



**HAL**  
open science

# Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes

Anthony Nouy

► **To cite this version:**

Anthony Nouy. Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2003. Français. NNT: . tel-00422369

**HAL Id: tel-00422369**

**<https://theses.hal.science/tel-00422369>**

Submitted on 6 Oct 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan  
par

Anthony NOUY

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE  
CACHAN**

Sujet de la thèse :  
**Une stratégie de calcul multiéchelle avec  
homogénéisation en temps et en espace  
pour le calcul de structures fortement  
hétérogènes**

Thèse soutenue le 5 décembre 2003 devant le jury composé de :

PIERRE ALART	Président
HACHMI BEN DHIA	Rapporteur
MARC GEERS	Rapporteur
SAMUEL FOREST	Examineur
DIDIER GUEDRA-DEGEORGES	Examineur
PIERRE LADEVEZE	Examineur
PIERRE VERPEAUX	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
(ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)  
61 Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)



# Remerciements

Je remercie Pierre Ladevèze, mon directeur de thèse, d'avoir su donner un souffle de vie à ce travail embryonnaire. Mes remerciements vont également à Pierre Alart, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je tiens enfin à remercier les autres membres du jury, Samuel Forest, Didier Guedra-Degeorges et Pierre Verpeaux, et plus particulièrement Hachmi Ben Dhia et Marc Geers, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>5</b>
<b>I Stratégies de calcul multiéchelles : état de l'art</b>	<b>7</b>
1 Stratégies de calcul multiéchelles en espace . . . . .	8
2 Stratégies de calcul multiéchelles en temps . . . . .	28
<b>II Stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps</b>	<b>41</b>
1 Le problème de référence à l'échelle "micro" . . . . .	42
2 Description des variables macro sur l'espace-temps . . . . .	50
3 Stratégie de calcul multiéchelle . . . . .	54
4 Convergence de la stratégie de calcul multiéchelle . . . . .	67
5 Quelques remarques et précisions sur la stratégie de calcul . . . . .	68
6 Exemples . . . . .	72
<b>III Sur la discrétisation des interefforts en calcul de structures</b>	<b>93</b>
1 Formulations continues usuelles . . . . .	94
2 Etude des formulations discrétisées . . . . .	97
3 Comparaison des solutions discrétisées . . . . .	103
4 Explication des anomalies numériques . . . . .	114
5 Proposition d'un nouveau type de discrétisation . . . . .	115
<b>IV Introduction d'une troisième échelle pour la résolution du problème "macro"</b>	<b>129</b>
1 Décomposition à trois échelles de $\Omega \times (0,T)$ . . . . .	130
2 Stratégie de calcul à trois échelles . . . . .	131
3 Approximation du problème macro . . . . .	144
<b>V Résolution d'une équation d'évolution par la méthode d'approximation radiale</b>	<b>151</b>
1 Définition classique de l'approximation radiale . . . . .	152
2 Définition de l'approximation basée sur un problème de minimisation . . . . .	155
3 Résolution des problèmes "micro" de la stratégie de calcul multiéchelle . . . . .	161
4 Exemples . . . . .	168

<b>Conclusion - Perspectives</b>	<b>181</b>
<b>A Résolution d'un problème d'évolution par la méthode de Galerkin discontinue</b>	<b>183</b>
1 Formulation abstraite du problème d'évolution . . . . .	183
2 Méthode de Galerkin discontinue . . . . .	186
<b>B Résolution incrémentale des problèmes micro</b>	<b>191</b>
1 Dualisation du problème micro . . . . .	191
2 Formulation sur un intervalle de la partition $\mathcal{T}_h$ . . . . .	192
<b>C Validité de l'approximation radiale de la solution d'une équation d'évolution</b>	<b>195</b>
1 Approximation d'ordre 1 . . . . .	195
2 Approximation d'ordre m et propriétés de convergence . . . . .	197
3 Construction de l'approximation . . . . .	198
<b>D Construction de l'approximation radiale des problèmes micro</b>	<b>199</b>
1 Minimisation sur les fonctions spatiales . . . . .	199
2 Minimisation sur les fonctions temporelles . . . . .	201
<b>Bibliographie</b>	<b>203</b>

# Introduction

Le comportement des structures hétérogènes telles que les structures composites résulte souvent de phénomènes complexes à l'échelle microscopique. La prédiction du comportement de ces structures a donc conduit à l'élaboration de modèles de plus en plus sophistiqués qui décrivent le matériau à une échelle très fine comparée à l'échelle de la structure. La simulation numérique de tels problèmes nécessite alors la conception de stratégies de calcul fiables et performantes prenant en compte ces aspects multiéchelles. Afin de capter les phénomènes locaux à courte longueur de variation, aussi bien au niveau spatial que temporel, le calcul doit être opéré sur une discrétisation fine de la structure et de l'intervalle de temps d'étude. Cela conduit à des problèmes à très grand nombre de degrés de liberté dont le coût de calcul est généralement prohibitif avec des codes de calcul standards. Un des principaux objectifs de ces dernières décennies et dans lequel s'inscrit ce travail de thèse a consisté en l'élaboration de stratégies de calcul robustes adaptées à la résolution de ce type de problèmes.

Les premiers travaux introduisent des méthodes d'homogénéisation spatiales. Basées sur des études analytiques ou semi-analytiques à l'échelle microscopique, ces approches permettent de définir un comportement macroscopique entre des quantités moyennes "effectives" [Eshelby, 1957, Hashin, 1962, Hill, 1965, Mori et Tanaka, 1973]. Cependant, elles ne permettent pas de remonter aux propriétés locales de la solution.

La première méthode à répondre véritablement au problème posé est la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques initiée par Sanchez-Palencia [Sanchez-Palencia, 1974, Duvaut, 1976, Bensoussan et al., 1978, Sanchez-Palencia, 1980]. Cette méthode, basée sur l'analyse asymptotique, est une véritable stratégie de calcul multiéchelle car elle permet de résoudre à l'échelle macroscopique un problème dont le modèle n'est pas défini *a priori* mais issu des propriétés du matériau à l'échelle microscopique. Elle possède de plus l'avantage de fournir *a posteriori* les propriétés locales de la solution. Cette théorie fut à l'origine de nombreuses stratégies de calcul [Devries et al., 1989, Ghosh et al., 1995, Zohdi et al., 1996, Fish et al., 1997, Smit et al., 1998, Feyel et Chaboche, 2000]. Elles possèdent néanmoins certaines limitations. Hormis la périodicité, ces stratégies reposent sur l'hypothèse fondamentale d'un rapport faible entre les petites et les grandes échelles de variation. De plus, le matériau ne pouvant être homogénéisé au niveau des frontières, celles-ci nécessitent un traitement particulier [Auriel et al., 1982, Dumontet, 1986].

Une stratégie de calcul multiéchelle basée sur une méthode de décomposition de domaine mixte fut récemment proposée [Ladevèze et Dureisseix, 2000, Ladevèze et al., 2001] pour le traitement de structures fortement hétérogènes. Cette straté-

gie de calcul itérative, incluant une procédure d'homogénéisation automatique, ne possède pas les limitations de la théorie de l'homogénéisation classique.

D'autres démarches qui ne sont pas issues des techniques d'homogénéisation furent également proposées. Leur principe revient généralement à superposer à la solution d'un problème macroscopique classique un enrichissement dans des régions d'intérêt. L'enrichissement est réalisé en résolvant des problèmes à une échelle plus fine, comme c'est le cas dans la méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998], la méthode de projection de Dirichlet hiérarchique [Zohdi et al., 1996, Oden et Zohdi, 1997] ou les méthodes multi-grilles pour les matériaux composites [Fish et Belsky, 1995]. Il peut également consister à augmenter l'espace de recherche de la solution en introduisant au niveau macroscopique une connaissance analytique ou numérique de la solution [Belytschko et al., 1990, Hughes, 1995, Melenk et Babuska, 1996, Moës et al., 1999, Strouboulis et al., 2000].

La prise en compte des phénomènes multiéchelles au niveau temporel a fait l'objet de relativement peu de travaux. Certaines approches se contentent de coupler des résolutions sur des grilles temporelles à différentes échelles, le couplage reliant entre elles différentes physiques [Dureisseix et al., 2003] ou différentes régions d'espace [Belytschko et al., 1984, Liu et Belytschko, 1982, Gravouil et Combescure, 2001]. Cependant, le traitement à une échelle fine reste souvent très coûteux avec des techniques d'intégration temporelle standards. Des méthodes récentes proposent des formulations variationnelles multiéchelles tenant compte de l'influence des échelles microscopiques "insolubles" en introduisant au niveau temporel des enrichissements locaux [Hughes et Stewart, 1996, Bottasso, 2002]. Aucune des approches précédemment citées n'inclut cependant une véritable technique d'homogénéisation en temps. De telles techniques semblent n'avoir été introduites que pour le cas des chargements cycliques [Bensoussan et al., 1978, Francfort, 1983, Guennouni, 1988, Ladevèze, 1999]. Ces premières approches d'homogénéisation temporelle possèdent néanmoins les mêmes limitations que la théorie d'homogénéisation classique : les hypothèses de périodicité et de rapports d'échelles.

Ce travail de thèse tente de répondre à l'objectif initial en proposant une nouvelle stratégie de calcul multiéchelle pour les problèmes non-linéaires d'évolution qui inclut une procédure d'homogénéisation automatique à la fois en temps et en espace [Ladevèze et Nouy, 2002, Ladevèze et Nouy, 2003]. Cette stratégie, développée dans un cadre général, ne formule pas d'hypothèse *a priori* sur la forme de la solution et ne possède donc pas les limitations des techniques d'homogénéisation standards. Elle est itérative et travaille sur le domaine d'espace-temps entier. Elle est décrite ici dans le cadre des petites perturbations de structures (visco)-plastiques soumises à d'éventuelles conditions de contact avec ou sans frottement.

Le premier point de cette stratégie consiste à partitionner le domaine d'espace en un ensemble de sous-structures et d'interfaces, chacune de ces entités possédant ses propres variables et équations. Elle constitue à ce titre une méthode de décomposition de domaine mixte. L'intervalle de temps d'étude est également partitionné en sous-intervalles. La discrétisation adoptée autorise des discontinuités au niveau temporel, prises en compte par la méthode de Galerkin Discontinue [Eriksson et al., 1985]. La séparation entre échelles n'est opérée qu'au niveau des interfaces où les efforts et les déplacements sont découplés en parties dites "macro" et "micro". Les

quantités macro sont ici définies comme des moyennes à la fois sur l'espace et le temps des efforts et déplacements. Le second point de cette stratégie réside dans l'utilisation de la méthode LATIN [Ladevèze, 1999], méthode de résolution itérative travaillant sur tout l'intervalle de temps d'étude. A chaque itération, on doit résoudre un problème macro défini sur le domaine d'espace-temps entier ainsi qu'un ensemble de problèmes micro indépendants entre eux, qui sont des problèmes d'évolution linéaires définis sur chaque sous-structure et leur frontière. Le problème macro est associé à la structure homogénéisée à la fois en temps et en espace.

Une part importante de ce travail de thèse fut également consacrée à l'étude de points clés qui ne sont pas forcément spécifiques à cette stratégie de calcul. Le premier point porte sur la discrétisation dans les méthodes de décomposition de domaine mixte. Lors de la résolution numérique de problèmes mixtes, une attention toute particulière doit être portée sur le choix des espaces de discrétisation. Un mauvais choix de ceux-ci entraîne en effet des anomalies pouvant conduire à de fortes instabilités numériques. Une part de cette étude a été consacrée à la mise en évidence et à l'explication de ce phénomène ainsi qu'à la recherche de remèdes efficaces. En particulier, il est proposé une méthode de discrétisation saine des intèrefforts, simple de mise en oeuvre, qui pallie totalement ce problème et permet d'augmenter considérablement la robustesse et l'efficacité de la stratégie de calcul [Ladevèze et al., 2002].

Le second point étudié porte sur une technique d'approximation robuste de problèmes d'évolution linéaires. Cette technique, basée sur le concept de fonctions radiales [Ladevèze, 1999], consiste à approximer la solution d'une équation d'évolution par une somme de produits de fonctions d'espace par des fonctions du temps. Une technique de résolution itérative pour la recherche de ces fonctions consiste alors à alterner la recherche des fonctions spatiales et temporelles et transforme donc la résolution d'un problème d'évolution en la résolution d'un ensemble réduit de problèmes "spatiaux" et d'équations différentielles en temps. L'étude a consisté à comprendre les faiblesses de la méthode initiale de construction de ces fonctions [Ladevèze, 1999] et à en proposer une nouvelle, robuste et efficace, basée sur un problème de minimisation. Cette nouvelle approche est particulièrement bien adaptée à la méthode LATIN qui nécessite la résolution d'un grand nombre de problèmes d'évolution linéaires. Elle est ici appliquée à la stratégie de calcul multiéchelle pour la résolution des problèmes micro en introduisant le concept de minimisation de l'erreur en relation de comportement issue des directions de recherche de l'algorithme [Ladevèze et Nouy, 2003, Nouy et Ladevèze, 2003a]. Les fonctions ainsi construites constituent au fil des itérations une base réduite spatiale pertinente qui peut être réutilisée pour les itérations suivantes. On montre comment cette approche est particulièrement bien adaptée aux cas des structures composites pour lesquelles il existe des familles de nombreuses sous-structures semblables.

Le dernier point porte sur la résolution du problème macro. Si le nombre de sous-structures devient très important, comme c'est le cas dans le traitement de structures composites réelles, la résolution du problème macro peut en effet devenir prohibitive. Il fut proposé dans [Loiseau et al., 2002] d'introduire une troisième échelle afin d'approximer le problème macro. Cette vision est ici étendue au problème macro défini sur l'espace-temps [Ladevèze et Nouy, 2003, Nouy et Ladevèze, 2003b]. Une

autre approche est également proposée : elle consiste en une véritable stratégie de calcul à trois échelles.

Ce document est composé de cinq chapitres. Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique sur les principales stratégies de calcul multiéchelles en temps ou en espace. La nouvelle stratégie de calcul multiéchelle en temps et en espace est introduite dans le second chapitre. Le troisième chapitre traite des problèmes de discrétisation dans les approches de décomposition de domaine mixte. Le quatrième chapitre porte sur le traitement du problème macroscopique. Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à la résolution des problèmes d'évolution par la méthode d'approximation radiale et à son application à la stratégie de calcul multiéchelle.

# Notations

## Calcul tensoriel et différentiel

*Tenseurs d'ordre 1 soulignés* : champs de déplacements  $\underline{u}$ , vecteur position  $\underline{x}$ , ...

*Tenseurs d'ordre 2 et supérieur en gras* : tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  
tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , tenseur de Hooke  $\mathbf{K}$ , ...

$\wedge$  : produit vectoriel

$\otimes$  : produit tensoriel extérieur

$\cdot$  : produit simplement contracté

$:$  : produit doublement contracté

*S'il n'y a pas d'ambiguïté, les produits contractés*

*sont omis (ex:  $\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}$ )*

$\nabla$  ou  $\frac{\partial}{\partial \underline{x}}$  : gradient

*div* : divergence à

$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u})$  : partie symétrique du gradient de  $\underline{u}$  à

$\dot{\underline{u}}$  ou  $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$  : dérivée de  $\underline{u}$  par rapport au temps  $t$

## Notations algébriques

*Vecteurs en gras* :  $\mathbf{x}$ , ...

*Matrices en lettres capitales doublées* :  $\mathbb{A}$ , ...

$\mathbb{R}^{n \times m}$  : espace des matrices à coefficients réels de dimension  $n \times m$

$\mathbf{x}^T$  : transposé de  $\mathbf{x}$

$\mathbb{A}^T$  : transposée de  $\mathbb{A}$

$\mathbb{A}^{-1}$  : inverse de  $\mathbb{A}$

$\mathbb{I}$  : matrice identité

$\text{Ker}(\mathbb{A})$  : noyau de  $\mathbb{A}$

$\text{Im}(\mathbb{A})$  : image de  $\mathbb{A}$

$\text{Tr}(\mathbb{A})$  : trace de  $\mathbb{A}$

## Notations topologiques

$\bar{A}$  : adhérence de  $A$

$\overset{\circ}{A}$  : intérieur de  $A$

$\partial A$  : frontière de  $A$

$A \setminus B$  : complémentaire de  $B$  dans  $A$

$\text{mes}(A)$  : mesure d'un domaine  $A$  de  $\mathbb{R}^n$

### Notations sur les ensembles

$\{x \in X; P\}$ ou $\{x \in X/P\}$	:	sous ensemble des $x \in X$ vérifiant la propriété P
$Card(\mathbf{I})$	:	cardinal de l'ensemble fini $\mathbf{I}$
$X \times Y$	:	produit cartésien des ensembles $X$ et $Y$
$\prod_{i \in \mathbf{I}} X_i$	:	produit cartésien des ensembles $\{X_i\}_{i \in \mathbf{I}}$

### Espaces vectoriels

$X + Y$	:	somme de deux espaces vectoriels $X$ et $Y$
$X \oplus Y$	:	somme directe de deux espaces vectoriels $X$ et $Y$
$X^\perp$	:	orthogonal de $X$
$Vect(\{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathbf{I}})$	:	espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathbf{I}}$

### Notations sur les applications

$f : \begin{matrix} X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$	:	application qui à $x \in X$ fait correspondre $f(x) \in Y$
$f _A$	:	restriction de $f : X \rightarrow Y$ à $A \subset X$
$\frac{\partial f}{\partial x}(y)$ ou $f'_y$	:	gradient de $f : x \mapsto f(x)$ en $y$
$f \circ g$	:	application composée de $f$ et de $g$

### Espaces fonctionnels

Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $X$  un espace de Banach.

$\  \cdot \ _X$	:	norme naturelle sur l'espace $X$
$(\cdot, \cdot)_X$	:	produit scalaire naturel sur l'espace de Hilbert $X$
$L^2(O; X)$	:	$\{u : O \rightarrow X ; u \text{ mesurable sur } O \text{ et } \int_O \ u(x)\ _X^2 dx < \infty\}$
$L^2(O)$	:	$L^2(O; \mathbb{R})$
$H^1(O)$	:	espace de Sobolev d'ordre 1
$\mathcal{P}_k(O; X)$	:	polynôme de degré $k$ sur $O \subset \mathbb{R}$ à coefficients dans $X$
$\mathcal{C}^k(O)$	:	fonctions $k$ fois continûment différentiables sur $O$

# Chapitre I

## Stratégies de calcul multiéchelles : état de l'art

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Stratégies de calcul multiéchelles en espace</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1	Stratégies basées sur la théorie de l'homogénéisation . . . . .	9
1.2	Autres méthodes d'enrichissement et de superposition . . . . .	14
1.3	Stratégies basées sur des méthodes de décomposition de domaine . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Stratégies de calcul multiéchelles en temps</b> . . . . .	<b>28</b>
2.1	Couplage de grilles temporelles et de schémas d'intégration : méthodes multi-pas en temps . . . . .	28
2.2	Méthodes de superposition et d'enrichissement . . . . .	30
2.3	Méthodes multiéchelles pour les chargements cycliques . . . . .	30
2.4	Méthodes de décomposition de domaine temporel : parallélisme en temps . . . . .	37

---

Ce chapitre dresse un état de l'art non exhaustif sur les stratégies de calcul multiéchelles développées récemment. Nous tenterons ici de décrire les caractéristiques importantes de telles stratégies : la définition des variables aux différentes échelles, la nature du problème à l'échelle macroscopique et l'obtention du comportement à cette échelle. On s'intéressera tout d'abord à l'aspect spatial. Les stratégies retenues seront regroupées en trois catégories : les méthodes dérivant de la théorie de l'homogénéisation classique, les méthodes de superposition ou d'enrichissement local et les méthodes basées sur des approches de décomposition de domaine. Pour l'aspect temporel, on discernera quatre catégories : les approches basées sur le couplage de grilles temporelles et de schémas d'intégration, les méthodes de calcul parallèle en temps, celles de superposition ou d'enrichissement local et enfin, les méthodes dédiées aux phénomènes cycliques.

## 1 Stratégies de calcul multiéchelles en espace

Bien que reposant sur des principes assez généraux, les stratégies de calcul seront présentées dans le cadre de la résolution d'un problème de mécanique classique. On considèrera donc l'étude des petites perturbations d'une structure  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  soumise à des efforts volumiques  $\underline{f}_d$  et des efforts de surface  $\underline{F}_d$  sur une partie  $\partial_2\Omega$  de la frontière. Sur la partie complémentaire  $\partial_1\Omega$ , les déplacements sont imposés (figure I.1).

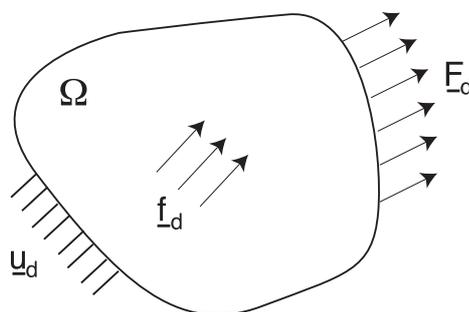


Figure I.1 – Problème de référence

On s'intéressera sauf mention contraire au cas de l'élasticité linéaire ;  $\mathbf{K}$  désigne le tenseur d'élasticité de Hooke. On note  $\boldsymbol{\sigma}$  le champ de contrainte,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le champ de déformation et  $\underline{u}$  le champ de déplacement. Le problème de référence s'écrit donc :

**Problème I.1** Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \underline{u})$  qui vérifie

– l'admissibilité statique (équations d'équilibre) :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \underline{f}_d = 0 \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} \underline{n} = \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2\Omega$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale sortante à  $\partial_2\Omega$ ,

– l'admissibilité cinématique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega$$

– la relation de comportement définie par

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} \text{ sur } \Omega$$

La difficulté pour traiter ce problème est due à des variations rapides du tenseur  $\mathbf{K}$  qui caractérisent une microstructure fortement hétérogène. L'utilisation d'une méthode éléments finis standard devient donc prohibitive pour le traitement des problèmes qui nous intéressent ici.

## 1.1 Stratégies basées sur la théorie de l'homogénéisation

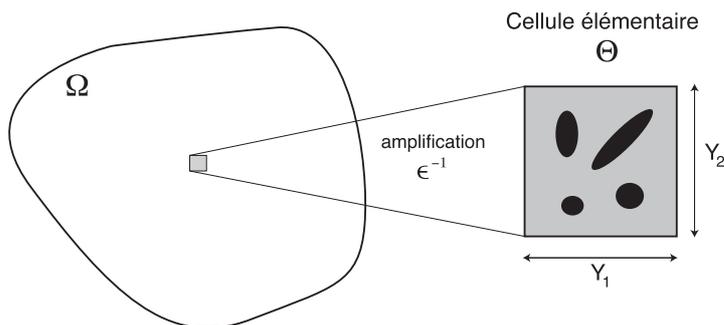
De nombreuses techniques d'analyse multiéchelle reposent sur le principe d'homogénéisation. Les premiers travaux introduisent des méthodes d'homogénéisation spatiales basées sur des études analytiques ou semi-analytiques à l'échelle microscopique permettant de définir un comportement macroscopique entre des quantités moyennes "effectives" [Eshelby, 1957, Hashin, 1962, Hill, 1965, Mori et Tanaka, 1973]. Cependant, elles ne permettaient pas de remonter aux propriétés locales de la solution. La complexité croissante des phénomènes microscopiques envisagés a donné naissance à des méthodes plus récentes, dites "Unit Cell Methods" [Christman et al., 1989, Tvergaard, 1990, Sluis et al., 1999a]. Elles proposent un moyen d'identifier un modèle macroscopique donné en résolvant une série "d'essais numériques" sur un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau considéré. Elles offrent de plus la possibilité d'obtenir des informations locales sur la solution. L'extension de ces méthodes au cadre non-linéaire, certes possible, se heurte à une difficulté majeure : celle de définir *a priori* ce modèle macroscopique. Toutes ces approches peuvent être qualifiées de phénoménologiques en ce sens qu'elles ne sont pas à proprement parler des méthodes de calcul multiéchelle.

La première méthode à répondre véritablement au problème posé est la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques initiée par Sanchez-Palencia [Sanchez-Palencia, 1974, Duvaut, 1976, Bensoussan et al., 1978, Sanchez-Palencia, 1980], basée sur l'analyse asymptotique. Dans ce paragraphe, nous rappelons les bases de cette théorie et présentons quelques stratégies de calcul dérivées de celle-ci.

### 1.1.1 Théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques en élasticité

#### ■ Cadre de la théorie

Cette théorie fut introduite pour le cas des milieux dont la microstructure consiste en la répétition  $\epsilon\mathbf{Y}$ -périodique d'une cellule élémentaire. Cette cellule élémentaire est agrandie par une homothétie de rapport  $\epsilon^{-1}$  et notée  $\Theta$  (figure 1.2).  $\epsilon$  désigne un paramètre d'homothétie permettant de passer de l'échelle macroscopique à l'échelle de la cellule élémentaire.  $\underline{x} \in \Omega$  décrit l'échelle macroscopique tandis que  $\underline{y} \in \Theta$  désigne la variable locale associée à  $\Theta$ . En dimension  $d$ , il existe donc une matrice  $\mathbb{A} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$  diagonale telle que  $\underline{x} = \epsilon(\underline{y} + \mathbb{A}\underline{Y})$ . Le comportement peut être représenté par un opérateur  $\mathbf{Y}$ -périodique  $\tilde{\mathbf{K}}(\underline{y})$  tel que  $\tilde{\mathbf{K}}(\underline{y}) = \tilde{\mathbf{K}}(\underline{y} + \mathbb{A}\underline{Y})$ ,  $\forall \mathbb{A} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$  diagonale. Le comportement à l'échelle macroscopique s'exprime alors sous la forme  $\mathbf{K}(\underline{x}) = \tilde{\mathbf{K}}(\frac{\underline{x}}{\epsilon}) = \tilde{\mathbf{K}}(\underline{y})$ .


 Figure 1.2 – Définition de la cellule élémentaire  $\Theta$ 

### ■ Développement asymptotique de la solution

Toutes les variables du problème 1.1, notées formellement  $\phi(\underline{x})$  sont alors supposées dépendre séparément des variables  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  et vérifier des conditions de  $\underline{Y}$ -périodicité par rapport à  $\underline{y}$ , soit

$$\phi(\underline{x}) = \tilde{\phi}(\underline{x}, \underline{y}) = \tilde{\phi}(\underline{x}, \underline{y} + \mathbb{A}\underline{Y}), \forall \mathbb{A} \in \mathbb{Z}^{d \times d} \text{ diagonale}$$

La différentiation d'une variable s'exprimera alors

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \phi(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \tilde{\phi}(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \underline{y}} \tilde{\phi}(\underline{x}, \underline{y})$$

En particulier, on notera

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_x(\tilde{\underline{u}}) + \epsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\tilde{\underline{u}}) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \operatorname{div}_x \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_y \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_x$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_y$  (respectivement  $\operatorname{div}_x$  et  $\operatorname{div}_y$ ) désignent les parties symétriques des gradients (respectivement les divergences) par rapport à  $\underline{x}$  et à  $\underline{y}$ . Les variables sont alors recherchées sous la forme d'un développement asymptotique en  $\epsilon$ , tous les termes du développement vérifiant la  $\underline{Y}$ -périodicité par rapport à  $\underline{y}$ :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \underline{u}^{(i)}(\underline{x}, \underline{y}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \sum_{i=-1}^{\infty} \epsilon^i \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}(\underline{x}, \underline{y}), \quad \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \sum_{i=-1}^{\infty} \epsilon^i \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\underline{x}, \underline{y})$$

### ■ Résolution du problème

Les équations de compatibilité, d'équilibre et de comportement peuvent alors être développées sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=-1}^{\infty} \epsilon^i \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} &= \epsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(0)}) + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(i)}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(i+1)})) \\ \epsilon^{-1} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^{(-1)} + \epsilon (\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \underline{f}_d) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^{\infty} \epsilon^i (\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^{(i)}) &= 0 \\ \sum_{i=-1}^{\infty} \epsilon^i \boldsymbol{\sigma}^{(i)} &= \sum_{i=-1}^{\infty} \epsilon^i \tilde{\mathbf{K}}(\underline{y}) \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \end{aligned}$$

On peut alors écrire une succession de problèmes aux différents ordres en  $\epsilon$ .

Problème à l'ordre (-1) :

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^{(-1)} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(-1)} = \tilde{\mathbf{K}}(\underline{y}) \boldsymbol{\varepsilon}^{(-1)} = \tilde{\mathbf{K}}(\underline{y}) \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(0)})$$

Ce problème admet la solution  $\boldsymbol{\sigma}^{(-1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(-1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(0)}) = 0$ . On a donc  $\underline{u}^{(0)} = \underline{u}^{(0)}(\underline{x})$ , variable à variation lente, macroscopique.

Problème à l'ordre (0) :

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \tilde{\mathbf{K}}(\underline{y}) \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \tilde{\mathbf{K}}(\underline{y}) (\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(0)}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(1)}))$$

Ce problème est défini sur la cellule élémentaire  $\Theta$ . En considérant  $\underline{x}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(0)})$  comme des données, on peut formuler le problème sur  $\Theta$  en la recherche d'un champ  $\underline{u}^1 \in \mathbf{U}_{per}^Y = [H_{per}^1(\Theta)]^d$ , espace de champs vérifiant des conditions de périodicité sur  $\partial\Theta$ , tel que

$$\int_{\Theta} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{v}) : \tilde{\mathbf{K}} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(1)}) \, dy = - \int_{\Theta} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{v}) : \tilde{\mathbf{K}} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(0)}) \, dy, \quad \forall \underline{v} \in \mathbf{U}_{per}^Y$$

On montre que ce problème admet une unique solution en déformation. Par linéarité, il existe un champ de tenseur  $\mathbf{H}(\underline{y})$  d'ordre 4, défini sur  $\Theta$ , vérifiant des conditions de périodicité sur  $\partial\Theta$ , tel que la solution vérifie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(1)}) &= \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(0)}) \\ \implies \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(0)}) + \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(0)}) \\ \implies \boldsymbol{\sigma}^{(0)} &= (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{H}) \boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(0)}) \end{aligned}$$

Problème à l'ordre (1) :

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \underline{f}_d = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \tilde{\mathbf{K}}(\underline{y}) (\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(1)}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(2)}))$$

En considérant à présent  $\underline{x}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(1)})$  comme des données, ce problème se reformule de la manière suivante : trouver  $\underline{u}^2 \in \mathbf{U}_{per}^Y$  tel que,  $\forall \underline{v} \in \mathbf{U}_{per}^Y$

$$\int_{\Theta} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{v}) : \tilde{\mathbf{K}} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{(2)}) \, dy = - \int_{\Theta} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{v}) : \tilde{\mathbf{K}} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(1)}) \, dy + \int_{\Theta} \underline{v} \cdot (\underline{f}_d + \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{(0)}) \, dy$$

Les méthodes d'homogénéisation du premier ordre ne tiennent pas compte de la solution à ce problème mais uniquement de la condition d'existence d'une solution qui s'écrit

$$\int_{\Theta} (\underline{f}_d + \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{(0)}) = 0$$

En notant  $\langle \cdot \rangle_{\Theta} = \int_{\Theta} \cdot \, dy$  l'opérateur moyenne sur  $\Theta$  et en utilisant les résultats du problème à l'ordre 0, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x (\langle \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \rangle_{\Theta}) + \langle \underline{f}_d \rangle_{\Theta} &= 0 \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \rangle_{\Theta} &= \langle \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{H} \rangle_{\Theta} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \rangle_{\Theta} \\ \text{avec } \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \rangle_{\Theta} &= \boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^{(0)}) \end{aligned}$$

La condition d'existence du problème à l'ordre 1 nous a donc donné la formulation d'un problème dit macroscopique sur des quantités moyennes : une contrainte macro  $\boldsymbol{\sigma}^M = \langle \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \rangle_{\Theta}$ , une déformation macro  $\boldsymbol{\varepsilon}^M = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \rangle_{\Theta}$  ainsi qu'un déplacement macro  $\underline{u}^M = \underline{u}^{(0)}$ . On a de plus obtenu un opérateur de comportement homogénéisé  $\mathbf{K}^M = \langle \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{H} \rangle_{\Theta}$  représentant le comportement à l'échelle macroscopique. Le problème macro est un problème d'élasticité classique.

### ■ Bilan et limitations de l'approche

Cette approche est donc une véritable stratégie de calcul à deux échelles puisqu'elle permet non seulement de formuler un problème à l'échelle macroscopique mais aussi de remonter aux propriétés locales de la solution. En effet, connaissant la solution macro  $\underline{u}^M$ , le champ de contraintes locales est obtenu grâce à l'opérateur de localisation  $(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{H})$ . La théorie de l'homogénéisation repose cependant sur des hypothèses fortes : la périodicité et un rapport d'échelle très grand. De plus, le matériau ne pouvant être homogénéisé au niveau des frontières, celles-ci nécessitent un traitement particulier [Auriel et al., 1982, Dumontet, 1986].

#### 1.1.2 Extensions de la théorie de l'homogénéisation au cadre non-linéaire

La théorie classique de l'homogénéisation des milieux périodiques a donné lieu à diverses extensions au cadre non-linéaire. Certaines approches [Devries et al., 1989, Fish et al., 1997] s'appuient sur des développements asymptotiques de toutes les variables du problème : déformations anélastiques, paramètre d'endommagement, ... Ces approches sont cependant souvent limitées à des comportements matériaux et des géométries microscopiques simples.

Des stratégies dites d'analyse globale-locale furent également proposées. Elles sont basées sur une résolution de deux problèmes imbriqués, un à l'échelle macroscopique, généralement résolu par une technique éléments finis standard, et l'autre à l'échelle microscopique. Ce dernier peut être résolu par une technique éléments finis standard [Smit et al., 1998, Feyel et Chaboche, 2000] ou par d'autres techniques comme la "Voronoi Cell Finite Element Method" [Ghosh et al., 1995]. Ces stratégies ne fournissent pas une forme "close" de la loi de comportement macroscopique mais déduisent la relation entre les quantités duales macro en chaque point d'intérêt de la structure en résolvant des problèmes à l'échelle microscopique. Elles ne nécessitent donc pas d'hypothèses *a priori* sur le modèle macroscopique.

### ■ Éléments finis à deux niveaux : méthode $FE^2$

La méthode des éléments finis à deux niveaux ( $FE^2$ ) [Feyel et Chaboche, 2000] propose de discrétiser la structure macroscopique par des éléments finis et d'associer à chaque point d'intégration un VER du matériau périodique, noté  $\Theta$ . L'idée est de rechercher la solution sur chaque cellule comme une décomposition en partie macro, notée  $M$ , et partie micro, notée  $m$ , à qui on impose des conditions de périodicité sur

$\partial\Theta$ . Le découplage s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) &= \boldsymbol{\sigma}^M + \boldsymbol{\sigma}^m(\underline{x}) \quad \text{avec } \boldsymbol{\sigma}^M = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Theta} \\ \underline{u}(\underline{x}) &= \underline{u}^M(\underline{x}) + \underline{u}^m(\underline{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^M \underline{x} + \underline{u}^m \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) &= \boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^m(\underline{x})) \quad \text{avec } \boldsymbol{\varepsilon}^M = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Theta}\end{aligned}$$

où  $\underline{x}$  désigne la coordonnée locale associée à la cellule élémentaire  $\Theta$ .  $\boldsymbol{\sigma}^M$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  sont constants sur la cellule et correspondent aux valeurs de la contrainte macro et de la déformation macro au point de Gauss considéré. Le principe de résolution est très simple : la solution du problème macroscopique est recherchée de manière standard par un algorithme itératif (de type Newton-Raphson par exemple). A chaque itération, la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  est calculée aux points de Gauss (elle est prise égale à zéro à l'initialisation) et définit les conditions aux limites pour la cellule élémentaire associée. Un problème micro non-linéaire est alors résolu de manière itérative sur chaque cellule (par un algorithme de type Newton-Raphson par exemple) avec les conditions aux limites précédentes. A convergence, ce problème "micro" permet de calculer la contrainte macro  $\boldsymbol{\sigma}^M = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Theta}$  ainsi que la matrice de rigidité tangente  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Une série de problèmes "micro" peuvent alors être résolus pour obtenir un opérateur tangent homogénéisé  $\mathbf{K}^M$ . La connaissance de cet opérateur permet d'assembler et de résoudre le problème macro et de trouver un incrément de déformation macro  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^M$ . La convergence est atteinte lorsque la contrainte moyenne  $\boldsymbol{\sigma}^M$  vérifie les équations d'équilibre macro. Notons que les calculs micro sont complètement indépendants et sont donc aisément parallélisables [Feyel et Chaboche, 2000].

Cette technique, certes performante, possède néanmoins les mêmes limitations que la théorie de l'homogénéisation classique ; elle n'est valide que lorsque les échelles sont bien séparées.

### ■ Milieux continus généralisés au niveau macroscopique

Dans le cas où les échelles ne peuvent être séparées, une amélioration consiste à introduire au niveau macroscopique des milieux continus généralisés de type Cosserat ou second gradient [Zhu et al., 1997, Forest et Sab, 1998, Sluis et al., 1999b, Kouznetsova et al., 2002, Feyel, 2003] afin de mieux rendre compte des forts gradients au niveau microscopique (bandes de cisaillement, singularités, ...). Le comportement du milieu continu généralisé, généralement très difficile à construire, est ici déterminé de manière automatique.

La stratégie proposée dans [Kouznetsova et al., 2002] considère à l'échelle macroscopique un milieu continu du second gradient. A l'échelle microscopique, la solution est alors recherchée sous la forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) &= \boldsymbol{\sigma}^M(\underline{x}) + \boldsymbol{\sigma}^m(\underline{x}) = \boldsymbol{\Sigma}^M + \mathbf{Q}^M \cdot \underline{x} + \boldsymbol{\sigma}^m(\underline{x}) \\ \underline{u}(\underline{x}) &= \underline{u}^M(\underline{x}) + \underline{u}^m(\underline{x}) = \mathbf{E}^M \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \mathbf{G}^M : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{u}^m(\underline{x})\end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}^M$  et  $\mathbf{E}^M$  sont des tenseurs symétriques d'ordre 2 constants sur la cellule.  $\mathbf{Q}^M$  et  $\mathbf{G}^M$  sont des tenseurs d'ordre 3 également constants sur la cellule et possédant des propriétés de symétrie ad hoc. On impose aux quantités "micro" des conditions de périodicité sur les frontières de la cellule. La stratégie de résolution suit le même

principe que les stratégies du premier ordre. La conséquence d'une telle approche est que les contraintes et déformations "macro" ne sont plus constantes au niveau de la cellule et permettent ainsi de prendre en compte au niveau microscopique les gradients du niveau macroscopique.

## ■ Bilan

Bien que formulées dans un cadre général autorisant la prise en compte de comportements matériau très complexes, ces stratégies ne sont pas véritablement adaptées au cadre des problèmes non-linéaires d'évolution. En effet, le problème est toujours réduit à la résolution successive de problèmes "spatiaux", chacun d'entre eux étant homogénéisé.

## 1.2 Autres méthodes d'enrichissement et de superposition

Les techniques d'homogénéisation décrites précédemment permettent de définir un problème macroscopique à partir d'études à l'échelle microscopique. Elles opèrent donc un passage du micro vers le macro. Les stratégies présentées dans cette partie adoptent un point de vue opposé. Leur principe revient généralement à superposer à la solution d'un problème macroscopique classique un enrichissement dans des régions d'intérêt. L'enrichissement peut être réalisé en résolvant classiquement des problèmes à une échelle plus fine, comme c'est le cas dans la méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998], la méthode de projection de Dirichlet hiérarchique [Zohdi et al., 1996, Oden et Zohdi, 1997], les méthodes de type éléments finis hiérarchiques [Ibrahimbegović et Markovic, 2003] ou encore les méthodes multi-grilles pour les milieux périodiques [Fish et Belsky, 1995]. Il peut également consister à augmenter l'espace de recherche de la solution en introduisant au niveau macroscopique une connaissance analytique ou numérique de la solution [Moës et al., 1999, Strouboulis et al., 2000]; ces dernières démarches sont essentiellement issues de la méthode de la partition de l'unité [Melenk et Babuska, 1996]. Les méthodes variationnelles multiéchelles [Hughes, 1995] proposent également un principe général de superposition permettant de tenir compte au niveau macroscopique des phénomènes microscopiques "insolubles" numériquement. Cette méthode est classiquement utilisée pour améliorer la qualité de l'approximation éléments finis classique en superposant à la solution des fonctions localisées par élément, ou fonctions bulles. La solution microscopique est alors prise en compte de manière explicite.

### 1.2.1 Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique

La méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique (HDPM) [Zohdi et al., 1996, Oden et Zohdi, 1997, Oden et al., 1999], également basée sur les méthodes d'homogénéisation, se démarque cependant de ces dernières. Elle consiste à résoudre un problème homogénéisé sur un maillage régulier dont un élément représente une cellule représentative du matériau considéré. Un indicateur de sensibilité est proposé pour localiser les zones les plus erronées. Une correction est alors apportée sur certains éléments de ce maillage en résolvant sur les cellules correspondantes un problème aux conditions aux limites homogènes de type Dirichlet. Enfin, un estimateur d'erreur *a posteriori* est proposé afin de déterminer la qualité de la solution corrigée.

Nous précisons ici les étapes de cette stratégie.

**Etape 1 :** Soit  $\mathcal{T} = \{\Omega_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  une partition sans recouvrement de  $\Omega$  (figure 1.3). Un opérateur d'élasticité homogénéisé  $\mathbf{K}^M$  est déterminé par une technique d'homogénéisation standard.

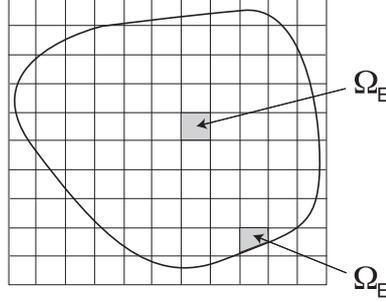


Figure 1.3 – Partition sans recouvrement  $\mathcal{T} = \{\Omega_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  de  $\Omega$

**Etape 2 :** La solution du problème homogénéisé  $\underline{u}^M$  est déterminée en résolvant le problème suivant : trouver  $\underline{u}^M \in \mathbf{u}_{ad} = \left\{ \underline{v} \in \mathbf{u} = [H^1(\Omega)]^d / \underline{v} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega \right\}$  qui vérifie :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \mathbf{K}^M \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^M) dx = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* dx + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* ds, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathbf{u}_0$$

où  $\mathbf{u}_0$  est l'espace vectoriel associé à  $\mathbf{u}_{ad}$ .

**Etape 3 :** Un estimateur de sensibilité basé sur la solution  $\underline{u}^M$  permet de déterminer les cellules  $\mathbf{E}_{mod} \subset \mathbf{E}$  qui nécessitent une correction.

**Etape 4 :** Soit  $E \in \mathbf{E}_{mod}$ . On note  $\underline{u}_E^M = \underline{u}_{|\Omega_E}^M$ . La solution sur la cellule  $\Omega_E$  peut alors être améliorée localement en cherchant une correction  $\underline{u}_E^m \in \mathbf{u}_{E,0} = \left\{ \underline{v} \in [H^1(\Omega_E)]^d / \underline{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega \right\}$  qui vérifie :

$$\int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^m + \underline{u}_E^M) dx = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* dx + \int_{\partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}_E^* ds, \quad \forall \underline{u}_E^* \in \mathbf{u}_{E,0}$$

La solution corrigée s'écrit alors

$$\underline{u} = \underline{u}^M + \sum_{E \in \mathbf{E}_{mod}} \mathcal{E}_E(\underline{u}_E^m) = \underline{u}^M + \underline{u}^m$$

où  $\mathcal{E}_E$  est un opérateur de prolongement de  $\mathbf{u}_{E,0}$  dans  $\mathbf{u}$  tel que  $\mathcal{E}_E(\underline{u}_E^m) = 0$  sur  $\Omega \setminus \Omega_E$ .

**Etape 5 :** Un estimateur d'erreur *a posteriori* permet alors de déterminer l'erreur de la solution améliorée. Si celle-ci n'est pas satisfaisante, l'opérateur homogénéisé  $\mathbf{K}^M$  est amélioré et les étapes 2 à 5 sont répétées. Si après cette nouvelle étape de correction l'erreur n'est toujours pas satisfaisante, une partition plus grossière du domaine  $\mathcal{T}'$  est alors définie et l'algorithme est repris depuis le début.

### 1.2.2 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin, proposée par Ben Dhia [Ben Dhia, 1998, Ben Dhia et Rateau, 2001] est une méthode originale proposant de superposer à un problème macroscopique une analyse plus fine dans des régions d'intérêt. Le raccord, écrit de manière faible sur le volume et non pas sur les interfaces comme c'est le cas dans les approches plus classiques, permet d'envisager un couplage aisé de modèles différents, aussi bien au niveau de leur discrétisation que des équations qui les régissent.

Nous décrivons ici le principe de cette méthode dans le cas où les modèles sont tous régis par les équations de l'élastostaticité classique et où l'on cherche à étudier de manière fine une région  $\Omega^m$  contenue dans le domaine initial  $\Omega$  (figure 1.4).

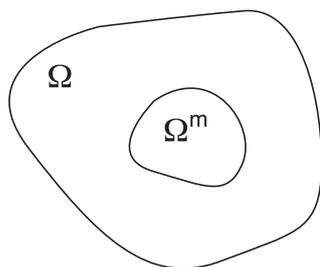


Figure 1.4 – Définition d'un domaine d'intérêt  $\Omega^m \subset \Omega$

L'idée est alors de chercher un couple  $\underline{u} = (\underline{u}^M, \underline{u}^m) \in \mathbf{u}_{ad} \times \mathbf{u}^m \stackrel{def}{=} \bar{\mathbf{u}}_{ad}$  constitué d'une solution grossière  $\underline{u}^M$  définie sur tout le domaine  $\Omega$  et d'une solution fine  $\underline{u}^m$  définie uniquement sur le domaine  $\Omega^m$ . L'espace auquel appartient la solution fine est simplement  $\mathbf{u}^m = [H^1(\Omega^m)]^d$ . Le problème définissant ce couple est le suivant : trouver  $(\underline{u}, \underline{\lambda}^m) \in \bar{\mathbf{u}}_{ad} \times \mathbf{u}^m$  tel que  $\forall (\underline{v}, \underline{\mu}^m) \in \bar{\mathbf{u}}_0 \times \mathbf{u}^m$ ,

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{u}, \underline{v}) + b(\underline{\lambda}^m, \underline{v}) &= l_\alpha(\underline{v}) \\ b(\underline{\mu}^m, \underline{u}) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{u}, \underline{v}) &= \int_{\Omega} \alpha \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}^M) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^M) dx + \int_{\Omega^m} (1 - \alpha) \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}^m) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^m) dx \\ b(\underline{\mu}^m, \underline{u}) &= (\underline{\mu}^m, \underline{u}^M - \underline{u}^m)_{1, \Omega^m} \\ l_\alpha(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \alpha \underline{f}_d \cdot \underline{v}^M dx + \int_{\Omega^m} (1 - \alpha) \underline{f}_d \cdot \underline{v}^m dx + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^M ds \end{aligned}$$

où le paramètre  $\alpha$  est un champ scalaire tel que  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\alpha(\underline{x}) = 1, \forall \underline{x} \in \Omega \setminus \Omega^m$ .  $(\cdot, \cdot)_{1, \Omega^m}$  désigne le produit scalaire naturel sur l'espace de Hilbert  $\mathbf{u}^m$ .

C'est donc une formulation mixte où le multiplicateur de Lagrange  $\underline{\lambda}^m$  a été introduit pour garantir la contrainte d'égalité des champs macro et micro au sens faible sur la zone de jonction  $\Omega^m$ . La solution est alors définie par

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^M & \text{sur } \Omega \setminus \Omega^m \\ \alpha \underline{u}^M + (1 - \alpha) \underline{u}^m & \text{sur } \Omega^m \end{cases}$$

### 1.2.3 Méthodes basées sur la partition de l'unité

#### ■ PUM

La méthode de la partition de l'unité [Melenk et Babuska, 1996] peut être vue comme une généralisation de la méthode des éléments finis. Elle propose en effet un cadre mathématique rigoureux pour la construction d'espaces d'approximation conforme qui ne sont pas forcément des espaces de fonctions polynômiales. Nous rappelons ici le principe de cette méthode.

Soit  $\mathcal{T} = \{\Omega_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  un ensemble d'ouverts, appelés *patches*, réalisant un recouvrement de  $\Omega$ . Sur chaque patch  $i \in \mathbf{I}$ , on se donne un ensemble de fonctions  $\Psi^{(i)} = \{\underline{\psi}_j^{(i)}\}_{j \in \mathbf{J}_i}$  possédant des propriétés d'approximation désirées et telles que  $\underline{\psi}_j^{(i)} \in [H^1(\Omega_i)]^d$ . Le choix de ces fonctions sera explicité dans les paragraphes concernant les méthodes issues de la partition de l'unité. L'approximation *PUM* sur le domaine  $\Omega$  est définie de la manière suivante :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j \in \mathbf{J}_i} a_j^{(i)} \underline{\psi}_j^{(i)}(\underline{x}) \right)$$

où les  $a_j^{(i)}$  sont des coefficients constants, inconnues de notre problème. L'ensemble  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  est constitué de fonctions continues formant une partition de l'unité de  $\Omega$  associée à la partition  $\mathcal{T}$ . Elles doivent en particulier vérifier :

$$\begin{aligned} \text{support}(\varphi_i) &\subset \overline{\Omega}_i, \quad \forall i \in \mathbf{I} \\ \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i &= 1 \text{ sur } \Omega \end{aligned}$$

En pratique, ces fonctions sont les fonctions de forme classiques, linéaires, d'un maillage éléments finis standard. Une fonction  $\varphi_i$ ,  $i \in \mathbf{I}$ , est associée au noeud  $i$  du maillage et le patch  $\Omega_i$  comprend l'ensemble des éléments contenant ce noeud (figure 1.5).

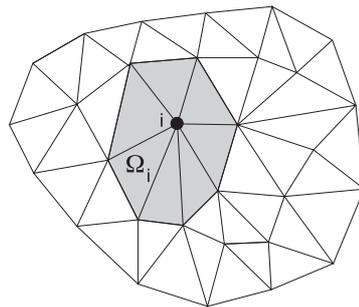


Figure 1.5 – Triangulation de  $\Omega$  : définition du *patch*  $\Omega_i$  associé au noeud  $i$

Il est intéressant de noter que cette approximation est capable de reproduire n'importe quelle fonction ; supposons par exemple qu'on connaisse la solution  $\underline{u}$  du problème. En définissant simplement  $\Psi^{(i)} = \underline{u}|_{\Omega_i}$ , on remarque qu'avec un jeu de coefficients unitaires, on obtient

$$\underline{u}_h = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i \underline{u} = \underline{u}$$

Cette propriété est rendue possible car la famille  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  forme une partition de l'unité de  $\Omega$ . Notons également que si  $\Psi^{(i)}$  contient une base orthonormée de vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ , soit  $\Psi^{(i)} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d\}$ , l'approximation s'écrit

$$\underline{u}_h = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1}^d a_j^{(i)} \underline{e}_j \right) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \underline{a}^{(i)}$$

qui est l'approximation éléments finis classique où  $\underline{a}^{(i)}$  représente le déplacement du noeud  $i$ .

### ■ GFEM, XFEM

La méthode des éléments finis généralisés GFEM [Strouboulis et al., 2000] et la méthode des éléments finis étendus XFEM [Moës et al., 1999] combinent une approche éléments finis standard (FEM) avec la méthode de partition de l'unité. L'espace d'approximation FEM est enrichi par des fonctions spéciales provenant d'une certaine connaissance du problème que l'on cherche à traiter. Le champ solution est alors recherché sous la forme

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \underline{a}^{(i)} + \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j \in \mathbf{J}_i} b_j^{(i)} \underline{\psi}_j^{(i)}(\underline{x}) \right)$$

où  $\forall i \in \mathbf{I}$ ,  $\underline{a}^{(i)} \in \mathbb{R}^d$  et  $\forall j \in \mathbf{J}_i$ ,  $b_j^{(i)} \in \mathbb{R}$ . Ces coefficients sont les inconnues de notre problème.

Des fonctions spéciales peuvent par exemple être ajoutées sur les éléments proches d'une singularité géométrique puisqu'on connaît en ces endroits une expression analytique de la solution.

La méthode GFEM propose également de construire ces fonctions en résolvant numériquement à l'échelle fine un certain nombre de problèmes élémentaires, appelés "handbooks". Cette technique permet en particulier de traiter des problèmes de structures contenant des centaines voire des milliers de trous ou d'inclusions. Dans ce cas, une série de handbooks peut être associée à un élément du maillage grossier. Les inclusions intersectant cet élément sont isolées. On résoud alors une série de problèmes sur un domaine comprenant uniquement ces inclusions et pour des chargements simples de type Dirichlet ou Neumann (figure 1.6).

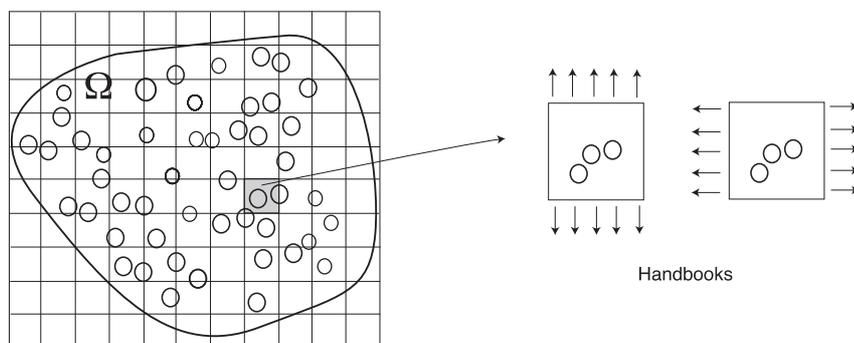


Figure 1.6 – Méthode GFEM : définition des handbooks

La méthode XFEM propose un choix de fonctions spéciales pour traiter des problèmes où la solution présente des discontinuités en s'affranchissant des problèmes de maillage. Les discontinuités peuvent par exemple apparaître sur le déplacement en présence de fissures ou sur sa dérivée normale sur une surface entre des matériaux de nature différente. La description géométrique de ces surfaces de discontinuité est réalisée par la technique des level-sets, qui consiste à représenter une surface  $\Gamma$  comme l'iso-zéro d'une fonction. Un choix classique consiste à prendre la fonction distance signée à cette surface, notée  $\xi_\Gamma$ . La description numérique de cette fonction est une interpolation éléments finis classique sur le maillage initial ou un maillage raffiné.

Dans le cas des problèmes de propagation de fissures, deux types d'enrichissement sont alors proposés : sur l'ensemble  $\mathbf{I}^p$  des noeuds des éléments contenant une pointe de fissure, on ajoute des fonctions spéciales correspondant à la solution analytique d'une fissure dans un milieu infini. Sur l'ensemble  $\mathbf{I}^f$  des noeuds des éléments coupés par une fissure  $\Gamma$ , on ajoute des fonctions spéciales rendant compte de la discontinuité du déplacement (voir figure 1.7).

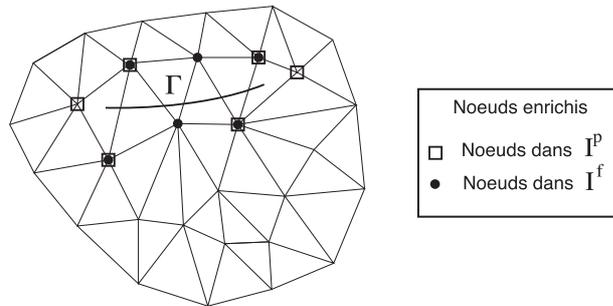


Figure 1.7 – Méthode XFEM : définition des ensembles de noeuds enrichis  $\mathbf{I}^p$  et  $\mathbf{I}^f$

Soit  $i \in \mathbf{I}^f$ , on choisira  $\Psi^{(i)} = \{H(\xi_\Gamma(\underline{x}))|_{\underline{e}_1}, \dots, H(\xi_\Gamma(\underline{x}))|_{\underline{e}_d}\}$ , où  $H$  représente la fonction Heavyside. Les autres noeuds du maillage ne sont pas enrichis.

Dans le cas d'une surface  $\Gamma$  entre des matériaux de nature différente, on choisira d'enrichir les noeuds des éléments coupés par cette surface par l'ensemble de fonctions  $\Psi^{(i)} = \{|\xi_\Gamma(\underline{x})|_{\underline{e}_1}, \dots, |\xi_\Gamma(\underline{x})|_{\underline{e}_d}\}$ . C'est donc la fonction distance elle-même qui est utilisée pour rendre compte d'un saut dans les dérivées du déplacement.

### ■ Bilan et limitations

Les approches basées sur la partition de l'unité permettent d'obtenir une amélioration conséquente de la qualité de la solution par rapport aux approches éléments finis standards en s'affranchissant des problèmes de maillage. Cependant, une attention particulière doit être portée sur le choix des fonctions spéciales afin d'éviter les problèmes de dépendances linéaires avec les fonctions éléments finis classiques. En effet, dans ce cas, le problème devient singulier. Des techniques de factorisation incomplète ou de pénalisation peuvent être utilisées pour pallier ce problème. Une autre limitation de cette approche concerne l'intégration numérique des formulations variationnelles. Les fonctions spéciales ajoutées peuvent en effet être très complexes et nécessiter un effort conséquent pour leur intégration lors de la construction du

problème discrétisé. Le gain en temps de calcul obtenu sur les problèmes de maillage et de remaillage est donc en partie compensé par le coût de l'intégration numérique.

### 1.2.4 Méthode variationnelle multiéchelle

Cette méthode, initialement proposée par Hughes [Hughes, 1995], part du principe que toutes les échelles présentes dans un problème ne sont pas solubles numériquement. L'utilisation d'une discrétisation standard au niveau macroscopique fournit une solution souvent médiocre. L'idée est alors de proposer un principe de superposition consistant à prendre en compte au niveau macroscopique les effets des petites échelles en résolvant, généralement de manière analytique, des problèmes "locaux". L'effet des petites échelles est alors condensé au niveau macroscopique, ce qui conduit à la définition d'un problème macroscopique "quasi-exact".

#### ■ Principe

On considère le problème de référence 1.1 avec conditions de Dirichlet, soit  $\partial\Omega = \partial_1\Omega$ . La formulation variationnelle de ce problème est la suivante :

trouver  $\underline{u} \in \mathbf{U}_{ad} = \{\underline{v} \in [H^1(\Omega)]^d / \underline{v}|_{\partial\Omega} = \underline{u}_d\}$  tel que

$$a(\underline{u}, \underline{u}^*) = l(\underline{u}^*), \quad \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0 \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{U}_0$  désigne l'espace vectoriel associé à  $\mathbf{U}_{ad}$  et

$$a(\underline{u}, \underline{u}^*) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) \, dx = (\mathcal{L}\underline{u}, \underline{u}^*)$$

$$l(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, dx = (\underline{f}_d, \underline{u}^*)$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire naturel sur  $[L^2(\Omega)]^d$  et  $\mathcal{L}$  désigne l'opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{L}\underline{u} = -\text{div}(\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}))$$

La solution peut être découpée en une partie macroscopique, notée  $\underline{u}^M$ , et une partie microscopique, notée  $\underline{u}^m$ , telles que

$$\underline{u} = \underline{u}^M + \underline{u}^m$$

L'échelle macroscopique appartiendra à un espace d'approximation  $\mathbf{U}_{ad}^M$  de dimension finie. La partie microscopique représente la partie "insoluble", au sens numérique, de la solution. Elle appartient *a priori* à un espace de dimension infinie, noté  $\mathbf{U}_0^m$  et tel que

$$\mathbf{U}_{ad} = \mathbf{U}_{ad}^M \oplus \mathbf{U}_0^m$$

Une formulation classique du problème macro consiste à rechercher une solution  $\underline{u}^M$  du problème (1.1) dans l'espace  $\mathbf{U}_{ad}^M$ , telle que

$$a(\underline{u}^M, \underline{u}^{M*}) = l(\underline{u}^{M*}), \quad \forall \underline{u}^{M*} \in \mathbf{U}_0^M$$

Ce problème est bien sûr une approximation du problème initial qui ne tient pas compte de l'échelle microscopique. Afin d'améliorer la définition du problème macro,

on considère la formulation exacte du problème initial, qui s'écrit : trouver  $(\underline{u}^M, \underline{u}^m) \in \mathbf{u}_{ad}^M \times \mathbf{u}_0^m$  tel que

$$a(\underline{u}^M + \underline{u}^m, \underline{u}^{M^*} + \underline{u}^{m^*}) = l(\underline{u}^{M^*} + \underline{u}^{m^*}), \quad \forall (\underline{u}^{M^*}, \underline{u}^{m^*}) \in \mathbf{u}_0^M \times \mathbf{u}_0^m$$

Le problème microscopique est alors le suivant : trouver  $\underline{u}^m \in \mathbf{u}_0^m$  tel que

$$(\mathcal{L}\underline{u}^m, \underline{u}^{m^*}) = (\underline{f}_d - \mathcal{L}\underline{u}^M, \underline{u}^{m^*}) \quad (1.2)$$

La solution exacte de ce problème peut s'écrire de la manière suivante :

$$\underline{u}^m(\underline{x}) = - \int_{\Omega} g(\underline{y}, \underline{x}) (\mathcal{L}\underline{u}^M - \underline{f}_d)(\underline{y}) d\underline{y}$$

où  $g(\underline{y}, \underline{x})$  est la fonction de Green associée à l'opérateur  $\mathcal{L}$ .

On notera  $\underline{u}^m \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(\mathcal{L}\underline{u}^M - \underline{f}_d)$ . Posons

$$\begin{aligned} B(\underline{u}^M, \underline{u}^{M^*}; g) &= a(\underline{u}^M, \underline{u}^{M^*}) + (\mathcal{M}(\mathcal{L}\underline{u}^M), \mathcal{L}^* \underline{u}^{M^*}) \\ \text{et} \quad L(\underline{u}^{M^*}; g) &= l(\underline{u}^{M^*}) + (\mathcal{M}(\underline{f}_d), \mathcal{L}^* \underline{u}^{M^*}) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}^*$  désigne l'opérateur adjoint de  $\mathcal{L}$ . Ici, on a  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ .

Le problème macroscopique exact peut alors être formulé de la manière suivante : trouver  $\underline{u}^M \in \mathbf{u}_{ad}^M$  tel que

$$B(\underline{u}^M, \underline{u}^{M^*}; g) = L(\underline{u}^{M^*}; g), \quad \forall \underline{u}^{M^*} \in \mathbf{u}_0^M \quad (1.3)$$

La solution du problème (1.3) est une solution macro "exacte" au sens où la partie de la solution non résolue est prise en compte dans la formulation de ce problème. Ce principe étant posé, un point crucial de cette méthode repose sur une bonne approximation de la solution des problèmes micro, ou en d'autres termes de la fonction de Green  $g$ . Cette méthode, bien adaptée aux méthodes spectrales ou méthodes de Fourier, ne s'applique cependant pas facilement aux éléments finis pour lesquelles les espaces d'approximation ne sont pas suffisamment réguliers. Notons en particulier que dans le cas où l'échelle macroscopique est représentée par des éléments finis linéaires classiques, les opérateurs différentiels doivent être réinterprétés au sens des distributions.

## ■ p-raffinement hiérarchique et fonctions bulles

Afin d'adapter cette démarche au cadre des éléments finis, les auteurs proposent de choisir pour l'espace microscopique des enrichissements uniquement locaux aux éléments ou à un nombre restreint d'éléments. Soit  $\{\Omega_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  l'ensemble des éléments finis de la discrétisation de  $\Omega$  (figure 1.8(a)). L'espace micro pourra par exemple contenir les fonctions qui s'annulent sur les frontières  $\partial\Omega_E$  des éléments. Ces fonctions sont appelées fonctions bulles. Le problème (1.2) définissant la solution microscopique se transforme donc en une série de problèmes indépendants par élément. Cette approximation, certes très pratique, est relativement pauvre. Un choix plus performant consiste à prendre comme fonctions micro des fonctions éléments finis

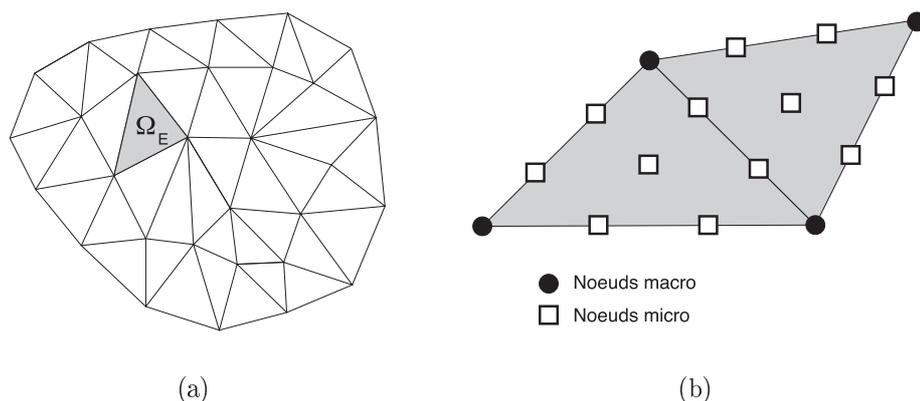


Figure 1.8 – (a) Maillage éléments finis "macro" standard de  $\Omega$ . (b) Définition des noeuds d'enrichissement "micro" pour la version éléments finis hiérarchiques de degré  $p=3$

d'ordre  $p$ , complémentaires des fonctions de forme éléments finis usuelles, linéaires (figure 1.8(b)). Ces fonctions ne sont plus localisées sur un élément mais sur un nombre restreint d'éléments (2 en 2D). Les problèmes micro (1.2) sont donc des problèmes éléments finis standards restreints à un petit ensemble d'éléments. Si on désire augmenter la qualité de la solution macro, il suffit d'augmenter le degré  $p$  de raffinement. En l'occurrence, lorsque  $p \rightarrow \infty$ , le problème macroscopique ainsi défini tend vers le problème macroscopique exact.

### ■ Bilan

Les méthodes variationnelles multiéchelles permettent donc d'améliorer les approximations standards éléments finis en prenant en compte des effets microscopiques par une sorte de procédé de régularisation.

Cependant, le caractère local des fonctions superposées rend l'enrichissement relativement pauvre. De plus, dans leur version actuelle, ces techniques ne répondent pas au problème qui nous intéresse puisqu'elles n'envisagent pas la possibilité d'une microstructure hétérogène et sont limitées au cadre linéaire.

## 1.3 Stratégies basées sur des méthodes de décomposition de domaine

### 1.3.1 Principe et principales approches

Le calcul de structures fortement hétérogènes rend impossible le traitement direct du problème à une échelle fine. Les méthodes de décomposition de domaine proposent cependant une alternative pour la résolution du problème complet. Elles consistent à décomposer la structure en sous-domaines et à condenser le problème sur les quantités d'interface entre sous-domaines, ce nouveau problème étant de taille considérablement réduite. Dans les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, on peut discerner trois types d'approches : les approches primales (Balancing Domain Decomposition Method [Mandel, 1993]), les approches duales

(méthode FETI [Farhat et Roux, 1991]) et les approches mixtes (méthode LATIN [Ladevèze, 1999], méthode de Lagrangien augmenté [Glowinski et Le Tallec, 1990]). L'approche primale consiste à écrire la continuité des efforts aux interfaces, exprimés en fonction des déplacements d'interface supposés *a priori* continus. Le problème est donc formulé en terme de déplacements d'interface. A l'inverse, l'approche duale consiste à écrire la continuité des déplacements aux interfaces, exprimés en fonction des efforts d'interface supposés *a priori* continus. La méthode mixte n'impose quant à elle la continuité d'aucun champ *a priori* et formule donc le problème d'interface à la fois sur les efforts et les déplacements. Ces méthodes utilisent généralement un algorithme itératif pour la résolution du problème d'interface. Elles ne nécessitent plus que la résolution de problèmes locaux aux sous-structures dont le traitement numérique reste abordable. Afin de conserver leur efficacité dans la résolution de problèmes comportant un grand nombre de sous-domaines, les méthodes de décomposition de domaine nécessitent cependant de faire propager une information globale à l'ensemble de la structure. Ceci est généralement réalisé en résolvant à chaque itération un problème relativement grossier, défini sur la structure complète, imposant une condition de continuité partielle pour les efforts dans la méthode primale, les déplacements dans la méthode duale ou éventuellement les deux dans l'approche mixte. Ces stratégies deviennent alors de véritables stratégies de calcul multiéchelles.

La méthode FETI consiste à rechercher de manière itérative un champ d'effort continu aux interfaces afin de garantir, à convergence, la continuité des déplacements. Afin que les problèmes locaux soient bien posés, le champ d'effort doit vérifier la contrainte d'équilibre des sous-domaines vis-à-vis des chargements extérieurs. La technique itérative de résolution utilisée est alors de type gradient conjugué projeté où la projection est associée à la contrainte d'équilibre des sous-domaines. Cette phase de projection peut être vue comme un problème macroscopique grossier garantissant à chaque itération la continuité des modes rigides des sous-domaines aux interfaces. La méthode FETI peut alors être qualifiée de stratégie de calcul à deux échelles. Le problème macroscopique est cependant relativement pauvre puisqu'il est simplement associé aux modes rigides qui sont des modes à énergie nulle. En d'autres termes, la méthode FETI de base est une stratégie à deux échelles pour les déplacements mais monoéchelle pour les efforts. La méthode FETI2 propose une amélioration qui consiste à introduire des contraintes supplémentaires sur le déplacement, telles que la continuité en moyenne sur les interfaces [Farhat et al., 1996]. La phase de projection du gradient conjugué devient alors un problème macroscopique enrichi. L'efficacité de cette méthode est intimement liée au choix du préconditionneur de l'algorithme itératif. En particulier, on peut trouver dans [Rixen et Farhat, 1999] la définition du "scaling de rigidité" adaptée au cas des structures hétérogènes. Dans [Gosselet et Rey, 2002], les auteurs proposent, dans le cadre de multirésolutions, la construction de problèmes grossiers définis sur les espaces de Krylov des opérateurs d'interface générés lors des résolutions antérieures. Ils propagent donc une information pertinente basée sur les propriétés spectrales de l'opérateur d'interface.

La méthode BDD repose sur une technique de résolution similaire. Son efficacité est rendue comparable à l'approche FETI par un choix pertinent d'un préconditionneur pour l'algorithme itératif. En particulier, ce préconditionneur doit inclure la résolution d'un problème à l'échelle macroscopique.

La méthode mixte basée sur la méthode LATIN fut initialement proposée pour la résolution de problèmes d'assemblages de structures comportant des interfaces aux comportements complexes [Champany et al., 1996, Champany et al., 1997, Champany et al., 1999, Ladevèze et al., 2000b]. Ces approches étaient initialement mono-échelle. Une première vision multi-échelle "spatiale" fut introduite dans [Ladevèze et Dureisseix, 1998] qui garantit l'extensibilité numérique de cette méthode de décomposition de domaine et rend son efficacité comparable aux approches primale et duale. Puis, pour le traitement de structures élastiques fortement hétérogènes, une nouvelle vision multi-échelle, qui inclut une procédure d'homogénéisation automatique en espace, fut introduite [Ladevèze et Dureisseix, 1999, Ladevèze et Dureisseix, 2000, Ladevèze et al., 2001]. Cette approche, point de départ des travaux de cette thèse, est détaillée dans le paragraphe suivant.

### 1.3.2 Méthode LATIN micro/macro

#### ■ Décomposition en sous-structures et interfaces et reformulation du problème de référence

Le premier point de la méthode consiste à décrire la structure comme un assemblage de constituants simples : les sous-structures et les interfaces [Ladevèze, 1999]. Chaque constituant possède ses propres variables et équations. Une sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est soumise à l'action de son environnement (les interfaces voisines), défini par une distribution d'efforts  $\underline{F}_E$  et de déplacements  $\underline{W}_E$  sur sa frontière  $\partial\Omega_E$ . Une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  génère une relation de comportement entre  $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$  et  $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'})$  (figure 1.9).

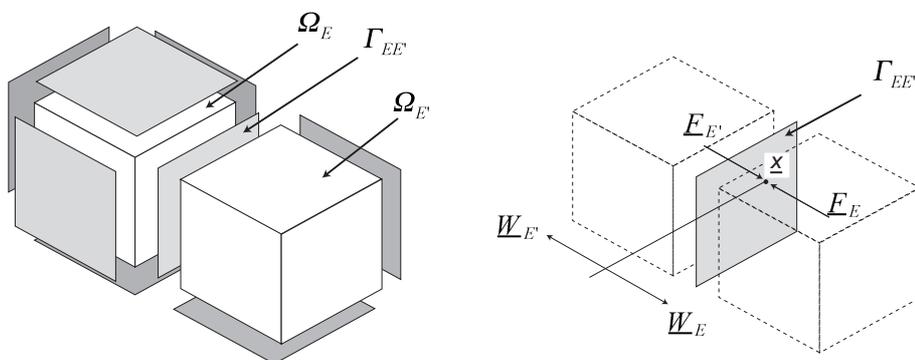


Figure 1.9 – Décomposition de la structure en sous-structures et interfaces

Les contraintes, déformations et déplacements sur une sous-structure  $\Omega_E$  sont notés respectivement  $\underline{\sigma}_E$ ,  $\underline{\varepsilon}_E$  et  $\underline{u}_E$ . L'espace des champs de déplacement est noté  $\mathbf{u}_E$ . Le problème de référence 1.1 s'écrit de la manière suivante :

- Trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E = (\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{F}_E)$  qui vérifie :
- l'admissibilité statique sur  $\Omega_E$  (équations d'équilibre) :

$$\int_{\Omega_E} \underline{\sigma}_E : \underline{\varepsilon}(\underline{u}_E^*) dx = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* dx + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{u}_E^* ds, \quad \forall \underline{u}_E^* \in \mathbf{u}_E$$

- l'admissibilité cinématique sur  $\Omega_E$  :  $\exists \underline{u}_E \in \mathbf{U}_E$  tel que

$$\underline{\varepsilon}_E = \underline{\varepsilon}(\underline{u}_E) \quad \text{et} \quad \underline{u}_E = \underline{W}_E \text{ sur } \partial\Omega_E$$

- la relation de comportement sur  $\Omega_E$  :

$$\underline{\sigma}_E = \mathbf{K}\underline{\varepsilon}_E$$

- le comportement des interfaces, les conditions aux limites étant des cas particuliers.

### ■ Description des variables aux échelles micro et macro

Le distinction entre les échelles micro et macro n'est opérée qu'au niveau des interfaces. Considérons l'interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures E et E'; des espaces de dimension finie sont choisis pour les déplacements et efforts macro, soit

$$\mathbf{W}_{EE'}^M \text{ et } \mathcal{F}_{EE'}^M$$

Ils sont en pratique pris égaux et contiennent les parties affines des déplacements et des efforts sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$ . Les parties macro sont alors définies comme les projections des efforts et déplacements sur les espaces macro correspondants, au sens du produit scalaire travail sur l'interface. Les parties macro  $(\underline{W}^M, \underline{F}^M) \in \mathbf{W}_{EE'}^M \times \mathcal{F}_{EE'}^M$  de  $(\underline{W}, \underline{F}) \in \mathbf{W}_{EE'} \times \mathcal{F}_{EE'}$  sont donc définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^{M*} \cdot (\underline{W}^M - \underline{W}) ds &= 0, \quad \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_{EE'}^M \\ \int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{F}^M - \underline{F}) \cdot \underline{W}^{M*} ds &= 0, \quad \forall \underline{W}^{M*} \in \mathbf{W}_{EE'}^M \end{aligned}$$

Les efforts et déplacements micro sont définis simplement par

$$\underline{F}^m = \underline{F} - \underline{F}^M \quad \text{et} \quad \underline{W}^m = \underline{W} - \underline{W}^M$$

Les définitions adoptées conduisent naturellement au découplage des travaux micro et macro sur l'interface, soit :

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} ds = \int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{F}^M \cdot \underline{W}^M + \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m) ds$$

Ce partitionnement, étendu à l'ensemble des interfaces de notre problème, conduit à la définition des espaces  $\mathbf{W}^M$  et  $\mathcal{F}^M$ .

Un autre point capital de cette stratégie consiste à définir des conditions d'admissibilité sur les quantités macro : on leur impose de vérifier les conditions de transmission aux interfaces. Les efforts et déplacements macro sont contraints à toujours vérifier respectivement les conditions d'équilibre et les conditions de continuité aux interfaces, incluant les conditions aux limites. Les espaces correspondants sont notés  $\mathcal{F}_{ad}^M$  et  $\mathbf{W}_{ad}^M$ .

### ■ Stratégie de résolution

La vérification partielle *a priori* des conditions de transmission aux interfaces conduit à la reformulation suivante du problème de référence : trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  qui vérifie les deux groupes d'équations suivants :

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}_d \\ \Gamma \end{array} \left\| \begin{array}{l} - \text{l'admissibilité statique et cinématique sur chaque sous-structure} \\ - \text{l'admissibilité des variables macro : } (\underline{F}^M, \underline{W}^M) \in \mathcal{F}_{ad}^M \times \mathcal{W}_{ad}^M \\ - \text{les relations de comportement des variables micro aux interfaces} \\ - \text{le comportement des sous-structures} \end{array} \right.$$

La méthode LATIN [Ladevèze, 1999] est alors appliquée ; elle consiste à construire successivement des approximations de la solution dans  $\Gamma$  puis dans  $\mathbf{A}_d$  en se donnant des directions de recherche  $\mathbf{E}^+$  et  $\mathbf{E}^-$ . Une itération comporte deux étapes appelées locale et linéaire.

Etape locale à l'itération  $n$  :

Le problème consiste à construire  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$  connaissant  $\mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d$ .  $(\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n)$  doit suivre une direction de recherche  $\mathbf{E}^+$  définie de la manière suivante :  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,

$$\begin{aligned} (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E - \boldsymbol{\sigma}_E) + \mathbf{K}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_E - \boldsymbol{\varepsilon}_E) &= 0 \\ (\widehat{\underline{F}}_E^m - \underline{F}_E^m) - \mathbf{k}^m(\widehat{\underline{W}}_E^m - \underline{W}_E^m) &= 0 \end{aligned}$$

où l'indice  $n$  a été omis.  $\mathbf{k}^m$  est un paramètre de la méthode qui peut être interprété comme une rigidité "micro" de l'interface. L'étape locale consiste à résoudre des problèmes locaux sur les sous-structures et les interfaces.

Etape linéaire à l'itération  $n$  :

Le problème consiste à construire  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  en connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ .  $(\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2})$  doit suivre une direction de recherche  $\mathbf{E}^-$  définie de la manière suivante :  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}_E - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_E - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_E) &= 0 \\ (\underline{F}_E^m - \widehat{\underline{F}}_E^m) + \mathbf{k}^m(\underline{W}_E^m - \widehat{\underline{W}}_E^m) &= 0 \end{aligned}$$

où l'indice  $n$  a été omis. Les équations associées aux sous-structures et la direction de recherche micro conduisent à la formulation de problèmes indépendants par sous-structure, appelés problèmes "micro". Sur la sous-structure  $E$ , une formulation en déplacement consiste à trouver  $\underline{u}_E \in \mathbf{U}_E$  tel que  $\forall \underline{u}_E^* \in \mathbf{U}_E$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E) dx + \int_{\partial\Omega_E} \underline{u}_E^{*m} \cdot \mathbf{k}^m \underline{u}_E^m ds = \\ \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* dx + \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}^m + \mathbf{k}^m \widehat{\underline{W}}^m) \cdot \underline{u}_E^{*m} ds + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{u}_E^{*M} ds \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{k}^m$  est un opérateur positif et  $\underline{F}_E^M$  équilibre les efforts extérieurs, ce problème admet une solution unique à un mode rigide  $\alpha_E \in \mathcal{R}_E$  près, où  $\mathcal{R}_E$  désigne l'espace

des modes rigides infinitésimaux de  $\Omega_E$ . Posons  $\{\underline{F}_E^M\}$  la partie de  $\underline{F}_E^M$  à résultantes et moments nuls sur  $\partial\Omega_E$  définie par

$$\{\underline{F}_E^M\} = \underline{F}_E^M - \frac{1}{mes(\partial\Omega_E)} \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M ds - \Pi^{-1} \left( \int_{\partial\Omega_E} \underline{x} \wedge \underline{F}_E^M ds \right) \wedge \underline{x}$$

où  $\Pi$  est l'opérateur d'inertie de  $\partial\Omega_E$  défini pour  $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$  par  $\Pi\underline{a} = \int_{\partial\Omega_E} \underline{x} \wedge (\underline{a} \wedge \underline{x}) ds$  et où  $\underline{x}$  désigne le vecteur position ayant pour origine le centre d'inertie de  $\Omega_E$ . La solution du problème micro s'écrit donc

$$\underline{W}_E^M = \widehat{W}_{E,d}^M + \mathbf{L}_E(\{\underline{F}_E^M\}) + \underline{\alpha}_E \quad (1.4)$$

où  $\widehat{W}_{E,d}^M$  dépend uniquement des quantités de l'étape précédente et des données.  $\mathbf{L}_E$  représente un opérateur de comportement homogénéisé sur la sous-structure  $E$ . Son calcul est réalisé une fois pour toute en prétraitement de l'algorithme et est relativement peu coûteux car les quantités macro sur  $\partial\Omega_E$  dépendent de peu de paramètres. La relation (1.4) est donc une relation de comportement homogénéisé entre les quantités macro.

L'admissibilité des quantités macro et la relation de comportement homogénéisée conduisent à la définition d'un problème "macro", défini sur la structure homogénéisée, dont la formulation en effort peut s'écrire de la manière suivante : trouver  $\underline{F}^M \in \mathcal{F}_{ad}^M$  et  $\{\underline{\alpha}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$ ,  $\underline{\alpha}_E \in \mathcal{R}_E$ , tels que

$$\begin{aligned} \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_0^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^{M*} \cdot \left( \mathbf{L}_E(\{\underline{F}_E^M\}) + \widehat{W}_{E,d}^M + \underline{\alpha}_E \right) ds &= \int_{\partial\Omega_E \cap \partial_1\Omega} \underline{F}_E^{M*} \cdot \underline{u}_d ds \\ \forall E \in \mathbf{E}, \forall \underline{\alpha}_E^* \in \mathcal{R}_E, \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{\alpha}_E^* ds &= \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{\alpha}_E^* dx \end{aligned}$$

La résolution de l'étape linéaire se déroule donc de la manière suivante : on résout une première série de problèmes micro avec pour second membre les données de l'étape précédente. Les champs  $\widehat{W}_{E,d}^M$  étant déterminés, les quantités macro sont obtenus en résolvant le problème macroscopique. Une nouvelle série de problèmes micro avec pour second membre l'effort macro permet d'obtenir les champs complets.

En pratique, très peu d'itérations sont nécessaires à obtenir une bonne approximation de la solution, même dans le cas de structures fortement hétérogènes. Une optimisation du paramètre  $\mathbf{k}^m$  a récemment été proposée dans [Violeau, 2003] qui permet d'obtenir une très bonne qualité de l'opérateur homogénéisé et une convergence extrêmement rapide de l'algorithme itératif. Le traitement de structures composites réelles, comportant un grand nombre de sous-structures, peut conduire à un problème homogénéisé de très grande taille dont le coût de calcul devient prohibitif. Il a été proposé dans [Loiseau et al., 2002] une méthode d'approximation adaptée à ce type de problèmes, basée sur l'introduction d'une troisième échelle.

## 2 Stratégies de calcul multiéchelles en temps

### 2.1 Couplage de grilles temporelles et de schémas d'intégration : méthodes multi-pas en temps

La description de tous les phénomènes à une même échelle temporelle microscopique peut dans certains cas être inutile, en particulier pour certains problèmes multiphysiques ou lorsqu'une solution temporelle fine n'a d'intérêt que dans une zone spatiale limitée. Depuis plus de vingt ans, de nombreux travaux ont consisté à développer des approches hybrides prenant en compte les spécificités temporelles des différentes régions d'espace. Les méthodes mixtes en temps, introduites dans [Belytschko et Mullen, 1976, Hughes et Liu, 1978], autorisent le couplage de schémas d'intégration. Les approches multi-pas en temps (ou de sous-cyclage), permettent le couplage de différentes grilles temporelles [Belytschko et al., 1979]. Des méthodes mixtes avec sous-cyclage ont également été proposées [Belytschko et al., 1984, Liu et Belytschko, 1982, Gravouil et Combescure, 2001]; elles offrent une grande souplesse dans le choix des descriptions temporelles des différentes régions d'espace. Une telle approche a par exemple été appliquée aux problèmes d'impact en dynamique [Gravouil et Combescure, 2001] où les phénomènes à prendre en compte autour de la zone d'impact peuvent être très complexes et nécessiter une discrétisation fine aussi bien au niveau spatial que temporel. De plus, si on veut prendre en compte des phénomènes non-linéaires dans cette zone, il peut être intéressant d'y appliquer un schéma explicite tout en conservant un schéma implicite pour le reste de la structure. Nous décrivons ici le principe de cette méthode dans le cadre de la dynamique en petites perturbations et élasticité linéaire. On reprend le problème de référence 1.1, étudié sur l'intervalle de temps  $(0, T)$ . Les termes d'inertie sont pris en compte dans les équations d'équilibre.  $\rho$  désigne la masse volumique.

Le point de départ consiste à partitionner le domaine en sous-domaines et à associer différentes descriptions temporelles à chacun d'entre eux. Considérons le cas simple de deux sous-domaines  $\{\Omega_s\}_{s=1}^2$  séparés par une interface  $\Gamma$  (figure 1.10(a)). Le domaine  $\Omega_1$  est associé à une partition fine de l'intervalle d'étude  $\mathcal{T}_1 = \{I_j = (t_j, t_{j+1})\}_{j=0}^{N-1}$  et le domaine  $\Omega_2$  à une partition grossière  $\mathcal{T}_2 = \{I'_i = (t'_i, t'_{i+1})\}_{i=0}^{N'-1}$  (figure 1.10 (b)).

Le problème de dynamique peut être formulé séparément sur les deux domaines en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\underline{F}_1 = -\underline{F}_2$  défini sur l'interface  $\Gamma$  et garantissant la continuité des déplacements à l'interface. Le problème consiste donc à trouver les efforts  $\underline{F}_s$  et les champs de déplacement  $\underline{u}_s$  de chaque domaine  $\Omega_s$  vérifiant les conditions initiales, les conditions aux limites et tels que : pour  $s \in \{1, 2\}$ ,  $\forall \underline{u}_s^*$  vérifiant les conditions aux limites homogènes sur  $\partial_1\Omega \cap \partial\Omega_s$ ,

$$\int_{\Omega_s} \rho \ddot{\underline{u}}_s \cdot \underline{u}_s^* dx + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_s^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_s) dx = \int_{\Omega_s} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_s^* dx + \int_{\partial_2\Omega \cap \partial\Omega_s} \underline{F}_d \cdot \underline{u}_s^* ds + \int_{\Gamma} \underline{F}_s \cdot \underline{u}_s^* ds \quad (1.5)$$

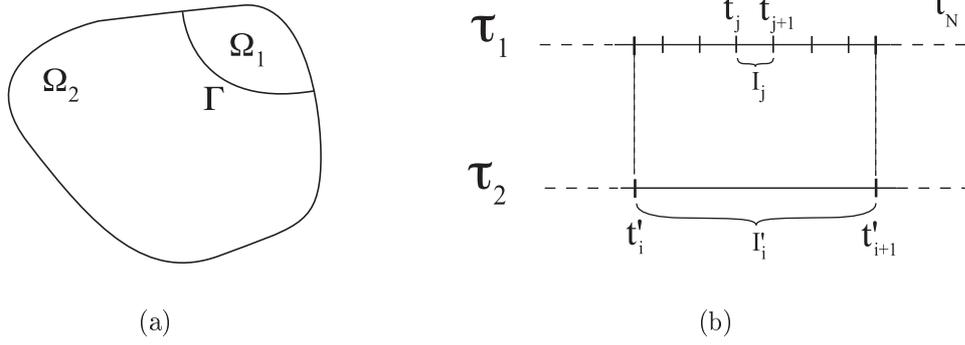


Figure 1.10 – Décomposition en deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $\Omega$  (a) et partitions temporelles associées (b)

et  $\forall \underline{F}_1^* = -\underline{F}_2^*$ ,

$$\int_{\Gamma} (\underline{F}_1^* \cdot \underline{\dot{u}}_1 + \underline{F}_2^* \cdot \underline{\dot{u}}_2) ds = 0 \quad (1.6)$$

En injectant dans les équations (1.5) un schéma d'intégration classique, un problème sur un sous-domaine peut par exemple être formulé en vitesse à un pas de temps de la partition temporelle associée. Ces problèmes étant linéaires, la solution sur chaque sous-domaine peut clairement s'écrire comme la somme de deux solutions, dites libre (notée "li") et connectée (notée "co"). Les solutions libres dépendent des données et de la solution aux pas de temps précédents et peuvent donc être calculées indépendamment sur chaque sous-domaine. Les solutions connectées dépendent du champ d'effort sur  $\Gamma$ . Si les grilles temporelles sont identiques, on peut classiquement se ramener à un problème de Schur dual sur l'effort d'interface au pas de temps considéré. Afin de pouvoir traiter ce problème couplé pour des partitions temporelles différentes, les auteurs choisissent de définir toutes les variables d'interface, efforts et vitesses, sur la grille grossière  $\mathcal{T}_2$ , une simple interpolation linéaire permettant d'obtenir leurs valeurs sur la grille fine  $\mathcal{T}_1$ . Ils proposent alors un algorithme de résolution à deux échelles de temps décrit dans le tableau 1.1.

**Tableau 1.1** – Méthode multi-pas en temps : algorithme à deux échelles de temps

- ▶ Boucle sur  $i \in \{0 \dots N' - 1\}$  (partition grossière)
  - Solution connue en  $t = t'_i$ ; résolution au pas de temps  $I'_i$ 
    - Résolution du problème libre sur  $\Omega_2$  au pas de temps  $t'_{i+1} \implies \underline{\dot{u}}_2^{li}(t'_{i+1})$
    - Boucle sur  $\{j, I_j \subset I'_i\}$  (partition fine)
      - ▷ Résolution du problème libre sur  $\Omega_1$  au pas de temps  $t_{j+1} \implies \underline{\dot{u}}_1^{li}(t_{j+1})$
      - ▷ Interpolation de  $\underline{u}_2^{li}$  sur la grille fine  $\implies \underline{\dot{u}}_2^{li}(t_{j+1})$
      - ▷ Assemblage et résolution du problème d'interface (1.6) (problème de Schur dual)  $\implies \underline{F}_1(t_{j+1})$ .
      - ▷ Résolution du problème connecté sur  $\Omega_1$  au pas de temps  $t_{j+1}$
    - Résolution du problème connecté sur  $\Omega_2$  au pas de temps  $t'_{i+1}$

Les méthodes multi-pas en temps offrent donc un moyen efficace de coupler des résolutions à des échelles de temps différentes. Elle ne peuvent cependant pas être assimilées à de véritables stratégies multiéchelles en temps dans la mesure où un domaine spatial donné est uniquement monoéchelle en temps.

## 2.2 Méthodes de superposition et d'enrichissement

Ces approches suivent les mêmes principes que pour l'aspect spatial. Elles sont basées sur des formulations variationnelles en temps.

La méthode de la partition de l'unité peut bien sûr s'appliquer au niveau temporel. Les fonctions de forme éléments finis temporels forment une partition de l'unité de l'intervalle d'étude  $(0, T)$ . Il est donc possible de construire des espaces d'approximation quelconques, de la même manière que dans le cas spatial, en introduisant une connaissance analytique ou numérique de la solution. Il est également possible de coupler une approche éléments finis avec la technique de la partition de l'unité.

La méthode variationnelle multiéchelle présentée dans la première partie s'applique également au cas temporel. Dans [Hughes et Stewart, 1996], cette méthode est appliquée à un problème d'évolution parabolique. Le niveau macro est décrit par des éléments finis d'espace-temps. Les fonctions d'enrichissement proposées sont localisées par élément d'espace-temps (fonctions bulles), ce qui revient à imposer des conditions initiales et finales dans la définition des problèmes micro. Les auteurs proposent alors une régularisation elliptique de ces problèmes micro afin de les rendre bien posés. Dans [Bottasso, 2002], la méthode est appliquée au cas d'une équation hyperbolique. Le niveau macro est décrit par des fonctions polynômiales par morceaux et autorise donc des discontinuités au niveau temporel. La méthode de Petrov-Galerkin discontinue, généralisation de la méthode de Galerkin discontinue, est utilisée pour la formulation du problème. L'auteur propose alors d'introduire des fonctions micro polynômiales orthogonales à celles de l'espace macro. Les formulations obtenues par les méthodes variationnelles en temps sont très proches des méthodes de régularisation et s'apparentent plus à des "p-versions" des méthodes éléments finis temporels qu'à de véritables stratégies de calcul multiéchelles en temps.

## 2.3 Méthodes multiéchelles pour les chargements cycliques

Le traitement de problèmes de structures soumises à des milliers voire des millions de cycles de chargement devient impossible avec les techniques présentées jusqu'à présent. Les phénomènes à prendre en compte nécessitent en effet une description fine au niveau temporel. La résolution du problème devient donc inabordable avec des techniques classiques. On présente ici deux techniques qui proposent une description temporelle adaptée à ce type de problèmes. La première, très proche des techniques d'homogénéisation périodique spatiales, est basée sur des développements asymptotiques en temps et permet l'obtention d'un comportement homogénéisé en temps [Guennouni, 1988]. La seconde technique est une stratégie de résolution basée sur la méthode LATIN [Cognard et Ladevèze, 1993, Ladevèze, 1999] qui propose une représentation particulière des variables sur deux échelles de temps : c'est une vision éléments finis où les valeurs "nodales" sont des fonctions du temps périodiques.

Ces méthodes sont décrites dans le cadre de la visco-plasticité. On considère le problème de référence 1.1, étudié sur un intervalle de temps  $(0, T)$ . La déformation est découplée en une partie élastique  $\varepsilon_e$  et une partie anélastique  $\varepsilon_p$ . La partie élastique est reliée à la contrainte par la loi d'état :

$$\varepsilon_e = \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$$

La partie anélastique est reliée à la contrainte par la relation de comportement :

$$\dot{\varepsilon}_p = \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})$$

où  $\mathbf{B}$  est un opérateur éventuellement non-linéaire. Pour simplifier l'exposé, on n'introduit pas de variables internes supplémentaires.

Les chargements extérieurs sont caractérisés par une partie à variation lente, dite macro, à laquelle vient se superposer une partie à variation rapide périodique, dite micro. On notera la période micro  $\Delta T$  (figure 1.11).

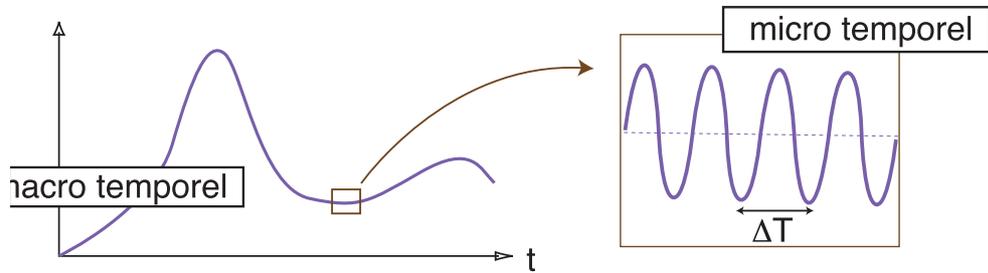


Figure 1.11 – Chargements cycliques

### 2.3.1 Homogénéisation en temps

La méthode proposée dans [Guennouni, 1988] est basée sur une représentation des chargements extérieurs sur deux échelles de temps : un temps "long", noté  $t$ , qui décrit les variations sur l'intervalle de temps entier et un temps "court", noté  $\tau$ , qui décrit les variations au niveau d'un cycle de chargement. On posera

$$\tau = \frac{t}{\Delta T}$$

On notera  $\epsilon = \Delta T$  le rapport entre le temps long et le temps court. Ce paramètre est supposé très petit devant le temps d'étude  $T$ . Les chargements extérieurs pourront alors être décrits par des fonctions des deux temps  $t$  et  $\tau$ , 1-périodique par rapport à  $\tau$ .

Toutes les variables de notre problème, notées formellement  $\psi(t)$ , sont alors supposées dépendre séparément des variables  $t$  et  $\tau$  et vérifier des conditions de 1-périodicité par rapport à  $\tau$  :

$$\psi(t) = \tilde{\psi}(t, \tau) = \tilde{\psi}(t, \tau + k), \forall k \in \mathbb{Z}$$

La différentiation par rapport au temps d'une variable  $\psi(t)$  s'exprimera alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(t, \tau) + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\psi}(t, \tau)$$

Pour simplifier la présentation, on se place ici dans le cas où les opérateurs  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{B}$  sont indépendants du temps. De plus, on fait les hypothèses suivantes sur les chargements extérieurs :

$$\underline{u}_d = 0, \quad \underline{f}_d = 0, \quad \underline{F}_d(\underline{x}, t) = \tilde{\underline{F}}_d(\underline{x}, t, \tau) = \lambda(t, \tau) \underline{F}_d^*(\underline{x}) \quad (1.7)$$

$\underline{F}_d$  est donc un chargement radial simple.

### ■ Développement asymptotique de la solution

Les variables sont recherchées sous la forme d'un développement asymptotique en  $\epsilon$ , tous les termes du développement vérifiant la 1-périodicité par rapport à  $\tau$  :

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \underline{u}^{(i)}(t, \tau), \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(t, \tau), \quad \boldsymbol{\epsilon}_p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \boldsymbol{\epsilon}_p^{(i)}(t, \tau)$$

### ■ Résolution du problème

Les développements asymptotiques sont injectés dans les équations du problème. On identifie alors les problèmes aux différents ordre en  $\epsilon$ .

Problème à l'ordre  $(-1)$  :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)} = 0$$

Ce problème traduit le fait qu'à l'ordre zéro, l'évolution rapide des déformations anélastiques est bloquée, soit  $\boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)}(t, \tau) = \boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)}(t)$ .

Problème à l'ordre  $(0)$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} &= 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \underline{n} = \underline{F}_d \quad \text{sur} \quad \partial_2 \Omega \\ \boldsymbol{\epsilon}(\underline{u}^{(0)}) &= \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)} \quad \text{et} \quad \underline{u}^{(0)} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)} + \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{\epsilon}_p^{(1)} &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}^{(0)}) \end{aligned}$$

Notons  $\langle \cdot \rangle$  l'opérateur moyenne sur une période, soit

$$\langle \tilde{\psi}(t, \tau) \rangle = \int_0^1 \tilde{\psi}(t, \tau) d\tau$$

Les variables peuvent être découplées en parties macro et micro, définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(t, \tau) &= \tilde{\psi}_M(t) + \tilde{\psi}_m(t, \tau) \\ \text{avec} \quad \tilde{\psi}_M(t) &= \langle \tilde{\psi}(t, \tau) \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_m(t, \tau) = \tilde{\psi}(t, \tau) - \langle \tilde{\psi}(t, \tau) \rangle \end{aligned}$$

Notons en particulier que  $\boldsymbol{\epsilon}_{pM}^{(0)} = \langle \boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)} \rangle = \boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)}$  et que  $\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{\epsilon}_p^{(1)} \rangle = 0$ . En moyennant sur une période les équations du problème à l'ordre  $(0)$ , on obtient alors le problème suivant sur les quantités macro :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_M^{(0)} &= 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_M^{(0)} \underline{n} = \langle \underline{F}_d \rangle \quad \text{sur} \quad \partial_2 \Omega \\ \boldsymbol{\epsilon}(\underline{u}_M^{(0)}) &= \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_M^{(0)} + \boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)} \quad \text{et} \quad \underline{u}_M^{(0)} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\epsilon}_p^{(0)} &= \langle \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_M^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}_m^{(0)}) \rangle \end{aligned}$$

Le complément micro vérifie :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_m^{(0)} &= 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_m^{(0)} \underline{n} = \underline{F}_d - \langle \underline{F}_d \rangle \quad \text{sur} \quad \partial_2 \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_m^{(0)}) &= \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_m^{(0)} \quad \text{et} \quad \underline{u}_m^{(0)} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega \end{aligned}$$

C'est un problème purement élastique. Etant donnée la forme particulière du chargement (1.7), on peut résoudre un problème élastique pour le chargement  $\underline{F}_d^*(\underline{x})$  qui nous donne une solution  $(\underline{u}^*(\underline{x}), \boldsymbol{\sigma}^*(\underline{x}))$ . La solution micro s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \underline{u}_m^{(0)}(\underline{x}, t, \tau) &= (\lambda(t, \tau) - \langle \lambda(t, \tau) \rangle) \underline{u}^*(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}_m^{(0)}(\underline{x}, t, \tau) &= (\lambda(t, \tau) - \langle \lambda(t, \tau) \rangle) \boldsymbol{\sigma}^*(\underline{x}) \end{aligned}$$

Le problème macro est alors complètement défini en tenant compte des conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_M^{(0)}(\underline{x}, 0) &= \boldsymbol{\sigma}_0(\underline{x}) - \boldsymbol{\sigma}_m^{(0)}(\underline{x}, 0, 0) \\ \underline{u}_M^{(0)}(\underline{x}, 0) &= \underline{u}_0(\underline{x}) - \underline{u}_m^{(0)}(\underline{x}, 0, 0) \end{aligned}$$

En pratique, on s'arrête à cet ordre du développement. La résolution du problème revient donc à calculer un ensemble de problèmes élastiques liés aux parties spatiales de la décomposition radiale des chargements. Ces problèmes permettent d'obtenir la solution micro. On peut alors résoudre un problème macro, défini sur le temps long, dont la relation de comportement homogénéisé en temps dépend des chargements extérieurs de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_M^{(0)}(t)) &= \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_M^{(0)}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(0)}(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(0)}(t) &= \left\langle \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_M^{(0)}(t) + \lambda_m(t, \tau) \boldsymbol{\sigma}^*) \right\rangle \end{aligned}$$

### ■ Limitation

Cette technique, basée sur l'analyse asymptotique, n'est bien sûr valable que pour des rapports d'échelle  $\epsilon$  très petits, ou en d'autres termes  $\Delta T \ll T$ .

## 2.3.2 Méthodes LATIN pour les chargements cycliques

### ■ Éléments finis temporels à deux échelles

Le point de départ de cette approche est également une vision à deux échelles de temps des variables du problème. On distingue encore un temps long  $t$  et un temps court  $\tau = t$ . Les variables sont supposées être  $\Delta T$ -périodiques par rapport au temps court. Pour décrire ces variables, les auteurs proposent une vision éléments finis temporels à deux échelles. Soit  $\mathcal{T}_h = \{I_i = (t_i, t_{i+1})\}_{i=0}^{N-1}$  une partition de l'intervalle d'étude  $(0, T)$ . Un élément  $I_i$  de cette partition peut contenir quelques dizaines voire quelques centaines de cycles  $\Delta T$ . Le premier cycle  $(t_i, t_i + \Delta T)$  jouera un rôle prépondérant et est appelé cycle nodal associé au noeud  $t_i$ . Soit  $\{\phi_i(t)\}_{i=0}^N$  les fonctions de forme éléments finis linéaires associées aux noeuds  $\{t_i\}_{i=0}^N$  de la discrétisation. Une variable  $\psi(t)$  de notre problème sera représentée sous la forme suivante :

$$\psi(t) = \tilde{\psi}(t, \tau) = \sum_{i=0}^N \psi_i(\tau) \phi_i(t) \quad (1.8)$$

où  $\psi_i(\tau)$  est une fonction  $\Delta T$ -périodique associée au noeud  $t_i$  et appelée fonction nodale (figure 1.12).

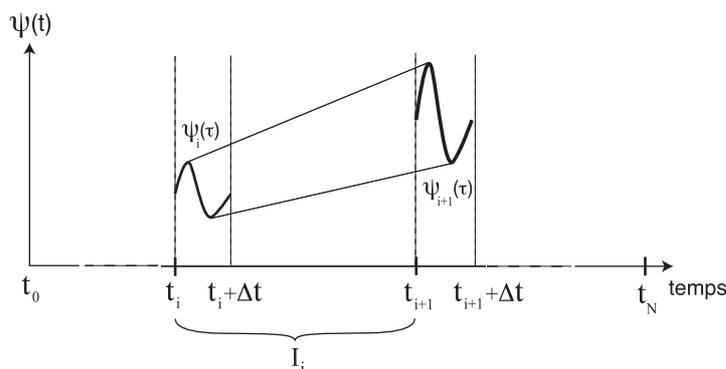


Figure 1.12 – Représentation "éléments finis" d'une fonction  $\psi(t)$  sur un élément  $I_i$  : définition des fonctions nodales  $\Delta T$ -périodiques associées  $\psi_i(\tau)$  et  $\psi_{i+1}(\tau)$

Un autre point important réside dans la technique d'intégration temporelle. Sur l'intervalle  $I_i = (t_i, t_{i+1})$ , on définit  $r$  "cycles d'intégration"  $\{I_i^k = (t_i^k, t_i^k + \Delta T)\}_{k=1}^r$  et des poids  $\{\omega^k\}_{k=1}^r$  associés. L'intégrale d'une fonction  $\psi(t)$  sur l'intervalle  $I_i$  est approximée de la manière suivante :

$$\int_{I_i} \psi(t) dt \approx \sum_{k=1}^r \omega^k \int_{I_i^k} \tilde{\psi}(t_i^k, \tau) d\tau \quad (1.9)$$

### ■ Stratégie de résolution

On rappelle qu'un champ de déformation  $\varepsilon$  est dit cinématiquement admissible s'il existe un champ  $\underline{u}$  tel que  $\varepsilon = \varepsilon(\underline{u})$  et  $\underline{u} = \underline{u}_d$  sur  $\partial_1\Omega$ . Le problème peut alors être écrit de la manière suivante : trouver  $\mathbf{s} = (\varepsilon_p, \sigma)$  vérifiant

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{\Gamma} \end{array} \left\| \begin{array}{l} - \mathbf{K}^{-1}\sigma + \varepsilon_p \text{ cinématiquement admissible} \\ - \sigma \text{ statiquement admissible} \\ - \text{les conditions initiales} \\ - \text{la relation de comportement : } \dot{\varepsilon}_p = \mathbf{B}(\sigma) \\ - \text{les conditions initiales} \end{array} \right.$$

L'ensemble  $\mathbf{A}_d$  regroupe des équations linéaires globales tandis que  $\mathbf{\Gamma}$  regroupe des équations locales, éventuellement non-linéaires. La méthode LATIN [Ladevèze, 1999] est alors appliquée ; elle consiste à construire successivement des approximations de la solution dans  $\mathbf{\Gamma}$  puis dans  $\mathbf{A}_d$  en se donnant des directions de recherche  $\mathbf{E}^+$  et  $\mathbf{E}^-$ . A chaque itération, une approximation de la solution est obtenue, définie sur tout l'intervalle de temps étudié. Les variables sont représentées sur deux échelles de temps sous la forme (1.8).

### ■ Etape locale à l'itération $n$

Connaissant  $\mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d$ , on cherche  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \mathbf{\Gamma}$  tel que  $(\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n)$  suive la direction de recherche  $\mathbf{E}^+$ . En pratique la direction de recherche est prise verticale, soit

$$\hat{\sigma}_{n+1/2} = \sigma_n$$

La déformation anélastique  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  doit alors vérifier la relation

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p = \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(0) = 0$$

où l'indice  $n$  a été omis. Cette équation est résolue de manière incrémentale sur les pas de temps  $I_i$ . Connaissant la solution  $\boldsymbol{\varepsilon}_p(t_i)$ , on peut résoudre une équation différentielle sur le cycle nodal  $i$  et ainsi déterminer la fonction nodale  $\boldsymbol{\varepsilon}_{p,i}(\tau)$ . En pratique, ce cycle est discrétisé finement et un schéma incrémental classique est utilisé. Ensuite, on utilise

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t_{i+1}) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t_i) + \int_{I_i} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t)) dt$$

pour obtenir la valeur au pas de temps suivant. L'intégrale peut être approximée par la relation (1.9).

### ■ Etape linéaire à l'itération $n$

Connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \boldsymbol{\Gamma}$ , on cherche  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  tel que  $(\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2})$  suive la direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ , soit

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1/2}) - (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p,n+1} - \dot{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{p,n+1/2}) = 0$$

où  $\mathbf{H}$  est l'opérateur tangent de  $\mathbf{B}$  en  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ . On opère classiquement une formulation variationnelle en contrainte de ce problème, définie sur  $\Omega \times (0, T)$  (voir [Ladevèze, 1999]). L'inconnue est l'incrément de contrainte  $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_n$  qui doit vérifier les équations d'équilibre pour des données homogènes et des conditions initiales nulles. Pour réduire le coût de calcul de ce problème d'évolution, il est proposé d'approximer la solution par une somme de fonctions radiales, produits d'une fonction d'espace par une fonction du temps :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) \mathbf{C}_k(\underline{x})$$

où les fonctions du temps  $c_k(t)$  sont représentées sur deux échelles comme indiqué dans l'équation (1.8). Une méthode itérative est proposée pour la construction de cette approximation. Elle consiste à résoudre le problème variationnel en fixant alternativement les fonctions temporelles et spatiales. Les fonctions temporelles étant fixées, un problème "spatial" peut être assemblé. La construction des opérateurs spatiaux nécessite le calcul d'intégrales en temps, approximées par la relation (1.9). Les fonctions spatiales étant fixées, le problème conduit à un système d'équations différentielles sur les fonctions temporelles. En notant  $\mathbf{c} = [c_1 \dots c_m]^T$  le vecteur des inconnues, on obtient le système suivant :

$$\mathbb{K} \dot{\mathbf{c}} + \mathbb{M} \mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{c}(0) = 0 \tag{1.10}$$

où l'opérateur  $\mathbb{K}$  est constant et  $\mathbf{f}$  est donné.

*Remarque 1.1* L'approximation radiale est étudiée en détail dans le dernier chapitre de cette thèse.

Rappelons qu'on cherche une approximation de  $\mathbf{c}$  sous la forme

$$\mathbf{c}(t) = \tilde{\mathbf{c}}(t, \tau) = \sum_{i=0}^N \mathbf{c}_i(\tau) \phi_i(t)$$

Connaissant les valeurs nodales  $\{\mathbf{c}(t_i)\}_{i=0}^N$ , les fonctions nodales peuvent alors être déterminées en résolvant les équations différentielles suivantes :  $\forall i \in \{0 \dots N\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \frac{d}{d\tau} \mathbf{c}_i + \mathbb{M} \mathbf{c}_i &= \mathbf{f} \quad \text{sur } (t_i, t_i + \Delta T) \\ \mathbf{c}_i(t_i) &= \mathbf{c}(t_i) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ces problèmes, qui sont des problèmes à l'échelle microscopique, peuvent être résolus par un schéma incrémental classique en discrétisant finement les cycles  $(t_i, t_i + \Delta T)$ .

Il reste donc à trouver les valeurs nodales de  $\mathbf{c}$ , qui peuvent être considérées comme les variables macro du problème. Pour les obtenir, les auteurs proposent la méthode suivante. Connaissant  $\mathbf{c}(t_i)$ , on cherche une approximation de  $\mathbf{c}(t_{i+1})$  qui vérifie :

$$\mathbf{c}(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{R}(t_{i+1}, t) \mathbb{K}^{-1} \mathbf{f}(t) dt + \mathbb{R}(t_{i+1}, t_i) \mathbf{c}(t_i)$$

où  $\mathbb{R}(t', t)$  est le semi-groupe à deux paramètres caractéristique de l'équation homogène associée à (1.10). Plutôt que d'opérer un calcul direct, on passe par la construction des valeurs intermédiaires  $\{\mathbf{c}(t_i^k)\}_{k=1}^{n_c}$ , où  $t_i^k = t_i + k\Delta T$  et où  $n_c$  désigne le nombre de cycles contenus dans  $I_i$ . La construction de  $\mathbf{c}(t_i^{k+1})$  à partir de  $\mathbf{c}(t_i^k)$  nécessite donc la connaissance de

$$\mathbb{R}(t_i^{k+1}, t_i^k) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{c}}(t_i^{k+1}, t_i^k) = \int_{t_i^k}^{t_i^{k+1}} \mathbb{R}(t_i^{k+1}, t) \mathbb{K}^{-1} \mathbf{f}(t) dt$$

Le calcul de toutes ces quantités serait trop coûteux. Il est proposé de les approximer à partir des valeurs nodales par les interpolations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(t_i^{k+1}, t_i^k) &= \phi_i(t_i^k) \mathbb{R}(t_i + \Delta T, t_i) + \phi_{i+1}(t_i^k) \mathbb{R}(t_{i+1} + \Delta T, t_{i+1}) \\ \text{et} \quad \widehat{\mathbf{c}}(t_i^{k+1}, t_i^k) &= \phi_i(t_i^k) \widehat{\mathbf{c}}(t_i + \Delta T, t_i) + \phi_{i+1}(t_i^k) \widehat{\mathbf{c}}(t_{i+1} + \Delta T, t_{i+1}) \end{aligned}$$

Les matrices  $\mathbb{R}(t_i + \Delta T, t_i)$  et  $\mathbb{R}(t_{i+1} + \Delta T, t_{i+1})$  sont calculées sur les cycles nodaux  $i$  et  $i + 1$ . Les vecteurs  $\widehat{\mathbf{c}}(t_i + \Delta T, t_i)$  et  $\widehat{\mathbf{c}}(t_{i+1} + \Delta T, t_{i+1})$  sont également calculés sur les cycles nodaux en résolvant "finement" les problèmes (1.11) associés pour des conditions initiales nulles. On peut alors construire la suite des vecteurs  $\mathbf{c}(t_i^k)$  par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t_i^{k+1}) &= \phi_i(t_i^k) (\mathbb{R}(t_i + \Delta T, t_i) \mathbf{c}(t_i^k) + \widehat{\mathbf{c}}(t_i + \Delta T, t_i)) + \\ &\quad \phi_{i+1}(t_i^k) (\mathbb{R}(t_{i+1} + \Delta T, t_{i+1}) \mathbf{c}(t_i^k) + \widehat{\mathbf{c}}(t_{i+1} + \Delta T, t_{i+1})) \end{aligned}$$

### ■ Bilan

Cette stratégie propose donc une vision à deux échelles des variables au niveau temporel et une méthode de résolution itérative adaptée. Elle ne nécessite que le calcul de la solution sur un nombre restreint de cycles en tenant compte cependant de l'influence des cycles intermédiaires. Le coût de calcul est considérablement réduit par rapport à une technique standard (facteur 1000 à 10000). Cette stratégie n'inclut cependant pas véritablement de technique d'homogénéisation en temps car elle ne fait pas apparaître explicitement de problème macroscopique mettant en jeu des variables macro duales et reliées par un comportement homogénéisé en temps.

## 2.4 Méthodes de décomposition de domaine temporel : parallélisme en temps

Le traitement à une échelle fine d'une équation d'évolution est souvent hors de portée d'une méthode incrémentale en temps standard. La méthode de résolution "pararéel" [Lions et al., 2001] et la méthode des Time-decomposed parallel time-integrators [Farhat et Chandesris, 2002] sont des méthodes alternatives parallèles en temps permettant d'exploiter la capacité de calcul des ordinateurs à architecture parallèle. Ces méthodes sont basées sur une décomposition du domaine temporel en intervalles grossiers. Une méthode itérative est alors proposée pour garantir à convergence la continuité aux "interfaces temporelles". Elle demande à chaque itération la résolution d'un ensemble de problèmes d'évolution indépendants par intervalle grossier (calcul prédicteur) ainsi qu'un problème grossier défini sur tout l'intervalle de temps (calcul correcteur). La résolution des problèmes d'évolution définis sur les intervalles grossiers peut être parallélisée. Nous précisons ici cette démarche.

Considérons le problème d'évolution linéaire suivant, semi-discrétisé en espace :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) + \mathbb{A}(t)\mathbf{u}(t) &= \mathbf{f}(t), \quad t \in (0, T) \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ . Cette équation peut par exemple provenir de la discrétisation éléments finis en déplacement du problème de référence pour une loi de comportement visco-élastique du type  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}$ . Notons également qu'une équation hyperbolique, du second ordre en temps, peut toujours se ramener à une équation du premier ordre en temps de ce type.

Soit  $\mathcal{T}_2 = \{I'_i = (t'_i, t'_{i+1})\}_{i=0}^{N'-1}$ , avec  $t'_0 = 0 < t'_1 < \dots < t'_{N'} = T$ , une partition grossière de l'intervalle d'étude. Soit  $\mathcal{T}_1 = \{I_j = (t_j, t_{j+1})\}_{j=0}^{N-1}$ , avec  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , une partition fine de l'intervalle d'étude (figure 1.10 (b)).

Le problème d'évolution peut être réécrit indépendamment sur chaque intervalle  $I'_i$ ,  $i \in \{0, \dots, N' - 1\}$ . On note  $\mathbf{u}^{(i)}(t)$  la solution sur l'intervalle  $I'_i$  et  $\mathbf{U}^{(i)}$  la condition initiale sur cet intervalle. Elles doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{u}^{(i)}(t) + \mathbb{A}(t)\mathbf{u}^{(i)}(t) &= \mathbf{f}(t), \quad t \in I'_i \\ \mathbf{u}^{(i)}(t'_i) &= \mathbf{U}^{(i)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

ainsi que

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i-1)}(t'_i), \quad \forall i \geq 1 \quad (1.14)$$

Les problèmes sur les différents intervalles de temps sont couplés par les relations de continuité (1.14). L'idée est de se donner une première estimation des conditions initiales  $\{\mathbf{U}_0^{(i)}\}_{i=0}^{N'-1}$  et de rechercher itérativement une amélioration de ces valeurs. Soit  $\{\mathbf{U}_k^{(i)}\}_{i=0}^{N'-1}$  une estimation des conditions initiales à l'itération  $k$ . Les problèmes d'évolution sont indépendants et peuvent donc être traités en parallèle sur la grille fine  $\mathcal{T}_1$ . Ils conduisent à une estimation  $\{\mathbf{u}_k^{(i)}\}_{i=0}^{N'-1}$  de la solution. Cette solution est bien sûr discontinue aux pas de temps  $t'_i$ ,  $i \in \{0, \dots, N' - 1\}$ . L'idée est donc d'apporter une correction  $\{\mathbf{c}_k^{(i)}\}_{i=0}^{N'-1}$  également discontinue aux pas de temps et telle que  $\{\mathbf{u}_k^{(i)} + \mathbf{c}_k^{(i)}\}_{i=0}^{N'-1}$  soit une bonne approximation de la solution du problème initial (1.12). La correction doit donc vérifier sur chaque intervalle  $I'_i$  :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c}_k^{(i)}(t) + \mathbb{A}(t) \mathbf{c}_k^{(i)}(t) = 0, \quad t \in I'_i \quad (1.15)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k^{(i)}(t'_i) &= \mathbf{c}_k^{(i-1)}(t'_i) + \mathbf{u}_k^{(i-1)}(t'_i) - \mathbf{U}_k^{(i)} \quad \forall i \geq 1 \\ \mathbf{c}_k^{(0)}(t'_0) &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de ce problème sur la grille fine  $\mathcal{T}_1$  conduirait bien sûr à la solution du problème initial dès la première itération. Cependant il est aussi coûteux que le problème de départ puisqu'il est défini sur tout l'intervalle de temps. L'idée est ici de rechercher une solution grossière de ce problème en résolvant le problème d'évolution associé avec un schéma d'intégration classique sur la grille grossière  $\mathcal{T}_2$ . Les conditions initiales sont alors réévaluées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{k+1}^{(i)}(t'_i) &= \mathbf{u}_k^{(i-1)}(t'_i) + \mathbf{c}_k^{(i-1)}(t'_i) \quad \forall i \geq 1 \\ \mathbf{U}_{k+1}^{(0)}(t'_0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

L'étape de correction est donc un problème grossier relativement peu coûteux améliorant l'estimation des conditions initiales sur les intervalles grossiers.

Cette méthode offre donc la possibilité d'exploiter les capacités des calculateurs parallèles et permet ainsi de réduire considérablement le temps de calcul pour la résolution d'une équation d'évolution. Elle constitue cependant une stratégie de calcul multiéchelle en temps qu'on pourrait qualifier de "numérique" en ce sens que le problème macroscopique est une simple phase de correction qui ne fait pas ressortir de véritable comportement homogénéisé en temps.

## Bilan

Dans ce chapitre, nous avons exposé quelques stratégies de calcul pour l'analyse de structures qui prennent en compte les aspects multiéchelles en espace ou en temps. Au niveau spatial, les stratégies les plus couramment utilisées sont celles issues de la théorie de l'homogénéisation. Il s'avère cependant qu'une analyse pertinente des phénomènes à l'échelle microscopique nécessite un couplage fort entre les différentes échelles. Les stratégies d'homogénéisation standards, valables lorsque les

échelles sont bien séparées, ont donc conduit à de nombreuses améliorations telle que l'introduction de milieux continus généralisés à l'échelle macroscopique. Ce couplage fort entre les différentes échelles est également pris en compte par des approches plus générales telles que les méthodes de superposition ou les méthodes de décomposition de domaine, qui nécessitent cependant d'être adaptées au calcul de structures fortement hétérogènes. Ces adaptations ont en l'occurrence conduit à l'élaboration de la méthode LATIN micro/macro [Ladevèze et Dureisseix, 1999, Ladevèze et Dureisseix, 2000, Ladevèze et al., 2001]; basée sur une méthode de décomposition de domaine mixte multiéchelle, elle inclut une procédure d'homogénéisation automatique en espace sans présenter les inconvénients de la théorie de l'homogénéisation classique.

Au niveau temporel, la plupart des stratégies de calcul présentées peuvent être qualifiées de "numériques" en ce sens qu'elles n'introduisent pas de véritable démarche d'homogénéisation temporelle. Des stratégies proposent une telle démarche dans le cas de phénomènes cycliques mais sont cependant restreintes à ce seul champ d'application.

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle stratégie de calcul multiéchelle qui semble être la première tentative d'introduire une démarche d'homogénéisation en temps et en espace. Cette stratégie peut être vue comme une extension de la méthode LATIN micro/macro aux problèmes non-linéaires d'évolution.



# Chapitre II

## Stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le problème de référence à l'échelle "micro"</b>	<b>42</b>
1.1	Description du problème	42
1.2	Modélisation du comportement par variables internes	42
1.3	Partitionnement en sous-structures et interfaces	43
1.4	Choix des espaces d'approximation	44
1.5	Reformulation du problème de référence	47
1.6	Exemples de comportement d'interface	49
<b>2</b>	<b>Description des variables macro sur l'espace-temps</b>	<b>50</b>
2.1	Définition des variables macro	50
2.2	Choix des espaces macro	52
2.3	Admissibilité des quantités macro	53
<b>3</b>	<b>Stratégie de calcul multiéchelle</b>	<b>54</b>
3.1	Principe	54
3.2	L'étape locale à l'itération $n$	55
3.3	L'étape linéaire à l'itération $n$	57
3.4	Résolution incrémentale de l'étape linéaire sur la grille macro	65
<b>4</b>	<b>Convergence de la stratégie de calcul multiéchelle</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Quelques remarques et précisions sur la stratégie de calcul</b>	<b>68</b>
5.1	Initialisation de l'algorithme	68
5.2	Choix des directions de recherche	68
5.3	Reformulation dans le cas d'interfaces parfaites	70
5.4	Bilan : algorithme de résolution	70
<b>6</b>	<b>Exemples</b>	<b>72</b>
6.1	Application aux problèmes d'évolution : portique hétérogène	72
6.2	Application aux problèmes de contact : cas de l'élastostatique	80

---

Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle stratégie de calcul multiéchelle pour les problèmes non-linéaires d'évolution qui inclut une procédure d'homogénéisation automatique à la fois en temps et en espace [Ladevèze et Nouy, 2002, Ladevèze et Nouy, 2003]. Cette stratégie, développée dans un cadre général, ne formule pas d'hypothèse *a priori* sur la forme de la solution et ne possède donc pas les limitations des techniques d'homogénéisation standards.

Le premier point de cette stratégie consiste à partitionner le domaine d'espace en un ensemble de sous-structures et d'interfaces, chacune de ces entités possédant ses propres variables et équations. Elle constitue à ce titre une méthode de décomposition de domaine mixte. La séparation entre échelles n'est opérée qu'au niveau des interfaces où les efforts et les déplacements sont découplés en parties dites "macro" et "micro". Les quantités macro sont définies comme des moyennes à la fois sur l'espace et le temps des efforts et déplacements. Le second point est l'utilisation de la méthode LATIN [Ladevèze, 1999] qui est une méthode de résolution itérative non incrémentale en temps qui propose de construire des approximations successives de la solution définies sur l'espace-temps tout entier. A chaque itération, on doit résoudre un problème "macro" défini sur la structure entière et tout l'intervalle de temps d'étude, ainsi qu'un ensemble de problèmes dits "micro" qui sont des équations d'évolution indépendantes par sous-structure. Le problème macro correspond à la résolution d'un problème non classique sur une structure homogénéisée à la fois en espace et en temps.

Les bases de cette stratégie de calcul sont ici détaillées dans le cadre des structures (visco)-plastiques soumises à d'éventuelles conditions de contact unilatéral avec ou sans frottement. Un certain nombre d'exemples illustreront les possibilités de cette nouvelle approche.

## 1 Le problème de référence à l'échelle "micro"

Dans ce paragraphe, nous introduisons le problème de référence, décrit à l'échelle microscopique.

### 1.1 Description du problème

Sous les hypothèses, petites perturbations, régime isotherme, équilibre quasi-statique, on considère l'équilibre d'une structure qui occupe un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . Elle est soumise à tout instant  $t$  appartenant à l'intervalle d'étude  $(0, T)$  à des forces volumiques  $\underline{f}_d$  et à des forces surfaciques  $\underline{F}_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial_2\Omega$ . Sur la partie complémentaire  $\partial_1\Omega$ , le déplacement  $\underline{u}_d$  est imposé (figure II.1).

Toutes les quantités indicées "d" sont des données. Les déplacements, contraintes et déformations vérifient de plus des conditions initiales en  $t = 0$ .

### 1.2 Modélisation du comportement par variables internes

La déformation  $\varepsilon$  est découplée en une partie élastique  $\varepsilon_e$  et une partie anélastique  $\varepsilon_p$ . La déformation anélastique  $\varepsilon_p$  est distinguée des autres variables internes, désignées par  $\mathbf{X}$ . La variable conjuguée de  $\mathbf{X}$  est notée  $\mathbf{Y}$ ; ainsi, le taux de dissipation

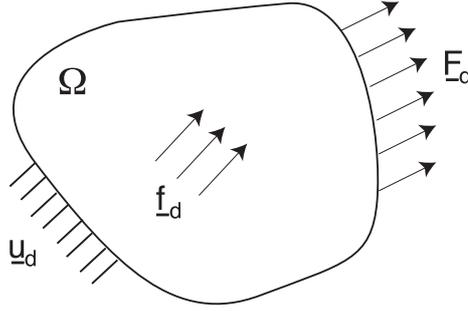


Figure II.1 – Problème de référence

s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \mathbf{Y} \circ \dot{\mathbf{X}}$$

où " $\circ$ " désigne un produit scalaire entre des quantités tensorielles non définies *a priori* (produit simplement contracté si  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{X}$  sont des tenseurs d'ordre 1, doublement contracté si ce sont des tenseurs d'ordre 2, ...).

De l'énergie libre  $\rho\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{X})$ , on obtient, sous l'hypothèse usuelle de découplage, une formulation dite "normale" (voir [Ladevèze, 1999]) des équations d'état :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \mathbf{Y} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X} \end{cases} \quad (II.1)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\boldsymbol{\Lambda}$  sont des caractéristiques du matériau.  $\mathbf{K}$  désigne le tenseur de Hooke classique. L'avantage de ce modèle réside dans l'expression de la relation de comportement décrivant l'évolution de l'état qui s'écrit sous la forme d'une simple équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ -\mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \right), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{X}|_{t=0} = 0 \quad (II.2)$$

où  $\mathbf{B}$  est un opérateur monotone caractérisant le matériau, éventuellement non-linéaire.

La formulation est dite "normale" en ce sens que l'opérateur  $\boldsymbol{\Lambda}$  est linéaire, constant, symétrique et défini positif. Avec un changement de variables pour les variables internes, la plupart des modèles de matériau peuvent être décrits avec une telle formulation (voir [Ladevèze, 1999]).

On adoptera par la suite la convention d'écriture suivante :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \\ -\dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \mathbf{Y} \circ \dot{\mathbf{X}}$$

### 1.3 Partitionnement en sous-structures et interfaces

Le premier point de la méthode consiste à **décrire la structure comme un assemblage de constituants simples : les sous-structures et les interfaces** [Ladevèze, 1999]. Chaque constituant possède ses propres variables et équations. Une sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est soumise à l'action de son environnement (les interfaces

voisines), définie par une distribution d'efforts  $\underline{F}_E$  et de déplacements  $\underline{W}_E$  sur sa frontière  $\partial\Omega_E$ . Une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  génère une relation de comportement entre  $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$  et  $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'})$  (figure II.2).

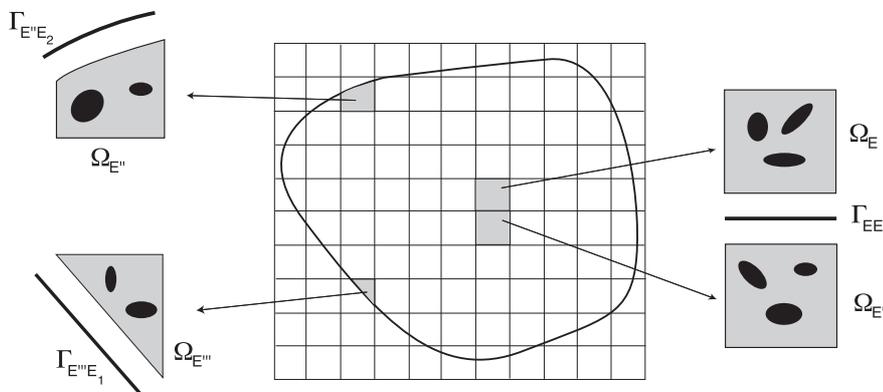


Figure II.2 – Décomposition de la structure en sous-structures et interfaces

Introduisons l'ensemble  $\mathbf{E}_E$  des sous-structures voisines de  $\Omega_E$ , soit  $\mathbf{E}_E = \{E' \in \mathbf{E} / \text{mes}(\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{E'}) \neq 0\}$ . Les interfaces correspondant aux conditions aux limites seront traitées de manière équivalente. Pour cela, on peut considérer que la structure est en liaison avec une structure  $\Omega_{E_1}$  dont la frontière contient  $\partial_1\Omega$  et une structure  $\Omega_{E_2}$  dont la frontière contient  $\partial_2\Omega$ . On introduit alors l'ensemble  $\mathbf{V}_E = \{E' \in \{\mathbf{E}, E_1, E_2\} / \text{mes}(\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{E'}) \neq 0\}$  des sous-structures voisines de  $\Omega_E$  "au sens large".

Les contraintes, déplacements, déformations, déformations élastiques et déformations anélastiques de la sous-structure E seront notés respectivement  $\boldsymbol{\sigma}_E$ ,  $\underline{u}_E$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_E$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{eE}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{pE}$ . Les variables internes et leur variable conjuguée seront notées respectivement  $\mathbf{X}_E$  et  $\mathbf{Y}_E$ .

## 1.4 Choix des espaces d'approximation

En pratique, les interfaces et sous-structures sont discrétisées au niveau spatial par une technique éléments finis classique. Dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine mixte, comme c'est le cas ici, un intérêt particulier doit être porté sur la discrétisation des quantités d'interface. Ce point sera discuté dans le chapitre III. Au niveau temporel, on adoptera la technique de Galerkin discontinue. Dans ce paragraphe, nous détaillons l'approximation temporelle et introduisons les espaces d'approximations associés à notre problème de référence.

### 1.4.1 Approximation temporelle par la méthode de Galerkin Discontinue

Une partition de l'intervalle de temps  $(0, T)$  est introduite, soit  $\mathcal{T}_h = \{I_i = (t_i, t_{i+1})\}_{i=0}^{N-1}$ , avec  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$  (figure II.3). On désire considérer des fonctions discontinues aux instants  $t_i$ ,  $i \in \{0, \dots, N\}$ . Ce choix est très efficace mais il nécessite de redéfinir l'expression du travail.

Notons  $\mathcal{P}_r(I; \mathbf{S})$  l'espace des fonctions définies sur  $I$ , polynômiales de degré  $r$  à

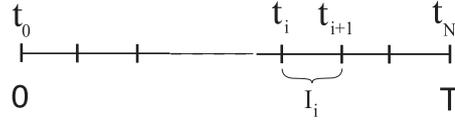


Figure II.3 – Partition  $\mathcal{T}_h = \{I_i = (t_i, t_{i+1})\}_{i=0}^{N-1}$  de l'intervalle d'étude  $(0, T)$

coefficients dans  $\mathbf{S}$  :

$$\mathcal{P}_r(I; \mathbf{S}) = \{v : I \rightarrow \mathbf{S} \mid v(t) = \sum_{n=0}^r v_n t^n, v_n \in \mathbf{S}\}$$

On introduit alors l'espace  $\mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbf{S})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^N$ , des fonctions polynômiales de degré  $r_i$  sur l'intervalle  $I_i = (t_i, t_{i+1})$ ,  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ , à coefficients dans  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbf{S}) = \{v \mid v|_{I_i} \in \mathcal{P}_{r_i}(I_i; \mathbf{S}), \forall i \in \{0, \dots, N-1\}\}$$

On notera pour simplifier  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)} = \mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbb{R})$ . Un espace  $\mathbf{S}^{(0,T)}$  sera dit de type  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  si  $\mathbf{S}^{(0,T)} = \mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbf{S})$ .

**Définition II.1** Pour  $a$  et  $b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\int_{[0,T]} a \dot{b} dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} a \dot{b} dt + a(t_0^+)b(t_0^+) + \sum_{i=1}^{N-1} a(t_i^+) (b(t_i^+) - b(t_i^-))$$

Cette définition est associée à la méthode de Galerkin discontinue [Eriksson et al., 1985]. Si les espaces sont de type  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ , le travail est donc pris au sens de la définition II.1. L'approximation d'une équation d'évolution classique par cette méthode est détaillée dans l'annexe A. Enonçons à présent des propriétés fondamentales pour la suite, dont les preuves sont données dans l'annexe A :

**Proposition II.2** La forme bilinéaire définie sur  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  par  $(a, b) \mapsto \int_{[0,T]} a \dot{b} dt$  est non-dégénérée, c'est-à-dire :

$$\left\{ a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} ; \int_{[0,T]} a \dot{b} dt = 0, \forall b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} ; \int_{[0,T]} a \dot{b} dt = 0, \forall a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \right\} = \{0\}$$

**Proposition II.3**

$$\forall a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}, \int_{[0,T]} a \dot{a} dt \geq 0$$

Afin de simplifier les notations, on distinguera par la suite une intégrale sur un intervalle ouvert et sur un intervalle fermé en posant la convention suivante :

**Définition II.4** Pour  $a$  et  $b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\int_{[t_i, t_{i+1}]} a \dot{b} dt = \int_{(t_i, t_{i+1})} a \dot{b} dt + a(t_i^+) b(t_i^+)$$

Les définitions précédentes ne font pas intervenir les valeurs des fonctions en dehors de l'intervalle ouvert  $(0, T)$  : la condition initiale en  $t_0$  n'apparaît donc pas. En fait, la méthode de Galerkin discontinue (voir annexe A) permet de prendre en compte cette condition initiale au sens faible. Elle apparaît alors comme un chargement sur "l'interface temporelle"  $\{t_0\}$ . Afin de tenir compte des conditions initiales, on adoptera la convention suivante :

**Définition II.5** Pour  $a$  et  $b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\int_{[t_i^-, t_{i+1}]} a \dot{b} dt = \int_{[t_i, t_{i+1}]} a \dot{b} dt - a(t_i^+) b(t_i^-) = \int_{(t_i, t_{i+1})} a \dot{b} dt + a(t_i^+) (b(t_i^+) - b(t_i^-))$$

où  $b(t_0^-)$  désignera la condition initiale.

#### 1.4.2 Espaces d'approximation des variables sur les interfaces

Les déplacements  $\underline{W}$  et les efforts  $\underline{F}$  sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$  appartiennent respectivement aux espaces  $\mathbf{W}_{h,EE'}^{(0,T)}$  et  $\mathfrak{F}_{h,EE'}^{(0,T)}$ . L'indice "h" désigne un espace d'approximation. Ces espaces sont pris compatibles avec la dualité force-vitesse

$$(\underline{F}, \underline{W}) \longmapsto \int_{\Gamma_{EE'} \times [0, T]} \underline{F} \cdot \dot{\underline{W}} ds dt \quad (II.3)$$

et la proposition II.6.

**Proposition II.6** Les espaces  $\mathbf{W}_{h,EE'}^{(0,T)}$  et  $\mathfrak{F}_{h,EE'}^{(0,T)}$  sont tels que la forme bilinéaire travail est non dégénérée, c'est-à-dire :

$$\left\{ \underline{F} \in \mathfrak{F}_{h,EE'}^{(0,T)} ; \int_{\Gamma_{EE'} \times [0, T]} \underline{F} \cdot \dot{\underline{W}} ds dt = 0, \forall \underline{W} \in \mathbf{W}_{h,EE'}^{(0,T)} \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ \underline{W} \in \mathbf{W}_{h,EE'}^{(0,T)} ; \int_{\Gamma_{EE'} \times [0, T]} \underline{F} \cdot \dot{\underline{W}} ds dt = 0, \forall \underline{F} \in \mathfrak{F}_{h,EE'}^{(0,T)} \right\} = \{0\}$$

Les frontières de la sous-structure étant discrétisées par des éléments finis de degré  $p$ , un choix cohérent consiste à prendre pour  $\underline{W}$  et  $\underline{F}$  des fonctions régulières de degré  $p-1$  par élément. Ce choix sera discuté dans le chapitre III. Au niveau temporel, les espaces sont pris du type  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ . On peut montrer que la proposition II.6 est vérifiée en vertu de la proposition II.2.

### 1.4.3 Espaces d'approximation des variables sur une sous-structure

La contrainte  $\sigma_E$  et le déplacement  $\underline{u}_E$  sur une sous-structure  $\Omega_E$  appartiennent respectivement aux espaces  $\mathfrak{S}_{h,E}^{(0,T)}$  et  $\mathfrak{U}_{h,E}^{(0,T)}$ . Les déformations  $\varepsilon_E$ ,  $\varepsilon_{eE}$  et  $\varepsilon_{pE}$  appartiennent à l'espace  $\mathfrak{E}_{h,E}^{(0,T)}$ . Les variables  $\mathbf{X}_E$  et  $\mathbf{Y}_E$  appartiennent respectivement aux espaces  $\mathfrak{X}_{h,E}^{(0,T)}$  et  $\mathfrak{Y}_{h,E}^{(0,T)}$ .

On note alors  $\mathbf{f}_{h,E}^{(0,T)} = \mathfrak{S}_{h,E}^{(0,T)} \times \mathfrak{Y}_{h,E}^{(0,T)}$  et  $\mathbf{e}_{h,E}^{(0,T)} = \mathfrak{E}_{h,E}^{(0,T)} \times \mathfrak{X}_{h,E}^{(0,T)}$ ; ces espaces sont pris compatibles avec la forme bilinéaire dissipation sur  $\Omega_E$

$$\int_{\Omega_E \times [0,T]} \left( \sigma : \dot{\varepsilon}_p - \mathbf{Y} \circ \dot{\mathbf{X}} \right) dx dt$$

Au niveau spatial, on adopte une discrétisation éléments finis classique. Au niveau temporel, tous ces espaces sont du type  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ . La dissipation est donc prise au sens de la définition II.1.

### 1.4.4 Variables associées à une sous-structure et sa frontière

On étend la définition des espaces d'interface à l'ensemble des interfaces voisines d'une sous-structure  $\Omega_E$  en posant

$$\mathfrak{F}_{h,E}^{(0,T)} = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathfrak{F}_{h,EE'}^{(0,T)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{W}_{h,E}^{(0,T)} = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathfrak{W}_{h,EE'}^{(0,T)}$$

On notera alors  $\mathbf{s}_E = (\varepsilon_{pE}, \mathbf{X}_E, \underline{W}_E, \sigma_E, \mathbf{Y}_E, \underline{F}_E)$  l'ensemble des variables associées à une sous-structure  $\Omega_E$  et sa frontière  $\partial\Omega_E$ . L'espace correspondant est noté  $\mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)}$ .

*Remarque II.1* Par commodité, nous avons choisi de travailler sur les variables cinématiques et non pas sur leurs dérivées temporelles, ce qui est a priori en contradiction avec le cadre naturel d'approximation. Grace à l'utilisation de la méthode de Galerkin discontinue, ce choix ne pose cependant pas de problème particulier. L'utilisation d'une méthode éléments finis temporels classique ou de techniques d'intégration temporelle standards conduirait très certainement à revoir ce choix.

## 1.5 Reformulation du problème de référence

### 1.5.1 Notations et préliminaires

Pour  $E \in \mathbf{E}$ , on notera  $\mathbf{E}_{h,E}^{(0,T)} = \mathfrak{E}_{h,E}^{(0,T)} \times \mathfrak{W}_{h,E}^{(0,T)}$  et  $\mathbf{F}_{h,E}^{(0,T)} = \mathfrak{S}_{h,E}^{(0,T)} \times \mathfrak{F}_{h,E}^{(0,T)}$ . Avant tout, posons les définitions suivantes :

**Définition II.7** Un couple  $(\varepsilon_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_{h,E}^{(0,T)}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est dit cinématiquement admissible s'il existe un champ de déplacement  $\underline{u}_E \in \mathfrak{U}_{h,E}^{(0,T)}$  tel que  $\varepsilon_E = \varepsilon(\underline{u}_E)$  et  $\underline{u}_E|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E$  au sens faible, c'est à dire

$$\forall \underline{F}^* \in \mathfrak{F}_{h,E}^{(0,T)}, \quad \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}^* \cdot \left( \dot{\underline{u}}_E - \dot{\underline{W}}_E \right) ds dt = 0$$

On notera  $\mathbf{E}_{h,E,ad}^{(0,T)}$  l'espace vectoriel correspondant.

**Définition II.8** Un couple  $(\underline{\sigma}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_{h,E}^{(0,T)}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est dit statiquement admissible s'il vérifie les équations d'équilibre, soit

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_{h,E}^{(0,T)}, \quad \int_{\Omega_E \times [0,T]} \underline{\sigma}_E : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) \, dx \, dt = \int_{\Omega_E \times [0,T]} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, dx \, dt + \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}_E \cdot \underline{u}^* \, ds \, dt$$

On notera  $\mathbf{F}_{h,E,ad}^{(0,T)}$  l'espace correspondant et  $\mathbf{F}_{h,E,0}^{(0,T)}$  l'espace vectoriel associé pour des données homogènes ( $\underline{f}_d = 0$ ).

**Proposition II.9** Un couple  $(\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_{h,E}^{(0,T)}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est cinématiquement admissible si et seulement si

$$\forall (\underline{\sigma}^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{F}_{h,E,0}^{(0,T)}, \quad \int_{\Omega_E \times [0,T]} \underline{\sigma}^* : \dot{\underline{\varepsilon}}_E \, dx \, dt = \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}^* \cdot \dot{\underline{W}}_E \, ds \, dt$$

Posons alors la définition suivante :

**Définition II.10**  $\mathbf{s}_E = (\underline{\varepsilon}_{pE}, \underline{X}_E, \underline{W}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{Y}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)}$  est dit  $E$ -admissible s'il vérifie :

- l'admissibilité statique :  $(\underline{\sigma}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_{h,E,ad}^{(0,T)}$
- l'admissibilité cinématique :  $(\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_{h,E,ad}^{(0,T)}$
- les équations d'état :  $\underline{\varepsilon}_E - \underline{\varepsilon}_{pE} = \mathbf{K}^{-1} \underline{\sigma}_E$ ,  $\underline{Y}_E = \underline{\Lambda} \underline{X}_E$

L'espace correspondant est noté  $\mathbf{S}_{h,E,ad}^{(0,T)}$ . L'espace  $\mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$  est l'espace vectoriel associé pour des données homogènes.

*Remarque II.2* Notons que les conditions initiales  $\mathbf{s}_E(t_0)$  vérifient bien sûr les équations d'équilibre, l'admissibilité cinématique et les équations d'état.

### 1.5.2 Problème de référence

Le problème de référence peut alors être réécrit de la manière suivante :

**Problème II.1** Trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E = (\underline{\varepsilon}_{pE}, \underline{X}_E, \underline{W}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{Y}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)}$  qui vérifie :

- $\mathbf{s}_E$  est  $E$ -admissible,  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,
- la relation de comportement décrivant l'évolution de l'état :  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,  
 $\forall (\underline{\sigma}^*, \underline{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{(0,T)}$ ,

$$\int_{\Omega_E \times [0^-, T]} \left( \left[ \begin{array}{c} \dot{\underline{\varepsilon}}_{pE} \\ -\dot{\underline{X}}_E \end{array} \right] - \mathbf{B} \left( \left[ \begin{array}{c} \underline{\sigma}^* \\ \underline{Y}^* \end{array} \right] \right) \right) \circ \left[ \begin{array}{c} \underline{\sigma}^* \\ \underline{Y}^* \end{array} \right] \, dx \, dt = 0 \quad (II.4)$$

- le comportement des interfaces, les conditions aux limites étant des cas particuliers,
- les conditions initiales, prises au sens faible par la méthode de Galerkin discontinue.

## 1.6 Exemples de comportement d'interface

Les comportements définis ici sont écrits localement en chaque point d'une interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$ .

### ■ Interface parfaite

Les déplacements sont continus à travers l'interface et les efforts sont équilibrés :

$$\begin{aligned}\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} &= 0 \\ \underline{W}_E &= \underline{W}_{E'}\end{aligned}$$

### ■ Interface avec l'extérieur

Une interface avec l'extérieur définit les conditions aux limites

$$\begin{aligned}\underline{F}_E &= \underline{F}_d \text{ sur } \partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega \\ \text{ou } \underline{W}_E &= \underline{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_E \cap \partial_1\Omega\end{aligned}$$

Celles-ci sont prises "au sens faible". On posera  $F_{E_2} = -\underline{F}_d$  et  $W_{E_1} = \underline{u}_d$

### ■ Interface de contact unilatéral avec frottement

Le comportement est caractérisé par un frottement de Coulomb de coefficient  $f$ . On note  $\underline{n}$  le vecteur normal à  $\Gamma_{EE'}$  au point courant, sortant par rapport à  $\Omega_E$ , et  $\mathbf{P}_t$  le projecteur orthogonal associé. Les relations de comportement d'interface s'écrivent :

$$\begin{aligned}- & \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \\ - & \underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \geq 0, \underline{n} \cdot \underline{F}_E \leq 0 \text{ et } (\underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E)) (\underline{n} \cdot \underline{F}_E) = 0 \\ - & \text{ si } \|\mathbf{P}_t \underline{F}_E\| < f |\underline{n} \cdot \underline{F}_E|, \text{ alors } \mathbf{P}_t(\dot{\underline{W}}_{E'} - \dot{\underline{W}}_E) = 0, \\ & \text{ sinon, } \|\mathbf{P}_t \underline{F}_E\| = f |\underline{n} \cdot \underline{F}_E|, \mathbf{P}_t(\dot{\underline{W}}_{E'} - \dot{\underline{W}}_E) \wedge \mathbf{P}_t \underline{F}_E = 0 \\ & \text{ et } \mathbf{P}_t(\dot{\underline{W}}_{E'} - \dot{\underline{W}}_E) \cdot \mathbf{P}_t \underline{F}_E \geq 0\end{aligned}$$

Les dérivées temporelles sont prises au sens de la définition 1.1.

### ■ Interface visco-plastique

On peut aisément envisager le traitement d'interfaces visco-plastiques. Pour cela, on peut adopter un formalisme similaire à celui des sous-structures en découplant le saut de déplacement  $\underline{W}_{EE'} = \underline{W}_{E'} - \underline{W}_E$  en une partie élastique et une partie plastique :

$$\underline{W}_{EE'} = \underline{W}_{EE',e} + \underline{W}_{EE',p}$$

Le comportement d'interface est alors régi par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}- & \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \\ - & \underline{W}_{EE',e} = \mathbf{k}^{-1} \underline{F}_E \text{ (équation d'état)} \\ - & \underline{W}_{EE',p} = \mathbf{b}(\underline{F}_E) \text{ (relation de comportement)}\end{aligned}$$

où  $\mathbf{k}$  est l'opérateur de rigidité de l'interface (élasticité classique) et  $\mathbf{b}$  est un opérateur éventuellement non-linéaire. L'introduction de variables internes est également envisageable.

## 2 Description des variables macro sur l'espace-temps

Le problème présenté précédemment constitue en quelle sorte notre problème microscopique. On désire ici introduire une vision à deux échelles du problème. Cela demande de définir un espace de variables macro ainsi qu'un moyen de passage entre l'échelle micro et l'échelle macro. Ce choix étant effectué, on imposera aux variables "macro" de vérifier des contraintes d'admissibilité qui seront les équations du problème macroscopique, alors complètement défini.

### 2.1 Définition des variables macro

**Le distinction entre les échelles micro et macro n'est opérée qu'au niveau des interfaces.** Au niveau spatial, l'échelle macro est définie par la longueur caractéristique  $L_M$  des interfaces, *a priori* beaucoup plus grande que l'échelle  $L_m$  de la discrétisation. Au niveau temporel, l'échelle macro est associée à une partition grossière de l'intervalle d'étude, soit  $\mathcal{T}_{h'} = \{I_i^M = (t'_i, t'_{i+1})\}_{i=0}^{N'-1}$ , avec  $t'_0 = 0 < t'_1 < \dots < t'_{N'} = T$ . Cette partition contient la précédente, c'est-à-dire que  $\forall i \in \{0 \dots N'\}$ ,  $\exists j \in \{0 \dots N\}$  tel que  $t'_i = t_j$  (figure II.4). Son temps caractéristique  $T_M = \sup_{i \in \{0, \dots, N'-1\}} (t'_{i+1} - t'_i)$  est beaucoup plus grand que le temps caractéristique micro  $T_m = \sup_{i \in \{0, \dots, N-1\}} (t_{i+1} - t_i)$ .

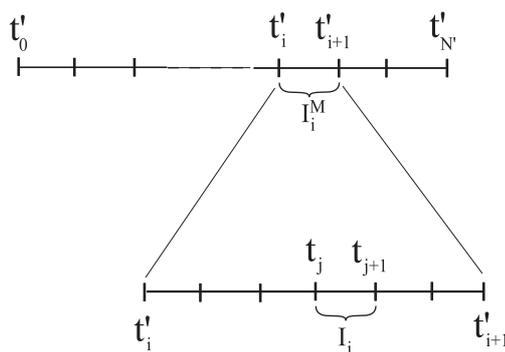


Figure II.4 – Partition "macro"  $\mathcal{T}_{h'} = \{I_i^M = (t'_i, t'_{i+1})\}_{i=0}^{N'-1}$  de l'intervalle d'étude  $(0, T)$

Considérons l'interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures E and E'; on choisit alors des espaces de dimension finie dans lesquels les déplacements et efforts macro seront recherchés, soit  $\mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M}$  et  $\mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M}$ . Ces espaces seront pris compatibles avec la dualité force-vitesse et la proposition II.11.

**Proposition II.11** *Les espaces macro sont tels que la forme bilinéaire "travail macro" définie sur  $\mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M} \times \mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M}$  est non dégénérée, c'est-à-dire :*

$$\left\{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M}; \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{F}^M \cdot \underline{\dot{W}}^{M*} ds dt = 0, \forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M} \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ \underline{W}^M \in \mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M}; \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{F}^{M*} \cdot \underline{\dot{W}}^M ds dt = 0, \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M} \right\} = \{0\}$$

Notons que la proposition 11.11 impose en particulier que l'espace des déplacements macro ait la même dimension que l'espace des efforts macro. Nous choisissons d'adopter une **approche très physique pour la définition des quantités macro : ce sont des moyennes à la fois sur l'espace et le temps des efforts et déplacements d'interface**. Plus précisément, elles sont définies comme les meilleures approximations au sens de la forme bilinéaire travail sur l'interface (11.3). Grâce à la propriété 11.11, elles sont définies de manière unique par les expressions suivantes :

**Définition 11.12** Les parties macro  $(\underline{W}^M, \underline{F}^M) \in \mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M} \times \mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M}$  de  $(\underline{W}, \underline{F}) \in \mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T)} \times \mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T)}$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{F}^{M*} \cdot (\dot{\underline{W}}^M - \dot{\underline{W}}) ds dt &= 0, \quad \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M} \\ \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} (\underline{F}^M - \underline{F}) \cdot \dot{\underline{W}}^{M*} ds dt &= 0, \quad \forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M} \end{aligned}$$

En d'autres termes,  $\underline{F}^M$  (respectivement  $\underline{W}^M$ ) est la projection de  $\underline{F}$  (respectivement  $\underline{W}$ ) sur  $\mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M}$  (respectivement  $\mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M}$ ) parallèlement à  $[\mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M}]^\perp$  (respectivement  $[\mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M}]^\perp$ ).  $[\ ]^\perp$  désigne l'orthogonal au sens de la forme bilinéaire travail sur l'interface (11.3).

**Définition 11.13** Les efforts et déplacements micro sont définis simplement par

$$\underline{F}^m = \underline{F} - \underline{F}^M \text{ et } \underline{W}^m = \underline{W} - \underline{W}^M$$

et appartiennent respectivement aux espaces  $\mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),m} = [\mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M}]^\perp$  et  $\mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),m} = [\mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M}]^\perp$ , où  $[\ ]^\perp$  désigne l'orthogonal au sens de la forme bilinéaire travail.

Les définitions adoptées 11.12 et 11.13 conduisent naturellement au découplage des travaux micro et macro sur l'interface, soit :

$$\int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{F} \cdot \dot{\underline{W}} ds dt = \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \left( \underline{F}^M \cdot \dot{\underline{W}}^M + \underline{F}^m \cdot \dot{\underline{W}}^m \right) ds dt \quad (11.5)$$

*Remarque 11.3* La relation (11.5) est indépendante de la procédure d'homogénéisation qui sera présentée ultérieurement. On verra plus tard qu'en considérant l'ensemble des interfaces d'une sous-structure, le travail micro peut être écrit en fonction des données et des quantités macro.

On notera également  $\mathcal{F}_{h,E}^{(0,T),M} = \prod_{E' \in \mathbf{v}_E} \mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T),M}$ ,  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M} = \prod_{E' \in \mathbf{v}_E} \mathcal{W}_{h,EE'}^{(0,T),M}$  et de même pour les espaces micro.

Etendu à l'ensemble des sous-structures, ce partitionnement conduit à la définition des espaces  $\mathcal{W}_h^{(0,T),M}$ ,  $\mathcal{W}_h^{(0,T),m}$ ,  $\mathcal{F}_h^{(0,T),M}$  et  $\mathcal{F}_h^{(0,T),m}$ .

## 2.2 Choix des espaces macro

### ■ Au niveau spatial

Au niveau spatial, la seule contrainte sur le choix des espaces  $\mathcal{W}_{h,E}^M$  et  $\mathcal{F}_{h,E}^M$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est que  $\mathcal{W}_{h,E}^M$  contienne les modes rigides de la frontière  $\partial\Omega_E$  et que  $\mathcal{F}_{h,E}^M$  contienne les résultantes et moments sur  $\partial\Omega_E$ . Ce choix garantit en effet l'extensibilité numérique de l'approche de décomposition de domaine.

On prendra classiquement des fonctions affines par interface pour  $\underline{W}^M$  et  $\underline{F}^M$  : elles correspondent pour les déplacements aux translations, rotations et extensions de l'interface (4 fonctions en 2D, 9 en 3D). Pour les efforts, elles correspondent aux résultantes, moments et extensions sur l'interface. Illustrons ce choix dans le cas 2D. Soit  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\underline{e}_3$  étant le vecteur orthogonal au plan d'étude. Soit  $\Gamma_{EE'}$  l'interface considérée.  $\underline{x}$  désigne le vecteur position ayant pour origine le centre d'inertie de  $\Gamma_{EE'}$ . Les quatre fonctions générant la partie affine sont  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \wedge \underline{x}, \underline{x}\}$ . Ces fonctions sont orthogonales entre elles au sens du produit scalaire naturel sur  $[L^2(\Gamma_{EE'})]^2$ . D'un point de vue statique, les deux premières fonctions sont des résultantes, la troisième le moment et la quatrième une extension. Pour donner un sens plus physique aux résultantes, i.e résultantes "normale" et "tangentielle", il est intéressant de considérer la base de  $\mathbb{R}^2$  générée par les vecteurs propres de la matrice  $\mathbb{I} = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{x} \otimes \underline{x} ds$ . Soit  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$  les vecteurs propres, orthonormés, respectivement associés à la plus grande et la plus petite valeur propre de  $\mathbb{I}$ . On choisira donc pour les espaces  $\mathcal{W}_{h,E}^M$  et  $\mathcal{F}_{h,E}^M$  la base orthonormée suivante :

$$\{\underline{e}_1^M, \underline{e}_2^M, \underline{e}_3^M, \underline{e}_4^M\} = \left\{ \frac{1}{mes(\Gamma_{EE'})} \underline{n}_1, \frac{1}{mes(\Gamma_{EE'})} \underline{n}_2, \frac{1}{Tr(\mathbb{I})} \underline{e}_3 \wedge \underline{x}, \frac{1}{Tr(\mathbb{I})} \underline{x} \right\}$$

Ce choix de fonctions est illustré sur la figure II.5. On notera  $n_x^M$  le nombre de fonctions de base spatiales macro par interface.

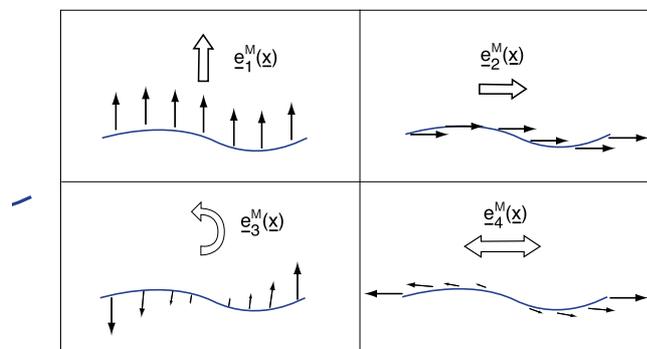


Figure II.5 – Au niveau spatial : base des fonctions affines  $\{\underline{e}_k^M\}_{k=1}^4$  sur une interface

### ■ Au niveau temporel

Au niveau temporel, on choisira des **fonctions polynômiales par morceaux** du type  $\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}^{(0,T)}$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{N'}$ , pour la partition  $\mathcal{T}_{h'}$  (polynômes de degré  $p_i$  par intervalle  $I_i^M = (t'_i, t'_{i+1})$ ,  $i \in \{0, \dots, N' - 1\}$ ). On pourra cependant enrichir l'espace macro par des fonctions additionnelles. On définit donc  $\{f_l^M(t)\}_{l=1}^{n_l^M}$  une famille de fonctions sur  $I_i^M$  contenant au moins l'espace des polynômes de degré  $p_i$ . Le choix de base pour ces fonctions est représenté sur la figure 11.6.

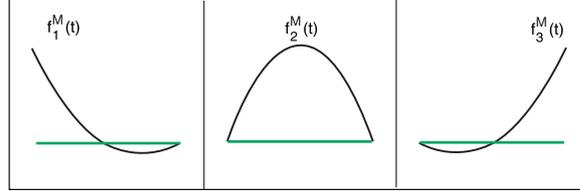


Figure 11.6 – Au niveau temporel : base des fonctions polynômiales d'ordre 2  $\{f_l^M\}_{l=1}^3$  sur l'intervalle macro  $I_i^M$  ( $p_i = 2$ )

*Remarque 11.4* Pour simplifier les notations, l'espace  $\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}^{(0,T)}$  désignera aussi bien l'espace des fonctions polynômiales par morceaux que l'espace enrichi par des fonctions temporelles additionnelles. Cela ne change en rien les développements de ce chapitre.

Finalement,  $\underline{W}^M(\underline{x}, t)$  et  $\underline{F}^M(\underline{x}, t)$  sur  $\Gamma_{EE'} \times I_i^M$ ,  $i \in \{0, \dots, N' - 1\}$ , s'écriront sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n_x^M} \sum_{l=1}^{n_t^M} \alpha_{k,l} \underline{e}_k^M(\underline{x}) f_l^M(t), \quad \alpha_{k,l} \in \mathbb{R}$$

*Remarque 11.5* Notons que les espaces macro  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$  et  $\mathcal{F}_{h,E}^{(0,T),M}$  ne contiennent plus respectivement l'ensemble des modes rigides et des résultantes/moments de l'interface. L'extensibilité numérique de l'approche ne sera donc que partielle. Les conséquences du choix de l'espace macro au niveau temporel seront illustrées dans les exemples (paragraphe 6.1). On verra en particulier pourquoi il peut être nécessaire d'introduire des fonctions temporelles additionnelles.

## 2.3 Admissibilité des quantités macro

Un autre point capital de la stratégie de calcul multiéchelle consiste à définir des conditions d'admissibilité sur les quantités macro : on leur impose de vérifier partiellement les conditions de transmission aux interfaces. Ici, seuls les efforts macro sont contraints à toujours vérifier les conditions d'équilibre aux interfaces, incluant les conditions aux limites. Ce choix est en particulier adapté au cas d'interfaces de contact avec ou sans frottement. L'espace correspondant est noté  $\mathcal{F}_{h,ad}^{(0,T),M}$ , soit

$$\mathcal{F}_{h,ad}^{(0,T),M} = \left\{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}_h^{(0,T),M} / \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \right\}$$

Nous introduisons également l'espace  $\mathcal{W}_{h,ad}^{(0,T),M}$  des déplacements macro vérifiant les conditions de transmissions aux interfaces, incluant les conditions aux limites :

$$\mathcal{W}_{h,ad}^{(0,T),M} = \left\{ \underline{W}^M \in \mathcal{W}_h^{(0,T),M} / \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{W}_E^M + \underline{W}_{E'}^M = 0 \right\}$$

La solution de notre problème n'appartiendra à cet espace que si l'on considère des interfaces parfaites.

## 3 Stratégie de calcul multiéchelle

### 3.1 Principe

La vérification partielle *a priori* des conditions de transmission aux interfaces conduit à la reformulation suivante du problème de référence :

**Problème II.2** Trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)}$  qui vérifie :

$\mathbf{A}_d$	<ul style="list-style-type: none"> <li>– l'<i>E</i>-admissibilité de <math>\mathbf{s}_E</math>, <math>E \in \mathbf{E}</math> : <math>\mathbf{s}_E \in \mathbf{S}_{h,E,ad}^{(0,T)}</math></li> <li>– l'admissibilité de <math>\underline{F}^M</math> : <math>\underline{F}^M \in \mathcal{F}_{h,ad}^{(0,T),M}</math></li> <li>– les conditions initiales</li> </ul>
$\mathbf{\Gamma}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>– la relation de comportement décrivant l'évolution de l'état (II.4)</li> <li>– le comportement des interfaces</li> <li>– les conditions initiales</li> </ul>

$\mathbf{\Gamma}$  représente un ensemble d'équations éventuellement non-linéaires mais locales par rapport aux variables d'espace et de temps.  $\mathbf{A}_d$  est un ensemble d'équations linéaires globales. Avec ce partitionnement des équations, il est possible d'appliquer la méthode LATIN qui est une méthode de résolution itérative de problèmes non-linéaires d'évolution qui agit globalement sur le domaine d'espace-temps : elle consiste à construire successivement des approximations de la solution dans  $\mathbf{\Gamma}$  puis dans  $\mathbf{A}_d$  en se donnant des directions de recherche  $\mathbf{E}^+$  et  $\mathbf{E}^-$ , qui seront explicitées ultérieurement. Notons que cette méthode itérative permet de construire à chaque itération des approximations de la solution sur tout le domaine d'espace-temps. Cette méthode, décrite dans [Ladevèze, 1999], repose sur des propriétés remarquables qui sont satisfaites par la plupart des modèles de matériau rencontrés en calcul de structures. La figure II.7 montre le schéma d'une itération, comportant deux étapes appelées locale et linéaire.

*Remarque II.6* L'admissibilité des efforts macro étant systématiquement vérifiée, une information globale est donc propagée à l'ensemble de la structure lors de l'étape linéaire. Le fait d'avoir inclus dans l'espace macro une partie des résultantes et moments des efforts sur la frontière des sous-structures procure à la stratégie une part d'extensibilité numérique recherchée dans les méthodes de décomposition de domaine.

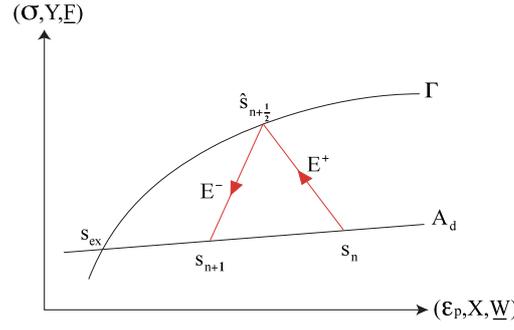


Figure 11.7 – Schéma d'une itération

### 3.2 L'étape locale à l'itération $n$

Le problème consiste à construire  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$  connaissant  $\mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d$ .  $(\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n)$  doit suivre une direction de recherche  $\mathbf{E}^+$ ; plus précisément, pour chaque sous-structure  $\Omega_E$  et chaque interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$ ,  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,n+1/2}$  doit vérifier :

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{(0,T)}, \quad \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{pE} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} \\ -(\dot{\hat{\mathbf{X}}}_E - \dot{\mathbf{X}}_E) \end{bmatrix} + \mathbf{H}^+ \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_E - \boldsymbol{\sigma}_E \\ \hat{\mathbf{Y}}_E - \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \right\} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt = 0 \quad (11.6)$$

$$\forall \underline{F}_E^* \in \mathcal{F}_{h,EE'}^{(0,T)}, \quad \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \left\{ \mathbf{h}^+ \left( \hat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E \right) - \left( \hat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E \right) \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt = 0 \quad (11.7)$$

où l'indice  $n$  a été omis.  $\mathbf{H}^+$  est un opérateur défini positif, paramètre classique de la méthode.  $\mathbf{h}^+$  est un autre paramètre de la méthode qui peut être interprété comme une viscosité "micro" de l'interface. **Les problèmes sur les sous-structures et sur les interfaces sont indépendants. L'étape locale ne présente aucune difficulté. Les problèmes à résoudre sont locaux en variables d'espace et de temps et conduisent donc à un degré de parallélisme optimal.**

*Remarque 11.7* On remarque ici que l'intégrale porte sur l'intervalle  $[0, T]$  et ne fait donc pas intervenir les valeurs initiales des variables en  $t_0$  (voir définition 11.5). En fait, les directions de recherche imposant une relation sur  $\widehat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}$ , on aurait pu de manière équivalente intégrer sur  $[0^-, T]$  puisque  $\Gamma$  et  $\mathbf{A}_d$  vérifient tous deux les conditions initiales; ces conditions n'apparaissent donc pas dans les directions de recherche. Cependant, la résolution de cette étape exige d'inclure les relations de comportements des sous-structures et des interfaces; celles-ci font apparaître les conditions initiales, sans quoi elles perdraient tout sens physique.

#### 3.2.1 Etape locale sur les sous-structures

Détaillons la résolution de l'étape locale sur la sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ . En injectant la relation de comportement (11.4) dans la direction de recherche (11.6), on

obtient la formulation suivante de l'étape locale sur une sous-structure :

**Problème II.3** Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}_E, \mathbf{Y}_E) \in \mathbf{f}_{h,E}^{(0,T)}$  tel que

$$\begin{aligned} \forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{(0,T)}, \quad & \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \mathbf{B} \left( \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} \right) + \mathbf{H}^+ \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} \right\} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt = \\ & \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} \\ -\dot{\mathbf{X}}_E \end{bmatrix} + \mathbf{H}^+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_E \\ \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \right\} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt \end{aligned}$$

**Proposition II.14** Si  $\mathbf{B}$  est monotone et l'opérateur  $\mathbf{H}^+$  est linéaire défini positif, le problème (II.3) admet au plus une solution.

□ **Preuve :** Le problème (II.3) est local en variable d'espace. En un point de la sous-structure  $E$ , c'est donc un problème de dimension finie. Il suffit ici de montrer que la solution est unique. Soit  $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(1)}, \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(1)})$  et  $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(2)}, \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(2)})$  deux solutions de ce problème. En soustrayant les équations (II.3) associées à 1 et 2 puis en injectant comme champ virtuel la différence entre les deux solutions, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{[0,T]} \left\{ \mathbf{B} \left( \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(1)} \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(1)} \end{bmatrix} \right) - \mathbf{B} \left( \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(2)} \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(2)} \end{bmatrix} \right) \right\} \circ \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(1)} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(2)} \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(1)} - \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(2)} \end{bmatrix} dt + \\ & \int_{[0,T]} \mathbf{H}^+ \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(1)} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(2)} \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(1)} - \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(2)} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(1)} - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(2)} \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(1)} - \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(2)} \end{bmatrix} dt = 0 \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{B}$  est monotone et  $\mathbf{H}^+$  est défini positif, on en déduit que  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(1)} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E^{(2)}$  et  $\widehat{\mathbf{Y}}_E^{(1)} = \widehat{\mathbf{Y}}_E^{(2)}$ . □

L'étape locale sur la sous-structure  $E$  consiste donc en la résolution du problème (II.3) puis en l'utilisation de la relation de comportement (II.4) afin d'obtenir la déformation anélastique  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE}$  et les variables internes  $\widehat{\mathbf{X}}_E$ .

### 3.2.2 Etape locale sur les interfaces

L'étape locale associée aux interfaces des conditions aux limites ne pose pas de difficulté. Connaissant l'effort (resp. le déplacement) on déduit directement de la direction de recherche (II.7) le déplacement (resp. l'effort).

Détaillons la résolution de l'étape locale sur une interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ ,  $E' \in \mathbf{E}_E$ . En soustrayant les directions de recherche (II.7) de part et d'autre de l'interface et en tenant compte de l'équilibre des efforts d'interface  $\underline{F}_E = -\underline{F}_{E'}$ , on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \forall \underline{F}_E^* \in \mathfrak{F}_{h,EE'}^{(0,T)}, \quad & \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \left\{ (\mathbf{h}_E^+ + \mathbf{h}_{E'}^+) \widehat{\underline{F}}_E + \left( \dot{\widehat{\underline{W}}}_{E'} - \dot{\widehat{\underline{W}}}_E \right) \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt = \\ & \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \left\{ \mathbf{h}_E^+ \underline{F}_E - \mathbf{h}_{E'}^+ \underline{F}_{E'} + \left( \dot{\underline{W}}_{E'} - \dot{\underline{W}}_E \right) \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt \end{aligned}$$

En injectant la relation de comportement de l'interface, reliant le saut de déplacement à l'effort, on obtient alors un problème en effort. Dans le cas d'une interface parfaite, ce problème est simplement réduit à : trouver  $\underline{F}_E \in \mathfrak{F}_{h,EE'}^{(0,T)}$  tel que

$$\begin{aligned} \forall \underline{F}_E^* \in \mathfrak{F}_{h,EE'}^{(0,T)}, \quad & \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} (\mathbf{h}_E^+ + \mathbf{h}_{E'}^+) \widehat{\underline{F}}_E \cdot \underline{F}_E^* ds dt = \\ & \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \left\{ \mathbf{h}_E^+ \underline{F}_E - \mathbf{h}_{E'}^+ \underline{F}_{E'} + (\dot{\underline{W}}_{E'} - \dot{\underline{W}}_E) \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt \end{aligned}$$

La résolution de ce problème ne pose pas de difficulté. Si les opérateurs  $\mathbf{h}_E^+$  et  $\mathbf{h}_{E'}^+$  sont définis positifs, ce problème admet une solution unique. En pratique, l'opérateur  $\mathbf{h}^+$  est choisi local en espace. Ce problème est alors local en espace et explicite en chaque point de Gauss de l'interface. Une fois ce problème résolu, on peut utiliser les directions de recherche pour en déduire les déplacements  $\underline{W}_{E'}$  et  $\underline{W}_E$ .

### 3.3 L'étape linéaire à l'itération $n$

Le problème consiste à construire  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  en connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ . ( $\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ ) doit suivre une direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ ; plus précisément, pour chaque sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{(0,T)}, \\ \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pE} - \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{pE} \\ -(\dot{\mathbf{X}}_E - \widehat{\mathbf{X}}_E) \end{bmatrix} - \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_E - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E \\ \mathbf{Y}_E - \widehat{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} \right\} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt = 0 \quad (11.8) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \forall \underline{F}_E^* \in \mathfrak{F}_h^{(0,T),m} \cup \mathfrak{F}_{h,ad}^{(0,T),M}, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \mathbf{h}^- \left( \underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E \right) + (\dot{\underline{W}}_E - \widehat{\underline{W}}_E) \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt = 0 \quad (11.9) \end{aligned}$$

où l'indice  $n$  a été omis. On montrera que l'étape linéaire est bien définie et admet une solution unique si  $\mathbf{h}^-$  et  $\mathbf{H}^-$  sont des opérateurs définis positifs. On montrera également que ce problème peut être séparé en deux parties : un problème "micro" défini sur chaque sous-structure, ainsi qu'un problème "macro" défini sur tout le domaine d'espace-temps étudié.

Pour cela, remarquons tout d'abord que la relation (11.9) peut être réécrite de la

manière suivante :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathfrak{F}_h^{(0,T)}, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \mathbf{h}^- \left( \underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E \right) + \left( \dot{\underline{W}}_E - \widehat{\dot{\underline{W}}}_E \right) \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt =$$

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \widehat{\dot{\underline{W}}}_E^M \cdot \underline{F}_E^* ds dt \quad (II.10)$$

$$\forall \widetilde{\underline{W}}^{M*} \in \mathfrak{W}_{h,0}^{(0,T),M},$$

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \widehat{\dot{\underline{W}}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_E ds dt = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{(\partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega) \times [0,T]} \widehat{\dot{\underline{W}}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d ds dt \quad (II.11)$$

où le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{\underline{W}}^{M*}$  appartient à l'espace  $\mathfrak{W}_{h,0}^{(0,T),M}$  des déplacements macro continus aux interfaces, égaux à zéro sur  $\partial_1\Omega$ . L'équation (II.11) exprime l'admissibilité des efforts macro au sens faible.

*Remarque II.8* L'opérateur  $\mathbf{H}^-$  est un paramètre classique de la méthode LATIN (voir [Ladevèze, 1999]). L'opérateur  $\mathbf{h}^-$  s'interprète comme une viscosité micro de l'interface. Un choix très simple et relativement efficace consiste à prendre  $\mathbf{h}^- = \mathbf{h}^+ = \mathbf{h}$  où  $\mathbf{h}$  est un scalaire égal de part et d'autre de l'interface ( $\mathbf{h}_E = \mathbf{h}_{E'}$  sur  $\Gamma_{EE'}$ ). On pourra prendre par exemple  $\mathbf{h} = \frac{1}{t_c} \frac{L_M}{E}$ , où  $E$  est le module d'Young du matériau (ou un module d'Young obtenu par une loi de mélange pour des matériaux hétérogènes),  $L_M$  la dimension caractéristique des interfaces et  $t_c$  un temps caractéristique lié au temps d'étude et au comportement du matériau. Une amélioration de ces choix sera discutée dans le paragraphe 5.2.2.

### 3.3.1 Le problème micro défini sur une sous-structure $\Omega_E$ et sur $(0,T)$

Le problème micro associé à la sous-structure  $\Omega_E$  peut s'écrire :

**Problème II.4** Trouver  $\mathbf{s}_E = (\boldsymbol{\varepsilon}_{p_E}, \mathbf{X}_E, \underline{W}_E, \boldsymbol{\sigma}_E, \mathbf{Y}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)}$  qui vérifie :

- $\mathbf{s}_E$  est  $E$ -admissible
- les directions de recherche (II.8) et (II.10).

C'est un problème linéaire. Comme la direction de recherche (II.10) est locale à la frontière  $\partial\Omega_E$ , le problème micro consiste en une série de problèmes indépendants par sous-structure.

#### ■ Formulation variationnelle du problème micro défini sur $\Omega_E \times (0,T)$

L'admissibilité cinématique et les équations d'état, exprimées au sens faible, conduisent

à la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \forall(\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*, \underline{\mathbf{F}}^*) \in \mathbf{F}_{h,E,0}^{(0,T)}, \quad \forall \mathbf{Y}^* \in \mathbf{y}_{h,E}^{(0,T)}, \\
 \int_{\Omega_E \times [0,T]} (\mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_E + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE}) : \boldsymbol{\sigma}^* dx dt + \int_{\Omega_E \times [0,T]} (\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \dot{\mathbf{Y}}_E - \dot{\mathbf{X}}_E) \circ \mathbf{Y}^* dx dt = \\
 \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{\dot{W}}_E \cdot \underline{\mathbf{F}}^* ds dt
 \end{aligned} \tag{II.12}$$

En introduisant les directions de recherche (II.8) et (II.10) dans l'équation (II.12), le problème micro conduit à la formulation variationnelle suivante :

**Problème II.5** Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}_E, \underline{\mathbf{F}}_E) \in \mathbf{F}_{h,E,ad}^{(0,T)}$  et  $\mathbf{Y}_E \in \mathbf{y}_{h,E}^{(0,T)}$  qui vérifient :

$$\begin{aligned}
 \forall(\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*, \underline{\mathbf{F}}^*) \in \mathbf{F}_{h,E,0}^{(0,T)}, \quad \forall \mathbf{Y}^* \in \mathbf{y}_{h,E}^{(0,T)}, \\
 \int_{\Omega_E \times [0,T]} \mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_E : \boldsymbol{\sigma}^* dx dt + \int_{\Omega_E \times [0,T]} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \dot{\mathbf{Y}}_E \circ \mathbf{Y}^* dx dt + \\
 \int_{\Omega_E \times [0,T]} \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_E \\ \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt + \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \mathbf{h}^- \underline{\mathbf{F}}_E \cdot \underline{\mathbf{F}}^* ds dt = \\
 \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left( \mathbf{h}^- \widehat{\underline{\mathbf{F}}}_E + \widehat{\underline{\dot{W}}}_E + \widehat{\underline{\dot{W}}}_E^M \right) \cdot \underline{\mathbf{F}}^* ds dt + \\
 \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left( \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} \\ -\widehat{\dot{\mathbf{X}}}_E \end{bmatrix} \right) \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt
 \end{aligned}$$

La solution du problème micro associée à la sous-structure E dépend uniquement de quantités connues  $\underline{f}_{-d|\Omega_E}$ ,  $\widehat{\mathbf{s}}_E$  et de la valeur de  $\widetilde{\underline{W}}_E^M$  sur sa frontière  $\partial\Omega_E$  qui est inconnue à ce stade mais considérée comme une donnée pour le problème micro.

**Proposition II.15** Si  $\mathbf{H}^-$  et  $\mathbf{h}^-$  sont des opérateurs définis positifs, le problème micro II.5 défini sur la sous-structure E et sa frontière admet une et une seule une solution.

□ **Preuve** : On se place dans le cadre discrétisé. Travaillant en dimension finie, il suffit de montrer l'unicité de la solution. Soit  $(\boldsymbol{\sigma}_E^{(i)}, \underline{\mathbf{F}}_E^{(i)}, \mathbf{Y}_E^{(i)})$ ,  $i \in \{1,2\}$ , deux solutions du problème (II.5). On note  $(\Delta\boldsymbol{\sigma}_E, \Delta\underline{\mathbf{F}}_E, \Delta\mathbf{Y}_E)$  la différence entre ces deux solutions. En soustrayant les équations (II.3) associées à 1 et 2 puis en injectant comme champ virtuel la différence entre les deux solutions, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_E \times [0,T]} \mathbf{K}^{-1} \Delta\dot{\boldsymbol{\sigma}}_E : \Delta\boldsymbol{\sigma}_E dx dt + \int_{\Omega_E \times [0,T]} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \Delta\dot{\mathbf{Y}}_E \circ \Delta\mathbf{Y}_E dx dt + \\
 \int_{\Omega_E \times [0,T]} \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\sigma}_E \\ \Delta\mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\sigma}_E \\ \Delta\mathbf{Y}_E \end{bmatrix} dx dt + \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \mathbf{h}^- \Delta\underline{\mathbf{F}}_E \cdot \Delta\underline{\mathbf{F}}_E ds dt = 0
 \end{aligned}$$

Les opérateurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{H}^-$  et  $\mathbf{h}^-$  étant définis positifs et en vertu de la proposition 11.3 concernant l'approximation temporelle, on obtient  $(\Delta\boldsymbol{\sigma}_E, \Delta\underline{F}_E, \Delta\mathbf{Y}_E) = (0, 0, 0)$ , ce qui termine la preuve. Les conditions générales d'existence de solution à ce problème sont rappelées dans l'annexe A.  $\square$

**Les problèmes micro, définis sur  $\Omega_E \times (0, T)$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , sont indépendants.** Les temps locaux peuvent donc être différents d'une sous-structure à l'autre. **Cette étape est parallélisable.** Une technique de résolution classique est détaillée dans l'annexe B : elle consiste à résoudre le problème micro de manière incrémentale sur les intervalles de temps  $I_i$ ,  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ . Le problème est dualisé en terme de déplacements afin de conserver une approche éléments finis standard. Une technique de résolution moins conventionnelle sera proposée dans le chapitre V.

■ **Définition d'opérateurs homogénéisés sur  $\Omega_E \times (0, T)$**

**Proposition 11.16** *Si  $\mathbf{H}^-$  et  $\mathbf{h}^-$  sont des opérateurs définis positifs, le problème micro défini sur la sous-structure  $E$  et sa frontière admet une solution unique telle que :*

$$\underline{F}_{E|(0,T)}^M = \mathbf{L}_E^F \left( \widetilde{W}_{E|(0,T)}^M \right) + \widehat{F}_{E,d|(0,T)}^M \quad (11.13)$$

$$\underline{W}_{E|(0,T)}^M = \mathbf{L}_E^W \left( \widetilde{W}_{E|(0,T)}^M \right) + \widehat{W}_{E,d|(0,T)}^M \quad (11.14)$$

où  $\widetilde{W}_E^M \in \mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$ .  $\widehat{F}_{E,d}$  et  $\widehat{W}_{E,d}$  dépendent de  $f_{d|\Omega_E}$  et de  $\widehat{\mathbf{s}}_E$ .

□ **Preuve :** Cette proposition découle directement de la proposition 11.15 et de la linéarité du problème micro.  $\square$

$\mathbf{L}_E^F$  (resp.  $\mathbf{L}_E^W$ ) est un opérateur linéaire de  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$  dans  $\mathcal{F}_{h,E}^{(0,T),M}$  (resp. de  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$  dans  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$ ). Ces opérateurs peuvent être interprétés comme des opérateurs de comportement homogénéisé sur la sous-structure d'espace-temps  $\Omega_E \times (0, T)$ . Ils sont calculés en résolvant une série de problèmes micro sur  $\Omega_E \times (0, T)$  où l'on prend successivement pour  $\widetilde{W}_E^M$  les fonctions de base de  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$ . Lors de leur calcul, toutes les autres données sont prises nulles. Leur coût de calcul est relativement faible puisque  $\widetilde{W}_E^M$  sur  $\partial\Omega_E \times (0, T)$  ne dépend que d'un nombre réduit de paramètres. Ces opérateurs représentent l'effet de couplage entre les différentes échelles. Une relation entre les efforts macro et les déplacements macro, qui définit un opérateur homogénéisé plus classique peut simplement être déduit des relations (11.13) et (11.14).

Connaissant le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{W}_E^M$ , on peut déduire la solution complète  $\mathbf{s}_E$  sur  $\Omega_E \times (0, T)$ , c'est-à-dire qu'il existe un opérateur linéaire de localisation  $\mathbf{L}_E^s$ , défini sur  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$  à valeur dans  $\mathcal{S}_{h,E}^{(0,T)}$ , tel que

$$\mathbf{s}_{E|(0,T)} = \mathbf{L}_E^s \left( \widetilde{W}_{E|(0,T)}^M \right) + \widehat{\mathbf{s}}_{E,d|(0,T)} \quad (11.15)$$

où  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,d}$  dépend de  $\underline{f}_{-d|_{\Omega_E}}$  et de  $\widehat{\mathbf{s}}_E$ .

*Remarque II.9* Les relations homogénéisées font ici intervenir le multiplicateur de Lagrange et non sa dérivée temporelle, ce qui semblerait pourtant plus naturel. Le multiplicateur étant physiquement homogène à un déplacement, nous avons cependant choisi de le représenter de la même manière que les autres variables cinématiques. Grâce à l'utilisation de la méthode de Galerkin discontinue, ce choix ne pose pas de problème particulier et permet de rester cohérent avec les choix adoptés précédemment (voir remarque II.1).

### ■ Propriétés des opérateurs homogénéisés

Notons que la distribution  $\underline{F}_E^M$  sur la frontière  $\partial\Omega_E$  est nécessairement en équilibre avec le chargement  $\underline{f}_{-d|_{\Omega_E}}$  en un sens que nous allons préciser ici. On introduit pour cela  $\mathcal{R}_{h,E}^{(0,T)} = \left\{ \underline{\alpha}_E \in \mathbf{U}_{h,E}^{(0,T)} / \varepsilon(\underline{\alpha}_E) = 0 \right\}$ , l'espace des modes rigides infinitésimaux de  $\Omega_E$ . La solution du problème "micro" vérifie nécessairement

$$\forall \underline{\alpha}_E \in \mathcal{R}_{h,E}^{(0,T)}, \quad \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}_E \cdot \dot{\underline{\alpha}}_E \, ds \, dt = \int_{\Omega_E \times [0,T]} \underline{f}_{-d} \cdot \dot{\underline{\alpha}}_E \, dx \, dt$$

$\mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T)}$  désignera l'espace des traces des fonctions de  $\mathcal{R}_{h,E}^{(0,T)}$  sur  $\partial\Omega_E$ . Notons à présent  $\mathcal{R}_{h,E}^{(0,T),M}$  l'espace des modes rigides de type  $\mathbf{Z}_p^{(0,T)}$ , macro en temps.  $\mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$  désignera l'espace des traces des fonctions de  $\mathcal{R}_{h,E}^{(0,T),M}$  sur  $\partial\Omega_E$ . Grâce à notre choix particulier des espaces macro, on a  $\mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M} \subset \mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$ . En vertu de la propriété de découplage (II.5), on a

$$\int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}_E \cdot \dot{\underline{\alpha}}_E^M \, ds \, dt = \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}_E^M \cdot \dot{\underline{\alpha}}_E^M \, ds \, dt, \quad \forall \underline{\alpha}_E^M \in \mathcal{R}_{h,E}^{(0,T),M}$$

On peut alors définir l'espace  $\overline{\mathcal{F}}_{h,E,ad}^{(0,T),M}$  des efforts équilibrés en moyenne avec  $\underline{f}_{-d}$  sur la sous-structure  $\Omega_E$ , c'est-à-dire

$$\overline{\mathcal{F}}_{h,E,ad}^{(0,T),M} = \left\{ \underline{F}_E^M \in \mathcal{F}_{h,E}^{(0,T),M} / \forall \underline{\alpha}_E^M \in \mathcal{R}_{h,E}^{(0,T),M}, \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}_E^M \cdot \dot{\underline{\alpha}}_E^M \, ds \, dt = \int_{\Omega_E \times [0,T]} \underline{f}_{-d} \cdot \dot{\underline{\alpha}}_E^M \, dx \, dt \right\}$$

On désignera par  $\overline{\mathcal{F}}_{h,E,0}^{(0,T),M}$  l'espace correspondant pour des conditions homogènes.

On introduit l'espace quotient  $\overline{\mathcal{W}}_{h,E}^{(0,T),M} = \mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M} / \mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$ . On peut alors énoncer les propriétés suivantes pour les opérateurs homogénéisés  $\mathbf{L}_E^F$  et  $\mathbf{L}_E^W$  :

**Proposition II.17** *L'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$  défini en (II.13) a son image dans  $\overline{\mathcal{F}}_{h,E,0}^{(0,T),M}$ . Il n'est pas défini : en effet, son noyau est  $\mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$ . Par contre, il réalise une bijection de  $\overline{\mathcal{W}}_{h,E}^{(0,T),M}$  dans  $\overline{\mathcal{F}}_{h,E,0}^{(0,T),M}$ . De plus,  $\mathbf{L}_E^F$  est positif vis à vis de la forme bilinéaire travail sur la frontière  $\partial\Omega_E$ .*

□ **Preuve** : Soit  $\mathbf{s}_E = \mathbf{L}_E^s(\widetilde{W}_E^M)$ . On a donc  $\mathbf{s}_E \in \mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$  qui vérifie également

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{(0,T)}, \quad \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} \\ -\dot{\mathbf{X}}_E \end{bmatrix} - \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_E \\ \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \right\} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\forall \underline{F}_E^* \in \mathfrak{F}_{h,E}^{(0,T)}, \quad \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \mathbf{h}^- \underline{F}_E + \dot{W}_E - \widetilde{W}_E^M \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt = 0 \quad (\text{II.17})$$

$\mathbf{s}_E$  est solution de la formulation variationnelle suivante : trouver  $(\boldsymbol{\sigma}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_{h,E,0}^{(0,T)}$  et  $\mathbf{Y}_E \in \mathbf{y}_{h,E}^{(0,T)}$  qui vérifie :  $\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{F}_{h,E,0}^{(0,T)}, \quad \forall \mathbf{Y}^* \in \mathbf{y}_{h,E}^{(0,T)}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_E \\ \dot{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} + \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_E \\ \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \right\} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt + \\ & \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \mathbf{h}^- \underline{F}_E \cdot \underline{F}^* ds dt = \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \widetilde{W}_E^M \cdot \underline{F}^* ds dt \end{aligned}$$

On injecte alors  $\mathbf{s}_E$  comme champ virtuel de cette formulation. D'après les propriétés de découplage (II.5), on a

$$\int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left( \widetilde{W}_E^M \right) \cdot \underline{F}_E ds dt = \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left( \widetilde{W}_E^M \right) \cdot \mathbf{L}_E^F(\widetilde{W}_E^M) ds dt$$

Les opérateurs  $\boldsymbol{\Lambda}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{H}^-$  et  $\mathbf{h}^-$  étant définis positifs et en vertu de la proposition II.3, on conclut sur la positivité de l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$ . De plus, si  $\mathbf{L}_E^F(\widetilde{W}_E^M) = 0$ , on a clairement  $\boldsymbol{\sigma}_E = \underline{Y}_E = \underline{F}_E = 0$ . En utilisant les équations d'état ainsi que l'équation (II.16), on obtient  $\boldsymbol{\varepsilon}_{pE} = \boldsymbol{\varepsilon}_E = 0$ , ce qui implique  $\underline{W}_E \in \mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T)}$ . De plus, (II.17) donne  $\underline{W}_E = \widetilde{W}_E^M$  et par conséquent  $\widetilde{W}_E^M \in \mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$ . On a alors  $\text{Ker}(\mathbf{L}_E^F) = \mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$ .  $\mathbf{L}_E^F$  définissant une injection de  $\overline{\mathcal{W}}_{h,E}^{(0,T),M}$  dans  $\overline{\mathfrak{F}}_{h,E,0}^{(0,T),M}$ , espaces de même dimension finie, il réalise donc une bijection de  $\overline{\mathcal{W}}_{h,E}^{(0,T),M}$  dans  $\overline{\mathfrak{F}}_{h,E,0}^{(0,T),M}$ . □

**Proposition II.18** L'opérateur  $\mathbf{L}_E^W$  défini en (II.14) réalise une bijection de  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$  dans  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$ . Sa restriction à  $\mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$  est l'opérateur identité sur  $\mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$ .

□ **Preuve** : Même démonstration que pour la proposition II.17. □

Les extensions de  $\overline{\mathfrak{F}}_{h,E,ad}^{(0,T),M}$  et  $\overline{\mathcal{W}}_{h,E}^{(0,T),M}$  à l'ensemble des interfaces seront notées respectivement  $\overline{\mathfrak{F}}_{h,ad}^{(0,T),M}$  et  $\overline{\mathcal{W}}_h^{(0,T),M}$ .

### 3.3.2 Le problème macro défini sur $\Omega \times (0, T)$

Les relations (II.11) et (II.13) conduisent à la définition du problème macro qui peut être formulé de la manière suivante :

**Problème II.6** Trouver  $(\underline{F}^M, \widetilde{W}^M)$  qui vérifie :

- l'admissibilité statique :  $\underline{F}^M \in \mathfrak{F}_{h,ad}^{(0,T),M}$
- l'admissibilité cinématique :  $\widetilde{W}^M \in \mathcal{W}_{h,0}^{(0,T),M}$
- la relation de comportement homogénéisé sur l'espace-temps :

$$\underline{F}_{E|(0,T)}^M = \mathbf{L}_E^F(\widetilde{W}_{E|(0,T)}^M) + \widehat{F}_{E,d}^M, \quad \forall E \in \mathbf{E}$$

#### ■ Formulation en déplacement du problème macro

L'écriture sous forme faible de l'admissibilité statique (II.13) et la relation de comportement (II.11) conduisent à la formulation variationnelle suivante :

**Problème II.7** Trouver  $\widetilde{W}^M = \{\widetilde{W}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{h,0}^{(0,T),M}$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall \widetilde{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{h,0}^{(0,T),M}, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \widetilde{W}_E^{M*} \cdot \left( \mathbf{L}_E^F(\widetilde{W}_E^M) + \widehat{F}_{E,d}^M \right) ds dt = \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{(\partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega) \times [0,T]} \widetilde{W}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d ds dt \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

**Proposition II.19** Le problème macro II.7 admet une et une seule solution si  $mes(\partial_1\Omega) \neq 0$ .

□ **Preuve** : Le problème macro est un problème de dimension finie. Il suffit de montrer l'unicité de la solution. Soit  $(\widetilde{W}_1^M, \widetilde{W}_2^M)$  deux solutions du problème II.7. Posons  $\Delta\widetilde{W}^M = \widetilde{W}_1^M - \widetilde{W}_2^M$ . En soustrayant les équations (II.18) relatives à 1 et 2 et en injectant comme champ test  $\Delta\widetilde{W}^M$ , on obtient

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \Delta\widetilde{W}_E^M \cdot \mathbf{L}_E^F(\Delta\widetilde{W}_E^M) ds dt = 0$$

En vertu des propriétés de l'opérateur homogénéisé  $\mathbf{L}_E^F$  montrées dans la proposition II.17, on a donc  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,  $\Delta\widetilde{W}_E^M \in \mathcal{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$ . De plus  $\Delta\widetilde{W}^M \in \mathcal{W}_{h,0}^{(0,T),M}$ . Si  $mes(\partial_1\Omega) \neq 0$ ,  $\Delta\widetilde{W}^M$  s'annule sur  $\partial_1\Omega$  et donc sur toute sous-structure dont la frontière intersecte  $\partial_1\Omega$ . Par continuité aux interfaces,  $\Delta\widetilde{W}^M$  s'annule partout. □

La résolution de ce problème conduit à  $\widetilde{W}^M$  et, par la relation de comportement, à  $\underline{F}^M$ . Ensuite, en utilisant de nouveau les problèmes micro ou l'opérateur de localisation  $\mathbf{L}_E^s$  s'il a été stocké, on détermine  $\mathbf{s}_{n+1}$  complètement.

### ■ Formulation en effort du problème macro

Le problème macro peut être formulé de manière équivalente en terme d'efforts. Cette formulation consiste à écrire l'admissibilité du multiplicateur de Lagrange au sens faible en y injectant la relation de comportement. Les efforts doivent bien sûr être cherchés dans  $\overline{\mathcal{F}}_{h,ad}^{(0,T),M}$ , l'espace des champs équilibrant en moyenne les sous-structures. On a  $\underline{F}^M - \widehat{F}_d^M \in \overline{\mathcal{F}}_{h,0}^{(0,T),M}$  et d'après la proposition II.17, la relation de comportement peut être inversée sur cet espace. La formulation en effort est donc :

**Problème II.8** Trouver  $\underline{F}^M \in \overline{\mathcal{F}}_{h,ad}^{(0,T),M} \cap \mathcal{F}_{h,ad}^{(0,T),M}$  tel que  $\forall \underline{F}^{M*} \in \overline{\mathcal{F}}_{h,0}^{(0,T),M} \cap \mathcal{F}_{h,0}^{(0,T),M}$ ,

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}_E^{M*} \cdot \frac{d}{dt} \left( \mathbf{L}_E^{F^{-1}} \left( \underline{F}_E^M - \widehat{F}_{E,d}^M \right) \right) ds dt = 0$$

Pour simplifier la résolution de ce problème, on peut introduire un multiplicateur de Lagrange  $\underline{\alpha}^M = \{\underline{\alpha}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{R}_h^{(0,T),M} = \prod_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{R}_{h,E}^{(0,T),M}$  afin de garantir l'équilibre des efforts macro. Notons  $\mathbf{L}_E^{F^+}$  une inverse généralisée de  $\mathbf{L}_E^F$ , déterminée en pratique en bloquant les modes rigides de la frontière  $\partial\Omega_E$  (3 en 2D). Etant donné le choix de nos espaces macro, ce blocage est très simple puisqu'il suffit de mettre à zéro les ddl macro correspondant aux modes rigides d'une des interfaces  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$ . Le problème macro s'écrit alors :

**Problème II.9** Trouver  $(\underline{F}^M, \underline{\alpha}^M) \in \overline{\mathcal{F}}_{h,ad}^{(0,T),M} \times \mathcal{R}_h^{(0,T),M}$  tel que

$$\begin{aligned} \forall (\underline{F}^{M*}, \underline{\alpha}^{M*}) \in \overline{\mathcal{F}}_{h,0}^{(0,T),M} \times \mathcal{R}_h^{(0,T),M}, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}_E^{M*} \cdot \frac{d}{dt} \left( \mathbf{L}_E^{F^+} \left( \underline{F}_E^M - \widehat{F}_{E,d}^M \right) + \underline{\alpha}_E^M \right) ds dt = 0 \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F}_E^M \cdot \dot{\underline{\alpha}}_E^{M*} ds dt = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E \times [0,T]} \underline{f}_d \cdot \dot{\underline{\alpha}}_E^{M*} dx dt \end{aligned}$$

### ■ Interprétation du problème macro

Les quantités macro sont définies uniquement au niveau des interfaces ; le couplage entre les différentes interfaces est réalisé via l'opérateur de comportement homogénéisé qui est non local. Le problème macro résultant est un problème mécanique non standard en ce sens qu'il ne fait pas apparaître un milieu continu classique. Cependant, en interprétant le milieu comme un milieu de Cosserat généralisé, on pourrait définir à l'intérieur des sous-structures des quantités macro : contraintes, déformations ... Chaque cellule est considérée homogène à l'échelle macro. Alors, à partir des forces et déplacements généralisés sur l'interface que sont les variables macro, des quantités macro (déplacements, directeurs) et leur quantité conjuguée pourraient être définies et conduisent à la définition d'un milieu de type Cosserat non conventionnel. Ce point n'a pas encore été développé.

### 3.4 Résolution incrémentale de l'étape linéaire sur la grille macro

Si le nombre d'intervalles macro augmente, le calcul de l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$  et la résolution du problème macro, global sur  $(0, T)$ , peuvent devenir prohibitifs. Il est alors possible de reformuler l'étape linéaire afin de pallier cet inconvénient. Grâce à l'utilisation de la méthode de Galerkin discontinue au niveau temporel, les quantités macro sont définies indépendamment par intervalle macro  $I_i^M$ ,  $i \in \{0, \dots, N' - 1\}$  : on montre en effet que les projections macro des efforts et déplacements sur  $I_i^M$  ne dépendent pas de la distribution de ces efforts et déplacements sur les autres intervalles  $I_j^M$ ,  $j \neq i$ .

En considérant  $\mathbf{s}$  connu pour  $t \leq t'_i$ , on peut alors formuler l'étape linéaire sur l'intervalle  $I_i^M$ . Ce problème s'écrit :

**Problème II.10** Trouver  $\mathbf{s}_{|I_i^M} \in \mathbf{S}_h^{(t'_i, t'_{i+1})}$  qui vérifie :

- $\forall E \in \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{s}_{E|I_i^M}$  est  $E$ -admissible :  $\mathbf{s}_{E|I_i^M} \in \mathbf{S}_{h, E, ad}^{(t'_i, t'_{i+1})}$
- les directions de recherche restreintes à  $I_i^M$  :  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,  $\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h, E}^{(t'_i, t'_{i+1})}$ ,

$$\int_{\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} \\ -(\dot{\mathbf{X}}_E - \hat{\mathbf{X}}_E) \end{bmatrix} - \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_E - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_E \\ \mathbf{Y}_E - \hat{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} \right\} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt = 0 \quad (II.19)$$

$$\text{et } \forall \underline{F}^* \in \mathfrak{F}_h^{(t'_i, t'_{i+1}), m} \cup \mathfrak{F}_{h, ad}^{(t'_i, t'_{i+1}), M},$$

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \left\{ \mathbf{h}^- \left( \underline{F}_E - \hat{\underline{F}}_E \right) + \left( \dot{\underline{W}}_E - \hat{\underline{W}}_E \right) \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt = 0 \quad (II.20)$$

où l'intégrale sur  $[t'_i, t'_{i+1}]$  est définie dans la définition II.5.

On introduit alors un multiplicateur  $\widetilde{\underline{W}}^M \in \mathcal{W}_{h, 0}^{(t'_i, t'_{i+1}), M}$  pour écrire au sens faible la contrainte d'admissibilité des efforts macro. La direction de recherche (II.20) se décompose alors en les deux équations suivantes :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathfrak{F}_h^{(t'_i, t'_{i+1})}, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \left\{ \mathbf{h}^- \left( \underline{F}_E - \hat{\underline{F}}_E \right) + \left( \dot{\underline{W}}_E - \hat{\underline{W}}_E \right) \right\} \cdot \underline{F}_E^* ds dt = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \dot{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{F}_E^* ds dt \quad (II.21)$$

$$\forall \widetilde{\underline{W}}^M \in \mathcal{W}_{h, 0}^{(t'_i, t'_{i+1}), M},$$

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \dot{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{F}_E ds dt = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{(\partial\Omega_E \cap \partial_2 \Omega) \times [t'_i, t'_{i+1}]} \dot{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d ds dt \quad (II.22)$$

On rappelle qu'une distinction est faite entre l'intégrale sur  $[t'_i, t'_{i+1}]$  et l'intégrale sur  $[t'_i, t'_{i+1}]$  (voir définition II.5).

### 3.4.1 Le problème micro sur $\Omega_E \times (t'_i, t'_{i+1})$

L'E-admissibilité des variables sur  $\Omega_E \times (t'_i, t'_{i+1})$  et la direction de recherche (II.21) permettent de formuler le problème micro sur  $\Omega_E \times (t'_i, t'_{i+1})$  :

**Problème II.11** Trouver  $(\underline{\sigma}_E, \underline{F}_E)_{|I_i^M} \in \mathbf{F}_{h,E,ad}^{(t'_i, t'_{i+1})}$  et  $\mathbf{Y}_{E|I_i^M} \in \mathbf{Y}_{h,E}^{(t'_i, t'_{i+1})}$  qui vérifient :

$$\begin{aligned} & \forall (\underline{\sigma}^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{F}_{h,E,0}^{(t'_i, t'_{i+1})}, \quad \forall \mathbf{Y}^* \in \mathbf{Y}_{h,E}^{(t'_i, t'_{i+1})}, \\ & \int_{\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \mathbf{K}^{-1} \dot{\underline{\sigma}}_E : \underline{\sigma}^* dx dt + \int_{\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \Lambda^{-1} \dot{\mathbf{Y}}_E \circ \mathbf{Y}^* dx dt + \\ & \int_{\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_E \\ \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \underline{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt + \int_{\partial\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \mathbf{h}^- \underline{F}_E \cdot \underline{F}^* ds dt = \\ & \int_{\partial\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \left( \mathbf{h}^- \widehat{\underline{F}}_E + \widehat{\underline{W}}_E + \widehat{\underline{W}}_E^M \right) \cdot \underline{F}^* ds dt + \\ & \int_{\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \left( \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \widehat{\underline{\sigma}}_E \\ \widehat{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widehat{\underline{\varepsilon}}_{pE} \\ -\widehat{\underline{\mathbf{X}}}_E \end{bmatrix} \right) \circ \begin{bmatrix} \underline{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt + \\ & \int_{\partial\Omega_E} \left( \widehat{\underline{W}}_E(t'_i^-) - \widehat{\underline{W}}_E(t'_i^-) \right) \cdot \underline{F}^*(t'_i^+) ds - \int_{\Omega_E} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_{pE} - \widehat{\underline{\varepsilon}}_{pE} \\ -(\underline{\mathbf{X}}_E - \widehat{\underline{\mathbf{X}}}_E) \end{bmatrix} (t'_i^-) \circ \begin{bmatrix} \underline{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} (t'_i^+) dx \end{aligned}$$

Les conditions initiales  $\mathbf{s}_E(t'_i^-)$  apparaissent alors comme des chargements sur les "interfaces temporelles"  $\Omega_E \times \{t'_i\}$  et  $\partial\Omega_E \times \{t'_i\}$ .

**Proposition II.20** Si  $\mathbf{H}^-$  et  $\mathbf{h}^-$  sont définis positifs, alors,  $\forall E \in \mathbf{E}$  et  $\forall i \in \{0, \dots, N'-1\}$ , le problème micro II.11 défini sur la sous-structure  $\Omega_E \times (t'_i, t'_{i+1})$  et sa frontière spatiale  $\partial\Omega_E \times (t'_i, t'_{i+1})$  admet une unique solution telle que :

$$\underline{F}_{-E|I_i^M}^M = \mathbf{L}_{E,i}^F \left( \widetilde{\underline{W}}_{E|I_i^M}^M \right) + \widehat{\underline{F}}_{-E,d|I_i^M}^M \quad (\text{II.23})$$

où  $\widetilde{\underline{W}}_{E|I_i^M}^M \in \mathcal{W}_{h,E}^{(t'_i, t'_{i+1}), M}$ .  $\widehat{\underline{F}}_{-E,d|I_i^M}^M$  dépend de  $\underline{f}_{d|\Omega_E \times I_i^M}$ ,  $\widehat{\mathbf{s}}_E$  et des conditions initiales en  $t'_i^-$ .

□ **Preuve** : suivre celle de la proposition II.15. □

L'opérateur  $\mathbf{L}_{E,i}^F$  est un opérateur de comportement homogénéisé sur la sous-structure d'espace-temps  $\Omega_E \times I_i^M$  et peut être calculé en résolvant une série de problèmes micro où l'on prend successivement pour  $\widetilde{\underline{W}}_{E|I_i^M}^M$  les fonctions de base de  $\mathcal{W}_{h,E}^{(t'_i, t'_{i+1}), M}$ . Tous les autres chargements, y compris les conditions initiales en  $t'_i^-$  sont pris nuls lors de son calcul. Cet opérateur est défini indépendamment par sous-structure d'espace-temps  $\Omega_E \times I_i^M$  et **son calcul peut donc être parallélisé à la fois en espace et en temps**. De plus, si les intervalles macro  $I_i^M$  sont identiques entre eux et si les opérateurs  $\mathbf{H}^-$  et  $\mathbf{h}^-$  sont invariants par intervalle, le calcul d'un seul opérateur est suffisant.

### 3.4.2 Le problème macro sur $\Omega \times (t'_i, t'_{i+1})$

**Problème II.12** Trouver  $\widetilde{\mathbf{W}}^M = \left\{ \widetilde{\mathbf{W}}_E^M \right\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathbf{W}_{h,ad}^{(t'_i, t'_{i+1}), M}$  qui vérifie

$$\begin{aligned} \forall \widetilde{\mathbf{W}}^{M*} \in \mathbf{W}_{h,0}^{(t'_i, t'_{i+1}), M}, \quad & \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \dot{\widetilde{\mathbf{W}}}_E^{M*} \cdot \left( \mathbf{L}_{E,i}^F \left( \widetilde{\mathbf{W}}_E^M \right) + \widehat{\mathbf{F}}_{E,d}^M \right) ds dt = \\ & \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{(\partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega) \times [t'_i, t'_{i+1}]} \dot{\widetilde{\mathbf{W}}}_E^{M*} \cdot \mathbf{F}_d ds dt \end{aligned}$$

On peut prouver que ce problème macro admet une solution unique.

*Remarque II.10* La reformulation proposée peut bien sûr porter sur un ensemble d'intervalles macro et non plus sur un seul intervalle ; cela conduit alors à la définition d'un opérateur homogénéisé sur un nombre réduit d'intervalles macro.

## 4 Convergence de la stratégie de calcul multiéchelle

Si l'opérateur  $\mathbf{B}$  qui caractérise le matériau est monotone et si de plus les interfaces représentent des liaisons parfaites, des conditions aux limites ou des interfaces de contact unilatéral sans frottement, alors la stratégie de calcul multiéchelle vérifie les hypothèses usuelles de la méthode LATIN ; en effet, on a :

**Proposition II.21** Si  $\mathbf{B}$  est monotone et les interfaces sont sans frottement, alors

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \forall (\widehat{\mathbf{s}}, \widehat{\mathbf{s}}') \in \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{\Gamma}, \quad \langle (\widehat{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}'), (\widehat{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}') \rangle \geq 0 \\ \bullet \quad & \forall (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbf{A}_d \times \mathbf{A}_d, \quad \langle (\mathbf{s} - \mathbf{s}'), (\mathbf{s} - \mathbf{s}') \rangle \leq 0 \end{aligned} \quad (II.24)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la forme bilinéaire de  $\mathbf{S}_h^{(0,T)} \times \mathbf{S}_h^{(0,T)}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{s}, \mathbf{s}' \rangle &= \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E \times [0, T]} \left( \boldsymbol{\sigma}_E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}'_{pE} + \boldsymbol{\sigma}'_E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pE} - \mathbf{Y}_E \circ \dot{\mathbf{X}}'_E - \mathbf{Y}'_E \circ \dot{\mathbf{X}}_E \right) dx dt \\ &- \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0, T]} \left( \underline{\mathbf{F}}_E \cdot \dot{\underline{\mathbf{W}}}'_E + \underline{\mathbf{F}}'_E \cdot \dot{\underline{\mathbf{W}}}_E \right) ds dt \end{aligned}$$

L'expression précédente est prise au sens de la définition II.1.

En suivant la preuve pour la stratégie monoéchelle donnée dans [Ladevèze, 1999], on peut montrer que le processus moyen  $\frac{1}{2}(\mathbf{s}_{n+1} + \mathbf{s}_n)$  converge si les directions de recherche sont conjuguées, c'est-à-dire  $(\mathbf{H}^+, \mathbf{h}^+) = (\mathbf{H}^-, \mathbf{h}^-) = (\mathbf{H}, \mathbf{h})$ , et si  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{h}$  sont des opérateurs symétriques. Pour assurer la convergence de  $\mathbf{s}_n$  et plus généralement pour assurer la convergence pour une large classe de comportements, on modifie l'étape linéaire en incluant une relaxation : renommant  $\widetilde{\mathbf{s}}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  la quantité précédemment notée  $\mathbf{s}_{n+1}$ , on définit  $\mathbf{s}_{n+1}$  par la relation :

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mu \widetilde{\mathbf{s}}_{n+1} + (1 - \mu) \mathbf{s}_n \quad (II.25)$$

où  $\mu$  est le paramètre de relaxation choisi en pratique égal à 0.8.

*Remarque II.11* Ce résultat de convergence ne s'applique pas pour le cas des matériaux adoucissants pour lesquels peuvent apparaître des phénomènes de localisation. Cependant, des expérimentations numériques ont été réalisées avec succès pour la version monoéchelle [Allix, 1992, Ladevèze et al., 2000a, Aubard et al., 2000].

## 5 Quelques remarques et précisions sur la stratégie de calcul

### 5.1 Initialisation de l'algorithme

On cherche à initialiser l'algorithme en recherchant un élément  $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{A}_d$ . Le plus simple est de réaliser une première étape linéaire avec un comportement élastique, c'est-à-dire  $\mathbf{H}^- = 0$ . Dans le cas où l'opérateur  $\mathbf{B}$  est linéaire, on pourra bien sûr choisir  $\mathbf{H}^- = \mathbf{B}$ . En prenant soin de faire apparaître les conditions initiales lors de cette première étape linéaire, les directions de recherche s'écrivent :  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,  $\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{(0,T)}$ ,

$$\int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE,0} \\ -(\dot{\mathbf{X}}_{E,0}) \end{bmatrix} - \mathbf{H}^- \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{E,0} \\ \mathbf{Y}_{E,0} \end{bmatrix} \right\} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} dx dt = 0 \quad (II.26)$$

et  $\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_h^{(0,T),m} \cup \mathcal{F}_{h,ad}^{(0,T),M}$ ,

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left( \mathbf{h}^- \underline{F}_{E,0} + \dot{W}_{E,0} \right) \cdot \underline{F}_E^* ds dt = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} W_E(t_0) \cdot \underline{F}_E^*(t_0^+) ds \quad (II.27)$$

### 5.2 Choix des directions de recherche

#### 5.2.1 Directions de recherche sur les sous-structures

Pour garantir des performances optimales de la méthode LATIN, l'opérateur  $\mathbf{H}^-$  à l'itération  $n$  peut être pris égal à l'opérateur tangent à  $\mathbf{B}$  en  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ ; la méthode LATIN s'apparente alors à un algorithme de type Newton fonctionnant sur l'espace-temps. Cependant, la réactualisation de cet opérateur peut devenir coûteuse. Une modification de cet opérateur demande en effet de recalculer les opérateurs homogénéisés. De plus, cet opérateur dépendant du temps peut être complexe et rendre la résolution des problèmes micro prohibitive. Il peut alors être souhaitable d'utiliser une méthode de type quasi-Newton en ne réactualisant cet opérateur que lors d'un nombre restreint d'itérations. Egalemeant afin de simplifier l'étape locale, qui *a priori* est non-linéaire, la direction de montée  $\mathbf{H}^+$  n'est généralement pas prise comme la conjuguée de la direction de descente  $\mathbf{H}^-$  mais plutôt "verticale" :  $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1/2}, \widehat{\mathbf{Y}}_{n+1/2}) = (\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{Y}_n)$ , voire "partiellement verticale". C'est donc une direction non-linéaire mais qui simplifie grandement la résolution de l'étape locale. Ces points sont développés dans [Ladevèze, 1999].

*Remarque II.12* Dans le cas où l'opérateur de comportement  $\mathbf{B}$  est linéaire, comme

en viscoélasticité linéaire par exemple, les opérateurs  $\mathbf{H}^+$  et  $\mathbf{H}^-$  sont pris égaux à  $\mathbf{B}$ . Le comportement des sous-structures est alors également vérifié à l'étape linéaire.

### 5.2.2 Directions de recherche sur les interfaces

Des travaux récents [Violeau, 2003] ont été menés sur l'interprétation et l'optimisation des directions de recherche sur les interfaces dans le cadre de l'élastostatique. Dans ce cadre, l'interprétation de  $\mathbf{h}_E^-$ , reliant les efforts  $\underline{F}_E$  aux déplacements  $\underline{W}_E$  sur  $\partial\Omega_E$ , est très claire : c'est l'inverse de la rigidité du complémentaire de  $\Omega_E$  condensée sur  $\partial\Omega_E$  (ou complément de Schur de  $\Omega \setminus \Omega_E$ ). Le calcul de cet opérateur optimal est bien sûr extrêmement coûteux puisqu'il nécessite la résolution d'une série de problèmes complets. De plus, il dépend des conditions aux limites. On notera que cet opérateur n'est pas égal de part et d'autre d'une interface dans le cas général ( $\mathbf{h}_E^- \neq \mathbf{h}_{E'}^-$  sur  $\Gamma_{EE'}$ ). Par contre, dans le cadre de la stratégie de calcul multiéchelle, la partie macro des efforts étant propagée à l'ensemble de la structure, seule la partie micro de cet opérateur influence la convergence de la stratégie de calcul :  $\mathbf{h}_E^-$  désignant une forme bilinéaire sur  $\mathcal{F}_E \times \mathcal{F}_E$ , on ne considérera donc que sa restriction à  $\mathcal{F}_E^m \times \mathcal{F}_E^m$ , notée  $\mathbf{h}_{E,m}^-$ . Comme l'espace macro contient les résultantes et moments des efforts, en vertu du principe de Saint-Venant, on peut montrer que l'opérateur  $\mathbf{h}_{E,m}^-$  peut être calculé en ne considérant qu'une partie du complémentaire de  $\Omega_E$  sur une distance de l'ordre du diamètre de  $\Omega_E$ . De plus, des expérimentations numériques [Violeau, 2003] ont montré qu'une estimation grossière de cet opérateur était suffisante : en pratique l'opérateur peut être approximé par un scalaire correspondant à la plus grande valeur propre de  $\mathbf{h}_{E,m}^-$ , calculée par une simple méthode des puissances sur un problème aux valeurs propres décrit dans [Violeau, 2003]. En pratique, on prendra  $\mathbf{h}^- = \mathbf{h}^+ = \mathbf{h}$ .

Dans le cadre des problèmes d'évolution, l'optimisation de ce paramètre n'a pas encore été étudiée. Il est clair que l'opérateur introduit  $\mathbf{h}$  reflète également l'influence du complémentaire de  $\Omega_E$  sur  $\partial\Omega_E$ . Il est homogène à l'inverse d'une rigidité divisée par un temps caractéristique. Le choix adopté jusqu'à présent consiste à prendre une approximation de l'opérateur de l'élastostatique divisée par un temps caractéristique qui peut être le temps d'étude ou un temps caractéristique du comportement matériau.

*Remarque II.13 L'influence du complémentaire, prise en compte par l'opérateur  $\mathbf{h}$ , est uniquement "visqueuse". On pourrait envisager des directions de recherche plus complexes de la forme suivante :*

$$\mathbf{k}_E^{-1}(\hat{\underline{F}}_E - \dot{\underline{F}}_E) + \mathbf{h}_E(\hat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E) \pm (\hat{\underline{W}}_E - \dot{\underline{W}}_E) = 0$$

où  $\mathbf{k}_E^{-1}$  est une approximation de l'opérateur de l'élastostaticité (lié à l'opérateur de Hooke  $\mathbf{K}$ ) et  $\mathbf{h}_E$  une viscosité. Les problèmes aux étapes locales et linéaires restent bien définis. Dans le cas d'un matériau viscoélastique linéaire décrit par le comportement  $\mathbf{B} = \frac{1}{\eta}\mathbf{K}^{-1}$ , on prendra naturellement  $\mathbf{h}_E = \frac{1}{\eta}\mathbf{k}_E^{-1}$ . Bien que la convergence de l'algorithme soit encore vérifiée numériquement, on sort cependant du cadre théorique classique de convergence de la méthode LATIN. L'étude de l'optimisation de ce paramètre dans un cadre général reste encore à mener.

### 5.3 Reformulation dans le cas d'interfaces parfaites

Dans le cas où l'on ne considère que des interfaces parfaites, il peut être judicieux d'imposer également aux déplacements macro de vérifier *a priori* les conditions de transmission aux interfaces. Ce choix conduit alors à la reformulation suivante du problème de référence :

**Problème II.13** Trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)}$  qui vérifie :

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}_d \\ \Gamma \end{array} \left\| \begin{array}{l} - \forall E \in \mathbf{E}, \mathbf{s}_E \text{ est } E\text{-admissible : } \mathbf{s}_E \in \mathbf{S}_{h,E,ad}^{(0,T)} \\ - \underline{F}^M \text{ est admissible : } \underline{F}^M \in \mathfrak{F}_{h,ad}^{(0,T),M} \\ - \underline{W}^M \text{ est admissible : } \underline{W}^M \in \mathcal{W}_{h,ad}^{(0,T),M} \\ \\ - \text{la relation de comportement décrivant l'évolution de l'état (II.4)} \\ - \text{le comportement des interfaces} \end{array} \right.$$

L'algorithme de résolution présenté précédemment reste inchangé à un détail près : le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{W}^M$  introduit dans (II.10) ne vérifie plus les conditions d'admissibilité. Il appartient maintenant à l'espace  $\mathcal{W}_h^{(0,T),M}$  sans contrainte. Le problème "macro" porte à présent sur le couple  $(\underline{F}^M, \underline{W}^M)$ . Il est formulé de la manière suivante :

**Problème II.14** Trouver  $(\underline{F}^M, \underline{W}^M)$  qui vérifie :

- l'admissibilité statique :  $\underline{F}^M \in \mathfrak{F}_{h,ad}^{(0,T),M}$
- l'admissibilité cinématique :  $\underline{W}^M \in \mathcal{W}_{h,ad}^{(0,T),M}$
- la relation de comportement homogénéisé sur l'espace-temps :

$$\underline{F}_{E|(0,T)}^M = \mathbf{L}_E^F \mathbf{L}_E^{W^{-1}} (\underline{W}_{E|(0,T)}^M) + \widehat{F}_{E,d|(0,T)}^M - \mathbf{L}_E^F \mathbf{L}_E^{W^{-1}} (\widehat{W}_{E,d|(0,T)}^M), \quad E \in \mathbf{E}$$

$\mathbf{L}_E^F \mathbf{L}_E^{W^{-1}}$  est un opérateur homogénéisé plus conventionnel puisqu'il relie les efforts aux déplacements vrais. Ce problème peut être formulé et résolu de la même manière que précédemment.

### 5.4 Bilan : algorithme de résolution

Le tableau II.1 rappelle brièvement les étapes de la stratégie de résolution multiéchelle présentée dans ce chapitre. L'étape linéaire est ici résolue de manière incrémentale sur les intervalles macro (voir paragraphe 3.4). On rappelle que la phase d'initialisation est résolue de la même manière que l'étape linéaire (voir paragraphe 5.1).

---

**Tableau II.1** – Stratégie de calcul multiéchelle (◻ : phase parallélisable)

---

► Initialisation  $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{A}_d$

Boucle sur  $n = 0 \dots n_{max}$  :

► Etape locale : calcul de  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \mathbf{\Gamma}$

◻ Résolution de problèmes locaux sur les sous-structures  $\Omega_E, E \in \mathbf{E}$  :

→ réactualisation éventuelle de  $\mathbf{H}^+$

→ calcul de  $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{E,n+1/2}, \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE,n+1/2})$

◻ Résolution de problèmes locaux sur les interfaces  $\Gamma_{EE'}, E \in \mathbf{E}, E' \in \mathbf{V}_E$  :

→ réactualisation éventuelle de  $\mathbf{h}^+$

→ calcul de  $(\widehat{\underline{F}}_{E,n+1/2}, \widehat{\underline{W}}_{E,n+1/2})$  et  $(\widehat{\underline{F}}_{E',n+1/2}, \widehat{\underline{W}}_{E',n+1/2})$

► Etape linéaire : calcul de  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$

Boucle sur  $i = 0 \dots N' - 1$  :

◻ Résolution de problèmes micro définis sur  $\Omega_E \times I_i^M, E \in \mathbf{E}$  :

→ réactualisation éventuelle des directions de recherche  $\mathbf{H}^-$  et  $\mathbf{h}^-$

→ calcul de  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,d,n+1|I_i^M} \Rightarrow \widehat{\underline{F}}_{-E,d,n+1|I_i^M}^M$

→ si les directions de recherche ont été modifiées, calcul de l'opérateur homogénéisé  $\mathbf{L}_{E,i}^F$

• Résolution du problème macro défini sur  $\Omega \times I_i^M$  :

→ calcul de  $\widetilde{\underline{W}}_{n+1|I_i^M}^M$

◻ Résolution de problèmes micro définis sur  $\Omega_E \times I_i^M, E \in \mathbf{E}$  :

→ calcul de  $\mathbf{s}_{E,n+1|I_i^M}$

► Critère d'arrêt basé sur  $\|\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}\|$

---

## 6 Exemples

### 6.1 Application aux problèmes d'évolution : portique hétérogène

#### ■ Description du problème et de la résolution

On considère le problème 2D d'une structure composite contenant des fissures (contact unilatéral avec frottement de Coulomb caractérisé par le paramètre  $f = 0.2$ ) (Figure II.8(a)). Elle est fixée en bas et soumise à des efforts imposés  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  (Figure II.8(b)). Les dimensions dans le plan sont  $120\text{ mm} \times 120\text{ mm}$ . On fait l'hypothèse des déformations planes. Les matériaux considérés sont viscoélastiques linéaires de module d'Young  $E_i$ , coefficient de Poisson  $\nu_i$  et viscosité  $\eta_i$ . La loi de comportement est donc telle que  $\mathbf{B}_i = \frac{1}{\eta_i} \mathbf{K}_i^{-1}$ .

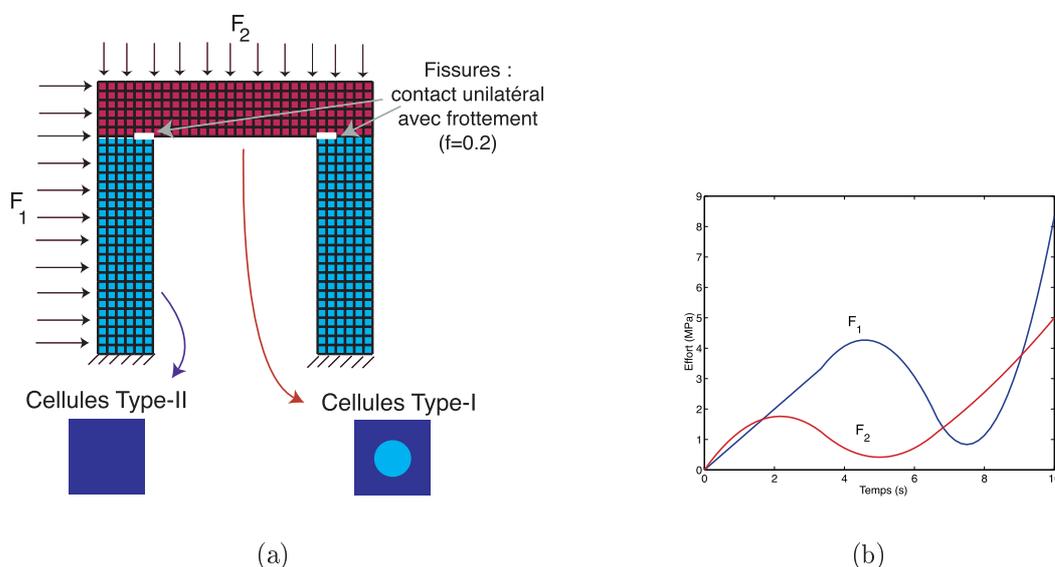


Figure II.8 – Description du problème (a) et allure des chargements  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  (b)

Chaque cellule est une sous-structure du problème partitionné. La structure est composée de deux types de cellules, notés I et II. Les cellules de type-II sont homogènes avec un matériau de type-1 dont les caractéristiques sont  $E_1 = 50\text{ GPa}$ ,  $\nu_1 = 0.3$  et  $\eta_1 = 10\text{ s}$ . Elles sont maillées avec 138 TRI3. Les cellules de type-I sont constituées d'une matrice de matériau de type-1 et d'inclusions de matériau de type-2, dont les caractéristiques sont  $E_2 = 250\text{ GPa}$ ,  $\nu_2 = 0.2$  et  $\eta_2 = 1000\text{ s}$ . Elle sont maillées avec 262 TRI3. Chaque interface contient 8 éléments.

L'intervalle d'étude considéré est  $[0, 10\text{ s}]$ . La partition micro  $\mathcal{T}_h$  contient 60 intervalles identiques et la partition  $\mathcal{T}_{h'}$  contient 3 intervalles macro. Les espaces macro contiennent les fonctions affines par interface au niveau spatial (4 fonctions par interface) et des fonctions de type  $\mathbf{Z}_2^{(0,T)}$  pour la partition  $\mathcal{T}_{h'}$  au niveau temporel (composantes de  $\mathbf{p}$  égales à 2). Les espaces "micro" contiennent des fonctions de type  $\mathbf{Z}_0^{(0,T)}$  pour la partition  $\mathcal{T}_h$  (composantes de  $\mathbf{r}$  égales à 0).

Le comportement des sous-structures étant linéaire, on choisira naturellement  $\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^- = \mathbf{B}$ . Le comportement est donc également vérifié à l'étape linéaire. La dimension caractéristique des cellules est  $L_M = 4\text{ mm}$ . On choisit une direction de recherche scalaire et identique pour toutes les interfaces, soit  $\mathbf{h}^+ = \mathbf{h}^- = h = \frac{1}{\eta_1} \frac{L_M}{E_1}$ .

### ■ Description de la solution

On illustre ici les distributions des variables sur les ensembles d'interfaces  $\Gamma_1$  (4 interfaces au milieu de la zone hétérogène),  $\Gamma_2$  (4 interfaces autour de la fissure gauche) et  $\Gamma_3$  (4 interfaces autour de la fissure droite) (figure II.9).

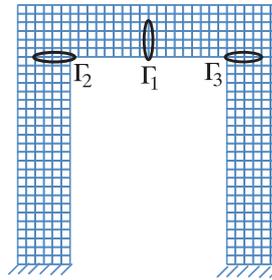


Figure II.9 – Définition des groupements d'interfaces  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$

Les figures II.10, II.11, II.12 et II.13 montrent les distributions spatiales et temporelles des efforts et déplacements macro et totaux sur les interfaces  $\Gamma_1$ . Les parties macro représentent bien une moyenne à la fois sur le temps et l'espace des quantités totales et constituent donc une bonne approximation moyenne de la solution.

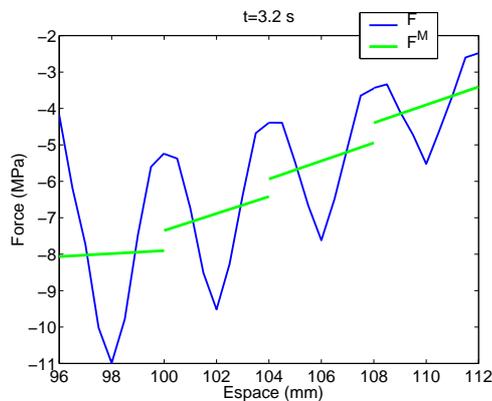


Figure II.10 – Distribution spatiale de la composante normale des efforts totaux et macro sur  $\Gamma_1$

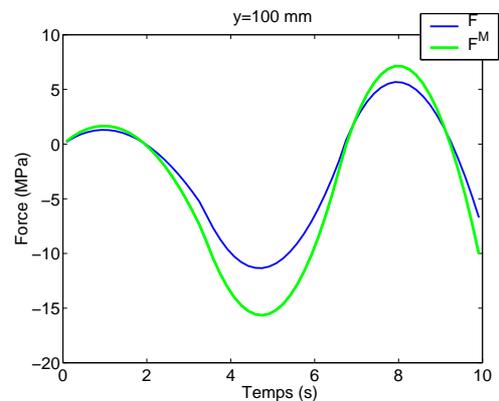


Figure II.11 – Evolution temporelle de la composante normale des efforts totaux et macro en un point de  $\Gamma_1$

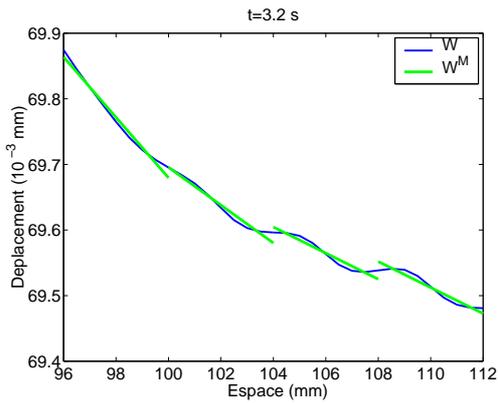


Figure II.12 – Distribution spatiale de la composante normale des déplacements totaux et macro sur  $\Gamma_1$

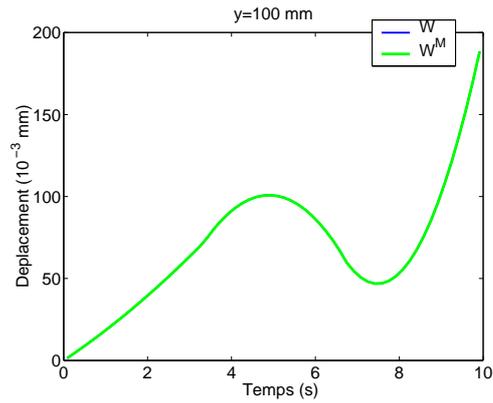


Figure II.13 – Evolution temporelle de la composante normale des déplacements totaux et macro en un point de  $\Gamma_1$

Les figures II.14, II.15, II.16 et II.17 montrent les distributions spatiales et temporelles des efforts et déplacements macro et totaux sur les interfaces  $\Gamma_2$ . Les figures II.18, II.19, II.20 et II.21 montrent ces mêmes distributions pour les interfaces  $\Gamma_3$ . Les quantités macro sont donc de très bonnes approximations de la solution, même dans des zones à fort gradient (autour des fissures). Remarquons également que les conditions de contact sont satisfaites en "moyenne" par les efforts et déplacements macro.

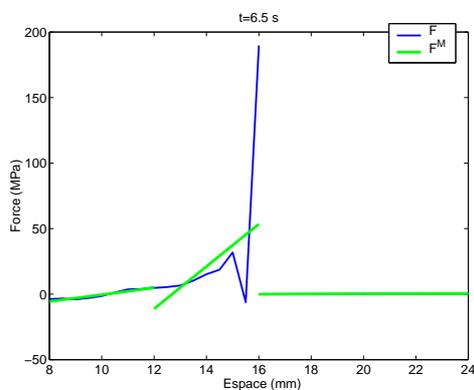


Figure II.14 – Distribution spatiale de la composante normale des efforts totaux et macro sur  $\Gamma_2$

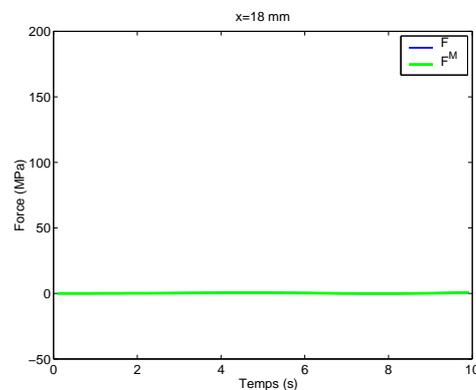


Figure II.15 – Evolution temporelle de la composante normale des efforts totaux et macro en un point de la fissure gauche

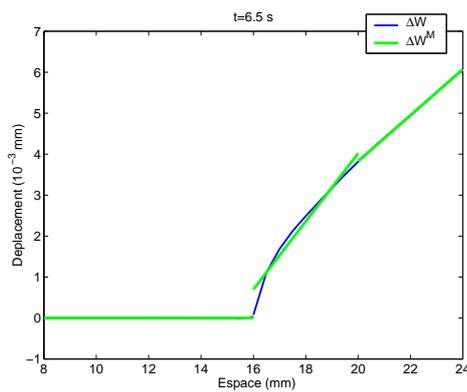


Figure II.16 – Distribution spatiale de la composante normale du saut des déplacements totaux et macro sur  $\Gamma_2$

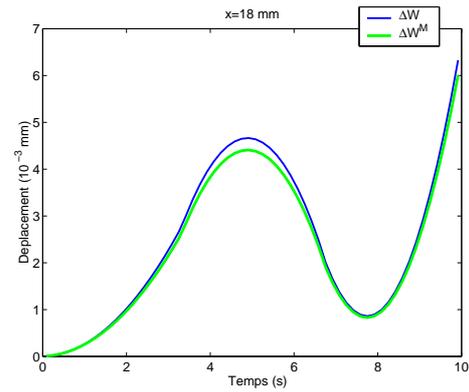


Figure II.17 – Evolution temporelle de la composante normale du saut des déplacements totaux et macro en un point de la fissure gauche

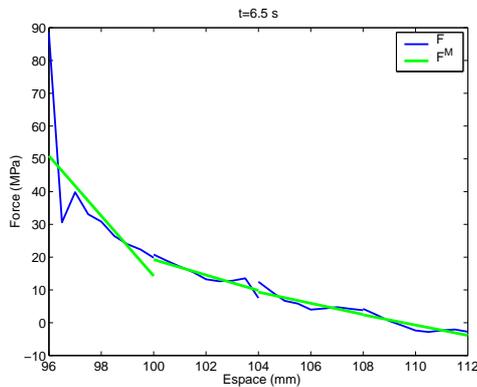


Figure II.18 – Distribution spatiale de la composante normale des efforts totaux et macro sur  $\Gamma_3$

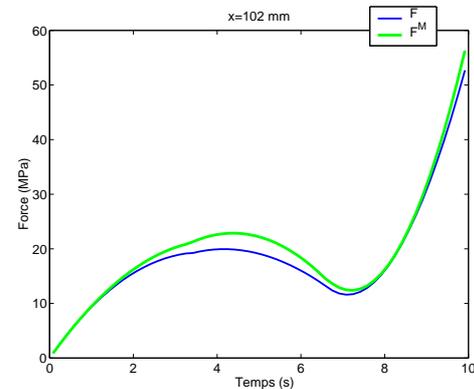


Figure II.19 – Evolution temporelle de la composante normale des efforts totaux et macro en un point de la fissure droite

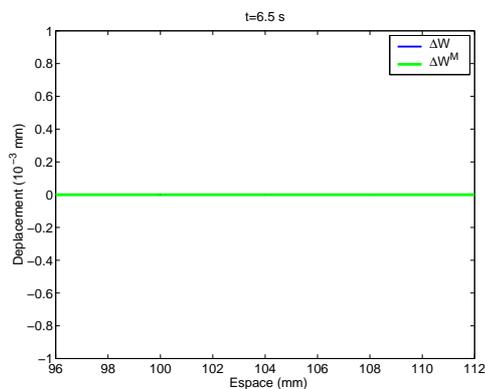


Figure II.20 – Distribution spatiale de la composante normale du saut des déplacements totaux et macro sur  $\Gamma_3$

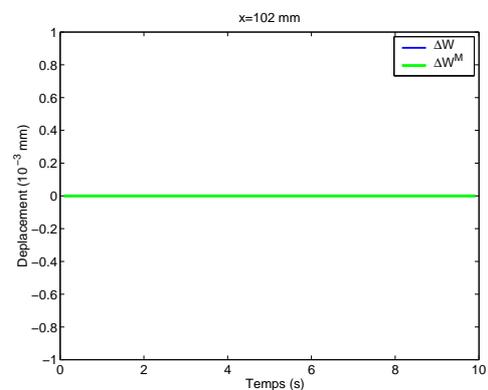


Figure II.21 – Evolution temporelle de la composante normale du saut des déplacements totaux et macro en un point de la fissure droite

### ■ Convergence de l'algorithme

La figure II.22 montre l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme. A l'itération  $n$ , cette erreur  $e_{ref}$  est basée sur les quantités d'interface  $\underline{F}_n$  et  $\underline{W}_n$  et mesure une distance par rapport à la solution de référence, soit

$$e_{ref} = \frac{1}{2} \frac{\|\underline{F}_n - \underline{F}_{ref}\|_{(0,T)}}{\|\underline{F}_{ref}\|_{(0,T)}} + \frac{1}{2} \frac{\|\underline{W}_n - \underline{W}_{ref}\|_{(0,T)}}{\|\underline{W}_{ref}\|_{(0,T)}}$$

où  $\|\cdot\|_{(0,T)}$  désigne les normes  $L^2$  classiques sur  $\mathcal{F}_h^{(0,T)}$  et  $\mathcal{W}_h^{(0,T)}$ . L'algorithme converge très rapidement vers une bonne solution (erreur relative de 1% après 10 itérations).

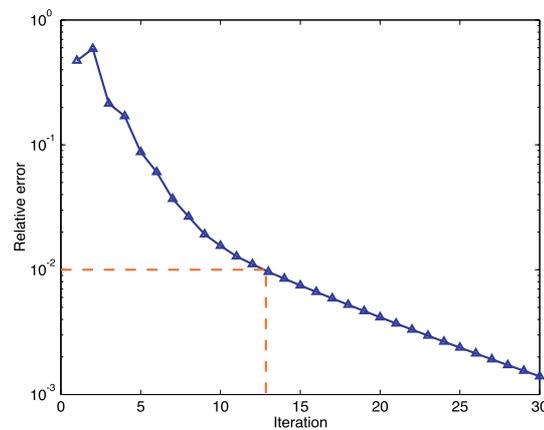


Figure II.22 – Evolution de l'erreur en fonction des itérations de l'algorithme

La figure II.23 montre l'évolution de la solution macro (déplacements macro des interfaces de la structure) et de la solution sur quatre sous-structures autour de la fissure gauche au cours des itérations.

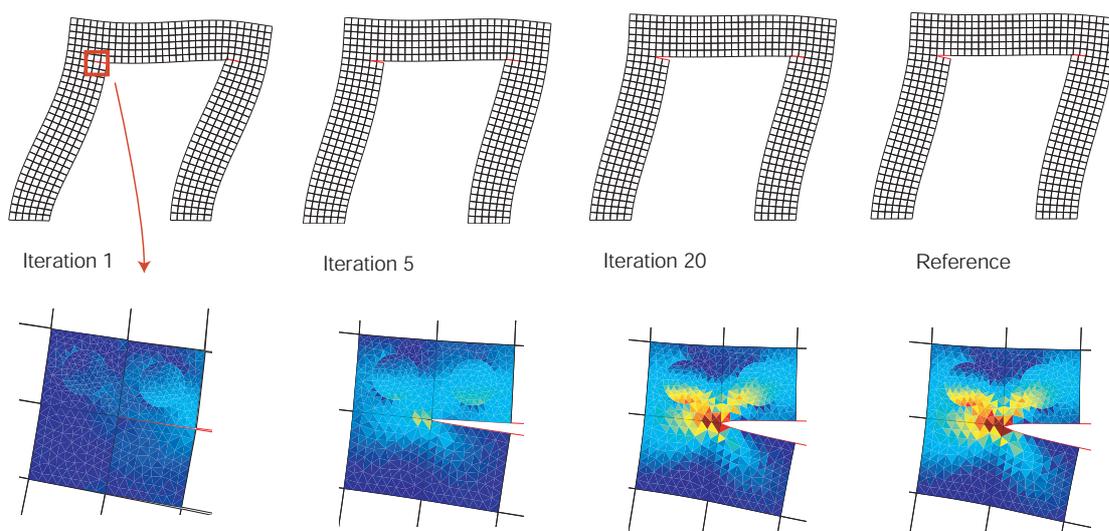


Figure II.23 – Evolution de la solution au cours des itérations : déformée macro de la structure et solution sur quatre sous-structures autour de la fissure gauche à  $t = 10s$

On remarque que la solution macro est déjà très satisfaisante en moins de 5 itérations. Lors des itérations suivantes, la solution s'améliore au niveau microscopique comme on peut le constater sur la figure 11.23.

*Remarque 11.14* Il est clair que le niveau de description microscopique n'est pas indispensable sur toute la structure. Pour cet exemple académique, une approche monoéchelle classique aurait pu être utilisée pour la partie homogène de la structure, c'est-à-dire qu'on aurait pu imposer la partie micro nulle dans cette zone.

### ■ Choix de la base temporelle macro compatible avec les données

Dans l'exemple traité, avec le choix adopté pour les espaces macro, le chargement décrit sur la figure 11.8(b) est macro. Ce choix n'est cependant pas anodin. En effet, nous définirons toujours des **espaces macro compatibles avec le chargement** en un sens que nous allons préciser ici.

Considérons pour cela le cas de chargement de la figure 11.24. L'intervalle d'étude considéré est  $[0,10s]$ . La partition micro  $\mathcal{T}_h$  contient 90 intervalles identiques et la partition  $\mathcal{T}_{h'}$  contient 3 intervalles macro. On choisit pour l'instant les mêmes espaces macro que précédemment ; au niveau temporel, on prendra donc des fonctions de type  $\mathbf{Z}_2^{(0,T)}$  pour la partition  $\mathcal{T}_{h'}$ . Nous pouvons déjà noter qu'avec ce choix d'espaces macro, le chargement admet une composante micro non nulle.

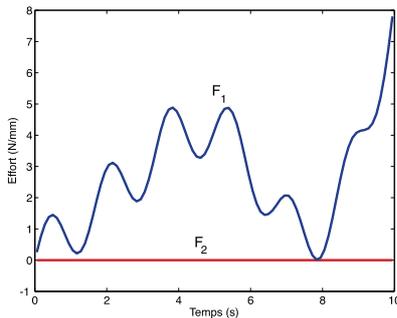


Figure 11.24 – Allure des chargements  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$

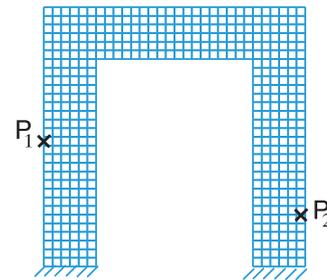


Figure 11.25 – Définition des points  $P_1$  et  $P_2$

Les figures 11.26 et 11.27 montrent l'évolution temporelle des efforts et déplacements à l'itération 20 aux points  $P_1$  et  $P_2$  (voir figure 11.25).

On s'aperçoit donc que les oscillations du chargement ne sont pas encore transmises à l'autre extrémité de la structure. La raison de ceci est que l'espace macro est trop pauvre pour ce cas de chargement. Le principe de Saint-Venant nous dit que l'effet d'un chargement à résultantes et moments nuls sur une interface sera localisé sur une distance de l'ordre de la dimension de l'interface. Par contre, les effets des résultantes et moments se propagent à l'ensemble de la structure. Or, le chargement a ici une composante micro à résultantes et moments non nuls, qui est une perturbation oscillante non négligeable. Cette partie du chargement, sensée se répercuter sur l'ensemble de la structure, n'est pas transmise par le problème macro, défini sur un espace trop pauvre "au niveau temporel". La stratégie de calcul est uniquement monoéchelle vis-à-vis de cette partie du chargement et perd donc son caractère extensible.

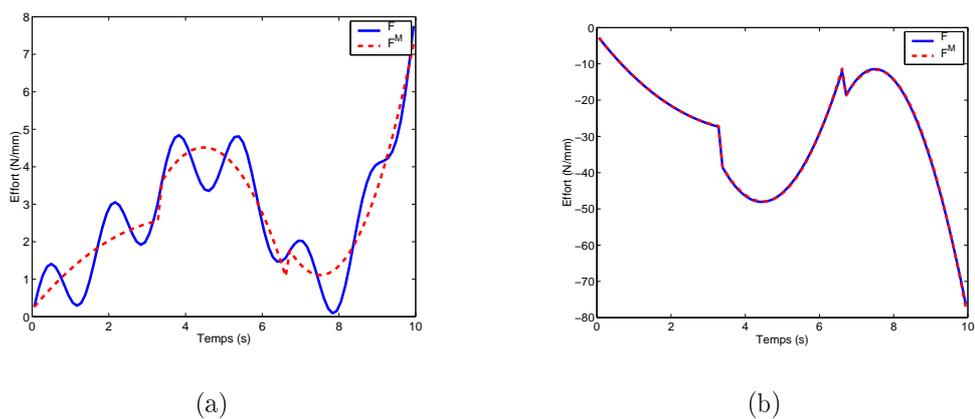


Figure 11.26 – Evolution temporelle des composantes normales en  $P_1$  (a) et en  $P_2$  (b) des efforts totaux et macro à l'itération 20

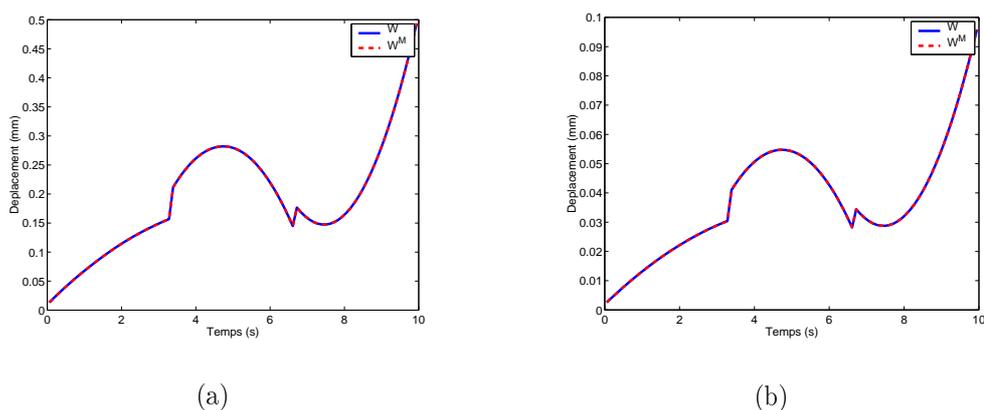


Figure 11.27 – Evolution temporelle des composantes normales en  $P_1$  (a) et tangentielles en  $P_2$  (b) des déplacements totaux et macro à l'itération 20

Une solution, qui est celle que nous suivrons ici, consiste à **toujours définir la base de fonctions temporelles pour l'espace macro de telle sorte à inclure totalement au niveau macro les résultantes et moments du chargement** ; l'espace macro sera alors dit compatible avec les données.

Dans notre cas, cela consiste simplement à rajouter la fonction  $\sin(12\pi t/T)$  à la base temporelle macro (voir le paragraphe 2.2 pour la définition de la base temporelle macro). On peut alors observer les nouvelles évolutions des efforts et déplacements à l'itération 20 sur les figures 11.28 et 11.29. Cette modification est dans notre cas suffisante. Elle a pour conséquence de transmettre la partie oscillante du chargement à l'ensemble de la structure.

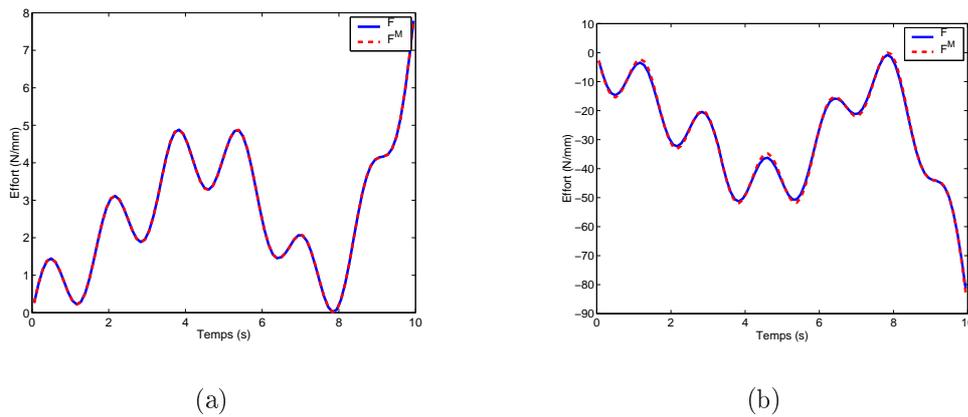


Figure 11.28 – Première modification de la base temporelle macro : évolution temporelle des composantes normales en  $P_1$  (a) et en  $P_2$  (b) des efforts totaux et macro à l'itération 20

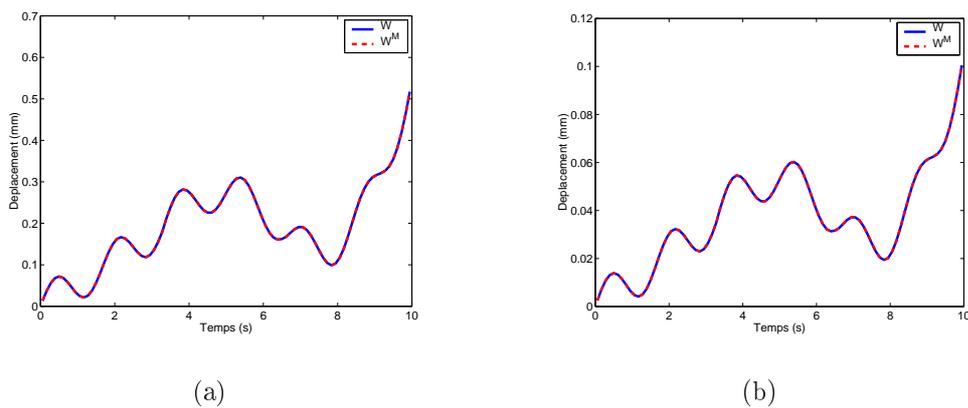


Figure 11.29 – Première modification de la base temporelle macro : évolution temporelle des composantes normales en  $P_1$  (a) et tangentielle en  $P_2$  (b) des déplacements totaux et macro à l'itération 20

Il se pourrait cependant que les résultantes et moments des efforts sur des interfaces suivent des évolutions très différentes de celle du chargement. Ceci pourrait par exemple provenir de phénomènes locaux dans le cadre d'un calcul non-linéaire. La modification apportée dans cet exemple serait alors insuffisante. Pour pallier ce problème, il faudrait trouver un moyen d'enrichir automatiquement l'espace macro au cours des itérations afin de le rendre compatible "au mieux" avec les résultantes et moments des efforts sur les interfaces de toutes les cellules. Une solution possible consisterait, à la fin de l'étape linéaire d'une itération, à extraire sur chaque interface  $\Gamma_{EE'}$  les résultantes et moments des efforts micro, qui sont des fonctions temporelles micro. En 2D, la partie résultantes/moment  $\underline{R}_E^m$  des efforts micro  $\underline{F}_E^m$

sur  $\Gamma_{EE'}$  s'écrit :

$$\underline{R}_{EE'}^m = \sum_{i=1}^3 R_{EE',i}^m \underline{e}_i^M = \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i^M \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{e}_i^M \cdot \underline{F}_E^m ds$$

où les fonctions de base macro  $\underline{e}_i^M$  sont définies dans le paragraphe 2.2. On dispose donc de trois fonctions temporelles  $\{R_{EE',i}^m(t)\}_{i=1}^3$  sur chaque interface qui décrivent l'évolution des résultantes et moment micro. Il nous faut à présent un critère pour trier toutes les fonctions ainsi obtenues. On peut par exemple effectuer la même décomposition pour la partie macro :

$$\underline{R}_{EE'}^M = \sum_{i=1}^3 R_{EE',i}^M \underline{e}_i^M = \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i^M \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{e}_i^M \cdot \underline{F}_E^M ds$$

et poser le critère de la manière suivante

$$\xi_{EE',i}^2 = \frac{\int_{[0,T]} R_{EE',i}^m(t)^2 dt}{\sum_{j=1}^3 \int_{[0,T]} R_{EE',j}^M(t)^2 dt}$$

En se donnant un critère  $\xi^c$ , on définit l'ensemble des fonctions retenues par

$$V = \{R_{EE',i}^m(t), E \in \mathbf{E}, E' \in \mathbf{V}_E, i \in \{1, \dots, 3\} / \xi_{EE',i} > \xi^c\}$$

Augmenter l'espace macro par trop de fonctions engendre un surcoût non négligeable lié au calcul des opérateurs homogénéisés, à l'assemblage du problème macro et à sa résolution. On pourra donc se fixer un nombre maximum de fonctions. La famille de fonctions  $V$  ayant été rangée par ordre décroissant du critère  $\xi_{EE',i}$  associé, on peut alors effectuer une orthonormalisation par rapport au produit scalaire naturel sur  $L^2((0,T))$ . Cette orthonormalisation est stoppée lorsqu'on atteint le nombre de fonctions désiré. Une technique similaire peut également être appliquée aux déplacements. Cette procédure n'a pas encore été testée.

## 6.2 Application aux problèmes de contact : cas de l'élastostatique

La résolution numérique des problèmes de contact est une question très difficile qui a suscité beaucoup de travaux dans le domaine de calcul de structures. Sans être exhaustif, on peut citer les travaux de [Duvaut et Lions, 1976, Oden et Martins, 1985] qui consistent à formuler le problème sous la forme d'une inéquation variationnelle implicite. De nombreuses approches tentent de résoudre le problème de manière globale, comme c'est le cas des approches par pénalisation ou par multiplicateurs de Lagrange [Arora et al., 1991, Kikuchi, 1982b, Wriggers et al., 1985, Wriggers, 1995, Zhong et Mackerle, 1992]. Les premières consistent en la régularisation du problème sous contraintes et conduisent généralement à des problèmes mal conditionnés quand il s'agit de traiter des calculs "massifs". Parmi les secondes, on peut

citer les techniques de programmation mathématique [Minoux, 1986] et les méthodes de gradient [Dilintas et al., 1988, May, 1986, Raous et al., 1988, Raous et Barbarin, 1992]. On peut également citer les méthodes de lagrangien augmenté [Klarbing, 1986, Simo et Laursen, 1992] ou des méthodes mixtes [Alart et Curnier, 1991] proches des formulations lagrangiennes augmentées. Cependant le traitement de calculs massifs par des approches globales peut être très coûteux. Récemment, des méthodes de décomposition de domaine ont été introduites pour accélérer la résolution des problèmes de contact [Alart et al., 2000, Barboteu et al., 2001, Champaney et al., 1997, Champaney et al., 1999, Dostal et al., 1998]. Plus récemment, la méthode FETI a été étendue aux problèmes de contact sans frottement [Dureisseix et Farhat, 2001].

Notre approche, détaillée dans [Ladevèze et al., 2002] pour le cas statique, est ici appliquée à la résolution de deux problèmes de contact. Son **extensibilité numérique** pourra être observée. Elle semble d'ailleurs être la **première méthode** de décomposition de domaine multiéchelle **extensible** pour le traitement des problèmes de contact unilatéral avec frottement.

### 6.2.1 Stratégie de calcul dans le cas statique

Le problème en statique s'écrit de la manière suivante : trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E = (\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_{h,E}$  qui vérifie :

$$\mathbf{A}_d \quad \left\| \begin{array}{l} - \forall E \in \mathbf{E}, \mathbf{s}_E \text{ est } E\text{-admissible} \\ - \underline{F}^M \text{ est admissible : } \underline{F}^M \in \mathfrak{F}_{h,ad}^M \end{array} \right.$$

$$\mathbf{\Gamma} \quad \left\| \begin{array}{l} - \text{la relation de comportement} \\ - \text{le comportement des interfaces} \end{array} \right.$$

Ici, l'E-admissibilité ne contient que les équations d'admissibilité statique et cinématique. La méthode LATIN est appliquée pour la résolution de ce problème. Les directions de descente et de montée sur les sous-structures relient les contraintes aux déformations par l'intermédiaire des opérateurs  $\mathbf{H}^+$  et  $\mathbf{H}^-$ , pris égaux à l'inverse de l'opérateur de Hooke  $\mathbf{K}$ . Les directions de recherche sur les interfaces relient les efforts aux déplacements.

### 6.2.2 Lois de contact et résolution de l'étape locale pour une interface de contact

Le comportement est caractérisé par un frottement de Coulomb de coefficient  $f$ . En suivant la formulation donnée dans [Duvaut et Lions, 1976], on rappelle le comportement, écrit sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$  :

$$\begin{array}{l} - \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \\ - \underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \geq 0, \underline{n} \cdot \underline{F}_E \leq 0 \text{ et } \left( \underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \right) \left( \underline{n} \cdot \underline{F}_E \right) = 0 \\ - \text{si } \|\mathbf{P}_t \underline{F}_E\| < f |\underline{n} \cdot \underline{F}_E|, \text{ alors } \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) = 0, \\ \text{sinon, } \|\mathbf{P} \underline{F}_E\| = f |\underline{n} \cdot \underline{F}_E|, \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \wedge \mathbf{P} \underline{F}_E = 0 \\ \text{et } \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \cdot \mathbf{P} \underline{F}_E \geq 0 \end{array}$$

où  $\underline{n}$  désigne le vecteur normal à  $\Gamma_{EE'}$  au point courant, sortant par rapport à  $\Omega_E$ , et  $\mathbf{P}_t$  le projecteur orthogonal associé. Afin de conserver les propriétés locales de ces équations lors de la résolution de l'étape locale, on choisira pour les directions de recherche un opérateur local. Le plus simple est bien sûr de prendre un scalaire égal de part et d'autre de l'interface. On peut cependant envisager un opérateur local agissant différemment sur la partie normale et la partie tangente :  $\mathbf{h} = h_n \underline{n} \otimes \underline{n} + h_t (\mathbf{I}_d - \underline{n} \otimes \underline{n})$ , où  $h_n$  et  $h_t$  sont des scalaires et  $\mathbf{I}_d$  l'opérateur identité en dimension  $d$ .

Le tableau II.2 décrit la résolution de l'étape locale à l'itération  $n$ . Tous les cas possibles (séparation, contact avec glissement ou adhérence) peuvent être calculés explicitement en chaque point de l'interface à partir de  $\mathbf{s}_n$ . Dans un souci de clarté, l'indice  $n$  associé à l'itération a été omis.

**Tableau II.2** – Résolution de l'étape locale dans le cas du contact unilatéral avec frottement

<i>Premier calcul</i>	
$N = \frac{1}{2h_n} (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \cdot \underline{n} - \frac{1}{2} (\underline{F}_{E'} - \underline{F}_E) \cdot \underline{n}$	$\underline{T} = \frac{1}{2h_t} \mathbf{P}_t (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) - \frac{1}{2} \mathbf{P}_t (\underline{F}_{E'} - \underline{F}_E)$
Séparation	
<i>si</i> $N > 0$	
$\widehat{\underline{F}}_E = \widehat{\underline{F}}_{E'} = 0$	
$\widehat{\underline{W}}_E = \underline{W}_E - \mathbf{h} \underline{F}_E$	
$\widehat{\underline{W}}_{E'} = \underline{W}_{E'} - \mathbf{h} \underline{F}_{E'}$	
Contact	
<i>si</i> $N \leq 0$	
$\widehat{\underline{F}}_E \cdot \underline{n} = -\widehat{\underline{F}}_{E'} \cdot \underline{n} = N$	
$\widehat{\underline{W}}_E \cdot \underline{n} = \frac{1}{2} ((\underline{W}_E + \underline{W}_{E'}) - h_n (\underline{F}_E + \underline{F}_{E'})) \cdot \underline{n}$	
$\widehat{\underline{W}}_{E'} = \widehat{\underline{W}}_E$	
$g = f \widehat{\underline{F}}_E \cdot \underline{n}$	
Adhérence	Glissement
<i>si</i> $\ \underline{T}\  < g$	<i>si</i> $\ \underline{T}\  \geq g$
$\mathbf{P}_t \widehat{\underline{F}}_E = -\mathbf{P}_t \widehat{\underline{F}}_{E'} = \underline{T}$	$\mathbf{P}_t \widehat{\underline{F}}_E = -\mathbf{P}_t \widehat{\underline{F}}_{E'} = g \frac{\underline{T}}{\ \underline{T}\ }$
$\mathbf{P}_t \widehat{\underline{W}}_E = \mathbf{P}_t \underline{W}_E + h_t \mathbf{P}_t (\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E)$	$\mathbf{P}_t \widehat{\underline{W}}_E = \mathbf{P}_t \underline{W}_E + h_t \mathbf{P}_t (\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E)$
$\mathbf{P}_t \widehat{\underline{W}}_{E'} = \mathbf{P}_t \widehat{\underline{W}}_E$	$\mathbf{P}_t \widehat{\underline{W}}_{E'} = \mathbf{P}_t \underline{W}_{E'} + h_t \mathbf{P}_t (\widehat{\underline{F}}_{E'} - \underline{F}_{E'})$

### 6.2.3 Exemple : compression-flexion d'un milieu multi-fissuré

#### ■ Description du problème

Un domaine carré ( $90 \text{ mm} \times 90 \text{ mm}$ ) est chargé en compression ( $100 \text{ MPa}$ ) et flexion ( $100 \text{ MPa}$ ) le long de son côté supérieur et est fixé sur son côté inférieur

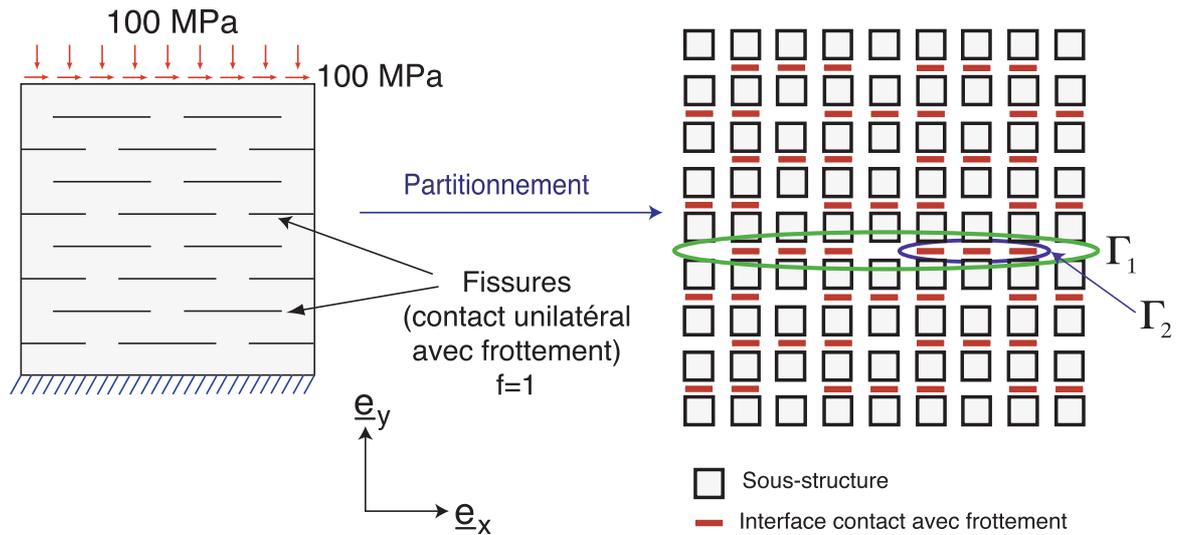


Figure 11.30 – Problème de référence et décomposition du domaine

(voir figure 11.30). Le domaine contient un certain nombre de fissures. On utilise des interfaces de type contact pour prendre en compte les conditions de non-pénétration et de frottement sur les lèvres des fissures. Le coefficient de frottement de Coulomb est pris égal à  $f = 1$ . On fait l'hypothèse des déformations planes. Le matériau est homogène et élastique isotrope : les paramètres matériau sont un module d'Young  $E = 130 \text{ GPa}$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.2$ . La partition du domaine et le choix des interfaces de contact est illustré sur la figure 11.30. Chaque sous-structure est discrétisée par  $6 \times 6$  éléments QUA8. Chaque interface est discrétisée avec 6 éléments de degré 0. Ce choix sera justifié dans le chapitre III. Sur chaque interface, les espaces macro pour les efforts et déplacements contiennent 4 fonctions de base représentant la partie affine des variables. On choisit une direction de recherche scalaire et identique pour toutes les interfaces, soit  $\mathbf{h}^+ = \mathbf{h}^- = \mathbf{h} = \frac{L_M}{E}$  où  $L_M$  est la dimension caractéristique d'une sous-structure.

*Remarque 11.15* Nous ne nous intéressons pas ici aux questions d'unicité de solution mais uniquement à l'aptitude de notre approche à fournir une solution à ce problème.

### ■ Solution à convergence

Les champs de contraintes de Von Mises et les déplacements d'interface à convergence sont montrés sur la figure 11.31. Les fissures sur la gauche s'ouvrent tandis que celles de droite restent fermées, en glissant et/ou en adhérant, comme on peut le voir sur la figure 11.32. Sur la même figure, on remarque que la solution du problème macro  $\underline{F}^M$  est une bonne approximation de la solution moyenne. La partie micro  $\underline{F}^m$  améliore la solution dans les régions proches des singularités.

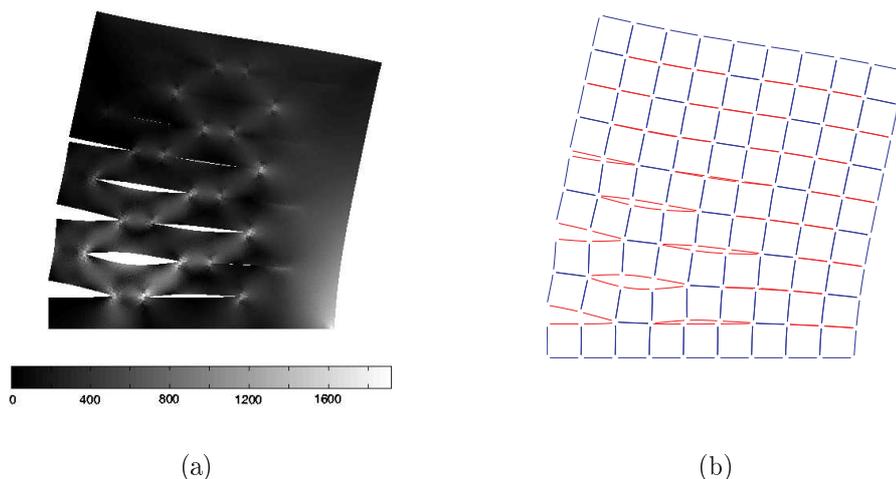


Figure II.31 – Solution à convergence: contrainte de Von Mises (a) et déplacements d'interface (b)

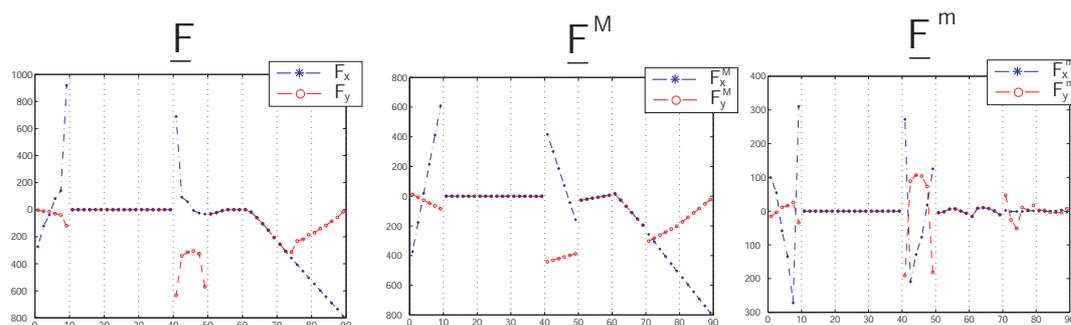


Figure II.32 – Distribution des efforts macro et micro à convergence sur  $\Gamma_1$

### ■ Evolution au cours des itérations

La figure II.33 montre l'évolution au cours des itérations de l'effort  $\underline{F}$  sur l'ensemble d'interfaces  $\Gamma_1$ . La figure II.34 montre l'évolution au cours des itérations d'un critère d'erreur pour le contact sur l'ensemble d'interfaces  $\Gamma_2$  (interfaces de contact avec glissement et adhérence):

$$\begin{aligned} \text{Critère normal} & : |\underline{F}_E \cdot \underline{n}| \cdot ((\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \cdot \underline{n}) \\ \text{Critère tangentiel} & : (f|\underline{F}_E \cdot \underline{n}| - |\underline{F}_E \cdot \underline{t}|) \cdot |(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \cdot \underline{t}| \end{aligned}$$

On conclut que la solution vérifie bien les conditions de contact et converge très rapidement.

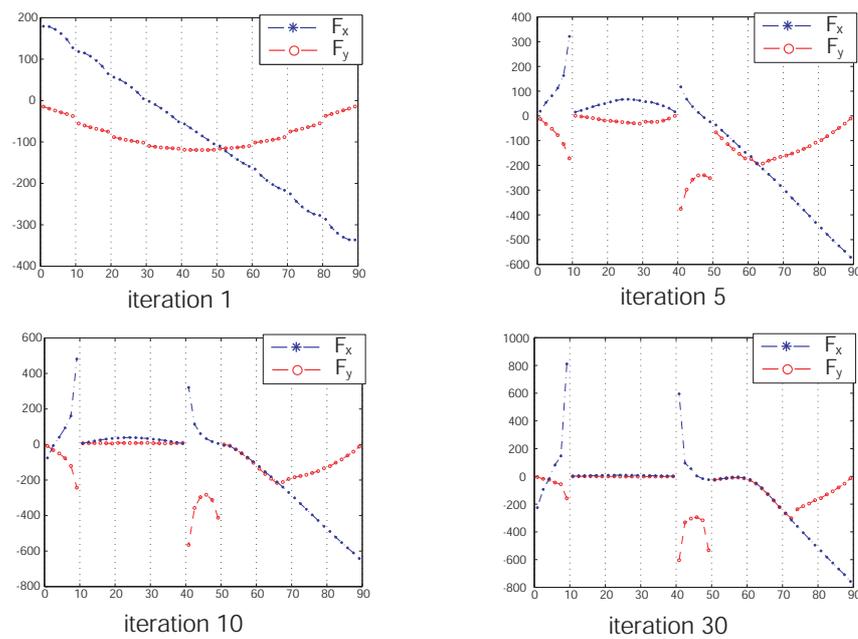


Figure 11.33 – Evolution au cours des itérations de la distribution d'effort sur l'ensemble d'interfaces  $\Gamma_1$

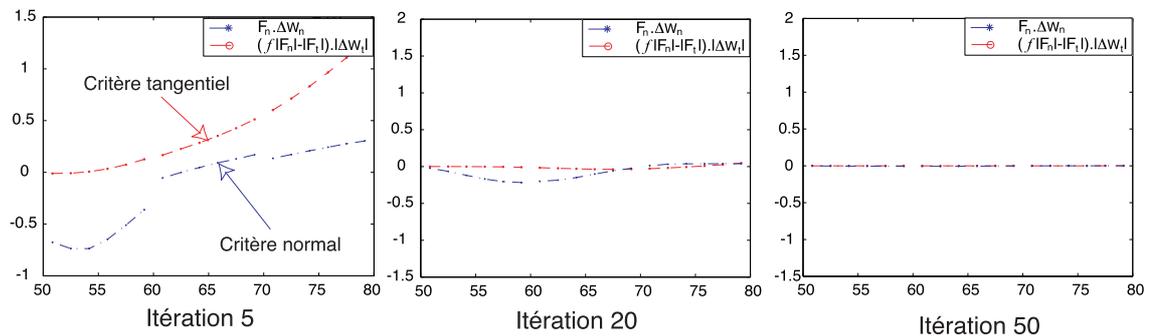


Figure 11.34 – Critère d'erreur pour le contact sur l'ensemble d'interfaces  $\Gamma_2$  (fissure avec glissement et adhérence)

### ■ Extensibilité de la méthode

L'évolution de l'erreur est indiquée sur la figure 11.35 pour le problème à  $9 \times 9$  sous-domaines. A présent, testons le taux de convergence de la méthode itérative en analysant des problèmes similaires pour différents nombres de sous-structures, décrits sur la figure 11.36. On observe dans le tableau 11.3 que le taux de convergence est quasiment indépendant du nombre de sous-structures : on peut ainsi conclure que la méthode multiéchelle vérifie des propriétés d'extensibilité numérique dans le cas du contact avec ou sans frottement.

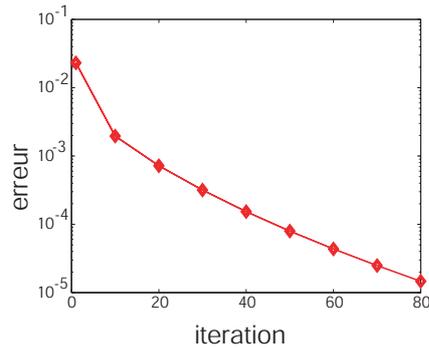


Figure II.35 – Evolution de l'erreur

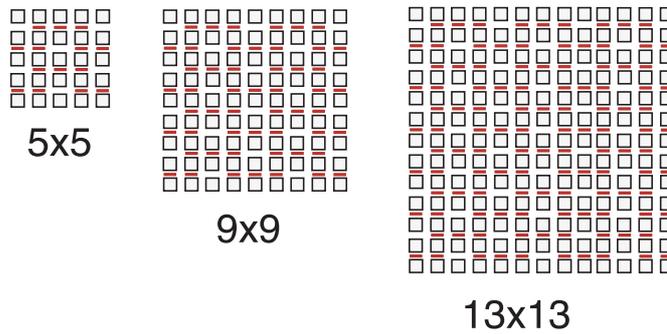


Figure II.36 – Test d'extensibilité

Nombre de sous-structures	5 × 5	9 × 9	13 × 13
Taux de convergence	0.065	0.067	0.068

Tableau II.3 – Test d'extensibilité : comparaison des taux de convergence

### ■ Comparaison avec la stratégie monoéchelle

On compare ici l'efficacité de la stratégie multiéchelle, notée MUSM, avec celle de la version précédente monoéchelle, notée MOSM. La convergence des deux méthodes est comparée sur la figure II.37. On peut également observer la distribution des contraintes aux itérations 10 et 100 pour MUSM (figure II.39) et aux itérations 10 et 300 pour MOSM (figure II.38). On remarque que MUSM donne déjà des résultats satisfaisants dès l'itération 10 tandis que MOSM est encore loin de converger à l'itération 300.

*Remarque II.16* Les courbes de convergence de la figure II.37 sont obtenues en estimant la distance entre  $\mathbf{s}$  et  $\widehat{\mathbf{s}}$ . Ce n'est donc pas une erreur de référence qui pour la stratégie monoéchelle est encore de l'ordre de 100% à l'itération 300. Elles donnent cependant une estimation du taux de convergence de l'algorithme.

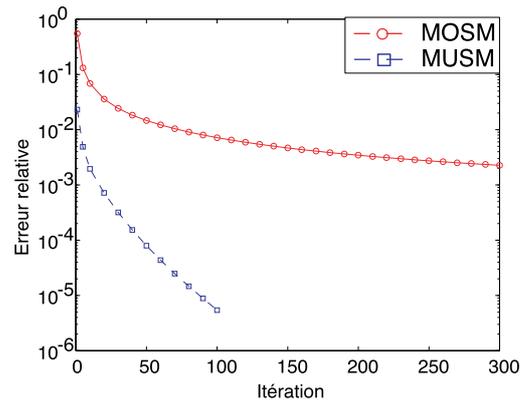


Figure 11.37 – Comparaison des méthodes LATIN monoéchelle et multiéchelle

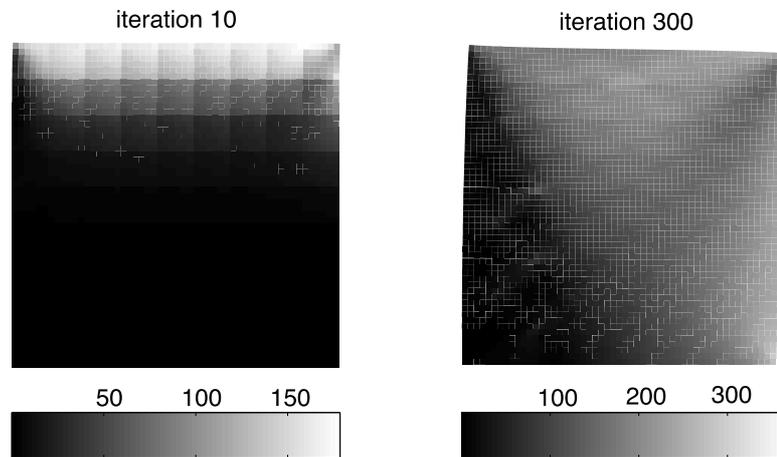


Figure 11.38 – Contraintes de Von Mises aux itérations 10 et 300 pour MOSM

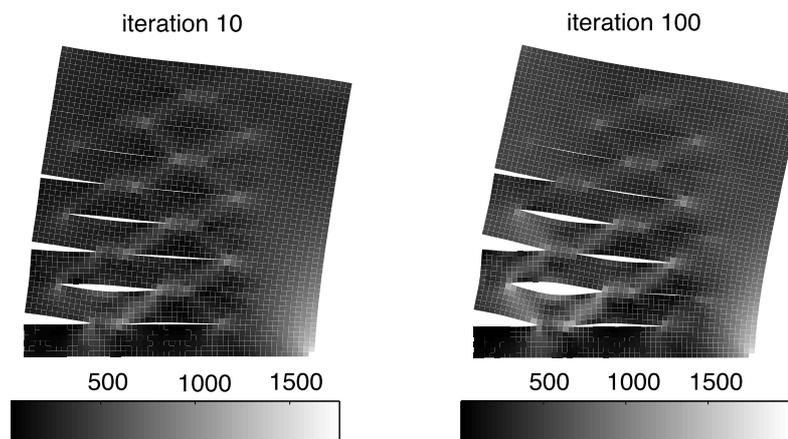


Figure 11.39 – Contraintes de Von Mises aux itérations 10 et 100 pour MUSM

L'utilisation de MUSM engendre cependant un coût de calcul supplémentaire vis-à-vis de MOSM. Elle nécessite tout d'abord une phase d'initialisation consistant à

construire les opérateurs homogénéisés  $\mathbf{L}_E^F$ . Cette phase nécessite dans notre exemple la résolution de 16 systèmes linéaires par sous-structure. Une étape linéaire comprend la résolution d'un problème macro, dont le coût de calcul est ici négligeable, ainsi que la résolution de deux problèmes micro par sous-structure. Un problème micro consiste à résoudre un simple système linéaire. L'étape linéaire de MUSM est donc approximativement deux fois plus coûteuse que celle de MOSM. L'étape locale étant la même que pour MOSM, sa résolution n'engendre aucun coût supplémentaire. Une itération de MUSM est donc approximativement deux fois plus coûteuse qu'une itération de MOSM. Pour le choix de l'espace macroscopique adopté, le coût de calcul des opérateurs homogénéisés est approximativement égal à celui de la résolution de 8 itérations de l'algorithme. Cependant, les cellules étant toutes identiques dans cet exemple, l'opérateur homogénéisé peut n'être calculé que pour une seule cellule. Ainsi, le coût de l'initialisation devient négligeable par rapport au coût d'une itération. Finalement, cette évaluation des coûts et l'observation des convergences des deux stratégies permettent de conclure que le coût de calcul global est considérablement réduit avec l'approche multiéchelle (facteur  $>1000$ ). MUSM s'avère donc incomparablement plus efficace que MOSM, qui elle-même s'avérait beaucoup plus efficace qu'un code classique comme ABAQUS pour des problèmes industriels (voir [Champaney et al., 1997]).

#### 6.2.4 Exemple : affaissement d'un mur de briques - problème "multi-contact"

Cet exemple illustre les capacités de notre approche à résoudre des problèmes qualifiés de "multi-contact". L'illustration porte ici sur un mur de briques percé de deux fenêtres et d'une porte. Une brique a pour dimensions dans le plan  $500\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ . Ce mur est initialement soumis à son poids propre et à un déplacement imposé sur sa base gauche (figure 11.40). Le contact suit une loi de Coulomb de coefficient de frottement  $f = 0.2$ . Le matériau est homogène et élastique : les paramètres sont un module d'Young  $E = 50\text{ GPa}$ , un coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$  et une masse volumique  $\rho = 2.5\text{ kg/dm}^3$ . On fait l'hypothèse des déformations planes.

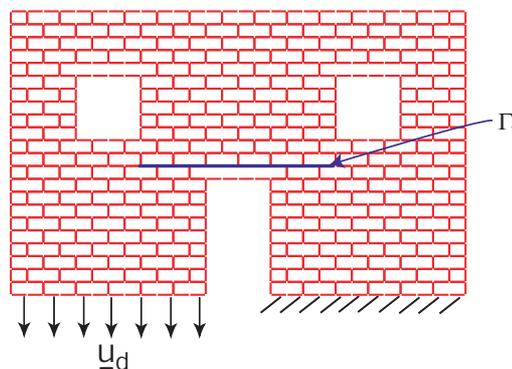


Figure 11.40 – Description du problème : mur de briques soumis à un affaissement du sol

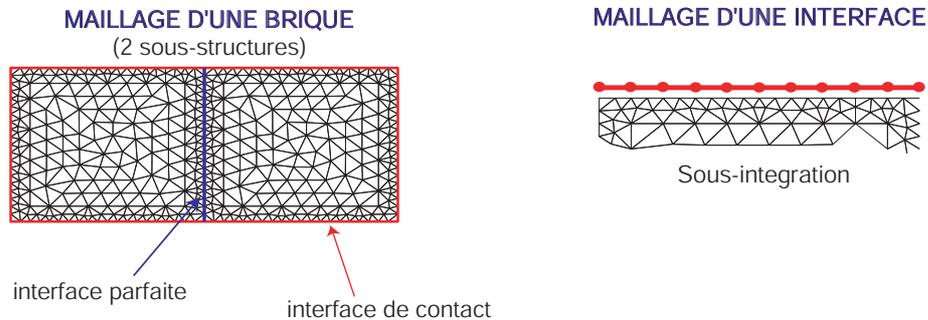


Figure 11.41 – Discrétisation des sous-structures et des interfaces

Un choix naturel pour la partition du domaine est de considérer qu'une brique est une sous-structure. Cependant, pour le calcul, une brique a été divisée en deux sous-structures séparées par une interface parfaite (figure 11.41). Une sous-structure est maillée avec 396 TRI3. Chaque interface est maillée avec 10 éléments de degré 0. Ce choix, illustré sur la figure 11.41, sera expliqué dans le chapitre III. On choisit une direction de recherche scalaire et identique pour toutes les interfaces, soit  $\mathbf{h}^+ = \mathbf{h}^- = \mathbf{h} = \frac{L_M}{E}$  où  $L_M$  est la dimension caractéristique d'une sous-structure.

La figure 11.42 montre les contraintes de Von Mises avant et après affaissement du mur. La figure 11.43 montre les déformées macro et micro de la structure. On observe que la partie macro représente très bien la solution moyenne. La partie micro vient améliorer la solution dans des zones à forts gradients (au dessus de la porte essentiellement). La figure 11.44 montrent les distributions sur l'ensemble d'interfaces  $\Gamma_1$  des efforts et déplacements macro et micro ; les parties macro représentent bien la solution moyenne et vérifient en "moyenne" les conditions de contact.

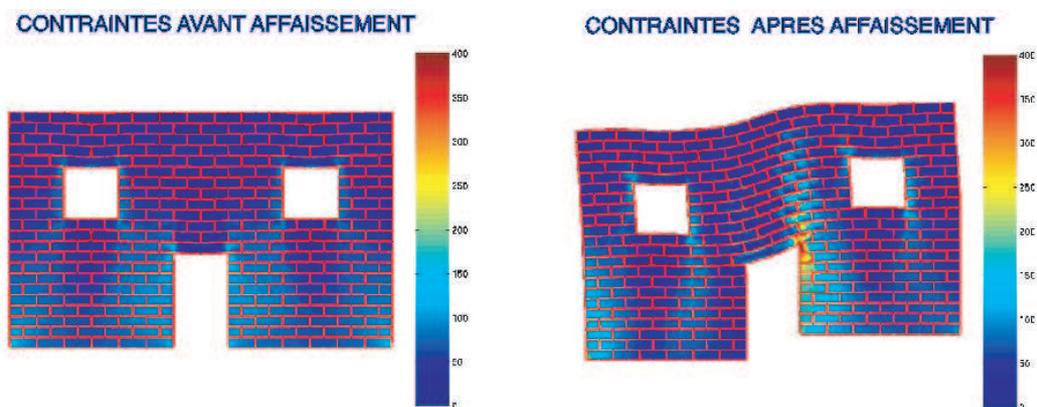


Figure 11.42 – Contraintes de Von Mises avant et après affaissement

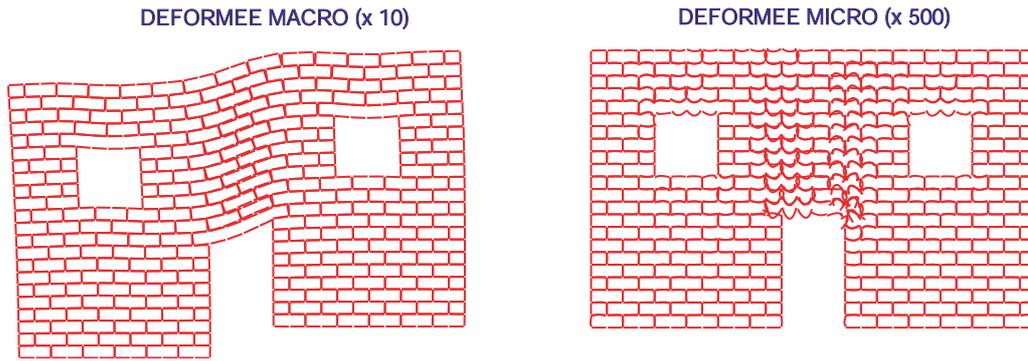


Figure II.43 – Déplacements macro (amplifiés 10 fois) et micro (amplifiés 500 fois) des interfaces

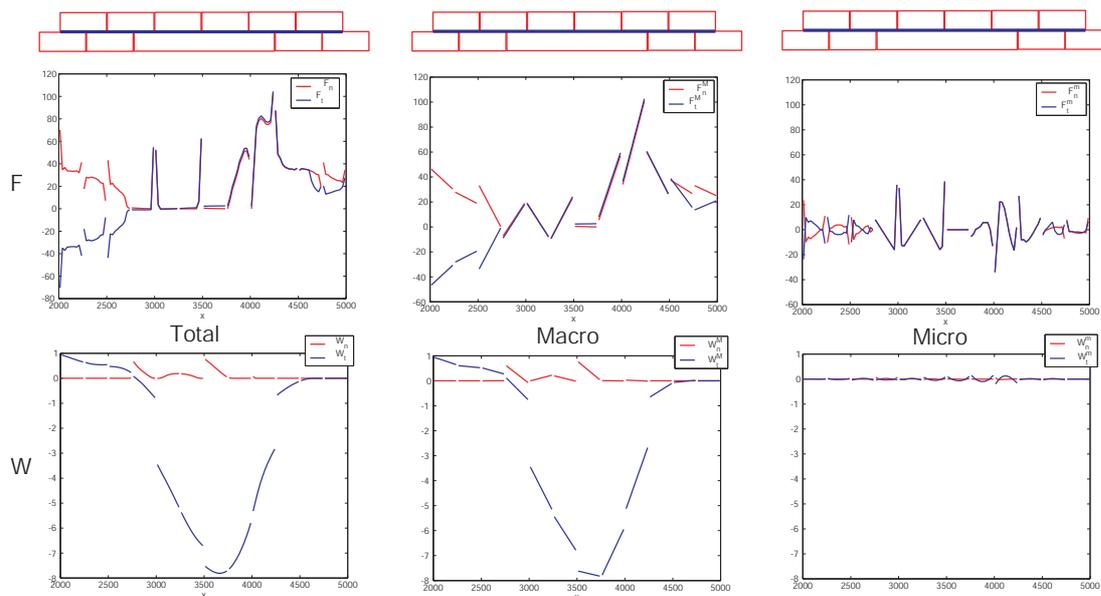


Figure II.44 – Distribution des composantes normales et tangentes des efforts et déplacements macro et micro sur l'ensemble d'interfaces  $\Gamma_1$

La solution obtenue semble donc satisfaisante. Le plus important est maintenant d'observer sur la figure II.45 l'évolution de l'algorithme au cours des itérations ; en fait, l'algorithme converge extrêmement rapidement puisqu'on obtient une erreur relative de l'ordre de 2% au bout de 30 itérations.

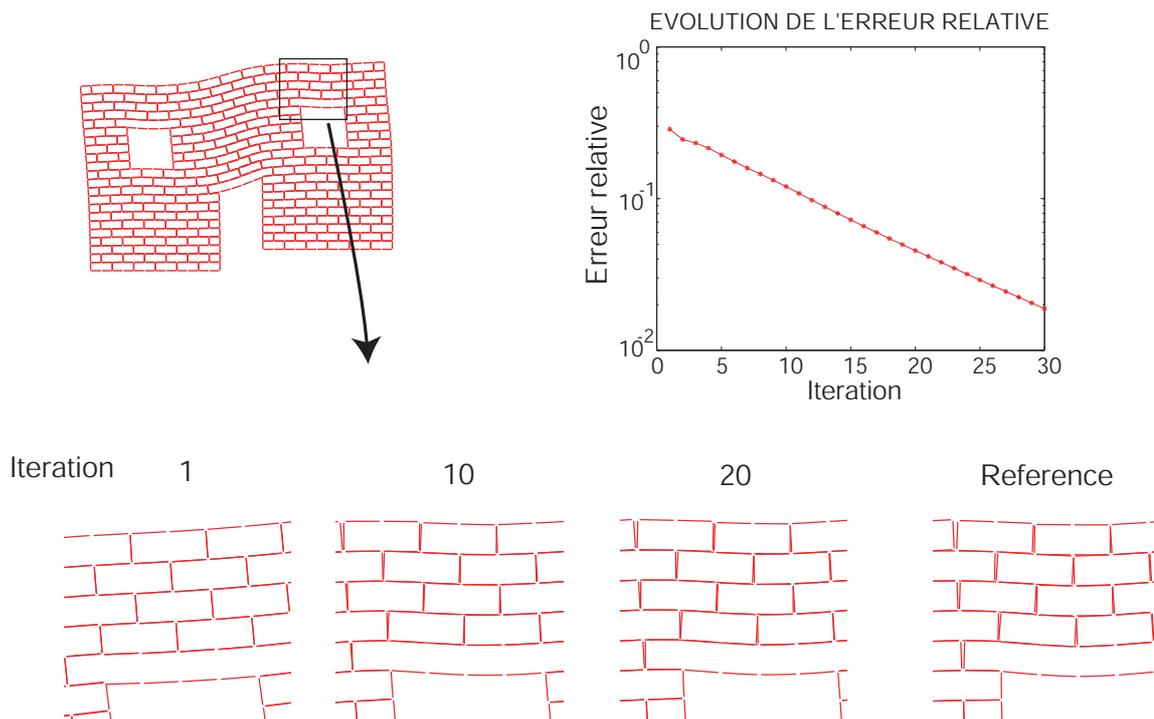


Figure 11.45 – Evolution de l'algorithme au cours des itérations

## Bilan

Nous avons donc proposé une nouvelle stratégie de calcul multiéchelle pour l'analyse de structures dont le comportement est décrit à une échelle fine tant en espace qu'en temps. Cette stratégie de calcul, qui inclut une procédure d'homogénéisation automatique en temps et en espace, devrait se substituer avantageusement aux techniques d'homogénéisation standards dans certains domaines d'application. Les tests numériques réalisés ont pu mettre en évidence son efficacité dans le traitement de problèmes d'évolution où les non-linéarités considérées étaient de type contact unilatéral avec frottement. Il a également été illustré, dans le cadre statique, l'aptitude de cette méthode de décomposition de domaine à traiter des problèmes qui peuvent être qualifiés de "multi-contact", pour lesquels l'extensibilité numérique a été observée.

Un certain nombre de points qui n'ont pas été abordés durant cette thèse restent néanmoins à développer. Ils portent sur :

- l'automatisation du choix de l'espace macroscopique au niveau temporel,
- l'optimisation des directions de recherche au niveau des interfaces (déjà étudié en statique [Violeau, 2003]),
- l'implémentation dans le cadre non-linéaire, qui ne devrait pas poser de problèmes particuliers.



# Chapitre III

## Sur la discrétisation des interefforts en calcul de structures

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Formulations continues usuelles</b>	<b>94</b>
1.1	Problème continu de référence	94
1.2	Partitionnement en sous-structures et interfaces	95
1.3	Formulation continue mixte avec intereffort	95
1.4	Formulation continue duale	96
<b>2</b>	<b>Etude des formulations discrétisées</b>	<b>97</b>
2.1	Discrétisation des déplacements	97
2.2	Discrétisation des interefforts : visions "numérique" et "physique"	97
2.3	Définition d'interefforts "physiques" à partir d'une solution en déplacement	99
2.4	Existence et unicité des solutions discrétisées	102
<b>3</b>	<b>Comparaison des solutions discrétisées</b>	<b>103</b>
3.1	Reformulation en déplacement et étude des espaces discrétisés	103
3.2	Comparaison des solutions en déplacement	104
3.3	Comparaison des solutions en effort	109
3.4	Illustration des anomalies sur un problème de contact unilatéral avec frottement	111
<b>4</b>	<b>Explication des anomalies numériques</b>	<b>114</b>
4.1	Problème dual discrétisé	114
4.2	Conséquences d'une mauvaise discrétisation	115
<b>5</b>	<b>Proposition d'un nouveau type de discrétisation</b>	<b>115</b>
5.1	Principe	115
5.2	Proposition d'une nouvelle discrétisation	116
5.3	Etude du bloc en traction-flexion	117
5.4	Retour au problème de contact	123
5.5	Mise en oeuvre pratique de la nouvelle discrétisation	125

---

De nombreuses questions mettent en avant les interefforts et les interdéplacements entre sous-structures. L'interface est alors considérée comme une entité matérielle surfacique (linéique en 2D) qui génère une relation de comportement entre les efforts et les déplacements provenant des sous-structures adjacentes. Cette vision permet d'envisager des modèles d'interface complexes (contact, visco-plasticité, endommagement, ...). La résolution de tels problèmes est rendue possible par des approches de décomposition de domaine mixtes faisant intervenir à la fois les efforts et les déplacements d'interface. L'idée de schématiser une liaison par une interface matérielle dans le contexte des méthodes de décomposition de domaine fut introduite dans [Ladevèze, 1985] puis [Glowinski et Le Tallec, 1990] avec une vision à deux multiplicateurs de Lagrange. Les techniques des "mortar elements" [Maday et al., 1988] peuvent également être associées à ce type d'approches. Toutefois, la plupart des approches de décomposition de domaine traitent les efforts d'interface comme des multiplicateurs de Lagrange et ne respectent pas totalement la dualité effort/déplacement telle que nous le préconisons. Ici, nous adoptons une vision véritablement "matériau" de l'interface où les efforts et les déplacements sont traités "à égalité" [Ladevèze, 1989b].

Au niveau continu, les formulations mixtes incluant les efforts d'interface ne posent pas de problème particulier. Par contre, les versions discrétisées de ces approches peuvent donner lieu à des modes parasites très oscillants qui peuvent conduire à des instabilités numériques.

Ce chapitre s'intéresse à la compréhension de ce phénomène. Il est également proposé un remède simple conduisant à une formulation discrétisée saine.

## 1 Formulations continues usuelles

### 1.1 Problème continu de référence

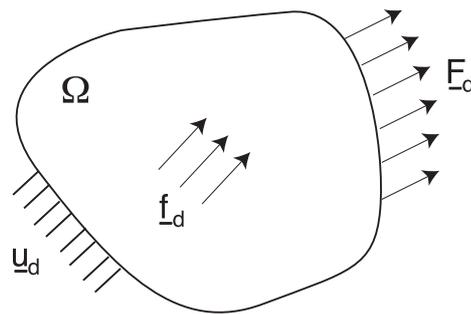


Figure III.1 – Problème de référence

On considère une structure  $\Omega$  occupant un domaine de  $\mathbb{R}^d$ . Elle est soumise à un déplacement imposé  $\underline{u}_d$  sur une partie  $\partial_1\Omega$  de sa frontière, un effort imposé  $\underline{F}_d$  sur la partie complémentaire de la frontière  $\partial_2\Omega$  et une force volumique  $\underline{f}_d$  (figure III.1). On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire. Le comportement est caractérisé par le tenseur de Hooke  $\mathbf{K}$ .  $\underline{u}$  désigne le champ de déplacement. On note  $\mathbf{u}_{ad} = \{ \underline{v} \in [H^1(\Omega)]^d / \underline{v} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega \}$  et  $\mathbf{u}_0$  l'espace vectoriel associé. La formulation

variationnelle du problème s'écrit :

**Problème III.1** Trouver  $\underline{u} \in \mathbf{U}_{ad}$  tel que :

$$a(\underline{u}, \underline{u}^*) = l(\underline{u}^*), \quad \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0$$

où

$$a(\underline{u}, \underline{u}^*) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) \, dx$$

$$l(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, dx + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, ds$$

## 1.2 Partitionnement en sous-structures et interfaces

Soit  $\{\Omega_E\}_{E \in \mathbf{E}}$ , une partition sans recouvrement de  $\Omega$ . Une sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est soumise à une distribution d'efforts  $\underline{F}_E$  et de déplacements  $\underline{u}_E$  sur sa frontière  $\partial\Omega_E$ . Une interface est une entité matérielle qui met en relation des couples efforts/déplacements  $(\underline{u}_E, \underline{F}_E)$  et  $(\underline{u}_{E'}, \underline{F}_{E'})$  de part et d'autre de l'interface  $\Gamma_{EE'}$ . Les interfaces situées sur  $\partial\Omega$  seront traitées de manière équivalente. Pour cela, on peut considérer que la structure est en liaison avec une structure  $\Omega_{E_1}$  dont la frontière contient  $\partial_1\Omega$  et une structure  $\Omega_{E_2}$  dont la frontière contient  $\partial_2\Omega$ .

Introduisons les notations suivantes : pour  $E \in \mathbf{E}$ ,

$$\partial_1\Omega_E = \partial\Omega_E \cap \partial_1\Omega$$

$$\partial_2\Omega_E = \partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega$$

On définit également les ensembles suivants :

$$\mathbf{E}_E = \{E' \in \mathbf{E} / \text{mes}(\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{E'}) \neq 0\}$$

$$\mathbf{V}_E = \{E' \in \{\mathbf{E}, E_1, E_2\} / \text{mes}(\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{E'}) \neq 0\}$$

$$\mathbf{E}_1 = \{E \in \mathbf{E} / \text{mes}(\partial_1\Omega_E) \neq 0\}$$

$$\mathbf{E}_2 = \{E \in \mathbf{E} / \text{mes}(\partial_2\Omega_E) \neq 0\}$$

Le déplacement sur une sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , appartient à l'espace  $\mathbf{U}_E = [H^1(\Omega_E)]^d$ . Les efforts sur une interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$ , appartiennent à l'espace  $\mathcal{F}_{EE'} = [H^{-1/2}(\Gamma_{EE'})]^d$ . Étendu à l'ensemble des interfaces voisines de  $E$ , cet espace sera noté  $\mathcal{F}_E = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{F}_{EE'}$ . Étendus à l'ensemble des sous-structures, les espaces  $\mathbf{U}_E$  et  $\mathcal{F}_E$  conduisent aux espaces produits  $\mathbf{U}$  et  $\mathcal{F}$ .

## 1.3 Formulation continue mixte avec intereffort

On définit  $\mathcal{F}_{ad}$ , l'espace des champs d'efforts équilibrés aux interfaces et vérifiant les conditions aux limites :

$$\mathcal{F}_{ad} = \{ \underline{F} \in \mathcal{F} \quad / \quad \begin{array}{l} \forall E \in \mathbf{E}_2, \underline{F}_E = \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2\Omega_E, \text{ et} \\ \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{E}_E, \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \text{ sur } \Gamma_{EE'} \end{array} \}$$

$\mathcal{F}_0$  désigne l'espace vectoriel associé à  $\mathcal{F}_{ad}$ .

Le problème III.1 est équivalent au problème suivant :

**Problème III.2** Trouver  $(\underline{u}, \underline{F}) \in \mathbf{U} \times \mathcal{F}_{ad}$  tel que :  $\forall (\underline{u}^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{U} \times \mathcal{F}_0$ ,

$$a(\underline{u}, \underline{u}^*) - b(\underline{F}, \underline{u}^*) = l(\underline{u}^*)$$

$$b(\underline{F}^*, \underline{u}) = h(\underline{F}^*)$$

où

$$a(\underline{u}, \underline{u}^*) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E) dx$$

$$b(\underline{F}^*, \underline{u}) = \sum_{E \in \mathbf{E}} b_E(\underline{F}_E^*, \underline{u}_E) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial \Omega_E} \underline{F}_E^* \cdot \underline{u}_E ds$$

$$l(\underline{u}^*) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* dx$$

$$h(\underline{F}^*) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_1 \Omega_E} \underline{F}_E^* \cdot \underline{u}_d ds$$

## 1.4 Formulation continue duale

La première équation du problème III.2 s'écrit, pour  $E \in \mathbf{E}$ ,

$$\int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E) dx = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* dx + \int_{\partial \Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{u}_E^* ds, \quad \forall \underline{u}_E^* \in \mathbf{U}_E \quad (\text{III.1})$$

Notons  $\mathcal{R}_E = \{\alpha_E \in \mathbf{U}_E / \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha_E) = 0\}$ , l'espace des modes rigides infinitésimaux de  $\Omega_E$ . La condition d'existence d'une solution à ce problème est que  $\underline{F}_E$  équilibre  $\underline{f}_d$  sur  $\Omega_E$ . Notons  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad}$  l'espace des champs équilibrant  $\underline{f}_d$  sur  $\Omega_E$  et  $\overline{\mathcal{F}}_{E,0}$  l'espace des champs équilibrés à zéro. Posons  $\{\underline{F}_E\} \in \overline{\mathcal{F}}_{E,0}$  la partie de  $\underline{F}_E$  à résultantes et moments nuls sur  $\partial \Omega_E$  définie par

$$\{\underline{F}_E\} = \underline{F}_E - \frac{1}{mes(\partial \Omega_E)} \int_{\partial \Omega_E} \underline{F}_E ds - \Pi^{-1} \left( \int_{\partial \Omega_E} \underline{x} \wedge \underline{F}_E ds \right) \wedge \underline{x} = \underline{F}_E - [\underline{F}_E]$$

où  $\underline{x}$  désigne le vecteur position ayant pour origine le centre d'inertie de  $\Omega_E$  et où  $\Pi$  désigne l'opérateur d'inertie de  $\partial \Omega_E$  défini pour  $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$  par  $\Pi \underline{a} = \int_{\partial \Omega_E} \underline{x} \wedge (\underline{a} \wedge \underline{x}) ds$ .

Si  $[\underline{F}_E] \in \overline{\mathcal{F}}_{E,ad}$ , la solution en déplacement est telle que

$$\underline{u}_{E|\partial \Omega_E} = \widehat{\underline{u}}_{E,d|\partial \Omega_E} + \mathcal{A}_E(\{\underline{F}_E\}) + \alpha_E$$

où  $\alpha_E \in \mathcal{R}_E$  et où  $\widehat{\underline{u}}_{E,d|\partial \Omega_E}$  ne dépend que de  $\underline{f}_d$  et de  $[\underline{F}_E]$ .

**Proposition III.1** L'opérateur  $\mathcal{A}_E$  est symétrique défini positif sur l'espace des champs équilibrés à zéro  $\overline{\mathcal{F}}_{E,0}$ .

□ **Preuve** : Soit  $\underline{F}_E^{(1)}$  et  $\underline{F}_E^{(2)} \in \overline{\mathcal{F}}_{E,0}$  et  $\underline{u}_E^{(1)}$  et  $\underline{u}_E^{(2)}$  les déplacements associés, solutions de l'équation (III.1). On a donc

$$\underline{u}_{E|\partial\Omega_E}^{(i)} = \mathcal{A}_E(\underline{F}_E^{(i)}) + \alpha_E^{(i)}, \quad i \in \{1,2\}$$

En injectant la solution 2 dans l'équation (III.1) associée à 1, on obtient

$$\int_{\partial\Omega_E} \mathcal{A}_E(\underline{F}_E^{(2)}) \cdot \underline{F}_E^{(1)} ds = \int_{\Omega_E} \varepsilon(\underline{u}_E^{(2)}) : \mathbf{K}\varepsilon(\underline{u}_E^{(1)}) dx$$

On conclut grâce aux propriétés de symétrie et de positivité de  $\mathbf{K}$ . □

Le problème III.2 peut donc être formulé en effort de la manière suivante :

**Problème III.3** Trouver  $\underline{F} \in \mathcal{F}_{ad}$  et  $\{\alpha_E\}_{E \in \mathbf{E}}$ ,  $\alpha_E \in \mathcal{R}_E$ , tels que :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^* \cdot \left( \mathcal{A}_E(\{\underline{F}_E\}) + \widehat{\underline{u}}_{E,d} + \alpha_E^M \right) ds &= \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_1\Omega_E} \underline{F}_E^* \cdot \underline{u}_d ds, \quad \forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_0 \\ \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \alpha_E^* ds &= \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \alpha_E^* dx, \quad \forall E \in \mathbf{E}, \quad \forall \alpha_E^* \in \mathcal{R}_E \end{aligned}$$

## 2 Etude des formulations discrétisées

### 2.1 Discrétisation des déplacements

La discrétisation des champs de déplacement ne pose pas de problème car nous privilégions pour la résolution une approche éléments finis standard. On notera les espaces discrétisés avec un indice  $h$ . Sur une sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , les déplacements appartiennent à l'espace  $\mathcal{U}_{h,E}$ . Etendu à l'ensemble des sous-structures, cela conduit à l'espace  $\mathcal{U}_h$ . Notons que l'espace éléments finis classique  $\mathcal{U}_{h,ad}$  du problème non sous-structuré est le sous-espace de  $\mathcal{U}_h$  correspondant aux champs de déplacements continus aux interfaces et valant  $\underline{u}_d$  sur  $\partial_1\Omega$ . On notera  $V = \{\underline{x}_i\}_{i \in \mathbf{V}}$  l'ensemble des noeuds du maillage éléments finis. On assimilera par la suite les espaces de fonctions pour les déplacements aux espaces des valeurs nodales.

### 2.2 Discrétisation des interefforts : visions "numérique" et "physique"

La plupart des approches de décomposition de domaine sont des approches de type "déplacement" et considèrent les efforts aux interfaces comme de simples multiplicateurs de Lagrange ; les espaces d'approximation pour les efforts sont souvent choisis identiques à ceux des déplacements aux interfaces. Ce choix purement "numérique" entraîne bien sûr que les problèmes discrétisés III.1 et III.2 admettent la même solution en déplacement. Cependant, ce choix viole le cadre de régularité naturel du problème mécanique, ce qui peut conduire à de graves incompatibilités, notamment pour les milieux hétérogènes. En effet, d'un point de vue continu, les efforts sur une

interface  $\Gamma_{EE'}$  appartiennent *a priori* à  $H^{-1/2}(\Gamma_{EE'})$  et ne sont donc pas nécessairement continus. **Un choix plus "physique" consisterait à prendre pour les efforts un espace d'approximation homogène aux contraintes normales sur les interfaces ; dans une approche éléments finis en déplacement, ces champs sont discontinus.**

### ■ Exemples d'approximations "physiques"

- Si on choisit des éléments finis  $\mathcal{P}_1$  pour le déplacement, la contrainte est alors constante par élément. Un choix naturel pour l'effort est donc une approximation  $\mathcal{P}_0$  (effort constant par élément de l'interface). Les valeurs des efforts sont considérées aux points milieux des éléments d'interface.
- Si le déplacement est approximé par des éléments finis  $\mathcal{P}_2$ , on choisira pour l'effort une approximation linéaire par morceaux non nécessairement continue.
- Dans un cas plus général, si l'approximation du déplacement est d'ordre  $p$ , on choisira pour l'effort une approximation d'ordre  $p - 1$  continue par morceaux.

Les discrétisations "numérique" et "physique" conduisent à la définition des espaces d'approximation pour les efforts qu'on notera respectivement  $\mathcal{F}_{h1}$  et  $\mathcal{F}_{h2}$  (figure III.2).

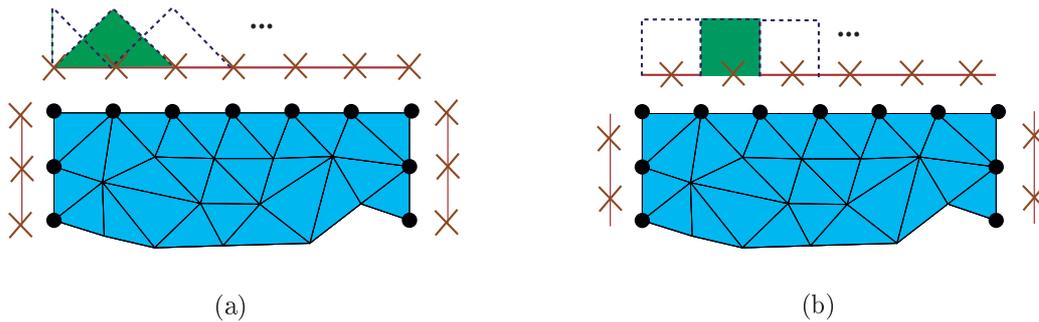


Figure III.2 – Approximations h1 (a) et h2 (b) pour les interefforts dans le cas de déplacements  $\mathcal{P}_1$

On notera  $W = \{x_i\}_{i \in \mathbf{W}}$  l'ensemble des points de Gauss des éléments d'interface associés au choix du degré d'approximation des interefforts. On pourra bien sûr assimiler l'espace de fonctions  $\mathcal{F}_{h2}$  à l'espace des valeurs aux points de Gauss  $W$  des interfaces.

Les solutions du problème III.2 pour les discrétisations h1 et h2 seront notées respectivement  $(\underline{u}_{h1}, \underline{F}_{h1}) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{F}_{h1,ad}$  et  $(\underline{u}_{h2}, \underline{F}_{h2}) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{F}_{h2,ad}$ .

*Remarque III.1* On rappelle que la solution  $\underline{u}_1$  n'est autre que la solution du problème éléments finis classique non sous-structuré. La version dite "numérique" testée dans ce chapitre consiste à définir des efforts continus par interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$ , avec la même interpolation que les déplacements. Ils peuvent néanmoins être discontinus entre deux interfaces adjacentes  $\Gamma_{EE'}$  et  $\Gamma_{EE''}$ ,  $(E', E'') \in \mathbf{V}_E \times \mathbf{V}_E$ . Ce type d'approximation est par exemple utilisée dans la Algebraically Partitioned FETI method [Rixen et Farhat, 1999].

## 2.3 Définition d'interefforts "physiques" à partir d'une solution en déplacement

Posons-nous la question suivante : est-il possible de définir *a posteriori* des interefforts "physiques"  $\underline{F}_h \in \mathcal{F}_{h2}$  à partir d'une solution éléments finis en déplacement ?

### 2.3.1 Problème définissant les interefforts

Connaissant une solution en déplacement sur la sous-structure E,  $\underline{u}_{h,E} \in \mathbf{U}_{h,E}$ , on s'intéresse donc à la reconstruction d'un champ d'effort d'interface  $\underline{F}_{h,E} \in \mathcal{F}_{h2,E}$ . Ces champs doivent vérifier les équations d'équilibre sur la sous-structure E :

$$\forall \underline{u}_{h,E}^* \in \mathbf{U}_{h,E},$$

$$\int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{h,E}^*) : \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{h,E}) dx = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_{h,E}^* dx + \int_{\partial_2\Omega_E} \underline{F}_d \cdot \underline{u}_{h,E}^* ds + \int_{\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega} \underline{F}_{h,E} \cdot \underline{u}_{h,E}^* ds$$

L'effort étant *a priori* connu sur  $\partial_2\Omega_E$ , on ne s'intéresse qu'à la reconstruction sur  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$ . On note  $\bar{\mathbf{U}}_{h,E}$  l'espace associé à la trace des fonctions de  $\mathbf{U}_{h,E}$  sur  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$ , soit

$$\bar{\mathbf{U}}_{h,E} = \{\underline{u}_{h,E}|_{(\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega)}, \underline{u}_{h,E} \in \mathbf{U}_{h,E}\}$$

Les efforts n'ayant d'intérêt que sur  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$ , on définit également la restriction de  $\mathcal{F}_{h2,E}$  à cette partie de l'interface, soit

$$\bar{\mathcal{F}}_{h2,E} = \{\underline{F}_{h,E}|_{(\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega)}, \underline{F}_{h,E} \in \mathcal{F}_{h2,E}\}$$

Le problème définissant les efforts  $\underline{F}_h$  sur  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$  s'écrit alors :

#### Problème III.4

Trouver  $\underline{F}_{h,E} \in \bar{\mathcal{F}}_{h,E}$  tel que

$$\int_{\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega} \underline{F}_{h,E} \cdot \underline{u}_{h,E}^* ds = \sum_{\underline{x}_i \in V \cap \overline{\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega}} \lambda_i^E \cdot \underline{u}_{h,E}^*(\underline{x}_i), \quad \forall \underline{u}_{h,E}^* \in \bar{\mathbf{U}}_{h,E}$$

où les  $\lambda_i^E$  (resp.  $\underline{u}_{h,E}^*(\underline{x}_i)$ ) désignent les efforts généralisés (resp. les déplacements virtuels) sur les noeuds  $\underline{x}_i \in V \cap \overline{\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega}$ , qui sont les noeuds situés dans l'adhérence de  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$ .

### 2.3.2 Existence et unicité des interefforts

Examinons la forme bilinéaire suivante, intervenant dans le problème de définition des interefforts III.4 :

$$\begin{aligned} \bar{b}_E : \quad \bar{\mathcal{F}}_{h2,E} \times \bar{\mathbf{U}}_{h,E} &\longrightarrow \mathbb{R} & (III.2) \\ (\underline{F}_{h,E}, \underline{u}_{h,E}) &\longmapsto \bar{b}_E(\underline{F}_{h,E}, \underline{u}_{h,E}) = \int_{\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega} \underline{F}_{h,E} \cdot \underline{u}_{h,E} ds \end{aligned}$$

Il est clair que la forme bilinéaire  $\bar{b}_E$  n'est pas définie en général (i.e. est dégénérée). Nous noterons ses noyaux

$$\bar{\mathcal{N}}_{h2,E}^u = \{ \underline{u}_{h,E} \in \bar{\mathbf{u}}_{h,E} / \bar{b}_E(\underline{F}_{h,E}, \underline{u}_{h,E}) = 0, \quad \forall \underline{F}_{h,E} \in \bar{\mathcal{F}}_{h2,E} \} \quad (III.3)$$

$$\bar{\mathcal{N}}_{h2,E}^F = \{ \underline{F}_{h,E} \in \bar{\mathcal{F}}_{h2,E} / \bar{b}_E(\underline{F}_{h,E}, \underline{u}_{h,E}) = 0, \quad \forall \underline{u}_{h,E} \in \bar{\mathbf{u}}_{h,E} \} \quad (III.4)$$

Remarque III.2  $\bar{\mathcal{N}}_{h2,E}^u$  est l'espace des fonctions de  $\bar{\mathbf{u}}_{h2,E}$  s'annulant sur les points de Gauss des éléments de  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$ , soit  $W \cap (\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega)$ .

**Proposition III.2** Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un effort  $\underline{F}_{h,E} \in \bar{\mathcal{F}}_{h2,E}$ , solution du problème III.4, est:

$$\sum_{x_i \in V \cap \partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega} \lambda_i^E \cdot \underline{u}_{h,E}^*(x_i) = 0, \quad \forall \underline{u}_{h,E}^* \in \bar{\mathcal{N}}_{h2,E}^u$$

L'intereffort est alors défini modulo un élément de  $\bar{\mathcal{F}}_{h2,E}$ .

□ **Preuve** : On travaille ici en dimension finie. La proposition est donc une conséquence du théorème de base d'existence et d'unicité de solution pour un système d'équations linéaires. □

Nous définissons  $\mathcal{N}_{h2,E}^u \in \mathbf{u}_{h,E}$  comme l'espace des déplacements dont la trace sur  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$  appartient à  $\bar{\mathcal{N}}_{h2,E}^u$  et qui valent zéro sur les autres noeuds du maillage de  $\Omega_E$ . Nous définissons également  $\mathcal{N}_{h2,E}^F \in \mathcal{F}_{h2,E}$  comme l'espace des efforts dont la restriction à  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$  appartient à  $\bar{\mathcal{N}}_{h2,E}^F$  et qui valent zéro sur  $\partial_2\Omega$ .

On introduit les notations suivantes pour les fonctions de base de ces espaces :  $\mathcal{N}_{h2,E}^u = Vect\{\psi_i^E\}_{i \in \mathbf{I}_E^u}$  et  $\mathcal{N}_{h2,E}^F = Vect\{\phi_i^E\}_{i \in \mathbf{I}_E^F}$ . On notera  $\mathcal{N}_{h2}^u = \prod_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{N}_{h2,E}^u$  et  $\mathcal{N}_{h2}^F = \prod_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{N}_{h2,E}^F$ , sous-espaces respectifs de  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathcal{F}_{h2}$ .

### 2.3.3 Un résultat majeur

La proposition III.2 a une conséquence majeure : il est impossible de définir *a posteriori* des interefforts appartenant à  $\mathcal{F}_{h2,E}$  à partir d'une solution éléments finis classique sur la sous-structure  $E$ . La condition d'existence de la proposition III.2 a en effet peu de chance d'être vérifiée. Si c'était le cas, l'effort ne serait défini qu'à un élément de  $\mathcal{N}_{h2,E}^F$  près.

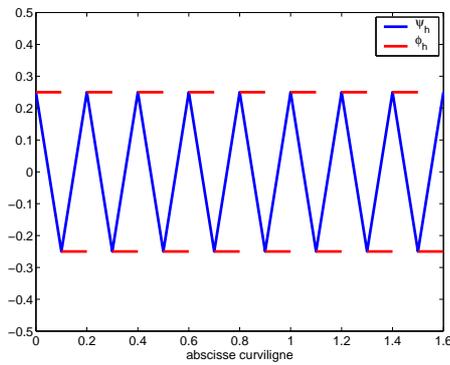
### 2.3.4 Illustrations en 2D

#### 2.3.4.1 Éléments finis $\mathcal{P}_1$ en déplacement et $\mathcal{P}_0$ en effort

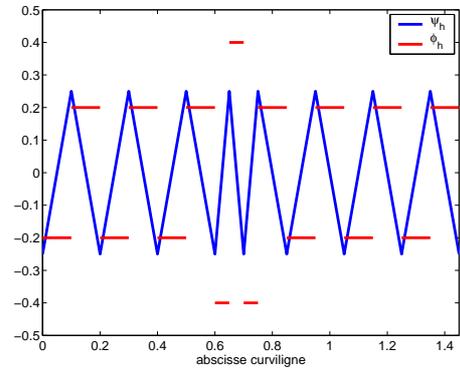
On rappelle que  $V$  désigne l'ensemble des noeuds de la discrétisation et  $W$  l'ensemble des points de Gauss des éléments d'interface relatifs à une discrétisation  $\mathcal{P}_0$  des efforts.  $W$  désigne donc l'ensemble des points milieux des éléments d'interface.

**■ Sous-structure  $E \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}_2$** 

Commençons par considérer une sous-structure  $E$  dont la frontière n'intersecte par  $\partial_2 \Omega$ . Si  $\text{Card}\{V \cap \partial \Omega_E\}$  est impair, alors les deux noyaux  $\mathcal{N}_{h2,E}^u$  et  $\mathcal{N}_{h2,E}^F$  sont réduits à zéro. Par contre, si  $\text{Card}\{V \cap \partial \Omega_E\}$  est pair, alors  $\mathcal{N}_{h2,E}^u = \{\psi_h \underline{v}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2\}$ , où  $\psi_h$  est une fonction de forme à valeur scalaire continue, linéaire par morceaux et nulle aux points milieu des éléments de la frontière, soit  $W \cap \partial \Omega_E$  (voir figure III.3). De même,  $\mathcal{N}_{h2,E}^F = \{\phi_h \underline{v}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2\}$ , où  $\phi_h$  est une fonction à valeur scalaire constante par morceaux dont les valeurs aux points milieu  $W \cap \partial \Omega_E$  ont une distribution alternée le long de  $\partial \Omega_E$  dans le cas où les éléments sont de taille constante et un peu plus complexe lorsque les éléments ne sont pas de taille constante (voir figure III.3).



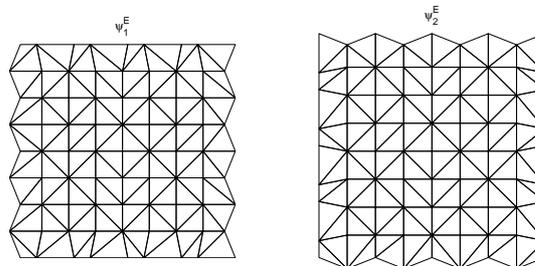
(a) Eléments de taille constante



(b) Eléments de taille non constante: 3 éléments ont une taille deux fois inférieure à celle des autres

 Figure III.3 – Distribution des fonctions  $\phi_h$  et  $\psi_h$  sur  $\partial \Omega_E$  (le noeud de gauche correspond à celui de droite)

La dimension des noyaux est donc 2. Nous noterons  $\mathbf{E}_p = \{E \in \mathbf{E} / \text{Card}(V \cap \partial \Omega_E) \text{ est pair}\}$ . Les fonctions de base de  $\mathcal{N}_{h2,E}^u$  sont représentées sur la figure III.4.


 Figure III.4 – Fonctions  $\{\psi_i^E\}_{i=1}^2$  pour  $E \in \mathbf{E}_p \setminus \mathbf{E}_2$ 
**■ Sous-structure  $E \in \mathbf{E}_2$**

Dans ce cas, quelle que soit la parité de  $\text{Card}((\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega) \cap W)$ ,  $\mathcal{N}_{h2,E}^u = \{\psi_h \underline{v}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2\}$ , où  $\psi_h$  est une fonction de forme à valeur scalaire continue, linéaire par morceaux et nulle aux points milieux des éléments de  $\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega$ . Par contre  $\mathcal{N}_{h2,E}^F$  est réduit à zéro. Les fonctions de base de  $\mathcal{N}_{h2,E}^u$ ,  $E \in \mathbf{E}_2$ , sont représentées sur la figure III.5.

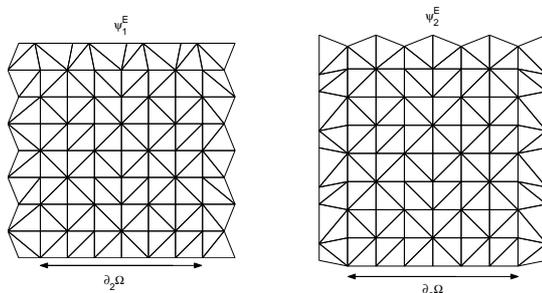


Figure III.5 – Fonctions  $\{\psi_i^E\}$  pour  $E \in \mathbf{E}_2$

### 2.3.4.2 Éléments finis $\mathcal{P}_2$ en déplacement et $\mathcal{P}_1$ en effort

On rappelle que la discrétisation  $h2$  correspond ici à des efforts linéaires par élément et éventuellement discontinus entre deux éléments. Dans ce cas,  $\forall E \in \mathbf{E}$ , on peut montrer que les noyaux  $\mathcal{N}_{h2,E}^u$  et  $\mathcal{N}_{h2,E}^F$  ne sont jamais réduits à zéro.

## 2.4 Existence et unicité des solutions discrétisées

### 2.4.1 Discrétisation $h1$ des interefforts

**Proposition III.3** *Le problème III.2 discrétisé dans  $\mathbf{u}_h \times \mathcal{F}_{h1,ad}$  admet une et une seule solution en déplacement si  $\partial_1\Omega \neq \emptyset$ . De plus, il admet une et une seule solution en terme d'efforts généralisés.*

□ **Preuve** : Travaillant en dimension finie, il suffit de montrer l'unicité. Soit  $(\Delta \underline{u}_{h1}, \Delta \underline{F}_{h1})$  la différence entre deux solutions. Elle vérifie :

$$\begin{aligned} a(\Delta \underline{u}_{h1}, \Delta \underline{u}_{h1}) &= 0 \\ b(\underline{F}_{h1}^*, \Delta \underline{u}_{h1}) &= 0, \quad \forall \underline{F}_{h1}^* \in \mathcal{F}_{h1,0} \end{aligned}$$

La première de ces équations nous garantit que  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,  $\Delta \underline{u}_{h1E} \in \mathcal{R}_E$ , espace des modes rigides de la sous-structure  $E$ . Si  $\partial_1\Omega \neq \emptyset$ , alors  $\forall E \in \mathbf{E}_1$ ,  $\Delta \underline{u}_{h1E} = 0$ . La continuité aux interfaces donnée par la deuxième équation nous assure que  $\Delta \underline{u}_{h1}$  s'annule sur toute la structure. La première équation du problème nous donne alors

$$b(\Delta \underline{F}_{h1}, \underline{u}_h^*) = 0, \quad \forall \underline{u}_h^* \in \mathbf{u}_h$$

Les efforts  $h1$  étant définis de manière redondante aux jonctions d'interfaces, cette équation n'implique donc pas que  $\Delta \underline{F}_{h1} = 0$ . Cependant, les efforts généralisés  $\Delta \lambda_i^E$  aux noeuds  $\underline{x}_i \in V \cap \partial\Omega_E$ , définis par

$$\int_{\Omega_E} \Delta \underline{F}_{h1E} \cdot \Delta \underline{u}_h^* dx = \sum_{\underline{x}_i \in V \cap \partial\Omega_E} \Delta \lambda_i^E \cdot \Delta \underline{u}_h^*(\underline{x}_i), \quad \forall \Delta \underline{u}_h^* \in \mathbf{u}_{h,E}$$

sont nuls.  $\square$

### 2.4.2 Discrétisation h2 des interefforts

**Proposition III.4** *Le problème III.2 discrétisé dans  $\mathbf{U}_{h2} \times \mathcal{F}_{h2,ad}$  admet une et une seule solution en déplacement si  $\partial_1\Omega \neq \emptyset$ . De plus, il admet une et une solution en effort si  $\{0\}$  est l'unique élément de*

$$\{\underline{F}_{h2} \in \mathcal{F}_{h2,0} / \forall E \in \mathbf{E}, \underline{F}_{h2E} \in \mathcal{N}_{h2,E}^F\}$$

*En particulier c'est le cas lorsque  $\partial_2\Omega \neq \emptyset$ .*

$\square$  **Preuve** : Travaillant en dimension finie, il suffit de montrer l'unicité. Soit  $(\Delta \underline{u}_{h2}, \Delta \underline{F}_{h2})$  la différence entre deux solutions. En suivant la même démonstration que pour la proposition III.3, on obtient que  $\Delta \underline{u}_{h2}$  s'annule sur toute la structure et que

$$\begin{aligned} b(\Delta \underline{F}_{h2}, \underline{u}_h^*) &= 0, \quad \forall \underline{u}_h^* \in \mathbf{U}_h \\ \implies \forall E \in \mathbf{E}, \quad \bar{b}_E(\Delta \underline{F}_{h2E}, \underline{u}_{hE}^*) &= 0, \quad \forall \underline{u}_{hE}^* \in \bar{\mathbf{U}}_{h2,E} \end{aligned}$$

On a donc  $\Delta \underline{F}_{h2E} \in \mathcal{N}_{h2,E}^F, \forall E \in \mathbf{E}$ , ce qui termine la première partie de la preuve. Lorsque  $\partial_2\Omega \neq \emptyset$ ,  $\Delta \underline{F}_{h2}$  étant nul sur  $\partial_2\Omega$ , il s'annule sur les sous-structures  $E \in \mathbf{E}_2$ . Par continuité aux interfaces, il s'annule donc sur toute la structure.  $\square$

## 3 Comparaison des solutions discrétisées

Nous allons dans cette partie comparer les solutions des deux types d'approximation h1 et h2.

### 3.1 Reformulation en déplacement et étude des espaces discrétisés

Afin de comparer les solutions en déplacement, commençons par reformuler le problème discrétisé III.2 en terme de déplacement. Pour cela, on définit les espaces suivants : pour  $i \in \{1,2\}$ ,

$$\mathbf{U}_{hi,ad} = \{\underline{v}_h \in \mathbf{U}_h / b(\underline{F}_{hi}^*, \underline{v}_h) = h(\underline{F}_{hi}^*), \forall \underline{F}_{hi}^* \in \mathcal{F}_{hi,0}\}$$

Les solutions en déplacement vérifient donc les problèmes suivants : pour  $i \in \{1,2\}$ ,

$$\text{Trouver } \underline{u}_{hi} \in \mathbf{U}_{hi,ad} \text{ tel que : } a(\underline{u}_{hi}, \underline{u}_{hi}^*) = l(\underline{u}_{hi}^*), \quad \forall \underline{u}_{hi}^* \in \mathbf{U}_{hi,0} \quad (\text{III.5})$$

**Proposition III.5** *Les espaces  $\mathbf{U}_{hi,ad}$  vérifient :*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{h1,ad} &= \mathbf{U}_{h,ad} \text{ (espace éléments finis du problème non sous-structuré)} \\ \mathbf{U}_{h2,ad} &= \mathbf{U}_{h,ad} + \mathcal{N}_{h2}^u \end{aligned}$$

□ **Preuve :**  $\mathbf{U}_{h1,ad}$  correspond à l'espace des champs de déplacements continus aux interfaces ; on a donc clairement  $\mathbf{U}_{h1,ad} = \mathbf{U}_{h,ad}$ .

Soit  $\underline{u}_{h2} \in \mathbf{U}_{h2,ad}$ . Le contrainte imposée par la forme bilinéaire  $b$  n'affecte pas les noeuds intérieurs à chaque sous-structure. De plus, elle impose que le déplacement  $\underline{u}_{h2}$  soit continu aux points de Gauss  $W$  des éléments d'interface, excepté sur  $\partial_2\Omega$ . On peut donc trouver un champ  $\underline{v}_h \in \mathbf{U}_{h,ad}$  tel que,  $\forall E \in \mathbf{E}$ , il coïncide avec  $\underline{u}_{h2}$  sur l'ensemble des points suivants :

$$\underline{v}_h = \underline{u}_{h2} \text{ sur } \{W \cap (\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega)\} \cup \{V \cap \overset{\circ}{\partial_2\Omega}_E\} \cup \{V \cap \Omega_E\}$$

où  $\overset{\circ}{\partial_2\Omega}_E$  désigne l'intérieur de  $\partial_2\Omega_E$ .  $(\underline{u}_{h2} - \underline{v}_h)|_{\Omega_E}$  s'annule donc sur cet ensemble de points. L'ensemble des fonctions s'annulant en ces points n'est autre que  $\mathcal{N}_{h2}^u$  (voir remarque III.2), ce qui termine la preuve. □

Une première conséquence de la proposition III.5 est que la solution  $\underline{u}_{h1}$  n'est autre que la solution du problème éléments finis classique non sous-structuré III.1.

## 3.2 Comparaison des solutions en déplacement

### 3.2.1 Construction de $\underline{u}_{h2}$ à partir de $\underline{u}_{h1}$

Soit  $\underline{u}_{h1}$  et  $\underline{u}_{h2}$  les solutions des problèmes discrétisés respectivement avec les approximations h1 et h2 des efforts. Nous allons tenter ici de déterminer  $\underline{u}_{h2}$  en fonction de  $\underline{u}_{h1}$ .

On recherche donc  $\hat{\underline{u}}_{h2} \in \mathbf{U}_{h2,0}$  tel que

$$\underline{u}_{h2} = \underline{u}_{h1} + \hat{\underline{u}}_{h2}$$

Grâce à la proposition III.5, on peut décomposer  $\hat{\underline{u}}_{h2}$  sous la forme

$$\hat{\underline{u}}_{h2} = \bar{\underline{u}}_{h1} + \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^E \underline{\psi}_i^E$$

où  $\bar{\underline{u}}_{h1} \in \mathbf{U}_{h,0}$  et  $\forall E \in \mathbf{E}, \forall i \in \mathbf{I}_E^u, \alpha_i^E \in \mathbb{R}$ . Les  $\underline{\psi}_i^E$  désigneront aussi bien les fonctions de  $\mathbf{U}_{h,E}$  que leur prolongement à zéro dans  $\mathbf{U}_h$ .

Le problème en  $\underline{u}_{h2}$  se ramène donc à chercher  $\bar{\underline{u}}_{h1} \in \mathbf{U}_{h,0}$  et  $\{\alpha_i^E\}_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u}$  tels que

$$\begin{aligned} & \forall \underline{u}_{h1}^* \in \mathbf{U}_{h,0} \text{ et } \forall \{\alpha_i^{E*}\}_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \\ & a(\bar{\underline{u}}_{h1} + \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^E \underline{\psi}_i^E, \underline{u}_{h1}^*) = 0 \\ & a(\bar{\underline{u}}_{h1} + \underline{u}_{h1} + \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^E \underline{\psi}_i^E, \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E) = l(\sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E) \end{aligned}$$

Par linéarité, la première équation conduit à

$$\bar{\underline{u}}_{h1} = \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^E \underline{u}_{h1,i}^E$$

où  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,  $\forall i \in \mathbf{I}_E^u$ ,  $\bar{u}_{h1,i}^E \in \mathbf{U}_{h,0}$  est solution de :  $\forall \underline{u}_h^* \in \mathbf{U}_{h,0}$ ,

$$a(\bar{u}_{h1,i}^E, \underline{u}_h^*) = - \int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{hE}^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\psi}_i^E) dx \quad (\text{III.6})$$

En notant  $\bar{\psi}_i^E = \bar{u}_{h1,i}^E + \underline{\psi}_i^E \in \mathbf{U}_h$ , les solutions des problèmes discrétisés vérifient donc :

$$\underline{u}_{h2} = \underline{u}_{h1} + \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^E \bar{\psi}_i^E \quad (\text{III.7})$$

où  $\{\alpha_i^E\}_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u}$  est solution de :  $\forall \{\alpha_i^{E*}\}_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u}$ ,

$$a\left(\sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^E \bar{\psi}_i^E, \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E\right) = -a(\underline{u}_{h1E}, \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E) + l\left(\sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E\right) \quad (\text{III.8})$$

L'équation (III.8) est un simple système linéaire sur les coefficients  $\{\alpha_i^E\}_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u}$ . Il admet une solution unique sous les mêmes hypothèses que la proposition III.4.

*Remarque III.3* On peut noter que, pour  $E \in \mathbf{E}_1$ , on a  $\bar{\psi}_i^E = \underline{\psi}_i^E$  sur  $\partial_1 \Omega_E$ . La solution pourra donc être fortement perturbée sur les frontières à déplacement imposé.

### 3.2.2 Exemple

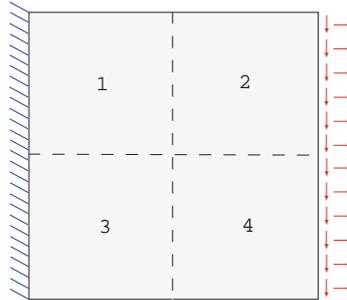


Figure III.6 – Bloc en traction-flexion décomposé en 4 sous-domaines

Considérons le problème défini sur la figure III.6 d'un bloc décomposé en  $2 \times 2$  sous-domaines et discrétisé avec 8 éléments par interface. On considère des éléments  $\mathcal{P}_1$  en déplacement.

#### ■ Analyse de la solution

On peut voir sur la figure III.7 une représentation des fonctions  $\bar{\psi}_i^1$  et  $\bar{\psi}_i^2$  des deux premières sous-structures, calculées directement à partir d'une résolution éléments finis classique. Ces fonctions présentent de fortes irrégularités localisées

près des frontières des sous-structures, excepté au niveau des interfaces à effort imposé.

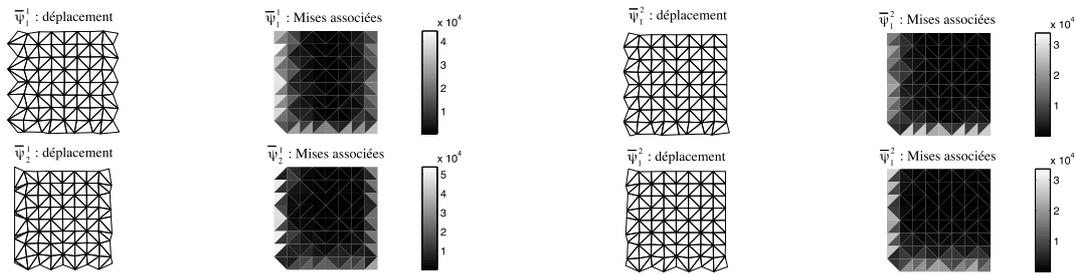


Figure III.7 – Fonctions  $\{\bar{\Psi}_i^1\}$  et  $\{\bar{\Psi}_i^2\}$  et contraintes de Von Mises associées

Afin de comparer les solutions, nous avons tracé la différence  $(\underline{u}_{h1} - \frac{\underline{u}_{h2}}{E})$  sur la figure III.8. Cette différence est clairement une combinaison linéaire des  $\frac{\bar{\psi}_i}{E}$ . Les deux solutions diffèrent particulièrement au niveau des singularités coins (transition effort/déplacement imposé). On observe sur le zoom autour de l'intersection des 4 sous-domaines, appelé couramment coin, qu'elle vérifie bien la continuité aux points milieux  $W$ .

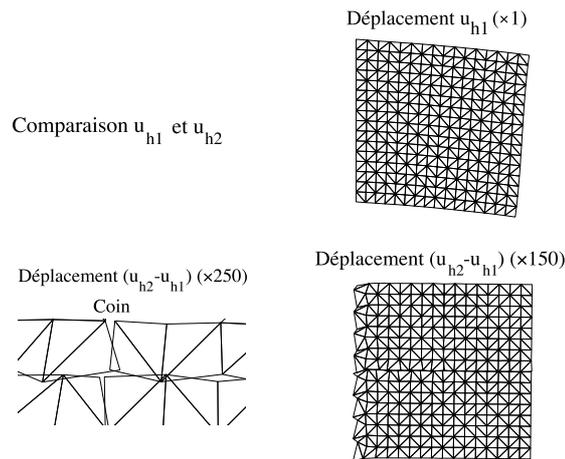


Figure III.8 – Comparaison de  $u_{h1}$  et de  $u_{h2}$

Connaissant la solution  $\underline{u}_{h1}$ , on peut calculer les coefficients  $\alpha_i^E$  et ainsi obtenir la fonction  $\hat{u}_{h2}$ . On montre sur les figures III.9 la fonction  $(\underline{u}_{h1} + \hat{u}_{h2} - \underline{u}_{h2})$ , qui s'annule bien sur l'ensemble de la structure. La méthode de construction de la solution  $\underline{u}_{h2}$  à partir de  $\underline{u}_{h1}$  précédemment introduite est donc validée.

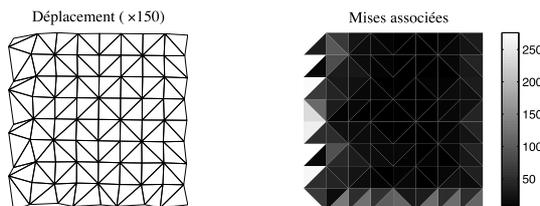


Figure III.9 –  $(u_{h2} - u_{h1})$  et contraintes de Von Mises associées

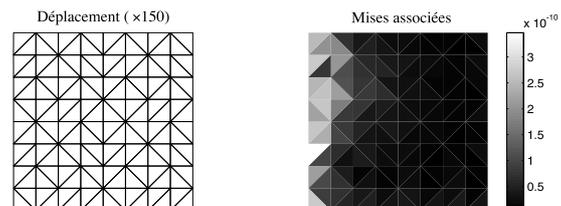


Figure III.10 –  $(u_{h1} + \hat{u}_{h2} - u_{h2})$  et contraintes de Von Mises associées

La figure III.11 montre, pour  $E \in \{1,2,3,4\}$ , la bonne concordance des solutions  $\underline{u}_{h1_E}$  sur  $\partial\Omega_E$  et  $\underline{u}_{h2_E}$  sur  $\partial\Omega_E \cap W$ . En fait, ceci est dû à une bonne régularité des fonctions  $\{\overline{\psi}_i^E\}$  si on ne considère que leurs valeurs aux points  $W$ , points de Gauss des éléments d'interface.

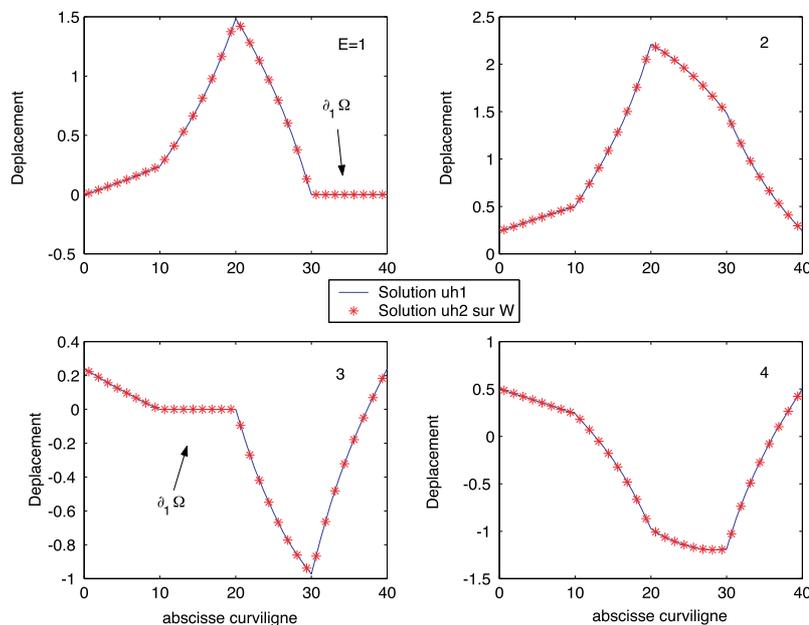


Figure III.11 – Composantes horizontales de  $u_{h1_E}$  sur  $\partial\Omega_E$  et  $u_{h2_E}$  sur  $\partial\Omega_E \cap W$  pour  $E \in \{1,2,3,4\}$

### ■ Convergence de la méthode LATIN

Le problème est ici résolu par la méthode LATIN monoéchelle. La figure III.12 montre les courbes de convergence de l'algorithme itératif pour les discrétisations h1 et h2.

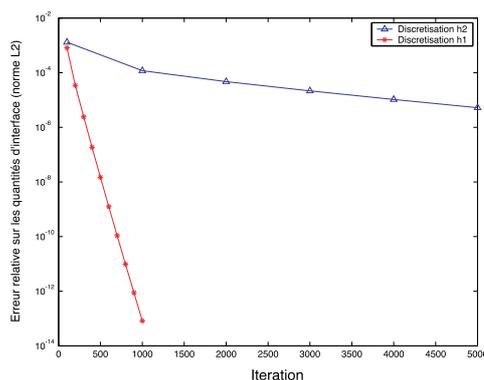


Figure III.12 – Erreur relative en fonction des itérations de la méthode LATIN monoéchelle pour les discrétisations h1 et h2

La convergence est très mauvaise pour la discrétisation h2. La figure III.13 montre la différence entre les déplacements à l'itération 5000 et les déplacements à l'itération 100 sur la sous-structure 1. Cette différence ressemble fortement à une combinaison des fonctions  $\overline{\psi}$ . **Les perturbations de la solution dans les zones à forts**

gradients sont difficilement captées par l'algorithme itératif et détériorent donc sa convergence.

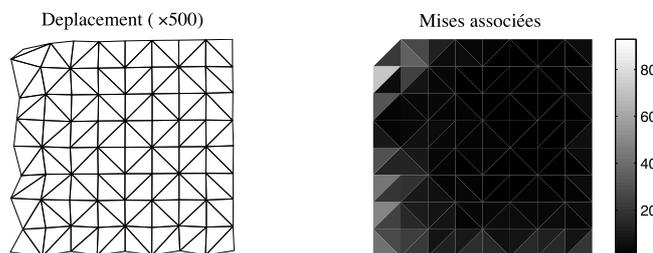


Figure III.13 – Différence entre les itérés 5000 et 100 de l'algorithme itératif sur la sous-structure 1 :  $(u_{h21,5000} - u_{h21,100})$  et contraintes de Von Mises associées

### 3.2.3 Condition d'égalité des solutions $\underline{u}_{h1}$ et $\underline{u}_{h2}$

**Proposition III.6**  $\underline{u}_{h1} = \underline{u}_{h2}$  si et seulement si,  $\forall E \in \mathbf{E}, \forall i \in \mathbf{I}_E^u$ ,

$$\int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_{h1E} \cdot \underline{\psi}_i^E ds = 0$$

□ **Preuve** : En injectant  $\sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E$  comme champ virtuel dans le problème III.2 discrétisé dans  $\mathbf{U}_h \times \mathcal{F}_{h1,ad}$ , on obtient

$$a(\underline{u}_{h1E}, \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E) - l(\sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E) = b(\underline{F}_{h1}, \sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^{E*} \underline{\psi}_i^E)$$

Le premier membre correspond au second membre du problème III.8 définissant la différence entre les solutions. Pour qu'elles soient égales, il faut donc que le second membre s'annule, ce qui termine la preuve. □

La condition d'égalité est donc simplement que les efforts  $\underline{F}_{h1}$  ne travaillent pas avec les déplacements  $\{\underline{\psi}_i^E\}_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u}$ . On retrouve la condition nécessaire à la construction d'un champ d'effort dans  $\mathcal{F}_{h2}$  de la proposition III.2. En d'autres termes, si la solution en déplacement garantit l'existence d'un champ d'effort "physique" associé, alors les solutions en déplacements  $\underline{u}_{h1}$  et  $\underline{u}_{h2}$  sont identiques. Ceci est bien entendu une anomalie de discrétisation. Dans les zones à faibles gradients, le travail de  $\underline{F}_{h1}$  dans les déplacements très oscillants  $\{\underline{\psi}_i^E\}$  tend bien sûr à s'annuler, et ce d'autant plus qu'on raffine le maillage. Cependant, ce travail peut être non négligeable dans des zones à forts gradients et en particulier dans les zones de discontinuité de  $\underline{F}_1$  (dans les coins  $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega$  par exemple). On peut d'ailleurs observer sur la figure III.8 que les solutions sont le plus éloignées au niveau des deux coins.

**Ces perturbations sur les déplacements restent cependant négligeables**, comme on a pu le constater sur l'exemple précédent. Nous allons à présent voir que ceci n'est plus vrai en ce qui concerne les efforts, pour lesquels on peut obtenir des résultats très éloignés de la réalité.

### 3.3 Comparaison des solutions en effort

#### 3.3.1 Construction de $\underline{F}_{h2}$ à partir de $(\underline{u}_{h1}, \underline{F}_{h1})$

**Proposition III.7** *Connaissant la solution  $(\underline{u}_{h1}, \underline{F}_{h1})$ , la construction de  $\underline{F}_{h2}$  est définie par le problème suivant :*

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \underline{F}_{h2,ad} \in \mathfrak{F}_{h2} \text{ qui vérifie : } \forall \underline{u}_h^* \in \mathbf{U}_h, \\ & b(\underline{F}_{h2}, \underline{u}_h^*) = b(\underline{F}_{h1}, \underline{u}_h^*) + a\left(\sum_{E \in \mathbf{E}, i \in \mathbf{I}_E^u} \alpha_i^E \underline{\psi}_i^E, \underline{u}_h^*\right) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

□ **Preuve :** Il suffit de soustraire les premières équations des formulations mixtes III.2 discrétisées et de tenir compte de l'expression (III.7) de la différence entre les déplacements. □

**Proposition III.8** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire  $\underline{F}_{h2} \in \mathfrak{F}_{h2}$  à partir de la solution  $(\underline{u}_{h1}, \underline{F}_{h1})$  est la suivante :  $\forall E \in \mathbf{E}, \forall i \in \mathbf{I}_E^u$ ,*

$$\int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_{h1E} \cdot \underline{\psi}_i^E ds = 0$$

L'intereffort est alors défini modulo un élément de  $\mathcal{N}_{h2}^F$ .

□ **Preuve :** Cette condition étant respectée, on a vu dans la proposition III.6 que les coefficients  $\alpha_i^E$  sont nuls. On a donc orthogonalité du second membre par rapport à  $\mathcal{N}_{h2}^u$ . On peut alors reprendre la preuve de la proposition III.2. □

La conclusion est la même que pour la proposition III.2 : **il est impossible de définir a posteriori les efforts  $\underline{F}_{h2}$  à partir de la solution  $(\underline{u}_{h1}, \underline{F}_{h1})$ .** En effet, même si on admet qu'une solution au problème défini dans la proposition III.7 existe, ce qui exige l'annulation du second membre  $\forall \underline{u}_h^* \in \mathcal{N}_{h2}^u$ , alors les efforts  $\underline{F}_{h2}$  ne seront définis qu'à un élément de  $\mathcal{N}_{h2}^F$  près.

#### 3.3.2 Exemple

On reprend l'exemple précédent du bloc en traction-flexion.

##### ■ Analyse de la solution

La figure III.14 montre pour  $E \in \{1,2,3,4\}$  les distributions de  $\underline{F}_{h1E}$  sur  $\partial\Omega_E$  et de  $\underline{F}_{h2E}$  sur  $\partial\Omega_E \cap W$ .

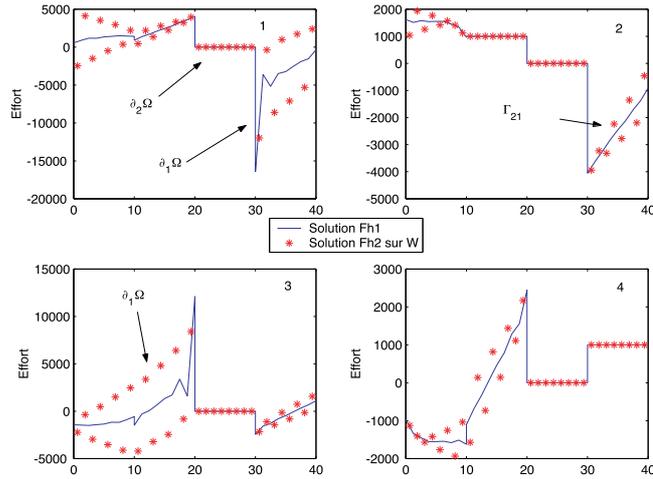


Figure III.14 – Composantes horizontales de  $F_{h1_E}$  sur  $\partial\Omega_E$  et de  $F_{h2_E}$  sur  $\partial\Omega_E \cap W$  pour  $E = \{1,2,3,4\}$

La solution  $\underline{F}_{h2_E}$  présente de fortes oscillations qui sont particulièrement marquées à proximité de la singularité "coin", là où la solution en déplacement était la plus perturbée.

### ■ Convergence de la méthode LATIN

La figure III.15 montre la différence entre les efforts à l'itération 5000 et les efforts à l'itération 100 sur l'ensemble des interfaces. On remarque encore que **ce sont bien des modes parasites très oscillants qui détériorent la convergence de l'algorithme.**

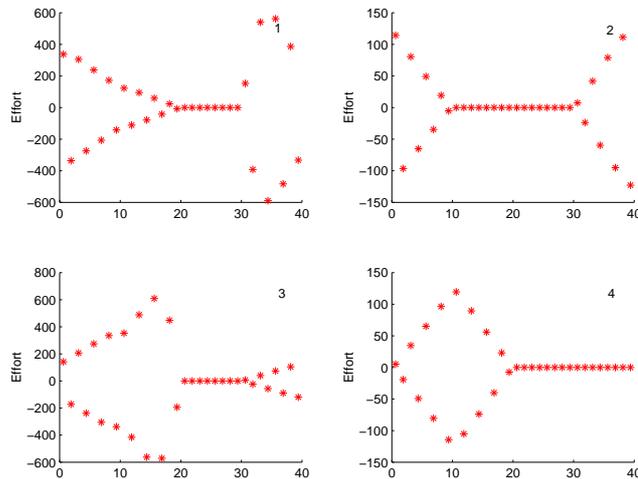


Figure III.15 – Différence entre les itérés 5000 et 100 de l'algorithme itératif:  $(F_{h2,5000} - F_{h2,100})$  sur  $\partial\Omega_E$ ,  $E \in \{1,2,3,4\}$

*Remarque III.4* Les perturbations en effort et en déplacement sont en réalité liées. Par exemple, on peut noter que sur  $\partial_1\Omega_1$ ,  $\underline{\psi}_i^1 = \underline{\psi}_i^1$ . Le second membre associé dans l'expression (III.9) a donc sensiblement la forme de  $\underline{\psi}_i^1$  sur  $\partial_1\Omega_1$ . On peut alors voir

sur la figure III.16 l'effet cumulé sur  $\underline{F}_{h2}$  d'une telle perturbation.

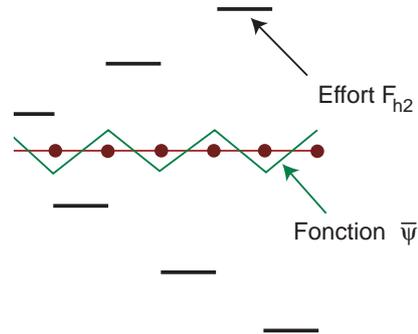


Figure III.16 – Effet sur la distribution de  $F_{h2}$  d'une perturbation oscillante sur les efforts généralisés

### 3.4 Illustration des anomalies sur un problème de contact unilatéral avec frottement

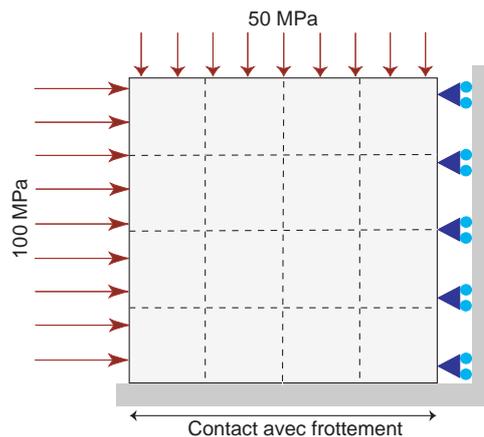
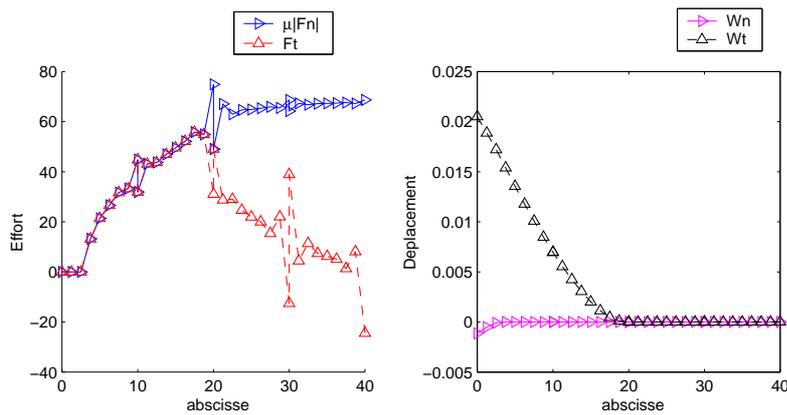
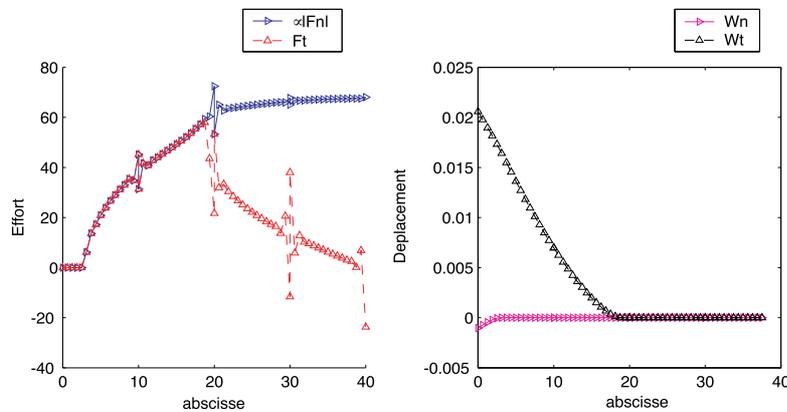


Figure III.17 – Problème de contact avec frottement

Nous considérons ici la résolution d'un problème de contact avec frottement. Sur la figure III.17 est présenté un problème classique de compression d'un bloc élastique avec conditions de symétrie sur la frontière droite et des conditions de contact avec frottement sur la partie inférieure. Le domaine est décomposé en  $4 \times 4$  sous-domaines. On considère des éléments finis  $\mathcal{P}_1$  pour les déplacements. Sur chaque interface, le maillage comprend 8 éléments.

#### 3.4.1 Solution $F_{h1}$

Comme on l'a montré dans la proposition III.3, les multiplicateurs d'une discrétisation  $\mathcal{P}_1$  ne sont pas définis de manière unique aux noeuds coins : ils dépendent donc de la technique de résolution choisie. Seuls les efforts généralisés aux noeuds associés sont bien définis. On montre sur la figure III.18 la distribution des efforts  $\underline{F}_{h1}$  sur les interfaces de contact.


 Figure III.18 – Distributions de  $\underline{F}_{h1}$  et de  $\underline{u}_{h1}$  sur les interfaces de contact

 Figure III.19 – Distributions de  $\underline{F}_{h1}$  et de  $\underline{u}_{h1}$  sur les interfaces de contact : maillage raffiné

La décomposition d'un tel problème de frottement engendre des singularités "fictives" aux extrémités des interfaces de contact. Les coins de plus forte singularité sont ceux qui correspondent à une transition interface adhérente/interface parfaite. On remarque d'ailleurs que les singularités se reportent essentiellement sur l'effort tangentiel. Cependant, les efforts généralisés associés à ces multiplicateurs sont parfaitement réguliers. Cette discrétisation reste cependant insatisfaisante puisqu'elle demande un post-traitement global des multiplicateurs afin de représenter fidèlement la réalité. De plus, lorsque le maillage est raffiné (16 éléments par interface), les oscillations persistent avec la même amplitude (figure III.19). Les déplacements sont quant à eux très satisfaisants.

Les singularités "fictives" sur les interefforts apparaissent aux noeuds où sont connectés plus de 2 sous-domaines. Une interface a pour l'instant été définie comme une intersection de mesure non nulle entre deux sous-domaines. Une modification classique, opérée dans la méthode FETI de base, consiste à considérer également comme interface une intersection de mesure nulle [Rixen et al., 1999]. L'espace des multiplicateurs de Lagrange est donc augmenté (figure III.20). Les conditions de continuité ajoutées sont bien sûr redondantes mais cette modification permet d'annuler les singularités "fictives".

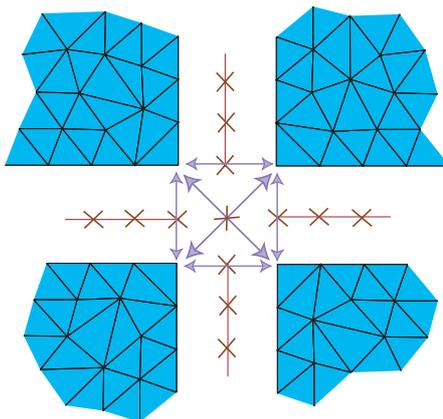


Figure III.20 – Modification de la discrétisation  $h_1$  : ajout de multiplicateurs aux coins

Cette modification ne pose pas *a priori* de problèmes pour le cas des interfaces parfaites. Cependant, dans le cas de comportements d'interfaces complexes, en particulier pour le cas du contact unilatéral, il devient très compliqué de définir une loi sur ces nouveaux multiplicateurs.

### 3.4.2 Solution $F_{h_2}$

Dans le cas de la discrétisation  $\mathcal{P}_0$ , on n'observe plus les grandes irrégularités aux extrémités des interfaces. Cependant, **de fortes oscillations apparaissent** (figure III.21).

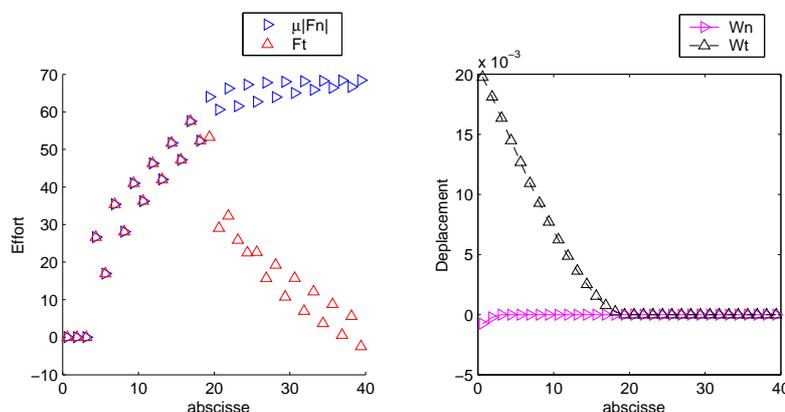


Figure III.21 – Distributions de  $\underline{F}_{h_2}$  et de  $\underline{u}_{h_2}$  sur les interfaces de contact

La naissance de ces oscillations peut encore être attribuée à l'existence d'une transition entre des interfaces de nature différente. Ces transitions sont par exemple les transitions contact/interface parfaite ou encore contact/décollement, endroits où l'on a une discontinuité de l'effort et une contribution non nulle du travail de l'effort  $\underline{F}_{h_1}$  dans les déplacements  $\underline{\psi}_i^E$ . On peut d'ailleurs remarquer qu'on aura existence de fonctions  $\underline{\psi}_i^E$  sur un sous-domaine  $E$  comprenant une interface décollée et ce quelle que soit la parité de  $\text{Card}(\partial\Omega_E \cap W)$ . Cependant, **ces oscillations tendent à s'annuler lorsqu'on raffine le maillage**, ce qui est confirmé sur la figure III.22.

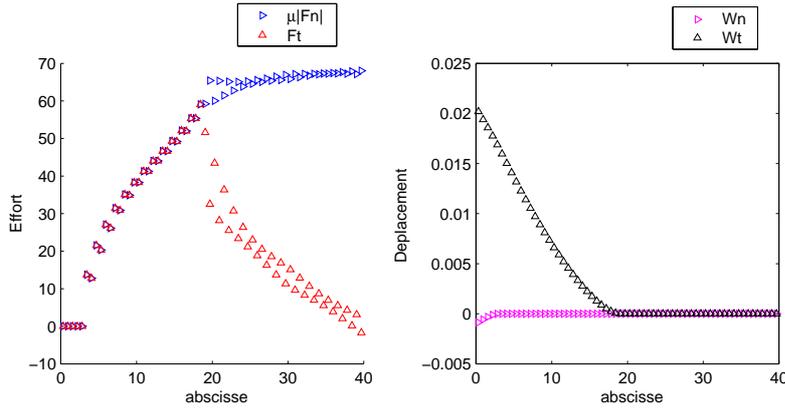


Figure III.22 – Distributions de  $\underline{F}_{h2}$  et de  $\underline{u}_{h2}$  aux points milieux des éléments des interfaces de contact : maillage raffiné (16 éléments par interface)

## 4 Explication des anomalies numériques

### 4.1 Problème dual discrétisé

On rappelle que la solution discrétisée en déplacement  $\underline{u}_{hE} \in \mathbf{U}_{h,E}$  sur une sous-structure  $E$  doit vérifier

$$\int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{hE}^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{hE}) dx = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_{hE}^* ds + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_{hE} \cdot \underline{u}_{hE}^* ds, \quad \forall \underline{u}_{hE}^* \in \mathbf{U}_{h,E} \quad (\text{III.10})$$

**Proposition III.9** Si le champ d'effort  $\underline{F}_{hE}$  équilibre  $\underline{f}_d$  sur  $\Omega_E$ , alors la solution de (III.10) existe et est définie à un mode rigide  $\alpha_E \in \mathfrak{R}_{h,E}$  près. Elle vérifie

$$\underline{u}_{hE}|_{\partial\Omega_E} = \widehat{\underline{u}}_{h,dE}|_{\partial\Omega_E} + \mathcal{A}_{h,E}(\{\underline{F}_{hE}\}) + \alpha_E$$

où  $\widehat{\underline{u}}_{h,dE}$  ne dépend que de  $\underline{f}_d$ . L'opérateur linéaire  $\mathcal{A}_{h,E}$  est symétrique et positif sur l'espace des champs équilibrés à zéro.

□ **Preuve** : Il suffit de reprendre la preuve de la proposition III.1, encore valable dans le cadre discrétisé. □

Le problème dual discrétisé revient à minimiser l'énergie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \{\underline{F}_{h2E}\} \cdot \mathcal{A}_{h2,E}(\{\underline{F}_{h2E}\}) ds + \\ & \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \{\underline{F}_{h2E}\} \cdot \widehat{\underline{u}}_{h,dE} ds - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_1\Omega_E} \{\underline{F}_{h2E}\} \cdot \underline{u}_d ds \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

sur les efforts  $\underline{F}_{h2} \in \mathfrak{F}_{h2,ad}$  équilibrant les sous-structures.

## 4.2 Conséquences d'une mauvaise discrétisation

Les propriétés de la discrétisation  $h2$  énoncées précédemment nous permettent de constater **une première anomalie :  $\mathcal{A}_{h2,E}$  n'est pas défini sur  $\mathcal{F}_{h2,E}$** . En effet,

$$\forall \underline{F}_{h2E} \in \mathcal{N}_{h2,E}^F, \quad \mathcal{A}_{h2,E}(\underline{F}_{h2E}) = 0$$

**Plus généralement, l'énergie des modes très oscillants tels que ceux observés dans les exemples précédents est très mal prise en compte.** En d'autres termes, une sous-structure "ne voit pas ces modes" car elle leur attribue une énergie très faible voire nulle. Cette anomalie de la discrétisation a donc **deux conséquences** : la première est que le problème de minimisation que l'on cherche à résoudre perd de son sens et la solution obtenue est physiquement aberrante ; **l'erreur commise sur l'énergie peut être considérable dans les zones à forts gradients ou de discontinuité d'effort et engendrer des modes parasites anormalement amplifiés.** La deuxième conséquence est que **le problème discrétisé que l'on cherche à résoudre est très mal conditionné, ce qui peut fortement perturber la convergence d'algorithmes itératifs.**

Nous allons à présent tenter de remédier à ce problème en proposant une nouvelle discrétisation.

## 5 Proposition d'un nouveau type de discrétisation

Nous proposons ici une méthode de discrétisation saine du problème qui conserve une vision "physique" des quantités d'interface tout en évitant les anomalies numériques de la discrétisation précédente.

### 5.1 Principe

Les anomalies numériques proviennent d'une mauvaise prise en compte de modes parasites oscillants. La discrétisation  $h2$  leur attribue en effet une énergie très faible, voire nulle, ce qui est physiquement anormal. L'idée est donc de modifier cette discrétisation afin de mieux rendre compte de ces phénomènes. **L'idéal serait de calculer les déplacements d'une sous-structure associé à un effort discrétisé non plus de manière approchée mais de manière exacte.** En d'autres termes, pour un effort  $\underline{F}_h \in \mathcal{F}_h$  équilibrant la sous-structure  $E$ , on voudrait connaître le champ de déplacement  $\underline{u}_E \in \mathcal{U}_E$ , solution de

$$\int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^*) : \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E) dx = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* dx + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_{hE} \cdot \underline{u}_E^* ds, \quad \forall \underline{u}_E^* \in \mathcal{U}_E \quad (\text{III.12})$$

La solution de ce problème vérifie

$$\underline{u}_{E|\partial\Omega_E} = \widehat{\underline{u}}_{dE|\partial\Omega_E} + \mathcal{A}_E(\{\underline{F}_{hE}\}) + \alpha_E$$

où  $\alpha_E \in \mathcal{R}_E$  et où  $\mathcal{A}_E$  est l'opérateur "exact" défini dans la proposition III.1.

## 5.2 Proposition d'une nouvelle discrétisation

Afin de remédier aux anomalies occasionnées par la discrétisation h2, **on propose un nouveau type de discrétisation, noté h3, qui donne une meilleure estimation de l'opérateur  $\mathcal{A}_E$ . L'idée suivie consiste à décrire les sous-structures avec un maillage fin relativement à la discrétisation de l'interface.** L'effort d'interface sera alors considéré continu non plus sur un seul élément mais sur un ensemble d'éléments (figure III.23).

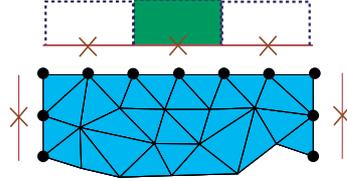


Figure III.23 – Discrétisation h3 : effort continu sur deux éléments consécutifs

Nous noterons  $(\underline{u}_{h3}, \underline{F}_{h3})$  la solution du problème III.2 dans les espaces d'approximation  $\mathbf{U}_{h3} \times \mathcal{F}_{h3,ad}$ . **Cette modification peut être vue aussi bien comme une sous-intégration des quantités d'interface que comme une sur-discrétisation des quantités relatives aux sous-structures.**

On peut reprendre l'étude de la forme bilinéaire  $\bar{b}_E$  sur les nouveaux espaces de discrétisation, soit

$$\begin{aligned} \bar{b}_E : \quad \bar{\mathcal{F}}_{h3,E} \times \bar{\mathbf{U}}_{h3,E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{F}_{h_E}, \underline{u}_{h_E}) &\longmapsto \bar{b}_E(\underline{F}_{h_E}, \underline{u}_{h_E}) = \int_{\partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega} \underline{F}_{h_E} \cdot \underline{u}_{h_E} \, ds \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Nous définissons également ses noyaux

$$\bar{\mathcal{N}}_{h3,E}^u = \{ \underline{u}_{h,E} \in \bar{\mathbf{U}}_{h,E} / \bar{b}_E(\underline{F}_{h_E}, \underline{u}_{h_E}) = 0, \quad \forall \underline{F}_{h_E} \in \bar{\mathcal{F}}_{h2,E} \} \quad (\text{III.14})$$

$$\bar{\mathcal{N}}_{h3,E}^F = \{ \underline{F}_{h_E} \in \bar{\mathcal{F}}_{h3,E} / \bar{b}_E(\underline{F}_{h_E}, \underline{u}_{h_E}) = 0, \quad \forall \underline{u}_{h_E} \in \bar{\mathbf{U}}_{h3,E} \} \quad (\text{III.15})$$

### Proposition III.10

$$\bar{\mathcal{N}}_{h3,E}^F = \{0\}$$

□ **Preuve :** Raisonnons en 2D dans le cas d'une discrétisation  $\mathcal{P}_1$  en déplacement et  $\mathcal{P}_0$  en effort. L'effort est considéré constant sur deux éléments consécutifs. Supposons qu'il existe  $\underline{F}_h \in \bar{\mathcal{N}}_{h3,E}^F$  non nul.  $\underline{F}_h$  est donc non nul et constant sur deux éléments consécutifs (propriété de la discrétisation h3). Le champ  $\underline{u}_h$  valant zéro sur tous les noeuds de  $\partial\Omega_E$  sauf au noeud commun à ces deux éléments vérifie  $\bar{b}_E(\underline{F}_{h_E}, \underline{u}_{h_E}) \neq 0$ . Ceci contredit l'hypothèse de départ. Ce résultat reste bien sûr valable si l'effort est considéré constant sur plus de deux éléments. Il reste également valable pour des degrés d'interpolation supérieurs. En 3D, il faudra cependant être attentif à la manière d'opérer la nouvelle discrétisation. □

Une conséquence plus générale de cette nouvelle discrétisation est que **l'énergie des modes d'interface est mieux approximée**. Les efforts fortement oscillants se voient par exemple attribuer une grande énergie.

*Remarque III.5* On pourrait reprendre exactement le même raisonnement qu'auparavant pour établir le lien entre la solution  $h3$  et la solution  $h1$ .

Nous allons voir à présent sur quelques exemples l'influence de cette discrétisation sur la qualité de la solution et la convergence des algorithmes.

### 5.3 Etude du bloc en traction-flexion

On reprend l'exemple précédent du bloc en traction-flexion. On rappelle qu'on considère ici des éléments  $\mathcal{P}_1$  en déplacement.

#### 5.3.1 Description de la discrétisation $h3$

Soit  $W_e$  l'ensemble des éléments d'interface. Les éléments de  $W_e$  sont regroupés en groupes disjoints de  $s$  éléments consécutifs. Notons  $W_e^s$  l'ensemble des groupes disjoints de  $s$  éléments consécutifs. Chaque groupe d'éléments  $w^s \in W_e^s$  devra être entièrement contenu dans une interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$ . Cette condition semble évidente car la définition d'un effort égal de part et d'autre d'un coin n'aurait pas de sens. Ce type de discrétisation suppose *a priori* que pour  $E \in \mathbf{E}$  et  $\forall E' \in \mathbf{V}_E$ ,  $\text{Card}(W_e \cap \Gamma_{EE'})$  est un multiple de  $s$ . Les efforts sont alors définis constants par groupe d'éléments de  $W_e^s$ . On définit alors les noeuds moyens d'interface comme les centres d'inertie des groupes d'éléments  $w^s \in W_e^s$ .

Afin d'étudier cette nouvelle discrétisation, on considère quatre maillages  $M_i$  pour les sous-structures (figure III.24).

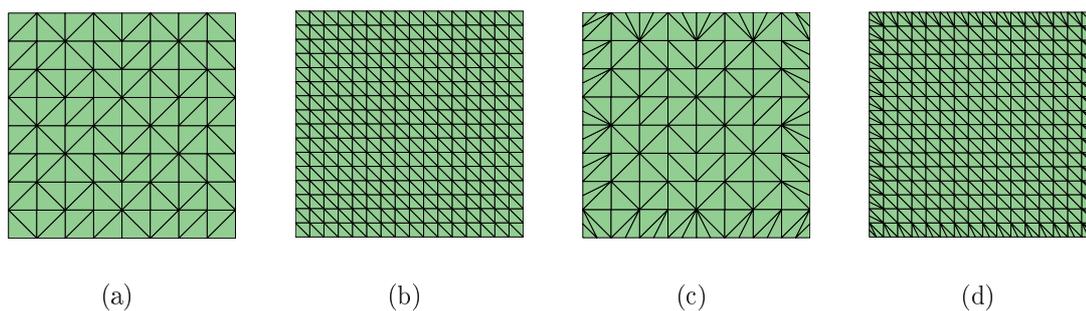


Figure III.24 – Différents types de maillage :  $M_1$ (a),  $M_2$ (b),  $M_3$ (c) et  $M_4$ (d)

Le maillage  $M_1$  est celui utilisé jusqu'à présent. Le maillage  $M_2$  est raffiné uniformément par rapport à  $M_1$ .  $M_3$  est raffiné uniquement sur le bord.  $M_4$  est un raffinement du maillage  $M_2$  sur le bord. Le tableau III.1 donne les caractéristiques de ces maillages.

Maillage	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
Nombre d'éléments par interface	8	16	16	32

Tableau III.1 – Caractéristiques des maillages locaux

On considère pour chacun de ces maillages une discrétisation sous-intégrée ou non des efforts. Nous noterons  $P_i^s$  les problèmes associés. L'indice  $i$  correspond au maillage et l'exposant  $s$  au degré de sous-intégration. Notons que  $s = 1$  correspond à la discrétisation h2, sans sous-intégration. Dans le tableau III.2 sont indiquées les propriétés de ces problèmes.

Maillage	$P_1^1$	$P_2^1$	$P_3^1$	$P_4^1$	$P_1^2$	$P_2^2$	$P_3^2$	$P_4^2$
Inconnues par interfaces	16	32	32	64	8	16	16	32
Dimension du problème dual	96	192	192	384	48	96	96	192

Tableau III.2 – Caractéristiques des problèmes duaux  $P_i^s$

### 5.3.2 Comparaison des solutions en déplacement

On veut comparer les solutions des problèmes sous-intégrés et non sous-intégrés. Nous observerons ici le déplacement associé à l'effort sous-intégré, c'est-à-dire le déplacement aux points milieux pour  $s = 1$  et la moyenne des déplacements sur deux points milieux consécutifs pour  $s = 2$ .

#### ■ Influence de la sous-intégration

Sur la figure III.25, on compare les problèmes  $P_2^1$  et  $P_2^2$ , de même maillage  $M_2$  mais avec ou sans intégration. On remarque une bonne concordance des solutions en déplacement. La solution du problème sous-intégré n'est en rien altérée.

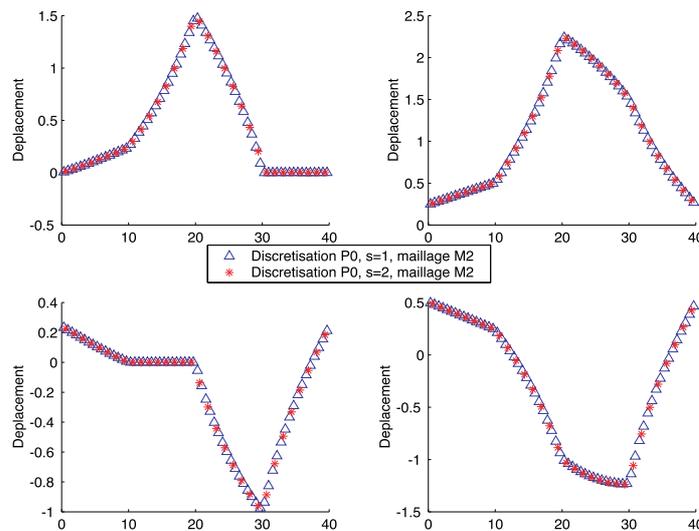


Figure III.25 – Comparaison des déplacements horizontaux des solutions  $P_2^1$  et  $P_2^2$

### ■ Influence du type de raffinement

On peut à présent comparer sur la figure III.26 les problèmes  $P_1^1$  et  $P_3^2$  pour voir l'influence du type de raffinement. La conclusion est la même. La distribution des déplacements moyens d'interface est donc très satisfaisante et un raffinement du maillage localisé près des frontières des sous-structures est amplement suffisant.

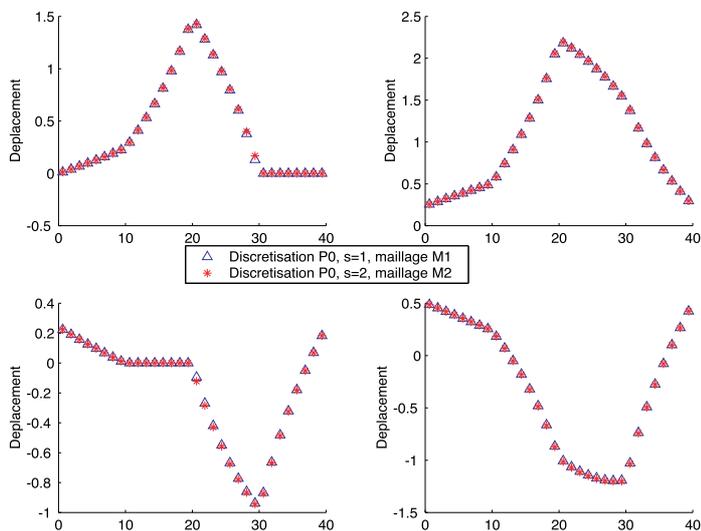


Figure III.26 – Comparaison des déplacements horizontaux des solutions  $P_1^1$  et  $P_3^2$

### ■ Vers un degré de sous-intégration élevé

Sur la figure III.27, on observe la solution des problèmes  $P_3^2$  et  $P_3^8$  en terme de déplacements moyens d'interface. La solution reste tout à fait correcte pour un problème global de dimension très faible. La qualité de la solution obtenue semble donc très peu sensible au maillage.

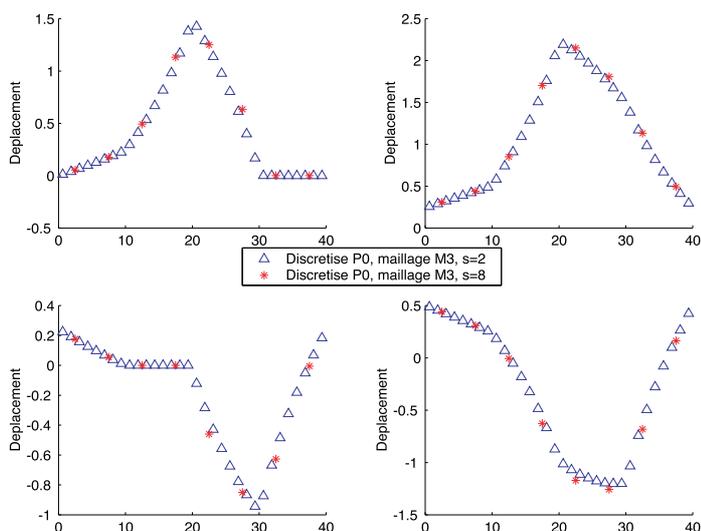


Figure III.27 – Comparaison des déplacements horizontaux des solutions  $P_3^2$  et  $P_3^8$

### 5.3.3 Comparaison des solutions en effort

#### ■ Influence de la sous-intégration

Le plus intéressant est d'observer les conséquences de la nouvelle discrétisation sur les distributions d'efforts. On compare sur la figure III.28 les problèmes  $P_2^1$  et  $P_2^2$ , de même maillage mais avec ou sans intégration. On remarque que la nouvelle discrétisation ne présente **aucun phénomène parasite en effort**. La solution est parfaitement régulière.

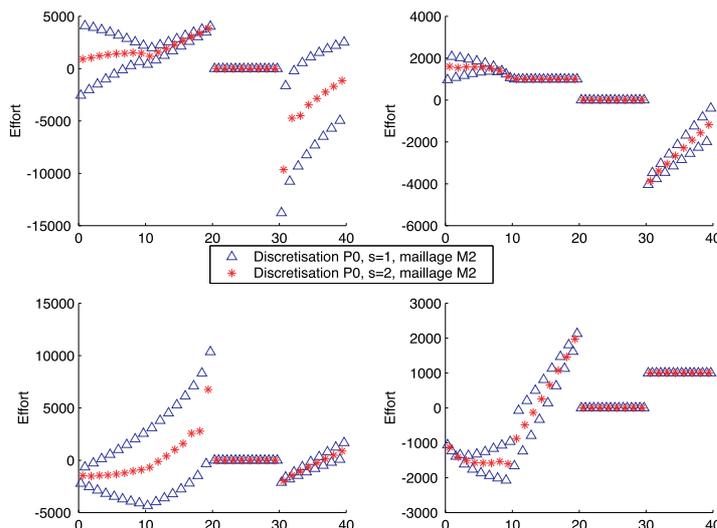


Figure III.28 – Comparaison des efforts horizontaux des solutions  $P_2^1$  et  $P_2^2$

#### ■ Influence du type de raffinement

Sur la figure III.29, on compare les problèmes  $P_1^1$  et  $P_3^2$  pour voir l'influence du type de raffinement. On observe encore qu'**un raffinement du maillage près des frontières des sous-structures suffit amplement**.

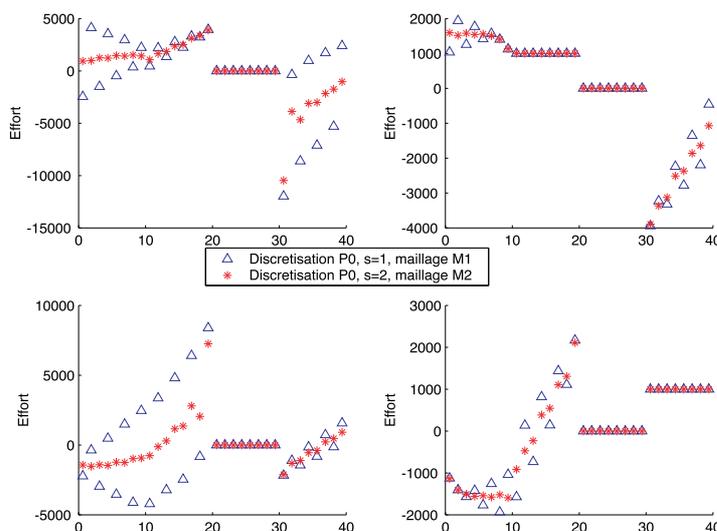


Figure III.29 – Comparaison des efforts horizontaux des solutions  $P_1^1$  et  $P_3^2$

### ■ Vers un degré de sous-intégration élevé

Sur la figure III.30, on peut observer la solution en effort des problèmes  $P_3^2$  et  $P_3^8$ , qui reste satisfaisante pour des maillages grossiers.

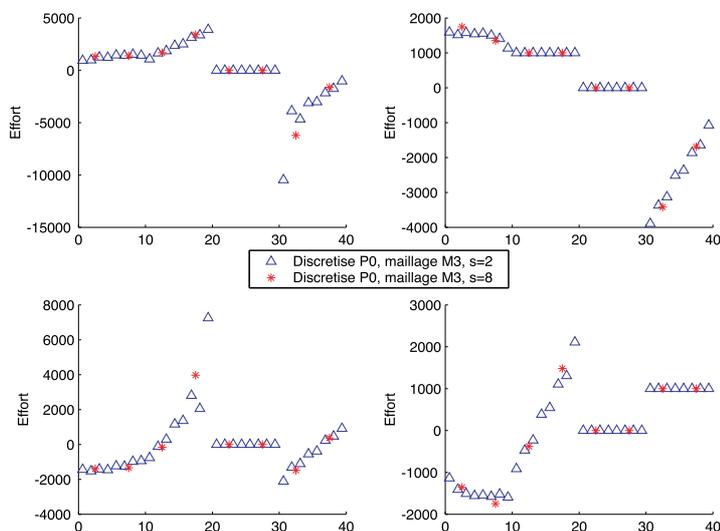


Figure III.30 – Comparaison des efforts horizontaux des solutions  $P_3^2$  et  $P_3^8$

### 5.3.4 Conditionnement des problèmes duaux

#### ■ Influence du type de raffinement

On peut voir sur le tableau III.3 le conditionnement des problèmes duaux  $P_i^s$ . On

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
$s = 1$	$6.9 \times 10^4$	$1.8 \times 10^6$	$1.1 \times 10^6$	$3.0 \times 10^7$
$s = 2$	$5.1 \times 10^2$	$1.5 \times 10^3$	$2.7 \times 10^3$	$7.0 \times 10^3$

Tableau III.3 – Conditionnement des problèmes duaux  $P_i^s$

observe un très mauvais conditionnement des problèmes non sous-intégrés ( $s = 1$ ). Avec une sous-intégration ( $s = 2$ ), on observe une **nette amélioration du conditionnement** qui de plus est beaucoup moins sensible au raffinement. On observe également que l'influence du type de raffinement (uniforme  $M_2$  ou localisé sur le bord  $M_3$ ) sur le conditionnement est négligeable. Tous ces résultats permettent de conclure qu'un **raffinement des sous-structures localisé proche des frontières permet d'obtenir d'excellents résultats, sans pour autant augmenter de manière significative la dimension des problèmes locaux sur les sous-structures**.

#### ■ Influence des degrés de raffinement et sous-intégration

On peut voir à présent sur le tableau III.5 l'influence du degré de raffinement aux bords en comparant les maillages  $M_1$ ,  $M_3$ ,  $M_5$  et  $M_7$  (figures (III.24,III.31)) pour plusieurs degrés de sous-intégration.

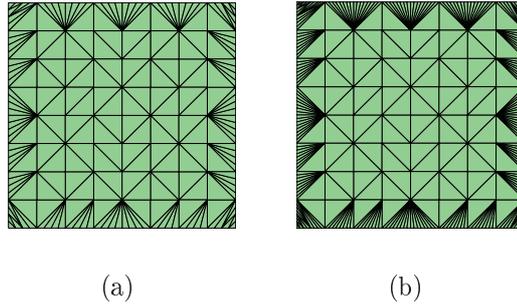


Figure III.31 – Maillages raffinés au bord :  $M_5$ (a) et  $M_7$ (b)

Maillage	$M_5$	$M_7$
Nombre d'éléments par interface	32	64

Tableau III.4 – Caractéristiques des maillages locaux

	$M_1$	$M_3$	$M_5$	$M_7$
$s = 1$	$6.9 \times 10^4$	$1.1 \times 10^6$	$1.9 \times 10^7$	$3.2 \times 10^8$
$s = 2$	$5.1 \times 10^2$	$2.7 \times 10^3$	$1.3 \times 10^4$	$6.4 \times 10^4$
$s = 4$	$1.4 \times 10^2$	$4.8 \times 10^2$	$2.4 \times 10^3$	$1.2 \times 10^4$
$s = 8$	×	$1.6 \times 10^2$	$5.1 \times 10^2$	$2.5 \times 10^3$
$s = 16$	×	×	$1.7 \times 10^2$	$5.4 \times 10^2$
$s = 32$	×	×	×	$1.8 \times 10^2$

Tableau III.5 – Conditionnement des problèmes duaux  $P_i^s$

Il est intéressant d'observer le tableau en diagonale. On peut alors tracer sur la courbe III.32 l'influence du degré de sous-intégration sur le conditionnement du problème dual de taille fixée. On peut remarquer qu'**une seule sous-intégration suffit amplement** ( $s = 2$ ).

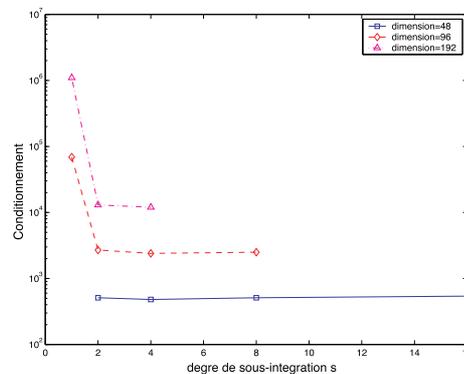


Figure III.32 – Influence de  $s$  à dimension de problème fixée

### 5.3.5 Conséquence sur la convergence de la méthode LATIN

On peut voir sur la figure III.33 la conséquence sur la convergence de l'algorithme itératif LATIN où l'on compare les problèmes  $P_1^1$  et  $P_2^2$ . On observe le gain conséquent en terme de taux de convergence apporté par la nouvelle discrétisation h3. Sur la figure III.34, on compare la convergence du problème  $P_2^2$  à celle du problème avec discrétisation h1 sur maillage  $M_1$ . On remarque que **le taux de convergence est encore meilleur que pour la discrétisation classique h1**.

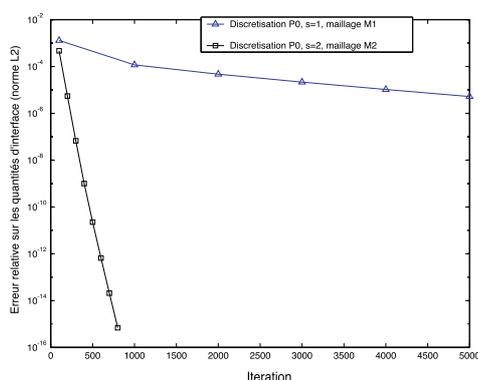


Figure III.33 – Convergence de la méthode LATIN monoéchelle pour les problèmes  $P_1^1$  et  $P_2^2$

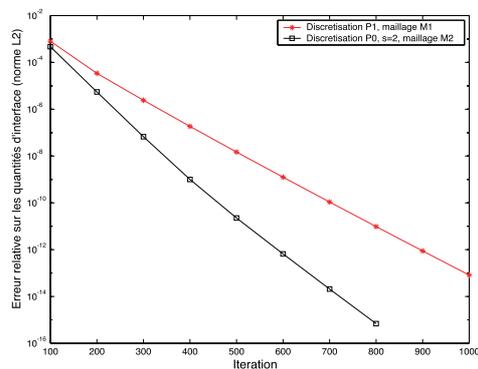


Figure III.34 – Convergence de la méthode LATIN monoéchelle pour le problème  $P_2^2$  et le problème associé à une discrétisation h1 sur le maillage  $M_1$

## 5.4 Retour au problème de contact

### 5.4.1 Observation des solutions discrétisées

On reprend les mêmes notations pour décrire les différents problèmes associés aux discrétisations sous-intégrées ou non. On trace respectivement sur les figures III.35, III.36 et III.37 les solutions en efforts tangentiels et normaux des problèmes  $P_1^2$ ,  $P_2^2$  et  $P_3^2$ .

On s'aperçoit que dans le cas d'un contact avec frottement, le problème des oscillations est également résolu. L'influence du type de raffinement est un peu plus marquée mais reste négligeable par rapport aux solutions sans sous-intégration. Ceci est tout simplement dû au mauvais aspect des éléments de coin dans les maillages  $M_3$  et  $M_4$ . La solution  $P_1^2$ , avec 4 inconnues d'efforts par interface donne déjà une solution très satisfaisante.

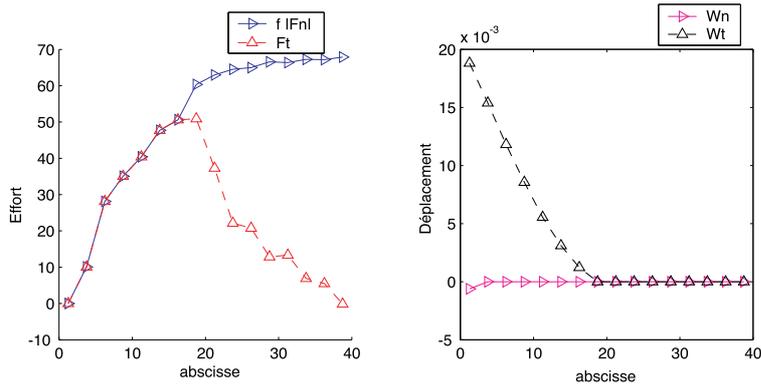


Figure III.35 – Solution sur l’interface de contact pour  $P_1^2$

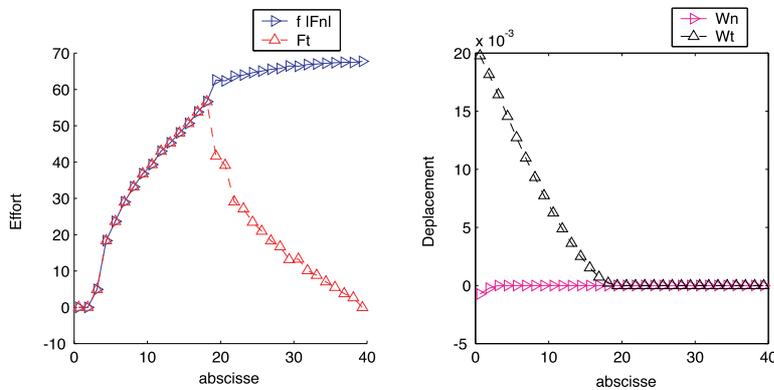


Figure III.36 – Solution sur l’interface de contact pour  $P_2^2$

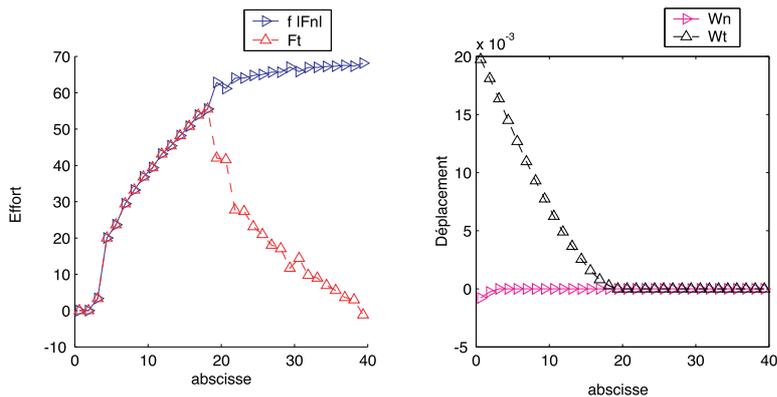


Figure III.37 – Solution sur l’interface de contact pour  $P_3^2$

### 5.4.2 Convergence de l’algorithme monoéchelle

La figure III.38 montre la convergence des solutions de  $P_1^1$ ,  $P_2^2$  et  $P_3^2$ . On voit que le type de raffinement influence très peu la convergence. Ceci est simplement dû au fait que l’approche de résolution itérative présentée jusqu’à présent capte difficilement les grandes longueurs de variation de la solution et que celles-ci contribuent grandement à

l'erreur. L'effet de la nouvelle discrétisation ne se fait sentir qu'après la convergence de cette partie de la solution.

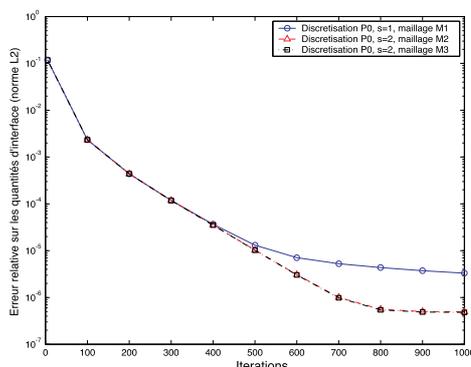


Figure III.38 – Convergence des problèmes  $P_1^1$ ,  $P_2^2$  et  $P_3^3$

### 5.4.3 Convergence de l'algorithme multiéchelle

Etant données les conclusions précédentes, en utilisant une stratégie multiéchelle, on devrait pouvoir combiner les deux avantages : multiéchelle et nouvelle discrétisation. Sur la figure III.39 sont représentées les courbes de convergence pour les problèmes  $P_1^1$  monoéchelle,  $P_1^1$  multiéchelle et  $P_2^2$  multiéchelle.

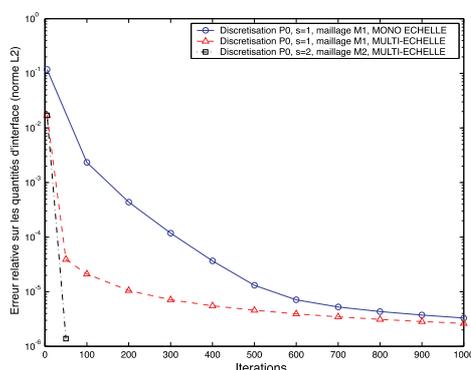


Figure III.39 – Convergence des problèmes  $P_1^1$  monoéchelle,  $P_1^1$  multiéchelle et  $P_2^2$  multiéchelle

On remarque que la version multiéchelle sans sous-intégration est plus rapide que la version monoéchelle lors des premières itérations mais ralentit fortement pour la convergence des faibles longueurs de variation en raison de la présence des modes parasites. En revanche, la version multiéchelle de la sous-intégration présente une convergence extrêmement rapide et une belle régularité de la solution, sans posséder les inconvénients d'une discrétisation standard h1.

## 5.5 Mise en oeuvre pratique de la nouvelle discrétisation

On a vu qu'une seule sous-intégration suffisait amplement à obtenir une bonne régularité de la solution et une convergence rapide de l'algorithme itératif. De plus,

la sur-discrétisation des sous-structures n'a d'intérêt que près des frontières. Nous proposons ici quelques solutions pratiques de mise en oeuvre de cette nouvelle discrétisation. Pour rendre le plus transparent possible cette sous-intégration et conserver le même nombre d'inconnues d'interface, nous proposons de prendre la discrétisation des efforts comme référence et d'opérer une sur-discrétisation des sous-structures en modifiant les éléments proches des frontières.

### 5.5.1 Dédoublage des éléments au voisinage de la frontière : "version h"

On peut simplement envisager de diviser les éléments en contact avec la frontière.

#### ■ Cas d'un maillage TRI3 en 2D

Le premier cas de la figure III.40(a) est un élément en contact avec uniquement une interface. Le TRI3 est alors transformé en deux TRI3. Dans le cas d'un coin, deux solutions sont possibles. La première est la plus pratique puisqu'on peut traiter une interface après l'autre sans avoir à garder l'histoire de la modification. De plus elle donne trois TRI3. Cependant, la seconde possibilité offre un meilleur "aspect ratio" mais donne un TRI3 et un QUA4.

#### ■ Cas d'un maillage QUA4 en 2D

Pour un élément en contact avec uniquement une interface (premier cas de la figure III.40(b)), on transforme le QUA4 en 3 TRI3 avec cependant un bon aspect ratio. Pour le coin (second cas de la figure III.40(b)), deux possibilités sont envisagées.

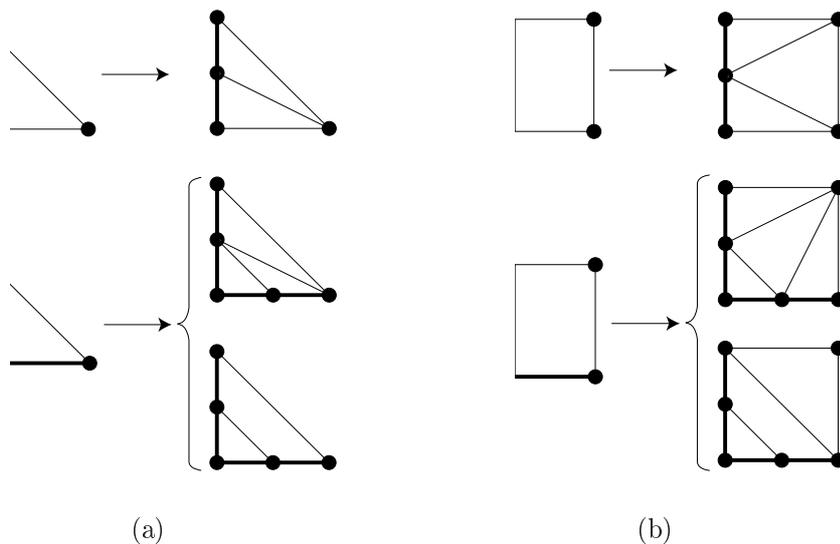


Figure III.40 – Modification des maillages TRI3 (a) et QUA4 (b) au bord

### 5.5.2 Création de nouveaux éléments au voisinage de la frontière : "version p"

Le degré d'interpolation des efforts étant fixé, on peut également envisager la création de nouveaux éléments d'interface avec une interpolation de degré supérieur des déplacements sur les éléments de la frontière. Sur la figure III.41 sont présentés les nouveaux éléments définis à partir des TRI3 (a) et des QUA4 (b). Les nouvelles fonctions de forme peuvent être vues comme des fonctions bulles.

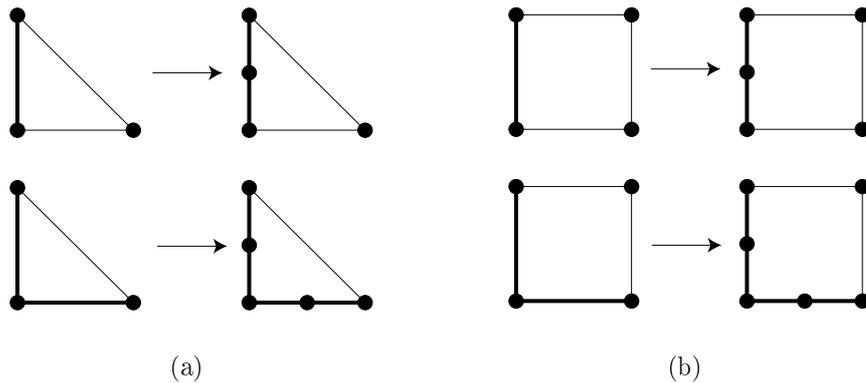


Figure III.41 – Nouveaux éléments triangles (a) et quadrangles (b) au bord

## Bilan

Dans ce chapitre, on a pu mettre en évidence les conséquences d'un mauvais choix de discrétisation dans les approches de décomposition de domaine mixte. Une méthode de discrétisation "physiquement" et "numériquement" saine des interefforts, simple de mise en oeuvre, a également été proposée. Elle permet non seulement d'obtenir une solution discrétisée d'une excellente qualité mais également d'augmenter de manière conséquente les performances des algorithmes itératifs de résolution en fournissant un problème discrétisé mieux conditionné.



# Chapitre IV

## Introduction d'une troisième échelle pour la résolution du problème "macro"

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Décomposition à trois échelles de <math>\Omega \times (0,T)</math></b>	<b>130</b>
<b>2</b>	<b>Stratégie de calcul à trois échelles</b>	<b>131</b>
2.1	Partitionnement en super-cellules et super-interfaces	131
2.2	Reformulation du problème macro	132
2.3	Description à deux échelles des quantités macro sur l'espace-temps $\Omega \times (0,T)$	133
2.4	Stratégie de résolution à deux échelles du problème macro	135
2.5	Convergence de l'algorithme	140
2.6	Exemple : portique hétérogène	141
<b>3</b>	<b>Approximation du problème macro</b>	<b>144</b>
3.1	Approximation du problème macro formulé en déplacement	145
3.2	Choix de l'espace d'approximation des déplacements	145
3.3	Propriété importante de l'approximation	147
3.4	Exemple : portique hétérogène	148

---

A chaque itération de la stratégie de calcul multiéchelle présentée dans le chapitre II, on doit résoudre le problème "macro" suivant :

**Problème IV.1** Trouver  $(\underline{F}^M, \widetilde{W}^M)$  qui vérifie

– l'admissibilité statique :  $\underline{F}^M \in \mathfrak{F}_{h,ad}^{(0,T),M}$

– l'admissibilité cinématique :  $\widetilde{W}^M \in \mathfrak{W}_{h,0}^{(0,T),M}$

– la relation de comportement homogénéisé sur l'espace-temps :

$$\underline{F}_{E|(0,T)}^M = \mathbf{L}_E^F(\widetilde{W}_{E|(0,T)}^M) + \widehat{F}_{E,d|(0,T)}^M, \quad E \in \mathbf{E}$$

Si le nombre de sous-structures d'espace-temps  $\Omega_E \times (t'_i, t'_{i+1})$  devient élevé, le coût de résolution de ce problème peut devenir prohibitif. Par exemple, pour le problème d'une structure composée de  $1000 \times 1000$  cellules et avec un choix d'espaces macro classique, la dimension du problème macro est alors de quelques dizaines de millions ; une approche directe pour la résolution de ce problème semble déraisonnable.

Deux approches basées sur l'introduction d'une troisième échelle sont introduites afin de réduire le coût de résolution de ce problème macro. La première approche est une véritable stratégie de calcul à trois échelles qui consiste à résoudre le problème macroscopique par une méthode de décomposition de domaine mixte inspirée de la stratégie de calcul à deux échelles. La deuxième approche part du constat que certaines zones ne nécessitent qu'un calcul grossier ; ce sont les zones où la solution ne présente que de faibles gradients. L'idée est alors d'approximer le problème macro en introduisant une cinématique approchée de la troisième échelle.

## 1 Décomposition à trois échelles de $\Omega \times (0, T)$

Au niveau spatial, les cellules  $\Omega_E$  sont regroupées en "super-cellules" disjointes  $\Omega_{E_M} = \bigcup_{E \in \mathbf{E}_{E_M}} \Omega_E$ ,  $E_M \in \mathbf{E}_M$ , telles que  $\bigcup_{E_M \in \mathbf{E}_M} \mathbf{E}_{E_M} = \mathbf{E}$  (figure IV.1).

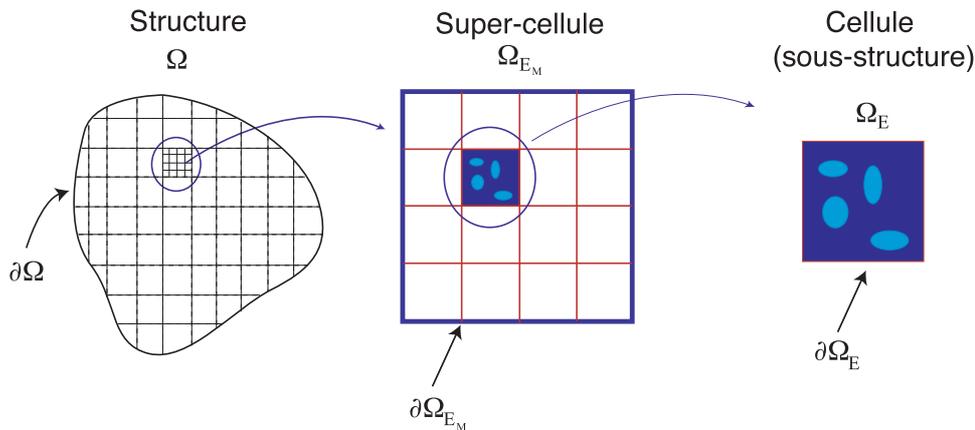


Figure IV.1 – Décomposition à trois échelles de la structure  $\Omega$

La troisième échelle est définie au niveau spatial par la longueur caractéristique  $L_{M,M}$  des super-cellules. On notera  $\Gamma_{E_M} = (\bigcup_{E \in \mathbf{E}_{E_M}} \partial\Omega_E)$  l'ensemble des interfaces

contenues dans la super-cellule  $E_M$ . Au niveau temporel, elle est associée à une nouvelle partition de l'intervalle de temps  $\mathcal{T}_{h''} = \{I_i^{M,M} = (t''_i, t''_{i+1})\}_{i=0}^{N''-1}$ , avec  $t''_0 = 0 < t''_1 < \dots < t''_N = T$ , contenue dans la partition précédemment introduite  $\mathcal{T}_{h'}$  (figure IV.2).

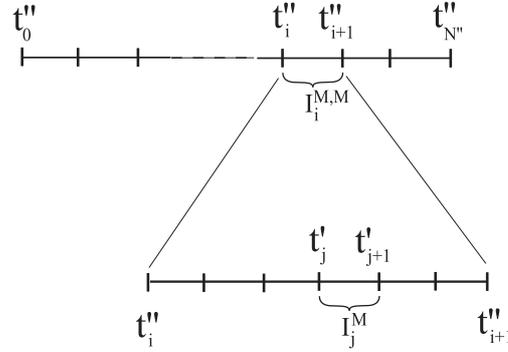


Figure IV.2 – Partition "super-macro"  $\mathcal{T}_{h''}$  de l'intervalle d'étude  $(0, T)$

## 2 Stratégie de calcul à trois échelles

L'idée est ici de résoudre le problème macro par une technique de décomposition de domaine inspirée de la stratégie à deux échelles proposée dans le chapitre II.

### 2.1 Partitionnement en super-cellules et super-interfaces

La structure est vue comme un assemblage de constituants simples : les super-cellules et les super-interfaces. Chaque constituant possède ses propres variables et équations. Une super-cellule  $\Omega_{E_M}$ ,  $E_M \in \mathbf{E}_M$ , est soumise à l'action de son environnement (les super-interfaces voisines), définie par une distribution d'efforts  $\underline{f}_{E_M}^M$  et de déplacements  $\underline{\tilde{w}}_{E_M}^M$  sur sa frontière  $\partial\Omega_{E_M}$ . Une super-interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$  entre deux super-cellules  $\Omega_{E_M}$  et  $\Omega_{E'_M}$  génère une relation de comportement entre  $(\underline{f}_{E_M}^M, \underline{f}_{E'_M}^M)$  et  $(\underline{\tilde{w}}_{E_M}^M, \underline{\tilde{w}}_{E'_M}^M)$ . Les déplacements  $\underline{\tilde{w}}_{E_M}^M$  et les efforts  $\underline{f}_{E_M}^M$  sur la super-interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$  appartiennent respectivement aux espaces  $\mathbf{V}_{h, E_M E'_M}^{(0,T), M}$  et  $\mathbf{S}_{h, E_M E'_M}^{(0,T), M}$ . On introduit également l'ensemble  $\mathbf{V}_{E_M}$  des super-cellules voisines de  $E_M$ ,  $\mathbf{V}_{E_M} = \{E'_M \in \{\mathbf{E}_M, E_1, E_2\} / \text{mes}(\partial\Omega_{E_M} \cap \partial\Omega_{E'_M}) \neq 0\}$ . Étendu à l'ensemble des voisins de  $E_M$ , cela conduit aux espaces produits  $\mathbf{V}_{h, E_M}^{(0,T), M}$  et  $\mathbf{S}_{h, E_M}^{(0,T), M}$ . Les variables associées à une super-cellule  $E_M$  sont les efforts macro  $\underline{F}_{E_M}^M = \{\underline{F}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}_{E_M}} \in \mathbf{F}_{h, E_M}^{(0,T), M}$ , les déplacements macro  $\underline{\tilde{W}}_{E_M}^M = \{\underline{\tilde{W}}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}_{E_M}} \in \mathbf{W}_{h, E_M}^{(0,T), M}$ , ainsi que les déplacements  $\underline{\tilde{w}}_{E_M}^M$  et efforts  $\underline{f}_{E_M}^M$  sur sa frontière. L'ensemble de ces variables sera noté  $\mathbf{s}_{E_M}^M = (\underline{\tilde{W}}_{E_M}^M, \underline{\tilde{w}}_{E_M}^M, \underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M) \in \mathbf{S}_{h, E_M}^{(0,T), M}$ .

## 2.2 Reformulation du problème macro

### 2.2.1 Notations et préliminaires

Pour  $E_M \in \mathbf{E}_M$ , on note  $\mathbf{E}_{h,E_M}^{(0,T),M} = \mathcal{W}_{h,E_M}^{(0,T),M} \times \mathcal{V}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  et  $\mathbf{F}_{h,E_M}^{(0,T),M} = \mathcal{F}_{h,E_M}^{(0,T),M} \times \mathcal{G}_{h,E_M}^{(0,T),M}$ .

**Définition IV.1** Un couple  $(\widetilde{W}_{E_M}^M, \widetilde{w}_{E_M}^M) \in \mathbf{E}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  est dit cinématiquement admissible s'il vérifie :

- $\forall E \in \mathbf{E}_{E_M}, \forall E' \in (\mathbf{V}_E \cap \mathbf{E}_{E_M}), \widetilde{W}_E^M = \widetilde{W}_{E'}^M$  sur  $\Gamma_{EE'}$  (interfaces intérieures)
- $\widetilde{W}_{E_M}^M = \widetilde{w}_{E_M}^M$  sur  $\partial\Omega_{E_M}$

On notera  $\mathbf{E}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}$  l'espace correspondant.

**Définition IV.2** Un couple  $(\underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M) \in \mathbf{F}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  est dit statiquement admissible s'il vérifie :

- $\forall E \in \mathbf{E}_{E_M}, \forall E' \in (\mathbf{V}_E \cap \mathbf{E}_{E_M}), \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0$  sur  $\Gamma_{EE'}$  (interfaces intérieures)
- $\underline{F}_{E_M}^M = \underline{f}_{E_M}^M$  sur  $\partial\Omega_{E_M}$

On notera  $\mathbf{F}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}$  l'espace correspondant.

**Proposition IV.3** Un couple  $(\widetilde{W}_{E_M}^M, \widetilde{w}_{E_M}^M) \in \mathbf{E}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  est cinématiquement admissible si et seulement si

$$\forall (\underline{F}^{M^*}, \underline{f}^{M^*}) \in \mathbf{F}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}, \sum_{E \in \mathbf{E}_{E_M} \partial\Omega_E \times (0,T)} \int \underline{F}^{M^*} \cdot \dot{\widetilde{W}}_{E_M}^M ds dt = \int_{\partial\Omega_{E_M} \times (0,T)} \underline{f}^{M^*} \cdot \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M ds dt$$

**Proposition IV.4** Un couple  $(\underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M) \in \mathbf{F}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  est statiquement admissible si et seulement si

$$\forall (\widetilde{W}^{M^*}, \widetilde{w}^{M^*}) \in \mathbf{E}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}, \sum_{E \in \mathbf{E}_{E_M} \partial\Omega_E \times [0,T]} \int \underline{F}_{E_M}^M \cdot \dot{\widetilde{W}}^{M^*} ds dt = \int_{\partial\Omega_{E_M} \times [0,T]} \underline{f}_{E_M}^M \cdot \dot{\widetilde{w}}^{M^*} ds dt$$

**Définition IV.5**  $\mathbf{s}_{E_M}^M = (\widetilde{W}_{E_M}^M, \widetilde{w}_{E_M}^M, \underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M) \in \mathbf{S}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  est dit  $E_M$ -admissible s'il vérifie :

- l'admissibilité statique :  $(\underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M) \in \mathbf{F}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}$
- l'admissibilité cinématique :  $(\widetilde{W}_{E_M}^M, \widetilde{w}_{E_M}^M) \in \mathbf{E}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}$

L'espace correspondant est noté  $\mathbf{S}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}$ .

### 2.2.2 Problème macro

Le problème macro de référence IV.1 peut alors être réécrit de la manière suivante :

**Problème IV.2** Trouver  $\mathbf{s}^M = \{\mathbf{s}_{E_M}^M\}_{E_M \in \mathbf{E}_M}$  avec  $\mathbf{s}_{E_M}^M = (\widetilde{\underline{W}}_{E_M}^M, \widetilde{\underline{w}}_{E_M}^M, \underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M) \in \mathbf{S}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  qui vérifie :

- l' $E_M$ -admissibilité de  $\mathbf{s}_{E_M}^M$ ,  $E_M \in \mathbf{E}_M$ ,
- le comportement des super-interfaces, les conditions aux limites étant des cas particuliers,
- la relation de comportement.

## 2.3 Description à deux échelles des quantités macro sur l'espace-temps $\Omega \times (0,T)$

### 2.3.1 Définition des variables "super-macro"

L'idée est de construire des espaces "super-macro" pour les efforts et déplacements sur la frontière de  $\Omega_{E_M}$  de la même manière qu'on avait construit l'espace macro sur une cellule. Considérons l'interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$  entre deux super-cellules  $E_M$  et  $E'_M$  ; on choisit alors des espaces de dimension finie dans lesquels les déplacements et efforts super-macro seront recherchés, soit

$$\mathbf{V}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M,M} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M,M}$$

Ces espaces sont pris compatibles avec la dualité force-vitesse et tels que la forme bilinéaire "travail super-macro" définie sur  $\mathbf{W}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M,M} \times \mathfrak{F}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M,M}$  soit non dégénérée. De la même manière que pour les parties macro, les parties super-macro sont définies comme les meilleures approximations au sens de la forme bilinéaire travail sur l'interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$  :

**Définition IV.6** Les parties super-macro  $(\underline{w}^{M,M}, \underline{f}^{M,M}) \in \mathbf{V}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M,M} \times \mathfrak{S}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M,M}$  de  $(\underline{w}^M, \underline{f}^M) \in \mathbf{V}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M} \times \mathfrak{S}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M}$  sont définies par les expressions suivantes :

$$\int_{\Gamma_{E_M E'_M} \times [0,T]} \underline{f}^{M,M*} \cdot (\dot{\underline{w}}^{M,M} - \dot{\underline{w}}^M) ds dt = 0, \quad \forall \underline{f}^{M,M*} \in \mathfrak{S}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M,M}$$

$$\int_{\Gamma_{E_M E'_M} \times [0,T]} (\underline{f}^{M,M} - \underline{f}^M) \cdot \dot{\underline{w}}^{M,M*} ds dt = 0, \quad \forall \underline{w}^{M,M*} \in \mathbf{V}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M,M}$$

La définition IV.6 conduit naturellement à la propriété de découplage suivante du travail macro sur l'interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$  :

$$\int_{\Gamma_{E_M E'_M} \times [0, T]} \underline{f}^M \cdot \underline{\dot{w}}^M ds dt = \int_{\Gamma_{E_M E'_M} \times [0, T]} (\underline{f}^{M, M} \cdot \underline{\dot{w}}^{M, M} + \underline{f}^{M, m} \cdot \underline{\dot{w}}^{M, m}) ds dt \quad (\text{IV.1})$$

où on a posé

$$\underline{f}^{M, m} = \underline{f}^M - \underline{f}^{M, M} \quad \text{et} \quad \underline{w}^{M, m} = \underline{w}^M - \underline{w}^{M, M}$$

Les espaces super-macro associés à l'ensemble des interfaces des super-cellules seront notés  $\mathcal{V}_h^{(0, T), M, M}$  et  $\mathcal{G}_h^{(0, T), M, M}$ .

### ■ Choix des espaces super-macro

Au niveau spatial, on prendra classiquement des fonctions affines par interface super-macro pour  $\underline{w}^{M, M}$  et  $\underline{f}^{M, M}$  (voir chapitre II, paragraphe 2.2). Au niveau temporel, on se contentera de choisir des fonctions de type  $\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}^{(0, T)}$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{N'}$ , pour la partition macro  $\mathcal{T}_h$ . Finalement,  $\underline{w}^{M, M}(\underline{x}, t)$  et  $\underline{f}^{M, M}(\underline{x}, t)$  sur  $\Gamma_{E_M E'_M} \times I_i^M$ ,  $i \in \{0, \dots, N' - 1\}$ , s'écriront sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n_x^{M, M}} \sum_{l=1}^{p_i} \alpha_{k, l} \underline{e}_k^{M, M}(\underline{x}) f_l^{M, M}(t), \quad \alpha_{k, l} \in \mathbb{R}$$

Un choix de fonctions  $\{\underline{e}_k^{M, M}\}_{k=1}^{n_x^{M, M}}$  pour le cas 2D est représenté sur la figure IV.3(a). La figure IV.3(b) représente schématiquement une distribution macro et sa partie super-macro sur une interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$ .

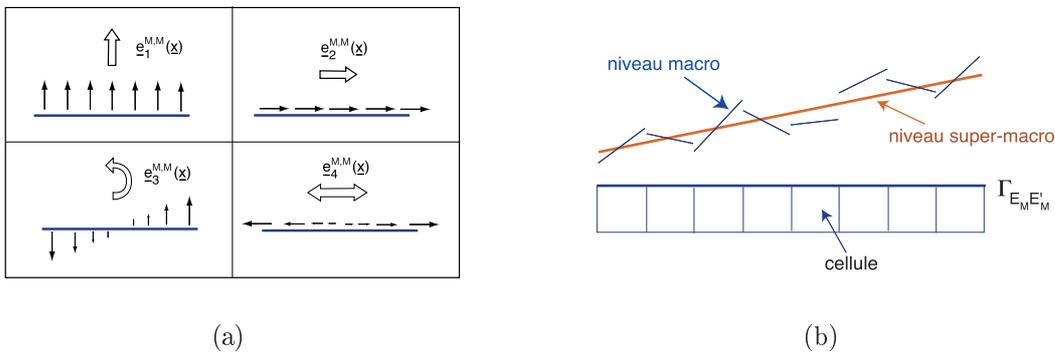


Figure IV.3 – Description des parties macro et super-macro sur une interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$  : (a) fonctions de base super-macro, (b) distribution macro et partie super-macro associée

### 2.3.2 Admissibilité des quantités super-macro

Les efforts super-macro  $\underline{f}^{M,M}$  seront assujettis à vérifier systématiquement les conditions de transmission sur les interfaces des super-cellules, y compris les conditions aux limites sur  $\partial_2\Omega$ . L'espace correspondant est noté  $\mathfrak{G}_{h,ad}^{(0,T),M,M}$ . De même, on définit l'espace  $\mathfrak{V}_{h,ad}^{(0,T),M,M}$  des déplacements super-macro vérifiant les conditions de transmission sur les interfaces des super-cellules, y compris les conditions aux limites sur  $\partial_1\Omega$ . On définit  $\mathfrak{V}_{h,0}^{(0,T),M,M}$  l'espace correspondant à  $\mathfrak{V}_{h,ad}^{(0,T),M,M}$  pour des conditions aux limites homogènes. Les déplacements super-macro  $\underline{\tilde{w}}^{M,M}$  seront cherchés systématiquement dans l'espace  $\mathfrak{V}_{h,0}^{(0,T),M,M}$ .

*Remarque IV.1* On peut ici imposer l'admissibilité à la fois sur les efforts et les déplacements puisque le multiplicateur  $\underline{\tilde{w}}^M$  est continu aux interfaces.

## 2.4 Stratégie de résolution à deux échelles du problème macro

### 2.4.1 Principe

La résolution du problème macro est calquée sur la stratégie à 2 échelles introduite précédemment. Pour cela, le problème est reformulé de la manière suivante :

**Problème IV.3** Trouver  $\mathbf{s}^M = \{\mathbf{s}_{E_M}^M\}_{E_M \in \mathbf{E}_M}$  avec  $\mathbf{s}_{E_M}^M = (\underline{\tilde{W}}_{E_M}^M, \underline{\tilde{w}}_{E_M}^M, \underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M) \in \mathfrak{S}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  qui vérifie :

$$\mathbf{A}_d^M \left\| \begin{array}{l} - \text{l}'E_M\text{-admissibilité de } \mathbf{s}_{E_M}^M, E_M \in \mathbf{E}_M : \mathbf{s}_{E_M}^M \in \mathfrak{S}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M} \\ - \text{l'admissibilité de } \underline{f}^{M,M} : \underline{f}^{M,M} \in \mathfrak{G}_{h,ad}^{(0,T),M,M} \\ - \text{l'admissibilité de } \underline{\tilde{w}}^{M,M} : \underline{\tilde{w}}^{M,M} \in \mathfrak{V}_{h,0}^{(0,T),M,M} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{\Gamma}^M \left\| \begin{array}{l} - \text{le comportement des interfaces macro} \\ - \text{la relation de comportement homogénéisé : } \forall E \in \mathbf{E}, \\ \underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\underline{\tilde{W}}_E^M) + \underline{\hat{F}}_{E,d}^M \end{array} \right.$$

On applique alors la méthode LATIN afin de résoudre de manière itérative le problème macro IV.3 ; elle consiste à construire successivement des approximations de la solution dans  $\mathbf{\Gamma}^M$  puis dans  $\mathbf{A}_d^M$  en se donnant des directions de recherche  $\mathbf{E}^{M+}$  et  $\mathbf{E}^{M-}$ . Chaque itération de l'algorithme comprend deux étapes, dites locale et linéaire.

### 2.4.2 Etape locale macro à l'itération m

Le problème consiste à construire  $\widehat{\mathbf{s}}_{m+1/2}^M \in \mathbf{\Gamma}^M$  connaissant  $\mathbf{s}_m^M \in \mathbf{A}_d^M$ . ( $\widehat{\mathbf{s}}_{m+1/2}^M - \mathbf{s}_m^M$ ) doit suivre une direction de recherche  $\mathbf{E}^{M+}$  ; pour chaque sous-structure  $E_M \in$

$\mathbf{E}_M$ ,

$$\begin{aligned} \forall \widetilde{W}_{E_M}^{M^*} \in \mathcal{W}_{h,E_M}^{(0,T),M}, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}_M} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left\{ (\widehat{F}_E^M - \underline{F}_E^M) + \mathbf{L}_E^F (\widehat{W}_E^M - \widetilde{W}_E^M) \right\} \cdot \dot{\widetilde{W}}_E^{M^*} ds dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

et pour chaque interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$ ,  $E'_M \in \mathbf{V}_{E_M}$  :

$$\begin{aligned} \forall \widetilde{w}_{E_M}^{M^*} \in \mathcal{V}_{h,E_M E'_M}^{(0,T),M}, \\ \int_{\Gamma_{E_M E'_M} \times [0,T]} \left\{ (\widehat{f}_{E_M}^M - \underline{f}_{E_M}^M) - \mathbf{I}^M (\dot{\widehat{w}}_{E_M}^M - \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M) \right\} \cdot \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^{M^*} ds dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

où l'indice  $m$  a été omis.  $\mathbf{I}^M$  est un paramètre toujours interprété comme une viscosité "micro" de la super-interface. Un choix très simple pour  $\mathbf{I}^M$  consiste à prendre l'opérateur  $\mathbf{h}^{-1}$  de la version à deux échelles multiplié par un facteur  $L_M/L_{M,M}$ . Le choix de ce paramètre pourrait être automatisé.

### 2.4.3 Etape linéaire macro à l'itération $m$

Le problème consiste à construire  $\mathbf{s}_{m+1}^M \in \mathbf{A}_d^M$  en connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_{m+1/2}^M \in \Gamma^M$ .  $(\mathbf{s}_{m+1}^M - \widehat{\mathbf{s}}_{m+1/2}^M)$  doit suivre une direction de recherche  $\mathbf{E}^{M^-}$  :

$$\begin{aligned} \forall \widetilde{w}^{M^*} \in \mathcal{V}_h^{(0,T),M,m} \cup \mathcal{V}_{h,0}^{(0,T),M,M}, \\ \sum_{E_M \in \mathbf{E}_M} \int_{\partial\Omega_{E_M} \times [0,T]} \left\{ (\underline{f}_{E_M}^M - \widehat{f}_{E_M}^M) + \mathbf{I}^M (\dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M - \dot{\widehat{w}}_{E_M}^M) \right\} \cdot \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^{M^*} ds dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

et pour chaque sous-structure  $E_M \in \mathbf{E}_M$  :

$$\begin{aligned} \forall \widetilde{W}_{E_M}^{M^*} \in \mathcal{W}_{h,E_M}^{(0,T),M}, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}_{E_M}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left\{ (\underline{F}_E^M - \widehat{F}_E^M) - \mathbf{L}_E^F (\widetilde{W}_E^M - \widehat{W}_E^M) \right\} \cdot \dot{\widetilde{W}}_E^{M^*} ds dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

où l'indice  $m$  a été omis. Ce problème peut être séparé en deux parties : un problème macro défini sur chaque super-cellule, ainsi qu'un problème "super-macro" défini sur tout le domaine d'espace-temps étudié. Remarquons pour cela que la relation (IV.4)

peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{\tilde{w}}^{M^*} \in \mathbf{V}_h^{(0,T),M}, \\
 \sum_{E_M \in \mathbf{E}_M} \int_{\partial\Omega_{E_M} \times [0,T]} \left\{ (\underline{f}_{E_M}^M - \underline{\tilde{f}}_{E_M}^M) + \mathbf{I}^M (\underline{\dot{w}}_{E_M}^M - \underline{\dot{\tilde{w}}}_{E_M}^M) \right\} \cdot \underline{\dot{w}}_{E_M}^{M^*} ds dt = \\
 \sum_{E_M \in \mathbf{E}_M} \int_{\partial\Omega_{E_M} \times [0,T]} \underline{\tilde{f}}_{E_M}^{M,M} \cdot \underline{\dot{w}}_{E_M}^{M^*} ds dt
 \end{aligned} \tag{IV.6}$$

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{\tilde{w}}^{M,M^*} \in \mathbf{V}_{h,0}^{(0,T),M,M}, \quad \sum_{E_M \in \mathbf{E}_M} \int_{\partial\Omega_{E_M} \times [0,T]} \underline{\dot{w}}_{E_M}^{M,M^*} \cdot \underline{f}_{E_M}^M ds dt = \\
 \sum_{E_M \in \mathbf{E}_M} \int_{(\partial\Omega_{E_M} \cap \partial_2\Omega) \times [0,T]} \underline{\dot{w}}_{E_M}^{M,M^*} \cdot \underline{F}_d ds dt
 \end{aligned} \tag{IV.7}$$

où le multiplicateur de Lagrange  $\underline{\tilde{f}}^{M,M}$  appartient à l'espace  $\mathfrak{S}_h^{(0,T),M,M}$  des efforts super-macro sans contrainte particulière. L'équation (IV.7) exprime l'admissibilité des efforts super-macro au sens faible.

#### 2.4.3.1 Problème macro défini sur $\Omega_{E_M} \times (0,T)$ :

Le problème macro associé à la super-cellule  $\Omega_{E_M}$  peut être écrit :

**Problème IV.4** Trouver  $\mathbf{s}_{E_M}^M = (\underline{\tilde{W}}_{E_M}^M, \underline{\tilde{w}}_{E_M}^M, \underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M) \in \mathbf{S}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  qui vérifie :

- $\mathbf{s}_{E_M}^M$  est  $E_M$ -admissible
- les directions de recherche (IV.6) et (IV.5).

Le problème macro IV.4 est linéaire. Comme la direction de recherche (IV.6) est locale à la frontière  $\partial\Omega_{E_M}$ , il conduit à une série de problèmes indépendants par super-cellule.

#### ■ Formulation variationnelle du problème macro défini sur $\Omega_{E_M} \times (0,T)$

Formulons le problème macro sur le couple  $(\underline{\tilde{W}}_{E_M}^M, \underline{\tilde{w}}_{E_M}^M)$ . Pour cela, on écrit l'admissibilité statique de  $(\underline{F}_{E_M}^M, \underline{f}_{E_M}^M)$  sous forme faible, définie dans la proposition IV.4, en y injectant les directions de recherche (IV.6) et (IV.5). Le problème s'écrit alors :

**Problème IV.5** Trouver  $(\widetilde{W}_{E_M}^M, \widetilde{w}_{E_M}^M) \in \mathbf{E}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall (\widetilde{W}_{E_M}^{M*}, \widetilde{w}_{E_M}^{M*}) \in \mathbf{E}_{h,E_M,ad}^{(0,T),M}, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}_{E_M} \partial \Omega_E \times [0,T]} \int \dot{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \mathbf{L}_E^F(\widetilde{W}_E^M) ds dt + \int_{\partial \Omega_{E_M} \times [0,T]} \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^{M*} \cdot \mathbf{I}^M \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M ds dt = \\ - \sum_{E \in \mathbf{E}_{E_M} \partial \Omega_E \times [0,T]} \int \dot{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \widehat{\underline{F}}_{E,d}^M ds dt + \\ \int_{\partial \Omega_{E_M} \times [0,T]} \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^{M*} \cdot \left( \widehat{\underline{f}}_{-E_M}^M + \mathbf{I}^M \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M + \widetilde{\underline{f}}_{-E_M}^{M,M} \right) ds dt \end{aligned}$$

■ Définition d'opérateurs homogénéisés sur  $\Omega_{E_M} \times (0,T)$

**Proposition IV.7** Si  $\mathbf{I}^M$  est défini positif, alors le problème macro (IV.5) admet une et une seule solution telle que

$$\underline{f}_{-E_M|(\cdot,T)}^{M,M} = \mathbf{L}_{E_M}^f(\widetilde{\underline{f}}_{-E_M|(\cdot,T)}^{M,M}) + \widehat{\underline{f}}_{-E_M,d}^{M,M} \quad (\text{IV.8})$$

$$\widetilde{\underline{w}}_{-E_M|(\cdot,T)}^{M,M} = \mathbf{L}_{E_M}^w(\widetilde{\underline{f}}_{-E_M|(\cdot,T)}^{M,M}) + \widehat{\underline{w}}_{-E_M,d}^{M,M} \quad (\text{IV.9})$$

où  $\widetilde{\underline{f}}_{-E_M}^{M,M} \in \mathfrak{G}_{h,E_M}^{(0,T),M,M}$ ,  $\widehat{\underline{f}}_{-E_M,d}^{M,M}$  et  $\widehat{\underline{w}}_{-E_M,d}^{M,M}$  dépendent de  $\widehat{\mathbf{s}}_{E_M}^M$  et de  $\{\widehat{\underline{F}}_{E,d}^M\}_{E \in \mathbf{E}_{E_M}}$ .

□ **Preuve** : Le problème étant linéaire et de dimension finie, il reste à montrer l'unicité de la solution. La différence entre deux solutions de (IV.5), notée  $(\Delta \widetilde{W}_{E_M}^M, \Delta \widetilde{w}_{E_M}^M)$ , vérifie clairement

$$\sum_{E \in \mathbf{E}_{E_M} \partial \Omega_E \times [0,T]} \int \Delta \dot{\widetilde{W}}_E^M \cdot \mathbf{L}_E^F(\Delta \widetilde{W}_E^M) ds dt + \int_{\partial \Omega_{E_M} \times [0,T]} \Delta \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M \cdot \mathbf{I}^M \Delta \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M ds dt = 0$$

Etant donné la propriété de positivité de  $\mathbf{L}_E^F$  montrée dans la proposition II.17 et la positivité de  $\mathbf{I}^M$ , on a séparément

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega_E \times [0,T]} \Delta \dot{\widetilde{W}}_E^M \cdot \mathbf{L}_E^F(\Delta \widetilde{W}_E^M) ds dt = 0, \quad \forall E \in \mathbf{E}_{E_M} \\ \text{et} \quad \int_{\partial \Omega_{E_M} \times [0,T]} \Delta \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M \cdot \mathbf{I}^M \Delta \dot{\widetilde{w}}_{E_M}^M ds dt = 0 \end{aligned}$$

D'après les propriétés de  $\mathbf{L}_E^F$ , la première équation nous fournit que  $\forall E \in \mathbf{E}_{E_M}$ ,  $\Delta \widetilde{W}_E^M \in \mathfrak{R}_{h,E}^{W,(0,T),M}$ . Comme  $\mathbf{I}^M$  est défini positif, la seconde équation nous donne  $\Delta \widetilde{w}_{E_M}^M = 0$  sur  $\partial \Omega_{E_M}$ . Le couple  $(\Delta \widetilde{W}_{E_M}^M, \Delta \widetilde{w}_{E_M}^M)$  étant admissible,  $\Delta \widetilde{W}_{E_M}^M$  est donc

défini par des modes rigides par sous-structure s'annulant sur le bord  $\partial\Omega_{E_M}$ . Il s'annule donc sur les cellules adjacentes à  $\partial\Omega_{E_M}$  et par continuité sur les interfaces intérieures, il s'annule sur toutes les interfaces. Ceci termine la preuve.  $\square$

$\mathbf{L}_{E_M}^f$  (resp.  $\mathbf{L}_{E_M}^w$ ) est un opérateur linéaire de  $\mathfrak{G}_{h,E_M}^{(0,T),M,M}$  dans  $\mathfrak{G}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  (resp. de  $\mathfrak{G}_{h,E_M}^{(0,T),M}$  dans  $\mathfrak{V}_{h,E_M}^{(0,T),M}$ ). Ils peuvent être interprétés comme des opérateurs de comportement homogénéisé sur la super-structure d'espace-temps  $\Omega_{E_M} \times (0,T)$ . Ils sont calculés en résolvant une série de problèmes macro sur  $\Omega_{E_M} \times (0,T)$  où l'on prend successivement pour  $\underline{f}_{E_M}^{M,M}$  les fonctions de base de  $\mathfrak{G}_{h,E_M}^{(0,T),M,M}$ . On peut montrer que les opérateurs  $\mathbf{L}_{E_M}^f$  et  $\mathbf{L}_{E_M}^w$  possèdent des propriétés identiques à celles des opérateurs  $\mathbf{L}_E^F$  et  $\mathbf{L}_E^W$  définies dans les propositions II.17 et II.18. En particulier, on peut déduire des relations de comportement homogénéisé (IV.8) et (IV.9) la relation de comportement homogénéisé suivante :

$$\underline{f}_{E_M| (0,T)}^{M,M} = \mathbf{L}_{E_M}^f \mathbf{L}_{E_M}^{w^{-1}} (\underline{\tilde{w}}_{E_M| (0,T)}^{M,M}) + \widehat{\underline{f}}_{E_M,d| (0,T)}^{M,M} - \mathbf{L}_{E_M}^f \mathbf{L}_{E_M}^{w^{-1}} (\widehat{\underline{w}}_{E_M,d| (0,T)}^{M,M})$$

Le problème macro est semblable au problème macro de la stratégie à deux échelles à ceci près qu'un terme de "viscosité" bord est ajouté et que les chargements sont plus complexes. Son traitement ne pose aucune difficulté particulière.

### 2.4.3.2 Le problème super-macro :

Le problème super-macro peut être formulé de la manière suivante :

**Problème IV.6** Trouver  $(\underline{f}^{M,M}, \underline{\tilde{w}}^{M,M})$  vérifiant

- l'admissibilité statique :  $\underline{f}^{M,M} \in \mathfrak{G}_{h,ad}^{(0,T),M,M}$
  - l'admissibilité cinématique :  $\underline{\tilde{w}}^{M,M} \in \mathfrak{V}_{h,0}^{(0,T),M,M}$
  - la relation de comportement homogénéisé sur l'espace-temps :  $\forall E_M \in \mathbf{E}_M$ ,
- $$\underline{f}_{E_M}^{M,M} = \mathbf{L}_{E_M}^f \mathbf{L}_{E_M}^{w^{-1}} (\underline{\tilde{w}}_{E_M}^{M,M}) + \widehat{\underline{f}}_{E_M,d}^{M,M} - \mathbf{L}_{E_M}^f \mathbf{L}_{E_M}^{w^{-1}} (\widehat{\underline{w}}_{E_M,d}^{M,M}) \quad (\text{IV.10})$$

Ce problème peut être formulé simplement sur le déplacement super-macro  $\underline{\tilde{w}}^{M,M}$  en injectant la relation de comportement (IV.10) dans la relation d'admissibilité des efforts super-macro (IV.7). Ce problème possède exactement les mêmes propriétés que le problème macro défini dans la stratégie à deux échelles. En particulier, il admet une unique solution.

*Remarque IV.2* Ce problème est identique, dans sa structure, au problème macro défini dans la stratégie à deux échelles. On peut alors sans difficulté appliquer une technique de résolution itérative identique à celle présentée dans ce chapitre, ce qui conduirait à une stratégie à quatre échelles. D'un point de vue informatique, le programme pour la résolution du problème super-macro serait exactement le même que pour celle du problème macro.

### 2.4.3.3 Résolution de l'étape linéaire macro du problème macro :

On résout tout d'abord un ensemble de problèmes macro pour calculer  $\widehat{\underline{f}}_{E_M,d}^{M,M}$  et  $\widehat{\underline{w}}_{E_M,d}^{M,M}$ . Ces problèmes sont indépendants et conduisent donc à un nouveau degré de parallélisme. Connaissant ces champs, on résout un problème super-macro pour calculer  $(\underline{f}^{M,M}, \underline{w}^{M,M})$ . De la relation de comportement homogénéisé (IV.9) on en déduit le champ  $\widetilde{\underline{f}}^{M,M}$ . On peut alors résoudre un nouvel ensemble de problèmes macro afin d'obtenir la solution complète  $\mathbf{s}_{m+1}^M$  à l'itération  $m$ . L'algorithme de résolution à deux échelles du problème macro est synthétisé dans le tableau IV.1.

**Tableau IV.1** – Stratégie de calcul à deux échelles pour le problème macro (◻ : phase parallélisable)

---

- ▶ Pré-traitement :
  - ◻ actualisation de  $\mathbf{I}^M$  et calcul des opérateurs homogénéisés  $\mathbf{L}_{E_M}^f$  et  $\mathbf{L}_{E_M}^w$ 
    - assemblage du problème super-macro
- ▶ Initialisation  $\mathbf{s}_0^M \in \mathbf{A}_d^M$

Boucle sur  $m = 0 \dots m_{max}$  :

- ▶ Etape locale : calcul de  $\widehat{\mathbf{s}}_{m+1/2}^M \in \Gamma^M$ 
    - ◻ Résolution de problèmes locaux sur les super-interfaces  $\Gamma_{E_M E'_M}$ ,  $E_M \in \mathbf{E}_M$ ,  $E'_M \in \mathbf{V}_{E_M}$  :
      - calcul de  $(\widehat{\underline{f}}_{E_M, m+1/2}^M, \widehat{\underline{w}}_{E_M, m+1/2}^M)$  et  $(\widehat{\underline{f}}_{E'_M, m+1/2}^M, \widehat{\underline{w}}_{E'_M, m+1/2}^M)$
  - ▶ Etape linéaire : calcul de  $\mathbf{s}_{m+1}^M \in \mathbf{A}_d^M$ 
    - ◻ Résolution de problèmes macro définis sur  $\Omega_{E_M} \times (0, T)$ ,  $E_M \in \mathbf{E}_M$  :
      - calcul de  $\widehat{\underline{f}}_{E_M, d, m+1}^{M,M}$  et  $\widehat{\underline{w}}_{E_M, d, m+1}^{M,M}$
      - Résolution du problème super-macro défini sur  $\Omega \times (0, T)$  :
        - calcul de  $\widetilde{\underline{f}}_{m+1}^{M,M}$
      - ◻ Résolution de problèmes macro définis sur  $\Omega_{E_M} \times (0, T)$ ,  $E_M \in \mathbf{E}_M$
    - ▶ Critère d'arrêt basé sur  $\|\mathbf{s}_{m+1}^M - \widehat{\mathbf{s}}_{m+1/2}^M\|$
- 

## 2.5 Convergence de l'algorithme

Cette stratégie de calcul vérifie les hypothèses usuelles de la méthode LATIN ; en effet, on a :

### Proposition IV.8

$$\begin{aligned}
 & \bullet \forall (\widehat{\mathbf{s}}^M, \widehat{\mathbf{s}}'^M) \in \Gamma^M \times \Gamma^M, \quad \langle (\widehat{\mathbf{s}}^M - \widehat{\mathbf{s}}'^M), (\widehat{\mathbf{s}}^M - \widehat{\mathbf{s}}'^M) \rangle \geq 0 \\
 & \bullet \forall (\mathbf{s}^M, \mathbf{s}'^M) \in \mathbf{A}_d^M \times \mathbf{A}_d^M, \quad \langle (\mathbf{s}^M - \mathbf{s}'^M), (\mathbf{s}^M - \mathbf{s}'^M) \rangle \leq 0
 \end{aligned} \tag{IV.11}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la forme bilinéaire de  $\mathbf{S}_h^{(0,T),M} \times \mathbf{S}_h^{(0,T),M}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{s}^M, \mathbf{s}'^M \rangle &= \sum_{E_M \in \mathbf{E}_M} \sum_{E \in \mathbf{E}_{E_M} \partial \Omega_E} \int_{[0,T]} \left( \underline{F}_E^M \cdot \underline{\dot{W}}_E^M + \underline{F}'_E^M \cdot \underline{\dot{W}}_E^M \right) ds dt - \\ &\sum_{E_M \in \mathbf{E}_M \partial \Omega_{E_M}} \int_{[0,T]} \left( \underline{f}_E^M \cdot \underline{\dot{w}}_E^M + \underline{f}'_E^M \cdot \underline{\dot{w}}_E^M \right) ds dt \end{aligned}$$

## 2.6 Exemple : portique hétérogène

On considère le problème 2D d'une structure composite contenant des fissures (figure IV.4), décrit au paragraphe 6.1 du chapitre II.

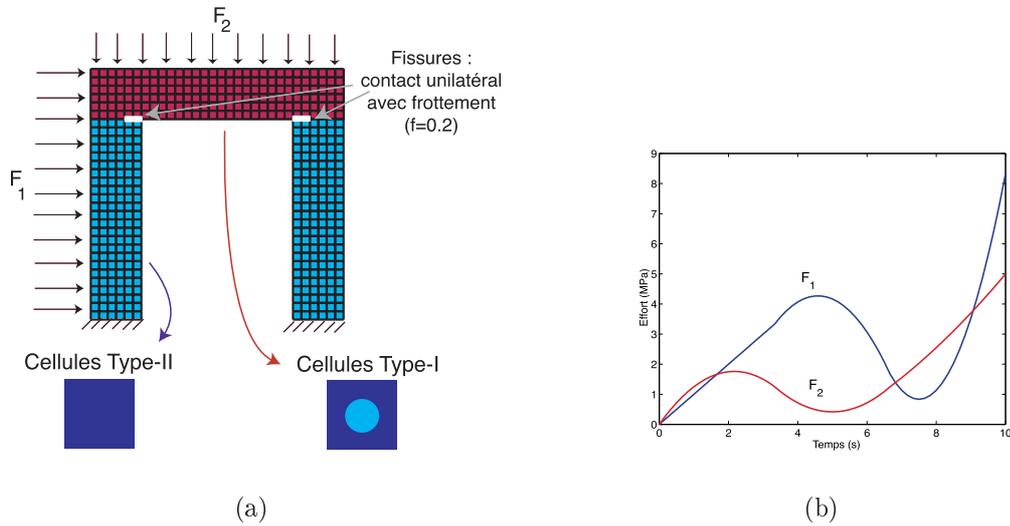


Figure IV.4 – Description du problème (a) et allure du chargement (b)

La figure IV.5 illustre la décomposition à trois niveaux de la structure testée dans cet exemple. La structure est donc décomposée en 13 super-cellules, chacune d'entre elles contenant 36 cellules. Les espaces super-macro contiennent les fonctions affines par super-interface au niveau spatial (4 fonctions par super-interface) et des fonctions de type  $\mathbf{Z}_2^{(0,T)}$  pour la partition  $\mathcal{T}_{h'}$  au niveau temporel. L'étape linéaire de la stratégie à deux échelles est résolue de manière incrémentale (voir algorithme du tableau II.1). La stratégie de résolution itérative présentée dans cette partie est donc appliquée à chaque problème macro défini sur  $\Omega \times I_i^M$ ,  $i \in \{0, \dots, N' - 1\}$ .

### ■ Description de la solution d'un problème macro

On s'intéresse tout d'abord au problème macro défini sur  $\Omega \times I_1^M$  de la première itération de la stratégie de calcul multiéchelle ( $n = 1$ ). La figure IV.6 illustre la solution de ce problème en terme de déplacements  $\tilde{w}^{M,M}$  et  $\tilde{w}^{M,m}$  des super-cellules. Les figures IV.7 et IV.8 montrent les déplacements macro  $\tilde{W}^M$  des cellules sur la

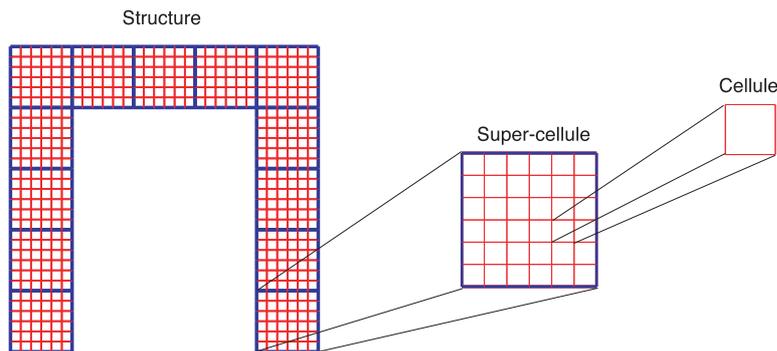


Figure IV.5 – Décomposition à trois échelles du portique

super-cellule 1 (en bas à gauche) ainsi que les déplacements  $\tilde{w}^{M,M}$  et  $\tilde{w}^{M,m}$  de sa frontière.

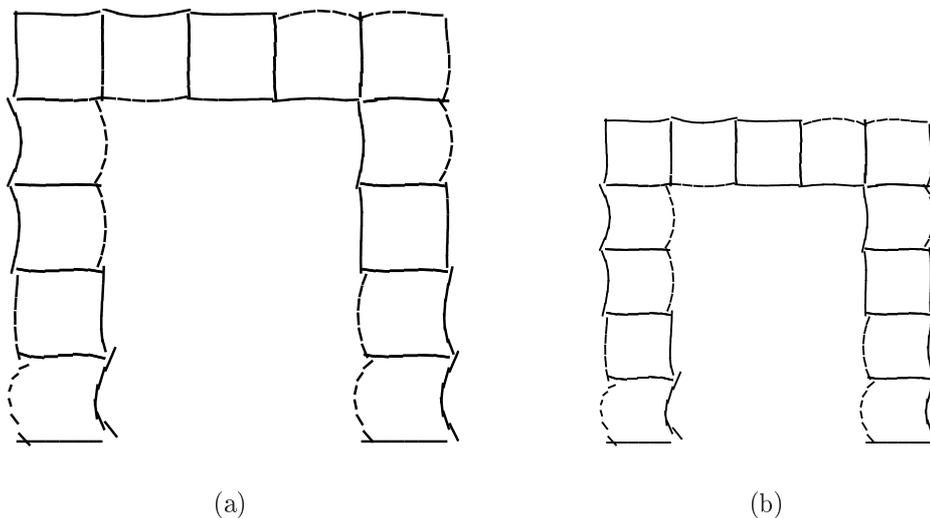


Figure IV.6 – Echelle super-macro - Itération  $n = 1$ : déplacements  $\tilde{w}^{M,M}$  amplifiés 100 fois (a) et  $\tilde{w}^{M,m}$  amplifiés 500 fois (b) à l'instant  $t = 3 s$

### ■ Convergence de l'algorithme

La figure IV.9 montre les courbes de convergence de l'algorithme pour la résolution des problèmes macro des itérations  $n = 1$  et  $n = 5$  de la stratégie de calcul multi-échelle (soit 6 courbes au total). L'erreur relative représente une estimation de la distance entre deux itérés de l'algorithme, soit

$$err_{m+1} = \frac{1}{2} \frac{\| \underline{f}_{m+1}^M - \widehat{\underline{f}}_{m+1/2}^M \|_{(0,T)}}{\| \underline{f}_{m+1}^M \|_{(0,T)}} + \frac{1}{2} \frac{\| \tilde{w}_{m+1}^M - \widehat{\tilde{w}}_{m+1/2}^M \|_{(0,T)}}{\| \tilde{w}_{m+1}^M \|_{(0,T)}}$$

où  $\| \cdot \|_{(0,T)}$  désigne les normes  $L^2$  classiques sur  $\mathfrak{G}_h^{(0,T),M}$  et  $\mathfrak{V}_h^{(0,T),M}$ . L'algorithme

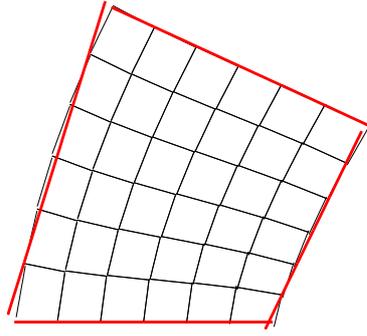


Figure IV.7 – Echelle macro - Itération  $n = 1$ : déplacements macro  $\widetilde{W}^M$  sur la super-cellule 1 et déplacements super-macro  $\widetilde{w}^{M,M}$  sur sa frontière à l'instant  $t = 3 s$  (amplification 100)

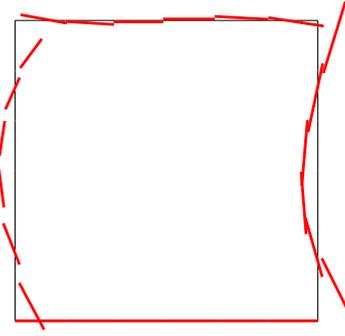


Figure IV.8 – Echelle macro - Itération  $n = 1$ : déplacements  $\widetilde{w}^{M,m}$  sur la frontière de la super-cellule 1 à l'instant  $t = 3 s$  (amplification 300)

est donc assez performant et son comportement ne semble pas dépendre de manière significative du problème macro traité.

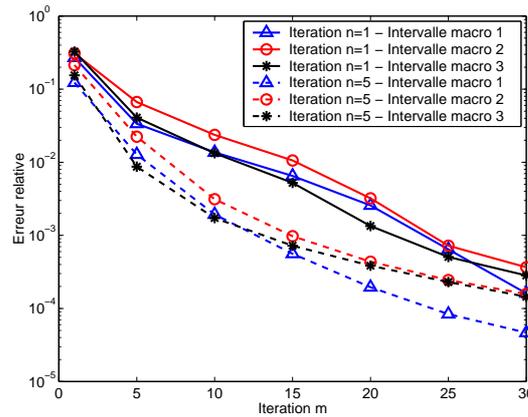


Figure IV.9 – Algorithme itératif de résolution des problèmes macro: courbes de convergence pour les problèmes macro de l'itération  $n = 1$  et  $n = 5$  de la stratégie de calcul multiéchelle

### ■ Influence de la précision de résolution du problème macro sur la convergence de la stratégie de calcul multiéchelle

Un critère  $err^c$  étant donné, la résolution itérative d'un problème macro est stoppée dès que  $err_{m+1} < err^c$ . La figure IV.10 montre les courbes de convergence de la stratégie de calcul multiéchelle pour différentes valeurs du critère d'arrêt  $err^c$ . La courbe de référence correspond à une résolution exacte des problèmes macro. Le tableau IV.2 donne le nombre moyen d'itérations effectuées pour résoudre les problèmes macro pour différentes valeurs du critère d'arrêt  $err^c$ .

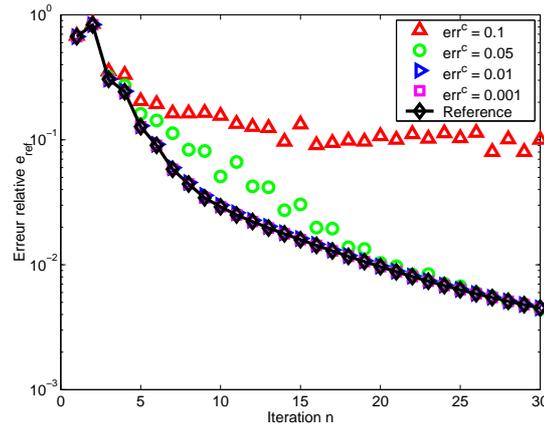


Figure IV.10 – Convergence de la stratégie de calcul multiéchelle en fonction du critère d'arrêt  $err^c$  de l'algorithme de résolution du problème macro

$err^c$	0.1	0.05	0.01	0.001
$m_{moyen}$	3	7	10	16

Tableau IV.2 – Nombre moyen d'itérations  $m_{moyen}$  de l'algorithme de résolution du problème macro pour atteindre le critère d'arrêt  $err^c$  (moyenne réalisée sur l'ensemble des problèmes macro résolus jusqu'à l'itération  $n = 30$ )

On observe donc qu'une **précision relativement faible sur la résolution des problèmes macro est suffisante pour obtenir la même convergence que la stratégie de calcul de référence**. Comme très peu d'itérations sont généralement suffisantes pour atteindre ce critère, la résolution du problème macro par cette nouvelle technique permet d'obtenir un gain en terme de temps de calcul et surtout d'envisager le traitement de problèmes macro de très grande taille.

*Remarque IV.3 Une résolution exacte d'un problème macro défini sur  $\Omega \times I_i^M$  demandait l'assemblage et la résolution d'un système de taille 12240. Avec la stratégie itérative proposée, on doit seulement résoudre à chaque itération un problème super-macro de taille 1440 et une série de problèmes macro de taille 1008.*

### 3 Approximation du problème macro

Comme on a pu le constater dans le paragraphe précédent, une approximation relativement grossière du problème macro semble suffisante pour conserver une bonne efficacité de la stratégie de calcul. Nous proposons donc ici une véritable technique d'approximation de ce problème.

### 3.1 Approximation du problème macro formulé en déplacement

L'idée est de chercher la solution du problème macro IV.1 sur un sous-espace  $\mathcal{W}_h^{(0,T),M,M}$  "bien choisi" de  $\mathcal{W}_h^{(0,T),M}$ . Le problème macro approximé s'écrira alors :

$$\begin{aligned}
 \textbf{Problème IV.7} \quad & \text{Trouver } \widetilde{\underline{W}}^{M,M} = \left\{ \widetilde{\underline{W}}_E^{M,M} \right\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{h,0}^{(0,T),M,M}, \text{ qui vérifie :} \\
 & \forall \widetilde{\underline{W}}^{M,M^*} \in \mathcal{W}_{h,0}^{(0,T),M,M}, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \dot{\widetilde{\underline{W}}}_E^{M,M^*} \cdot \left( \mathbf{L}_E^F(\widetilde{\underline{W}}_E^{M,M}) + \widehat{\underline{F}}_{E,d}^M \right) ds dt = \\
 & \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{(\partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega) \times [0,T]} \dot{\widetilde{\underline{W}}}_E^{M,M^*} \cdot \underline{F}_d ds dt
 \end{aligned}$$

La solution  $\widetilde{\underline{W}}^{M,M}$  du problème IV.7 est une approximation de la solution  $\widetilde{\underline{W}}^M$  du problème II.7.

### 3.2 Choix de l'espace d'approximation des déplacements

#### 3.2.1 Au niveau spatial

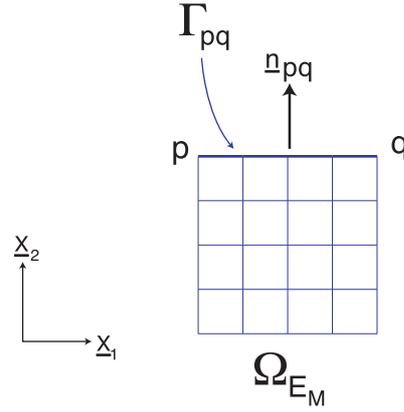
##### ■ Super-éléments finis

Les super-cellules peuvent être vues comme un maillage éléments finis grossier de  $\Omega$  constitué de quadrangles linéaires. La première idée est donc de considérer une super-cellule comme un super-élément fini. La cinématique super-macro est déterminée par les mouvements des noeuds de ces super-éléments. Le problème macro approximé IV.7 prend alors la forme d'un problème éléments finis standard. La matrice de rigidité et le second membre sont issus de l'assemblage de matrices de rigidité et seconds membres élémentaires calculés sur chaque super-cellule.

##### ■ Cinématique inspirée des milieux de Cosserat

Cette cinématique fut introduite dans [Loiseau et al., 2002] dans le cas de la statique. Elle est ici simplement étendue au cadre quasi-statique. On se place dans le cas 2D. L'espace macro sur les interfaces comprend la partie linéaire des efforts et des déplacements. Le nombre de fonctions spatiales macro par interface est donc  $n_x^M = 4$ . Les super-cellules sont encore considérées comme étant des quadrangles. Considérons une super-cellule  $\Omega_{E_M}$ . Une interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$  entre  $\Omega_{E_M}$  et  $\Omega_{E'_M}$ ,  $E'_M \in \mathbf{V}_{E_M}$ , est désignée par  $\Gamma_{pq}$ , p et q étant les noeuds extrémités de cette interface (figure IV.11).

A chaque côté  $\Gamma_{pq}$  reliant les noeuds p et q de ce quadrangle, on va associer des fonctions de base  $\{\underline{e}_{pq,k}^{M,M}\}_{k \in \{1, \dots, 4+(2)\}}$  définies sur l'ensemble des interfaces  $\Gamma_{E_M}$  de la super-cellule  $\Omega_{E_M}$ . Notons  $\{\underline{\varphi}_p^{(1)}, \underline{\varphi}_p^{(2)}\}$  les fonctions de forme éléments finis associées au noeud p pour les deux directions d'espace. La cinématique des interfaces intérieures est alors interpolée à partir du mouvement global de la face  $\Gamma_{pq}$ , comprenant les translations  $\{\underline{\varphi}_p^{(i)} + \underline{\varphi}_q^{(i)}\}_{i \in \{1,2\}}$ , la rotation  $\{\underline{\varphi}_q^{(2)} - \underline{\varphi}_p^{(2)}\}$  et l'extension  $\{\underline{\varphi}_q^{(1)} - \underline{\varphi}_p^{(1)}\}$ .


 Figure IV.11 – Interface  $\Gamma_{pq}$  d'une macro-cellule  $\Omega_{E_M}$ 

Les fonctions de base peuvent se décomposer sur la base macro  $\{\underline{e}_l^M\}_{l=1}^4$  de chaque interface  $\Gamma_{EE'}$ , soit

$$\underline{e}_{pq,k}^{M,M} = \sum_{l=1}^4 \beta_l^k \underline{e}_l^M = [\underline{e}_1^M \dots \underline{e}_4^M] \underline{\beta}^k, \quad \text{avec } \underline{\beta}^k \in \mathbb{R}^4$$

Notons  $\underline{n}_{pq}$  la normale sortante à la face  $\Gamma_{pq}$  et  $\underline{n}_2$  la normale caractéristique de l'interface  $\Gamma_{EE'}$  (vecteur propre de l'opérateur d'inertie de  $\Gamma_{EE'}$  associé à sa plus grande valeur propre). L'expression des coefficients des fonctions de base est la suivante :

$$\underline{\beta}^1 = |\underline{n}_{pq} \cdot \underline{n}_2| \begin{bmatrix} \langle \underline{e}_1^M, \underline{\varphi}_p^{(1)} + \underline{\varphi}_q^{(1)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ \langle \underline{e}_2^M, \underline{\varphi}_p^{(1)} + \underline{\varphi}_q^{(1)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\beta}^2 = |\underline{n}_{pq} \cdot \underline{n}_2| \begin{bmatrix} \langle \underline{e}_1^M, \underline{\varphi}_p^{(2)} + \underline{\varphi}_q^{(2)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ \langle \underline{e}_2^M, \underline{\varphi}_p^{(2)} + \underline{\varphi}_q^{(2)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\beta}^3 = |\underline{n}_{pq} \cdot \underline{n}_2| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \langle \underline{e}_3^M, \underline{\varphi}_q^{(2)} - \underline{\varphi}_p^{(2)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\beta}^4 = |\underline{n}_{pq} \cdot \underline{n}_2| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle \underline{e}_4^M, \underline{\varphi}_q^{(1)} - \underline{\varphi}_p^{(1)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\beta}^5 = |\underline{n}_{pq} \cdot \underline{n}_2| \begin{bmatrix} \langle \underline{e}_1^M, \underline{\varphi}_q^{(2)} - \underline{\varphi}_p^{(2)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ \langle \underline{e}_2^M, \underline{\varphi}_q^{(2)} - \underline{\varphi}_p^{(2)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\beta}^6 = |\underline{n}_{pq} \cdot \underline{n}_2| \begin{bmatrix} \langle \underline{e}_1^M, \underline{\varphi}_q^{(1)} - \underline{\varphi}_p^{(1)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ \langle \underline{e}_2^M, \underline{\varphi}_q^{(1)} - \underline{\varphi}_p^{(1)} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{EE'}}$  désigne le produit scalaire naturel sur  $[L^2(\Gamma_{EE'})]^2$ . Le coefficient  $|\underline{n}_{pq} \cdot \underline{n}_2|$  sert à pondérer l'influence du mouvement de  $\Gamma_{pq}$  sur le mouvement de  $\Gamma_{EE'}$  en

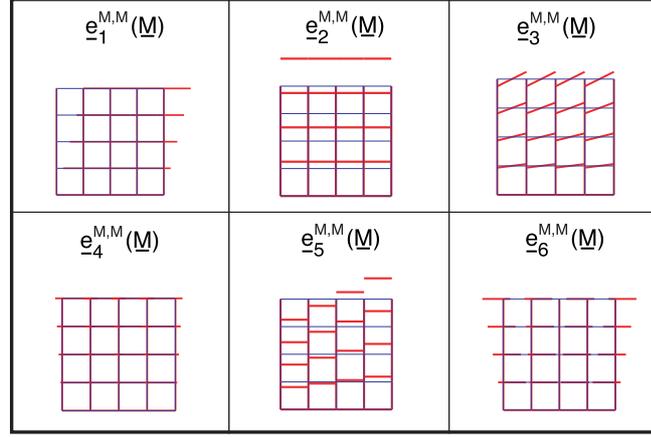


Figure IV.12 – Niveau spatial : fonctions de base "super-macro" associées à une interface  $\Gamma_{E_M E'_M}$  d'une macro-cellule  $\Omega_{E_M}$

fonction des orientations respectives de ces interfaces. On peut voir sur la figure IV.12 l'illustration des fonctions de base super-macro.

*Remarque IV.4* Dans le cas dégénéré où une interface macro  $\Gamma_{E_M E'_M}$  ne contient qu'une seule interface, on ne prendra que les 4 premières fonctions de base super-macro, et ce pour assurer l'indépendance des fonctions de base. Dans le cas où  $\Omega_{E_M}$  ne contient qu'une seule cellule  $\Omega_E$ , chacune de ses interfaces  $\Gamma_{E_M E'_M}$ ,  $E'_M \in \mathbf{V}_{E_M}$ , contient 4 fonctions de base macro. L'espace super-macro sur  $\Omega_{E_M}$  concorde alors avec l'espace macro de la cellule  $\Omega_E$ .

### 3.2.2 Au niveau temporel

L'espace  $\mathbf{W}_h^{(0,T),M,M}$  pourra être pris de type  $\mathbf{Z}_q^{(0,T)}$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{N''}$ , pour la partition  $\mathcal{T}_{h''}$  mais en pratique, on se contentera de garder la même description que pour les espaces macro, soit  $\mathbf{Z}_q^{(0,T)} = \mathbf{Z}_p^{(0,T)}$ .

## 3.3 Propriété importante de l'approximation

L'approximation présentée ici ne porte que sur le multiplicateur de Lagrange. **Le multiplicateur  $\widetilde{W}^M$  converge vers 0. L'approximer à chaque itération ne modifie donc pas la solution à convergence mais uniquement le taux de convergence de la stratégie de calcul.** Cette approximation revient en effet à choisir pour les efforts macro une admissibilité affaiblie à l'étape linéaire. Par exemple, en prenant  $\mathbf{W}_{h,ad}^{(0,T),M,M} = \{0\}$ , la stratégie est équivalente à la stratégie monoéchelle, bien sûr convergente.

*Remarque IV.5* Une autre approche plus conventionnelle consiste à approximer le problème macro II.8 formulé en effort. Dans ce cas, la solution de l'algorithme à convergence dépend de cette approximation. Cette approche n'a pas encore été testée.

### 3.4 Exemple : portique hétérogène

On considère le problème 2D du portique hétérogène décrit au paragraphe 6.1 du chapitre II. La figure IV.13 représente les maillages super-macro testés dans cet exemple. On remarquera que le maillage  $MM_1$ (a) est relativement grossier tandis que le maillage  $MM_2$ (b) l'est un peu moins. Le maillage  $MM_3$ (c) est équivalent au maillage  $MM_2$ (c) mais aucune approximation n'est réalisée proche des zones de coin et autour des fissures.

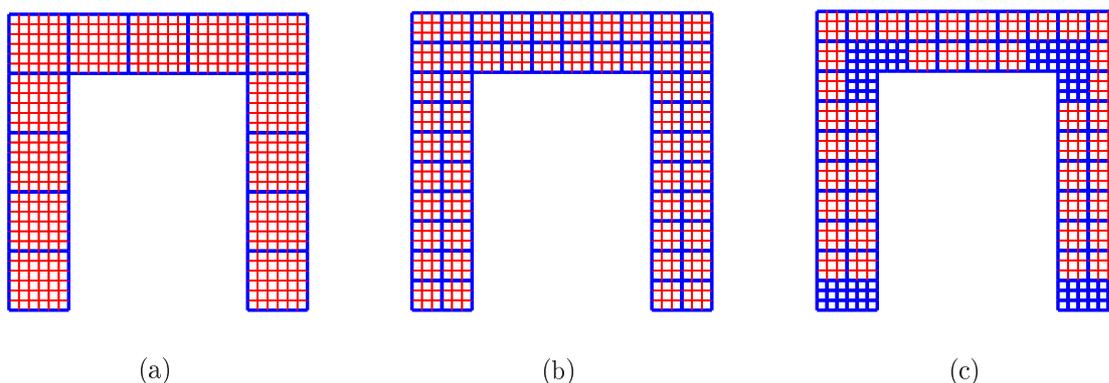


Figure IV.13 – Maillages super-macro :  $MM_1$ (a),  $MM_2$ (b) et  $MM_3$ (c)

Le problème macro est approximé par la cinématique de type milieu de Cosserat. Au niveau spatial, on aura donc 6 fonctions de base par interface macro, excepté dans les zones où le maillage super-macro correspond au maillage macro où l'on prendra uniquement 4 fonctions de base par interface. La figure IV.14 montre l'évolution de l'erreur relative par rapport à la solution de référence en fonction des itérations de la stratégie de calcul et ce pour les différents types d'approximation associés aux différents maillages super-macro. La courbe de référence correspond à une résolution exacte des problèmes macro. Le tableau IV.3 indique l'erreur pour les différents maillages après 10 itérations ainsi que la taille du problème macro correspondant.

Maillage super-macro	Taille du problème macro	Erreur après 10 itérations
<i>Ref</i>	36720	$3.2 \times 10^{-2}$
$MM_1$	2160	$7.0 \times 10^{-2}$
$MM_2$	7128	$4.2 \times 10^{-2}$
$MM_3$	12636	$3.8 \times 10^{-2}$

Tableau IV.3 – Comparaison des maillages super-macro : taille du problème macro et erreur après 10 itérations de la stratégie de calcul

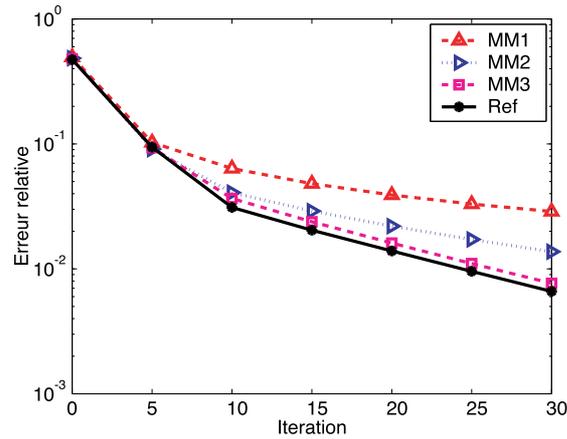


Figure IV.14 – Evolution de l’erreur basée sur les quantités d’interface en fonction des itérations pour les différents maillages super-macro

On observe de très bonnes propriétés de convergence pour tous les maillages proposés, y compris pour le maillage le plus grossier  $MM_1$ . On peut également remarquer qu’en effectuant un maillage super-macro judicieux comme le  $MM_3$ , on obtient quasiment la même courbe de convergence qu’avec le calcul de référence. **L’approximation dans les zones à faibles gradients est donc amplement suffisante.** Ici, en divisant la taille du problème macro par 5 à 10, on conserve de bons résultats de convergence. Pour le traitement de structures composites réelles comportant un nombre très important de cellules, la dimension caractéristique des super-cellules est toujours choisie en fonction de la longueur caractéristique de la solution macroscopique. Ainsi, une super-cellule pourra être composée de 100, 1000 voire encore plus de cellules. On peut alors par cette technique espérer diviser la taille du problème macro par 1000, 10000 ou plus.

## Bilan

Dans ce chapitre ont été proposées deux méthodes de résolution alternatives du problème macroscopique de la stratégie de calcul multiéchelle qui introduisent une vision à trois échelles de la structure. Elles permettent d’obtenir une réduction du coût de calcul sans pour autant affecter de manière significative l’efficacité de la stratégie de calcul multiéchelle. La première méthode propose de résoudre le problème macroscopique par une stratégie de calcul multiéchelle calquée sur la stratégie proposée dans le chapitre II. Elle consiste en fait à résoudre le problème macro par une méthode de décomposition de domaine mixte multiéchelle non classique en ce sens que les variables associées aux super-cellules ne sont pas des contraintes et des déformations mais des efforts et déplacements macro d’interface. La seconde méthode propose d’approximer le problème macro formulé en terme de déplacement en introduisant une cinématique approchée de la troisième échelle. Une propriété intéressante de cette approximation est qu’elle ne modifie pas la solution de la stratégie de calcul itérative mais uniquement sa vitesse de convergence. Cependant, les résultats obtenus lors des tests numériques tendent à prouver que cette approximation relativement grossière affecte peu l’efficacité de la stratégie de calcul.

#### IV. Introduction d'une troisième échelle pour la résolution du problème "macro"

---

En réduisant le coût de calcul du problème macro, ces méthodes permettent donc d'envisager le traitement de structures comportant un grand nombre de cellules.

# Chapitre V

## Résolution d'une équation d'évolution par la méthode d'approximation radiale : application à la résolution des problèmes "micro"

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Définition classique de l'approximation radiale</b>	<b>152</b>
1.1	Préliminaires et notations	153
1.2	Définition classique de l'approximation radiale	153
1.3	Limites de l'approche classique	154
1.4	Amélioration de la technique de résolution	154
<b>2</b>	<b>Définition de l'approximation basée sur un problème de minimisation</b>	<b>155</b>
2.1	Cas où $\mathcal{L} = \mathbb{A}(t)$ avec $\mathbb{A}(t)$ symétrique	156
2.2	Cas où $\mathcal{L} = \mathbb{A}(t)$ avec $\mathbb{A}(t)$ non-symétrique	158
2.3	Cas où $\mathcal{L} = \mathbb{I} \frac{d}{dt} + \mathbb{A}$	159
2.4	Bilan	161
<b>3</b>	<b>Résolution des problèmes "micro" de la stratégie de calcul multi-échelle</b>	<b>161</b>
3.1	Formulation des problèmes micro	161
3.2	Reformulation des problèmes micro	163
3.3	Approximation radiale du problème micro	163
3.4	Réutilisation des fonctions spatiales : phase d'initialisation des problèmes micro	167
<b>4</b>	<b>Exemples</b>	<b>168</b>
4.1	Exemple 1 : résolution d'un problème micro	168
4.2	Exemple 2 : multirésolution - réutilisation des fonctions spatiales	175
4.3	Exemple 3 : application au calcul du portique hétérogène	177

---

La description de l'évolution sur l'espace-temps  $\Omega \times (0, T)$  d'une variable physique  $u(x, t)$  se ramène généralement à la résolution d'une équation d'évolution de la forme

$$\mathcal{L}(u) = f$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel linéaire. Différentes techniques permettent d'aborder cette résolution. Les plus couramment utilisées sont les techniques dites incrémentales qui utilisent des schémas d'intégration temporelle classiques. Les méthodes explicites, peu coûteuses, manquent cependant de robustesse et nécessitent une discrétisation temporelle très fine de l'intervalle de temps. Les méthodes implicites, certes plus robustes, demandent l'assemblage et la résolution de systèmes à chaque pas de temps et conduisent à un coût de calcul prohibitif lorsqu'une solution "fine" est exigée. De plus, dans le cadre de problèmes de multirésolution ou d'une méthode itérative comme la méthode LATIN, on est ramené à la résolution d'un grand nombre d'équations d'évolution " $\mathcal{L}_k(u) = f_k$ " où généralement les  $\mathcal{L}_k$  et  $f_k$  varient peu d'une résolution à l'autre. L'utilisation des techniques classiques devient donc très coûteuse et ne permet pas l'exploitation des résolutions déjà effectuées.

Une méthode de résolution alternative, basée sur le concept d'approximation radiale généralisée permet de répondre à ce problème [Ladevèze, 1999]. Elle consiste à rechercher une approximation de la solution sous la forme d'une somme de fonctions radiales, qui sont des produits d'une fonction temporelle par une fonction spatiale. Une approximation d'ordre  $m$  s'écrit sous la forme

$$u(\underline{x}, t) \approx \tilde{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) U_i(\underline{x}) \quad (\text{V.1})$$

Cette approximation a bien sûr un sens physique très fort. En effet, les chargements considérés dans les problèmes de physique prennent généralement cette forme. On peut alors montrer que la solution de certains problèmes, comme les problèmes de visco-plasticité, admettent une solution de ce type. On peut citer trois avantages majeurs de cette technique d'approximation. Tout d'abord, elle permet la construction d'une base de fonctions spatiales réutilisables dans le cadre de multirésolution. Elle permet également une réduction du coût de stockage mémoire des variables définies sur l'espace-temps. Enfin, une méthode de construction adaptée des fonctions spatiales et temporelles permet de transformer un problème défini sur l'espace-temps en une série de problèmes découplés, définis sur l'espace ou sur le temps. Ceci a pour conséquence une grande réduction du coût de calcul.

Cette approximation n'est bien sûr pas unique. Dans ce chapitre, on propose une démarche pour définir de manière rigoureuse cette approximation. Celle-ci sera ensuite appliquée à la résolution des problèmes micro de la stratégie de calcul multi-échelle.

## 1 Définition classique de l'approximation radiale

Nous exposons tout d'abord la méthode de construction classique de l'approximation radiale (voir [Ladevèze, 1999]) afin d'en montrer les limites.

## 1.1 Préliminaires et notations

On considère ici la résolution d'un problème d'évolution parabolique classique, présenté dans l'annexe A. On peut montrer, dans un cadre continu, que l'approximation radiale de la solution de ce problème a un sens (voir annexe C). Pour simplifier l'exposé, on se place dans un cadre discret aussi bien au niveau spatial que temporel. Au niveau spatial, on pourra classiquement utiliser une méthode éléments finis.  $n$  désignera la dimension de l'espace d'approximation correspondant. Au niveau temporel, on utilisera la méthode de Galerkin discontinue (voir annexe A). Une fonction  $u(x,t)$  définie sur l'espace-temps sera donc représentée par une fonction  $\mathbf{u}(t)$  définie sur  $(0,T)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , chacune des composantes étant une fonction scalaire polynômiale par morceaux sur  $(0,T)$ . On notera l'espace correspondant  $\mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^n)$ , où  $\mathcal{T}_h$  est la partition de l'intervalle de temps associée à la méthode de Galerkin discontinue et  $\mathbf{r}$  un vecteur dont les composantes représentent les degrés d'approximation sur les intervalles de la partition. On notera

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{(0,T)} = \int_{[0,T]} \mathbf{v}^T \mathbf{u} dt$$

L'équation d'évolution approximée peut alors s'écrire :

**Problème V.1** Trouver  $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^n)$  tel que

$$(\mathcal{L}(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{(0,T)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^n)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire défini par  $\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{u}} + \mathbb{A}(t)\mathbf{u}$ .  
 $\forall t \in (0,T)$ ,  $\mathbb{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est définie positive.

On note  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)} = \mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbb{R})$ . L'approximation radiale consiste donc à chercher une approximation de la solution de V.1 sous la forme

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \mathbf{U}_i \quad \text{avec } (\lambda_i, \mathbf{U}_i) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbb{R}^n$$

## 1.2 Définition classique de l'approximation radiale

On se place dans le cas d'une approximation d'ordre 1. On cherche donc une approximation sous la forme  $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \lambda(t)\mathbf{U}$ . La définition classique de l'approximation radiale consiste à écrire l'orthogonalité du résidu  $(\mathcal{L}(\lambda\mathbf{U}) - \mathbf{f})$  par rapport aux fonctions de la forme  $\lambda\mathbf{V} + \beta\mathbf{U}$ , où  $(\beta, \mathbf{V}) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbb{R}^n$ . Le problème consiste donc à chercher  $(\lambda, \mathbf{U}) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbb{R}^n$  tel que :

$$(\mathcal{L}(\lambda\mathbf{U}), \lambda\mathbf{V} + \beta\mathbf{U})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \lambda\mathbf{V} + \beta\mathbf{U})_{(0,T)}, \quad \forall (\beta, \mathbf{V}) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbb{R}^n \quad (\text{V.2})$$

Ce problème se découple alors en un problème spatial et un problème temporel :

$$\begin{aligned} \left( (\dot{\lambda}, \lambda)\mathbb{I} + (\mathbb{A}(t)\lambda, \lambda) \right) \mathbf{U} &= (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} \\ ((\mathbf{U}^T \mathbf{U})\dot{\lambda} + (\mathbf{U}^T \mathbb{A}(t)\mathbf{U})\lambda, \beta)_{(0,T)} &= (\mathbf{U}^T \mathbf{f}, \beta)_{(0,T)}, \quad \forall \beta \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \end{aligned}$$

La méthode de construction classique de l'approximation consiste à rechercher successivement la fonction spatiale et la fonction temporelle, en fixant respectivement la fonction temporelle et la fonction spatiale. L'algorithme est présenté dans le tableau V.1.

---

**Tableau V.1** – Algorithme classique de recherche de l'approximation radiale

---

► Initialisation  $\lambda^{(0)}$

► Boucle sur  $k = 0 \dots k_{max}$

- Trouver  $\mathbf{U}^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$(\mathcal{L}(\lambda^{(k)}\mathbf{U}^{(k+1)}), \lambda^{(k)}\mathbf{V})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \lambda^{(k)}\mathbf{V})_{(0,T)}, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$$

- Trouver  $\lambda^{(k+1)} \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  vérifiant :

$$(\mathcal{L}(\lambda^{(k+1)}\mathbf{U}^{(k+1)}), \beta\mathbf{U}^{(k+1)})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \beta\mathbf{U}^{(k+1)})_{(0,T)}, \quad \forall \beta \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$$


---

### 1.3 Limites de l'approche classique

Nous observons souvent ici la non-convergence de l'algorithme classique du tableau V.1 (voir exemple 1, paragraphe 4.1.2). En réalité, **cette technique de résolution n'est pas adaptée à la définition adoptée pour l'approximation**. Prenons le cas simple où  $\mathcal{L} = \mathbb{A}$ , une matrice constante définie positive. Alors, l'approximation étant définie par (V.2), la fonction temporelle  $\lambda$  doit vérifier

$$\mathbf{f}^T \mathbb{A}^{-1}(\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} = ((\mathbf{U}^T \mathbb{A} \mathbf{U})(\lambda, \lambda)_{(0,T)}) \lambda$$

Elle doit donc être valeur propre de l'opérateur linéaire suivant :

$$\mathbf{T} : \lambda \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \mapsto \mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{f}^T \mathbb{A}^{-1}(\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$$

Or, dans le cas général d'un opérateur  $\mathbb{A}$  non-symétrique,  $\mathbf{T}$  n'est pas symétrique ; il peut avoir des valeurs propres et vecteurs propres complexes. L'algorithme du tableau V.1, qui correspond dans ce cas à une méthode des puissances appliquée à  $\mathbf{T}$ , ne converge donc pas en général.

### 1.4 Amélioration de la technique de résolution

Afin de pallier le problème mentionné précédemment, on pourrait étendre la définition de l'approximation aux complexes ou utiliser une technique de résolution plus sophistiquée du "problème aux valeurs propres" inspirée des techniques de type Krylov. Lors des itérations de l'algorithme du tableau V.1, un sous-espace de fonctions spatiales est généré. Dans le cas où  $\mathcal{L} = \mathbb{A}$ , une matrice constante, l'algorithme est équivalent à une méthode des puissances ; le sous-espace est alors un véritable sous-espace de Krylov. Une amélioration possible de l'algorithme consiste à utiliser une technique de "type Arnoldi" (voir [Saad, 1992]) qui consiste à orthonormaliser

les fonctions spatiales au cours des itérations. Un problème aux valeurs propres "réduit" est ensuite résolu sur le sous-espace de Krylov. Il consiste dans notre cas à rechercher simultanément les fonctions temporelles associées aux fonctions spatiales générées. L'algorithme est décrit dans le tableau V.2.

**Tableau V.2** – Algorithme de type Krylov

► Initialisation  $\lambda^{(0)}$

► Boucle sur  $k = 0 \dots k_{max}$

- Trouver  $\mathbf{U}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$(\mathcal{L}(\lambda^{(k)}\mathbf{U}_{k+1}), \lambda^{(k)}\mathbf{V})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \lambda^{(k)}\mathbf{V})_{(0,T)}, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$$

- Orthonormalisation de  $\mathbf{U}_{k+1}$  par rapport à  $Vect\{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_k\}$
- Critère d'arrêt basé sur  $\|\mathbf{U}_{k+1}\|$
- Normalisation de  $\mathbf{U}_{k+1}$
- Trouver  $\lambda^{(k+1)} \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  tel que

$$(\mathcal{L}(\lambda^{(k+1)}\mathbf{U}_{k+1}), \beta\mathbf{U}_{k+1})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \beta\mathbf{U}_{k+1})_{(0,T)}, \quad \forall \beta \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$$

► Trouver  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$  tel que :  $\forall \{\beta_i\}_{i=1}^k, \beta_i \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$(\mathcal{L}(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{U}_i), \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{U}_i)_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{U}_i)_{(0,T)}$$

Cette technique permet donc de construire de manière efficace un ensemble de fonctions radiales et peut être intéressante lorsqu'on désire résoudre de manière précise l'équation d'évolution.

**L'approche classique ne répond cependant pas au véritable problème qui est de trouver la meilleure approximation.**

## 2 Définition de l'approximation basée sur un problème de minimisation

La méthode classique de définition de l'approximation radiale conduit donc à une impasse puisqu'elle ne permet pas de définir la meilleure approximation. Afin de remédier à ce problème, **on propose de définir l'approximation  $\tilde{\mathbf{u}}$  par un problème de minimisation du résidu  $(\mathbf{f} - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}))$** . La meilleure approximation d'ordre 1 sera donc définie par le problème suivant :

**Problème V.2** Trouver le couple  $(\lambda, \mathbf{U}) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbb{R}^n$  minimisant

$$\|\mathbf{f} - \mathcal{L}(\lambda\mathbf{U})\|^2$$

L'approximation dépendant du choix de la norme  $\|\cdot\|$ , cela demande bien sûr de définir une norme adaptée à notre problème. Dans cette partie, on illustre cette

démarche sur quelques problèmes types.

## 2.1 Cas où $\mathcal{L} = \mathbb{A}(t)$ avec $\mathbb{A}(t)$ symétrique

On considère le cas  $\mathcal{L} = \mathbb{A}(t)$ , où  $\forall t \in (0, T)$ ,  $\mathbb{A}(t)$  est symétrique définie positive.  $\mathbb{A}^{-1}$  définit donc un produit scalaire sur  $\mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathbb{R}^n)$ . On choisira alors naturellement, pour  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathbb{R}^n)$ ,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbb{A}^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{(0,T)} = \int_{[0,T]} \mathbf{v}(t)^T \mathbb{A}(t)^{-1} \mathbf{v}(t) dt$$

La meilleure approximation est alors définie par le problème de minimisation V.2.

### ■ Formulation variationnelle du problème

L'écriture de la stationnarité de la norme du résidu par rapport à  $\lambda$  et à  $\mathbf{U}$  conduit à la formulation suivante du problème V.2 :

**Problème V.3** Trouver  $(\lambda, \mathbf{U}) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbb{R}^n$  tel que

$$(\mathbb{A}(\lambda\mathbf{U}), \beta\mathbf{U})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \beta\mathbf{U})_{(0,T)}, \quad \forall \beta \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \quad (\text{V.3})$$

$$(\mathbb{A}(\lambda\mathbf{U}), \lambda\mathbf{V})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \lambda\mathbf{V})_{(0,T)}, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{V.4})$$

Les équations (V.3) et (V.4) conduisent aux relations suivantes :

$$(\mathbf{U}^T \mathbb{A}(t) \mathbf{U}) \lambda(t) = \mathbf{U}^T \mathbf{f}(t)$$

$$(\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)} \mathbf{U} = (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}$$

La fonction temporelle solution du problème d'approximation devra donc vérifier

$$(\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} \mathbb{A}(t) (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} \lambda(t) = (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} \mathbf{f}(t) \quad (\text{V.5})$$

### ■ Propriétés de l'approximation

**Proposition V.1** Si  $(\lambda, \mathbf{U})$  est solution du problème V.2, alors elle vérifie :

- $\lambda$  rend stationnaire et maximise le quotient de Rayleigh

$$\mathbf{R}(\lambda) = (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}$$

- $\mathbf{U} = (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}$
- $\|\mathbf{f} - \mathbb{A}(\lambda\mathbf{U})\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 - \mathbf{R}(\lambda)$ .

□ **Preuve** : Introduisons l'opérateur  $\mathbf{B}$  défini par :

$$\mathbf{B} : \lambda \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \mapsto \mathbf{B}(\lambda) = (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\mathbf{B}(\lambda)$  est symétrique. La stationnarité du quotient de Rayleigh s'écrit :  $\forall \beta \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\mathbf{R}'_\lambda(\beta) = 0 \Leftrightarrow 2 (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} (\mathbf{f}, \beta)_{(0,T)} + (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T \mathbf{B}'_\lambda(\beta) (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} = 0$$

où  $\mathbf{R}'_\lambda$  désigne le gradient de  $\mathbf{R}$  en  $\lambda$ . Pour calculer le gradient de  $\mathbf{B}$ , remarquons que  $\mathbf{B} = g \circ h$  avec

$$\begin{aligned} h : \lambda \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} &\mapsto h(\lambda) = (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ g : \mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} &\mapsto g(\mathbb{X}) = \mathbb{X}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

On aura alors  $\mathbf{B}'_\lambda(\beta) = g'_{h(\lambda)}(h'_\lambda(\beta))$ . Or, pour  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g'_\mathbb{X}(\mathbb{Y}) = -\mathbb{X}^{-1}\mathbb{Y}\mathbb{X}^{-1}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_\lambda(\beta) &= -\mathbf{B}(\lambda)((\mathbb{A}\lambda, \beta)_{(0,T)} + (\mathbb{A}\beta, \lambda)_{(0,T)})\mathbf{B}(\lambda) \\ &= -2\mathbf{B}(\lambda)(\mathbb{A}\lambda, \beta)_{(0,T)}\mathbf{B}(\lambda) \end{aligned}$$

La stationnarité du quotient de Rayleigh s'écrit donc :

$$\begin{aligned} 2 \left( (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} \mathbf{f}, \beta \right)_{(0,T)} &= 2 (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T \mathbf{B}(\lambda) (\mathbb{A}\lambda, \beta)_{(0,T)} \mathbf{B}(\lambda) (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} \\ &= 2 \left( (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T \mathbf{B}(\lambda) \mathbb{A} \mathbf{B}(\lambda) (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} \lambda, \beta \right)_{(0,T)} \end{aligned}$$

Cette relation s'écrit encore

$$(\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} \mathbb{A}(t) (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} \lambda(t) = (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} \mathbf{f}(t)$$

ce qui est équivalent à l'expression (V.5) du problème variationnel V.3. On a de plus

$$\|\mathbf{f} - \mathbb{A}(\lambda\mathbf{U})\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 + \mathbf{U}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)} \mathbf{U} - 2(\mathbf{f}, \lambda\mathbf{U})_{(0,T)}$$

On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)} \mathbf{U} &= (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbb{A}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} = \mathbf{R}(\lambda) \\ (\mathbf{f}, \lambda\mathbf{U})_{(0,T)} &= \mathbf{U}^T (\mathbf{f}, \lambda)_{(0,T)} = \mathbf{R}(\lambda) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**La recherche de la meilleure approximation est associée à la maximisation du quotient de Rayleigh  $\mathbf{R}(\lambda)$ . La valeur de ce quotient constitue donc un indicateur sur la qualité d'une approximation.**

*Remarque V.1 Dans le cas où  $\mathbb{A}$  est constant et symétrique, la recherche de points stationnaires du quotient de Rayleigh est équivalente à un problème aux valeurs propres classique. On se retrouve d'ailleurs, au choix de la norme près, dans le cadre classique de définition de l'approximation radiale (voir annexe C).*

## ■ Méthode de construction de l'approximation

On propose ici un algorithme de résolution du problème d'approximation qui consiste à **minimiser alternativement sur la fonction temporelle et la fonction spatiale**. L'approximation étant définie par le produit de ces deux fonctions,

celles-ci sont définies à un facteur multiplicatif près. On pourra alors choisir de normer l'une ou l'autre de ces deux fonctions. A chaque itération, on dispose à présent d'un critère, basé sur le quotient de Rayleigh, qui permet de savoir si on minimise réellement le résidu. L'algorithme est présenté dans le tableau V.3. Notons qu'à l'itération  $k$ , on obtient une estimation de l'approximation  $\lambda^{(k+1)}\mathbf{U}^{(k+1)}$ . Le calcul du quotient de Rayleigh est très simple puisque

$$\mathbf{R}(\lambda^{(k+1)}) = \mathbf{U}^{(k+1)T}(\mathbf{f}, \lambda^{(k+1)})_{(0,T)} = (\mathbf{f}, \lambda^{(k+1)}\mathbf{U}^{(k+1)})_{(0,T)}$$

---

**Tableau V.3** – Nouvel algorithme de recherche de l'approximation radiale

---

- ▶ Initialisation  $\lambda^{(0)}$
  - ▶ Boucle sur  $k = 0 \dots k_{max}$ 
    - Trouver  $\mathbf{U}^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\lambda^{(k)}\mathbf{U}^{(k+1)}$  minimise  $\|\mathbf{f} - \mathcal{L}(\lambda^{(k)}\mathbf{U}^{(k+1)})\|^2$
    - Normalisation de  $\mathbf{U}^{(k+1)}$
    - Trouver  $\lambda^{(k+1)} \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  tel que  $\lambda^{(k+1)}\mathbf{U}^{(k+1)}$  minimise  $\|\mathbf{f} - \mathcal{L}(\lambda^{(k+1)}\mathbf{U}^{(k+1)})\|^2$
    - Critère d'arrêt basé sur  $\mathbf{R}(\lambda^{(k+1)})$
- 

Dans le cas où  $\mathbb{A}$  est constant et symétrique, l'algorithme V.3 est équivalent à une simple méthode des puissances sur un opérateur symétrique. Il a donc un sens dans ce cas. En pratique, cet algorithme semble performant dans le cas général.

### ■ Méthode de construction de plusieurs jeux de fonctions

On peut bien sûr construire les fonctions radiales les unes après les autres en ré-actualisant à chaque fois le second membre et en utilisant l'algorithme V.3. Il est également possible d'utiliser une technique de type Krylov telle que celle présentée dans le paragraphe 1.4. L'algorithme correspondant est décrit dans le tableau V.4.

---

**Tableau V.4** – Algorithme de type Krylov

---

- ▶ Initialisation  $\lambda^{(0)}$
  - ▶ Boucle sur  $k = 0 \dots k_{max}$ 
    - Trouver  $\mathbf{U}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\lambda^{(k)}\mathbf{U}_{k+1}$  minimise  $\|\mathbf{f} - \mathcal{L}(\lambda^{(k)}\mathbf{U}_{k+1})\|^2$
    - Orthonormalisation de  $\mathbf{U}_{k+1}$  par rapport à  $\text{Vect}\{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_k\}$
    - Critère d'arrêt basé sur  $\|\mathbf{U}_{k+1}\|$
    - Normalisation de  $\mathbf{U}_{k+1}$
    - Trouver  $\lambda^{(k+1)} \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  tel que  $\lambda^{(k+1)}\mathbf{U}_{k+1}$  minimise  $\|\mathbf{f} - \mathcal{L}(\lambda^{(k+1)}\mathbf{U}_{k+1})\|^2$
  - ▶ Trouver  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$  qui minimise  $\|\mathbf{f} - \mathcal{L}(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{U}_i)\|^2$
- 

## 2.2 Cas où $\mathcal{L} = \mathbb{A}(t)$ avec $\mathbb{A}(t)$ non-symétrique

On se place maintenant dans le cas où  $\mathbb{A}(t)$  n'est plus symétrique. Elle ne peut donc plus définir notre norme sur le résidu. L'idée est donc d'introduire un autre

opérateur  $\mathbb{M}(t)$  symétrique défini positif dépendant éventuellement du temps. On choisira alors , pour  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathbb{R}^n)$ ,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{(0,T)} = \int_{[0,T]} \mathbf{v}(t)^T \mathbb{M}(t)^{-1} \mathbf{v}(t) dt$$

L'approximation sera donc définie par le problème de minimisation V.2 avec cette nouvelle définition pour la norme du résidu. Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbb{A}^T \mathbb{M}^{-1} \mathbb{A} \\ \mathbf{g} &= \mathbb{A}^T \mathbb{M}^{-1} \mathbf{f} \end{aligned}$$

On peut alors montrer la proposition suivante :

**Proposition V.2** Si  $(\lambda, \mathbf{U})$  est solution du problème V.2, alors elle vérifie :

- $\lambda$  rend stationnaire et maximise le quotient de Rayleigh
- $$\mathbf{R}(\lambda) = (\mathbf{g}, \lambda)_{(0,T)}^T (\mathbf{G}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} (\mathbf{g}, \lambda)_{(0,T)}$$
- $\mathbf{U} = (\mathbf{G}\lambda, \lambda)_{(0,T)}^{-1} (\mathbf{g}, \lambda)_{(0,T)}$
  - $\|\mathbf{f} - \mathcal{L}(\lambda \mathbf{U})\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 - \mathbf{R}(\lambda)$ .

□ **Preuve** : suivre la démonstration de la proposition V.1.□

L'approximation est encore bien définie et on pourra utiliser l'algorithme du tableau V.3 pour la construire.

### ■ Choix de l'opérateur $\mathbb{M}$

Un choix naturel consiste à se baser sur l'opérateur  $\mathbb{A}$ . On pourrait par exemple prendre la partie symétrique de  $\mathbb{A}$ , soit

$$\mathbb{M}(t) = \frac{1}{2} (\mathbb{A}(t) + \mathbb{A}(t)^T) = \mathbb{A}(t)_{sym}$$

L'inversion de cet opérateur est bien sûr trop coûteuse. On pourra donc se contenter d'une approximation plus simple, en prenant par exemple sa moyenne :

$$\mathbb{M} = \frac{1}{T} \int_{[0,T]} \mathbb{A}(t)_{sym} dt$$

On peut également envisager une approximation affine en temps pour  $\mathbb{M}^{-1}$  de la forme :

$$\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{A}(0)_{sym}^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right) + \mathbb{A}(t)_{sym}^{-1} \frac{t}{T}$$

### 2.3 Cas où $\mathcal{L} = \mathbb{I} \frac{d}{dt} + \mathbb{A}$

Dans ce cas, quelle que soient les propriétés de  $\mathbb{A}$ , l'opérateur  $\mathcal{L}$  n'est pas autoadjoint et ne définit donc pas de produit scalaire. L'idée est encore d'introduire

un opérateur  $\mathbb{M}(t)$  symétrique défini positif dépendant éventuellement du temps et de poser, pour  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^n)$ ,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{(0,T)} = \int_{[0,T]} \mathbf{v}(t)^T \mathbb{M}(t)^{-1} \mathbf{v}(t) dt$$

On posera alors

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathcal{L}^* \mathbb{M}^{-1} \mathcal{L} \\ \mathbf{g} &= \mathcal{L}^* \mathbb{M}^{-1} \mathbf{f} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}^*$  est l'adjoint de  $\mathcal{L}$  défini par :

$$(\mathcal{L}(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{(0,T)} = (\mathbf{u}, \mathcal{L}^*(\mathbf{v}))_{(0,T)}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^n)$$

Avec ces notations, l'approximation définie par le problème de minimisation [V.2](#) vérifie encore la proposition [V.2](#) et peut être construite par l'algorithme du tableau [V.3](#).

### ■ Calcul de l'adjoint

Dans le cas continu, l'adjoint  $\mathcal{L}^*$  de  $\mathcal{L}$  est classiquement défini pour des fonctions nulles en  $t=T$  par la formule suivante :

$$\mathcal{L}^* = -\mathbb{I} \frac{d}{dt} + \mathbb{A}^T$$

La nouvelle définition de l'approximation fait donc intervenir un problème du second ordre en temps. D'un point de vue continu, cela conduit à une plus grande régularité de la fonction  $\lambda$ .

L'approximation temporelle adoptée, basée sur des fonctions polynômiales par morceaux, permet de définir simplement cet adjoint, sans changer le degré de l'approximation et sans se soucier des problèmes de conditions initiales et finales. La définition de la dérivée temporelle, prise au sens de Galerkin discontinue, permet de définir une dérivée temporelle "adjointe", notée  $\frac{d}{dt}^*$  (voir définition [A.4](#) de l'annexe [A](#)). L'opérateur adjoint sera alors défini par

$$\mathcal{L}^* = -\mathbb{I} \frac{d}{dt}^* + \mathbb{A}^T$$

### ■ Choix de l'opérateur $\mathbb{M}$

Il est intéressant de définir  $\mathbb{M}$  à partir de l'opérateur  $\mathcal{L}$  afin de conserver une norme "physique". Pour cela, on introduit "l'énergie moyenne" suivante :

$$\left( \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathcal{L}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \right)_{(0,T)} \approx \frac{1}{2T} (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{(0,T)} + \left( \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathbb{A} \mathbf{v}, \mathbf{v} \right)_{(0,T)}$$

Cette formule est exacte pour des fonctions continues. Pour des fonctions de  $\mathbf{Z}_r(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^n)$ , la formule exacte fait intervenir des termes de saut aux instants de discontinuités.

Cependant, on peut se contenter de cette approximation. Un choix naturel pour  $\mathbb{M}$  consiste alors à prendre

$$\mathbb{M}(t) = \frac{1}{2T}\mathbb{I} + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\mathbb{A}_{sym}$$

Inverser cet opérateur est bien sûr trop coûteux. On pourra alors se contenter d'en prendre la moyenne ou bien, par exemple, d'approximer son inverse par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(t)^{-1} &\approx \mathbb{M}(0)^{-1}\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \mathbb{M}(T)^{-1}\frac{t}{T} \\ &= \left(\frac{1}{2T}\mathbb{I} + \mathbb{A}_{sym}\right)^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right) + 2t\mathbb{I} \end{aligned}$$

## 2.4 Bilan

Nous avons proposé une définition saine pour définir l'approximation radiale, basée sur la minimisation du résidu. Il a été montré sur différents problèmes types comment construire une norme "physique" sur ce résidu. La démarche présentée ici est bien adaptée au cadre discrétisé en espace. Cependant, elle est **difficilement transposable au cadre continu pour une formulation classique d'un problème d'évolution**. Elle fait en effet intervenir la notion d'opérateur adjoint dont la définition n'est pas toujours évidente dans le cas d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites quelconques. De plus, cette formulation de l'approximation exige une plus grande régularité des fonctions. Par exemple, pour un problème de diffusion classique, elle demande de considérer des fonctions de  $H^2(\Omega)$  et non plus de  $H^1(\Omega)$ . La discrétisation spatiale *a posteriori* sera donc plus coûteuse, ce qui n'est pas souhaitable. Afin de pallier ce problème, **on propose de revenir en amont sur la formulation même du problème d'évolution afin de l'écrire, si c'est possible, comme un problème de minimisation "plus simple"**. Cette reformulation sera rendue possible par l'adoption d'une **vision totalement mixte du problème**. Nous allons voir dans la partie suivante comment appliquer cette démarche au cas qui nous intéresse : la résolution des problèmes micro de la stratégie de calcul multiéchelle.

## 3 Résolution des problèmes "micro" de la stratégie de calcul multiéchelle

On s'intéresse ici à l'application de la démarche précédente à l'approximation des problèmes micro de la stratégie de calcul multiéchelle présentée dans le chapitre II. On se reportera au chapitre II pour plus de détails sur cette stratégie.

### 3.1 Formulation des problèmes micro

Soit  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E = (\boldsymbol{\varepsilon}_{pE}, \mathbf{X}_E, \underline{W}_E, \boldsymbol{\sigma}_E, \mathbf{Y}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)}$ , l'ensemble des inconnues du problème. A l'itération  $n$  de la stratégie de calcul multiéchelle, l'étape linéaire consiste à chercher  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \boldsymbol{\Gamma}$  et tel que  $(\mathbf{s}_{n+1} -$

$\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ ) suive une direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ . La décomposition radiale des fonctions n'a bien sûr de sens que si les espaces de travail sont des espaces vectoriels. L'étape linéaire est donc formulée sur l'incrément  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n$ . En notant  $\Delta \widehat{\mathbf{s}} = \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n$ , on peut montrer que cela conduit, sur la sous-structure  $E$ , à la définition du problème micro suivant : trouver  $\Delta \mathbf{s}_E \in \mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$  tel que

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma}_E - \mu \Delta \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_E \\ \Delta \mathbf{Y}_E - \mu \Delta \widehat{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} - \mu \Delta \dot{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{pE} \\ -(\Delta \dot{\mathbf{X}}_E - \mu \Delta \dot{\widehat{\mathbf{X}}}_E) \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{h}(\Delta \underline{F}_E - \mu \Delta \widehat{\underline{F}}_E) + (\Delta \dot{\underline{W}}_E - \mu \Delta \dot{\widehat{\underline{W}}}_E - \dot{\underline{W}}_E^M) = 0$$

où  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{h}$  sont des opérateurs définis positifs,  $\mu$  est le paramètre de relaxation de l'algorithme et  $\widetilde{W}_E^M$  un multiplicateur de Lagrange garantissant l'admissibilité des efforts macro. Rappelons que  $\mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$ , introduit dans la définition II.10, désigne les variables  $E$ -admissibles à zéro, c'est-à-dire vérifiant l'admissibilité cinématique, les équations d'état et l'admissibilité statique pour des données homogènes.

A l'étape linéaire, on aura donc à résoudre deux problèmes micro par sous-structure ; le premier consiste à ne considérer que les données de l'étape précédente  $\Delta \widehat{\mathbf{s}}_E$ . Le problème macro étant résolu, on peut considérer un second problème micro avec comme seule donnée le multiplicateur. Pour simplifier, on notera l'ensemble des données  $\bar{\mathbf{s}}_E \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)}$  ; elles valent  $\mu \Delta \widehat{\mathbf{s}}_E$  pour le premier problème micro et  $(0,0,\widetilde{W}_E^M,0,0,0)$  pour le second.

*Remarque V.2* Le calcul de l'opérateur homogénéisé sur une sous-structure  $E$  consiste à résoudre un ensemble de problèmes micro avec comme seul chargement le multiplicateur  $\widetilde{W}_E^M$  qui prend successivement la valeur des fonctions de base de  $\mathcal{W}_{h,E}^{(0,T),M}$ . Les résultats de cette partie pourront bien sûr être appliqués à son calcul.

On omettra par la suite l'indice  $E$ . Un problème micro peut alors être formulé de la manière suivante :

**Problème V.4** Trouver  $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$  vérifiant

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p \\ -(\dot{\mathbf{X}} - \dot{\bar{\mathbf{X}}}) \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{h}(\underline{F} - \bar{\underline{F}}) + (\dot{\underline{W}} - \dot{\bar{\underline{W}}}) = 0$$

Il est bien sûr possible de formuler ce problème sur  $(\boldsymbol{\sigma}, \underline{F}, \mathbf{Y})$  comme dans le paragraphe 3.3.1 du chapitre II. On aboutit ainsi à la formulation d'une équation d'évolution parabolique classique. L'approximation radiale peut alors être définie de manière classique en écrivant l'orthogonalité du résidu par rapport aux fonctions radiales (voir paragraphe 1). Cette approche n'est cependant pas satisfaisante puisqu'elle ne permet pas d'évaluer la qualité de l'approximation. Comme indiqué précédemment, la nouvelle démarche proposée est cependant compliquée à mettre en oeuvre d'un point de vue "continu" sur ce problème d'évolution.

### 3.2 Reformulation des problèmes micro

Afin d'appliquer l'approximation radiale, on propose de conserver une vision mixte du problème. On peut pour cela formuler assez simplement le problème V.4 sous la forme d'un problème de minimisation. En se donnant une norme sur le résidu associé à la vérification des directions de recherche, on peut formuler le problème comme la minimisation de ce résidu sur l'espace  $\mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$ . Remarquons que les directions de recherche peuvent être vues comme des relations de comportement. La norme sur le résidu pourra donc être interprétée comme une erreur en relation de comportement. On formule le problème de la manière suivante :

**Problème V.5** Trouver  $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$  minimisant l'erreur en relation de comportement  $e_{RC}^2(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}})$  associée aux directions de recherche, définie par

$$e_{RC}^2(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) = \left\| \mathbf{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \bar{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p \\ -(\dot{\mathbf{X}} - \bar{\dot{\mathbf{X}}}) \end{bmatrix} \right\|_1^2 + \left\| \mathbf{h}(\underline{F} - \bar{\underline{F}}) + (\dot{\underline{W}} - \bar{\dot{\underline{W}}}) \right\|_2^2$$

avec

$$\|\Delta\|_1^2 = \int_{\Omega_E \times [0,T]} \Delta \circ \mathbf{M}(t) \Delta \, dx \, dt \quad \text{et} \quad \|\underline{\delta}\|_2^2 = \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{\delta} \cdot \mathbf{m}(t) \underline{\delta} \, ds \, dt$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{m}$  sont des opérateurs linéaires symétriques définis positifs.

#### ■ Choix de l'erreur en relation de comportement

Une définition naturelle de l'erreur en relation de comportement consiste à choisir

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathbf{H}(t)_{sym}^{-1} \\ \mathbf{m}(t) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathbf{h}(t)_{sym}^{-1} \end{aligned}$$

### 3.3 Approximation radiale du problème micro

On a formulé le problème micro comme un problème de minimisation d'un critère sur l'espace  $\mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$ . L'application de l'approximation radiale à la résolution de ce problème nécessite tout d'abord de définir ce qu'on entend par "fonction radiale".

#### 3.3.1 Décomposition radiale des variables du problème

L'idée est ici de définir une approximation radiale  $\tilde{\mathbf{s}}$  des variables  $\mathbf{s}$  compatible avec la définition de  $\mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$ . On choisira donc :

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\underline{F}})(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) (\mathbf{C}_i, \underline{G}_i)(\underline{x}) \quad \text{avec } c_i \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \text{ et } (\mathbf{C}_i, \underline{G}_i) \in \mathbf{F}_{h,E,0}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{m'} d_i(t) \mathbf{D}_i(\underline{x}) \quad \text{avec } d_i \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \text{ et } \mathbf{D}_i \in \mathbf{Y}_{h,E}$$

$$(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\underline{W}})(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{m''} e_i(t) (\mathbf{E}_i, \underline{Z}_i)(\underline{x}) \quad \text{avec } e_i \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \text{ et } (\mathbf{E}_i, \underline{Z}_i) \in \mathbf{E}_{h,E,0}$$

La déformation anélastique et les variables internes cinématiques seront déduites des équations d'état :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= \sum_{i=1}^{m''} e_i \mathbf{E}_i - \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_i \\ \tilde{\mathbf{X}} &= \sum_{i=1}^{m'} d_i \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{D}_i\end{aligned}$$

Ce choix implique que l'approximation radiale  $\tilde{\mathbf{s}}$  appartient bien à l'espace  $\mathbf{S}_{h,E,0}^{(0,T)}$ . Etant donné que les opérateurs  $\mathbf{K}$  et  $\boldsymbol{\Lambda}$  sont constants,  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  et  $\tilde{\mathbf{X}}$  s'expriment également sous la forme d'une somme de fonctions radiales.

### 3.3.2 Définition de la meilleure approximation

La meilleure approximation radiale sera donc simplement définie comme celle minimisant l'erreur en relation de comportement. Notons pour simplifier

$$\overline{\boldsymbol{\Delta}} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{\sigma}} \\ \overline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p \\ -\tilde{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{\boldsymbol{\delta}} = \overline{\mathbf{W}} + \mathbf{h}\overline{\mathbf{F}}$$

La meilleure approximation radiale d'ordre 1 ( $m = m' = m'' = 1$ ) est donc définie par le problème suivant :

**Problème V.6** Trouver une approximation  $\tilde{\mathbf{s}}$ , définie par les fonctions  $(c,d,e) \in [\mathbf{Z}_r^{(0,T)}]^3$  et  $((\mathbf{C},\underline{\mathbf{G}}),\mathbf{Y},(\mathbf{E},\underline{\mathbf{Z}})) \in \mathbf{F}_{h,E,0} \times \mathcal{Y}_{h,E} \times \mathbf{E}_{h,E,0}$ , minimisant l'erreur en relation de comportement

$$e_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}) = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{c}\mathbf{C} \\ d\mathbf{D} \end{bmatrix} + \mathbf{H} \begin{bmatrix} c\mathbf{C} \\ d\mathbf{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{e}\mathbf{E} \\ 0 \end{bmatrix} - \overline{\boldsymbol{\Delta}} \right\|_1^2 + \left\| \mathbf{h}\underline{\mathbf{G}} + \dot{e}\underline{\mathbf{Z}} - \overline{\boldsymbol{\delta}} \right\|_2^2$$

**Proposition V.3** Si  $(c,d,e)$  et  $((\mathbf{C},\underline{\mathbf{G}}),\mathbf{D},(\mathbf{E},\underline{\mathbf{Z}}))$  sont solutions du problème V.6, alors ils vérifient :

- il existe un quotient de Rayleigh  $\mathbf{R}(c,d,e)$  que la solution  $(c,d,e)$  rend stationnaire
- les fonctions spatiales s'obtiennent en fonctions de  $(c,d,e)$  en écrivant la stationnarité de  $e_{RC}^2$  par rapport aux fonctions spatiales
- $e_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}) = e_{RC}^2(\bar{\mathbf{s}}) - \mathbf{R}(c,d,e) = \left\| \overline{\boldsymbol{\Delta}} \right\|_1^2 + \left\| \overline{\boldsymbol{\delta}} \right\|_2^2 - \mathbf{R}(c,d,e)$  où

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(c,d,e) &= \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \{ \mathbf{h}\underline{\mathbf{G}} + \dot{e}\underline{\mathbf{Z}} \} \cdot \mathbf{m} \overline{\boldsymbol{\delta}} \, ds \, dt + \\ &\int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{c}\mathbf{C} \\ d\mathbf{D} \end{bmatrix} + \mathbf{H} \begin{bmatrix} c\mathbf{C} \\ d\mathbf{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{e}\mathbf{E} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \circ \mathbf{M} \overline{\boldsymbol{\Delta}} \, dx \, dt\end{aligned}$$

□ **Preuve** : La démonstration de cette proposition est analogue à celles des propositions V.1 et V.2. □

L'expression du quotient de Rayleigh n'est pas d'une grande importance. Ce qui importe est de savoir comment le calculer à partir d'un jeu de fonctions temporelles et spatiales. **La proposition V.3 offre donc un résultat important sur l'estimation de l'erreur pour un certain jeu de fonctions.**

### 3.3.3 Méthode de construction de l'approximation radiale

On propose dans le tableau V.5 une **méthode de construction itérative de cette approximation qui consiste à minimiser alternativement sur les fonctions spatiales et temporelles**. Le calcul du quotient de Rayleigh donne une information sur la convergence de cet algorithme.

---

**Tableau V.5** – Algorithme de recherche de l'approximation radiale d'un problème micro

---

- ▶ Initialisation  $(c^{(0)}, d^{(0)}, e^{(0)})$
  - ▶ Boucle sur  $k = 0 \dots k_{max}$ 
    - Les fonctions temporelles  $(c^{(k)}, d^{(k)}, e^{(k)})$  étant fixées, on cherche  $\left( (\mathbf{C}^{(k+1)}, \underline{\mathbf{G}}^{(k+1)}), \mathbf{D}^{(k+1)}, (\mathbf{E}^{(k+1)}, \underline{\mathbf{Z}}^{(k+1)}) \right)$  qui minimise  $e_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$
    - Normalisation des fonctions spatiales
    - Les fonctions spatiales  $\left( (\mathbf{C}^{(k+1)}, \underline{\mathbf{G}}^{(k+1)}), \mathbf{D}^{(k+1)}, (\mathbf{E}^{(k+1)}, \underline{\mathbf{Z}}^{(k+1)}) \right)$  étant fixées, on cherche  $(c^{(k+1)}, d^{(k+1)}, e^{(k+1)})$  qui minimise  $e_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$
    - Critère d'arrêt basé sur la convergence de  $\mathbf{R}(c^{(k+1)}, d^{(k+1)}, e^{(k+1)})$
- 

La résolution des problèmes de minimisation sur les variables temporelles et spatiales est détaillée dans l'annexe D.

*Remarque V.3 En pratique, comme on le verra dans les exemples, l'algorithme V.5 converge rapidement.*

*Remarque V.4 Minimiser simultanément sur les fonctions spatiales  $((\mathbf{C}, \underline{\mathbf{G}}), \mathbf{Y}, (\mathbf{E}, \underline{\mathbf{Z}}))$  conduit à un problème "spatial" dont la taille est deux fois plus grande qu'un problème éléments finis standard (voir annexe D). Une technique itérative alternative à l'algorithme V.5 consiste à découpler la minimisation sur  $((\mathbf{C}, \underline{\mathbf{G}}), \mathbf{Y})$  de celle sur  $(\mathbf{E}, \underline{\mathbf{Z}})$ .*

#### ■ Construction de plusieurs jeux de fonctions radiales

On peut bien sûr vouloir chercher plusieurs fonctions, c'est-à-dire  $m, m', m'' \geq 2$ . Une première démarche consiste à utiliser une technique de type "méthode des puissances par bloc" (ou méthode d'itération de sous-espace), en minimisant simultanément sur l'ensemble des fonctions spatiales puis temporelles. Cependant, la dimension des problèmes spatiaux éléments finis à résoudre est  $(m + m'')$  fois plus

grande que celle d'un problème éléments finis standard et leur résolution devient trop coûteuse.

Une autre démarche consiste à adopter la technique de type Arnoldi décrite dans le tableau V.4. Le calcul du quotient de Rayleigh pour chaque jeu de fonction permet d'estimer la qualité de ces fonctions et donc éventuellement de les trier.

Une dernière démarche consiste à **construire les jeux de fonctions radiales les uns après les autres**. Pour savoir si un nouveau jeu de fonctions est nécessaire, il nous faut donc un critère jugeant de la qualité l'approximation courante, notée  $\tilde{\mathbf{s}}$ . Ce critère, noté  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}})$ , sera naturellement basé sur l'erreur en relation de comportement  $e_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$ . Définissons la norme suivante sur  $\mathbf{S}_{h,E}$  :

$$\|\|\mathbf{s}\|\|^2 = \|\|\mathbf{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}\|\|_1^2 + \|\|\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \\ -\dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}\|\|_1^2 + \|\|\mathbf{h}\underline{F}\|\|_2^2 + \|\|\dot{\mathbf{W}}\|\|_2^2$$

Le critère pourra alors être défini de la manière suivante :

$$\xi_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}}) = \frac{e_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})}{\|\|\bar{\mathbf{s}}\|\|^2} \quad (\text{V.6})$$

On se donnera donc un critère  $\xi_{RC}^c$ . Ayant trouver une nouvelle approximation  $\tilde{\mathbf{s}}$ , si  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}}) > \xi_{RC}^c$ , on calculera un nouveau jeu de fonctions. C'est cette dernière démarche qui sera utilisée en pratique dans la stratégie de calcul multiéchelle.

*Remarque V.5 Rappelons que le critère  $\xi_{RC}$  permet d'évaluer la vérification des directions de recherche de la stratégie de calcul itérative. En pratique, comme on le verra dans les exemples, une vérification grossière de ces directions de recherche semble suffisante pour obtenir une bonne convergence de la stratégie de calcul. On pourra par exemple choisir une vérification à 50% des directions de recherche, soit  $\xi_{RC}^c \approx 0.5$ . La construction à chaque itération de plusieurs nouveaux jeux de fonctions ne sera donc pas indispensable dans le cadre de la stratégie de calcul.*

### 3.3.4 Résolution incrémentale de l'étape linéaire sur la grille grossière

On a vu dans le paragraphe 3.4 du chapitre II qu'il était possible de formuler l'étape linéaire de manière incrémentale sur les intervalles de temps macro  $I_i^M = (t'_i, t'_{i+1})$ ,  $i \in \{0, \dots, N' - 1\}$ . Un problème micro est alors défini sur une sous-structure d'espace-temps  $\Omega_E \times I_i^M$ . Ce problème est reformulé de la manière suivante :

**Problème V.7** Trouver  $\mathbf{s}|_{I_i^M} \in \mathbf{S}_{h,E,0}^{(t'_i, t'_{i+1})}$  minimisant l'erreur en relation de comportement  $e_{RC,i}^2(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}})$  associée aux directions de recherche définie par

$$e_{RC,i}^2(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) = \|\|\mathbf{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \bar{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}_p \\ -(\dot{\mathbf{X}} - \bar{\dot{\mathbf{X}}}) \end{bmatrix}\|\|_1^2 + \|\|\mathbf{h}(\underline{F} - \bar{\underline{F}}) + (\dot{\mathbf{W}} - \bar{\dot{\mathbf{W}}})\|\|_2^2$$

avec

$$\|\|\Delta\|\|_1^2 = \int_{\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \Delta \circ \mathbf{M}(t) \Delta \, dx \, dt \quad \text{et} \quad \|\|\underline{\delta}\|\|_2^2 = \int_{\partial\Omega_E \times [t'_i, t'_{i+1}]} \underline{\delta} \cdot \mathbf{m}(t) \underline{\delta} \, ds \, dt$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{m}$  sont des opérateurs linéaires symétriques définis positifs.

Le problème de minimisation V.7 ne fait pas intervenir les conditions initiales en  $t_i^-$ . En fait, celles-ci sont prises en compte par une modification des données  $\bar{s}_{|I_i^M}$ . Pour le premier problème micro on posera

$$\bar{s}_{|I_i^M} = \left( \mu \Delta \widehat{\varepsilon}_p|_{I_i^M} + (\Delta \varepsilon_p(t_i^-) - \mu \Delta \widehat{\varepsilon}_p(t_i^-)), \mu \Delta \widehat{\mathbf{X}}|_{I_i^M} + (\Delta \mathbf{X}(t_i^-) - \mu \Delta \widehat{\mathbf{X}}(t_i^-)), \right. \\ \left. \mu \Delta \widehat{W}|_{I_i^M} + (\Delta W(t_i^-) - \mu \Delta \widehat{W}(t_i^-)), \mu \Delta \widehat{\sigma}|_{I_i^M}, \mu \Delta \widehat{Y}|_{I_i^M}, \mu \Delta \widehat{F}|_{I_i^M} \right)$$

On a donc rajouté à chaque variable cinématique un terme constant sur  $I_i^M$  correspondant aux conditions initiales en  $t_i^-$ . On peut vérifier qu'avec cette définition, les conditions initiales seront bien vérifiées au sens faible. Pour le second problème micro, on prendra simplement  $\bar{s}_{|I_i^M} = (0, 0, \widetilde{W}_{E|I_i^M}^M, 0, 0, 0)$ . Les conditions initiales sont donc prises en compte par le premier problème micro.

L'approximation radiale consiste alors à rechercher un jeu de fonctions spatiales et temporelles pour chaque intervalle macro.

*Remarque V.6* On pourra également appliquer cette démarche au calcul de l'opérateur homogénéisé  $\mathbf{L}_{E,i}^F$  sur une sous-structure  $\Omega_E \times I_i^M$ .

### 3.4 Réutilisation des fonctions spatiales : phase d'initialisation des problèmes micro

La construction des fonctions spatiales est de loin la phase la plus coûteuse. Il peut alors être intéressant de réutiliser les fonctions déjà construites.

#### ■ Réutilisation des fonctions au cours des itérations

**Les fonctions spatiales construites à chaque itération peuvent être réutilisées systématiquement au cours des itérations suivantes. La résolution d'un problème micro commencera donc par une phase d'initialisation consistant à rechercher un jeu de fonctions temporelles associé à la base de fonctions spatiales déjà construite.** On résoud pour cela un problème de minimisation de l'erreur en relation de comportement sur l'ensemble de ces fonctions temporelles, les fonctions spatiales étant fixées.

En général, les opérateurs et seconds membres des problèmes micro varient peu d'une itération sur l'autre. Cette phase d'initialisation est donc très souvent suffisante pour obtenir une bonne approximation de la solution du problème micro. La phase d'initialisation permet d'obtenir une première approximation  $\tilde{s}$  de la solution. Pour savoir si un nouveau jeu de fonction est nécessaire, on utilisera le critère  $\xi_{RC}(\tilde{s}; \bar{s})$  défini par (V.6).

#### ■ Phase d'initialisation pour les structures composites

Dans le cas de structures composites, la base de fonctions spatiales est commune à un grand nombre de sous-structures identiques. **La phase d'initialisation d'un problème micro sur une sous-structure pourra donc utiliser les fonctions spatiales construites par les autres sous-structures au cours des itérations précédentes et même de l'itération courante.** Les solutions des problèmes

micro sur des sous-structures identiques seront généralement très proches pour ce qui est des efforts, contraintes, déformations et éventuellement des variables internes. Les solutions en déplacements d'interface le seront également mais à un mode rigide près. Il est donc **indispensable d'ajouter à la base de fonctions de l'initialisation les fonctions spatiales correspondant aux modes rigides**, soit

$$((\mathbf{C}_i, \underline{G}_i), \mathbf{Y}_i, (\mathbf{E}_i, \underline{Z}_i)) = ((0, 0), 0, (0, \underline{\alpha}_i)), \quad i \in \{1, \dots, n_r\}$$

où  $\{\underline{\alpha}_i\}_{i=1}^{n_r}$  est une base de l'espace  $\mathfrak{R}_{h,E}^W$  des modes rigides de  $\partial\Omega_E$ . Pour que le critère  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}})$  reste pertinent, la norme sur les déplacements d'interface  $\underline{W} \in \mathfrak{W}_{h,E}^{(0,T)}$  apparaissant au dénominateur doit être modifiée de la manière suivante

$$\|\underline{W}\|_2^2 \longrightarrow \|\{\underline{W}\}\|_2^2$$

où  $\{\underline{W}\}$  correspond à la partie de  $\underline{W}$  à résultantes et moments nuls sur  $\partial\Omega_E$ .

Comme on le verra dans les exemples, peu de fonctions spatiales seront nécessaires à la résolution du problème pour un grand nombre de cellules.

### ■ Phase d'initialisation pour les chargements cycliques

On a vu dans le paragraphe 3.3.4 que l'étape linéaire pouvait être résolue de manière incrémentale sur les intervalles macro  $I_i^M = (t'_i, t'_{i+1})$ ,  $i \in \{0 \dots N' - 1\}$ . Un problème micro est alors défini sur un domaine  $\Omega_E \times I_i^M$ . L'approximation radiale consiste à rechercher un jeu de fonctions spatiales et temporelles pour chaque intervalle macro. Les fonctions spatiales ainsi construites forment donc une base commune à tous les intervalles macro qui pourra être utilisée dans la phase d'initialisation. Cette technique pourra alors devenir très avantageuse dans le cas de chargements cycliques. Un cycle étant attribué à un intervalle macro ou un ensemble d'intervalles macro, on peut espérer n'avoir à calculer des fonctions spatiales que sur un très petit nombre d'intervalles macro.

*Remarque V.7 Ceci est également applicable au calcul des opérateurs homogénéisés  $\mathbf{L}_{E,i}^F$  des cellules d'espace-temps  $\Omega_E \times I_i^M$ .*

## 4 Exemples

### 4.1 Exemple 1 : résolution d'un problème micro

#### 4.1.1 Description du problème

On considère la cellule élémentaire de taille  $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$  décrite sur la figure V.1. Elle est constituée d'une matrice de matériau de type-1 et d'inclusions de matériau de type-2. Les matériaux considérés sont viscoélastiques linéaires de module d'Young  $E_i$ , coefficient de Poisson  $\nu_i$  et viscosité  $\eta_i$ . La loi de comportement est donc telle que  $\mathbf{B}_i = \frac{1}{\eta_i} \mathbf{K}_i^{-1}$ . Pour le matériau 1, on choisit  $E_1 = 50 \text{ GPa}$ ,  $\nu_1 = 0.3$  et  $\eta_1 = 10 \text{ s}$ . Pour le matériau 2, on choisit  $E_2 = 250 \text{ GPa}$ ,  $\nu_2 = 0.2$  et  $\eta_2 = 1000 \text{ s}$ . On s'intéresse à la résolution sur cette cellule du problème micro V.4 avec comme seule donnée le multiplicateur  $\widetilde{W}^M$ , décrit sur la figure V.1. La cellule est maillée avec 444

TRI3. On fait l'hypothèse des déformations planes. On prend  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$  et  $\mathbf{h} = \frac{1}{\eta_1} \frac{L_M}{E_1}$ , paramètre scalaire constant. L'intervalle d'étude considéré est  $[0, 10s]$ . La partition micro  $\mathcal{T}_h$  contient 60 intervalles identiques. Les espaces "micro" contiennent des fonctions de type  $\mathbf{Z}_0^{(0,T)}$  pour la partition  $\mathcal{T}_h$  (composantes de  $\mathbf{r}$  égales à 0).

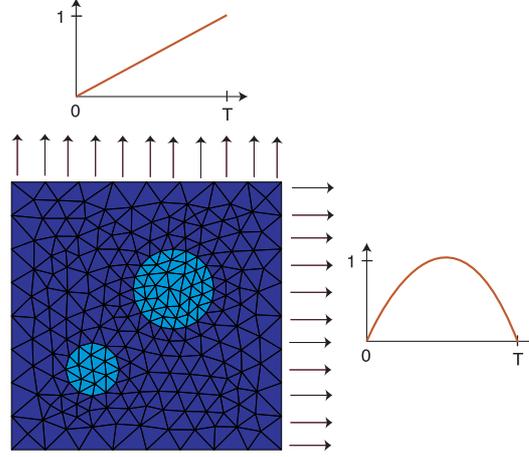


Figure V.1 – Description de la cellule et du chargement  $\widetilde{W}^M$

Afin de comparer l'approximation  $\widetilde{\mathbf{s}}$  avec la solution de référence  $\mathbf{s}$ , on utilisera les erreurs en contrainte et déformation définies de la manière suivante :

$$err_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}^2 = \frac{\|\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{H}}^2}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{H}}^2} = \frac{\int_{\Omega_E \times [0, T]} (\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{H}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \, dx \, dt}{\int_{\Omega_E \times [0, T]} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \, dx \, dt}$$

$$err_{\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^2 = \frac{\|\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbf{H}^{-1}}^2}{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbf{H}^{-1}}^2} = \frac{\int_{\Omega_E \times [0, T]} (\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbf{H}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) \, dx \, dt}{\int_{\Omega_E \times [0, T]} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \, dx \, dt}$$

#### 4.1.2 Application de la méthode classique

##### ■ Approximation radiale simple : étude de l'algorithme V.1

On recherche une approximation radiale simple pour la solution du problème micro formulé en contrainte. L'approximation est notée  $c(t)(\mathbf{C}, \underline{\mathbf{G}})(\underline{\mathbf{x}})$ . On utilise ici l'algorithme V.1 pour la construction d'une fonction radiale. Pour juger de la convergence de cet algorithme, on se base sur le critère suivant :

$$crit_k^2 = \frac{\|c^{(k+1)}\mathbf{C}^{(k+1)} - c^{(k)}\mathbf{C}^{(k)}\|_{\mathbf{H}}^2}{\|c^{(k+1)}\mathbf{C}^{(k+1)}\|_{\mathbf{H}}^2}$$

La figure V.2 montre l'évolution de ce critère et de l'erreur  $err_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}$  au cours des itérations de l'algorithme. On voit clairement que **l'algorithme ne converge pas**. On remarque que l'erreur sur la contrainte évolue entre 30% à 100% de manière "cyclique".

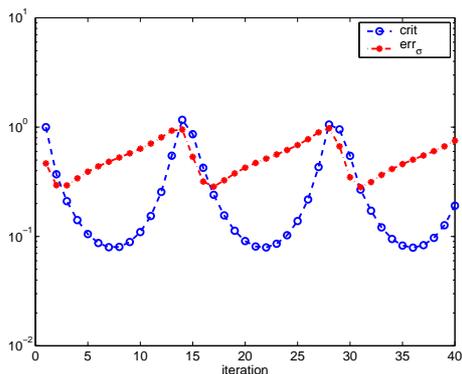


Figure V.2 – Critère de convergence  $crit_k$  et erreur  $err_{\tilde{\sigma}}$  en fonction de l'itération  $k$  de l'algorithme V.1

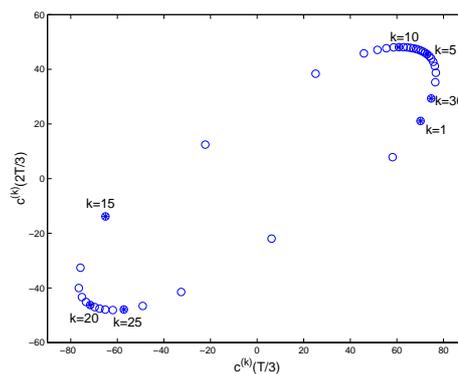


Figure V.3 – Lieu des points  $(c^{(k)}(T/3), c^{(k)}(2T/3))$  au cours des itérations de l'algorithme V.1

En fait, on est ici dans le cas où l'algorithme devrait être étendu aux complexes. La fonction  $c^{(k)}$  (resp.  $\mathbf{C}^{(k)}$ ) tend à tourner sur une ellipse d'un plan de  $\mathbf{Z}_0^{(0,T)}$  (resp.  $\mathcal{S}_{h,E}$ ), **phénomène caractéristique d'une méthode des puissances appliquée à un opérateur dont la plus grande valeur propre est complexe**. La figure V.3 représente le lieu des points  $(c^{(k)}(T/3), c^{(k)}(2T/3))$  au cours des itérations, ce qui confirme l'explication précédente. Cette méthode de construction n'est donc pas adaptée à la définition de l'approximation puisqu'elle ne converge pas en général.

### ■ Construction de plusieurs fonctions radiales

On veut construire plusieurs fonctions radiales, soit

$$(\tilde{\sigma}, \tilde{F})(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) (\mathbf{C}_i, \underline{G}_i)(\underline{x})$$

Une première méthode consiste à construire les unes après les autres les fonctions radiales. N'étant pas assuré de la convergence de l'algorithme V.1, on fixe  $k_{max} = 5$ . A chaque nouvelle fonction créée, il est également possible de réactualiser simultanément les fonctions temporelles associées à toutes les fonctions spatiales construites. On peut voir sur les figures V.4 et V.5 l'évolution des erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$  et  $err_{\tilde{\varepsilon}}$  en fonction du nombre de fonctions radiales calculées pour  $\tilde{\sigma}$ , avec ou sans réactualisation des fonctions temporelles. La méthode classique semble donner une meilleure approximation des contraintes que des déformations. Sans la réactualisation des fonctions temporelles, l'algorithme converge assez mal en terme de déformation.

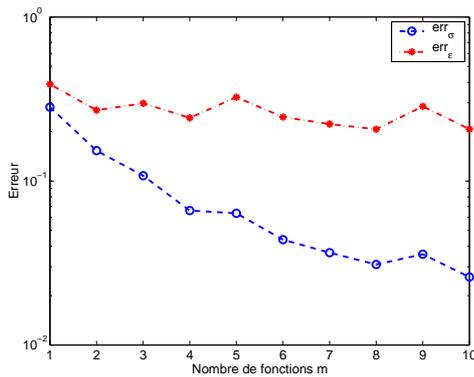


Figure V.4 – Erreurs  $err_{\sigma}$  et  $err_{\varepsilon}$  en fonction de  $m$  : construction des fonctions les unes après les autres

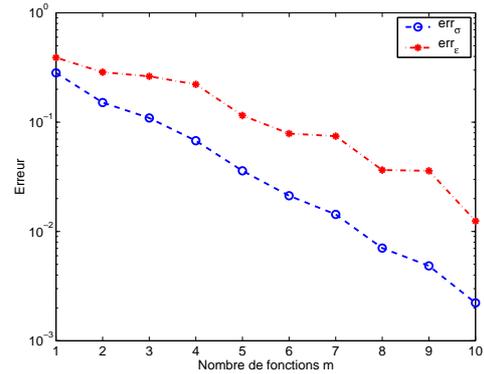


Figure V.5 – Erreurs  $err_{\sigma}$  et  $err_{\varepsilon}$  en fonction de  $m$  : construction des fonctions les unes après les autres avec réactualisation des fonctions temporelles

Une deuxième méthode consiste à construire simultanément plusieurs jeux de fonctions (algorithme équivalent à une méthode des puissances par bloc). Dans le cas où 2 fonctions sont construites simultanément, la figure V.6 montre l'évolution du critère de stagnation et de l'erreur  $err_{\sigma}$  au cours des itérations de l'algorithme. On s'aperçoit qu'on a une convergence rapide de l'algorithme. Cette méthode permet donc de pallier le problème de non-convergence dans ce cas particulier mais pas dans le cas général. De plus, les "problèmes spatiaux" voient leur taille multipliée par le nombre de fonctions calculées simultanément et leur résolution devient trop coûteuse.

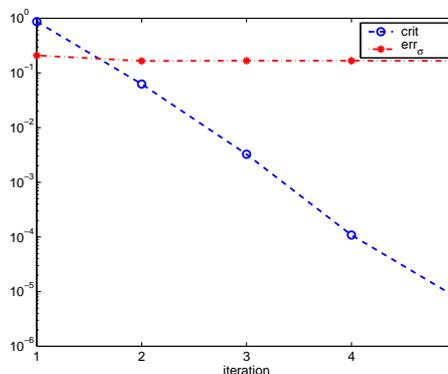


Figure V.6 – Evolution du critère de convergence  $crit_k$  et de l'erreur  $err_{\sigma}$  au cours des itérations : construction de 2 fonctions simultanément

Une dernière méthode consiste à appliquer l'algorithme de type Krylov V.2. La figure V.8 montre l'évolution du critère d'erreur  $err_{\sigma}$  pour différentes valeurs de  $k_{max}$ . Dans le cas présent, pour  $k_{max} = 7$ , le critère d'arrêt est atteint, c'est-à-dire que "l'espace de Krylov" associé à l'initialisation est "entièrement" exploré (relativement au critère d'arrêt choisi). Cette technique est beaucoup plus robuste que la technique consistant à construire les fonctions successivement (voir figure V.4). En fixant  $k_{max} = \infty$ , le critère d'arrêt sera atteint systématiquement et une approximation calculée. On peut ensuite réactualiser le second membre et relancer

le même algorithme. La figure V.8 indique l'erreur en fonction du nombre total de fonctions.

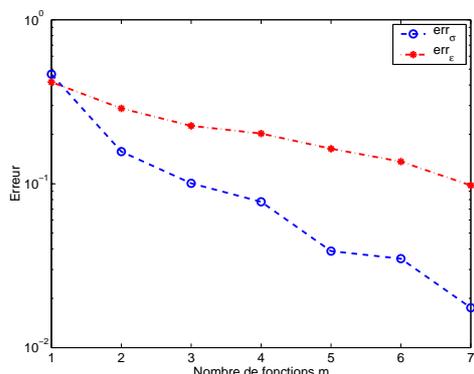


Figure V.7 – Algorithme V.2 de type Krylov : erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$  et  $err_{\tilde{\varepsilon}}$  en fonction de  $k_{max} \equiv m$

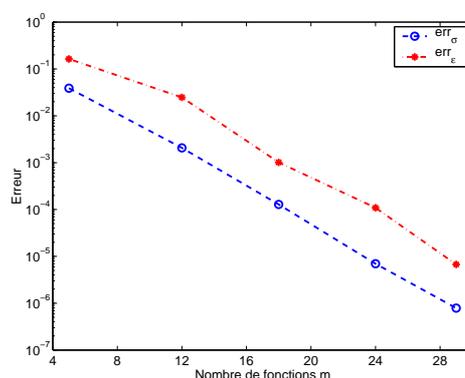


Figure V.8 – Algorithme V.2 de type Krylov réactualisé : erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$  et  $err_{\tilde{\varepsilon}}$  en fonction du nombre total de fonctions  $m$

Ce dernier algorithme semble donc relativement robuste. Il nécessite cependant un grand nombre de fonctions radiales. Si le but est de résoudre l'équation d'évolution, cette méthode peut être appliquée. Cette approche classique possède néanmoins des inconvénients majeurs. Un des intérêts de l'approximation radiale est d'obtenir un gain conséquent en stockage mémoire. Or seule les contraintes/efforts sont sous forme radiale et le coût de stockage reste inchangé pour les déformations/déplacements. De plus, le plus souvent, on peut se contenter d'une approximation grossière de ce problème. **Cette technique n'est donc pas adaptée puisqu'elle ne permet pas de construire la "meilleure" approximation et ne permet pas de juger de la qualité de l'approximation.**

#### 4.1.3 Application de la nouvelle technique

##### ■ Approximation radiale simple : étude de l'algorithme V.5

On étudie ici la nouvelle définition de l'approximation radiale, basée sur un problème de minimisation de l'erreur en relation de comportement (voir paragraphe 3).

On utilise l'algorithme V.5 pour la construction d'un jeu de fonctions radiales, soit

$$\begin{aligned}(\tilde{\sigma}, \tilde{F})(\underline{x}, t) &= c(t)(\mathbf{C}, \underline{G})(\underline{x}) \\ (\tilde{\varepsilon}, \tilde{W})(\underline{x}, t) &= e(t)(\mathbf{E}, \underline{Z})(\underline{x})\end{aligned}$$

Pour juger de la convergence de cet algorithme, on se base sur le critère de convergence du quotient de Rayleigh

$$crit_k = \frac{|\mathbf{R}(c^{(k+1)}, e^{(k+1)}) - \mathbf{R}(c^{(k)}, e^{(k)})|}{|\mathbf{R}(c^{(k+1)}, e^{(k+1)})|}$$

La figure V.2 montre l'évolution de ce critère et des erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$  et  $err_{\tilde{\varepsilon}}$  au cours des itérations de l'algorithme. L'algorithme est convergent. A convergence, on obtient

$err_{\tilde{\sigma}} = 30\%$  et  $err_{\tilde{\varepsilon}} = 27\%$ . Sur la figure V.10, on a tracé l'évolution au cours des itérations du quotient de Rayleigh et de l'erreur en relation de comportement  $e_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$ . On observe bien la corrélation entre ces deux valeurs, conséquence de la proposition V.3. L'algorithme semble pertinent puisqu'il maximise bien le quotient de Rayleigh. La convergence de l'algorithme V.5 est toujours observée en pratique.

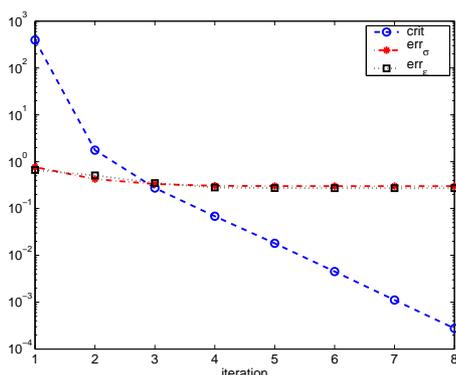


Figure V.9 – Critère de convergence  $crit_k$  et erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$  et  $err_{\tilde{\varepsilon}}$  en fonction de l'itération  $k$  de l'algorithme V.5

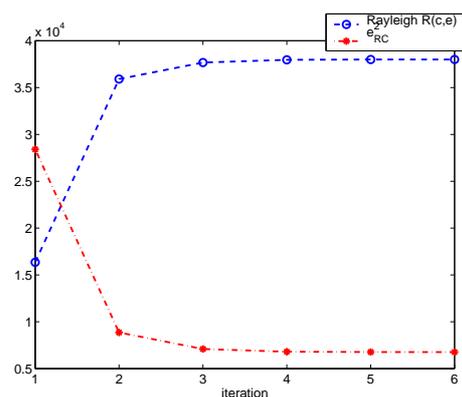


Figure V.10 – Evolution au cours des itérations du quotient de Rayleigh  $R(c^{(k+1)}, e^{(k+1)})$  et de l'erreur en relation de comportement

### ■ Construction de plusieurs fonctions radiales

On veut maintenant construire plusieurs fonctions radiales, soit

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\sigma}, \tilde{F})(\underline{x}, t) &= \sum_{i=1}^m c_i(t) (C_i, G_i)(\underline{x}) \\
 (\tilde{\varepsilon}, \tilde{W})(\underline{x}, t) &= \sum_{i=1}^{m''} e_i(t) (E_i, Z_i)(\underline{x})
 \end{aligned}$$

On construit les jeux de fonctions les uns après les autres par l'algorithme V.5. Pour chaque nouveau jeu de fonctions construit, il est également possible de réactualiser simultanément les fonctions temporelles associées à toutes les fonctions spatiales créées. La qualité de la nouvelle approximation  $\tilde{\mathbf{s}}$  est estimée par les erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$  et  $err_{\tilde{\varepsilon}}$  et le critère sur l'erreur en relation de comportement  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}})$  défini par (V.6).

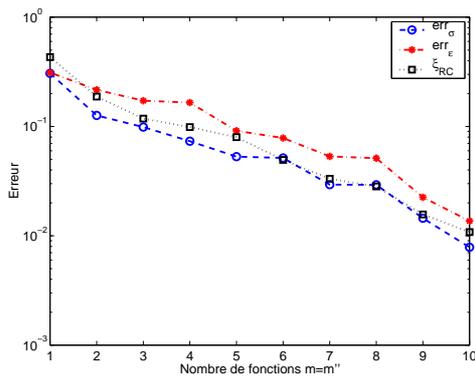


Figure V.11 – Erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$ ,  $err_{\tilde{\varepsilon}}$  et  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}})$  en fonction de  $m = m''$ : construction d'un jeu de fonctions à la fois

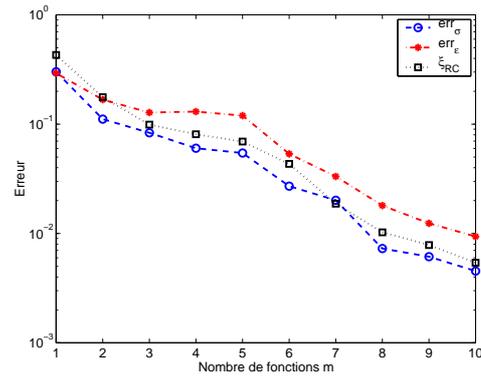


Figure V.12 – Erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$ ,  $err_{\tilde{\varepsilon}}$  et  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}})$  en fonction de  $m = m''$ : construction d'un jeu de fonctions à la fois avec réactualisation des fonctions temporelles

On peut observer sur la figure V.11 une bonne convergence vers la solution exacte à la fois pour les contraintes et les déformations, ce qui n'était pas le cas de la méthode classique. L'algorithme sans réactualisation des fonctions temporelles (figure V.11) est sensiblement aussi performant que l'algorithme avec réactualisation (figure V.12), ce qui confirme que l'algorithme est bien adapté à la nouvelle définition de l'approximation. On vérifie de plus la bonne corrélation entre l'erreur en relation de comportement et les erreurs  $err_{\tilde{\sigma}}$  et  $err_{\tilde{\varepsilon}}$ . **L'erreur en relation de comportement apparaît donc comme un critère d'erreur a posteriori très pertinent.** La figure V.13 compare l'approximation à la référence en termes de contraintes de Von Mises. En fait, peu de fonctions suffisent à obtenir une approximation correcte de la solution.

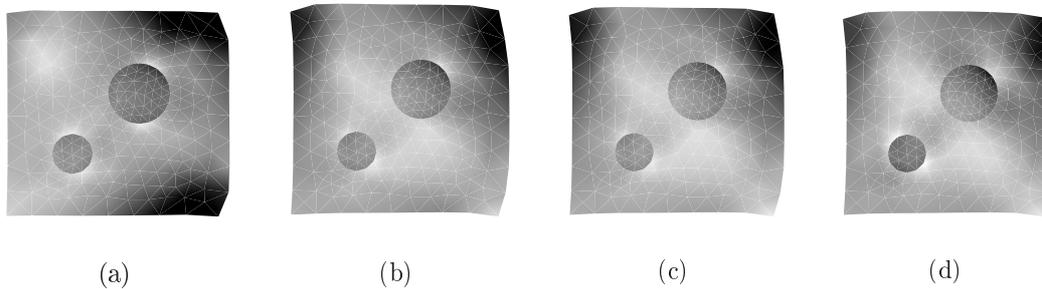


Figure V.13 – Contraintes de Von Mises à l'instant  $t = 2T/3$  pour la référence (d) et pour l'approximation radiale avec  $m = m'' = 1$  (a), 2 (b) et 3 (c)

## 4.2 Exemple 2 : multirésolution - réutilisation des fonctions spatiales

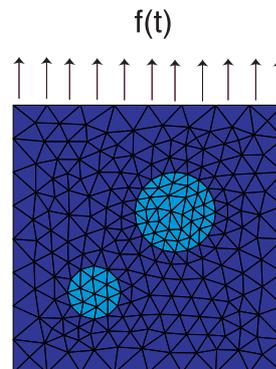


Figure V.14 – Description de la cellule et du chargement  $\widetilde{W}^M$

On considère le même problème que précédemment avec comme seule donnée  $\widetilde{W}^M$ , pour qui on choisit une distribution verticale uniforme sur le côté supérieur de la cellule. L'évolution au niveau temporel est décrite par une fonction  $f(t)$  (figure V.14).

### 4.2.1 Multirésolution pour différents chargements

On s'intéresse ici à la résolution de ce problème pour différents cas de chargements  $\{f_i(t)\}$  (figure V.15).

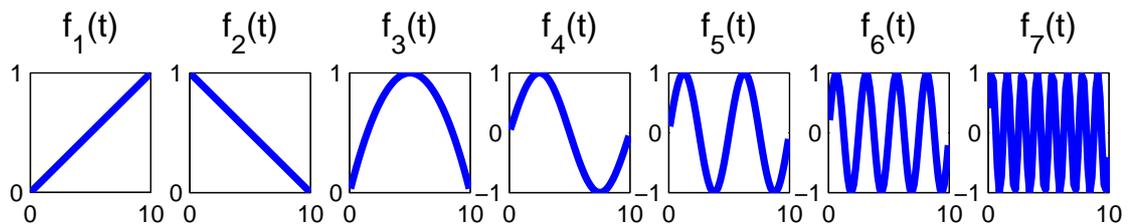


Figure V.15 – Différents cas de chargement  $f_i(t)$

L'utilisation de l'approximation radiale pour un cas de chargement permet de construire une base de fonctions spatiales réutilisables pour le calcul des autres cas de chargement. On teste ici cette réutilisation de la manière suivante : pour le premier cas de chargement  $f_1(t)$ , on construit un ensemble de jeux de fonctions radiales afin d'atteindre une erreur en relation de comportement inférieure à 1%, soit  $m = m'' = 6$  dans ce cas (jeux de fonctions calculés les uns après les autres par l'algorithme V.5). Les autres cas de chargement seront traités en réutilisant les fonctions spatiales du premier cas de chargement. On se contente donc de calculer les fonctions temporelles en minimisant l'erreur en relation de comportement, les fonctions spatiales étant données. Le tableau V.6 indique la qualité de l'approximation ainsi obtenue pour les différents cas de chargement.

	$err_{\tilde{\sigma}}$	$err_{\tilde{\varepsilon}}$	$\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}})$
$f^1(t)$	0.0024	0.0075	0.0031
$f^2(t)$	0.0127	0.0232	0.0160
$f^3(t)$	0.0043	0.0089	0.0048
$f^4(t)$	0.0050	0.0086	0.0045
$f^5(t)$	0.0068	0.0085	0.0048
$f^6(t)$	0.0125	0.0097	0.0062
$f^7(t)$	0.0238	0.0144	0.0098

Tableau V.6 – Réutilisation des fonctions spatiales : erreurs relatives et erreurs en relation de comportement pour différents cas de chargement

La simple réutilisation des fonctions spatiales permet donc d'obtenir pour les différents cas de chargement une erreur relative comparable à celle du premier cas de chargement  $f_1(t)$ .

Cette phase de réutilisation sera systématiquement appliquée dans le cadre de la stratégie de calcul multiéchelle.

*Remarque V.8 Cette propriété peut être utilisée avantageusement pour le calcul des opérateurs homogénéisés. En effet, pour une fonction de base macro spatiale donnée, on doit résoudre un ensemble de problèmes micro associés aux différentes fonctions de base macro temporelle. Le premier problème étant résolu, les suivants seront résolus à moindre coût. On pourra donc envisager des espaces macro assez riches au niveau temporel sans augmenter considérablement le coût de calcul des opérateurs homogénéisés.*

#### 4.2.2 Multirésolution pour différents paramètres matériau

On prend pour chargement  $f(t) = f_1(t)$ . On s'intéresse à la résolution du problème pour différents paramètres matériau. On effectue l'approximation radiale pour les paramètres de référence. Les autres cas de paramètres seront calculés simplement en réutilisant les fonctions de base calculées lors du premier calcul. Le tableau V.7 indique l'erreur en relation de comportement pour différents modules d'Young  $E_1$  de la matrice et  $E_2$  des inclusions.

	$E_2 = 200$	$E_2 = 225$	$E_2 = 250$	$E_2 = 275$	$E_2 = 300$
$E_1 = 30$	0.0596	0.0744	0.0871	0.0983	0.1082
$E_1 = 40$	0.0125	0.0275	0.0419	0.0547	0.0659
$E_1 = 50$	0.0368	0.0169	0.0031	0.0153	0.0278
$E_1 = 60$	0.0786	0.0569	0.0387	0.0236	0.0130
$E_1 = 70$	0.1175	0.0945	0.0749	0.0583	0.0443

Tableau V.7 – Réutilisation des fonctions spatiales : erreur en relation de comportement  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}})$  pour différents paramètres matériau  $E_1$  et  $E_2$  (en  $GPa$ )

L'erreur ne dépasse jamais 12% alors que les variations relatives des paramètres atteignent 40%. La réutilisation semble donc très efficace dans le cas où les proprié-

tés matériau sont légèrement modifiées. On comprend alors l'intérêt qu'aura cette méthode d'approximation dans le cas de problèmes non-linéaires d'évolution.

### 4.3 Exemple 3 : application au calcul du portique hétérogène

On considère le problème 2D d'une structure composite contenant des fissures (Figure V.16), décrit au paragraphe 6.1 du chapitre II.

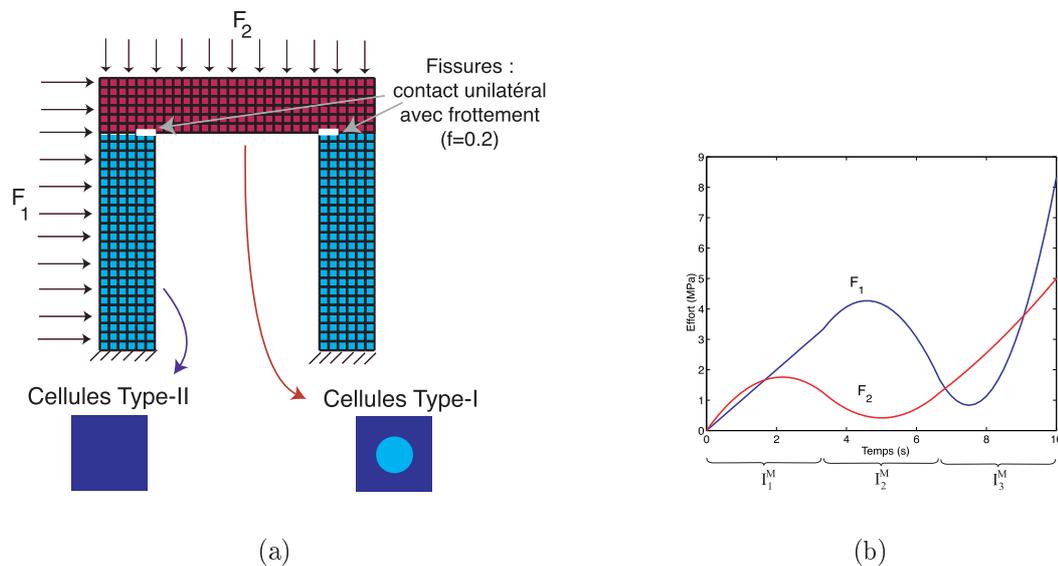


Figure V.16 – Description du problème (a) et allure des chargements  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  (b)

On résoud ici l'étape linéaire de manière incrémentale sur les intervalles macro. L'approximation radiale d'un problème micro consiste donc à rechercher un jeu de fonctions spatiales et temporelles pour chaque intervalle macro. La structure comporte deux familles de cellules. Les fonctions spatiales construites seront donc conservées systématiquement et alimenteront deux bases communes de fonctions qui serviront à la résolution des problèmes micro de chacune des familles de cellules. La résolution d'un problème micro commencera donc systématiquement par une phase d'initialisation sur ces espaces de fonctions (voir paragraphe 3.4). On choisit un critère de vérification des directions de recherche  $\xi_{RC}^c = 50\%$ . Si  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{s}}) > \xi_{RC}^c$  après la phase d'initialisation, on calculera un nouveau jeu de fonctions par l'algorithme V.5 avec pour paramètres  $k_{max} = 2$  et un critère d'arrêt de  $10^{-2}$  sur la convergence du quotient de Rayleigh.

On peut observer sur les figures V.17 et V.18 que très peu de nouveaux jeux de fonctions radiales sont effectivement calculés durant la résolution du problème.

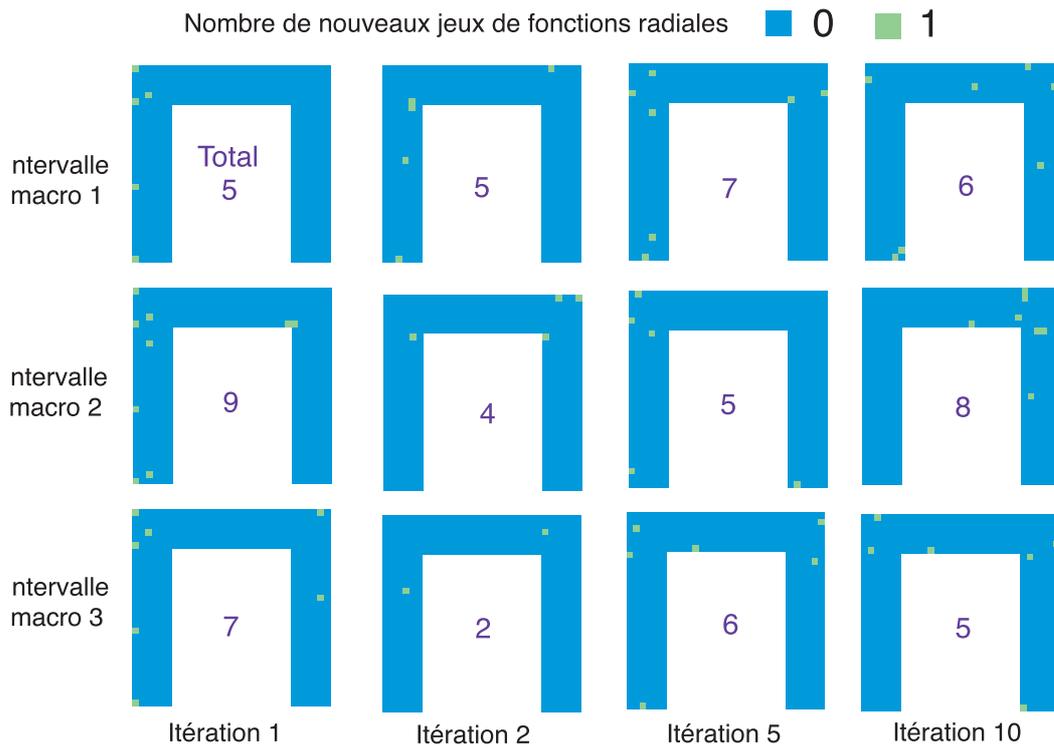


Figure V.17 – Nombre de nouveaux jeux de fonctions radiales par sous-structure, intervalle macro et itération

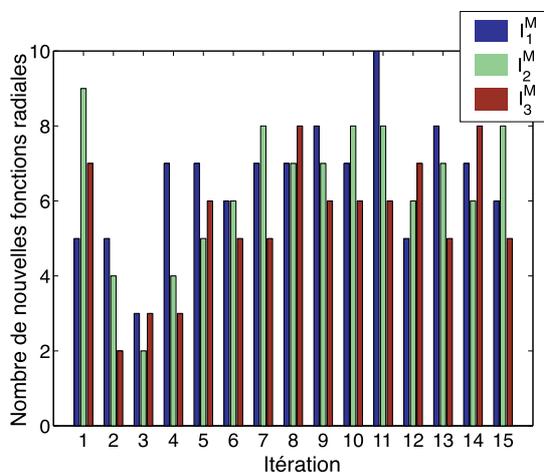


Figure V.18 – Nombre total de nouveaux jeux de fonctions radiales par intervalle macro et par itération

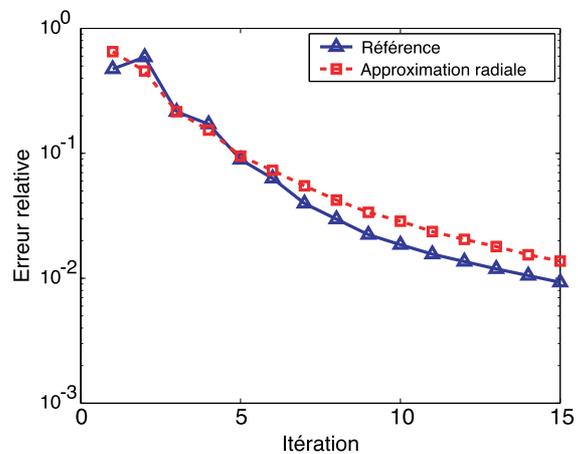


Figure V.19 – Evolution de l'erreur au cours des itérations avec ou sans approximation radiale des problèmes micro

On peut de plus observer sur la figure V.19 que la convergence de la méthode LATIN n'est pas affectée par cette approximation. La construction d'un unique nouveau jeu de fonctions radiales est donc généralement suffisant. Cela justifie l'intérêt de la nouvelle méthode d'approximation qui permet de définir la "meilleure" approximation. Un autre grand intérêt de cette nouvelle démarche est qu'elle nous offre un critère d'erreur simple basé sur l'erreur de comportement et qui

semble très pertinent au vu des résultats obtenus.

*Remarque V.9* On peut cependant remarquer que le nombre de nouveaux jeux de fonctions radiales par itération est à peu près stable. Le critère de vérification des directions de recherche  $\xi_{RC}(\tilde{\mathbf{S}}; \bar{\mathbf{S}})$ , certes pertinent, est un critère d'erreur relatif un peu trop sévère. Un critère d'erreur absolu, consistant à normer l'erreur en relation de comportement par la norme de la solution courante, est en fait souvent suffisant. Il permet d'obtenir une décroissance du nombre de nouveaux jeux de fonctions par itération et ainsi de réduire considérablement le coût de calcul.

### ■ Coût de l'algorithme

Rappelons qu'à chaque itération, deux problèmes micro doivent être résolus par sous-structure et par intervalle macro. Avec une méthode de résolution incrémentale, cela demande la résolution de  $468 \times 60 \times 2 \times 3 = 168480$  problèmes "spatiaux" par itération. La méthode d'approximation radiale pour ce problème nécessite en moyenne une vingtaine de nouveaux jeux de fonctions par itération. Sachant qu'on a fixé  $k_{max}$  à 2, on a donc résolu en moyenne  $20 \times 2 = 40$  problèmes "spatiaux" par itération. Le nombre de problèmes spatiaux à résoudre, certes de taille deux fois plus grande qu'un calcul éléments finis classique sur une cellule, est donc réduit d'un facteur 4000.

*Remarque V.10* Ce gain pourrait encore être amélioré si on considérait une base de fonctions radiales commune à tous les intervalles macro.

Les assemblages des problèmes spatiaux et temporels peuvent cependant être assez coûteux puisqu'ils nécessitent de nombreux calculs d'intégrales en temps et en espace. Pour alléger ces calculs, il peut être souhaitable d'opérer également une décomposition radiale de  $\hat{\mathbf{S}}$  et des opérateurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{h}$ . En effet, les variables et opérateurs étant décrits sous forme radiale, les intégrales sur l'espace-temps se découpent en produits d'intégrales sur l'espace et d'intégrales sur le temps. Une méthode simplifiée pour la construction des décompositions radiales peut être trouvée dans [Ladevèze, 1997]. Ces améliorations n'ont pas encore été envisagées.

## Bilan

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence les faiblesses de la méthode d'approximation radiale classique d'une équation d'évolution. Des techniques de construction plus sophistiquées de cette approximation, inspirées des techniques de résolution des problèmes aux valeurs propres, ont été proposées. Elles ne répondaient cependant toujours pas au véritable problème qui était de trouver la "meilleure" approximation. La reformulation d'un problème d'évolution sous la forme d'un problème de minimisation nous a enfin permis de définir rigoureusement la meilleure approximation radiale. Cette nouvelle définition offre à présent un critère d'évaluation *a posteriori* de la qualité de l'approximation. L'algorithme de recherche de cette approximation semble également avoir gagné en robustesse.

L'application de cette méthode à la stratégie de calcul multiéchelle a nécessité une reformulation mixte des problèmes micro, basée sur un problème de minimisation

de l'erreur en relation de comportement issue des directions de recherche de l'algorithme. Cette nouvelle méthode d'approximation des problèmes micro permet d'obtenir un gain considérable en termes de temps de calcul et de coût mémoire sans pour autant affecter l'efficacité et la robustesse de la stratégie. En permettant la construction d'une base réduite commune de fonctions spatiales pertinentes, cette méthode permet d'envisager l'analyse "fine" de structures composites à très grand nombre de cellules.

# Conclusion - Perspectives

Dans ce travail, une nouvelle stratégie de calcul multiéchelle a été proposée pour l'analyse de problèmes non-linéaires d'évolution qui inclut une procédure d'homogénéisation automatique à la fois en temps et en espace. Cette stratégie, développée dans un cadre général, ne formule pas d'hypothèse *a priori* sur la forme de la solution et devrait donc se substituer avantageusement aux techniques d'homogénéisation standards dans certains domaines d'application. La stratégie a été présentée dans le cadre des structures (visco)-plastiques. Basée sur une méthode de décomposition de domaine mixte, elle rend possible le traitement de nombreux types de comportement d'interface. Les tests numériques réalisés ont pu mettre en évidence son efficacité dans le traitement de problèmes d'évolution où les non-linéarités considérées étaient de type contact unilatéral avec frottement. Nous avons également illustré l'aptitude de cette méthode à traiter des problèmes qui peuvent être qualifiés de "multi-contact", pour lesquels l'extensibilité numérique a été observée.

Indépendamment de cette stratégie de calcul, nous avons pu mettre en évidence et expliquer les conséquences d'un mauvais choix de discrétisation dans les approches de décomposition de domaine mixte. Nous avons alors proposé une méthode de discrétisation "physiquement" et "numériquement" saine des interefforts, simple de mise en oeuvre. Elle permet non seulement d'obtenir une solution discrétisée d'une très bonne qualité mais également d'augmenter de manière conséquente les performances des algorithmes itératifs de résolution.

La nouvelle stratégie de calcul multiéchelle, certes très robuste, peut néanmoins engendrer un coût de calcul prohibitif pour les applications qui nous intéressent. Nous avons donc également introduit des améliorations visant à réduire ce coût.

Nous avons tout d'abord proposé deux méthodes de résolution alternatives du problème macroscopique de la stratégie de calcul multiéchelle qui sont basées sur une vision à trois échelles de la structure. Elles permettent d'obtenir une réduction considérable du coût de calcul et ainsi d'envisager le traitement de structures comportant un grand nombre de cellules. La première méthode propose de résoudre le problème macroscopique par une méthode de décomposition de domaine mixte multiéchelle non classique en ce sens que les variables associées aux sous-domaines ne sont pas des contraintes et des déformations mais des efforts et déplacements "macro" d'interface. La seconde méthode propose d'approximer le problème macro en introduisant une cinématique approchée de la troisième échelle inspirée de la cinématique des milieux de Cosserat. Elle est une simple extension au cadre quasi-statique de l'approche initialement proposée dans [Loiseau et al., 2002]. Les résultats obtenus ont pu montrer qu'une approximation relativement grossière du problème macroscopique n'affecte pas de manière significative l'efficacité de la stratégie de

calcul.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la méthode d'approximation radiale d'une équation d'évolution. Une nouvelle définition de cette approximation, basée sur un problème de minimisation, a été proposée. Elle permet de pallier les inconvénients de la définition classique de cette approximation et offre de plus un critère d'évaluation *a posteriori* de la qualité de l'approximation. Cette nouvelle méthode a été appliquée à la stratégie de calcul multiéchelle pour la résolution des problèmes micro en introduisant le concept de minimisation de l'erreur en relation de comportement issue des directions de recherche de l'algorithme. Elle permet d'obtenir un gain considérable en termes de temps de calcul et de coût de stockage mémoire sans pour autant affecter l'efficacité et la robustesse de la stratégie. De plus, en permettant la construction d'une base réduite de fonctions spatiales pertinentes, cette méthode permet d'envisager l'analyse "fine" de structures composites à très grand nombre de cellules.

Un certain nombre de points techniques qui n'ont pas été abordés durant cette thèse restent néanmoins à développer. L'optimisation des directions de recherche au niveau des interfaces, déjà étudiée dans le cas de l'élastostaticité linéaire [Violeau, 2003], et l'automatisation du choix de l'espace macroscopique au niveau temporel permettraient d'améliorer la qualité de notre démarche d'homogénéisation et ainsi d'augmenter les performances de la stratégie de calcul. L'implémentation dans le cadre "non-linéaire matériau" reste également à mener mais ne devrait pas poser de problème particulier. Enfin, cette stratégie offre un haut degré de parallélisation qui pourrait être exploité par des calculateurs à architecture parallèle et ainsi permettre l'analyse de problèmes jusqu'à présent hors de portée.

Une perspective à moyen terme concerne l'extension de cette stratégie de calcul au traitement de microstructures aléatoires. La démarche d'homogénéisation sur l'espace-temps et les techniques d'approximation proposées dans ce travail devrait en effet pouvoir se transposer aisément aux aspects probabilistes. Une perspective à plus long terme concerne l'extension de ces travaux au cadre de la dynamique transitoire.

# Annexe A

## Résolution d'un problème d'évolution du premier ordre en temps par la méthode de Galerkin discontinue

### 1 Formulation abstraite du problème d'évolution

#### 1.1 Espaces fonctionnels

Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{X}}$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ . Notons  $I = (0, T)$  l'intervalle d'étude. On pose

$$L^2(I; \mathcal{X}) = \{u : I \rightarrow \mathcal{X} / u \text{ est mesurable et } \int_I \|u(t)\|_{\mathcal{X}}^2 dt < \infty\}$$

$L^2(I; \mathcal{X})$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(I; \mathcal{X})} = \int_I (u, v)_{\mathcal{X}} dt$$

On se donne à présent un couple d'espaces de Hilbert séparables  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose  $\mathcal{V}$  dense dans  $\mathcal{H}$  et on identifie  $\mathcal{H}$  et son dual  $\mathcal{H}'$ . On a

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'$$

où  $\hookrightarrow$  désigne l'injection continue. On désigne par  $(\cdot, \cdot)$  le produit de dualité sur  $\mathcal{V}' \times \mathcal{V}$ .

#### 1.2 Formes bilinéaires $c(u, v)$ et $a(t, u, v)$ , $t \in (0, T)$

On introduit  $c(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , une forme bilinéaire symétrique continue. De plus, elle est supposée vérifier :  $\exists \gamma > 0$  tel que,  $\forall u \in \mathcal{H}$ ,  $c(u, u) \geq \gamma \|u\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}$ .

On introduit également  $a(t; \cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , une forme bilinéaire qui satisfait :

– la fonction  $t \mapsto a(t; u, v)$  est mesurable  $\forall u, v \in \mathcal{V}$

- $\exists M > 0$  tel que,  $\forall t \in [0, T], \forall u, v \in \mathcal{V}, |a(t; u, v)| \leq M \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}$
- $\exists \alpha > 0$  tel que,  $\forall t \in [0, T], \forall u \in \mathcal{V}, a(t; u, u) \geq \alpha \|u\|_{\mathcal{V}} \|u\|_{\mathcal{V}}$

### 1.3 Formulation du problème d'évolution

Soit  $f \in L^2(I; \mathcal{V}')$  et  $u_0 \in \mathcal{V}$ . On introduit  $W(I; \mathcal{V}, \mathcal{V}') = \{u \in L^2(I; \mathcal{V}) / \frac{du}{dt} \in L^2(I; \mathcal{V}')\}$ . Un problème d'évolution classique du premier ordre en temps peut alors s'écrire sous la forme suivante :

**Problème A.1** Trouver  $u \in W(I; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  tel que  $u(0) = u_0$  et,  $\forall t \in I$

$$\frac{d}{dt}c(u(t), v) + a(t; u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

Ce problème admet une solution unique (voir [Dautray et Lions, 1987]).

### 1.4 Exemples

#### 1.4.1 Méthode LATIN classique

On considère le problème d'élasto-visco-plasticité classique sans variable interne présenté dans le chapitre 1, paragraphe 2.3. La résolution de ce problème par la méthode LATIN conduit à résoudre à l'itération  $n$  un problème linéaire défini sur un incrément de contrainte. On pose

$$\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]_{sym}^{d \times d}$$

On note  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n$  et  $\Delta \widehat{\mathbf{s}} = \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n$ . Le problème peut être formulé sur  $\Delta u \equiv \Delta \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{V}$  où

$$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} / \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ sur } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma} \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial_2 \Omega\}$$

On pose

$$\begin{aligned} c(u, u^*) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dx \\ a(t; u, u^*) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{H}(t) \boldsymbol{\sigma} \, dx \\ (f, u^*) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^* : \left( \mathbf{H}(t) \Delta \widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta \dot{\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p \right) \, dx \end{aligned}$$

où  $\mathbf{K}$  est le tenseur de Hooke et  $\mathbf{H}(t)$  un tenseur défini positif, direction de recherche de l'algorithme.  $u$  doit de plus vérifier des conditions initiales nulles. Remarquons que  $\mathcal{H}$  peut être muni du produit scalaire  $(u, u^*)_{\mathcal{H}} = c(u, u^*)$ .

### 1.4.2 Méthode LATIN multiéchelle

On considère à présent le problème micro à l'itération  $n$  de l'étape linéaire de la stratégie de calcul multiéchelle présentée dans le chapitre II. Ce problème, défini sur  $\Omega_E \times (0, T)$ , peut être formulé sur un incrément des contraintes, efforts et variables internes. On pose

$$\mathcal{H} = \left\{ (\boldsymbol{\sigma}, \underline{F}, \mathbf{Y}) \in [L^2(\Omega_E)]_{sym}^{d \times d} \times [H^{-1/2}(\partial\Omega_E)]^d \times [L^2(\Omega_E)]^{n_i} / \boldsymbol{\sigma} \underline{n} = \underline{F} \text{ sur } \partial\Omega_E \right\}$$

où  $n_i$  désigne le nombre de variables internes scalaires. On note également  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n$  et  $\Delta \widehat{\mathbf{s}} = \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n$ . Le problème peut être formulé sur  $\Delta u \equiv (\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \underline{F}, \Delta \mathbf{Y}) \in \mathcal{V}$ , où

$$\mathcal{V} = \{ (\boldsymbol{\sigma}, \underline{F}, \mathbf{Y}) \in \mathcal{H} / \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ sur } \Omega_E \}$$

Avec les notations du chapitre II,  $\mathcal{V} = \mathbf{F}_{E,0} \times \mathcal{Y}_E$ . On pose

$$\begin{aligned} c(u, u^*) &= \int_{\Omega_E} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dx + \int_{\Omega_E} \mathbf{Y}^* \circ \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{Y} \, dx \\ a(t; u, u^*) &= \int_{\Omega_E} \mathbf{H}(t) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} \, dx + \int_{\partial\Omega_E} \mathbf{h} \underline{F} \cdot \underline{F}^* \, ds \\ (f, u^*) &= \mu \int_{\Omega} \left( \mathbf{H}(t) \begin{bmatrix} \Delta \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \Delta \widehat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta \dot{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ -\Delta \dot{\widehat{\mathbf{X}}} \end{bmatrix} \right) \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} \, dx + \\ &\quad \mu \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}^* \cdot (\mathbf{h} \Delta \widehat{\underline{F}} + \Delta \widehat{\underline{W}}) \, ds + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}^* \cdot \widehat{\underline{W}}^M \, ds \end{aligned}$$

où  $\mathbf{K}$  est le tenseur de Hooke,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{h}$  des opérateurs positifs, directions de recherche de l'algorithme, et où  $\mu$  est un paramètre de relaxation.  $u$  doit de plus vérifier des conditions initiales nulles.

## 1.5 Semi-discrétisation spatiale

On utilisera classiquement la méthode des éléments finis.  $\mathcal{V}$  est approximé par un espace de dimension finie  $n$ , noté  $\mathcal{V}_h$ . Des éléments  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{V}_h$  peuvent être représentés par des vecteurs de dimension  $n$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ . Pour simplifier les notations, on peut considérer que la forme bilinéaire  $c(\cdot, \cdot)$  définit le produit scalaire de  $\mathcal{H}$  et que la base éléments finis est orthonormée par rapport à ce produit scalaire :

$$c(U, V) = (V, U)_{\mathcal{H}} = \mathbf{V}^T \mathbf{U}$$

On définit également l'approximation de la forme bilinéaire  $a(t; \cdot, \cdot)$  de la manière suivante :  $\forall t \in I, \forall U, V \in \mathcal{V}_h$

$$a(t; U, V) = \mathbf{V}^T \mathbb{A}(t) \mathbf{U}$$

où  $\mathbb{A} : t \in I \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $\forall t \in I$ ,  $\mathbb{A}(t)$  est définie positive.

On définit également  $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que,  $\forall t \in I, \forall V \in \mathcal{V}_h$

$$(f(t), V) = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(t)$$

Le problème d'évolution discrétisé en espace s'écrit donc :

**Problème A.2** Trouver  $\mathbf{u} \in W(I; \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tel que  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  et

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} + \mathbb{A}(t) \mathbf{u} = \mathbf{f}(t)$$

## 2 Méthode de Galerkin discontinue

On introduit au niveau temporel la méthode de Galerkin discontinue [Eriksson et al., 1985].

### 2.1 Partition de $(0, T)$ et espaces d'approximation

Soit  $\mathcal{J}_h = \{I_i = (t_i, t_{i+1})\}_{i=0}^{N-1}$  une partition de l'intervalle d'étude  $(0, T)$ , avec  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Le principe de la méthode consiste à approximer la solution du problème sur chaque intervalle  $I_i$  par un polynôme de degré  $r_i$  à coefficients dans  $\mathcal{V}$ . Notons  $\mathcal{P}_r(J; \mathcal{V})$  l'espace des fonctions définies sur l'ouvert  $J \subset \mathbb{R}$ , polynômiales de degré  $r$  à coefficients dans  $\mathcal{V}$ , soit

$$\mathcal{P}_r(J; \mathcal{V}) = \{v : J \rightarrow \mathcal{V} \mid v(t) = \sum_{n=0}^r v_n t^n, v_n \in \mathcal{V}\}$$

On recherche donc une approximation de la solution dans l'espace  $\mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathcal{V})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^N$ , défini par

$$\mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathcal{V}) = \{v \mid v|_{I_i} \in \mathcal{P}_{r_i}(I_i; \mathcal{V}), \forall i \in \{0, \dots, N-1\}\}$$

### 2.2 Définition de la dérivée temporelle

Les fonctions de type  $\mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathcal{V})$  sont *a priori* discontinues aux instants  $\{t_i\}_{i=0}^N$ . La dérivée temporelle doit alors être redéfinie au sens des distributions.

Soit  $a \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathbb{R})$ . Prolongeons  $a(t)$  sur  $\mathbb{R}$  de telle sorte à avoir  $a|_{(-\infty, 0)} = a(t_0^-)$  et  $a|_{(t_N, \infty)} = a(t_N^+)$ . On note

$$a(t_i^\pm) = \lim_{s \rightarrow 0^\pm} a(t_i + s)$$

Notant  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à support compact dans  $\mathbb{R}$ , on définit alors naturellement la dérivée  $\dot{a} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telle que  $\forall b \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle \dot{a}, b \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \dot{a} b \, dt + \sum_{i=0}^N (a(t_i^+) - a(t_i^-)) b(t_i)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité.

On souhaite de plus envisager des fonctions tests dans le même espace que la solution, c'est-à-dire éventuellement discontinues. Un choix naturel pour les problèmes d'évolution est de considérer des fonctions semi-continues supérieurement. De plus, les fonctions sur  $(t_N, \infty)$  peuvent être prises égales à zéro. Les valeurs des fonctions

sur  $(-\infty, 0)$  correspondent aux conditions initiales. On optera alors pour la nouvelle définition de la dérivée :

$$\langle \dot{a}, b \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \dot{a} b \, dt + \sum_{i=0}^{N-1} (a(t_i^+) - a(t_i^-)) b(t_i^+) \quad (\text{A.1})$$

On montre que cette nouvelle définition a un sens.

## 2.3 Formulation variationnelle du problème d'évolution

Le problème A.1 approximé par la méthode de Galerkin discontinue s'écrit alors :

**Problème A.3** Trouver  $u \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathcal{V})$  tel que,  $\forall v \in \mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathcal{V})$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \{c(\dot{u}, v) + a(t; u, v)\} \, dt + \sum_{i=1}^{N-1} c(u(t_i^+) - u(t_i^-), v(t_i^+)) + c(u(t_0^+), v(t_0^+)) = \\ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (f, v) \, dt + c(u_0, v(t_0^+)) \end{aligned}$$

Notons que la condition initiale  $u_0$  apparaît au second membre. Elle ne sera vérifiée qu'au sens faible par la solution.

## 2.4 Résolution incrémentale du problème

Grâce à la définition adoptée pour la dérivée, il est possible de résoudre le problème de manière incrémentale sur les intervalles  $I_i$ ,  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ . La solution étant supposée connue sur  $(t_0, t_i)$ , on considère les fonctions test nulles hors de l'intervalle  $I_i$ ; cela conduit à l'écriture suivante du problème sur l'intervalle  $I_i$  :

**Problème A.4** Trouver  $u \in \mathcal{P}_{r_i}(I_i; \mathcal{V})$  tel que,  $\forall v \in \mathcal{P}_{r_i}(I_i; \mathcal{V})$ ,

$$\int_{I_i} \{c(\dot{u}, v) + a(t; u, v)\} \, dt + c(u(t_i^+), v(t_i^+)) = \int_{I_i} (f, v) \, dt + c(u(t_i^-), v(t_i^+))$$

## 2.5 Propriétés de l'approximation temporelle

On notera pour simplifier  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)} = \mathbf{Z}_r(\mathcal{J}_h; \mathbb{R})$ . Posons alors

**Définition A.1** Pour  $a$  et  $b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\int_{[0,T]} a \dot{b} \, dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} a \dot{b} \, dt + a(t_0^+) b(t_0^+) + \sum_{i=1}^{N-1} a(t_i^+) (b(t_i^+) - b(t_i^-))$$

*Remarque A.1* La définition A.1 ne fait intervenir que les valeurs des fonctions sur l'intervalle  $(0, T)$ .

**Proposition A.2**

$$\left\{ a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} ; \int_{[0,T]} a \dot{b} dt = 0 , \forall b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} ; \int_{[0,T]} a \dot{b} dt = 0 , \forall a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \right\} = \{0\}$$

□ **Preuve** : Montrons d'abord la deuxième partie de la proposition. Soit  $b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  tel que  $\forall a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}, \int_{[0,T]} a \dot{b} dt = 0$ . Prenant  $a|_{I_j} = 0, \forall j \geq 1$ , on a

$$\int_{(t_0, t_1)} a \dot{b} dt + a(t_0^+)b(t_0^+) = - \int_{(t_0, t_1)} \dot{a} b dt + a(t_1^-)b(t_1^-) = 0 , \quad \forall a \in \mathcal{P}_{r_0}(I_0; \mathbb{R})$$

En prenant  $a$  constant, on obtient  $b(t_1^-) = 0$ . Si  $r_0 = 0$ , alors  $b|_{I_0} = 0$ . Sinon,  $b$  est un polynôme de degré  $r_0$  sur  $I_0$  s'annulant en  $t_1^-$  et orthogonal aux polynômes de degré  $r_0 - 1$ . Donc  $b|_{I_0} = 0$ . Supposons que  $b|_{I_j} = 0, j < i$ . Prenant  $a|_{I_j} = 0, \forall j \neq i$ , on a

$$\int_{(t_i, t_{i+1})} a \dot{b} dt + a(t_i^+)b(t_i^+) = - \int_{(t_i, t_{i+1})} \dot{a} b dt + a(t_{i+1}^-)b(t_{i+1}^-) = 0 , \quad \forall a \in \mathcal{P}_{r_i}(I_i; \mathbb{R})$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, on obtient  $b|_{I_i} = 0$ . Ainsi,  $b = 0$ .

Remarquant que

$$\int_{[0,T]} a \dot{b} dt = - \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \dot{a} b dt + a(t_N^-)b(t_N^-) - \sum_{i=1}^{N-1} (a(t_i^+) - a(t_i^-))b(t_i^-) \quad (\text{A.2})$$

on montre la première partie de la proposition en raisonnement par récurrence inverse (en partant de  $I_{N-1}$ ). □

**Proposition A.3**

$$\forall a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}, \int_{[0,T]} a \dot{a} dt \geq 0$$

□ **Preuve** : On montre aisément que

$$\int_{[0,T]} a \dot{a} dt = \frac{1}{2}a(t_0^+)^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2}(a(t_i^+) - a(t_i^-))^2 + \frac{1}{2}a(t_N^-)^2 \quad (\text{A.3})$$

□

## 2.6 Autres propriétés utiles

Il est également possible de définir une dérivée temporelle "adjointe" de celle définie dans A.1 de la manière suivante :

**Définition A.4** Pour  $a$  et  $b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\int_{[0,T]} a \frac{d^*}{dt} (b) dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} a \dot{b} dt - a(t_N^-) b(t_N^-) + \sum_{i=1}^{N-1} a(t_i^-) (b(t_i^+) - b(t_i^-))$$

*Remarque A.2* Dans les problèmes à conditions finales, les définitions de la dérivée et de la dérivée adjointe sont inversées.

**Proposition A.5** Pour  $a$  et  $b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\int_{[0,T]} \frac{d}{dt} (a) b dt = - \int_{[0,T]} a \frac{d^*}{dt} (b) dt$$

□ **Preuve** : Il suffit de reprendre la définition A.1 et d'opérer une simple intégration par partie sur chacun des intervalles de la partition. □

*Remarque A.3* Dans le cas de fonctions continues, cette dérivée "adjointe" correspond à la dérivée usuelle.

On peut également être intéressé par le calcul de l'intégrale suivante : pour  $a$  et  $b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\int_{[0,T]} \alpha(t) a \dot{b} dt \tag{A.4}$$

Les fonctions  $a$  et  $b$  étant discontinues, cela demande de préciser le sens de cette intégrale.

**Définition A.6** Soit  $\alpha : (0,T) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement positive. Elle définit donc un produit scalaire sur  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  noté  $(\cdot, \cdot)_\alpha$ . On note

$$\psi : a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \mapsto \psi(a) = \frac{1}{2} (a, a)_\alpha = \frac{1}{2} \int_{[0,T]} \alpha a a dt \in \mathbb{R}$$

On définit alors sa fonction duale vis-à-vis de la forme bilinéaire qui à  $(a, b) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  associe  $\int_{[0,T]} \alpha a \dot{b} dt$ , soit

$$\psi^* : b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \mapsto \psi^*(b) = \sup_{a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}} \left( \int_{[0,T]} \alpha a \dot{b} dt - \psi(a) \right)$$

$\psi^*$  est une forme quadratique sur  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ . Notant  $\bar{\psi}^* : \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \rightarrow \mathbb{R}$  sa forme polaire, on définit alors

$$\int_{[0,T]} \alpha(t) \dot{a} \dot{b} \stackrel{def}{=} \bar{\psi}^*(a,b)$$

On pourra cependant adopter une méthode plus simple qui consiste à représenter la dérivée d'une fonction de  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  par une fonction de  $\mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ . Grâce à la proposition A.2, on peut poser :

**Définition A.7** Soit  $a \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ , on note  $\check{a} \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  la fonction dérivée définie par

$$\int_{[0,T]} b \check{a} dt = \int_{[0,T]} b \frac{d}{dt}(a) dt, \forall b \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$$

On peut alors définir l'intégrale de la manière suivante :

**Définition A.8** Soit  $(a,b) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  et  $\alpha(t)$  une fonction scalaire. On définit

$$\int_{[0,T]} \alpha(t) \dot{a} \dot{b} = \int_{[0,T]} \alpha(t) \check{a} \check{b}$$

*Remarque A.4* Dans le cas où  $\alpha(t)$  est constante par intervalle  $I_i$  de la partition  $\mathcal{T}_h$ , on peut vérifier que les définitions A.6 et A.8 concordent.

## Annexe B

# Résolution incrémentale des problèmes micro

On décrit dans cette partie une méthode de résolution incrémentale classique pour la résolution du problème micro [11.5](#) défini sur  $\Omega_E \times (0, T)$ ,  $E \in \mathbf{E}$ . A l'étape linéaire, on doit résoudre deux problèmes micro par sous-structure ; le premier consiste à ne considérer que les données de l'étape précédente  $\widehat{\mathbf{s}}_E$ . Le problème macro étant résolu, on peut considérer un second problème micro avec comme seule donnée le multiplicateur  $\widetilde{W}_E^M$ . On notera les inconnues de chaque problème  $\mathbf{s}_E$ . Pour simplifier, on notera l'ensemble des données  $\bar{\mathbf{s}}_E = \{\bar{\varepsilon}_{pE}, \bar{\mathbf{X}}_E, \bar{W}_E, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_E, \bar{\mathbf{Y}}_E, \bar{F}_E\} \in \mathbf{S}_h^{(0,T)}$  ; elles valent  $\widehat{\mathbf{s}}_E$  pour le premier problème micro et  $(0, 0, \widetilde{W}_E^M, 0, 0, 0)$  pour le second. On omettra pour simplifier l'indice  $E$ .

## 1 Dualisation du problème micro

Afin de se ramener à une technique de résolution éléments finis classique en déplacement, le problème [11.5](#) est dualisé en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $(\varepsilon, \underline{W}) \in \mathbf{E}_{h,E,ad}^{(0,T)}$ . On notera  $\underline{u} \in \mathbf{U}_{h,E}^{(0,T)}$  le champ de déplacement correspondant (voir définition [11.7](#)). Le problème micro s'écrit alors :

**Problème B.1** Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}, \underline{F}, \mathbf{Y}) \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)} \times \mathcal{F}_{h,E}^{(0,T)} \times \mathcal{Y}_{h,E}^{(0,T)}$  et  $(\varepsilon, \underline{W}) \in \mathbf{E}_{h,E,ad}^{(0,T)}$  telle que :  $\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \underline{F}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{S}_{h,E}^{(0,T)} \times \mathcal{F}_{h,E}^{(0,T)} \times \mathcal{Y}_{h,E}^{(0,T)}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_E \times [0, T]} \mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^* \, dx dt + \int_{\Omega_E \times [0, T]} \Lambda^{-1} \dot{\mathbf{Y}} \circ \mathbf{Y}^* \, dx dt + \int_{\Omega_E \times [0, T]} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} \, dx dt + \\ & \int_{\partial \Omega_E \times [0, T]} \mathbf{h} \underline{F} \cdot \underline{F}^* \, ds dt = \int_{\Omega_E \times [0, T]} \left( \mathbf{H} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\bar{\varepsilon}}_p \\ -\dot{\bar{\mathbf{X}}} \end{bmatrix} \right) \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} \, dx dt + \\ & \int_{\partial \Omega_E \times [0, T]} \underline{F}^* \cdot (\mathbf{h} \bar{F} + \dot{\bar{W}}) \, ds dt + \int_{\Omega_E \times [0, T]} \dot{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}^* \, dx dt - \int_{\partial \Omega_E \times [0, T]} \dot{W} \cdot \underline{F}^* \, ds dt \end{aligned}$$

et  $\forall \underline{u}^* \in \mathbf{u}_{h,E}^{(0,T)}$ ,

$$\int_{\Omega_E \times [0,T]} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{u}}^*) : \boldsymbol{\sigma} \, dx \, dt = \int_{\Omega_E \times [0,T]} \underline{f}_d \cdot \underline{\dot{u}}^* \, dx \, dt + \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \underline{F} \cdot \underline{\dot{u}}^* \, ds \, dt$$

## 2 Formulation sur un intervalle de la partition $\mathcal{T}_h$

On rappelle que la méthode de Galerkin discontinue est utilisée au niveau temporel (voir annexe A). Elle permet une résolution incrémentale sur les intervalles de la partition  $\mathcal{T}_h$  de l'intervalle d'étude (voir annexe A, paragraphe 2.4). On suppose la solution connue sur  $(t_0, t_i)$ . En considérant des fonctions test nulles hors de l'intervalle  $I_i$ , on obtient la formulation du problème micro sur l'intervalle  $I_i$ , qui consiste à chercher les inconnues dans des espaces de type  $\mathcal{P}_{r_i}(I_i; \mathcal{X})$  (polynômes de degré  $r_i$  sur l'intervalle  $I_i$  à coefficients dans  $\mathcal{X}$ ). Notons qu'aucune contrainte n'est imposée aux champs test de la première équation du problème B.1. Cela conduit donc à deux problèmes découplés ; un sur la sous-structure et un sur la frontière, qui permettent d'exprimer  $\boldsymbol{\sigma}_{|I_i}$ ,  $\mathbf{Y}_{|I_i}$  et  $\underline{F}_{|I_i}$  en fonction des données et du multiplicateur. Ces expressions sont ensuite injectées dans la seconde équation du problème B.1 et le problème peut alors être résolu par une approche en déplacement classique.

### ■ Exemple

On illustre la résolution dans le cas très simple d'approximations temporelles de type  $\mathcal{P}_0(I_i; \mathcal{X})$ , c'est-à-dire constantes sur l'intervalle  $I_i$ . On notera  $a_i$  la valeur de la fonction  $a$  sur  $I_i$ . On note également  $\Delta t_i = (t_{i+1} - t_i)$ . On notera  $\dot{a}_i$  la dérivée temporelle de  $a$  sur l'intervalle  $I_i$  définie par :

$$\dot{a}_i = \frac{1}{\Delta t_i} (a_i - a(t_i^-))$$

Les opérateurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{h}$  sont supposés constants sur  $I_i$ . On note alors

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{d,i} \\ -\dot{\underline{\mathbf{X}}}_{d,i} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\sigma}}_i \\ \underline{\mathbf{Y}}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{p,i} \\ -\dot{\underline{\mathbf{X}}}_i \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t_i} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i^-) \\ \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{Y}(t_i^-) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{W}}_{d,i} = \mathbf{h} \underline{F}_i + \dot{\underline{W}}_i$$

La première équation du problème B.1 conduit à

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{K}^{-1} + \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \frac{1}{\Delta t_i} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\sigma}}_i \\ \underline{\mathbf{Y}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{d,i} + \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_i \\ -\dot{\underline{\mathbf{X}}}_{d,i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h} \underline{F}_i = \dot{\underline{W}}_{d,i} - \dot{\underline{W}}_i$$

Ces équations, condensées sur les contraintes et les efforts, conduisent aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{K}}^{-1} \underline{\boldsymbol{\sigma}}_i &= \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{d,i} + \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_i \\ \overline{\mathbf{k}}^{-1} \underline{F}_i &= \dot{\underline{W}}_{d,i} - \dot{\underline{W}}_i \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{k}}^{-1} &= \mathbf{h} \\ \bar{\mathbf{K}}^{-1} &= \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{K}^{-1} + \mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12} \left( \mathbf{H}_{22} + \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{\Lambda}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{H}_{21} \\ \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{d,i} &= \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{d,i} + \mathbf{H}_{12} \left( \mathbf{H}_{22} + \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{\Lambda}^{-1} \right)^{-1} \dot{\underline{\mathbf{X}}}_{d,i}\end{aligned}$$

Le problème peut maintenant être formulé sur la vitesse  $\underline{\dot{u}}_i$  en injectant les expressions précédentes dans la seconde équation du problème B.1. Cela conduit au problème éléments finis classique suivant :

**Problème B.2** Trouver  $\underline{\dot{u}}_i \in \mathbf{U}_{h,E}$  tel que  $\forall \underline{\dot{u}}_i^* \in \mathbf{U}_{h,E}$ ,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{u}}_i^*) : \bar{\mathbf{K}} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{u}}_i) dx + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\dot{u}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{k}} \underline{\dot{u}}_i ds = \\ \int_{\Omega_E} \underline{f}_{d,i} \cdot \underline{\dot{u}}_i^* dx - \int_{\Omega_E} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{u}}_i^*) : \bar{\mathbf{K}} \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{d,i} dx + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\dot{u}}_i^*|_{\partial\Omega_E} \cdot \bar{\mathbf{k}} \dot{\underline{W}}_{d,i} ds\end{aligned}$$

*Remarque B.1* Si les pas de temps  $\Delta t_i$  sont constants et que les opérateurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{h}$  sont constants, les opérateurs  $\bar{\mathbf{K}}$  et  $\bar{\mathbf{k}}$  sont constants. La matrice de rigidité éléments finis du problème B.2 est donc invariante au cours de la résolution incrémentale.



## Annexe C

# Validité de l'approximation radiale de la solution d'une équation d'évolution

On s'intéresse ici à la justification de l'utilisation de l'approximation radiale pour la résolution d'un problème d'évolution du premier ordre en temps du type [A.1](#). On reprend le cadre fonctionnel décrit dans l'annexe [A](#). Des détails concernant cette partie peuvent être trouvés dans [[Ladevèze, 1999](#)].

### 1 Approximation d'ordre 1

On cherche une approximation  $\tilde{u}$  de la solution de [A.1](#) sous la forme

$$\tilde{u} = \lambda U \tag{C.1}$$

où  $\lambda \in L^2(I)$  et  $U \in \mathcal{V}$ . Bien sûr, ces deux fonctions sont définies à un facteur multiplicatif près. On pourra choisir de normer l'une ou l'autre de ces fonctions sans perte de généralité. On peut alors se poser le problème de l'approximation sous la forme suivante :

**Problème C.1** Soit  $u \in W(I; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ . Trouver  $(\lambda, U) \in L^2(I) \times \mathcal{V}$  minimisant l'erreur

$$e(u - \lambda U) = \|u - \lambda U\|_{L^2(I; \mathcal{H})}^2 \tag{C.2}$$

Le problème variationnel associé au problème de minimisation [C.1](#) est le suivant :

**Problème C.2** Soit  $u \in W(I; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ . Trouver  $(\lambda, U) \in L^2(I) \times \mathcal{V}$  tel que

$$\begin{aligned} (u - \lambda U, \beta U)_{L^2(I; H)} &= 0, \quad \forall \beta \in L^2(I) \\ (u - \lambda U, \lambda V)_{L^2(I; H)} &= 0, \quad \forall V \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

La solution du problème [C.2](#) vérifie

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(u, U)_{\mathcal{H}}}{\|U\|_{\mathcal{H}}^2} \\ U &= \frac{(u, \lambda)_{L^2(I)}}{\|\lambda\|_{L^2(I)}^2} \end{aligned}$$

De ces expressions découle

$$\lambda = \frac{1}{\|\lambda\|_{L^2(I)}^2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2} (u, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}} \quad (\text{C.3})$$

On définit alors l'opérateur  $\mathbf{T}$  tel que

$$\mathbf{T} : \lambda \mapsto \mathbf{T}(\lambda) = (u, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}} \quad (\text{C.4})$$

La recherche de l'approximation se ramène donc à la résolution d'un problème aux valeurs propres sur l'opérateur  $\mathbf{T}$ , soit :

**Problème C.3** Trouver les couples  $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times L^2(I)$  vérifiant

$$\mathbf{T}(\lambda) = \omega \lambda$$

avec  $\mathbf{T}$  défini par (C.4).

**Proposition C.1** Le problème aux valeurs propres C.3 admet un ensemble dénombrable de solutions  $(\omega_i, \lambda_i)$  telles que  $\omega_i \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

□ **Preuve** :  $u$  appartenant à  $W(I; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ , on montre que  $\mathbf{T} : L^2(I) \rightarrow H^1(I)$  est un opérateur linéaire continu (voir [Ladevèze, 1999]). Comme l'injection continue de  $H^1(I)$  dans  $L^2(I)$  est un opérateur compact et que le produit d'un opérateur linéaire compact par un opérateur linéaire continu est compact,  $\mathbf{T} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  est compact. L'opérateur  $\mathbf{T}$  de  $L^2(I)$  dans  $L^2(I)$  est donc linéaire continu compact. Par conséquent, la théorie spectrale classique s'applique (voir [Brézis, 1983]). De plus,  $\mathbf{T}$  est autoadjoint car

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}(\lambda), \beta)_{L^2(I)} &= ((u, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}}, \beta)_{L^2(I)} = ((u, \beta)_{L^2(I)}, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}} \\ &= ((u, \lambda)_{L^2(I)}, (u, \beta)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}} \\ &= (\mathbf{T}(\beta), \lambda)_{L^2(I)} = (\lambda, \mathbf{T}(\beta))_{L^2(I)} \end{aligned}$$

Il possède donc des valeurs propres  $\omega_i$  réelles positives. □

**Proposition C.2** La solution du problème d'approximation C.2 est associée à la plus grande valeur propre de  $\mathbf{T}$ .

□ **Preuve** : Soit  $(\omega, \lambda)$  un couple valeur propre/vecteur propre de l'opérateur  $\mathbf{T}$ , avec  $\lambda$  de norme unité. La fonction spatiale correspondante est donc  $U = (u, \lambda)_{L^2(I)}$ . Notons alors que

$$\begin{aligned} (u, \lambda U)_{L^2(I; \mathcal{H})} &= (u, \lambda (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}} = ((u, \lambda)_{L^2(I)}, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}} \\ &= ((u, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}}, \lambda)_{L^2(I)} = (\mathbf{T}(\lambda), \lambda)_{L^2(I)} \\ &= \omega \end{aligned}$$

D'après (C.3), on a  $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \omega$ . On a donc

$$\begin{aligned} e(u - \lambda U) &= e(u) + \omega - 2(u, \lambda U)_{L^2(I; \mathcal{H})} \\ &= e(u) - \omega \end{aligned}$$

La meilleure approximation  $\lambda U$  de  $u$  est donc associée à la plus grande valeur propre  $\omega$ .  $\square$

**Proposition C.3** Si  $(\lambda, U)$  est solution du problème C.1, alors elle vérifie :

- $\lambda$  rend stationnaire et maximise le quotient de Rayleigh

$$\mathbf{R}(\lambda) = \frac{((u, \lambda)_{L^2(I)}, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}}}{(\lambda, \lambda)_{L^2(I)}}$$

- $U = \frac{(u, \lambda)_{L^2(I)}}{\|\lambda\|_{L^2(I)}^2}$
- $e(u - \lambda U) = e(u) - \omega$ , où  $\omega$  est la plus grande valeur du quotient de Rayleigh  $\mathbf{R}(\lambda)$ .

$\square$  **Preuve :** Notons  $\mathbf{R}'_{\lambda}$  le gradient de  $\mathbf{R}(\lambda)$  en  $\lambda$ . La stationnarité du quotient de Rayleigh s'écrit :  $\forall \beta \in L^2(I)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'_{\lambda}(\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{((u, \beta)_{L^2(I)}, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}}(\lambda, \lambda)_{L^2(I)} - ((u, \lambda)_{L^2(I)}, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}}(\lambda, \beta)_{L^2(I)}}{(\lambda, \lambda)_{L^2(I)}^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow ((u, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}} - \mathbf{R}(\lambda)\lambda, \beta)_{L^2(I)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{R}(\lambda)\lambda &= (u, (u, \lambda)_{L^2(I)})_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Ainsi, la stationnarité du quotient de Rayleigh est équivalente au problème variationnel C.2. Un couple  $(\mathbf{R}(\lambda), \lambda)$  tel que  $\lambda$  rende stationnaire  $\mathbf{R}$  est donc un couple  $(\omega, \lambda)$  de valeur propre/vecteur propre de l'opérateur  $\mathbf{T}$  précédemment défini.

On vérifie aisément que  $\mathbf{R}(\lambda) = \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \|\lambda\|_{L^2(I)}^2$ . De plus

$$\begin{aligned} e(u - \lambda U) &= e(u) + \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \|\lambda\|_{L^2(I)}^2 - 2(u, \lambda U)_{L^2(I; \mathcal{H})} \\ &= e(u) + \mathbf{R}(\lambda) - 2(\|\lambda\|_{L^2(I)}^2 U, U)_{\mathcal{H}} \\ &= e(u) - \mathbf{R}(\lambda) \end{aligned}$$

$\square$

## 2 Approximation d'ordre $m$ et propriétés de convergence

**Proposition C.4** On cherche la meilleure approximation d'ordre  $m$  sous la forme

$$\tilde{u}_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i$$

où,  $\forall i$ ,  $\lambda_i \in L^2(I)$  et  $U_i \in \mathcal{V}$ . Les fonctions  $\{\lambda_i\}$  sont alors les fonctions rendant stationnaire le quotient de Rayleigh  $\mathbf{R}(\lambda)$  et associées aux  $m$  plus grandes valeurs de

ce quotient. Les fonctions spatiales associées sont  $U_i = \frac{(u, \lambda_i)_{L^2(I)}}{\|\lambda_i\|_{L^2(I)}^2}$ . De plus

$$e(u - \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i) = e(u) - \sum_{i=1}^m \mathbf{R}(\lambda_i) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□ **Preuve** : voir [Ladevèze, 1999]. □

### 3 Construction de l'approximation

Les résultats de cette annexe justifient donc la décomposition radiale de la solution du problème d'évolution. On a pu constater que la meilleure approximation radiale est solution d'un problème aux valeurs propres sur l'opérateur  $\mathbf{T}$ . Pour trouver cette approximation, on peut donc utiliser simplement une méthode des puissances. Cela revient en fait à minimiser l'erreur  $e(u - \lambda U)$  alternativement sur  $\lambda$  et  $U$ . A l'itération  $k$ , on résoud donc

$$\underset{U^{(k+1)}}{\text{Min}} e(u - \lambda^{(k)} U^{(k+1)})$$

puis

$$\underset{\lambda^{(k+1)}}{\text{Min}} e(u - \lambda^{(k+1)} U^{(k+1)})$$

Cette méthode est de loin la plus simple si on s'intéresse uniquement à une approximation radiale d'ordre 1. Il peut cependant être intéressant d'obtenir une décomposition d'ordre plus élevé. On pourra alors envisager l'utilisation d'une méthode de type Krylov, plus sophistiquée (voir par exemple [Saad, 1992]).

## Annexe D

# Construction de l'approximation radiale des problèmes micro

Pour simplifier, on se place dans le cas sans variable interne. On rappelle que l'approximation radiale consiste ici à rechercher une approximation  $\tilde{\mathbf{s}}$  de la solution du problème micro V.4 sous la forme

$$\begin{aligned}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\underline{F}})(\underline{x}, t) &= c(t)(\mathbf{C}, \underline{G})(\underline{x}) \\(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\underline{W}})(\underline{x}, t) &= e(t)(\mathbf{E}, \underline{Z})(\underline{x})\end{aligned}$$

où l'indice  $E$  a été omis. La meilleure approximation est définie comme minimisant l'erreur en relation de comportement

$$e_{RC}^2(\tilde{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}) = \|\|\dot{c}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C} + c\mathbf{H}\mathbf{C} - \dot{e}\mathbf{E} - \bar{\boldsymbol{\Delta}}\|_1^2 + \|\|c\mathbf{h}\underline{G} + \dot{e}\underline{Z} - \bar{\boldsymbol{\delta}}\|_2^2$$

avec

$$\|\|\boldsymbol{\Delta}\|_1^2 = \int_{\Omega_E \times [0, T]} \boldsymbol{\Delta} : \mathbf{M}(t)\boldsymbol{\Delta} \, dx \, dt \quad \text{et} \quad \|\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \int_{\partial\Omega_E \times [0, T]} \underline{\boldsymbol{\delta}} \cdot \mathbf{m}(t)\underline{\boldsymbol{\delta}} \, ds \, dt$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{m}$  sont des opérateurs linéaires symétriques définis positifs. Le tableau V.5 propose un algorithme de construction de cette approximation. Il fait intervenir deux problèmes de minimisation, un sur les fonctions temporelles et l'autre sur les fonctions spatiales. On détaille ici la résolution de ces problèmes à l'itération  $k$  de l'algorithme. On omettra par la suite l'indice  $k$ .

## 1 Minimisation sur les fonctions spatiales

Les fonctions temporelles sont connues. Notons

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{E}^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \mathbf{C}^* : \mathbf{C} + \mathbf{E}^* : \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \underline{G}^* \\ \underline{Z}^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \underline{G} \\ \underline{Z} \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \underline{G}^* \cdot \underline{G} + \underline{Z}^* \cdot \underline{Z}$$

La stationnarité de l'erreur par rapport à  $(\mathbf{C}, \underline{G})$  et  $(\mathbf{E}, \underline{Z})$  s'écrit alors : trouver  $(\mathbf{C}, \underline{G}) \in \mathbf{F}_{h,E,0}$  et  $(\mathbf{E}, \underline{Z}) \in \mathbf{E}_{h,E,0}$  tel que,  $\forall (\mathbf{C}^*, \underline{G}^*) \in \mathbf{F}_{h,E,0}$  et  $\forall (\mathbf{E}^*, \underline{Z}^*) \in \mathbf{E}_{h,E,0}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_E} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{E}^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{cc} & -\mathbf{A}_{ce} \\ -\mathbf{A}_{ec} & \mathbf{A}_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} dx + \int_{\partial\Omega_E} \begin{pmatrix} \underline{G}^* \\ \underline{Z}^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{cc} & \mathbf{a}_{ce} \\ \mathbf{a}_{ec} & \mathbf{a}_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{G} \\ \underline{Z} \end{pmatrix} ds = \\ & \int_{\Omega_E} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{E}^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\overline{\Delta}_c \\ \overline{\Delta}_e \end{pmatrix} dx + \int_{\partial\Omega_E} \begin{pmatrix} \underline{G}^* \\ \underline{Z}^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \overline{\delta}_c \\ \overline{\delta}_e \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{cc} &= (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\dot{c}, \dot{c})_{[0,T]} + (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{H}\dot{c}, c)_{[0,T]} + (\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\dot{c}, c)_{[0,T]} + (\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}c, c)_{[0,T]} \\ \mathbf{A}_{ce} &= (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\dot{e}, \dot{c})_{[0,T]} + (\mathbf{H}\mathbf{M}\dot{e}, c)_{[0,T]} \\ \mathbf{A}_{ec} &= (\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\dot{c}, \dot{e})_{[0,T]} + (\mathbf{M}\mathbf{H}c, \dot{e})_{[0,T]} \\ \mathbf{A}_{ee} &= (\mathbf{M}\dot{e}, \dot{e})_{[0,T]} \\ \mathbf{a}_{cc} &= (\mathbf{h}\mathbf{m}\mathbf{h}c, c)_{[0,T]} \\ \mathbf{a}_{ce} &= (\mathbf{h}\mathbf{m}\dot{e}, c)_{[0,T]} \\ \mathbf{a}_{ec} &= (\mathbf{m}\mathbf{h}c, \dot{e})_{[0,T]} \\ \mathbf{a}_{ee} &= (\mathbf{m}\dot{e}, \dot{e})_{[0,T]} \\ \overline{\Delta}_c &= -(\mathbf{H}\mathbf{m}\overline{\Delta}, c)_{[0,T]} - (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}\overline{\Delta}, \dot{c})_{[0,T]} \\ \overline{\Delta}_e &= -(\mathbf{m}\overline{\Delta}, \dot{e})_{[0,T]} \\ \overline{\delta}_c &= (\mathbf{h}\mathbf{m}\overline{\delta}, c)_{[0,T]} + (\mathbf{k}^{-1}\mathbf{m}\overline{\delta}, \dot{c})_{[0,T]} \\ \overline{\delta}_e &= (\mathbf{m}\overline{\delta}, \dot{e})_{[0,T]} \end{aligned}$$

où on a posé  $(a, b)_{[0,T]} = \int_{[0,T]} a b dt$ .

Afin de conserver une approche éléments finis en déplacement pour la résolution de ce problème, on écrit l'appartenance de  $(\mathbf{C}, \underline{G})$  à  $\mathbf{F}_{h,E,0}$  au sens faible en introduisant un multiplicateur  $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\underline{Z}}) \in \mathbf{E}_{h,E,0}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A}_{cc}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{A}_{ce}\mathbf{E} - \overline{\Delta}_c \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{cc}^{-1} & \mathbf{A}_{cc}^{-1}\mathbf{A}_{ce} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}} - \overline{\Delta}_c \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \\ \underline{G} &= \mathbf{a}_{cc}^{-1} \left( \overline{\delta}_c - \tilde{\underline{Z}} - \mathbf{a}_{ce}\underline{Z} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{cc}^{-1} & \mathbf{a}_{cc}^{-1}\mathbf{a}_{ce} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\delta}_c - \tilde{\underline{Z}} \\ -\underline{Z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le problème en déplacement s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_E} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}^* \\ \mathbf{E}^* \end{pmatrix} \circ \tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} dx + \int_{\partial\Omega_E} \begin{pmatrix} \tilde{\underline{Z}}^* \\ \underline{Z}^* \end{pmatrix} \circ \tilde{\mathbf{a}} \begin{pmatrix} \tilde{\underline{Z}} \\ \underline{Z} \end{pmatrix} ds = \\ & \int_{\Omega_E} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}^* \\ \mathbf{E}^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \overline{\Delta}_c - \mathbf{A}_{cc}^{-1}\overline{\Delta}_c \\ \overline{\Delta}_e - \mathbf{A}_{ec}\mathbf{A}_{cc}^{-1}\overline{\Delta}_c \end{pmatrix} dx + \int_{\partial\Omega_E} \begin{pmatrix} \tilde{\underline{Z}}^* \\ \underline{Z}^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \overline{\delta}_c - \mathbf{a}_{cc}^{-1}\overline{\delta}_c \\ \overline{\delta}_e - \mathbf{a}_{ec}\mathbf{a}_{cc}^{-1}\overline{\delta}_c \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{cc}^{-1} & \mathbf{A}_{cc}^{-1} \mathbf{A}_{ce} \\ -\mathbf{A}_{ec} \mathbf{A}_{cc}^{-1} & \mathbf{A}_{ee} - \mathbf{A}_{ec} \mathbf{A}_{cc}^{-1} \mathbf{A}_{ce} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{a}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{cc}^{-1} & \mathbf{a}_{cc}^{-1} \mathbf{a}_{ce} \\ -\mathbf{a}_{ec} \mathbf{a}_{cc}^{-1} & \mathbf{a}_{ee} - \mathbf{a}_{ec} \mathbf{a}_{cc}^{-1} \mathbf{a}_{ce} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le problème consiste alors à chercher  $\underline{U}$  et  $\tilde{\underline{U}}$  appartenant à l'espace éléments finis classique  $\mathbf{U}_{h,E}$  tels que

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \varepsilon(\underline{U}) & \text{et} & \quad \underline{U}|_{\partial\Omega_E} = \underline{Z} \\ \tilde{\mathbf{E}} &= \varepsilon(\tilde{\underline{U}}) & \text{et} & \quad \tilde{\underline{U}}|_{\partial\Omega_E} = \tilde{\underline{Z}}\end{aligned}$$

### ■ Exemple

Dans le cas de la viscoélasticité linéaire,  $\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{K}^{-1}$ . On choisit naturellement  $\mathbf{M} = (1 - \frac{t}{T}) \mathbf{H}^{-1}$  et  $\mathbf{m} = (1 - \frac{t}{T}) \mathbf{h}^{-1}$ . On montre facilement qu'avec ce choix de norme, certains termes de couplage s'annulent.

On note  $(c,e)_{[0,T],2} = ((1 - \frac{t}{T})c,e)_{[0,T]}$ . On pose également

$$\eta_c = \eta (\dot{c}, \dot{c})_{[0,T],2} + 2 (\dot{c}, c)_{[0,T],2} + \frac{1}{\eta} (c, c)_{[0,T],2}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K} & \frac{\eta}{\eta_c} (\dot{c}, \dot{c})_{[0,T],2} \mathbf{K} \\ -\frac{\eta}{\eta_c} (\dot{c}, \dot{c})_{[0,T],2} \mathbf{K} & \left( \eta (\dot{c}, \dot{c})_{[0,T],2} - \frac{\eta^2}{\eta_c} (\dot{c}, \dot{c})_{[0,T],2}^2 \right) \mathbf{K} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{a}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(c,c)_{[0,T],2}} \mathbf{h}^{-1} & 0 \\ 0 & (\dot{c}, \dot{c})_{[0,T],2} \mathbf{h}^{-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 2 Minimisation sur les fonctions temporelles

Notons

$$\left( \left( \begin{array}{c} c^* \\ e^* \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} c \\ e \end{array} \right) \right)_{[0,T]} \stackrel{def}{=} (c^*, c)_{[0,T]} + (e^*, e)_{[0,T]}$$

Connaissant les fonctions spatiales, la stationnarité par rapport à  $(c,e)$  conduit au problème suivant : trouver  $(c,e) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$  tel que  $\forall (c^*, e^*) \in \mathbf{Z}_r^{(0,T)} \times \mathbf{Z}_r^{(0,T)}$ ,

$$\begin{aligned}\left( \left( \begin{array}{c} \dot{c}^* \\ c^* \end{array} \right), \mathbb{A}_{cc} \left( \begin{array}{c} \dot{c} \\ c \end{array} \right) + \mathbb{A}_{ce} \left( \begin{array}{c} \dot{e} \\ e \end{array} \right) \right)_{[0,T]} &= \left( \left( \begin{array}{c} \dot{c}^* \\ c^* \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \delta_c^1 \\ \delta_c^2 \end{array} \right) \right)_{[0,T]} \\ \left( \left( \begin{array}{c} \dot{e}^* \\ e^* \end{array} \right), \mathbb{A}_{ec} \left( \begin{array}{c} \dot{c} \\ c \end{array} \right) + \mathbb{A}_{ee} \left( \begin{array}{c} \dot{e} \\ e \end{array} \right) \right)_{[0,T]} &= \left( \left( \begin{array}{c} \dot{e}^* \\ e^* \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \delta_e^1 \\ \delta_e^2 \end{array} \right) \right)_{[0,T]}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{cc} &= \begin{pmatrix} (\mathbf{C}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})_{\Omega_E} & (\mathbf{C}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{H} \mathbf{C})_{\Omega_E} \\ (\mathbf{C}, \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})_{\Omega_E} & (\mathbf{C}, \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{H} \mathbf{C})_{\Omega_E} + (\underline{\mathbf{G}}, \mathbf{h} \mathbf{M} \mathbf{h} \underline{\mathbf{G}})_{\partial \Omega_E} \end{pmatrix} \\
 \mathbb{A}_{ce} &= \begin{pmatrix} -(\mathbf{C}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{E})_{\Omega_E} & 0 \\ -(\mathbf{C}, \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{E})_{\Omega_E} + (\underline{\mathbf{G}}, \mathbf{h} \mathbf{m} \underline{\mathbf{Z}})_{\partial \Omega_E} & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbb{A}_{ec} &= \begin{pmatrix} -(\mathbf{E}, \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})_{\Omega_E} & -(\mathbf{E}, \mathbf{M} \mathbf{H} \mathbf{C})_{\Omega_E} + (\underline{\mathbf{Z}}, \mathbf{m} \mathbf{h} \underline{\mathbf{G}})_{\partial \Omega_E} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbb{A}_{ee} &= \begin{pmatrix} (\mathbf{E}, \mathbf{M} \mathbf{E})_{\Omega_E} + (\underline{\mathbf{Z}}, \mathbf{m} \underline{\mathbf{Z}})_{\partial \Omega_E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \delta_c^1 \\ \delta_c^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\mathbf{C}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \overline{\Delta})_{\Omega_E} \\ (\mathbf{C}, \mathbf{H} \mathbf{M} \overline{\Delta})_{\Omega_E} + (\underline{\mathbf{G}}, \mathbf{h} \mathbf{m} \overline{\delta})_{\partial \Omega_E} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \delta_e^1 \\ \delta_e^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(\mathbf{E}, \mathbf{M} \overline{\Delta})_{\Omega_E} + (\underline{\mathbf{Z}}, \mathbf{m} \overline{\delta})_{\partial \Omega_E} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

où on a posé  $(\dots)_{\Omega_E} = \int_{\Omega_E} \dots dx$  et  $(\dots)_{\partial \Omega_E} = \int_{\partial \Omega_E} \dots ds$

*Remarque D.1* Dans le cas où  $\mathbf{M} = (1 - \frac{t}{T}) \mathbf{H}^{-1}$  et  $\mathbf{m} = (1 - \frac{t}{T}) \mathbf{h}^{-1}$ , on montre que certains termes de couplage s'annulent (termes extra-diagonaux de  $\mathbb{A}_{ce}$  et  $\mathbb{A}_{ec}$ ).

Le problème de minimisation fait apparaître des produits de dérivées, ce qui en fait un problème global sur le temps. Pour alléger le coût de calcul de ce problème, on pourrait transformer ce problème en la résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre 2. Cependant, ce système différentiel possède des conditions initiales et finales et sa résolution est non triviale. La solution la plus simple est donc de garder une résolution globale. La définition du produit de dérivée pour des fonctions discontinues est donnée en annexe A (définition A.8 ou A.6).

*Remarque D.2* Le problème assemblé fait apparaître une structure tridiagonal par bloc (un bloc correspondant à l'ensemble des inconnues sur un intervalle de la partition  $\mathcal{T}_h$ ); l'utilisation d'une technique de résolution adaptée fait que la résolution de ce problème global n'est pas trop coûteuse.

*Remarque D.3* Afin de s'affranchir des problèmes de produits de dérivées, on peut chercher simultanément les fonctions  $(c, e)$  et les représentants de leurs dérivées  $(\check{c}, \check{e})$  dans  $\mathbf{Z}_r^{(0, T)}$  (voir définition A.7) en introduisant deux multiplicateurs  $(\tilde{c}, \tilde{e})$  dans  $\mathbf{Z}_r^{(0, T)}$  afin de garantir

$$\begin{aligned}
 \int_{[0, T]} \tilde{c}^* \check{c} dt &= \int_{[0, T]} \tilde{c}^* \frac{d}{dt}(c) dt, \forall \tilde{c}^* \in \mathbf{Z}_r^{(0, T)} \\
 \int_{[0, T]} \tilde{e}^* \check{e} dt &= \int_{[0, T]} \tilde{e}^* \frac{d}{dt}(e) dt, \forall \tilde{e}^* \in \mathbf{Z}_r^{(0, T)}
 \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [Alart et al., 2000] P. Alart, M. Barboteu, P. Le Tallec, et M. Vidrascu (2000). Méthode de Schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non symétriques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 331:399–404.
- [Alart et Curnier, 1991] P. Alart et A. Curnier (1991). A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92:253–275.
- [Allix, 1992] O. Allix (1992). Damage analysis of delamination around a hole. In O. C. Zienkiewicz P. Ladevèze, editor, *New Advances in Computational Structural Mechanics*, pages 411–421. Elsevier Science Publishers B. V.
- [Arora et al., 1991] J. S. Arora, A. I. Chahande, et J. K. Paeng (1991). Multiplier methods for engineering optimization. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32:1485–1525.
- [Aubard et al., 2000] X. Aubard, C. Cluzel, L. Guitard, et P. Ladevèze (2000). Damage modeling at two scales for 4d carbon/carbon composites. *Computers and Structures*, 78:83–91.
- [Auriel et al., 1982] G. Auriel, G. Boubal, et P. Ladevèze (1982). Sur une méthode de calcul des effets locaux. In *Comptes Rendus des Troisièmes Journées Nationales sur le Composites, JNC 3, Paris*, pages 279–288.
- [Barboteu et al., 2001] M. Barboteu, P. Alart, et M. Vidrascu (2001). A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37-38):4785–4803.
- [Belytschko et al., 1990] T. Belytschko, J. Fish, et A. Bayliss (1990). The spectral overlay of finite elements for problems with high gradients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81:71–89.
- [Belytschko et Mullen, 1976] T. Belytschko et R. Mullen (1976). Mesh partitions of explicit-implicit time integration. In *Proceedings U.S.-Germany Symposium on Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, Massachusetts Institute of Technology*. Cambridge, MA.
- [Belytschko et al., 1984] T. Belytschko, P. Smolinski, et W. K. Liu (1984). Multi-stepping implicit-explicit procedures in transient analysis. In *Proceedings of the International Conference on Innovative Methods for Nonlinear Problems*. Pine-ridge Press International Limited, Swansea, U.K.
- [Belytschko et al., 1979] T. Belytschko, H. J. Yen, et R. Mullen (1979). Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17-18:259–275.

- [Ben Dhia, 1998] H. Ben Dhia (1998). Multiscale mechanical problems: the Arlequin method. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIB*, 326:899–904.
- [Ben Dhia et Rateau, 2001] H. Ben Dhia et G. Rateau (2001). Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 332:649–654.
- [Bensoussan et al., 1978] A. Bensoussan, J.-L. Lions, et G. Papanicolaou (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland Pub.
- [Blanzé et al., 1996] C. Blanzé, L. Champaney, J.-Y. Cognard, et P. Ladevèze (1996). A modular approach to structure assembly computations: application to contact problems. *Engineering Computations*, 13(1):15–32.
- [Bottasso, 2002] C. L. Bottasso (2002). Multiscale temporal integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:2815–2830.
- [Bramble et al., 1986] J.H. Bramble, J. E. Pasciak, et A. H. Schatz (1986). The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. *Mathematics of Computation*, 47(175):103–134.
- [Brézis, 1983] H. Brézis (1983). *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, Paris.
- [Champaney et al., 1996] L. Champaney, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, et P. Ladevèze (1996). Numerical experimentations of parallel strategies in structural non-linear analysis. *Calculateurs parallèles*, 8(2):245–249.
- [Champaney et al., 1997] L. Champaney, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, et P. Ladevèze (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19(4):253–263.
- [Champaney et al., 1999] L. Champaney, J.-Y. Cognard, et P. Ladevèze (1999). Modular analysis of assemblages of 3d structures with unilateral contact conditions. *Computers and Structures*, 73(1):249–266.
- [Chan et Goovaerts, 1992] T. F. Chan et D. Goovaerts (1992). On the relationship between overlapping and nonoverlapping domain decomposition methods. *SIAM J. on Matrix Analysis and Applications*, 13:663–670.
- [Christman et al., 1989] T. Christman, A. Needleman, et S. Suresh (1989). An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metallurgica*, 37(11):3029–3050.
- [Cognard et al., 1996] J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, P. Ladevèze, et P. Lorong (1996). Expérimentation d’une approche parallèle en calcul des structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 5:197–220.
- [Cognard et Ladevèze, 1993] J.-Y. Cognard et P. Ladevèze (1993). A large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *Int. J. of Plasticity*, 9:141–157.
- [Dautray et Lions, 1987] R. Dautray et J.-L. Lions (1987). *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Collection CEA, Masson.
- [Devries et al., 1989] F. Devries, H. Dumontet, G. Duvaut, et F. Léné (1989). Homogenization and damage for composite structures. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 27:285–298.
- [Dilintas et al., 1988] G. Dilintas, P. Laurent-Gengoux, et D. Trystram (1988). A conjugate projected gradient method with preconditioning for unilateral contact problems. *Computers and Structures*, 29(4):675–680.

- [Dostal et al., 1998] Z. Dostal, A. Friedlander, et S. Santos (1998). Solution of coercive and semicoercive contact problems by feti domain decomposition. *Contemporary Mathematics*, 218:82–93.
- [Dryja et Widlund, 1995] M. Dryja et O. B. Widlund (1995). Schwarz methods of Neumann-Neumann type for three-dimensional elliptic finite element problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48(2):121–155.
- [Duff, 1986] I. S. Duff (1986). Parallel implementation of multifrontal schemes. *Parallel Computing*, 3:192–204.
- [Dumontet, 1986] H. Dumontet (1986). Study of a boundary layer problem in elastic composite. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20:265–286.
- [Dureisseix et Farhat, 2001] D. Dureisseix et C. Farhat (2001). A numerical scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 50:2643–2666.
- [Dureisseix et al., 2003] D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron, et B. A. Schrefler (2003). A multi-time-scale strategy for multiphysics problems: application to poroelasticity. *submitted to Journal of Multiscale Computational Engineering*.
- [Duvaut, 1976] G. Duvaut (1976). Matériaux élastiques composites à structure périodique, homogénéisation. In *Proceedings of the IUTAM Congress, Delft*.
- [Duvaut et Lions, 1976] G. Duvaut et J. L. Lions (1976). *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer Berlin.
- [Eriksson et al., 1985] K. Eriksson, C. Johnson, et V. Thomée (1985). Time discretization of parabolic problems by the discontinuous galerkin method. *RAIRO Model. Math. Anal.*, 19:611–643.
- [Escaig et al., 1994] Y. Escaig, M. Vayssade, et G. Touzot (1994). Une méthode de décomposition de domaine multifrontale multiniveaux. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 3:311–337.
- [Eshelby, 1957] J. D. Eshelby (1957). The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems. In *Proceedings of the Royal Society of London, series A*, volume 241, pages 376–396.
- [Farhat et Chandesris, 2002] C. Farhat et M. Chandesris (2002). Time-Decomposed Parallel Time-Integrators - part I: theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid-structure applications. Technical Report CU-CAS-02-10, Center for Aerospace Structures, CU.
- [Farhat et al., 1996] C. Farhat, P.S. Chen, et F. Risler (1996). A simple and unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with Lagrange multipliers: Application to the design of new FETI coarse problems. Technical Report CU-CAS-96-26, Center for Aerospace Structures, CU.
- [Farhat et al., 2000] C. Farhat, K. Pierson, et M. Lesoinne (2000). The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184:333–374.
- [Farhat et Roux, 1991] C. Farhat et F.-X. Roux (1991). A method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32:1205–1227.

- [Feyel, 2003] F. Feyel (2003). A multilevel finite element method ( $FE^2$ ) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3233–3244.
- [Feyel et Chaboche, 2000] F. Feyel et J.-L. Chaboche (2000).  $FE^2$  multiscale approach for modelling the elasto-viscoplastic behaviour of long fiber SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183:417–455.
- [Fish et Belsky, 1995] J. Fish et V. Belsky (1995). Multi-grid method for periodic heterogeneous media. part 2: Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126:17–38.
- [Fish et al., 1997] J. Fish, K. Sheck, M. Pandheeradi, et M.S. Shepard (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148:53–73.
- [Forest et Sab, 1998] S. Forest et K. Sab (1998). Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mech. Res. Comm.*, 25(4):449–454.
- [Fortin et Glowinski, 1982] M. Fortin et R. Glowinski (1982). Méthodes de lagrangien augmenté. *Méthodes Mathématiques de l'Informatique*, 9.
- [Francfort, 1983] G.A. Francfort (1983). Homogenization and linear thermoelasticity. *SIAM J. Appl. Math.*, 14:696–708.
- [Geers et al., 2003] M. G. D. Geers, V. Kouznetsova, et W. A. M. Brekelmans (2003). Nonlocality in computational homogenization: theoretical and practical implications. In D.R.J Owen et E. Onate, editors, *Computational Plasticity VII*. CIMNE, Barcelona.
- [Ghosh et al., 1995] S. Ghosh, K. Lee, et S. Moorthy (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and Voronoï cell finite element method. *J. Solids Structures*, 32(1):27–62.
- [Glowinski et Le Tallec, 1990] R. Glowinski et P. Le Tallec (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwartz alternating method. In *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Houston, pages 224–231. SIAM, Philadelphia.
- [Gosselet et Rey, 2002] P. Gosselet et C. Rey (2002). On a selective reuse of Krylov subspaces in Newton-Krylov approaches for nonlinear elasticity. In *Domain decomposition methods in science and engineering*, pages 419–426.
- [Gravouil et Combescure, 2001] A. Gravouil et A. Combescure (2001). Multi-time-step explicit implicit method for non-linear structural dynamics. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 50:199–225.
- [Guennouni, 1988] T. Guennouni (1988). Sur une méthode de calcul de structures soumises à des chargements cycliques: l'homogénéisation en temps. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 22(3):417–455.
- [Hashin, 1962] Z. Hashin (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *ASME Journal for Applied Mechanics*, 29:143–150.

- [Haslinger et al., 1996] J. Haslinger, I. Hlavacek, et J. Necas (1996). Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. *Handbook of Numerical Analysis, North Holland*, 4(2):313–485.
- [Hill, 1965] R. Hill (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:213–222.
- [Hughes, 1995] T. J. R. Hughes (1995). Multiscale phenomena: Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:387–401.
- [Hughes et Liu, 1978] T. J. R. Hughes et W. K. Liu (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis : implementation and numerical examples. *Journal of Applied Mechanics*, 65(june):371–374.
- [Hughes et Stewart, 1996] T. J. R. Hughes et J. R. Stewart (1996). A space-time formulation for multiscale phenomena. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74:217–229.
- [Ibrahimbegović et Markovic, 2003] A. Ibrahimbegović et D. Markovic (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3089–3107.
- [Kikuchi, 1982a] N. Kikuchi (1982a). Contact problems in elasticity. *Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM, Philadelphia*.
- [Kikuchi, 1982b] N. Kikuchi (1982b). Penalty/finite element approximations of a class of unilateral contact problems. *Penalty Method and Finite Element Method, ASME, New York*.
- [Klarbing, 1986] A. Klarbing (1986). A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:175–200.
- [Kouznetsova et al., 2002] V. Kouznetsova, M. G. D. Geers, et W. A. M. Brekelmans (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 54:1235–1260.
- [Ladevèze, 1985] P. Ladevèze (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série Iib*, 300(2):41–44.
- [Ladevèze, 1999] P. Ladevèze (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.
- [Ladevèze, 2002] P. Ladevèze (2002). Multiscale modelling and computational strategies for composites. In *Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V), Austria*. Vienna University of Technology Press.
- [Ladevèze et al., 2000a] P. Ladevèze, O. Allix, J.-F. Deü, et D. Lévêque (2000a). A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183:105–22.
- [Ladevèze et Dureisseix, 2000] P. Ladevèze et D. Dureisseix (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *Int. J. for Computational Civil and Structural Engineering*, 1:18–28.

- [Ladevèze et al., 2000b] P. Ladevèze, H. Lemoussu, et P. A. Boucard (2000b). A modular approach to 3d impact computation with frictional contact. *Computers and Structures*, 78(1-3):45–51.
- [Ladevèze et al., 2001] P. Ladevèze, O. Loiseau, et D. Dureisseix (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 52:121–138.
- [Ladevèze et Nouy, 2002] P. Ladevèze et A. Nouy (2002). A multiscale computational method with time and space homogenization. *C. R. Mécanique*, 330:1–7.
- [Ladevèze et Nouy, 2003] P. Ladevèze et A. Nouy (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3061–3087.
- [Ladevèze et al., 2002] P. Ladevèze, A. Nouy, et O. Loiseau (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4869–4891.
- [Ladevèze, 1985] J. Ladevèze (1985). Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaines. In *Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul des Structures*, pages 893–907. Pluralis.
- [Ladevèze, 1989a] P. Ladevèze (1989a). La méthode à grand incrément de temps pour l’analyse de structures à comportement non-linéaire décrit par variables internes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 309:1095–1099.
- [Ladevèze, 1989b] P. Ladevèze (1989b). Une nouvelle méthode pour l’analyse des structures massives. *Technical Note Aérospatiale STS/T3*, 45.
- [Ladevèze, 1997] P. Ladevèze (1997). Une technique de calcul d’intégrales en temps et en espace relative à la latin méthode. *Rapport interne du LMT-Cachan*, 193.
- [Ladevèze et Dureisseix, 1998] P. Ladevèze et D. Dureisseix (1998). A 2-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis. *Contemporary Mathematics*, 218:246–253.
- [Ladevèze et Dureisseix, 1999] P. Ladevèze et D. Dureisseix (1999). A new micro macro computational strategy for structural analysis. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 327:1237–1244.
- [Lassignardie et al., 1999] J.-F. Lassignardie, Y. Escaig, et P. Marin (1999). Performances obtenues pour les problèmes linéaires et non-linéaires avec une méthode de décomposition de domaine multiniveau primale. In *Actes du 4e Colloque National en Calcul des Structures, Giens (France)*, pages 369–374. Teknea.
- [Le Tallec, 1994] P. Le Tallec (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances, North-Holland*, 1.
- [Lefik et Schrefler, 2000] M. Lefik et B. A. Schrefler (2000). Modelling of nonstationary heat conduction problems in micro-periodic composites using homogenisation theory with corrective terms. *Archives of Mechanics, Warszawa*, 52(2):203–223.
- [Lions, 1990] P.-L. Lions (1990). On the Schwarz alternating method III: a variant for nonoverlapping subdomains. In *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Philadelphia*, pages 202–223. SIAM.

- [Lions et al., 2001] J.-L. Lions, Y. Maday, et G. Turinici (2001). Résolution d'EDP par un schéma en temps "pararéel". *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 332:661–668.
- [Liu et Belytschko, 1982] W. K. Liu et T. Belytschko (1982). Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis. *Computers and Structures*, 15:445–450.
- [Loiseau et al., 2002] O. Loiseau, P. Ladevèze, et D. Dureisseix (2002). Sur une stratégie de calcul multiéchelle pour l'analyse des structures composites : discrétisation et performances. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11(2):349–362.
- [Maday et al., 1988] Y. Maday, C. Mavriplis, et A. Patera (1988). Non conforming mortar element methods: application to spectral discretization. In T. Chan, editor, *Int. Symp. Domain Decomposition Methods*, pages 392–418. SIAM.
- [Mandel, 1993] J. Mandel (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9:233–241.
- [May, 1986] H.-O. May (1986). The conjugate gradient method for unilateral problems. *Computers and Structures*, 12(4):595–598.
- [Melenk et Babuska, 1996] J. M. Melenk et I. Babuska (1996). The partition of unity method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39:289–314.
- [Minoux, 1986] M. Minoux (1986). *Mathematical programming: theory and applications*. Wiley.
- [Mori et Tanaka, 1973] T. Mori et K. Tanaka (1973). Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21:571–574.
- [Moës et al., 1999] N. Moës, J. Dolbow, et T. Belytschko (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150.
- [Nouy et Ladevèze, 2003a] A. Nouy et P. Ladevèze (2003a). Some improvements on a time-space multiscale computational strategy. In D.R.J Owen et E. Onate, editors, *Computational Plasticity VII*. CIMNE, Barcelona.
- [Nouy et Ladevèze, 2003b] A. Nouy et P. Ladevèze (2003b). Sur une stratégie de calcul multiéchelle en espace et en temps. In *Actes du 6ème colloque national en calcul des structures, Giens (France)*, volume 3, pages 515–522.
- [Oden et Martins, 1985] J. T. Oden et J. A. C. Martins (1985). Models and computational method for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52:527–634.
- [Oden et al., 1999] J.T. Oden, K. Vemaganti, et N. Moës (1999). Hierarchical modelling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172:2–25.
- [Oden et Zohdi, 1997] J.T. Oden et T. I. Zohdi (1997). Analysis and adaptive modelling of highly heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148:367–392.
- [Raous et Barbarin, 1992] M. Raous et S. Barbarin (1992). Conjugate gradient for frictional contact. In *Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

- [Raous et al., 1988] M. Raous, P. Chabrand, et F. Lebon (1988). Numerical methods for frictional contact problems and applications. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 7:111–128.
- [Raous et al., 1995] M. Raous, M. Jean, et J.-J. Moreau (1995). *Contact Mechanics: Proceedings of the Second Contact Mechanics International Symposium, New York*. Plenum Press.
- [Rixen et Farhat, 1999] D. Rixen et C. Farhat (1999). A simple and efficient extension of a class of sub-structure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 44:489–516.
- [Rixen et al., 1999] D. Rixen, C. Farhat, R. Tezaur, et J. Mandel (1999). Theoretical comparison of the FETI and Algebraically Partitioned FETI methods, and performance comparisons with a direct sparse solver. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 46(4):501–534.
- [Saad, 1992] Y. Saad (1992). *Numerical methods for large eigenvalue problems*. Halstead Press, New York.
- [Sanchez-Palencia, 1974] E. Sanchez-Palencia (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal for Engineering Science*, 12:231–251.
- [Sanchez-Palencia, 1980] E. Sanchez-Palencia (1980). Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture Note in Physics*, 127.
- [Sanchez-Palencia et Zaoui, 1985] E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui (1985). Homogenization techniques for composite media. *Lecture Note in Physics*, 272.
- [Simo et Laursen, 1992] J. C. Simo et T. A. Laursen (1992). An augmented lagrangian treatment of contact problem involving friction. *Computers and Structures*, 42:97–116.
- [Sluis et al., 1999a] O. Van Der Sluis, P. J. G. Schreurs, et H. E. H. Meijer (1999a). Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation. *Mech. Mat.*, 31:743–759.
- [Sluis et al., 1999b] O. Van Der Sluis, P. H. J. Vosbeek, P. J. G. Schreurs, et H. E. H. Meijer (1999b). Homogenization of heterogeneous polymers. *Int. J. of Sol. and Struc.*, 36:3193–3214.
- [Smit et al., 1998] R. J. M. Smit, W. A. M. Brekelmans, et H. E. H. Meijer (1998). Prediction of the mechanical behaviour of non-linear heterogeneous systems by multi-level finite element modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155:181–192.
- [Strouboulis et al., 2000] T. Strouboulis, I. Babuska, et K. Copps (2000). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182:43–71.
- [Tvergaard, 1990] V. Tvergaard (1990). Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite. *Acta Metallurgica*, 38(2):185–194.
- [Violeau, 2003] D. Violeau (2003). *Sur une amélioration de la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation*. Mémoire du DEA TACS, LMT-Cachan.
- [Wriggers, 1995] P. Wriggers (1995). Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2:1–49.

- [Wriggers et al., 1985] P. Wriggers, J.C. Simo, et R. L. Taylor (1985). Penalty and augmented lagrangian formulations for contact problems. In *Proceedings of NUMETA Conference, Swansea*.
- [Yu et Fish, 2001] Q. Yu et J. Fish (2001). Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales: a coupled thermo-viscoelastic example problem. *Int. J. of Sol. and Struc.*, 39:6429–6452.
- [Zhong et Mackerle, 1992] Z. Zhong et J. Mackerle (1992). Static contact problems - a review. *Engineering Computations*, 9:3–37.
- [Zhu et al., 1997] H. T. Zhu, H. M. Zbib, et E. C. Aifantis (1997). Strain gradients and continuum modeling of size effect in metal matrix composites. *Acta Mech.*, 121:165–176.
- [Zohdi et al., 1996] T.I. Zohdi, J.T. Oden, et G.J. Rodin (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138:273–298.