



Méthodes spectrales et théorie des cristaux liquides

Nicolas Raymond

► To cite this version:

Nicolas Raymond. Méthodes spectrales et théorie des cristaux liquides. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT : . tel-00424859

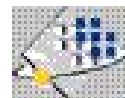
HAL Id: tel-00424859

<https://theses.hal.science/tel-00424859>

Submitted on 19 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 9576

UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11

Spécialité : Mathématiques

par

Nicolas Raymond

Méthodes spectrales et théorie des cristaux liquides

Soutenue le Lundi 12 Octobre 2009 après avis des rapporteurs

Mme. Sylvia Serfaty
M. Maciej Zworski

devant la Commission d'examen composée de :

M. François Alouges	(Absent excusé)
M. Patrick Gérard	(Président)
M. Bernard Helffer	(Directeur de thèse)
M. Didier Robert	(Examineur)
Mme. Sylvia Serfaty	(Rapporteur)

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Bernard Helffer. Son soutien scientifique et humain, son intuition, sa rigueur et ses suggestions sportives ont largement contribué au plaisir que j'ai eu à travailler avec lui. Ensuite, je souhaiterais exprimer ma gratitude aux autres chercheurs qui m'ont soutenu durant ma thèse, par leurs questions, remarques et invitations à exposer mes travaux : François Alouges, Virginie Bonnaillie-Noël, Soeren Fournais, Ayman Kachmar, Stéphane Nonnenmacher, Mikael Persson, Thierry Ramond et Françoise Truc. Je souhaite aussi remercier mes rapporteurs Sylvia Serfaty et Maciej Zworski pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, ainsi que Patrick Gérard (pour ses conseils également) et Didier Robert pour leur présence dans mon jury.

Je remercie également l'Institut Schrödinger pour l'occasion qu'il m'a donnée de travailler pendant deux mois à Vienne. Malgré ce bref exil, je n'oublie pas l'équipe d'analyse d'Orsay et son ambiance chaleureuse, ainsi que les secrétaires disponibles et compétentes Valérie Lavigne et Catherine Poupon. Je remercie également l'ensemble des participants au groupe de travail que je coorganisais avec Annalisa. J'ai aussi une pensée pour mes collègues (passés et présents) du bureau 227, Annalisa, Antoine, Cathy, Jérôme, Pierre et Sourour et les admire pour avoir supporté ma folie (non sans séquelles). Une mention particulière pour Cathy qui trouvait toujours le moyen d'arriver au bureau avant moi et qui a été une grande source de motivation, pour Pierre, l'irréductible gauchiste qui me prenait en otage au café, pour Annalisa la féministe italienne exilée à Marseille et enfin pour mon autruche, fidèle compagne des fins de semaine studieuses. J'ai aussi une pensée pour les occupants du bureau 256 : Adeline, Aude, Juliette, Frédéric et Séverine (avec laquelle je partage bien des souvenirs de licence, maîtrise, agreg, dea...) qui m'ont permis bien des fois de ne pas manger tout seul après mes tds !

Comment ne pas remercier aussi mes amis, toujours à l'écoute au travers des épreuves et qui ont été, souvent sans le savoir, une source constante d'inspiration : Livia (et sa famille), Vincent, Vincent (et Joël), Jemil (et sa viole, son aspirateur, son four), Benjamin (et son tuba), Frédérique, Laetitia et Bouba. Mes pensées vont aussi à mon oncle et ma tante (et mes cousins Noé et Marisol) qui m'ont constamment soutenu dans mes projets, ainsi qu'à mes grands-parents. J'adresse aussi l'une de mes pensées à ma mère qui nous a quittés il y a sept ans. Enfin, je te remercie, toi, Romain, qui m'as tant inspiré et écouté. Inspiré, car c'est durant les quelques jours qui ont précédé tes écrits du CAPES de philosophie que j'ai rédigé les deux premières parties de ce manuscrit ; écouté, car tu as aussi été l'oreille attentive à mes problèmes familiaux, mathématiques et philosophiques.

À Romain,
À ma mère

Résumé

Cette thèse est consacrée à deux types de problèmes. Le premier et principal aspect de ce travail concerne l'analyse semi-classique de la plus petite valeur propre $\lambda_1(B, \mathbf{A})$ de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger magnétique $(i\nabla + B\mathbf{A})^2$ dans le cas où le champ magnétique $\boldsymbol{\beta} = \nabla \times \mathbf{A}$ n'est pas uniforme. Plus précisément, en dimension 2, nous établissons un développement asymptotique à deux termes de $\lambda_1(B, \mathbf{A})$ lorsque B tend vers l'infini et démontrons simultanément des résultats de localisation pour les premières fonctions propres correspondantes ; pour ce qui est du problème en dimension 3, nous étudions d'une part des estimations uniformes pour une famille de champs magnétiques d'intensité constante (en vue de l'application à une famille spéciale apparaissant à l'occasion de la théorie des cristaux liquides) et d'autre part nous nous plaçons dans des hypothèses génériques sur le champ magnétique et prouvons une majoration qui laisse conjecturer l'expression des deuxième et troisième termes du développement asymptotique. Le deuxième aspect de cette thèse est l'étude de la transition de phase en théorie des cristaux liquides. Nous mettons en évidence une température critique pour la fonctionnelle de Landau-de Gennes qui permet de déterminer, lorsque certains coefficients de la fonctionnelle appelés constantes d'élasticité explosent, la phase dans laquelle se trouve le cristal liquide (nématique ou smectique). Par ailleurs, nous sommes amenés à introduire une nouvelle fonctionnelle (en imposant une condition de Dirichlet non homogène) en vue d'obtenir des informations plus quantitatives.

Mots clés : Opérateur de Schrödinger magnétique avec champ non uniforme, théorie spectrale, analyse semi-classique, estimations d'Agmon, fonctionnelle de Landau-de Gennes, transition de phase des cristaux liquides

Die Mathematik ist von den frühesten Zeiten her, wohin die Geschichte der menschlichen Vernunft reicht, in dem bewundernswürdigen Volke der Griechen den sicheren Weg einer Wissenschaft gegangen.

I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*

Die Wissenschaft denkt nicht.

M. Heidegger, *Was heisst denken?*

Le monde sur lequel opère le mathématicien est un monde qui meurt et renaît à chaque instant.

H. Bergson, *L'Évolution Créatrice*

Table des matières

1	Introduction	15
1.1	Cadre de travail pour le problème semi-classique	16
1.2	Analyse semi-classique : 2D	18
1.2.1	Préliminaires	18
1.2.2	Développement à deux termes pour le champ magnétique variable	22
1.3	Analyse semi-classique : 3D	25
1.3.1	Problème dans \mathbb{R}_+^3	25
1.3.2	Des estimations uniformes quand le champ n'est pas constant, mais seulement de module constant	27
1.3.3	Une majoration dans un cas générique	29
1.4	Méthodes de démonstration	32
1.4.1	Majoration : construction de quasimodes	34
1.4.2	Vers la minoration : les partitions de l'unité	36
1.4.3	Vers la minoration : les estimations d'Agmon	38
1.5	Fonctionnelle de Landau-de Gennes	42
1.5.1	Motivations et cadre de travail	45
1.5.2	Idées et résultats principaux	47

I Analyse semi-classique d'opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique non uniforme : 2D **53**

2	Majoration en 2D	55
2.1	Majorations : constructions formelles	55
2.1.1	Un opérateur modèle	55
2.1.2	Calculs formels pour le cas dégénéré	56
2.1.3	Calculs formels pour le cas non-dégénéré	58
2.2	Quasimodes	60
2.2.1	Coordonnées (s, t)	60
2.2.2	Quasimode pour le cas dégénéré	61

2.2.3	Quasimode pour le cas non-dégénéré	64
3	Minoration en 2D	67
3.1	Minoration grossière	67
3.1.1	Partition de l'unité	67
3.1.2	Estimations pour la minoration	68
3.2	Minoration raffinée	72
3.2.1	Estimations tangentielles d'Agmon	72
3.2.2	Minoration raffinée	78
3.2.3	Minoration pour le modèle	80
II	Analyse semi-classique d'opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique non uniforme : 3D	85
4	Estimations uniformes	87
4.1	Majoration	87
4.2	Minoration	88
4.3	Application à $\mu^*(q, \tau)$	91
4.4	Estimées d'Agmon	93
4.4.1	Une estimée uniforme	94
4.4.2	Localisation près du bord quand $\tau \rightarrow +\infty$	95
4.5	Application : le cas des grands ouverts	96
5	Étude de la famille d'opérateurs $H(\theta)$	99
5.1	Décroissance exponentielle	99
5.2	Quelques propriétés de u_θ	103
5.2.1	Une formule de moment	103
5.2.2	D'autres formules	104
5.2.3	Propriétés de $H(\theta, \rho)$	105
6	Majoration en dimension 3	111
6.1	Un modèle sur \mathbb{R}_+^3	111
6.1.1	Le modèle	111
6.1.2	Minimum non-dégénéré de $\hat{\beta}$	116
6.2	Construction d'un quasimode	119
6.2.1	Changement d'échelle	119
6.2.2	Quasimode	119
6.2.3	Majoration	131

III Analyse asymptotique de la fonctionnelle de Landau-de Gennes 135

7 Étude asymptotique de \mathcal{F}	137
7.1 Existence des minimiseurs de \mathcal{F}	137
7.2 Équations d'Euler-Lagrange	139
7.3 Nématocité des minimiseurs	141
8 Étude asymptotique de \mathcal{F}^{Dir}	145
8.1 Préliminaires à l'étude de \mathcal{F}^{Dir}	145
8.1.1 Trace des éléments de $V(\Omega, \mathbb{S}^2)$	145
8.1.2 Existence des minimiseurs de \mathcal{F}^{Dir}	146
8.1.3 Un peu de théorie spectrale	147
8.2 Régime $K_1, K_2 \rightarrow \infty$ pour \mathcal{F}^{Dir}	150
8.2.1 Estimation d'énergie : preuve du Théorème 1.5.7	150
8.2.2 Nématocité/Smectocité des minimiseurs	151
A Étude de $\mathfrak{h}(\sigma, B)$	155
B Troisième champ critique	159
B.1 Définition de la fonctionnelle	159
B.2 Estimée de $H_{C_3}(\kappa)$ pour κ grand	160
C Description de $\mathcal{C}(\tau)$	163
D Coordonnées locales	167
D.1 Un choix général de coordonnées	167
D.2 Coordonnées (r, s, t)	169
E Estimations pour \mathcal{G}	171

Chapitre 1

Introduction

Le présent travail se laisse décomposer en deux parties relativement indépendantes quant aux méthodes qui sont utilisées et aux problèmes qui y sont abordés. Cependant, nous pouvons brièvement expliquer le lien qui unit les problématiques qui nous intéressent ici. Le problème initial qui a attiré notre attention est la transition de phase des cristaux liquides et l'étude de la fonctionnelle qui permet son étude, appelée fonctionnelle de Landau-de Gennes et qui constitue l'analogue de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau introduite en théorie de la supraconductivité (cf. [FH09]). Cette transition entre les phases nématique et smectique d'un cristal liquide, qui a déjà fait l'objet de travaux (cf. [BCLP02]), se produit autour d'une température critique que les articles [Pan03, Pan06, HP08b, HP08a] ont introduite et étudiée. Il se trouve que cette température est la plus petite valeur propre d'un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique (d'intensité B constante). Il est alors naturel de lui appliquer les méthodes semi-classiques (voir les travaux [HM01, HM02, HM04, FH06a, FH09]) pour en connaître un développement asymptotique quand $B \rightarrow +\infty$ et pour comprendre certains effets de localisation des fonctions propres associées. Le problème des cristaux liquides est posé naturellement en dimension 3 et nous sommes donc amenés à analyser un problème de Schrödinger en dimension 3. Cela est assez délicat, d'autant qu'une grande partie des résultats connus traitent le cas du champ uniforme et que, dans le cas des cristaux liquides, le champ n'est pas uniforme (seul son module l'est). Cela nous a alors amenés à nous interroger sur le problème en dimension 2 (puis 3) dans l'espoir de comprendre les nouveaux phénomènes que la non-uniformité du champ pouvait introduire. L'ensemble de ces problèmes a donné lieu aux quatre articles [Ray09d, Ray09c, Ray09a, Ray09b]. Nous allons commencer par préciser le cadre du problème de Schrödinger en dimension 2 (puis 3) et les problèmes semi-classiques qui nous ont occupés et ensuite nous aborderons les questions relatives aux cristaux liquides.

1.1 Cadre de travail pour le problème semi-classique

Dans cette section, nous introduisons d'abord les objets qui vont attirer notre attention. Ensuite, nous rappellerons les questions, les résultats connus et nous énoncerons les résultats auxquels nous avons abouti en dimension 2 d'une part et en dimension 3 d'autre part.

Afin de poser le problème qui nous intéresse, nous avons besoin de quelques notations.

Soit $d \in \{2, 3\}$. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d à bord régulier et $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$; on note $\mathbf{A} = (A_i)_{1 \leq i \leq d}$. \mathbf{A} est appelé potentiel vecteur et nous considérons le champ magnétique qu'il génère défini par :

$$\beta = \nabla \times \mathbf{A} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \text{ si } d = 2,$$

$$\beta = \nabla \times \mathbf{A} = (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \text{ si } d = 3.$$

Pour $B > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$, on introduit la forme quadratique :

$$q_{B\mathbf{A},\Omega}^N(u) = \int_{\Omega} |(i\nabla + B\mathbf{A})u|^2 dx$$

et nous considérons l'opérateur autoadjoint qui lui est associé par le théorème de Friedrichs, i.e la réalisation de Neumann de $(i\nabla + B\mathbf{A})^2$ sur Ω , notée $P_{B\mathbf{A},\Omega}$, qui admet comme domaine :

$$\{u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) : u \in H^2(\Omega, \mathbb{C}) \text{ et } (i\nabla + B\mathbf{A})u \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Comme le domaine de $q_{B\mathbf{A},\Omega}^N$ est $H^1(\Omega, \mathbb{C})$ et que cet espace de Sobolev s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega, \mathbb{C})$, le spectre de l'opérateur associé est une suite croissante de valeurs propres qui tend vers $+\infty$. Nous noterons $\lambda_1(B, \mathbf{A})$ la plus petite valeur propre de cet opérateur. Par le principe du mini-max, nous avons :

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \inf_{u \in H^1(\Omega)} \frac{q_{B\mathbf{A},\Omega}^N(u)}{\|u\|^2}.$$

Notre principal centre d'intérêt sera d'obtenir un développement asymptotique de $\lambda_1(B, \mathbf{A})$ lorsque $B \rightarrow +\infty$. Quitte à poser $B = h^{-1}$ et à considérer le régime $h \rightarrow 0$, nous voyons qu'il s'agit d'un problème semi-classique. Autrement dit, nous sommes amenés à étudier le spectre et le comportement des fonctions propres de

$$(ih\nabla + \mathbf{A})^2 = -h^2\Delta + 2ih\mathbf{A} \cdot \nabla + ih\operatorname{div}(\mathbf{A}) + \|\mathbf{A}\|^2,$$

quand $h \rightarrow 0$.

Rappelons brièvement quelques idées générales d'analyse semi-classique dans le cas où $\mathbf{A} = 0$, en présence d'un potentiel électrique V et sur l'axe réel. Cela donnera en effet un aperçu des principes que nous utiliserons.

Quelques idées semi-classiques

On considère la réalisation autoadjointe sur \mathbb{R} de :

$$-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

pour V une fonction régulière admettant un unique minimum non-dégénéré en 0 tel que $V(0) = 0$ et tendant vers l'infini quand $|x| \rightarrow +\infty$. On effectue le changement d'échelle :

$$x = h^{1/2}y,$$

et on est ramené à étudier quand $h \rightarrow 0$:

$$h \left(-\frac{d^2}{dy^2} + h^{-1}V(h^{1/2}y) \right).$$

On développe alors formellement près de 0 :

$$h^{-1}V(h^{1/2}y) = \frac{V''(0)}{2}y^2 + \sum_{j=3}^{+\infty} \alpha_j h^{j/2-1} y^j.$$

Ainsi, on peut se contenter d'examiner l'opérateur :

$$H^h = h \left(-\frac{d^2}{dy^2} + \frac{V''(0)}{2}y^2 \right) + \sum_{j=3}^{+\infty} \alpha_j h^{j/2} y^j.$$

La partie principale, lorsque $h \rightarrow 0$, est l'oscillateur harmonique. Si nous nous intéressons au bas du spectre, nous sommes amenés, en développant formellement la première valeur propre et une fonction propre associée, à :

$$\lambda_1^h = h \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j h^{j/2}$$

et

$$\psi^h = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j h^{j/2}.$$

Il est aisé de voir que λ_0 doit être la plus petite valeur propre de l'oscillateur harmonique (qui vaut $\sqrt{\frac{V''(0)}{2}}$) et ψ_0 une fonction propre associée (i.e. une gaussienne). Nous ne nous étendons pas davantage sur ce sujet ; nous y reviendrons dans la suite.

Nous pouvons enfin remarquer que les résultats que nous énoncerons ne dépendent pas du potentiel vecteur \mathbf{A} , mais du champ magnétique $\boldsymbol{\beta}$; cela est dû à une invariance de jauge. Introduisons en effet le gradient magnétique :

$$i\nabla_{B\mathbf{A}} = i\nabla + B\mathbf{A}$$

et observons que :

$$e^{-iB\phi} i\nabla_{B\mathbf{A},\Omega} e^{iB\phi} = i\nabla_{B\mathbf{A}+B\nabla\phi,\Omega},$$

d'où l'on tire :

$$e^{-iB\phi} P_{B\mathbf{A},\Omega} e^{iB\phi} = P_{B\mathbf{A}+B\nabla\phi,\Omega},$$

ce qui implique que $P_{B\mathbf{A},\Omega}$ et $P_{B\mathbf{A}+B\nabla\phi}$ sont unitairement équivalents (ils ont donc en particulier même spectre).

Nous distinguons à présent suivant la dimension.

1.2 Analyse semi-classique d'opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique en 2D

Avant d'introduire les questions et résultats principaux de notre travail concernant la dimension 2, nous commençons par examiner un problème plus simple.

1.2.1 Préliminaires

Pour comprendre les phénomènes qui vont apparaître dans la suite, nous considérons le problème avec champ magnétique constant dans \mathbb{R}_+^2 . Ce problème apparaîtra en effet de façon naturelle lorsque, sous certaines hypothèses, on sera ramené à un problème d'estimation d'énergie près du bord ; ce dernier sera alors approché par le demi-plan $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ et le champ sera approché par le champ constant.

Problème dans \mathbb{R}_+^2

Le champ magnétique est ici supposé constant égal à 1. Un potentiel vecteur associé est

$$\mathbf{A} = (-t, 0)$$

et nous considérons la réalisation de Neumann sur \mathbb{R}_+^2 de :

$$H = (D_s - t)^2 + D_t^2,$$

où $D_s = i\partial_s$ et $D_t = i\partial_t$.

En effectuant une transformée de Fourier par rapport à s , on décompose H sous forme d'intégrale directe (on se réfère à [RS78] pour plus de détails sur ce sujet) :

$$H = \int^\oplus H(\xi) d\xi,$$

où $H(\xi)$ est la réalisation de Neumann de $= D_t^2 + (t + \xi)^2$ sur \mathbb{R}_+ . On sait que le bas du spectre de H est donné par (cf. [RS78]) :

$$\inf \sigma(H) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \inf \sigma(H(\xi)).$$

Cela nous amène donc à examiner cette famille d'opérateurs dans le paragraphe suivant (les résultats énoncés sont démontrés dans [DH93, HM01]).

Oscillateur harmonique sur un demi-axe

Pour $\xi \in \mathbb{R}$, nous considérons la réalisation de Neumann $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ associée à

$$-\frac{d^2}{dt^2} + (t + \xi)^2, \quad \mathcal{D}(\mathfrak{h}^{N,\xi}) = \{u \in B^2(\mathbb{R}_+) : u'(0) = 0\}. \quad (1.2.1)$$

On sait que cet opérateur est à résolvante compacte puisque le domaine de la forme quadratique associée, notée $q^{N,\xi}$, est $B^1(\mathbb{R}_+)$ qui s'injecte de façon compacte dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. On note $\mu(\xi)$ sa plus petite valeur propre ; l'état propre associé, strictement positif et L^2 -normalisé est noté $u_\xi = u(\cdot, \xi)$ et la méthode des différences quotients permet de montrer qu'il est dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$ (cf. [Bré97]). La fonction $\xi \mapsto \mu(\xi)$ admet un unique minimum non-dégénéré en $\xi = \xi_0$ et on pose :

$$\Theta_0 = \mu(\xi_0), \quad (1.2.2)$$

$$C_1 = \frac{u_{\xi_0}^2(0)}{3}. \quad (1.2.3)$$

On peut montrer que $\Theta_0 = \xi_0^2$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit M_k :

$$M_k = \int_{t>0} (t + \xi_0)^k |u_{\xi_0}(t)|^2 dt.$$

Rappelons enfin les identités établies dans [BS98, p. 1283-1284] :

$$M_0 = 1, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = \frac{\Theta_0}{2}, \quad M_3 = \frac{C_1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\mu''(\xi_0)}{2} = 3C_1 \sqrt{\Theta_0}. \quad (1.2.4)$$

Résolvante régularisée

Nous noterons R_0 l'application définie de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ de la façon suivante.

Pour tout $f \in \langle u_{\xi_0} \rangle^\perp$, $R_0 f$ est l'unique solution $v \in \langle u_{\xi_0} \rangle^\perp \cap \mathcal{D}(\mathfrak{h}^{N, \xi_0})$ de

$$(\mathfrak{h}^{N, \xi_0} - \Theta_0)v = f$$

et pour tout $f \in \langle u_{\xi_0} \rangle$, $R_0 f = 0$.

Nous avons la proposition suivante (cf. [FH09]) :

Proposition 1.2.1 *R_0 envoie $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$ dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$.*

Historique et résultats

On supposera toujours que $\beta > 0$ sur $\overline{\Omega}$. Nous introduisons :

$$b = \inf_{\Omega} \beta \quad \text{and} \quad b' = \inf_{\partial\Omega} \beta. \quad (1.2.5)$$

On commence par citer un résultat fournissant le premier terme de l'asymptotique dans le cas d'un champ magnétique général, mais qui va pourtant nous fournir d'importants renseignements (voir [LP99a, FH09]) :

Théorème 1.2.2 *On dispose de l'estimation asymptotique suivante, quand $B \rightarrow +\infty$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \min(\Theta_0 b', b)B + o(B).$$

Heuristique du Théorème 1.2.2

Faisons quelques commentaires sur le sens des termes qui apparaissent dans le précédent théorème. La contribution énergétique liée à l'intérieur de Ω est bB et correspond asymptotiquement au bas du spectre de la réalisation de Dirichlet de $(i\nabla + B\mathbf{A})^2$ sur Ω (nous y reviendrons en (1.4.32)). La contribution énergétique du bord est $\Theta_0 b'B$ et s'obtient en approchant Ω par

le demi-plan près de $\partial\Omega$ et on est ramené au problème sur \mathbb{R}_+^2 avec champ uniforme. Nous supposons toujours que :

$$\Theta_0 b' < b, \quad (1.2.6)$$

ce qui fait du problème un problème de bord. Dans le cas d'un champ magnétique uniforme, nous pouvons noter que cette hypothèse est automatiquement vérifiée.

Énonçons un résultat dans le cas où β est constant, dans le cas du disque (cf. [BPT98]) et qui nous montre le genre de résultat qui va nous occuper :

Théorème 1.2.3 *On suppose que $\beta = 1$ et que $\Omega = D(0, R)$. Alors, quand $B \rightarrow +\infty$, on a :*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \Theta_0 B - C_1 R^{-1} \sqrt{B} + O(1),$$

En revenant au cas d'un ouvert général, l'idée est alors d'approcher le bord par le cercle osculateur et d'approcher le champ magnétique par le champ constant. Cela nous mène au théorème suivant :

Théorème 1.2.4 *Supposant que $\beta = 1$, nous avons le développement asymptotique suivant, quand $B \rightarrow +\infty$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \Theta_0 B - C_1 \kappa_{\max} \sqrt{B} + O(B^{1/3}),$$

où

$$\kappa_{\max} = \max\{k(s), s \in \partial\Omega\}$$

et $k(s)$ désigne la courbure du bord au point d'abscisse curviligne s . De plus, l'état fondamental décroît exponentiellement loin des points du bord où la courbure est maximale.

Remarque 1.2.5.

Ce résultat a été d'abord annoncé suite à une analyse formelle dans [BS98] et ensuite rigoureusement prouvé dans le cas du disque (voir [BPT98]). Mentionnons aussi que dans [LP99a], un développement au premier ordre a aussi été prouvé. Pour des développements à des ordres plus élevés, on peut enfin mentionner les travaux [dPFS00, HM01, FH06a, FH09]. Notre but est l'obtention d'un résultat analogue lorsque le champ magnétique n'est plus constant.

■

1.2.2 Développement à deux termes pour le champ magnétique variable

Commençons par énoncer une estimation grossière de la plus petite valeur propre :

Théorème 1.2.6 *Sous l'hypothèse (1.2.6) et en supposant de plus que $\beta|_{\partial\Omega}$ admet un unique minimum qui est non dégénéré, nous avons, quand $B \rightarrow +\infty$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \Theta_0 b' B + O(B^{1/2}).$$

Remarque 1.2.7.

Le premier terme a déjà été obtenu par de nombreux auteurs (cf. [LP99a, HM01]), mais avec un reste moins bon. Notre hypothèse de non-dégénérescence permet de trouver le reste optimal en $O(B^{1/2})$ (plus précisément, l'amélioration a lieu dans la minoration). Cet ordre de grandeur du reste est crucial dans l'établissement d'estimées d'Agmon tangentielles. ■

Énonçons un résultat de localisation tangentielle des premières fonctions propres pour voir plus précisément de quoi il s'agit.

Proposition 1.2.8 (Estimées tangentielles d'Agmon pour u_B) *Soit u_B une fonction propre associée à la plus petite valeur propre de $P_{B\mathbf{A},\Omega}$. Alors il existe $C > 0$ et $B_0 > 0$ tels que pour tout $B \geq B_0$, on a :*

$$\int \exp(\alpha_1 \chi(t(x))d(s(x))B^{1/2})\{|u_B|^2 + B^{-1}|(i\nabla + B\mathbf{A})u_B|^2\}dx \leq C\|u_B\|^2,$$

où χ est une fonction troncature régulière dans un voisinage du bord, $t(x) = d(x, \partial\Omega)$, $s(x)$ est l'abscisse curviligne sur le bord et où d est la distance d'Agmon au minimum de β définie dans la Section 3.2.

Remarque 1.2.9.

Cette estimation améliore la localisation trouvée dans [HM01] en ce qu'elle spécifie le comportement de u_B près du minimum de β . Dans le chapitre 3, nous obtiendrons également des estimées d'Agmon pour $D_s u_B$. Toutes ces localisations seront capitales dans l'obtention du deuxième terme du Théorème 1.2.6. ■

Nous pouvons enfin énoncer notre théorème principal qui donne l'expression du deuxième terme :

Théorème 1.2.10 *Supposant que $\beta|_{\partial\Omega}$ admet un unique minimum non dégénéré en x_0 , nous avons, quand $B \rightarrow +\infty$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \Theta_0 b' B + \Theta_{1/2} b'^{1/2} B^{1/2} + O(B^{2/5}),$$

où

$$\Theta_{1/2} = \Theta_{1/2}(x_0) = -\kappa(x_0)C_1 + \left(\frac{C_1}{2} - \Theta_0 \xi_0\right) \frac{1}{b'} \frac{\partial \beta}{\partial t}(x_0) + \Theta_0^{3/4} \left(\frac{3C_1}{2b'} \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}(x_0)\right)^{1/2}.$$

Il est aisé de généraliser ce résultat au cas où $\beta|_{\partial\Omega}$ admet un ensemble fini \mathcal{M} de minima non dégénérés ; nous disposons en effet du même développement asymptotique en remplaçant $\Theta_{1/2}$ par $\min_{x \in \mathcal{M}} \Theta_{1/2}(x)$. En fait, sans hypothèse sur la non-dégénérescence des minima, nous croyons que la conclusion du Théorème 1.2.10 reste vraie en remplaçant $\Theta_{1/2}$ par $\min_{x \in \mathcal{M}} \Theta_{1/2}(x)$. De plus, le reste optimal est certainement $O(B^{1/4})$ comme cela est suggéré par les calculs que nous effectuerons pour obtenir la majoration. Ces mêmes calculs nous invitent également à conjecturer le développement suivant de la n -ième valeur propre :

$$\lambda_n(B, \mathbf{A}) = \Theta_0 b' B + \Theta_{1/2}^n B^{1/2} + O(B^{1/4}).$$

où :

$$\Theta_{1/2}^n = -\kappa(x_0)C_1 + \left(\frac{C_1}{2} - \Theta_0 \xi_0\right) \frac{1}{b'} \frac{\partial \beta}{\partial t}(x_0) + (2n-1)\Theta_0^{3/4} \left(\frac{3C_1}{2b'} \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}(x_0)\right)^{1/2}.$$

Par ailleurs, ce théorème met en lumière le fait que, dans le cas du champ magnétique variable, la localisation n'est plus dirigée uniquement par la courbure ; il faut désormais prendre en compte les variations du champ magnétique qui sont du même ordre que l'effet géométrique. En fait, ce développement à deux termes pourrait certainement être généralisé à n'importe quel ordre sous les hypothèses précédentes (unicité et non-dégénérescence du minimum de $\beta|_{\partial\Omega}$) en utilisant une approche de Grushin (cf. [FH06a]). Nous pouvons aussi noter que le cas où le champ magnétique s'annule de façon non dégénérée dans Ω a été traité dans [KP02]. De plus, le cas où il s'annule de façon non dégénérée sur le bord demeure un problème ouvert et pourrait être un problème intéressant. D'autre part, les Théorèmes 1.2.6 et 1.2.10 sont sensibles à l'hypothèse de régularité du bord. Lorsque le domaine possède des coins (voir [Bon05, Theorem 1.2]) et avec un champ magnétique variable, l'état fondamental n'est plus nécessairement localisé près des points du bord où le champ magnétique est minimum. Enfin, le comportement asymptotique dans les Théorèmes 1.2.6 et 1.2.10 dépend fortement de

la condition de Neumann qu'on a mise au bord, comme on peut le voir dans [Kac06, Kac07a, Kac07b]. En particulier, dans certains cas, la localisation n'est plus déterminée par les points où β est minimal.

Champ magnétique constant sur le bord

Dans [Ara07, Ara06], le cas du champ magnétique constant sur le bord est traité. Néanmoins, ce cas a été étudié sous une hypothèse de non-dégénérescence très restrictive ; dans ces travaux, l'hypothèse est en effet que la courbure du bord κ est maximale en $x = x_0$ et que la dérivée normale $\frac{\partial\beta}{\partial t}$ admet précisément un unique minimum en $x = x_0$; de plus, le minimum de $\frac{\partial\beta}{\partial t} - b'\kappa$ est supposé non dégénéré. Dans notre travail, nous améliorons ce résultat en nous plaçant sous des hypothèses génériques ; en particulier, nous serons amenés à remarquer que la quantité à maximiser est la courbure magnétique définie par :

$$\tilde{\kappa}(x) = C_1\kappa(x) + \left(\Theta_0\xi_0 - \frac{C_1}{2}\right) \frac{1}{b'} \frac{\partial\beta}{\partial t}(x).$$

Plus précisément, notre résultat est le suivant :

Théorème 1.2.11 (Majoration : champ magnétique constant sur $\partial\Omega$)

Lorsque le champ magnétique est constant sur le bord, nous avons la majoration, lorsque B tend vers $+\infty$:

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \leq \Theta_0 b' B - \max_{x \in \partial\Omega} \left\{ C_1\kappa(x) - \left(\frac{C_1}{2} - \Theta_0\xi_0 \right) \frac{1}{b'} \frac{\partial\beta}{\partial t}(x) \right\} b'^{1/2} B^{1/2} + O(B^{1/3}),$$

où $\kappa(x)$ désigne la courbure du bord au point x .

Remarque 1.2.12.

1. La minoration correspondante pourrait certainement être obtenue avec les techniques de [FH09].
2. En supposant l'existence d'un unique maximum non dégénéré de la courbure magnétique $\tilde{\kappa}$, on pourrait sûrement donner un développement asymptotique à tout ordre de $\lambda_1(B, \mathbf{A})$ ainsi que des propriétés de localisation comme pour le cas du champ constant (voir [FH06a]).

■

1.3 Analyse semi-classique d'opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique en 3D

Afin de mieux comprendre les problèmes qui apparaissent en dimension 3, examinons le cas du champ uniforme dans

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}.$$

La raison pour laquelle nous considérons ce cas est la même que celle dont nous avons parlé au préalable en dimension 2.

1.3.1 Problème dans \mathbb{R}_+^3

Dans ce paragraphe, nous introduisons quelques notations essentielles et nous rappelons quelques résultats élémentaires.

L'angle entre le champ magnétique β et le plan $t = 0$ est noté θ et ainsi, quitte à effectuer une rotation, on peut requérir (en prenant un champ de norme 1) :

$$\beta = (0, \cos \theta, \sin \theta).$$

Un potentiel vecteur associé est

$$\mathbf{A} = (V_\theta(s, t), 0, 0),$$

où

$$V_\theta(s, t) = t \cos \theta - s \sin \theta \quad (1.3.7)$$

et on considère la réalisation de Neumann sur \mathbb{R}_+^3 de

$$\mathcal{H}(\theta) = (D_r + t \cos \theta - s \sin \theta)^2 + D_s^2 + D_t^2.$$

On définit :

$$\sigma(\theta) = \inf \sigma(\mathcal{H}(\theta)). \quad (1.3.8)$$

Après une transformation de Fourier dans la variable r , on peut décomposer $\mathcal{H}(\theta)$ sous forme d'intégrale directe (cf.[RS78]) :

$$\mathcal{H}(\theta) = \int^\oplus H(\theta, \tau) d\tau,$$

où :

$$H(\theta, \tau) = (\tau + t \cos \theta - s \sin \theta)^2 + D_s^2 + D_t^2. \quad (1.3.9)$$

On pose

$$H(\theta) = H(\theta, 0).$$

On définit :

$$\sigma(\theta, \tau) = \inf \sigma(H(\theta, \tau)) \quad (1.3.10)$$

et c'est alors un résultat classique que

$$\sigma(\theta) = \inf_{\tau} \sigma(\theta, \tau).$$

Le lemme suivant, dû à Lu-Pan et dont une preuve se trouve dans [FH09] (voir aussi les références qui s'y trouvent) réunit des propriétés élémentaires de la fonction σ :

Lemme 1.3.1 *Nous disposons des propriétés suivantes :*

1. $\inf \sigma(H(\theta)) = \sigma(\theta)$ pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
2. σ est analytique sur $]0, \frac{\pi}{2}[$,
3. σ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,
4. $0 < \sigma(0) < 1$ et $\sigma(\frac{\pi}{2}) = 1$.
5. Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\inf \sigma_{ess}(H(\theta)) = 1. \quad (1.3.11)$$

6. $\sigma(\theta)$ est une valeur propre simple de $H(\theta)$ associée à une fonction propre strictement positive et normalisée notée u_{θ} (voir aussi [RS78]).

En particulier, l'énergie minimale est atteinte quand le champ magnétique est tangent. Par un changement d'échelle, le bas du spectre obtenu quand le champ est de module $\|\beta\|$ et formant un angle θ avec le bord est donné par : $\|\beta\|\sigma(\theta)$. Pour $x \in \partial\Omega$, nous posons donc :

$$\hat{\beta}(x) = \sigma(\theta(x))\|\beta(x)\|, \quad (1.3.12)$$

où $\theta(x)$ est défini par :

$$\|\beta(x)\| \sin \theta(x) = \beta \cdot \nu(x)$$

avec $\nu(x)$ la normale entrante en x . Énonçons un résultat donnant le premier terme de l'asymptotique dans le cas général qui met en jeu cette quantité (cf. [LP99a, FH09]) :

Théorème 1.3.2 *Nous disposons du développement asymptotique suivant, quand $B \rightarrow +\infty$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \min(\inf_{\Omega} \|\beta(x)\|, \inf_{\partial\Omega} \hat{\beta}(x))B + O(B^{3/4})$$

Le cas du champ constant

Quand le champ est constant de module 1, on déduit du Lemme 1.3.1 et du Théorème 1.3.2 que, quand $B \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \Theta_0 B + O(B^{3/4}).$$

Introduisons

$$\Sigma := \{x \in \partial\Omega : \boldsymbol{\beta}(x) \cdot \nu(x) = 0\}$$

et supposons que Σ soit une sous-variété régulière de $\partial\Omega$. Une orientation étant choisie, on peut définir le vecteur unitaire tangent à Σ , noté T et on peut définir :

$$k_n(x) = K_x(T(x) \wedge \nu(x), \boldsymbol{\beta}),$$

où K désigne la deuxième forme fondamentale sur $\partial\Omega$. On peut alors énoncer le théorème (cf. [HM04]) :

Théorème 1.3.3 *On a le développement à deux termes suivant quand $B \rightarrow +\infty$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) = \Theta_0 B + \hat{\gamma}_0 B^{2/3} + O(B^{2/3-\eta}),$$

pour un certain $\eta > 0$ et où $\hat{\gamma}_0$ est défini par :

$$\hat{\gamma}_0 = \inf_{x \in \Sigma} \tilde{\gamma}_0(x),$$

$$\tilde{\gamma}_0(x) = 2^{-2/3} \hat{\nu}_0 \delta_0^{1/3} |k_n(x)|^{2/3} (1 - \delta_0 + \delta_0 |T(x) \cdot \boldsymbol{\beta}|)^{1/3},$$

où

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\mu''(\xi_0)}{2}}$$

et

$$\hat{\nu}_0 = \inf_{\rho} \inf \sigma \left(-\frac{d^2}{dr^2} + (r^2 + \rho)^2 \right).$$

1.3.2 Des estimations uniformes quand le champ n'est pas constant, mais seulement de module constant

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à des estimations de $\lambda_1(B, \mathbf{A})$ lorsque $\boldsymbol{\beta}$ n'est pas uniforme mais vérifie tout de même $\|\boldsymbol{\beta}\| = 1$. On introduit la classe des potentiels associés aux champs magnétiques de module 1 :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{A} \in \mathcal{C}^3(\overline{\Omega}) : |\boldsymbol{\beta}| = 1 \text{ où } \boldsymbol{\beta} = \nabla \times \mathbf{A}\}. \quad (1.3.13)$$

Nos théorèmes principaux sont les suivants :

Théorème 1.3.4 (Minoration uniforme) *Pour tout $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe $C = C(\Omega, \epsilon) > 0$ et $B_0 > 0$, tels que, pour tout $B \geq B_0$ et pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$,*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \geq \Theta_0 B - C (B^{1-2\epsilon} + (1 + |\nabla \boldsymbol{\beta}|_\infty) B^{1/2+2\epsilon}).$$

Théorème 1.3.5 (Majoration uniforme) *Pour tout $\delta \in]0, 1/2[$, il existe $C = C(\Omega, \delta) > 0$ et $B_0 = B_0(\Omega; \delta) > 0$, tels que pour tout $B \geq B_0$ et tout $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \leq \Theta_0 B + C(B^{2\delta} + |\boldsymbol{\beta}|_{\mathcal{C}^1}^2 B^{2-4\delta} + |\boldsymbol{\beta}|_{\mathcal{C}^1} B^{1-\delta} + |\boldsymbol{\beta}|_{\mathcal{C}^2} B^{3/2-3\delta} + |\boldsymbol{\beta}|_{\mathcal{C}^2}^2 B^{2-6\delta}),$$

$$\text{où } |\boldsymbol{\beta}|_{\mathcal{C}^1}^2 = |\boldsymbol{\beta}|_\infty + |\nabla \boldsymbol{\beta}|_\infty^2 \text{ et } |\boldsymbol{\beta}|_{\mathcal{C}^2}^2 = |\boldsymbol{\beta}|_{\mathcal{C}^1}^2 + |\nabla^2 \boldsymbol{\beta}|_\infty^2.$$

Remarque 1.3.6.

Dans ces théorèmes, ϵ et δ n'ont pas de valeur fixée ; cette valeur sera fixée dans les applications à des familles de potentiels vecteurs dont les semi-normes de $\boldsymbol{\beta}$ peuvent devenir très grandes. Si le champ magnétique est fixé et qu'on ne s'intéresse plus à l'uniformité, on peut prendre $\epsilon = \frac{1}{8}$ et $\delta = \frac{1}{3}$ pour avoir les estimations optimales (par rapport à la méthode) qui mènent à un reste en $O(B^{3/4})$ pour la minoration et en $O(B^{2/3})$ pour la majoration. ■

Nous pouvons présenter une application à une famille spéciale de potentiels vecteurs qui apparaît, comme nous le verrons dans la Partie III, dans la théorie des cristaux liquides. Commençons par définir $\mathcal{C}(\tau)$ pour $\tau > 0$:

$$\mathcal{C}(\tau) = \{\mathbf{n} \in L^2(\Omega, \mathbb{S}^2) : \nabla \times \mathbf{n} + \tau \mathbf{n} = 0\}. \quad (1.3.14)$$

On observe tout de suite que $\|\nabla \times \mathbf{n}\| = \tau$ et nous renvoyons à l'Appendice C où cet ensemble est décrit.

Nous définissons

$$\mu^*(q, \tau) = \inf_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}(\tau)} \lambda_1(q, \mathbf{n}). \quad (1.3.15)$$

Dans ce contexte, X-B. Pan a donné des estimations (cf. [Pan06]) lorsque :

$$q\tau \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \tau \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, Helffer et Pan donnent quelques extensions dans [HP08b] incluant le cas :

$$q\tau \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \tau \text{ borné.}$$

Notre principal théorème concernant $\mu^*(q, \tau)$ (qui permettra de faire tendre τ vers l'infini) est le suivant :

Théorème 1.3.7 *Soit $c_0 > 0$ et $0 \leq x < \frac{1}{2}$. Il existe $C > 0$ et $q_0 > 0$ dépendant seulement de Ω , c_0 et x tels que, si (q, τ) vérifie $q\tau \geq q_0$ et*

$$\tau \leq c_0(q\tau)^x, \quad (1.3.16)$$

alors :

$$\Theta_0 - \frac{C}{(q\tau)^{1/4-x/2}} \leq \frac{\mu^*(q, \tau)}{q\tau} \leq \Theta_0 + \frac{C}{(q\tau)^{1/3-2x/3}}. \quad (1.3.17)$$

Remarque 1.3.8.

Ce résultat a été obtenu avec $x = 0$ dans [HP08b] et des estimations plus grossières sont présentes dans [BCLP02] lorsque $\frac{\tau}{q} \rightarrow 0$.

■

1.3.3 Une majoration dans un cas générique

Nous nous intéressons maintenant au cas où la direction et l'intensité du champ magnétique peuvent varier.

Hypothèses principales

Énonçons nos hypothèses sur le champ magnétique. Notre majoration ne sera intéressante que lorsque la propriété suivante est satisfaite (cf. Théorème (1.3.2)) :

$$\inf_{\partial\Omega} \hat{\beta} < \inf_{\Omega} \|\beta\|. \quad (1.3.18)$$

Cette condition est aussi appelée condition de supraconductivité de surface (cf. [LP00b, FH09]). Elle implique une localisation des états fondamentaux sur le bord quand $h \rightarrow 0$ et ainsi, près du bord, on va s'intéresser à un cas générique comme nous l'avons fait en dimension 2 (voir [Ray09c]) ; nous supposons donc d'abord que :

$$\hat{\beta} \text{ admet un minimum en } x_0 \quad (1.3.19)$$

et qu'en ce point, le champ n'est ni tangent ni orthogonal au bord, i.e. :

$$0 < \theta(x_0) = \theta_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (1.3.20)$$

Nous souhaitons comprendre le comportement semi-classique des valeurs propres dans le bas du spectre de $P_{\mathbf{B}\mathbf{A}}$. À cette fin, on construit un opérateur dont le spectre est proche de celui de $P_{\mathbf{B}\mathbf{A}}$. Suite à cela, nous sommes

amenés à une construction de quasimode associée à cet opérateur et parallèlement, nous déduisons, en un certain sens, une asymptotique à trois termes (en puissances de $B^{-1/2}$) pour le bas du spectre. En vue de définir les différents termes de l'asymptotique, chacun correspondant à une étape dans la construction du quasimode, nous avons besoin d'introduire quelques invariants. On définit d'abord la base orthonormée directe $(\vec{l}_0, \vec{\tau}_0, \vec{\nu}_0)$ attachée au point x_0 :

1. $\vec{\nu}_0$ est la normale entrante en x_0
2. $\vec{\tau}_0 = \frac{\beta(x_0) - (\beta(x_0) \cdot \vec{\nu}_0)\vec{\nu}_0}{\|\beta(x_0) - (\beta(x_0) \cdot \vec{\nu}_0)\vec{\nu}_0\|}$
3. $\vec{l}_0 = \vec{\tau}_0 \times \vec{\nu}_0$.

Nous pouvons alors présenter nos résultats.

Deuxième coefficient de l'asymptotique

Notre premier invariant dépend de la deuxième forme fondamentale en x_0 notée K :

$$K_{11} = K(\vec{l}_0, \vec{l}_0),$$

$$K_{22} = K(\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_0),$$

$$K_{12} = K(\vec{l}_0, \vec{\tau}_0).$$

Rappelons que cette forme est définie pour $\vec{u}, \vec{v} \in T_x \partial \Omega$ par :

$$K(\vec{u}, \vec{v}) = \langle D_x \vec{\nu}(\vec{u}), \vec{v} \rangle.$$

Il dépend aussi de certaines dérivées de β en x_0 :

$$\beta = \nabla \langle \frac{\beta}{\|\beta(x_0)\|}, \vec{\tau}_0 \rangle \cdot \vec{\tau}_0$$

$$\tilde{\delta} = \nabla \langle \frac{\beta}{\|\beta(x_0)\|}, \vec{l}_0 \rangle \cdot \vec{l}_0,$$

$$\eta = \nabla \langle \frac{\beta}{\|\beta(x_0)\|}, \vec{\tau}_0 \rangle \cdot \vec{\nu}_0 - K_{11} \cos(\theta),$$

avec $\theta = \theta_1$. En x_0 , on définit alors la quantité $C^{\beta, K}(x_0)$ par :

$$2\beta < V_\theta(st - \frac{T}{2}s^2)u_\theta, u_\theta > + \eta < t^2 V_\theta u_\theta, u_\theta > + \frac{2\tilde{\delta}}{\sin \theta} \int_{t>0} t |D_s u_\theta|^2 + < H_K u_\theta, u_\theta >, \quad (1.3.21)$$

où V_θ est défini en (1.3.7) et

$$T = T(\theta) = -\frac{C(\theta)}{S(\theta)}, \quad (1.3.22)$$

avec

$$C = C(\theta) = \cos \theta \sigma(\theta) - \sin \theta \sigma'(\theta), S = S(\theta) = \sin \theta \sigma(\theta) + \cos \theta \sigma'(\theta) \quad (1.3.23)$$

et

$$H_K = (K_{11} + K_{22})\partial_t + 2tK_{11}V_\theta^2 + 2tK_{22}D_s^2 + 2tK_{12}(V_\theta D_s + D_s V_\theta). \quad (1.3.24)$$

Remarque 1.3.9.

1. On peut noter que $S(\theta) > 0$. En effet, on sait (voir [FH09]) que $\sigma'(\theta) \geq 0$, $\sigma(\theta) > 0$ et on a supposé que $\theta \neq 0$.
2. Une intégration par parties fournit

$$\langle t(V_\theta D_s + D_s V_\theta)u_\theta, u_\theta \rangle = 0$$

et ainsi $C^{\beta,K}(x_0)$ est réel.

3. Nous verrons que la construction de $C^{\beta,K}(x_0)$ utilise seulement que x_0 est un point critique de $\hat{\beta}$.

■

Nous pouvons alors énoncer une première majoration :

Théorème 1.3.10 *Sous les hypothèses (1.3.19) et (1.3.20), il existe $D > 0$ et $B_0 > 0$ tels que, pour $B \geq B_0$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \leq \hat{\beta}(x_0)B + C^{\beta,K}(x_0)B^{1/2} + D.$$

où $C^{\beta,K}(x_0)$ est défini en (1.3.21).

Nous supposons maintenant (et cela est encore générique) que :

$$\hat{\beta} \text{ admet un minimum non-dégénéré en } x_0. \quad (1.3.25)$$

Troisième coefficient de l'asymptotique

On désigne par \mathfrak{S}_β la hessienne de $\hat{\beta}$ en x_0 , c'est à dire :

$$\mathfrak{S}_\beta(r, s) = \frac{1}{2} \partial_r^2 \hat{\beta}(x_0) r^2 + \frac{1}{2} \partial_{rs}^2 \hat{\beta}(x_0) (sr + rs) + \frac{1}{2} \partial_s^2 \hat{\beta}(x_0) s^2$$

On peut désormais introduire un opérateur capital pour la compréhension du troisième terme :

$$\tilde{\mathfrak{S}}_\beta = \mathfrak{S}_\beta(D_\tau, \frac{\tau}{\sin \theta}). \quad (1.3.26)$$

Par l'hypothèse de non-dégénérescence (1.3.25), cet opérateur est un oscillateur harmonique.

Notre résultat principal s'énonce alors (cf. [Ray09b] pour plus de détails et une version du théorème un peu plus forte) :

Théorème 1.3.11 *Sous les hypothèses (1.3.25) et (1.3.20), il existe $d \in \mathbb{R}$, $D_1 > 0$ et $B_1 > 0$ tels que, pour $B \geq B_1$:*

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \leq \hat{\beta}(x_0)B + C^{\beta, K}(x_0)B^{1/2} + \lambda_1(\tilde{\mathfrak{S}}_\beta) + d + D_1 B^{-1/2}.$$

où $\lambda_1(\tilde{\mathfrak{S}}_\beta)$ est la plus petite valeur propre de $\tilde{\mathfrak{S}}_\beta$.

Dans la section suivante, nous présentons les techniques qui nous permettront de démontrer nos théorèmes d'analyse semi-classique.

1.4 Méthodes de démonstration

Dans cette sous-section, nous nous proposons d'exposer les techniques d'analyse semi-classique que nous utiliserons constamment. Elles se divisent en deux types : les techniques pour la minoration et les techniques pour la majoration. Remarquons d'abord que la majoration sera toujours plus facile que la minoration ; en effet, pour majorer la plus petite valeur propre, il suffit de choisir convenablement une fonction, de l'injecter dans la forme quadratique (ou dans l'opérateur) et de faire le calcul (qui est favorisé par la forme explicite de la fonction test). Pour la minoration, le problème est plus délicat, car nous ne connaissons pas a priori le comportement des premières fonctions propres (propriétés de décroissance par exemple).

Avant de donner les techniques fondamentales, nous donnons d'abord un choix de jauge locale tel que le potentiel vecteur \mathbf{A} ne dépende que de β et qui nous permettra de contrôler l'uniformité dans nos estimations.

Approximations du champ magnétique dans une boule ou une demi-boule

Les lemmes suivants vont permettre de déterminer un choix canonique de \mathbf{A} . Les résultats qui suivent sont aussi bien valables pour $d = 2$ que $d = 3$. Soit D une boule ou une demi-boule de centre 0 et de rayon $r > 0$.

Lemme 1.4.1 *Soit $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^2(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$.*

On suppose l'existence de $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}^$ tel que :*

$$|\nabla \times \mathbf{F}| \leq C|x|^n,$$

pour $x \in \overline{D}$. Alors, il existe $u \in \mathcal{C}^3(\overline{D})$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$|\mathbf{F}(x) - \nabla u(x)| \leq \alpha C|x|^{n+1},$$

pour tout $x \in \overline{D}$.

Preuve.

La preuve est analogue à celle du théorème de Poincaré.

Définissons pour $x \in \overline{D}$:

$$u(x) = \int_0^1 \mathbf{F}(tx) \cdot x \, dt.$$

Vérifions que u convient. Comme $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^2(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$, on peut prolonger \mathbf{F} en une fonction \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^d et ainsi en calculant, on trouve, pour $x \in \overline{D}$:

$$\partial_i u(x) = F_i(x) + \sum_{j=1, j \neq i}^d \int_0^1 (\partial_i F_j - \partial_j F_i)(tx) t x_j dt.$$

■

En conséquence, on déduit immédiatement le lemme suivant :

Lemme 1.4.2 *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$, il existe $\phi \in \mathcal{C}^3(\overline{B})$ vérifiant :*

$$|\mathbf{A}(x) - \mathbf{A}^{lin}(x) - \nabla \phi(x)| \leq C|\nabla \beta|_\infty |x|^2,$$

pour $x \in \overline{D}$ et où \mathbf{A}^{lin} est défini par :

$$\mathbf{A}^{lin}(x) = \frac{1}{2} \beta(0) \wedge x.$$

1.4.1 Majoration : construction de quasimodes

Nous expliquons ici succinctement, dans le cas de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique, le principe des constructions de quasimodes. Rappelons que nous nous intéressons à la réalisation de Neumann sur Ω de l'opérateur :

$$H = \sum_{j=1}^d (D_j + BA_j(x))^2,$$

quand B tend vers l'infini. Quitte à mettre B en facteur et à poser $h = B^{-1}$, nous pouvons regarder l'opérateur :

$$H^h = \sum_{j=1}^d (hD_j + A_j(x))^2.$$

Nous allons construire un quasimode localisé près d'un point du bord x_0 . On prend des coordonnées près du bord (y_1, \dots, y_d) où $y_d = d(x, \partial\Omega)$ et où (y_1, \dots, y_{d-1}) sont des coordonnées sur $\partial\Omega$ de sorte que les coordonnées de x_0 sont $(0, 0, 0)$. On écrit le potentiel vecteur dans ce nouveau système de coordonnées (il sera noté $\tilde{\mathbf{A}}$), ainsi que l'opérateur. On choisira toujours une jauge dans laquelle

$$\tilde{\mathbf{A}}(0, 0, 0) = 0. \quad (1.4.27)$$

On effectue ensuite un changement d'échelle :

$$y_1 = h^{\delta_1} \tilde{y}_1, \quad y_2 = h^{\delta_2} \tilde{y}_2, \quad \dots, \quad y_d = h^{1/2} \tilde{y}_d,$$

pour des rationnels

$$0 < \delta_i \leq \frac{1}{2} \quad (1.4.28)$$

qu'il faut déterminer. L'échelle de la coordonnée normale y_d sera toujours $h^{1/2}$ (nous y reviendrons en Section 1.4.3). Nous notons alors \mathcal{H}^h l'opérateur ainsi obtenu.

On effectue un développement de Taylor des fonctions qui apparaissent et on peut formellement développer \mathcal{H}^h sous cette forme :

$$\mathcal{H}^h = h \sum_{j=0}^{+\infty} H_j h^{\delta_j},$$

pour un certain rationnel $\delta > 0$ dépendant des δ_i qu'il faut déterminer. La présence du h en facteur est due à (1.4.28) et à (1.4.27).

L'idée est alors de chercher un développement de la première valeur propre sous la forme :

$$\lambda_1^h = h \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j h^{\delta j}$$

et d'une fonction propre associée :

$$\psi^h = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j h^{\delta j}.$$

On écrit

$$\mathcal{H}^h \psi^h = \lambda_1^h \psi^h,$$

on développe formellement et on identifie les coefficients pour arriver à un système triangulaire de la forme :

$$\begin{aligned} H_0 \psi_0 &= \lambda_0 \psi_0, \\ H_0 \psi_1 + H_1 \psi_0 &= \lambda_0 \psi_1 + \lambda_1 \psi_0, \\ H_0 \psi_2 + H_1 \psi_1 + H_2 \psi_0 &= \lambda_0 \psi_2 + \lambda_1 \psi_2 + \lambda_2 \psi_0, \\ \sum_{k+l=n} H_k \psi_l &= \sum_{k+l=n} \lambda_k \psi_l \\ &\dots \end{aligned}$$

Remarquons ici qu'en général, H_0 n'opérera que dans certaines variables (y_{j_k}) . Comme on cherche une estimation de la plus petite valeur propre, on veut prendre λ_0 aussi petit que possible et on choisit donc le bas du spectre de H_0 et on doit prendre pour ψ_0 un produit tensoriel entre une fonction propre u_0 de H_0 comme opérateur en les (y_{j_k}) et une fonction en les coordonnées restantes ϕ_0 (et qu'il faudra déterminer). La deuxième équation s'écrit alors :

$$(H_0 - \lambda_0) \psi_1 = \lambda_1 \psi_0 - H_1 \psi_0.$$

Pour résoudre, il faut que le second membre soit dans l'orthogonal du noyau de $H_0 - \lambda_0$, ce qui permet de trouver λ_1 , puis ψ_1 et le procédé continue, du moins si l'échelle h^δ est la bonne. Arrivé à l'étape n , on a construit

$$\psi_h^n = \sum_{j=0}^n \psi_j h^{j\delta}$$

et une approximation formelle de la première valeur propre :

$$\lambda_h^n = h \sum_{j=0}^n \lambda_j h^{j\delta}.$$

On tronque ψ_h^n à l'aide d'une fonction troncature régulière χ , puis on revient dans les coordonnées initiales et on injecte $\chi\psi_h^n$ dans l'opérateur H^h pour obtenir (en utilisant des propriétés de décroissance des ψ_j) :

$$\langle (H^h - \lambda_h^n)\psi_h^n, \psi_h^n \rangle = O(h^{\delta(n+1)}),$$

ce qui fournit une majoration. Une autre possibilité serait d'écrire :

$$(H^h - \lambda_h^n)\psi_h^n = O(h^{\delta(n+1)})$$

et d'appliquer le théorème spectral :

Théorème 1.4.3 *Si H désigne un opérateur auto-adjoint de domaine $D(H)$, on a :*

$$d(\lambda, \sigma(H))\|\psi\| \leq \|(H - \lambda)\psi\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \psi \in D(H).$$

On conclurait alors qu'il existe une valeur propre de H^h proche de λ_h^n . Notons qu'en utilisant l'étape 0 du procédé décrit ci-dessus, on obtient la majoration dans le Théorème 1.2.2 et celle du Théorème 1.3.2.

Nous expliquons maintenant quelques techniques fondamentales dont nous userons pour trouver des minoration.

1.4.2 Vers la minoration : les partitions de l'unité

Nous définissons d'abord la partition que nous utiliserons en général.

Partition de l'unité et IMS

De façon générale, on utilise une technique de localisation permettant la réduction à des modèles plus simples. On introduit à cette fin la partition de l'unité suivante (cf. [HM04]) :

$$\sum_j |\chi_j^r|^2 = 1 \text{ sur } \Omega; \tag{1.4.29}$$

$$\sum_j |\nabla \chi_j^r|^2 \leq Cr^{-2} \text{ sur } \Omega. \tag{1.4.30}$$

Chaque χ_j^r est une fonction de troncature régulière supportée dans $D_j \cap \overline{\Omega}$ où D_j est une boule de centre x_j et de rayon r . On peut supposer que les boules qui rencontrent le bord ont leur centre sur le bord. Notons que $C = C(\Omega) > 0$ est indépendant de r . À cette partition est associée la formule suivante, dite "formule d'IMS", qui est basée sur une simple intégration par parties (cf. [CFKS86]) :

Lemme 1.4.4

$$q_{B\mathbf{A}}(u) = \sum_j q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^r u) - \sum_j |||\nabla \chi_j^r|u|||^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.4.31)$$

Donnons un exemple d'application de cette technique de localisation qui nous sera utile dans la suite.

Preuve de la minoration dans le Théorème 1.2.2

On remarque que :

$$[i\partial_1 + A_1, i\partial_2 + A_2] = i\nabla \times \mathbf{A} = i\beta$$

et on note que, pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} [i\partial_1 + A_1, i\partial_2 + A_2] \phi \bar{\phi} dx = i \int_{\Omega} \beta |\phi|^2.$$

En intégrant par parties et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient (voir aussi [AHS78]) :

$$\int_{\Omega} B\beta |\phi|^2 dx \leq q_{B\mathbf{A}}(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \quad (1.4.32)$$

Une autre preuve de cette inégalité peut être obtenue de la façon suivante (voir [SS03] et aussi [Mon95, Appendix, Theorem 5]) ; on considère l'opérateur :

$$\mathcal{D}_{B\mathbf{A}} = D_1 + BA_1 + i(D_2 + BA_2)$$

et on remarque par un calcul élémentaire que :

$$\int_{\Omega} |\mathcal{D}_{B\mathbf{A}} \phi|^2 dx = q_{B\mathbf{A}}(\phi) - \int_{\Omega} B\beta |\phi|^2 dx \geq 0.$$

Soit maintenant j tel que D_j ne rencontre pas le bord, on déduit de ce qui précède :

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^r u) \geq \int_{\Omega} B\beta |\chi_j^r u|^2 dx \geq bB \int_{\Omega} |\chi_j^r u|^2 dx.$$

Soit alors j tel que D_j rencontre le bord. On commence par choisir des coordonnées (s, t) près du bord. Sans entrer dans les détails (qui seront donnés dans la Section 2.2.1), on considère une paramétrisation γ du bord par l'abscisse curviligne s et on pose $t(x) = d(x, \partial\Omega)$ de sorte que

$$\Phi : (s, t) \mapsto \gamma(s) + t\nu(\gamma(s))$$

est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme et il vérifie $D_{0,0}\Phi = Id$. On note avec des tildes les fonctions dans les nouvelles coordonnées. Après changement de variable, en approchant par la métrique plate, on a :

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^r u) \geq (1 - Cr) \int_{t>0} |(i\nabla + B\tilde{\mathbf{A}})\tilde{u}|^2 ds dt.$$

Nous omettons maintenant les tildes pour alléger les notations. Quitte à changer de jauge (localement) et en nous souvenant du Lemme 1.4.2 nous pouvons écrire, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $\lambda > 0$:

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^r u) \geq (1 - \lambda)q_{B\mathbf{A}^{lin}}(\chi_j^r u) - \frac{B^2}{\lambda} \int_{t>0} \|(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{lin})\chi_j^r u\|^2 dx.$$

Le premier terme correspond à la forme quadratique dans \mathbb{R}_+^2 avec champ constant et donc en contrôlant le second avec le Lemme 1.4.2 on trouve :

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^r u) \geq (1 - \lambda)\Theta_0 b' B \|\chi_j^r u\|^2 - C \frac{B^2 r^4}{\lambda} \|\chi_j^r u\|^2.$$

On prend $\lambda = r^2 B^{1/2}$. Ensuite, en faisant $r = B^{-3/8}$, on trouve :

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^r u) \geq (\Theta_0 b' B - C B^{3/4}) \|\chi_j^r u\|^2.$$

Cela suffit à la preuve de la minoration dans le Théorème 1.2.2 en choisissant $u = u_B$, sommant les estimations de l'intérieur et du bord et en constatant que le reste dans (1.4.31) est d'ordre $B^{3/4}$.

Néanmoins, il est aussi intéressant de choisir $r = R_0 B^{-1/2}$ et on obtient pour tout u dans $H^1(\Omega)$:

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^r u) \geq (\Theta_0 b' B - C R_0^2 B^{1/2}) \|\chi_j^r u\|^2. \quad (1.4.33)$$

Remarque 1.4.5.

On peut noter que tout ce paragraphe se transpose en dimension 3 (minoration dans le Théorème 1.3.2) ; à ceci près que (1.4.32) n'est plus vraie que quand le champ magnétique est uniforme et que dans le cas général, il faut approcher par le champ uniforme aussi à l'intérieur. Cela a pour effet l'apparition d'un reste supplémentaire sans grande gravité. ■

1.4.3 Vers la minoration : les estimations d'Agmon

Comme nous l'avons annoncé précédemment, un point délicat pour la détermination d'une minoration est que nous ne possédons pas d'informations très précises (a priori) sur le comportement des premières fonctions propres. Ces informations, capitales pour contrôler les restes des approximations que nous ferons, sont fournies par les estimées d'Agmon (cf. [Agm82, HM01, FH09, FH06a]).

Autour des estimations d'Agmon (heuristique)

Nous donnons ici quelques idées illustrant le type de raisonnement que nous allons faire dans la suite. Revenons à la réalisation autoadjointe sur \mathbb{R} de :

$$H_h = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

pour V une fonction régulière admettant un unique minimum non-dégénéré en 0 tel que $V(0) = 0$ et tendant vers l'infini quand $|x| \rightarrow +\infty$. On considère une fonction propre L^2 -normalisée u_h associée à la plus petite valeur propre de H_h notée λ_1^h et on cherche à connaître ses propriétés de décroissance quand $h \rightarrow 0$. Rappelons que

$$\lambda_1^h = \sqrt{\frac{V''(0)}{2}} h + o(h).$$

Il est aisé d'obtenir le commutateur suivant pour f suffisamment régulière :

$$[H_h, f] = -2h^2 f' \frac{d}{dx} - h^2 f''.$$

Or, on a :

$$[H_h, f]u_h = H_h(fu_h) - \lambda_1^h fu_h.$$

On prend $f = e^\Phi$ avec Φ à choisir. On multiplie par fu_h et on intègre par parties pour trouver que :

$$\int_{\mathbb{R}} h^2 |(fu_h)'|^2 + (V - h^2 \Phi'^2 - \lambda_1^h) |fu_h|^2 dx = 0$$

et donc :

$$\int_{\mathbb{R}} (V - h^2 \Phi'^2 - \lambda_1^h) |fu_h|^2 dx \leq 0.$$

On voudrait obtenir un contrôle de la norme L^2 de fu_h . Si on s'intéresse à la décroissance "loin" de 0, on fixe $\epsilon_0 > 0$ et il existe un $\delta > 0$ tel que $V \geq \delta$ pour $|x| \geq \epsilon_0$. On pose alors $\Phi = h^{-1/2} \tilde{\Phi}$ et on examine :

$$V - h \tilde{\Phi}'^2 - \lambda_1^h.$$

Dès lors, en prenant pour $\tilde{\Phi} = |x|$, on a, pour h assez petit :

$$V - h \tilde{\Phi}'^2 - \lambda_1^h \geq \delta/2.$$

Ainsi, u_h a une décroissance exponentielle dans la région $|x| \geq \epsilon_0$. Ce qui nous intéressera plus particulièrement est le comportement "près" du minimum. On fixe $C_0 > 0$ assez grand et ϵ_0 assez petit et on se place dans la région

$$C_0 h^{1/2} \leq |x| \leq \epsilon_0.$$

Cette fois-ci, on pose : $\Phi = h^{-1}\tilde{\Phi}$ et on regarde :

$$V - \tilde{\Phi}'^2 - \lambda_1^h.$$

On choisit alors, pour un α petit :

$$\tilde{\Phi}(x) = \alpha d(x),$$

où

$$d(x) = \int_0^{|x|} \sqrt{V(s)} ds.$$

Cette quantité est appelée distance d'Agmon et nous fournit une minoration optimale. On a alors :

$$V - \tilde{\Phi}'^2 - \lambda_1^h \geq (1 - \alpha^2)V - \lambda_1^h.$$

Enfin, comme le minimum de V est non-dégénéré, on obtient la minoration, pour un $C_1 > 0$ convenable :

$$V - \tilde{\Phi}'^2 - \lambda_1^h \geq (1 - \alpha^2)V - \lambda_1^h \geq C_1 h.$$

De là, on tire que u_h se comporte comme $e^{-\epsilon x^2/h}$ près du minimum. En particulier, on a des estimations de la forme $\int_{\mathbb{R}} x^k |u_h|^2 \leq C h^{k/2}$ comme dans le cas de l'oscillateur harmonique. L'intérêt de cette méthode est que nous n'avons pas besoin d'une forme explicite pour u_h , qu'elle ne repose pas sur la théorie des équations différentielles et qu'elle passe à plusieurs variables.

Revenons à présent au problème qui nous occupe. Nous observons d'abord que, pour Φ une fonction lipschitzienne réelle et si u est dans le domaine de $P_{B\mathbf{A},\Omega}$, alors nous avons, par intégration par parties :

$$\Re \langle (i\nabla + B\mathbf{A})^2 u, \exp(2B^{1/2}\Phi)u \rangle = q_{B\mathbf{A}}(\exp(B^{1/2}\Phi)u) - B \| |\nabla \Phi| \exp(B^{1/2}\Phi)u \|^2.$$

Prenant $u = u_B$ une fonction propre associée à $\lambda_1(B, \mathbf{A})$, nous déduisons :

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \| \exp(B^{1/2}\Phi)u_B \|^2 = q_{B\mathbf{A}}(\exp(B^{1/2}\Phi)u_B) - B \| |\nabla \Phi| \exp(B^{1/2}\Phi)u_B \|^2. \quad (1.4.34)$$

Énonçons maintenant la proposition qui nous donne un contrôle des premières fonctions propres dans la variable normale t (et ce, aussi bien en dimension 2 que 3, mais nous ne ferons la démonstration que dans le cas de la dimension 2, le cas de la dimension 3 ne présentant pas de difficultés supplémentaires) :

Proposition 1.4.6 (Estimées normales d'Agmon) *Soit u_B une fonction propre associée à $\lambda_1(B, \mathbf{A})$. Il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $B > 0$:*

$$\int e^{\alpha B^{1/2}t(x)} \{|u_B|^2 + B^{-1}|(i\nabla + B\mathbf{A})u_B|^2\} dx \leq C\|u_B\|^2,$$

où $t(x) = d(x, \partial\Omega)$. De plus, on a le contrôle des moments d'ordre n dans la variable normale t :

$$\int t(x)^n \{|u_B|^2 + B^{-1}|(i\nabla + B\mathbf{A})u_B|^2\} dx \leq C_n B^{-\frac{n}{2}} \|u_B\|^2.$$

Pour mettre en lumière la technique sous-jacente, nous donnons ci-dessous une preuve de cette proposition. Cette dernière donnera les ingrédients essentiels que nous utiliserons lorsque nous établirons les estimées tangentielles (1.2.8).

Preuve.

Donnons d'abord l'idée heuristique de la preuve ; la majoration dans le Théorème 1.2.2 indique que l'énergie est plus petite que $\Theta_0 b' B$ quand B est grand, or, nous nous souvenons que la contribution de l'intérieur de Ω est plus grande que bB par (1.4.32). Ainsi, avec l'hypothèse 1.2.6, on devine que les premières fonctions propres vont se concentrer près du bord pour B grand.

Rendons rigoureuses ces considérations. Rappelons d'abord (1.4.34) et écrivons avec (1.4.31) que :

$$q_{B\mathbf{A}}(\exp(B^{1/2}\Phi)u_B) = \sum_j q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^r \exp(B^{1/2}\Phi)u_B) - \sum_j \|\nabla \chi_j^r \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2.$$

Ainsi, avec (1.4.33) et (1.4.32), nous pouvons minorer comme suit :

$$\begin{aligned} q_{B\mathbf{A}}(\exp(B^{1/2}\Phi)u_B) &\geq \sum_{j \text{ bord}} (\Theta_0 b' B - CR_0^2 B^{1/2}) \|\chi_j^r \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2 \\ &\quad + bB \sum_{j \text{ int}} \|\chi_j^r \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2 - CR_0^{-2} B \sum_j \|\chi_j^r \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2. \end{aligned}$$

On se souvient alors de la majoration dans le Théorème 1.2.2 :

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \leq \Theta_0 b' B + o(B).$$

De là, on tire l'inégalité (en utilisant (1.4.34)) :

$$\begin{aligned} &\sum_{j \text{ int}} (bB - \Theta_0 b' B - CR_0^{-2} B - B|\nabla \Phi|^2 + o(B)) \|\chi_j^r \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2 \\ &\leq \sum_{j \text{ bord}} (B|\nabla \Phi|^2 + o(B) + R_0^2 B^{1/2}) \|\chi_j^r \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2. \end{aligned}$$

On divise par B et on est menés à prendre

$$\Phi = \alpha t(x) = \alpha d(x, \partial\Omega).$$

On déduit :

$$\begin{aligned} & \sum_{j \text{ int}} (b - \Theta_0 b' - CR_0^{-2} - \alpha^2 + o(1)) \|\chi_j^r \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2 \\ & \leq C(R_0) \sum_{j \text{ bord}} (\alpha^2 + o(1)) \|\chi_j^r u_B\|^2. \end{aligned}$$

On choisit $0 < \alpha < b - \Theta_0 b'$ et R_0 assez grand de sorte que pour B assez grand :

$$\int e^{2\alpha B^{1/2}t(x)} |u_B|^2 dx \leq C(R_0, \alpha) \int_{t(x) \leq R_0 B^{-1/2}} |u_B|^2 dx.$$

Il ne reste plus qu'à réutiliser (1.4.34) pour obtenir :

$$q_{B\mathbf{A}}(\exp(B^{1/2}\Phi)u_B) \leq CB \|u_B\|^2$$

et la preuve est terminée. ■

Nous passons maintenant à la présentation d'une autre problématique qui a fait l'objet de travaux dans cette thèse.

1.5 Analyse asymptotique de la fonctionnelle de Landau-de Gennes

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 à bord régulier qui représente le lieu occupé par un cristal liquide. Les molécules constitutives du cristal sont assimilées à des bâtonnets (cf. [dG95]) et peuvent se disposer de diverses façons comme l'illustre la Figure 1.5.34.

Dans notre cas, nous verrons comment distinguer, en fonction des divers paramètres, la phase nématique de la phase smectique cholestérique. La structure du cristal dépend d'une fonction à valeurs complexes ψ , appelée paramètre d'ordre (qui correspond à la répartition des centres de masse des molécules) et d'un champ de vecteurs unitaires noté \mathbf{n} représentant la direction locale des molécules. Plus précisément, la partie réelle de ψ représente la densité notée ρ (cf. [dG95, p.32, chapitre 1]) :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \cos(q\mathbf{n} \cdot x).$$

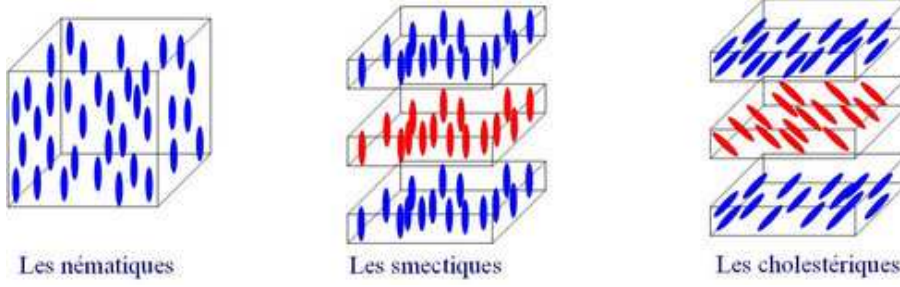


FIG. 1.5.34 – Différentes structures des cristaux liquides

Lorsque ψ est nul, cela signifie que les molécules sont peu organisées, les centres de masses étant uniformément répartis ; la phase du cristal liquide est alors dite *nématique*. Dans le cas contraire, la phase est dite *smectique* et le cristal liquide admet une structure en forme de *couches* (qui est caractérisée par le paramètre q , cf. Figure 1.5.34).

Ainsi, une paire (ψ, \mathbf{n}) décrit la configuration qu'adopte le cristal liquide. L'énergie associée à une telle configuration s'écrit, selon P-G. de Gennes (cf. [dG95]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{DG}^0(\psi, \mathbf{n}) = & \int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx - \kappa^2 \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega} |\psi|^4 dx \\ & + K_1 \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 dx + K_2 \int_{\Omega} |\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} + \tau|^2 dx + K_3 \int_{\Omega} |\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})|^2 dx \\ & + (K_2 + K_4) \int_{\Omega} \text{Tr}((\nabla \mathbf{n})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{n})^2) dx. \end{aligned}$$

Analogie avec la fonctionnelle de Ginzburg-Landau

On peut noter immédiatement une forte analogie¹ entre la fonctionnelle de Landau-de Gennes et la fonctionnelle de Ginzburg-Landau (qui apparaît en théorie de la supraconductivité et dont on dira un mot dans l'Annexe B dans le cas de la dimension 2) qui s'écrit en effet, pour $\psi \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$ et $\tilde{\mathbf{A}} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$:

$$\mathcal{G}(\psi, \tilde{\mathbf{A}}) = \int_{\Omega} \left| \left(\nabla - i\kappa \tilde{\mathbf{A}} \right) \psi \right|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 dx + \kappa^2 \int_{\Omega} |\nabla \times \tilde{\mathbf{A}} - \sigma \nabla \times \mathbf{A}|^2 dx.$$

Interprétation physique des paramètres (cf. [dG95])

κ^2 peut être interprété comme la température², τ est appelé chiralité (prove-

¹On renvoie au travail de P-G de Gennes [dG93] où cette analogie est étudiée.

²En fait, κ^2 est l'opposé de la température.

nant du défaut de symétrie des molécules ; dans ce cas, le cristal liquide est dit cholestérique) et $\frac{2\pi}{q}$ correspond à la distance entre les couches de la phase organisée du cristal liquide. Les K_i sont appelés coefficients d'élasticité et correspondent aux déformations élastiques du cristal. K_1 correspond à une déformation en éventail (splay), K_2 à une déformation de torsion (twist) et K_3 à une déformation de courbure (bend) ; la figure suivante en donne une illustration.

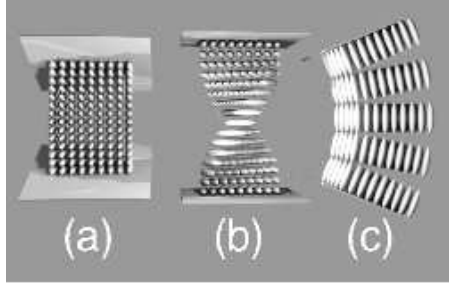


FIG. 1.5.34 – Déformations élastiques (a) splay (b) twist (c) bend

Le terme en $K_2 + K_4$

Le terme en $K_2 + K_4$ correspond quant à lui à une “énergie de bord” ; cela est clair par le petit calcul qui suit (on peut aussi regarder [Gri80]).

On sait que :

$$\text{Tr}((\nabla \mathbf{n})^2) = |\nabla \mathbf{n}|^2 - |\nabla \times \mathbf{n}|^2$$

où, par définition :

$$|\nabla \mathbf{n}|^2 = |\nabla n_1|^2 + |\nabla n_2|^2 + |\nabla n_3|^2.$$

On note : $a_{ij} = \partial_j n_i$.

Développant tous les termes, il vient :

$$\begin{aligned} |\nabla \mathbf{n}|^2 - |\nabla \times \mathbf{n}|^2 - (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 &= \sum_{i,j} a_{ij}^2 - \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji})^2 - \left(\sum_{i=1}^3 a_{ii} \right)^2 \quad (1.5.35) \\ &= \sum_{i<j} (a_{ij}a_{ji} - a_{ii}a_{jj}). \end{aligned}$$

Examinons le terme général de la somme :

$$\partial_j n_i \partial_i n_j - \partial_i n_i \partial_j n_j = \partial_j (n_i \partial_i n_j) - \partial_i (n_i \partial_j n_j).$$

La formule de Green montre alors que c'est un terme de bord i.e qui ne dépend que d'une intégrale de \mathbf{n} sur $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} \partial_j f dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j^{ext} d\sigma,$$

où ν_j^{ext} est la j ème composante de la normale extérieure.

Pour plus de détails sur les considérations physiques et une explication de la forme de l'énergie, nous renvoyons à [dG95, p.100, chapitre 3]. Rappelons que nous nous intéresserons particulièrement au phénomène de transition de phase des cristaux liquides (nématique-smectique). C'est un fait physique classique des transitions de phase que les coefficients d'élasticité explosent à la transition et c'est donc le régime que nous envisagerons.

Nous allons à présent présenter les diverses questions qui ont attiré notre attention.

1.5.1 Motivations et cadre de travail

On suppose d'abord, comme cela a été fait dans [Pan03, HP08b], que :

$$K_2 = K_3 \text{ et } K_2 + K_4 = 0.$$

Remarquons que la première hypothèse n'est guère restrictive puisque nous ferons tendre $K_2 = K_3$ vers l'infini ; la seconde pose plus de problèmes, car, comme nous l'avons vu précédemment, elle nous prive d'un contrôle sur le bord et nous verrons plus loin que les effets de bord sont importants.

On introduit

$$\mathcal{V}(\Omega) = H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times V(\Omega, \mathbb{S}^2),$$

où

$$V(\Omega, \mathbb{S}^2) = \{\mathbf{n} \in L^2(\Omega, \mathbb{S}^2) : \nabla \times \mathbf{n} \in L^2, \nabla \cdot \mathbf{n} \in L^2\}.$$

Les éléments de $\mathcal{V}(\Omega)$ seront appelés **phases**. Une phase (ψ, \mathbf{n}) vérifiant $\psi = 0$ est appelée une **phase nématique** et une phase telle que $\psi \neq 0$ est appelée une **phase smectique**.

Pour tous réels positifs $K_1, K_2, q, \tau, \kappa$ et pour tout $(\psi, \mathbf{n}) \in \mathcal{V}(\Omega)$, on pose (cf. [dG95, BCLP02, Pan03]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi, \mathbf{n}) = & \int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx - \kappa^2 \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega} |\psi|^4 dx \\ & + K_1 \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 dx + K_2 \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{n} + \tau\mathbf{n}|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.5.36)$$

L'énergie $\mathcal{E}(K_1, K_2, q, \tau, \kappa)$ de la fonctionnelle \mathcal{F} est définie par :

$$\mathcal{E}(K_1, K_2, q, \tau, \kappa) = \inf_{(\psi, \mathbf{n}) \in \mathcal{V}(\Omega)} \mathcal{F}(\psi, \mathbf{n}). \quad (1.5.37)$$

En vue d'obtenir des propriétés de la fonctionnelle \mathcal{F} , Helffer et Pan ont étudié (cf. [HP08b]) la fonctionnelle réduite

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}|_{W(\Omega)} \text{ avec } W(\Omega) = H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}(\tau).$$

Nous renvoyons à l'Annexe E où nous établissons des estimations pour \mathcal{G} . Nous noterons \mathcal{N}_τ l'ensemble suivant :

$$\mathcal{N}_\tau = \{(0, \mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathcal{C}(\tau)\}. \quad (1.5.38)$$

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que l'ensemble des minimiseurs nématiques \mathcal{F} est contenu dans \mathcal{N}_τ . Posant

$$g(q, \tau, \kappa) = \inf_{(\psi, \mathbf{n}) \in W(\Omega)} \mathcal{G}(\psi, \mathbf{n}), \quad (1.5.39)$$

on obtient le lemme évident suivant :

Lemme 1.5.1

$$\mathcal{E}(K_1, K_2, q, \tau, \kappa) \leq g(q, \tau, \kappa) (\leq 0).$$

Helffer et Pan ont prouvé qu'asymptotiquement l'inégalité inverse est vraie (cf. [HP08b]) :

$$\lim_{K_1, K_2 \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(K_1, K_2, q, \tau, \kappa) = g(q, \tau, \kappa). \quad (1.5.40)$$

Deux types de questions apparaissent alors naturellement. Premièrement, on peut se demander quelle est la dépendance en (q, τ, κ) de $g(q, \tau, \kappa)$. Une réponse partielle est donnée par la proposition (importante) suivante dont la preuve peut être trouvée dans [HP08b] :

Proposition 1.5.2

$$\mu^*(q, \tau) \geq \kappa^2 \Leftrightarrow ((\psi, \mathbf{n}) \text{ minimiseur de } \mathcal{G} \Rightarrow \psi = 0) \Leftrightarrow g(q, \tau, \kappa) = 0,$$

où $\mu^*(q, \tau)$ a été défini en (1.3.15).

Il apparaîtra que la **transition de phase** correspond au régime de paramètres tels que $\kappa^2 = \mu^*(q, \tau)$ et $\mu^*(q, \tau)$ est appelé pour cette raison **température critique**. Cela mène dès lors à la question de la dépendance en (q, τ) de $g(q, \tau, \kappa)$ près de la transition de phase (cf. Annexe E) ainsi qu'à

la question du comportement en (q, τ) de $\mu^*(q, \tau)$ (cf. Théorème 1.3.7 ; voir aussi la Proposition 4.3.1). Deuxièmement, les auteurs précités n'obtiennent pas un contrôle de la vitesse de convergence dans (1.5.40) ; de plus, en regard de (1.5.2), il est tentant de penser que les minimiseurs de \mathcal{F} sont nématiques quand $\kappa^2 \leq \mu^*(q, \tau)$ et quand K_1 et K_2 sont assez grands. Au moins, nous disposons du lemme suivant (voir le Lemme 1.5.1 et la Proposition 1.5.2) :

Lemme 1.5.3 *Pour tous $K_1, K_2, q, \tau, \kappa > 0$, si $\kappa^2 > \mu^*(q, \tau)$, alors tous les minimiseurs de \mathcal{F} sont smectiques.*

Il se trouve que le problème de la nématicité est relié à la convergence des minimiseurs de \mathcal{F} . Il a en effet été prouvé dans un sens faible (voir [BCLP02, HP08a]) que, lorsque K_1 et K_2 tendent vers l'infini, les minimiseurs (ψ, \mathbf{n}) de \mathcal{F} tendent vers $(\psi^\infty, \mathbf{n}^\infty)$ avec $\mathbf{n}^\infty \in \mathcal{C}(\tau)$ et le point crucial qui nous intéresse est le contrôle de cette convergence.

1.5.2 Idées et résultats principaux

Abandonnant provisoirement l'idée d'un contrôle explicite, nous disposons encore d'un résultat. Énonçons d'abord un théorème présent dans [BCLP02, Theorem 2] qui établit que les minimiseurs sont nématiques pour K_2 grand et sous certaines conditions portant sur (q, τ, κ) :

Théorème 1.5.4 *Il existe $\bar{\lambda} > 0$ et $\bar{c} > 0$ dépendant seulement de Ω tels que pour tout $q > 0$, il existe $\bar{K}(q, \Omega) > 0$ tel que si $K_2 \geq \bar{K}(q, \Omega)$ et $q > \bar{\lambda}\tau$ et si (ψ, \mathbf{n}) est un minimiseur de \mathcal{F} , alors :*

$$\kappa^2 \leq \bar{c} \min(q\tau, (q\tau)^2)$$

implique $\psi = 0$.

Énonçons également un autre théorème de [BCLP02] (cf. Theorem 3) qui donne une condition suffisante de smecticité :

Théorème 1.5.5 *Il existe $\underline{\beta} > 0$, dépendant de Ω et une constante $\underline{K}(q, \Omega)$ telles que si $K_2 \geq \underline{K}(q, \Omega)$ et $q \geq \tau$ alors :*

$$\kappa^2 \geq \underline{\beta} \min(q\tau, (q\tau)^2)$$

implique $\psi \neq 0$.

Le théorème suivant constitue une amélioration des précédents, en spécifiant que **sous la température critique** (voir le Lemme 1.5.3) les minimiseurs sont nématiques pour K_2 grand :

Théorème 1.5.6 *Pour tous $\kappa > 0$, $\tau > 0$, $K_1^0 > 0$, il existe $\Pi(\kappa, \tau, K_1^0) > 0$ tel que, pour tout $q > 0$, $K_1 \geq K_1^0$, $K_2 \geq \Pi(\kappa, \tau, K_1^0)$, si $\mu^*(q, \tau) > \kappa^2$, alors l'ensemble des minimiseurs de \mathcal{F} est \mathcal{N}_τ .*

Notons que ce résultat est seulement qualitatif. C'est pourquoi, nous sommes amenés à écrire les équations d'Euler-Lagrange satisfaites par les minimiseurs de \mathcal{F} en espérant un contrôle elliptique (explicite) des solutions. Nous verrons qu'en fait, un tel contrôle n'est pas assuré du fait d'un multiplicateur de Lagrange peu régulier. Face à ce problème dans [Pan03, Section 5] et [Pan08], Pan a étudié, dans le cas où $\tau = 0$, une fonctionnelle avec une condition de Dirichlet non-homogène sur le champ de vecteurs directeurs. Rappelons que, dans ce travail, τ est strictement positif; de plus, nous supposons que le champ de vecteurs directeurs est un élément de $\mathcal{C}_{\partial\Omega}(\tau)$ sur le bord, où

$$\mathcal{C}_{\partial\Omega}(\tau) = \{\mathbf{n} \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega) : \exists \tilde{\mathbf{n}} \in \mathcal{C}(\tau) : \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}\},$$

néanmoins cet élément ne sera pas fixé.

Il y a principalement deux raisons de procéder ainsi. La première est d'ordre technique et apparaît lorsqu'on essaie d'obtenir un contrôle explicite de la convergence des minimiseurs quand K_1 et K_2 tendent vers l'infini. La seconde est plus "physique"; en effet, nous avons précédemment rappelé que le champ directeur tend vers un certain élément de $\mathcal{C}(\tau)$. Par conséquent, imposer cette condition au bord, c'est suivre le même type d'idées que celui qui mène à la fonctionnelle réduite \mathcal{G} . Il nous faut à présent introduire quelques notations. On note

$$\mathcal{V}^\tau(\Omega) = H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times V^\tau(\Omega, \mathbb{S}^2),$$

où

$$V^\tau(\Omega, \mathbb{S}^2) = \{\mathbf{n} \in V^\tau(\Omega, \mathbb{R}^3) : |\mathbf{n}(x)| = 1 \text{ p.p.}\},$$

et

$$V^\tau(\Omega, \mathbb{R}^3) = \{\mathbf{A} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \nabla \times \mathbf{A} \in L^2, \nabla \cdot \mathbf{A} \in L^2 \text{ et } \mathbf{A}|_{\partial\Omega} \in \mathcal{C}_{\partial\Omega}(\tau)\}.$$

Notre objet d'étude sera alors la fonctionnelle $\mathcal{F}^{Dir} = \mathcal{F}|_{\mathcal{V}^\tau(\Omega)}$ dont l'énergie est :

$$\mathcal{E}^{Dir}(K_1, K_2, q, \tau, \kappa) = \inf_{(\psi, \mathbf{n}) \in \mathcal{V}^\tau(\Omega)} \mathcal{F}^{Dir}(\psi, \mathbf{n}).$$

On peut maintenant énoncer deux théorèmes importants. Le premier consiste en une estimation d'énergie.

Théorème 1.5.7 *Pour tous réels strictement positifs q, τ, κ tels que $\tau^2 \notin \sigma(-\Delta^D)$, il existe $c_1(q, \tau, \kappa) > 0$ et $c_2(q, \tau, \kappa) > 0$ t.q pour tous K_1, K_2 , nous avons :*

$$g(q, \tau, \kappa) - \frac{c_1(q, \tau, \kappa)}{\sqrt{K}} - \frac{c_2(q, \tau, \kappa)}{K} \leq \mathcal{E}^{Dir}(K_1, K_2, q, \tau, \kappa) \leq g(q, \tau, \kappa),$$

où

$$K = \min(K_1, K_2).$$

Un choix de $c_1(q, \tau, \kappa)$ et $c_2(q, \tau, \kappa)$ sera explicité dans (8.2.7).
Nous introduisons la quantité :

$$\tilde{g}(q, \tau, \kappa) = \frac{\kappa^2 |\Omega|}{2} + g(q, \tau, \kappa). \quad (1.5.41)$$

Le second théorème établit une condition suffisante pour n'avoir que des minimiseurs nématiques sous la température critique.

Théorème 1.5.8 *Il existe $C(\Omega) > 0$, tel que, pour tous réels strictement positifs q, τ, κ satisfaisant $\kappa^2 < \mu^*(q, \tau)$, $\tau^2 \notin \sigma(-\Delta^D)$, il existe $c_3(q, \tau, \kappa) > 0$ tel que pour tous $K_1, K_2 > 0$, si*

$$\sqrt{K} \geq C(\Omega) \frac{c_3(q, \tau, \kappa)}{\sqrt{\mu^*(q, \tau) - \kappa}},$$

alors l'ensemble des minimiseurs de \mathcal{F}^{Dir} est \mathcal{N}_τ . De plus, on peut choisir pour c_3 :

$$c_3(q, \tau, \kappa) = q(1 + \kappa)\tilde{g}(q, \tau, \kappa)^{1/2} \left(1 + \frac{\tau^2}{\mu_\tau^1}\right)^{1/2}. \quad (1.5.42)$$

Alors que le Théorème 1.5.6 ne donnait aucune sorte d'information sur l'explosion des constantes d'élasticité à la transition de phase, ce théorème nous fournit une minoration explicite de K_1 et K_2 . Et nous observons en effet que le membre de droite explose lorsque κ^2 devient proche de $\mu^*(q, \tau)$ (le Lemme E.1 et (7.1.8) montrent que $g(q, \tau, \kappa)$ tend vers 0 quand κ^2 tend vers $\mu^*(q, \tau)$), ce qui est en accord avec les observations physiques (voir [dG95]); notons que ce phénomène n'apparaît pas dans [BCLP02].

Perspectives

Les prolongements possibles de ce travail sont d'ordre semi-classique d'une part et relatifs aux cristaux liquides d'autre part.

Le principal problème qu'il serait intéressant d'aborder serait l'obtention de la minoration dans le Théorème 1.3.11. Pour ce faire, il nous faudrait déterminer des propriétés de localisations des premières fonctions propres ; ainsi, dans notre cas, nous savons déjà que ces fonctions sont localisées près du bord dans un voisinage de taille $B^{-1/2}$. Le comportement tangentiel quant à lui n'est pas encore connu. La construction de quasimode réalisée suggère que les premières fonctions propres sont localisées près du point où β est minimal dans un voisinage d'ordre $B^{-1/2}$. Si cette échelle est la bonne, cela risque de poser de délicats problèmes pour le contrôle du reste dans la partition de l'unité (il serait d'ordre B , c'est à dire l'ordre du premier terme du développement de $\lambda_1(B, \mathbf{A})$) utilisée dans l'obtention d'une minoration. Quoi qu'il en soit, ces échelles de concentration sont intimement liées à l'ordre du deuxième terme du développement asymptotique et une première étape serait donc de montrer une minoration de la forme :

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \geq \hat{\beta}(x_0)B - CB^{1/2}.$$

Heuristiquement, nous nous attendrions alors à trouver (grossièrement) par des inégalités à la Agmon : $B(r^2 + s^2)$ de l'ordre de $B^{1/2}$ et donc r et s de l'ordre de $B^{-1/4}$.

Ensuite, la monotonie de $B \mapsto \lambda_1(B, \mathbf{A})$ pour B grand pourrait être un problème important en vue d'obtenir l'asymptotique du troisième champ critique de Ginzburg-Landau dans notre cas générique (comme nous l'avons fait en dimension 2). Ce type de problématique a d'ailleurs fait récemment l'objet d'un travail (cf. [FP09]) dans le cas du champ magnétique constant dans la boule en dimension 3. La connaissance de nombreux termes de l'asymptotique était nécessaire pour prouver la monotonie ; dans notre cas, le nombre de termes devrait être moindre, mais les techniques pour obtenir la minoration pourraient sans doute porter quelques fruits...

L'autre problème s'organise dans le contexte de la théorie des cristaux liquides. Pour simplifier, nous avons éliminé le terme de bord dans la fonctionnelle de Landau-de Gennes alors qu'il joue un rôle capital. Dans ce cas et lorsque les constantes d'élasticité tendent vers l'infini, le problème de la convergence (en termes quantitatifs) du champ de vecteur \mathbf{n} vers un élément de $\mathcal{C}(\tau)$ demeure ouvert ainsi que celui de l'estimation de l'explosion des constantes d'élasticité près de la température critique $\mu^*(q, \tau)$. Les propriétés de cette dernière sont d'ailleurs relativement peu connues : quelle est sa régularité en q et τ ? Même asymptotiquement, lorsque $q\tau$ tend vers l'infini,

l'asymptotique à deux termes n'est pas encore établie, même si des résultats existent déjà (cf. [HP08b]).

Première partie

Analyse semi-classique d'opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique non uniforme : 2D

Chapitre 2

Majoration de la première valeur propre en dimension 2

Afin d'obtenir la majoration des Théorèmes 1.2.10 et 1.2.11, nous suivons le programme annoncé dans le Chapitre 1. Nous sommes amenés, après un changement de coordonnées près du bord et après avoir effectué un développement de Taylor, à un opérateur modèle. C'est le bas du spectre de celui-ci qu'on va d'abord entreprendre de majorer ; ensuite nous verrons précisément (en introduisant un système de coordonnées locales (s, t) près du bord et en contrôlant les restes des diverses approximations) comment nous ramener à ce problème.

2.1 Majorations : constructions formelles

En vue d'obtenir une majoration, on va d'abord construire formellement des quasimodes. On introduit à cette fin un opérateur modèle.

2.1.1 Un opérateur modèle

Nous fixons k_0 , k_1 et $\alpha \geq 0$. Dans la suite, k_0 représentera la courbure au point où le champ magnétique est minimal sur le bord, k_1 combinera courbure et dérivée normale du champ magnétique en ce même point et enfin, α sera la dérivée tangentielle seconde.

On supposera, pour clarifier l'exposition que $k_0 \geq 0$, mais cela n'est absolument pas restrictif. Nous souhaitons étudier la forme quadratique sur l'espace

de Hilbert $L^2((1 - k_0 t) dt ds)$ définie, pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{k_0})$ par :

$$q_{k_0, k_1, \alpha, B}(u) = \int_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ 0 < t \leq \frac{1}{2k_0}}} (1 - tk_0) |\partial_t u|^2 + (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + Bt(1 - \frac{k_1}{2}t + \alpha s^2))u| dt ds, \quad (2.1.1)$$

où $B_{k_0} = \mathbb{R} \times \left[0, \frac{1}{2k_0}\right]$ (et par convention $B_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$). Cette forme quadratique apparaîtra de façon naturelle après avoir effectué le changement de coordonnées qui sera introduit en Section 2.2.1.

L'opérateur auto-adjoint associé est :

$$H_{k_0, k_1, \alpha, B} = -(1 - k_0 t)^{-1} \partial_t (1 - k_0 t) \partial_t + (1 - tk_0)^2 (-i\partial_s + Bt(1 - \frac{k_1}{2}t + \alpha s^2))^2,$$

avec condition de Neumann sur $t = 0$ et condition de Dirichlet sur $t = \frac{1}{2k_0}$ (si $k_0 \neq 0$). On commence par changer d'échelle :

$$t = B^{-1/2} \tau,$$

$$s = B^{-1/4} \sigma,$$

et nous sommes réduits à l'opérateur sur $L^2((1 - tk_0 B^{-1/2}) dt ds)$ suivant :

$$- \left(1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}}\right)^{-1} \partial_t \left(1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}}\right) \partial_t + \left(1 - \frac{tk_0}{B^{1/2}}\right)^{-2} \left(t - \frac{k_1}{2B^{1/2}} t^2 + \alpha \frac{s^2 t}{B^{1/2}} - i \frac{\partial_s}{B^{1/4}}\right)^2. \quad (2.1.2)$$

On réalise le changement de jauge $u \mapsto e^{i\xi_0 B^{1/4} \sigma} u$ afin de faire apparaître $H(\xi_0)$ comme terme d'ordre B^0 dans l'opérateur (2.1.2). Ainsi, l'opérateur défini en (2.1.2) devient :

$$- \left(1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}}\right)^{-1} \partial_t \left(1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}}\right) \partial_t + \left(1 - \frac{tk_0}{B^{1/2}}\right)^{-2} \left(t + \xi_0 - \frac{k_1}{2B^{1/2}} t^2 + \alpha \frac{s^2 t}{B^{1/2}} - i \frac{\partial_s}{B^{1/4}}\right)^2. \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Calculs formels pour le cas dégénéré

Ce cas correspond à la dégénérescence du minimum de la restriction de β au bord. Rappelons que la valeur de ce minimum est notée b' et remarquons que, en vue d'alléger les notations, nous prendrons $b' = 1$ au cours de ce chapitre.

On effectue une transformée de Fourier dans la variable s . Ainsi, nous sommes

réduits à étudier la famille d'opérateurs avec condition de Neumann sur $t = 0$ sur $L^2((1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}})dt)$:

$$H_{k_0, k_1, \xi} = -(1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}})^{-1} \partial_t (1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}}) \partial_t + (1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}})^{-2} (t + \xi - \frac{k_1}{2B^{1/2}} t^2)^2.$$

On développe formellement cet opérateur en puissances de $B^{-1/2}$.
Terme en B^0 :

$$H_0 = -\partial_t^2 + (t + \xi)^2.$$

Terme en $B^{-1/2}$:

$$H_1 = k_0 \partial_t - k_1 (t + \xi) t^2 + 2k_0 t (t + \xi)^2. \quad (2.1.4)$$

On recherche un quasimode sous la forme :

$$\psi = \sum_{j=0}^{+\infty} B^{-j/2} u_j$$

et un développement de la première valeur propre sous la forme :

$$\lambda_1(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j B^{-j/2}.$$

Rappelons ici que, comme nous cherchons la majoration la plus fine de la première valeur propre, nous allons chercher les λ_j les plus petits possibles. Par suite, on doit résoudre

$$H_0 u_0 = \lambda_0 u_0$$

et, comme on cherche un λ_0 minimal, on fixe $\xi = \xi_0$, on déduit $\lambda_0 = \Theta_0$ et on prend $u_0 = u_{\xi_0}$. Ensuite, l'équation suivante à résoudre est :

$$H_0 u_1 + H_1 u_0 = \Theta_0 u_1 + \lambda_1 u_0.$$

Ainsi, on doit étudier :

$$(H_0 - \Theta_0) u_1 = (\lambda_1 - H_1) u_0.$$

Pour qu'il y ait des solutions, le second membre doit être orthogonal à u_0 , donc, en utilisant les formules (1.2.4) (cf. l'expression de H_1 donnée en (2.1.4)), on obtient :

$$\lambda_1 + \frac{k_0 + k_1}{2} C_1 - \Theta_0 \xi_0 (k_1 - k_0) = 0,$$

et on choisit :

$$u_1 = R_0(\lambda_1 - H_1)u_0$$

où R_0 est la résolvante régularisée de $H_0 - \Theta_0$ (voir la Proposition 1.2.1 et les lignes qui la précèdent).

On pose :

$$\Theta_{1/2}^{k_0, k_1} = -\frac{k_0 + k_1}{2}C_1 + \Theta_0\xi_0(k_1 - k_0).$$

ψ semble donc être un bon candidat pour être un quasimode après troncature.

2.1.3 Calculs formels pour le cas non-dégénéré

On considère l'opérateur H (cf.(2.1.3)) :

$$-(1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}})^{-1} \partial_t (1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}}) \partial_t + (1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}})^{-2} (t + \xi_0 - \frac{k_1}{2B^{1/2}} t^2 + \frac{\alpha}{B^{1/2}} s^2 t - i \frac{\partial_s}{B^{1/4}})^2.$$

Formellement, on écrit :

$$H = \sum_{j=0}^{+\infty} B^{-j/4} H_j.$$

Cherchons un quasimode sous la forme :

$$U = \sum_{j=0}^{+\infty} B^{-j/4} U_j. \quad (2.1.5)$$

et un développement de Taylor de la première valeur propre :

$$\lambda_1(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \Theta_{j/4} B^{-j/4}.$$

Ici, nous avons :

$$H_0 = -\partial_t^2 + (t + \xi_0)^2,$$

$$H_1 = -2i\partial_s(t + \xi_0),$$

$$H_2 = k_0 \partial_t - \partial_s^2 + 2(t + \xi_0)(\alpha s^2 t - \frac{k_1}{2} t^2) + 2k_0 t(t + \xi_0)^2.$$

Cela mène à résoudre :

$$H_0 U_0 = \lambda_0 U_0.$$

On cherche U_0 sous la forme découplée $U_0 = u_0(t)\psi_0(s)$ et, comme on cherche λ_1^N minimal, on est contraint de prendre $\lambda_0 = \Theta_0$ et $u_0 > 0$ la fonction propre

normalisée associée.

Nous résolvons ensuite :

$$H_1 U_0 + H_0 U_1 = \Theta_0 U_1 + \lambda_1 U_0.$$

On peut donc prendre $\Theta_{1/4} = 0$ en écrivant $U_1 = u_1(t)\psi_1(s)$ avec $\psi_1 = \partial_s \psi_0$ et on trouve :

$$(H_0 - \Theta_0)u_1 = 2i(t + \xi_0)u_0.$$

Comme $M_1 = 0$ (cf. (1.2.4)), cette dernière équation admet une unique solution u_1 telle que $\int_{t>0} u_0 u_1 dt = 0$.

Finalement, on considère :

$$H_0 U_2 + H_1 U_1 + H_2 U_0 = \Theta_0 U_2 + \Theta_{1/2} U_0.$$

Ainsi, on obtient :

$$(H_0 - \Theta_0)U_2 = -H_1 U_1 - H_2 U_0 + \Theta_{1/2} U_0 = 2i(t + \xi_0)u_1 \partial_s \psi_1 - H_2 U_0 + \Theta_{1/2} U_0.$$

En multipliant par u_0 et en intégrant par rapport à t , et en appliquant les formules (1.2.4) on est amené à résoudre :

$$-(1 - 4I_2)\partial_s^2 \psi_0 + \alpha \Theta_0 s^2 \psi_0 = \left(\Theta_{1/2} + \frac{k_0 + k_1}{2} C_1 - (k_1 - k_0) \Theta_0 \xi_0 \right) \psi_0.$$

où

$$I_2 = \int_{t>0} (t + \xi_0) R_0((t + \xi_0)u_0) u_0 dt.$$

Cette dernière intégrale peut être réécrite en posant $v = R_0((t + \xi_0)u_0)$; nous avons :

$$(H_0 - \Theta_0)v = (t + \xi_0)u_0.$$

Par un calcul, on a :

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi}(\cdot, \xi_0) = v.$$

Utilisant les identités de [BS98] (voir aussi [FH09]), nous déduisons :

$$1 - 4I_2 = \frac{\mu''(\xi_0)}{2} = 3C_1 \sqrt{\Theta_0} > 0.$$

Après changement d'échelle, nous posons :

$$\psi_0(s) = e^{-\frac{\Theta_0^{1/4} \sqrt{\alpha} s^2}{2\sqrt{3}C_1}}$$

et :

$$\Theta_{1/2} = \Theta_{1/2}^{k_0, k_1, \alpha} = -\frac{k_0 + k_1}{2} C_1 + (k_1 - k_0) \Theta_0 \xi_0 + \sqrt{3C_1} \Theta_0^{3/4} \sqrt{\alpha}. \quad (2.1.6)$$

2.2 Quasimodes

On commence par introduire un système de coordonnées près du bord.

2.2.1 Coordonnées (s, t)

On choisit d'abord une paramétrisation du bord :

$$\gamma : \mathbb{R}/(|\partial\Omega|\mathbb{Z}) \rightarrow \partial\Omega.$$

Soit $\nu(s)$ la normale rentrante au point $\gamma(s)$. On choisit l'orientation de la paramétrisation γ , de sorte que :

$$\det(\gamma'(s), \nu(s)) = 1.$$

La courbure $k(s)$ au point $\gamma(s)$ est donnée dans cette paramétrisation par :

$$\gamma''(s) = k(s)\nu(s).$$

L'application Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}/(|\partial\Omega|\mathbb{Z}) \times]0, t_0[&\rightarrow \Omega \\ (s, t) &\mapsto \gamma(s) + t\nu(s), \end{aligned}$$

est clairement un difféomorphisme, quand t_0 est assez petit, avec comme image

$$\Phi(\mathbb{R}/(|\partial\Omega|\mathbb{Z}) \times]0, t_0[) = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < t_0\} = \Omega_{t_0}.$$

Nous posons :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(s, t) &= (1 - tk(s))\mathbf{A}(\Phi(s, t)) \cdot \gamma'(s), & \tilde{A}_2(s, t) &= \mathbf{A}(\Phi(s, t)) \cdot \nu(s), \\ \tilde{\beta}(s, t) &= \beta(\Phi(s, t)), \end{aligned}$$

et nous avons :

$$\partial_s \tilde{A}_2 - \partial_t \tilde{A}_1 = (1 - tk(s))\tilde{\beta}(s, t).$$

Localement, on peut choisir une jauge telle que

$$\tilde{A}_1(s, t) = \int_0^t (1 - t'k(s))\tilde{\beta}(s, t')dt', \quad \tilde{A}_2 = 0. \quad (2.2.7)$$

La forme quadratique s'écrit :

$$q_{B\mathbf{A}}(v) = \int_{0 < t < t_0} (1 - tk(s))|(i\partial_t + B\tilde{A}_2)\tilde{v}|^2 + (1 - tk(s))^{-1} |(i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 ds dt,$$

où le tilde désigne la fonction dans les nouvelles coordonnées.

2.2.2 Quasimode pour le cas dégénéré

Nous prouvons ici le Théorème 1.2.11. Nous écrivons le développement de Taylor à l'ordre 2 de \tilde{A}_1 (cf. (2.2.7)) :

$$\tilde{A}_1 = \overline{A}_1 + R,$$

où

$$\overline{A}_1 = t(1 - t\frac{k_1}{2})$$

avec

$$k_1 = k_0 - \frac{\partial \beta}{\partial t}(0, 0). \quad (2.2.8)$$

Notons $\psi = u_0 + B^{-1/2}u_1$ et remarquons que ψ est dans la classe de Schwartz. Comme quasimode, nous sommes amenés (par la construction formelle que nous avons réalisée) à choisir :

$$u_B(s, t) = \chi(t)\psi(B^{1/2}t)e^{-s^2B^{1/2-2\rho}}e^{i\xi_0B^{1/2}s},$$

avec χ une fonction de troncature régulière supportée dans $\left[0, \frac{1}{2k_0}\right]$ et $\rho \in]0, \frac{1}{4}[$ que l'on choisira plus tard afin d'optimiser l'erreur.

Remarque 2.2.1.

Le facteur $e^{i\xi_0B^{1/2}s}$ vient du changement de jauge effectuée dans la Section 2.1.1 et la gaussienne $e^{-s^2B^{1/2-2\rho}}$ permet une localisation près de $s = 0$; la construction formelle que nous avons effectuée dans ce cas ne permet en effet pas de déterminer le comportement par rapport à la variable tangentielle.

■

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{BA}}(u_B) &\leq \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0)|\partial_t u_B|^2 + (1 - tk_0)^{-1}|(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)u_B|^2 ds dt \\ &\quad + C \int_{0 < t < t_0} \Delta k(s)t\{|\partial_t u_B|^2 + |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)u_B|^2\} ds dt, \end{aligned}$$

où $\Delta k(s) = k(s) - k(0)$. Ce premier reste est estimé par le lemme suivant.

Lemme 2.2.2 *Nous avons le contrôle :*

$$\left| \int_{0 < t < t_0} \Delta k(s)t\{|\partial_t u_B|^2 + |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)u_B|^2\} ds dt \right| \leq CB^{1/4+\rho}\|u_B\|^2.$$

Preuve.

Remarquons pour commencer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$|\tilde{A}_1(s, t)| \leq Ct.$$

Démontrons maintenant la première majoration, la deuxième pouvant être traitée de la même manière. On a :

$$\partial_t u_B = \chi'(t)\psi(B^{1/2}t)e^{-s^2 B^{1/2-2\rho}} e^{i\xi_0 B^{1/2}s} + B^{1/2}\chi(t)\psi'(B^{1/2}t)e^{-s^2 B^{1/2-2\rho}} e^{i\xi_0 B^{1/2}s}.$$

Par suite, nous obtenons :

$$|\partial_t u_B|^2 \leq 2|\chi'(t)\psi(B^{1/2}t)|^2 e^{-2s^2 B^{1/2-2\rho}} + 2B|\chi(t)\psi'(B^{1/2}t)|^2 e^{-2s^2 B^{1/2-2\rho}}.$$

Ensuite, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_{0 < t < t_0} t \Delta k(s) |\partial_t u_B|^2 dt ds &\leq C \int_{0 < t < t_0} ts |\chi'(t)|^2 |\psi(B^{1/2}t)|^2 e^{-2s^2 B^{1/2-2\rho}} dt ds \\ &+ CB \int_{0 < t < t_0} ts |\chi(t)|^2 |\psi'(B^{1/2}t)|^2 e^{-2s^2 B^{1/2-2\rho}} dt ds. \end{aligned}$$

Comme ψ est dans la classe de Schwartz, on déduit :

$$\int_{0 < t < t_0} ts |\chi'(t)|^2 |\psi(B^{1/2}t)|^2 e^{-2s^2 B^{1/2-2\rho}} dt ds = O(B^{-\infty}) \|u_B\|^2.$$

Puis, après changement d'échelle, pour un certain $C > 0$ indépendant de B , on a :

$$\begin{aligned} B \int_{0 < t < t_0} ts |\chi(t)|^2 |\psi'(B^{1/2}t)|^2 e^{-2s^2 B^{1/2-2\rho}} dt ds &\leq C B B^{-1/2} B^{-1/4+\rho} \|u_B\|^2 \\ &= C B^{1/4+\rho} \|u_B\|^2. \end{aligned}$$

■

Nous approchons alors le potentiel \tilde{A}_1 par \overline{A}_1 et on écrit :

$$\begin{aligned} &\int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0) |\partial_t u_B|^2 + (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)u_B|^2 ds dt \\ &= \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0) |\partial_t u_B|^2 + (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\overline{A}_1)u_B|^2 ds dt \\ &+ \Re \left\{ \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0)^{-1} (B^2 |Ru_B|^2 + 2B(-i\partial_s + B\overline{A}_1)u_B Ru_B) ds dt \right\}. \end{aligned}$$

Ce nouveau reste est estimé par le lemme ci-dessous.

Lemme 2.2.3 *Nous disposons du contrôle suivant :*

$$\left| \Re \left\{ \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0)^{-1} (B^2 |Ru_B|^2 + 2B(-i\partial_s + B\bar{A}_1)u_B Ru_B) ds dt \right\} \right| \leq C B^{1/4+\rho} \|u_B\|^2.$$

Preuve.

Il suffit de remarquer que

$$|R(s, t)| \leq C(t^3 + s^4 t + s t^2)$$

et d'effectuer un changement d'échelle en s et en t (et d'utiliser la décroissance exponentielle de ψ et de la gaussienne).

■

Les restes étant ainsi contrôlés, il nous reste à examiner le terme principal. Rappelons que :

$$q_{k_0, k_1, 0, B}(u_B) = \langle H_{k_0, k_1, \alpha, B} u_B, u_B \rangle_{L^2((1-tk_0)dsdt)}.$$

Calculant les commutateurs de $H_{k_0, k_1, \alpha, B}$ avec la fonction troncature et la gaussienne, nous déduisons le lemme suivant :

Lemme 2.2.4 *On a :*

$$\begin{aligned} \langle H_{k_0, k_1, \alpha, B} u_B, u_B \rangle_{L^2((1-tk_0)dsdt)} &= \langle H_{k_0, k_1, \xi_0} \psi(B^{1/2}t), \psi(B^{1/2}t) \rangle_{L^2((1-tk_0)dt)} \\ &\quad + O(B^{1/2-2\rho}) \|u_B\|^2. \end{aligned}$$

Preuve.

Mentionnons juste les points cruciaux de l'estimation. On estime

$$\int |\partial_s^2 e^{-s^2 B^{1/2-2\rho}}| e^{-s^2 B^{1/2-2\rho}} |\chi(t)|^2 |\psi(B^{1/2}t)|^2 dt ds$$

par $O(B^{1/2-2\rho}) \|u_B\|^2$ et du terme $\int (Bt + B^{1/2}\xi_0) \partial_s (\chi(t) \psi(B^{1/2}t) e^{-s^2 B^{1/2-2\rho}})$ par $O(B^{-\infty}) \|u_B\|^2$ grâce au fait que $M_1 = 0$ (cf. (1.2.4)) et que ψ est dans la classe de Schwartz.

■

Enfin, par notre construction formelle, il est clair (les restes qui apparaissent sont toujours traités de la même façon) que :

$$\langle H_{k_0, k_1, \xi_0} \psi(B^{1/2}t), \psi(B^{1/2}t) \rangle_{L^2((1-tk_0)dt)} \leq (\Theta_0 B + \Theta_{1/2}^{k_0, k_1} B^{1/2} + C B^{1/2-2\rho}) \|u_B\|^2.$$

On en tire :

$$q_{k_0, k_1, 0, B}(u_B) \leq (\Theta_0 B + \Theta_{1/2}^{k_0, k_1} B^{1/2} + C B^{1/2-2\rho}) \|u_B\|^2.$$

On optimise les restes en prenant $\rho = \frac{1}{12}$:

$$q_{B\mathbf{A}}(u_B) \leq (\Theta_0 B + \Theta_{1/2}^{k_0, k_1} B^{1/2} + C B^{1/3}) \|u_B\|^2.$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à remplacer k_1 par son expression et la majoration du Théorème 1.2.11 est démontrée.

Remarque 2.2.5.

Il suit des identités (1.2.4) que :

$$\frac{C_1}{2} - \Theta_0 \xi_0 = M_3 - \xi_0^3 > 0,$$

où $M_3 = \int_{t>0} (t + \xi_0)^3 u_0^2 dt$. Cette remarque permet de comprendre comment la majoration du Théorème 1.2.11 améliore celle de Aramaki (cf. [Ara07]).

■

2.2.3 Quasimode pour le cas non-dégénéré

On écrit le développement de Taylor :

$$\tilde{A}_1 = \overline{A}_1 + R,$$

où

$$\overline{A}_1 = t(1 - t \frac{k_1}{2} + \alpha s^2)$$

avec α défini en (3.1.5) et k_1 défini en (2.2.8). On pose :

$$u_B(s, t) = \chi(t) U(B^{1/4} s, B^{1/2} t) e^{i\xi_0 B^{1/2} s},$$

où U est obtenu en conservant seulement les trois premiers termes de (2.1.5). Nous avons (approximation par la courbure constante) :

$$\begin{aligned} q_{B\mathbf{A}}(u_B) &\leq \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0) |\partial_t u_B|^2 + (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1) u_B|^2 ds dt \\ &\quad + C \int_{0 < t < t_0} \Delta k(s) t \{ |\partial_t u_B|^2 + |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1) u_B|^2 \} ds dt. \end{aligned}$$

De plus, on a (approximation du potentiel) :

$$\begin{aligned} & \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0) |\partial_t u_B|^2 + (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)u_B|^2 ds dt \\ &= \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0) |\partial_t u_B|^2 + (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\overline{A}_1)u_B|^2 ds dt \\ &+ \Re \left\{ \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0)^{-1} (B^2 |Ru_B|^2 + 2B(-i\partial_s + B\overline{A}_1)u_B Ru_B) ds dt \right\}. \end{aligned}$$

Comme U est dans la classe de Schwartz, nous déduisons (le reste vient d'une part du commutateur de la troncature et de l'opérateur et d'autre part de l'erreur due à la troncature dans le développement de l'opérateur en puissances de B) :

$$q_{k_0, k_1, \alpha, B}(u_B) \leq (\Theta_0 B + \Theta_{1/2}^{k_0, k_1, \alpha} B^{1/2} + C) \|u_B\|^2.$$

En outre, nous avons :

$$|R| = |\tilde{A}_1 - \overline{A}_1| \leq C(s^3 t + s t^2 + t^3).$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\left| \Re \left\{ \int_{0 < t < t_0} (1 - tk_0)^{-1} (B^2 |Ru_B|^2 + 2B(-i\partial_s + B\overline{A}_1)u_B Ru_B) ds dt \right\} \right| \leq C B^{1/4} \|u_B\|^2.$$

Finalement, on trouve :

$$q_{BA}(u_B) \leq (\Theta_0 B + \Theta_{1/2}^{k_0, k_1, \alpha} B^{1/2} + C B^{1/4}) \|u_B\|^2.$$

En particulier, nous avons prouvé la majoration dans le Théorème 1.2.6.

Chapitre 3

Minoration de la première valeur propre en dimension 2

Ce chapitre vise la minoration du Théorème 1.2.10. Dans un premier temps, sous notre hypothèse générique (1.2.6), nous améliorons le reste du Théorème 1.2.2 en prouvant simultanément des estimations d'Agmon les premières fonctions propres. Dans un deuxième temps, nous nous ramenons à un opérateur modèle (dont le spectre est proche de celui de P_{BA}) en contrôlant les restes de nos approximations par les estimations d'Agmon. Enfin, nous transformons l'opérateur modèle par des changements de jauge, de variables et de fonctions pour nous ramener à un opérateur dont le spectre est connu.

3.1 Minoration grossière

Pour obtenir la minoration dans le Théorème 1.2.6, on utilise la technique de localisation rappelée en (1.4.29) et (1.4.31) ainsi que les estimations normales d'Agmon (cf. Proposition 1.4.6).

3.1.1 Partition de l'unité

Pour chaque $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $B > 0$, $\epsilon > 0$ et $C_0 > 0$, on considère une partition de l'unité comme en (1.4.29) et on la modifie comme suit. Essentiellement, le rayon de toutes les boules est $r = B^{-\rho}$ sauf pour les boules suivantes :

1. $D_j = D_{j_{min}}$ dont le centre est le minimum de β sur le bord (on suppose que la partition a été modifiée pour qu'un tel disque existe) admet $C_0 r = C_0 B^{-\rho}$ comme rayon,
2. les disques qui rencontrent le bord admettent $\epsilon r = \epsilon B^{-\rho}$ comme rayon.

Les fonctions de troncature de cette partition seront notées χ_j^B et on remarque que le C de (1.4.29) dépend de $\Omega, \epsilon, C_0, \beta$. On choisira enfin ρ, ϵ et C_0 dans la suite pour rendre l'erreur aussi petite que possible.

Notons qu'on utilisera la formule de localisation (1.4.31).

3.1.2 Estimations pour la minoration

Étude à l'intérieur de Ω

Soit j tel que D_j ne rencontre pas le bord. Il est connu que (cf. (1.4.32)) :

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^B u) \geq B \int_{\Omega} \beta(x) |\chi_j^B u|^2 dx \geq bB \int_{\Omega} |\chi_j^B u|^2 dx.$$

En regard de (1.2.6), ces termes ne joueront aucun rôle dans le calcul du développement asymptotique.

Étude au bord

Les notations qui suivent sont celles de la Section 2.2.1.

Approximation par un champ magnétique constant sur un domaine à courbure constante

Nous pouvons supposer que le centre du disque D_j admet pour coordonnées $(s_j, 0)$ et que les coordonnées du minimum sont $(0, 0)$. On pose :

$$k_j = k(s_j), \quad \tilde{\beta}(s_j, 0) = \tilde{\beta}_j \quad \text{et} \quad \Delta k_j(s) = k(s) - k_j.$$

On a :

$$(1 - tk(s))\tilde{\beta}(s, t) = (1 - tk_j)\tilde{\beta}_j - t\Delta k_j(s)\tilde{\beta}(s, t) + (1 - tk_j)(\tilde{\beta}(s, t) - \tilde{\beta}_j). \quad (3.1.1)$$

On écrit (voir (2.2.7)) :

$$\tilde{A}_1(s, t) = \overline{A}_{1,j}(s, t) + R_j(s, t), \quad (3.1.2)$$

avec

$$\overline{A}_{1,j}(s, t) = (t - k_j \frac{t^2}{2})\tilde{\beta}_j. \quad (3.1.3)$$

Remarquons que, dans la suite, nous aurons à estimer le reste R_j suivant que s_j est plus ou moins proche de 0.

Contrôle des restes

Ainsi, nous voilà conduits à comparer $q_{B\mathbf{A}}$ avec la forme quadratique associée au problème de Neumann sur un domaine à courbure constante (voir le Théorème 1.2.3 et [BPT98, FH09, FH06a, HM01]). Pour tout $\lambda > 0$, nous trouvons (par le biais de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\begin{aligned} q_{B\mathbf{A}}(v_j) &\geq (1-\lambda) \int (1-tk_j) |\partial_t \tilde{v}_j|^2 + (1-tk_j)^{-1} |(i\partial_s + B\bar{A}_{1,j}) \tilde{v}_j|^2 ds dt \\ &\quad - C \int \Delta k_j(s) t (|\partial_t \tilde{v}_j|^2 + |(i\partial_s + B\tilde{A}_1) \tilde{v}_j|^2) ds dt \\ &\quad - \frac{B^2}{\lambda} \int |R_j(s, t) \tilde{v}_j|^2 ds dt, \end{aligned}$$

où $\tilde{v}_j = \chi_j^B u_B$ avec u_B une fonction propre associée à $\lambda_1(B\mathbf{A})$.

Nous appliquons alors le résultat du champ magnétique constant sur un domaine de courbure constante pour obtenir l'existence de $C > 0$ tel que pour tout j tel que $D_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset$:

$$\int (1-tk_j) |\partial_t \tilde{v}_j|^2 + (1-tk_j)^{-1} |(i\partial_s + B\bar{A}_{1,j}) \tilde{v}_j|^2 ds dt \geq (\Theta_0 \tilde{\beta}_j B - C_1 k_j B^{1/2} - C) \|\tilde{v}_j\|^2. \quad (3.1.4)$$

On choisit $\rho = \frac{1}{4}$ (voir Figure 3.1.4) et on remarque que $|\Delta_j k(s)| = O(B^{-1/4})$ (uniformément en j). Ainsi, avec les estimations normales d'Agmon (cf. Pro-

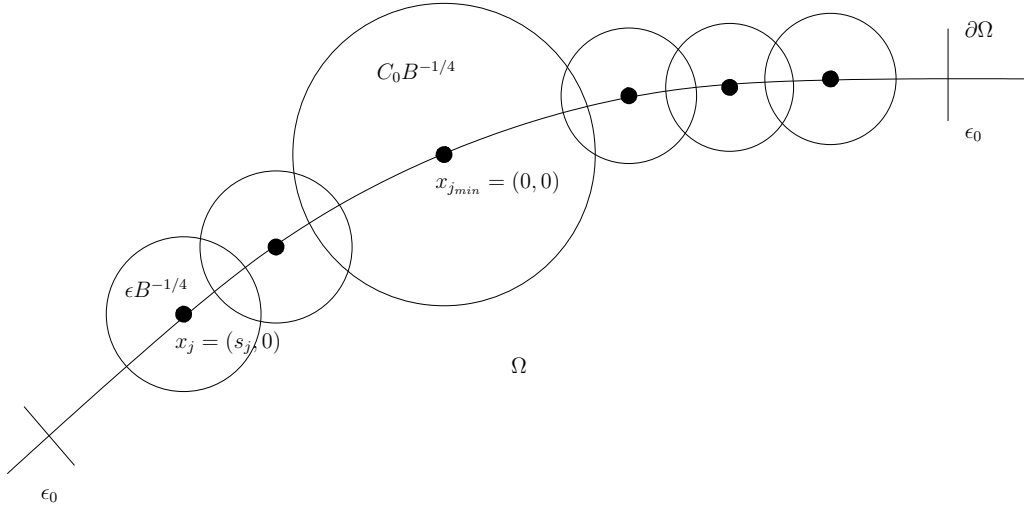


FIG. 3.1.4 – Partition de l'unité près du bord

position 1.4.6), il existe $C > 0$ tel que pour tout j :

$$\left| \int \Delta k_j(s) t (|\partial_t \tilde{v}_j|^2 + |(i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v}_j|^2) ds dt \right| \leq CB^{\frac{1}{4}} \|\tilde{v}_j\|^2.$$

Nous posons :

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}(0, 0) \quad (3.1.5)$$

et nous rappelons que $b' = \tilde{\beta}(0, 0)$.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence du minimum, on peut choisir $\epsilon_0 > 0$ suffisamment petit pour que :

$$\frac{\alpha}{2} s^2 \leq \tilde{\beta}(s, 0) - \tilde{\beta}(0, 0) \leq \frac{3}{2} \alpha s^2 \quad (3.1.6)$$

pour tout $|s| \leq \epsilon_0$.

Pour estimer le reste, on distingue suivant trois régions :

- $j = j_{\min}$,
- $|s_j| \geq \epsilon_0$,
- $C_0 B^{-1/4} \leq |s_j| \leq \epsilon_0$.

Cas 1 : $j = j_{\min}$

Comme

$$\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial s}(0, 0) = 0,$$

nous avons, avec (3.1.1) et (3.1.2) :

$$|R_{j_{\min}}(s, t)| \leq C(t^2 + s^2 t).$$

Par conséquent, utilisant la Proposition 1.4.6, nous obtenons :

$$\int |R_{j_{\min}}(s, t) \tilde{v}_{j_{\min}}|^2 ds dt \leq CB^{-2} \|\tilde{v}_{j_{\min}}\|^2.$$

Prenant $\lambda = B^{-1/2}$, nous déduisons :

$$q_{BA}(v_{j_{\min}}) \geq (\Theta_0 b' B - CB^{1/2}) \|\tilde{v}_{j_{\min}}\|^2.$$

Cas 2 : $|s_j| \geq \epsilon_0$

Nous trouvons :

$$|R_j(s, t)| \leq C((s - s_j)t + t^2).$$

Ainsi, on a :

$$\int |R_j(s, t)\tilde{v}_j|^2 ds dt \leq C(B^{-3/2}\epsilon^2 + B^{-2})\|\tilde{v}_j\|^2.$$

De plus, il existe $b'' > b'$ tel que, pour tout $|s_j| \geq \epsilon_0$, nous avons : $\tilde{\beta}_j \geq b''$. On prend $\lambda = B^{-1/2}$ et on déduit, par (3.1.4) et pour B assez grand, que pour tout j satisfaisant $|s_j| \geq \epsilon_0$:

$$q_{B\mathbf{A}}(v_j) \geq \Theta_0 b' B \|\tilde{v}_j\|^2.$$

Cas 3 : $C_0 B^{-1/4} \leq |s_j| \leq \epsilon_0$

On se sert de l'inégalité suivante :

$$\sup_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} \left| \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial s}(0, s) \right|^2 \leq C \sup_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'|$$

pour déduire de (3.1.2) et (3.1.1) que :

$$\int |R_j(s, t)\tilde{v}_j|^2 ds dt \leq C(B^{-3/2}\epsilon^2 \sup_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'| + B^{-2})\|\tilde{v}_j\|^2.$$

En conséquence, on peut écrire, avec $\lambda = B^{-1/2}$:

$$q_{B\mathbf{A}}(v_j) \geq (\Theta_0 b' B + B(\Theta_0(\tilde{\beta}(s_j) - b') - C\epsilon^2 \sup_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'|))\|\tilde{v}_j\|^2.$$

Par non-dégénérescence, nous avons, pour $C_0 \geq 2\epsilon$:

$$\sup_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'| \leq 27 \inf_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'|. \quad (3.1.7)$$

En effet, nous avons, pour tout $C_0 \geq 2\epsilon$:

$$\inf_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'| \geq \frac{\alpha}{2} \inf_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} s^2 \geq \frac{\alpha}{2} (s_j - \epsilon B^{-1/4})^2$$

et

$$\sup_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'| \leq \frac{3\alpha}{2} \sup_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} s^2 \leq \frac{3\alpha}{2} (s_j + \epsilon B^{-1/4})^2.$$

Ainsi, nous obtenons, pour $C_0 \geq 2\epsilon$:

$$\frac{\sup_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'|}{\inf_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'|} \leq 3 \left(\frac{s_j + \epsilon B^{-1/4}}{s_j - \epsilon B^{-1/4}} \right)^2 = 3 \left(1 + \frac{2\epsilon B^{-1/4}}{s_j - \epsilon B^{-1/4}} \right)^2 \leq 27.$$

On en déduit, pour $C_0 \geq 2\epsilon$:

$$q_{B\mathbf{A}}(v_j) \geq (\Theta_0 b' B + B(\Theta_0 - 27C\epsilon^2) \inf_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'|) \|\tilde{v}_j\|^2.$$

On utilisera plus tard qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $C_0 \geq 2\epsilon$:

$$q_{B\mathbf{A}}(v_j) \geq \left(\Theta_0 b' B + cB(\tilde{\beta}(s_j) - b') \right) \|\tilde{v}_j\|^2. \quad (3.1.8)$$

En effet, on a, pour tout $C_0 \geq 2\epsilon$:

$$\inf_{|s-s_j| \leq \epsilon B^{-1/4}} |\tilde{\beta} - b'| \geq \frac{1}{27}(\tilde{\beta}(s_j) - b').$$

Nous trouvons, pour $\epsilon > 0$ assez petit :

$$q_{B\mathbf{A}}(v_j) \geq (\Theta_0 b' B + CB^{1/2}) \|\tilde{v}_j\|^2.$$

Nous en concluons que :

$$\sum_{j \text{ brd}} q_{B\mathbf{A}}(v_j) \geq (\Theta_0 b' B - CB^{1/2}) \sum_{j \text{ brd}} \|v_j\|^2.$$

Rassemblant cette estimation et l'estimation à l'intérieur de Ω , nous avons la minoration du Théorème 1.2.6.

3.2 Minoration raffinée

Cette section est consacrée à l'obtention du deuxième terme annoncé au Théorème 1.2.10. Nous commençons par montrer des propriétés de localisation des premières fonctions propres sur le bord.

3.2.1 Estimations tangentielles d'Agmon

Estimées tangentielles d'Agmon pour u_B

Nous utilisons maintenant la minoration trouvée en (3.1.8) ; plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $C_0 > 0$

suffisamment grand, il existe $C' > 0$ t.q pour tout u dans le domaine de forme de $q_{B\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned} q_{B\mathbf{A}}(u) &\geq (bB - CB^{1/2}) \sum_{j \text{ int}} \|\chi_j u\|^2 \\ &\quad + \sum_{\substack{j \text{ brd}, j \neq j_{\min}}} (\Theta_0 b' B + c(\tilde{\beta}(s_j) - b')B - CB^{1/2}) \|\chi_j u\|^2 \\ &\quad + (\Theta_0 b' B - C' B^{1/2}) \|\chi_{j_{\min}} u\|^2. \end{aligned}$$

Notons que les termes en $B^{1/2}$ proviennent du reste dans la partition de l'unité ; nous avons en effet :

$$\sum_j \|\nabla \chi_j^B u_B\|^2 \leq CB^{1/2} \|u_B\|^2$$

et nous découpons ensuite cette majoration sous la forme :

$$CB^{1/2} \|u_B\|^2 = CB^{1/2} \sum_{\substack{j \text{ brd} \\ j \neq j_{\min}}} \|\chi_j^B u_B\|^2 + CB^{1/2} \|\chi_{j_{\min}} u_B\|^2 + CB^{1/2} \sum_{j \text{ int}} \|\chi_j^B u_B\|^2.$$

Nous choisissons $u = \exp(B^{1/2}\Phi)u_B$; nous rappelons que, par le Théorème 1.2.6, nous avons la majoration suivante :

$$\lambda_1(B, \mathbf{A}) \leq \Theta_0 b' B + CB^{1/2}.$$

On écrit ensuite :

$$\|\nabla \Phi \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2 = \sum_j \|\chi_j^B |\nabla \Phi \exp(B^{1/2}\Phi)u_B\|^2.$$

Injectant ces estimations dans (1.4.34), on trouve l'inégalité suivante en divisant par B (après avoir éliminer les termes intérieurs en remarquant que $\Theta_0 b' B < bB$) :

$$\begin{aligned} &\int (C' B^{-1/2} + |\nabla \Phi|^2) |\chi_{j_{\min}} \exp(B^{1/2}\Phi)u_B|^2 \geq \\ &\sum_{\substack{j \text{ brd} \\ j \neq j_{\min}}} \int (c(\tilde{\beta}(s_j) - b') - CB^{-1/2} - |\nabla \Phi|^2) |\chi_j \exp(B^{1/2}\Phi)u_B|^2 ds dt. \end{aligned}$$

On choisit

$$\Phi = \alpha_1 d(s),$$

où d est la distance d'Agmon associée à la métrique $(\tilde{\beta}(s, 0) - b')ds^2$ i.e :

$$d(s) = \int_0^{|s|} (\tilde{\beta}(\sigma, 0) - b')^{1/2} d\sigma.$$

On peut remarquer, assez grossièrement, que $d(s) \approx \gamma s^2$ (pour un certain $\gamma > 0$).

Sur $D_{j_{\min}}$, on remarque que :

$$|\nabla \Phi|^2 \leq CB^{-1/2}.$$

Alors, pour $j \neq j_{\min}$, on considère la quantité :

$$c(\tilde{\beta}(s_j) - b') - CB^{-1/2} - \alpha_1^2(\tilde{\beta}(s) - b').$$

Pour $\epsilon > 0$ et α_1 assez petits, il existe $c' > 0$ tel que pour j tel que $|s_j| \geq \epsilon_0$ et B assez grand, nous avons :

$$c(\tilde{\beta}(s_j) - b') - CB^{-1/2} - \alpha_1^2(\tilde{\beta}(s) - b') \geq c'.$$

Pour $C_0 \geq 2\epsilon$, il existe $c'' > 0$ tel que pour $j \neq j_{\min}$ et $|s_j| \leq \epsilon_0$ et B assez grand, nous avons :

$$c(\tilde{\beta}(s_j) - b') - CB^{-1/2} - \alpha_1^2(\tilde{\beta}(s) - b') \geq c''B^{-1/2}.$$

En effet, par non-dégénérescence, nous avons (3.1.7). Ainsi, nous obtenons $C > 0$ et $B_0 > 0$ tels que pour tout $B \geq B_0$:

$$\sum_{j \text{ brd}} \int |\chi_j \exp(B^{1/2}\Phi)u_B|^2 \leq C \int_{|s| \leq C_0 B^{-1/4}} |\exp(B^{1/2}\Phi)u_B|^2.$$

Nous en déduisons la Proposition 1.2.8 et avons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout B assez grand :*

$$\int_{\Omega} s^{2n} \{|u_B|^2 + B^{-1}|(i\nabla + B\mathbf{A})u_B|^2\} dx \leq CB^{-n/2} \int_{\Omega} |u_B|^2 dx.$$

On va observer dans le paragraphe suivant qu'en utilisant cette première information de localisation et en reprenant la même technique que précédemment, nous allons tirer une information sur la décroissance de $D_s u_B$.

Estimées d'Agmon tangentielles pour $D_s u_B$

Dans cette sous-section, nous allons commencer par donner une estimation de

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B).$$

L'objet du lemme suivant est de donner une majoration de cette quantité :

Lemme 3.2.2 *Il existe $\alpha_1 > 0$, $C > 0$ et $B_0 > 0$ tel que si $\Phi = \alpha_1 d(s)$ et si $B \geq B_0$, alors :*

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B) - \Theta_0 b' B \int \left| \chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right|^2 dx \leq C B^{1/2} \int |\chi_{j_{\min}} u_B|^2 dx.$$

Preuve.

On considère une partition de l'unité comme en (1.4.29). Nous avons toujours la formule (1.4.31) et :

$$q_{B\mathbf{A}}(u) \geq \sum_j q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^B u) - C B^{1/2} \|u\|^2.$$

On utilise (1.4.34). On a

$$\lambda^1(B, \mathbf{A}) \leq \Theta_0 b' B + C B^{1/2}.$$

Ainsi, nous obtenons, avec les inégalités de la section précédente :

$$\begin{aligned} & q_{B\mathbf{A}} \left(\chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right) + \sum_{j \neq j_{\min}} (\Theta_0 b' B + c(\beta(s_j) - b') B) \int \left| \chi_j e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right|^2 dx \\ & \quad + b B \sum_{j \text{ int}} \int \left| \chi_j e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right|^2 dx \\ & \leq (\Theta_0 b' B + C B^{1/2}) \int \left| e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right|^2 dx + B \int \left| \nabla \Phi e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right|^2 dx + C B^{1/2} \|u_B\|^2, \end{aligned}$$

où $\Phi = \alpha_1 d(s)$.

On dispose du contrôle :

$$B \int_{\Omega} \left| \chi_{j_{\min}} \nabla \Phi e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right|^2 \leq C B^{1/2} \int_{\Omega} \left| \chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right|^2 dx \leq C B^{1/2} \int_{\Omega} |\chi_{j_{\min}} u_B|^2 dx,$$

et on déduit le lemme. ■

Nous passons maintenant à la minoration énoncée dans le lemme suivant.

Lemme 3.2.3 *Il existe $\alpha_1 > 0$, $C > 0$ et $B_0 > 0$ tel que si $\Phi = \alpha_1 d(s)$ et $B \geq B_0$, alors :*

$$\begin{aligned} & q_{B\mathbf{A}}(\chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B) - \Theta_0 b' B \int_{\Omega} \left| \chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B \right|^2 dx \\ & \geq B^{1/2} \frac{\mu''(\xi_0)}{2} \int_{\Omega} |D_s(\chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B)|^2 dx - C B^{1/2} \int_{\Omega} |\chi_{j_{\min}} u_B|^2 dx. \end{aligned}$$

Preuve.

On introduit :

$$\begin{aligned} q_{app}(v) &= \int_{t>0, s \in \mathbb{R}} (1 - k_0 t) |\partial_t v|^2 + \\ & (1 - k_0 t)^{-1} |(Bt + B\alpha s^2 t + B^{1/2}\xi_0 - D_s - B \frac{k_1}{2} t^2) v|^2 dt ds. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Si on écrit :

$$\tilde{A}_1(s, t) = \int (1 - t' k(s)) \tilde{\beta}(s, t') dt',$$

on a :

$$(1 - tk(s)) \tilde{\beta}(s, t) = (1 - tk_1) + \alpha s^2 + O(t^2 + |s|t + |s|^3),$$

et donc :

$$\tilde{A}_1(s, t) = t - \frac{k_1}{2} t^2 + \alpha s^2 t + O(t^3 + |s|t^2 + |s|^3 t). \quad (3.2.10)$$

Ensuite, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons pour tout $\lambda > 0$:

$$q_{B\mathbf{A}}(v) \geq (1 - \lambda) q_{app}(v) - \frac{B^2}{\lambda} \|Rv\|^2.$$

Par exemple, nous pouvons estimer $\int (st^2)^2 |v|^2$. Par les estimations tangentielles (cf. Proposition 1.2.8) et normales d'Agmon et posant :

$$v = \chi_{j_{\min}} e^{B^{1/2}\Phi} u_B,$$

nous avons :

$$B^2 \int s^2 t^4 |v|^2 ds dt \leq C B^2 B^{-1/2} B^{-2} \|v\|^2.$$

De la même façon, on contrôle les autres restes et, en choisissant λ convenablement, nous obtenons :

$$q_{B\mathbf{A}}(v) \geq q_{app}(v) - C B^{1/4} \int |v|^2. \quad (3.2.11)$$

À l'aide à nouveau de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des estimées d'Agmon, nous trouvons :

$$q_{app}(v) \geq (1 - B^{-1/2})q_{app}^2(v) - CB^{1/2} \int |v|^2 dx,$$

où

$$q_{app}^2(v) = \int_{t>0, s \in \mathbb{R}} (1 - k_0 t) |\partial_t v|^2 + (1 - k_0 t)^{-1} |(Bt + B^{1/2} \xi_0 - D_s)v|^2 dx.$$

Réalisant une transformée de Fourier partielle dans la variable s et posant $w = \hat{v}$, nous avons :

$$q_{app}^2(v) = \int_{t>0, \sigma \in \mathbb{R}} (1 - k_0 t) |\partial_t w|^2 + (1 - k_0 t)^{-1} |(Bt + B^{1/2} \xi_0 - \sigma)w|^2 dt d\sigma.$$

Ainsi, nous obtenons avec la Proposition A.4 :

$$q_{app}^2(v) \geq \Theta_0 b' B \int |v|^2 dx + B^{1/2} \frac{\mu''(\xi_0)}{2} \int |D_s v|^2 dx - CB^{1/2} \int |v|^2 dx.$$

Réunissant toutes les inégalités, le lemme est prouvé. ■

En conséquence des Lemmes 3.2.2 et 3.2.3, nous avons la majoration :

$$\int \left| D_s (\chi_{j_{min}} e^{B^{1/2} \Phi} u_B) \right|^2 dx \leq C \int |u_B|^2 dx.$$

Nous en déduisons la proposition suivante (car le commutateur de D_s et $\chi_{j_{min}}$ est de l'ordre de $B^{1/4}$) :

Proposition 3.2.4 (Estimées tangentielles d'Agmon pour $D_s u_B$) *Avec les notations précédentes, il existe $C > 0$, $\alpha_1 > 0$ et $B_0 > 0$ tels que pour tout $B \geq B_0$:*

$$\int_{\Omega} \left| e^{\alpha_1 B^{1/2} \chi(t(x))d(s(x))} D_s u_B \right|^2 dx \leq CB^{1/2} \int_{\Omega} |u_B|^2 dx,$$

où χ est une fonction troncature supportée dans $[-t_0, t_0]$.

Corollaire 3.2.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $B_0 > 0$ tel que pour tout $B \geq B_0$, nous avons :*

$$\int_{\Omega} \chi(t) s^{2n} |D_s u_B|^2 dx \leq CB^{1/2-n/2} \int_{\Omega} |u_B|^2 dx.$$

Remarque 3.2.6.

Les estimées normales et tangentielles d'Agmon disent grossièrement que $|u_B|$ a le même comportement que $e^{-\alpha s^2 B^{1/2}} u_0(B^{1/2} t)$. ■

3.2.2 Minoration raffinée

Dans cette section, nous prouvons la minoration du Théorème 1.2.10. On considère une partition de l'unité comme en (1.4.29) avec $\rho = \frac{1}{4} - \eta$ pour $\eta > 0$. On a :

$$q_{B\mathbf{A}}(u) \geq \sum_j q_{B\mathbf{A}}(\chi_j^B u) - CB^{1/2-2\eta}\|u\|^2.$$

Contrôle loin du minimum

Rappelons quelques estimations que nous avons déjà obtenues. Pour j tel que D_j ne rencontre pas le bord, nous avons :

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j u) \geq bB \int |\chi_j u|^2 dx.$$

Pour j tel que D_j rencontre le bord et $j \neq j_{min}$, nous pouvons remarquer que, pour B assez grand :

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_j u) \geq \Theta_0 b' B \int |\chi_j u|^2 dx.$$

Réduction à un modèle près du minimum

Par les inégalités que nous venons de rappeler, nous obtenons :

$$q_{B\mathbf{A}}(u_B) \geq \Theta_0 b' B \sum_{j \neq j_{min}} \|\chi_j u_B\|^2 + q_{B\mathbf{A}}(\chi_{j_{min}} u_B) - CB^{1/2-2\eta}\|u_B\|^2.$$

Grâce aux estimées normales et tangentielles d'Agmon, nous avons prouvé dans (3.2.11), avec (3.2.9), (3.2.10) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$q_{B\mathbf{A}}(\chi_{j_{min}} u_B) \geq q_{app}(\chi_{j_{min}} u_B) - CB^{1/4}\|u_B\|^2.$$

Pour faire disparaître le terme $\alpha s^2 t$, on fait un changement de variables :

$$t = \lambda(s)\tau,$$

où $\lambda(s) = (1 + \alpha s^2)^{-1/2}$; on a :

$$\partial_s v = \frac{\partial \tau}{\partial s} \partial_\tau \tilde{v} + \partial_s \tilde{v}, \quad \partial_t v = \frac{\partial \tau}{\partial t} \partial_\tau \tilde{v}, \quad (3.2.12)$$

où \tilde{v} désigne la fonction v dans les variables (τ, s) et nous sommes ramenés à la forme :

$$\begin{aligned} \widetilde{q_{app}}(v) &= \int \left\{ (1 - k_0 \tau \lambda(s)) |\partial_\tau v|^2 \right. \\ &\quad + (1 - k_0 \tau \lambda(s))^{-1} \left| (B\tau + \xi_0 \lambda(s) B^{1/2} - \lambda(s) D_s - B \frac{k_1 \tau^2}{2} \lambda(s)^3 \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \tau s \lambda(s)^3 D_\tau v \right)^2 \right\} \lambda(s)^{-1} d\tau ds, \end{aligned}$$

où nous avons omis le tilde pour alléger les notations. Remarquant que $s^2 = O(B^{2\rho-1/2})$, sur le support de $v = \chi_{j_{min}} u_B$, nous faisons les approximations suivantes dans L^2 :

$$\begin{aligned} -\lambda(s) D_s v &= -D_s v + O(s^2) D_s v, \\ \tau^2 \lambda(s)^3 v &= \tau^2 v + O(s^2 \tau^2) v, \\ s \lambda(s)^3 \tau D_\tau v &= s \tau D_\tau v + O(s^3 \tau) D_\tau v. \end{aligned}$$

On trouve d'abord :

$$\begin{aligned} \widetilde{q_{app}}(v) &\geq \int \left\{ (1 - \tau k_0) |\partial_\tau v|^2 \right. \\ &\quad + (1 - \tau k_0)^{-1} \left| (B\tau + \xi_0 \lambda(s) B^{1/2} - \lambda(s) D_s - B \frac{k_1 \tau^2}{2} \lambda(s)^3 + \alpha s \lambda(s)^3 \tau D_\tau v \right|^2 \right\} \lambda(s)^{-1} d\tau ds \\ &\quad - C \int \Delta \lambda(s) \tau \left\{ |\partial_\tau v|^2 + \left| (B\tau + \xi_0 \lambda(s) B^{1/2} - \lambda(s) D_s - B \frac{k_1 \tau^2}{2} \lambda(s)^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha s \lambda(s)^3 \tau D_\tau v \right)^2 \right\} \lambda(s)^{-1} d\tau ds, \end{aligned}$$

où

$$\Delta \lambda(s) = \lambda(s) - \lambda(0).$$

Examinons le second terme :

$$\begin{aligned} &\int \Delta \lambda(s) \tau \left\{ |\partial_\tau v|^2 + \left| (B\tau + \xi_0 \lambda(s) B^{1/2} - \lambda(s) D_s - B \frac{k_1 \tau^2}{2} \lambda(s)^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha s \lambda(s)^3 \tau D_\tau v \right)^2 \right\} \lambda(s)^{-1} d\tau ds. \end{aligned}$$

Revenons dans les variables (t, s) , ce terme devient :

$$\int \frac{\Delta \lambda(s)}{\lambda(s)} t \left\{ |\partial_t v|^2 + \left| (B(1 + \alpha s^2)t + \xi_0 B^{1/2} - D_s - B \frac{k_1 t^2}{2}) v \right|^2 \right\} dt ds.$$

Alors, les estimées d'Agmon donne un contrôle de ce terme en $O(1)$. Ensuite, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les estimées d'Agmon (pour u_B et $D_s u_B$

après être revenu dans les variables (s, t) et utilisant la même analyse que dans (3.2.11), nous avons :

$$\begin{aligned} & \int \left\{ (1 - \tau k_0) |\partial_\tau v|^2 + (1 - \tau k_0)^{-1} \left| (B\tau + \xi_0 \lambda(s) B^{1/2} - \lambda(s) D_s - B \frac{k_1 \tau^2}{2} \lambda(s)^3 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \alpha s \lambda(s)^3 \tau D_\tau \right) v \right|^2 \right\} \lambda(s)^{-1} d\tau ds \\ & \geq \int \left\{ (1 - \tau k_0) |\partial_\tau v|^2 + (1 - \tau k_0)^{-1} \left| (B\tau + \xi_0 \lambda(s) B^{1/2} - D_s - B \frac{k_1 \tau^2}{2}) v \right|^2 \right\} \lambda(s)^{-1} d\tau ds \\ & \quad - C B^{1/4} \|v\|^2. \end{aligned}$$

On a finalement avec $v = \chi_{j_{\min}} u_B$:

$$\begin{aligned} q_{B\mathbf{A}}(u_B) & \geq \Theta_0 b' B \sum_{j \neq j_{\min}} \|\chi_j u_B\|^2 \tag{3.2.13} \\ & + \int \left\{ (1 - \tau k_0) |\partial_\tau v|^2 + (1 - \tau k_0)^{-1} \left| (B\tau + \xi_0 \lambda(s) B^{1/2} - D_s - B \frac{k_1 \tau^2}{2}) v \right|^2 \right\} \lambda(s)^{-1} d\tau ds \\ & \quad - C B^{1/4} \|u_B\|^2 - C B^{1/2-2\eta} \|u_B\|^2. \end{aligned}$$

De plus, grâce à la décroissance exponentielle de u_B loin du bord (estimées normales d'Agmon), on peut remplacer $\chi_{j_{\min}}$ par une fonction de troncature régulière telle que

$$\text{supp} \chi_{j_{\min}} \subset \{0 < t \leq B^{-1/2+\eta} \text{ et } |s| \leq B^{-1/4+\eta}\},$$

autrement dit nous supposons, pour des raisons techniques, que $\chi_{j_{\min}}$ est supportée dans des rectangles plutôt que dans des boules.

3.2.3 Minoration pour le modèle

Ainsi, nous sommes réduits, après changement d'échelle $\tau = \frac{\hat{\tau}}{B^{1/2}}, s = \frac{\hat{s}}{B^{1/4}}$, à l'étude de :

$$\begin{aligned} q_{\text{mod}}(u) & = \int_{\hat{\tau} > 0, \hat{s} \in \mathbb{R}} \left\{ \left(1 - \frac{k_0 \hat{\tau}}{B^{1/2}}\right) |\partial_{\hat{\tau}} u|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(1 - \frac{k_0 \hat{\tau}}{B^{1/2}}\right)^{-1} \left| \left(\hat{\tau} + \xi_0 \lambda(B^{-1/4} \hat{s}) - \frac{D_{\hat{s}}}{B^{1/4}} - \frac{k_1}{2 B^{1/2}} \hat{\tau}^2\right) u \right|^2 \right\} \left(1 + \frac{\alpha \hat{s}^2}{B^{1/2}}\right)^{1/2} d\hat{\tau} d\hat{s}. \end{aligned}$$

Réduction à la mesure euclidienne

Pour faire disparaître le poids $(1 + \frac{\alpha \hat{s}^2}{B^{1/2}})^{1/2}$, on réalise le changement de fonction défini par :

$$v = \left(1 + \frac{\alpha \hat{s}^2}{B^{1/2}}\right)^{1/4} u = f_B(\hat{s}) u,$$

on a :

$$q_{mod}(u) = \int_{\hat{\tau} > 0, \hat{s} \in \mathbb{R}} \left\{ \left(1 - \frac{k_0 \hat{\tau}}{B^{1/2}}\right) |\partial_{\hat{\tau}} v|^2 + \left(1 - \frac{k_0 \hat{\tau}}{B^{1/2}}\right)^{-1} \left| \left(\hat{\tau} + \xi_0 \lambda(B^{-1/4} \hat{s}) - \frac{D_{\hat{s}}}{B^{1/4}} - \frac{f'_B(\hat{s})}{B^{1/4} f_B(\hat{s})} - \frac{k_1}{2B^{1/2}} \hat{\tau}^2\right) v \right|^2 \right\} d\hat{\tau} d\hat{s}.$$

Terme en \hat{s}

On désire faire une transformée de Fourier dans la variable \hat{s} pour être réduit à un problème sur le demi-axe, mais le terme $\xi_0 \lambda(B^{-1/4} \hat{s})$ nous ennuie ; c'est pourquoi on va le faire disparaître dans un changement de jauge. On écrit : $\lambda(B^{-1/4} \hat{s}) = 1 + r_B(\hat{s})$ et on fait le changement de jauge : $v \mapsto \tilde{v} = v e^{-i\phi(\hat{s})}$, où

$$\phi(\hat{s}) = \int_0^{\hat{s}} \left[\xi_0 r_B(\sigma) - \frac{1}{B^{1/4}} \frac{f'_B(\sigma)}{f_B(\sigma)} \right] d\sigma$$

pour être réduit à :

$$\widetilde{q_{mod}}(\tilde{v}) = \int_{\hat{\tau} > 0, \hat{s} \in \mathbb{R}} \left\{ \left(1 - \frac{k_0 \hat{\tau}}{B^{1/2}}\right) |\partial_{\hat{\tau}} \tilde{v}|^2 + \left(1 - \frac{k_0 \hat{\tau}}{B^{1/2}}\right)^{-1} \left| \left(\hat{\tau} + \xi_0 - \frac{D_{\hat{s}}}{B^{1/4}} - \frac{k_1}{2B^{1/2}} \hat{\tau}^2\right) \tilde{v} \right|^2 \right\} d\hat{\tau} d\hat{s},$$

où $u = (\chi_{j_{min}} u_B)(B^{1/2} \hat{\tau}, B^{1/4} \hat{s})$. On peut désormais faire une transformée de Fourier en la variable \hat{s} qui nous ramène à un problème en une dimension dans la variable normale :

$$q_n(w) = \int_{\hat{\tau} > 0} \left[\left(1 - \frac{k_0 \hat{\tau}}{B^{1/2}}\right) |\partial_{\hat{\tau}} w|^2 + \left(1 - \frac{k_0 \hat{\tau}}{B^{1/2}}\right)^{-1} \left| \left(\hat{\tau} + \xi_0 - \frac{\sigma}{B^{1/4}} - \frac{k_1}{2B^{1/2}} \hat{\tau}^2\right) w \right|^2 \right] d\hat{\tau},$$

avec $w = \hat{v}$.

On peut alors utiliser les résultats de l'Annexe A (où on remplace la fonction l par t , ce qui ne pose pas de problème par décroissance exponentielle de w en la variable $\hat{\tau}$ du fait des estimées normales d'Agmon). Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout B assez grand :

$$q_n(w) \geq \left(\Theta_0 + (\Theta_{1/2}^{k_0, k_1} + \frac{\mu''(\xi_0)}{2} \sigma^2) B^{-1/2} - C B^{-3/4+3\eta} \right) \int_{\hat{\tau} > 0} |w|^2 \left(1 - \frac{\hat{\tau} k_0}{B^{1/2}} \right) d\hat{\tau}. \quad (3.2.14)$$

Remarque 3.2.7.

Dans [HM04, FH09], le fait que le champ magnétique soit constant permettait de se réduire au cas $k_0 = k_1 = 1$, et donc on avait $\Theta_{1/2}^{k_0, k_1} = -C_1$.

■

Retour dans les variables initiales

Par la formule de Parseval, on trouve :

$$\begin{aligned} q_{mod}(u) &= \widetilde{q_{mod}}(\tilde{v}) \geq \\ &(\Theta_0 + \Theta_{1/2}^{k_0, k_1} B^{-1/2}) \int_{\substack{\hat{s} \in \mathbb{R} \\ \hat{\tau} > 0}} |v|^2 \left(1 - \frac{\hat{\tau} k_0}{B^{1/2}}\right) d\hat{\tau} d\hat{s} \\ &+ B^{-1/2} \frac{\mu''(\xi_0)}{2} \int_{\substack{\hat{s} \in \mathbb{R} \\ \hat{\tau} > 0}} |D_{\hat{s}} \tilde{v}|^2 \left(1 - \frac{\hat{\tau} k_0}{B^{1/2}}\right) d\hat{\tau} d\hat{s} - CB^{-3/4+3\eta} \|u\|^2. \end{aligned}$$

On a :

$$|D_{\hat{s}} \tilde{v}|^2 = |(D_{\hat{s}} - \phi'(\hat{s}))v|^2.$$

Comme $|\phi'(\hat{s})| \leq C\hat{s}^2 B^{-1/2} \leq CB^{-1/2+2\eta}$ sur le support de v , on déduit :

$$|D_{\hat{s}} \tilde{v}|^2 \geq (1 - B^{-1/4+\eta}) |D_{\hat{s}} v|^2 - B^{-1/4+\eta} |v|^2.$$

De plus, nous avons :

$$D_{\hat{s}} v = \frac{\alpha \hat{s}}{2B^{1/2}} f_B(s)^{-3} u + f_B(\hat{s}) D_{\hat{s}} u.$$

On déduit :

$$|D_{\hat{s}} \tilde{v}|^2 \geq |D_{\hat{s}} u|^2 - CB^{-1/4+\eta} (|u|^2 + |D_{\hat{s}} u|^2) - B^{-1/4+\eta} |D_{\hat{s}} v|^2.$$

Après changement d'échelle,

$$d\hat{\tau} d\hat{s} = \left(1 + \frac{\alpha \hat{s}^2}{B^{1/2}}\right)^{1/2} dt d\hat{s},$$

$$|v|^2 = \left(1 + \frac{\alpha \hat{s}^2}{B^{1/2}}\right)^{1/2} |u|^2,$$

o  $\hat{t} = B^{-1/2}t$, et avec les estimées tangentielles d'Agmon, nous trouvons :

$$\|D_{\hat{s}} v\|^2 \leq C\|u\|^2, \quad \|D_{\hat{s}} u\|^2 \leq C\|u\|^2,$$

et

$$\begin{aligned} q_{mod}(u) &\geq \Theta_0 \|u\|^2 + \Theta_{k_0, k_1} B^{-1/2} \|u\|^2 \\ &+ \left(\int \left\{ \alpha \Theta_0 |\hat{s} \tilde{u}|^2 + \frac{\mu''(\xi_0)}{2} |D_{\hat{s}} \tilde{u}|^2 d\hat{s} \right\} \left(1 - \frac{\hat{t} k_0}{B^{1/2}}\right) d\hat{t} \right) B^{-1/2} \\ &- CB^{-3/4+3\eta}, \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

où $\check{u}(\hat{t}, \hat{s}) = u(\hat{\tau}, \hat{s})$ et, encore grâce aux estimées d'Agmon, on a remplacé $D_{\hat{s}}u$ par $D_{\hat{s}}\check{u}$ et $\hat{\tau}$ par \hat{t} en remarquant que : $D_{\hat{s}}u = D_{\hat{s}}\check{u} + \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{s}} D_{\hat{t}}\check{u}$ et $\lambda(\hat{s}B^{-1/4})\hat{\tau} = \hat{t}$. Nous reconnaissons la forme quadratique de l'oscillateur harmonique et nous avons :

$$\int \left\{ \alpha \Theta_0 |\hat{s}\check{u}|^2 + \frac{\mu''(\xi_0)}{2} |D_{\hat{s}}\check{u}|^2 \right\} d\hat{s} \geq \sqrt{\frac{\mu''(\xi_0)\alpha\Theta_0}{2}} \int |\check{u}|^2 d\hat{s}.$$

on prend $\eta = \frac{1}{20}$ et le minoration dans le Théorème 1.2.10 suit de (3.2.15), (3.2.13) et (1.2.4) après avoir remarqué, par les estimées d'Agmon, que :

$$\int_{\Omega} |\chi_{j_{min}} u_B|^2 dx = (1 + O(e^{-cB^\eta})) \int_{\Omega} |u_B|^2 dx.$$

Deuxième partie

Analyse semi-classique d'opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique non uniforme : 3D

Chapitre 4

Estimations uniformes pour la première valeur propre, applications

Le but de ce chapitre est motivé par l'étude de $\mu^*(q, \tau)$ (cf. Théorème 1.3.17) et la localisation des fonctions propres associées. En fait, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction (cf. Théorèmes 1.3.5 et 1.3.4), nous allons montrer des majorations et minoration de $\lambda_1(B, \mathbf{A})$ en précisant comment les restes sont contrôlés en fonction des variations du champ magnétique (qui sera de module constant); cela permet notamment d'accéder au régime $\tau \rightarrow +\infty$ pour $\mu^*(q, \tau)$ ou encore de considérer le cas des “grands” ouverts.

4.1 Majoration

Dans cette section, on prouve le Théorème 1.3.5. On se réfère à [HM04] et nous allons insister sur les points cruciaux où l'uniformité joue un rôle. Dans le cas du champ constant sur \mathbb{R}_+^3 , nous savons (voir les conséquences du Lemme 1.3.1) que le bas du spectre est minimal lorsque le champ magnétique est tangent au bord. Ainsi, on va construire un quasimode localisé près d'un point où le champ est tangent. Plus précisément, on va tronquer u_{ξ_0} et nous en servir comme fonction test.

On fixe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que : $\beta(x_0) \cdot \nu = 0$. Un tel x_0 existe; en effet, en remarquant que $\operatorname{div}(\beta) = 0$, la formule de Stokes donne :

$$\int_{\partial\Omega} \beta \cdot \nu d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\beta) dx = 0.$$

On choisit $\delta \in]0, 1/2[$ et on suppose que u vérifie

$$\text{supp}(u) \subset B(x_0, \alpha r),$$

avec $r = \frac{1}{q^\delta}$.

On suppose que le support de u est suffisamment petit de sorte qu'après le changement de coordonnées donné dans la Section D.1, on peut utiliser les mêmes arguments que dans le Lemme 1.4.2 et prendre une jauge dans laquelle \mathbf{A} satisfait :

$$|\mathbf{A}(y) - \mathbf{A}^0(y)| \leq C|\boldsymbol{\beta}|_{C^2}|y|^3,$$

où $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{lin} + R$, avec $R = (R_1, R_2, R_3)$ et où R_j est un polynôme homogène d'ordre 2 et où $\nabla^2 \boldsymbol{\beta}$ désigne la matrice hessienne de $\boldsymbol{\beta}$.

On trouve :

$$\|\nabla_{q\mathbf{A}} u\|^2 \leq (1 + Cr)(q_{q\mathbf{A}^0}(u) + C(|\boldsymbol{\beta}|_{C^2}^2 r^6 q^2 \|u\|^2 + qr^3 |\boldsymbol{\beta}|_{C^2} \|u\|_{q\mathbf{A}^0}(u)^{1/2})).$$

On pose :

$$u(y) = q^{1/4+\delta} e^{-i\xi_0 y_2 q^{1/2}} u_{\xi_0}(q^{1/2} y_3) \chi(4q^\delta y_3) \chi(4q^\delta (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}).$$

On doit comparer : $\|\nabla_{q\mathbf{A}^0} u\|^2$ et $\|\nabla_{q\mathbf{A}^{lin}} u\|^2$. On obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla_{q\mathbf{A}^0} u\|^2 &\leq \|\nabla_{q\mathbf{A}^{lin}} u\|^2 + Cq^2 r^4 (1 + |\nabla \boldsymbol{\beta}|_\infty^2) \|u\|^2 \\ &\quad + 2\Re \left\{ \int_{|y| \leq \alpha r, y_3 > 0} (i\nabla + q\mathbf{A}^{lin})u \cdot (q\mathbf{A}^0 - q\mathbf{A}^{lin})u dy \right\}. \end{aligned}$$

On doit estimer le double produit (cf. [HM04, section 6, p. 120] ; cela utilise le fait que $M_1 = 0$ où M_1 est défini en (1.2.4)) :

$$\left| \Re \left\{ \int_{|y| \leq \alpha r, y_3 > 0} (i\nabla + q\mathbf{A}^{lin})u \cdot (q\mathbf{A}^0 - q\mathbf{A}^{lin})u dy \right\} \right| \leq C(1 + |\nabla \boldsymbol{\beta}|_\infty) q^{1-\delta}.$$

En outre, par décroissance exponentielle de u_{ξ_0} , on a :

$$\|\nabla_{q\mathbf{A}^{lin}} u\|^2 \leq \Theta_0 q + Cq^{2\delta}.$$

4.2 Minoration

Dans cette section, nous prouvons le Théorème 1.3.4 et nous rappelons que dans ce qui suit : $\|\nabla \times \mathbf{A}\| = 1$. Pour tout $r > 0$, on considère une partition de l'unité comme en (1.4.29) et on garde en mémoire la formule d'IMS (1.4.31).

On distingue comme d'habitude deux types de boules : les boules à l'intérieur de Ω et celles qui rencontrent le bord.

À l'intérieur de Ω

Soit j tel que B_j ne rencontre pas le bord.

Rappelons (1.4.32) : pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{A}^{lin})\psi|^2 dx \geq q \int_{\Omega} |\psi|^2 dx. \quad (4.2.1)$$

On applique d'abord le Lemme 1.4.2, pour obtenir changement de jauge $v \mapsto e^{-i\phi}v$ qui nous donne de l'uniformité dans l'estimation du reste de l'approximation du champ magnétique par le champ constant. Puis, avec l'inégalité classique :

$$|a + b|^2 \geq (1 - \lambda^2)|a|^2 - \frac{1}{\lambda^2}|b|^2,$$

pour tout $\lambda > 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(i\nabla + q(\mathbf{A} - \nabla\phi))(\chi_j u e^{-i\phi})|^2 dx &\geq \left((1 - \lambda^2) \int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{A}^{lin})(\chi_j u e^{-i\phi})|^2 dx \right. \\ &\quad \left. - C^2 q^2 \frac{|\nabla\beta|_{\infty}^2}{\lambda^2} r^4 \right) \int_{\Omega} |\chi_j u|^2 dx, \end{aligned}$$

où \mathbf{A}^{lin} est défini dans le Lemme 1.4.2. Ainsi, on trouve, avec (1.4.32) appliqué à $\psi = \chi_j u e^{-i\phi}$:

$$\int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{A})\chi_j u|^2 dx \geq \left((1 - \lambda^2)q - C^2 q^2 \frac{|\nabla\beta|_{\infty}^2}{\lambda^2} r^4 \right) \int_{\Omega} |\chi_j u|^2 dx. \quad (4.2.2)$$

Près du bord

On se réfère à [HM02, HM04], mais nous aurons ici à contrôler soigneusement l'uniformité par rapport aux paramètres. Nous utiliserons le résultat du champ constant sur \mathbb{R}_+^3 . On utilise le système de coordonnées locales donné en Annexe D. Soit j tel que $B_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. On peut supposer que $x_j \in \partial\Omega$ et $x_j = 0$ sans perte de généralité. Après le changement de variables donné par le difféomorphisme Φ (cf. Annexe D, Section D.1), nous avons (formule D.3) :

$$\int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{A})\chi_j u|^2 dx = \int_{y_3 > 0} |(i\nabla_y + q\tilde{\mathbf{A}})\widetilde{\chi_j u}|_{(D\Phi)^{-1}((D\Phi)^{-1})^t}^2 |\det(D\Phi)| dy.$$

Il existe $C > 0$ (uniforme en j) tel que :

$$\int_{y_3 > 0} |(i\nabla_y + q\tilde{\mathbf{A}})\widetilde{\chi_j u}|_{(D\Phi)^{-1}((D\Phi)^{-1})^t}^2 |\det(D\Phi)| dy \geq (1 - Cr) \int_{y_3 > 0} |(i\nabla_y + q\tilde{\mathbf{A}})\widetilde{\chi_j u}|^2 dy.$$

On utilise encore l'approximation du champ magnétique constant (pour des demi-boules) sur le support de $\tilde{\chi}_j$.

Plus précisément, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout j :

$$\text{supp}(\tilde{\chi}_j) \subset B(x_j, \alpha r).$$

Ainsi, on change notre partition de l'unité en remplaçant les boules qui rencontrent le bord par $\Phi(B(x_j, \alpha r))$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout j , il existe $\tilde{\mathbf{A}}^{lin}$ (défini au Lemme 1.4.2) satisfaisant :

$$\begin{aligned} \int_{y_3 > 0} |(i\nabla_y + q\tilde{\mathbf{A}})\widetilde{\chi_j u}|^2 dy &\geq (1 - \lambda^2) \int_{y_3 > 0} |(i\nabla_y + q\tilde{\mathbf{A}}^{lin})\widetilde{\chi_j u}|^2 dy \\ &\quad - \frac{C^2 q^2}{\lambda^2} |\nabla \tilde{\beta}|_\infty^2 r^4 \int_{\Omega} |\widetilde{\chi_j u}|^2 dy. \end{aligned}$$

On est réduit au cas du champ constant (d'intensité q) sur $\mathbb{R}_+^3 = \{y_3 > 0\}$ et on obtient :

$$\int_{y_3 > 0} |(i\nabla_y + q\tilde{\mathbf{A}})\widetilde{\chi_j u}|^2 dy \geq \Theta_0 q \int_{y_3 > 0} |\widetilde{\chi_j u}|^2 dy.$$

Nous trouvons donc :

$$\int_{y_3 > 0} |(i\nabla_y + q\tilde{\mathbf{A}})\widetilde{\chi_j u}|^2 dy \geq \left((1 - \lambda^2) q \Theta_0 - \frac{C^2 q^2}{\lambda^2} (1 + |\nabla \beta|_\infty^2) r^4 \right) \int_{y_3 > 0} |\widetilde{\chi_j u}|^2 dy.$$

Fin de la preuve

On prend, pour $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{q^{1/2-\epsilon}}$. On divise par q et on choisit λ tel que :

$$\lambda^2 = \frac{q}{\lambda^2} (1 + |\nabla \beta|_\infty^2) r^4,$$

ou encore :

$$\lambda^2 = q^{1/2} r^2 (1 + \|\nabla \beta\|_\infty^2)^{1/2}.$$

Ensuite, les estimations précédentes mènent à l'existence de $C > 0$ et $q_0 > 0$, dépendant seulement de Ω , tels que $q \geq q_0$:

$$\frac{\|\nabla_q \mathbf{A} u\|^2}{q} \geq \left(\Theta_0 - C \left(r + \lambda^2 + \frac{1}{qr^2} \right) \right) \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Finalement, on trouve :

$$\frac{\lambda_1(q, \mathbf{A})}{q} \geq \Theta_0 - C \left(\frac{1}{q^{1/2-2\epsilon}} + \frac{1}{q^{2\epsilon}} + \frac{|\nabla \beta|_\infty}{q^{1/2-2\epsilon}} \right)$$

et le Théorème 1.3.4 est démontré.

En reprenant la preuve du Théorème 1.3.4 (cf. (4.2.2)), nous avons prouvé la proposition suivante :

Proposition 4.2.1 *Pour $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ (cf. (1.3.13)), on note $\mu_0(q, \mathbf{A})$ la plus petite valeur propre de la réalisation de Dirichlet de $(i\nabla + q\mathbf{A})^2$.*

Alors, pour tout $\epsilon \in]0, 1/2[$, il existe $C = C(\Omega, \epsilon) > 0$ et $q_0 = q_0(\Omega, \epsilon)$ t.q. si $q \geq q_0$ et $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$:

$$\frac{\mu_0(q, \mathbf{A})}{q} \geq 1 - C \left(\frac{1}{q^{2\epsilon}} + \frac{|\nabla \beta|_\infty}{q^{1/2-2\epsilon}} \right).$$

Cette proposition possède le corollaire suivant (pour le choix de $\epsilon = \frac{1}{8} - \frac{x}{4}$) :

Corollaire 4.2.2 *Soit $c_0 > 0$. Pour tout $x \in [0, 1/2[$, il existe $C = C(\Omega, x, c_0) > 0$, tel que, pour tout $\mathbf{n} \in \mathcal{C}(\tau)$ et (q, τ) tels que $\tau \leq c_0(q\tau)^x$:*

$$\frac{\mu_0(q\tau, \frac{\mathbf{n}}{\tau})}{q\tau} \geq 1 - C \left(\frac{1}{q\tau} \right)^{1/4-x/2}.$$

4.3 Application à $\mu^*(q, \tau)$

Nous allons maintenant déduire de ce qui précède une information asymptotique sur $\mu^*(q, \tau)$.

Preuve du Théorème 1.3.7

Remarquons que

$$\lambda_1(q\tau, \frac{Q\mathbf{n}_\tau Q^t}{\tau}) = \lambda_1(q, Q\mathbf{n}_\tau Q^t).$$

De plus, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau > 0$ et $\mathbf{n} \in \mathcal{C}(\tau)$, si $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{n}}{\tau}$, alors :

$$\begin{aligned} |\beta|_\infty &= 1, \\ |\nabla \beta|_\infty &\leq C\tau, \\ |\nabla^2 \beta|_\infty &\leq C\tau^2. \end{aligned}$$

Pour la minoration, on applique le Théorème 1.3.4 à la sous-famille $\mathcal{C}(\tau)$ de \mathcal{A} et, utilisant (1.3.16), on obtient :

$$\frac{\mu^*(q, \tau)}{q\tau} \geq \Theta_0 - C \left(\frac{1}{(q\tau)^{1/2-2\epsilon}} + \frac{1}{(q\tau)^{2\epsilon}} + c_0 \frac{(q\tau)^x}{(q\tau)^{1/2-2\epsilon}} \right).$$

On choisit ϵ tel que $\frac{1}{2} - 2\epsilon - x = 2\epsilon$, i.e : $2\epsilon = \frac{1}{4} - \frac{x}{2}$.

Pour la majoration, on applique le Théorème 1.3.5 avec $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{n}_\tau}{\tau}$. Alors, on obtient :

$$\mu^*(q, \tau) \leq \Theta_0 q\tau + C \left((q\tau)^{2\delta} + (q\tau)^{2-4\delta+2x} + (q\tau)^{1-\delta+x} + (q\tau)^{3/2-3\delta+2x} + (q\tau)^{2-6\delta+4x} \right).$$

On choisit δ tel que :

$$2\delta = 1 - \delta + x.$$

Ainsi, on prend $\delta = \frac{1+x}{3}$ et la majoration s'ensuit.

Remarque sur $\mu^*(q, \tau)$

Le but de ce paragraphe est de donner une information plus globale sur le comportement de $\mu^*(q, \tau)$ par rapport à $q\tau$ comme cela est suggéré par de Gennes (voir [dG95]). Nous allons prouver le contrôle lipschitzien suivant :

Proposition 4.3.1 *Il existe $C(\Omega) > 0$ tel que, pour tous réels strictement positifs $(\tau, \tilde{\tau})$ et $q \geq 0$, on a :*

$$|\sqrt{\mu^*(q, \tau)} - \sqrt{\mu^*(q, \tilde{\tau})}| \leq C(\Omega)|q\tau - q\tilde{\tau}|$$

On commence par prouver un lemme général :

Lemme 4.3.2 *Pour tout $A_0, A_1 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, we have :*

$$|\sqrt{\lambda_1(1, A_0)} - \sqrt{\lambda_1(1, A_1)}| \leq \|A_0 - A_1\|_\infty. \quad (4.3.3)$$

Preuve.

Soit ψ_0 une fonction propre L^2 -normalisée associée à $\lambda_1(1, A_0)$; par le principe du mini-max, nous avons :

$$\lambda_1(1, A_1) \leq \int_{\Omega} |(i\nabla + A_1)\psi_0|^2 dx.$$

Ensuite, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(i\nabla + A_1)\psi_0|^2 dx &= \int_{\Omega} |(i\nabla + A_0)\psi_0|^2 dx \\ &\quad + 2\Re \left(\int_{\Omega} (i\nabla + A_0)\psi_0 \cdot (A_1 - A_0)\overline{\psi_0} dx \right) + \int_{\Omega} |A_0 - A_1|^2 |\psi_0|^2 dx \\ &\leq \lambda_1(1, A_0) + 2\|A_0 - A_1\|_\infty \sqrt{\lambda_1(1, A_0)} + \|A_0 - A_1\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\lambda_1(1, A_1) \leq \lambda_1(1, A_0) + 2\|A_0 - A_1\|_\infty \sqrt{\lambda_1(1, A_0)} + \|A_0 - A_1\|_\infty^2 = (\sqrt{\lambda_1(1, A_0)} + \|A_0 - A_1\|_\infty)^2.$$

On trouve alors :

$$\sqrt{\lambda_1(1, A_1)} \leq \sqrt{\lambda_1(1, A_0)} + \|A_0 - A_1\|_\infty.$$

Permutant les rôles de A_0 et A_1 , nous inférons (4.3.3).

■

Nous définissons la fonction μ sur $SO_3 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\mu(Q, q, \tau) = \lambda_1(q, \mathbf{n}_\tau^Q), \quad (4.3.4)$$

où \mathbf{n}_τ^Q est défini dans l'Annexe C.

Proposition 4.3.3 *μ est continue sur $SO_3 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et μ^* est continu sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.*

Preuve.

$(Q, q, \tau) \mapsto q\mathbf{n}_\tau^Q$ est clairement continue et donc, avec le Lemme 4.3.2, on déduit que μ est continue. Avec (1.3.15) et (4.3.4), $\mu^*(q, \tau)$ peut s'exprimer ainsi :

$$\mu^*(q, \tau) = \inf_{Q \in SO_3} \mu(Q, q, \tau),$$

et par compacité de SO_3 , on en conclut que μ^* est continue.

■

On peut alors prouver la Proposition 4.3.1.

Le Lemme 4.3.2 fournit pour tout $\tau > 0$, $\tilde{\tau} > 0$, $q \geq 0$ et $Q \in SO_3$:

$$\left| \sqrt{\mu(Q, q, \tau)} - \sqrt{\mu(Q, q, \tilde{\tau})} \right| \leq q \|\mathbf{n}_\tau^Q - \mathbf{n}_{\tilde{\tau}}^Q\|_\infty.$$

On utilise la formule de Taylor pour trouver :

$$\left| \sqrt{\mu(Q, q, \tau)} - \sqrt{\mu(Q, q, \tilde{\tau})} \right| \leq C(\Omega)q|\tau - \tilde{\tau}|.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\sqrt{\mu^*(q, \tau)} \leq \sqrt{\mu(Q, q, \tau)} \leq \sqrt{\mu(Q, q, \tilde{\tau})} + C(\Omega)q|\tau - \tilde{\tau}|.$$

En prenant l'infimum sur Q du second membre, on déduit :

$$\sqrt{\mu^*(q, \tau)} \leq \sqrt{\mu^*(q, \tilde{\tau})} + C(\Omega)q|\tau - \tilde{\tau}|.$$

En échangeant les rôles de τ et $\tilde{\tau}$, la Proposition 4.3.1 est prouvée.

4.4 Estimées d'Agmon

Nous obtenons dans cette section des estimations d'Agmon.

4.4.1 Une estimée uniforme

On introduit quelques notations (voir [Agm82, Alm08, FH09]). Pour $\gamma > 0$ assez petit, prenons η_γ une fonction de troncature régulière :

$$\eta_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } d(y) = d(y, \partial\Omega) \geq \gamma \\ 0 & \text{si } y \notin \Omega \end{cases},$$

avec

$$|\nabla \eta_\gamma| \leq \frac{C}{\gamma}.$$

On pose : $\Omega_\gamma = \{y \in \Omega : d(y, \partial\Omega) \geq \gamma\}$. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\xi(y) = \eta_\gamma e^{\alpha d(y)}.$$

Nous disposons de la propriété de localisation suivante :

Proposition 4.4.1 *Pour tout Ω , il existe $C > 0$ et $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $q > 0$, $0 < \epsilon \leq 1$ et α vérifiant :*

$$0 < \alpha < \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right)^{1/2} (\mu_0 - \mu)^{1/2},$$

avec

$$\mu = \lambda_1(q, \mathbf{A}) \text{ et } \mu_0 = \mu_0(q, \mathbf{A}),$$

si $0 < \gamma \leq \gamma_0$, si u est une fonction propre normalisée associée à μ :

$$\|\eta_\gamma e^{\alpha d(y)} u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon\gamma}} \left(\frac{\mu_0 + 1}{\mu_0 - \mu - (1 + \epsilon)\alpha^2} \right)^{1/2} e^{\alpha\gamma}.$$

Preuve.

Nous allons prouver cette proposition en utilisant une technique “à la Agmon”.

On considère l'équation vérifiée par u :

$$(i\nabla + q\mathbf{A})^2 u = \mu u.$$

On multiplie par $\xi^2 \bar{u}$ et on intègre par parties pour obtenir :

$$|(i\nabla + q\mathbf{A})(\xi u)|_2^2 = \mu |\xi u|_2^2 + |(\nabla \xi)u|_2^2.$$

On a, pour tout $\epsilon > 0$:

$$|(\nabla \xi)u|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \int_{\Omega \setminus \Omega_\gamma} |\nabla \eta|^2 e^{2\alpha d(y)} |u|^2 dx + (1 + \epsilon)\alpha^2 \int_{\Omega} |\xi u|^2 dx.$$

On utilise $\|u\|_2 = 1$ pour trouver :

$$(\mu_0 - \mu - (1 + \epsilon)\alpha^2)\|\xi u\|^2 \leq \frac{C}{\gamma}(1 + \frac{1}{\epsilon})e^{2\alpha\gamma}.$$

De plus, l'inégalité diamagnétique donne :

$$|\nabla|\xi u||^2 \leq |(i\nabla + q\mathbf{A})(\xi u)|^2.$$

Il s'ensuit que :

$$\|\xi u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\gamma}(1 + \frac{1}{\epsilon})e^{2\alpha\gamma} \frac{\mu_0 + 1}{\mu_0 - \mu - (1 + \epsilon)\alpha^2}.$$

■

4.4.2 Localisation près du bord quand $\tau \rightarrow +\infty$

En conséquence de la Proposition 4.4.1, nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.4.2 *Pour tout $x \in [0, 1/2[$, il existe $\delta_0 > 0$, $C > 0$, $c > 0$ tels que si (q, τ) vérifie $q\tau \geq \delta_0$ et $\tau \leq c_0(q\tau)^x$, alors pour tout $\mathbf{n} \in \mathcal{C}(\tau)$ et u une fonction propre L^2 -normalisée de $P_{q\mathbf{n}, \Omega}$, nous avons :*

$$\|\eta_{\frac{c}{\sqrt{q\tau}}} e^{((1-\Theta_0)^{1/2} \sqrt{q\tau} - r(q\tau))d(\cdot, \partial\Omega)} |u|\|_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

où $r(q\tau) = (q\tau)^{3/8+x/4}$.

Preuve.

On applique la Proposition 4.4.1 avec $\alpha = (1 - \Theta_0)^{1/2}(\sqrt{q\tau} - \lambda)$, $\epsilon = (q\tau)^{-1/4+x/2}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{q\tau}}$, $\lambda = (q\tau)^{1/4+x_1/2}$, with $x < x_1 < \frac{1}{2}$ et en prenant une gaussienne (tronquée), on note que :

$$\mu_0(q\tau, \frac{\mathbf{n}}{\tau}) \leq Cq\tau.$$

On prend $x_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+x)$ et on applique l'estimation (1.3.17) du Théorème 1.3.7 (afin que la condition sur α de la Proposition 4.4.1 soit satisfaite).

■

4.5 Application : le cas des grands ouverts

Soit $R > 0$ et $x_0 \in \Omega$. On note $\Omega_R = \{x_0 + R(x - x_0), x \in \Omega\}$. Le but de cette partie est d'étudier la plus petite valeur propre de $P_{q\mathbf{A}, \Omega_R}$ notée $\mu_{\Omega_R}(q, \mathbf{A})$, où $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ (cf.(1.3.13)), lorsque $q \rightarrow +\infty$ et $R \rightarrow +\infty$. Dans son travail [Alm08], Almog étudie le régime q fixé et $R \rightarrow +\infty$ (voir le Théorème 1.1 de [Alm08]) et fait ensuite tendre q vers l'infini (voir Section 3 de [Alm08]). Nous allons établir un théorème qui traite un autre régime : $q \rightarrow +\infty$ et R à croissance polynômiale en q . Remarquons d'abord l'invariance d'échelle suivante :

Lemme 4.5.1 *Pour tout $R > 0$, on a :*

$$\mu_{\Omega_R}(q, \mathbf{A}) = \frac{1}{R^2} \mu_{\Omega} \left(qR^2, \frac{\mathbf{A}(R\cdot)}{R} \right).$$

Asymptotique de $\mu_{\Omega_R}(q, \mathbf{A})$

La proposition suivante indique que si R ne croît pas plus vite qu'un polynôme en q , nous avons une estimation asymptotique dont le premier terme est $\Theta_0 q$:

Théorème 4.5.2 *Soit $c_0 > 0$ et $y \geq 0$. Il existe $C > 0$, $q_0 > 0$ et $R_0 > 0$ dépendant seulement de Ω , c_0 et y tels que, si (q, R) satisfait $q \geq q_0$, $R \geq R_0$ et $R \leq c_0 q^y$, alors, pour $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$:*

$$\Theta_0 - \frac{C}{(qR^2)^{\frac{1}{4(1+2y)}}} \leq \frac{\mu_{\Omega_R}(q, \mathbf{A})}{q} \leq \Theta_0 - \frac{C}{(qR^2)^{\frac{1}{3(1+2y)}}}.$$

Preuve.

On utilise le Lemme 4.5.1. On pose $x = \frac{y}{1+2y}$ et on remarque que $R \leq c(y)(qR^2)^x$ avec $c(y) = c_0^{\frac{1}{1+2y}}$ et $\frac{\mathbf{A}(R\cdot)}{R} \in \mathcal{A}$. Par les Théorèmes 1.3.4 et 1.3.5, nous avons la conclusion souhaitée en utilisant les mêmes arguments que pour le Théorème 1.3.7. ■

Localisation des états fondamentaux près du bord

Dans le cas des grands ouverts, nous établissons un théorème analogue au Théorème 4.4.2 :

Théorème 4.5.3 *Pour tout $y \geq 0$, il existe $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$, $C > 0$, $c > 0$ tels que si (q, R) vérifie $q \geq \delta_0$, $R \geq \delta_1$, $R \leq c_0 q^y$ et $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ et u une fonction propre L^2 -normalisée associée à $\mu_{\Omega_R}(q, \mathbf{A})$, alors on a,*

$$\left\| \eta_{\frac{c}{\sqrt{q}}} e^{(1-\Theta_0)^{1/2}(\sqrt{q}-r(q,R))d(\cdot, \partial\Omega_R)} |u| \right\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C,$$

où $r(q, R) = q^{1/2 - \frac{1}{8(1+2y)}} R^{-\frac{1}{4(1+2y)}}$.

Preuve.

Après changement d'échelle, la preuve est la même que celle du Théorème 4.4.2.

■

Chapitre 5

Étude de la famille d'opérateurs $H(\theta)$

Ce chapitre est consacré à une famille d'opérateurs qui jouera un rôle central pour étudier le problème avec champ variable en dimension 3. Cette famille jouera le même rôle en dimension 3 que celui que la famille $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ jouait en dimension 2. La section suivante est donc consacrée à la famille d'opérateurs $H(\theta)$ où $H(\theta)$ est la réalisation de Neumann sur \mathbb{R}_+^2 de

$$D_s^2 + D_t^2 + (\cos \theta t - \sin \theta s)^2.$$

5.1 Décroissance exponentielle

Commençons par remarquer que, par (1.3.11) et en utilisant le théorème de Persson (cf. [Agm82, FH09]), lorsque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et pour tout $0 < \alpha < \sqrt{1 - \sigma(\theta)}$, nous avons :

$$e^{\alpha\sqrt{s^2+t^2}}u_\theta \in H^1(\mathbb{R}_+^2),$$

où nous rappelons que u_θ désigne la fonction propre normalisée et positive de $H(\theta)$ associée à la plus petite valeur propre $\sigma(\theta)$.

Dans la suite, nous notons :

$$L_{exp}^2(\mathbb{R}_+^2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+^2) : \exists \alpha > 0, \quad e^{\alpha(t+<s>)}f \in L^2(\mathbb{R}_+^2)\}$$

et

$$H_{exp}^1(\mathbb{R}_+^2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+^2) : \exists \alpha > 0, \quad e^{\alpha(t+<s>)}f \in H^1(\mathbb{R}_+^2)\},$$

où $<s> = (s^2 + 1)^{1/2}$.

Ainsi, nous avons :

$$u_\theta \in H_{exp}^1(\mathbb{R}_+^2). \tag{5.1.1}$$

Nous nous intéressons à présent aux propriétés de décroissance des solutions d'équation de la forme :

$$h(\theta)v = f,$$

où :

$$h(\theta) = H(\theta) - \sigma(\theta). \quad (5.1.2)$$

Il se trouve en effet que de telles équations apparaîtront dans la construction des quasimodes du chapitre suivant.

Proposition 5.1.1 *Soit $f \in L^2_{exp}(\mathbb{R}^2_+)$ telle que $\langle f, u_\theta \rangle = 0$. Alors, si v désigne une solution de :*

$$h(\theta)v = f, \quad (5.1.3)$$

on a :

$$v \in H^1_{exp}(\mathbb{R}^2_+).$$

Preuve.

On commence par prouver le contrôle en la variable s . Introduisons une fonction de troncature régulière χ satisfaisant

$$\chi(s) = 1 \text{ si } |s| \leq 1 \text{ et } \chi(s) = 0 \text{ si } |s| \geq 2.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'opérateur de multiplication (borné et inversible) par $e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}$ où $\chi_n(s) = \chi(n^{-1}s)$. Vérifions qu'il préserve $D(H(\theta))$. Pour $\psi \in D(H(\theta))$, nous avons :

$$H(\theta)(e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}\psi) = e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}H(\theta)\psi - \epsilon\chi'_n(s)\langle s \rangle D_s\psi - \epsilon\chi_n(s)\frac{s}{\langle s \rangle}D_s\psi.$$

Comme $D_s\psi \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$, nous déduisons que $H(\theta)(e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}\psi) \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$. Par ailleurs, $e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}\psi$ satisfait la condition de Neumann et ainsi :

$$e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}\psi \in D(H(\theta)).$$

Nous utilisons à présent une méthode de Grushin et introduisons $\mathfrak{H}(\theta)$ qui est défini sur $D(H(\theta)) \times \mathbb{C}$ par :

$$\mathfrak{H}(\theta) = \begin{bmatrix} h(\theta) & u_\theta \\ \langle \cdot, u_\theta \rangle & 0 \end{bmatrix},$$

où $h(\theta)$ est défini en (5.1.2). Il est clair que cet opérateur est inversible. (5.1.3) est équivalent à :

$$\mathfrak{H}(\theta) \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix},$$

si l'on prend pour v l'unique solution orthogonale à u_θ (toutes les autres solutions satisferont les propriétés de décroissance exponentielle car u_θ les satisfait). Posant $\tilde{v} = e^{\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} v$ et $\tilde{f} = e^{\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} f$, on peut réécrire :

$$\mathfrak{H}(\theta)^{\epsilon,n} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \end{bmatrix},$$

où

$$\mathfrak{H}(\theta)^{\epsilon,n} = \begin{bmatrix} e^{\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{H}(\theta) \begin{bmatrix} e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut noter que $D(\mathfrak{H}(\theta)^{\epsilon,n}) = D(\mathfrak{H}(\theta))$. Un simple calcul fournit :

$$\mathfrak{H}(\theta)^{\epsilon,n} = \begin{bmatrix} e^{\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} h(\theta) e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} & e^{\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} u_\theta \\ \langle \cdot, e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} u_\theta \rangle & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut alors écrire, avec la décroissance exponentielle de u_θ , que :

$$\mathfrak{H}(\theta)^{\epsilon,n} = \mathfrak{H}(\theta) + \epsilon F_n,$$

où F_n est borné relativement à $\mathfrak{H}(\theta)$ uniformément par rapport à n . La conclusion est alors classique ; pour ϵ assez petit $\mathfrak{H}(\theta)^{\epsilon,n}$ est inversible et il existe $C(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|(\mathfrak{H}(\theta)^{\epsilon,n})^{-1}\| \leq C(\epsilon).$$

Cela conduit à l'inégalité :

$$\|\tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq C(\epsilon) \|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}.$$

On en déduit :

$$\|e^{\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq C(\epsilon) \|e^{\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}.$$

Le théorème de convergence dominée montre que le membre de droite converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers $\|e^{\epsilon\langle s \rangle} f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$. De là, on tire que $e^{\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} v$ converge faiblement (après extraction d'une sous-suite) dans $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ vers une certaine fonction h . La convergence au sens des distributions et de nouveau le théorème de convergence dominée prouve que : $e^{\epsilon\langle s \rangle} v = h \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$. Par conséquent, la décroissance en s est prouvée.

Nous expliquons à présent la décroissance en t . On procède de la même manière, mais on doit se soucier de la condition de Neumann. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une fonction troncature régulière η_n telle que :

$$\eta_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } 1 \leq t \leq n \\ 0 & \text{if } t \geq 2n \end{cases}.$$

On remarque que l'opérateur de multiplication (borné et inversible) par $e^{\epsilon\eta_n(t)t}$ préserve $D(H(\theta))$; alors, on peut utiliser la même analyse que précédemment en se servant cette fois de la décroissance de u_θ en t et la proposition est prouvée après avoir remarqué (par intégration par parties) que :

$$q_\theta(e^{\alpha/2(t+\langle s \rangle)}v) < +\infty,$$

où q_θ est la forme quadratique associée à $H(\theta)$. ■

Notons

$$H_{exp}^\infty = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+^2) : \forall (l, k) \in \mathbb{N}^4 \quad D_s^l D_t^k f \in L_{exp}^2(\mathbb{R}_+^2)\}.$$

Il est clair que $H_{exp}^\infty \subset \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}})$. La Proposition 5.1.1 possède le corollaire suivant :

Corollaire 5.1.2 *La fonction u_θ appartient à H_{exp}^∞ .*

Preuve.

On rappelle d'abord que $u_\theta \in H_{exp}^1(\mathbb{R}_+^2)$. Ensuite, on dérive par rapport à s :

$$h(\theta)\partial_s u_\theta = 2 \sin \theta V_\theta u_\theta \in L_{exp}^2(\mathbb{R}_+^2).$$

La Proposition 5.1.1 fournit $D_s u_\theta \in H_{exp}^1(\mathbb{R}_+^2)$. une récurrence donne alors que, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$D_s^m u_\theta \in H_{exp}^1(\mathbb{R}_+^2).$$

Puis, on revient à l'équation :

$$D_t^2 u_\theta = (-D_s^2 - V_\theta^2 + \sigma(\theta))u_\theta \in L_{exp}^2(\mathbb{R}_+^2)$$

et, dérivant par rapport à s , on trouve :

$$D_t^2 D_s^m u_\theta \in L_{exp}^2(\mathbb{R}_+^2).$$

On dérive par rapport à t et on obtient :

$$D_t^3 D_s^m u_\theta \in L_{exp}^2(\mathbb{R}_+^2).$$

Finalement, une récurrence donne, pour tous entiers l, k :

$$D_s^l D_t^k u_\theta \in L_{exp}^2(\mathbb{R}_+^2). ■$$

On peut maintenant énoncer un autre corollaire important :

Corollaire 5.1.3 *Soit $g \in H_{exp}^\infty$ et $f \in D(H(\theta))$ telles que :*

$$h(\theta)f = g.$$

Alors, $f \in H_{exp}^\infty$.

Preuve.

La preuve est essentiellement la même que celle du Corollaire 5.1.2. ■

5.2 Quelques propriétés de u_θ

Nous établissons dans cette section quelques propriétés de u_θ liées à la variable s .

5.2.1 Une formule de moment

La définition de u_θ fournit :

$$H(\theta)u_\theta = \sigma(\theta)u_\theta.$$

En dérivant par rapport à s , on obtient la formule :

$$h(\theta)\partial_s u_\theta = 2 \sin \theta V_\theta u_\theta. \quad (5.2.4)$$

Ainsi, en prenant le produit scalaire par u_θ , on en déduit le lemme :

Lemme 5.2.1

Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\int_{t>0} (t \cos \theta - s \sin \theta) |u_\theta(s, t)|^2 ds dt = 0.$$

On dérive par rapport à s pour trouver :

$$h(\theta)\partial_s^2 u_\theta = 2 \sin \theta (2V_\theta \partial_s u_\theta - \sin \theta u_\theta) = 2 \sin \theta (\partial_s V_\theta + V_\theta \partial_s) u_\theta. \quad (5.2.5)$$

Si on dérive deux fois de plus, on trouve :

$$h(\theta)\partial_s^4 u_\theta = 12 \sin^2 \theta \partial_s^2 u_\theta + 8 \sin \theta V_\theta \partial_s^3 u_\theta.$$

On en déduit (en multipliant par u_θ et en intégrant par parties ; on utilise que $h(\theta)u_\theta = 0$) :

Lemme 5.2.2 *On a :*

$$\int_{t>0} V_\theta \partial_s^3 u_\theta u_\theta ds dt = \frac{3}{2} \sin \theta \int_{t>0} \partial_s^2 u_\theta u_\theta ds dt.$$

5.2.2 D'autres formules

Nous rencontrerons l'équation suivante, d'inconnue g :

$$h(\theta)g = -t\partial_s u_\theta. \quad (5.2.6)$$

Nous posons :

$$L_s = -\partial_s^2 + \sin^2 \theta s^2. \quad (5.2.7)$$

Un petit calcul permet d'établir la formule de commutateur suivante :

$$L_s H(\theta) = H(\theta) L_s + 4 \cos \theta \sin \theta t \partial_s.$$

On en tire :

$$h(\theta)(L_s u_\theta) = -4 \cos \theta \sin \theta t \partial_s u_\theta$$

et ainsi, on peut définir une solution de (5.2.6) par :

$$f_0 = (2 \sin(2\theta))^{-1} (\sin^2 \theta s^2 u_\theta - \partial_s^2 u_\theta). \quad (5.2.8)$$

Finalement, on a :

$$L_s h(\theta) f_0 = h(\theta)(L_s f_0) + 4 \cos \theta \sin \theta t \partial_s f_0.$$

Prenant le produit scalaire, il s'ensuit que :

$$\langle L_s h(\theta) f_0, u_\theta \rangle = \langle 4 \cos \theta \sin \theta t \partial_s f_0, u_\theta \rangle.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \langle L_s h(\theta) f_0, u_\theta \rangle &= - \langle L_s (t \partial_s u_\theta), u_\theta \rangle = - \sin^2 \theta \int_{t>0} t s^2 \partial_s u_\theta u_\theta ds dt \\ &= \sin^2 \theta \int_{t>0} t s u_\theta^2 ds dt. \end{aligned}$$

On en déduit donc le lemme :

Lemme 5.2.3 *On dispose de l'identité :*

$$\langle 4 \cos \theta t \partial_s f_0, u_\theta \rangle = \sin \theta \int_{t>0} t s u_\theta^2 ds dt.$$

Enfin, nous aurons besoin d'un dernier lemme (on dérive deux fois l'équation satisfaite par f_0) :

Lemme 5.2.4 *On a, d'une part :*

$$h(\theta) \partial_s^2 f_0 = -t \partial_s^3 u_\theta + 2 \sin \theta V_\theta f_0,$$

$$\langle -t \partial_s^3 u_\theta + 2 \sin \theta V_\theta f_0, u_\theta \rangle = 0$$

et d'autre part :

$$h(\theta) \partial_s^2 f_0 = -t \partial_s^3 u_\theta + 2 \sin \theta (-\sin \theta f_0 + 2 V_\theta \partial_s f_0),$$

$$\langle -t \partial_s^3 u_\theta + 2 \sin \theta (-\sin \theta f_0 + 2 V_\theta \partial_s f_0), u_\theta \rangle = 0.$$

5.2.3 Propriétés de $H(\theta, \rho)$

L'ingrédient principal de l'analyse qui suit est la formule de Feynman-Hellmann. On introduit un paramètre d'échelle ρ en définissant :

$$H(\theta, \rho) = \frac{1}{\rho}(D_s^2 + D_t^2) + \rho V_\theta^2$$

et on considère :

$$H(\theta, \rho)u_{\theta, \rho} = \sigma(\theta)u_{\theta, \rho}, \quad (5.2.9)$$

où

$$u_{\theta, \rho}(s, t) = u_\theta(\rho^{-1/2}s, \rho^{-1/2}t).$$

On peut noter que $H(\theta, 1) = H(\theta)$.

Feynman-Hellmann par rapport à ρ

On dérive par rapport à ρ :

$$(H(\theta, \rho) - \sigma(\theta))\partial_\rho u = -\partial_\rho H u,$$

et

$$\partial_\rho H = -\rho^{-2}(D_s^2 + D_t^2) + V_\theta^2.$$

On utilise (5.2.9) pour trouver :

$$(H(\theta, \rho) - \sigma)\partial_\rho u = \frac{\sigma u_{\theta, \rho}}{\rho} - 2V_\theta^2 u_{\theta, \rho}. \quad (5.2.10)$$

Multipliant cette dernière équation par $u_{\theta, \rho}$ et intégrant, on retrouve le théorème du viriel (qui énonce que l'énergie cinétique de u_θ est égale à son énergie potentielle, voir [Wei67]) :

$$\int_{t>0} (|D_s u_\theta|^2 + |D_t u_\theta|^2) ds dt = \int_{t>0} |V_\theta u_\theta|^2 ds dt = \frac{\sigma(\theta)}{2}. \quad (5.2.11)$$

Remarque 5.2.5.

En effectuant un changement d'échelle uniquement par rapport à s , on trouve l'identité :

$$\int_{t>0} |D_s u_\theta|^2 ds dt = -\sin \theta \int_{t>0} s V_\theta u_\theta^2 ds dt. \quad (5.2.12)$$

■

Feynman-Hellmann par rapport à θ

On prend la dérivée de (5.2.9) par rapport à θ :

$$(H(\theta, \rho) - \sigma(\theta))\partial_\theta u = \sigma'(\theta)u - \partial_\theta H u,$$

et

$$\partial_\theta H = 2\rho V_\theta \partial_\theta V_\theta.$$

On choisit $\rho = 1$ et on trouve :

$$(H - \sigma)\partial_\theta u|_\theta = \sigma'(\theta)u_\theta - 2V_\theta \partial_\theta V_\theta u_\theta. \quad (5.2.13)$$

Multipliant par u_θ , on déduit :

$$2 \int_{t>0} V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} |u_\theta|^2 ds dt = \sigma'(\theta), \quad (5.2.14)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sigma'(\theta) := -2 \int_{t>0} (\cos \theta t - \sin \theta s)(\sin \theta t + \cos \theta s) |u_\theta(s, t)|^2 ds dt. \quad (5.2.15)$$

Remarque 5.2.6.

Combinant (5.2.14) et (5.2.11), il vient :

$$\int_{t>0} t V_\theta u_\theta^2 ds dt = \frac{C(\theta)}{2} \quad \text{et} \quad \int_{t>0} s V_\theta u_\theta^2 ds dt = -\frac{S(\theta)}{2}. \quad (5.2.16)$$

■

Conséquences**Une première identité**

Introduisons la quantité :

$$I_1(\theta) = \int_{t>0} (t - sT(\theta)) V_\theta |u_\theta|^2 ds dt, \quad (5.2.17)$$

où $T(\theta)$ est définie en (1.3.22).

Lemme 5.2.7 On a : $I_1(\theta) = 0$.

Preuve.

On multiplie (5.2.10) par σ' et (5.2.13) par $\frac{\sigma}{\rho}$ pour obtenir :

$$(H(\theta, \rho) - \sigma(\theta))w_{\theta, \rho} = -2\sigma' V_\theta^2 u_{\theta, \rho} + 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta u_{\theta, \rho}, \quad (5.2.18)$$

où

$$w_{\theta,\rho} = \sigma' \partial_\rho u_{\theta,\rho} - \frac{1}{\rho} \sigma \partial_\theta u_{\theta,\rho}. \quad (5.2.19)$$

On prend $\rho = 1$ et on multiplie par u_θ , on intègre et le Lemme 5.2.7 est prouvé. ■

Dans la suite, on notera :

$$w_0 = \sigma' \partial_\rho u_{\theta,1} - \sigma \partial_\theta u_{\theta,1}. \quad (5.2.20)$$

Une deuxième identité

On applique l'opérateur :

$$j(\theta, \rho) = \sigma' \partial_\rho - \frac{\sigma}{\rho} \partial_\theta \quad (5.2.21)$$

à (5.2.18), on prend $\rho = 1$ et on obtient :

$$\begin{aligned} & j(\theta, \rho)(H(\theta, \rho))w_{\theta,\rho} + (H(\theta, \rho) - \sigma)j(\theta, \rho)w_{\theta,\rho} \\ &= (-2\sigma'V_\theta^2 + 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta)w_{\theta,\rho} + j(\theta, \rho)(-2\sigma'V_\theta^2 + 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta)u_{\theta,\rho}. \end{aligned}$$

Alors, d'une part, on obtient :

$$j(\theta, \rho)(H(\theta, \rho)) = -\sigma'(D_s^2 + D_t^2) + \sigma'V_\theta^2 - 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta, \quad (5.2.22)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} & j(\theta, \rho)(-2\sigma'V_\theta^2 + 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta) = -\sigma \partial_\theta (-2\sigma'V_\theta^2 + 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta) \\ &= 2\sigma''\sigma V_\theta^2 + 2\sigma\sigma'V_\theta \partial_\theta V_\theta - 2\sigma^2(\partial_\theta V_\theta)^2 - 2\sigma^2 V_\theta \partial_\theta^2 V_\theta. \end{aligned}$$

Effectuant le produit scalaire par u_θ , et utilisant (5.2.14) et (5.2.11), on déduit le lemme :

Lemme 5.2.8 *On a, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$:*

$$\int_{t>0} (2\sigma'V_\theta^2 - 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta)w_0 u_\theta ds dt + \int_{t>0} (\sigma \partial_\theta V_\theta - \sigma'V_\theta)^2 u_\theta^2 ds dt = \frac{\sigma^2 \sigma'' + \sigma^3}{2}.$$

Une troisième identité

Si on dérive deux fois, il vient :

$$h(\theta)\partial_s w_0 = 2\sin\theta V_\theta w_0 - 2V_\theta u_\theta + 2(Cs + St)\sin\theta u_\theta - 2(Cs + St)V_\theta\partial_s u_\theta$$

puis :

$$\begin{aligned} h(\theta)\partial_s^2 w_0 &= 4\sin\theta V_\theta\partial_s w_0 - 2\sin^2\theta w_0 - 2(Cs + St)V_\theta\partial_s^2 u_\theta \\ &\quad + 4C\sin\theta u_\theta - 4CV_\theta\partial_s u_\theta + 4\sin\theta(Cs + St)\partial_s u_\theta \end{aligned}$$

et on en déduit le lemme :

Lemme 5.2.9 On a :

$$2\sin\theta < V_\theta w_0, u_\theta > + 2\sin\theta < (Cs + St)u_\theta, u_\theta > - 2 < (Cs + St)V_\theta\partial_s u_\theta, u_\theta > = 0$$

et :

$$\begin{aligned} &< 4\sin\theta V_\theta\partial_s w_0 - 2\sin^2\theta w_0 - 2(Cs + St)V_\theta\partial_s^2 u_\theta, u_\theta > \\ &= -\sin\theta < (2C + 4(Cs + St)\partial_s)u_\theta, u_\theta > = 0. \end{aligned}$$

Relation entre f_0 et w_0

Si on effectue un changement d'échelle dans l'équation (E.1) satisfaite par f_0 , on trouve :

$$(H(\theta, \rho) - \sigma(\theta))f_{0,\rho} = -t\partial_s u_{\theta,\rho}.$$

On applique alors l'opérateur j , on prend $\rho = 1$ et on utilise l'identité (5.2.22) pour obtenir :

$$h(\theta)j(f_{0,\rho}) + \sigma't\partial_s u_\theta + (2\sigma'V_\theta^2 - 2\sigma V_\theta\partial_\theta V_\theta)f_0 = -t\partial_s w_0.$$

Faisant le produit scalaire avec u_θ , on a :

$$\int_{t>0} (2\sigma'V_\theta^2 - 2\sigma V_\theta\partial_\theta V_\theta)f_0 u_\theta ds dt + \int_{t>0} t\partial_s w_0 u_\theta ds dt = 0.$$

De plus, en remarquant que :

$$0 = j\left(\int_{t>0} t\partial_s u_{\theta,\rho}^2 ds dt\right) = 2\int_{t>0} t u_{\theta,\rho} w_{\theta,\rho} ds dt,$$

on déduit le lemme :

Lemme 5.2.10 *On a :*

$$\int_{t>0} (2\sigma' V_\theta^2 - 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta) f_0 u_\theta ds dt = 0$$

et

$$\int_{t>0} t \partial_s w_0 u_\theta ds dt = 0$$

Remarque 5.2.11.

Il suit du Corollaire 5.1.3 que toutes les solutions des équations de la forme $h(\theta)f = g$ que nous avons rencontrées appartiennent à H_{exp}^∞ .

■

Chapitre 6

Majoration en dimension 3 dans un cas générique

Ce chapitre est consacré à la preuve du Théorème 1.3.11. Elle s'effectuera en deux temps ; d'abord nous construisons un problème modèle et ensuite nous fabriquons un quasimode qu'on injecte dans la forme quadratique.

6.1 Un modèle sur \mathbb{R}_+^3

Dans cette section, nous utilisons les coordonnées locales introduites en Section D.2 pour construire un opérateur modèle près de x_0 . Dans la suite, nous posons :

$$h = B^{-1}$$

et divisons l'opérateur par B^2 .

6.1.1 Le modèle

On approche d'abord la métrique et ensuite le champ magnétique pour fabriquer un opérateur modèle.

Approximation de la métrique

Avec (D.3) et (D.4), nous sommes réduits à considérer la forme quadratique :

$$q_{\mathbf{A}}^{h,app}(u) = \int_{t>0} |(ih\nabla + \tilde{\mathbf{A}})u|_{g_{app}^0}^2 m_{app} dr ds dt,$$

où

$$g_{app}^0 = I_3 + 2tK^0 - G_1^0(r, s) + R(r, s, t),$$

$$m_{app} = 1 - tK_0^M + \text{Tr}\left(\frac{G_1^0}{2}\right) + R(r, s, t)$$

et où nous rappelons la convention (cf. Remarque D.2) que R désigne des polynômes homogènes de degré 2 et de degré partiel au plus 1 par rapport à r et s . On rappelle aussi que G_1^0 est un polynôme homogène de degré 2 en r et s et que K_0^M est la courbure moyenne en x_0 .

Cette forme satisfait :

$$q_{\mathbf{A}}^h(u) = q_{\mathbf{A}}^{h,app}(u) + O\left(\int_{t>0} (|r|^3 + |s|^3 + |t|^3)|(ih\nabla + \tilde{\mathbf{A}})u|^2 dr ds dt\right). \quad (6.1.1)$$

L'opérateur associé sur $L^2((] - r_0, r_0[\times] - s_0, s_0[\times [0, t_0[), m_{app} dr ds dt)$, avec condition de Dirichlet sur $t = t_0$, $|r| = r_0$, $|s| = s_0$ (pour t_0, r_0, s_0 strictement positifs et suffisamment petits) et condition de Neumann sur $t = 0$, est :

$$\begin{aligned} & h^2(m_{app})^{-1} D_t m_{app} D_t \\ & + (1 + 2tK_{11} - G_{11} - R_{11})(hD_r + \tilde{A}_r)^2 + (1 + 2tK_{22} - G_{22} - R_{22})(hD_s + \tilde{A}_s)^2 \\ & + (2K_{12}t - G_{12} - R_{12})(hD_r + \tilde{A}_r)(hD_s + \tilde{A}_s) \\ & + (2K_{12}t - G_{12} - R_{12})(hD_s + \tilde{A}_s)(hD_r + \tilde{A}_r) \\ & + h^2\tilde{R}_1(r, s, t)D_r + h^2\tilde{R}_2(r, s, t)D_s. \end{aligned}$$

Négligeant les termes d'ordre 3, on obtient le lemme :

Lemme 6.1.1 *La forme quadratique notée $q_{\mathbf{A}}^{h,MOD}$ associée à l'opérateur défini sur $L^2((] - r_0, r_0[\times] - s_0, s_0[\times [0, t_0[), m_{app} dr ds dt)$, avec condition de Dirichlet sur $t = t_0$, $|r| = r_0$, $|s| = s_0$ par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{MOD} &= h^2 n_{app} D_t m_{app} D_t \quad (6.1.2) \\ & + (1 + 2tK_{11} - G_{11} - R_{11})(hD_r + \tilde{A}_r)^2 + (1 + 2tK_{22} - G_{22} - R_{22})(hD_s + \tilde{A}_s)^2 \\ & + (2K_{12}t - G_{12} - R_{12})(hD_r + \tilde{A}_r)(hD_s + \tilde{A}_s) \\ & + (2K_{12}t - G_{12} - R_{12})(hD_s + \tilde{A}_s)(hD_r + \tilde{A}_r) \\ & + h^2\tilde{R}_1(r, s, t)D_r + h^2\tilde{R}_2(r, s, t)D_s. \end{aligned}$$

avec

$$n_{app} = 1 + tK_0^M - \text{Tr}\left(\frac{G_1^0}{2}\right) + R,$$

satisfait :

$$q_{\mathbf{A}}^h(u) = q_{\mathbf{A}}^{h,MOD}(u) + O\left(\int_{t>0} (|r|^3 + |s|^3 + |t|^3)|(ih\nabla + \tilde{\mathbf{A}})u|^2 dr ds dt\right).$$

Relations entre β et $\tilde{\beta}$

Ce petit paragraphe est non nécessaire pour comprendre l'approximation suivante de l'opérateur, mais il introduit en particulier quelques notations liées à cette approximation.

Le nouveau champ magnétique ici mis en jeu est

$$\tilde{\beta} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}.$$

Nous allons tronquer l'approximation de Taylor de $\tilde{\beta}$ à l'ordre 2 afin d'obtenir une nouvelle approximation de l'opérateur et de sa forme quadratique. Ainsi, comme à la fin nous voulons exprimer toutes nos constantes en fonction des dérivées de β , il nous faut établir les relations unissant les développements de Taylor à l'ordre 2 de β et $\tilde{\beta}$. La formule de Taylor appliquée à β en x_0 donne (à l'ordre 1) :

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_0 + r\partial_r\beta(x_0) + s\partial_s\beta(x_0) + t\partial_t\beta(x_0) \\ &= \beta^{(1)} + O(r^2 + s^2 + t^2),\end{aligned}$$

et avec (D.2) nous sommes conduits à :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \beta_0 + t(-K_0^M\beta_0 + K^0\beta_0 + \partial_t\beta(x_0)) + r\partial_r\beta(x_0) + s\partial_s\beta(x_0) + O(r^2 + s^2 + t^2). \\ &= \tilde{\beta}^{(1)} + O(r^2 + s^2 + t^2).\end{aligned}$$

On peut remarquer que, sur $t = 0$, on a $\tilde{\beta}^{(1)} = \beta^{(1)}$.

Écrivons alors :

$$\beta_r^{(1)} = -\delta_0 r - \epsilon_0 s - \xi_0 t, \quad (6.1.3)$$

$$\beta_s^{(1)} = \cos\theta_1 + \alpha_0 r + \beta_0 s + \eta_0 t,$$

$$\beta_t^{(1)} = \sin\theta_1 + \gamma_0 s + \zeta_0 r + \mu_0 t, \quad (6.1.4)$$

et

$$\tilde{\beta}_r^{(1)} = -\delta r - \epsilon s - \xi t, \quad (6.1.5)$$

$$\tilde{\beta}_s^{(1)} = \cos\theta_1 + \alpha r + \beta s + \eta t,$$

$$\tilde{\beta}_t^{(1)} = \sin\theta_1 + \gamma s + \zeta r + \mu t. \quad (6.1.6)$$

Nous avons les relations :

$$\delta_0 = \delta, \epsilon_0 = \epsilon, \alpha_0 = \alpha, \beta_0 = \beta, \gamma_0 = \gamma, \zeta_0 = \zeta, \quad (6.1.7)$$

$$\xi = \xi_0 - K_{12} \cos\theta, \eta = \eta_0 - K_{11} \cos\theta, \mu = \mu_0 - K_0^M \sin\theta. \quad (6.1.8)$$

On écrit désormais la formule de Taylor à l'ordre 2 pour β et $\tilde{\beta}$, mais seulement sur $t = 0$; en effet, cela sera suffisant dans la suite. Ainsi, l'approximation à l'ordre 2 de β et $\tilde{\beta}$ sur $t = 0$ peut s'écrire :

$$\beta_r^{(2)} = -\delta r - \epsilon s - \overline{C}_0 r s - \overline{F}_0 s^2 - \overline{D}_0 r^2, \quad (6.1.9)$$

$$\begin{aligned} \beta_s^{(2)} &= \cos \theta_1 + \alpha r + \beta s + C_0 r s + F_0 s^2 + D_0 r^2, \\ \beta_t^{(2)} &= \sin \theta_1 + \gamma s + \zeta r - 2B_0 r s - 3H_0 s^2 - E_0 r^2. \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_r^{(2)} &= -\delta r - \epsilon s - \overline{C} r s - \overline{F} s^2 - \overline{D} r^2, \\ \tilde{\beta}_s^{(2)} &= \cos \theta_1 + \alpha r + \beta s + C r s + F s^2 + D r^2, \\ \tilde{\beta}_t^{(2)} &= \sin \theta_1 + \gamma s + \zeta r - 2B r s - 3H s^2 - E r^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a (cf. D.2), sur $t = 0$:

$$\tilde{\beta} = \left(1 + \text{Tr}\left(\frac{G_1}{2}\right)\right) \left(I_3 - \frac{G_1^0}{2}\right) \beta$$

et cela fournit des relations entre les lettres capitales de $\tilde{\beta}$ et β . En identifiant les termes en s^2 , on trouve (cf. Remarque D.2) :

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \overline{F}_0 + \frac{1}{2} \cos \theta G_{12}^{s^2}, \\ F &= F_0 + \frac{1}{2} \cos \theta G_{11}^{s^2}, \\ H &= H_0 - \frac{1}{6} \sin \theta (G_{11}^{s^2} + G_{22}^{s^2}). \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Ensuite, pour le terme en r^2 , on a :

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \overline{D}_0 + \frac{1}{2} \cos \theta G_{12}^{r^2}, \\ D &= D_0 + \frac{1}{2} \cos \theta G_{11}^{r^2}, \\ E &= E_0 - \frac{1}{2} \sin \theta (G_{11}^{r^2} + G_{22}^{r^2}). \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

et pour le terme en rs :

$$\begin{aligned}\overline{C} &= \overline{C}_0 + \frac{1}{2} \cos \theta G_{12}^{rs}, \\ C &= C_0 + \frac{1}{2} \cos \theta G_{11}^{rs}, \\ B &= B_0 - \frac{1}{4} \sin \theta (G_{11}^{rs} + G_{22}^{rs}).\end{aligned}\tag{6.1.13}$$

Approximation de Taylor du champ magnétique

Nous allons à présent effectuer l'approximation de l'opérateur obtenue après troncature du DL de $\tilde{\beta}$. On choisit alors une jauge telle que :

$$\tilde{A}_t = 0$$

et telle que l'approximation de Taylor de $\tilde{\mathbf{A}}$ à l'ordre 3 notée $\tilde{A}^{(3)}$ soit de la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_r^{(3)} &= V_\theta + P_{r,2} + P_{r,3} \\ \tilde{A}_s^{(3)} &= P_{s,2} + P_{s,3} \\ \tilde{A}_t^{(3)} &= 0,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}P_{r,2} &= (\alpha t - \zeta s)r + \beta st - \frac{\gamma}{2}s^2 + \frac{\eta}{2}t^2 \\ P_{r,3} &= (At^2 + Bs^2 + Cst)r + (Dt + Es)r^2 + (Fts^2 + Gt^2s + Hs^3 + It^3)\end{aligned}\tag{6.1.14}$$

$$\begin{aligned}P_{s,2} &= \delta rt + \epsilon st + \frac{\xi}{2}t^2 \\ P_{s,3} &= \overline{A}t^2r + \overline{C}str + \overline{D}tr^2 + \overline{F}ts^2 + \overline{G}t^2s + \overline{I}t^3.\end{aligned}$$

En remplaçant $\tilde{\mathbf{A}}$ par $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$, nous obtenons le lemme suivant (qui définit l'opérateur modèle pour lequel nous construirons plus loin un quasimode) :

Lemme 6.1.2 *On définit l'opérateur $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}$ sur $L^2(m_{app}drdsdt)$ par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\mathcal{M}} &= h^2 n_{app} D_t m_{app} D_t \\ &+ (1 + 2tK_{11} - G_{11} - R_{11})(hD_r + \tilde{A}_r^{(3)})^2 + (1 + 2tK_{22} - G_{22} - R_{22})(hD_s + \tilde{A}_s^{(3)})^2 \\ &+ (2K_{12}t - G_{12} - R_{12})(hD_r + \tilde{A}_r^{(3)})(hD_s + \tilde{A}_s^{(3)}) \\ &+ (2K_{12}t - G_{12} - R_{12})(hD_s + \tilde{A}_s^{(3)})(hD_r + \tilde{A}_r^{(3)}) \\ &+ h^2 \tilde{R}_1(r, s, t) D_r + h^2 \tilde{R}_2(r, s, t) D_s,\end{aligned}\tag{6.1.15}$$

et la forme quadratique associée $q_{\mathbf{B}\mathbf{A}}^{\mathcal{M}}$ satisfait :

$$\begin{aligned}
q_{\mathbf{A}}^h(u) &= q_{\mathbf{A}}^{h,\mathcal{M}}(u) + 2\Re \left\{ \int_{t>0} (\tilde{A}_r - \tilde{A}_r^{(3)}) \bar{u} (hD_r + \tilde{A}_r) u dr ds dt \right\} \\
&+ 2\Re \left\{ \int_{t>0} (\tilde{A}_s - \tilde{A}_s^{(3)}) \bar{u} (hD_s + \tilde{A}_s) u dr ds dt \right\} \\
&+ O \left(\int_{t>0} |\tilde{A}_r - \tilde{A}_r^{(3)}|^2 |u|^2 dr ds dt + \int_{t>0} |\tilde{A}_s - \tilde{A}_s^{(3)}|^2 |u|^2 dr ds dt \right) \\
&+ O \left(\int_{t>0} (|r|^3 + |s|^3 + |t|^3) |(ih\nabla + \tilde{\mathbf{A}})u|^2 dr ds dt \right) \\
&+ hO \left(\sum_k \int_{t>0} |(r^4 + s^4 + t^4) D_k u| |u| dr ds dt \right).
\end{aligned} \tag{6.1.16}$$

6.1.2 Minimum non-dégénéré de $\hat{\beta}$

Dans cette sous-section, nous exprimons la condition de minimum non-dégénéré de $\hat{\beta}$. Premièrement, nous écrivons que x_0 est un point critique de $\hat{\beta}$ et deuxièmement nous donnons l'expression de la hessienne de $\hat{\beta}$. De plus, nous supposons que $\|\beta(x_0)\| = 1$.

Point critique de $\hat{\beta}$

Par définition de θ , nous avons :

$$\|\beta\| \sin \theta = \beta_t. \tag{6.1.17}$$

Calculons les dérivées de θ . Nous avons d'abord :

$$\begin{aligned}
\partial_r \beta_t &= \frac{\partial_r \beta \cdot \beta}{\|\beta\|} \sin \theta + \|\beta\| \cos \theta \partial_r \theta \\
\partial_s \beta_t &= \frac{\partial_s \beta \cdot \beta}{\|\beta\|} \sin \theta + \|\beta\| \cos \theta \partial_s \theta
\end{aligned}$$

En $r = s = t = 0$, nous trouvons, avec les notations (6.1.3), (6.1.5) et (6.1.7) :

$$\begin{aligned}
\zeta &= (\alpha \cos \theta_1 + \zeta \sin \theta_1) \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \partial_r \theta \\
\gamma &= (\beta \cos \theta_1 + \gamma \sin \theta_1) \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \partial_s \theta
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\partial_r \theta &= \zeta \cos \theta_1 - \alpha \sin \theta_1 \\ \partial_s \theta &= \gamma \cos \theta_1 - \beta \sin \theta_1.\end{aligned}$$

Ensuite, on dérive $\hat{\beta}$ par rapport à r et s :

$$\begin{aligned}\partial_r \hat{\beta} &= \frac{\partial_r \beta \cdot \beta}{\|\beta\|} \sigma(\theta) + \|\beta\| \sigma'(\theta) \partial_r \theta \\ \partial_s \hat{\beta} &= \frac{\partial_s \beta \cdot \beta}{\|\beta\|} \sigma(\theta) + \|\beta\| \sigma'(\theta) \partial_s \theta\end{aligned}$$

En $r = s = t = 0$, nous avons : $\partial_r \hat{\beta} = 0$ et $\partial_s \hat{\beta} = 0$. Cela mène à :

$$\begin{aligned}(\alpha \cos \theta_1 + \zeta \sin \theta_1) \sigma(\theta_1) + \sigma'(\theta_1) \partial_r \theta &= 0 \\ (\beta \cos \theta_1 + \gamma \sin \theta_1) \sigma(\theta_1) + \sigma'(\theta_1) \partial_s \theta &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, nous trouvons :

$$\begin{aligned}C(\theta_1) \alpha + S(\theta_1) \zeta &= 0, \\ C(\theta_1) \beta + S(\theta_1) \gamma &= 0,\end{aligned}$$

où C et S sont définis en (1.3.23). On peut résumer ce qui précède par le lemme suivant :

Lemme 6.1.3 *Nous avons les relations entre les dérivées de β (avec les notations (6.1.3), (6.1.5) et (6.1.7)) au minimum :*

$$\zeta = T\alpha \text{ et } \gamma = T\beta, \quad (6.1.18)$$

où T est défini en (1.3.22).

Hessienne de $\hat{\beta}$

Un calcul combiné aux relations (6.1.18) donne, pour les dérivées premières en x_0 :

$$\begin{aligned}\partial_r \|\beta\| &= (\alpha \cos \theta + \zeta \sin \theta) = \alpha \frac{\sigma'}{S}, \\ \partial_s \|\beta\| &= (\beta \cos \theta + \gamma \sin \theta) = \beta \frac{\sigma'}{S},\end{aligned}$$

et pour les dérivées secondes en x_0 (cf. les notations (6.1.9)) :

$$\begin{aligned}\partial_r^2 \|\beta\| &= \delta^2 + \frac{\sigma^2}{S^2} \alpha^2 + 2D_0 \cos \theta - 2E_0 \sin \theta, \\ \partial_s^2 \|\beta\| &= \epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{S^2} \beta^2 + 2F_0 \cos \theta - 6H_0 \sin \theta \\ \partial_{rs}^2 \|\beta\| &= \delta\epsilon + \alpha\beta \frac{\sigma^2}{S^2} + C_0 \cos \theta - 2B_0 \sin \theta.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le développement de Taylor :

$$\begin{aligned}\|\beta\| &= 1 + \alpha \frac{\sigma'}{S} r + \beta \frac{\sigma'}{S} s + \frac{r^2}{2} (\delta^2 + \frac{\sigma^2}{S^2} \alpha^2 + 2D_0 \cos \theta - 2E_0 \sin \theta) \\ &+ \frac{s^2}{2} (\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{S^2} \beta^2 + 2F_0 \cos \theta - 6H_0 \sin \theta) + rs (\delta\epsilon + \frac{\sigma^2}{S^2} \alpha\beta + C_0 \cos \theta - 2B_0 \sin \theta).\end{aligned}$$

On veut maintenant le développement limité de θ . On a :

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin \theta_1 + (\cos \theta_1 \partial_r \theta + \sin \theta_1 \partial_s \theta) + r^2 \left(\frac{\cos \theta_1}{2} \partial_r^2 \theta - \frac{\sin \theta_1}{2} (\partial_r \theta)^2 \right) \\ &+ s^2 \left(\frac{\cos \theta_1}{2} \partial_s^2 \theta - \frac{\sin \theta_1}{2} (\partial_s \theta)^2 \right) + rs (\cos \theta_1 \partial_{rs} \theta - \sin \theta_1 \partial_r \theta \partial_s \theta).\end{aligned}$$

Après des calculs utilisant (6.1.17), nous trouvons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial_r^2 \theta}{2} &= \alpha^2 \frac{\sigma \sigma'}{S^2} - D_0 \sin \theta - E_0 \cos \theta - \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} \delta^2, \\ \frac{\partial_s^2 \theta}{2} &= \beta^2 \frac{\sigma \sigma'}{S^2} - F_0 \sin \theta - 3H_0 \cos \theta - \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} \epsilon^2, \\ \partial_{rs}^2 \theta &= -2\alpha\beta \frac{\sigma \sigma'}{S^2} - C_0 \sin \theta - 2B_0 \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \delta\epsilon.\end{aligned}$$

Finalement, les expressions des dérivées secondes de $\hat{\beta}$ sont réunies dans le lemme suivant :

Lemme 6.1.4 *Avec les notations (6.1.9), nous avons :*

$$\frac{1}{2} \partial_r^2 \hat{\beta} = \frac{\sigma^3 + \sigma^2 \sigma''}{2S(\theta)^2} \alpha^2 + \frac{C(\theta)}{2 \cos \theta} \delta^2 + D_0 C(\theta) - E_0 S(\theta) \quad (6.1.19)$$

$$\frac{1}{2} \partial_s^2 \hat{\beta} = \frac{\sigma^3 + \sigma^2 \sigma''}{2S(\theta)^2} \beta^2 + \frac{C(\theta)}{2 \cos \theta} \epsilon^2 + F_0 C(\theta) - 3H_0 S(\theta) \quad (6.1.20)$$

$$\partial_{rs}^2 \hat{\beta} = \frac{\sigma^3 + \sigma^2 \sigma''}{2S(\theta)^2} \alpha\beta + \frac{C(\theta)}{2 \cos \theta} \delta\epsilon + C_0 C(\theta) - 2B_0 S(\theta) \quad (6.1.21)$$

6.2 Construction d'un quasimode

Dans cette section, nous construisons un quasimode et prouvons le Théorème 1.3.11.

6.2.1 Changement d'échelle

On effectue le changement d'échelle suivant :

$$t = h^{1/2}\tilde{t}, s = h^{1/2}\tilde{s}, r = h^{1/2}\tilde{r}. \quad (6.2.22)$$

On omet le tilde, on divise par h et, au lieu de $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}$, on considère :

$$\begin{aligned} H^{h,new} &= n_{app}^h D_t m_{app}^h D_t + f_{11}^h (D_r + \overline{A}_r^h)^2 + f_{22}^h (D_s + \overline{A}_s^h)^2 \\ &+ f_{12}^h (D_r + \overline{A}_r^h)(D_s + \overline{A}_s^h) + f_{12}^h (D_s + \overline{A}_s^h)(D_r + \overline{A}_r^h), \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

où

$$\begin{aligned} \overline{A}_r^h &= V_{\theta_1} + h^{1/2}P_{r,2} + hP_{r,3}, \\ \overline{A}_s^h &= h^{1/2}P_{s,2} + hP_{s,3}, \end{aligned}$$

où les $P_{i,j}$ sont donnés en (6.1.14) et avec

$$\begin{aligned} n_{app}^h &= 1 + h^{1/2}tK_0^M - h\text{Tr}\left(\frac{G_1^0}{2}\right) + hR, & m_{app}^h &= 1 - h^{1/2}tK_0^M + h\text{Tr}\left(\frac{G_1^0}{2}\right) + hR \\ f_{11}^h &= 1 + 2h^{1/2}tK_{11} - hG_{11} - hR_{11}, & f_{12}^h &= 2h^{1/2}K_{12}t - hG_{12} - hR_{12} \\ f_{22}^h &= 1 + 2h^{1/2}tK_{22} - hG_{22} - hR_{22} \end{aligned} \quad .$$

6.2.2 Quasimode

On commence par faire une transformation de Fourier en r , notée \mathcal{F} et on réalise ensuite la translation U_θ :

$$s = \tilde{s} + \frac{\tau}{\sin \theta}$$

et on trouve l'opérateur $\mathcal{H}^{h,new}$ qui est unitairement équivalent à $H^{h,new}$:

$$\mathcal{H}^{h,new} = U_\theta^{-1} \mathcal{F}^{-1} H^{h,new} \mathcal{F} U_\theta.$$

Ainsi, pour obtenir $\mathcal{H}^{h,new}$, il suffit juste de remplacer (en omettant le tilde) dans $H^{h,new}$:

$$s \text{ par } s + \frac{\tau}{\sin \theta} \text{ et } r \text{ par } D_\tau - \frac{1}{\sin \theta} D_s.$$

On développe formellement $\mathcal{H}^{h,new}$ en puissance de h et on écrit :

$$\mathcal{H}^{h,new} = \sum_{j=0}^{+\infty} h^{j/2} H_j$$

avec

$$\begin{aligned} H_0 &= D_s^2 + D_t^2 + V_\theta^2 (= H(\theta)) \\ H_1 &= (2V_\theta(\alpha t - \zeta s) + 2\delta t D_s) \boxed{D_\tau} - \frac{2\zeta}{\sin \theta} V_\theta \boxed{\tau D_\tau} \\ &\quad + \left(\frac{2}{\sin \theta} (\beta t - \gamma s) V_\theta + \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} (V_\theta D_s + D_s V_\theta) + \frac{2\epsilon}{\sin \theta} t D_s \right) \boxed{\tau} - \frac{\gamma}{\sin^2 \theta} V_\theta \boxed{\tau^2} + \tilde{H}_1, \end{aligned}$$

où \tilde{H}_1 est défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= -\frac{1}{\sin \theta} (\alpha t - \zeta s) (D_s V_\theta + V_\theta D_s) + 2V_\theta (\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2) + \eta V_\theta t^2 \\ &\quad - \frac{2\delta t}{\sin \theta} D_s^2 + \epsilon t (s D_s + D_s s) + \xi t^2 D_s + H_K \end{aligned}$$

et où H_K est défini en (1.3.24). L'expression de H_2 sera explicitée dans la suite.

Remarque 6.2.1.

Dans l'expression de H_1 nous avons encadré les opérateurs opérant en τ ; nous considérerons en effet cet opérateur comme opérateur en τ à coefficients opérateurs en s et t . Après un produit scalaire en (s, t) , nous serons en effet ramenés à un opérateur en τ à coefficients constants. Insistons enfin sur le fait que la dépendance en τ du quasimode fournit par notre construction sera le problème le plus important de ce chapitre. ■

On cherche un quasimode sous la forme :

$$u^h = \sum_{j=0}^{+\infty} h^{j/2} u_j$$

associé à une valeur propre :

$$\lambda_h^1 = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j h^{j/2}$$

Nous sommes alors amenés au système :

$$\begin{aligned} h^0 : H_0 u_0 &= \lambda_0 u_0, \\ h^{1/2} : H_1 u_0 + H_0 u_1 &= \lambda_1 u_0 + \lambda_0 u_1, \\ h : H_2 u_0 + H_1 u_1 + H_0 u_2 &= \lambda_2 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_0 u_2. \end{aligned}$$

Coefficient de h^0

H_0 (en tant qu'opérateur en les variables (s, t)) a été étudié dans le chapitre précédent. Pour λ_0 on prend la plus petite valeur propre de H_0 (qui était aussi noté $H(\theta)$) et on choisit

$$u_0(\tau, s, t) = \phi_0(\tau)u_\theta(s, t), \quad (6.2.24)$$

avec ϕ_0 (de norme 1) à déterminer.

Coefficient de $h^{\frac{1}{2}}$

Nous espérons maintenant déterminer la fonction ϕ_0 en passant à l'équation correspondant à l'échelle $h^{1/2}$. Nous allons voir que nous n'allons pas y arriver à cette étape. On doit calculer :

$$\langle H_1 u_0, u_\theta \rangle.$$

Cette quantité a la structure suivante :

$$\mathfrak{A}D_\tau\phi_0 + \mathfrak{B}\tau D_\tau\phi_0 + \mathfrak{C}\tau\phi_0 + \mathfrak{D}\tau^2\phi_0 + \mathfrak{E}\phi_0,$$

où :

$$\mathfrak{A} = \langle (2V_\theta(\alpha t - \zeta s) + 2\delta t D_s)u_\theta, u_\theta \rangle,$$

$$\mathfrak{B} = - \langle \frac{2\zeta}{\sin \theta} V_\theta u_\theta, u_\theta \rangle,$$

$$\mathfrak{C} = \langle (2(\beta t - \gamma s)V_\theta + \frac{\zeta}{\sin^2 \theta}(V_\theta D_s + D_s V_\theta) + \frac{2\epsilon}{\sin \theta} t D_s)u_\theta, u_\theta \rangle,$$

$$\mathfrak{D} = \langle -\frac{\gamma}{\sin^2 \theta} V_\theta u_\theta, u_\theta \rangle,$$

$$\mathfrak{E} = \langle \tilde{H}_1 u_\theta, u_\theta \rangle.$$

Nous allons prouver le lemme suivant :

Lemme 6.2.2 *On a :*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= 2 \langle V_\theta(\beta s t - \frac{\gamma}{2})u_\theta, u_\theta \rangle + \eta \langle t^2 V_\theta u_\theta, u_\theta \rangle - \frac{2\delta}{\sin \theta} \int_{t>0} t |D_s u_\theta|^2 \\ &+ \langle H_K u_\theta, u_\theta \rangle. \end{aligned}$$

Preuve.

Examinons \mathfrak{A} . On rappelle (5.2.8). De plus, par le Lemme 5.2.7 et (6.1.18), on trouve :

$$< 2V_\theta(\alpha t - \zeta s)u_\theta, u_\theta > = 0.$$

Ainsi, on a prouvé que $\mathfrak{A} = 0$.

Considérons \mathfrak{B} et \mathfrak{D} . Par le Lemme 5.2.1, on a : $\mathfrak{B} = \mathfrak{D} = 0$.

Finalement, prouvons que \mathfrak{C} vaut aussi 0.

À nouveau avec (6.1.18) et le Lemme 5.2.7, on trouve :

$$< (2(\beta t - \gamma s)V_\theta u_\theta, u_\theta > = 0.$$

Comme précédemment, on a :

$$< \frac{2\epsilon}{\sin \theta} t D_s u_\theta, u_\theta > = 0.$$

Rappelons (5.2.5). Nous déduisons que $\lambda_1 = \mathfrak{C}$. Simplifions son expression. On observe d'abord que :

$$< t^2 D_s u_\theta, u_\theta > = 0.$$

Alors, on obtient :

$$< (\alpha t - \zeta s)(D_s V_\theta + V_\theta D_s)u_\theta, u_\theta > = 0.$$

En effet, une intégration par parties fournit :

$$< (\alpha t - \zeta s)\partial_s(V_\theta u_\theta), u_\theta > = - < (\alpha t - \zeta s)\partial_s u_\theta, V_\theta u_\theta >,$$

où on a utilisé le Lemme 5.2.1. Par ailleurs, de la même façon, on trouve :

$$< (D_s s + s D_s)u_\theta, u_\theta > = 0.$$

Par suite, on a (cf. (1.3.21)) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} = \lambda_1 = 2 < V_\theta(\beta s t - \frac{\gamma}{2})u_\theta, u_\theta > + \eta < t^2 V_\theta u_\theta, u_\theta > - \frac{2\delta}{\sin \theta} \int_{t>0} t |D_s u_\theta|^2 \\ + < H_K u_\theta, u_\theta > . \end{aligned}$$

■

Ainsi, pour u_1 , on peut prendre une solution de l'équation :

$$(H_0 - \sigma(\theta))u_1 = \lambda_1 u_0 - H_1 u_0.$$

On peut écrire l'expression de u_1 (le lemme précédent prouve qu'une telle fonction existe et les résultats du chapitre précédent permettent de donner son expression explicite) :

Lemme 6.2.3 *L'équation correspondant au coefficient de $h^{1/2}$ et avec comme fonction u_0 la fonction définie en (6.2.24) admet comme solution :*

$$u_1 = \left(\frac{\alpha}{S}w_0 + 2i\delta f_0\right)\boxed{D_\tau\phi_0} + \frac{\zeta}{\sin^2\theta}\partial_s u_\theta\boxed{\tau D_\tau\phi_0} \\ + \left(\frac{\beta}{S\sin\theta}w_0 - i\frac{\zeta}{2\sin^3\theta}\partial_s^2 u_\theta + 2i\frac{\epsilon}{\sin\theta}f_0\right)\boxed{\tau\phi_0} + \frac{\gamma}{2\sin^3\theta}\partial_s u_\theta\boxed{\tau^2\phi_0} + \tilde{u}_1,$$

où \tilde{u}_1 est défini par :

$$(H - \sigma)\tilde{u}_1 = (\lambda_1 - \tilde{H}_1)u_\theta. \quad (6.2.25)$$

Avant d'analyser le coefficient de h , énonçons un lemme concernant \tilde{u}_1 :

Lemme 6.2.4 *Nous avons l'identité suivante :*

$$2\sin\theta \int_{t>0} V_\theta \tilde{u}_1 u_\theta ds dt = \int_{t>0} \partial_s(\tilde{H}_1 u_\theta) u_\theta ds dt.$$

Preuve.

On dérive (6.2.25) par rapport à s , puis on multiplie par u_θ et on intègre.

■

À cette étape, nous n'avons pas encore utilisé la condition de non-dégénérescence ; celle-ci apparaît dans le paragraphe suivant.

Coefficient de h

Nous nous intéressons maintenant à λ_2 et u_2 et nous sommes amenés à examiner la condition de compatibilité :

$$< H_1 u_1 + H_2 u_0, u_\theta > = \lambda_2 \phi_0.$$

Nous n'avons pas encore donné l'expression explicite de H_2 , mais il est aisé de constater que l'équation précédente peut être mise sous la forme :

$$(A_1\tau^2 D_\tau^2 + A_2\tau^4 + A_3\tau^3 D_\tau + A_4\tau D_\tau^3 + A_5\tau D_\tau^2 + A_6\tau^2 D_\tau + A_7\tau^3 + A_8 D_\tau^3 \\ + A_9 D_\tau^2 + A_{10}\tau D_\tau + A_{11}\tau^2 + A_{12}D_\tau + A_{13}\tau + A_{14})\phi_0 = \lambda_2 \phi_0. \quad (6.2.26)$$

De plus, les coefficients de K et G_1 (voir Section D.2) interviennent juste a priori dans les coefficients A_i pour $i \in \{9, \dots, 14\}$ (pour des raisons d'échelle et de degré). Précisons cela dans le prochain paragraphe.

“Réduction” au cas de la métrique plate

Nous prouvons que les coefficients de τ^2 , D_τ^2 et τD_τ ne dépendent pas de G_1 et K et que l'on peut faire, en un sens, exactement comme si la métrique était plate. Avant de débiter l'analyse, rappelons que les relations (6.1.7) existent de sorte que la courbure joue un rôle dans ξ et η .

Intéressons nous d'abord à la dépendance des coefficients en K . On peut d'abord observer que celui de D_τ^2 n'a pas de telle dépendance.

Ensuite, nous considérons celui de τ^2 . Rassemblant les termes faisant intervenir K dans $\langle H_1 u_1, u_\theta \rangle$, on constate qu'ils n'apparaissent que dans le coefficient suivant (on utilise le Lemme 6.2.4) :

$$\frac{\gamma}{2 \sin^3 \theta} \int_{t>0} \tilde{H}_1 \partial_s u_\theta u_\theta ds dt - \frac{\gamma}{2 \sin^3 \theta} \int_{t>0} \partial_s (\tilde{H}_1 u_\theta) u_\theta ds dt.$$

Ainsi, on doit calculer le commutateur $\tilde{H}_1 \partial_s - \partial_s \tilde{H}_1$ modulo les termes sans courbure ; on obtient :

$$\frac{\gamma}{2 \sin^3 \theta} (K_{11} t^2 \sin \theta \cos \theta - 4 K_{11} t \sin \theta V_\theta - 4 K_{12} t \sin \theta D_s).$$

Par conséquent, le coefficient est :

$$\langle \frac{\gamma}{2 \sin^2 \theta} (K_{11} t^2 \cos \theta - 4 K_{11} t V_\theta) u_\theta, u_\theta \rangle.$$

Ensuite, on considère le coefficient de τ^2 faisant intervenir la courbure dans H_2 :

$$\frac{\gamma K_{11} \cos \theta t^2}{2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \gamma K_{11} t V_\theta}{\sin^2 \theta}.$$

En conclusion, le coefficient de τ^2 ne dépend pas de K .

On analyse maintenant le coefficient de τD_τ . Modulo les termes sans courbure, on observe que seul un terme dans H_1 doit jouer un rôle dans τD_τ et examinant l'expression du coefficient correspondant, on se trouve réduit aux mêmes calculs que pour τ^2 .

Considérons à présent la dépendance des coefficients en G_1 (voir la Remarque D.2). Premièrement, regardons le terme en τ^2 et cherchons les termes contenant G_1 :

$$-G_{11}^{s^2} \int V_\theta^2 u_\theta^2 ds dt - G_{22}^{s^2} \int_{t>0} |D_s u_\theta|^2 ds dt$$

et :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(6H \int_{t>0} s V_\theta u_\theta^2 ds dt + 2F \int_{t>0} t V_\theta u_\theta^2 ds dt \right). \quad (6.2.27)$$

A priori, dans (6.2.27), il devrait y avoir le terme en \overline{F} , mais son coefficient est essentiellement : $\langle tD_s u_\theta, u_\theta \rangle = 0$. Rappelant les relations (6.1.11), (6.2.27) fournit la contribution :

$$-\frac{1}{\sin^2 \theta} (G_{11}^{s^2} + G_{22}^{s^2}) \sin \theta \int s V_\theta u_\theta^2 ds dt + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cos \theta G_{11}^{s^2} \int t V_\theta u_\theta^2 ds dt.$$

Alors, nous rappelons la Remarque 5.2.12 et les coefficients de $G_{11}^{s^2}$ et $G_{22}^{s^2}$ s'annulent. Ensuite, on regarde les termes dans D_τ^2 et τD_τ et on observe que les termes $G_{11}^{r^2}$ et $G_{22}^{r^2}$ d'une part et G_{11}^{rs} et G_{22}^{rs} d'autre part s'annulent pour la même raison que pour $G_{11}^{r^2}$ et $G_{22}^{r^2}$ après avoir utilisé les expressions (6.1.12) et (6.1.13).

Par ailleurs, les termes en R (voir Remarque D.2) jouant à l'échelle h et avec un degré inférieur à 1 par rapport à r et s fournissent, après la transformation de Fourier et la translation, des coefficients de D_τ et τ et, comme nous le verrons, ces termes ne sont pas importants pour prouver le Théorème 1.3.11. À présent, nous pouvons donner une expression explicite de H_2 (modulo des termes qui ne changent pas les coefficients de D_τ^2 , τD_τ et τ^2 , mais seulement ceux de τ , D_τ et la constante) :

$$\begin{aligned} H_2 = & P_{r,2} \left(D_\tau - \frac{1}{\sin \theta} D_{s,s} + \frac{\tau}{\sin \theta}, t \right)^2 + P_{s,2} \left(D_\tau - \frac{1}{\sin \theta} D_{s,s} + \frac{\tau}{\sin \theta}, t \right)^2 \\ & + P_{r,3} \left(D_\tau - \frac{1}{\sin \theta} D_{s,s} + \frac{\tau}{\sin \theta}, t \right) V_\theta + V_\theta P_{r,3} \left(D_\tau - \frac{1}{\sin \theta} D_{s,s} + \frac{\tau}{\sin \theta}, t \right) \\ & + P_{s,3} \left(D_\tau - \frac{1}{\sin \theta} D_{s,s} + \frac{\tau}{\sin \theta}, t \right) V_\theta + V_\theta P_{s,3} \left(D_\tau - \frac{1}{\sin \theta} D_{s,s} + \frac{\tau}{\sin \theta}, t \right) \end{aligned}$$

où les $P_{i,j}$ sont donnés en (6.1.14) (et dans lesquels on peut mettre un indice 0 à tous les coefficients).

Revenons à l'équation (6.2.26). Une grande partie des coefficients est nulle comme l'énonce le lemme qui suit :

Lemme 6.2.5 *Nous avons les annulations suivantes :*

$$A_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, 8\}. \quad (6.2.28)$$

Preuve.

Coefficient de $D_\tau^3, \tau D_\tau^3$,

De tels termes n'apparaissent pas.

Coefficient de τ^4

On peut observer que le coefficient de τ^4 dans H_2 est :

$$\frac{\gamma^2}{4 \sin^4 \theta},$$

par ailleurs, le coefficient de τ^4 dans $\langle H_1 u_1, u_\theta \rangle$ est :

$$-\frac{\gamma^2}{2 \sin^5 \theta} \langle V_\theta \partial_s u_\theta, u_\theta \rangle.$$

Or, en faisant le produit scalaire de (5.2.5) par u_θ , on obtient

$$\langle V_\theta \partial_s u_\theta, u_\theta \rangle = \frac{\sin \theta}{2}.$$

Coefficient de $\tau^2 D_\tau^2$

Le coefficient de $\tau^2 D_\tau^2$ dans H_2 est :

$$\frac{\zeta^2}{\sin^2 \theta}$$

et dans $\langle H_1 u_1, u_\theta \rangle$:

$$-\frac{2\zeta^2}{\sin^3 \theta} \langle V_\theta \partial_s u_\theta, u_\theta \rangle.$$

Coefficient de τ^3

Le coefficient de τ^3 dans $H_1 u_1$ est :

$$\begin{aligned} & \frac{\beta\gamma}{S \sin^4 \theta} \langle (St + Cs) \partial_s u_\theta, V_\theta u_\theta \rangle + \frac{\gamma\zeta}{S \sin^5 \theta} \langle (D_s V_\theta + V_\theta D_s) \partial_s u_\theta, u_\theta \rangle \\ & + i \frac{\epsilon\gamma}{\sin^4 \theta} \langle t \partial_s^2 u_\theta, u_\theta \rangle - \frac{\gamma\beta}{S \sin^3 \theta} \langle V_\theta w_0, u_\theta \rangle + \frac{\gamma\zeta}{2 \sin^5 \theta} \langle V_\theta \partial_s^2 u_\theta, u_\theta \rangle \\ & - \frac{\gamma\epsilon}{\sin^3 \theta} \langle V_\theta f_0, u_\theta \rangle. \end{aligned}$$

Dans H_2 , le coefficient s'écrit :

$$-\frac{\gamma\beta}{S \sin \theta} \langle (St + Cs) u_\theta, u_\theta \rangle + \frac{2H}{\sin^3 \theta} \langle V_\theta u_\theta, u_\theta \rangle.$$

Par le Lemme 5.2.4, nous trouvons alors que le terme en $\epsilon\gamma$ disparaît. Considérons le terme en $\gamma\zeta$. On dérive (5.2.5) par rapport à s et on fait le produit scalaire par u_θ pour trouver :

$$\langle V_\theta \partial_s^2 u_\theta, u_\theta \rangle = 0 \text{ et } \langle (D_s V_\theta, V_\theta D_s) \partial_s u_\theta, u_\theta \rangle = 0.$$

On traite le terme en $\beta\gamma$ par le Lemme 5.2.9 et l'annulation souhaitée en découle.

Coefficient de $\tau^3 D_\tau$

De $\langle H_1 u_1, u_\theta \rangle$ on tire le coefficient :

$$-\frac{\gamma\zeta}{\sin^4 \theta} \langle V_\theta \partial_s u_\theta, u_\theta \rangle$$

et de $\langle H_2 u_\theta, u_\theta \rangle$:

$$\frac{\zeta\gamma}{2 \sin \theta}.$$

On conclut alors comme pour le coefficient de $\tau^2 D_\tau^2$.

Coefficients de τD_τ^2 et $\tau^2 D_\tau$

Ces coefficients sont laissés au lecteur. Leur nullité provient en effet, comme pour les précédents de (5.2.5), des Lemmes 5.2.4 et 5.2.9.

■

On est alors réduit à une équation de la forme :

$$(A_9 D_\tau^2 + A_{10} \tau D_\tau + A_{11} \tau^2 + A_{12} D_\tau + A_{13} \tau + A_{14}) \phi_0 = \lambda_2 \phi_0.$$

Écrivant ensuite formellement que $D_\tau = r$ et $\tau = s$, on espérerait obtenir la forme quadratique de la hessienne. C'est à peu de choses près ce qui se produit :

Lemme 6.2.6 *On a :*

$$\begin{aligned} A_9 &= \frac{1}{2} \partial_r^2 \hat{\beta}(x_0), \\ A_{10} &= \frac{1}{\sin \theta} \partial_{rs} \hat{\beta}(x_0), \\ A_{11} &= \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \partial_s^2 \hat{\beta}(x_0). \end{aligned}$$

Preuve.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les nombreuses relations satisfaites par la fonction u_θ et ses dérivées.

Coefficient de D_τ^2

Les termes en D_τ^2 provenant de $\langle H_1 u_1, u_\theta \rangle$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{S^2} \langle 2V_\theta(Cs + St)w_0, u_\theta \rangle - 4\delta^2 \langle t\partial_s f_0, u_\theta \rangle \\ + \frac{2i\delta\alpha}{S} \langle 2V_\theta(Cs + St)f_0, u_\theta \rangle + \frac{2i\alpha\delta}{S} \langle t\partial_s w_0, u_\theta \rangle \end{aligned}$$

Par le Lemme 5.2.10, les termes imaginaires disparaissent. Par ailleurs, les termes en D_τ^2 dans $\langle H_2 u_0, u_\theta \rangle$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{S^2} \langle (Cs + St)^2 u_\theta, u_\theta \rangle + \delta^2 \langle t^2 u_\theta, u_\theta \rangle \\ + 2D_0 \langle tV_\theta u_\theta, u_\theta \rangle + 2E_0 \langle sV_\theta u_\theta, u_\theta \rangle . \end{aligned}$$

On observe, avec le Lemme 5.2.3 et (5.2.16), que le coefficient de δ^2 est

$$-\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \int t s u_\theta^2 ds dt + \int t^2 u_\theta^2 ds dt = \frac{1}{\cos \theta} \int t V_\theta u_\theta^2 ds dt = \frac{C(\theta)}{2 \cos \theta}.$$

Ensuite, avec le Lemme 5.2.8 et à nouveau (5.2.16) (pour les coefficients de D_0 et E_0), nous avons prouvé (voir (6.1.19)) que le coefficient de D_τ^2 est :

$$\frac{1}{2} \partial_r^2 \hat{\beta}(x_0).$$

Coefficient de τ^2

De $\langle H_1 u_1, u_\theta \rangle$ et avec le Lemme 6.2.4, nous obtenons le coefficient de τ^2 :

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\frac{2}{\sin \theta} (\beta t - \gamma s) V_\theta + \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} (V_\theta D_s + D_s V_\theta) + \frac{2\epsilon}{\sin \theta} t D_s \right) \right. \\ & \left. \left(\frac{\beta}{S \sin \theta} w_0 - i \frac{\zeta}{2 \sin^3 \theta} \partial_s^2 u_\theta + 2i \frac{\epsilon}{\sin \theta} f_0 \right), u_\theta \right\rangle + \frac{\gamma}{2 \sin^3 \theta} \langle [\tilde{H}_1, \partial_s] u_\theta, u_\theta \rangle . \end{aligned}$$

De $\langle H_2 u_0, u_\theta \rangle$, nous trouvons le coefficient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \theta} \langle (\beta t - \gamma s)^2 u_\theta, u_\theta \rangle - \frac{\gamma}{\sin^2 \theta} \langle (\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2 + \frac{\eta}{2} t^2) u_\theta, u_\theta \rangle \\ + \frac{\zeta^2}{\sin^4 \theta} \langle D_s^2 u_\theta, u_\theta \rangle + \frac{\zeta}{\sin^3 \theta} \langle (D_s (\beta t - \gamma s) + (\beta t - \gamma s) D_s) u_\theta, u_\theta \rangle \\ + 2 \frac{F_0}{\sin^2 \theta} \langle t V_\theta u_\theta, u_\theta \rangle + 6 \frac{H_0}{\sin^2 \theta} \langle s V_\theta u_\theta, u_\theta \rangle + 2 \bar{F}_0 \langle t D_s u_\theta, u_\theta \rangle \\ + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 \theta} \langle t^2 u_\theta, u_\theta \rangle + \frac{\gamma}{\sin \theta} \langle (\alpha t - \zeta s) D_s u_\theta, u_\theta \rangle . \end{aligned}$$

On observe que $2\overline{F}_0 < tD_s u_\theta, u_\theta > = 0$. On rassemble ensuite certains termes. On a d'abord, avec les mêmes formules que dans le paragraphe précédent :

$$< 2(\beta t - \gamma s)V_\theta \frac{\beta}{S \sin \theta} w_0, u_\theta > + \frac{1}{\sin^2 \theta} < (\beta t - \gamma s)^2 u_\theta, u_\theta > = 2 \frac{\sigma^3 + \sigma^2 \sigma'}{\sin^2 \theta S(\theta)^2} \beta^2.$$

Les autres termes en β^2 (ou $\beta\gamma$) sont :

$$-\frac{\gamma}{\sin^2 \theta} < (\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2) u_\theta, u_\theta > + \frac{\gamma}{2 \sin^3 \theta} < [2V_\theta(\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2), \partial_s] u_\theta, u_\theta > . \quad (6.2.29)$$

Or, on a :

$$[2V_\theta(\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2), \partial_s] = 2 \sin \theta (\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2) - 2(\beta t - \gamma s),$$

donc, avec (5.2.7), il vient :

$$< [2V_\theta(\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2), \partial_s] u_\theta, u_\theta > = < 2 \sin \theta (\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2) u_\theta, u_\theta > .$$

Ainsi, (6.2.29) est nul.

Rassemblons les termes en $\gamma\eta$:

$$-\frac{\gamma\eta}{2 \sin^2 \theta} < t^2 u_\theta, u_\theta > + \frac{\gamma\eta}{2 \sin^3 \theta} < t^2 [V_\theta, \partial_s] u_\theta, u_\theta > = 0. \quad (6.2.30)$$

Les termes en ϵ^2 sont (voir le paragraphe précédent pour δ^2) :

$$\frac{\epsilon^2}{\sin^2 \theta} < t^2 u_\theta, u_\theta > - \frac{4\epsilon^2}{\sin^2 \theta} t \partial_s f_0, u_\theta > = \frac{C(\theta)}{2 \sin^2 \theta \cos \theta} \epsilon^2.$$

Considérons les termes en ζ^2 :

$$\frac{\zeta^2}{\sin^4 \theta} < D_s^2 u_\theta, u_\theta > + \frac{\zeta^2}{2 \sin^5 \theta} < (V_\theta \partial_s + \partial_s V_\theta) \partial_s^2 u_\theta, u_\theta > . \quad (6.2.31)$$

Après une intégration par parties, nous sommes réduits à appliquer le Lemme 5.2.2 et nous trouvons que (6.2.31) est nul. Ainsi, nous avons :

$$2 \frac{F_0}{\sin^2 \theta} < t V_\theta u_\theta, u_\theta > + 3 \frac{H_0}{\sin^2 \theta} < s V_\theta u_\theta, u_\theta > = \frac{1}{\sin^2 \theta} (F_0 C(\theta) - 3 H_0 S(\theta)).$$

Prouvons maintenant que tous les autres termes sont nuls.

On remarque d'abord que (voir le paragraphe précédent) :

$$< \frac{4i\epsilon}{\sin^2 \theta} (\beta t - \gamma s) V_\theta f_0, u_\theta > + < \frac{2i\epsilon\beta}{S \sin^2 \theta} t \partial_s w_0, u_\theta > = 0.$$

Ensuite, on a, par le Lemme 5.2.4 :

$$< -\frac{2\zeta\epsilon}{\sin^3\theta}(V_\theta\partial_s + \partial_s V_\theta)f_0, u_\theta > + < \frac{\zeta\epsilon}{\sin^4\theta}t\partial_s^3 u_\theta, u_\theta > = 0.$$

Écrivons les termes restants (pour le dernier, voir le Lemme 6.2.4) :

$$\begin{aligned} & - < \frac{i\zeta}{\sin^4\theta}(\beta t - \gamma s)V_\theta\partial_s^2 u_\theta, u_\theta > + < \frac{i\beta\zeta}{S\sin^3\theta}(V_\theta\partial_s + \partial_s V_\theta)w_0, u_\theta > \\ & + \frac{\zeta}{\sin^3\theta} < (D_s(\beta t - \gamma s) + (\beta t - \gamma s)D_s)u_\theta, u_\theta > \\ & + \frac{\gamma}{\sin^3\theta} < (\alpha t - \zeta s)D_s u_\theta, u_\theta > + \frac{i\gamma}{2\sin^4\theta} < [\partial_s, (\alpha t - \zeta s)(\partial_s V_\theta + V_\theta\partial_s)]u_\theta, u_\theta >. \end{aligned}$$

Après deux intégrations par parties, il est aisé de voir que :

$$\frac{\zeta}{\sin^3\theta} < (D_s(\beta t - \gamma s) + (\beta t - \gamma s)D_s)u_\theta, u_\theta > = 0.$$

Par ailleurs, en utilisant le Lemme 5.2.9, on obtient :

$$\begin{aligned} & - < \frac{i\zeta}{\sin^4\theta}(\beta t - \gamma s)V_\theta\partial_s^2 u_\theta, u_\theta > + < \frac{i\beta\zeta}{S\sin^3\theta}(V_\theta\partial_s + \partial_s V_\theta)w_0, u_\theta > \\ & = -i\frac{\zeta\beta}{2S\sin^3\theta} < (2C + 4(Cs + St)\partial_s)u_\theta, u_\theta > = 0. \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{\gamma}{\sin^3\theta} < (\alpha t - \zeta s)D_s u_\theta, u_\theta > = \frac{i\zeta\gamma}{2\sin^3\theta}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} & < [\partial_s, (\alpha t - \zeta s)(\partial_s V_\theta + V_\theta\partial_s)]u_\theta, u_\theta > = < (\alpha t - \zeta s)[\partial_s, (\partial_s V_\theta + V_\theta\partial_s)]u_\theta, u_\theta > \\ & = -2\sin\theta < (\alpha t - \zeta s)\partial_s u_\theta, u_\theta > = -\zeta\sin\theta. \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons prouvé que le coefficient de τ^2 est :

$$\frac{1}{2\sin^2\theta}\partial_s^2\hat{\beta}(x_0).$$

Coefficient de τD_τ

De $< H_1 u_1, u_\theta >$ nous obtenons le coefficient de τD_τ suivant :

$$\begin{aligned} & < (2V_\theta(\alpha t - \zeta s) + 2\delta t D_s)(\frac{\beta}{S\sin\theta}w_0 - i\frac{\zeta}{2\sin^3\theta}\partial_s^2 u_\theta + 2i\frac{\epsilon}{\sin\theta}f_0), u_\theta > \\ & + < (\frac{2}{\sin\theta}(\beta t - \gamma s)V_\theta + \frac{\zeta}{\sin^2\theta}(V_\theta D_s + D_s V_\theta) + \frac{2\epsilon}{\sin\theta}t D_s)(\frac{\alpha}{S}w_0 + 2i\delta f_0), u_\theta > \\ & + \frac{\zeta}{\sin^2\theta} < [\tilde{H}_1, \partial_s]u_\theta, u_\theta > \end{aligned}$$

De $\langle H_2 u_0, u_\theta \rangle$, on trouve le coefficient :

$$\begin{aligned} & -\frac{2\zeta}{\sin \theta} \langle (\beta s t - \frac{\gamma}{2} s^2 + \frac{\eta}{2}) u_\theta, u_\theta \rangle + \frac{2}{\sin^2 \theta} \langle (\alpha t - \zeta s) D_s u_\theta, u_\theta \rangle \\ & \frac{2}{\sin \theta} \langle (\alpha t - \zeta s)(\beta t - \gamma s) u_\theta, u_\theta \rangle + \frac{2\epsilon\delta}{\sin \theta} \langle t^2 u_\theta, u_\theta \rangle \\ & + \frac{1}{\sin \theta} (4B_0 \int_{t>0} s V_\theta u_\theta^2 ds dt + 2C_0 \int_{t>0} t V_\theta u_\theta^2 ds dt). \end{aligned}$$

Il est inutile de refaire tous les calculs ; en effet, ces derniers sont exactement les mêmes que ceux qu'on a rencontrés précédemment. Il suffit juste de rappeler les relations (6.1.18) et de remarquer que tout est divisé par $\sin \theta$ et on trouve comme coefficient :

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_{rs} \hat{\beta}(x_0).$$

■

En conclusion, ϕ_0 satisfait l'équation :

$$\mathfrak{S}_\beta(D_\tau, \frac{\tau}{\sin \theta}) \phi_0 + A_{12} D_\tau \phi_0 + A_{13} \tau \phi_0 + A_{14} \phi_0 = \lambda_2 \phi_0,$$

A priori A_{12} , A_{13} et A_{14} sont des nombres complexes. Pour $(c_1, c_2, d) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathfrak{S}_{\beta, c_1, c_2, d} = \mathfrak{S}_\beta(D_\tau + c_1, \tau + c_2) + d. \quad (6.2.32)$$

Alors, $\mathfrak{S}_{\beta, c_1, c_2, d}$ est simplement un oscillateur harmonique décalé. Après une translation (complexe) pour éliminer les termes linéaires, l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{S}_{\beta, c_1, c_2, d} \tilde{\phi}_0 = \lambda_2 \tilde{\phi}_0,$$

pour certains nombres complexes c_1 , c_2 et d . On choisit alors :

$$\lambda_2 = \lambda_1(\tilde{\mathfrak{S}}_\beta) + d$$

et la fonction propre normalisée associée pour $\tilde{\phi}_0$. À cette étape, on ne sait pas encore si d est réel. On sait juste que $\lambda_2 - d$ est réel.

6.2.3 Majoration

Les calculs de la section précédente nous conduisent à choisir comme quasimode :

$$\psi = \chi(r, s, t) v^h(h^{-1/2} r, h^{-1/2} s, h^{-1/2} t),$$

où χ est une fonction troncature régulière dans un voisinage de x_0 et où :

$$v^h = \mathcal{F} U_\theta u^h$$

avec

$$u^h = u_0 + h^{1/2}u_1 + hu_2.$$

Il se trouve que seuls les deux premiers termes sont suffisants pour prouver le Théorème 1.3.10 (ils ont été obtenus uniquement sous l'hypothèse (1.3.19)). Nous n'explicitons pas la preuve de ce théorème qui est essentiellement la même que celle du Théorème 1.3.11 (voir ci-après). Le calcul de la majoration peut alors s'effectuer en deux étapes ; on contrôle d'abord les restes (dus à l'approximation de la métrique) menant à l'opérateur modèle (6.1.2), puis, on estime les restes de Taylor conduisant au modèle (6.1.15). L'argument principal que nous utiliserons est la décroissance exponentielle des u_i (due à la Remarque 5.2.3) et ϕ_0 . Ainsi, on a d'abord une première approximation :

Lemme 6.2.7 *On a :*

$$\begin{aligned} &< ((ih\nabla + \mathbf{A})^2 - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + \lambda_2 h^2))\psi, \psi > \\ &= < \mathcal{H}^{MOD} - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + \lambda_2 h^2)\psi, \psi >_{L^2(m_{app}drdsdt)} + O(h^{5/2}). \end{aligned}$$

Preuve.

Pour le prouver, considérons les restes les plus mauvais dans (6.1.1) :

$$\int_{t>0} |r|^3 |(ih\nabla + \tilde{\mathbf{A}})\psi|^2 drdsdt.$$

Par exemple, on a :

$$\int_{t>0} |r|^3 |(hD_r + \tilde{\mathbf{A}}_r)\psi|^2 drdsdt \leq C \int_{t>0} |r|^3 (s^2 + t^2) |\psi|^2 drdsdt + h^2 \int_{t>0} |r|^3 |D_r \psi|^2 drdsdt.$$

Le premier terme s'estime en $O(h^{5/2})$ après changement d'échelle et le second peut être traité de la façon suivante :

$$h^2 \int_{t>0} |r|^3 |D_r \psi|^2 drdsdt \leq 2h^2 \int_{t>0} |r|^3 |D_r \chi|^2 |\psi|^2 drdsdt + 2h^2 h^{1/2} \int_{t>0} |r|^3 |\chi|^2 |D_r u^h|^2 drdsdt.$$

Le premier terme est $O(h^\infty)$ car u^h décroît exponentiellement en la variable r et le second est $O(h^{5/2})$.

Tous les autres termes sont contrôlés de la même manière. ■

Nous avons ensuite une deuxième approximation :

Lemme 6.2.8 *On a :*

$$\begin{aligned} &< \mathcal{H}^{MOD} - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + \lambda_2 h^2))\psi, \psi > \\ &= < \mathcal{H}^{\mathcal{M}} - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + \lambda_2 h^2))\psi, \psi >_{L^2(m_{app}drdsdt)} + O(h^{5/2}). \end{aligned}$$

Preuve.

On doit estimer les termes suivants (cf. (6.1.16)) :

$$\begin{aligned} & \int_{t>0} (\tilde{A}_r - \tilde{A}_r^{(3)}) \bar{\psi} (hD_r + \tilde{A}_r) \psi dr ds dt, \\ & \int_{t>0} (\tilde{A}_s - \tilde{A}_s^{(3)}) \bar{\psi} (hD_s + \tilde{A}_s) \psi dr ds dt. \end{aligned}$$

Examinons le premier.

L'un des pires termes qu'il nous faut contrôler est sous la forme :

$$\int_{t>0} r^4 |\bar{\psi} (hD_r + \tilde{A}_r) \psi| dr ds dt.$$

Modulo $O(h^{5/2})$, il se trouve que nous avons juste à estimer :

$$\int_{t>0} r^4 |\bar{\psi} (hD_r + V_{\theta_1}) \psi| dr ds dt.$$

Or, d'une part on obtient :

$$\left| \int_{t>0} h r^4 |\bar{\psi} D_r \psi| dr ds dt \right| \leq C h h^{4/2} h^{-1/2} = C h^{5/2}.$$

et d'autre part :

$$\left| \int_{t>0} r^4 |\bar{\psi} V_{\theta_1} \psi| dr ds dt \right| \leq C h^{4/2} h^{1/2} = C h^{5/2}.$$

On étudie ensuite le second terme.

Il suffit de considérer :

$$\int_{t>0} |r^4 \bar{\psi} (hD_s + r^2) \psi| dr ds dt.$$

et on a :

$$\left| \int_{t>0} r^4 |\bar{\psi} (hD_s + r^2) \psi| dr ds dt \right| \leq C (h^{4/2} h h^{-1/2} + h^{6/2}).$$

Les autres termes de (6.1.16) sont contrôlés en $O(h^{5/2})$ par le même procédé.

■

Alors, par construction de u^h et en contrôlant les restes dans le développement de $H^{h,new}$ par la décroissance exponentielle, il s'ensuit :

$$< \mathcal{H}^{\mathcal{M}} - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + \lambda_2 h^2) \psi, \psi >_{L^2(m_{app} dr ds dt)} = O(h^{5/2})$$

et, donc, en vertu des Lemmes 6.2.7 et 6.2.8 et comme l'autoadjonction de $(ih\nabla + \mathbf{A})^2$ implique que λ_2 est réel (et donc d aussi), nous avons fini la preuve du Théorème 1.3.11.

Troisième partie

Analyse asymptotique de la fonctionnelle de Landau-de Gennes

Chapitre 7

Étude asymptotique de \mathcal{F}

Ce chapitre est consacré à la preuve du Théorème 1.5.6. Avant de nous atteler à cette preuve, nous nous intéresserons aux équations d'Euler-Lagrange satisfaites par les minimiseurs pour savoir si l'on peut en tirer directement des informations. Nous constaterons que ce problème n'est pas évident du fait de l'apparition d'un multiplicateur de Lagrange sur lequel on possède très peu d'informations. Heureusement, nous pourrons tout de même mettre en oeuvre une technique utilisée dans [BCLP02] et montrer que $\mu^*(q, \tau)$ est bien critique pour la fonctionnelle \mathcal{F} .

7.1 Existence des minimiseurs de \mathcal{F}

Dans cette section, nous portons notre attention sur la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 7.1.1 *\mathcal{F} possède des minimiseurs.*

Commençons d'abord par énoncer un théorème ([GR86, p. 56, corollaire 3.7]) qui caractérise H^1 à l'aide de la divergence et du rotationnel :

Théorème 7.1.2 *Soit Ω un ouvert borné de bord $\mathcal{C}^{1,1}$.*

Alors

$$H^1(\Omega) = \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \nabla \times \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} \in H^{1/2}(\partial\Omega) \}$$

et

$$|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)} \leq C(|\mathbf{u}|_2 + |\nabla \cdot \mathbf{u}|_2 + |\nabla \times \mathbf{u}|_2 + |\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}).$$

Passons à un lemme dont on va déduire l'existence des minimiseurs.

Lemme 7.1.3 *Posant*

$$V(\Omega, \mathbb{S}^2) = \{\mathbf{n} \in L^2(\Omega, \mathbb{S}^2) : \nabla \times \mathbf{n} \in L^2, \nabla \cdot \mathbf{n} \in L^2\},$$

on a : $V(\Omega, \mathbb{S}^2) \subset H_{loc}^1(\Omega)$ et $V(\Omega, \mathbb{S}^2)$ est faiblement compact dans $H_{loc}^1(\Omega)$.

Preuve.

La première affirmation est évidente par le Théorème 7.1.2. Prouvons maintenant la seconde. Soit (\mathbf{n}^j) une suite faiblement convergente dans $H_{loc}^1(\Omega)$. Nous notons \mathbf{n}^∞ sa limite dans H_{loc}^1 . Sur chaque $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$, (\mathbf{n}^j) converge fortement dans L^2 vers \mathbf{n}^∞ et donc (\mathbf{n}^j) converge ponctuellement vers \mathbf{n}^∞ quitte à extraire une sous-suite. On en déduit que $\|\mathbf{n}^\infty\| = 1$ presque partout. ■

Nous pouvons observer que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi, \mathbf{n}) = & \int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx - \frac{\kappa^2}{2}|\Omega| + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega} (|\psi|^2 - 1)^2 dx \\ & + K_1 \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 dx + K_2 \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{n} + \tau\mathbf{n}|^2 dx. \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

En posant

$$\tilde{g}(q, \tau, \kappa) = g(q, \tau, \kappa) + \frac{\kappa^2|\Omega|}{2},$$

et en appliquant le Lemme 1.5.1, on obtient pour toute suite minimisante (ψ^j, \mathbf{n}^j) de \mathcal{F} les majorations suivantes :

$$\int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{n}^j + \tau\mathbf{n}^j|^2 dx \leq \frac{\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{K_2}, \quad (7.1.2)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{n}^j)^2 dx \leq \frac{\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{K_1}, \quad (7.1.3)$$

$$\int_{\Omega} (|\psi^j|^2 - 1)^2 dx \leq \frac{2\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{\kappa^2}, \quad (7.1.4)$$

$$\int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n}^j)\psi^j|^2 dx \leq \tilde{g}(q, \tau, \kappa). \quad (7.1.5)$$

Ces remarques nous permettent désormais de prouver l'existence des minimiseurs. Soit (ψ^j, \mathbf{n}^j) une suite minimisante pour \mathcal{F} . Des inégalités (7.1.2) et (7.1.3), on déduit que (\mathbf{n}^j) est bornée dans $H_{loc}^1(\Omega)$ et par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (\mathbf{n}^j) converge faiblement dans $H_{loc}^1(\Omega)$ vers un certain élément $\mathbf{n}^\infty \in V(\Omega, \mathbb{S}^2)$. En outre (ψ^j) est borné dans $H^1(\Omega)$ et on peut donc considérer que (ψ^j) converge faiblement dans $H^1(\Omega)$.

vers ψ^∞ .

Nous disposons seulement d'une convergence de (\mathbf{n}^j) dans $H_{loc}^1(\Omega)$, ainsi, pour $\epsilon > 0$, nous posons :

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\},$$

et alors (\mathbf{n}^j) converge faiblement dans $H^1(\Omega_\epsilon)$. Nous écrivons alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi^j, \mathbf{n}^j) &\geq \int_{\Omega_\epsilon} |(i\nabla + q\mathbf{n}^j)\psi^j|^2 dx - \frac{\kappa^2}{2}|\Omega| + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega_\epsilon} (|\psi^j|^2 - 1)^2 dx \quad (7.1.6) \\ &\quad + K_1 \int_{\Omega_\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{n}^j)^2 dx + K_2 \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla \times \mathbf{n}^j + \tau \mathbf{n}^j|^2 dx. \end{aligned}$$

Nous remarquons aussitôt que $\psi^j \mathbf{n}^j$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $\psi^\infty \mathbf{n}^\infty$. En effet, nous avons d'abord :

$$\psi^j \mathbf{n}^j - \psi^\infty \mathbf{n}^\infty = \psi^\infty (\mathbf{n}^j - \mathbf{n}^\infty) + (\psi^j - \psi^\infty) \mathbf{n}^j.$$

Puis, nous notons que le premier terme converge faiblement vers 0 et que le second converge fortement vers 0 (\mathbf{n}^j est borné par 1). Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\psi^j, \mathbf{n}^j) &\geq \int_{\Omega_\epsilon} |(i\nabla + q\mathbf{n}^\infty)\psi^\infty|^2 dx - \frac{\kappa^2}{2}|\Omega| + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega_\epsilon} (|\psi^\infty|^2 - 1)^2 dx \quad (7.1.7) \\ &\quad + K_1 \int_{\Omega_\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{n}^\infty)^2 dx + K_2 \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla \times \mathbf{n}^\infty + \tau \mathbf{n}^\infty|^2 dx. \end{aligned}$$

Ainsi, il ne nous reste plus qu'à faire tendre ϵ vers 0 et l'existence des minimiseurs en découle.

Nous sommes à présent amenés à nous interroger sur les équations d'Euler-Lagrange que ces minimiseurs satisfont. De plus, rappelons que, si (ψ, \mathbf{n}) est un minimiseur de \mathcal{F} (voir [DGP92] et [FH09, Section 11.3]) :

$$\|\psi\|_\infty \leq 1. \quad (7.1.8)$$

7.2 Équations d'Euler-Lagrange

Le but de cette section est de mettre en évidence qu'on ne peut pas a priori déduire des équations d'Euler-Lagrange un contrôle explicite des minimiseurs même sous l'hypothèse simplificatrice $K_1 = K_2$. Plus précisément, nous nous intéressons à l'équation obtenue après différentiation par rapport à \mathbf{n} satisfaite par chaque minimiseur (ψ, \mathbf{n}) de \mathcal{F} (cf. [Pan03]) :

$$\langle T, \mathbf{u} \rangle = 0 \text{ pour tout } \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ t.q. } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (7.2.9)$$

où

$$T = -K_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{n}) + K_2(\nabla \times \cdot + \tau \cdot)^2 \mathbf{n} - 2q\mathfrak{I}(\bar{\psi} \nabla \psi).$$

On utilise l'identité suivante :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) = -\Delta \mathbf{n} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{n})$$

et on trouve :

$$T = (K_2 - K_1) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{n}) + K_2(-\Delta \mathbf{n} + 2\tau \nabla \times \mathbf{n} + \tau^2 \mathbf{n}) - 2q\mathfrak{I}(\bar{\psi} \nabla \psi).$$

Comme $\mathbf{n} \in H^1(\Omega)$, nous obtenons immédiatement que $\Delta \mathbf{n} \in H^{-1}(\Omega)$ et $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{n}) \in H^{-1}(\Omega)$. De plus, comme $\mathbf{n} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ et $\|\psi\|_\infty \leq 1$, nous remarquons que $T \in H^{-1}(\Omega)$ et ainsi, nous sommes en mesure de définir les produits de distributions $T \cdot \mathbf{n}$ et $T \times \mathbf{n}$ comme suit.

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, nous posons :

$$\langle T \times \mathbf{n}, \psi \rangle = \langle T, \mathbf{n} \times \psi \rangle,$$

$$\langle T \cdot \mathbf{n}, \phi \rangle = \langle T, \phi \mathbf{n} \rangle.$$

En outre, ces deux distributions peuvent être étendues en des formes continues sur $H_0^1(\Omega)$.

Lemme 7.2.1 *Au sens des distributions, nous avons*

$$-\Delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = |\nabla \mathbf{n}|^2.$$

Preuve.

Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. On a :

$$\langle -\Delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle -\Delta n_i, \psi n_i \rangle.$$

Ensuite, on obtient :

$$\sum_{i=1}^3 \langle -\Delta n_i, \psi n_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 n_i \nabla n_i, \nabla \psi \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^3 |\nabla n_i|^2, \psi \right\rangle.$$

Après différentiation de $|\mathbf{n}|^2 = 1$, nous observons que le premier terme est nul et la conclusion s'ensuit. ■

Lemme 7.2.2 *Soit S un élément de $H^{-1}(\Omega)$. Si $S \cdot \mathbf{n} = 0$ et $S \times \mathbf{n} = 0$, alors $S = 0$.*

Preuve.

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$, nous avons l'identité suivante (formule du double produit extérieur) provenant du fait que $|\mathbf{n}|^2 = 1$:

$$\psi = \mathbf{n} \times (\psi \times \mathbf{n}) + (\psi \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Nous notons que $\psi \times \mathbf{n} \in H^1(\Omega)$ et $\psi \cdot \mathbf{n} \in H^1(\Omega)$. Ainsi, nous trouvons : $\langle S, \psi \rangle = 0$.

■

Proposition 7.2.3 *Si $K_1 = K_2$, alors $T \cdot \mathbf{n} \in L^1(\Omega)$ et $T = (T \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.*

Preuve.

La première affirmation vient du Lemme 7.2, et de la propriété que $\nabla \times \mathbf{n} \in L^2(\Omega)$ et $|\nabla \mathbf{n}|^2 \in L^1(\Omega)$. Prouvons la seconde.

On peut désormais définir : $\tilde{T} = (T \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. On pose $S = T - \tilde{T}$. Alors, S satisfait les hypothèses du Lemme 7.2.2 car, il suffit de prendre $\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ dans (7.2.9) et donc $S = 0$.

■

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 7.2.4 *Lorsque $K_1 = K_2$, il existe une fonction $\lambda \in L^1(\Omega)$ telle que l'équation (7.2.9) est équivalente à :*

$$-\Delta \mathbf{n} + 2\tau \nabla \times \mathbf{n} - 2q \mathfrak{S}(\bar{\psi} \nabla \psi) = \lambda \mathbf{n}, \text{ in } \Omega. \quad (7.2.10)$$

En particulier, $\Delta \mathbf{n} \in L^1(\Omega)$.

En conséquence, cela ne semble pas suffire pour établir un contrôle elliptique des minimiseurs. En fait, on peut prouver que les minimiseurs sont \mathcal{C}^∞ presque partout dans $\overline{\Omega}$ (voir [HKL86]).

7.3 Nématicité des minimiseurs

Le régime qui nous intéresse est $\kappa^2 \leq \mu^*(q, \tau)$ et c'est la preuve du Théorème 1.5.6 qui nous occupera dans cette section.

Cas où $\kappa = 0$

Décrivons brièvement ce qui arrive dans le cas extrême où $\kappa = 0$. La fonctionnelle devient :

$$\mathcal{F}(\psi, \mathbf{n}) = \int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx + K_1 \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 dx + K_2 \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{n} + \tau\mathbf{n}|^2 dx.$$

Clairement, les phases $(0, \mathbf{n})$, avec $\mathbf{n} \in \mathcal{C}(\tau)$ sont des minimiseurs de \mathcal{F} avec une énergie nulle. Qui plus est, si (ψ, \mathbf{n}) est un minimiseur de \mathcal{F} , cela implique que :

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ et } \nabla \times \mathbf{n} + \tau\mathbf{n} = 0$$

et donc $\mathbf{n} \in \mathcal{C}(\tau)$. En outre, nous avons

$$\int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx = 0$$

ce qui fournit, par l'inégalité diamagnétique : $\int_{\Omega} |\nabla|\psi||^2 dx = 0$; de là on tire que $|\psi|$ est constante (égale à c). Si $c \neq 0$, on écrit $\psi = ce^{i\phi}$, on trouve $q\mathbf{n} = \nabla\phi$ et alors $\nabla \times \mathbf{n} = 0 = -\tau\mathbf{n}$ ce qui constitue une contradiction. Rassemblant toutes ces remarques, nous déduisons :

Proposition 7.3.1 *Lorsque $\kappa = 0$, l'ensemble des minimiseurs de \mathcal{F} est \mathcal{N}_{τ} (cf. (1.5.38)).*

Preuve du Théorème 1.5.6

Ce qui suit s'inspire de [BCLP02]. Nous montrons dans ce paragraphe que, si K_1 et K_2 sont assez "grands", alors, les minimiseurs sont des phases nématiques.

La proposition suivante concerne le comportement du champ de vecteurs directeurs des minimiseurs quand K_2 est grand.

Proposition 7.3.2 *Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tous $\kappa \neq 0$, $\tau > 0$ et $K_1^0 > 0$, il existe $\Pi(\kappa, \tau, K_1^0) > 0$ tel que pour tous $K_1 \geq K_1^0$, $K_2 \geq \Pi$, $q > 0$, et pour tout (ψ, \mathbf{n}) minimiseur de \mathcal{F} , il existe $\tilde{\mathbf{n}} \in \mathcal{C}(\tau)$ tel que :*

$$\|\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}\|_{L^4(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Preuve.

La preuve suit de (7.1.2), (7.1.3) et de [HP08a, Lemma 3.4].

■

Nous nous servirons aussi du lemme suivant :

Lemme 7.3.3 *Pour tout minimiseur (ψ, \mathbf{n}) de \mathcal{F} (ou \mathcal{F}^{Dir}), nous avons :*

$$\int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx \leq \kappa^2 \int_{\Omega} |\psi|^2 dx.$$

Preuve.

Si $\psi = 0$, c'est trivial. Si $\psi \neq 0$ et si l'inégalité inverse était vraie, nous déduirions que $0 \geq \mathcal{F}(\psi, \mathbf{n}) > 0$ et ce serait une contradiction. ■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 1.5.6. Soit (ψ, \mathbf{n}) un minimiseur de \mathcal{F} . Nous écrivons, pour un certain $\tilde{\mathbf{n}}$ qui sera choisi ultérieurement :

$$\begin{aligned} \|(i\nabla + q\mathbf{n})\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \|(i\nabla + q\tilde{\mathbf{n}})\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - 2q\|(i\nabla + q\tilde{\mathbf{n}})\psi\|_{L^2(\Omega)}\|(\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}})\psi\|_{L^2(\Omega)} + q^2\|(\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}})\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De plus, nous avons :

$$\|(\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}})\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}\|_{L^4(\Omega)}\|\psi\|_{L^4(\Omega)}.$$

Nous en déduisons, avec le Lemme 7.3.3, que :

$$\begin{aligned} \kappa^2\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \mu^*(q, \tau)\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - 2q\kappa\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}\|_{L^4(\Omega)} - q^2\|\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}\|_{L^4(\Omega)}^2\|\psi\|_{L^4(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par l'injection de Sobolev, nous avons d'abord :

$$\|\psi\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\psi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ensuite, l'inégalité diamagnétique fournit :

$$\|\nabla|\psi|\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(i\nabla + q\mathbf{n})\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \kappa\|\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, nous trouvons :

$$\|\psi\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega)(1 + \kappa)\|\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'absurde, supposons que $\psi \neq 0$; nous en déduisons que :

$$\kappa^2 - \mu^*(q, \tau) + 2C(\Omega)q\kappa(1 + \kappa)\|\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}\|_{L^4(\Omega)} + C(\Omega)^2q^2(1 + \kappa)^2\|\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}\|_{L^4(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Nous portons alors notre attention sur le trinôme du second degré qui apparaît et nous obtenons que, pour un certain $C(\Omega) > 0$, si

$$\|\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega) \frac{-q\kappa(1 + \kappa) + \sqrt{q^2\kappa^2(1 + \kappa)^2 + q^2(1 + \kappa)^2(\mu^*(q, \tau) - \kappa^2)}}{q^2(1 + \kappa)^2}$$

alors une contradiction s'ensuit.

Ainsi, choisissant $\epsilon > 0$ tel que :

$$\epsilon < C(\Omega) \frac{-q\kappa(1+\kappa) + \sqrt{q^2\kappa^2(1+\kappa)^2 + q^2(1+\kappa)^2(\mu^*(q, \tau) - \kappa^2)}}{q^2(1+\kappa)^2},$$

et comme $\tilde{\mathbf{n}}$ le champ fourni par la Proposition 7.3.2, nous avons prouvé le Théorème 1.5.6.

Chapitre 8

Étude asymptotique de \mathcal{F}^{Dir}

L'objet de ce chapitre est de prouver l'estimation d'énergie du Théorème 1.5.7 et d'établir le Théorème 1.5.8. Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction et l'avons observé dans le chapitre précédent, il n'est pas raisonnable, a priori, d'espérer utiliser les équations d'Euler-Lagrange pour obtenir directement une information sur la convergence des minimiseurs. Nous allons pallier à cela à l'aide de considérations spectrales en introduisant l'opérateur T_τ .

8.1 Préliminaires à l'étude de \mathcal{F}^{Dir}

8.1.1 Trace des éléments de $V(\Omega, \mathbb{S}^2)$

Dans cette section, nous rappelons comment on peut définir la trace d'un élément de L^2 dont la divergence et le rotationnel sont aussi dans L^2 (cf. [GR86]). Ainsi, \mathcal{F}^{Dir} sera correctement définie. Nous commençons par un lemme de densité (qu'on peut prouver par troncature et régularisation) :

Lemme 8.1.1 *Nous posons :*

$$V = \{\mathbf{n} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \nabla \cdot \mathbf{n} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2), \nabla \times \mathbf{n} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)\},$$

et pour $\mathbf{n} \in V$, nous définissons la norme :

$$\|\mathbf{n}\|_V^2 = \|\mathbf{n}\|_2^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{n}\|_2^2 + \|\nabla \times \mathbf{n}\|_2^2.$$

Alors, $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert dont $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ constitue un sous-espace dense.

La proposition suivante permet de définir la trace d'un élément de V :

Proposition 8.1.2 *Considérons $\mathbf{n} \in V$. Alors, la trace de \mathbf{n} sur $\partial\Omega$ est convenablement définie comme élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$.*

Preuve.

La preuve est standard (cf. [GR86]) mais nous la rappelons pour plus de précision. Nous supposons d'abord que $\mathbf{n} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Rappelons quelques formules ; pour tous $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$:

$$\langle \mathbf{n}, \nabla \phi \rangle = -\langle \nabla \cdot \mathbf{n}, \phi \rangle - \langle \mathbf{n} \cdot \nu, \phi|_{\partial\Omega} \rangle, \quad (8.1.1)$$

$$\langle \nabla \times \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{n} \times \nu, \mathbf{u}|_{\partial\Omega} \rangle, \quad (8.1.2)$$

Alors, (8.1.1) et (8.1.2) entraînent que les applications :

$$\phi \mapsto \langle \mathbf{n} \cdot \nu, \phi|_{\partial\Omega} \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{n} \times \nu, \mathbf{u}|_{\partial\Omega} \rangle$$

peuvent être prolongées en des formes linéaires continues respectivement sur $H^1(\Omega, \mathbb{C})$ et $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Ensuite, comme le bord $\partial\Omega$ est régulier, il existe une application continue de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (respectivement $H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$) vers $H^1(\Omega)$ (respectivement $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$) noté T tel que pour tout $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $F = Tf$ satisfait $F|_{\partial\Omega} = f$.

Il suit du précédent lemme que, quand $\mathbf{n} \in V$, nous pouvons définir :

$$\mathbf{n} \cdot \nu \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \times \nu \in H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Dans le cas où \mathbf{n} est régulier, par la formule du double produit extérieur, nous avons sur $\partial\Omega$:

$$\mathbf{n} = \nu \times (\mathbf{n} \times \nu) + (\mathbf{n} \cdot \nu)\nu.$$

Ainsi, par densité, la trace de \mathbf{n} sur $\partial\Omega$ se trouve bien définie comme élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$ quand $\mathbf{n} \in V$:

$$\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nu \times (\mathbf{n} \times \nu) + (\mathbf{n} \cdot \nu)\nu.$$

■

8.1.2 Existence des minimiseurs de \mathcal{F}^{Dir}

En utilisant [GR86, Lemma 3.6], nous déduisons que :

$$\mathcal{V}^\tau(\Omega) \subset H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H^1(\Omega, \mathbb{S}^2).$$

Énonçons maintenant un lemme concernant l'ensemble de minimisation :

Lemme 8.1.3 *Le sous-espace $\mathcal{V}^\tau(\Omega)$ est faiblement compact dans $H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$.*

Preuve.

Il est suffisant de prouver que $V^\tau(\Omega, \mathbb{S}^2)$ est faiblement compact dans $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$. Soit (\mathbf{n}^j) une suite faiblement convergente dans $V^\tau(\Omega, \mathbb{S}^2)$; nous notons \mathbf{n}^∞ sa limite. Par injection compacte, nous concluons qu'il existe une sous-suite telle que \mathbf{n}^j converge fortement vers \mathbf{n}^∞ dans $L^2(\Omega)$ et donc \mathbf{n}^j converge ponctuellement vers \mathbf{n}^∞ quitte à extraire une sous-suite. Ainsi, nous avons $|\mathbf{n}^\infty| = 1$. Remarquons que la trace de \mathbf{n}^∞ sur $\partial\Omega$ est bien définie comme élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, nous pouvons écrire : $\mathbf{n}^j_{|\partial\Omega} = \mathbf{n}^{Q^j}_\tau_{|\partial\Omega}$ pour un certain $Q^j \in SO(3)$. Quitte à extraire encore une sous-suite, nous pouvons requérir que Q^j tende vers $Q^\infty \in SO(3)$. Par conséquent, nous obtenons la convergence uniforme de $\mathbf{n}^j_{|\partial\Omega}$ vers $\mathbf{n}^{Q^\infty}_\tau_{|\partial\Omega}$.

■

Nous sommes désormais en mesure de prouver l'existence des minimiseurs. Nous observons d'abord que (7.1.2), (7.1.3), (7.1.4), (7.1.5) et (7.1.8) sont toujours valables et donc, toute suite minimisante (ψ^j, \mathbf{n}^j) est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$. Avec le lemme précédent et après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que (ψ^j, \mathbf{n}^j) converge vers $(\psi^\infty, \mathbf{n}^\infty) \in \mathcal{V}^\tau(\Omega)$ et la conclusion est standard.

Remarque 8.1.4.

Nous pouvons remarquer que $W(\Omega) \subset \mathcal{V}^\tau(\Omega)$ et ainsi le Lemme 1.5.1 et les inégalités (7.1.2), (7.1.3), (7.1.4) et (7.1.5) demeurent pour \mathcal{F}^{Dir} .

■

8.1.3 Un peu de théorie spectrale

Nous introduisons et étudions dans cette section un opérateur important : T_τ .

Injectivité de T_τ

Nous notons $\sigma(-\Delta^D)$ le spectre du laplacien de Dirichlet $-\Delta^D$ sur Ω et nous supposons que :

$$\tau^2 \notin \sigma(-\Delta^D). \quad (8.1.3)$$

Nous définissons alors la forme quadratique sur $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ suivante :

$$Q_\tau(u) = \|\nabla \cdot u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times u + \tau u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'opérateur associé, de domaine $H^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, est noté T_τ et peut s'écrire ainsi :

$$T_\tau = -\Delta + 2\tau \nabla \times + \tau^2, \quad (8.1.4)$$

Sa plus petite valeur propre est notée μ_τ^1 et par le principe du mini-max, nous avons :

$$Q_\tau(u) \geq \mu_\tau^1 \|u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad (8.1.5)$$

Comme T_τ est elliptique d'ordre 2, la proposition suivante est vérifiée :

Proposition 8.1.5 *Si $T_\tau u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.*

De là, il vient :

$$\|T_\tau u\|_{L^2} \geq \mu_\tau^1 \|u\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ t.q. } T_\tau u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Lemme 8.1.6 *Si (8.1.3) est satisfaite, alors $\mu_\tau^1 > 0$ et T_τ est injective.*

Preuve.

Si $\mu_\tau^1 = 0$, alors, nous en déduisons immédiatement que la fonction propre correspondante u satisfait :

$$\nabla \cdot u = 0 \text{ et } \nabla \times u + \tau u = 0. \quad (8.1.6)$$

Prenant le rotationnel de la seconde équation dans (8.1.6) et utilisant la première, nous tirons :

$$-\Delta u - \tau^2 u = 0.$$

Avec l'hypothèse (8.1.3), on obtiendrait $u = 0$ et cela serait contradictoire. ■

On peut à présent reformuler (8.1.5) en énonçant la proposition :

Proposition 8.1.7 (Contrôle de $\|u\|_{L^2(\Omega)}$)

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, nous avons :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\mu_\tau^1} \left(\|\nabla \cdot u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times u + \tau u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

En fait, on dispose aussi d'un contrôle en norme $H^1(\Omega)$:

Proposition 8.1.8 (Contrôle de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$)

Il existe $C(\Omega) > 0$ tel que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\Omega) \left(1 + \frac{\tau^2}{\mu_\tau^1} \right) \left(\|\nabla \cdot u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times u + \tau u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Preuve.

En conséquence de la formule du double rotationnel $-\Delta + \nabla(\nabla \cdot) = \nabla \times \nabla \times$, nous avons :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla \cdot u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De plus, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\nabla \times u + \tau u\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\tau \langle \nabla \times u, u \rangle - \tau^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq Q_\tau(u) + 2\tau \|\nabla \times u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} - \tau^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq Q_\tau(u) + 2\tau \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} - \tau^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\gamma > 0$, nous pouvons écrire :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Q_\tau(u) + \tau \left(\gamma \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \tau^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pour $\tau > 0$, nous posons $\gamma = \frac{1}{2\tau}$ et en déduisons :

$$\frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Q_\tau(u) + \frac{\tau^2}{\mu_\tau^1} Q_\tau(u).$$

■

Minoration de μ_τ^1

On souhaite maintenant établir une minoration de μ_τ^1 . À cette fin, considérons u_τ^1 une fonction propre L^2 -normalisée de T_τ associée à μ_τ^1 . Nous obtenons :

$$\|\nabla \cdot u_\tau^1\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times u_\tau^1 + \tau u_\tau^1\|_{L^2}^2 = \mu_\tau^1.$$

Par suite, on a :

$$\|\nabla \times u_\tau^1 + \tau u_\tau^1\|_{L^2} \leq \sqrt{\mu_\tau^1}.$$

Un calcul facile nous fournit :

$$-\Delta - \tau^2 = (\nabla \times + \tau)^2 - \nabla(\nabla \cdot) - 2\tau(\nabla \times + \tau) = T_\tau - 2\tau(\nabla \times + \tau).$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$(-\Delta - \tau^2)u_\tau^1 = \mu_\tau u_\tau^1 - 2\tau(\nabla \times u_\tau^1 + \tau u_\tau^1).$$

Nous appliquons le théorème spectral pour écrire :

$$d(\tau^2, \sigma(-\Delta^D)) \leq \|(-\Delta - \tau^2)u_\tau^1\|_{L^2}.$$

Il s'ensuit que :

$$\mu_\tau^1 + 2\tau\sqrt{\mu_\tau^1} - d(\tau^2, \sigma(-\Delta^D)) \geq 0.$$

Ainsi, nous avons prouvé la proposition suivante :

Proposition 8.1.9 *On a :*

$$\mu_\tau^1 \geq -\tau + \sqrt{\tau^2 + d(\tau^2, \sigma(-\Delta^D))}.$$

La proposition qui suit nous informe du comportement de μ_τ^1 quand τ tend vers 0.

Proposition 8.1.10 *Notant λ_1^D la plus petite valeur propre du laplacien de Dirichlet, nous avons :*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mu_\tau^1 = \lambda_1^D.$$

Preuve.

On considère ψ_0 une fonction propre L^2 -normalisée associée à λ_1^D .

$$Q_\tau(\psi_0) = \|\nabla \psi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\tau \int_\Omega \psi_0 \cdot \nabla \times \psi_0 dx + \tau^2 \leq \lambda_1^D + 2\tau \sqrt{\lambda_1^D} + \tau^2.$$

Par suite, on déduit :

$$\mu_\tau^1 \leq \lambda_1^D + 2\tau \sqrt{\lambda_1^D} + \tau^2.$$

En outre, nous avons observé dans les lignes qui précèdent que :

$$\mu_\tau^1 \geq -2\tau \sqrt{\mu_\tau^1} + d(\tau^2, \sigma(-\Delta^D)).$$

Mais, pour $\tau < \lambda_1^D$, nous constatons que : $d(\tau^2, \sigma(-\Delta^D)) = \lambda_1^D - \tau^2$ et donc, le résultat annoncé est prouvé. ■

8.2 Régime $K_1, K_2 \rightarrow \infty$ pour \mathcal{F}^{Dir}

8.2.1 Estimation d'énergie : preuve du Théorème 1.5.7

Soit (ψ, \mathbf{n}) un minimiseur de \mathcal{F}^{Dir} . Par définition du domaine de la fonctionnelle \mathcal{F}^{Dir} , il existe \mathbf{n}_τ^Q tel que $\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{n}_\tau^Q|_{\partial\Omega}$. Ensuite, nous obtenons à l'aide de la Proposition 8.1.7 :

$$\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\mu_\tau^1} \left(\|\nabla \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times (\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q) + \tau(\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Nous en déduisons :

$$\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\mu_\tau^1} \left(\|\nabla \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times \mathbf{n} + \tau \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Par (7.1.2) et (7.1.3), nous avons :

$$\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\mu_\tau^1} \left(\frac{\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{K_1} + \frac{\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{K_2} \right) \leq \frac{2\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{\min(K_1, K_2)\mu_\tau^1}.$$

De plus, on peut écrire :

$$\mathcal{F}^{Dir}(\psi, \mathbf{n}) \geq \mathcal{F}(\psi, \mathbf{n}_\tau^Q) - 2q \|(i\nabla + q\mathbf{n}_\tau^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)} \|(\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)} + q^2 \|(\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a trivialement :

$$\|(i\nabla + q\mathbf{n}_\tau^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(i\nabla + q\mathbf{n})\psi\|_{L^2(\Omega)} + q\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{L^2(\Omega)}.$$

En outre, nous rappelons que $\|\psi\|_\infty \leq 1$ et nous appliquons le Lemme 7.3.3 pour conclure que :

$$\mathcal{F}^{Dir}(\psi, \mathbf{n}) \geq g(q, \tau, \kappa) - 2q\kappa|\Omega|^{1/2}\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{L^2(\Omega)} - q^2\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et le Théorème 1.5.7 est démontré, avec

$$c_1(q, \tau, \kappa) = q\kappa \left(\frac{2\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{K\mu_\tau^1} \right)^{1/2} \text{ et } c_2(q, \tau, \kappa) = \frac{2|\Omega|q^2\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{K\mu_\tau^1}. \quad (8.2.7)$$

Conjugant ce résultat avec [HP08b, Theorem 7.5] et la Proposition 8.1.10, nous déduisons l'estimation suivante lorsque τ tend vers 0 :

Proposition 8.2.1 *Pour tout $q_0, \kappa_0 > 0$ et $c_0 > 0$, il existe $C(q_0, \kappa_0, c_0) > 0$ et $\tau_0 > 0$, si $(K_1, K_2, q, \tau, \kappa)$ satisfait $0 \leq q \leq q_0$, $0 \leq \kappa \leq \kappa_0$, $0 \leq \tau \leq \tau_0$ et $K_1, K_2 \geq c_0$, alors*

$$\left| \mathcal{E}^{Dir}(K_1, K_2, q, \tau, \kappa) + \frac{\kappa^2|\Omega|}{2} \right| \leq C(q_0, \kappa_0, c_0)\tau.$$

8.2.2 Nématocité/Smecticité des minimiseurs

Dans cette section nous établissons la preuve du Théorème 1.5.8.

Smecticité pour $\kappa^2 > \mu^*(q, \tau)$

En conséquence du Lemme 1.5.1, nous constatons que, sans condition sur K_1 ou K_2 , nous avons :

$$\mathcal{E}^{Dir}(K_1, K_2, q, \tau, \kappa) < 0.$$

Il s'ensuit que, dans ce cas, les minimiseurs (ψ, \mathbf{n}) sont des phases smectiques. C'est le régime inverse qui va désormais occuper notre attention.

Nématicité pour $\kappa^2 < \mu^*(q, \tau)$: preuve de Théorème 1.5.8

Soit (ψ, \mathbf{n}) un minimiseur de \mathcal{F}^{Dir} . Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx &\geq \|(i\nabla + q\mathbf{n}_{\tau}^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - 2q\|(i\nabla + q\mathbf{n}_{\tau}^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)}\|(\mathbf{n} - \mathbf{n}_{\tau}^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)} + q^2\|(\mathbf{n} - \mathbf{n}_{\tau}^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Avec le Lemme 7.3.3, nous observons que :

$$\begin{aligned} \|(i\nabla + q\mathbf{n}_{\tau}^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|(i\nabla + q\mathbf{n})\psi\|_{L^2(\Omega)} + q\|(\mathbf{n} - \mathbf{n}_{\tau}^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \kappa\|\psi\|_{L^2(\Omega)} + q\|(\mathbf{n} - \mathbf{n}_{\tau}^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par suite, l'analyse est exactement la même qu'en Section 7.3 et, si $\psi \neq 0$, cela conduit à :

$$\kappa^2 - \mu^*(q, \tau) + 2C(\Omega)q\kappa(1+\kappa)\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_{\tau}^Q\|_{H^1(\Omega)} + C(\Omega)^2q^2(1+\kappa)^2\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_{\tau}^Q\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Mais, nous pouvons écrire à l'aide de la Proposition 8.1.8 :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n} - \mathbf{n}_{\tau}^Q\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C(\Omega) \left(1 + \frac{\tau^2}{\mu_{\tau}^1}\right) \left(\|\nabla \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times \mathbf{n} + \tau\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\ &\leq C(\Omega) \left(1 + \frac{\tau^2}{\mu_{\tau}^1}\right) \left(\frac{2\tilde{g}(q, \tau, \kappa)}{K}\right), \end{aligned}$$

où $K = \min(K_1, K_2)$. Considérant le trinôme du second degré qui apparaît, nous trouvons que, pour un certain $C(\Omega) > 0$, si

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \leq C(\Omega) \frac{\sqrt{\mu^*(q, \tau)} - \kappa}{q(1+\kappa)\tilde{g}(q, \tau, \kappa)^{1/2} \left(1 + \frac{\tau^2}{\mu_{\tau}^1}\right)^{1/2}},$$

alors une contradiction découle et le Théorème 1.5.8 est prouvé.

Cas où $\kappa^2 = \mu^*(q, \tau)$

Le lemme suivant est une conséquence des équations d'Euler-Lagrange :

Lemme 8.2.2 *Pour tout (ψ, \mathbf{n}) minimiseur de \mathcal{F}^{Dir} , nous avons :*

$$\int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx = \kappa^2 \left(\int_{\Omega} |\psi|^2 dx - \int_{\Omega} |\psi|^4 dx \right).$$

Ainsi, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \kappa^2(\|\psi\|_{L^2}^2 - \|\psi\|_{L^4}^4) &\geq \|(i\nabla + q\mathbf{n}_\tau^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - 2q\|(i\nabla + q\mathbf{n}_\tau^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)}\|(\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)} + q^2\|(\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q)\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$-\kappa^2\|\psi\|_{L^4}^4 + 2q\kappa\|\psi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^4}\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{H^1(\Omega)} + q^2\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{H^1(\Omega)}^2\|\psi\|_{L^4}^2 \geq 0.$$

Remarquant que $\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2}\|\psi\|_{L^4(\Omega)}$ et supposant que $\psi \neq 0$, nous tirons :

$$\|\psi\|_{L^4}^2 \leq \frac{2q\kappa|\Omega|^{1/2} + q^2\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{H^1(\Omega)}}{\kappa^2}\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_\tau^Q\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par conséquent, la proposition suivante est prouvée :

Proposition 8.2.3 *Il existe $C(\Omega) > 0$ tel que pour tout (q, τ, κ) satisfaisant $\kappa^2 = \mu^*(q, \tau)$ et (8.1.3), il existe $c_4(q, \tau, \kappa) > 0$ t.q on a pour chaque minimiseur (ψ, \mathbf{n}) de \mathcal{F}^{Dir} :*

$$\|\psi\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega) \frac{c_4(q, \tau, \kappa)}{K^{1/4}},$$

où

$$c_4(q, \tau, \kappa) = \frac{q^{1/2}\tilde{g}(q, \tau, \kappa)^{1/4}}{\kappa^{1/2}} \left(1 + \frac{\tau^2}{\mu_\tau^1}\right)^{1/4}.$$

Annexe A

Étude du bas du spectre de la famille $\mathfrak{h}(\sigma, B)$

On va appliquer le même genre d'analyse que dans [FH09, Chapter 6, Prop 6.2.1] ou dans [HM01, Section 11] afin d'étudier un opérateur modèle important.

On fixe $\eta \in]0, \frac{1}{100}[$ et on introduit une fonction troncature régulière qui vérifie :

$$\chi(t) = 1, \text{ pour } |t| \leq 1, 0 \leq \chi \leq 1, \text{ et } \text{supp}\chi \subset [-2, 2].$$

On définit

$$l = l(t) := t\chi(2B^{-\eta}t).$$

On observe que :

$$l = t, \text{ si } t \leq \frac{B^\eta}{2},$$

$$l = 0, \text{ si } t \geq B^\eta$$

et que

$$0 \leq l \leq B^\eta.$$

On considère alors, pour $\sigma \in \mathbb{R}$, $k_0 \geq 0$, $k_1 \in \mathbb{R}$ et B assez grand la forme quadratique suivante, de domaine $B^1(\mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} q_{\eta, \sigma, B}(\phi) &= \int_0^{+\infty} \left(1 - k_0 \frac{l}{B^{1/2}}\right)^{-1} \left((t + \xi_0) + \sigma B^{-1/4} - k_1 \frac{t^2}{2B^{1/2}} \right)^2 |\phi(t)|^2 dt \\ &+ \int_0^{+\infty} \left(1 - k_0 \frac{l}{\sqrt{B}}\right) |\phi'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

L'opérateur associé sur l'espace $L^2((1 - \frac{k_0 t}{B^{1/2}})dt)$ est la réalisation de Neumann de :

$$\mathfrak{h}(\sigma, B) = -\left(1 - \frac{k_0 l}{B^{1/2}}\right)^{-1} \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{k_0 l}{B^{1/2}}\right) \frac{d}{dt} + \left(1 - \frac{k_0 l}{B^{1/2}}\right)^{-2} \left(t + \xi_0 + \frac{\sigma}{B^{1/4}} - k_1 \frac{l^2}{2B^{1/2}}\right)^2. \quad (\text{A.1})$$

On note $\lambda_j(\eta, \sigma, B)$ la suite croissante de ses valeurs propres.

Proposition A.4 *Soit $\eta \in]0, \frac{1}{100}[$. Il existe des constantes $C, c_0, M, B_0 > 0$ telles que, si $B \geq B_0$, alors :*

1. *Si $|\sigma| \geq MB^\eta$, alors :*

$$\lambda_1(\eta, \sigma, B) \geq \Theta_0 + c_0 \min(1, \sigma^2 B^{-1/2}). \quad (\text{A.2})$$

2. *Si $|\sigma| \leq MB^\eta$, alors $\lambda_1(\eta, \sigma, B)$ est la seule valeur propre strictement inférieure à 1 et elle satisfait :*

$$|\lambda_1(\eta, \sigma, B) - (\Theta_0 + \lambda_2 B^{-1/2})| \leq CB^{-3/4+3\eta}, \quad (\text{A.3})$$

où

$$\lambda_2 = \Theta_{1/2}^{k_0, k_1} + \frac{\mu''(\xi_0)}{2} \sigma^2. \quad (\text{A.4})$$

Preuve.

On va comparer la forme quadratique $q_{\eta, \sigma, B}$ à $q^{N, \xi}$ (voir la définition de l'oscillateur harmonique en (1.2.1)) et en tirer des conclusions sur le spectre des opérateurs associés. On remarque en premier lieu que :

$$q_{\eta, \sigma, B}(\phi) \geq (1 - B^{\eta-1/2}) \int_0^{+\infty} \left((t + \xi_0) + \sigma B^{-1/4} - k_1 \frac{t^2}{2B^{1/2}} \right)^2 |\phi(t)|^2 + |\phi'(t)|^2 dt.$$

On en déduit pour tout $\epsilon > 0$:

$$q_{\eta, \sigma, B}(\phi) \geq (1 - B^{\eta-1/2})(1 - \epsilon) q^{(N, \xi_0 + \sigma B^{-1/4})}(\phi) - C \frac{B^{-1+4\eta}}{\epsilon} \int_0^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt.$$

On optimise l'erreur en choisissant $\epsilon = B^{-1/2+2\eta}$:

$$q_{\eta, \sigma, B}(\phi) \geq (1 - CB^{2\eta-1/2}) q^{(N, \xi_0 + \sigma B^{-1/4})}(\phi) - CB^{2\eta-1/2} \int_0^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt.$$

On en déduit pour tout j :

$$\lambda_j(\eta, \sigma, B) \geq (1 - CB^{2\eta-1/2}) \mu_j(\xi_0 + \sigma B^{-1/4}) - CB^{2\eta-1/2} \quad (\text{A.5})$$

En traduisant que le minimum de μ_1 est non dégénéré, on voit qu'il existe $c_0 > 0$ tel que :

$$\mu(\xi) \geq \Theta_0 + c_0 \min(1, |\xi - \xi_0|^2).$$

On déduit :

$$\lambda_1(\eta, \sigma, B) \geq (1 - CB^{2\eta-1/2})(\Theta_0 + c_0 \min(1, \sigma^2 B^{-1/2})) - CB^{2\eta-1/2}.$$

De là, on déduit que pour M assez grand et quand $\sigma \geq MB^\eta$, l'inégalité (A.2) est vérifiée.

On prouve à présent (A.3). On suppose désormais que $|\sigma| \leq MB^\eta$. Commençons déjà par un petit lemme :

Lemme A.5 *Si $\mu_2(\xi)$ désigne la deuxième valeur propre de $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ défini en (1.2.1), alors :*

$$\mu_2(\xi) \geq 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.6})$$

Preuve.

Soit u_2 une fonction propre associée à $\mu_2(\xi)$ et orthogonale à u_ξ qui est strictement positive. u_2 admet au moins un zéro $x_2(\xi)$ dans \mathbb{R}_+ . Ainsi, en restreignant u_2 à $]x_2(\xi), +\infty[$, on obtient une fonction propre de la réalisation de Dirichlet de $-\frac{d^2}{dt^2} + (t+\xi)^2$ sur $]x_2(\xi), +\infty[$ et donc $\mu_2(\xi)$ est plus grand que la plus petite valeur propre de cet opérateur, qui par monotonie du problème de Dirichlet, est plus grande que la plus petite valeur propre de l'oscillateur harmonique sur \mathbb{R} qui vaut 1.

■

On prend $j \geq 2$ dans (A.5) et on applique le Lemme A.5 :

$$\lambda_j(\eta, \sigma, B) \geq 1 - CB^{2\eta-1/2}.$$

On va maintenant montrer qu'il existe une valeur propre qui tend vers Θ_0 (qui est strictement inférieur à 1) et ce sera donc $\lambda_1(\eta, \sigma, B)$. On écrit formellement :

$$\mathfrak{h}(\sigma, B) = \mathfrak{h}_0 + B^{-1/4}\mathfrak{h}_1 + B^{-1/2}\mathfrak{h}_2 + O(B^{-3/4+3\eta}),$$

où

$$\mathfrak{h}_0 = -\frac{d^2}{dt^2} + (t + \xi_0)^2,$$

$$\mathfrak{h}_1 = -2(t + \xi_0)\sigma,$$

$$\mathfrak{h}_2 = k_0 t \frac{d}{dt} - k_1 t^2 (t + \xi_0) + 2k_0 t (t + \xi_0)^2 + \sigma^2.$$

On cherche un développement d'une première fonction propre sous la forme :

$$\psi = \psi_0 + B^{-1/4}\psi_1 + B^{-1/2}\psi_2$$

et de la première valeur propre :

$$\lambda = \lambda_0 + B^{-1/4}\lambda_1 + B^{-1/2}\lambda_2.$$

Notons que nous avons remplacé dans le développement formel de l'opérateur l par t ; cela sera licite puisque $l \neq t$ lorsque $t \geq \frac{B^\eta}{2}$ et que dans ce domaine les fonctions ψ_j seront exponentiellement petites quand B tend vers l'infini. On est alors amené à résoudre le système :

$$\mathfrak{h}_0 u_0 = \lambda_0 u_0, \tag{A.7}$$

$$(\mathfrak{h}_0 - \lambda_0)u_1 = -\mathfrak{h}_1 u_0, \tag{A.8}$$

$$(\mathfrak{h}_0 - \lambda_0)u_2 = -\mathfrak{h}_1 u_1 - \mathfrak{h}_2 u_0. \tag{A.9}$$

La considération de (A.7) mène à choisir $u_0 = u_{\xi_0}$ et $\lambda_0 = \Theta_0$. On effectue ensuite le produit scalaire de (A.8) par u_0 et alors, comme $M_1 = 0$ (cf. 1.2.4), (A.8) admet des solutions si et seulement si $\lambda_1 = 0$. On prend donc $\lambda_1 = 0$ et on appelle u_1 l'unique solution de (A.8) telle que $\langle u_1, u_0 \rangle = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que (A.9) admette des solutions est encore que le second membre soit orthogonal à u_0 , ce qui mène, avec les formules (1.2.4) à choisir comme λ_2 celui qui a été annoncé en (A.4) et à prendre pour u_2 l'unique solution de (A.9) telle que : $\langle u_2, u_0 \rangle = 0$. Nous pouvons remarquer que tous les ψ_j sont dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$.

Un simple calcul utilisant la décroissance exponentielle des ψ_j nous donne :

$$\|(\mathfrak{h}(\sigma, B) - (\lambda_0 + \lambda_2 B^{-1/2}))\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+, (1 - \frac{k_0 l}{B^{1/2}})dt)} = O(B^{-3/4+3\eta}).$$

De plus, il est clair que

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+, (1 - \frac{k_0 l}{B^{1/2}})dt)} = 1 + O(B^{-1/4}).$$

C'est ainsi que le Théorème 1.4.3 fournit :

$$d(\lambda_0 + \lambda_2 B^{-1/2}, \sigma(\mathfrak{h}(\sigma, B))) = O(B^{-3/4+3\eta}).$$

Il y a donc une valeur propre strictement inférieure à 1 et son développement asymptotique est

$$\lambda_0 + \lambda_2 B^{-1/2} + O(B^{-3/4+3\eta}).$$

■

Annexe B

Estimation du troisième champ critique en théorie de la supraconductivité (dimension 2)

Dans cette Annexe, on donne une estimation du troisième champ critique de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau dans le cas où le champ magnétique appliqué, noté β , admet un unique minimum non dégénéré sur le bord de Ω . Le cas du champ constant a déjà été étudié en détails (voir [FH06b, LP99a, LP99b, LP00a]).

B.1 Définition de la fonctionnelle

La fonctionnelle de Ginzburg-Landau est définie par :

$$\mathcal{G}(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} \left\{ |(i\nabla + \sigma\kappa\mathbf{A})\psi|^2 - \kappa^2|\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}|\psi|^4 \right\} dx + (\kappa\sigma)^2 \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{A} - \beta|^2 dx,$$

pour $\psi \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$ and $\mathbf{A} \in H_{div}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ où

$$H_{div}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) = \{\mathbf{A} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(\mathbf{A}) = 0 \text{ in } \Omega, \mathbf{A} \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On suppose de plus que :

$$\beta = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Rappelons maintenant les définitions des champs critiques (dont le premier a été introduit dans [LP99b]) :

$$H_{C_3}(\kappa) = \inf\{\sigma > 0 : (0, \mathbf{F}) \text{ est l'unique minimiseur de } \mathcal{G}_{\kappa, \sigma}\},$$

$$\overline{H}_{C_3}(\kappa) = \inf\{\sigma > 0 : (0, \mathbf{F}) \text{ est l'unique minimiseur de } \mathcal{G}_{\kappa, \sigma'} \text{ pour tout } \sigma' > \sigma\},$$

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \inf\{\sigma > 0 : (0, \mathbf{F}) \text{ est un minimiseur de } \mathcal{G}_{\kappa, \sigma}\}$$

et

$$\overline{H}_{C_3}^{loc}(\kappa) = \sup\{\sigma > 0 \mid \lambda_1(\kappa\sigma, \mathbf{F}) < \kappa^2\}.$$

On a :

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) \leq H_{C_3}(\kappa) \leq \overline{H}_{C_3}(\kappa)$$

et

$$\overline{H}_{C_3}^{loc}(\kappa) \leq \overline{H}_{C_3}(\kappa).$$

On peut prouver le résultat suivant (cf. [FH09]) :

Théorème B.1.1 *Soit Ω un ouvert borné simplement connexe à bord régulier et supposons que le champ magnétique appliqué β satisfasse :*

$$0 < \Theta_0 b' < b.$$

Alors, il existe $\kappa_0 > 0$ tel que pour tout $\kappa \geq \kappa_0$:

$$\overline{H}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}_{C_3}^{loc}(\kappa).$$

De plus, si $B \mapsto \lambda_1(B, \mathbf{F})$ est strictement croissante pour B grand, alors tous les champs critiques coïncident pour κ grand et sont déterminés comme l'unique solution H de

$$\lambda_1(\kappa H, \mathbf{F}) = \kappa^2.$$

B.2 Estimée de $H_{C_3}(\kappa)$ pour κ grand

Nous montrons maintenant que $B \mapsto \lambda_1(B, \mathbf{F})$ est strictement croissante pour B grand (cf. [FH09, Theorem 9.5.1]) :

Théorème B.2.1 *Soit Ω un ouvert borné simplement connexe à bord régulier et supposons que le champ appliqué β possède un unique minimum non dégénéré sur $\partial\Omega$ et que :*

$$0 < \Theta_0 b' < b.$$

Alors

$$\lambda'_{1,+}(B) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_1(B + \epsilon) - \lambda_1(B)}{\epsilon}$$

et

$$\lambda'_{1,-}(B) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_1(B) - \lambda_1(B - \epsilon)}{\epsilon}$$

existent pour $B > 0$ et

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \lambda'_{1,+}(B) = \lim_{B \rightarrow +\infty} \lambda'_{1,-}(B) = \Theta_0.$$

En particulier, il existe $B_0 \geq 0$ tel que $B \mapsto \lambda_1(B, \mathbf{F})$ est strictement monotone pour $B \geq B_0$.

Pour prouver ce théorème nous aurons besoin du lemme suivant qui donne une jauge adéquate (la preuve peut être trouvée dans [FH09, Lemma 9.5.5] ; elle utilise juste la simple connexité de $\Omega(\epsilon)$ et les coordonnées introduites en Section 2.2.1) :

Lemme B.2.2 Soit $0 < \epsilon \leq \min(t_0/2, |\partial\Omega|/2)$. On définit :

$$\Omega(\epsilon) = \{x = \Phi(s, t) : 0 < t \leq \epsilon, |s| \geq \epsilon\}.$$

Il existe $\phi \in C^\infty(\Omega)$ telle que $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{F} + \nabla\phi$ satisfait pour tout $x \in \Omega(\epsilon)$:

$$|\hat{\mathbf{A}}(x)| \leq Ct(x).$$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème.

Preuve.

L'existence de $\lambda'_{1,+}(B)$ est une suite de la théorie des perturbations analytiques.

On considère l'opérateur $P_{B\hat{\mathbf{A}},\Omega}$ et pour un état fondamental $\psi_1^+(\cdot, B)$ de cet opérateur, on a :

$$\lambda'_{1,+}(B) = \langle \hat{\mathbf{A}}\psi_1^+(\cdot, B), i\nabla_{B\hat{\mathbf{A}}}\psi_1^+(\cdot, B) \rangle + \langle i\nabla_{B\hat{\mathbf{A}}}\psi_1^+(\cdot, B), \hat{\mathbf{A}}\psi_1^+(\cdot, B) \rangle.$$

Pour le voir, il suffit de dériver (cf. [Kat66]) :

$$P_{B\hat{\mathbf{A}},\Omega}\psi_1^+(\cdot, B) = \lambda_1(B)\psi_1^+(\cdot, B)$$

par rapport à B , de multiplier par $\psi_1^+(\cdot, B)$ et d'intégrer.

Pour tout $\nu > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda'_{1,+}(B) &= \frac{q_{(B+\nu)\hat{\mathbf{A}}}(\psi_1^+(\cdot, B)) - q_{B\hat{\mathbf{A}}}(\psi_1^+(\cdot, B))}{\nu} - \nu \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{A}}(x)|^2 |\psi_1^+(\cdot, B)|^2 dx \\ &\geq \frac{\lambda_1(B+\nu) - \lambda_1(B)}{\nu} - \nu \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{A}}(x)|^2 |\psi_1^+(\cdot, B)|^2 dx. \end{aligned}$$

Or, on a, par le Lemme B.2.2 :

$$\int_{\Omega} |\hat{\mathbf{A}}(x)|^2 |\psi_1^+(\cdot, B)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} t(x)^2 |\psi_1^+(\cdot, B)|^2 dx + \|\hat{\mathbf{A}}\|_{\infty}^2 \int_{\Omega(\epsilon)} |\psi_1^+(\cdot, B)|^2 dx.$$

Les estimations normales et tangentielles d'Agmon nous fournissent :

$$\int_{\Omega} |\hat{\mathbf{A}}(x)|^2 |\psi_1^+(\cdot, B)|^2 dx \leq CB^{-1}.$$

Pour $\eta > 0$, on prend $\nu = \eta B$ et on en conclut que, grâce à l'asymptotique à deux termes du Théorème 1.2.10 :

$$\liminf_{B \rightarrow +\infty} \lambda'_{1,+}(B) \geq \Theta_0 - \eta C.$$

Cela est valable pour tout $\eta > 0$, donc :

$$\liminf_{B \rightarrow +\infty} \lambda'_{1,+}(B) \geq \Theta_0.$$

De même, on trouve que :

$$\limsup_{B \rightarrow +\infty} \lambda'_{1,-}(B) \leq \Theta_0.$$

On conclut en remarquant que la théorie des perturbations de Kato (cf. [Kat66]) fournit :

$$\lambda'_{1,+}(B) \leq \lambda'_{1,-}(B).$$

■

En combinant les Théorèmes B.1.1 et B.2.1, nous déduisons le théorème :

Théorème B.2.3 *Soit Ω un ouvert borné simplement connexe à bord régulier et supposons que le champ appliqué β possède un unique minimum non dégénéré sur $\partial\Omega$ et que :*

$$0 < \Theta_0 b' < b.$$

Alors, on a :

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{b' \Theta_0} - b^{1/2} \frac{\Theta_{1/2}}{\Theta_0^{3/2}} + O(\kappa^{-7/20}).$$

Annexe C

Description de $\mathcal{C}(\tau)$

Dans cette annexe, nous souhaitons donner une nouvelle preuve (qui fait suite à des discussions avec François Alouges) de la proposition suivante (cf. [BCLP02, Lemma 3]) :

Proposition C.1 *En notant $SO(3)$ le groupe des rotations de \mathbb{R}^3 et en définissant, pour $\tau > 0$:*

$$\mathbf{n}_\tau(x_1, x_2, x_3) = {}^t(\cos(\tau x_3), \sin(\tau x_3), 0),$$

nous avons :

$$\mathcal{C}(\tau) = \{\mathbf{n}_\tau^Q, \quad Q \in SO(3)\},$$

où

$$\mathbf{n}_\tau^Q = Q\mathbf{n}_\tau({}^tQ\cdot).$$

L'équation qui nous intéresse est la suivante :

$$\nabla \times \mathbf{n} + \tau \mathbf{n} = 0 \text{ avec } \mathbf{n} \in L^2(\Omega, \mathbb{S}^2). \quad (\text{C.1})$$

Rang de la jacobienne

En prenant la divergence, on trouve d'abord :

$$\operatorname{div}(\mathbf{n}) = 0.$$

En d'autres termes, la trace de la matrice jacobienne est 0 ; rappelons à ce propos que cette matrice jacobienne de \mathbf{n} en x est notée $\nabla_x \mathbf{n}$ et que son terme général est $\partial_j n_i$.

Ensuite, en prenant le rotationnel, on obtient :

$$\Delta \mathbf{n} + \tau^2 \mathbf{n} = 0.$$

Par ellipticité, nous concluons que \mathbf{n} est analytique.

Prouvons que le rang de $\nabla_x \mathbf{n}$ est 1 pour tout $x \in \Omega$.

Nous pouvons supposer que $x = 0$ après translation. De plus, quitte à remplacer \mathbf{n} par $Q\mathbf{n}(Q^{-1} \cdot)$ pour $Q \in SO_3$, nous pouvons supposer :

$$\mathbf{n}(0) = e_1$$

et

$$\partial_2 n_2(0) = 0.$$

Calculons la matrice jacobienne en 0. Comme $|\mathbf{n}|^2 = 1$, nous trouvons :

$$(\nabla_0 \mathbf{n})\mathbf{n}(0) = 0$$

et avec (C.1), nous déduisons :

$${}^t(\nabla_0 \mathbf{n}(0))\mathbf{n}(0) = 0.$$

Ainsi, on a :

$$\nabla_0 \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

On a $\alpha = 0$ et, par l'équation (C.1), on tire : $\beta - \gamma = \tau$.

Remarquons que pour toute fonction régulière f à valeurs réelles, on a :

$$\Delta(f^2) = 2|\nabla f|^2 + 2\Delta f f. \quad (\text{C.2})$$

Appliquant cette identité aux composantes de \mathbf{n} , nous déduisons :

$$|\nabla \mathbf{n}|_2^2 = \tau^2$$

et nous obtenons $\beta^2 + \gamma^2 = \tau^2$. Ainsi, avec $\beta - \gamma = \tau$, nous avons $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$. Par conséquent, le lemme suivant est démontré :

Lemme C.2 *Toute solution $\mathbf{n} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ de (C.1) (avec $\tau \neq 0$) est analytique et vérifie $\text{rg}(\nabla_x \mathbf{n}) = 1$ pour tout $x \in \Omega$.*

Solution “locale”

Le théorème du rang constant implique qu'il existe ϕ et ψ deux \mathcal{C}^1 -difféomorphismes dans un voisinage de $(0, 0, 0)$ tels que :

$$\mathbf{n}(\psi(X_1, X_2, X_3)) = \phi(0, 0, X_3).$$

Aussi, après différentiation, on peut écrire localement pour p et q deux fonctions \mathcal{C}^∞ :

$$\nabla \mathbf{n} = \tau p \otimes q,$$

avec $|p| = 1$.

Comme \mathbf{n} est dans $\ker(\nabla \mathbf{n})$, nous trouvons $\mathbf{n} \cdot p = \mathbf{n} \cdot q = 0$. Puisque

$$\operatorname{div}(\mathbf{n}) = \tau p \cdot q = 0$$

et

$$\tau^2 = |\nabla \mathbf{n}|^2 = \tau^2 |q|^2,$$

nous trouvons que (p, q, n) est une base orthonormale.

Nous rappelons que :

$$\operatorname{div}(\nabla \mathbf{n}) = \Delta \mathbf{n} = -\tau^2 \mathbf{n}$$

et nous avons pour tout j :

$$\operatorname{div}(p_j q) = p_j \operatorname{div}(q) + \nabla p_j q. \quad (\text{C.3})$$

Ainsi, en multipliant par p_j , en sommant et en se souvenant que $\mathbf{n} \cdot p = 0$ et $|p|^2 = 1$, nous trouvons

$$\operatorname{div}(q) = 0.$$

On observe alors que $\nabla \times (p_j q) = 0$ pour tout j et que :

$$\nabla \times (p_j q) = \nabla p_j \times q + p_j \nabla \times q. \quad (\text{C.4})$$

On multiplie par p_j et on somme pour trouver :

$$\nabla \times q = 0.$$

On en conclut que $\Delta q = 0$. En prenant le produit scalaire avec q et en notant que $|q| = 1$, nous déduisons que $|\nabla q|^2 = 0$ et donc que q est constant.

Fin de la preuve

Nous sommes réduits à chercher une solution locale de

$$\nabla \times \mathbf{n} + \tau \mathbf{n} = 0$$

avec \mathbf{n} orthogonal à une direction fixe ; il est facile de voir que de telles solutions se mettent sous la forme :

$$\mathbf{n} = Q \mathbf{n}_\tau Q^{-1},$$

où Q désigne une rotation. En effet, on peut supposer que cette direction orthogonale est e_3 . Ensuite, on peut écrire $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$. L'équation (C.1) devient :

$$\begin{cases} -\partial_3 n_2 + \tau n_1 &= 0 \\ \partial_3 n_1 + \tau n_2 &= 0 \\ \partial_1 n_2 - \partial_2 n_1 &= 0 \end{cases}.$$

On déduit que :

$$\partial_3^2 n_i + \tau^2 n_i = 0,$$

pour $i \in \{1, 2\}$ et on trouve que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_\tau$. Puis, par analyticité, nous obtenons :

$$\mathbf{n} = Q \mathbf{n}_\tau Q^{-1}.$$

Cas où $\tau = 0$

Dans ce petit paragraphe, on désire juste montrer que les propriétés des éléments de $\mathcal{C}(0)$ sont très différentes de celles de ceux de $\mathcal{C}(\tau)$ avec $\tau > 0$. On souhaite étudier l'équation : $\nabla \times \mathbf{n} = 0$ avec $\mathbf{n} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$. Si on regarde le cas où $\tau > 0$, cela suggère une famille de solutions constantes : $\{Qe_3, Q \in SO_3\} = \mathbb{S}^2$. Nous prouvons ici que cet ensemble ne contient pas toutes les solutions.

Pour $a \notin \overline{\Omega}$, on pose $\mathbf{n}_a(x) = \frac{x - a}{|x - a|}$. Il est clair que $\mathbf{n}_a \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{S}^2)$. En utilisant la formule :

$$\nabla \times \alpha \mathbf{u} = \nabla \alpha \times \mathbf{u} + \alpha \nabla \times \mathbf{u},$$

on trouve :

$$\nabla \times \mathbf{n}_a = -\frac{x - a}{|x - a|^3} \times (x - a) + \frac{1}{|x - a|} \nabla \times (x - a) = 0.$$

Par conséquent, \mathbf{n}_a est un élément de $\mathcal{C}(0)$.

Annexe D

Coordonnées locales

D.1 Un choix général de coordonnées

Transformation du champ magnétique

Supposons que $0 \in \partial\Omega$. Dans un voisinage V de 0, on prend des coordonnées (y_1, y_2) sur $\partial\Omega$ (via une carte \mathcal{C}^3 notée ϕ). On note $\nu(\phi^{-1}(y_1, y_2))$ la normale rentrante au point $\phi^{-1}(y_1, y_2)$ et on définit un système de coordonnées locales dans V :

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = \phi^{-1}(y_1, y_2) + y_3\nu(\phi^{-1}(y_1, y_2)). \quad (\text{D.1})$$

Plus précisément, pour un point $x \in V$, $\phi^{-1}(y_1, y_2)$ est la projection de x sur $\partial\Omega \cap V$ et $y_3 = t = d(x, \partial\Omega)$.

En choisissant ϕ convenablement, on peut supposer :

$$\Phi(0) = 0 \text{ et } D_0\Phi = Id.$$

On veut déterminer le nouveau potentiel vecteur dans ces coordonnées, ainsi que le nouveau champ magnétique. Pour éclairer la question, raisonnons en termes de 1-forme. Introduisons la 1-forme ω :

$$\omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3.$$

Dans les nouvelles coordonnées $x = \Phi^{-1}(y)$, nous avons, avec les notations précédentes :

$$\omega = \tilde{A}_1 dy_1 + \tilde{A}_2 dy_2 + \tilde{A}_3 dy_3.$$

On exprime alors dx_i en fonction des (dy_j) , pour trouver que :

$$\tilde{\mathbf{A}} = D_y\Phi^{-1}(\mathbf{A}(\Phi^{-1}(y))).$$

Ensuite, on veut trouver le "nouveau" champ magnétique et on écrit :

$$d\omega = (\nabla \times \mathbf{A})_1 dx_2 \wedge dx_3 + (\nabla \times \mathbf{A})_2 dx_1 \wedge dx_3 + (\nabla \times \mathbf{A})_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

On exprime de nouveau dx_i en fonction des (dy_j) et la formule de la comatrice fournit le lemme :

Lemme D.1.1 *Avec le difféomorphisme Φ introduit en (D.1), nous avons*

$$\tilde{\beta} = \det(D\Phi)^{-1}((D\Phi))^t \beta, \quad (\text{D.2})$$

où

$$\tilde{\beta} = \nabla_y \times \tilde{\mathbf{A}},$$

et avec

$$\tilde{\mathbf{A}} = D_y \Phi^{-1}(\mathbf{A}(\Phi^{-1}(y))).$$

Écriture de la métrique dans les nouvelles coordonnées et forme quadratique

La métrique euclidienne s'écrit

$$g_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Elle s'écrit dans les coordonnées (y_1, y_2, y_3) :

$$g_0 = \sum_{i,j} g_{ij} dy_i \otimes dy_j,$$

où g_{ij} est le terme général de la matrice $D\Phi^{-1t}(D\Phi^{-1})$. Nous notons g^{ij} le terme général de la matrice inverse de (g_{ij}) .

On peut maintenant expliquer comment s'effectue le changement de coordonnées pour la forme quadratique :

$$q_{B\mathbf{A}}(u) = \int_{\Omega} |(i\nabla + B\mathbf{A})u|^2 dx.$$

Lemme D.1.2 *En considérant le difféomorphisme Φ introduit en (D.1) et en supposant que le support de u est suffisamment concentré près de x_0 , on a :*

$$q_{B\mathbf{A}}(u) = \int_{\Omega} |(i\nabla + B\mathbf{A})u|^2 dx = \int_{t>0} |(i\nabla_y + B\tilde{\mathbf{A}})\tilde{u}|_{D\Phi^t(D\Phi)}^2 |\det D\Phi^{-1}| dy, \quad (\text{D.3})$$

avec

$$|(i\nabla_y + B\tilde{\mathbf{A}})\tilde{u}|_{D\Phi^t(D\Phi)}^2 = \sum_{i,j} g^{ij} (i\nabla_{y_i} + B\tilde{A}_i) \tilde{u} \overline{(i\nabla_{y_j} + B\tilde{A}_j) \tilde{u}},$$

où g^{ij} est le terme général de la matrice $D\Phi^t D\Phi$ et où \tilde{u} désigne la fonction u dans les nouvelles coordonnées.

D.2 Coordonnées (r, s, t)

On introduit dans cette sous-section les coordonnées normales près de x_0 . $(\vec{\tau}_0, \vec{l}_0)$ est une base orthonormée du plan tangent en x_0 ; on note (r, s) les coordonnées correspondantes. Il est alors classique, par le biais de l'application exponentielle près de x_0 , que (r, s) définissent une paramétrisation locale du bord (cf. [Laf96]). Il existe donc un ouvert S de \mathbb{R}^2 et un difféomorphisme ϕ tels que :

$$\phi : \mathcal{W}_{x_0} \rightarrow S, \phi(x) = (r, s).$$

De plus, si G désigne la première forme fondamentale de $\partial\Omega$, nous avons :

$$G = I_3 + G_1(r, s) + O(r^3 + s^3),$$

où G_1 est une forme quadratique en r et s .

Posant $t(x) = d(x, \partial\Omega)$, on définit un système de coordonnées près du bord : $(y_1, y_2, y_3) = (r, s, t)$. La métrique g_0 peut s'écrire :

$$g_0 = dt \otimes dt + G - 2tK + t^2L,$$

où K, L sont respectivement les deuxième et troisième formes fondamentales sur $\partial\Omega$.

Développement limité de la métrique

Nous posons :

$$K_0 = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}$$

On écrit :

$$K = K_0 + K_1(r, s) + O(r^2 + s^2),$$

où K_1 est linéaire en r et s .

De façon générale, pour une matrice 2×2 U , nous noterons U^0 la matrice :

$$U^0 = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ U_{12} & U_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut écrire :

Lemme D.2.1 *Il existe R un polynôme homogène de degré 2 et degré partiel 1 par rapport à r et s tel que si on pose :*

$$g_{app} = I_3 - 2tK^0 + G_1^0(r, s) + R(r, s, t),$$

alors :

$$g_0 = g_{app} + O(r^3 + s^3 + t^3).$$

Preuve.

Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} g_0 &= I_3 - 2tK^0 + G_1^0(r, s) - 2tK_1^0 + t^2L^0 + O(r^3 + s^3) \\ &= I_3 - 2tK^0 + G_1^0(r, s) + R(r, s, t) + O(r^3 + s^3 + t^3) \\ &= g_{app} + O(r^3 + s^3 + t^3) \end{aligned}$$

■

Remarque D.2.2.

Dans tout notre travail, on prend pour convention de toujours noter R les polynômes homogènes de degré 2 et de degré partiel au plus 1 en r et s .

■

On déduit :

$$D\Phi^{-1} = I_3 - tK^0 + \frac{G_1^0}{2} + R(r, s, t) + O(r^3 + s^3 + t^3)$$

et

$$D\Phi = I_3 + tK^0 - \frac{G_1^0}{2} + R(r, s, t) + O(r^3 + s^3 + t^3).$$

On en tire les deux lemmes suivants :

Lemme D.2.3 *On a :*

$$|g|^{1/2} = m_{app} + O(r^3 + s^3 + t^3),$$

avec

$$m_{app} = 1 - tK_0^M + \text{Tr}\left(\frac{G_1^0}{2}\right) + R(r, s, t),$$

où $K_0^M = K_{11} + K_{22}$.

Lemme D.2.4 *La métrique duale satisfait :*

$$g^0 = I_3 + 2tK^0 - G_1^0(r, s) + R(r, s, t) + O(r^3 + s^3 + t^3) = g_{app}^0 + O(r^3 + s^3 + t^3). \quad (\text{D.4})$$

Remarque D.2.5.

On notera par commodité $G_{ij}^{r^2}$ (resp. $G_{ij}^{s^2}$, G_{ij}^{rs}) le coefficient de r^2 dans le coefficient d'indice (i, j) de G_1 (resp. le coefficient de s^2 , le coefficient de rs).

■

Annexe E

Estimations de l'énergie de la fonctionnelle réduite \mathcal{G}

Dans cette Annexe, nous nous intéressons à une estimation pour l'énergie de la fonctionnelle réduite près de la transition de phase $\kappa^2 = \mu^*(q, \tau)$ et dans le domaine smectique. Nous envisagerons le régime asymptotique $q\tau \rightarrow +\infty$. Insistons sur le fait que nous ne supposons pas que τ reste dans un intervalle borné $]0, \tau_0[$. Le lemme suivant nous sera utile :

Lemme E.1 *Soit (ψ, \mathbf{n}) un minimiseur de \mathcal{G} , alors :*

$$g(q, \tau, \kappa) = -\frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega} |\psi|^4 dx, \quad (\text{E.1})$$

et :

$$\int_{\Omega} |\psi|^4 \leq \left(1 - \frac{\lambda_1(q, \mathbf{n})}{\kappa^2}\right) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx. \quad (\text{E.2})$$

Nous pouvons observer que si $\kappa^2 < \mu^*(q, \tau)$, le membre de droite de (E.2) est nul et donc les minimiseurs sont tous nuls.

Preuve.

La preuve se trouve dans [HP08b], mais nous la rappelons. En dérivant \mathcal{G} par rapport à ψ on trouve les équations :

$$\begin{aligned} (i\nabla + q\mathbf{n})^2 &= \kappa^2(1 - |\psi|^2)\psi \text{ dans } \Omega \\ (i\nabla + q\mathbf{n})\psi \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On multiplie la première par $\overline{\psi}$ et on intègre par parties en utilisant la deuxième équation pour trouver (E.1). Pour trouver (E.2), on revient à la définition de g en considérant (E.1) et on écrit juste que :

$$\int_{\Omega} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 dx \geq \lambda_1(q, \mathbf{n}) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx.$$

■

La proposition suivante fournit une estimation de $\|\psi\|_4$ et démontre une décroissance exponentielle de ψ loin du bord quand τ n'est pas nécessairement borné.

Proposition E.2 *Pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $c_0 > 0$ et $b \in]\Theta_0, 1[$, il existe $\sigma_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout (q, τ, κ) t.q. $q\tau \geq \sigma_0$, $\tau \leq c_0(q\tau)^x$ et $\frac{\kappa^2}{b} \leq \mu^*(q, \tau) < \kappa^2$, on a pour tout minimiseur (ψ, \mathbf{n}) de \mathcal{G} :*

$$\int_{\Omega} \left\{ e^{\alpha\sqrt{q\tau}t(x)} |\psi|^2 + \frac{1}{q\tau} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 \right\} dx \leq \frac{C}{\sqrt{q\tau}}$$

et

$$\int_{\Omega} |\psi|^4 dx \leq \frac{C}{\sqrt{q\tau}}. \quad (\text{E.3})$$

En outre, sous les mêmes hypothèses, on dispose des inégalités suivantes :

$$-C \frac{(\kappa^2 - \mu^*(q, \tau))^2}{\kappa^2 \sqrt{q\tau}} \leq g(q, \tau, \kappa) \leq 0. \quad (\text{E.4})$$

Ainsi, on peut remarquer que la distance entre la température κ^2 et la température critique $\mu^*(q, \tau)$ contrôle l'énergie à la transition de phase. Cette distance réapparaîtra dans les chapitres suivants.

Preuve.

Avec les estimées uniformes de $\mu_0(q\tau, \frac{\mathbf{n}}{\tau})$ avec $\mathbf{n} \in \mathcal{C}(\tau)$ obtenues précédemment (cf. [Ray09d]) et en mettant en oeuvre les estimées d'Agmon non linéaires (cf. [Agm82, HM04]), nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega} \left\{ e^{\alpha\sqrt{q\tau}t(x)} |\psi|^2 + \frac{1}{q\tau} |(i\nabla + q\mathbf{n})\psi|^2 \right\} dx \leq C \int_{\Omega} |\psi|^2 dx. \quad (\text{E.5})$$

Rappelons en la preuve pour voir précisément la dépendance en τ . Nous utilisons l'identité :

$$\begin{aligned} \|(i\nabla + q\mathbf{n})e^{\alpha\sqrt{q\tau}t}\psi\|_2^2 - \alpha^2 q\tau \|\nabla t e^{\alpha\sqrt{q\tau}t}\psi\|_2^2 &= \kappa^2 \|e^{\alpha\sqrt{q\tau}t}\psi\|_2^2 - \kappa^2 \|e^{\alpha\sqrt{q\tau}t}|\psi|^2\|_2^2 \\ &\leq \kappa^2 \|e^{\alpha\sqrt{q\tau}t}\psi\|_2^2. \end{aligned}$$

Nous posons $u = e^{\alpha\sqrt{q\tau}t}\psi$ et introduisons pour un $r > 0$ donné une partition de l'unité (associée à un recouvrement par des boules de centres x_j et de rayon r) tout comme dans [HM02] :

$$\begin{aligned} \sum_j \chi_j^2 &= 1 \\ \sum_j |\nabla \chi_j|^2 &\leq \frac{C}{r^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, la formule d'IMS donne (voir (1.4.31) et aussi [CFKS86]) :

$$\|\nabla_{q\mathbf{n}}u\|_2^2 \geq \sum_j \|\nabla_{q\mathbf{n}}\chi_j u\|_2^2 - \frac{C}{r^2} \|u\|_2^2.$$

Nous déduisons :

$$\sum_{j\text{int}} \left(\|\nabla_{q\mathbf{n}}\chi_j u\|_2^2 - (\kappa^2 + \alpha^2 q\tau + \frac{C}{r^2}) \|\chi_j u\|_2^2 \right) \leq (\kappa^2 + \alpha^2 q\tau + \frac{C}{r^2}) \sum_{j\text{brd}} \|\chi_j u\|_2^2.$$

Nous utilisons le Corollaire 4.2.2 (cf. Corollaire 5.4 de [Ray09d]) pour obtenir :

$$\|\nabla_{q\mathbf{n}}\chi_j u\|_2^2 \geq (q\tau - C(q\tau)^{3/4+x/2}) \|\chi_j u\|_2^2.$$

Le point crucial qui permet de relaxer la condition " τ borné" (qui a déjà été traitée dans [HP08b]) est que, sous la condition $x < \frac{1}{2}$, nous avons $\frac{3}{4} + \frac{x}{2} < 1$.

Ainsi, nous trouvons, en posant $r = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{q\tau}}$, avec ϵ_0 et α assez petits :

$$\sum_{j\text{int}} \|\chi_j u\|_2^2 \leq C(b, \alpha, \epsilon_0) \sum_{j\text{brd}} \|\chi_j u\|_2^2.$$

La fin de la preuve de (E.5) est standard et est donc laissée au lecteur ; précisons cependant qu'elle utilise (7.1.8). Enfin, avec le Lemme E.1 nous déduisons :

$$\int_{\Omega} |\psi|^4 dx \leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \leq C \int_{t \leq 2\epsilon_0(q\tau)^{-1/2}} |\psi|^2 dx \leq \frac{C}{(q\tau)^{1/4}} \left(\int_{\Omega} |\psi|^4 dx \right)^{1/2}$$

et le contrôle de ψ dans L^4 s'ensuit.

Finalement, nous remarquons que :

$$1 - \frac{\lambda_1(q, \mathbf{n})}{\kappa^2} \leq 1 - \frac{\mu^*(q, \tau)}{\kappa^2}.$$

et nous avons nécessairement $\kappa^2 > \lambda_1(q, \mathbf{n})$; sinon, les minimiseurs seraient triviaux (cf. Lemme E.1). En utilisant (E.2), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\psi|^4 dx &\leq \left(1 - \frac{\mu^*(q, \tau)}{\kappa^2} \right) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \\ &\leq C \left(1 - \frac{\mu^*(q, \tau)}{\kappa^2} \right) \int_{t \leq 2\epsilon_0(q\tau)^{-1/2}} |\psi|^2 dx \\ &\leq \tilde{C} \left(1 - \frac{\mu^*(q, \tau)}{\kappa^2} \right) \frac{1}{(q\tau)^{1/4}} \left(\int_{\Omega} |\psi|^4 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Cela améliore (E.3) :

$$\int_{\Omega} |\psi|^4 dx \leq \tilde{C}^2 \left(1 - \frac{\mu^*(q, \tau)}{\kappa^2} \right)^2 \frac{1}{(q\tau)^{1/2}}$$

et en nous servant de (E.1), nous obtenons enfin (E.4).

■

Bibliographie

- [Agm82] S. Agmon. Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators. Princeton University Press, 1982.
- [AHS78] J. Avron, I. Herbst, and B. Simon. Schrödinger operators with magnetic field I. Duke Math. J., 45 :847–883, 1978.
- [Alm08] Y. Almog. Thin boundary layers of chiral smectics. Calculus of variations and partial differential equations, to appear, 33(3), 2008.
- [Ara06] J. Aramaki. Upper critical field and location of surface nucleation for the Ginzburg-Landau system in non-constant applied field. Far East J. Math. Sci., 23(1) :89–125, 2006.
- [Ara07] J. Aramaki. Asymptotics of the eigenvalues for the Neumann Laplacian with non-constant magnetic field associated with supraconductivity. Far East J. Math. Sci., 25(3) :529–584, 2007.
- [BCLP02] P. Bauman, M. Carme Calderer, C. Liu, and D. Phillips. The phase transition between chiral nematic and smectic A* liquid crystals. Arch. Rational. Anal., 165 :161–186, 2002.
- [Bon05] V. Bonnaillie. On the fundamental state energy for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners. Asympt. Anal., 41(3-4) :215–258, 2005.
- [BPT98] P. Bauman, D. Phillips, and D. Tang. Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field. Arch. Rational Mech. Anal., 142 :1–43, 1998.
- [Bré97] H. Brézis. Analyse Fonctionnelle. Dunod, 1997.
- [BS98] A. Bernoff and P. Sternberg. Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. J. Math. Phys., 39 :1272–1284, 1998.
- [CFKS86] H-L. Cycon, R-G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. Schrödinger Operators. Springer-Verlag, 1986.

- [dG93] P-G de Gennes. An analogy between superconductors and smectics A. Solid state communications, (11-12) :1039–1042, 1993.
- [dG95] P-G de Gennes. The physics of liquid crystals. Clarendon Press, 2nd edition, 1995.
- [DGP92] Q. Du, M.D. Gunzburger, and J.S. Peterson. Analysis and approximation of the Ginzburg-Landau model of superconductivity. SIAM Review, 34(1) :54–81, 1992.
- [DH93] M. Dauge and B. Helffer. Eigenvalues variation. I. Neumann problem for Sturm-Liouville operators. Journal of Differential Equations, 104 :243–262, 1993.
- [dPFS00] M. del Pino, P. Felmer, and P. Sternberg. Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. Comm. in Math. Phys., 210 :413–446, 2000.
- [FH06a] S. Fournais and B. Helffer. Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian. Annales de l’institut Fourier, 56 :1–67, 2006.
- [FH06b] S. Fournais and B. Helffer. On the third critical field in Ginzburg-Landau theory. Comm. in Math. Physics, 266(1) :153–196, 2006.
- [FH09] S. Fournais and B. Helffer. Spectral methods in surface superconductivity. To appear, 2009.
- [FP09] S. Fournais and M. Persson. Strong diamagnetism for the ball in three dimensions. Preprint, 2009.
- [GR86] V. Girault and P-A. Raviart. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer, 1986.
- [Gri80] P. Grisvard. Boundary Value Problems in non-smooth Domains. University of Maryland, 1980.
- [HKL86] R. Hardt, D. Kinderlehrer, and F-H Lin. Existence and partial regularity of static liquid crystal configurations. Comm. Math. Phys., 105 :547–570, 1986.
- [HM01] B. Helffer and A. Morame. Magnetic bottles in connection with superconductivity. J. Funct. Anal., 185(2) :604–680, 2001.
- [HM02] B. Helffer and A. Morame. Magnetic bottles for the Neumann problem : The case of dimension 3. Proc. Indian. Sci., 112(1) :71–84, 2002.
- [HM04] B. Helffer and A. Morame. Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effects in the case of dimension 3 (general case). Ann. Scient. E. Norm. Sup., 37(4) :105–170, 2004.

- [HP08a] B. Helffer and X-B. Pan. On some spectral problems and asymptotics limits occuring in the analysis of liquid crystals. To appear in Cubo, 2008.
- [HP08b] B. Helffer and X-B. Pan. Reduced Landau-de Gennes functional and surface smectic state of liquid crystals. J. Funct. Anal., 255(11) :3008–3069, 2008.
- [Kac06] A. Kachmar. On the ground state energy for a magnetic Schrödinger operator and the effect of the de Gennes boundary condition. J. Math. Phys., 47(7), 2006.
- [Kac07a] A. Kachmar. On the perfect superconducting solution for a generalized Ginzburg-Landau equation. Asympt. Anal., 54(3-4) :125–164, 2007.
- [Kac07b] A. Kachmar. On the stability of normal states for a generalized Ginzburg-Landau model. Asympt. Anal., 55(3-4) :145–201, 2007.
- [Kat66] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, 1966.
- [KP02] K. H. Kwek and X-B. Pan. Schrödinger operators with non-degenerately vanishing magnetic fields in bounded domains. Trans. AMS, 10 :4201–4227, 2002.
- [Laf96] J. Lafontaine. Introduction aux variétés différentielles. Presses universitaires de Grenoble, 1996.
- [LP99a] K. Lu and X.-B. Pan. Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau in bounded domains. J. Math. Phys., 40(6) :2647–2670, 1999.
- [LP99b] K. Lu and X.-B. Pan. Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. Physica D, 127 :73–104, 1999.
- [LP00a] K. Lu and X.-B. Pan. Gauge invariant eigenvalue problems on \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}_+^2 . Trans. AMS, 352(2) :1247–1276, 2000.
- [LP00b] K. Lu and X.-B. Pan. Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension. J. Differential Equations, 168 :386–452, 2000.
- [Mon95] R. Montgomery. Hearing the zero locus of a magnetic field. Communications in Math. Phys., 168 :651–675, 1995.
- [Pan03] X-B. Pan. Landau-de Gennes model of liquid crystals and critical wave number. Communications in Math. Phys., 239 :343–382, 2003.
- [Pan06] X-B. Pan. Landau-De Gennes model of liquid crystals with small Ginzburg-Landau parameter. SIAM J. Math. Anal., 37 :1616–1648, 2006.

- [Pan08] X-B. Pan. Critical elastic coefficient of liquid crystals and hysteresis. Comm. Math. Phys., 280(1) :77–121, 2008.
- [Ray09a] N. Raymond. Contribution to the asymptotic analysis of the Landau-de Gennes functional. To appear in ADE, 2009.
- [Ray09b] N. Raymond. On the semi-classical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field. Submitted to Asymptotic Analysis, 2009.
- [Ray09c] N. Raymond. Sharp Asymptotics for the Neumann Laplacian with Variable Magnetic Field : case of Dimension 2. Annales Henri Poincaré, 10(1) :95–122, 2009.
- [Ray09d] N. Raymond. Uniform spectral estimates for families of Schrödinger operators with magnetic field of constant intensity and applications. To appear in Cubo, 11, 2009.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics, analysis of operators. Academic Press, 1978.
- [SS03] E. Sandier and S. Serfaty. The decrease of bulk-superconductivity close to the second critical field in the ginzburg-landau model. SIAM J. Math. Anal., 34(4) :939–956, 2003.
- [Wei67] J. Weidmann. The virial theorem and its application to spectral theory of Schrödinger operators. Bull. Am. Math. Soc., 73, 1967.