Quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents

Jean-Philippe Michel[1]
sous la direction de Christian Duval[1]

[1]Centre de Physique Théorique & Université de la Méditerranée
Marseille, France

Soutenance de thèse

Deux parties

- Quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents,
- Géometrie projective sur le supercercle : construction unifiée du birapport et de la dérivée schwarzienne.

Cadre : la supergéométrie [Kos77, Leĭ80]

Objet : l'étude d'invariants de (super-)groupes.

Première partie

1. Introduction à la quantification équivariante
   - Quantifications des fibrés cotangents
   - Les $\mathrm{Vect}(M)$-modules classique $\mathcal{S}^\delta$ et quantique $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$
2. Modules classiques et quantiques de la mécanique à spin
   - Le supercotangent et le $\mathrm{conf}(M,g)$-module classique $\mathcal{S}^\delta[\xi]$
   - Le $\mathrm{conf}(M,g)$-module quantique $\mathrm{D}^{\lambda,\mu}$
3. La quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents
   - La quantification des symboles de degré 1 en les impulsions
   - Résultats d'existence et unicité
4. Applications
   - Classification des éléments invariants conformes et résonances
   - Tenseurs de Killing-Yano conformes et supercharges

Correspondance entre mécaniques classique et quantique

	classique	quantique
Espaces des états	(M,ω)	$\mathcal{P}(\mathcal{H})$
Observables	$A \subset \mathcal{C}^\infty(M)$	$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$
Equations d'évolution	$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$	$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{d\hat{f}}{dt} = [\hat{H}, \hat{f}]$.

Quantification :
isomorphisme entre espaces d'observables classique et quantique.

La quantification géométrique construit en plus l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ à partir de la variété symplectique M.

Quantifications du fibré cotangent T^*M

Soit (x^i, p_i) un système de coordonnées de T^*M.

Forme symplectique exacte $\omega = d(p_i dx^i)$ + polarisation verticale $\langle \partial_{p_i} \rangle$
$\rightsquigarrow$ quantification géométrique de T^*M :

- $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{F}_c^{1/2}}(M)$ et $A = \{P^i(x)p_i + P(x) |\, P^i, P \in \mathcal{C}^\infty(M)\}$,
- $\mathcal{Q}_G(P(x)) = P(x)$ et $\mathcal{Q}_G(p_j) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \partial_j$.

Comment prolonger $\mathcal{Q}_G$ à $\mathcal{S} = \mathrm{Pol}(T^*M)$?

Quantifications du fibré cotangent T^*M

Soit (x^i, p_i) un système de coordonnées de T^*M.

Forme symplectique exacte $\omega = d(p_i dx^i)$ + polarisation verticale $\langle \partial_{p_i} \rangle$
$\rightsquigarrow$ quantification géométrique de T^*M :

- $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{F}_c^{1/2}}(M)$ et $A = \{P^i(x)p_i + P(x) \mid P^i, P \in \mathcal{C}^\infty(M)\}$,
- $\mathcal{Q}_G(P(x)) = P(x)$ et $\mathcal{Q}_G(p_j) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_j$.

Comment prolonger $\mathcal{Q}_G$ à $\mathcal{S} = \mathrm{Pol}(T^*M)$?

Si $M = \mathbb{R}^n$, l'ordre normal est un candidat

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ P^{i_1\cdots i_k}(x)p_{i_1}\cdots p_{i_k} & \mapsto & P^{i_1\cdots i_k}(x)\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{i_1}\cdots\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{i_k} \end{array}$$

où $\mathcal{D}$ est l'espace des opérateurs différentiels.

L'ordre normal dépend du système de coordonnées

Soit $M = \mathbb{R}^3$. Au symbole $H = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ l'ordre normal associe

$$\hat{H} = -\hbar^2 \Delta$$

qui s'écrit en coordonnées sphériques

$$\hat{H}^s = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right).$$

L'ordre normal dépend du système de coordonnées

Soit $M = \mathbb{R}^3$. Au symbole $H = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ l'ordre normal associe

$$\hat{H} = -\hbar^2 \Delta$$

qui s'écrit en coordonnées sphériques

$$\hat{H}^s = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \right).$$

Le symbole H a pour expression, en coordonnées sphériques,

$$H^s = p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} p_\phi^2 \right)$$

qui se quantifie via l'ordre normal en

$$\widehat{H^s} = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \right).$$

Conclusion : l'ordre normal dépend du système de coordonnées !

Structures de $\mathrm{Vect}(M)$-modules de $\mathcal{S}^\delta$ et $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$

Pour l'étude géométrique de $\mathcal{D}$: fonctions $\rightsquigarrow$ densités. On introduit les trois $\mathrm{Vect}(M)$-modules :

- $\mathcal{F}^\lambda = \Gamma(|\Lambda^n T^* M|^{\otimes\lambda})$ des λ-densités, déformation de $\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\mathrm{L}_X^\lambda = X^i\partial_i + \lambda\mathrm{Div}(X), \quad \text{où } \mathrm{Div}(X) = \partial_i X^i$$

- $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ des opérateurs différentiels $A : \mathcal{F}^\lambda \to \mathcal{F}^\mu$, muni de l'action adjointe

$$\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} A = \mathrm{L}_X^\mu A - A\mathrm{L}_X^\lambda$$

- $\mathcal{S}^\delta = \mathcal{S} \otimes \mathcal{F}^\delta$ des symboles, muni de l'action hamiltonienne

$$L_X^\delta = X^i\partial_i - p_j\partial_i X^j\partial_{p_i} + \delta\mathrm{Div}(X).$$

Graduation et filtration des modules $\mathcal{S}^\delta$ et $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$

- $\mathcal{S}^\delta$ est gradué par le degré, $\mathcal{S}^\delta = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathcal{S}^\delta_k$, avec

$$P^{i_1\cdots i_k}(x)p_{i_1}\dots p_{i_k} \in \mathcal{S}^\delta_k$$

- $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$ est seulement filtré par l'ordre, $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}_0 \subset \mathcal{D}^{\lambda,\mu}_1 \subset \cdots$, avec

$$A_k^{i_1\cdots i_k}(x)\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k} + \dots + A_1^i(x)\partial_i + A_0(x) \in \mathcal{D}^{\lambda,\mu}_k.$$

Pour le "shift" $\delta = \mu - \lambda$, $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}_k/\mathcal{D}^{\lambda,\mu}_{k-1} \simeq \mathcal{S}^\delta_k$ définit le symbole principal.

Il n'existe pas de symbole total canonique $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}_k \not\simeq \bigoplus_{l=0}^k \mathcal{S}^\delta_l$.
C'est une version du problème fondamental de la quantification .

La quantification équivariante

Supposons l'espace de configuration M muni d'une G-structure plate. Alors $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Vect}(M)$.

Définition ([LO99, DLO99])

Une quantification $\mathfrak{g}$-équivariante est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^\delta & \xrightarrow{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}} & \mathcal{D}^{\lambda,\mu} \\ {\scriptstyle L_X^\delta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{L}_X^{\lambda,\mu}} \\ \mathcal{S}^\delta & \xrightarrow{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}} & \mathcal{D}^{\lambda,\mu} \end{array}$$

où $X \in \mathfrak{g}$, préservant le symbole principal.

Exemple : une variété (M, g) conformément plate, de signature (p, q). Ses changeurs de cartes sont conformes, $g_{ij} = F\eta_{ij}$ localement, et $\mathrm{conf}(M, g) = \{X \in \mathrm{Vect}(M) | L_X g = \lambda g\} \simeq \mathrm{o}(p + 1, q + 1)$.

Résultats en quantification équivariante

- Existence et unicité d'une quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ [DLO99], excepté pour les cas résonants : valeurs exceptionnelles de (λ, μ).
- Formule covariante jusqu'au degré 3 en les impulsions [LD03], invariante par changement conforme de métrique [DO01, LD03].

Description de la mécanique des systèmes à spin

But : extension de la quantification conformément équivariante au cas des systèmes à spin.

classique	quantique
supercotangent $\mathcal{M}$ [BM77], forme symplectique ω [Rot91]	$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{S})$, spineurs de module de carré intégrable
$\mathcal{S}^\delta[\xi]$, [Get83]	$\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$
L_X^δ ?	$\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} A = \mathsf{L}_X^\mu A - A\mathsf{L}_X^\lambda$, avec L_X dérivée de Lie de spineurs [Kos72].

Structure différentielle du fibré supercotangent

Le supercotangent est la supervariété $\mathcal{M} = T^*M \times_M \Pi TM$, de base T^*M, de coordonnées (x^i, p_i, ξ^i), où

$$\xi^i \xi^j + \xi^j \xi^i = 0$$

son algèbre de fonctions étant $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(T^*M) \otimes \Omega(M)$. L'espace des symboles

$$\mathcal{S}^\delta[\xi] = \mathcal{S}^\delta \otimes \Omega(M) \ \ni \ P^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_\kappa}(x) \xi^{j_1} \ldots \xi^{j_\kappa} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$$

en est une sous-algèbre (si $\delta = 0$), $\mathbb{Z}^2$-gradué par le degré en p et ξ, $\mathcal{S}^\delta[\xi] = \bigoplus_{k=0}^\infty \bigoplus_{\kappa=0}^n \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$.

Structure différentielle du fibré supercotangent

Le supercotangent est la supervariété $\mathcal{M} = T^*M \times_M \Pi TM$, de base T^*M, de coordonnées (x^i, p_i, ξ^i), où

$$\xi^i \xi^j + \xi^j \xi^i = 0$$

son algèbre de fonctions étant $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(T^*M) \otimes \Omega(M)$. L'espace des symboles

$$\mathcal{S}^\delta[\xi] = \mathcal{S}^\delta \otimes \Omega(M) \ \ni \ P^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_\kappa}(x)\xi^{j_1}\dots\xi^{j_\kappa} p_{i_1}\dots p_{i_k}$$

en est une sous-algèbre (si $\delta = 0$), $\mathbb{Z}^2$-gradué par le degré en p et ξ, $\mathcal{S}^\delta[\xi] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{\kappa=0}^{n} \mathcal{S}^\delta_{k,\kappa}[\xi]$.

On définit le *Vect*(M)-module auxiliaire $\mathcal{T}^\delta[\xi] = \bigoplus_{\kappa=0}^{n} \mathcal{S}^{\delta-\frac{\kappa}{n}}_{*,\kappa}[\xi]$ de *tenseurs*, muni de l'action naturelle

$$\mathbb{L}^\delta_X = X^i \partial_i - p_j \partial_i X^j \partial_{p_i} + \xi^i \partial_i X^j \partial_{\xi^j} + \left(\delta - \frac{\kappa}{n}\right) \mathrm{Div}(X).$$

Structure symplectique du fibré supercotangent

Si M est munie d'une métrique g, $\mathcal{M}$ admet une forme symplectique canonique ω qui est exacte $\omega = d\alpha$, avec [Rot91],

$$\alpha = p_i dx^i + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}} g_{ij} \xi^i d^\nabla \xi^j.$$

Elle admet pour coordonnées de Darboux

$$x^i, \quad \tilde{p}_i = p_i + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}} \omega^a_{bi} \tilde{\xi}_a \tilde{\xi}^b, \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}^a = \theta^a_i \xi^i$$

où (ω^a_b) est la connexion de Levi-Civita et (θ^a) est le corepère de (e_a) orthonormé, $g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$.

On définit (localement) $\mathrm{ev}_g : \mathcal{T}^\delta[\xi] \to \mathcal{S}^\delta[\xi]$ par

$$\mathrm{ev}_g(x^i) = x^i, \quad \mathrm{ev}_g(p_i) = \tilde{p}_i, \quad \text{et} \quad \mathrm{ev}_g(\xi^i) = \tilde{\xi}^i.$$

Le module $\mathcal{S}^\delta[\xi]$

Proposition

La condition $L_{\hat{X}}\alpha = 0$ ne fixe pas de relevé $\hat{X}$ de $X \in \mathrm{Vect}(M)$ à $\mathcal{M}$.

Théorème

Seuls les champs $X \in \mathrm{conf}(M, g)$ admettent un relevé $\widetilde{X}$ préservant α et la direction de $\beta = g_{ij}\xi^i dx^j$. Ce relevé est unique.

Si (M, g) est conformément plate, $L^\delta_X = \widetilde{X} + \delta \mathrm{Div}(X)$ munit $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ d'une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module,

$$L^\delta_X = \mathrm{ev}_g \mathbb{L}^\delta_X (\mathrm{ev}_g)^{-1} - \frac{\hbar}{2\mathrm{i}} \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}^j (\partial_i \partial_j X^k) \partial_{\tilde{p}_i}.$$

Le module $\mathcal{S}^\delta[\xi]$

Proposition

La condition $L_{\hat{X}}\alpha = 0$ ne fixe pas de relevé $\hat{X}$ de $X \in \mathrm{Vect}(M)$ à $\mathcal{M}$.

Théorème

Seuls les champs $X \in \mathrm{conf}(M, g)$ admettent un relevé $\widetilde{X}$ préservant α et la direction de $\beta = g_{ij}\xi^i dx^j$. Ce relevé est unique.

Si (M, g) est conformément plate, $L_X^\delta = \widetilde{X} + \delta \mathrm{Div}(X)$ munit $\mathcal{S}^\delta[\xi]$ d'une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module,

$$L_X^\delta = \mathrm{ev}_g \mathbb{L}_X^\delta (\mathrm{ev}_g)^{-1} - \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\tilde{\xi}_k \tilde{\xi}^j (\partial_i \partial_j X^k)\partial_{\tilde{p}_i}.$$

Définition

Une superisation $\mathfrak{g}$-équivariante est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-module $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}^\delta : \mathcal{T}^\delta[\xi] \to \mathcal{S}^\delta[\xi]$, préservant le terme de plus haut degré en p.

Quantification géométrique...

- ...d'une supervariété à un point $(\Pi T_x M, g_x)$ [Vor90, Tuy92]

Les fonctions polarisées forment un module de spineurs et les quantifiés des $\tilde{\xi}^i$ engendrent l'algèbre de Clifford associée.

Quantification géométrique...

- ...d'une supervariété à un point $(\Pi T_x M, g_x)$ [Vor90, Tuy92]

Les fonctions polarisées forment un module de spineurs et les quantifiés des $\tilde{\xi}^i$ engendrent l'algèbre de Clifford associée.

- ...du supercotangent $\mathcal{M}$

Si $T^{\mathbb{C}}M$ admet une distribution maximale isotrope P pour g, alors $\mathcal{M}$ admet une polarisation,
$\rightsquigarrow\ \mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathsf{S})$, où $\mathsf{S} = \Lambda P^*$ s'identifie au fibré des spineurs via l'action de Clifford de $\mathcal{Q}_G(\tilde{\xi})$. On a

$$\mathcal{Q}_G(x^i) = x^i, \quad \mathcal{Q}_G(\tilde{p}_i) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_i \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_G(\tilde{\xi}^i) = \frac{\tilde{\gamma}^i}{\sqrt{2}}.$$

Rappelons la relation de Clifford $\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -2g^{ij}$.

Géométrie spinorielle et supercotangent

Proposition

Soit J l'application moment de $\mathrm{Vect}(M)$ sur T^*M et $\mathcal{J}$ celle de $\mathrm{conf}(M, g)$ sur $\mathcal{M}$.

$$\mathcal{Q}_G(J_X) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla_X \quad \textit{et} \quad \mathcal{Q}_G(\mathcal{J}_X) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\mathrm{L}_X$$

où ∇ est la dérivée covariante des spineurs et L la dérivée de Lie des spineurs [Kos72].

Remarque : le choix du relevé hamiltonien de X à M correspond à un choix de dérivée des spineurs.

Le $\mathrm{conf}(M, g)$-module quantique $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$

Soit S le fibré des spineurs sur (M, g) à spin et conformément plate.
Les λ-densités spinorielles $\mathsf{F}^\lambda = \Gamma(\mathsf{S}) \otimes \mathcal{F}^\lambda$ possèdent une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module

$$\mathsf{L}^\lambda_X = \mathsf{L}_X + \lambda \mathrm{Div}(X).$$

Le $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module des opérateurs différentiels spinoriels est $\mathsf{D}^{\lambda,\mu} \simeq \mathcal{D}^{\lambda,\mu} \otimes \Gamma(C\ell(T^*M))$, muni de

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_X A = \mathsf{L}^\mu_X A - A \mathsf{L}^\lambda_X.$$

Il hérite de la filtration de $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$.

Le $\mathrm{conf}(M, g)$-module quantique $\mathsf{D}^{\lambda,\mu}$

Soit S le fibré des spineurs sur (M, g) à spin et conformément plate. Les λ-densités spinorielles $\mathsf{F}^\lambda = \Gamma(\mathsf{S}) \otimes \mathcal{F}^\lambda$ possèdent une structure de $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module

$$\mathsf{L}_X^\lambda = \mathsf{L}_X + \lambda \mathrm{Div}(X).$$

Le $\mathrm{o}(p+1, q+1)$-module des opérateurs différentiels spinoriels est $\mathsf{D}^{\lambda,\mu} \simeq \mathcal{D}^{\lambda,\mu} \otimes \Gamma(C\ell(T^*M))$, muni de

$$\mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} A = \mathsf{L}_X^\mu A - A \mathsf{L}_X^\lambda.$$

Il hérite de la filtration de $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}$. L'ordre normal s'écrit alors localement

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} : \mathcal{S}^\delta[\xi] & \to & \mathsf{D}^{\lambda,\mu} \\ P^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_\kappa}(x)\, \tilde{\xi}^{j_1} \dots \tilde{\xi}^{j_\kappa}\, \tilde{p}_{i_1} \dots \tilde{p}_{i_k} & \mapsto & P^{i_1 \dots i_k}_{j_1, \dots j_\kappa}(x) \dfrac{\tilde{\gamma}^{j_1}}{\sqrt{2}} \dots \dfrac{\tilde{\gamma}^{j_\kappa}}{\sqrt{2}}\, \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}} \partial_{i_1} \dots \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}} \partial_{i_k}. \end{array}$$

La quantification conformément équivariante

de $(\mathcal{M}, \omega)$

Problématique

Dans toute la suite, (M, g) est une variété conformément plate, à spin, de dimension n et de signature (p, q).

Existe-t-il une quantification conformément équivariante du supercotangent ?
i.e. un isomorphisme linéaire $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}[\xi] \to \mathrm{D}^{\lambda,\mu}$ préservant le symbole principal et telle que

$$\forall X \in \mathrm{conf}(M, g), \quad \mathcal{Q}^{\lambda,\mu} L_X^{\delta} = \mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}.$$

Est-elle unique ?

Peut-on en donner une écriture covariante explicite ?

Structure conforme de (M, g)

L'algèbre de Lie $\mathrm{conf}(M, g) \simeq \mathrm{conf}(\mathbb{R}^n, \eta) \simeq \mathrm{o}(p + 1, q + 1)$, admet pour générateurs :

- les translations infinitésimales $X_i = \partial_i$,
- les rotations infinitésimales $X_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i$,
- la dilatation infinitésimale $X_0 = x^i \partial_i$,
- les inversions infinitésimales $\bar{X}_i = x_j x^j \partial_i - 2 x_i x^j \partial_j$.

La sous algèbre des isométries est notée $\mathrm{e}(p, q)$ et celle des similitudes $\mathrm{ce}(p, q)$.

Remarque : sur une carte conforme, on a $\mathcal{N}^{-1} \mathcal{L}_X^{\lambda,\mu} \mathcal{N} = L_X^{\delta}$ si $X \in \mathrm{ce}(p, q)$.

L'équivariance par rapport aux similitudes

On se place sur une carte U,

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{D}^{\lambda,\mu}(U) \\ \mathcal{S}^{\delta}[\xi](U) \arrow[ur, "\color{red}{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}}"] \arrow[r, "\color{red}{Q^{\lambda,\mu}}"] & \mathcal{S}^{\delta}[\xi](U). \arrow[u, "\mathcal{N}"'] \end{tikzcd}$$

Proposition ([LO99])

Soit $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}[\xi] \to \mathrm{D}^{\lambda,\mu}$ une quantification équivariante sous les translations et les dilatations. Alors

$$Q^{\lambda,\mu} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}[x, \tilde{p}, \tilde{\xi}]) \simeq \mathbb{C}[x, \tilde{p}, \tilde{\xi}, \partial_x, \partial_{\tilde{p}}, \partial_{\tilde{\xi}}].$$

Si $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ est $\mathrm{ce}(p,q)$-équivariante, alors

$$Q^{\lambda,\mu} \in \mathrm{ce}(p,q)^!$$

le commutant de $\mathrm{ce}(p,q)$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x, \tilde{p}, \tilde{\xi}])$.

Les invariants des similitudes

Soit $\mathrm{ce}(p,q)^!_+$ et $\mathrm{e}(p,q)^!_+$ les sous algèbres des éléments invariants par changement d'orientation.

Proposition

$\mathrm{e}(p,q)^!_+$ est isomorphe à $\mathfrak{U}(\mathrm{spo}(2|2) \ltimes \mathfrak{h}(2|2))$, et engendré par

$$R = \tilde{p}^i \tilde{p}_i, \quad \mathcal{E}' = \tilde{p}_i \partial_{\tilde{p}_i} + \frac{n}{2}, \quad T = \partial_{\tilde{p}^i} \partial_{\tilde{p}_i}, \quad \Sigma' = \tilde{\xi}^i \partial_{\tilde{\xi}^i} - \frac{n}{2},$$

$$\Delta = \tilde{\xi}^i \tilde{p}_i, \quad \Phi = \tilde{p}^i \partial_{\tilde{\xi}^i}, \quad \Psi = \tilde{\xi}^i \partial_{\tilde{p}^i}, \quad \Omega = \partial_{\tilde{\xi}^i} \partial_{\tilde{p}_i}$$

engendrant l'algèbre de Lie $\mathrm{spo}(2|2)$, et par les opérateurs

$$G = \tilde{p}^i \tilde{\partial}_i, \quad D = \partial_{\tilde{p}_i} \tilde{\partial}_i, \quad L = \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}^i, \quad \text{et} \quad \Gamma = \tilde{\xi}^i \tilde{\partial}_i, \quad \Lambda = \partial_{\tilde{\xi}_i} \tilde{\partial}_i$$

engendrant l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(2|2)$.

Les invariants des similitudes

Si $Q^{\lambda,\mu} \in \mathrm{ce}(p,q)^!_+$ alors on a

$$Q^{\lambda,\mu} = C_{r,\delta,g,\gamma,\sigma,\phi,\lambda,l,e,\psi,\omega,d,t} R^r \Delta^\delta G^g \Gamma^\gamma \Sigma^\sigma \Phi^\phi \Lambda^\lambda L^l \mathcal{E}^e \Psi^\psi \Omega^\omega D^d T^t$$

chaque monôme vérifiant

$$2r + 2g + 2l + \delta + \phi + \gamma + \lambda - \psi - \omega - 2t = 0.$$

Vu la complexité de $\mathrm{ce}(p,q)^!_+$, Restriction aux symboles de degré au plus 1,

pour obtenir une formule explicite de

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}[\xi] \to \mathsf{D}^{\lambda,\mu}_{1}.$$

Quantifications équivariantes sous les similitudes

Proposition

Soit $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}[\xi] \to \mathrm{D}^{\lambda,\mu}_1$ *une quantification* $\mathrm{ce}(p,q)$*-équivariante (et invariante par changement d'orientation), alors*

$$Q^{\lambda,\mu} = \mathrm{Id} + c_d(\Sigma)D + c_{\gamma\psi}(\Sigma)\Gamma\Psi + c_{\lambda\psi}(\Sigma)\Lambda\Psi + c_{\gamma\omega}(\Sigma)\Gamma\Omega + c_{\lambda\omega}(\Sigma)\Lambda\Omega$$

où $c_d(\Sigma), \ldots, c_{\lambda\omega}(\Sigma)$*, sont des polynômes en* $\Sigma = \tilde{\xi}^i \partial_{\tilde{\xi}^i}$.

La quantification conformément équivariante

Si $Q^{\lambda,\mu}$ est conformément équivariante, elle vérifie

$$\mathcal{L}^{\lambda,\mu}_{\bar{X}_i} Q^{\lambda,\mu} = Q^{\lambda,\mu} L^{\delta}_{\bar{X}_i}$$

pour les inversions conformes $\bar{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Théorème

Soit $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^{\delta}_{\leq 1}[\xi] \to \mathrm{D}^{\lambda,\mu}_1$ une quantification conformément équivariante.

1. *Si $n\delta \notin \{1, \ldots, n+1\}$, alors $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ existe et elle est unique.*
2. *Sinon, il n'existe pas de telle quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$, sauf si $(\lambda = \frac{-1}{2n}, \mu = \frac{2n+1}{2n})$ ou $(\lambda = \frac{-1}{2n}, \mu = \frac{2n+1}{2n})$, appelées résonances.*
3. *Pour les deux résonances, la condition $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(\bar{P}) = \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P)^*$ détermine complètement $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$.*

La superisation conformément équivariante

On utilise la même démarche,
$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^\delta[\xi] \arrow[r, "\mathrm{S}^\delta"] & \mathcal{S}^\delta[\xi] \\ \mathcal{T}^\delta[\xi] \arrow[u, "\mathrm{ev}_g"] \arrow[ur, "\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}"'] & \end{tikzcd}.$$

Théorème

Soit $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}^\delta_{\leq 1}[\xi] \to \mathcal{S}^\delta_{\leq 1}[\xi]$ *une superisation conformément équivariante.*

1. *Si* $n\delta \notin \{2, \ldots, n\}$, *alors* $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$ *existe et elle est unique.*
2. *Sinon, il n'existe pas de telle superisation* $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$.

Formules covariantes pour $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ et $\mathcal{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$

Dans le cas générique, on a pour $P \in \mathcal{S}^{\delta}_{1}[\xi]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) &= \mathcal{N}(P^i)\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_i \\ &\quad +\mathcal{N}\Big((c_d + c_{\lambda\psi})\,\tilde{\partial}_i P^i - c_{\lambda\psi}\,\eta^{jk}\tilde{\xi}_i\tilde{\partial}_j P^i_k + c_{\gamma\omega}\,\tilde{\xi}^j\tilde{\partial}_j P^i_i + c_{\lambda\omega}\,\eta^{jk}\tilde{\partial}_j P^i_{ik}\Big).\end{aligned}$$

$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ n'est pas conformément invariante, par contre $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} \circ \mathcal{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$ l'est.

Proposition

Si $n\delta \notin \{1, \ldots, n+1\}$, la superisation et la quantification sont données par

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}(P) &= P^i_{j_1\ldots j_\kappa}\xi^{j_1}\ldots\xi^{j_\kappa}\,p_i + \frac{\hbar}{\mathrm{i}(n\delta - \Sigma)}\xi^i\xi_j\partial^\nabla_i P^j, \\ \mathcal{Q}^{\lambda,\mu}(P) &= \mathcal{N}(P^i)\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla^\lambda_i \\ &\quad +\mathcal{N}\Big((c_d + c_{\lambda\psi})\,\partial^\nabla_i P^i - c_{\lambda\psi}\,g^{ij}g_{kl}\xi^l\partial^\nabla_i P^k_j + c_{\gamma\omega}\,\xi^i\partial^\nabla_i P^j_j + c_{\lambda\omega}\,g^{ij}\partial^\nabla_i P^k_{kj}\Big).\end{aligned}$$

Existence et unicité en tout degré

des quantifications et superisations conformément équivariantes

Opérateurs de Casimir et construction de $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ et $\mathcal{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$

Les opérateurs de Casimir des trois $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules sont [1]

- $C^{\delta}_{\mathcal{T}} = \widehat{C_\delta} + \Sigma(\Sigma - n) + 2(\Delta\Omega + \Phi\Psi) - 2\mathcal{E}$,
- $C^{\delta}_{\mathcal{S}} = C^{\delta}_{\mathcal{T}} + 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\Gamma\Psi$,
- $C^{\lambda,\mu}_{\mathrm{D}} = C^{\delta}_{\mathcal{T}} + \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(GT - 2\left(\mathcal{E} + n\lambda + \frac{1}{2}\right)D + 2\Gamma\Psi + \Lambda\Psi + \Gamma\Omega - \frac{1}{2}\Lambda\Omega\right)$.

Si $\mathcal{Q} : A \to B$ est un morphisme de $\mathrm{o}(p+1,q+1)$-modules, on a :

$$\mathcal{Q} C_A = C_B \mathcal{Q}.$$

Idée [DLO99] :

- $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$ est diagonalisable et admet un unique vecteur propre de valeur propre et symbole principal donné.
- $\mathcal{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}$ est construite via : (un vecteur propre de $C^{\delta}_{\mathcal{T}}$) $\longmapsto$ (le vecteur propre de $C^{\delta}_{\mathcal{S}}$ de même valeur propre et symbole principal).

1. où $\widehat{C_\delta} = RT + [1 + n(\delta - 1) - \mathcal{E}]\,\mathcal{E} - n^2\delta(\delta - 1)$ est celui de $\mathcal{S}^{\delta}$

Résultats d'existence et unicité

Théorème

1. *Si* $\delta \notin I_S = \{\frac{k+1}{n} \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, *il existe une unique superisation conformément équivariante* $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}^\delta[\xi] \to \mathcal{S}^\delta[\xi]$.
2. *Il existe* $I_Q \subset \mathbb{Q}^*$ *(et* $I_Q \supset I_S$*) tel que, si* $\delta \notin I_Q$, *il existe une unique quantification conformément équivariante* $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathcal{S}^\delta[\xi] \to \mathrm{D}^{\lambda,\mu}$.

Eléments invariants conformes et résonances

- $R = \tilde{p}_i \tilde{p}^i$, le symbole du laplacien,
- $\Delta = \tilde{p}_i \tilde{\xi}^i$, le symbole de l'opérateur de Dirac,
- $\chi = \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \tilde{\xi}^{j_1} \dots \tilde{\xi}^{j_n}$, le symbole de la chiralité,
- $\Delta * \chi = \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \tilde{p}^{j_1} \tilde{\xi}^{j_2} \dots \tilde{\xi}^{j_n}$, le produit de Moyal de Δ et χ.

Théorème

Les invariants conformes sont donnés par

1. $\mathrm{ev}_g^{-1}\left(\Delta^a * \chi^b R^s\right) \in \mathcal{T}^{\frac{2s+a}{n}}$, *où* $a, b = 0, 1$ *et* $s \in \mathbb{N}$.
2. $\Delta^a * \chi^b R^s \in \mathcal{S}^{\frac{2s+a}{n}}[\xi]$, *où* $s \in \mathbb{N}$ *et* $a, b = 0, 1$ *avec* $a + b \neq 0$.
3. $\mathcal{N}(\chi) \in \mathrm{D}^{\lambda,\lambda}$, $\mathcal{N}(\Delta * \chi) \in \mathrm{D}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}$, *et* $\mathcal{N}(\Delta R^s) \in \mathrm{D}^{\frac{n-2s-1}{2n},\frac{n+2s+1}{2n}}$, *ceci pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $s \in \mathbb{N}$.

Remarque : les invariants conformes se correspondent via

$$\mathcal{T}^\delta \xrightarrow{\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}} \mathcal{S}^\delta \xrightarrow{\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}} \mathrm{D}^{\lambda,\mu},$$

lorsque $\mathrm{S}^\delta_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ existent.

Eléments invariants conformes et résonances

Corollaire

La chiralité est invariante conforme et obtenue comme quantifiée de χ,

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\lambda}(\chi) = (\sqrt{2})^{-n}(\mathrm{vol}_g)_{i_1\cdots i_n}\gamma^{i_1}\ldots\gamma^{i_n}.$$

Les opérateurs de Dirac et de Dirac twisté sont invariants conformes et obtenus comme quantifiés de Δ *et* $\Delta * \chi$ *pour des poids résonants :*

$$\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}(\Delta) = \frac{\gamma^i}{\sqrt{2}}\nabla_i \in \mathcal{D}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}},$$

$$\mathcal{Q}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}(\Delta * \chi) = g^{ij_1}(\mathrm{vol}_g)_{j_1\ldots j_n}\frac{\gamma^{j_2}}{\sqrt{2}}\ldots\frac{\gamma^{j_n}}{\sqrt{2}}\nabla_i \in \mathcal{D}^{\frac{n-1}{2n},\frac{n+1}{2n}}.$$

Tenseurs de Killing-Yano conformes et supercharges

Définition

Un tenseur de Killing-Yano conforme d'ordre κ est une κ-forme f tq

$$\nabla_{(j_1} f_{j_2)j_3\ldots j_{\kappa+1}} = g_{j_1 j_2}\Phi_{j_3\ldots j_{\kappa+1}} - (\kappa-1) g_{[j_3(j_1}\Phi_{j_2)j_4\ldots j_{\kappa+1}]},$$

où Φ est un tenseur d'ordre $\kappa - 1$, nul si f est de Killing-Yano.

Soit $P_f = f^{i}_{j_1\ldots j_{\kappa-1}}\xi^{j_1}\ldots\xi^{j_{\kappa-1}}p_i \in \mathcal{T}^0$ pour f un tenseur antisymétrique.

Théorème

$\{\Delta, \mathcal{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f)\} = 0 \; (\propto \Delta) \Longleftrightarrow$ *f est un tenseur de Killing-Yano (conforme).*

Soit f un tenseur de Killing-Yano conforme d'ordre 2, on a

$$\mathcal{Q}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathcal{S}^0_{\mathcal{T}}(P_f)) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}\sqrt{2}}\left(\gamma^j f^i_j \nabla^{\lambda=\frac{1}{2}}_i + \frac{1}{6}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\nabla_i f_{jk} + \frac{1}{2}\gamma^j\nabla_i(f^i_j)\right).$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathsf{D}^{\lambda,\mu}, \mathcal{L}^{\lambda,\mu}) & \text{opérateurs quantiques} \\
\mathcal{S}^{\delta}[\xi] \arrow[r, "\mathrm{S}^{\delta}"] & (\mathcal{S}^{\delta}[\xi], L^{\delta}) \arrow[r, "Q^{\lambda,\mu}"] \arrow[ur, "\color{red}\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}"] & \mathcal{S}^{\delta}[\xi] \arrow[u, "\mathcal{N}"'] & \text{symboles classiques} \\
(\mathcal{T}^{\delta}[\xi], \mathbb{L}^{\delta}) \arrow[u, "\mathrm{ev}_g"] \arrow[ur, "\color{red}\mathrm{S}^{\delta}_{\mathcal{T}}"] & & & \text{tenseurs}
\end{tikzcd}
$$

Géometrie projective du supercercle : construction unifiée du birapport et de la dérivée schwarzienne [2]

Travail en commun avec Christian DUVAL

2. Michel, J.-P. et Duval, C., On the projective geometry of the supercircle : a unified construction of the super cross-ratio and Schwarzian derivative, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14) : Art. ID rnn054, 47, 2008.

Structure géométrique, groupe d'automorphismes et invariants, discret et différentiel

géométrie $\equiv$ groupe (F.Klein)

Le cercle :

géométrie euclidienne : translations, distance, log de la dérivée.

géométrie affine : translations et dilatations, rapport de distances, rapport de la dérivée seconde et de la dérivée.

géométrie projective : homographies, birapport, dérivée schwarzienne.

Généralisation au supercercle $S^{1|1}$?

Structure de contact du supercercle

Le supercercle, $\mathbb{S}^{1|1}$, admet pour système de coordonnées (x, ξ) et sa structure de contact canonique est donnée par la direction de

$$\alpha = dx + \xi d\xi \quad \text{ou} \quad D = \partial_\xi + \xi \partial_x.$$

Le groupe des contactomorphismes $K(1)$ est le sous groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^{1|1})$ tel que

$$\Phi^* \alpha = E_\Phi \alpha,$$

où E_Φ est une superfonction.

Le supergroupe $\mathrm{SpO}(2|1)$

Par définition, $SpO(2|1)$ est le supergroupe linéaire préservant la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2|1}$. Un élement g de $SpO(2|1)$ s'écrit :

$$g = \begin{pmatrix} a & b & \gamma \\ c & d & \delta \\ \alpha & \beta & e \end{pmatrix}$$

avec 4 équations de contraintes sur les coefficients. Le sous-groupe de bérézinien 1, $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, agit fidèlement sur $\mathrm{S}^{1|1}$ par contactomorphismes via les superhomographies :

$$\widehat{g}(x,\xi) = \left(\frac{ax+b+\gamma\xi}{cx+d+\delta\xi}, \frac{\alpha x+\beta+e\xi}{cx+d+\delta\xi} \right).$$

Les sous-groupes euclidien $\mathrm{E}(1|1)$ et affine $\mathrm{Aff}(1|1)$ sont caractérisés par $\Phi^*\alpha = \alpha$ et $\Phi^*\alpha = c\,\alpha$ avec c une constante.

Rappel sur le birapport sur S^1

Le birapport est un invariant à 4 points des homographies, vérifiant

$$[\infty, 0, 1, a] = a.$$

Le groupe des homographies agit de manière simplement 3-transitive sur le cercle $\Rightarrow$ le birapport est défini par

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\infty, 0, 1, h(x_4)] = h(x_4)$$

où h est l'unique homographie telle que $h : (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (\infty, 0, 1)$. La détermination de h conduit à

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{[x_1, x_3][x_2, x_4]}{[x_2, x_3][x_1, x_4]}.$$

Théorème

Action simplement n-transitive $\Rightarrow$ "$h(x_{n+1})$" invariant caractéristique à $n+1$ points.

Construction du superbirapport

- L'action de $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ n'est pas 3-transitive !
  Pour un triplet de "points" $t_1 = (x_1, \xi_1)$, $t_2 = (x_2, \xi_2)$ et $t_3 = (x_3, \xi_3)$, il existe une superhomographie h tel que :

  $$h(t_1) = (\infty, 0), \quad h(t_2) = (0, 0) \quad \text{et} \quad h(t_3) = (1, \zeta)$$

  où ζ est uniquement déterminé par t_1, t_2 et t_3, au signe près.
- L'action de $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ est $3|2$-transitive.

Théorème

Action simplement $p|q$-transitive $\Rightarrow$ "$h(t_{p+1})$" couple d'invariants caractéristiques.

Invariants du supercercle

Le groupe $\mathrm{E}(1|1)$ des supertranslations est $1|1$-transitif $\Rightarrow$ bipoints :

$$\begin{aligned}[t_1, t_2] &= x_2 - x_1 - \xi_2\xi_1,\\ \{t_1, t_2\} &= \xi_2 - \xi_1.\end{aligned}$$

Le groupe des superhomographies est $3|2$-transitif $\Rightarrow$ birapports :

$$\begin{aligned}[t_1, t_2, t_3, t_4] &= \frac{[t_1, t_3][t_2, t_4]}{[t_2, t_3][t_1, t_4]},\\ \{t_1, t_2, t_3, t_4\} &= [t_1, t_2, t_3, t_4]^{\frac{1}{2}}\,\frac{\{t_2, t_4\}[t_1, t_2] - \{t_1, t_2\}[t_2, t_4]}{([t_1, t_2][t_2, t_4][t_1, t_4])^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Les 1-cocycles euclidien, affine et projectif de $K(1)$

La formule de Cartan se généralise au supercercle et permet d'obtenir à partir des invariants discrets des 1-cocycles de $K(1)$, définis par $C(\Phi \circ \chi) = \Phi^* C(\chi) + C(\Phi)$.

Théorème

Soit $\Phi \in K(1)$, et E_Φ la superfonction telle que $E_\Phi = \frac{\Phi^*\alpha}{\alpha}$, on obtient trois 1-cocycles

- *le cocycle euclidien* $\mathcal{E} : K(1) \to \mathcal{F}^0(\mathrm{S}^{1|1})$, $\quad \mathcal{E}(\Phi) = \log E_\Phi$,
- *le cocycle affine* $\mathcal{A} : K(1) \to \Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$, $\quad \mathcal{A}(\Phi) = d\mathcal{E}(\Phi)$,
- *la dérivée schwarzienne* $\mathcal{S} : K(1) \to \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$,

de noyaux $\mathrm{E}(1|1)$, $\mathrm{Aff}(1|1)$ *et* $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ *respectivement.*

Projection des $K(1)$-cocycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sur les densités

La contraction des 1-cocycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ avec D conduit à deux nouveaux cocycles.

Théorème

Il existe deux 1*-cocycles affine et projectif, à valeurs dans les densités*

- *le cocycle affine,* $\mathrm{A} : K(1) \to \mathcal{F}^{\frac{1}{2}}$ *:*

$$\mathrm{A}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}} \langle D, \mathcal{A}(\Phi) \rangle = \frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\,\alpha^{\frac{1}{2}},$$

- *la dérivée schwarzienne,* $\mathrm{S} : K(1) \to \mathcal{F}^{\frac{3}{2}}$ *:*

$$\mathrm{S}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}} \langle D, \mathcal{S}(\Phi) \rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{D^3 E_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\,\frac{DE_\Phi\, D^2 E_\Phi}{E_\Phi^2}\right)\alpha^{\frac{3}{2}}. \qquad (1)$$

Classification des espaces de cohomologie $H^1(K(1),\mathcal{F}^\lambda)$

Pour les applications $C : K(1) \to \mathcal{F}^\lambda$, il existe aussi une notion de 1-cobord : $C(\Phi) = \Phi^* m - m$, pour $m \in \mathcal{F}^\lambda$. Le quotient des 1-cocycles par les 1-cobords est le premier espace de cohomologie $H^1(K(1),\mathcal{F}^\lambda)$.

Corollaire

Les espaces de cohomologie $H^1(K(1),\mathcal{F}^\lambda)$ sont donnés par

$$H^1(K(1),\mathcal{F}^\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \lambda = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Ces trois espaces de cohomologie sont respectivement engendrés par $\mathcal{E}$, A et S.

Synthèse

$$\begin{tikzcd}
\textit{Groupes} \arrow[rr, leftrightarrow, "p|q \text{ transitivité}"] & & \textit{Invariants} \arrow[dl, "\textit{Cartan}"] \\
& \textit{Cocycles} \arrow[ul, "\textit{noyaux}"] &
\end{tikzcd}$$

Perspectives

Première partie

- Lien entre le quantifié du hamiltonien $H = g^{ij}p_ip_j$ du flot géodésique et le laplacien de Lichnerowicz.
- Correspondance entre résonances et éléments invariants.
- Expression covariante des opérateurs conformément invariants de degré 3, et plus...
- Approfondir la correspondance entre tenseurs de Killing-Yano (conformes) et supercharges.
- Généraliser les approches de la quantification équivariante en termes de connexion de Cartan et de "tractors" au cas du supercotangent.

Seconde partie

- Classification des géométries de $\mathbb{S}^{1|2}$.
- Le cocycle de Bott-Thurston comme cup-produit $\mathcal{E}$ et A.

F. Boniver, S. Hansoul, P. Mathonet, and N. Poncin.
Equivariant symbol calculus for differential operators acting on forms.
Lett. Math. Phys., 62(3) :219–232, 2002.

F. A. Berezin and M. S. Marinov.
Particle spin dynamics as the grassmann variant of classical mechanics.
Annals of Physics, 104 :336–362, April 1977.

C. Duval, P. B. A. Lecomte, and V. Yu. Ovsienko.
Conformally equivariant quantization : existence and uniqueness.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 49(6) :1999–2029, 1999.

C. Duval and V. Yu. Ovsienko.
Conformally equivariant quantum Hamiltonians.
Selecta Math. (N.S.), 7(3) :291–320, 2001.

E. Getzler.
Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem.

Comm. Math. Phys., 92(2) :163–178, 1983.

Y. Kosmann.
Dérivées de Lie des spineurs.
Ann. Mat. Pura Appl. (4), 91 :317–395, 1972.

B. Kostant.
Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization.
In *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975)*, pages 177–306. Lecture Notes in Math., Vol. 570. Springer, Berlin, 1977.

S. E. Loubon Djounga.
Conformally invariant quantization at order three.
Lett. Math. Phys., 64(3) :203–212, 2003.

P. B. A. Lecomte.
Towards projectively equivariant quantization.
Progr. Theoret. Phys. Suppl., (144) :125–132, 2001.
Noncommutative geometry and string theory (Yokohama, 2001).

D. A. Leĭtes.
Introduction to the theory of supermanifolds.
Uspekhi Mat. Nauk, 35(1(211)) :3–57, 255, 1980.

P. B. A. Lecomte and V. Yu. Ovsienko.
Projectively equivariant symbol calculus.
Lett. Math. Phys., 49(3) :173–196, 1999.

P. Mathonet and F. Radoux.
Existence of natural and conformally invariant quantizations of arbitrary symbols.
arXiv :0811.3710 [math.DG], 2008.

M. Rothstein.
The structure of supersymplectic supermanifolds.
In *Differential geometric methods in theoretical physics (Rapallo, 1990)*, volume 375 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 331–343. Springer, Berlin, 1991.

G. M. Tuynman.
Geometric quantization of the BRST charge.

Comm. Math. Phys., 150(2) :237–265, 1992.

F. F. Voronov.
Quantization on supermanifolds and an analytic proof of the Atiyah-Singer index theorem.
In *Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 38 (Russian)*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 3–118, 186. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990. Translated in J. Soviet Math. **6**4 (1993), no. 4, 993–1069.