 1$, a complete classification of the subgeometries of the contact geometry of $S^{1|N}$ is given by that of the nontrivial cohomology spaces $H^1(K(N), \mathcal{F}_\lambda)$; see Theorem 3.10 and Remark 3.11. A similar classification for $N = 2$ is still lacking. Work in progress related to the determination of $H^1(K(2), \mathcal{F}_\lambda)$ should provide a first insight into this classification, as well as that of the 1-cohomology spaces of $K(2)$ with coefficients in other natural modules, such as $\Omega^1(S^{1|2})$ and $\mathcal{Q}(S^{1|2})$. In doing so, we will resort to the computation of $H^1(k(2), \mathcal{F}_\lambda)$ carried out by Ben Fraj [Private Communication].

For $N > 2$, our method yields, indeed, the Euclidean and affine 1-cocycles of $K(N)$. There is however no way to obtain, in our approach, Radul's Schwarzian integro-differential operator for $N = 3$, since there exists no projection from $\mathcal{Q}(S^{1|3})$ to $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} = k(3)^*_{\mathrm{reg}}$ intertwining the $K(3)$ action. Moreover, our study provides a clear-cut explanation of the fact that $\mathcal{S}(\Phi)$ cannot be derived as a quadratic differential by the Cartan formula (see Remark 6.6) for $N \geq 3$, and therefore help us understand why the Radul expression for $N = 3$ involves pseudo-differential operators.

We have, so far, studied the supercircle $S^{1|N}$; but there are in fact two superextensions of the circle, namely $S^{1|N}$ and $S^{1|N}_+$; see [9, 16, 27]. Let us discuss the case $N = 1$. The only difference between these two supermanifolds is that the functions on $S^{1|1}$ are, indeed, functions on $\mathbb{R}^{1|1}$ invariant with respect to the transformation $(x, \xi) \mapsto (x + 2\pi, \xi)$, whereas functions on the Möbius supercircle, $S^{1|1}_+$, can be viewed as functions on $\mathbb{R}^{1|1}$ invariant under the transformation $(x, \xi) \mapsto (x + 2\pi, -\xi)$. Here the coordinate x is regarded as an angular coordinate on S^1. The canonical contact structure on $\mathbb{R}^{1|1}$ define a contact structure on both $S^{1|1}$ and $S^{1|1}_+$ [V. Ovsienko, Private Communication]. All our cocycles, prior to projections, are left invariant by the map $(x, \xi) \mapsto (x, -\xi)$, as well as the projections themselves; then $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, and A, S still define cocycles on $S^{1|1}_+$. This can be generalized for $N > 1$ along the same line as before.

We expect that our approach will help us express the Bott–Thurston cocycles of $K(1)$ and $K(2)$ given by Radul in terms of the Berezin integral of the cup product of the 1-cocycles $\mathcal{E}$ and $\mathcal{A}$ introduced above (in a manner similar to the case of $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ spelled out in [17]). This should, hence, extend the classical formula worked out in [8] using a contact 1-form on $\mathrm{Diff}_+(S^1) \times \mathbb{R}$.

Another plausible development would be the superization of the hyperboloid of one sheet in $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})^*$ whose conformal geometry is related to the projective geometry of null infinity [8, 19].

Acknowledgments

It is a pleasure to acknowledge most enlightening discussions with V. Fock, D. Leites, and C. Roger. Special thanks are due to V. Ovsienko for his constant interest in this work and a number of suggestions that have greatly improved this paper.

References

[1] Agrebaoui, B., and N. Ben Fraj. “On the cohomology of the lie superalgebra of contact vector fields on $S^{1|1}$.” *Bulletin de la societe Royale des Sciences de Liège* 72, no. 6 (2003): 365–75.

[2] Aoki, K. “Heat kernels and super determinants of Laplace operators on super Riemann surfaces.” *Communications in Mathematical Physics* 117, no. 3 (1988): 405–29.

[3] Barge, J., and E. Ghys. “Cocycles d’Euler et de Maslov.” *Mathematische Annalen* 294, no. 2 (1992): 235–65.

[4] Cartan, E. *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*. Paris: Gauthiers-Villars, 1937.

[5] J. D. Cohn. “$N = 2$ super-Riemann surfaces.” *Nuclear Physics B* 284, no. 2 (1987): 349–64.

[6] Deligne, P., and J. W. Morgan. “Notes on supersymmetry (following J. Bernstein).” In *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, 41–97. Vol. 1–2. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.

[7] D’Hoker, E., and D. H. Phong. “The geometry of string perturbation theory.” *Reviews of Modern Physics* 60, no. 4 (1988): 917–1065.

[8] Duval, C., and L. Guieu. “The Virasoro group and Lorentzian surfaces: The hyperboloid of one sheet.” *Journal of Geometry and Physics* 33 (2000): 103–27.

[9] Feigin, B. L., and D. A Leites. “New Lie superalgebras of string theories.” In *Group Theoretical Methods in Physics*, 623–9. Vol. 1–3. Newark, NJ: Harwood Academic, 1985.

[10] Friedan, D. “Notes on string theory and two-dimensional conformal field theory.” In *Proceedings of Santa Barbara Workshop on Unified String Theories,* edited by M. B. Green and D. Gross, 162–213. Singapore, Singapore: World Scientific, 1986.

[11] Fuks, D. B. *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*. New York: Consultants Bureau, 1987.

[12] Gargoubi, H., N. Mellouli, and V. Ovsienko. “Differential operators on supercircle: Conformally equivariant quantization and symbol calculus.” *Letters in Mathematical Physics* 79 (2007): 51–65.

[13] Ghys, E. “Groups acting on the circle.” *Enseignement des Mathematiques* 47, no. 3–4 (2001): 329–407.

[14] Giddings, S. B. “Punctures on super Riemann surfaces.” *Communications in Mathematical Physics* 143, no. 2 (1992): 355–70.

[15] Gieres, F., and S. Theisen. “Superconformally covariant operators and super-W-algebras.” *Journal of Mathematical Physics* 34, no. 12 (1993): 5964–85.

[16] Grozman, P., D. Leites, and I. Shchepochkina. “Lie superalgebras of string theories.” *Acta Mathematica Vietnamica* 26, no. 1 (2001): 27–63.

[17] Guieu, L., and C. Roger. *L’algèbre et le Groupe de Virasoro*. Montreal, QC, Canada: Les Publications du CRM, 2007.

[18] Kostant, B. *Graded Manifolds, Graded Lie Theory, and Prequantization*, 177–306. Lecture Notes in Mathematics 570. Berlin: Springer, 1975.

[19] Kostant, B., and S. Sternberg. “The Schwartzian derivative and the conformal geometry of the Lorentz hyperboloid.” In *Quantum Theories and Geometry*, edited by M. Cahen and M. Flato, 113–25. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic, 1988.

[20] Leites, D. A. “Introduction to the theory of supermanifolds.” *Russian Mathematical Surveys* 35, no. 1 (1980): 1–64.

[21] Manin, Yu. *Gauge Field Theory and Complex Geometry*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 289. Berlin: Springer, 1988.

[22] Manin, Yu. *Topics in Noncommutative Geometry*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1991.

[23] Nelson, P. “Lectures on supermanifolds and strings.” In *Particles, Strings and Supernovæ*, 997–1073. Vol. 1–2. Teaneck, NJ: World Sci. Publ., 1989.

[24] Ovsienko, V., and C. Roger. “Generalization of Virasoro group and Virasoro algebra through extensions by modules of tensor-densities on S^1.” *Indagationes Mathematicae New Series* 9, no. 2 (1998): 277–88.

[25] Ovsienko, V., and S. Tabachnikov. *Projective Differential Geometry Old and New: From the Schwarzian Derivative to the Cohomology of Diffeomorphism Groups*. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 2005.

[26] Radul, A. O. “Superanalogue of Schwarz derivations and Bott cocycles.” *Reports of the Department of Mathematics*, University of Stockholm, no. 21 (1986): 40–57.

[27] Radul, A. O. “Superstring Schwartz derivative and the Bott cocycle.” In *Integrable and Superintegrable Systems*, 336–51. Singapore, Singapore: World Scientific, 1990.

[28] Rogers, A. *Supermanifolds: Theory and Applications*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2007.

[29] Souriau, J.-M. *Structure of Dynamical Systems: a Symplectic View of Physics*. Translated by C. H. Cushman-de Vries. Boston, MA: Birkhäuser, 1997.

[30] Tuynman, G. M. *Supermanifolds and Supergroups: Basic Theory*. Mathematics and its Applications 570. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic, 2004.

[31] Uehara, S., and Y. Yasui. “The Weil–Petersson Kähler form on the super Teichmüller space.” *Physics Letters B* 250, no. 1–2 (1990): 72–8.