Programme de Langlands p-adique, invariants $\mathcal{L}$ et catégories dérivées

Benjamin Schraen

N° d'ordre: 9462

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Mathématiques

par

Benjamin Schraen

Programme de Langlands p-adique, invariants $\mathcal{L}$ et catégories dérivées

Soutenue le 1er Juillet 2009 devant la Commission d'examen:

M.	Christophe Breuil	(Directeur de thèse)
M.	Jean-François Dat	(Rapporteur)
M.	Jean-Marc Fontaine	
M.	Alain Genestier	
M.	Elmar Grosse-Klönne	(Rapporteur)
M.	Guy Henniart	

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX
et au
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm 75005 PARIS

À mes parents.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Christophe Breuil pour tout ce qu'il m'a apporté. Il m'a fait découvrir avec beaucoup d'enthousiasme un domaine mathématique qui m'était auparavant inconnu et l'écouter a toujours été très enrichissant. Son attention, ses questions, encouragements, et critiques constructives m'ont été d'une aide inestimable. Ce fut un grand plaisir de travailler avec lui.

Je remercie également Jean-François Dat et Elmar Große-Klönne d'avoir accepté la tâche de relire cette thèse, ainsi que Jean-Marc Fontaine, Alain Genestier et Guy Henniart de participer à mon jury de thèse. C'est à la fois un grand plaisir et un grand honneur.

Durant l'élaboration de ce travail de thèse, l'université d'Orsay et le département de mathématiques de l'ENS m'ont fourni de merveilleuses conditions de travail, aussi bien humaines que matérielles. Merci également à Éric Urban et l'université Columbia de New York pour m'avoir accueilli un mois dans de très bonnes conditions.

Je voudrais mentionner dans ces remerciements mes professeurs de prépa, Nicolas Tosel et Bernard Randé, qui ont joué un rôle très important dans ma formation mathématique, ainsi que Georges Khaznadar qui a encouragé ma vocation scientifique lors de mes années de lycée. Je suis reconnaissant à Gaëtan Chenevier qui, lorsque j'étais étudiant de l'ENS, a éveillé ma curiosité pour l'aspect « automorphe » en théorie des nombres et à toute l'équipe pédagogique du DMA qui m'a suivi lors de ma scolarité. Merci aussi à Jan Kohlhaase qui a toujours répondu patiemment à mes questions sur la cohomologie localement analytique.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à tous les mathématiciens qui m'ont permis, au fil des discussions, de mieux appréhender mon domaine de recherche, en particulier Ahmed Abbes, Laurent Berger, Xavier Caruso, Luc Illusie, Ariane Mézard, Alberto Minguez, Rachel Ollivier, Sascha Orlik, Vincent Sécherre, Jacques Tilouine, Marie-France Vignéras.

Une pensée pour Jeanne, Thomas, Romain, Hélène, Lucie, Simon, Christophe, Ludo, les Sylvains, Guillaume, Hervé, Michel, Caroline, Florence, sans qui la vie serait plus triste, toute l'équipe des « toits » du DMA pour mettre de la bonne humeur au quotidien, et Mathieu pour nos échanges mathématiques réguliers depuis bientôt 7 ans. Merci aussi à Marie et Zaina pour avoir partagé leur expérience d'organisation pour la soutenance et à Valérie pour m'avoir facilité les démarches administratives.

J'exprime enfin toute ma gratitude à ma famille, mes grand-parents, mon frère Simon et surtout mes parents, pour leur soutien constant et pour m'avoir toujours encouragé dans mes choix. Leur compréhension et leur soutien indéfectible sont l'objet de toute ma reconnaissance et de mon admiration.

Et pour conclure, un tendre merci à Diane pour tout ce qu'elle m'apporte, pour tous les voyages que nous avons faits et pour sa patience lors de ce long travail de thèse.

Résumé

Les résultats de cette thèse s'inscrivent dans le cadre du programme de Langlands p-adique. Lorsque V est une représentation p-adique de dimension 2 du groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}_p}$ de $\mathbb{Q}_p$, on sait lui associer une représentation p-adique continue $B(V)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Dans un premier chapitre, nous considérons le cas où V est semi-stable non cristalline et construisons un foncteur qui, appliqué à une sous-représentation localement analytique $\Sigma(V)$ de $B(V)$ construite par Breuil, donne le module de Fontaine de V. Cette méthode, inspirée des travaux de Carayol et Dat dans le cadre ℓ-adique, utilise le complexe de de Rham du demi-plan de Drinfel'd et peut donc être considérée comme une réalisation géométrique d'une partie de la correspondance de Langlands p-adique. Lorsque L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, nous étendons cette construction à certaines familles de représentations semi-stables non cristallines de dimension 2 du groupe de Galois de L, paramétrées par un $[L:\mathbb{Q}_p]$-uplet d'éléments du corps des coefficients. Nous proposons alors, par analogie avec les constructions de Breuil dans le cas $L=\mathbb{Q}_p$, la construction d'une représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_2(L)$ associée à V et montrons qu'elle permet de retrouver le module de Fontaine de V par le foncteur décrit précédemment. Dans un deuxième chapitre, nous nous intéressons à certaines familles de représentations semi-stables de dimension 3 de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Dans ce cas, la situation devient plus compliquée et nous construisons, pour toute représentation V de cette famille, non pas une représentation mais un complexe $\Sigma(V)$ de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Nous montrons alors qu'un analogue du foncteur du chapitre 1, mais utilisant l'espace de Drinfel'd de dimension 2, associe à $\Sigma(V)$ le module de Fontaine de V.

Mots-clefs : programme de Langlands p-adique, représentations localement analytiques, espace de Drinfel'd, cohomologie localement analytique.

p-ADIC LANGLANDS PROGRAM, $\mathcal{L}$-INVARIANTS AND DERIVED CATEGORIES

Abstract

The results of this thesis have for background the p-adic Langlands program. When V is a two dimensional p-adic representation of the Galois group $G_{\mathbb{Q}_p}$ of $\mathbb{Q}_p$, we know how to associate to V a continuous p-adic representation of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. In a first chapter, we consider the case where V is semi-stable non crystalline and construct a functor which gives the Fontaine module of V, when it is applied to a locally analytic subrepresentation $\Sigma(V)$ of $B(V)$ which was constructed by Breuil. This method, inspired by the work of Carayol and Dat in the ℓ-adic setting, uses the de Rham complex of the Drinfel'd's half space and is a sort of geometric realization of a part of the p-adic Langlands correspondence. When L is a finite extension of $\mathbb{Q}_p$, we extend this construction to some families of semi-stable non crystalline two dimensional representations of the Galois group of L, parametrized by $[L:\mathbb{Q}_p]$-uples of elements of the coefficient field. We propose in analogy with Breuil's construction, a locally analytic representation of $\mathrm{GL}_2(L)$ associated to V and show that we can retrieve the Fontaine module of V by the precedent functor. In a second chapter, we are interesting by some families of semi-stable three dimensional representations of $G_{\mathbb{Q}_p}$. In this case, the situation is much more complicated and we construct, for such a representation V, not a representation but a complex $\Sigma(V)$ of locally analytic representations of $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Then we show that an analog of the functor of the first chapter, but using the two dimensional Drinfel'd's space, associates to $\Sigma(V)$ the Fontaine module of V.

Keywords : p-Langlands, locally analytic representations, Drinfel'd space, locally analytic cohomology.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

0.1. Un peu d'histoire

Si K est un corps, le groupe de Galois absolu de K est le groupe des automorphismes d'une clôture séparable $\overline{K}$ de K préservant K. C'est ce groupe qui permet de comprendre le passage d'une situation « rationnelle », sur K, à une situation « géométrique », sur $\overline{K}$. La compréhension du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$ du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est donc un problème crucial en théorie des nombres. Ses représentations continues sur des espaces vectoriels ℓ-adiques, avec ℓ un nombre premier, sont particulièrement intéressantes, car ce sont elles qui apparaissent dans la cohomologie étale ℓ-adique des variétés définies sur $\mathbb{Q}$.

0.1.1. Les origines : la théorie du corps de classes. — Une partie du groupe $G_{\mathbb{Q}}$ est très bien comprise, il s'agit de l'abélianisé $G_{\mathbb{Q}}^{ab}$ du groupe $G_{\mathbb{Q}}$. Ce quotient est décrit par la théorie du corps de classes, qui s'est développée essentiellement pendant la deuxième moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle et la première moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle. Elle aboutit à la construction d'un morphisme de groupes, dit morphisme de réciprocité

$$rec : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times} \to G_{\mathbb{Q}}^{ab} \tag{0.1.1}$$

permettant de décrire tous les quotients finis de $G_{\mathbb{Q}}^{ab}$ en termes de quotients finis de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$. Fixons $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et notons $\mathbb{Q}^{ab}$ sa sous-extension abélienne maximale. Le groupe des automorphismes de $\mathbb{Q}^{ab}$ est alors exactement $G_{\mathbb{Q}}^{ab}$.

La théorie du corps de classes a l'élégance supplémentaire d'avoir un pendant local. Considérons p un nombre premier et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. Choisissons $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ contenant $\overline{\mathbb{Q}}$ et notons $G_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ sur $\mathbb{Q}_p$. La restriction donne lieu à un morphisme de groupes $G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{Q}}$, injectif par densité de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. La théorie du corps de classes locale fournit un morphisme injectif, d'image dense, dit de réciprocité locale

$$rec_p : \mathbb{Q}_p^{\times} \to G_{\mathbb{Q}_p}^{ab}. \tag{0.1.2}$$

Enfin, ces constructions locales et globales sont compatibles. Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}_p^{\times} \arrow[r, hook, "rec_p"] \arrow[d] & G_{\mathbb{Q}_p}^{ab} \arrow[d] \\ \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} \arrow[r, "rec"] & G_{\mathbb{Q}}^{ab}. \end{tikzcd} \tag{0.1.3}$$

0.1.2. La théorie automorphe. — L'étude de la partie abélienne d'un groupe est équivalente à l'étude de ses représentations de dimension 1. L'exemple de la théorie du corps de classe suggère donc fortement que de plus amples informations sur le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ peuvent être obtenues en s'intéressant à ses représentations de dimension supérieure. Des représentations non abéliennes de $G_{\mathbb{Q}}$ apparaissent en effet déjà dans l'étude des courbes elliptiques définies sur $\mathbb{Q}$, et la théorie du corps de classes s'avère, dans ce cas, insuffisante.

Les isomorphismes de réciprocité, locaux et globaux, font apparaître une correspondance entre les représentations de dimension 1 de $G_{\mathbb{Q}}$ ou $G_{\mathbb{Q}_p}$, et les représentations de dimension 1 du groupe $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$, ou $\mathbb{Q}_p^{\times}$, c'est-à-dire le groupe des $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$-points ou $\mathbb{Q}_p$-points du groupe algébrique $\mathbb{G}_m = \mathrm{GL}_1$. On s'attend donc à ce que les représentations de dimension n de groupes de Galois soient liées aux représentations du groupe algébrique GL_n.

Dans cet objectif, on considère certaines représentations unitaires topologiquement irréductibles du groupe localement compact $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ sur un espace de Hilbert.

Lorsque $n = 1$, la décomposition $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} = \prod_p' \mathbb{Q}_p^{\times} \times \mathbb{R}^{\times}$ en produit restreint relativement aux sous-groupes $\mathbb{Z}_p^{\times}$ permet d'écrire tout caractère unitaire, c'est-à-dire à valeurs dans le groupe des nombres complexes de module 1, χ de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$ comme un produit de caractères $(\prod_p \chi_p)\chi_\infty$, chaque χ_p étant un caractère unitaire de $\mathbb{Q}_p^{\times}$ et χ_∞ un caractère unitaire de $\mathbb{R}^{\times}$, de telle sorte que pour presque tout p, χ_p est trivial sur $\mathbb{Z}_p^{\times}$. La même décomposition a lieu avec les représentations unitaires irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. En effet, ce produit de caractères est un cas particulier de produit tensoriel restreint. Si π est une représentation unitaire topologiquement irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, il existe, pour tout nombre premier p, une représentation π_p de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, lisse irréductible, et une représentation unitaire topologiquement irréductible π_∞ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\pi \simeq \hat{\otimes}_p' \pi_p \hat{\otimes} \pi_\infty$. Le produit tensoriel restreint est bien défini car pour presque tout p, le sous-espace des vecteurs $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-invariants de π_p est de dimension 1, on peut donc prendre le produit tensoriel restreint relativement à ces sous-espaces. Lorsque $n = 2$, de telles représentations peuvent être associées aux formes modulaires propres pour les opérateurs de Hecke, ce procédé est, par exemple, décrit dans [**47**].

Nous ne parlerons guère plus de représentations adéliques, mais nous espérons que ces considérations auront suffi à expliquer l'intérêt que présente la recherche de correspondances de Langlands locales, c'est-à-dire de correspondances entre représentations de dimension n de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

0.1.3. La correspondance de Langlands locale. — Soit ρ une représentation ℓ-adique continue de dimension n de $G_{\mathbb{Q}}$. Notons ρ_p sa restriction au groupe de décomposition en p. Soit I_p le groupe d'inertie de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Le groupe I_p possède un pro-p-sous-groupe de Sylow distingué dont le quotient est procyclique isomorphe à $\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$. On note alors t_ℓ la surjection $I_p \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ provenant de cette décomposition. Ainsi, pour $p \neq l$, les représentations ℓ-adiques de $G_{\mathbb{Q}_p}$ ont une forme assez simple. Le pro-p-groupe de I_p agit un travers un quotient fini, et il s'agit essentiellement d'ajouter l'action du quotient procyclique pour comprendre l'action de l'inertie. Ceci se résume dans le théorème de monodromie ℓ-adique de Grothendieck.

Théorème 0.1.1. — *Soit $\ell \neq p$, et ρ une représentation ℓ-adique de dimension n de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Il existe un sous-groupe ouvert H de I_p, et un opérateur nilpotent N tels que*

$$\rho|_H \simeq \exp(N t_\ell). \tag{0.1.4}$$

Autrement dit, la représentation $\rho|_{I_p} \exp(-N t_\ell)$ se factorise à travers un quotient fini de I_p. Il se trouve qu'il est possible de prolonger t_ℓ à $G_{\mathbb{Q}_p}$, bien que de façon non canonique, et d'obtenir ainsi une représentation de $\tilde{\rho} = \rho \exp(-N\tilde{t}_\ell)$ de $G_{\mathbb{Q}_p}$, triviale sur un sous-groupe ouvert de I_p. En considérant la restriction de $\tilde{\rho}$ à W_p, le groupe de Weil de $\mathbb{Q}_p$, on n'obtient rien d'autre qu'une représentation lisse de W_p. Au final, on a le dictionnaire suivant, dû à Pierre Deligne.

Théorème 0.1.2 **([35])**. — *Soit ℓ un nombre premier différent de p. L'application $\rho \mapsto (\tilde{\rho}, N)$ induit une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations ℓ-adiques continues de dimension n de W_p, pour lesquelles l'action de Frobenius est semi-simple et les classes d'isomorphisme de couples $(\tilde{\rho}, N)$ où $\tilde{\rho}$ est une représentation lisse semi-simple de W_p et N un élément nilpotent de $\mathrm{M}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ tels que*

$$N\tilde{\rho}(Frob_p) = p^{-1}\tilde{\rho}(Frob_p)N, \tag{0.1.5}$$

$Frob_p$ désignant un automorphisme de Frobenius arithmétique.

Il est remarquable de constater que les couples d'objets $(\tilde{\rho}, N)$ ne font plus intervenir la topologie du corps des coefficients. On appelle un tel couple une représentation de Weil-Deligne de dimension n. La correspondance de Langlands locale, démontrée par Michael Harris et Richard Taylor ([**50**]) puis Guy Henniart ([**51**]), met alors en correspondance les classes d'isomorphisme de représentations de Weil-Deligne de dimension n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. L'énoncé exact de cette correspondance fait intervenir les facteurs L et ϵ associés à la fois aux représentations de Weil-Deligne, et aux représentations lisses de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$. Précisons aussi qu'il existe un calibrage de cette correspondance de telle sorte qu'elle reste valable après torsion par un automorphisme de $\mathbb{C}$. Plus précisément, si l'on note $\sigma(V)$ la représentation de Weil-Deligne associée à une représentation lisse irréductible V de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, on a $\sigma(V^\tau) \simeq \sigma(V)^\tau$ pour tout automorphisme τ de $\mathbb{C}$. On peut alors fixer un isomorphisme quelconque $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ pour définir une correspondance de Langlands locale entre représentations de Weil-Deligne à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Exemple 0.1.3. — Si $n = 2$, notons B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$ tels que $\chi_1\chi_2^{-1}$ est différent du caractère trivial et de $|\cdot|^2$, la représentation $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ est irréductible et $\sigma(\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1 \otimes \chi_2))$ est la classe d'isomorphisme de la représentation réductible de dimension 2 de $W_{\mathbb{Q}_p}$ donnée par $nr(p^{-1})\chi_1 \oplus \chi_2$, $nr(a)$ étant le caractère non ramifié de $W_{\mathbb{Q}_p}$ envoyant un frobenius arithmétique sur a. Dans le cas où $\chi_1 = \chi_2 = 1$, on a une suite exacte

$$0 \to 1 \to \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1) \to \mathrm{St}_2^\infty \to 0 \tag{0.1.6}$$

où 1 est la représentation triviale et St_2^∞ est une représentation lisse irréductible appelée représentation de Steinberg. La représentation $\sigma(1)$ est alors la représentation $nr(p^{-1}) \oplus 1$ de $W_{\mathbb{Q}_p}$ avec $N = 0$ et $\sigma(\mathrm{St}_2^\infty)$ est $nr(p^{-1}) \oplus 1$ muni de l'unique opérateur N non trivial, c'est-à-dire, sous la contrainte (0.1.5), envoyant le sous-espace 1-isotypique sur le sous-espace $nr(p^{-1})$-isotypique. Enfin, dans le cas où V n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique, la représentation $\sigma(V)$ est irréductible.

La question de la compatibilité locale-globale pour ces représentations se pose alors. Autrement dit, lorsqu'une représentation galoisienne ℓ-adique est associée à une représentation automorphe, les décompositions locales de chaque côté se correspondent-elles ? Dans le cas des formes modulaires, une réponse complète nous est donnée par le théorème de Langlands-Deligne-Carayol.

Théorème 0.1.4 **([21])**. — *Soit f une forme modulaire cuspidale, propre pour tous les opérateurs de Hecke. Soient $\pi_f = \bigotimes_p \pi_p \otimes \pi_\infty$ la représentation automorphe cuspidale associée à f et $\rho(f)$ la représentation p-adique associée à f. Alors, pour tout $p \neq \ell$, la représentation $\rho_\ell(f) = \rho(f)|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}}$ est isomorphe à $\sigma(\pi_\ell)$.*

Il est remarquable que la correspondance de Langlands locale puisse ainsi décrire le comportement de la représentation $\rho(f)$, même aux places de ramification. Il reste cependant à traiter le cas de la représentation $\rho_p(f)$. Dans ce cas, le théorème 0.1.1 ne s'applique plus, et nous n'avons plus de description de $\rho_p(f)$ en termes de représentations de Weil-Deligne. Obtenir un moyen de décrire la représentation $\rho_p(f)$ en termes de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est un des objectifs du programme de Langlands p-adique. Avant d'en parler plus avant, nous allons décrire la théorie des périodes p-adiques de Jean-Marc Fontaine, qui est un moyen très efficace de décrire les représentations p-adiques de $G_{\mathbb{Q}_p}$.

0.2. La théorie p-adique

0.2.1. La théorie de Fontaine. — Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. La théorie de Fontaine associe à chaque représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ un espace vectoriel muni d'objets provenant de l'algèbre linéaire, des endomorphismes linéaires et une filtration. Plus précisément, Jean-Marc Fontaine définit un certain nombre d'anneaux topologiques munis d'une action du groupe $G_{\mathbb{Q}_p}$, et de structures supplémentaires. Une construction de tous ces anneaux est donnée dans [**43**]. L'anneau B_{dR} par exemple est une $\overline{\mathbb{Q}}_p$-algèbre munie d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ et d'une filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^i(B_{dR}))_i$ stable par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$. De plus $B_{dR}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)} = L$. Si V est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ de dimension finie, on pose

$$D_{dR}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}. \tag{0.2.1}$$

L'espace vectoriel $D_{dR}(V)$ est alors un espace filtré et on a toujours $\dim_L D_{dR}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Lorsque cette inégalité est une égalité, on dit que la représentation est de de Rham. Malheureusement la donnée de $D_{dR}(V)$ ne suffit pas à elle seule à caractériser l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ sur V. C'est pourquoi il faut introduire d'autres anneaux. Jean-Marc Fontaine introduit alors l'anneau des périodes cristallines B_{cris}, qui est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$, d'un endomorphisme de Frobenius φ commutant à cette action, ainsi que d'un plongement $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$-équivariant $B_{cris} \hookrightarrow B_{dR}$. Cette fois-ci $B_{cris}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)} = L_0$, l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans L et on définit de même $D_{cris}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}$. On a l'inégalité $\dim_{L_0} D_{cris}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Lorsque c'est une égalité, on dit que la représentation est cristalline, le L_0-espace vectoriel est alors muni d'un endomorphisme φ de Frobenius, semi-linéaire, bijectif, et agissant comme l'endomorphisme de Frobenius sur les coefficients L_0. Le plongement $D_{cris}(V) \subset D_{dR}(V)$ montre alors que la représentation est aussi de de Rham et munit $D_{cris}(V) \otimes_{L_0} L$ d'une filtration décroissante. Le φ-module filtré $D_{cris}(V)$ permet, lui, de caractériser la représentation V lorsqu'elle est cristalline. Autrement dit, le foncteur D_{cris} est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des représentations cristallines dans la catégorie des φ-modules filtrés.

En introduisant un anneau intermédiaire B_{st}, contenant B_{cris}, muni d'un endomorphisme de Frobenius prolongeant celui de B_{cris}, mais aussi d'un endomorphisme nilpotent N tel que $N\varphi = p\varphi N$, on peut définir un troisième type de représentations galoisiennes, les représentations semi-stables, on leur associe naturellement un L_0-espace vectoriel muni d'un automorphisme semi-linéaire φ et d'un endomorphisme linéaire N vérifiant la relation $N\varphi = p\varphi N$. De plus, le choix d'une uniformisante de L permet de plonger l'anneau B_{st} dans B_{dR} de façon à prolonger le plongement naturel de B_{cris} dans B_{dR}. Ceci munit $D_{st}(V) \otimes_{L_0} L$ d'une filtration décroissante. L'espace $D_{st}(V)$, muni des endomorphismes φ, N et de la filtration permet alors de retrouver V de la façon suivante, il s'agit de $\mathrm{Fil}^0((D_{st}(V) \otimes_{L_0} B_{st})^{\varphi=1,N=0})$. Enfin, on peut considérer la sous-catégorie des représentations potentiellement semi-stables, il s'agit des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ dont la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/M)$ est semi-stable pour une certaine extension finie M de L. On appelle $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(M/L))$-module filtré la donnée d'un M_0-espace vectoriel D muni d'un endomorphisme bijectif semi-linéaire φ, d'un endomorphisme nilpotent linéaire N tels que $N\varphi = p\varphi N$, ainsi que d'une action semi-linéaire du groupe $\mathrm{Gal}(M/L)$ commutant à φ et d'une filtration sur le M-espace vectoriel $D \otimes_{M_0} M$. Si V est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ dont la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/M)$ est semi-stable, on note

$D_{pst}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/M)}$, c'est un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(M/L))$-module filtré. Encore une fois, le foncteur D_{pst} est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des représentations semi-stables sur M vers la catégorie des $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(M/L))$-modules filtrés. La conjecture de monodromie p-adique de Fontaine prédit que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable. Elle a été prouvée au moyen des travaux de Laurent Berger, Yves André, Zoghman Mebkhout et Kiran Kedlaya ([**6**], [**1**], [**68**], [**58**], voir aussi [**30**]).

La question naturelle suivante est alors de se demander quels sont les $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(M/L))$-modules filtrés qui décrivent des représentations galoisiennes, c'est-à-dire quelle est l'image essentielle du foncteur D_{st} ? Une première observation est que si V est une représentation semi-stable, le (φ, N)-module filtré $D_{st}(V)$ est faiblement admissible, c'est-à-dire que les pentes de l'automorphisme φ et les sauts de la filtration vérifient certaines inégalités. Plus précisément, notons, pour D un (φ, N)-module filtré, $t_N(D)$ la valuation de l'opérateur scalaire $\det(\varphi)$ de $\bigwedge_{L_0}^{\dim_{L_0}} D$ dans lui-même et $t_H(D) = \sum_i i \dim_L \mathrm{gr}^i(D)$. Un (φ, N)-module filtré D est dit faiblement admissible si $t_N(D) = t_H(D)$ et $t_N(D') \geq t_H(D')$ pour tout sous-(φ, N)-module D'. Le fait remarquable est alors que cette condition caractérise exactement l'image essentielle du foncteur D_{st}. Il s'agit d'un théorème de Pierre Colmez et de Jean-Marc Fontaine.

Théorème 0.2.1 **(Colmez-Fontaine, [32], [26], [4]).** — *Si D est un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(M/L))$-module filtré faiblement admissible de dimension n, la représentation galoisienne*

$$V = \mathrm{Fil}^0((D_{st}(V) \otimes_{L_0} B_{st})^{\varphi=1, N=0, \mathrm{Gal}(M/L)}) \tag{0.2.2}$$

est de dimension n et $D_{pst}(V) \simeq D$.

On peut construire, à partir de chaque $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(M/L))$-module filtré faiblement admissible, une représentation galoisienne potentiellement semi-stable. Il se trouve que les $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(M/L))$-modules filtrés sont des objets bien plus agréables à manipuler que les représentations galoisiennes. Ce sont aussi des objets très proches des représentations de Weil-Deligne. Si D est un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(M/L))$-module, on peut en effet lui associer une représentation de Weil-Deligne par la méthode décrite dans [**44**]. On note $W(D)$ le module de Weil-Deligne ainsi obtenu.

Nous pouvons à présent en dire plus sur la composante p-adique de la représentation p-adique associée à une forme modulaire et compléter le théorème 0.1.4. Il s'agit d'un théorème de Takeshi Saito.

Théorème 0.2.2 **(T. Saito, [74]).** — *Sous les hypothèses du théorème 0.1.4, la représentation $\rho_p(f)$ est potentiellement semi-stable et les représentations de Weil-Deligne associées à $D_{pst}(\rho_p)$ et à π_p via la correspondance de Langlands locale sont isomorphes.*

Ce théorème nous permet donc de retrouver les endomorphismes de Frobenius et de monodromie à partir de π_p, mais pas la filtration sur le module de Fontaine. Pourtant, cette filtration est une donnée locale du côté galoisien, elle devrait donc correspondre à une donnée locale du côté automorphe. Il paraît clair que pour obtenir une telle donnée locale, on ne peut plus se contenter de manipuler des représentations lisses, il faut qu'une topologie p-adique intervienne quelque part.

0.3. Le programme de Langlands p-adique

0.3.1. La correspondance modulo p. — Une conséquence de la description locale de la représentation ρ_p serait la détermination de la réduction modulo p, ou plus exactement de la semi-simplification de la réduction modulo p, de la représentation ρ_p. Il est donc raisonnable de se demander si, à l'instar des travaux de Marie-France Vigneras ([**89**]), il n'existe pas de correspondance de Langlands semi-simple modulo p entre représentations semi-simples de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et certaines représentations lisses semi-simples de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il se trouve que c'est bien le cas, la correspondance de ce type a été formulée par Christophe Breuil et découle de la classification des représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ par Laure Barthel, Ron Livné et Christophe Breuil ([**2**], [**13**]). La grosse surprise, est qu'il n'existe pas de correspondance sous cette forme pour les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$. En effet, comme le montrent les travaux de Christophe Breuil et Vytautas Paskunas ([**17**]), il existe beaucoup plus de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(L)$ en caractéristique p quand L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ non ramifiée et différente de $\mathbb{Q}_p$.

0.3.2. Premiers relèvements en caractéristique 0. — Les résultats du 0.3.1 ne concernent que la réduction de ρ_p modulo p. Une façon d'obtenir des représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ modulo p est de considérer la réduction modulo p de représentations unitaires continues de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Par représentation unitaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, nous entendons un espace de Banach p-adique sur lequel $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit continûment par des isométries. La boule unité B de cet espace est alors stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et on obtient une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur B/pB qui est un espace vectoriel sur une extension de $\mathbb{F}_p$.

L'idée de Christophe Breuil à l'origine du programme de Langlands p-adique est que l'on devrait pouvoir associer à une représentation potentiellement semi-stable ρ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, une représentation unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, contenant comme sous-espace dense une représentation localement algébrique $Alg(V) \otimes \sigma(V)$, où $\sigma(V)$ est la représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à la représentation de Weil-Deligne $W(D_{pst}(V))$ et $Alg(V)$ est une représentation algébrique construite à partir des poids de Hodge-Tate de V. Dans le cas où les poids de Hodge-Tate de V sont distincts de la forme $h_0 > h_1$, la représentation $Alg(V)$ devrait être la représentation algébrique irréductible de plus haut poids $(h_0 - 1, h_1)$.

Les premiers résultats venant conforter cette hypothèse sont les calculs faits par Christophe Breuil dans [**18**], où il calcule explicitement la réduction modulo p de certains réseaux sur $Alg(V) \otimes \sigma(V)$ et la réduction modulo p de certaines représentations cristallines irréductibles, et retrouve ainsi la réduction modulo p de V via la correspondance de Langlands semi-simple modulo p.

0.3.3. Les vecteurs localement analytiques. — Dans la théorie des représentations unitaires des groupes de Lie réels, la théorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules joue un rôle important. Si π est une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie G sur un espace de Hilbert, le sous-espace des vecteurs sur lesquels G agit de façon différentiable est ce qu'on appelle un $(\mathfrak{g}, K)$-module, une grande partie de la théorie se ramène à l'étude de ces objets.

Nous avons une situation analogue dans le cas p-adique. Soit B un espace de Banach p-adique muni d'une action continue unitaire d'un groupe de Lie p-adique G. Le sous-espace des vecteurs sur lesquels G agit de façon différentiable est appelé sous-espace des vecteurs localement analytiques, et c'est un exemple de représentation localement analytique de G. L'étude des représentations localement analytiques a été menée de façon systématique par Peter Schneider et Jeremy Teitelbaum ([**83**], [**81**], [**80**], [**85**], [**86**]) au début des années 2000, et continuée par Henning Frommer, Matthew Emerton, Mark Kisin, Matthias Strauch, Sascha Orlik, Jan Kohlhaase et Tobias Schmidt par la suite ([**60**], [**46**], [**40**], [**41**], [**42**], [**70**], [**64**], [**63**], [**75**], [**76**]).

Si G est un groupe de Lie localement analytique et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, une représentation localement analytique de G est un K-espace vectoriel localement convexe séparé tonnelé V, muni d'une action séparément continue de G telle que pour tout $v \in V$, l'application de G dans V définie par $v \mapsto g \cdot v$ est localement analytique. Notons $D(G)$ l'anneau des distributions sur G à valeurs dans K. Il s'agit du dual topologique fort de l'espace des fonctions localement analytiques de G dans K. Si V est une représentation localement analytique de G, l'anneau $D(G)$ agit sur le dual topologique fort V' de V de façon séparément continue par

$$\lambda(w)(v) = \lambda(g \mapsto w(g \cdot v)), \tag{0.3.1}$$

pour $v \in V$, $w \in V'$ et $\lambda \in D(G)$. Ainsi, si l'espace V est réflexif, on a une chance de retrouver l'action de G sur V à partir du $D(G)$-module V'. Schneider et Teitelbaum montrent que c'est effectivement le cas si V est de type compact. Un espace vectoriel localement convexe est de type compact si c'est une limite inductive dénombrable d'espaces de Banach dont toutes les flèches de transition sont injectives et compactes. Un espace de type compact est réflexif et son dual topologique fort est un espace de Fréchet nucléaire.

***Théorème 0.3.1* (Schneider, Teitelbaum, [83]).** — *Le foncteur $V \mapsto V'$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations localement analytiques sur des espaces de type compacts et la catégorie des espaces de Fréchet nucléaires munis d'une action séparément continue de $D(G)$.*

Ces catégories n'étant pas abéliennes, il reste à trouver une sous-catégorie de $D(G)$-modules qui soit abélienne. C'est ce que font Schneider et Teitelbaum en étudiant les algèbres de Fréchet-Stein. Ces algèbres possèdent une catégorie de modules, dits coadmissibles, formant une catégorie abélienne et contenant les modules de type fini. Un module coadmissible sur une algèbre de Fréchet-Stein est muni d'une topologie canonique qui en fait un espace de Fréchet nucléaire. Ils prouvent alors dans [**85**] que si G est le groupe des L-points d'un groupe réductif défini sur L, alors, pour tout sous-groupe compact ouvert G_0 de G, l'algèbre $D(G_0)$ est une algèbre de Fréchet-Stein, et définissent une représentation localement analytique admissible de G comme étant une représentation localement analytique sur un espace de type compact V telle que V' soit un $D(G_0)$-module coadmissible pour tout sous-groupe (resp. pour un sous-groupe) compact ouvert de G. La catégorie des représentations localement analytiques admissibles de G est alors une catégorie abélienne.

Parallèlement, ils définissent dans [**82**] une catégorie abélienne de représentations unitaires continues admissibles de G et prouvent que pour une telle représentation, le sous-espace des vecteurs localement analytiques est une représentation localement analytique admissible.

***Théorème 0.3.2* ([85]).** — *Si $L = \mathbb{Q}_p$, c'est-à-dire si G est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}_p$, pour toute représentation unitaire admissible non nulle de G, le sous-espace V^{an} des vecteurs localement analytiques de V est non nul et le foncteur $V \mapsto V^{an}$ est un foncteur exact de la catégorie des représentations unitaires admissibles de G dans la catégorie des représentations localement analytiques admissibles de G.*

***Remarque 0.3.3*.** — Lorsque L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur « vecteurs localement L-analytiques » n'est plus nécessairement exact, Tobias Schmidt a étudié ses foncteurs dérivés ([**76**]).

Ce résultat de Schneider et Teitelbaum suggère que les représentations localement analytiques devraient avoir aussi un grand rôle à jouer dans le programme de Langlands p-adique.

0.3.4. L'exemple des invariants $\mathcal{L}$. — L'étape suivante vers cette correspondance p-adique est d'étudier le cas de représentations p-adiques de $G_{\mathbb{Q}_p}$ ayant les mêmes (φ, N)-modules sous-jacents, mais dont les (φ, N)-modules filtrés sont non isomorphes du fait des filtrations. Une telle famille de représentations de dimension 2 existe. Fixons k un entier plus grand que 2 et $\mathcal{L} \in K$. On définit le (φ, N)-module filtré $D(k, \mathcal{L})$ de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
D(k,\mathcal{L}) &= Ke_0 \oplus Ke_1\\
\varphi(e_0) &= p^{\frac{k}{2}-1}e_0\\
\varphi(e_1) &= p^{\frac{k}{2}}e_1\\
Ne_1 &= e_0\\
\mathrm{Fil}^n(D(k,\mathcal{L})) &= \begin{cases} D(k,\mathcal{L}) & \text{si } n \leq 0\\ K(e_1+\mathcal{L}e_0) & \text{si } 1 \leq n \leq k-1\\ \{0\} & \text{si } n \geq k\end{cases}
\end{aligned} \tag{0.3.2}$$

Pour tout choix de k et $\mathcal{L}$, le (φ, N)-module filtré $D(k,\mathcal{L})$ est faiblement admissible. D'après le théorème de Fontaine-Colmez, il existe une représentation galoisienne de dimension 2, $V(k,\mathcal{L})$, telle que $D^*_{st}(V(k,\mathcal{L})) \simeq D(k,\mathcal{L})$. Comme on le voit, la structure de (φ, N)-modules de $D(k,\mathcal{L})$ ne dépend que de k, alors que la structure de (φ, N)-module filtré dépend du couple $(k,\mathcal{L})$. La paramètre $\mathcal{L}$ est appelé invariant $\mathcal{L}$ de la filtration, en référence à l'invariant $\mathcal{L}(f)$ associé à une forme modulaire ayant un niveau de valuation 1 en p. Le nombre $\mathcal{L}(f)$ intervient dans la valeur en 0 de la dérivée de la fonction L p-adique associée à f, construite dans [**67**]. Il a été conjecturé par Mazur, puis prouvé par Stevens et Kato-Kurihara-Tsuji que ce $\mathcal{L}(f)$ coïncide bien avec l'invariant $\mathcal{L}$ apparaissant dans le module de Fontaine de la représentation galoisienne $\rho_p(f)$ (voir l'introduction de [**27**] pour toute l'histoire).

On peut montrer que la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée au (φ, N)-module sous-jacent à $D(k,\mathcal{L})$ est la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_2^\infty \otimes |\det|^{\frac{k}{2}-1}$.

Les représentations unitaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondant aux représentations $V(k,\mathcal{L})$ devraient donc être des complétés de la représentation localement algébrique $L(k) = \mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes \mathrm{St}_2^\infty \otimes |\det|^{\frac{k}{2}-1}$. Dans [**14**], Christophe Breuil propose la construction d'une famille $(R(k,\mathcal{L}))_{\mathcal{L}\in K}$ de réseaux invariants par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $L(k)$ et définit $B(k,\mathcal{L})$ le complété de $L(k)$ pour le réseau $L(k,\mathcal{L})$, c'est une représentation unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il propose en fait de construire directement un sous-espace de vecteurs localement analytiques et de définir $B(k,\mathcal{L})$ comme le complété unitaire universel de cet espace de vecteurs localement analytiques. L'idée est de construire une représentation localement analytique $\Sigma(k)$ dont le sous-espace des vecteurs localement algébriques est isomorphe à $L(k)$, puis de construire des représentations $\Sigma(k,\mathcal{L})$, extensions de $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes |\det|^{\frac{k}{2}-1}$ par $\Sigma(k)$, l'idée principale étant de faire intervenir la branche du logarithme p-adique dont la valeur en p vaut $\mathcal{L}$. On a donc une suite exacte

$$0 \to \Sigma(k) \to \Sigma(k,\mathcal{L}) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes |\det|^{\frac{k}{2}-1} \to 0, \tag{0.3.3}$$

et la classe d'isomorphisme de $\Sigma(k,\mathcal{L})$ dépend du couple $(k,\mathcal{L})$, c'est-à-dire

$$\Sigma(k,\mathcal{L}) \simeq \Sigma(k',\mathcal{L}') \Rightarrow (k,\mathcal{L}) = (k',\mathcal{L}'). \tag{0.3.4}$$

On définit alors $B(k,\mathcal{L})$ comme le complété unitaire universel de $\Sigma(k,\mathcal{L})$. Cependant, il est plus simple de travailler avec les représentations localement analytiques, et il reste encore du travail pour en déduire des propriétés de $B(k,\mathcal{L})$. Christophe Breuil conjecture alors que si $k > 2$, l'espace $B(k,\mathcal{L})$ n'est pas réduit à 0, est irréductible, admissible, que la semi-simplifiée de sa réduction modulo p coïncide avec la semi-simplifiée de la réduction modulo p de $V(k,\mathcal{L})$ par la correspondance semi-simple modulo p, et que

$$B(k,\mathcal{L}) \simeq B(k',\mathcal{L}') \Rightarrow (k,\mathcal{L}) = (k',\mathcal{L}'). \tag{0.3.5}$$

Un certain nombre de cas de cette conjecture ont été prouvés de façon directe par Christophe Breuil et Ariane Mézard dans [**16**], puis le cas de certaines représentations provenant de formes modulaires a été démontré par Christophe Breuil dans [**12**]. Enfin, le cas général de ces conjectures a été prouvé par Pierre Colmez ([**29**]) en faisant appel à la théorie des (φ,Γ)-modules de Jean-Marc Fontaine. L'assertion sur la réduction modulo p est alors un travail de Laurent Berger ([**3**]), en utilisant les techniques de (φ, Γ)-modules.

L'introduction des (φ, Γ)-modules a alors ouvert la voie à la suite. Laurent Berger et Christophe Breuil ([**5**]) ont utilisé les techniques de Pierre Colmez pour l'étude des représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ devenant cristallines sur une extension abélienne de $\mathbb{Q}_p$, et Pierre Colmez a traité le cas des représentations triangulines restantes pour étendre la construction $V \mapsto B(V)$ à toutes les représentations triangulines ([**28**]), puis le cas général ([**31**]).

Remarque 0.3.4. — Les représentations unitaires obtenues par cette méthode ne sont pas toujours irréductibles. Par exemple, dans le cas de $V(k, \mathcal{L})$ avec $k = 2$, les représentations $B(2, \mathcal{L})$ ne sont pas irréductibles, mais des extensions non triviales de la forme

$$0 \to B(2) \to B(2, \mathcal{L}) \to K \to 0 \tag{0.3.6}$$

dont la classe d'isomorphisme dépend de $\mathcal{L}$. De même, Christophe Breuil et Matthew Emerton ont construit, dans [**15**], des extensions non scindées entre représentations unitaires, associées à des représentations p-adiques cristallines réductibles non scindées de $G_{\mathbb{Q}_p}$.

0.4. La correspondance géométrique

Si f est une forme modulaire propre, de poids k et de niveau N. La représentation galoisienne ρ_f associée à cette forme modulaire se découpe dans la cohomologie étale de la courbe modulaire $X(N)$ à coefficients dans le faisceau localement constant provenant de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}^2)$. En ajoutant des puissances de p au niveau N, on obtient une tour de courbes modulaires

$$\cdots \to X(Np^{n+1}) \to X(Np^n) \to \cdots \to X(N) \tag{0.4.1}$$

sur laquelle agit le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. La stratégie de Carayol-Deligne-Langlands pour prouver le théorème 0.1.4 revient à démontrer que la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ engendrée par $\rho(f)$ dans $\varinjlim_n H^1_{et}(X(Np^n), \mathrm{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}^2))$ est la représentation obtenue par la correspondance de Langlands.

Une autre motivation du programme de Langlands p-adique est que la cohomologie complétée ([**39**]) de la tour des courbes modulaires devrait, de la même façon, refléter la correspondance de Langlands p-adique. Des résultats dans ce sens ont été obtenus par Breuil, puis Breuil-Emerton ([**12**], [**15**]).

0.4.1. La tour des espaces de Drinfel'd. — Néanmoins, cette démonstration reste hautement globale, le caractère purement local de la correspondance de Langlands suggère qu'il devrait exister aussi une correspondance géométrique locale. Cette conjecture a été énoncée par Henri Carayol dans [**22**]. L'idée est d'utiliser une tour d'espaces analytiques rigides construits par Drinfel'd dans [**38**]. Rappelons ici brièvement leur définition. Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{X}_n(\mathbb{C}_p)$ le complémentaire, dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ de l'union des $\mathbb{C}_p$-points de tous les hyperplans définis sur $\mathbb{Q}_p$. Cet espace est constitué des $\mathbb{C}_p$-points d'un espace analytique rigide défini sur $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\mathcal{X}_n$. Cet espace est naturellement muni d'une action de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$. Drinfel'd construit alors une tour de revêtements de $\mathcal{X}_{n,\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}}$

$$\cdots \to \mathcal{X}_{n,r} \to \cdots \to \mathcal{X}_{n,0} = \mathcal{X}_{n,\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}}, \tag{0.4.2}$$

chaque $\mathcal{X}_{n,r}$ étant muni d'une action de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$ pour laquelle les flèches de transition sont équivariantes. Soit D l'unique algèbre centrale simple de dimension $(n+1)^2$ et d'invariant de Brauer $\frac{1}{n+1}$, $\mathcal{O}_D$ un ordre maximal de D. Le revêtement $\mathcal{X}_{n,r} \to \mathcal{X}$ est alors galoisien de groupe $(\mathcal{O}_D/(p)^r)^\times$. Au final, on définit une action de $D^\times$ sur toute la tour (0.4.2). La théorie de Berkovich permet d'associer à chaque $\mathcal{X}_{n,r}$ un groupe de cohomologie étale à support compact

$H^i_{et,c}(\mathcal{X}_{n,r,\overline{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ muni d'une action de $I_{\mathbb{Q}_p}$, le groupe d'inertie $I_{\mathbb{Q}_p} \subset G_{\mathbb{Q}_p}$. On considère alors l'espace

$$H = \varinjlim_r H^n_{et,c}(\mathcal{X}_{n,r,\overline{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \tag{0.4.3}$$

muni d'une action du produit $I_{\mathbb{Q}_p} \times D^\times \times \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$ que l'on peut prolonger en une action de $W_{\mathbb{Q}_p} \times D^\times \times \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$.

La conjecture de Carayol prédit que, si ρ est une représentation ℓ-adique irréductible de dimension $n+1$, la partie ρ-isotypique $H[\rho]$ doit être une certaine puissance finie de la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$ associée à ρ par la correspondance de Langlands locale, cette puissance étant déterminée par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Cependant cette cohomologie ne contient pas toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$. Donnons l'exemple des sous-quotients des séries principales non ramifiées. Si ces représentations apparaissaient dans l'espace H, elles devraient déjà apparaître en niveau 0, c'est-à-dire dans la cohomologie de l'espace $\mathcal{X}_n$. Or cette cohomologie a été calculée par Peter Schneider, Ulrich Stuhler et Jean-François Dat ([**79**], [**34**]). Leur calcul montre que chaque $H^i_{et,c}(\mathcal{X}_{n,\overline{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ est irréductible en tant que représentation lisse de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$. On obtient ainsi $n+1$ représentations non isomorphes, alors que la représentation $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)}(1)$ contient 2^{n+1} facteurs de Jordan-Hölder non isomorphes.

Pour retrouver ces facteurs manquants, Jean-François Dat a eu l'idée de ne plus considérer uniquement les espaces de cohomologie $H^i_{et,c}(\mathcal{X}_{n,\overline{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$, mais tout le complexe de cohomologie $R\Gamma_{et,c}(\mathcal{X}_{n,\overline{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ considéré comme objet d'une certaine catégorie de représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \times D^\times \times \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$.

***Théorème 0.4.1* (Dat, [34]).** — *Si π est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)}(1)$, il existe un isomorphisme $G_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant*

$$\mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p))}(R\Gamma_{et,c}(\mathcal{X}_{n,\overline{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi)) \simeq \sigma(\pi) \otimes |\cdot|^n, \tag{0.4.4}$$

où π est la représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$ associée à π par la correspondance de Langlands locale, et le symbole $\mathcal{H}^*$ désigne la somme directe des espaces de cohomologie du complexe.

En fait, un résultat plus général est valable en utilisant toute la tour de Drinfel'd et en considérant les représentations elliptiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ([**33**]).

0.4.2. Le cas p-adique. — Le point de départ de cette thèse est alors la remarque suivante, qui m'a été rapportée par Christophe Breuil, et qui est issue de conversations qu'il a eues avec Alain Genestier et inspirée du théorème 0.4.1. L'isomorphisme obtenu par Jean-François Dat dans le théorème 0.4.1 devrait avoir un analogue p-adique. Il a été prouvé par Schneider et Teitelbaum ([**84**]) que le complexe de de Rham de l'espace $\mathcal{X}_n$ est un complexe d'espaces de Fréchet nucléaires munis d'actions séparément continues de $D(\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p))$. De plus, ce complexe possède une filtration naturelle dans la catégorie dérivée des complexes de $D(\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p))$-modules. Si Σ est le sous-espace des vecteurs localement analytiques d'une représentation unitaire associée à la représentation galoisienne ρ par la correspondance de Langlands p-adique, en considérant

$$\mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_{D^b(D(\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)))}(\pi', R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_n, K))), \tag{0.4.5}$$

on obtient un module filtré, qui devrait correspondre à $D^*_{dR}(\rho)$, le dual de $D_{dR}(\rho)$. Nous avons ici dualisé la formulation de Jean-François Dat car nous ne disposons pas de cohomologie à support compact à coefficients p-adique, nous utilisons donc la cohomologie de de Rham. Une cohomologie log-cristalline est construite par Elmar Große-Klönne dans [**49**] et devrait permettre de munir l'espace (0.4.5) d'une structure de (φ, N)-module filtré.

Le premier résultat de cette thèse est une illustration de ce principe pour les représentations localement analytiques $\Sigma(k, \mathcal{L})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour que l'information donnée par la filtration soit vraiment déterminante, il faut la comparer à l'action du Frobenius et de la monodromie. Soit $R\Gamma_{dR}(k)$ le complexe de de Rham du faisceau constant $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant sur $\mathcal{X}_1$ correspondant à la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2)'\otimes|\det|^{-\frac{k}{2}+1}$. Comme l'espace $\mathcal{X}_1$, parfois appelé demi-plan p-adique, est un espace de Stein, on a un quasi-isomorphisme $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$-équivariant

$$R\Gamma_{dR}(k) \simeq [\mathcal{O}(\mathcal{X}_1) \to \Omega^1(\mathcal{X}_1)] \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}(K^2)' \otimes |\det|^{-\frac{k}{2}+1}. \tag{0.4.6}$$

On définit alors des éléments

$$\varphi,\, N \in \mathrm{End}_{D^b(D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)))}(R\Gamma_{dR}(k)) \tag{0.4.7}$$

ainsi qu'une filtration sur $R\Gamma_{dR}(k)$, autrement dit une filtration du second membre de (0.4.6) par des sous-complexes de $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$-modules. Notons que pour définir les opérateurs φ et N, nous utilisons le fait que le complexe (0.4.6) est scindé. En réalité, nous associons à chaque scindage de tels opérateurs. Néanmoins, nous montrons qu'un choix de branche du logarithme p-adique permet de fixer un tel scindage. Nous choisissons le scindage correspondant à la branche $\log(p) = 0$. On montre alors le théorème suivant.

Théorème 0.4.2. — *Pour tout entier $k \geq 2$, pour tout $\mathcal{L} \in K$, on a un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés*

$$\mathrm{Hom}_{D^b(D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)))}(\Sigma(k,\mathcal{L})'[-1], R\Gamma_{dR}(k)) \simeq D(k,\mathcal{L}). \tag{0.4.8}$$

Ce résultat se ramène à un calcul d'extensions dans la catégorie des représentations localement analytiques. Les ingrédients principaux sont les isomorphismes de Breuil et Morita, exprimant les duaux des représentations $\Sigma(k)$ et $\Sigma(k,\mathcal{L})$ en termes d'espaces de différentielles sur l'espace $\mathcal{X}_1$. Il se trouve que l'isomorphisme de dualité reste vrai pour les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$. De même, les calculs d'extensions entre représentations localement analytiques ne sont pas vraiment plus simples si l'on se restreint à $\mathbb{Q}_p$. Nous avons donc essayé de voir ce qu'il est possible de faire pour $\mathrm{GL}_2(L)$, lorsque L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

0.4.3. Le cas de $\mathrm{GL}_2(L)$**.** — Nous nous sommes intéressés aux représentations de dimension 2 de G_L, semi-stables non cristallines, particulièrement à celles dont le module de Fontaine possède une filtration où interviennent des paramètres analogues à l'invariant $\mathcal{L}$ du cas $\mathbb{Q}_p$. La différence essentielle est qu'il faut désormais faire intervenir $[L:\mathbb{Q}_p]$ invariants $\mathcal{L}$, un par plongement de L dans $\overline{L}$. Fixons K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ déployant L. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des plongements de L dans K. Si $\vec{k} = (k_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{P}}$ est un vecteur d'entiers ≥ 2, et $\vec{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{P}} \in K^{[L:\mathbb{Q}_p]}$, on définit $D(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ comme étant le (φ, N)-module filtré suivant.

$$\begin{aligned} D_{st}(V) &= (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_0 \oplus (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_1 \\ \varphi(e_0) &= p^{\frac{\sum k_\sigma - 2d}{2}} e_0 \\ \varphi(e_1) &= p^{\frac{\sum k_\sigma}{2d}} e_1 \\ N(e_1) &= e_0 \end{aligned} \tag{0.4.9}$$

$$\mathrm{Fil}^j D_{dR}(V)_\sigma = \begin{cases} D_{dR}(V)_\sigma & \text{si } j \leq 0 \\ K(e_{1,\sigma} + \mathcal{L}_\sigma e_{0,\sigma}) & \text{si } 1 \leq j \leq k_\sigma - 1 \\ 0 & \text{si } j \geq k_\sigma \end{cases}$$

Pour trouver un analogue de tous ces invariants $\mathcal{L}$ du côté des représentations de $\mathrm{GL}_2(L)$, il ne faut pas considérer des représentations localement L-analytiques, mais $\mathbb{Q}_p$-analytiques. On définit donc une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques $\Sigma(\vec{k})$ dont le sous-espace des vecteurs localement algébriques est isomorphe à

$$V(\vec{k}) \otimes \mathrm{St}_2^\infty, \tag{0.4.10}$$

$V(\vec{k})$ étant la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2(L)$ de plus haut poids $\vec{k}$. On peut alors construire une extension de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques

$$0 \to \Sigma(\vec{k}) \to \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) \to \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} V(\vec{k}) \to 0 \tag{0.4.11}$$

en utilisant les $[L : \mathbb{Q}_p]$ paramètres $\mathcal{L}_\sigma$. En effet, pour chaque plongement σ de L dans le corps des coefficients K, on peut considérer le logarithme σ-analytique $\log_{\sigma,\mathcal{L}_\sigma} = \sigma \circ \log_0 + \mathcal{L}_\sigma \mathrm{val}$, la fonction $\log_0$ étant juste la fonction logarithme localement L-analytique de $L^\times$ dans L prenant la valeur 0 en l'uniformisante π_L. C'est pour pouvoir utiliser toutes ces fonctions logarithmes simultanément que l'on doit travailler avec la représentation de Steinberg localement $\mathbb{Q}_p$-analytique.

0.4.4. Les séries principales localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques. — Pour pouvoir travailler convenablement avec ces représentations de Steinberg localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques, il importe de bien connaître leurs facteurs de Jordan-Hölder. Afin de décomposer ces induites, nous introduisons la notion de fonction S-analytique, ainsi que d'induite S-analytique, pour S un ensemble fini de plongements de L dans K. Au moyen de ces représentations nous parvenons alors à décomposer les induites localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques du groupe $\mathrm{GL}_2(L)$. Cette décomposition est l'objet de la section 1.3.

0.4.5. Réalisation dans le complexe de de Rham du demi-plan de Drinfel'd. — L'étape suivante est de vérifier que cette représentation localement analytique permet de sélectionner le (φ, N)-module filtré de départ dans le complexe de de Rham de l'espace de Drinfel'd. Par dualité de Morita, l'espace des sections globales des formes différentielles sur cet espace est isomorphe au dual de la représentation de Steinberg localement analytique. La représentation $\Omega^1(\mathcal{X}_1) \otimes_{L,\sigma} K$ ne donne rien d'autre que la représentation de Steinberg σ-analytique. Notons $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_1)$ le complexe de de Rham de l'espace $\mathcal{X}_1$, on peut poser, pour tout plongement σ de L dans K, $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_1) \otimes_{L,\sigma} K$. Même en considérant le complexe $\bigoplus_\sigma R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_1) \otimes_{L,\sigma} K$, on ne retrouve pas le dual de la représentation de Steinberg localement $\mathbb{Q}_p$-analytique. Il se trouve que ce n'est pas un problème car la sous-représentation correspondant à la somme de ces Steinberg σ-analytique permet déjà de construire toutes les extensions dont nous avons besoin. Il est donc facile de construire un module filtré à partir de $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ et de $\mathcal{X}_1$. Le point délicat est toujours de construire un L_0-réseau muni d'action d'un opérateur de Frobenius et de monodromie. Soit $D_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_2(L))$ l'algèbre des distributions de $\mathrm{GL}_2(L)$ vu comme groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique. On construit alors $\mathcal{H}_0(\vec{k})$ un objet de la catégorie dérivée des $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules muni d'une action de $D_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_2(L))$, d'endomorphismes φ et N, et tel que l'on ait un isomorphisme $D_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_2(L))$-équivariant $\mathcal{H}_0(\vec{k}) \otimes_{L_0} L \simeq R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\vec{k})$. On démontre le théorème suivant.

Théorème 0.4.3. — *Pour tout $\vec{\mathcal{L}} \in K^{[L:\mathbb{Q}_p]}$, on a un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés*

$$\mathrm{Hom}_{D^b(D(\mathrm{GL}_2(L))_{\mathbb{Q}_p})}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})'[-1], \mathcal{H}_0(\vec{k})) \simeq D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}). \tag{0.4.12}$$

0.5. Le cas de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$

Notre étude des représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ faisant intervenir les invariants $\mathcal{L}$ suggère que, au moins dans certains cas, le complexe de de Rham des espaces de Drinfel'd est une structure suffisamment riche pour réaliser la correspondance de Langlands p-adique. Il est alors naturel d'essayer de voir ce qu'il en est pour GL_n. Néanmoins, pour GL_n, il ne semble pas exister d'exemple aussi explicite que pour GL_2 révélant plus que la correspondance locale classique. Nous nous proposons donc de faire le chemin inverse, c'est-à-dire de partir d'une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 3 qui n'est pas entièrement déterminée par son module de Weil-Deligne associé, et de construire une représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ telle que

$$\mathrm{Hom}_{D^b(D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)))}(\Sigma', R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2)) \tag{0.5.1}$$

soit le module filtré associé la représentation galoisienne de départ.

0.5.1. Représentations galoisiennes et représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. — Pour cela nous choisissons la situation où la représentation lisse associée est la représentation de Steinberg. Il se trouve qu'il existe une famille de telles représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$, paramétrée par les triplets $\underline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}'') \in K^3$. Par analogie avec le cas (0.3.2), nous nommons ces paramètres les invariants $\mathcal{L}$ de la représentation. Plus précisément, étant donné un tel triplet et $\underline{h} = (h_0, h_1, h_2)$ un triplet d'entiers tels que $h_0 < h_1 < h_2$, on note $D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ le (φ, N)-module filtré défini de la façon suivante.

$$D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}) = Ke_0 \oplus Ke_1 \oplus Ke_2, \begin{cases} \varphi(e_0) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}-1}e_0, \\ \varphi(e_1) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}}e_1, \\ \varphi(e_2) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}+1}e_2, \end{cases} \begin{cases} N(e_0) = 0, \\ N(e_1) = e_0, \\ N(e_2) = e_1, \end{cases} \tag{0.5.2}$$

$$\mathrm{Fil}^i(D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})) = \begin{cases} D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}) & \text{si } i \leq h_0, \\ K(e_2 + \mathcal{L}'e_1 + \mathcal{L}''e_0) \oplus K(e_1 + \mathcal{L}e_0) & \text{si } h_0 + 1 \leq i \leq h_1, \\ K(e_2 + \mathcal{L}'e_1 + \mathcal{L}''e_0) & \text{si } h_1 + 1 \leq i \leq h_2, \\ 0 & \text{si } i \geq h_2 + 1. \end{cases} \tag{0.5.3}$$

Ce (φ, N)-module filtré est faiblement admissible, il existe donc, d'après le théorème de Colmez-Fontaine, une K-représentation $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, semi-stable, de dimension 3, telle que $D^*_{st}(V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})) \simeq D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$. Les poids de Hodge-Tate de $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ sont alors (h_0, h_1, h_2).

Comme dans le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il est important de partir de la représentation de Steinberg localement analytique. Plus précisément, notons St_3^{an} le quotient de l'espace des fonctions sur $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)/B$ par le sous-espace engendré par les fonctions localement analytiques sur $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)/P_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. De même lorsque $\lambda = (h_2 - 2, h_1 - 1, h_0)$ est un poids dominant quelconque, nous construisons une représentation $\Sigma(\lambda)$ dont le sous-espace des vecteurs localement algébriques est $F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3$, où F_λ est la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de plus haut poids λ. Une partie de la thèse est consacrée à la détermination des composantes de Jordan-Hölder de la représentation $\Sigma(\lambda)$.

L'idée, pour obtenir une représentation $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ est de construire des extensions de sous-quotients de séries principales par $\Sigma(\lambda)$. Comme nous sommes attachés à considérer des représentations ayant des analogues modulo p, nous ne considèrerons pas n'importe quel sous-quotient de cette représentation, mais principalement $v_{P_1}^{an}(\lambda)$, $v_{P_2}^{an}(\lambda)$ et F_λ, les $v_{P_i}^{an}(\lambda)$ étant les équivalents localement analytiques des représentations de Steinberg généralisées que l'on rencontre dans le cas lisse.

Il est relativement aisé, en reprenant les idées de [**14**], de construire une représentation $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ s'insérant dans une suite exacte

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda) \to 0. \tag{0.5.4}$$

On construit cette extension comme sous-quotient d'une induite parabolique de dimension 3 faisant intervenir des logarithmes p-adiques de branches $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. Par construction, la classe d'isomorphisme de cette représentation dépend réellement du couple $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$. On se rend alors compte qu'il n'est pas possible de construire une extension de la forme

$$0 \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to \Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}}) \to F_\lambda \to 0 \tag{0.5.5}$$

dont la classe d'isomorphisme dépendrait de $\mathcal{L}''$. Il existe en réalité une unique telle extension non triviale. Pour démontrer cela nous calculons certains groupes d'extensions entre représentations localement analytiques dans la catégorie des $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-modules. Pour ce faire, nous utilisons une suite spectrale due à Jan Kohlhaase permettant de calculer la cohomologie localement analytique d'une induite. Pour pouvoir appliquer cette suite spectrale à notre cas, il faut encore calculer explicitement certains espaces de cohomologie de sous-groupes unipotents de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans certaines induites. Ce calcul fait l'objet du chapitre 2.4. La stratégie de Jan Kohlhaase ([**63**]) a permis de généraliser au cas de tout λ dominant ces résultats que je n'avais obtenus à l'origine que dans le cas $\lambda = 0$ par un calcul direct. Plus précisément, nous nous attachons à déterminer les foncteurs $\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}$, les extensions dans la catégorie des $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-représentations localement analytiques de caractère central $\lambda|_{Z(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))}$.

Au terme de ces calculs, on peut observer que l'espace $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ est de dimension 2, ce qui permet, en utilisant l'interprétation de Yonéda des groupes d'extensions, d'obtenir un complexe de représentations localement analytiques dont la classe d'isomorphisme, dans la catégorie dérivée, dépend des trois paramètres $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$.

0.5.2. L'apparition du dilogarithme p-adique. — Il s'agit ensuite de trouver une paramétrisation des éléments de $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ afin d'associer un cocyle à tout $\mathcal{L}'' \in K$. Tout d'abord on remarque que $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ est un quotient de $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ par un certain nombre de relations dépendant de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. Lorsque l'on fait la liste des éléments de $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$, on se rend compte qu'un certain nombre d'entre eux sont le résultat de cup-produits

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda)) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(v^{an}_{P_i}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \tag{0.5.6}$$

et s'expriment donc comme produits de logarithmes p-adiques. Cependant, cette méthode ne permet pas de les décrire tous. Nous montrons que, dans le cas $\lambda = (0,0,0)$, les cocycles supplémentaires peuvent être décrits au moyen du dilogarithme p-adique. Le dilogarithme p-adique dépendant lui aussi d'un choix de branche, cette description nous donne au final une paramétrisation des éléments de $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ en fonction de $\mathcal{L}'' \in K$. Quand λ est un poids arbitraire, on obtient une paramétrisation en combinant le cas $\lambda = 0$ avec une méthode inspirée des foncteurs de translation de la théorie des représentations de groupes algébriques.

Au final, nous associons à tout triplet $\underline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}'')$ un complexe de représentations localement analytiques, de longueur 2, que l'on note $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$. On a

$$H^0(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})) = \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'), \quad H^1(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})) = F_\lambda. \tag{0.5.7}$$

0.5.3. La réalisation géométrique. — Rappelons que l'on note $\mathcal{X}_2$ l'espace rigide analytique de dimension 2 dont l'espace des $\mathbb{C}_p$-points est le complémentaire dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p)$ de l'union des $\mathbb{C}_p$-points des hyperplans $\mathbb{Q}_p$-rationnels. Il est muni d'une action du groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Cet espace est un espace de Stein, son complexe de de Rham est donc le complexe des sections globales. On note $\Omega^i(\mathcal{X}_2)$ l'espace des i formes différentielles globales sur $\mathcal{X}_2$. D'après Schneider et Teitelbaum, l'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{X}_2$ munit $\Omega^i(\mathcal{X}_2)$ d'une structure de $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-module. D'après Schneider, Teitelbaum, Pohlkamp et Orlik ([**84**], [**72**]), ce $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-module est même coadmissible. Nous notons désormais $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$ le complexe de de Rham de $\mathcal{X}_2$ vu comme objet de la catégorie dérivée des $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-modules. Si λ est un poids dominant, on note $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ le complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2)$ tensorisé par la représentation de dimension finie F'_λ, c'est encore un complexe de $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-modules coadmissibles. Plus géométriquement, on pourrait aussi voir ce complexe comme le complexe de de Rham associé au dual du faisceau $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de plus haut poids λ. La cohomologie de de Rham de l'espace $\mathcal{X}_2$ a été calculée par Peter

Schneider et Ulrich Stuhler dans [**79**], la cohomologie du complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ s'en déduit aussitôt. La connaissance de cette cohomologie permet alors, par les mêmes techniques que dans le cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de prouver que le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé.

Notons $\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})'$ le dual du complexe $\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$ et $\mathcal{D}^b(D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))-mod)_\lambda$ la catégorie dérivée bornée des $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-modules de caractère central $-\lambda|_{Z(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))}$. Les mêmes constructions que dans le cas du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ permettent de définir une structure de (φ,N)-module filtré sur l'espace

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))-mod)_\lambda}(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})'[-1],R\Gamma_{dR}(\lambda)), \tag{0.5.8}$$

constructions qui dépendent d'un choix de scindage s du complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$. Nous notons $D_s(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})'[-1])$ ce (φ,N)-module filtré.

La dernière partie de cette thèse a pour objet de montrer que les complexes $\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$ permettent de retrouver les (φ,N)-modules filtrés $D(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$ dans la cohomologie de de Rham de $\mathcal{X}_2$. Le résultat que nous obtenons est le suivant.

Théorème 0.5.1. — *Il existe un scindage s et un polynôme $Q\in\mathbb{Q}_p[X,Y]$ de degré 2 tels que, pour tout $\underline{\mathcal{L}}\in K^3$, les (φ,N)-modules $D(\underline{h},(\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}''-Q(\mathcal{L},\mathcal{L}')))$ et $D_s(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})'[-1])$ sont isomorphes.*

Dans le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, l'argument clé de la preuve du théorème 0.4.2 est la dualité de Morita entre $\Sigma(k)$ et $O(k)$. Dans le cas présent, il faut également comparer le dual de la représentation $\Sigma(\lambda)$ avec une série discrète holomorphe $D_{\lambda(2)}$, à la différence que cette fois-ci, ces espaces ne sont plus isomorphes. Dans le cas où $\lambda=0$, l'espace $D_{\lambda(2)}$ est $\Omega^2(\mathcal{X}_2)$ et on obtient une injection stricte $\Omega^2(\mathcal{X}_2)'\hookrightarrow\Sigma(0)$. En général on a aussi une injection stricte de $D'_{\lambda(2)}$ dans $\Sigma(\lambda)$. Une partie technique de la preuve consiste à décomposer ces espaces et comprendre les différentes extensions entre leurs composantes de Jordan-Hölder afin d'identifier l'image de

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(D_{\lambda(2)},F'_\lambda)\to\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p),\lambda}(\Sigma(\lambda)',F'_\lambda). \tag{0.5.9}$$

0.6. Questions et perspectives

Dans les deux cas traités, $\mathrm{GL}_2(L)$, pour L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, la structure de (φ,N)-module filtré provenant du complexe de de Rham semble un peu arbitraire, elle dépend toujours d'un choix de scindage de ce complexe. Ce choix de scindage correspond à la définition d'un endomorphisme de Frobenius sur la cohomologie de de Rham. La cohomologie log-rigide construite par Elmar Große-Klönne dans [**49**], ainsi que son isomorphisme à la Hyodo-Kato devraient donner un endomorphisme de Frobenius « géométrique » sur la cohomologie de de Rham. Il serait très intéressant de prouver que le scindage s du théorème 0.5.1 est bien d'origine géométrique. Bien entendu, l'auteur s'attend à ce que ce soit le cas.

Si c'est le cas, la question se pose alors d'identifer la permutation σ. Cette question est à rapprocher des différentes définitions de l'invariant $\mathcal{L}$ d'une forme modulaire. Dans le cas des formes modulaires, Adrian Iovita et Michael Spieß ont prouvé que la définition de Fontaine-Mazur, par la théorie de Fontaine, et la définition de Coleman, par intégration p-adique, coïncident. Il s'agit encore de comparer la branche d'un logarithme p-adique avec un paramètre de filtration de Fontaine dans la cohomologie d'une variété. Dans le cas des formes modulaires, la preuve de Iovita et Spieß fait appel à la description par Coleman et Iovita de l'isomorphisme de Hyodo-Kato en termes d'intégration p-adique pour les courbes. Il semble naturel, pour répondre à cette question, de chercher le même genre de comparaison pour les surfaces. La double intégration des 2-formes devraient alors faire apparaître des dilogarithmes p-adiques.

Par ailleurs, il serait aussi très utile d'élucider la structure du complexe $\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})=[C^0\to C^1]$. Si sa classe de Yonéda est connue, je ne sais pas identifier les représentations qui interviennent en dehors de sa cohomologie. Ce complexe est-il quasi-isomorphe à un complexe de représentations admissibles ? Si la réponse à cette question est affirmative, on peut se demander si la représentation C^0 ne contient pas un sous-objet dépendant déjà des trois paramètres $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$. Autrement dit, est-ce que l'apparition de complexes pour la correspondance de Langlands p-adique est irréductible ou est-ce un moyen commode et temporaire pour « remplacer » certaines représentations localement analytiques encore inconnues ? On pourrait envisager l'existence d'une représentation Σ dépendant des paramètres $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$, et peut-être encore d'autres, telle que $D_s(\Sigma'[-2])$ soit isomorphe à $D_s(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'[-1])$. Je n'ai pas réussi à construire une telle représentation au moyen des représentations localement analytiques connues, les sous-quotients de séries principales. Il est donc possible que d'autres représentations aient ici un rôle à jouer.

CHAPITRE 1

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES DE $\mathrm{GL}_2(\mathrm{L})$ ET CATÉGORIES DÉRIVÉES

1.1. Introduction

Ces dernières années, l'existence d'une correspondance entre représentations p-adiques de dimension 2 du groupe $G_p = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et représentations unitaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur des espaces de Banach p-adiques s'est considérablement précisée. Cette recherche a commencé sous l'impulsion de Christophe Breuil et une des premières constructions fut celle de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associées à une représentation semi-stable non cristalline de G_p en dimension 2. Ces représentations font apparaître un paramètre de la représentation galoisienne, l'invariant $\mathcal{L}$, invisible sur la correspondance de Langlands locale classique. Une première certitude que ces représentations sont des objets pertinents fut la vérification par Christophe Breuil et Ariane Mézard ([**16**]) que, dans certains cas, leur complété unitaire universel est non nul, admissible, et que sa réduction modulo p est compatible avec la correspondance modulo p définie dans [**13**]. Nous savons maintenant, suite à des travaux de Laurent Berger, Christophe Breuil et Pierre Colmez ([**29**], [**3**]) que c'est toujours le cas. Une autre confirmation de l'intérêt de ces objets vient d'une remarque faite par Alain Genestier à la suite de discussions avec Christophe Breuil et Jean-François Dat. Toujours dans le cas semi-stable non cristallin, on devrait retrouver le module de Fontaine associé à la représentation galoisienne en considérant l'espace des morphismes, dans une catégorie dérivée bien choisie, entre le dual de la représentation localement analytique et le complexe de de Rham du demi-plan de Drinfel'd. Le fait de considérer le complexe comme objet de la catégorie dérivée et non juste les espaces de cohomologie est proche des idées apparaissant dans les travaux de Jean-François Dat ([**34**], [**33**]). C'est ce résultat que nous démontrons dans cet article. En écrivant la démonstration, nous nous sommes rendus compte que les calculs et constructions effectués ne sont pas spécialement propres au corps $\mathbb{Q}_p$: ils devraient fonctionner aussi bien sur une extension finie L. C'est pourquoi nous sommes tentés de définir des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ de $\mathrm{GL}_2(L)$ ne faisant plus intervenir un seul invariant $\mathcal{L}$, mais une famille $\vec{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}_\sigma)$ indexée par les plongements de L dans une clôture algébrique. Au passage nous avons été amenés à déterminer les composantes de Jordan-Hölder des induites localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(L)$.

Cependant nous ne sommes pas certains que les $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ soient les bons objets dans le cas $L \neq \mathbb{Q}_p$. En effet, l'examen de la situation modulo p par Breuil et Paskunas ([**17**]) suggère que tout est plus complexe. Par exemple, il n'est pas clair que son complété unitaire universel soit admissible. On peut néanmoins s'attendre à ce que les représentations $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ interviennent comme sous-objets des « bonnes » représentations.

1.1.1. Notations. — On fixe L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $d = [L : \mathbb{Q}_p]$ et π_L une uniformisante de L. Soit L_0 le plus grand sous corps non ramifié de L, on pose $d_0 = [L_0 : \mathbb{Q}_p]$. On désignera toujours par K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant les racines $2d_0$-ièmes de l'unités, ainsi qu'une racine $2d$-ième de p que nous fixons. La notation $p^{\frac{a}{2d}}$ a donc un sens pour $a \in \mathbb{Z}$. On demande aussi que

$$|\mathcal{P}| = d = [L : \mathbb{Q}_p],$$

où $\mathcal{P} = \mathrm{Hom}_{alg}(L, K)$. Dans la suite K joue toujours le rôle d'un corps de coefficients, nous nous autoriserons donc à l'élargir si le besoin s'en fait sentir. En général, si E désigne L ou K, on note $\mathcal{O}_E$ son anneau d'entiers et $\mathbb{F}_E$ son corps résiduel.

On a alors un isomorphisme d'algèbres θ

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} K \\ f \otimes e & \longmapsto & (\sigma(f)e)_\sigma. \end{array}$$

Si M est un $L \otimes K$-module, on note $M_\sigma = M \otimes_{L \otimes K, \sigma} K$. Le morphisme θ permet de voir M_σ comme un sous-$(L \otimes K)$-module de M et un facteur direct. On a alors un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$M \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} M_\sigma.$$

Si m est un élément de M, on note m_σ sa composante appartenant à M_σ via l'isomorphisme ci-dessus.

On appelle caractère de Lubin-Tate le caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ correspondant au caractère $x \longmapsto x|x|$ par la théorie du corps de classes locale, où l'on choisit d'envoyer uniformisantes sur frobenius arithmétiques.

Si $a \in L$ et $r > 0$, on note $D(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r.

Si σ est un plongement de L dans K et $\mathcal{L} \in K$, on note $\log_{\sigma,\mathcal{L}}$ l'unique morphisme de groupes topologiques $L^\times \to K$ coïncidant avec $\sigma \circ \log$ sur $1 + \pi_L \mathcal{O}_L$ et vérifiant $\log_{\sigma,\mathcal{L}}(\pi_L) = \mathcal{L}$.

Si $\vec{k} = (k_\sigma)$ est un vecteur de d entiers indexés par $\mathcal{P}$, on définit $|\vec{k}| = \sum_\sigma k_\sigma$. On note $\epsilon(\vec{k})$ le caractère $a \mapsto \prod \sigma(a)^{k_\sigma}$ de $L^\times$ à valeurs dans $K^\times$.

On pose

$$t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \; u = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \; u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Si $\sigma \in \mathcal{P}$, on note u_σ, t_σ, ... les éléments de $\mathfrak{gl}_2(L) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ obtenus par la recette expliquée plus haut.

On note $\mathrm{St}_{\mathbb{Q}_p}$ la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(L)$. Il s'agit du quotient de l'espace des fonctions localement constantes de la droite projective $\mathbf{P}^1(L)$ vers $\mathbb{Q}_p$ par le sous-espace des fonctions constantes. C'est une représentation lisse irréductible, et donc admissible, de $\mathrm{GL}_2(L)$. Si E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on note $\mathrm{St}_E = \mathrm{St}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Nous choisirons le plus souvent $E = K$, c'est pourquoi nous écrirons $\mathrm{St} = \mathrm{St}_K$.

Si V est un K-espace vectoriel topologique, on note V' son dual topologique muni de la topologie forte ([**78**], §9).

1.1.2. Énoncé des résultats. — Supposons pour simplifier que $L = \mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{L} \in K$. On note $V(k, \mathcal{L})$, pour $k \geq 2$, la représentation galoisienne dont le module de Fontaine est

$$\begin{aligned} D_{st}^*(V(k,\mathcal{L})) &= Ke_0 \oplus Ke_1 \\ \varphi(e_0) &= p^{\frac{k-2}{2}} e_0 \\ \varphi(e_1) &= p^{\frac{k}{2}} e_1 \\ N(e_1) &= e_0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Fil}^n(D_{st}^*(V(k,\mathcal{L}))) = \begin{cases} D_{st}^*(V(k,\mathcal{L})) & \text{si } n \leq 0 \\ K(e_1 + \mathcal{L}e_0) & \text{si } 1 \leq n \leq k-1 \\ \{0\} & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

Breuil construit dans [**14**], une représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ s'insérant dans une suite exacte

$$0 \to \Sigma(k) \to \Sigma(k,\mathcal{L}) \to \mathrm{Sym}^{k-2} K^2 \to 0,$$

où $\Sigma(k)$ est le quotient d'une série principale localement $\mathbb{Q}_p$-analytique et où la classe d'isomorphisme de l'extension dépend du paramètre $\mathcal{L}$.
Soit $\mathcal{X}$ le demi-plan de Drinfel'd. Nous aimerions dans un premier temps définir $D_k(\Sigma(k,\mathcal{L}))$ comme étant

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_k}(\Sigma(k,\mathcal{L})'[-1], R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes (\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)')$$

où $\mathcal{D}_k$ est la catégorie dérivée des $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), K)$-modules coadmissibles de caractère central $a \mapsto a^{2-k}$. Cet espace est de dimension 2. Il serait alors tentant de tirer parti de l'isomorphisme de Große-Klönne $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \simeq R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ (voir [**49**]) pour munir $D_k(\Sigma(k,\mathcal{L}))$ d'endomorphismes φ et N lui donnant ainsi une structure de (φ, N)-module. En utilisant une méthode de Schneider et Stuhler, on peut filtrer le complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes (\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)'$ pour faire de $D_k(\Sigma(k,\mathcal{L}))$ un (φ, N)-module filtré. Cependant nous expliquons dans la remarque 1.6.2 pourquoi une telle approche n'est pas possible, du moins dans l'état actuel des connaissances. C'est pourquoi nous construisons $D_k(\Sigma(k,\mathcal{L}))$, dans la partie 1.6.1, en ne faisant intervenir que la théorie des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On pose

$$D_k(\Sigma(k,\mathcal{L})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_k}(\Sigma(k,\mathcal{L})'[-1], \mathcal{H}(k)),$$

où $\mathcal{H}(k)$ est l'objet $(\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)' \oplus (\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)' \otimes \mathrm{St}'[-1]$ de la catégorie $\mathcal{D}_k$. L'endomorphisme φ est alors défini comme la multiplication par $p^{\frac{k-2}{2}}$ sur $(\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)'$ et par $p^{\frac{k}{2}}$ sur $(\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)' \otimes \mathrm{St}'$. L'endomorphisme de monodromie N provient simplement d'un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\mathrm{Sym}^{k-2}K^2, (\mathrm{Sym}^{k-2}K^2) \otimes \mathrm{St})$. Enfin, on munit $D_k(\Sigma(k,\mathcal{L}))$ d'une filtration en utilisant un morphisme $\Sigma(k)'[-1] \to \mathcal{H}(k)$ qui, dans le cas $k = 2$, n'est autre que l'application naturelle $\Omega^1[-1] \to R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$ composée avec l'isomorphisme de Morita $\Omega^1 \simeq \Sigma(2)'$ et un scindage $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \simeq H^0_{dR} \oplus H^1_{dR}[-1]$, ce dernier étant isomorphe à $\mathcal{H}(2)$ grâce à l'isomorphisme de Schneider et Stuhler ([**79**]).

Dans le cas plus général où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\vec{k}$ est un vecteur d'entiers ≥ 2 indexé par les plongements de L dans K, plusieurs difficultés surgissent. Tout d'abord, si l'on écrit le module de Fontaine associé à une représentation semi-stable non cristalline, plusieurs invariants $\mathcal{L}$ apparaissent, un pour chaque plongement de L dans K. Plus précisément, notons

$D(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ le (φ,N,L,K)-module filtré

$$\begin{aligned} D(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}) &= (L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K)e_0\oplus(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K)e_1\\ \varphi(e_0) &= p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}}e_0\\ \varphi(e_1) &= p^{\frac{|\vec{k}|}{2d}}e_1\\ N(e_1) &= e_0\end{aligned}$$

$$\mathrm{Fil}^j(D(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})\otimes_{L_0}L)_\sigma = \begin{cases}(D(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})\otimes_{L_0}L)_\sigma & \text{si } j\leq 0\\ K(e_{1,\sigma}+\mathcal{L}_\sigma e_{0,\sigma}) & \text{si } 1\leq j\leq k_\sigma-1\\ 0 & \text{si } j\geq k_\sigma.\end{cases}$$

La généralisation de la représentation $\Sigma(k,\mathcal{L})$ de Breuil est alors une extension

$$0\to\Sigma(\vec{k})\to\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})\to V(\chi_{\vec{k}})^d\to 0,$$

où $V(\chi_{\vec{k}})$ est la représentation algébrique irréductible de plus haut poids $\chi_{\vec{k}}$ (voir le §3 pour plus de détails).

Une autre difficulté est que pour avoir une structure de (φ,N,L,K)-module filtré sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'[-1],R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}))$, il faut maintenant définir une $L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$-structure munie d'opérateurs φ et N. Nous expliquons au §5 comment contourner ce problème et définir un (φ,N,L,K)-module filtré $D_{\vec{k}}(\Sigma)$ pour toute représentation Σ localement $\mathbb{Q}_p$-analytique admissible de $\mathrm{GL}_2(L)$ ayant $\epsilon(\vec{k})$ pour caractère central.

Ceci construit, notre résultat principal est alors

Théorème 1.1.1. — *Le (φ,N,L,K)-module filtré $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}))$ est isomorphe au module de Fontaine $D(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$.*

1.1.3. Plan du chapitre. — Dans le chapitre 1.2, nous déterminons la forme des modules de Fontaine associés aux représentations p-adiques semi-stables non cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ en dimension 2. Dans le chapitre 1.3, nous démontrons la décomposition des induites localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de caractères pour $\mathrm{GL}_2(L)$. Au chapitre 1.4 nous rappelons quelques généralités sur la cohomologie localement analytique des groupes localement analytiques p-adiques, que nous appliquerons dans le chapitre 1.5 afin de construire les représentations $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ à partir de morceaux de séries principales et en déduire plusieurs propriétés sur leurs extensions. Le chapitre 1.6 est consacré à la construction des (φ,N,L,K)-modules filtrés $D_{\vec{k}}(V)$ au moyen du demi-plan de Drinfel'd et à la preuve du résultat principal.

1.2. Modules de Fontaine

Soit (ρ,V) une représentation semi-stable non cristalline de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ sur un K-espace vectoriel V de dimension 2. On pose

$$D^*_{st}(V)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V,B_{st})^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)}.$$

C'est un (φ,N,L,K)-module filtré admissible. Rappelons qu'un (φ,N,L,K)-module filtré est un $L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$-module libre de rang fini D muni d'un endomorphisme bijectif φ qui est $L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$-semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur L_0 et l'identité sur K), d'un endomorphisme nilpotent

$L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-linéaire et d'une filtration décroissante exhaustive de $D_{dR} = L \otimes_{L_0} D$ par des $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-sous-modules. On note

$$t_N(D) = \sum_i i \dim_{L_0} D[i],$$

où $D[i]$ est le $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ sous-module de pente i pour φ et

$$t_H(D) = \sum_i i \dim_L \mathrm{gr}^i(L \otimes_{L_0} D),$$

où $\mathrm{gr}^i(D)$ désigne le i-ième gradué de la filtration. La condition d'admissibilité s'exprime alors par $t_N(D) = t_H(D)$ et $t_N(D') \geq t_H(D')$ pour tout $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-sous-module D' stable par φ et N, muni de la filtration induite. Les poids de Hodge-Tate de D sont les sauts de la filtration.

Pour un plongement σ de L dans K, on peut considérer le K-espace vectoriel $D_\sigma = (D_{dR}) \otimes_{(L \otimes K, \sigma)} K$. Il est filtré par $\mathrm{Fil}^n D_\sigma = (\mathrm{Fil}^n D_{dR}) \otimes_{(L \otimes K, \sigma)} K$. L'égalité

$$D_{dR} = \bigoplus_\sigma D_\sigma$$

ainsi que la stabilité par $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ de la filtration induisent des égalités

$$\mathrm{Fil}^n(D_{dR}) = \bigoplus_\sigma \mathrm{Fil}^n D_\sigma.$$

Un poids de Hodge-Tate h est dit de type S, pour S un ensemble de plongements de L dans K, si S est exactement l'ensemble des σ tels que h soit un poids de la filtration $(\mathrm{Fil}^n D_\sigma)$.

Quitte à tordre la représentation ρ par un caractère, on peut supposer qu'elle n'a pas de poids de Hodge-Tate strictement négatif, que 0 est un poids de type $\mathcal{P}$ et que la représentation $\det_K \rho$ est donnée par un caractère de la forme

$$\prod_\sigma (\sigma \circ \chi_{LT})^{h_\sigma}, \tag{1.2.1}$$

où χ_{LT} est le caractère de Lubin-Tate. Nous nous intéresserons exclusivement au cas où les h_σ sont tous strictement positifs, nous dirons dans ce cas que ρ est à poids de Hodge-Tate non dégénérés.

Lemme 1.2.1. — *Si D_1 et D_2 sont les (φ, N, L, K)-modules filtrés associés aux K-représentations ρ_1 et ρ_2, alors le (φ, N, L, K)-module filtré associé à $\rho_1 \otimes_K \rho_2$ est $D_1 \otimes_{L_0 \otimes K} D_2$.*

Démonstration. — Il est connu que le (φ, N, L, K)-module associé à $\rho_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_2$ est $D_1 \otimes_{L_0} D_2$. On sait de plus que $\rho_1 \otimes_K \rho_2$ est le conoyau de la flèche

$$\begin{array}{ccc} (\rho_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_2)^{[K:\mathbb{Q}_p]} & \longrightarrow & \rho_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_2 \\ (x_i \otimes y_i)_i & \longmapsto & \sum_i [(a_i x_i) \otimes y_i - x_i \otimes (a_i y_i)] \end{array}$$

où la famille (a_i) est une base de K sur $\mathbb{Q}_p$. L'exactitude du foncteur D^*_{st} ([**45**], 5.1.7) prouve le résultat. □

Lemme 1.2.2. — *Le (φ, N, L, K)-module filtré associé à la représentation $\det_K \rho$ est isomorphe à $\det_{L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} D^*_{st}(V)$.*

Démonstration. — Soit n la dimension de V sur K. On a $\det_K V = \Lambda^n_K V$. C'est le noyau de l'application

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes^n_K V & \to & \bigoplus_{s \in \mathfrak{S}_n} (\bigotimes^n V) \\ \otimes v_i & \mapsto & (\otimes v_i - \epsilon(s)(\otimes v_{s(i)}))_{s \in \mathfrak{S}_n}. \end{array}$$

Il suffit alors de remarquer que D_{st}^* est un $\otimes$-foncteur exact de la catégorie des représentations admissibles dans la catégorie des (φ, N)-modules filtrés admissibles. $\square$

Notons alors $h_\sigma^0 \leq h_\sigma^1$ les poids (comptés avec multiplicité) de la filtration $(\mathrm{Fil}^n D_\sigma)$. Le lemme 1.2.2 ainsi que (1.2.1) impliquent que $h_\sigma^0 = 0$ et $h_\sigma^1 = h_\sigma$. Comme ρ est à poids de Hodge-Tate non dégénérés, $h_\sigma^0 < h_\sigma^1$. Posons $k_\sigma = h_\sigma + 1$ et $\vec{k} = (k_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}}$.

Par ailleurs, comme V n'est pas cristalline, l'opérateur N est non nul. Comme $\ker N$ est stable par φ, c'est un $L_0 \otimes K$-module libre, nécessairement de rang 1. On peut donc choisir e_0 dans $\ker N$ tel que $\ker N = (L_0 \otimes K)e_0$. On a de plus, $\varphi(e_0) = \alpha e_0$ avec $\alpha \in (L_0 \otimes K)^\times$. Soit e tel que $N(e) = e_0$, (e, e_0) est alors une base de D sur $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. Posons

$$\varphi(e) = \beta e + \gamma e_0.$$

La relation $N\varphi = p\varphi N$ implique alors que $\beta = p\alpha$. En posant $e_1 = e - \gamma\alpha^{-1}e_0$, on a $\varphi(e_1) = p\alpha e_1$ et $N(e_1) = e_0$. Cherchons maintenant à modifier (e_0, e_1) de façon que α soit d'une forme particulièrement simple. L'isomorphisme $L_0 \otimes K \xrightarrow{\sim} K^{d_0}$ permet d'écrire α comme un d_0-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_0})$. Supposons maintenant K suffisamment grand pour qu'il contienne une racine d_0-ième du produit des α_i, ce produit étant justement la norme de la K-algèbre $L_0 \otimes K$ appliquée à l'élément α. Soit x une telle racine. On peut alors remarquer que l'élément $(1 \otimes x)\alpha^{-1}$ est dans le noyau de cette norme, donc d'après le théorème 90 de Hilbert (pour la K-algèbre $L_0 \otimes K$), il existe un élément $\beta \in L_0 \otimes K$ tel que

$$(1 \otimes x) = \frac{\varphi(\beta)}{\beta}\alpha.$$

On a alors

$$\varphi(\beta e_i) = (p^i \otimes x)(\beta e_i).$$

On remplace donc désormais e_i par βe_i. Il est facile de vérifier qu'un élément $1 \otimes x$ est de la forme $\frac{\varphi(\beta)}{\beta}$ si et seulement x est une racine d_0-ième de l'unité. En utilisant le lemme 1.2.2 ainsi que la forme de $\det_K \rho$, on voit qu'il existe une racine d_0-ième ζ telle que

$$px^2 = p^{\frac{|\vec{k}|-d}{d}}\zeta,$$

et donc une racine $2d_0$-ième ζ' telle que

$$x = \zeta' p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}}.$$

Quitte à tordre ρ par l'unique caractère non ramifié d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$, on peut choisir la base (e_0, e_1) de telle sorte que $D_{st}^*(V)$ soit de la forme

$$\begin{aligned}
D_{st}^*(V) &= (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_0 \oplus (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_1 \\
\varphi(e_0) &= p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}} e_0 \\
\varphi(e_1) &= p^{\frac{|\vec{k}|}{2d}} e_1 \\
N(e_1) &= e_0
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Fil}^j(D_{dR}^*(V)_\sigma) = \begin{cases} D_{dR}^*(V)_\sigma & \text{si } j \leq 0 \\ K(e_{1,\sigma} + \mathcal{L}_\sigma e_{0,\sigma}) & \text{si } 1 \leq j \leq k_\sigma - 1 \text{ et } \sigma \notin S \\ Ke_{0,\sigma} & \text{si } 1 \leq j \leq k_\sigma - 1 \text{ et } \sigma \in S \\ 0 & \text{si } j \geq k_\sigma \end{cases}$$

où $\vec{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma\notin S} \in K^{d-|S|}$ et S est un ensemble de plongements de L dans K tel que

$$\sum_{\sigma\in S} h_\sigma \leq \frac{\sum_{\sigma\in\mathcal{P}} h_\sigma}{2}.$$

On note $V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, S)$ l'unique représentation galoisienne dont le (φ, N, L, K)-module a cette forme, et si χ est un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$, on pose $V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, S, \chi) = V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, S) \otimes \chi$.

Ce qui précède peut se résumer dans la proposition suivante

Proposition 1.2.3. — *Si (ρ, V) est une représentation p-adique semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Supposons en plus que ses poids de Hodge-Tate sont non dégénérés. Alors V est isomorphe à une et une seule représentation $V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, S, \chi)$.*

Nous nous intéresserons désormais uniquement aux représentations V à poids de Hodge-Tate non dégénérés et telles que $S = \varnothing$. On note $D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) = D^*_{st}(V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, \varnothing, 1))$.

Remarque 1.2.4. — Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d sur $\mathbb{Q}$ et π une forme automorphe irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_2(F)$ de poids $(k_1, \ldots, k_d)$ où tous les k_i sont des entiers ≥ 2 de même parité. Supposons qu'en une place v divisant p, π_v soit de niveau Iwahori, c'est-à-dire $\dim(\pi_v)^I = 1$, où I est le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F_v)$. Il est très probable que si ρ_π est la représentation galoisienne globale associée à π, la localisation de ρ_π en v est de la forme $V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, \varnothing, \chi)$.

1.3. Représentations S-analytiques

1.3.1. Généralités. — Soit M une variété localement L-analytique. Si V est un K-espace vectoriel localement convexe séparé, on peut définir, suivant [**66**] 2.1.10 (voir aussi [**83**] §2), l'espace des fonctions $\mathbb{Q}_p$-analytiques de M dans V comme étant l'espace des fonctions localement analytiques de M_0 dans V, où M_0 est obtenu par restriction des scalaires de L à $\mathbb{Q}_p$ à partir de M. On note $C^{\mathbb{Q}_p-an}(M, V)$ l'espace de ces fonctions. Si x est un point de M, on peut associer à tout élément f de $C^{\mathbb{Q}_p-an}(M, V)$ sa différentielle en x, c'est un élément df_x appartenant à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(T_xM, V) = \mathrm{Hom}_K(T_xM \otimes_{\mathbb{Q}_p} K, V)$, T_xM étant l'espace tangent à M en x. L'espace T_xM est muni d'une L-structure et est de dimension $\dim_L M$ sur L, ainsi l'espace $T_xM \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ est un $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module libre de rang $\dim_L M$.

Définition 1.3.1. — Soit S un ensemble fini de plongements de L dans K et I_S l'idéal noyau du morphisme d'algèbres θ_S obtenu par composition de θ avec la projection de $\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{P}} K$ sur $\bigoplus_{\sigma\in S} K$. Une fonction $\mathbb{Q}_p$-analytique de M dans V est dite S-analytique si pour tout $x \in M$ l'application df_x s'annule sur $I_S \otimes_{L\otimes K} (T_xM \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)$.

L'ensemble des fonctions S-analytiques est un sous-espace fermé de $C^{\mathbb{Q}_p-an}(M, V)$. On le munit de la topologie induite et on le note $C^{S-an}(M, V)$.

Définition 1.3.2. — On note $D_S(M, K)$ le dual continu de $C^{S-an}(M, K)$ muni de la topologie forte ([**78**] §9). Ses éléments sont appelés les distributions localement S-analytiques.

Exemple 1.3.3. — Si $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ est un d-uplet (n_σ) d'entiers positifs, on note, pour $z \in L$, $z^{\underline{n}} = \prod_\sigma \sigma(z)^{n_\sigma}$. Si $M = \mathcal{O}_L$, une fonction localement $\mathbb{Q}_p$-analytique f de M dans K peut s'écrire, au voisinage de $z_0 \in \mathcal{O}_L$

$$f(z) = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{n}}(z_0)(z - z_0)^{\underline{n}},$$

où les $a_{\underline{n}}(z_0)$ sont des éléments de K. On désignera par z_σ la fonction $z \mapsto \sigma(z)$. On a

$$T_x M \simeq L\frac{\partial}{\partial z},$$

et on définit alors par $\frac{\partial}{\partial z_\sigma}$ la $T_{x_0}M \otimes_{L,\sigma} K$-composante de $\frac{\partial}{\partial z}$ via l'isomorphisme

$$T_{x_0}M \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \simeq \bigoplus_\sigma T_{x_0}M \otimes_{L,\sigma} K.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial z_\sigma}.$$

On vérifie alors que $\frac{\partial}{\partial z_\sigma} z_{\sigma'} = 1$ si et seulement si $\sigma = \sigma'$, et 0 dans le cas contraire. Ainsi f est localement S-analytique si et seulement si $a_{\underline{n}} = 0$ lorsque $\underline{n}$ a son support hors de S. De même l'ensemble des fonctions f localement S-analytiques vérifiant $\frac{\partial^n}{\partial z_\sigma^n} f = 0$ (pour un $\sigma \in S$) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_\sigma^k f_k,$$

où chaque f_k est une fonction localement $S\backslash\{\sigma\}$-analytique.

Il est alors immédiat de généraliser la définition de [**83**] §3. Soit G un groupe de Lie L-analytique.

Définition 1.3.4. — Une représentation V de G est localement S-analytique si V est un espace vectoriel muni d'une topologie séparée localement convexe tonnelée et G agit sur V par endomorphismes continus. On impose de plus que pour tout $v \in V$, l'application de G dans V définie par $g \mapsto gv$ soit localement S-analytique.

Si G est un groupe de Lie L-analytique, et V une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de G sur V, on a une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G sur l'espace V définie par

$$\mathfrak{x} \cdot v = \frac{d}{dt} \exp(t\mathfrak{x}) \cdot v|_{t=0}.$$

Par $\mathbb{Q}_p$-linéarité, elle se prolonge en une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. Cette dernière est en fait une algèbre de Lie sur l'anneau $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. On note $\mathfrak{g}_S$ la somme directe des K-algèbres de Lie obtenues par changement de base de L à K via σ lorsque σ parcourt S. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_S$ est également le quotient de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ par l'idéal

$$\mathfrak{I}_S = I_S \otimes_{L\otimes K} (\mathfrak{g} \otimes K).$$

Lemme 1.3.5. — *Une fonction $\mathbb{Q}_p$-analytique $f : G \to V$ est S-analytique si et seulement elle est annulée par les éléments de $\mathfrak{I}_S$ pour l'action par translation à gauche (resp. à droite) de G sur $C^{\mathbb{Q}_p-an}(G, V)$.*

Ainsi, si (ρ, V) est une représentation S-analytique, l'action de $\mathfrak{g}\otimes K$ sur V se factorise par $\mathfrak{g}_S$.

On peut utiliser les fonctions S-analytiques pour construire des représentations localement S-analytiques de G par induction. Supposons en effet que (ρ, V) soit une représentation localement S-analytique d'un sous-groupe H fermé, L-analytique de G. On note $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)^{S-an}$ l'espace des fonctions S-analytiques de G dans V telles que pour tout $g \in G$, $h \in H$:

$$f(gh) = \rho(h^{-1})f(g).$$

On munit alors cet espace d'une action de G par translation à gauche, ce qui en fait une représentation S-analytique. On l'appelle l'induite localement S-analytique de H à G de ρ.

Nous avons besoin ici d'une généralisation du critère d'irréductibilité de Frommer (dont la preuve a été complétée par Orlik et Strauch dans [**70**]) afin de prouver que le procédé d'induction permet de construire des représentations topologiquement irréductibles.

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe réductif sur L, $\mathfrak{T}$ un sous-tore déployé maximal, $\mathfrak{P}$ un sous-groupe parabolique contenant $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ le sous-groupe de Levi de $\mathfrak{P}$ contenant $\mathfrak{T}$. On note $G = \mathfrak{G}(L)$, $T = \mathfrak{T}(L)$, $P = \mathfrak{P}(L)$ et $M = \mathfrak{M}(L)$. Soit ρ une représentation localement S-analytique de M sur un K-espace vectoriel V de dimension finie. Par inflation, ρ donne une représentation de P. Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}$ les algèbres de Lie de P et G respectivement. On note ρ' la représentation de $\mathfrak{p}_S$ sur l'espace dual de V. L'action de $\mathfrak{p}_S$ sur V se prolonge en une action de $U(\mathfrak{p}_S)$. On note alors $m_S(\rho)$ le module de Verma généralisé

$$m_S(\rho) = U(\mathfrak{g}_S) \otimes_{U(\mathfrak{p}_S)} V'.$$

La généralisation du critère d'irréductibilité de Frommer, Orlik et Strauch ([**70**]) est alors

Théorème 1.3.6. — *Si $m_S(\rho)$ est un $U(\mathfrak{g}_S)$-module simple, la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)^{S-an}$ est topologiquement irréductible.*

Ce théorème se prouve exactement comme celui de Frommer, Orlik et Strauch, à quelques différences près que nous expliquons à la fin de ce chapitre.

1.3.2. Représentations algébriques. — Soit G un groupe réductif déployé défini sur L. On note G_0 sa restriction à la Weil de L à $\mathbb{Q}_p$. Une fonction de $G_0(\mathbb{Q}_p) = G(L)$ dans K est dite $\mathbb{Q}_p$-algébrique si elle est dans l'image de l'injection

$$K[G_0] \hookrightarrow C(G_0(\mathbb{Q}_p), K).$$

L'algèbre $K[G_0]$ est l'algèbre des fonctions K-rationnelles sur la variété algébrique G_0. Cette flèche est une injection par densité de Zariski des $\mathbb{Q}_p$-points de G_0 dans les $\overline{\mathbb{Q}_p}$-points ([**52**], §34.4). Une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de G est alors une représentation de dimension finie de $G(L)$ sur un K-espace vectoriel dont les applications orbites sont $\mathbb{Q}_p$-algébriques. Il est facile de vérifier qu'une telle représentation est la restriction à $G_0(\mathbb{Q}_p)$ d'une représentation algébrique de $G_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. On sait alors que les représentations algébriques irréductibles de $G_0 \otimes K$ sont en bijection avec les d-uplets $(\rho_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}}$ où ρ_σ est une représentation algébrique irréductible du groupe $G \otimes_{L,\sigma} K$. Cette bijection étant donnée par

$$(\rho_\sigma) \longmapsto \bigotimes_\sigma \rho_\sigma.$$

On peut être plus explicite. En effet si on fixe T un tore déployé maximal de G et un sous-groupe de Borel B contenant T, les représentations irréductibles de $G \otimes_{L,\sigma} K$ sont en bijection avec les caractères dominants (relativement à B) de

$$T \otimes_{L,\sigma} K.$$

Soit w l'élément le plus long du groupe de Weyl de G et χ^w le caractère de T défini par $\chi^w(t) = \chi(w^{-1}tw)$. Cette bijection est alors donnée par

$$\chi \longmapsto \mathrm{Ind}_B^G(\chi^w)^{\sigma-alg},$$

où $\mathrm{Ind}_B^G(\chi^w)^{\sigma-alg}$ est simplement l'induite algébrique, L étant considéré plongé dans K via σ. On remarquera que cet espace est isomorphe à l'espace des fonctions σ-algébriques de $G(L)$ dans K telles que
$$f(\cdot b) = \chi^w(b)^{-1}f(\cdot)$$
pour tout $b \in B(L)$. Tout caractère $\mathbb{Q}_p$-algébrique χ de $T(L)$ peut s'écrire comme un produit $\prod \chi_\sigma$ où χ_σ est σ-algébrique. De plus χ est dominant si et seulement si chaque χ_σ est dominant. On a finalement une bijection entre représentations irréductibles $\mathbb{Q}_p$-algébriques de $G(L)$ et caractères $\mathbb{Q}_p$-algébriques dominants de $T(L)$ donnée par
$$\prod_{\sigma\in\mathcal{P}} \chi_\sigma \longmapsto \bigotimes_{\sigma\in\mathcal{P}} \mathrm{Ind}_{B(L)}^{G(L)}(\chi_\sigma^w)^{\sigma-alg}. \tag{1.3.1}$$
Remarquons que cette représentation peut encore être décrite comme l'espace des fonctions $\mathbb{Q}_p$-algébriques de $G(L) = G_0(\mathbb{Q}_p)$ dans K vérifiant
$$f(\cdot b) = \chi^w(b)^{-1}f(\cdot)$$
pour tout $b \in B(L) = B_0(\mathbb{Q}_p)$ et muni de l'action par translation à gauche.

Définition 1.3.7. — Si χ est un caractère $\mathbb{Q}_p$-algébrique dominant de $T(L)$, on note $V(\chi)$ la représentation définie par (1.3.1).

Soit N le radical unipotent de B.

***Proposition 1.3.8* ([57], prop *II*.2.11)**. — *Si χ est un caractère dominant σ-algébrique de T, notons V la représentation irréductible σ-algébrique de G de plus haut poids χ. Alors l'espace des N-invariants de V est isomorphe à χ comme T-représentation et l'espace des coinvariants est isomorphe à χ^w où w est l'unique élément de longueur maximale dans le groupe de Weyl de G.*

1.3.3. Induites localement S-analytiques. — On fixe désormais une partie S non vide de $\mathcal{P}$ jusqu'à la fin du chapitre 2. Considérons $G = \mathrm{GL}_2(L)$, P le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, N le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures et T le sous-groupe des matrices diagonales. Soit χ un caractère localement S-analytique de T. Par inflation on peut aussi le voir comme une représentation localement S-analytique de P. Nous allons ici étudier les sous-quotients de la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$. Orlik et Strauch mentionnent déjà à la fin de l'introduction de [**70**] que leur théorème permet de décomposer des induites $\mathbb{Q}_p$-analytiques dans le cas où L est une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$. En effet, dans ce cas, ses composantes de Jordan-Hölder peuvent s'exprimer en termes d'induites localement L-analytiques classiques. Dans le cas général, nous devons avoir recours à des induites localement S-analytiques pour S non réduit à un singleton.

Posons
$$\chi\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \chi_1(a)\chi_2(d).$$
Quitte à considérer la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \otimes (\chi_1 \circ \det)^{-1} = \mathrm{Ind}_P^G(\chi(\chi_1 \circ \det)^{-1})^{S-an}$, on peut considérer qu'au voisinage de 1,
$$\chi\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \prod_{\sigma\in S} \exp(c_\sigma \sigma(\log d)),$$
avec $c_\sigma \in K$. On désigne par $\mathcal{P}(S,\chi)$ l'ensemble des $\sigma \in S$ tels que $c_\sigma \in \mathbb{N}$. Pour $\sigma \in \mathcal{P}(S,\chi)$, on pose alors
$$\chi_\sigma\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \sigma(d)^{c_\sigma}.$$

Pour $S' \subset \mathcal{P}(S,\chi)$, on peut écrire

$$\chi = \left(\prod_{\sigma\in S'} \chi_\sigma\right) \chi^{S'},$$

où $\chi^{S'}$ est un caractère localement $S\backslash S'$-analytique. On note aussi $S^c = S\backslash\mathcal{P}(S,\chi)$ et $\overline{\chi} = \chi^{\mathcal{P}(S,\chi)}$.

Considérons pour l'instant le cas où $\mathcal{P}(S,\chi) = \varnothing$. Au voisinage de 1 on écrit

$$\chi = \prod_{\sigma\in S} \psi_\sigma,$$

où

$$\psi_\sigma \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \exp(c_\sigma(\chi)\sigma(\log d)).$$

Or, d'après [**36**] 7.6.24, le module de Verma $U(\mathfrak{g}_\sigma) \otimes_{U(\mathfrak{p}_\sigma)} (\psi_\sigma^{-1})$ est simple. Ainsi la formule

$$U(\mathfrak{g}_S) \otimes_{U(\mathfrak{p}_S)} (\chi^{-1}) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\sigma\in S} (U(\mathfrak{g}_\sigma) \otimes_{U(\mathfrak{p}_\sigma)} (\psi_\sigma^{-1}))$$

associée au théorème 1.3.6 implique que la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ est topologiquement irréductible.

Dans les autres cas, la représentation n'est pas topologiquement irréductible, on a par exemple une flèche non nulle

$$\begin{array}{ccc} (\bigotimes_{\sigma\in\mathcal{P}(S,\chi)} \mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg}) \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^{S^c-an} & \to & \mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \\ (f,g) & \mapsto & fg. \end{array}$$

Nous allons en fait voir que le membre de gauche est topologiquement irréductible, de telle sorte que cette flèche est une injection.

Proposition 1.3.9. — *Soit V une représentation S'-algébrique irréductible de G et W une représentation localement S''-analytique de G topologiquement irréductible telle que $S' \cap S'' = \varnothing$. Alors $V \otimes_K W$ est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — Soit $\underline{i} = (i_\sigma)_{\sigma\in S'} \in \mathbb{N}^{|S'|}$. On pose

$$u^{\underline{i}} = \prod_{\sigma\in S'} (u_\sigma^-)^{i_\sigma} \in U(\mathfrak{g}_S).$$

La théorie des représentations algébriques de GL_2 nous dit que si e est le vecteur de plus haut poids (pour le Borel P) $(c_\sigma)_{\sigma\in S'}$ de V, une base de V est donnée par les $u^{\underline{i}}e$ pour $i_\sigma \leq c_\sigma - 1$.
Remarquons que si $v\otimes w \in V\otimes W$ et $\mathfrak{x} \in U(\mathfrak{g}_{S'})$, la relation de disjonction $S'\cap S'' = \varnothing$ implique que $\mathfrak{x}(v\otimes w) = (\mathfrak{x}v)\otimes w$.
Ceci étant dit, supposons que U soit un sous-espace fermé, G-stable et non vide de $V\otimes W$.
Comme $U(\mathfrak{g}_{S'})v = V$ pour tout vecteur non nul v dans V, on a une égalité

$$\{w \in W,\ \exists v \in V\backslash\{0\},\ v\otimes w \in U\} = \{w \in W,\ \forall v \in V,\ v\otimes w \in U\}.$$

Le deuxième de ces ensembles est visiblement fermé et G-stable dans W. Donc s'il est non vide, il s'agit de W et donc évidemment $U = V\otimes W$. Il reste juste à prouver que le premier de ces deux ensembles est non réduit à zéro.
Il existe un vecteur non nul

$$x = \sum (u^{\underline{i}}e)\otimes w_{\underline{i}} \in U.$$

Si $\underline{i}_0$ est un élément minimal (pour l'ordre lexicographique) de l'ensemble des $\underline{i}$ pour lesquels $w_{\underline{i}} \neq 0$, remarquons que $u^{\underline{j}}x = (u^{\underline{i}_0+\underline{j}}e) \otimes w_{\underline{i}_0}$, où $\underline{j} = (c_\sigma - 1 - i_{0,\sigma})$, est un tenseur pur non nul de U, ce qu'il nous fallait. □

Corollaire 1.3.10. — *Si $S^c \neq \varnothing$, la représentation*

$$I_S(\chi) = \bigotimes_{\sigma\in\mathcal{P}(S,\chi)} \mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg} \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^{S^c-an}$$

est topologiquement irréductible.

Expliquons maintenant comment utiliser les représentations $I_S(\chi)$ pour décomposer les induites $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$. La méthode utilisée doit énormément au §6 de [**83**].

Si $\sigma \in \mathcal{P}(S,\chi)$, on note $\mathfrak{z}_\sigma = (u_\sigma^-)^{c_\sigma+1}$ et de la même façon l'application

$$C^{S-an}(G,K) \to C^{S-an}(G,K)$$

obtenue par dérivation à droite. On écrit également

$$\chi = \chi_\sigma \chi^\sigma.$$

Le caractère χ^σ est alors localement $S\backslash\{\sigma\}$-analytique. On pose enfin

$$\epsilon_\sigma \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \sigma(ad^{-1}).$$

Proposition 1.3.11. — *L'application $\mathfrak{z}_\sigma$ induit une application de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(\chi\epsilon_\sigma^{c_\sigma+1})^{S-an}$ qui est surjective et dont le noyau est isomorphe à*

$$\mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg} \otimes_K \mathrm{Ind}_P^G(\chi^\sigma)^{S\backslash\{\sigma\}-an}.$$

Démonstration. — Posons $m = c_\sigma + 1$ et $\chi' = \chi\epsilon_\sigma^m$. Il faut vérifier que si $f \in \mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$, $\mathfrak{z}_\sigma \cdot f(gb) = \chi'(b^{-1})(\mathfrak{z}_\sigma \cdot f)(g)$ pour tout $(g,b) \in G \times P$. Il suffit en fait de le vérifier pour $b \in T$ et $b \in N$. Commençons par $b = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in T$.

$$\begin{aligned} u_\sigma^- \cdot f(gb) &= \frac{d}{dt} f(gb\exp(tu_\sigma^-))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(g\exp(\sigma(a^{-1}d)tu_\sigma^-)b) \\ &= \sigma(a^{-1}d)\chi(b^{-1})u_\sigma^- \cdot f(g) \end{aligned}$$

Et

$$\mathfrak{z}_\sigma \cdot f(gb) = \chi'(b^{-1})f(g)$$

car

$$\chi' \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \chi \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \sigma(ad^{-1})^m.$$

Choisissons maintenant $b \in N$, donc $b = \exp(au)$, $a \in L$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\sigma \cdot f(gb) &= \mathrm{Ad}(\exp(au))(\mathfrak{z}_\sigma) \cdot f(g) \\ &= \exp(a\mathrm{ad}(u)(\mathfrak{z}_\sigma)) \cdot f(g) \\ &= f(g) + a\mathrm{ad}(u)(\mathfrak{z}_\sigma) \cdot f(g) + \frac{a^2}{2}\mathrm{ad}(u)^2(\mathfrak{z}_i) \cdot f(g) + \cdots \end{aligned}$$

On a alors

$$[u, u_\sigma^-] = [u_\sigma, u_\sigma^-] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)_\sigma = t_\sigma.$$

Le même calcul que dans [**83**] §6 montre que

$$\mathrm{ad}(u)(\mathfrak{z}_i) = m(u_\sigma^-)^{m-1}(t_\sigma - (m-1))$$

et

$$[\mathrm{ad}(u)]^j(\mathfrak{z}_\sigma) \in U(\mathfrak{gl}_{2,K})(t_\sigma - c_\sigma) + U(\mathfrak{gl}_{2,K})u_\sigma^+$$

pour $j \geq 1$. Comme $u_\sigma \cdot f = 0$ et $t_\sigma \cdot f = c_\sigma f$, on a

$$\mathfrak{z}_\sigma(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \subset \mathrm{Ind}_P^G(\chi\epsilon_\sigma^m)^{S-an}.$$

Pour les assertions restantes, nous utilisons l'isomorphisme topologique

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} & \simeq & C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \\ f & \longmapsto & ((x \mapsto f\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \pi_L x & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)), (x \mapsto f\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\right))). \end{array}$$

Sous ces identifications, il est facile de vérifier que le morphisme

$$\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \xrightarrow{\mathfrak{z}_\sigma} \mathrm{Ind}_P^G(\chi\epsilon_\sigma^m)^{S-an}$$

devient

$$C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \xrightarrow{\left(\frac{\partial^m}{\partial z_\sigma^m}, -\frac{\partial^m}{\partial z_\sigma^m}\right)} C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K).$$

D'où la surjectivité.

Enfin, pour voir que $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg} \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\chi^\sigma)^{S\backslash\{\sigma\}-an}$ est le sous-espace des vecteurs annulés par $\mathfrak{z}_\sigma$, il suffit de remarquer que l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg} \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\chi^\sigma)^{S\backslash\{\sigma\}-an} \simeq ((K_{c_\sigma}[z_\sigma] \otimes C^{S\backslash\{\sigma\}-an}(\mathcal{O}_L, K)))^2$$

où $K_{c_\sigma}[z_\sigma]$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur à c_σ. Il se trouve justement que d'après l'exemple 1.3.3 $K_{c_\sigma}[z] \otimes C^{S\backslash\{\sigma\}-an}(\mathcal{O}_L, K)$ est exactement l'ensemble des fonctions f de $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)$ telles que $\frac{\partial^m f}{\partial z_\sigma^m} = 0$. □

Définissons une filtration décroissante sur $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ par

$$\mathrm{Fil}^i(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = \sum_{S' \subset \mathcal{P}(S,\chi), |S'|=i} \bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma.$$

Remarquons immédiatement qu'en utilisant la proposition 1.3.11, on a un isomorphisme

$$\bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_{\sigma \in S'} \mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg}\right) \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\chi^{S'})^{S\backslash S'-an}. \tag{1.3.2}$$

Si S' est une partie de $\mathcal{P}(S, \chi)$, on pose

$$\mathfrak{z}_{S'} = \prod_{\sigma \in S'} \mathfrak{z}_\sigma.$$

Il s'agit, d'après la proposition 1.3.11, d'une application surjective

$$\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \to \mathrm{Ind}_P^G(\chi \prod_{\sigma \in S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1})^{S-an}.$$

De plus, l'ordre dans le produit n'importe pas car tous les termes commutent deux à deux.

Théorème 1.3.12. — *Nous avons un isomorphisme G-équivariant*

$$\mathrm{gr}^i(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{S' \subset \mathcal{P}(S,\chi), |S'|=i} I_S(\chi \prod_{\sigma \in \mathcal{P}(S,\chi) \backslash S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1})$$

Démonstration. — Soit Z_i l'application

$$\bigoplus_{S'\subset\mathcal{P}(S,\chi),\,|S'|=i} \mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S,\chi)\backslash S'} : \mathrm{Fil}^i(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \to \bigoplus_{S'\subset\mathcal{P}(S,\chi),\,|S'|=i} \mathrm{Ind}_P^G(\chi \prod_{\sigma\in\mathcal{P}(S,\chi)\backslash S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1})^{S-an}.$$

Il est immédiat de remarquer que $\mathrm{Fil}^{i+1}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \subset \ker Z_i$, donc la flèche Z_i se factorise par $\mathrm{gr}^i(\mathrm{Ind}_P^G\chi)^{S-an}$.
Remarquons que

$$Z_i(\bigcap_{\sigma\in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma) = \mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S,\chi)\backslash S'}(\bigcap_{\sigma\in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma).$$

Or d'après (1.3.2) et la proposition 1.3.11, on a

$$Z_i(\bigcap_{\sigma\in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma) = \bigotimes_{\sigma\in S'} \mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg} \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\chi^{S'} \prod_{\sigma\in\mathcal{P}(S,\chi)\backslash S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1})^{S\backslash S'-an}.$$

Nous avons donc prouvé la surjectivité. Il reste juste à prouver que le noyau de ce morphisme est exactement $\mathrm{Fil}^{i+1}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})$.

Soit $f \in \ker Z_i$. On peut écrire

$$f = \sum_{S'\subset\mathcal{P}(S,\chi),\,|S'|=i} f_{S'}$$

où $f_{S'} \in \bigcap_{\sigma\in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma$. On a donc, pour tout $S' \subset \mathcal{P}(S,\chi)$ de cardinal i,

$$\mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S,\chi)\backslash S'} f_{S'} = 0.$$

Notons σ_1, σ_2, ..., σ_r les éléments de $\mathcal{P}(S,\chi)\backslash S'$. Par surjectivité de $\mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S,\chi)\backslash(S'\cup\{\sigma_1\})}$, il existe $f_{S',1} \in \bigcap_{\sigma\in S'\cup\{\sigma_1\}} \ker \mathfrak{z}_\sigma$ tel que $\mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S,\chi)\backslash(S'\cup\{\sigma_1\})}(f_{S'} - f_{S',1})=0$. Par itération on construit des fonctions $f_{S',j}$ pour $1 \leq j \leq r$ telles que

$$f_{S',j} \in \bigcap_{\sigma\in S'\cup\{\sigma_1,\dots,\sigma_j\}} \ker \mathfrak{z}_\sigma$$

et

$$\mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S,\chi)\backslash(S'\cup\{\sigma_1,\dots,\sigma_j\})}(f_{S'} - f_{S',1} - \cdots - f_{S',j}) = 0.$$

Ainsi on a

$$f_{S'} = \sum_{j=1}^{r} f_{S',j} \in \mathrm{Fil}^{i+1}\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}.$$

□

D'après le corollaire 1.3.10, tous les morceaux apparaissant dans ces gradués sont topologiquement irréductibles. Excepté si $S' = S$, auquel cas on a $\chi = \chi_{alg}\chi_\infty$ où χ_{alg} est $\mathbb{Q}_p$-algébrique et χ_∞ lisse, et

$$\mathrm{gr}^{|S|}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{alg})^{\mathbb{Q}_p-alg} \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\chi_\infty)^\infty.$$

D'après le résultat principal de [**73**], et comme $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{alg})^{\mathbb{Q}_p-alg}$ est irréductible, l'irréductibilité de cette représentation est équivalente à celle de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_\infty)^\infty$. Or on sait que cette représentation est non scindée de longueur 2 (resp. 1), selon que χ_∞ est (resp. n'est pas) de la forme $(\psi \circ \det)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \psi(ad)|ad^{-1}|$.

Dans le cas où le caractère est localement algébrique et $c_\sigma \in \mathbb{N}$ pour tout σ, on obtient les composantes de Jordan-Hölder de la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{\mathbb{Q}_p-an}$. En particulier la représentation de Steinberg $\mathbb{Q}_p$-analytique est de longueur $2^{[L:\mathbb{Q}_p]}$.

1.3.4. Entrelacements entre induites et filtration par le socle. — Soit χ un caractère localement S-analytique de T dans $K^\times$. La réciprocité de Frobenius ([**66**] 4.2.6) appliquée à l'induite $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ implique que pour toute représentation V localement S-analytique de G :

$$\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = \mathrm{Hom}_P(V, \chi) = \mathrm{Hom}_T(H_0(N, V), \chi)$$

où $H_0(N, V)$ est l'espace des coinvariants selon N, c'est le plus grand quotient séparé de V sur lequel N agit trivialement, c'est aussi le quotient de V par l'adhérence $N(V)$ du sous-espace de V engendré par les $n \cdot v - v$ où $n \in N$ et $v \in V$. C'est une T-représentation localement S-analytique sur un espace de type compact.

Ainsi pour en savoir plus sur les entrelacements entre séries principales, il nous faut déterminer les T-représentations $H_0(N, V)$ lorsque V est une série principale.

Nous avons un morphisme P-équivariant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} & \to & \bigoplus_{S' \subset \mathcal{P}(S,\chi)} \chi \prod_{\sigma \in S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1} \\ f & \longmapsto & (((\mathfrak{z}_{S \setminus S'}) \cdot f)(1))_{S' \subset \mathcal{P}(S,\chi)} \end{array} \tag{1.3.3}$$

où la représentation de droite est l'inflation de T à P. D'où un morphisme

$$J :\ H_0(N, \mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \to \bigoplus_{S' \subset \mathcal{P}(S,\chi)} \chi \prod_{\sigma \in S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1}.$$

Théorème 1.3.13. — *Le morphisme J est un P-isomorphisme.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu qu'il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} & \simeq & C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \\ f & \longmapsto & ((x \mapsto f\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \pi_L x & 1 \end{smallmatrix}\right)), (x \mapsto f(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w))). \end{array} \tag{1.3.4}$$

Notons $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_1$ le facteur de gauche isomorphe à $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)$ et $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_2$ le facteur de droite.

Vu à travers cet isomorphisme, la flèche (1.3.3), est

$$\begin{array}{ccc} C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_1 \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_2 & \to & \bigoplus_{S \subset \mathcal{P}} \chi \prod_{\sigma \in S} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1} \\ (f_1, f_2) & \longmapsto & \left(\frac{\partial^{|S|} f_1}{\prod_{\sigma \in S} \partial z_\sigma^{c_\sigma+1}}(1) \right)_{S \subset \mathcal{P}} \end{array}.$$

Il est donc déjà clair que cette flèche est surjective, il reste à montrer l'injectivité. Pour une représentation localement analytique V, notons $N(V)$ l'adhérence du sous-espace engendré par les vecteurs de la forme $nv - v$ pour $n \in N$ et $v \in V$. Remarquons que pour tout σ et tout couple (f_1, f_2), $u_\sigma \cdot (f_1, f_2)$ est dans $N(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})$. Comme u_σ agit comme $\frac{\partial}{\partial z_\sigma}$ sur $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_2$ et que cet opérateur est surjectif, on a déjà

$$C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_2 \subset N(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}).$$

Soit U un ouvert fermé de $\mathcal{O}_L$ ne contenant pas 0. Nous allons montrer que $N(C^{S-an}(U, K))$ est égal à $C^{S-an}(U, K)$, pour cela nous allons prouver que pour tout $a \in U$, il existe un voisinage W de a tel que $N(C^{S-an}(U, K))$ contienne toutes les fonctions de la forme $1_W(z - a)^{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in \mathbb{N}^{|S|}$.

Un petit calcul montre que

$$u_\sigma \cdot f = \pi_L \left(-(\sigma(z) c_\sigma f + \sigma(z)^2 \frac{\partial f}{\partial z_\sigma} \right).$$

Il nous faut donc prouver qu'il existe un $r > 0$ assez petit, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation différentielle

$$(z - a)^{\underline{n}} = \pi_L \left(-z_\sigma c_\sigma f + z_\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial z_\sigma} \right)$$

ait une solution dans l'anneau des séries formelles en les variables z_σ, convergente sur $D(a,r)$. Il suffit en fait de le vérifier pour une seule variable, z_σ, car les autres n'interviennent pas dans l'équation aux dérivées partielles. Il s'agit donc de prouver qu'il existe un $r>0$ tel que toutes les équations différentielles

$$z^2 f'(z) - czf(z) = (z-a)^n \tag{1.3.5}$$

aient une solution développable en série entière dans le disque $D(a,r)$. Cherchons une solution sous la forme $z^c f(z)$, l'équation (1.3.5) se ramène donc à

$$f'(z) = (z-a)^n/z^c.$$

Or cette fraction rationnelle est développable en série entière sur tout disque ouvert $D(a,r)$ ne contenant pas 0, une primitive convergera donc sur tout disque de rayon $<r$.

Remarquons ensuite que pour $\underline{m}\in\mathbb{N}^d$,

$$u_\sigma \cdot z^{\underline{m}} = -\pi_L(c_\sigma + m_\sigma) z^{\underline{m}+(0,\cdots,1,\cdots,0)}.$$

Ainsi $z^{\underline{m}} \in N(C^{S-an}(\mathcal{O}_L,K))$ sauf si pour tout σ, $m_\sigma = 0$ ou $m_\sigma - 1 = c_\sigma$, c'est-à-dire $\underline{m} = (1_{S'}(\sigma)(c_\sigma+1))_{\sigma\in\mathcal{P}}$ pour un $S'\subset\mathcal{P}(S,\chi)$ (où $1_{S'}$ est la fonction indicatrice de S' dans $\mathcal{P}$).

Prenons maintenant $f\in C^{S-an}(\mathcal{O}_L,K)_1$ telle que $J(f)=0$. Alors quitte à ajouter à f une fonction à support disjoint de $\{0\}$, on peut supposer que f est à support dans un voisinage de 0 où elle est développable en série entière

$$f(z) = \sum_{\underline{m}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{m}} z^{\underline{m}},$$

Les conditions $\mathfrak{z}_\sigma\cdot f(1)=0$ impliquent alors $a_{\underline{m}}=0$ si $\underline{m}$ est de la forme $\underline{m} = (1_{S'}(\sigma)(c_\sigma+1))_{\sigma\in\mathcal{P}}$ pour un $S'\subset\mathcal{P}(S,\chi)$. Mais nous avons vu qu'il s'agit exactement des monômes qui ne sont pas dans $N(C^{S-an}(\mathcal{O}_\mathcal{L},\mathcal{K})_1)$. Ainsi $f\in N(C^{S-an}(\mathcal{O}_L,K)_1)$, et le théorème est démontré. □

Corollaire 1.3.14. — *Si χ est un caractère localement S-analytique de T, tout endomorphisme continu G-équivariant de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ est scalaire.*

Corollaire 1.3.15. — *Si $S\neq\varnothing$,*

$$H_0(N, I_S(\chi)) = \chi.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver que $H_0(\mathfrak{n}, I_S(\chi)) = \chi$. Mais la même technique que dans la preuve de la proposition 1.3.9 montre que

$$H_0(\mathfrak{n}, I_S(\chi)) = H_0(\mathfrak{n}_{\mathcal{P}(S,\chi)}, V(\prod_{\sigma\in\mathcal{P}(S,\chi)}\chi_\sigma)) \otimes H_0(\mathfrak{n}_{S^c}, \mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^{S^c-an}).$$

On conclut alors grâce au théorème 1.3.13 et à la proposition 1.3.8. □

Corollaire 1.3.16. — *Les représentations de Steinberg ne sont jamais des sous-objets d'induites localement analytiques.*

Démonstration. — En effet, l'exactitude à droite du foncteur des N-coinvariants montre que

$$H_0(N, \mathrm{Ind}_P^G(1)^{S-an}/1) \simeq \bigoplus_{S'\subset S, S'\neq\varnothing}\prod_{\sigma\in S'}\epsilon_\sigma.$$

Si la représentation de Steinberg S-analytique était sous-objet d'une induite, ce serait dans l'induite de l'un de ces caractères. Or il est très facile de voir qu'aucune de ces induites ne contient de vecteur lisse, et donc ne peut contenir la représentation de Steinberg lisse. □

Remarquons enfin que notre filtration est la filtration par le socle. Si V est une représentation localement analytique admissible de $\mathrm{GL}_2(L)$ de longueur finie, on définit par récurrence son n-socle de la façon suivante. Le 0-socle est le socle classique, c'est-à-dire la plus grande sous-représentation somme directe de représentations irréductibles. Le n-socle est le socle du quotient de V par $\mathrm{Fil}_{n-1}V$. On définit alors Fil_n comme étant l'image réciproque dans V du n-socle. La filtration (Fil_nV) est appelée filtration par le socle et son n-ième gradué est le n-socle de V. Remarquons que si $\mathcal{P}(S,\chi)=S$, $\overline{\chi}$ est un caractère lisse, on note $\mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^\infty$ l'induite lisse. Dans ce cas on note aussi

$$\chi_{alg}=\prod_{\sigma\in S}\chi_\sigma$$

et

$$\chi=\chi_{alg}\overline{\chi}.$$

Théorème 1.3.17. — *– Si $\mathcal{P}(S,\chi)\subsetneq S$ ou $\mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^\infty$ est irréductible, alors, pour tout $n\geq 0$,*

$$\mathrm{Fil}_n(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})=\mathrm{Fil}^{|\mathcal{P}(S,\chi)|-n}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}).$$

– Si $\mathcal{P}(S,\chi)=S$ et $\mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^\infty$ est réductible, alors

$$\mathrm{Fil}_{n+1}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})=\mathrm{Fil}^{|\mathcal{P}(S,\chi)|-n}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})$$

si $n\geq 1$,

$$\mathrm{Fil}_0(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})=V(\chi_{alg})\otimes soc(\mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^\infty)$$
$$\mathrm{Fil}_1(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})=V(\chi_{alg})\otimes cosoc(\mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^\infty).$$

Démonstration. — Commençons par le cas où $\mathcal{P}(S,\chi)\neq S$ ou $\mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^\infty$ irréductible. On voit alors par réciprocité de Frobenius et le corollaire 1.3.15 que $I_S(\chi)$ est le seul sous-objet irréductible de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$. Le quotient se plonge alors dans

$$\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{P}(S,\chi)}\mathrm{Ind}_P^G(\chi\epsilon_\sigma^{c_\sigma+1})^{S-an},$$

et de même on voit que le socle de cette représentation est

$$\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{P}(S,\chi)}I_S(\chi\epsilon_\sigma^{c_\sigma+1}).$$

On continue de la même façon. Le deuxième cas se traite de façon identique, il suffit juste de prendre garde à ce que, cette fois-ci,

$$\mathrm{Fil}^{|\mathcal{P}(S,\chi)|}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})=V(\chi_{alg})\otimes\mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^\infty,$$

et la représentation lisse $\mathrm{Ind}_P^G(\overline{\chi})^\infty$ est de longueur 2 et non scindée. □

1.3.5. Preuve du critère d'irréductibilité. — La preuve est en réalité la même que celle de Frommer, Orlik et Strauch ([**70**]), une fois certains faits généralisés au cas localement S-analytique. Ce sont ces faits que nous prouvons ici.

Premièrement le même raisonnement que dans [**70**] 3.2.2 nous autorise à considérer que G est un groupe de Lie L-analytique compact.

1.3.5.1. Un peu d'analyse fonctionnelle p-adique. — On fixe désormais S un ensemble fini de plongements de L dans K et on désigne par I le noyau de la surjection

$$D(G_0, K) \longrightarrow D_S(G, K),$$

G_0 étant la restriction des scalaires de G à $\mathbb{Q}_p$.

Proposition 1.3.18. — *L'idéal I coïncide avec l'idéal à droite fermé engendré par $\mathfrak{I}_S$.*

Démonstration. — Par bidualité de $C^{\mathbb{Q}_p-an}(G_0, K)$, il suffit de prouver que si f est une fonction appartenant au dual de l'idéal fermé engendré par $\mathfrak{I}_S$, f appartient à $C^{S-an}(G, K)$. Pour tout $\mathfrak{r} \in \mathfrak{I}_S$, on a

$$(\mathfrak{r} \star \delta_g) \cdot f = 0$$

c'est-à-dire

$$(\mathfrak{r} \cdot f)(g) = 0$$

et ceci pour tout g, donc $\mathfrak{r} \cdot f = 0$ et $f \in C_S^{an}(G, K)$. □

D'après [**85**] théorème 5.1, l'algèbre $D(G_0, K)$ est de Fréchet-Stein et l'idéal à droite engendré par $\mathfrak{I}_S$ est de type fini, et donc fermé.

Soient $v_1, \cdots, v_d$ une base de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathbb{Z}_p$ et $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_m$ une base de $\mathfrak{g}$ sur L. Il est prouvé dans [**64**] (1.3.5 et 1.4.2) que quitte à multiplier les $\mathfrak{r}_i$ par des scalaires, il existe un sous-groupe ouvert L-analytique H de G tel que si Λ désigne le $\mathbb{Z}_p$-réseau de $\mathfrak{g}$ engendré par les $v_i\mathfrak{r}_j$, la base

$$(v_1\mathfrak{r}_1, \ldots, v_d\mathfrak{r}_m)$$

définit un isomorphisme

$$\Lambda \simeq H$$

et H est un pro-p-groupe uniforme (voir [**37**] pour la définition d'un groupe uniforme).

On obtient ainsi un système de générateurs topologiques de H

$$(h_{ij}) = (\exp(v_1\mathfrak{r}_1), \ldots, \exp(v_d\mathfrak{r}_m)).$$

Posons $b_{ij} = h_{ij} - 1 \in D(G_0, K)$, où l'on a identifié h_{ij} à la mesure de Dirac en h_{ij}. Il est prouvé par Schneider et Teitelbaum ([**85**] §4) que tout élément de l'algèbre $D(H_0, K)$ est de façon unique une série convergente

$$\sum_\alpha d_\alpha b^\alpha,$$

où $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{N}^{dm}$, telle que la famille $(|d_\alpha| r^{|\alpha|})$ est bornée pour tout $0 < r < 1$. Les normes $||\cdot||_r$ sur $D(H_0, K)$ sont définies par

$$||\lambda||_r = \sup_\alpha |d_\alpha| r^{|\alpha|}.$$

Pour $\frac{1}{p} < r < 1$ elles sont multiplicatives ([**85**] proposition 4.2). On définit la norme q_r sur $D(G_0, K)$ en utilisant la décomposition

$$D(G_0, K) = \bigoplus_{g \in R} \delta_g \star D(H_0, K)$$

où R est un système de représentants de G/H et en prenant la norme sup associée (elle ne dépend pas des choix des g).

Notons, pour $0 < r < 1$, $\overline{q}_r$ la norme obtenue sur $D_S(G, K)$ par passage au quotient de la norme q_r. D'après [**85**] théorème 5.1, $D(G_0, K)$ munie de la famille (q_r) est une algèbre de

Fréchet-Stein. D'après la proposition 3.7 de [**85**], c'est également le cas de $D_S(G,K)$ munie de la famille $(\overline{q}_r)$.

On note $D(G_0,K)_r$ le complété de $D(G_0,K)$ pour la norme q_r et $D_S(G,K)_r$ celui de $D_S(G,K)$ pour la norme $\overline{q}_r$. Alors $D_S(G,K)_r$ est isomorphe comme K-algèbre de Banach au quotient de $D(G_0,K)_r$ par l'adhérence I_r de I dans $D(G_0,K)_r$ et

$$D_S(G,K) \simeq \varprojlim_r D_S(G,K)_r.$$

Fixons $\frac{1}{p} < r < 1$. Soit $U(\mathfrak{g}_0,K)_r$ l'adhérence de $U(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ dans $D(H_0,K)_r$ (et donc aussi dans $D(G_0,K)_r$). On a l'égalité dans $D(H_0,K)$:

$$v_i \mathfrak{r}_j = \log(1+b_{ij}).$$

Si $\beta = (\beta_{ij}) \in \mathbb{N}^{dm}$, on pose $|\beta| = \sum \beta_{ij}$,

$$\mathfrak{Y}^\beta = (v_1\mathfrak{r}_1)^{\beta_{11}}(v_2\mathfrak{r}_1)^{\beta_{21}} \cdots (v_d\mathfrak{r}_m)^{\beta_{dm}} \in U(\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K),$$

et

$$l_{i,j} = ||v_i\mathfrak{r}_j||_r.$$

Les lemmes 1 à 3 de [**46**] §1.4, impliquent que $D(H_0,K)_r$ est un $U(\mathfrak{g}_0,K)_r$-module libre de type fini dont une base est constituée des $b_{ij}^{\alpha_{ij}}$ où α_{ij} parcourt les entiers $0 \leq \alpha_{ij} < l_{ij}$. De plus le corollaire 1 de [**46**] 1.4 implique que

$$U(\mathfrak{g}_0,K)_r = \{\sum_\beta d_\beta \mathfrak{Y}^\beta,\ |d_\beta|||\mathfrak{Y}^\beta||_r \to 0\}$$

et que la norme $||\cdot||_r$ s'exprime par

$$||\sum_\beta d_\beta \mathfrak{Y}^\beta||_r = \sup_\beta |d_\beta|||\mathfrak{Y}^\beta||_r.$$

Remarquons que par multiplicativité de $||\cdot||_r$, $||\mathfrak{Y}^\beta||_r$ ne dépend que de $|\beta|$.

Proposition 1.3.19. — $I \cap (U(\mathfrak{g}_0) \otimes K) = U(\mathfrak{g}_0)\mathfrak{I}_S$.

Démonstration. — Soit $U(\mathfrak{g}_0)_n$ le sous-espace des éléments de degré $\leq n$. Nous allons prouver que pour tout n, $U(\mathfrak{g}_0)_{n-1}\mathfrak{I}_S = I \cap U(\mathfrak{g}_0)_n$. Il est classique ([**83**] lemme 2.4), que l'inclusion de $U(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ dans $D(G_0,K)$ induit un isomorphisme entre l'espace $U(\mathfrak{g}_0)_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ et le dual de l'espace des polynômes de degré $\leq n$ en les b_{ij}. De plus le sous-espace de ces polynômes qui sont S-analytiques est de dimension N, la dimension d'un espace de polynômes à $m|S|$ indéterminées de degré $\leq n$. Ainsi la dimension de $(U(\mathfrak{g}_0)_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)/(I \cap U(\mathfrak{g}_0)_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)$ est supérieure ou égale à N. Or il s'agit justement de la dimension de $U(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{I}_S)_n = U(\mathfrak{g}_0)_{n-1}/U(\mathfrak{g}_0)_n\mathfrak{I}_S$. Comme $U(\mathfrak{g}_0)_{n-1}\mathfrak{I}_S \subset I \cap U(\mathfrak{g}_0)_n$, on une égalité. □

Ainsi la composée

$$U(\mathfrak{g}_0) \otimes_{K_0} K \subset D(H_0,K) \to D_S(H,K)$$

induit une injection

$$U(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{I}_S) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \hookrightarrow D_S(H,K).$$

On note $U_S(\mathfrak{g},K)_r$ son adhérence pour la norme $\overline{q}_r$. Cet espace est encore isomorphe, comme K-algèbre de Banach, à $U(\mathfrak{g}_0,K)_r/J_r$ où $J_r = I_r \cap U(\mathfrak{g}_0,K)_r$.

L'isomorphisme $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{I}_S \simeq \mathfrak{g}_S = \bigoplus_{\sigma\in S}\mathfrak{g}_\sigma$ induit un isomorphisme

$$U(\mathfrak{g}/\mathfrak{I}_S) \simeq \bigotimes_{\sigma\in S} U(\mathfrak{g}_\sigma).$$

Soit $\mathcal{R}$ le réseau image de $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$ dans l'algèbre déployée K^d. Il est engendré comme $\mathcal{O}_K$-module par les $\theta(v_i)$. Soient $w_k \in \bigoplus_{\sigma \in S} K_\sigma$, $1 \leq k \leq |S|$, formant une $\mathcal{O}_K$-base du réseau $\mathcal{R}$. On pose $\mathfrak{x}_{kj} = w_k \mathfrak{x}_j \in \mathfrak{g}_S$ pour $1 \leq k \leq |S|$ et $1 \leq j \leq m$. Les $\mathfrak{x}_{kj}$ forment alors une base de $\mathfrak{g}_S$ sur K. Pour $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{N}^{|S|m}$, on pose

$$\mathfrak{X}^\alpha = \mathfrak{x}_{11}^{\alpha_{11}} \mathfrak{x}_{21}^{\alpha_{21}} \cdots \mathfrak{x}_{|S|m}^{\alpha_{|S|m}} \in U(\mathfrak{g}_S),$$

ils forment une base de $U(\mathfrak{g}_S)$.

Reprenons les notations du théorème 1.3.6. Soit W le groupe de Weyl de $\mathfrak{G}$ par rapport à $\mathfrak{T}$ et $W_P \subset W$ le groupe de Weyl de $\mathfrak{M}$. Soit encore U^- le groupe des L-points du radical unipotent du parabolique opposé à $\mathfrak{P}$. Comme dans [**70**], section 3.2.1, on se ramène au cas où $\mathfrak{G}$ est semi-simple simplement connexe. On choisit un sous-groupe parahorique B de G comme dans la section 3.2.2 de [**70**]. On pose alors, pour $w \in W_p \backslash W / W_P$,

$$P_w^+ = B \cap wPw^{-1},\ U_w^- = B \cap wU^- w^{-1},$$

et $\rho^w = \rho(w^{-1} \cdot w)$ la représentation de P_w^+. Il faut prouver que pour $r < 1$ suffisamment proche de 1, les $D_S(B,K)_r$-modules $D_S(B,K)_r \otimes_{D_S(P_w^+,K)_r} V_w'$ sont simples.

On note $m_S^w(\rho)$ le $U(\mathfrak{g}_S)$-module

$$U(\mathfrak{g}_S) \otimes_{U(\mathfrak{p}_{w,S})} (\rho^w)'.$$

On peut montrer que pour r assez proche de 1, il s'injecte dans $D_S(G,K)_r \otimes_{D_S(P_w,K)_r} V_w'$ et on note $m_S^w(\rho)_r$ son adhérence dans cet espace.

Pour que la stratégie de l'article [**70**] s'applique au cas S-analytique, on constate que les seuls résultats à changer sont les suivants :

– le lemme 3.4.4 de [**70**], où l'on a remplacé $m_r^w(\rho)$ par $m_S^w(\rho)_r$,

– la proposition 3.3.5 de [**70**] en remplaçant l'anneau $D_r(U_w^-, K)$ par $D_S(U_w^-, K)_r$.

Ce sont ces deux généralisations que nous prouvons à partir de maintenant.

1.3.5.2. Le lemme 3.4.4. — Il se déduit du résultat suivant, généralisant un théorème de Kohlhaase ([**64**] théorème 1.4.2).

Théorème 1.3.20. — *Pour $\frac{1}{p} < r < 1$, $D_S(H,K)_r$ est un $U(\mathfrak{g}_S,K)_r$-module libre de type fini dont une base est donnée par les b^α pour $0 \leq \alpha_{ij} < l_{ij}$. De plus $U_S(\mathfrak{g},K)_r$ est l'ensemble des séries*

$$\sum_\gamma c_\gamma \mathfrak{X}^\gamma$$

telles que $|c_\gamma| r^{|\gamma|}$ tend vers 0 lorsque $|\gamma|$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. — Posons

$$\mathcal{B} = \{b^\alpha, 0 \leq \alpha_{ij} < l_{ij}\}.$$

Soit $J_r = I_r \cap U(\mathfrak{g}_S,K)_r$. Pour prouver la liberté du module, il suffit de prouver que

$$I_r = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}} b J_r.$$

L'inclusion $\supset$ est évidente. L'autre inclusion se prouve en remarquant que le membre de droite est fermé ($(D(H_0,K)_r$ est une algèbre de Banach noethérienne) et contient $\sum_{g \in H} \mathfrak{I}_S \star \delta_g$ qui est dense dans I par la proposition 1.3.18, donc dans I_r. Remarquons au passage que le même raisonnement s'applique en remplaçant J_r par l'adhérence de J dans $U(\mathfrak{g}_S,K)_r$, ce qui implique que J est dense dans J_r.

L'application $\tau : D(H_0, K) \to D_S(H, K)$ induit

$$\tau_r : U(\mathfrak{g}_0, K)_r \to U(\mathfrak{g}_S, K)_r.$$

Cette flèche est surjective car son image est complète, donc fermée dans $U(\mathfrak{g}_S, K)_r$ et contient une partie dense. Son noyau est J_r. Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq d$,

$$\tau_r(\mathfrak{x}_{ij}) = \sum_{k=1}^{|S|} a_{kj}\mathfrak{x}_{kj},$$

avec $a_{kj} \in \mathcal{O}_K$. Comme $\mathfrak{r}_{kj}$ et $\mathfrak{r}_{ij}$ commutent pour $i \neq k$, on en déduit que $\tau_r(\mathfrak{Y}^\beta)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ d'éléments $\mathfrak{X}^\alpha$ où $|\alpha| = |\beta|$. Autrement dit

$$\tau_r(\mathfrak{Y}^\beta) = \sum_{|\alpha|=|\beta|} c(\beta, \alpha)\mathfrak{X}^\alpha$$

avec $c(\beta, \alpha) \in \mathcal{O}_K$. Si un élément $\sum c_\beta \mathfrak{Y}^\beta \in U(\mathfrak{g}_0, K)_r$, on a

$$\tau_r(\sum_\beta c_\beta \mathfrak{Y}^\beta) = \sum_\gamma (\sum_{|\beta|=|\gamma|} c(\beta, \gamma)c_\beta)\mathfrak{X}^\gamma,$$

et

$$|\sum_{|\beta|=|\gamma|} c(\beta, \gamma)c_\beta|r^{|\gamma|} \leq \sup_{|\beta|=|\gamma|} |c_\beta|||\mathfrak{Y}^\beta||_r \to_{|\gamma|\to+\infty} 0.$$

Réciproquement, tout élément de la forme

$$\sum c_\gamma \mathfrak{X}^\gamma$$

où $|c_\gamma|\nu_r(\mathfrak{X}^\gamma) \to 0$ est dans $U(\mathfrak{g}_S, K)_r$. □

Proposition 1.3.21. — *La norme ν_r sur $U(\mathfrak{g}_S, K)_r$, obtenue comme quotient de la norme $|| \cdot ||_r$, est donnée par*

$$\nu_r\left(\sum_\gamma c_\gamma \mathfrak{X}^\gamma\right) = \sup_\gamma |c_\gamma| r^\gamma.$$

Démonstration. — Nous avons prouvé au cours de la démonstration précédente que l'idéal J est dense dans J_r. Soit $\lambda = \sum_\gamma c_\gamma \mathfrak{X}^\gamma$. Pour $\epsilon > 0$, on peut trouver N assez grand tel que

$$\sup_{|\gamma|\leq N} |c_\gamma|r^\gamma = \sup_\gamma |c_\gamma|r^\gamma$$

et $\nu_r(\sum_{|\gamma|>N} c_\gamma \mathfrak{X}^\gamma) \leq \epsilon$. Il existe un élément $\mu = \sum_\beta a_\beta \mathfrak{Y}^\beta$ de $U(\mathfrak{g}_0) \otimes K$ tel que $\tau_r(\mu) = \sum_{|\gamma|\leq N} c_\gamma \mathfrak{X}^\gamma$. Comme J est dense dans J_r, on peut même choisir μ tel que

$$\nu_r(\lambda) \geq ||\mu||_r - \epsilon.$$

Comme les $\mathfrak{X}^\alpha$ forment une base de $U(\mathfrak{g}_S)$, on a

$$c_\gamma = \sum_{|\beta|=|\gamma|} c(\beta, \gamma)a_\beta.$$

On a alors

$$\begin{aligned} ||\sum_\beta a_\beta \mathfrak{Y}^\beta||_r &\geq \sup_{|\gamma|\leq N} \left| \sum_{|\beta|=|\gamma|} c(\beta, \gamma)a_\beta \right| r^{|\beta|} \\ &= \sup_{|\gamma|\leq N} |c_\gamma|r^{|\gamma|} \\ &= \sup_\gamma |c_\gamma|r^\gamma \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sup_\gamma |c_\gamma| r^\gamma \geq \nu_r(\lambda) \geq \sup_\gamma |c_\gamma| r^\gamma - \epsilon.$$

□

Une conséquence de cette proposition est que la décomposition des éléments de $U_S(\mathfrak{g}, K)_r$ donnée par le théorème 1.3.20 est unique.

On note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie du tore T_0 (la restriction à $\mathbb{Q}_p$ de T). Elle agit par restriction sur $m_S^w(\rho)_r$. La généralisation du lemme 3.4.4 de [**70**] est alors la suivante

Corollaire 1.3.22. — *Pour tout caractère λ de $\mathfrak{t}$, le sous-espace λ-isotypique de $m_S^w(\rho)_r$ est de dimension finie.*

Démonstration. — Le $U(\mathfrak{g}_S)_r$-module $m_S^w(\rho)_r$ est isomorphe à $U_S(\mathfrak{u}_{w,S}^-)_r \otimes_K V_w'$ comme $U(\mathfrak{p}_{w,S})$-module. Nous pouvons choisir la L-base $(\mathfrak{r}_i)$ de $\mathfrak{u}_w^-$ constituée de vecteurs propres pour l'action adjointe de $\mathfrak{t}$. Ainsi dans la base $(\mathfrak{X}^\alpha)$, on a

$$\mathrm{ad}(x) \cdot \mathfrak{X}^\alpha = \sum_{|\alpha'|=|\alpha|} \gamma_{\alpha,\alpha'}(x) \mathfrak{X}^{\alpha'},$$

avec $\gamma_{\alpha,\alpha'}(x) \in K$, lorsque $x \in \mathfrak{t}$. Soit aussi (e_j) une base de V_w' constituée de vecteurs propres de poids γ_i. Si

$$\mu = \sum_{\alpha, 1\leq i\leq k} d_{\alpha,i} \mathfrak{X}^\alpha \otimes e_i \in m_S^w(\rho)_r$$

est un vecteur de poids λ, on doit avoir, d'aprÃ¨s la proposition 1.3.21, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{ad}(x) \cdot \left(\sum_{|\alpha|=n, 1\leq i\leq k} d_{\alpha,i} \mathfrak{X}^\alpha \otimes e_i \right) = \lambda(x) \left(\sum_{|\alpha|=n, 1\leq i\leq k} d_{\alpha,i} \mathfrak{X}^\alpha \otimes e_i \right).$$

Mais on peut alors diagonaliser la représentation de $\mathfrak{t}$ sur le K-espace vectoriel de dimension finie engendré par les $\mathfrak{X}^\alpha$, $|\alpha| = n$. Ainsi on a une égalité

$$\lambda = \gamma_i + \sum n_j \alpha_j$$

où les α_i sont des poids de l'action de $\mathfrak{t}$ sur $\mathfrak{u}_w^-$ et $n = \sum_j n_j$. Or il n'y a qu'un nombre fini de telles écritures, donc un nombre fini de n tels que $d_{i,\alpha} \neq 0$ (où $n = |\alpha|$). Ainsi le sous-espace λ-isotypique de $m_S^w(\rho)_r$ est de dimension finie. □

1.3.5.3. La proposition 3.3.5. — Pour $\frac{1}{p} < r < 1$, on note $\overline{||\cdot||}_r$ la norme quotient sur $D_S(H, K)$ obtenue à partir de $||\cdot||_r$ sur $D(H_0, K)$. Elle induit une filtration décroissante sur l'anneau $D_S(H, K)_r$ de la façon suivante

$$\mathrm{Fil}^s D_S(H, K)_r = \{x \in D_S(H, K)_r, \ \overline{||x||}_r \leq p^{-s}\}.$$

On note $gr^\cdot D_S(H, K)_r$ le groupe gradué associé. La norme $\overline{||\cdot||}_r$ étant sous-multiplicative, il est muni d'une structure de K-algèbre. Si $x \in D_S(H, K)_r$, il existe un unique s tel que $\overline{||x||}_r = p^{-s}$. On appelle partie principale de x et on note $[x]$, l'image de x dans $gr^s D_S(H, K)_r$. On veut montrer qu'il existe $\frac{1}{p} < r < 1$ pour lequel $gr^\cdot D_S(H, K)_r$ est isomorphe à un anneau de polynômes.

D'après [**85**] théorème 4.5, on a un isomorphisme

$$gr^\cdot D(H_0, K)_r = (gr^\cdot K)[X_{11}, \ldots, X_{dm}]$$

où X_{ij} est la partie principale de b_{ij}.

Supposons $r^\kappa < p^{-\frac{1}{p-1}}$ où $\kappa = 2$ si $p = 2$ et $\kappa = 1$ dans les autres cas. Les calculs de [**75**] 3.3.1 montrent que si $t = \sum a_{ij} v_i \mathfrak{r}_j$ est un élément de $\mathfrak{g}_0 \otimes K \subset D(H_0, K)_r$ tel que $||t||_r = 1$, sa partie principale dans $gr^{\cdot} D(H_0, K)_r$ est $\sum_{ij} \overline{a_{ij}} X_{ij}$, où $\overline{a_{ij}}$ est la réduction de a_{ij} modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$.

Choisissons une base $\mathcal{F} = \{F_1, \cdots, F_l\}$ de $\mathfrak{I}_S$ constituée d'éléments de norme 1. Alors le raisonnement de la partie 3.3.2 de [**75**] s'applique à notre situation pour montrer que les $[F]$ pour $F \in \mathcal{F}$ engendrent $gr^{\cdot} I_r$ en tant que $gr^{\cdot} D(H_0, K)_r$-module. Comme la filtration est discontinue et K de valuation discrète, on a un isomorphisme

$$gr^{\cdot}(D_S(H, K)_r) \simeq gr^{\cdot}(D(H_0, K)_r)/gr^{\cdot} I_r.$$

L'anneau $gr^{\cdot} K$ est isomorphe à $\mathbb{F}_K[X, X^{-1}]$ et comme les $\sigma(F_i)$ appartiennent à $\mathbb{F}_K[X_{ij}]$,

$$gr^{\cdot} D_S(H, K)_r \simeq K[X, X^{-1}] \otimes_K (K[X_{ij}]/\langle \sigma(F_i) \rangle).$$

L'anneau $K[X_{ij}]/\langle \sigma(F_i) \rangle$ est le quotient de $K[X_{ij}]$ par un idéal engendré par des formes linéaires, c'est donc lui-même un anneau de polynômes à coefficients dans $\mathrm{gr}^{\cdot} K$. Ainsi l'anneau $\mathrm{gr}^{\cdot} D_S(H, K)_r$ est un anneau de polynômes à coefficients dans $K[X, X^{-1}]$ et l'anneau $D_S(H, K)_r$ est intègre. Un examen de la preuve de la proposition 3.3.5 de [**70**] montre que cela suffit à prouver notre généralisation.

Proposition 1.3.23. — *Pour $\frac{1}{p} < r < 1$ assez proche de 1, l'anneau $D_S(U_w^-, K)_r$ est intègre.*

1.4. Cohomologie localement analytique

1.4.1. Généralités. — Cette partie est consacrée aux définitions et résultats sur la cohomologie localement analytique des groupes de Lie L-analytiques dont nous aurons besoin par la suite. L'approche est très naïve, mais nous suffit dans la mesure où nous considèrerons uniquement des Ext^1. Une théorie beaucoup plus générale de la cohomologie des groupes de Lie L-analytiques est développée par Jan Kohlhaase dans [**63**].

Nous fixons K une extension finie de L et G un groupe de Lie L-analytique. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les représentations localement L-analytiques sur des K-espaces vectoriels et les flèches les applications continues G-équivariantes. Autrement dit, il s'agit des représentations S-analytiques où S est le singleton contenant le plongement de L dans K. Nous nous autorisons, pour ce chapitre seulement, à écrire $L - an$ au lieu de $S - an$.

Soit (ρ, V) un objet de $\mathcal{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $C^n(G, V)$ l'ensemble des applications localement L-analytiques de G^n dans V et ∂_n l'application de $C^n(G, V)$ dans $C^{n+1}(G, V)$ définie par

$$\partial_n f(g_0, \cdots, g_n) = g_0 f(g_1, \cdots, g_n) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \cdots, g_{i-1} g_i, \cdots, g_n) \\ + (-1)^{n+1} f(g_0, \cdots, g_{n-1}),$$

pour $(g_0, \cdots, g_n)$ dans G^{n+1}.

On note alors $Z^n(G, V)$ le noyau de ∂_n, $B^n(G, V)$ l'image de ∂_{n-1} et

$$H^n_{an}(G, V) = Z^n(G, V)/B^n(G, V),$$

on l'appelle le n-ième groupe de cohomologie localement analytique de V.

Soient G et H deux groupes localement L-analytiques, (ρ, V) et (ρ', W) deux représentations localement K-analytiques de G et H respectivement. Soient φ un morphisme de groupes localement analytiques de H dans G et f une application linéaire continue de V dans W tels que

$$\rho' \circ (id \times f) = f \circ \rho \circ (\varphi \times id) : \ H \times V \to W.$$

L'application

$$\begin{aligned} C^n(G,V) &\longrightarrow C^n(H,W) \\ c &\longmapsto f \circ c \circ \varphi \end{aligned}$$

induit un morphisme $(\varphi, f)_*$ de $H^n_{an}(G,V)$ dans $H^n_{an}(H,W)$. Si $\varphi = id$, on le note f_*.

Si H est un sous-groupe localement L-analytique de G, on note res^G_H l'application $(\varphi, f)_*$ où φ est l'inclusion de H dans G et f l'identité.

Si H est distingué dans G on note inf^G_H l'application $(\varphi, f)_*$ dans le cas où φ est l'application quotient de G dans G/H et f l'inclusion de $H^0_{an}(H,V)$ dans V.

Comme en cohomologie des groupes classiques, on a la suite exacte d'inflation-restriction.

Proposition 1.4.1. — *Si H est un sous-groupe localement L-analytique distingué de G, on a une suite exacte*

$$0 \to H^1_{an}(G/H, H^0_{an}(H,V)) \xrightarrow{inf^G_H} H^1_{an}(G,V) \xrightarrow{res^G_H} H^0_{an}(G/H, H^1_{an}(H,V)).$$

Démonstration. — Exactement comme dans le cas de la cohomologie des groupes usuelle. $\square$

Corollaire 1.4.2. — *Si V ou W est de dimension finie, la représentation $(\rho \otimes \rho', V \otimes W)$ est dans $\mathcal{C}$ et l'application*

$$(H^1_{an}(G,V) \otimes H^0_{an}(H,W)) \oplus (H^0_{an}(G,V) \otimes H^1_{an}(H,W)) \xrightarrow{inf^{G\times H}_H \oplus inf^{G\times H}_G} H^1_{an}(G \times H, V \otimes W)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On applique la suite exacte d'inflation-restriction. $\square$

Proposition 1.4.3. — *Soit*

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte stricte de représentations localement analytiques de G. Supposons de plus qu'il existe une section continue (non nécessairement G-équivariante) s de β. On peut construire une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \to H^i_{an}(G,V_1) \xrightarrow{\alpha_*} H^i_{an}(G,V_2) \xrightarrow{\beta_*} H^i_{an}(G,V_3) \xrightarrow{\delta_i} H^{i+1}_{an}(G,V_1) \xrightarrow{\alpha_*} H^{i+1}_{an}(G,V_2)) \xrightarrow{\beta_*} H^{i+1}_{an}(G,V_3) \to \cdots .$$

Démonstration. — De l'existence de s on déduit que la suite

$$0 \to C^n(G,V_1) \xrightarrow{\alpha_*} C^n(G,V_2) \xrightarrow{\beta_*} C^n(G,V_3) \to 0$$

est exacte, et on peut donc appliquer le lemme du serpent au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^n(G,V_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & C^n(G,V_2) & \xrightarrow{\beta_*} & C^n(G,V_3) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{n+1}(G,V_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & C^{n+1}(G,V_2) & \xrightarrow{\beta_*} & C^{n+1}(G,V_3) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

$\square$

Soit H un sous-groupe de Lie localement L-analytique de G et (ρ, V) une représentation localement L-analytique de H.

Notons sh l'application $(\varphi, f)_*$ où φ est l'inclusion de H dans G et f est l'application de $\mathrm{Ind}_H^G(V)^{L-an}$ dans V d'évaluation en l'élément neutre.

***Proposition 1.4.4* ([23], remarque (3) après la prop. 4).** — *L'application sh est un isomorphisme de $H^i_{an}(G, \mathrm{Ind}_H^G(V)^{L-an})$ sur $H^i_{an}(H, V)$.*

Enfin, sous les mêmes notations, si en plus W est une représentation localement analytique de dimension finie de G, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_H^G(V)^{L-an} \otimes_K W & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_H^G(V \otimes W)^{L-an} \\ f \otimes w & \longmapsto & (g \mapsto f(g) \otimes (g^{-1} \cdot w)) \end{array} \tag{1.4.1}$$

est un isomorphisme.

1.4.2. Calcul des Ext^1 entre représentations admissibles. — Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $D(\mathcal{A})$ sa catégorie dérivée. Si A et B sont deux objets de $\mathcal{A}$, on pose

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B) = R^1\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B[1]).$$

Il est immédiat à partir de la définition des morphismes dans la catégorie $D(\mathcal{A})$ que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B)$ est en bijection avec les classes d'extensions dans $\mathcal{A}$

$$0 \to B \to C \to A \to 0,$$

la flèche correspondante étant donnée par

$$[0 \to A] \xleftarrow{\sim} [B \to C] \to [B \to 0],$$

A étant placé en degré 0 et B en degré -1.

La sous-catégorie des représentations localement analytiques admissibles (voir [**85**]) du groupe G est une catégorie abélienne que nous noterons $\mathcal{C}_{adm}$. La sous-catégorie $\mathcal{C}_{adm}(\chi)$ des représentations sur lesquelles le centre Z de G agit via le caractère χ est également abélienne. Schneider et Teitelbaum ont montré que le foncteur $V \mapsto V'_b$ (le dual continu muni de la topologie forte, voir [**78**]) induit une anti-équivalence de catégories entre $\mathcal{C}_{adm}$ et la catégorie, que nous notons $\mathcal{C}'$ des $D(G, K)$-modules coadmissibles. Dans la suite nous noterons $\mathcal{D}' = D(\mathcal{C}')$ et $\mathcal{D}(\chi)'$ la sous-catégorie triangulée, correspondant à la sous-catégorie $\mathcal{C}'(\chi)$ duale de $\mathcal{C}_{adm}(\chi)$.

Si (ρ_V, V) est un objet de $\mathcal{C}_{adm}$ et (ρ_W, W) une représentation localement analytique de dimension finie, l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(W, V) \simeq W^\vee \otimes V \simeq V \oplus \cdots \oplus V$$

montre que l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(W, V)$ est également un objet de $\mathcal{C}_{adm}$. On peut donc parler de ses groupes de cohomologie localement analytique.

Soit c un élément de $Z^1(G, \mathrm{Hom}(W, V))$. Posons alors $U = W \oplus V$ et munissons le de l'action de G définie par

$$\rho_c(g)(w, v) = (\rho_W(g)w, \rho_V(g)v + c(g)(\rho_W(g)w)).$$

Pour voir que (ρ, U) est une représentation localement analytique il suffit essentiellement de vérifier qu'il s'agit bien d'une action de groupe :

$$\begin{aligned}
\rho_c(gh)(w,v) &= (\rho_W(gh)w, \rho_V(gh)v + c(gh)(\rho_W(gh)w)) \\
&= (\rho_W(g)(\rho_W(h)w), \rho_V(g)(\rho_V(h)v) \\
&+ \rho_V(g)c(h)(\rho_W(h)w) + c(g)(\rho_W(gh)w)) \\
&= \rho_c(g)(\rho_W(h)w, \rho_V(h)v + c(h)(\rho_W(h)w)) \\
&= \rho_c(g)(\rho_c(h)(w,v))
\end{aligned}$$

Il est immédiat de voir que l'on obtient une suite exacte stricte, donc une extension dans $\mathcal{C}_{adm}$

$$0 \to V \to U \to W \to 0,$$

et que deux cocycles dont la différence est un cobord donnent des extensions équivalentes, d'où une application

$$H^1_{an}(G, \mathrm{Hom}(W,V)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{adm}}(W,V).$$

Proposition 1.4.5. — *Cette application est un isomorphisme de K-espaces vectoriels. De plus un cocycle a pour image une extension ayant un caractère central si et seulement si ce cocycle s'annule sur le centre Z de G. D'où un isomorphisme*

$$H^1(G/Z, \mathrm{Hom}(W,V)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{adm}(\chi)}(W,V).$$

Démonstration. — Il faut construire un inverse à l'application $[c] \to \rho_c$. Si (ρ, U) est une telle extension, comme W est de dimension finie, il existe une section continue s (non nécessairement G-équivariante) $W \hookrightarrow U$, d'où une décomposition $U = V \oplus s(W)$. Si $g \in G$ et $w \in W$, on pose

$$c_\rho(w) = \rho(g)s(\rho_W(g)^{-1}w) - s(w) \in V.$$

C'est un élément de $Z^1(G, \mathrm{Hom}(W,V))$ car

$$\begin{aligned}
c_\rho(gh)(w) &= \rho(gh)s(\rho_W(gh)^{-1}w) - s(w) \\
&= \rho(g)(\rho(h)s(\rho_W(h)^{-1}\rho_W(g)^{-1}w) - s(\rho_W(g)^{-1}w)) + \rho(g)s(\rho_W(g)^{-1}w) - w \\
&= \rho(g)c(h)(w) + c(g)(w).
\end{aligned}$$

De plus la classe $[c_\rho] \in H^1_{an}(G, \mathrm{Hom}(W,V))$ ne dépend pas du choix de la section s car si s_1 et s_2 sont de telles sections, $s_1 - s_2$ est une application linéaire continue de W dans V et les deux cocycles ainsi obtenus diffèrent de

$$g \mapsto \rho(g) \circ (s_1 - s_2) \circ \rho_W(g)^{-1} - (s_1 - s_2)$$

qui est un cobord. Enfin il est immédiat de vérifier que les application $[c] \mapsto \rho_{[c]}$ et $\rho \mapsto [c_\rho]$ sont réciproques l'une de l'autre.

Si l'on veut qu'une extension $(\rho_{[c]}, U)$ ait un caractère central χ, il faut déjà qu'il en soit de même de V et W. Ensuite il faut vérifier que pour $z \in Z(G)$

$$\begin{aligned}
\rho(z)(v,w) &= \chi(z)(v,w) \\
(\rho_V(z)v, \rho_W(z) + c(z)(\rho_W(z)w)) &= \chi(z)(v,w) \\
(\chi(z)v, \chi(z)w + c(z)(\rho_W(z)w)) &= (\chi(z)v, \chi(z)w)
\end{aligned}$$

ce qui est encore équivalent à ce que $c(z) = 0$, ou encore que $c(gz) = c(g)$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire à $[c] \in H^1_{an}(G/Z, \mathrm{Hom}(W,V))$. $\square$

1.5. Construction de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(L)$

Fixons désormais un vecteur $\vec{k} = (k_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{P}}$ d'entiers ≥ 2 et reprenons les notations de la section 2.3. Nous noterons également $\overline{G} = \mathrm{PGL}_2(L)$, $\overline{P}$ et $\overline{T}$ les images de P et T dans $\overline{G}$.

1.5.1. Les représentations de Steinberg à coefficients. — Soit $\chi_{\vec{k}}$ le caractère du groupe P à valeurs dans K défini par

$$\chi_{\vec{k}}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \prod_{\sigma\in\mathcal{P}} \sigma(d)^{k_\sigma - 2}.$$

Avec les conventions de la section 1.3.2, le caractère $\chi_{\vec{k}}$ est $\mathbb{Q}_p$-algébrique. On a

$$c_\sigma(\chi_{\vec{k}}) = k_\sigma - 2 \geq 0.$$

Le sous-espace des vecteurs localement algébriques de la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}$ est isomorphe à

$$V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{Ind}_P^G(1)^\infty,$$

qui est de longeur 2.

Posons $\Sigma(\vec{k}) = \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}/V(\chi_{\vec{k}})$. C'est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique fortement admissible, et ses vecteurs localement algébriques forment une sous-représentation irréductible isomorphe à $V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{St}$.

Lemme 1.5.1. — *L'isomorphisme J du théorème 1.3.13 induit un isomorphisme P-équivariant*

$$H_0(N, \Sigma(\vec{k})) \simeq \bigoplus_{S\subset\mathcal{P}, S\neq\varnothing} \chi_{\vec{k}} \prod_{\sigma\in S} \epsilon_\sigma^{k_\sigma - 1}$$

Démonstration. — C'est un corollaire du théorème 1.3.13. □

Proposition 1.5.2. — *On a* $\mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k}), \Sigma(\vec{k})) = K$.

Démonstration. — Soit ϕ un endomorphisme G-équivariant de $\Sigma(\vec{k})$. Alors pour tout σ, $\mathfrak{z}_\sigma \circ \phi$ est un morphisme G-équivariant de $\Sigma(\vec{k})$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}}\epsilon_\sigma^{k_\sigma-1})^{\mathbb{Q}_p-an}$. Or, par réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k}), \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}}\epsilon_\sigma^{k_\sigma-1})^{\mathbb{Q}_p-an}) = \mathrm{Hom}_P(H_0(N, \Sigma(\vec{k})), \chi_{\vec{k}}\epsilon_\sigma^{k_\sigma-1})$$

qui est de dimension 1 d'après le calcul explicite du $H_0(N, \Sigma(\vec{k}))$. Ainsi $\mathfrak{z}_\sigma \circ \phi = \alpha_\sigma \mathfrak{z}_\sigma$ pour un $\alpha_\sigma \in K$. Le même raisonnement nous prouve que

$$\mathfrak{z}_{\sigma'}\mathfrak{z}_\sigma \circ \phi = \alpha_{\sigma,\sigma'}\mathfrak{z}_{\sigma'}\mathfrak{z}_\sigma$$

pour tout $\sigma \neq \sigma'$. Comme $\mathfrak{z}_\sigma$ et $\mathfrak{z}_{\sigma'}$ commutent et $\mathfrak{z}_\sigma\mathfrak{z}_{\sigma'}$ est non nul car surjectif, on a $\alpha_{\sigma,\sigma'} = \alpha_{\sigma',\sigma}$, mais évidemment

$$\alpha_\sigma = \alpha_{\sigma,\sigma'} = \alpha_{\sigma'}.$$

Ainsi il existe $\alpha \in K$ tel que pour tout σ, $\mathfrak{z}_\sigma \circ (\phi - \alpha) = 0$. Finalement $\phi - \alpha$ est un morphisme G-équivariant de $\Sigma(\vec{k})$ dans $V(\chi_{\vec{k}}) \otimes_K \mathrm{St} \subset \mathrm{Ind}_P^G(|\epsilon|\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}$. Et toujours d'après la forme de $H_0(N, \Sigma(\vec{k}))$, il n'y a pas de morphisme G-équivariant de $\Sigma(\vec{k})$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(|\epsilon|\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}$, donc $\phi = \alpha$. □

Proposition 1.5.3. — *Les $\Sigma(\vec{k})$ sont tous non isomorphes deux à deux.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un isomorphisme ϕ entre $\Sigma(\vec{k})$ et $\Sigma(\vec{k}')$. Il induit un isomorphisme entre les sous-espaces de vecteurs localement algébriques, c'est-à-dire entre $\mathrm{St} \otimes_E V(\chi_{\vec{k}})$ et $\mathrm{St} \otimes_E V(\chi_{\vec{k}'})$. Or on sait par [**73**] Théorème 1 que $V(\chi_{\vec{k}})$ et $V(\chi_{\vec{k}'})$ doivent être isomorphes, ce qui implique $\vec{k} = \vec{k}'$ par la classification des représentations algébriques de G. □

Malgré ses propriétés d'entrelacement, $\Sigma(\vec{k})$ contient des sous-espaces intéressants. Soit $\sigma \in \mathcal{P}$. Nous avons défini dans la section 1.3.3 le caractère $\chi_{\vec{k}}^{\sigma}$ de P. Il est donné par

$$\chi_{\vec{k}}^{\sigma}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \prod_{\sigma' \neq \sigma} \sigma'(d)^{k_{\sigma'}-2}.$$

On pose

$$\Sigma(\vec{k})_{\sigma} = [\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k},\sigma})^{\sigma-an}/V(\chi_{\vec{k},\sigma})] \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma}),$$

où $V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma})$ est la représentation algébrique de la définition 1.3.7. On a alors $V(\chi_{\vec{k}}) = V(\chi_{\vec{k},\sigma}) \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma})$.
D'après le théorème 1.3.12, $\Sigma(\vec{k})_{\sigma}$ s'insère dans la suite exacte

$$0 \to V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{St} \to \Sigma(\vec{k})_{\sigma} \xrightarrow{\mathfrak{z}_{\sigma}} I_{\mathcal{P}}(\chi_{\vec{k}}\epsilon_{\sigma}^{k_{\sigma}-1}) \to 0. \tag{1.5.1}$$

On sait alors par le théorème 1.3.17 qu'elle est non scindée.

On a une application de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques

$$\tau_{\sigma} : \begin{array}{ccc} (\mathrm{Ind}_P^G\chi_{\vec{k},\sigma})^{\sigma-an} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma}) & \longrightarrow & (\mathrm{Ind}_P^G\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an} \\ f \otimes g & \longmapsto & fg \end{array}$$

qui induit une application

$$\tau_{\sigma} : \Sigma(\vec{k})_{\sigma} \to \Sigma(\vec{k}).$$

L'application composée

$$V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{St} \hookrightarrow \Sigma(\vec{k})_{\sigma} \xrightarrow{\tau_{\sigma}} \Sigma(\vec{k})$$

est juste l'inclusion dans $\Sigma(\vec{k})$, donc $\tau_{\sigma} \neq 0$.

Lemme 1.5.4. — *Le morphisme J du théorème 1.3.13 induit un isomorphisme P-équivariant*

$$H_0(N, \Sigma(\vec{k})_{\sigma}) = \chi_{\vec{k}}\epsilon_{\sigma}^{k_{\sigma}-1}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la définition de $\Sigma(\vec{k})_{\sigma}$ et du corollaire 1.3.15. □

Proposition 1.5.5. — *L'application τ_{σ} est injective et c'est, à un scalaire près, l'unique application G-équivariante de $\Sigma(\vec{k})_{\sigma}$ dans $\Sigma(\vec{k})$.*

Démonstration. — Soit $f : \Sigma(\vec{k})_{\sigma} \to \Sigma(\vec{k})$ une application G-équivariante. En la composant avec $\mathfrak{z}_{\sigma'}$, on obtient un élément de

$$\mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k})_{\sigma}, \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}}\epsilon_{\sigma'}^{k_{\sigma'}-1})^{\mathbb{Q}_p-an}) = \mathrm{Hom}_T(H_0(N, \Sigma(\vec{k})_{\sigma}), \chi_{\vec{k}}\epsilon_{\sigma'}^{k_{\sigma'}-1}).$$

Donc il existe un scalaire $a \in E$ tel que $\mathfrak{z}_{\sigma} \circ f = a\mathfrak{z}_{\sigma} \circ \tau_{\sigma}$ et pour $\sigma' \neq \sigma$, $\mathfrak{z}_{\sigma'} \circ f = 0$. Ainsi, $f - a\tau_{\sigma}$ est un morphisme G-équivariant de $\Sigma(\vec{k})_{\sigma}$ dans $V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{St} \subset \mathrm{Ind}_P^G(|\epsilon|\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}$ et on voit comme avant qu'il n'y a pas de morphisme G-équivariant non nul de $\Sigma(\vec{k})_{\sigma}$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(|\epsilon|)^{\mathbb{Q}_p-an}$. D'où $f = a\tau_{\sigma}$.
Si l'application τ_{σ} n'était pas injective, comme la composée

$$V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{St} \hookrightarrow \Sigma(\vec{k})_{\sigma} \xrightarrow{\tau_{\sigma}} \Sigma(\vec{k})$$

est non nulle, son noyau est nécessairement isomorphe à $I_{\mathcal{P}}(\chi\epsilon_{\sigma}^{k_{\sigma}-1})$. Mais c'est impossible car cela contredit le fait que la suite exacte (1.5.1) est non scindée. □

1.5.2. Les représentations $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$. — Soit $\vec{\mathcal{L}} \in K^d$. On fixe, dans cette partie, une énumération σ_1, ..., σ_d des plongements de L dans K.

On désigne par $\psi(\vec{\mathcal{L}})$ la représentation de P sur K^{d+1} donnée par

$$\psi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \log_{\sigma_1,\mathcal{L}_{\sigma_1}}(ad^{-1}) & \log_{\sigma_2,\mathcal{L}_{\sigma_2}}(ad^{-1}) & \dots & \log_{\sigma_d,\mathcal{L}_{\sigma_d}}(ad^{-1}) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi une suite exacte de représentations de G

$$0 \to \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an} \to \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}} \otimes \psi(\vec{\mathcal{L}}))^{\mathbb{Q}_p-an} \xrightarrow{s} (\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an})^d \to 0.$$

On pose alors

$$\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}) = s^{-1}(V(\chi_{\vec{k}})^d)/V(\chi_{\vec{k}}).$$

D'où une suite exacte

$$0 \to \Sigma(\vec{k}) \to \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}) \to V(\chi_{\vec{k}})^d \to 0. \tag{1.5.2}$$

La représentation $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ est fortement admissible et a pour caractère central

$$\epsilon(\vec{k}) : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \longmapsto \prod_{\sigma\in\mathcal{F}} \sigma(a)^{k_\sigma-2}.$$

Nous travaillons donc à présent dans la catégorie $\mathcal{C}_{adm}(\epsilon(\vec{k}))$.

On note e_0, e_1, $\dots$, e_d la base canonique de K^{d+1}, et $\psi(\vec{\mathcal{L}})_i$ la sous-représentation de $\psi(\vec{\mathcal{L}})$ d'espace $Ke_0 \oplus Ke_i$. Alors on a

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k},\sigma_i})^{\sigma_i-an} \otimes V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}) \to \mathrm{Ind}_P^G(\psi(\vec{\mathcal{L}})_i \otimes \chi_{\vec{k},\sigma_i})^{\sigma_i-an} \otimes V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}) \\ \xrightarrow{s_i} \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k},\sigma_i})^{\sigma_i-an} \otimes V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}) \to 0 \end{aligned}$$

et on pose $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})_{\sigma_i} = s_i^{-1}(V(\chi_{\vec{k}}))/V(\chi_{\vec{k}})$. Cette représentation s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \Sigma(\vec{k})_{\sigma_i} \to \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})_{\sigma_i} \to V(\chi_{\vec{k}}) \to 0 \tag{1.5.3}$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma(\vec{k})_{\sigma_i} & \longrightarrow & \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})_{\sigma_i} & \longrightarrow & V(\chi_{\vec{k}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \tau_{\sigma_i}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma(\vec{k}) & \longrightarrow & \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}) & \longrightarrow & V(\chi_{\vec{k}})^d & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les deux lignes sont exactes et la flèche verticale la plus à droite est l'inclusion dans le i-ième facteur.

Remarque 1.5.6. — Dans le cas où $L = \mathbb{Q}_p$, on écrit $\vec{k} = k$ et $\vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. La représentation $\Sigma(k,\mathcal{L})$ est alors presque la représentation définie par Breuil dans [**14**]. En fait la représentation de Breuil est $\Sigma(k,\mathcal{L}) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$. Dans notre cas, la représentation susceptible d'avoir un complété unitaire intéressant serait $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}) \otimes |\det|^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}}$. La torsion par ce caractère ne change rien aux résultats de cet article, mais complique les notations. C'est pourquoi nous définissons ainsi $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$.

1.5.3. Le cocycle associé à $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$. — Pour alléger l'écriture, nous notons désormais $\mathrm{Ext}^i_{\overline{G}}$ au lieu de $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}_{adm}(\epsilon(\vec{k}))}$, toutes les représentations considérées ayant $\epsilon(\vec{k})$ pour caractère central.

D'après la proposition 1.4.5,

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}) \xrightarrow{\sim} H^1_{an}(\overline{G}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes_K (\mathrm{Ind}_P^G \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}).$$

L'utilisation de l'isomorphisme (1.4.1) et de la proposition 1.4.4 donne alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}) &\xrightarrow{\sim} H^1_{an}(\overline{G}, \mathrm{Ind}_P^G(V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}) \\ &= H^1_{an}(\overline{P}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})\end{aligned}$$

L'espace $H^1_{an}(\overline{P}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ s'insère dans la suite d'inflation-restriction (proposition 1.4.1)

$$\begin{aligned}0 \to H^1_{an}(\overline{T}, H^0_{an}(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})) \to H^1_{an}(\overline{P}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \\ \to H^0_{an}(\overline{T}, H^1_{an}(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}))\end{aligned}$$

Par dérivation des cocycles, on obtient un morphisme $\overline{T}$-équivariant

$$H^1_{an}(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \to H^1(\mathfrak{n}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}).$$

Lemme 1.5.7. — *Son noyau est l'ensemble des cocycles lisses à valeurs dans les $\mathfrak{n}$-invariants de $V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}$.*

Démonstration. — Si un cocycle c est dans le noyau de cette flèche, sa différentielle est nulle en l'élément neutre (e, e) de $N \times N$. Par N-invariance, la différentielle de c en tout point de la diagonale de $N \times N$ est nulle. Alors si (n_0, n_1) est un élément quelconque de $N \times N$, la relation de cocycle donne pour tout $n \in N$,

$$c(n_0, n_1 + n) - c(n_0, n_1) = c(n_1 + n, n_1),$$

et donc la différentielle de c en (n_0, n_1) est nulle sur le sous-espace $\{0\} \oplus \mathfrak{n}$ de l'espace tangent en (n_0, n_1). Symétriquement on peut montrer que cette différentielle est nulle sur le sous-espace $\mathfrak{n} \oplus \{0\}$, donc que la différentielle est nulle en (n_0, n_1). Ainsi la différentielle de c est nulle en tout point de $N \times N$, donc c est une fonction localement constante. Enfin la différentiation selon n de la relation

$$c(n + n_0, n + n_1) = n \cdot c(n_0, n_1)$$

montre que c est à valeurs dans $(V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})^{\mathfrak{n}}$. □

Lemme 1.5.8. — *La représentation $H^1_{an}(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ n'a pas de point fixe sous l'action de T. De plus $H^0_{an}(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ est de dimension 1, muni de l'action triviale de T.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N. D'après le lemme 1.5.7 le morphisme T-équivariant

$$H^1_{an}(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \to H^1(\mathfrak{n}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}).$$

a pour noyau l'ensemble des cocycles lisses à valeurs dans les $\mathfrak{n}$-invariants de $V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}$, c'est-à-dire la représentation triviale 1. Or les seuls morphismes continus de N dans K sont donnés par les différents morphismes de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels et ne sont donc pas lisses. Ainsi $H^1_{an}(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ est un sous-espace de $H^1(\mathfrak{n}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$. Par la formule de Künneth pour la cohomologie d'algèbres de Lie ([**10**] §1.3) et la décomposition $\mathfrak{n} = \bigoplus \mathfrak{n}_\sigma$, ce dernier s'identifie à

$$H^1(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} \left(\bigotimes_{\sigma' \in \mathcal{P}} H^{\delta_{\sigma,\sigma'}}(\mathfrak{n}_{\sigma,K}, V(\chi_{\vec{k},\sigma'})') \right) \otimes \chi_{\vec{k}}.$$

Mais T agit comme $(\epsilon_\sigma)^{-1}\chi_{\vec{k},\sigma}(\chi^w_{\vec{k},\sigma})^{-1} = \epsilon_\sigma^{1-k}$ sur chaque composante et n'a donc aucun point fixe. L'assertion sur $H^0_{an}(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ se déduit directement de la proposition 1.3.8. $\square$

Fixons un isomorphisme entre $H^0(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ et K. Dans la section 1.3.2, nous avons décrit $V(\chi_{\vec{k}})$ comme un espace de fonctions algébriques sur $\mathrm{GL}_2(L)$. En utilisant cette description on identifie $1 \in K$ avec la forme $e : f \to f(1)$. Nous obtenons alors un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}) \simeq H^1_{an}(\overline{T}, 1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p-an}(\overline{T}, K).$$

C'est un K-espace vectoriel isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p-an}(L^\times, K)$, donc de dimension $d+1$ et ayant pour base $\log_{\sigma_1,0}$, ..., $\log_{\sigma_d,0}$, val.

Proposition 1.5.9. — *On a*

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}})) = \mathrm{Ext}^2_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}})) = 0.$$

Démonstration. — En utilisant [**23**] théorème 3, on a

$$\mathrm{Ext}^i_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}})) = H^i(\mathfrak{sl}_{2,L}, V(\chi_{\vec{k}})^\vee \otimes V(\chi_{\vec{k}}))$$

et ce dernier espace de cohomologie est nul pour $i=1$ et $i=2$ d'après les premier et second théorèmes de Whitehead ([**90**], corollaires 7.8.10 et 7.8.12). $\square$

En utilisant la suite exacte longue associée à

$$0 \to V(\chi_{\vec{k}}) \to \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an} \xrightarrow{q} \Sigma(\vec{k}) \to 0,$$

et la proposition 1.5.9, on obtient un isomorphisme

$$q_* : \mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})).$$

Nous avons, au final, un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p-an}(\overline{T}, K). \tag{1.5.4}$$

Soit h l'unique vecteur de plus haut poids de $V(\chi_{\vec{k}})$ tel que $e(h) = 1$. Cet isomorphisme est donné explicitement par

$$c \mapsto [t \mapsto \chi_{\vec{k}}(t)^{-1}[c(t)\cdot h](1)].$$

Proposition 1.5.10. — *L'image du cocycle de l'extension* (1.5.2) *par cet isomorphisme est le morphisme de $\overline{T}$ dans K^d défini par*

$$f\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = (\log_{\sigma,\mathcal{L}_\sigma}(ad^{-1}))_{\sigma\in\mathcal{P}},$$

autrement dit le morphisme $(\log_{\sigma,0} + \mathcal{L}_\sigma \mathrm{val})_{\sigma\in\mathcal{P}}$.

Démonstration. — Grâce à l'isomorphisme q_*, on est réduit à calculer la classe de l'extension

$$0 \to (\mathrm{Ind}_P^G \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an} \to s^{-1}(V(\chi_{\vec{k}})^d) \to V(\chi_{\vec{k}})^d \to 0.$$

Notons c un cocycle de $H^1_{an}(\mathrm{PGL}_2(L), V(\chi_{\vec{k}})'^d \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an})$ correspondant à cette extension. Pour tout g, $c(g)$ est donc une application linéaire de $V(\chi_{\vec{k}})^d$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p-an}$. Sur les cocycles, la flèche (1.5.4) est

$$c \longmapsto (b \mapsto \chi_{\vec{k}}(b)^{-1}[c(b)\cdot e](1)).$$

Soit $h_i = (0, \ldots, h, \ldots, 0)$, h étant à la i-ème place. Si f_i est un antécédent de h_i dans $s^{-1}(V(\chi_{\vec{k}})^d)$, on a, à un cobord près, que

$$c(g)\cdot h_i = f_i(g^{-1}\cdot) - f_i.$$

Donc finalement l'image de c est

$$m = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto (\chi_{\vec{k}}(m)^{-1}[f(m^{-1}) - f(1)])_i = (\log_{\sigma_i, \mathcal{L}_{\sigma_i}}(ad^{-1}))_i.$$

□

Corollaire 1.5.11. — *Il n'y a pas d'application G-équivariante non nulle $V(\chi_{\vec{k}}) \to \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ et*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_G(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) = 1,$$

un générateur étant donné par l'image de $\mathrm{val} \in \mathrm{Ext}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}))$.

Démonstration. — En effet, on a une suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) \to \mathrm{Hom}_G(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}})^d)$$
$$\xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_G(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})) \to \mathrm{Ext}^1_G(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) \to 0$$

Or si j_i est l'injection G-équivariante $V(\chi_{\vec{k}}) \hookrightarrow V(\chi_{\vec{k}})^d$ dans le i-ième facteur, on a $\delta(j_i) = \log_{\sigma_i, \mathcal{L}_i}$. Donc δ est injective et son image ne contient pas val. Le corollaire en découle. □

Corollaire 1.5.12. — *Pour $\sigma \in \mathcal{P}$,* $\dim \mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})_\sigma, \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) = 1$.

Démonstration. — En effet on a d'après le corollaire précédent

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})_\sigma, \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) \to \mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k})_\sigma, \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})).$$

De plus, une application de $\Sigma(\vec{k})_\sigma$ dans $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ se factorise nécessairement par $\Sigma(\vec{k})$ et on sait qu'il s'agit donc d'un multiple de τ_σ. □

Nous pourrions prouver immédiatement le résultat suivant, mais comme il est également conséquence de notre théorème principal, nous nous contentons de l'énoncer.

***Proposition 1.5.13* (voir corollaire 1.6.4).** — *Les représentations $\Sigma(\vec{k}_1, \vec{\mathcal{L}}_1)$ et $\Sigma(\vec{k}_2, \vec{\mathcal{L}}_2)$ sont isomorphes si et seulement si $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ et $\vec{\mathcal{L}}_1 = \vec{\mathcal{L}}_2$.*

1.5.4. Extensions entre représentations localement algébriques. — Soit V une représentation irréductible de dimension finie de G. L'opération $V \otimes$ induit un morphisme

$$\mathrm{Ext}^1_G(1, \mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_G(V, V \otimes \mathrm{St}).$$

Proposition 1.5.14. — *Ce morphisme est un isomorphisme.*

Démonstration. — En effet on a

$$\mathrm{Ext}^1_G(V, V \otimes \mathrm{St}) = H^1_{an}(\overline{G}, (V \otimes V') \otimes \mathrm{St}).$$

Or la théorie des représentations des groupes algébriques nous apprend que $V \otimes V'$ est une somme directe de représentations irréductibles. De plus, comme V est irréductible, d'après le lemme de Schur, la représentation triviale apparaît une unique fois dans cette décomposition. Au final

$$\mathrm{Ext}^1_G(V, V \otimes \mathrm{St}) = \mathrm{Ext}^1_G(1, \mathrm{St}) \oplus (\bigoplus_\chi H^1_{an}(G, \mathrm{St} \otimes V(\chi)),$$

où les χ apparaissant dans la somme de droite sont tous distincts du caractère trivial. Il nous reste donc à prouver que $H^1_{an}(\overline{G}, \mathrm{St} \otimes V(\chi))$ est nul lorsque χ n'est pas le caractère trivial. Or il se trouve que d'après le théorème de décomposition des induites 1.3.12, $\mathrm{St} \otimes V(\chi)$ est un sous-espace de l'induite localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\mathrm{Ind}_P^G(\chi|\epsilon|)^{\mathbb{Q}_p-an}$ et que le quotient de cette induite par $\mathrm{St}\otimes V(\chi)$ n'a pas de point fixe sous l'action de G. Ainsi on a une injection

$$H^1_{an}(\overline{G},\mathrm{St}\otimes V(\chi))\hookrightarrow H^1_{an}(\overline{G},\mathrm{Ind}_P^G(\chi|\epsilon|)^{\mathbb{Q}_p-an}).$$

Il est maintenant facile de voir que les $H^i_{an}(N,\chi|\epsilon|)$ sont des sommes de caractères localement algébriques de T dont la partie lisse est toujours $|\epsilon|$. Ainsi $H^p_{an}(\overline{T},H^q(N,\chi|\epsilon|))=0$ pour tous les p et q, et donc $H^1_{an}(\overline{G},\mathrm{Ind}_P^G(\chi|\epsilon|)^{\mathbb{Q}_p-an})=0$. □

Il reste maintenant à déterminer $\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}1,\mathrm{St})$.

Proposition 1.5.15. — *Si V est une représentation lisse de dimension finie et W une représentation irréductible lisse de dimension infinie de G de même caractère central, alors le groupe $\mathrm{Ext}^1(V,W)$ dans la catégorie des représentations localement analytiques admissibles est le même que dans la catégorie des représentations lisses admissibles ou que dans la catégorie des représentations lisses.*

Démonstration. — Il suffit en fait de prouver que si U est une représentation localement analytique de la forme

$$0\to W\to U\to V\to 0,$$

alors U est lisse. En effet si ce n'était pas le cas, on aurait $U^{\mathfrak{g}}\subsetneq U$. Ainsi en appliquant la suite exacte longue provenant du foncteur $H^0(\mathfrak{g},\cdot)$, on a une suite exacte G-équivariante

$$0\to W^{\mathfrak{g}}\to U^{\mathfrak{g}}\to V^{\mathfrak{g}}\to H^1(\mathfrak{g},W)$$

Or comme V et W sont lisses, $W^{\mathfrak{g}}=W$, $V^{\mathfrak{g}}=V$ et $H^1(\mathfrak{g},W)=W$. Comme W est irréductible et V de dimension finie, la flèche $V^{\mathfrak{g}}\to H^1(\mathfrak{g},W)$ est nécessairement nulle, d'où la contradiction. □

Corollaire 1.5.16. — *On a* $\dim\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}),V(\chi_{\vec{k}})\otimes\mathrm{St})=1$ *et la flèche*

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}),\mathrm{St}\otimes V(\chi_{\vec{k}}))\to\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}),\Sigma(\vec{k}))$$

induite par l'inclusion $V(\chi_{\vec{k}})\otimes\mathrm{St}\to\Sigma(\vec{k})$ est injective, son image est le sous-espace de dimension 1 engendré par le cocycle val.

Remarque 1.5.17. — On peut remarquer que le cocycle $\mathrm{val}\in\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}),\Sigma(\vec{k}))$ est l'image d'un cocycle de $\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(1,\mathrm{St})$ via l'injection

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(1,\mathrm{St})\simeq\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}),\mathrm{St}\otimes_K V(\chi_{\vec{k}}))\hookrightarrow\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}),\Sigma(\vec{k}))$$

et qui est indépendant de $\vec{k}$. Nous noterons donc également $\mathrm{val}\in\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(1,\mathrm{St})$.

1.6. Le foncteur $D_{\vec{k}}$

1.6.1. Construction du (φ,N,L,K)-module filtré. — L'objet de cette partie est de construire le (φ,N,L,K)-module filtré $D_{\vec{k}}(\Sigma)$ de l'introduction où Σ est une représentation localement analytique admissible de caractère central $\epsilon(\vec{k})$. Dans ce but, nous construisons dans un premier temps un objet $\mathcal{H}_0(\vec{k})$ dans la catégorie dérivée des $D_{\mathbb{Q}_p}(G,K)$-modules coadmissibles que nous munissons d'endomorphismes φ et N, ainsi que de morphismes $\mathcal{F}^i:\mathrm{Fil}^i(\mathcal{H}_0(\vec{k})\otimes_{L_0}L)\to\mathcal{H}_0(\vec{k})\otimes_{L_0}L$ pour tout $i\in\mathbb{Z}$.

On note $D_{\mathbb{Q}_p}(G,K)$ l'algèbre des distributions $\mathbb{Q}_p$-analytiques sur G. On note $\mathcal{C}_{\vec{k}}$ la catégorie abélienne de ces $D_{\mathbb{Q}_p}(G,K)$-modules coadmissibles dont le caractère central est $\epsilon(\vec{k})^{-1}$ et $\mathcal{D}_{\vec{k}}$ sa catégorie dérivée.

On définit $\mathcal{H}_0(\vec{k}) = L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})' \oplus \mathrm{St}'_{L_0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})'[-1]$. L'endomorphisme φ est l'élément $\varphi_0 \oplus \varphi_1[-1]$ de $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\mathcal{H}_0(\vec{k}))$ où φ_i est l'unique endomorphisme K-linéaire, L_0-semi-linéaire coïncidant avec la multiplication par $p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}}$ (resp. $p^{\frac{|\vec{k}|}{2d}}$) sur $V(\chi_{\vec{k}})'$ (resp. $\mathrm{St}'_{L_0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})'$).

L'endomorphisme N est l'image de l'élément $-\frac{1}{2}\mathrm{val} \in \mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(1, \mathrm{St})$ par

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(1, \mathrm{St}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(\mathrm{St}'_{L_0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})', V(\chi_{\vec{k}})' \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0),$$

le premier isomorphisme provenant de la proposition 1.5.14 et la deuxième flèche de l'opération $\otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0$ en remarquant que $\mathrm{St}_{L_0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}}) \simeq (\mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0$.

Les endomorphismes φ et N ainsi obtenus vérifient clairement la relation $N\varphi = p\varphi N$.

Enfin, on pose $\mathcal{H}(\vec{k}) = \mathcal{H}_0(\vec{k}) \otimes_{L_0} L$, $\mathcal{H}(\vec{k})_\sigma = \mathcal{H}(\vec{k}) \otimes_{L,\sigma} K$ et on définit des objets $\mathrm{Fil}^i\mathcal{H}(\vec{k})$ de $\mathcal{D}_{\vec{k}}$ et des flèches $\mathcal{F}^i : \mathrm{Fil}^i\mathcal{H}(\vec{k}) \to \mathcal{H}(\vec{k}) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(\vec{k})_\sigma$ par

$$\mathrm{Fil}^i\mathcal{H}(\vec{k}) = \begin{cases} \mathcal{H}(\vec{k}) & \text{si } i \leq 0 \\ \bigoplus_{\sigma, i \leq k_\sigma - 1} \Sigma(\vec{k})'_\sigma[-1] & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

On a alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k})'_\sigma[-1], \mathcal{H}(\vec{k})_\sigma) = \mathrm{Hom}_{\overline{G}}(\mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})_\sigma) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\overline{G}}(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})_\sigma).$$

Pour $i \leq k_\sigma - 1$, on définit $\mathcal{F}^i_\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k})'_\sigma[-1], \mathcal{H}(\vec{k})_\sigma)$ par $(-2j_\sigma, -\log_{\sigma,0})$ où j_σ est la composée de l'inclusion naturelle de $\mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})$ dans $\Sigma(\vec{k})_\sigma$ et de τ_σ définie en 1.5.1 et les éléments $\log_{\sigma,0}$ ont été définis dans la section 1.5.3. La flèche $\mathcal{F}^i$ est alors l'identité pour $i \leq 0$ et $\bigoplus_{i \leq k_\sigma - 1} \mathcal{F}^i_\sigma$ pour $i \geq 1$. Ceci implique en particulier que $\mathcal{F}^i = 0$ pour $i \geq \max(k_\sigma)$.

Si Σ est un objet de $\mathcal{C}_{adm}(\epsilon(\vec{k}))$, on peut munir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\vec{k})}(\Sigma'[-1], \mathrm{Fil}^i(\mathcal{H}(\vec{k})))$ d'une structure de L-espace vectoriel. On écrit en effet, pour $i \geq 1$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'[-1], \mathrm{Fil}^i(\mathcal{H}(\vec{k}))) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'[-1], \mathrm{Fil}^i(\mathcal{H}(\vec{k}))_\sigma),$$

et on pose $l \cdot (f_\sigma) = (\sigma(l) f_\sigma)$.

Définition 1.6.1. — Si Σ est un objet de $\mathcal{C}_{adm}(\epsilon(\vec{k}))$, on lui associe le (φ, N)-module filtré $D_{\vec{k}}(\Sigma) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'_b[-1], \mathcal{H}_0(\vec{k}))$, avec $\varphi(f) = \varphi \circ f$, $N(f) = N \circ f$ et

$$\mathrm{Fil}^i(D_{\vec{k}}(\Sigma) \otimes_{L_0} L) = \mathrm{Im}(\mathcal{F}^i_*)$$

où $\mathcal{F}^i_*$ est l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma', \mathrm{Fil}^i\mathcal{H}(\vec{k}))$ dans $D_{\vec{k}}(\Sigma) \otimes_{L_0} L$ obtenue par composition avec $\mathcal{F}^i$. La flèche $\mathcal{F}^i_*$ est aussi un morphisme de L-espaces vectoriels, donc $\mathrm{Fil}^i(D(\Sigma) \otimes_{L_0} L)$ est bien un sous-$L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module de $D_{\vec{k}}(\Sigma) \otimes_{L_0} L$.

Remarque 1.6.2. — Cette définition n'est pas si artificielle qu'elle en a l'air. En effet, considérons $\mathcal{X} = \mathbb{C}_p \backslash L$, le demi-plan de Drinfel'd sur L. Dans [**49**], Große-Klönne construit le complexe de cohomologie rigide associé à un schéma formel dont la fibre générique est $\mathcal{X}$. Ceci donne un complexe de L_0-espaces vectoriels $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ et chaque élément de G induit un endomorphisme de cet objet dans la catégorie dérivée des L_0-espaces vectoriels. Il munit de plus cet objet d'endomorphismes ϕ et N vérifiant la relation $N\phi = q\phi N$ et commutant à l'action de G, et construit un quasi-isomorphisme naturel $\alpha_{\pi_L} : R\Gamma_{rig}(\mathcal{X}) \otimes_{L_0} L \simeq R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$ commutant également à l'action de G. Il serait alors tentant, si on pouvait identifier l'objet $R\Gamma_{rig}$ à un complexe de représentations de G et α_{π_L} à un isomorphisme dans une catégorie dérivée de représentations de G, d'utiliser $R\Gamma_{rig}$ pour définir une L_0-structure sur $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$, ainsi que des endomorphismes ϕ et N. Cependant la construction de ce complexe de cohomologie log-rigide dans [**49**] ne le permet pas, le groupe G agit sur le complexe $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ par endomorphismes dans la catégorie dérivée des L_0-espaces vectoriels. Malgré tout, on connaît ([**49**], §6) l'action de ϕ sur les espaces de cohomologie rigide $H^i_{rig}(\mathcal{X})$. Dès lors, si $R\Gamma_{rig}$ était vraiment un objet de la catégorie $\mathcal{D}_{\vec{2}}$, et α_{π_L}, ϕ et N des flèches de cette catégorie, par un résultat général sur les catégories triangulées ([**34**] lemme $A.1.4$), il existerait un unique scindage de $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ commutant à ϕ. Les isomorphismes α_{π_L} et $H^*(\alpha_{\pi_L})$ le transporteraient alors en un scindage du complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$.

C'est pourquoi notre construction prend le chemin inverse. Les isomorphismes de Schneider et Stuhler ([**79**], §5 théorème 1 et §4 lemme 1) induisent un isomorphisme $\mathcal{H}(k) \simeq (H^0_{dR} \oplus H^1_{dR}[-1]) \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)'$, ainsi $\mathcal{H}_0(\vec{k})$ est naturellement isomorphe à $(H^0_{rig} \oplus H^1_{rig}[-1]) \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)'$ et doit être considéré comme substitut à $R\Gamma_{rig} \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\mathrm{Sym}^{k-2}K^2)'$. Nous définissons φ tel qu'il devrait être par le calcul de Große-Klönne (il faut cependant noter que Große-Klönne calcule une puissance de φ). On peut également vérifier que l'opérateur N que nous avons défini coïncide avec celui induit par la cohomologie rigide, et ceci grâce à un résultat de de Shalit ([**88**] théorème 4.1) et un petit calcul sur les extensions de St_{L_0} par la représentation triviale.

Définir la filtration telle que nous l'avons fait revient à choisir un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\vec{k}) = R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})^{-1}$ et $\mathcal{H}(\vec{k})$. En effet, nous pouvons définir directement dans $\mathcal{D}_{\vec{k}}$ un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\vec{k})$ et $\mathcal{H}(\vec{k})$ et utiliser celui-ci pour transporter une filtration naturelle de $R\Gamma_{dR}(\vec{k})$. Pour cela, commençons par écrire

$$R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})(\vec{k}) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} (R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{\vec{k},\sigma})' \otimes_K V(\chi^{\sigma}_{\vec{k}})').$$

Sur chaque $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{\vec{k},\sigma})'$, Schneider et Stuhler ont définit dans [**79**] §5 une filtration. Ils définissent également un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{\vec{k},\sigma})'$ et un complexe de $D_\sigma(G,K)$-modules $[O(2-k_\sigma) \to O(k_\sigma)]$. Nous nous reportons ici à [**14**] §3 pour la définition des représentations $O(k)$, la représentation $O(k)$ n'étant rien d'autre que l'espace des fonctions rigides L-analytiques sur $\mathcal{X}$ munies d'une action « tordue » de G. On peut alors vérifier que $\mathrm{Fil}^i(R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{k_\sigma})') \simeq [0 \to O(k_\sigma)]$ pour $1 \leq i \leq k_\sigma$. En utilisant l'isomorphisme de Morita $O(k_\sigma) \simeq \Sigma(k_\sigma)'_\sigma$ (on en trouve une description dans [**14**] §3 lorsque $L = \mathbb{Q}_p$), on obtient

$$\mathrm{Fil}^i R\Gamma_{dR}(\vec{k}) \simeq \bigoplus_{\sigma, i \leq k_\sigma} [0 \to (\Sigma(\vec{k})_\sigma)'_b].$$

Enfin, ces isomorphismes permettent de définir directement un scindage de $R\Gamma_{dR}(\vec{k})$. Rappelons que Breuil a défini dans [**14**] §3 des espaces $O(k,\mathcal{L})$ constitués de fonctions analytiques rigides sur $\mathcal{X}$ et de fonctions logarithmes ($\mathcal{L}$ désignant la branche choisie du logarithme). Ils permettent de définir des scindages explicites

$$\begin{aligned} R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{k_\sigma})' &\xleftarrow{\sim} [V(\chi_{k_\sigma})' \oplus O(2-k_\sigma) \to O(k_\sigma, 0)] \\ &\xrightarrow{\sim} [V(\chi_{k_\sigma})' \xrightarrow{0} \mathrm{St}' \otimes_K V(\chi_{k_\sigma})'] \end{aligned}$$

En prenant la somme directe de ces scindages, on obtient un isomorphisme $R\Gamma_{dR}(\vec{k}) \simeq \mathcal{H}(\vec{k})$ et on vérifie que le morphisme $\mathrm{Fil}^i(R\Gamma_{dR}(\vec{k})) \to R\Gamma_{dR}(\vec{k})$ est, pour $i \geq 1$, $\bigoplus(-2j_\sigma, -\log_{0,\sigma})$. Le choix de la branche nulle du logarithme dans notre scindage se justifie par les résultats de Coleman et Iovita ([**24**]) qui suggèrent que si $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ peut être défini dans une catégorie dérivée de représentations de G, alors nous obtenons ainsi le scindage provenant de Frobenius. Nous espérons revenir plus en détail sur cette interprétation géométrique lorsque le problème de définir $R\Gamma_{rig}$ comme complexe de G-modules sera résolu.

1.6.2. Le résultat principal. —

Théorème 1.6.3. — *Les (φ, N, L, K)-modules filtrés $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}))$ et $D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Pour commencer, décomposons

$$D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})) = D_0 \oplus D_1,$$

avec

$$D_0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})', L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G}(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0$$

$$D_1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})', (\mathrm{St}_{L_0})' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0.$$

D'après le corollaire 1.5.11 et la forme des composantes de Jordan-Hölder de $\Sigma(\vec{k})$ (théorème 1.3.12), D_0 et D_1 sont des $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules libres de rang 1. De plus la définition de φ implique immédiatement que $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}))$ et $D(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ sont isomorphes en tant que φ-modules.

L'opérateur N induit un morphisme de D_1 vers D_0 qui associe à $f : \mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}) \to \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ l'image de $-\frac{1}{2}\mathrm{val}$ par

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{St} \otimes V(\chi_{\vec{k}})) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})).$$

D'après le corollaire 1.5.16, $f_*(N) \neq 0$, ainsi les (φ, N)-modules $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}))$ et $D(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$ sont isomorphes.

Il reste donc à prouver que la filtration est la bonne. Fixons σ un plongement de L dans K. Si $i \geq k_\sigma$ il est clair que $\mathrm{Fil}^i(D(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}))_\sigma) = 0$. Supposons donc $1 \leq i \leq k_\sigma - 1$. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})'[-1], \mathrm{Fil}^1\mathcal{H}(\vec{k})_\sigma) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})', \Sigma(\vec{k})'_\sigma).$$

Le corollaire 1.5.12 montre que cet espace est de dimension 1 sur K, engendré par v l'élément correspondant à la flèche duale de l'inclusion naturelle

$$\Sigma(\vec{k})_\sigma \hookrightarrow \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}).$$

L'image de v dans $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}))_\sigma$ s'écrit $v_0 + v_1$ où $v_i \in D_i \otimes_{L\otimes K,\sigma} K$. L'élément v_1 est le composé des flèches

$$\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})' \to \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})'_\sigma \xrightarrow{-2j_\sigma} \mathrm{St}' \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})'.$$

Il s'agit de $-2j'$ où j' est la flèche duale de l'inclusion naturelle

$$j : \mathrm{St} \otimes V(\chi_{\vec{k}}) \hookrightarrow \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})_\sigma \hookrightarrow \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}).$$

L'élément $N(v_1)$ est alors l'image du cocycle $-\frac{1}{2}\mathrm{val}$ par la flèche

$$(-2j)_* : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{St} \otimes V(\chi_{\vec{k}})) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})),$$

c'est donc l'élément val.
Déterminons maintenant v_0. Il s'agit de l'image du cocycle $-\log_{\sigma,0}$ par la flèche

$$\mathrm{Ext}^1(V(\vec{k}), \Sigma(\vec{k})_\sigma) \to \mathrm{Ext}^1(V(\vec{k}), \Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})).$$

Or on sait, d'après la proposition 1.5.10, que dans ce dernier espace,

$$-\log_{\sigma,0} = \mathcal{L}_\sigma \mathrm{val}.$$

Ainsi l'image de v est de la forme $v_1 + \mathcal{L}_\sigma N v_1$ dans $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}}))_\sigma$. □

Corollaire 1.6.4. — *Les représentations $\Sigma(\vec{k}_1,\vec{\mathcal{L}}_1)$ et $\Sigma(\vec{k}_2,\vec{\mathcal{L}}_2)$ sont isomorphes si et seulement si $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ et $\vec{\mathcal{L}}_1 = \vec{\mathcal{L}}_2$.*

Remarque 1.6.5. — Dans le cas où $L=\mathbb{Q}_p$, l'espace $\Sigma(k,\mathcal{L})\otimes|\det|^{\frac{k-2}{2}}$ est en fait vraisemblablement plus petit que le sous-espace des vecteurs localement analytiques de son complété unitaire universel $B(k,\mathcal{L})$. En réalité cet espace de vecteurs localement analytiques devrait être une extension

$$0\to\Sigma(k,\mathcal{L})\otimes|\det|^{\frac{k-2}{2}}\to\tilde{\Sigma}(k,\mathcal{L})\otimes|\det|^{\frac{k-2}{2}}\to\mathrm{Ind}_P^G((|\cdot|^{\frac{k}{2}}\otimes|\cdot|^{\frac{k-4}{2}})\chi_k\epsilon^{k-1})^{\mathbb{Q}_p-an}\to 0.$$

Il est cependant facile de vérifier que remplacer $\Sigma(k,\mathcal{L})$ par $\tilde{\Sigma}(k,\mathcal{L})$ ne change en rien notre résultat :

$$D_k(\Sigma(k,\mathcal{L}))=D_k(\tilde{\Sigma}(k,\mathcal{L})).$$

1.6.3. Le cas cristallin non scindé. — Supposons d'abord $L=\mathbb{Q}_p$.

À la suite de ces résultats, on peut se demander ce qu'il se passe si dans la construction de $\Sigma(k,\mathcal{L})$, on choisit la valuation à la place de $\log_{\mathcal{L}}$ pour construire l'extension. On obtient alors une représentation $\Sigma(k,\infty)$ qui est une extension de la forme

$$0\to\Sigma(k)\to\Sigma(k,\infty)\to V(k)\to 0$$

et qui contient la représentation localement algébrique $V(k)\otimes\tilde{\mathrm{St}}$ où $\tilde{\mathrm{St}}$ est l'unique extension non triviale (et lisse d'après la proposition 1.5.14) de 1 par St. On peut considérer le (φ,N)-module filtré $D_k(\Sigma(k,\infty))$. Ce (φ,N)-module filtré est admissible, de dimension 2, cristallin ($N=0$) et isomorphe à $D=Ke_0\oplus Ke_1$ vérifiant

$$\varphi(e_i)=p^{\frac{k-2}{2}+i}e_i \text{ pour } i=0,1$$
$$\mathrm{Fil}^nD=\begin{cases}D & \text{si } n\le 0\\ K(e_0+e_1) & \text{si } 1\le n\le k-1\\ \{0\} & \text{si } n\ge k\ .\end{cases}$$

Il s'agit, à isomorphisme et torsion par un caractère quadratique près, du module de Fontaine de l'unique représentation cristalline de dimension 2 non scindée ayant pour poids de Hodge-Tate $(0,k-1)$. Cette remarque rejoint donc la suggestion de Breuil et Emerton ([**15**] remarque 3.2.1) d'associer aux représentations cristallines non scindées, une représentation unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dont les vecteurs lisses contiennent la représentation de Steinberg.

Enfin, dans le cas d'une extension L quelconque, on peut choisir un plongement σ, ainsi que des éléments $c_{\sigma'}\in K$ pour tout $\sigma'\neq\sigma$. En remplaçant, dans la construction de $\Sigma(\vec{k},\vec{\mathcal{L}})$, $\log_{\sigma,\mathcal{L}_\sigma}$ par val, et $\log_{\sigma',\mathcal{L}_{\sigma'}}$ par $\log_{\sigma'}+c_{\sigma'}\log_\sigma$, on obtient une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\Sigma(\vec{k},\sigma,(c_{\sigma'})_{\sigma'\neq\sigma})$ telle que le (φ,N,L,K)-module filtré $D=D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k},\sigma,(c_{\sigma'})_{\sigma'\neq\sigma})))$ soit cristallin de la forme $(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K)e_0\oplus(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}K)e_1$ avec

$$\varphi(e_i)=p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}+i}e_i \text{ pour } i=0,1$$
$$\mathrm{Fil}^n(D\otimes_{L_0}L)\otimes_{L\otimes K,\sigma'}K=\begin{cases}(D\otimes_{L_0}L)\otimes_{L\otimes K,\sigma'}K & \text{si } n\le 0\\ K(e_{0,\sigma'}+e_{1,\sigma'}) & \text{si } 1\le n\le k-1 \text{ et } \sigma'=\sigma\\ K(e_{1,\sigma'}+c_{\sigma'}e_{0,\sigma'}) & \text{si } 1\le n\le k-1 \text{ et } \sigma'\neq\sigma\\ \{0\} & \text{si } n\ge k\ .\end{cases}$$

CHAPITRE 2

REPRÉSENTATIONS LOCALEMENT ANALYTIQUES DE $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ ET INVARIANTS $\mathcal{L}$

2.1. Introduction

Soient p un nombre premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si k est un entier plus grand que 2, les K-représentations du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ semi-stables non cristallines de dimension 2, à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$, apparaissent en famille $(V(k,\mathcal{L}))$ dépendant d'un paramètre $\mathcal{L} \in K$. En appliquant le foncteur D_{st}^* de Fontaine à ces représentations, on obtient une famille de (φ, N)-modules filtrés dont les (φ, N)-modules sous-jacents sont tous isomorphes. Le paramètre $\mathcal{L}$ détermine donc la filtration de Hodge de ces modules. Cette situation est particulièrement intéressante pour étudier la correspondance de Langlands p-adique. En effet, la représentation unitaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à une représentation semi-stable est un complété d'une représentation localement algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, laquelle ne dépend que du (φ, N)-module sous-jacent ainsi que des poids de Hodge-Tate ([**14**], [**16**], [**29**]). Dans le cas présent, la représentation localement algébrique est $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes \mathrm{St}_2 \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$. Dans [**14**], Christophe Breuil construit une famille $(\Sigma(k,\mathcal{L}))$ de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de telle sorte que $\Sigma(k,\mathcal{L}) \simeq \Sigma(k,\mathcal{L}')$ implique $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. La représentation $\Sigma(k,\mathcal{L})$ est construite comme une extension de la représentation localement algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$ par la représentation $\Sigma(k)$, cette dernière est un analogue localement analytique de la représentation Steinberg. Le paramètre $\mathcal{L}$ définit alors la classe d'isomorphisme d'une telle extension.

Dans [**87**], nous montrons comment $\Sigma(k,\mathcal{L})$ permet de réaliser le (φ, N)-module filtré $D_{st}^*(V(k,\mathcal{L}))$ dans la cohomologie de de Rham du demi-plan de Drinfel'd $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}_p \backslash \mathbb{Q}_p$. Notons $R\Gamma_{dR}(k)$ le complexe de de Rham de $\mathcal{X}_1$ tensorisé avec la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2)' \otimes |\det|^{-\frac{k-2}{2}}$. C'est un complexe de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de caractère central $a \mapsto (a|a|)^{2-k}$. D'après Schneider et Teitelbaum ([**83**, §3]), une représentation localement analytique est munie d'une structure de $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$-module, $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ étant l'algèbre des distributions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans K. Soit $\mathcal{D}$ la catégorie dérivée de la catégorie des $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$-modules de caractère central $a \mapsto (a|a|)^{2-k}$. On définit des endomorphismes φ et N de $R\Gamma_{dR}(k)$ dans la catégorie $\mathcal{D}$, ainsi qu'une filtration $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-stable du complexe $R\Gamma_{dR}(k)$. Pour toute représentation localement analytique Σ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, ces constructions munissent le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma'[-1], R\Gamma_{dR}(k))$ d'une structure de (φ, N)-module filtré. On a alors un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma(k,\mathcal{L})'[-1], R\Gamma_{dR}(k)) \simeq D_{st}^*(V(k,\mathcal{L})). \qquad (2.1.1)$$

Le but de cet article est d'étudier une situation analogue pour une famille de K-représentations de dimension 3 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ dépendant d'un triplet $\underline{\mathcal{L}} \in K^3$. Plus précisément, nous utilisons

(2.1.1) comme fil directeur pour construire un complexe de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ dépendant du triplet $\underline{\mathcal{L}}$, de telle sorte que le même procédé permette de « réaliser » le (φ, N)-module filtré dans la cohomologie de de Rham de l'espace de Drinfel'd de dimension 2.

2.1.1. Notations. — Quand nous l'avons pu, nous avons essayé de formuler nos résultats dans le cadre le plus général possible, en vue de généraliser ce travail à d'autres groupes que $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique réductif déployé sur $\mathbb{Q}_p$, $\underline{T}$ un sous-tore déployé maximal et $X(T) = \mathrm{Hom}(\underline{T}, \mathbb{G}_m)$ son groupe des caractères. Soit Φ l'ensemble des racines de $\underline{G}$ relativement à $\underline{T}$, Δ une base de racines simples du système $(X(T), \Phi)$ et Φ^+ le sous-ensemble des racines positives pour Δ. Soit W le groupe de Weyl du système $(X(T), \Phi)$. Si $w \in W$, on fixe $w \in \underline{G}(\mathbb{Q}_p)$ un relevé de w. On note $\underline{B}^+$ le sous-groupe de Borel associé à Δ et $\underline{B}$ le sous-groupe de Borel opposé. Pour $\alpha \in \Delta$, $s_\alpha \in W$ désigne la réflexion simple associée à α et si S est un sous-ensemble de Δ, on note $\underline{P}_S^+$ le sous-groupe parabolique contenant $\underline{B}^+$ et engendré par les éléments s_α pour $\alpha \in S$, ainsi que $\underline{P}_S$ le parabolique opposé. Le radical unipotent de $\underline{P}_S$ est noté N_S, celui de $\underline{P}_S^+$, N_S^+, et $N = N_\Delta$, $N^+ = N_\Delta^+$.

On note également $\underline{L}_S$ l'unique sous-groupe de Lévi de $\underline{P}_S$ (ou de $\underline{P}_S^+$) contenant $\underline{T}$. Pour tout sous-groupe $\underline{H} \subset \underline{G}$, on note $\overline{\underline{H}}$ le quotient de $\underline{H}$ par le centre de $\underline{G}$. Le symbole w_0 désigne l'unique élément de longueur maximale dans W.

On note X_S^+ l'ensemble des poids $\lambda \in X(T)$ tels que $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in S$. Pour un tel λ, il existe une unique représentation algébrique irréductible de dimension finie de $\underline{L}_S$ et de plus haut poids λ que l'on note $F_{\lambda,S}$. On note $X^+ = X_\Delta^+$, $F_\lambda = F_{\lambda,S}$, c'est alors une représentation de $\underline{G}$.

Soit $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$. On définit l'action tordue de W sur $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ par $w \cdot \lambda = w(\lambda + \delta) - \delta$. Nous utiliserons également l'action $w * \lambda = w(\lambda - \delta) + \delta = -w \cdot (-\lambda)$. Il s'agit de l'action tordue obtenue en choisissant $-\Delta$ comme base de racines positives.

Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et ρ une K-représentation de dimension finie de $\mathfrak{p}$, on note $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\rho) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \rho$. C'est un $U(\mathfrak{g})$-module appelé module de Verma généralisé. Si $\mathfrak{b}$ est l'algèbre de Lie de B, on note $\mathfrak{m}(\rho) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}(\rho)$, c'est un module de Verma.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, $\underline{G}$ est le plus souvent $\mathrm{GL}_{3,\mathbb{Q}_p}$. Dans ce cas on choisit pour $\underline{T}$ le sous-groupe des matrices diagonales et $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où $\alpha_1 = \epsilon_0\epsilon_1^{-1}$ et $\alpha_2 = \epsilon_1\epsilon_2^{-1}$, ϵ_i étant le caractère du tore

$$\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_i. \tag{2.1.2}$$

On abrégera sinsi $P_i = P_{\{\alpha_i\}}$, $s_i = s_{\alpha_i}$, $\mathfrak{m}_i(\rho) = \mathfrak{m}_{P_i}(\rho)$, $F_{\lambda,i} = F_{\lambda,\{\alpha_i\}}$, $N_i = N_{\alpha_i}$.

Si $\underline{H}$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}_p$, on note $H = \underline{H}(\mathbb{Q}_p)$ son groupe des $\mathbb{Q}_p$-points, c'est toujours un groupe de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytique. On fixe alors G_0 un sous-groupe compact maximal spécial de G et pour tout sous-groupe fermé H de G, on pose $H_0 = H \cap G_0$.

Pour V un espace vectoriel muni d'une topologie localement convexe séparée, on note $C^{an}(H, V)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur H à valeurs dans V défini dans [**83**, §2]. Une représentation localement analytique de H est la donnée d'une action de H sur un espace vectoriel localement convexe séparé Σ par des endomorphismes continus et telle que les applications orbites $g \mapsto g{\cdot}v$ appartiennent à $C^{an}(G, \Sigma)$. Une représentation localement algébrique est une représentation localement analytique dont l'espace sous-jacent est muni de la topologie localement convexe la plus fine ([**85**, §6]) et dont les applications orbites sont localement algébriques. Une représentation lisse est une représentation localement algébrique dont les applications orbites sont localement constantes.

La représentation de Steinberg lisse du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est notée St_n.

Si V est un espace vectoriel localement convexe, on note V' son dual topologique muni de la topologie forte ([**78**, §9]). On note $D(H) = C^{an}(H,K)'$, c'est l'algèbre des distributions de H ([**83**, §2]). On note également $C_c^{an}(H,K)$ l'espace des fonctions localement analytiques à support compact et $\mathcal{D}_c(H)$ son dual fort ([**86**, §2]). On désigne par $\mathcal{M}(H)$ la catégorie des $D(H)$-modules. Si (ρ,Σ) est une représentation localement analytique, pour $\mu \in D(H)$, $f \in \Sigma'$ et $v \in \Sigma$, on pose

$$(\mu \cdot f)(v) = \mu(h \mapsto f(\rho(h)\cdot v)). \tag{2.1.3}$$

Ceci munit Σ' d'une structure de $D(H)$-module. Si $\lambda \in X(T)$, sa restriction au centre Z de H est un caractère de Z, et donne lieu à un caractère de l'algèbre $D(Z)$. En général, si χ est un caractère de Z, on note $\mathcal{M}(H)_\chi$ la catégorie des $D(H)$-modules sur lesquels l'algèbre $D(Z)$ agit via le caractère χ^{-1}, et $D^b(\mathcal{M}(H)_\chi)$ sa catégorie dérivée bornée.

On note $C_1^\omega(H,K)$ l'espace des germes de fonctions localement analytiques en 1 défini dans [**83**, §2] et $D(H)_1$ son dual qui est alors une sous-algèbre de $D(H)$. L'action par translation à gauche de H sur $C^{an}(H,K)$ est différentiable, donc induit une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur $C^{an}(H,K)$. De plus, cette action passe au quotient pour donner une action de $\mathfrak{h}$ sur $C_1^\omega(H,K)$. Cette action se prolonge naturellement en une action de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{h})$. L'accouplement

$$\langle X, f\rangle = (X\cdot f)(1) \tag{2.1.4}$$

induit une injection de $U(\mathfrak{h})$ dans $D(H)_1$ et donc dans $D(H)$. Si $h \in H$ on note δ_h l'élément de $D(H)$ défini par $\delta_h(f) = f(h)$. Ainsi l'application $\sum a_h h \mapsto \sum a_h \delta_h$ est une injection de l'algèbre de groupe $K[H]$ dans $D(H)$. D'après [**64**, lemme 1.1.1], l'image de cette injection est dense dans $D(H)$.

Si H est un groupe de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytique compact, $D(H)$ est un espace de Fréchet nucléaire ([**78**, §19]). Un espace de Fréchet nucléaire est un espace réflexif, autrement dit, l'application $V \to (V')'$ est un isomorphisme topologique. De plus, le foncteur $V \mapsto V'$ induit une équivalence entre la catégorie des espaces de Fréchet nucléaires et la catégorie des espaces de type compact ([**83**, §1]).

Si V et W sont deux K-espaces vectoriels localement convexes, on note $V \otimes_{K,\iota} W$ leur produit tensoriel muni de la topologie inductive ([**78**, §17]), et $V \hat{\otimes}_{K,\iota} W$ le complété de ce produit tensoriel pour cette topologie. Si V et W sont en plus munis d'une structure de $D(H)$-module, on note $V \tilde{\otimes}_{D(H),\iota} W$ le quotient de $V \hat{\otimes}_{K,\iota} W$ par le sous-K-espace vectoriel engendré par les $v\mu \otimes w - v \otimes \mu w$ pour $(v,\mu,w) \in V \times D(H) \times W$ et on le munit de la topologie quotient. On note $V \hat{\otimes}_{D(H),\iota} W$ le quotient de $V \hat{\otimes}_{K,\iota} W$ par l'adhérence de $\{0\}$. De même on désigne par $\hat{\otimes}_{K,\pi}$ le produit tensoriel muni de la topologie projective ([**78**, §17]), et on définit de même $\hat{\otimes}_{K,\pi}$. Lorsque V et W sont des espaces de Fréchet, on oublie le ι dans le produit tensoriel car, dans ce cas, toutes les topologies produit tensoriel sont les mêmes ([**78**, proposition 17.6]). De plus, on note $\mathcal{L}(V,W)$ l'espace des application linéaires continues de V dans W muni de la topologie forte ([**78**, §6]). Si V et W sont munis d'actions continues d'un groupe topologique H, on note $\mathcal{L}_H(V,W)$ le sous-espace des applications linéaires continues commutant à l'action de H, on le munit de la topologie de sous-espace.

Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$, nous numérotons les lignes et les colonnes de 0 à $n-1$ et notons $u_{i,j}$ la matrice élémentaire ayant un 1 dans la case (i,j) et 0 ailleurs, elle engendre un sous-espace de poids $\epsilon_i - \epsilon_j$ pour l'action adjointe du sous-tore des matrices diagonales.

Si f est une fonction sur un espace X et $x \in X$, on note ev_x l'application d'évaluation en x.

Si $C^\cdot$ est un complexe, $C^\cdot_{\geq i}$ désignera la troncation bête

$$[0 \to \cdots \to 0 \to C^i \to C^{i+1} \to \cdots]. \tag{2.1.5}$$

Si ρ est une représentation d'un groupe H et $h \in H$, on désigne par ρ^h la représentation $\rho(h^{-1} \cdot h)$.

On utilise toujours des notations « gothiques » pour désigner les algèbres de Lie. Les lettres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{h}$ désignent donc les algèbres de Lie des groupes notés G, N, P, H.

2.1.2. Énoncé des résultats. —

2.1.2.1. Le côté galoisien. — Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant une racine de l'équation $X^3 - p$ et fixons pour le reste de l'article une telle racine $p^{1/3} \in K$. Fixons égalements un triplet d'entiers $\underline{h} = (h_0, h_1, h_2)$ tel que $h_2 > h_1 > h_0$ et $\underline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}'') \in K^3$. Soit $D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ le (φ, N)-module filtré défini de la façon suivante.

$$D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}) = Ke_0 \oplus Ke_1 \oplus Ke_2, \begin{cases} \varphi(e_0) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}-1} e_0, \\ \varphi(e_1) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}} e_1, \\ \varphi(e_2) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}+1} e_2, \end{cases} \begin{cases} N(e_0) = 0, \\ N(e_1) = e_0, \\ N(e_2) = e_1, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

$$\mathrm{Fil}^i(D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})) = \begin{cases} D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}) & \text{si } i \leq h_0, \\ K(e_2 + \mathcal{L}' e_1 + \mathcal{L}'' e_0) \oplus K(e_1 + \mathcal{L} e_0) & \text{si } h_0 + 1 \leq i \leq h_1, \\ K(e_2 + \mathcal{L}' e_1 + \mathcal{L}'' e_0) & \text{si } h_1 + 1 \leq i \leq h_2, \\ 0 & \text{si } i \geq h_2 + 1. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Ce (φ, N)-module filtré est faiblement admissible au sens de [**45**, 4.4.3], il existe donc, d'après le théorème de Colmez-Fontaine ([**32**]), une K-représentation $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, semi-stable, de dimension 3, telle que $D^*_{st}(V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})) \simeq D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$. Les poids de Hodge-Tate de $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ sont alors (h_0, h_1, h_2). Remarquons que $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}) \simeq V(\underline{h}', \underline{\mathcal{L}}')$ implique $\underline{h} = \underline{h}'$ et $\underline{\mathcal{L}} = \underline{\mathcal{L}}'$. Notons λ le poids dominant $(h_2 - 2, h_1 - 1, h_0)$, la représentation localement algébrique associée par Christophe Breuil et Peter Schneider à $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ dans [**19**, §4] est alors

$$F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \otimes |\det|^{\frac{h_2+h_1+h_0}{3}-1}. \tag{2.1.8}$$

Remarque 2.1.1. — À la différence du cas de la dimension 2, les représentations ci-dessus ne donnent pas toutes les représentations semi-stables de dimension 3 ayant un opérateur de monodromie de rang 2. C'est le cas uniquement si $2h_1 - 2 \leq h_2 \leq 2h_1 + 2$. En général on peut trouver des représentations de dimension 3 de poids de Hodge-Tate (h_0, h_1, h_2) et telles que $N^2 \neq 0$ qui ne sont pas de la forme précédente. Ces représentations n'entrent pas dans le cadre de cet article. Cependant, ces représentations exceptionnelles sont exactement celles pour lesquelles la filtration de Hodge et la filtration de monodromie ne sont pas transverses. Ainsi, si la conjecture de Schneider ([**77**],§3) sur la transversalité des filtrations de Hodge et de monodromie est vraie, alors ces représentations exceptionnelles n'apparaissent pas dans la cohomologie des variétés uniformisées par l'espace de Drinfel'd. Ceci expliquerait alors pourquoi elles échappent à nos techniques.

2.1.2.2. Le côté localement analytique. — Comme dans le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, commençons par définir un analogue localement analytique de la représentation de Steinberg dépendant du poids λ :

$$\Sigma(\lambda) = \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)/(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) + \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)), \tag{2.1.9}$$

où les représentations $\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda)$ sont des induites localement analytiques qui seront définies dans la section 2.2.4. Il s'agit d'une représentation localement analytique fortement admissible dont le sous-espace des vecteurs localement algébriques est isomorphe à $F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3$. Comme la cohomologie de de Rham de l'espace de Drinfel'd fait également intervenir la représentation de Steinberg généralisée $v_{P_1} = \mathrm{Ind}_{P_1}^G(1)^\infty/1$, nous introduisons son équivalent localement analytique

$$v_{P_1}^{an}(\lambda) = \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda)/F_\lambda. \tag{2.1.10}$$

Même si la représentation v_{P_2} n'apparaît pas dans la cohomologie de l'espace de Drinfel'd, les travaux de Jean-François Dat ([**34**]) montrent que cette représentation est présente, en un certain sens, dans le complexe de de Rham. C'est pourquoi nous utilisons également la représentation $v_{P_2}^{an}(\lambda)$. Nous définissons alors, de façon analogue au cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, une extension

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda) \to 0 \tag{2.1.11}$$

dépendant des deux paramètres $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, c'est-à-dire

$$\Sigma(\lambda, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1') \simeq \Sigma(\lambda, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2') \Rightarrow (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1') = (\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2'). \tag{2.1.12}$$

Les espoirs consistant à placer le dernier paramètre $\mathcal{L}''$ dans une extension

$$0 \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to ? \to F_\lambda \to 0 \tag{2.1.13}$$

se trouvent réduits à néant après le calcul donnant $\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) = 1$. La première surprise vient alors de l'égalité $\dim_K \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) = 2$. La théorie cohomologique des représentations localement analytiques de Jan Kohlhaase nous permet de voir cet espaces comme un groupe d'extensions dans la catégorie dérivée d'une catégorie exacte, l'interprétation de Yonéda de ces extensions ([**91**]) permet alors de construire un complexe $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ de représentations localement analytiques s'insérant dans un triangle distingué

$$\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to \Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}}) \to F_\lambda[-1] \to \tag{2.1.14}$$

et dont la classe d'isomorphisme, dans la catégorie dérivée citée plus haut, dépend du paramètre $\mathcal{L}''$. Nous avons construit une famille de complexes de représentations non isomorphes entre eux, il reste à définir le paramétrage exact de ces complexes en fonction de $\mathcal{L}''$. La situation n'est, ici, pas entièrement résolue. Nous proposons dans le paragraphe 2.5.3, une paramétrisation faisant intervenir le dilogarithme p-adique défini par Coleman dans [**25**]. Plus précisément, on montre qu'il existe une application linéaire

$$\kappa :\ H^2(\overline{T}, 1) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}, K) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) \tag{2.1.15}$$

dont l'image est de dimension 4. Les éléments de $\mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$ sont construits à partir du logarithme p-adique et de la valuation. Le dilogarithme p-adique nous permet alors de construire un élément de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ n'appartenant pas à l'image de κ. La construction $\underline{\mathcal{L}} \mapsto \Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ dépend encore du choix d'un polynôme Q de degré 2 en les variables $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. Nous notons $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})_Q$ le complexe obtenu au moyen de ce choix de Q. L'idée que le dilogarithme p-adique doit jouer un rôle dans la théorie pour GL_3 revient initialement à Christophe Breuil.

2.1.2.3. Le côté espace de Drinfel'd. — Soit $\mathcal{X}_2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p) \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}} H(\mathbb{C}_p)$ l'espace de Drinfel'd de dimension 2, $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}$ désignant l'ensemble des hyperplans $\mathbb{Q}_p$-rationnels de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$. Il s'agit d'un espace analytique rigide de dimension 2 muni d'une action du groupe $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Cet espace étant quasi-Stein, son complexe de de Rham est le complexe des sections globales

$$R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2) = [\mathcal{O}(\mathcal{X}_2) \to \Omega^1(\mathcal{X}_2) \to \Omega^2(\mathcal{X}_2)]. \tag{2.1.16}$$

On définit alors le complexe tordu comme étant

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) = R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2) \otimes_K F'_\lambda, \tag{2.1.17}$$

c'est un complexe de $D(G)$-modules ([**84**, proposition 2.1]). Si Σ est un complexe de représentations localement analytiques, on note Σ' le complexe de $D(G)$-modules obtenu par passage terme à terme au dual fort. Il est alors naturel, par prolongement du cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de considérer l'espace

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)). \tag{2.1.18}$$

La deuxième (bonne) surprise est que cet espace est de dimension 3 et peut être muni d'une structure de (φ, N)-module filtré redonnant $D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$. Pour énoncer un résultat précis, nous avons besoin de détailler un peu la construction de φ et N, la filtration étant déduite de la filtration de Schneider ([**48**, (14)]) sur $R\Gamma_{dR}(\lambda)$.

La définition de φ et N est un peu plus problématique. L'idée est de construire des endomorphismes de $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ dans la catégorie dérivée des $D(G)$-modules. Il semble naturel d'utiliser l'isomorphisme de « Hyodo-Kato » construit par Elmar Große-Klönne dans [**49**] : $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2) \simeq R\Gamma_{rig}(\mathcal{X}_2)$. Le complexe $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X}_2)$ porte alors des endomorphismes de Frobenius et de monodromie qui sont les bienvenus. Cependant ces endomorphismes ne sont pas des morphismes dans la catégorie dérivée des représentations de G, mais plutôt des morphismes dans la catégorie dérivée des espaces vectoriels commutant à l'action du groupe G. L'auteur ne voit donc pas comment les remonter en des morphismes de la première catégorie, même s'il est certainement possible de le faire. La solution de rechange consiste à remarquer que l'annulation de groupes d'extensions entre les espaces de cohomologie de $\mathcal{X}_2$ implique que le complexe de de Rham est scindé dans la catégorie dérivée des $D(G)$-modules. Pour cela, on utilise les calculs d'extensions entre représentations lisses de Dat et Orlik ([**34**, théorème 1.3] et [**71**, théorème 1]). En fait, ces mêmes calculs déterminent l'algèbre des endomorphismes de $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$, ce qui nous permet de définir directement des opérateurs N et φ. Plus exactement, nous définissons l'opérateur de Frobenius sur le complexe scindé comme étant le Frobenius calculé par Elmar Große-Klönne dans [**49**, théorème 6.3]. La conjecture de monodromie-poids, désormais un théorème ([**34**], [**88**], [**56**]), exige que N soit tel que $N^2 \neq 0$ et $N\varphi = p\varphi N$, ce qui donne une idée très précise de ce que doit être N. Ainsi, à chaque scindage du complexe de de Rham correspond une définition de φ et de N. Pour des raisons techniques, nous ne choisirons pas un scindage mais un isomorphisme quelconque, c'est-à-dire n'induisant pas nécessairement l'identité en cohomologie. Une fois tout ceci défini, on fixe donc un tel isomorphisme

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) \xrightarrow{s} \bigoplus_i H^i_{dR}(\lambda)[-i] \tag{2.1.19}$$

et on pose

$$D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'[-1]) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) \tag{2.1.20}$$

que l'on munit d'endomorphismes φ et N donnés par $\varphi(f) = \varphi \circ f$ et $N(f) = N \circ f$, ainsi que d'une filtration

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fil}^i(D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}}))'[-1]) = \\ &\qquad \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'[-1], Fil^i(R\Gamma_{dR}(\lambda))) \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}}))'[-1]).\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Théorème 2.1.2. — *Il existe un choix de Q et un isomorphisme s tels que pour tout $\underline{\mathcal{L}} \in K^3$, les (φ, N)-modules filtrés suivants sont isomorphes*

$$D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'_Q[-1]) \simeq D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}). \tag{2.1.22}$$

Remarque 2.1.3. — La preuve de ce résultat est essentiellement de la théorie des représentations. Il reste bien entendu à prouver un résultat géométrique consistant à déterminer l'isomorphisme s. La première étape devrait être de reprendre ou modifier la construction du complexe de cohomologie rigide $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X}_2)$ pour obtenir un objet de la catégorie dérivée des $D(G)$-modules muni d'endomorphismes φ et N. Alors l'action de l'endomorphisme φ agissant sur la cohomologie ainsi qu'un résultat de Dat ([**34**, corollaire A.1.3]) impliquent qu'il existe un unique scindage

$$R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2) \simeq \bigoplus_i H^i_{dR}(\mathcal{X}_2)[-i] \tag{2.1.23}$$

commutant au Frobenius. Il est naturel d'espérer que l'isomorphisme du théorème soit justement ce scindage. C'est en tous cas ce que suggère le théorème de Robert Coleman et Adrian Iovita [**24**] pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il est alors probable qu'il faille modifier notre construction de N par un élément diagonal dans ce scindage, ce qui ne pose aucun problème.

2.1.3. Plan du chapitre. — Dans le chapitre 2.2 nous décrivons une décomposition des induites paraboliques localement anlytiques pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, en particulier nous isolons dans les représentations de Steinberg localement analytiques des représentations que nous retrouverons plus tard dans les espaces de formes différentielles sur l'espace de Drinfel'd. Dans la partie 2.3, nous précisons le cadre catégorique dans lequel nous travaillons et calculons dans la partie 2.4 un certain nombre d'extensions entre représentations localement analytiques. En particulier, une bonne partie de ce chapitre est consacrée au calcul d'homologie unipotente, ingrédient essentiel pour déterminer ces espaces d'extensions. Le chapitre 2.5 applique ces calculs d'extensions à la construction de $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$. Enfin le chapitre 2.6 est consacré au lien avec l'espace de Drinfel'd. On y rappelle un certain nombre de résultats obtenus par Peter Schneider, Jeremy Teitelbaum et Sascha Orlik sur la structure des séries discrètes holomorphes en les précisant légèrement et la partie 2.6.6 contient la preuve du théorème 2.1.2. Enfin, un appendice contient la preuve d'un analogue p-adique du théorème de Bloch sur les fonctions mesurables vérifiant l'équation fonctionnelle du dilogarithme, ingrédient du chapitre 5, mais dont la preuve fait appel à des techniques un peu différentes.

2.2. Séries principales localement analytiques

2.2.1. Cadre général. — Nous nous plaçons dans le cas général où G est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique déployé sur $\mathbb{Q}_p$, $P = P_S$ un sous-groupe parabolique contenant B, et $L = L_S$ un sous-groupe de Lévi contenant T. Notons $W_P \subset W$ le groupe de Weyl de L. Rappelons qu'une représentation localement analytique ρ d'un groupe de Lie p-adique H est dite fortement admissible ([**83**, §3]) si l'espace vectoriel topologique sous-jacent est de type compact et s'il existe un sous-groupe compact ouvert H_0 tel que ρ' soit un $D(H_0)$-module de type fini. Soit (ρ, V) une représentation localement analytique de L. Par inflation, on l'étend en une représentation localement analytique de P. On note $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ l'induite localement analytique de P à G. Il s'agit de l'espace des fonctions localement analytiques de G dans V vérifiant

$$f(gp) = \rho(p^{-1})f(g) \tag{2.2.1}$$

pour tout $g \in G$ et $p \in P$. Cet espace est muni de la topologie induite par la topologie de $C^{an}(G, V)$ définie dans [**83**, §2] et de l'action de G par translation à gauche, c'est-à-dire

$$[g \cdot f](x) = f(g^{-1}x). \tag{2.2.2}$$

L'application $f \mapsto f(1)$ est une application P-équivariante continue de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_P$ dans ρ et donne par dualité un morphisme de $D(P)$-modules $\rho' \to (\mathrm{Ind}_P^G(\rho))'$, puis un morphisme de $D(G)$-modules

$$D(G) \otimes_{D(P)} \rho' \to (\mathrm{Ind}_P^G(\rho))'. \tag{2.2.3}$$

Si ρ est une représentation lisse, on note $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)^\infty$ le sous-espace de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ constitué des fonctions lisses. C'est alors une sous-représentation lisse de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$.

Proposition 2.2.1. — *Si ρ est une représentation localement analytique fortement admissible de P, la représentation* $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ *est une représentation localement analytique fortement admissible de G et l'application* (2.2.3) *est un isomorphisme topologique.*

Démonstration. — Rappelons que G_0 désigne un sous-groupe compact ouvert spécial de G et que l'on a $G = G_0P$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_{G_0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho|_{P_0}). \tag{2.2.4}$$

Comme ρ' est un espace de Fréchet nucléaire, la proposition 5.3 de [**63**] montre que l'on a un isomorphisme

$$D(G_0)\tilde{\otimes}_{D(P_0)}\rho' \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho))'. \tag{2.2.5}$$

Or, comme ρ est fortement admissible, ρ' est un $D(P_0)$-module de type fini. Autrement dit on a diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D(G_0) \otimes_{D(P_0)} D(P_0)^n \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & D(G_0)\tilde{\otimes}_{D(P_0)}D(P_0)^n \arrow[d] \\ D(G_0) \otimes_{D(P_0)} \rho' \arrow[r, hook] & D(G_0)\tilde{\otimes}_{D(P_0)}\rho', \end{tikzcd} \tag{2.2.6}$$

l'isomorphisme du haut étant une conséquence de [**63**, lemme 2.6]. La flèche horizontale du bas est donc un isomorphisme. Ainsi $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ est fortement admissible. Comme $D(G)$ est un quotient de $D(G_0) \otimes_K K[P]$, l'application (2.2.3) est un isomorphisme. D'après le théorème de l'image ouverte ([**78**, proposition 8.6]), un isomorphisme continu entre espaces de Fréchet est alors un isomorphisme topologique. □

Si ρ est une représentation localement algébrique irréductible de L, d'après [**73**], elle se décompose de façon unique $\rho = \rho_{alg} \otimes \rho_\infty$, ρ_{alg} étant une représentation algébrique irréductible de $\underline{G}$ et ρ_∞ une représentation lisse irréductible de G. Alors d'après [**81**, proposition 2.2], ρ_∞ est fortement admissible, c'est donc aussi le cas de ρ.

Nous allons à présent expliquer comment construire des morphismes entre induites localement analytiques au moyen de morphismes entre modules de Verma généralisés. Soient ψ et ρ deux représentations algébriques de dimension finie de L et ρ_∞ une représentation lisse fortement admissible de L. On les prolonge par inflation en des représentations de P.

Proposition 2.2.2. — *Si φ est un morphisme $U(\mathfrak{g})$-équivariant entre les modules de Verma généralisés $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\psi')$ et $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho')$, il existe un unique morphisme continu de $D(G)$-modules $M(\varphi)$ entre $D(G) \otimes_{D(P)} (\psi \otimes \rho_\infty)'$ et $D(G) \otimes_{D(P)} (\rho \otimes \rho_\infty)'$ prolongeant $\varphi \otimes id$ de $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\psi') \otimes \rho'_\infty$ dans $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho') \otimes \rho'_\infty$.*

Démonstration. — Notons $\widetilde{\varphi}$ la composition de φ avec l'inclusion $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho') \subset D(G) \otimes_{D(P)} \rho'$. Le sous-espace $\widetilde{\varphi}(1 \otimes \psi')$ est alors inclus dans $H^0(\mathfrak{n}_P, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \rho')$. L'action de P sur $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \rho'$ est, pour $p \in P$,

$$p \cdot (\lambda \otimes v) = (\delta_p \lambda \delta_{p^{-1}}) \otimes \rho'(p)v. \tag{2.2.7}$$

L'action de P sur $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\rho')$ est donc algébrique. Or une action $\mathfrak{p}$-équivariante entre représentations algébriques de P est P-équivariante. L'application $\widetilde{\varphi}\otimes id$ est alors P-équivariante de $(\psi\otimes\rho_\infty)'$ dans $D(G)\otimes_{D(P)}(\rho\otimes\rho_\infty)'$. Par densité de $K[P]$ dans $D(P)$, l'application $\widetilde{\varphi}\otimes id$ est $D(P)$-équivariante. Elle se prolonge donc en une application $D(G)$-équivariante de $D(G)\otimes_{D(P)}(\psi\otimes\rho_\infty)'$ dans $D(G)\otimes_{D(P)}(\rho\otimes\rho_\infty)'$. □

On notera également $I(\varphi)$ l'application duale de $M(\varphi)$

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho\otimes\rho_\infty)\xrightarrow{I(\varphi)}\mathrm{Ind}_P^G(\psi\otimes\rho_\infty). \tag{2.2.8}$$

On vérifie facilement la propriété $I(\varphi\circ\theta)=I(\theta)\circ I(\varphi)$.

Soit $\mathfrak{d}$ l'image de φ dans $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\rho')$. On définit la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)^{\mathfrak{d}}$ par

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho\otimes\rho_\infty)^{\mathfrak{d}}=\ker(I(\varphi))\subset\mathrm{Ind}_P^G(\rho\otimes\rho_\infty). \tag{2.2.9}$$

Il faut bien entendu vérifier que cette définition ne dépend que de $\mathfrak{d}$. C'est en fait évident car le dual de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho\otimes\rho_\infty)^{\mathfrak{d}}$ s'identifie au quotient de $D(G)\otimes_{D(P)}(\rho\otimes\rho_\infty)'$ par le sous-$D(G)$-module engendré par $\mathfrak{d}\otimes\rho_\infty'$. Ce sous-module est fermé car image d'une application dans la catégorie abélienne des $D(G)$-modules coadmissibles ([**85**, corollaire 3.4]).

Exemple 2.2.3. — Comme exemple, décrivons le cas où $\rho=\lambda\otimes\chi$, avec λ un poids dominant, χ un caractère lisse, P est le sous-groupe de Borel B et $\mathfrak{d}=\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{m}(-s_\alpha\cdot\lambda)$. Alors $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)^{\mathfrak{d}}$ est le produit tensoriel $F_\lambda\otimes\mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty$ qui est irréductible si et seulement si $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty$ l'est. Plus généralement, on peut supposer $\lambda\in X_S^+$, c'est-à-dire que λ est un poids dominant relativement à $P=P_S$. Si $\mathfrak{d}$ désigne le noyau de la flèche $\mathfrak{m}(-\lambda)\to\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(-\lambda)$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)^{\mathfrak{d}}\simeq\mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,S}\otimes\mathrm{Ind}_B^P(\chi)^\infty), \tag{2.2.10}$$

où $F_{\lambda,S}$ désigne la représentation de dimension finie de P de plus haut poids λ.

Démonstration. — Considérons d'abord le cas minimal, c'est-à-dire $P=B$. Rappelons que F_λ s'identifie, comme G-module, à l'espace de dimension finie des fonctions algébriques de G dans K telles que $f(gp)=\lambda(p^{-1})f(g)$ pour tout $p\in B$, $g\in B$. On obtient ainsi une application continue G-équivariante $F_\lambda\otimes_K\mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty\to\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)$. Nous montrerons au lemme 2.2.13 que cette application est injective. Montrons dans un premier temps que $F_\lambda\otimes_K\mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty$ est bien inclus dans $V=\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes_K\chi)^{\mathfrak{d}}$. Il suffit de montrer que si $f\in F_\lambda\otimes_K\mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty$, pour tout $x\in\mathfrak{d}\subset D(G)\otimes_{D(B)}(-\lambda\otimes\chi^{-1})$, $x(f)=0$. Or $U(\mathfrak{g})\subset D(G)$ s'identifie avec les opérateurs différentiels en 1 par (2.1.4), et f coïncide avec un élement de $F_\lambda\subset C^{an}(G,K)$ au voisinage de 1. Comme F_λ' est le quotient de $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b})}(-\lambda)$ par $\mathfrak{d}$, tous les éléments de $\mathfrak{d}$ annulent f. Montrons à présent l'inclusion inverse. Le quotient de $\mathfrak{m}(-\lambda)$ par $\mathfrak{d}$ est le $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie F_λ'. Soit J_λ le noyau du morphisme

$$U(\mathfrak{g})\to\mathrm{End}_K(F_\lambda'). \tag{2.2.11}$$

C'est un idéal bilatère de codimension finie de $U(\mathfrak{g})$. Montrons tout d'abord que l'action de J_λ sur V est nulle. Remarquons que F_λ' est muni d'une action algébrique ρ de G dont se déduit par différentiation l'action de $\mathfrak{g}$. Ceci montre que si l'on munit $\mathrm{End}_K(F_\lambda')$ de l'action de G définie par $g\cdot f=\rho(g)f\rho(g)^{-1}$, l'application (2.2.11) est G-équivariante. On en conclut que l'idéal J_λ de $U(\mathfrak{g})$ est stable pour l'action adjointe de G. Soient $\delta_g\otimes v\in D(G)\otimes_{D(B)}(\lambda\otimes\chi)'$ avec $g\in G$ et $x\in J_\lambda$. On a

$$x\cdot(\delta_g\otimes v)=\delta_g(\mathrm{Ad}(g^{-1})x\otimes v). \tag{2.2.12}$$

Alors $\mathrm{Ad}(g^{-1})x\in J_\lambda$, donc $\mathrm{Ad}(g^{-1})x\otimes v$ est un élément de $\mathfrak{d}\otimes\chi^{-1}$, et donc $x\cdot(\delta_g\otimes v)$ appartient au $D(G)$-module engendré par $\mathfrak{d}\otimes\chi^{-1}$. Comme ce dernier est fermé et $K[G]$ est dense dans

$D(G)$, on voit que x envoie $D(G)\otimes_{D(B)}(\lambda\otimes\chi)'$ dans le sous-$D(G)$-module engendré par $\mathfrak{d}\otimes\chi^{-1}$. Ceci prouve bien que J_λ agit trivialement sur V', le quotient de $D(G)\otimes_{D(B)}(\lambda\otimes\chi)'$ par le sous-$D(G)$-module engendré par $\mathfrak{d}\otimes\chi^{-1}$. On en conclut que $U(\mathfrak{g})$ agit sur V à travers $U(\mathfrak{g})/J_\lambda$ qui est une algèbre simple de dimension finie. Nous avons donc un isomorphisme

$$F_\lambda\otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, V)\xrightarrow{\sim} V. \tag{2.2.13}$$

On a alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) = \mathrm{Ind}_B^G(F'_\lambda\otimes\lambda\otimes\chi)^{\mathfrak{g}}. \tag{2.2.14}$$

Cet espace est aussi le sous-espace des $f\in\mathrm{Ind}_B^G(F'_\lambda\otimes\lambda\chi)$ telles que $g\mapsto g\cdot f$ soit localement constante. Une telle f prend nécessairement ses valeurs dans le sous-espace des vecteurs lisses de $F'_\lambda\otimes\lambda\otimes\chi$ qui s'identifie à χ. Ainsi V est un sous-espace de $F_\lambda\otimes\mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty$.

Passons maintenant au cas général avec $P=P_S$. Nous allons nous ramener au cas minimal. D'après le théorème 9.4 de [**54**], le noyau $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{m}(-\lambda)\to\mathfrak{m}_S(-\lambda)$ est l'image d'une application φ s'insérant dans une suite exacte

$$\bigoplus_{\alpha\in S}\mathfrak{m}(-s_\alpha\cdot\lambda)\xrightarrow{\varphi}\mathfrak{m}(-\lambda)\to\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_S}(-\lambda)\to 0, \tag{2.2.15}$$

et cette suite exacte est obtenue en appliquant le foncteur $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p}_S)}\cdot$ à la suite

$$\bigoplus_{\alpha\in S}U(\mathfrak{l}_S)\otimes_{U(\mathfrak{l}_S\cap\mathfrak{b})}(-s_\alpha\cdot\lambda)\xrightarrow{\varphi'}U(\mathfrak{l}_S)\otimes_{U(\mathfrak{l}_S\cap\mathfrak{b})}(-\lambda)\to F'_{\lambda,S}\to 0. \tag{2.2.16}$$

L'application $M(\varphi)$ est alors l'image de $M(\varphi')$ par le foncteur $D(G)\otimes_{D(P_S)}\cdot$. De plus, le cas minimal montre que l'on a une suite exacte

$$\bigoplus_{\alpha\in S}D(L_S)\otimes_{D(L_S\cap B)}(-s_\alpha\cdot\lambda\otimes\chi^{-1})\xrightarrow{M(\varphi')}D(L_S)\otimes_{D(L_S\cap B)}(-\lambda\otimes\chi^{-1})\to(F_{\lambda,S}\otimes_K\mathrm{Ind}_B^P(\chi)^\infty)'\to 0. \tag{2.2.17}$$

L'exactitude à droite de $D(G)\otimes_{D(P_S)}\cdot$ montre alors que

$$\ker I(\varphi)=\mathrm{Ind}_{P_S}^G(F_{\lambda,S}\otimes_K\mathrm{Ind}_B^P(\chi)^\infty). \tag{2.2.18}$$

$\square$

Remarque 2.2.4. — Si H est un sous-groupe compact ouvert de G, le même raisonnement que pour la proposition 2.2.2 montre que si π est une représentation lisse de dimension finie de $H\cap P$, il existe une unique application $D(H)$-équivariante

$$D(H)\otimes_{D(H\cap P)}(\psi\otimes\pi)'\xrightarrow{M(\varphi)}D(H)\otimes_{D(H\cap P)}(\rho\otimes\pi)' \tag{2.2.19}$$

prolongeant $\varphi\otimes 1$. Soit G_0 un sous-groupe compact ouvert spécial de G, π une représentation lisse de dimension finie de $P_0=G_0\cap P$. Choisissons également $I\subset G_0$ un sous-groupe parahorique adapté à P. Pour $w\in W$, on pose $P_w=wPw^{-1}\cap I$ et on obtient des applications $D(I)$-équivariantes

$$D(I)\otimes_{D(P_w)}(\psi^w\otimes\pi^w)'\xrightarrow{M(\varphi^w)}D(I)\otimes_{D(P_w)}(\rho^w\otimes\pi^w)', \tag{2.2.20}$$

prolongeant l'application $\varphi^w\otimes 1=(\mathrm{Ad}(w)\circ\varphi\circ\mathrm{Ad}(w)^{-1})\otimes 1$ de $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_w}((\psi^w)')\otimes(\pi^w)'$ dans $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_w}((\rho^w)')\otimes(\pi^w)'$. En utilisant la décomposition de Bruhat-Iwahori

$$G_0=\bigcup_{w\in W_P\backslash W/W_P}IwP_0, \tag{2.2.21}$$

on obtient un isomorphisme $D(I)$-équivariant

$$D(G_0)\otimes_{D(P_0)}(U\otimes\pi)'\simeq\bigoplus_{w\in W_P\backslash W/W_P}D(I)\otimes_{D(P_w)}(U^w\otimes\pi^w)', \tag{2.2.22}$$

lorsque $U\in\{\rho,\psi\}$. On a alors une égalité

$$M(\varphi)=\sum_{w\in W_P\backslash W/W_P}M(\varphi^w). \tag{2.2.23}$$

2.2.2. Une suite exacte. — Cette partie a pour but de montrer comment une suite exacte de modules de Verma donne lieu à une suite exacte de représentations localement analytiques. Soit H un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique compact. Dans [**85**], Peter Schneider et Jeremy Teitelbaum définissent, pour $\frac{1}{p}<r<1$, une famille de normes $||\cdot||_r$ sur $D(H)$. La multiplication étant continue pour ces normes, le complété $D(H)_r$ de $D(H)$ relativement à $||\cdot||_r$ est une K-algèbre de Banach. On a alors

$$D(H)\simeq\varprojlim_r D(H)_r, \tag{2.2.24}$$

ce qui munit $D(H)$ d'une structure de K-algèbre de Fréchet-Stein, c'est-à-dire que chaque $D(H)_r$ est un anneau noethérien à gauche et $D(H)_r$ est un $D(H)_{r'}$-module plat pour $r<r'$. Notons $U(\mathfrak{h})_r$ la complétion de $U(\mathfrak{h})\otimes_{\mathbb{Q}_p}K\subset D(H)$ pour la norme $||\cdot||_r$. Dans sa thèse ([**46**]), Henning Frommer a prouvé que chaque $D(H)_r$ est un $U(\mathfrak{h})_r$-module libre de rang fini et que l'algèbre de Banach $U(\mathfrak{h})_r$ a la description suivante. Il existe une base $(z_1,\dots,z_s)$ de $\mathfrak{h}$ telle que, en posant $Z_\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_s^{\alpha_s}$ pour tout multi-indice $\alpha\in\mathbb{N}^s$, tout élément de $U(\mathfrak{g})_r$ s'écrit de façon unique

$$\sum_\alpha x_\alpha Z^\alpha \tag{2.2.25}$$

avec $|x_\alpha|||Z_\alpha||_r\to 0$.

Proposition 2.2.5. — *Supposons que l'on ait une suite exacte*

$$\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho_1')\xrightarrow{\varphi_1}\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho_2')\xrightarrow{\varphi_2}\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho_3') \tag{2.2.26}$$

entre modules de Verma généralisés, où les ρ_i sont des représentations algébriques de dimension finie de P. Alors pour $w\in W_P\backslash W/W_P$ et $r<1$ suffisamment proche de 1, la suite

$$D(I)_r\otimes_{D(P_w)_r}(\rho_1')^w\xrightarrow{M(\varphi_1^w)}D(I)_r\otimes_{D(P_w)_r}(\rho_2')^w\xrightarrow{M(\varphi_2^w)}D(I)_r\otimes_{D(P_w)_r}(\rho_3')^w, \tag{2.2.27}$$

est exacte.

Démonstration. — Soit $w\in W_P\backslash W/W_P$. Rappelons que l'on note N^+ le radical unipotent du parabolique opposé à P. Posons $U_w^+=wN^+w^{-1}\cap I$. On a une décomposition $I=U_w^+P_w$ qui induit un isomorphisme de $D(U_w^+)$-modules $D(I)\simeq D(U_w^+)\hat{\otimes}_K D(P_w)$ et un isomorphisme isométrique de $D(U_w^+)_r$-modules $D(I)_r\simeq D(U_w^+)_r\hat{\otimes}_K D(P_w)_r$ ([**70**, proposition 3.3.4]). Soit $(v_i^k)_{i=1..n_k}$ une base de $(\rho_k')^w$. On a alors ([**70**, proposition 3.4.2]), pour r suffisamment proche de 1, un isomorphisme topologique $D(U_w^+)_r$-équivariant

$$D(U_w^+)_r^{n_k}\xrightarrow{\sim}D(I)_r\otimes_{D(P_w)_r}(\rho_k')^w. \tag{2.2.28}$$

Dans ces bases, posons

$$\varphi_k^w(v_i^k)=\sum_j a_{i,j}^k v_j^{k+1}, \tag{2.2.29}$$

on a, par définition, $a_{i,j}^k\in U(\mathfrak{u}_w^+)$. Alors l'application $M(\varphi_k^w)$ s'écrit

$$M(\varphi_1^w)((x_i)_i)=(\sum_l x_l a_{l,j}^k)_j. \tag{2.2.30}$$

Or comme chaque $D(U_w^+)_r$ est un $U(\mathfrak{u}_w^+)_r$-module libre de type fini, donc plat, il suffit de prouver que la suite

$$U(\mathfrak{u}_w^+)_r^{n_1} \xrightarrow{M(\varphi_1^w)} U(\mathfrak{u}_w^+)_r^{n_2} \xrightarrow{M(\varphi_2^w)} U(\mathfrak{u}_w^+)_r^{n_3} \tag{2.2.31}$$

est exacte. L'algèbre de Banach $U(\mathfrak{u}_w^+)_r$ étant noethérienne, ces applications sont continues d'images fermées. De plus ces applications sont $U(\mathfrak{t})$-équivariantes. Il résulte du lemme 3.4.4 de [**70**] et de sa preuve que pour tout poids μ de $\mathfrak{t}$, le sous-espace μ-isotypique de $U(\mathfrak{u}_w^+)_r \otimes_K (\rho_k')^w$ est de dimension finie et inclus dans $U(\mathfrak{u}_w^+) \otimes_K (\rho_k')^w$. On applique alors un théorème de Christian Féaux-de-Lacroix ([**66**] et [**46**, proposition 9]). Les sous-espaces $\ker(M(\varphi_2^w))$ et $\mathrm{Im}(M(\varphi_1^w))$ sont $U(\mathfrak{t})$-stables et fermés, donc égaux à l'adhérence de la somme de leurs sous-espaces isotypiques. D'après ce qui précède ces sommes sont respectivement $\ker(\varphi_2^w)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_1^w)$. On a donc bien égalité entre $\ker(M(\varphi_2^w))$ et $\mathrm{Im}(M(\varphi_1^w))$. □

Corollaire 2.2.6. — *Si π est une représentation lisse irréductible de dimension finie de P_0 et ρ_∞ une représentation lisse fortement admissible de P, on a des suites exactes*

$$\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_3 \otimes \pi) \xrightarrow{I(\varphi_3)} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_2 \otimes \pi) \xrightarrow{I(\varphi_2)} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_1 \otimes \pi) \tag{2.2.32}$$

et

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho_3 \otimes \rho_\infty) \xrightarrow{I(\varphi_3)} \mathrm{Ind}_P^G(\rho_2 \otimes \rho_\infty) \xrightarrow{I(\varphi_2)} \mathrm{Ind}_P^G(\rho_1 \otimes \rho_\infty). \tag{2.2.33}$$

Démonstration. — La proposition 2.2.5 et le théorème B de [**85**, §3] montrent qu'on a une suite exacte

$$D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho_1')^w \xrightarrow{M(\varphi_1^w)} D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho_2')^w \xrightarrow{M(\varphi_2^w)} D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho_3')^w \tag{2.2.34}$$

pour tout $w \in W_P\backslash W/W_P$. On déduit alors la première suite exacte de (2.2.22). Pour la seconde, on écrit $\rho_\infty|_{P_0} = \bigoplus_\pi \pi$ où les π sont des représentations lisses irréductibles de P_0. On a alors

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho_i \otimes \rho_\infty)|_{G_0} \simeq \bigoplus_\pi \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_i \otimes \pi). \tag{2.2.35}$$

En effet, comme G est dénombrable à l'infini, ρ_∞ est de dimension dénombrable et la somme directe est dénombrable. On utilise alors le lemme suivant. □

Lemme 2.2.7. — *Soit X une variété localement $\mathbb{Q}_p$-analytique strictement paracompacte et (M_i) une famille dénombrable d'espaces de Fréchet. On a alors un isomorphisme topologique*

$$\bigoplus_i C^{an}(X, M_i) \xrightarrow{\sim} C^{an}(X, \bigoplus_i M_i). \tag{2.2.36}$$

Démonstration. — D'après le corollaire 8.9 de [**78**], tout sous-espace de Banach de $\bigoplus_i M_i$ est inclus dans une somme finie de M_i. Le lemme est alors une conséquence de la définition de $C^{an}(X, \bigoplus_i M_i)$ ([**83**, §2]. □

2.2.3. Irréductibilité. — Lorsque le module de Verma $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho'_{alg}) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \rho'_{alg}$ est simple, le critère d'irréductibilité de Frommer-Orlik-Strauch ([**70**]) montre que la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\rho_{alg})$ est topologiquement irréductible. On montre ici que c'est aussi le cas de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho_{alg} \otimes \rho_\infty)$ si ρ_∞ est une représentation lisse irréductible de L.

Proposition 2.2.8. — *Si le $U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho'_{alg})$ est simple, alors la représentation* $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ *est topologiquement irréductible.*

Remarque 2.2.9. — Après l'écriture de cette partie, Sascha Orlik m'a informé qu'il a obtenu avec Matthias Strauch un critère d'irréductibilité englobant cette proposition ainsi que la proposition 2.2.20.

La preuve de cette proposition est en fait un prolongement de la preuve de Sascha Orlik et Matthias Strauch dans [**70**]. Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 2.2.8.

Reprenons les notations de la remarque 2.2.4. Soit I un sous-groupe parahorique de G_0 adapté à P_0. Soit $\mathcal{W}$ un ensemble de représentants des doubles classes de $W_P\backslash W/W_P$. Pour $w \in \mathcal{W}$, posons $P_w = I \cap wP_0w^{-1}$.

Démontrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.2.10. — *Si π est une représentation lisse irréductible de P_w, le $D(I)$-module $D(I)\otimes_{D(P_w)}$ $(\rho^w_{alg} \otimes \pi)'$ est simple.*

Démonstration. — La proposition 3.4.2 de [**70**] montre que pour $r < 1$ assez près de 1, l'action de $D(P_w)$ sur $(\rho_{alg} \otimes \pi)'$ se prolonge en une action de $D(P_w)_r$. Soit N un sous-$D(I)_r$-module non nul de $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)'$. Le même raisonnement que dans [**70**] montre qu'il a une intersection non nulle avec

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)' \subset D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)'. \tag{2.2.37}$$

En effet, jusqu'ici le raisonnement de [**70**] n'a pas utilisé l'irréductibilité de $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p}_w)}(\rho^w_{alg}\otimes\pi)'$. L'action de P_w sur $U(\mathfrak{g})$ est localement finie, elle se prolonge donc en une action de $D(P_w)$. Notons, pour $\lambda \in D(P_w)$, $Ad(\lambda)$ l'endomorphisme induit sur $U(\mathfrak{g})$. On munit alors le produit direct $U(\mathfrak{g}) \times D(P_w)$ d'une structure de K-algèbre en posant $(x_1, \lambda_1)(x_2, \lambda_2) = (x_1Ad(\lambda_1)x_2, \lambda_1\lambda_2)$ et on note $U(\mathfrak{g}) \rtimes D(P_w)$ la K-algèbre ainsi obtenue. L'application $(x, \lambda) \mapsto x\lambda$ de $U(\mathfrak{g}) \rtimes D(P_w)$ dans $D(I)$ est alors un morphisme de K-algèbres. Or $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p}_w)}(\rho^w_{alg}\otimes\pi)'$ est un $U(\mathfrak{g})\rtimes D(P_w)$-module simple, donc un $D(I)_r$-module simple, il est donc contenu dans N. Le sous-module N contient ainsi le $D(I)_r$-module engendré par $(\rho^w_{alg} \otimes \pi)'$, c'est-à-dire $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho_{alg} \otimes \pi)'$. Ainsi $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho_{alg} \otimes \pi)'$ est un $D(I)_r$-module simple. On conclut en utilisant le même argument que dans la preuve de [**70**, théorème 3.4.9]. □

Lemme 2.2.11. — *Soit π une représentation lisse irréductible de P_0. Alors la représentation $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \pi)$ est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — La décomposition d'Iwasawa donne un isomorphisme I-équivariant

$$D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (\rho_{alg} \otimes \pi)' = \bigoplus_{w\in\mathcal{W}} D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)'. \tag{2.2.38}$$

Fixons $w \in \mathcal{W}$ et $\pi^w \simeq \bigoplus_i \pi_i$ une décomposition de π^w en somme finie de représentations irréductibles de P_w.

D'après le lemme 2.2.10, chaque $D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi_i)'$ est un $D(I)$-module simple, donc $D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (\rho_{alg} \otimes \pi)'$ est un $D(I)$-module semi-simple. Soit N un sous-$D(G_0)$-module de

$$D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (\rho_{alg} \otimes \pi)'. \tag{2.2.39}$$

D'après [**70**, proposition 3.5.1], pour $w \neq w'$, il n'y a pas d'application $D(I)$-équivariante non nulle

$$D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)' \to D(I) \otimes_{D(P_{w'})} (\rho^{w'}_{alg} \otimes \pi^{w'})'. \tag{2.2.40}$$

Par semi-simplicité du $D(I)$-module $D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (\rho_{alg} \otimes \pi)'$, on a donc

$$N = \bigoplus_{w} N_w \tag{2.2.41}$$

avec $N_w = (N \cap D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)')$. Comme W permute toutes ces composantes, si $N \neq 0$, chaque N_w est non nul. Montrons finalement que pour tout $w \in \mathcal{W}$, on a

$$N_w = D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)'. \tag{2.2.42}$$

Si ce n'était pas le cas, il existerait, par semi-simplicité de $D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho_{alg}^w \otimes \pi^w)'$, une sous-$P_w$-représentation $\theta \subsetneq \pi$ telle que
$$N'_w = \mathrm{Ind}_{P_w}^I(\theta). \tag{2.2.43}$$
Cela signifie que pour tout $f \in N'$, tout $b \in I$, on a $f(bw) \in \theta$. Fixons alors f non nul dans N'_w et $b \in I$ tel que $f(bw) \neq 0$. Comme π est une représentation irréductible de P_0, il existe $w' \in W$ tel que $\rho^w(w')^{-1} f(bw) \notin \theta$. Ainsi, en posant $g = (bw'^{-1})^{-1}$, on a
$$(g \cdot f)(w) = f(bw'w) = \rho^w(w')^{-1} f(bw) \notin \theta, \tag{2.2.44}$$
ce qui est absurde. □

Démonstration de la proposition 2.2.8. — Soit $\rho_\infty|_{P_0} = \bigoplus_\pi \pi$ une décomposition de ρ_∞ en somme directe de représentations irréductibles. En appliquant encore une fois le lemme 2.2.7, on a un isomorphisme de G_0-représentations
$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_{G_0} \simeq \bigoplus_\pi \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \pi). \tag{2.2.45}$$
D'après [**73**], chaque représentation $\rho_{alg} \otimes \pi$ est irréductible de dimension finie. D'après le lemme 2.2.11, chaque $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \pi)$ est topologiquement irréductible. Supposons maintenant que Σ soit un sous-espace fermé de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$, stable par G. Soit J l'ensemble des τ, sous-représentations irréductibles de $\rho_\infty|_{G_0}$ telles que $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \tau) \subset \Sigma$ et $\Sigma_0 = \sum_{\tau \in J} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \tau)$. Si $f \in \Sigma \backslash \Sigma_0$, il existe $g \in G$ tel que $f(g) \notin \rho_{alg} \otimes (\sum_{\tau \in J} \tau)$. Il existe alors $p \in P_0$ et $\tau_0 \notin J$ tels que $f(gp) \in \rho_{alg} \otimes \tau_0$. Par irréductibilité de $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \tau_0)$, $\tau_0 \in J$. Ainsi $\Sigma = \Sigma_0 = \mathrm{Ind}_P^G(\rho_{alg} \otimes \sum_{\tau \in J} \tau)$. Cependant, comme ρ_∞ est une représentation irréductible de P, on a nécessairement $\rho_\infty = \sum_{\tau \in J} \tau$ et $\Sigma = \mathrm{Ind}_P^G(\rho)$. □

2.2.4. Représentations de Steinberg généralisées et pondérées. — On appelle représentation de Steinberg le quotient de l'induite lisse de la représentation triviale d'un sous-groupe de Borel par la somme des sous-espaces correspondant aux induites relativement à des sous-groupes paraboliques stricts contenant B. De même, si P est un sous-groupe parabolique, on appelle représentation de Steinberg généralisée, que l'on note v_P, la représentation obtenue en remplaçant le sous-groupe de Borel B par P. Si on considère l'ensemble des sous-groupes paraboliques contenant un sous-groupe de Borel fixé, la famille des v_P est une famille de représentations lisses irréductibles de G, deux à deux non isomorphes et comprenant tous les sous-quotients de l'induite lisse de B à G de l'identité ([**10**]).

Nous allons définir des analogues localement analytiques de ces représentations. De même que dans [**14**], le cadre localement analytique permet de plus de pondérer ces représentations au moyen de caractères algébriques du sous-groupe B.

Soit $\lambda \in X(T)^+$ un poids dominant de T. Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant B. On note $F_{\lambda,P}$ la représentation algébrique irréductible du quotient de Lévi L_P de P de dimension finie de plus haut poids λ. Par abus de notations, on écrit
$$\mathrm{Ind}_P^G(\lambda) = \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,P}). \tag{2.2.46}$$

La transitivité de l'induction localement analytique nous permet d'écrire, pour toute inclusion $P \subset Q \subset G$ de sous-groupes paraboliques
$$\mathrm{Ind}_P^G(\lambda) = \mathrm{Ind}_Q^G(\mathrm{Ind}_P^Q(F_{\lambda,P})). \tag{2.2.47}$$
En remarquant que $F_{\lambda,Q}$ est un sous-espace de $\mathrm{Ind}_P^Q(F_{\lambda,P})$, on obtient une inclusion $\mathrm{Ind}_Q^G(F_{\lambda,Q}) \subset \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,P})$.

Définition 2.2.12. — On définit alors la représentation $v_P^{an}(\lambda)$ comme étant le quotient de $\mathrm{Ind}_P^G(\lambda)$ par la somme des $\mathrm{Ind}_Q^G(\lambda)$ pour Q sous-groupe parabolique contenant strictement P. Lorsque $P = B$ est un sous-groupe de Borel, on note $\Sigma(\lambda) = v_B^{an}(\lambda)$ et $\mathrm{St}_3^{an} = \Sigma(0)$.

On a une flèche

$$F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_P^G(1)^\infty \xrightarrow{i_{P,\lambda}} \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,P}) \tag{2.2.48}$$

définie par $i_{P,\lambda}(f \otimes g) = fg$. C'est un morphisme continu G-équivariant.

Lemme 2.2.13. — *L'application i_λ est injective d'image fermée.*

Démonstration. — La preuve est la même que pour GL_2 dans [**81**, $(\star)$]. On remarque que l'on peut remplacer G par le sous-groupe compact G_0, P par $P_0 = P \cap G_0$. On choisit I un sous-groupe parahorique de G_0 adapté à P_0 et pour $w \in W_P\backslash W/W_P$, on pose $U_w^+ = wU^+w^{-1} \cap I$. En utilisant la décomposition de Bruhat-Iwahori, $G_0 = \bigcup_{w\in W_P\backslash W/W_P} IwB_0$ ainsi que $I = U_w^+(I \cap wB_0w^{-1})$, on obtient un homéomorphisme

$$\mathrm{Ind}_P^G(\lambda) \simeq \bigoplus_{w\in W_P\backslash W/W_P} C^{an}(U_w^+, F_\lambda^w) \tag{2.2.49}$$

Or on a également

$$F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_P^G(1)^\infty \simeq \bigoplus_{w\in W_P\backslash W/W_P} F_\lambda \otimes C^\infty(U_w^+, K). \tag{2.2.50}$$

L'espace F_λ s'identifie à l'espace des sections globales d'un faisceau cohérent G-équivariant $\mathcal{F}_\lambda$ sur G/P. L'espace $C^{an}(U_w^+, F_\lambda^w)$ est l'ensemble des sections localement analytiques de $\mathcal{F}_\lambda$ sur l'ouvert image de U_w^+. La restriction de $i_{P,\lambda}$ à $F_\lambda \otimes C^\infty(U_w^+, K)$ est donc $f \otimes g \mapsto f|_{U_w^+} \otimes g|_{U_w^+}$. Soit $\sum f_i \otimes 1_{U_i}$ un élément du noyau, écrit de telle sorte que (U_i) soit un recouvrement ouvert disjoint de U_w^+. Alors f_i s'annule sur U_i pour tout i. Mais comme f_i est une fonction algébrique et U_i est dense dans G/P pour la topologie de Zariski, on en déduit $f_i = 0$. Au final on voit que $i_{P,\lambda}$ est injective. $\square$

Corollaire 2.2.14. — *La représentation $v_P^{an}(\lambda)$ est une représentation localement analytique admissible. Ses vecteurs localement algébriques contiennent la représentation irréductible $F_\lambda \otimes v_P$.*

Démonstration. — Elle est admissible car conoyau d'une application dans la catégorie abélienne des représentations admissibles par la proposition 2.2.1. Si on prouve que $F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_P^G(1)^\infty \cap \mathrm{Ind}_Q^G(F_{\lambda,Q}) = F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_Q^G(1)^\infty$, la dernière assertion découle du lemme 2.2.13. Prouvons donc cette égalité. Le terme de droite est clairement contenu dans le terme de gauche. Montrons donc que l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_Q^G(1)^\infty) \subset \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_Q^G(F_{\lambda,Q})) \tag{2.2.51}$$

est une égalité. L'application $\varphi \mapsto (g \mapsto (v \mapsto \varphi(gv)(g)))$ est un isomorphisme G-équivariant

$$\mathrm{Hom}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_Q^G(F_{\lambda,Q})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_Q^G(F_\lambda' \otimes_K F_{\lambda,Q}). \tag{2.2.52}$$

Ainsi, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_Q^G(F_{\lambda,Q}))$ s'identifie aux vecteurs lisses de $\mathrm{Ind}_Q^G(F_\lambda' \otimes_K F_{\lambda,Q})$. Ces éléments sont nécessairement des fonctions à valeurs dans un sous-espace de $F_\lambda' \otimes_K F_{\lambda,Q}$ sur lequel l'action de Q est lisse, c'est-à-dire triviale puisque cette représentation est algébrique. Or on a des isomorphismes

$$\begin{aligned}(F_\lambda' \otimes_K F_{\lambda,Q})^Q &= \mathrm{Hom}_Q(F_\lambda, F_{\lambda,Q}) \\ &= \mathrm{Hom}_G(F_\lambda, F_\lambda)\end{aligned} \tag{2.2.53}$$

par transitivité de l'induction algébrique. Cet espace est donc de dimension 1 par le lemme de Schur. Au final, on a bien

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_Q^G(F_{\lambda,Q}) &= \mathrm{Ind}_Q^G(1)^\infty \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_Q^G(1)^\infty).\end{aligned} \tag{2.2.54}$$

□

On voit donc que contrairement au cas lisse, les représentations $v_P^{an}(\lambda)$ ne sont pas topologiquement irréductibles. On a toujours $v_G^{an}(\lambda) = F_\lambda$. Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ nous allons utiliser les résultats de la section 2.2.1 pour décomposer ces représentations.

2.2.5. Illustration. — Nous sommes maintenant de retour à $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Soit λ un poids dominant. Nous allons appliquer la construction du paragraphe précédent à la décomposition de l'induite $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$.

Rappelons tout d'abord la décomposition du module de Verma $\mathfrak{m}(-\lambda)$. On sait d'après, [**36**, théorème 7.6.23] que pour $w \in W$, il existe un unique morphisme injectif $\mathfrak{m}(-w\cdot\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{m}(-\lambda)$. Posons alors

$$\mathrm{Fil}^i(\mathfrak{m}(-\lambda)) = \sum_{w\in W, l(w)=i} \mathfrak{m}(-w\cdot\lambda). \tag{2.2.55}$$

Si $\mu \in X(T)$, notons $L(\mu)$ le $U(\mathfrak{g})$-module simple de plus petit poids μ. La cause de cette terminologie inhabituelle est que l'on a choisi de considérer des modules de Verma de la forme $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \cdot$ où $\mathfrak{b}$ est le parabolique engendré par les coracines négatives, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{smallmatrix}\right)$. Les gradués de cette filtration sont les suivants.

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}^0(\mathfrak{m}(-\lambda)) &= L(-\lambda) \\ \mathrm{gr}^1(\mathfrak{m}(-\lambda)) &= L(-s_1\cdot\lambda) \oplus L(-s_2\cdot\lambda) \\ \mathrm{gr}^2(\mathfrak{m}(-\lambda)) &= L(-s_1s_2\cdot\lambda) \oplus L(-s_2s_1\cdot\lambda) \\ \mathrm{gr}^3(\mathfrak{m}(-\lambda)) &= L(-s_1s_2s_1\cdot\lambda) = \mathfrak{m}(-s_1s_2s_1\cdot\lambda).\end{aligned} \tag{2.2.56}$$

Ce calcul est fait dans [**54**], §4.11 et §5.4. De plus, les $U(\mathfrak{g})$-modules simples $L(-s_1s_2\cdot\lambda)$ et $L(-s_2s_1\cdot\lambda)$ sont isomorphes aux modules de Verma généralisés $\mathfrak{m}_2(-s_1s_2\cdot\lambda)$ et $\mathfrak{m}_1(-s_2s_1\cdot\lambda)$, et on a des suites exactes, dits complexes BGG généralisés ([**54**, §9.16])

$$\begin{aligned}0 \to \mathfrak{m}_1(-s_2s_1\cdot\lambda) \to \mathfrak{m}_1(-s_2\cdot\lambda) \to \mathfrak{m}_1(-\lambda) \to L(-\lambda) \to 0 \\ 0 \to \mathfrak{m}_2(-s_1s_2\cdot\lambda) \to \mathfrak{m}_2(-s_1\cdot\lambda) \to \mathfrak{m}_2(-\lambda) \to L(-\lambda) \to 0.\end{aligned} \tag{2.2.57}$$

Notons $\mathfrak{d}_1$ l'image de $\mathfrak{m}_1(-s_2s_1\cdot\lambda)$ dans $\mathfrak{m}_1(-s_2\cdot\lambda)$ et $\mathfrak{d}_2$ l'image de $\mathfrak{m}_2(-s_1s_2\cdot\lambda)$ dans $\mathfrak{m}_2(-s_1\cdot\lambda)$.

Soit $\mathrm{Fil}^i(D(G)\otimes_{D(B)}(-\lambda))$ le sous-$D(G)$-module de $D(G)\otimes_{D(B)}(-\lambda)$ engendré par $\mathrm{Fil}^i(\mathfrak{m}(-\lambda))$ et $\mathrm{Fil}_i(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda))$ son dual. La proposition 2.2.2 et l'exemple 2.2.3 appliqués à (2.2.56) nous permettent de calculer les gradués de cette filtration.

Corollaire 2.2.15. — *Soit χ un caractère lisse de T. Il existe une filtration croissante sur* $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)$ *telle que*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Fil}_0(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) = F_\lambda\otimes \mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty\\
&\mathrm{gr}_1(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) = \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1}\otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(\chi)^\infty)^{\mathfrak{d}_1}\oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(\chi))^{\mathfrak{d}_2}\\
&\mathrm{gr}_2(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) = \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}\otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(\chi)^\infty)\oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(\chi)^\infty)\\
&\mathrm{gr}_3(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) = \mathrm{Ind}_B^G(s_1s_2s_1\cdot\lambda\otimes\chi).
\end{aligned}\tag{2.2.58}$$

Soit ρ_∞ une représentation lisse irréductible de L_i. L'application du corollaire 2.2.6 et de l'exemple 2.2.3 aux suites exactes (2.2.57) donne deux suites exactes.

$$\begin{aligned}
&0\to F_\lambda\otimes \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho_\infty)^\infty\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)\\
&\qquad\qquad\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)\to 0\\
&0\to F_\lambda\otimes \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\rho_\infty)^\infty\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{\lambda,2}\otimes_K\rho_\infty)\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes_K\rho_\infty)\\
&\qquad\qquad\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes_K\rho_\infty)\to 0.
\end{aligned}\tag{2.2.59}$$

Corollaire 2.2.16. — *On a des suites exactes*

$$\begin{aligned}
&0\to F_\lambda\otimes \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho_\infty)^\infty\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)^{\mathfrak{d}_1}\to 0\\
&0\to F_\lambda\otimes \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\rho_\infty)^\infty\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{\lambda,2}\otimes_K\rho_\infty)\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes_K\rho_\infty)^{\mathfrak{d}_2}\to 0.
\end{aligned}\tag{2.2.60}$$

et

$$\begin{aligned}
&0\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)^{\mathfrak{d}_1}\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)\to 0\\
&0\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)^{\mathfrak{d}_2}\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,1}\otimes_K\rho_\infty)\to 0.
\end{aligned}\tag{2.2.61}$$

On en déduit immédiatement une décomposition de la représentation $\Sigma(\lambda)=v_B^{an}(\lambda)$.

Corollaire 2.2.17. — *Il existe une filtration croissante sur $v_B^{an}(\lambda)$ telle que*

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}_0 &= F_\lambda\otimes \mathrm{St}_3\\
\mathrm{gr}_1 &= \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_1}\oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2}\\
\mathrm{gr}_2 &= \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})\oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2})\\
\mathrm{gr}_3 &= \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}\otimes \mathrm{St}_2)\oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)\\
\mathrm{gr}_4 &= \mathrm{Ind}_B^G(s_1s_2s_1\cdot\lambda),
\end{aligned}\tag{2.2.62}$$

où St_2 *est vue ici comme une représentation de caractère central trivial du groupe $L_i\simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\times \mathbb{Q}_p^\times$. On a également des suites exactes*

$$\begin{aligned}
&0\to F_\lambda\otimes v_{P_1}\to v_{P_1}^{an}(\lambda)\to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1}\to 0\\
&0\to F_\lambda\otimes v_{P_2}\to v_{P_2}^{an}(\lambda)\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2})^{\mathfrak{d}_2}\to 0.
\end{aligned}\tag{2.2.63}$$

Démonstration. — On considère sur $v_B^{an}(\lambda)$ la filtration image de la filtration 2.2.58 sur $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$. Comme $\mathrm{Ind}_{P_i}^G(F_{\lambda,i})$ est contenu dans $\mathrm{Fil}_1(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda))$ et $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})\cap \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{\lambda,2})=F_\lambda$, il suffit de prouver que

$$\mathrm{Fil}_0(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda))\cap \mathrm{Ind}_{P_i}^G(F_{\lambda,i}) = F_\lambda\otimes_K \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1)^\infty \tag{2.2.64}$$

Cette égalité est une conséquence de

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(F_{\lambda,i})) = (\mathrm{Ind}_{P_i}^G(F_{\lambda,i}\otimes_K F'_\lambda))^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1)^\infty \tag{2.2.65}$$

car la représentation triviale de L_i a multiplicité un dans $F_{\lambda,i}\otimes_K F'_\lambda$. □

Le sous-espace $\mathrm{St}_3 \otimes F_\lambda$ est alors exactement le sous-espace des vecteurs localement algébriques de $\Sigma(\lambda)$.

La proposition 2.2.8 permet de voir que toutes les composantes des décompositions de $\Sigma(\lambda)$ et $v_{P_i}^{an}(\lambda)$ ci-dessus sont irréductibles, exceptées peut-être $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes U)^{\mathfrak{d}_1}$ et $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes U)^{\mathfrak{d}_2}$ pour $U \in \{1, \mathrm{St}_2\}$. Nous allons maintenant prouver l'irréductibilité de ces représentations.

Traitons le cas de P_1, le cas de P_2 étant identique. D'après les suites exactes (2.2.60) et (2.2.61), le $D(G)$-module $(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})'$ peut être vu aussi bien comme quotient de $D(G) \otimes_{D(P_1)} F'_{s_2\cdot\lambda,1}$ que comme sous-module de $D(G) \otimes_{D(P_1)} F'_{\lambda,1}$. Cette remarque est essentielle dans la preuve du lemme suivant, généralisant la proposition 3.5.1 de [**70**].

Lemme 2.2.18. — *Posons $\rho = F_{s_2\cdot\lambda,1}$. Soient w et w' deux élément différents de $W_1\backslash W/W_1$. Il n'y a pas d'application $D(I)$-équivariante de $(\mathrm{Ind}_{P'_w}^I(\rho^{w'})^{\mathfrak{d}_1})'$ dans $(\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\rho^{w})^{\mathfrak{d}_1})'$.*

Démonstration. — Par dualité une telle application donne une application I-équivariante

$$\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\rho^{w})^{\mathfrak{d}_1} \to \mathrm{Ind}_{P'_w}^I(\rho^{w'})^{\mathfrak{d}_1}. \tag{2.2.66}$$

Comme on l'a déjà remarqué, $\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\rho^{w})^{\mathfrak{d}_1}$ est un quotient de $\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\psi^w)$ où $\psi = F_{\lambda,1}$. On obtient donc par prolongement, une application I-équivariante non triviale

$$\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\psi^{w}) \to \mathrm{Ind}_{P_{w'}}^I(\rho^{w'}). \tag{2.2.67}$$

Par la loi de réciprocité de Frobenius il existe une application $P_{w'}$-équivariante

$$\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\psi^{w}) \to \rho^{w'}. \tag{2.2.68}$$

Posons alors $U = P_{w'} \cap wN^+w^{-1}$. Le groupe U agit trivialement sur $\rho^{w'}$. Notons V l'espace sous-jacent de la représentation ψ et Y celui de la représentation ρ, on obtient un morphisme U-équivariant

$$C^{an}(I \cap wN^+w^{-1}, V) \to Y \tag{2.2.69}$$

où U agit par translation à gauche sur le membre de gauche et trivialement sur le membre de droite. On conclut alors à la trivialité d'un tel morphisme exactement comme dans la preuve de la proposition 3.5.1 de [**70**]. Seul le cas $V = Y$ y est traité, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire. □

Lemme 2.2.19. — *Soit π une représentation lisse irréductible de P_w. La représentation*

$$\mathrm{Ind}_{P_w}^I((F_{s_2\cdot\lambda,1})^w \otimes \pi)^{\mathfrak{d}_1} \tag{2.2.70}$$

est topologiquement irréductible.

Démonstration. — Soit $M = (\mathrm{Ind}_{P_w}^I((F_{s_2\cdot\lambda,1})^w \otimes \pi)^{\mathfrak{d}_1})'$. Nous allons prouver que le $D(I)$-module M est simple. Par dualité, cela entraîne que $\mathrm{Ind}_{P_w}^I((F_{s_2\cdot\lambda,1})^w \otimes \pi)^{\mathfrak{d}_1}$ est topologiquement irréductible. Rappelons que M est aussi un sous-module de $D(I) \otimes_{D(P_w)} F'_{\lambda,1}$. Étant l'image d'une application entre $D(I)$-modules coadmissibles, c'est un $D(I)$-module coadmissible ([**85**, corollaire 3.4]). La proposition 2.2.5 montre alors que $M_r = D(I)_r \otimes_{D(I)} M$ est aussi l'adhérence de M dans $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (F_\lambda^w \otimes \pi)'$. Comme on a une suite exacte non scindée de $U(\mathfrak{g})$-modules

$$0 \to L(-s_2\cdot\lambda)^w \to \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})^w \to L(-\lambda)^w \to 0 \tag{2.2.71}$$

et que M_r est un sous-module propre de $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (F'_{\lambda,1} \otimes \pi)^w$, on a nécessairement

$$M_r \cap \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(-\lambda)^w \subset L(-s_2\cdot\lambda)^w \otimes \pi'. \tag{2.2.72}$$

Or d'après [**70**, propositions 3.4.5 et 3.4.6], pour r assez proche de 1, tout sous-$D(I)_r$-module non nul de M_r a une intersection non triviale avec $\mathfrak{m}_P(-\lambda)^w \otimes \pi'$. Comme $L(-s_2\cdot\lambda)^w \otimes \pi'$ est un

$U(\mathfrak{g}) \rtimes P_w$-module simple et engendre M_r en tant que $D(I)_r$-module, M_r est un $D(I)_r$-module simple. On peut finalement en conclure que M est un $D(I)$-module simple. □

Une fois que l'on a ces deux lemmes, on peut exactement copier la preuve de la proposition 2.2.8 pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 2.2.20. — *Soit ρ_∞ une représentation irréductible de $L_1 \simeq L_2$. Alors les représentations $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)^{\mathfrak{d}_1}$ et $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \rho_\infty)^{\mathfrak{d}_2}$ sont topologiquement irréductibles.*

On peut donc en conclure que (2.2.62) donne les composantes de Jordan-Hölder de $\Sigma(\lambda)$, qui est donc de longueur 8. De même, chaque $v_{P_i}^{an}(\lambda)$ est de longueur 2. Nous avons donc prouvé que les induites paraboliques localement analytiques de représentations localement algébriques irréductibles du groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ sont de longueur finie, ce qui, à notre connaissance, n'était pas connu.

2.2.6. Caractères infinitésimaux. — Jan Kohlhaase a prouvé que le centre de l'algèbre $D(G)$ contient le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\otimes K$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Comme dans le cas réel, nous allons prouver que l'algèbre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par un caractère sur les induites localement analytiques. Rappelons la définition du caractère d'Harish-Chandra χ_λ. Soit π la projection de $U(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{t})$ donnée par la décomposition

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{t}) \oplus (\mathfrak{n}^+U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}). \tag{2.2.73}$$

Si $\lambda \in X(T)$, on note χ_λ la restriction de $(\lambda+\delta)\circ\pi$ à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, c'est le caractère d'Harish-Chandra associé à λ. Il se trouve que c'est aussi le caractère central de $\mathfrak{m}(\lambda+\delta)$. On a $\chi_\lambda = \chi_\mu$ si et seulement si il existe $w \in W$ tel que $\mu = w(\lambda)$. Ainsi $\mathfrak{m}(\lambda)$ et $\mathfrak{m}(\mu)$ ont même caractère infinitésimal si et seulement si il existe $w \in W$ tel que $\mu = w * \lambda$.

Proposition 2.2.21. — *Si ρ est la représentation irréductible de plus haut poids λ d'un sous-groupe parabolique P, l'algèbre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit sur $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ par le caractère d'Harish-Chandra $\chi_{\lambda+\delta}$.*

Démonstration. — Si $\alpha \in D(G)$, $X \in U(\mathfrak{g})$ et $f \in C^{an}(G,K)$, on a $\alpha(X\cdot f) = (\alpha\dot{X})(f)$, où $X \mapsto \dot{X}$ est l'unique endomorphisme d'algèbre de $U(\mathfrak{g})$ prolongeant l'endomorphisme $x \mapsto -x$ de $\mathfrak{g}$. Pour tout $\mu \in \rho'$, $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, on a $X(\delta_1\otimes\mu) = \chi_{-\lambda-\delta}(X)(\delta_1\otimes\mu)$. Soit $f \in \mathrm{Ind}_P^G(\rho)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mu[(X\cdot f)(1)] &= \mu[(\delta_1\dot{X})(f)] = (\delta_1\dot{X}\otimes\mu)(f)\\ &= [\dot{X}(\delta_1\otimes\mu)](f) = \chi_{-\lambda-\delta}(\dot{X})(\delta_1\otimes\mu)(f)\\ &= \chi_{\lambda+\delta}(X)\mu[f(1)].\end{aligned} \tag{2.2.74}$$

Ainsi $(X\cdot f)(1) = \chi_{\lambda+\delta}(X)f(1)$. Pour $g\in G$, on a

$$(X\cdot f)(g) = [(\delta_g X)\cdot f](1) = [(\delta_g X\delta_g^{-1})\cdot(\delta_g f)](1) = \chi_{\lambda+\delta}(\delta_g X\delta_g^{-1})f(g). \tag{2.2.75}$$

Or comme $X \mapsto \delta_g X\delta_g^{-1}$ est l'identité sur le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, on obtient finalement $X\cdot f = \chi_{\lambda+\delta}(X)f$. □

Corollaire 2.2.22. — *Pour tout sous-groupe parabolique P, la représentation $v_P^{an}(\lambda)$ a pour caractère infinitésimal $\chi_{\lambda+\delta}$.*

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant.

Lemme 2.2.23. — *Il existe une application continue surjective et G-équivariante*

$$F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3^{an} \twoheadrightarrow \Sigma(\lambda) \tag{2.2.76}$$

dont le noyau ne possède aucun sous-quotient sur lequel $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par $\chi_{\lambda+\delta}$.

Démonstration. — Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant B. On a un isomorphisme topologique G-équivariant $F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_P^G(1) \simeq \mathrm{Ind}_P^G(F_\lambda|_P)$ donné par $v \otimes f \mapsto (g \mapsto g^{-1}v \otimes f(g))$. Comme F_λ est la représentation de plus haut poids λ, il existe une application P-équivariante $F_\lambda \twoheadrightarrow F_{\lambda,P}$, ce qui donne, par composition, une surjection G-équivariante

$$\mathrm{Ind}_P^G(F_\lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,P}). \tag{2.2.77}$$

Il existe sur F_λ une filtration P-équivariante dont les gradués sont des sommes finies de représentations irréductibles de L_P, $F_{\lambda,P}$ apparaissant avec multiplicité 1. Ainsi le noyau K_P de (2.2.77) est aussi muni d'une filtration dont les gradués sont des sommes finies d'induites $\mathrm{Ind}_P^G(F_{\mu,P})$, avec μ caractère de B apparaissant dans F_λ. D'après la proposition 2.2.21, le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par $\chi_{\lambda+\delta}$ sur un sous-quotient de K_P si et seulement si il existe un caractère $\mu \neq \lambda$ apparaissant dans F_λ et $w \in W$ tels que $\mu = w \cdot \lambda$. Mais d'après la proposition 21.3 de [**53**], tous les conjugués sous W d'un tel μ doivent être inférieurs à λ. On doit donc avoir $w^{-1}(w \cdot \lambda) \leq \lambda$, c'est-à-dire $\delta - w^{-1}\delta \leq 0$, c'est-à-dire $\delta \leq w^{-1}\delta$. Ceci ne peut se produire que si $w = 1$ et $\mu = \lambda$. On obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & F_\lambda \otimes_K (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(1) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(1)) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{\lambda,2}) \arrow[d] \\
K_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_B^G(1) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Ind}_B^G(\lambda) \arrow[d] \\
K_3 \arrow[r, hook] & F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3^{an} \arrow[r, two heads] & \Sigma(\lambda)
\end{tikzcd} \tag{2.2.78}$$

où les deux lignes verticales de droite sont exactes. On peut donc conclure. □

2.3. Catégories dérivées et cohomologie localement analytique

Les résultats et rappels de cette partie sont à nouveau valables pour G le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif quelconque sur $\mathbb{Q}_p$. Dans la suite, nous aurons besoin de calculer beaucoup de groupes d'extensions entre représentations localement analytiques, et pas uniquement des Ext^1. Plusieurs définitions de ces groupes d'extensions se présentent et le choix n'est pas facile. Jan Kohlhaase définit dans [**63**] des groupes d'extensions localement analytiques à partir d'une certaine catégorie de $D(G)$-modules munie d'une structure exacte. Cette approche permet de nombreux calculs explicites mais manque certaines extensions importantes. C'est pourquoi nous travaillons plutôt avec la catégorie abélienne de tous les $D(G)$-modules. Néanmoins certains résultats de [**63**] nous serons très utiles pour calculer des groupes d'extensions.

2.3.1. Généralités. — Nous définissons ici les groupes d'extensions que nous utiliserons par la suite et les comparons avec ceux de Jan Kohlhaase. Soit $\mathcal{M}(G)$ la catégorie des $D(G)$-modules.

Définition 2.3.1. — Si V et W sont deux représentations localement analytiques de G, on munit leurs duaux topologiques forts V' et W' de la structure de $D(G)$-module définie dans l'introduction et on pose

$$\mathrm{Ext}^n_G(V, W) = \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(W', V'). \tag{2.3.1}$$

Il s'agit du n-ième groupe d'extensions dans la catégorie abélienne des $D(G)$-modules.

Notons $D^b(\mathcal{M}(G))$ la catégorie dérivée bornée des $D(G)$-modules. Comme une catégorie de modules sur un anneau a suffisamment d'injectifs, on a, pour A et B des $D(G)$-modules

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(A,B) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(A, B[n]). \tag{2.3.2}$$

La proposition suivante nous permet d'associer à tout élément de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(A,B)$ un objet de $D^b(\mathcal{M}(G))$.

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie exacte, on peut définir ([**59**, §11]), une catégorie dérivée bornée $D^b(\mathcal{C})$. C'est une catégorie triangulée. Si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$, on pose, pour tout $q \geq 0$, $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(A, B[q])$.

Proposition 2.3.2. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte. Si A et B sont des objets de $\mathcal{C}$ et c un élément de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(A,B)$, il existe un objet E de $D^b(\mathcal{C})$ s'insérant dans un triangle distingué*

$$B \to E \to A[-n+1] \xrightarrow{c[-n+1]} B[1]. \tag{2.3.3}$$

Un tel E est alors unique à isomorphisme de $D^b(\mathcal{C})$ près.

Démonstration. — C'est presque immédiat à partir des axiomes des catégories triangulées ([**90**, 10.2.1]). L'axiome $(TR1)$ montre que le morphisme $A[-n] \xrightarrow{c[-n]} B$ s'insère dans un triangle exact $A[-n] \xrightarrow{c[-n]} B \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta}$. L'axiome de rotation $(TR2)$ implique alors que le triangle $B \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} A[-n+1] \xrightarrow{-c[-n+1]}$ est exact. On obtient ainsi l'existence de E. Supposons que l'on ait deux triangles exacts $B \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} A[-n+1] \xrightarrow{c[-n+1]}$ et $B \xrightarrow{\alpha'} E' \xrightarrow{\beta'} A[-n+1] \xrightarrow{c[-n+1]}$. L'axiome $(TR3)$ montre alors qu'il existe un morphisme $h : E \to E'$ tel que (id, id, h) soit un morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd} A[-n] \arrow[r, "-c[-n]"'] \arrow[d, "id"] & B \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "id"] & E \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "h"] & A[-n+1] \arrow[d, "id[1]"] \\ A[-n] \arrow[r, "-c[-n]"'] & B \arrow[r, "\alpha'"'] & E' \arrow[r, "\beta'"'] & A[-n+1] \end{tikzcd} \tag{2.3.4}$$

Le lemme des cinq ([**90**, exercice 10.2.2]) montre alors que h est un isomorphisme. □

Soit $\mathcal{M}_c(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée des K-espaces vectoriels localement convexes séparés complets munis d'une action séparément continue de $D(G)$. Une flèche dans cette sous-catégorie est dite forte si son image est fermée et si son noyau et son image possèdent des supplémentaires topologiques. Dans [**63**], Jan Kohlhaase munit la catégorie $\mathcal{M}_c(G)$ d'une structure de catégorie exacte en demandant qu'un complexe soit fortement exact s'il est exact en tant que complexe d'espaces vectoriels et si toutes ses différentielles sont fortes. Il prouve que cette catégorie exacte a suffisamment de projectifs et peut donc définir les groupes d'extensions $\mathcal{E}xt^n_G(V,W)$ pour tous les couples d'objets de cette catégorie. Remarquons que si (ρ, V) est une représentation localement analytique avec V espace localement convexe séparé complet, alors ρ induit une action séparément continue de $D(G)$ sur V en utilisant l'application continue

$$C^{an}(G,V) \hookrightarrow \mathcal{L}_b(D(G),K), \tag{2.3.5}$$

définie dans [**83**, §2], et V peut-être vue comme un objet de $\mathcal{M}_c(G)$.

Le foncteur d'oubli $\mathcal{M}_c(G) \to \mathcal{M}(G)$ est exact, il induit donc un foncteur entre catégories triangulées $D^b(\mathcal{M}_c(G)) \to D^b(\mathcal{M}(G))$. Il induit donc des morphismes

$$\mathcal{E}xt^n_G(A,B) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(A,B). \tag{2.3.6}$$

Alors, pour tout $V \in \mathcal{M}_c(G)$, les théorèmes 4.9 et 6.6 de [**63**] montrent que cette application est un isomorphisme

$$\mathcal{E}xt^n_G(1,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(1,V). \tag{2.3.7}$$

Nous notons donc sans ambiguïté ce groupe $H^n(G,V)$. En fait, on retrouve ainsi les groupes de cohomologie définis par Casselman et Wigner ([**23**] §1 remarque (3)).

Corollaire 2.3.3. — *Si V est de dimension finie, le groupe $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(1,V)$ s'identifie au groupe de cohomologie localement analytique $H^n_{an}(G,V)$ défini par Casselman et Wigner.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la remarque 2.17 et de la proposition 2.18 de [**63**]. □

La particularité essentielle de la représentation triviale, mise en évidence par Kohlhaase, pour démontrer ce théorème est la propriété $(\mathbb{A})$ de [**63**, §4]. Disons qu'un objet F de $\mathcal{M}_c(G)$ satisfait à la condition $(\mathbb{A})$ s'il existe une résolution forte de F par des objets de la forme $D(G) \otimes_{K,\iota} V$ où V est un K-espace vectoriel muni de sa topologie localement convexe la plus fine. On montre alors exactement comme pour [**63**, théorème 4.9] la proposition suivante.

Proposition 2.3.4. — *Si un objet F de $\mathcal{M}_c(G)$ vérifie $(\mathbb{A})$, alors pour tout $V \in \mathcal{M}_c(G)$, on a un isomorphisme :*

$$\mathcal{E}xt^n_G(F,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(F,V). \tag{2.3.8}$$

Il se trouve qu'au moins toutes les représentations localement analytiques de dimension finie vérifient la propriété $(\mathbb{A})$. Pour cela, nous devons expliquer comment passer d'une bonne résolution de la représentation triviale à une bonne résolution d'une représentation quelconque de dimension finie. Soient X un K-espace vectoriel localement convexe séparé muni d'une action séparément continue de $D(G)$ et Y un $D(G)$-module de dimension finie muni de la topologie localement convexe la plus fine, qui est aussi la topologie canonique. Il est prouvé dans l'appendice au §3 de [**86**] que l'on peut munir le produit tensoriel $X \otimes_K Y$ d'une action séparément continue diagonale de $D(G)$, c'est-à-dire d'une action prolongeant l'action de $K[G]$ donnée par $\delta_g \cdot (x \otimes y) = (\delta_g x) \otimes (\delta_g y)$. Si f est une application $D(G)$-équivariante continue de X_1 vers X_2, l'application $f \otimes id$ est un morphisme continu de $D(G)$-modules si l'on munit $X_1 \otimes_K Y$ et $X_2 \otimes_K Y$ de l'action diagonale de $D(G)$.

Lemme 2.3.5. — *Si Y est un $D(G)$-module de dimension finie muni de la topologie localement convexe la plus fine, le $D(G)$-module $D(G) \otimes_K Y$ muni de l'action diagonale est topologiquement isomorphe au $D(G)$-module libre de type fini $D(G) \otimes_K Y$ muni de l'action à gauche $\delta \cdot (\mu \otimes y) = (\delta\mu) \otimes y$.*

Démonstration. — Soient $c : D(G) \to D(G) \otimes_K D(G)/ann(Y)$ l'application définie page 313 de [**86**] et i l'antipode de $D(G)$. Par antipode, nous entendons l'unique endomorphisme continu de $D(G)$ induit par $g \mapsto g^{-1}$. Pour $\mu \in D(G)$ et $y \in Y$, on pose $f(\mu \otimes y) = c(\mu)(1 \otimes y)$ et $g(\mu \otimes y) = (id \otimes i)(c(\mu))(1 \otimes y)$. On vérifie que f est une application $D(G)$-équivariante du $D(G)$-module libre $D(G) \otimes_K Y$ vers $D(G) \otimes_K Y$ muni de l'action diagonale, et que g est $D(G)$-équivariante dans l'autre sens. Pour vérifier que f et g sont réciproque l'une de l'autre, il suffit, par densité de $K[G]$ dans $D(G)$, de le vérifier sur $K[G] \otimes_K Y$. Dans ce cas, on a $f(\delta_h \otimes v) = \delta_h \otimes (\delta_h y)$ et $g(\delta_h \otimes v) = \delta_h \otimes (\delta_{h^{-1}} y)$. □

Lemme 2.3.6. — *Toute représentation localement analytique de dimension finie du groupe G vérifie la propriété $(\mathbb{A})$.*

Démonstration. — Soit ρ un $D(G)$-module de dimension finie. Le théorème 4.9 de [**63**] montre qu'il existe $P.$ une résolution de 1 par des $D(G)$-modules de la forme $D(G) \otimes_{K,\iota} V$ avec V muni de la topologie localement convexe la plus fine. On munit le complexe $P. \otimes_K \rho$ de l'action diagonale de $D(G)$. Le complexe $P. \otimes_K \rho$ est alors une résolution de ρ par des $D(G)$-modules. Chaque terme est de la forme $(D(G) \otimes_K \rho) \otimes_{K,\iota} V$ avec V espace vectoriel muni de la topologie localement convexe la plus fine. Comme $D(G) \otimes_K \rho \simeq D(G)^{\dim_K \rho}$ en tant que $D(G)$-modules, on obtient le résultat. □

On obtient alors un analogue du théorème 8.7 de [**63**].

Corollaire 2.3.7. — *Soit P un sous-groupe parabolique de G. Si ρ est une représentation de dimension finie de P et M un objet de $\mathcal{M}_c(G)$, on a un isomorphisme :*

$$\mathcal{E}xt^n_G(D(G) \otimes_{D(P)} \rho', M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(D(G) \otimes_{D(P)} \rho', M). \tag{2.3.9}$$

En particulier, si ρ est une représentation de dimension finie de P et V une représentation localement analytique de G sur un espace de type compact, alors le théorème 3.2 de [**63**] montre que

$$\mathcal{E}xt^q_G(V, \mathrm{Ind}^G_P(\rho)) \simeq \mathrm{Ext}^q_G(V, \mathrm{Ind}^G_P(\rho)). \tag{2.3.10}$$

Si χ est un caractère localement analytique du centre de G, on définit

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(V, W) = \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\chi}(W', V'), \tag{2.3.11}$$

où $\mathcal{M}(G)_\chi$ désigne la sous-catégorie des $D(G)$-modules sur lesquels Z agit par χ^{-1}. On note également $\mathcal{E}xt_{G,\chi}$ le foncteur défini à partir de la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_c(G)$ constituée des $D(G)$-modules sur lesquels Z agit à travers χ. L'isomorphisme (2.3.10) est alors vrai avec des caractères centraux

$$\mathcal{E}xt^q_{G,\chi}(V, \mathrm{Ind}^G_P(\rho)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(V, \mathrm{Ind}^G_P(\rho)) \tag{2.3.12}$$

si le centre de G agit sur V et ρ à travers le caractère χ.

Remarque 2.3.8. — Dans le §4 de [**63**], Jan Kohlhaase montre que les $\mathcal{E}xt^1_G(V, W)$ ne coïncident pas avec $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)}(W', V')$ même lorsque V et W sont des représentations admissibles. On peut considérer l'exemple de la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B_2}(1)^\infty \to \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B_2}(1) \to \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B_2}(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1) \to 0 \tag{2.3.13}$$

qui est non scindée dans la catégorie des K-espaces vectoriels localement convexes. On a $\mathcal{E}xt^1_G(\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B_2}(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1), \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B_2}(1)^\infty) = 0$, alors que

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B_2}(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1), \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B_2}(1)^\infty) = 1. \tag{2.3.14}$$

Ces derniers groupes d'extensions sont donc plus adaptés à nos besoins.

Remarque 2.3.9. — Soit U le foncteur d'oubli de la catégorie $\mathcal{M}_c(G)$ vers la catégorie LC_K des K-espaces vectoriels localement convexes. Il possède un adjoint à gauche F donné par $F(V) = D(G)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$. La discussion de [**90**, 8.6.2] montre que le foncteur $\perp_G = F \circ U$ est un cotriple de $\mathcal{M}_c(G)$ et permet, d'après [**90**, 8.6.4] d'associer à tout $V \in \mathcal{M}_c(G)$, un complexe simplicial $\perp_{G,\cdot}V$ dans la catégorie $\mathcal{M}_c(G)$. Il se trouve que le complexe différentiel associé à ce complexe simplical est exactement le complexe noté $B.(G, V)$ par Jan Kohlhaase dans [**63**, §2]. Jan Kohlhaase définit alors les groupes d'homologie de V comme étant l'homologie du complexe $(B_q(G, V)\tilde{\otimes}_{D(G),\iota}K)_{q\geq 0}$. Ces espaces d'homologie sont alors munis de la topologie induite. L'intérêt de l'interprétation de $B.(G, V)$ comme complexe standard associé à un cotriple est d'obtenir une structure de complexe simplicial sur $B.(G, V)$. Les groupes $H^q(G, V)$ sont alors les groupes de cohomologie du complexe $\mathcal{L}_G(B.(G,K),V)$ et ils sont munis de la topologie induite par la topologie forte. De plus si la topologie de V est de type compact, on a, d'après la remarque 2.17 de [**63**], un isomorphisme topologique $\mathrm{Hom}_K(B_q(G,K),V) \simeq C^{an}(G^{q+1},V)$, et donc le complexe $C_u^{\cdot} = (C^{an}(G^{q+1},V))_{q\geq 0}$ est muni d'une structure de complexe cosimplical. Cette remarque nous sera très utile dans la section suivante pour établir l'existence d'un cup-produit sur la cohomologie localement analytique de la représentation triviale.

2.3.2. Cup-produits. — Dans cette partie, nous construisons un cup-produit sur l'espace de cohomologie $H^*(G,K)$, dont l'existence est une suggestion de Jan Kohlhaase ([**63**, remarque 8.10]). Pour cela nous utilisons le fait que le complexe dont la cohomologie est $H^*(G,K)$ est muni d'une structure cosimpliciale ([**90**, §8]).

Soit $[n]$ l'ensemble des entiers de 0 à n. Notons Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n]$ et les morphismes de $[n]$ dans $[m]$ sont les applications croissantes. Un complexe cosimplicial C est un foncteur covariant de la catégorie Δ dans la catégorie des $D(G)$-modules. On note C^n l'image de $[n]$. D'après le corollaire 8.1.4 de [**90**], un complexe cosimplicial est une suite de $D(G)$-modules $(C^n)_{n\geq 0}$ et la donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'opérateurs $\partial^i : C^{n-1} \to C^n$ et $\sigma^i : C^{n+1} \to C^n$ pour i variant entre 0 et n et satisfaisant aux relations de ce même corollaire. Si C est un complexe cosimplicial, le complexe associé est le complexe $(C^n)_{n\geq 0}$ muni des différentielles

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial^i. \tag{2.3.15}$$

Soit G un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique. Posons $C_u^n(G) = C^{an}(G^{n+1},K)$ le K-espace vectoriel des applications localement analytiques de G^{n+1} dans K. La remarque 2.3.9 montre qu'il existe des applications ∂^i et σ^i G-équivariantes qui font de $C_u^{\cdot}(G)$ une résolution cosimpliciale de la représentation triviale de 1. Posons $C^{\cdot}(G) = C_u^{\cdot}(G)^G$. Muni de la restrictions des applications ∂^i et σ^i, c'est un complexe cosimplical de K-espaces vectoriels et sa cohomologie est la cohomologie localement analytique $H^q(G,1)$.

Soient G et H deux groupes de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytiques.

***Théorème 2.3.10* (Formule de Künneth).** — *On a un isomorphisme*

$$\sum_{p+q=n} i_{p,q} : H^p(G,K) \otimes H^q(H,K) \xrightarrow{\sim} H^{p+q}(G\times H,K). \tag{2.3.16}$$

De plus le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} H^p(G,K)\otimes H^q(H,K) \arrow[r, "i_{p,q}"] \arrow[d, "(-1)^{pq}"'] & H^{p+q}(G\times H,K) \\ H^q(H,K)\otimes H^q(G,K) \arrow[ur, "i_{q,p}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.3.17}$$

Démonstration. — La somme

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(C^{\cdot}(G)) \otimes_K H^q(C^{\cdot}(H))$$

est la cohomologie du complexe total $Tot^{\cdot}(C^{\cdot}(G)\otimes_K C^{\cdot}(H))$ associé au bicomplexe cosimplicial $B^{\cdot\cdot} = C^{\cdot}(G)\otimes_K C^{\cdot}(H)$. Nous allons montrer que la cohomologie de ce bicomplexe est la même que celle du bicomplexe $\hat{B}^{\cdot\cdot} = C^{\cdot}(G)\hat{\otimes}_{K,\pi} C^{\cdot}(H)$. Notons $E_2^{\cdot\cdot}(B)$ les termes de la première suite spectrale associée à $B^{\cdot\cdot}$ et $E_2^{\cdot\cdot}(\hat{B})$ ceux de la première suite spectrale associée à $\hat{B}^{\cdot\cdot}$. Comme le foncteur $C^{an}(G^p,K)\hat{\otimes}_{K,\pi}\cdot$ envoie les suites fortement exactes sur des suites exactes, on a $E_2^{p,q} \simeq H^p(G,K)\otimes H^q(H,K)$, ainsi l'inclusion de $B^{\cdot\cdot}$ dans $\hat{B}^{\cdot\cdot}$ induit un isomorphisme au niveau des E_2, donc en cohomologie. Soit $diag(\hat{B}^{\cdot\cdot})$ le complexe cosimplicial diagonal de $\hat{B}^{\cdot\cdot}$ défini dans [**90**, §8.5]. Il s'agit de $diag(\hat{B}^{\cdot\cdot})^p = \hat{B}^{p,p} = C^{an}(G^p, K)\hat{\otimes}_{K,\pi}C^{an}(H^p, K)$ muni de la structure simpliciale évidente. D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber ([**90**, théorème 8.5.1]), les complexes $diag(\hat{B}^{\cdot\cdot})$ et $Tot(\hat{B}^{\cdot\cdot})$ sont homotopes. De plus, comme $C^{an}(G^p, K)\hat{\otimes}_{K,\pi}C^{an}(H^q, K) \simeq C^{an}(G^p \times H^q, K)$, le complexe cosimplical $diag(\hat{B}^{\cdot\cdot})$ est isomorphe à $C^{\cdot}(G \times H)$. Au final, on a un isomorphisme naturel

$$H^p(G, K) \otimes_K H^q(H, K) \xrightarrow{i_{p,q}} H^{p+q}(G \times H, K). \tag{2.3.18}$$

La deuxième assertion est un calcul simple sur le bicomplexe $C^{\cdot}(G) \otimes C^{\cdot}(H)$. □

Si on note D_G l'application diagonale de G dans $G\times G$. On définit l'opération de cup-produit sur $H^*(G, K)$ comme étant

$$\alpha \cup \beta = D_G^*(i_{p,q}(\alpha \otimes \beta)) \tag{2.3.19}$$

pour $\alpha \in H^p(G, K)$ et $\beta \in H^q(H, K)$. Le théorème 2.3.10 montre alors que le cup-produit fait de $H^*(G, K)$ une K-algèbre graduée anti-commutative. De plus l'isomorphisme de Künneth

$$H^*(G, K) \otimes_K H^*(H, K) \xrightarrow{\sim} H^*(G \times H, K) \tag{2.3.20}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Corollaire 2.3.11. — *Soit G le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}_p$. Soit Z le centre de G et D son groupe dérivé. On a un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$H^*(G, K) \xrightarrow{\sim} H^*(Z, K) \otimes_K H^*(D, K) \tag{2.3.21}$$

provenant de l'application $Z\times D \to G$. De plus l'algèbre de cohomologie $H^*(Z, K)$ est isomorphe à l'algèbre extérieure graduée $\bigwedge^* \mathrm{Hom}(Z, K)$.

Démonstration. — Montrons d'abord que $H^*(Z, K) \simeq \bigwedge^* \mathrm{Hom}(Z, K)$. On utilise $H^1(Z, K) = \mathrm{Hom}(Z, K)$, ainsi que l'isomorphisme $Z \simeq (\mathbb{Q}_p^\times)^r \simeq (\mathbb{Z}_p^\times)^r \times \mathbb{Z}^r$. D'après l'isomorphisme (2.3.20), il suffit de prouver que $H^q(\mathbb{Z}_p^\times, K) = H^q(\mathbb{Z}, K) = 0$ pour $q \geq 2$. Dans le premier cas, c'est une conséquence de [**90**, exemple 6.1.4], et dans le deuxième cas, de la décomposition $H^*(\mathbb{Z}_p^\times, K) = H^*(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, K) \otimes H^*(\mathbb{Z}_p, K)$, du corollaire 4.6 de [**63**], ainsi que du fait que si H est un groupe fini, $H^q(H, K) = 0$ si $q \geq 1$ ([**90**, proposition 6.1.10]). Comme le noyau et le conoyau de $Z \times D \to G$ sont des groupes finis, la deuxième assertion du corollaire résulte de la nullité de la cohomologie d'un groupe fini et de la suite spectrale (83) de [**63**]. □

2.3.3. Comparaison avec l'homologie d'algèbres de Lie. — Nous faisons quelques rappels sur la cohomologie d'algèbres de Lie et montrons qu'elle permet, dans certains cas, de déterminer une partie de la cohomologie localement analytique d'un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie définie sur $\mathbb{Q}_p$. On note *gmod* la catégorie des K-espaces vectoriels munis d'une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. La catégorie *gmod* est équivalente à la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules. C'est une catégorie abélienne. Le foncteur $M \mapsto 1 \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ de *gmod* vers la catégorie des K-espaces vectoriels est exact à droite, on note $H_q(\mathfrak{g}, M)$ son q-ième foncteur dérivé à gauche. De même le foncteur $M \mapsto M^{\mathfrak{g}}$ est exact à gauche et on note $H^q(\mathfrak{g}, M)$ son q-ième foncteur dérivée à droite.

Considérons U le foncteur d'oubli de la catégorie *gmod* vers la catégorie Vec_K des K-espaces vectoriels. Il possède un adjoint à gauche donné par $F(V) = U(\mathfrak{g}) \otimes_K V$. Ainsi on obtient un cotriple $\perp_{\mathfrak{g}} = FU$ sur la catégorie *gmod*. Notons $S.(\mathfrak{g})$ le complexe simplicial standard associé à la représentation triviale de $\mathfrak{g}$ au moyen de ce cotriple. Comme l'image essentielle de F est la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules libres, la proposition 8.6.13 de [**90**] nous montre que le complexe différentiel $S_\cdot(\mathfrak{g})$ est une résolution libre du $\mathfrak{g}$-module trivial. Ainsi on peut calculer l'homologie $H_q(\mathfrak{g}, V)$ comme étant l'homologie du complexe $S_\cdot(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{g})}K$ et la cohomologie $H^q(\mathfrak{g}, V)$ comme la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(S_\cdot(\mathfrak{g}), V)$.

Posons $S^\cdot(\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}_K(S_\cdot(\mathfrak{g}), K)$, $\partial^i(f) = f \circ \partial_i$ et $\sigma^i(f) = f \circ \sigma_i$. On munit ainsi $S^\cdot(\mathfrak{g})$ d'une structure de complexe cosimplicial, résolution libre du $\mathfrak{g}$-module trivial.

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie. D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber, le complexe total associé au complexe bi-cosimplicial $S^\cdot(\mathfrak{g}) \otimes_K S^\cdot(\mathfrak{h})$ est naturellement homotope au complexe diagonal associé, c'est-à-dire le complexe

$$(\mathrm{Hom}_K(S_q(\mathfrak{g}, K), K) \otimes \mathrm{Hom}_K(S_q(\mathfrak{h}), K) \simeq \mathrm{Hom}_K(S_q(\mathfrak{g}) \otimes_K S_q(\mathfrak{h}), K)))_{q\geq 0}. \tag{2.3.22}$$

Comme on a, pour V un $\mathfrak{g}$-module et W un $\mathfrak{h}$-module, $\perp_{\mathfrak{g}}(V) \otimes_K \perp_{\mathfrak{h}}(W) \simeq \perp_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}}(V \otimes_K W)$ en tant que $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$-modules, les complexes de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$-modules $diag(S^\cdot(\mathfrak{g}) \otimes S^\cdot(\mathfrak{h}))$ et $S^\cdot(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h})$ sont isomorphes. Au final, on obtient un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels gradués

$$H^*(\mathfrak{g}, K) \otimes H^*(\mathfrak{h}, K) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{h}, K). \tag{2.3.23}$$

On peut donc définir une application

$$\cup : \; H^*(\mathfrak{g}, K) \otimes_K H^*(\mathfrak{g}, K) \to H^*(\mathfrak{g}, K) \tag{2.3.24}$$

en composant l'isomorphisme (2.3.23) avec le morphisme $H^*(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, K) \to H^*(\mathfrak{g}, K)$ provenant de l'inclusion diagonale $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. On appelle cette composée le cup-produit, elle munit le K-espace vectoriel gradué $H^*(\mathfrak{g}, K)$ d'une structure de K-algèbre graduée.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie réductive. D'après le théorème 9.3 de [**65**], on a un isomorphisme $H_p(\mathfrak{g}, K) \simeq (\bigwedge^p \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, ce qui munit le K-espace vectoriel gradué $H_*(\mathfrak{g}, K) \simeq (\bigwedge^* \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ d'une structure de K-algèbre graduée. On note $D(\mathfrak{g})$ le K-sous-espace de $H_*(\mathfrak{g}, K)$ engendré par les éléments $u\wedge v$, où u et v parcourent les éléments de $H_*(\mathfrak{g}, K)$ de degré supérieur ou égal à 1. On note $P(\mathfrak{g})'$ le sous-espace gradué orthogonal de $H^*(\mathfrak{g}, K)$, c'est l'espace des éléments primitifs associés à $\mathfrak{g}$. Si on pose $P^n(\mathfrak{g}) = P(\mathfrak{g})' \cap H^n(\mathfrak{g}, K)$, on a $P(\mathfrak{g})' = \bigoplus_n P^n(\mathfrak{g})$.

Théorème 2.3.12 **(Koszul)**. — *On a un isomorphisme de K-algèbres graduées*

$$\bigwedge\nolimits^* P(\mathfrak{g})' \xrightarrow{\sim} H^*(\mathfrak{g}, K). \tag{2.3.25}$$

De plus, si φ est un morphisme d'algèbres de Lie réductives $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, le morphisme φ^* de $H^*(\mathfrak{g}, K)$ vers $H^*(\mathfrak{h}, K)$ envoie $P(\mathfrak{g})'$ dans $P(\mathfrak{h})'$ et est donc entièrement déterminé par sa restriction à $P(\mathfrak{g})'$.

Koszul montre aussi ([**65**, théorème 10.1]) que si $P^n(\mathfrak{g})$ est non nul, n est nécessairement impair. De plus le théorème 11.1 de [**65**] montre que si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $P^1(\mathfrak{g}) = 0$. On en déduit que pour $\mathfrak{g}$ semi-simple

$$H^1(\mathfrak{g}, K) = H^2(\mathfrak{g}, K) = 0. \tag{2.3.26}$$

Exemple 2.3.13. — Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. L'espace $P^3(\mathfrak{h})$ s'identifie à l'espace des applications trilinéaires alternées invariantes de $\mathfrak{g}$ dans K. C'est un espace de dimension 1 engendré par $(X, Y, Z) \mapsto \mathrm{Tr}(X[Y, Z])$. Soient φ_1 et φ_2 les deux injections de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie par $M \mapsto \left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $M \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{smallmatrix}\right)$. L'image de cette forme trilinéaire invariante par φ_1^* et φ_2^* est la même, ainsi on a $\varphi_1^* = \varphi_2^*$, et ces applications induisent un isomorphisme de restriction $H^3(\mathfrak{g}, K) \xrightarrow{\sim} H^3(\mathfrak{h}, K)$.

Dans certains cas, il nous sera utile de disposer d'une topologie sur les espaces de cohomologie d'algèbres de Lie. En effet, soit V un K-espace vectoriel localement convexe muni d'une action continue d'algèbre de Lie, c'est-à-dire une action d'algèbre de Lie telle que l'application $\mathfrak{g}\times V \to V$ soit continue, $\mathfrak{g}$ étant muni de sa topologie canonique d'espace vectoriel de dimension finie. On munit alors les espaces $S_p(\mathfrak{g})$ de la topologie localement convexe la plus fine. Comme cette topologie est la topologie limite inductive obtenue en écrivant V comme la limite inductive de ses sous-espaces de dimension finie, et que l'action de $\mathfrak{g}$ est localement finie, l'action de $\mathfrak{g}$ sur $S_p(\mathfrak{g})$ est continue. On munit $S_p(\mathfrak{g})\otimes_K V$ de la topologie produit tensoriel inductive ([**78**, §17]) et $S_p(\mathfrak{g}, V) = S_p(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{g})} V$ de la topologie quotient. Les différentielles du complexe $S_.(\mathfrak{g}, V)$ sont continues pour ces topologies. On munit les espaces $H_p(\mathfrak{g}, V)$ de la topologie quotient. En général il n'y a pas de raison pour que ces espaces soient séparés. De même, l'espace $\mathrm{Hom}_K(S_p(\mathfrak{g}), V)$ est également l'espace des applications linéaires continues de $S_p(\mathfrak{g})$ vers V, on peut le munir de la topologie forte, ce qui munit les espaces $H^q(\mathfrak{g}, V)$ d'une topologie.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytique G. L'inclusion $U(\mathfrak{g}) \hookrightarrow D(G)$ est continue si on munit $U(\mathfrak{g})$ de la topologie localement convexe la plus fine. On en déduit, pour tout $V \in \mathcal{M}_c(G)$, une application $\perp_{\mathfrak{g}}(V) \to \perp_G(V)$ qui, par fonctorialité, induit des morphismes de complexes simpliciaux $S_.(\mathfrak{g}, V) \to B_.(G, V)$ et donc des applications $H_q(\mathfrak{g}, V) \to H_q(G, V)$. De même on obtient des applications $H^q(G, V) \to H^q(\mathfrak{g}, V)$. Il est facile de voir qu'avec les topologies que nous avons définies, ces applications sont continues. De plus, si V est la représentation triviale, ces morphismes sont des morphismes d'algèbres graduées puisqu'ils respectent la structure simpliciale des complexes. Enfin, si V est de dimension finie et G est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe semi-simple défini sur $\mathbb{Q}_p$, les preuves des théorèmes 1 et 3 de [**23**] montrent que le morphisme

$$H^q(G, V) \to H^q(\mathfrak{g}, V) \tag{2.3.27}$$

est un isomorphisme.

Corollaire 2.3.14. — *Soit G le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}_p$. Soit Z le centre de G et D son groupe dérivé. L'algèbre de cohomologie $H^*(G, K)$ est isomorphe à l'algèbre extérieure graduée de l'espace vectoriel gradué*

$$\mathrm{Hom}(Z, K) \oplus P(\mathfrak{d})', \tag{2.3.28}$$

où les éléments de $\mathrm{Hom}(Z, K)$ *ont degré* 1.

Enfin, pour calculer explicitement la cohomologie d'algèbres de Lie, il est utile d'avoir une résolution libre du $\mathfrak{g}$-module trivial plus petite que la résolution standard. Il s'agit de la résolution de Chevalley-Eilenberg.

Pour $p \geq$, posons $V_p(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \otimes_K \bigwedge^p \mathfrak{g}$ muni de l'action diagonale de $\mathfrak{g}$. On définit une application $d_p : V_p(\mathfrak{g}) \to V_{p-1}(\mathfrak{g})$ pour $p \geq 1$ en posant

$$\begin{aligned} d(u\otimes x_1\wedge\cdots\wedge x_p) = &\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}ux_i\otimes x_1\wedge\cdots\wedge\hat{x}_i\wedge\cdots\wedge x_p \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq p}(-1)^{i+j}u\otimes[x_i,x_j]\wedge x_1\wedge\cdots\wedge\hat{x}_i\wedge\cdots\wedge\hat{x}_j\wedge x_p. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Les applications d_p sont $\mathfrak{g}$-équivariantes. De plus, si ϵ est l'application augmentation $V_0(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \to K$, le théorème 7.7.2 de [**90**] montre que $V_.(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} K$ est une résolution projective du K-module trivial. On l'appelle la résolution de Chevalley-Eilenberg.

Si M est un $\mathfrak{g}$-module, on pose $(V_.(\mathfrak{g}, M), d_.) = M \otimes_{U(\mathfrak{g})} V_.(\mathfrak{g})$ le complexe obtenu par application du foncteur $M \otimes_{U(\mathfrak{g})} \cdot$ et $(V^\cdot(\mathfrak{g}, M), \delta^\cdot)$ le complexe obtenu par application du foncteur

$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\cdot, M)$. L'homologie de M est alors l'homologie du complexe $V_\cdot(\mathfrak{g}, M)$ et la cohomologie de M, la cohomologie de $V^\cdot(\mathfrak{g}, M)$. Nous avons des isomorphismes de K-espaces vectoriels

$$V_p(\mathfrak{g}, M) \simeq M \otimes_K \bigwedge^p \mathfrak{g}, \quad V^p(\mathfrak{g}, M) \simeq \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^p \mathfrak{g}, M), \tag{2.3.30}$$

sous lesquels les différentielles se réécrivent

$$\begin{aligned} d_p(v \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = &\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} x_i v \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} v \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge x_p \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

$$\begin{aligned} \delta^p(f)(x_1, \dots, x_p) = &\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} x_i f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p). \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Une conséquence immédiate de l'existence de cette résolution est que si V est un $\mathfrak{g}$-module, on a

$$H_q(\mathfrak{g}, V) = H^q(\mathfrak{g}, V) = 0 \tag{2.3.33}$$

dès que $q > \dim \mathfrak{g}$. De plus si $\mathfrak{g}$ est l'unique algèbre de Lie de dimension 1, $H_0(\mathfrak{g}, V)$ est l'espace des coinvariants d'un élément non nul de $\mathfrak{g}$ et $H_1(\mathfrak{g}, V)$ est l'espace des invariants d'un élément non nul de $\mathfrak{g}$.

Si $f \in V^p(\mathfrak{g}, M')$ et $v \otimes x \in V_p(\mathfrak{g}, M)$, on pose $\langle f, v \otimes x\rangle = f(x)(v)$. On a alors

$$\langle \delta^p(f), v \otimes x\rangle + \langle f, d_p(v \otimes x)\rangle = 0. \tag{2.3.34}$$

On obtient donc un accouplement

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^p(\mathfrak{g}, M') \times H_p(\mathfrak{g}, M) \to K, \tag{2.3.35}$$

qui induit un isomorphisme

$$H^n(\mathfrak{g}, M') \simeq H_n(\mathfrak{g}, M)' \tag{2.3.36}$$

d'après [**61**, (6.29)]. En particulier, si M est de dimension finie sur K, on a également $H^n(\mathfrak{g}, M) \simeq H_n(\mathfrak{g}, M')'$.

2.3.4. Un résultat de dualité. — Lorsque N est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique unipotent défini sur $\mathbb{Q}_p$, Jan Kohlhaase prouve ([**63**, théorème 7.1])

$$H_q(\mathfrak{n}, M)_N \simeq H_q(N, M), \tag{2.3.37}$$

où $(\cdot)_N$ désigne le foncteur des N-coinvariants. Cet isomorphisme est très utile pour calculer cette homologie et n'a pas d'analogue pour la cohomologie (sauf dans le cas d'un groupe compact, [**63**, théorème 4.11]). C'est pourquoi il est nécessaire de lier par dualité homologie et cohomologie. Le théorème 3.5 de [**63**] répond en partie à ce besoin. Nous montrons ici que dans le cas d'une représentation localement analytique sur un espace de type compact, nous pouvons préciser ce résultat.

Théorème 2.3.15. — *Soit H un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique résoluble tel que pour tout sous-groupe compact ouvert H_0, H/H_0 soit dénombrable. Soit Σ une représentation localement analytique de H sur un espace de type compact. Si tous les $H_q(H, \Sigma)$ ou tous les $H^q(H, \Sigma')$ sont des espaces topologiques séparés, pour la topologie définie dans la remarque 2.3.9, alors*

$H_q(H,\Sigma)$ *est de type compact,* $H^q(H,\Sigma')$ *est un espace de Fréchet nucléaire et on a un isomorphisme topologique*

$$H^q(H,\Sigma') \simeq H_q(H,\Sigma)'. \tag{2.3.38}$$

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin de préciser le théorème 6.5 de [**63**]. Soit $(\mathbb{A}_d)$ la propriété suivante : la représentation triviale de H a une résolution fortement exacte par des $D(H)$-modules de la forme $D(H)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$, où V est un K-espace vectoriel de dimension dénombrable muni de la topologie la plus fine.

Lemme 2.3.16. — *Sous les hypothèses du théorème 2.3.15, le groupe H vérifie la condition $(\mathbb{A}_d)$.*

Démonstration. — On se ramène, comme dans la preuve de [**63**, 6.5], au cas où H est commutatif. Soit alors H_0 un sous-groupe compact ouvert distingué dans H. L'espace $D(H/H_0)$ est l'algèbre du groupe discret H/H_0, donc est de dimension dénombrable, il en est donc de même des espaces

$$B_q(H/H_0, 1) \simeq K[H/H_0] \otimes_K \cdots \otimes_K K[H/H_0]. \tag{2.3.39}$$

La résolution $B.(H/H_0, 1)$ est alors une résolution fortement exacte de 1. Comme chaque $B_q(H/H_0, 1)$ est de dimension dénombrable, on voit que H/H_0 vérifie $(\mathbb{A}_d)$. De plus d'après le théorème 4.5 de [**63**], le groupe H_0 vérifie aussi $(\mathbb{A}_d)$. La preuve de [**63**, 6.2] montre que H vérifie également $(\mathbb{A}_d)$. □

Démonstration du théorème 2.3.15. — Nous reprenons la preuve du théorème 3.5 de [**63**] avec nos hypothèses. Soit $P.$ une résolution fortement exacte de 1 par des $D(H)$-modules du type $D(H)\hat{\otimes}_{D(H),\iota}V$, avec V un espace vectoriel localement convexe de dimension dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine. Comme en [**63**, (41)], on a un isomorphisme topologique

$$\mathcal{L}_H(P_q, \Sigma') \simeq \mathcal{L}(P_q\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}\Sigma, K). \tag{2.3.40}$$

$$\simeq (P_q\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}\Sigma)' \tag{2.3.41}$$

Posons $P_q = D(H)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$ avec V de dimension dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine. D'après le lemme 2.6 de [**63**], $P_q\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}\Sigma \simeq V\hat{\otimes}_{K,\iota}\Sigma$. Le corollaire 1.2.14 de [**64**] montre que cet espace localement convexe est une somme directe dénombrable d'espaces de type compact. D'après [**83**, proposition 1.2(*ii*)], c'est lui-même un espace de type compact. Notons $(C., d.)$ le complexe $P.\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}\Sigma$. C'est un complexe d'espaces localement convexes de type compact à différentielles continues. De plus, ses espaces de cohomologie sont les $H_q(H,\Sigma)$. Par hypothèse, leur topologie est séparée, ce qui implique que pour tout q, $\mathrm{Im}(d_{q+1})$ est un sous-espace fermé de $\ker(d_q)$, donc de C_q. D'après la proposition 8.8 de [**78**], toute surjection continue entre deux espaces de type compact est stricte, donc les flèches du complexe $C.$ sont strictes. Posons $D^q = (C_q)'$ et δ^q la flèche duale de d_{q+1}. Le complexe $(D^\cdot, \delta^\cdot)$ est donc un complexe d'espaces de Fréchet nucléaires dont les flèches sont strictes. On conclut alors en appliquant le corollaire 1.4 de [**83**]. Si on part de l'hypothèse que ce sont les espaces $H^q(H,\Sigma')$ qui sont séparés, on sait que ce sont les flèches δ^q qui ont une image fermées. Encore une fois, une surjection continue entre espaces de Fréchet est stricte, donc les flèches δ^q sont strictes et le même raisonnement montre que les flèches d_q le sont aussi. □

Revenons au cas où N est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{Q}_p$. Pour pouvoir utiliser le théorème 7.1 de [**63**] afin de déterminer la topologie de $H_q(N,\Sigma)$, il faut pouvoir comparer cette topologie avec celle de $H_q(\mathfrak{n},\Sigma)$. Tout d'abord les groupes de cohomologie

$H_q(\mathfrak{n},\Sigma)$ sont les groupes de cohomologie du complexe de Chevalley-Eilenberg $\bigwedge^{\cdot}\mathfrak{n}\otimes\Sigma$. On les munit de la topologie produit tensoriel et les espaces $H_q(\mathfrak{n},\Sigma)$ sont alors munis de la topologie de sous-quotient. Soit $P.$ une résolution du N-module trivial comme en $(\mathbb{A}_d)$. Rappelons que le complexe de Chevalley-Eilenberg $V.(\mathfrak{n})$ est une résolution projective du $\mathfrak{n}$-module trivial par des $U(\mathfrak{n})$-modules libres. On obtient donc un morphisme de complexes $V.(\mathfrak{n})\to P.$, continu car $V_p(\mathfrak{n})$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine. On obtient donc un morphisme continu $\bigwedge^{\cdot}\mathfrak{n}\otimes\Sigma\to P.\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\Sigma$, induisant l'application $H_q(\mathfrak{n},\Sigma)\to H_q(N,\Sigma)$ définie au paragraphe précédent.

Lemme 2.3.17. — *Soient $(A.,d.)$ et $(B.,\delta.)$ deux complexes de K-espaces localement convexes de type compact, et $f: A.\to B.$ un morphisme continu induisant une surjection en homologie. Le morphisme induit $H.(A)\to H.(B)$ est alors strict.*

Démonstration. — Comme f_q induit une surjection en homologie, l'application $F_q=f_q+\delta_{q+1}$ induit une surjection continue $\ker d_q\oplus B_{q+1}\to\ker\delta_q$ pour tout q. Or les espaces $\ker d_q$ et $\ker\delta_q$ étant des sous-espaces fermés de A_q et B_q, ils sont de type compact. On en conclut que l'application F_q est une application stricte de $\ker d_q\oplus B_{q+1}$ sur $\ker\delta_q$ car toute application entre espaces de type compact est stricte. Les espaces $H_q(A)=(\ker d_q\oplus B_{q+1})/(\mathrm{Im} d_{q+1}\oplus B_{q+1})$ et $H_q(B)=\ker\delta_q/\mathrm{Im}\delta_{q+1}$ étant alors munis de la topologie quotient, on en conclut que $H_q(f)$, qui est aussi le quotient de F_q, est stricte. □

Le théorème 7.1 de [**63**] nous permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.18. — *Si l'espace topologique de Σ est de type compact et si $H_q(\mathfrak{n},\Sigma)_N$ est séparé, c'est aussi le cas de $H_q(N,\Sigma)$ et ces espaces sont alors topologiquement isomorphes. De plus, on a un isomorphisme topologique*

$$H^q(N,\Sigma')\simeq H_q(N,\Sigma)'. \tag{2.3.42}$$

Le même raisonnement que dans la preuve du théorème 2.3.15 nous permet de conclure que si Σ est une représentation de N sur un espace de type compact, alors si les $H_q(\mathfrak{n},\Sigma)$ ou les $H^q(\mathfrak{n},\Sigma')$ sont tous séparés, on a des isomorphismes topologiques

$$H^q(\mathfrak{n},\Sigma')\simeq H_q(\mathfrak{n},\Sigma)' \tag{2.3.43}$$

et ces espaces sont des espaces de Fréchet nucléaires, donc réflexifs.

2.4. Calculs d'extensions localement analytiques

2.4.1. Une conséquence de la dualité de Schneider et Teitelbaum. — Dans [**86**], Peter Schneider et Jeremy Teitelbaum ont défini un foncteur de dualité sur la catégorie dérivée des $D(G)$-modules. Dans cette partie nous utilisons ce foncteur pour prouver la nullité de certains espaces d'extensions.

Supposons que G soit le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique linéaire connexe sur $\mathbb{Q}_p$. Soient Δ_G la représentation de dimension 1 de G par adjonction sur $\bigwedge^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathfrak{g}}\mathfrak{g}$, $\delta_G=|\Delta_G|$ et $\mathfrak{d}_G=\Delta_G\otimes\delta_G$. Notons encore $\mathfrak{d}_G$ le $D(G)$-bimodule de dimension 1 sur lequel $D(G)$ agit à gauche par le caractère $\mathfrak{d}_G$ et trivialement à droite. De même $\mathcal{D}_c(G)$, le dual topologique de l'espace $C_c(G,K)$ des fonctions localement analytiques à support compact, est un $D(G)$-bimodule. Dans [**86**] Peter Schneider et Jeremy Teitelbaum définissent le foncteur $R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\cdot,\mathcal{D}_c(G)\otimes_K\mathfrak{d}_G)$ de $D^b(\mathcal{M}(G))$ vers $D^b(\mathcal{M}(G))$, les morphismes étant pris pour l'action à gauche de $D(G)$

sur $\mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G$, c'est un complexe de $D(G)$-modules pour l'action à droite de $D(G)$ sur $\mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G$. Ils prouvent également que la transformation naturelle

$$X \mapsto R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(X, \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G), \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G) \tag{2.4.1}$$

est un isomorphisme. On en conclut donc que pour deux objets X et Y de $D^b(\mathcal{M}(G))$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(X, Y) \simeq \\ &\quad \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(Y, \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G), R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(X, \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G)).\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Supposons désormais G réductif connexe. Ils prouvent ensuite que si P est un sous-groupe parabolique de G et χ un caractère localement analytique de P,

$$R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)', \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G) \simeq \mathrm{Ind}_P^G(\chi^{-1}\mathfrak{d}_P)'[-\dim P]. \tag{2.4.3}$$

Dans cette partie, nous généralisons ce calcul à l'induite parabolique d'une représentation algébrique de dimension finie ρ. Une telle représentation étant en particulier continue admissible, elle vérifie la condition (FIN) de [**86**, §6]. La proposition 6.4 de [**86**] implique alors

$$\mathrm{Ext}^*_{D(G)}(D(G) \otimes_{D(P)} \rho', \mathcal{D}_c(G)) \simeq D(G) \otimes_{D(P)} \mathrm{Ext}^*_{D(P)}(\rho', \mathcal{D}_c(P)), \tag{2.4.4}$$

l'espace $\mathrm{Ext}^*_{D(P)}(\rho', \mathcal{D}_c(P))$ étant vu comme un $D(P)$-module en faisant agir $D(P)$ à droite sur $\mathcal{D}_c(P)$.

Ainsi il suffit de calculer $\mathrm{Ext}^*_{D(P)}(\rho', \mathcal{D}_c(P))$.

Lemme 2.4.1. — *Soit X un $D(P)$-module. Considérons $\mathcal{D}_c(P) \otimes_K \rho$ comme un $D(P)$-bimodule, $D(P)$ agissant trivialement à droite sur ρ. On a alors un isomorphisme de $D(P)$-modules*

$$\mathrm{Hom}_{D(P)}(X, \mathcal{D}_c(P)) \otimes_K \rho \simeq \mathrm{Hom}_{D(P)}(X, \mathcal{D}_c(P) \otimes_K \rho). \tag{2.4.5}$$

Si X est un $D(P)$-module libre, le $D(P)$-module $X \otimes_K \rho'$ muni de l'action diagonale est encore libre d'après le lemme 2.3.5. Comme dans la preuve du corollaire 4.4 de [**86**] on montre, en utilisant le lemme 2.4.1, que

$$\mathrm{Ext}^*_{D(P)}(\rho', \mathcal{D}_c(P)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{D(P)}(K, \mathcal{D}_c(P)) \otimes_K \rho \tag{2.4.6}$$

en tant que $D(P)$-modules. On obtient donc, en utilisant la proposition 3.5 et le lemme 1.4 de [**86**] le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.2. — *On a un isomorphisme dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G))$*

$$R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Ind}_P^G(\rho)', \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G) \simeq \mathrm{Ind}_P^G(\rho' \otimes_K \mathfrak{d}_P)'[-\dim P]. \tag{2.4.7}$$

Démonstration du lemme 2.4.1. — Soit (e_i) une base de ρ et $E_{i,j}$ l'endomorphisme de ρ envoyant e_j sur e_i et e_k sur 0 lorsque $k \neq j$. Notons encore ρ l'application de $D(G)$ dans $\mathrm{End}_K(\rho)$ donnant l'action de $D(G)$ sur ρ. Rappelons que nous avons un morphisme de K-algèbres $c_\rho : D(G) \to D(G) \otimes_K \mathrm{End}_K(\rho)$ ([**86**, §3] Appendice).On écrit

$$c_\rho(\lambda) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \otimes_K E_{i,j}. \tag{2.4.8}$$

Notons aussi, pour tout $p \in P$, $\rho(p) = \sum_{i,j} \rho_{i,j}(p) E_{i,j}$. Les $\rho_{i,j}$ sont alors des applications localement analytiques sur P. On définit une application

$$\mathrm{Hom}_{D(P)}(X, \mathcal{D}_c(P)) \otimes \rho \to \mathrm{Hom}_{D(P)}(X, \mathcal{D}_c(P) \otimes \rho) \tag{2.4.9}$$

$$F \otimes u \mapsto \sum_{i,j} (\rho_{i,j} * F(x)) \otimes E_{i,j} u, \tag{2.4.10}$$

où $\rho_{i,j} * \mu$ désigne la distribution $f \mapsto \mu(\rho_{i,j} f)$. On vérifie que la fonction de droite est bien dans $\mathrm{Hom}_{D(P)}(X, \mathcal{D}_c(P) \otimes \mathfrak{d}_P)$, c'est-à-dire

$$\sum_{i,j} \rho_{i,j} * (\lambda F(x)) \otimes E_{i,j} u = \sum_{i,j} (\sum_k \lambda_{i,k}(\rho_{k,j} * F(x)) \otimes E_{i,j}), \tag{2.4.11}$$

pour tout $x \in X$. Il suffit donc de prouver l'égalité

$$\rho_{i,j} * (\lambda\mu) = \sum_k \lambda_{i,k}(\rho_{k,j} * \mu) \tag{2.4.12}$$

pour tous les couples $(\lambda, \mu) \in D(P) \times \mathcal{D}_c(P)$. Comme la multiplication sur $D(P)$ est séparément continue et que $K[P]$ est dense dans $D(P)$, il suffit de le prouver pour $\lambda = \delta_p$. On a alors

$$c_\rho(\delta_p) = \sum_{i,j} \rho_{i,j}(p) \delta_p \otimes E_{i,j} \tag{2.4.13}$$

et pour tout $f \in C_c^{an}(P, K)$,

$$\begin{aligned} (\delta_p \mu)(\rho_{i,j} f) &= \mu(\rho_{i,j}(p\cdot) f(p\cdot)) && (2.4.14)\\ &= \mu(\sum_k \rho_{i,k}(p) \rho_{k,j}(\cdot) f(p\cdot)) && (2.4.15)\\ &= \sum_k \rho_{i,k}(p) \delta_p(\rho_{k,j} * \mu)(f). && (2.4.16) \end{aligned}$$

□

Soit ψ une représentation algébrique irréductible de P et ρ une représentation algébrique irréductible, de dimension finie, de G.

Corollaire 2.4.3. — *Pour tout q, on a*

$$\mathrm{Ext}^q_G(\mathrm{Ind}_P^G(\psi), \rho) = \mathrm{Ext}_G^{q+\dim P - \dim G}(\rho', \mathrm{Ind}_P^G(\psi' \otimes \mathfrak{d}_P)). \tag{2.4.17}$$

En particulier si $\dim G - \dim P > q$, *on a*

$$\mathrm{Ext}^q_G(\mathrm{Ind}_P^G(\psi), \rho) = 0. \tag{2.4.18}$$

De plus, si ρ et $\mathrm{Ind}_P^G(\psi)$ ont même caractère central χ, alors

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(\mathrm{Ind}_P^G(\psi), \rho) = \mathrm{Ext}_{G,\chi^{-1}}^{q+\dim P - \dim G}(\rho', \mathrm{Ind}_P^G(\psi' \otimes \mathfrak{d}_P)). \tag{2.4.19}$$

Démonstration. — Par définition

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^q_G(\mathrm{Ind}_P^G(\psi), \rho) &= \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)}(\rho', \mathrm{Ind}_P^G(\psi)') && (2.4.20)\\ &= \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\rho', \mathrm{Ind}_P^G(\psi)'[q]) && (2.4.21)\\ &= \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Ind}_P^G(\psi' \otimes \mathfrak{d}_P)'[-\dim P][-q], \rho[-\dim G]) && (2.4.22)\\ &= \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Ind}_P^G(\psi' \otimes \mathfrak{d}_P)', \rho[\dim P - \dim G + q]). && (2.4.23) \end{aligned}$$

□

Remarque 2.4.4. — Si ρ est une représentation localement algébrique de G, c'est une conséquence de [**85**, théorème 8.12] que $R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\rho, \mathcal{D}_c(G))$ est concentré en degré $\dim G$. Ainsi la deuxième assertion du corollaire 2.4.3 reste vraie en supposant ρ localement algébrique.

2.4.2. Cohomologie des représentations algébriques. — Étudions maintenant le cas des extensions entre deux représentations algébriques de dimension finie de G, le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$. Si λ est un poids de G, on notera encore λ la restriction de λ au centre de G et $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}$ les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda|_{Z(G)}}$.

Soient V et W deux représentations algébriques de dimension finie de G. Comme on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(G)}(W', V') = (W \otimes_K V')^G$ et que le foncteur $V \mapsto W' \otimes_K V$ est exact et envoie tout $D(G)$-module libre sur un $D(G)$-module libre (lemme 2.3.5), on a, pour tout $q \geq 0$, un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_G(V, W) \simeq H^q(G, V' \otimes W). \tag{2.4.24}$$

De même, si V et W ont un même caractère central χ, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(V, W) \simeq H^q(\overline{G}, V' \otimes_K W), \tag{2.4.25}$$

$\overline{G}$ désignant le quotient de G par son centre. D'après (2.3.27), ce groupe est isomorphe à $H^q(\overline{\mathfrak{g}}, V' \otimes W)$, où $\overline{\mathfrak{g}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est l'algèbre de Lie de $\overline{G}$. Cette algèbre de Lie est alors semi-simple.

Proposition 2.4.5. — *Si λ et μ sont deux poids dominants, on a $\mathrm{Ext}^q_G(F_\lambda, F_\mu) = 0$ pour tout q, sauf si $\lambda = \mu$. Auquel cas, l'algèbre de cohomologie*

$$H^*(\overline{\mathfrak{g}}, \mathrm{End}_K(F_\lambda)) \simeq H^*(\overline{\mathfrak{g}}, K) \tag{2.4.26}$$

munie du cup-produit est isomorphe à l'algèbre extérieure

$$(\bigwedge \mathfrak{g}')^{\mathfrak{g}} = \bigwedge P(\overline{\mathfrak{g}})' \tag{2.4.27}$$

sur l'espace vectoriel gradué $P(\overline{\mathfrak{g}})'$ des éléments primitifs de $\overline{\mathfrak{g}}$.

Démonstration. — Si λ et μ sont deux poids dominants différents, on sait d'après le théorème d'Harish-Chandra (voir par exemple [**53**, 23.3]) que les caractères infinitésimaux $\chi_{\lambda+\delta}$ et $\chi_{\mu+\delta}$ de F_λ et F_μ sont différents. La première assertion résulte alors du I.4.1 de [**10**]. L'égalité (2.4.26) est conséquence du lemme de Schur : dans la décomposition de $\mathrm{End}_K(F_\lambda)$ en somme de $\overline{\mathfrak{g}}$-modules simples, la représentation triviale apparaît avec multiplicité un. La dernière assertion est due à Koszul et provient du corollaire 2.3.14. □

Les éléments primitifs de $\mathfrak{sl}_n$ ont une structure particulièrement simple : on a $\dim Prim(\mathfrak{sl}_n)_i = 1$ si i est impair, compris entre 3 et $2n-1$, et 0 sinon ([**9**, 5.3]).

Corollaire 2.4.6. — *Si $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et si λ est un poids dominant de G, alors $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) = 0$ pour $q = 1$, $q = 2$ et $q = 4$. C'est un espace de dimension 1 lorsque $q = 0$ ou $q = 3$.*

2.4.3. Extensions entre représentations localement algébriques. — Une représentation localement algébrique du groupe G à coefficients dans K est en particulier une représentation localement analytique. Le but de cette partie est de comparer les extensions entre représentations localement algébriques dans la catégorie des représentations localement algébriques et dans la catégorie des représentations localement analytiques. Dans le cas particulier où les représentations sont lisses, on note Ext^q_∞ les groupes d'extensions dans la catégorie $Rep_K(G)^\infty$ des représentations lisses et $\mathrm{Ext}^q_{\infty,1}$ les groupes d'extensions dans la catégorie des représentations lisses à caractère central trivial. Les groupes d'extensions lisses entre représentations de Steinberg généralisées sont alors déterminés dans [**34**, théorème 1.3] et [**71**, théorème 1]. On note $D(G)^\infty$ le quotient de $D(G)$ par l'idéal bilatère engendré par $\mathfrak{g}$. Toute représentation lisse est un $D(G)^\infty$-module.

Proposition 2.4.7. — *Soient F_λ et F_μ deux représentations algébriques irréductibles de dimension finie de G, W_1 et W_2 deux représentations lisses de G.*

1. *L'espace* $\mathrm{Ext}^n_G(F_\lambda \otimes W_1, F_\mu \otimes W_2)$ *est nul si* $\lambda \neq \mu$.
2. *Supposons W_1 et W_2 de caractère central trivial et posons i_0 le plus petit i tel que* $\mathrm{Ext}^i_{\infty,1}(W_1, W_2) \neq 0$. *Le groupe* $\mathrm{Ext}^n_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes W_1, F_\lambda \otimes W_2)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ext}^{i_0}_{\infty,1}(W_1, W_2)$ *lorsque $n = i_0$ et nul pour $n \neq i_0$ et $n \leq i_0 + 2$.*

Démonstration. — Si $\lambda \neq \mu$, le centre de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ agit sur $F_\lambda \otimes W_1$ et $F_\mu \otimes W_2$ par des caractères différents, les groupes d'extensions entre ces représentations sont donc nuls.

L'égalité $\mathrm{Hom}(F'_\mu \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, F_\mu \otimes Y)$ pour tous $D(G)$-modules X et Y et le fait que pour un $D(G)$-module projectif P, $P \otimes F'_\lambda$ l'est aussi impliquent l'égalité

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(F'_\lambda \otimes W'_2, F'_\lambda \otimes W'_1) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(G)_1}(W'_2, F_\lambda \otimes F'_\lambda \otimes W'_1). \tag{2.4.28}$$

Alors les égalités $(+)$ de [**86**] et (59) de [**63**] montrent qu'il existe une suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^p_{D(G)^\infty,1}(W'_2, H^q(\bar{\mathfrak{g}}, \mathrm{End}_K(F_\lambda)) \otimes W'_1) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes W_1, F_\lambda \otimes W_2). \tag{2.4.29}$$

Lorsque $q = 1$ ou $q = 2$, $H^q(\bar{\mathfrak{g}}, V) = 0$ pour tout $\bar{\mathfrak{g}}$-module V de dimension finie d'après (2.3.26) et la proposition 2.4.5. □

Corollaire 2.4.8. — *Si I et J sont des parties de Δ, on a* $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes_K v_{P_I}, F_\lambda \otimes_K v_{P_J}) = 0$ *pour tout* $q \leq |(I \cup J) \backslash (I \cap J)| + 2$, *excepté pour* $q = |(I \cup J) \backslash (I \cap J)|$, *auquel cas l'espace* $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes_K v_{P_I}, F_\lambda \otimes_K v_{P_J}) = 0$ *est de dimension* 1.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.7 et du théorème 1 de [**71**], ou du théorème 1.3 de [**34**]. □

2.4.4. Une suite spectrale. — Dans cette partie, nous établissons l'existence d'une suite spectrale pour calculer les groupes d'extensions entre représentations localement analytiques, qui est l'analogue des suites spectrales du théorème 6.8 de [**63**].

Soit P un sous-groupe parabolique de G, N son radical unipotent et $L = P/N$. Rappelons ([**81**, §2]) qu'une représentation lisse ρ de $P_0 = P \cap G_0$ est dite fortement admissible, s'il existe un entier r et une injection P_0-équivariante $\rho \hookrightarrow C^\infty(P_0, K)^r$. Comme P_0 est compact, la catégorie des représentations lisses de P_0 est semi-simple, et donc tout quotient de $C^\infty(P_0, K)^r$ est fortement admissible. On en déduit que toute représentation lisse fortement admissible ρ de P_0 possède une résolution à droite par des représentations isomorphes à une somme directe finie de $C^\infty(P_0, K)$. En passant au dual fort, ceci implique que ρ' possède une résolution par des $D^\infty(P_0)$-modules libres de type fini. La résolution $(*)$ de [**86**], page 307, montre que le $D(P_0)$-module $D^\infty(P_0)$ possède une résolution finie par des $D(P_0)$-modules de type fini. Ainsi, si $Y_.$ est une résolution de ρ' par des $D^\infty(P_0)$-modules libres de type fini, et $(X_{i,j})_i$ une résolution de Y_j par des $D(P_0)$-modules de type fini, le complexe total associé au double complexe $(X_{i,j})_{i,j}$ est une résolution de ρ' par des $D(P_0)$-modules de type fini. Cette construction, ainsi que la proposition 2.2 de [**81**], nous permettent de conclure que si ρ_∞ est une représentation lisse irréductible de P, alors le $D(P)$-module ρ'_∞ satisfait la condition (FIN) de [**86**], page 321, c'est-à-dire que le $D(P_0)$-module ρ'_∞ a une résolution par des $D(P_0)$-modules projectifs de type fini. Si ρ est une représentation localement algébrique irréductible de L, on peut l'écrire $\rho_{alg} \otimes_K \rho_\infty$ avec ρ_{alg} algébrique irréductible de dimension finie et ρ_∞ lisse irréductible, le lemme 2.3.5 montre alors que le $D(P)$-module ρ' vérifie la condition (FIN). Le lemme 6.3 de [**86**] implique alors que

$$\mathrm{Tor}_q^{D(P)}(D(G), \rho') = 0 \tag{2.4.30}$$

pour tout $q \geq 1$ et ρ représentation localement algébrique irréductible de P. On peut donc en conclure que pour tout $D(G)$-module M, on a, pour tout $q \geq 0$, un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)}(D(G) \otimes_{D(P)} \rho', M) \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(P)}(\rho', M). \tag{2.4.31}$$

Soit χ un caractère localement analytique du centre Z de G. Quitte à considérer une extension finie K' de K, on peut trouver un caractère localement analytique ψ de G dans $(K')^\times$ tel que $\chi(z) = \psi(z)$ pour tout $z \in Z$. Le foncteur $M \mapsto M \otimes_{K'} \psi^{-1}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathcal{M}(\overline{G})_{K'}$ des $D(\overline{G}) \otimes_K K'$-modules et la catégorie $\mathcal{M}(G)_{\chi,K'}$ des $D(G) \otimes_K K'$-modules sur lesquels $D(Z) \otimes_K K'$ agit par χ^{-1}. Comme $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(\overline{G})}(\cdot,\cdot) \otimes_K K' \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(\overline{G})_{K'}}(\cdot,\cdot)$ et $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\chi}(\cdot,\cdot) \otimes_K K' \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_{\chi,K'}}(\cdot,\cdot)$, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(\overline{G})}(A \otimes_K \psi, B \otimes_K \psi) \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\chi}(A, B) \otimes_K K' \tag{2.4.32}$$

pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathcal{M}(\overline{G})_\chi$. En appliquant l'isomorphisme (2.4.31) au groupe $\overline{G}$, on en déduit que l'isomorphisme (2.4.31) reste valable à caractère central imposé. Si Z agit sur ρ à travers le caractère χ et M est un $D(G)$-module sur lequel $D(Z)$ agit par χ^{-1}, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\chi}(D(G) \otimes_{D(P)} \rho', M) \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(P)_\chi}(\rho', M). \tag{2.4.33}$$

Considérons Σ une représentation localement analytique de G sur un espace localement convexe de type compact et ρ une représentation localement algébrique irréductible de P ayant même caractère central χ. D'après la proposition 2.2.1, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^q_{P,\chi}(\Sigma|_P, \rho). \tag{2.4.34}$$

De plus, cet isomorphisme est la composée de la restriction $\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)) \to \mathrm{Ext}^q_{P,\chi}(\Sigma|_P, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_P)$ et de l'application $\mathrm{Ext}^q_{P,\chi}(\Sigma|_P, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_P) \to \mathrm{Ext}^q_{P,\chi}(\Sigma|_P, \rho)$ induite par l'application P-équivariante $\mathrm{Ind}_P^G(\rho) \to \rho$ définie par $f \mapsto f(1)$.

Comme ρ est une représentation de L, le radical unipotent N de P agit trivialement sur ρ. Ainsi on a, pour tout $D(G)$-module M,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(P)}(\rho', M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(L)}(\rho', H^0(D(N), M)). \tag{2.4.35}$$

Comme le foncteur $H^0(D(N), \cdot)$ de $\mathcal{M}(P)$ vers $\mathcal{M}(L)$ est adjoint à droite du foncteur exact d'inflation de $\mathcal{M}(L)$ vers $\mathcal{M}(P)$, il transforme injectif en injectif, on a d'après [**90**, 5.8.2], une suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(L)}(\rho', H^q(N, M)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{M}(P)}(\rho', M). \tag{2.4.36}$$

Le même raisonnement que pour passer de (2.4.31) à (2.4.33) nous donne une suite spectrale à caractère central imposé

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(L)_\chi}(\rho', H^q(N, M)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{M}(P)_\chi}(\rho', M). \tag{2.4.37}$$

Reprenons Σ une représentation localement analytique de G sur un espace de type compact. Remarquons que le groupe N vérifie les hypothèses du théorème 2.3.15. On peut donc en conclure, puisque Σ est une représentation localement analytique de P sur un espace de type compact, que si les espaces topologiques $H_q(N, \Sigma)$ sont tous séparés, alors ceux-ci sont de types compact et leur structure de $D(L)$-module provient d'une action localement analytique de L, étant donné que l'injection

$$C^{an}(L, H_q(N, \Sigma)) \hookrightarrow \mathcal{L}_b(D(L), H_q(N, \Sigma)) \tag{2.4.38}$$

est, dans ce cas, un isomorphisme ([**83**, théorème 2.2]).

En combinant les isomorphismes (2.4.31) et (2.4.33) avec les suites spectrales (2.4.36) et (2.4.37), et en utilisant le théorème 2.3.15, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.9. — *Si pour tout $q \geq 0$, l'espace localement convexe $H_q(N,\Sigma)$ est séparé, on a une suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_L^p(H_q(N,\Sigma),\rho) \Rightarrow \mathrm{Ext}_G^{p+q}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)). \tag{2.4.39}$$

Si de plus le centre Z de G agit sur Σ et ρ par un caractère χ, alors il agit sur $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$, ainsi que sur tous les $H_q(N,\Sigma)$ à travers χ et on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{L,\chi}^p(H_q(N,\Sigma),\rho) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{G,\chi}^{p+q}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)). \tag{2.4.40}$$

La flèche d'arête $E_2^{p,0} \to \mathrm{Ext}_{G,\chi}^p(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho))$ est en fait la composée

$$\mathrm{Ext}_{L,\chi}^p(H_0(N,\Sigma),\rho) \to \mathrm{Ext}_{P,\chi}^p(\Sigma,\rho) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{G,\chi}^p(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)), \tag{2.4.41}$$

la flèche de droite étant donné par (2.4.34) et celle de gauche la composition de la flèche de restriction $\mathrm{Ext}_{L,\chi}^p(H_0(N,\Sigma),\rho) \to \mathrm{Ext}_{P,\chi}^p(H_0(N,\Sigma),\rho)$ avec la flèche $\mathrm{Ext}_{P,\chi}^p(H_0(N,\Sigma),\rho) \to \mathrm{Ext}_{P,\chi}^p(\Sigma,\rho)$ induite par l'application P-équivariante $\Sigma \twoheadrightarrow H_0(N,\Sigma)$.

Par exemple, lorsque Σ est une représentation localement algébrique de la forme $\psi_{alg} \otimes \psi_\infty$, les espaces

$$H_q(\mathfrak{n}, \psi_{alg} \otimes \psi_\infty) = H_q(\mathfrak{n}, \psi_{alg}) \otimes \psi_\infty \tag{2.4.42}$$

sont munis de la topologie localement convexe la plus fine et sont donc séparés. On en conclut ainsi, en utilisant le théorème 7.1 de [**63**] et le théorème 2.3.15,

$$H_q(N,\Sigma) = H_q(\mathfrak{n}, \psi_{alg}) \otimes J_N(\psi_\infty), \quad H^q(N,\Sigma') = H^q(\mathfrak{n}, \psi'_{alg}) \otimes J_N(\psi_\infty)', \tag{2.4.43}$$

J_N désignant le module de Jacquet. Les modules de Jacquet $J_N(\psi_\infty)$ se calculent alors en utilisant les résultats de Bernstein et Zelevinsky [**7**, 2.12 et 5.2].

Les $H_q(\mathfrak{n}, \psi_{alg})$ se déduisent alors du théorème ci-dessous et de l'isomorphisme de dualité (2.3.36).

***Théorème 2.4.10* (Kostant)**. — *Soit λ un poids dominant. Pour $S \subset \Delta$, posons $P = P_S$. Pour tout $q \geq 0$, on a un isomorphisme $\mathfrak{l}$-équivariant*

$$H_q(\mathfrak{n}, F_\lambda) \simeq \bigoplus_{w, l(w)=q, w\cdot\lambda \in X_S^+} F_{w\cdot\lambda,S}, \quad H^q(\mathfrak{n}, F_\lambda) \simeq \bigoplus_{w, l(w)=q, w\cdot\lambda \in X_S^+} F'_{w\cdot\lambda,S} \tag{2.4.44}$$

Exemple 2.4.11. — Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, si P désigne un sous-groupe parabolique maximal, le groupe L est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Q}_p^\times$. Si ρ_∞ est une représentation lisse de L_1, l'application du « lemme géométrique » de Bernstein et Zelevinsky donne

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)^{s_2})^\infty \to J_{N_1}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho_\infty)^\infty) \to \rho_\infty \to 0 \\ 0 \to |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \otimes \rho_\infty^{s_1s_2} \to J_{N_2}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho_\infty)^\infty) \to \mathrm{Ind}_{B\cap P_2}^{L_2}(J_{N\cap L_1}(\rho_\infty))^\infty \to 0. \end{gathered} \tag{2.4.45}$$

Comme le foncteur J_{N_i} est un foncteur exact sur la catégorie des représentations lisses, on obtient les résultats suivants.

$$\begin{aligned} J_{N_1}(v_{P_1}) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)^\infty, & J_{N_1}(v_{P_2}) &= |\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2| \oplus \mathrm{St}_2, \\ J_{N_1}(1) &= 1, & J_{N_1}(\mathrm{St}_3) &= |\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2| \otimes \mathrm{St}_2. \end{aligned} \tag{2.4.46}$$

On peut alors utiliser le corollaire 2.4.8 pour calculer les termes de la suite spectrale (2.4.39). Voici quelques exemples de calculs issus de cette suite spectrale pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

$$\begin{aligned}
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)) &= 0\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)) &= 0\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2}) &= 0\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1}) &= 0\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2})^{\mathfrak{d}_2}) &= 0\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_1}) &= 0\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2}) &= 1\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= 0\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2})) &= 0
\end{aligned}\tag{2.4.47}$$

On en déduit par symétrie les mêmes égalités en remplaçant v_{P_1} par v_{P_2} et en échangeant les rôles de P_1 et P_2, s_1 et s_2, $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{d}_2$.

Démonstration. — Donnons l'exemple de $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2})$. Le théorème 2.4.10 nous donne $H_0(\mathfrak{n}_2, F_\lambda) = F_{\lambda,2}$ et $H_1(\mathfrak{n}_2, F_\lambda) = F_{s_1\cdot\lambda,2}$. De plus, par (2.4.46), on a $J_{N_2}(v_{P_1}) \simeq |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \oplus \mathrm{St}_2$. Calculons à présent les termes de la suites spectrale (2.4.40)

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{L_2,\lambda}(H_q(N_2, F_\lambda\otimes v_{P_1}), F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2)). \tag{2.4.48}$$

Comme $\lambda \neq s_1\cdot\lambda$, on a $E_2^{p,0} = 0$ pour tout $p \geq 0$ d'après la proposition 2.4.7. Ainsi $E_2^{0,1} \simeq \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2))$. Comme $E_2^{0,1}$ est l'espace des endomorphismes L_2-équivariant de la représentation irréductible $F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2$, on a $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)) = 1$. De même on arrive à $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2)) = 0$ et $\mathrm{Ext}^0_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2)) = 0$. On conclut alors en utilisant la suite exacte longue obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda\otimes v_{P_1}, \cdot)$ à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2} \to \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2) \to \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2) \to 0, \tag{2.4.49}$$

qui n'est autre que (2.2.60). □

Corollaire 2.4.12. — *Pour $i\in\{1,2\}$, on a* $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda\otimes v_{P_1}, v^{an}_{P_i}(\lambda)) = 0$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la décomposition (2.2.63), du corollaire 2.4.8 et de (2.4.47). □

2.4.5. Homologie unipotente des induites. — Plaçons nous à présent dans le cas $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et $P = P_1$. Soit (ρ, M) une représentation localement algébrique irréductible de L_1. On peut donc écrire $\rho = \rho_{alg}\otimes\rho_\infty$ avec ρ_{alg} algébrique irréductible de dimension finie et ρ_∞ lisse irréductible. Par abus de notation, on note encore ρ l'inflation de ρ au moyen du morphisme $P_1 \to L_1$. Soit $\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\rho)$ l'induite localement analytique de ρ de P_1 à G. Nous allons déterminer les espaces $H_q(N_i, \mathrm{Ind}^G_{P_1}(\rho))$ en tant que représentations de L_i. La stratégie que nous suivons est celle décrite dans le §8 de [**63**]. Il s'agit de filtrer de façon P_i-équivariante l'espace $\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\rho)$ selon le support. Si C est une partie de G stable par multiplication à droite par P_1, on note $\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\rho)_C$ le sous-espace des fonctions à support inclus dans C.

Les ensembles $W_1\backslash W/W_1$ et $W_2\backslash W/W_1$ sont de cardinal 2. Fixons $i \in \{1, 2\}$ et w un élément tel que $W_iW_1 \neq W_iwW_1$. Alors P_iwP_1 est un ouvert de G. Nous avons alors une suite exacte de P_i-représentations localement analytiques

$$0 \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1} \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho) \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)/\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1} \to 0. \tag{2.4.50}$$

Par la même preuve que dans [**63**, lemme 8.1], on voit que le terme de gauche est un sous-espace fermé de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)$. Ainsi il s'agit d'une suite exacte stricte d'espaces de type compact. Le terme de gauche est la composante à support dans l'orbite ouverte et le terme de droite les résidus à support dans l'orbite fermée.

Pour déterminer $H^q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)')$, nous calculons en fait, comme dans [**63**], les $D(L_i)$-modules $H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1})')$ et $H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)/\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1})')$ et utilisons la suite exacte longue de cohomologie. Nous commençons par $H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1})')$. Il s'avère plus commode de commencer par calculer $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1})$ et d'utiliser le théorème 2.3.15.

2.4.5.1. Un résultat technique. — Nous prouvons ici que si H est un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique, et H_1 un sous-groupe cocompact de H, le foncteur $\mathrm{Ind}_{H_1}^H$ envoie une suite exacte stricte de représentations localement analytiques de H_1 sur des espaces de type compact, sur une suite exacte stricte de représentations localement analytiques de H sur des espaces de type compact.

Lemme 2.4.13. — *Soit W un espace de Fréchet, le foncteur $W\hat{\otimes}_K\cdot$ envoie une suite exacte d'espaces de Fréchet sur une suite exacte d'espaces de Fréchet.*

Remarquons tout de suite que d'après le théorème de l'image ouverte ([**78**, proposition 8.6]) une telle suite exacte est stricte.

Démonstration. — Soit $0 \to V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \to 0$ une suite exacte d'espaces de Fréchet. C'est une suite exacte stricte. Montrons tout d'abord que la suite

$$0 \to W \otimes_K V_1 \xrightarrow{id\otimes f} W \otimes_K V_2 \xrightarrow{id\otimes g} W \otimes_K V_3 \to 0 \tag{2.4.51}$$

est exacte stricte. L'essentiel est de montrer que les applications $id \otimes f$ et $id \otimes g$ sont strictes. Comme V_i et W sont des espaces de Fréchet, les topologies inductives et projectives sur $W \otimes_K V_i$ coïncident d'après la proposition 17.6 de [**78**], on peut donc au besoin considérer l'une ou l'autre. D'après le corollaire 17.5(ii), la topologie sur induite sur $W \otimes_K \ker f$ par la topologie de $W \otimes_K V_3$ est la topologie produit tensoriel. Pour conclure, il faut donc montrer que si $U \twoheadrightarrow V$ est une application surjective ouverte entre espaces de Fréchet, l'application $W \otimes_{K,\iota} U \twoheadrightarrow W \otimes_{K,\iota} V$ est stricte. Soit en effet b une application linéaire de $W \otimes_{K,\iota} V$ dans un K-espace vectoriel localement convexe Y, telle que la composée $\tilde{b}$ de $W \otimes_{K,\iota} U$ vers Y soit continue. Ainsi la forme bilinéaire $B(x, y) = \tilde{b}(x \otimes y)$ est séparément continue de $W \times U$ vers Y. En particulier, pour tout $w \in W$, $B(w, \cdot)$ est une application linéaire continue de U vers Y se factorisant par V. Comme V est muni de la topologie quotient, l'application $b(w \otimes \cdot)$ est continue. On montre de même que pour tout $v \in V$, $b(\cdot \otimes v)$ est continue, ainsi b est continue. Au final, la suite exacte (2.4.51) est stricte. Il se trouve alors que le foncteur de complétion est exact sur toute suite exacte stricte de groupes topologiques métrisables ([**11**, 3.1 proposition 5]). □

Corollaire 2.4.14. — *Si $0 \to \rho_1 \to \rho_2 \to \rho_3 \to 0$ est une suite exacte de représentations localement analytiques de H_1 sur des espaces de type compact, la suite*

$$0 \to \mathrm{Ind}_{H_1}^H(\rho_1) \to \mathrm{Ind}_{H_1}^H(\rho_2) \to \mathrm{Ind}_{H_1}^H(\rho_3) \to 0 \tag{2.4.52}$$

est stricte exacte.

Démonstration. — D'après la proposition 5.3, la remarque 5.4 et la formule (68) de [**63**], on a un isomorphisme topologique $(\mathrm{Ind}_{H_1}^H(\rho_i))' \simeq D(H/H_1)\hat{\otimes}_K \rho_i'$, les espaces $D(H/H_1)$ et ρ_i' étant des espaces de Fréchet nucléaires. On conclut en utilisant le lemme 2.4.13. □

2.4.5.2. Un calcul intermédiaire. — Nous prouvons ici un résultat technique qui nous servira au calcul de l'homologie de la composante à support dans l'orbite ouverte.

Soit H le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique linéaire connexe défini sur $\mathbb{Q}_p$. Si N désigne son radical unipotent, on suppose que H/N est un groupe réductif déployé. Soit L un sous-groupe de Lévi de H, c'est-à-dire un sous-groupe induisant un isomorphisme $L \simeq H/N$. Soit P un sous-groupe de H tel que $B = P \cap L$ soit un sous-groupe parabolique de L. Posons $N' = N \cap P$. On peut alors choisir $L_0 \subset L$ un sous-groupe ouvert compact tel que $L = L_0 \cdot B$.

Soit $\rho = \rho_{alg} \otimes \rho_\infty$ une représentation localement algébrique irréductible de P. On note $\mathcal{C}(\rho) = c{-}\mathrm{Ind}_P^H(\rho)$ le K-espace vectoriel des fonctions localement analytiques à support compact modulo P de H dans K telles que $f(gp) = \rho(p^{-1})f(g)$ pour tout $g \in H$ et $p \in P$. Il s'agit d'un espace vectoriel localement convexe de type compact muni d'une action localement analytique de H. Le but de cette partie est de décrire les H/N-représentations $H_i(N, \mathcal{C}(\rho))$.

Soit $\mathcal{N}(\rho) = c{-}\mathrm{Ind}_{N'}^N(\rho|_{N'})$ l'espace des fonctions localement analytiques à support compact modulo N' sur N à valeurs dans l'espace de ρ telles que $f(nn_0) = \rho(n_0^{-1})f(n)$. C'est encore un espace vectoriel localement convexe de type compact muni d'une action localement analytique de N par translation à gauche. On le munit également de l'action de B déduite de l'action de B sur N par conjugaison, autrement dit

$$(b \cdot f)(n) = \rho(b)f(b^{-1}nb). \tag{2.4.53}$$

Posons $\widetilde{\mathcal{C}(\rho)} = \mathrm{Ind}_{L\cap B}^L \mathcal{N}(\rho)$. Si f est un élément de $\mathcal{C}(\rho)$, pour tout $m \in L$, on note $\varphi(f)(m)$ la fonction de N dans ρ définie par $n \mapsto f(mn)$.

L'application φ induit un isomorphisme de H-modules de $\mathcal{C}(\rho)$ sur un sous-H-module de $\mathrm{Ind}_{L\cap P}^L \mathcal{N}(\rho)$. Il est clair que pour tout $m \in L$, $\varphi(f)(m)$ est à support compact et localement analytique. De plus si $m_0 \in P \cap L$,

$$\varphi(f)(mm_0) = (n \mapsto f(mm_0n) = \rho(m_0^{-1})f(mm_0nm_0^{-1})) \tag{2.4.54}$$
$$= m_0^{-1} \cdot (n \mapsto f(mn)), \tag{2.4.55}$$

et donc $\varphi(f) \in \widetilde{\mathcal{C}}(\rho)$.

Lemme 2.4.15. — *L'application φ est un homéomorphisme L-équivariant.*

Démonstration. — L'injectivité est claire, étant donné que $LN = H$. Pour vérifier la continuité, il suffit de vérifier que la restriction de φ au sous-espace des fonctions à support dans un compact C modulo P est continue. Quitte à grossir un peu C, on peut supposer qu'il est L_0-invariant. Dans ce cas, pour tout m, $\varphi(f)(m)$ est à support dans l'image de $C \cap N$. Comme N est unipotent, on peut trouver un sous-groupe compact ouvert N_0 de N contenant $C \cap N$ et stable pour l'action de L_0 par conjugaison. On a alors un homéomorphisme

$$c{-}\mathrm{Ind}_P^H(\rho)_{L_0N_0} = \mathrm{Ind}_{(L_0N_0)\cap P}^{L_0N_0}(\rho) \simeq \mathrm{Ind}_{L_0\cap P}^{L_0}\mathrm{Ind}_{N'\cap N_0}^{N_0}(\rho), \tag{2.4.56}$$

ce qui permet de conclure en passant à la limite inductive. □

Cet isomorphisme nous permet de construire une application N-équivariante et B-équivariante

$$\mathcal{C}(\rho) \to \mathcal{N}(\rho) \tag{2.4.57}$$

définie par $f \mapsto \varphi(f)(1)$. On en déduit une application B-équivariante

$$H_q(N, \mathcal{C}(\rho)) \to H_q(N, \mathcal{N}(\rho)) \tag{2.4.58}$$

Si l'espace topologique $H_q(N, \mathcal{N}(\rho))$ est séparé, il est de type compact, et c'est alors une représentation localement analytique de B. On obtient alors une application L-équivariante

$$\psi : H_q(N, \mathcal{C}(\rho)) \to \mathrm{Ind}_B^L(H_q(N, \mathcal{N}(\rho)). \tag{2.4.59}$$

Proposition 2.4.16. — *Si tous les espaces $H_q(N, \mathcal{N}(\rho))$ sont séparés, l'application ψ est un isomorphisme topologique pour tout q.*

Démonstration. — Soit $P_\cdot$ une résolution fortement exacte de la représentation triviale par des $D(N)$-modules topologiques de la forme $D(N)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$ où V est un K-espace localement convexe dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine. La cohomologie $H_q(N, \mathcal{N}(\rho))$ est alors la cohomologie du complexe $P_\cdot\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho)$. Notons d_q ses différentielles. En reprenant la preuve du théorème 2.3.15, les espaces $P_q\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho)$ sont de type compact. Comme $H_q(N, \mathcal{N}(\rho)) = \ker d_q/\mathrm{Im} d_q$ est séparé, les espaces $\mathrm{Im} d_q$ sont fermés dans $P_q\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho)$ et sont donc de type compact. Comme une application continue surjective entre deux espaces de type compact est continue, on conclut que les différentielles d_q sont strictes. D'après le corollaire 2.4.14, le foncteur Ind_B^L transforme suites exactes strictes d'espaces de type compact en suites exactes strictes d'espaces de type compact. Ainsi $\mathrm{Ind}_B^L(H_q(N, \mathcal{N}(\rho))$ s'identifie à la cohomologie du complexe $\mathrm{Ind}_B^L(P_\cdot\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho))$. Il reste donc à prouver que l'application $P_q\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathrm{Ind}_B^L(\mathcal{N}(\rho)) \simeq \mathrm{Ind}_B^L(P_q\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho))$ est un isomorphisme topologique. En écrivant $P_q = D(N)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$ et en utilisant la remarque 5.4, l'isomorphisme (69) et le lemme 2.6 de [**63**], il suffit de prouver que l'application

$$V\hat{\otimes}_{K,\iota}\mathcal{L}_b(D(L/B), \mathcal{N}(\rho)) \to \mathcal{L}_b(D(L/B), V\hat{\otimes}_{K,\iota}\mathcal{N}(\rho)) \tag{2.4.60}$$

est un isomorphisme topologique. En écrivant $V = \bigoplus_I K$ avec I dénombrable, cette application devient

$$\bigoplus_I \mathcal{L}_b(D(L/B), \mathcal{N}(\rho)) \to \mathcal{L}_b(D(L/B), \bigoplus_I \mathcal{N}(\rho)). \tag{2.4.61}$$

Comme $\mathcal{N}(\rho)$ est de type compact et I dénombrable, le corollaire 8.9 de [**78**] implique que cette application est un isomorphisme. C'est un isomorphisme topologique car bijection continue entre espaces de type compact. $\square$

Faisons désormais l'hypothèse suivante : N' est inclus dans le centre de N. Elle sera toujours vérifiée dans nos applications ultérieures.

La suite spectrale de Hochschild-Serre ([**63**] théorème 6.8) donne

$$H_p(N/N', H_q(N', \mathcal{N}(\rho))) \Rightarrow H_{p+q}(N, \mathcal{N}(\rho)). \tag{2.4.62}$$

D'après notre hypothèse sur N', on des isomorphismes N-équivariants

$$\bigwedge^q(\mathfrak{n}') \otimes_K \mathcal{N}(\rho) \simeq \mathcal{N}(\bigwedge^q(\mathfrak{n}')|_{N'} \otimes \rho). \tag{2.4.63}$$

Ainsi $H_q(\mathfrak{n}', \mathcal{N}(\rho)) \simeq \mathcal{N}(H_q(\mathfrak{n}', \rho))$ en tant que N-modules. Comme $\rho = \rho_{alg} \otimes \rho_\infty$, $H_q(\mathfrak{n}', \rho) \simeq H_q(N', \rho_{alg}) \otimes \rho_\infty$ en tant que N'-modules. Ainsi, d'après le théorème 7.1 de [**63**], on a $H_q(N', \mathcal{N}(\rho)) = \mathcal{N}(H_q(N', \rho_{alg}) \otimes \rho_\infty)_{N'}$.

Lemme 2.4.17. — *Si ψ est une représentation lisse de N', on a $\mathcal{N}(\psi)_{N'} \simeq \mathcal{N}(\psi_{N'})$.*

Démonstration. — Fixons $s : N/N' \hookrightarrow N$ une section localement analytique de la projection $N \twoheadrightarrow N/N'$. L'application $\mathcal{N}(\psi) \to C_c^{an}(N/N', \psi)$ donnée par $f \mapsto f \circ s$ est alors un isomorphisme toplogique N'-équivariant, en munissant le membre de droite de l'action $(n' \cdot f)(x) = \psi(n')(f(x))$. Si V est une représentation de N', notons $N'(V)$ le sous-espace de V engendré par les vecteurs de la forme $n \cdot v - v$ avec $n \in N'$, $v \in V$. Il est clair que $N'(\mathcal{N}(\psi)) \subset \mathcal{N}(N'(\psi))$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $f \in C_c^{an}(N/N')(N'(\psi))$. Comme f est à support compact, et que $N'(\psi)$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine, il existe $V \subset N'(\psi)$ de dimension finie tel que, pour tout $x \in N/N'$, $f(x) \in V$. Comme $V \subset N'(\psi)$ et que V est de dimension finie, il existe, d'après le lemme 8.1 de [**20**], un sous-groupe compact ouvert $N_1 \subset N'$ tel que $\int_{N_1} \psi(n)v dn = 0$ pour tout $v \in V$. Ainsi on obtient

$$\int_{N_1} (n \cdot f)dn = 0. \tag{2.4.64}$$

Toujours d'après le lemme 8.1 de [**20**], ceci implique $f \in N'(C_c^{an}(N/N', \psi))$, ce que l'on voulait. □

Au final on obtient un isomorphisme N-équivariant

$$H_q(N', \mathcal{N}(\rho)) \simeq \mathcal{N}(H_q(N', \rho)) \simeq C_c^{an}(N/N', K)\hat{\otimes}_{K,\pi} H_q(N', \rho), \tag{2.4.65}$$

le deuxième isomorphisme provenant du fait que N' agit trivialement sur $H_q(N', \rho)$ et que $H_q(N', \rho)$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine. Ainsi

$$H_p(N/N', H_q(N', \mathcal{N}(\rho))) = H_p(N/N', C_c^{an}(N/N', K))\hat{\otimes}_{K,\pi} H_q(N', \rho|_{N'}). \tag{2.4.66}$$

Le théorème 6.9 de [**63**] implique alors $H_q(N/N', C_c^{an}(N/N', K)) \simeq \mathfrak{d}_{N/N'}$. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 2.4.18. — *On a un isomorphisme topologique L-équivariant*

$$H_i(N, \mathcal{N}(\rho)) \simeq H_{i-\dim N/N'}(\mathfrak{n}', \rho_{alg}|_{N'}) \otimes_K J_{N'}(\rho_\infty) \otimes_K \mathfrak{d}_{N/N'}. \tag{2.4.67}$$

Corollaire 2.4.19. — *Pour tout i,*

$$H_i(N, \mathcal{C}(\rho)) \simeq \mathrm{Ind}_B^L(H_{i-\dim N/N'}(\mathfrak{n}', \rho_{alg}|_{N'}) \otimes_K J_{N'}(\rho_\infty) \otimes_K \mathfrak{d}_{N/N'}). \tag{2.4.68}$$

De plus, $H_i(N, \mathcal{C}(\rho)) = 0$ *pour* $i < \dim N/N'$ *et* $i > \dim N$. *Si* ρ *est de dimension finie, alors les* $H_i(N, \mathcal{N}(\rho))$ *sont de dimension finie.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 2.4.18 et de la proposition 2.4.16. L'annulation provient de (2.3.33). □

2.4.5.3. La composante à support dans l'orbite ouverte. — Si $f \in \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i w P_1}$, on note $\varphi_w(f)$ l'application de P_i dans M définie par $\varphi_w(f)(p) = f(pw)$.

Lemme 2.4.20. — *L'application* φ_w *est un isomorphisme topologique*

$$\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i w P_1} \simeq c\text{--}\mathrm{Ind}_{P_i \cap w P_1 w^{-1}}^{P_i} \rho^w. \tag{2.4.69}$$

Démonstration. — L'application est bien définie car

$$\varphi_w(f)(pq) = f(pqw) \tag{2.4.70}$$

$$= f(pw(w^{-1}qw)) \tag{2.4.71}$$

$$= \rho^w(q^{-1})f(pw). \tag{2.4.72}$$

L'injectivité et la surjectivité proviennent de l'isomorphisme de variétés localement analytiques $P_iwP_1 \simeq P_i/(P_i \cap wP_1w^{-1})$. Soit C une partie fermée de P_iwP_1 compacte modulo P_1. L'ensemble C' des $p \in P_i$ tels que $pw \in C$ est compact modulo $P_1 \cap wP_iw^{-1}$ et φ induit une application de l'ensemble des fonctions de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1}$ à support dans C dans l'ensemble des fonctions de $c\text{−}\mathrm{Ind}_{P_i \cap wP_1w^{-1}}^{P_1}\rho^w$ à support dans C' et cette application est continue. Comme les topologies sur $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1}$ et $c\text{−}\mathrm{Ind}_{P_i \cap wP_1w^{-1}}^{P_1}\rho^w$ sont les topologies limite inductive, φ est continue. Enfin, φ est bicontinue car bijection entre deux espaces de type compact. □

Soit $\lambda \in X_1^+$, un poids dominant relativement à α_1, ρ_∞ une représentation lisse irréductible de L_1 et $\rho = F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty$. Comme conséquence de la section précédente et du lemme 2.4.20, on peut calculer l'homologie unipotente de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1} \simeq c\text{−}\mathrm{Ind}_{P_i \cap wP_1w^{-1}}^{P_i}(\rho^w)$.

On choisit en effet $H = P_i$, $P = P_i \cap wP_1w^{-1}$, $N = N_i$ et la représentation ρ^w de P.

Si $i = 1$, choisissons $w = s_2$. On a alors

$$P = \{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}\},\ N' = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}\}. \tag{2.4.73}$$

On a donc d'après le corollaire 2.4.19 et le fait que $L_1 \cap P = B$,

$$H_i(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty)_{P_1s_2P_1}) = \mathrm{Ind}_B^{L_1}(H_{i-1}(\mathfrak{n}', F_{\lambda,1}^{s_2}) \otimes J_{N'}(\rho_\infty^{s_2}) \otimes \mathfrak{d}_{N/N'}). \tag{2.4.74}$$

On a alors $\mathfrak{d}_{N/N'} = \epsilon_1^{-1}\epsilon_2|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|$ et comme $\mathfrak{n}'$ est de dimension 1, les seuls groupes non nuls sont

$$H_0(\mathfrak{n}', F_{\lambda,1}^{s_2}) = s_2\lambda,\ H_1(\mathfrak{n}', F_{\lambda,1}^{s_2}) = (s_2s_1\lambda)\epsilon_0^{-1}\epsilon_2 \tag{2.4.75}$$

et ce sont des représentations de dimension 1 de B.

Si $i = 2$, choisissons $w = s_1s_2$. On a alors

$$P = \{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}\},\ N' = \{1\}. \tag{2.4.76}$$

On a $\mathfrak{d}_N = \epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|$ et comme $\mathfrak{n}'$ est de dimension 0, le seul groupe non nul est le H_2.

$$H_2(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty)_{P_2s_1s_2P_1}) = F_{\lambda,1}^{s_1s_2} \otimes \rho_\infty^{s_1s_2} \otimes \epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|. \tag{2.4.77}$$

2.4.5.4. Les composantes à support fermé. — Nous allons à présent déterminer $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iP_1}^\omega)$, où $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iP_1}^\omega$ désigne le quotient $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)/\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1}$. Cette fois-ci, il est plus simple, comme dans [**63**, §8], de calculer la cohomologie $H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iP_1}^\omega)')$.

Commençons avec le cas où $i = 1$. On montre la proposition suivante par le même raisonnement que pour le théorème 8.5 de [**63**].

Proposition 2.4.21. — *On a un isomorphisme L_1-équivariant*

$$H^q(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)') \simeq H^q(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho'))\hat{\otimes}_{K,\iota}\rho_\infty', \tag{2.4.78}$$

$\mathfrak{m}_1(\rho')$ désignant le module de Verma généralisé $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p}_1)}\rho'$. De plus on a $H^q(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)') = H^q(\mathfrak{n}_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)')$.

On peut ainsi utiliser les calculs de l'appendice 2 qui donnent la proposition suivante.

Proposition 2.4.22. — *Soit λ un poids dominant relativement à la base de racines simples Δ. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_1$-équivariants*

$$\begin{array}{ll} H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) = F'_{\lambda,1} \oplus F'_{s_2\cdot\lambda,1} & H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda})) = F'_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \\ H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) = F'_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} & H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) = F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \\ H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) = F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} & H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) = 0 \\ H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} & \\ H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = 0 & \\ H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = 0 & \end{array} \tag{2.4.79}$$

Corollaire 2.4.23. — *Pour tout $q \geq 0$, nous avons un isomorphisme topologique L_1-équivariant*

$$H_q(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^{\omega}) \simeq H^q(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^{\omega})')' \simeq H^q(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho'))' \otimes \rho_\infty. \tag{2.4.80}$$

Démonstration. — L'application $H^q(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^{\omega})') \to H^q(\mathfrak{n}_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^{\omega})')$ est continue et le membre de droite est, en utilisant la résolution de Chevalley-Eilenberg pour calculer la cohomologie d'algèbres de Lie, le quotient topologique d'un espace de Fréchet. Comme d'après les propositions 2.4.21 et 2.4.22 le membre de droite est également de dimension finie, c'est un espace séparé. Le théorème 2.3.15 nous donne alors le premier isomorphisme, le deuxième est une conséquence de la proposition 2.4.21. □

Nous aurons besoin, pour $H_q(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_2P_1}^{\omega})$, de quelques calculs sur les distributions à support. Soient H et M deux sous-groupes fermés de G. Comme dans [**64**], corollaire 1.3.6, on peut montrer qu'il existe un sous-groupe compact ouvert G_0 de G, uniforme, tel que les sous-groupes $H_0 = H \cap G_0$ et $M_0 = M \cap G_0$ soient uniformes et compatibles à G_0. Plus précisément, il existe une base topologique $(a_1, \ldots, a_d)$ de G telle que $(a_1, \ldots, a_r)$ soit une base topologique de H_0, $(a_s, \ldots, a_t)$ une base topologique de M_0 et $(a_s, \ldots, a_r)$ une base topologique de $H_0 \cap M_0$. Posons $b_i = a_i - 1$ et pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $b^\alpha = b_1^{\alpha_1} \cdots b_d^{\alpha_d}$. Si $\alpha = (\alpha_i)$ est multi-indice, son support $Supp(\alpha)$ est l'ensemble des i tels que $\alpha_i \neq 0$. Alors $D(G_0)$ est l'ensemble des séries $\sum_\alpha d_\alpha b^\alpha$, où $\sup_\alpha |d_\alpha| r^{|\alpha|} < \infty$ pour tout $0 < r < 1$. On munit $D(G_0)$ de la norme

$$||\sum_\alpha d_\alpha b^\alpha||_r = \sup_\alpha |d_\alpha| r^{|\alpha|}. \tag{2.4.81}$$

Le complété de $D(G_0)$ pour cette norme, noté $D(G_0)_r$, s'identifie donc à l'espace des séries

$$\sum_\alpha d_\alpha b^\alpha, \tag{2.4.82}$$

où $|d_\alpha| r^{|\alpha|} \to 0$. Si $\mu = \sum d_\alpha b^\alpha$, on a $\mu \in D(H_0)_r$ (resp. $\mu \in D(M_0)_r$, resp. $\mu \in D(H_0 \cap M_0)_r$) si et seulement si $d_\alpha = 0$ lorsque $Supp(\alpha) \not\subset \{1, \ldots, r\}$ (resp. $Supp(\alpha) \not\subset \{s, \ldots, t\}$, resp. $Supp(\alpha) \not\subset \{s, \ldots, r\}$). Notons aussi $U(\mathfrak{g}, K)_r$ le complété de $U(\mathfrak{g})$ pour la norme $|| \cdot ||_r$, c'est l'adhérence dans $D(G_0)_r$ de $D(G_0)_1$. Fixons $\frac{1}{p} < r < 1$. On sait, d'après Schneider et Teitelbaum, que la norme $|| \cdot ||_r$ est alors multiplicative. De plus, d'après Frommer ([**46**, §1.4]), il existe des entiers l_i pour $1 \leq i \leq d$ tels que si $A = \{b^\alpha, \alpha_i < l_i\}$, A est une base de $D(G_0)_r$ en tant que $U(\mathfrak{g}, K)_r$-module à gauche. Si Y est H_0, M_0 ou $H_0 \cap M_0$, posons A_Y l'ensemble des éléments de A appartenant à Y. De même, A_Y est une base de $D(Y)_r$ en tant que $U(\mathfrak{y}, K)_r$-module à gauche. Définissons également A_{HM} la partie de A constituée des b^α pour lesquels $\alpha_i = 0$ si $i > t$.

Proposition 2.4.24. — *Chaque $D(G_0)_{Y,r}$ est un $U(\mathfrak{g},K)_r$-module libre dont une base est donnée par A_Y. L'adhérence $D(G_0)_{H_0M_0,r}$ de $D(G_0)_{H_0K_0}$ dans $D(G_0)_r$ est un $U(\mathfrak{g},K)_r$ module libre à gauche dont une base est donnée par les éléments de A_{HM}.*

Démonstration. — La première assertion est le corollaire 1.4.1 de [**63**]. Jan Kohlhaase ne traite que le cas où le support est un sous-groupe, c'est pourquoi nous devons reprendre sa démonstration dans le dernier cas. Soit D le sous-$U(\mathfrak{g},K)_r$-module à gauche engendré par A_{HM}. C'est un $U(\mathfrak{g},K)_r$-module de type fini, il est donc fermé dans $D(G_0)_r$. Il est clairement contenu dans l'adhérence de $D(G_0)_{H_0M_0}$. Réciproquement D contient $U(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{Q}_p}K[H_0M_0]$ qui est dense dans $D(G_0)_{H_0M_0}$, donc dans $D(G_0)_{H_0M_0,r}$. Ainsi D contient également $D(G_0)_{H_0M_0,r}$. □

Notons encore $||\cdot||_r$ la norme quotient de la norme $||\cdot||_r\otimes||\cdot||_r$ sur $D(H_0)\hat{\otimes}_{D(H_0)_{H_0\cap M_0}}D(G_0)_{M_0}$. Le produit dans $D(G_0)_r$ permet de définir une application continue

$$\mu_r:\ D(H_0)_r\otimes_K D(G_0)_{M_0,r}\to D(G_0)_{H_0M_0,r}. \tag{2.4.83}$$

Lemme 2.4.25. — *L'application*

$$D(H_0)_r\otimes_{D(H_0)_{H_0M_0,r}}D(G_0)_{M_0,r}\to D(G_0)_{H_0M_0,r} \tag{2.4.84}$$

induite par μ_r est un isomorphisme.

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 2.4.24. On a en effet

$$D(H_0)_r\otimes_{D(H_0)_{H_0M_0,r}}D(G_0)_{M_0,r}=\\ \Big(\bigoplus_{\alpha\in A_H}U(\mathfrak{h},K)_r\alpha\Big)\otimes_{\bigoplus_{\alpha\in A_{H\cap M}}U(\mathfrak{h},K)_r\alpha}\Big(\bigoplus_{\alpha\in A_M}U(\mathfrak{g},K)_r\alpha\Big) \tag{2.4.85}$$

De plus, le lemme 1.2.4 de [**64**] montre que si $\delta\in D(G_0)$ a pour support $\{1\}$ et $g\in G_0$, $\delta_g\delta\delta_g^{-1}$ a pour support $\{1\}$. Comme $U(\mathfrak{g},K)_r$ est l'adhérence des distributions à support dans $\{1\}$ pour la norme $||\cdot||_r$, on en conclut que $U(\mathfrak{g},K)_r$ est stable par l'action adjointe de $K[G_0]$. Ainsi

$$\bigoplus_{\alpha\in A_{H\cap M}}U(\mathfrak{h},K)_r\alpha=\bigoplus_{\alpha\in A_{H\cap M}}\alpha U(\mathfrak{h},K)_r. \tag{2.4.86}$$

On obtient donc un isomorphisme

$$D(H_0)_r\otimes_{D(H_0)_{H_0M_0,r}}D(G_0)_{M_0,r}=\bigoplus_{\alpha\in A_s}K\alpha\otimes_K D(G_0)_{M_0,r}, \tag{2.4.87}$$

où A_s désigne l'ensemble des $b^\alpha\in A$ tels que $\alpha_i=0$ pour $i\geq s$. Il est alors clair par la proposition 2.4.24 que le terme de droite s'envoie isomorphiquement sur $D(G_0)_{H_0M_0,r}$. □

De même que dans [**64**, page 17], on voit que $D(H_0)_r\otimes_{D(H_0)_{H_0\cap M_0,r}}D(G_0)_{M_0,r}$ est un espace de Banach pour la norme quotient de la norme produit tensoriel, et donc que l'on a un isomorphisme topologique

$$D(H_0)_r\otimes_{D(H_0)_{H_0\cap M_0,r}}D(G_0)_{M_0,r}\simeq(D(H_0)_r\hat{\otimes}_K D(G_0)_{M_0,r})/\overline{\ker\mu_r}. \tag{2.4.88}$$

Le même raisonnement que dans [**64**, page 18] montre alors que l'on obtient un isomorphisme topologique

$$D(H_0)\hat{\otimes}_{D(H_0)_{H_0\cap M_0}}D(G_0)_{M_0}\to D(G_0)_{H_0M_0} \tag{2.4.89}$$

Corollaire 2.4.26. — *On a un isomorphisme topologique*

$$D(H)\hat{\otimes}_{D(H)_{H\cap M},\iota}D(G)_M\simeq D(G)_{HK}. \tag{2.4.90}$$

Démonstration. — C'est une conséquence de l'isomorphisme (2.4.89), du corollaire 1.2.14 de [**64**] et de la formule (1.6) de [**64**]. □

Notons $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1}$ le quotient de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)$ par $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_2wP_1}$ où P_2wP_1 est l'orbite ouverte. Le groupe P_1 agit par translation à droite sur $C^{\omega}_{P_2P_1}(G,\rho)$ et $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1}$ s'identifie au sous-espace de $C^{\omega}_{P_2P_1}(G,\rho)$ ([**64**, §1.2]) sur lequel P_1 agit à travers ρ. On voit donc que

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})' \simeq D(G)_{P_2P_1}\tilde{\otimes}_{D(P_1),\iota}\rho'. \tag{2.4.91}$$

Ainsi d'après le corollaire 2.4.26, on a

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})' \simeq [D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota}D(G)_{P_1}]\tilde{\otimes}_{D(P_1),\iota}\rho'. \tag{2.4.92}$$

D'où

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})' \simeq D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota}[D(G)_{P_1}\hat{\otimes}_{D(P_1)}\rho']. \tag{2.4.93}$$

D'après la proposition 1.2.12 de [**64**], $D(G)_{P_1} \simeq D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)_1}D(P_1)$, donc

$$D(G)_{P_1}\hat{\otimes}_{D(P_1)}\rho' \simeq D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)_1}\rho', \tag{2.4.94}$$

et c'est un espace de Fréchet nucléaire.

Précisons l'action de

$$D(P_2)_{P_1\cap P_2} \simeq D(P_2)_1\hat{\otimes}_{D(P_1\cap P_2)_1,\iota}D(P_1\cap P_2) \tag{2.4.95}$$

sur $D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'$. Pour $\lambda \in D(P_2)_1$, $g \in P_1 \cap P_2$ et $x \otimes v \in D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'$, on a

$$(\lambda \otimes \delta_g)\cdot(x\otimes v) = (\lambda \mathrm{Ad}(g)x)\otimes(gv). \tag{2.4.96}$$

Calculons $H^q(\mathfrak{n}_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)'_{P_2P_1})$ en utilisant le complexe de Chevalley-Eilenberg. Il s'agit de la cohomologie du complexe

$$D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota}(\textstyle\bigwedge^{\cdot}\mathfrak{n}_2^*\otimes_K D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)}\rho'). \tag{2.4.97}$$

Lemme 2.4.27. — *Soient $Q\subset P$ deux sous-groupes paraboliques de G. Le foncteur $D(P)\hat{\otimes}_{D(P)_Q,\iota}\cdot$ transforme toute suite exacte stricte d'espaces de Fréchet nucléaires munis d'une action séparément continue de $D(P)_Q$ en une suite exacte stricte de K-espaces de Fréchet nucléaires.*

Démonstration. — Soit V un espace de Fréchet nucléaire muni d'une action de $D(P)_Q$. Comme $D(P)=\bigoplus_{h\in P/P_0}\delta_hD(P_0)$, $D(P)_Q=\bigoplus_{h\in Q/Q_0}\delta_hD(P)_{Q_0}$ et $P=QP_0$, on a un isomorphisme topologique

$$D(P)\hat{\otimes}_{D(P)_Q,\iota}V \simeq D(P_0)\hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0}}V. \tag{2.4.98}$$

D'après la proposition 1.2.12 de [**64**], $D(P_0)_{Q_0}\simeq D(Q_0)\hat{\otimes}_{D(Q_0)_1}D(P_0)_1$, l'algèbre $D(P_0)_{Q_0}$ est donc topologiquement engendrée par les $\lambda\in D(Q_0)$ et des éléments $x_1,\ldots,x_r$ relevant une base de $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$. Ainsi $D(P_0)\hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0}}V$ est le quotient de $D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)}V$ par l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les $\lambda x_i\otimes v-\lambda\otimes x_iv$ pour $\lambda\in D(P_0)$, $v\in V$, c'est-à-dire par l'adhérence de l'image de

$$\varphi_V : \begin{array}{ccc} D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}\otimes_K V) & \to & D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)}V \\ \lambda\otimes(x_i\otimes v) & \mapsto & (\lambda x_i\otimes v-\lambda\otimes x_iv)_i \end{array}, \tag{2.4.99}$$

où $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ est muni de l'action de $D(Q_0)$ déduite de l'action adjointe de Q_0. Remarquons aussi que d'après le lemme 2.6 de [**63**], on a un isomorphisme $D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)}V\simeq D(P_0/Q_0)\hat{\otimes}_KV$. D'après le lemme 2.4.13, le foncteur $D(P_0/Q_0)\hat{\otimes}_K\cdot$ transforme les suites exactes strictes de K-espaces de Fréchet en suites exactes strictes. Commes les espaces $D(P_0/Q_0)$ et V sont des espaces de

Fréchet nucléaires, l'espace $D(P_0)\hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0}} V$ est également de Fréchet nucléaire. Comme un espace de Fréchet nucléaire est réflexif, on voit que l'on a un isomorphisme

$$D(P_0)\hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0}} V \simeq (\ker \varphi'_V)' \tag{2.4.100}$$

et que $\ker \varphi'_V$ est un K-espace vectoriel de type compact. Comme le passage au dual fort est un foncteur exact sur les suites exactes strictes de K-espaces vectoriels de type compact, il suffit de prouver que si $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ est une suite exacte stricte d'espaces de Fréchet nucléaires, la suite $0 \to \ker \varphi'_{V_3} \to \ker \varphi'_{V_2} \to \ker \varphi'_{V_1} \to 0$ est stricte exacte. L'exactitude se déduit du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & 0 & 0 & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker \varphi'_{V_1} \arrow[r] \arrow[u] & (D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)} V_1)' \arrow[r] \arrow[u] & (D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q} \otimes_K V_1))' \arrow[u] \\ 0 \arrow[r] & \ker \varphi'_{V_2} \arrow[r] \arrow[u] & (D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)} V_2)' \arrow[r] \arrow[u] & (D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q} \otimes_K V_2))' \arrow[u] \\ 0 \arrow[r] & \ker \varphi'_{V_3} \arrow[r] \arrow[u] & (D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)} V_3)' \arrow[r] \arrow[u] & (D(P_0)\tilde{\otimes}_{D(Q_0)}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q} \otimes_K V_3))' \arrow[u] \\ & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2.4.101}$$

et le caractère strict du fait qu'une application continue surjective entre espaces de type compact est stricte. □

L'espace $D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)_1}\rho'$ est un espace de Fréchet. Comme $D(P_1)_1$ agit trivialement sur ρ'_∞, on a un isomorphisme topologique

$$D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)_1}\rho' \simeq (D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})\hat{\otimes}_K \rho'_\infty. \tag{2.4.102}$$

L'espace $D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}$ est alors un espace de Fréchet et $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho'_{alg}$ en est un sous-espace dense. De plus le même raisonnement que dans la preuve du théorème 8.5 de [**63**] montre que le complexe calculant la cohomologie $H^q(\mathfrak{n}_2, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho'_{alg})$ est à différentielles strictes d'images fermées, pour la topologie induite par la topologie de $D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}$. Ainsi par [**63**, théorème 7.5] le groupe topologique $H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})$ s'identifie au complété de $H^q(\mathfrak{n}_2, U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p}_1)}\rho'_{alg})$ muni de la topologie métrisable induite par $\bigwedge^q \mathfrak{n}'_2 \otimes_K (D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P)_1}\rho'_{alg})$. De plus, le complexe $(\bigwedge^{\cdot} \mathfrak{n}'_2 \otimes_K (D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}))$ calculant $H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})$ est un complexe d'espaces de Fréchet nucléaires dont les différentielles sont strictes. Ainsi d'après le lemme 2.4.13, on a

$$H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)_1}\rho') \simeq H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})\hat{\otimes}_K \rho'_\infty. \tag{2.4.103}$$

En particulier cet espace est séparé, donc les différentielles du complexe $\bigwedge^{\cdot} \mathfrak{n}'_2 \otimes (D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)_1}\rho')$ sont d'images fermées. Comme ce sont des applications entre espaces de Fréchet, elles sont strictes. En appliquant le lemme 2.4.27 à ce complexe, on obtient un isomorphisme

$$H^q(\mathfrak{n}_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})') = D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota} H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1),\iota}\rho'). \tag{2.4.104}$$

Ainsi on a

$$H^q(\mathfrak{n}_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})') = (D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota} H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)_1}\rho'_{alg}))\hat{\otimes}_K \rho'_\infty. \tag{2.4.105}$$

L'espace $H^q(\mathfrak{n}_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})')$ est donc séparé. D'après la remarque précédent (2.3.43), c'est aussi le cas de

$$H_q(\mathfrak{n}_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1}) \simeq H^q(\mathfrak{n}_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})')'. \tag{2.4.106}$$

Ainsi l'espace

$$H_q(\mathfrak{n}_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})_{N_2} = H_q(\mathfrak{n}_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1}) \otimes_K J_{N_2\cap L_1}(\rho_\infty) \tag{2.4.107}$$

est séparé. D'après le corollaire 2.3.18, c'est un espace de type compact et on a

$$H_q(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})' \simeq H^q(N_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})'), \tag{2.4.108}$$

et donc

$$H^q(N_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})') \simeq D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota} H^q(N_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}) \otimes_K J_{N_2\cap L_1}(\rho_\infty)'. \tag{2.4.109}$$

Il y a ensuite plusieurs cas à distinguer selon la nature des composantes W de $H^i(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})$.

Lemme 2.4.28. — *Si W est une représentation algébrique de dimension finie de $D(P_2)$, et χ un carcatère lisse de $P_1 \cap P_2$, alors*

$$D(P_2) \otimes_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}} (W \otimes \chi^{-1}) \simeq (D(P_2)^\infty \otimes_{D(P_1\cap P_2)^\infty} \chi^{-1}) \otimes W. \tag{2.4.110}$$

Démonstration. — Dans ce cas, W est un $D(P_2)$-module. L'application

$$\lambda \otimes v \mapsto c_W(\lambda)(1 \otimes v), \tag{2.4.111}$$

où c_W est la comultiplication de $D(P_2)$ induit un isomorphisme de $D(P_2)\otimes_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}} (W\otimes\chi^{-1})$ sur

$$(D(P_2) \otimes_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}} \chi^{-1}) \otimes_K W \tag{2.4.112}$$

muni de la structure de $D(P_2)$-module diagonale. Il est alors clair qu'on a un isomorphisme

$$D(P_2) \otimes_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}} \chi^{-1} \simeq D(P_2)^\infty \otimes_{D(P_1\cap P_2)^\infty} \chi^{-1}. \tag{2.4.113}$$

$\square$

Lemme 2.4.29. — *Supposons que W soit le complété de $U(\mathfrak{p}_2) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)} \chi^{-1}$ où χ est un caractère de $P_1 \cap P_2$. Alors*

$$D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}} W \simeq D(P_2) \otimes_{D(P_1\cap P_2)} \chi^{-1}. \tag{2.4.114}$$

Démonstration. — L'espace W contient une droite $U(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2)$-stable. Par continuité et densité de $U(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2)$ dans $D(P_1 \cap P_2)_1$, elle est $D(P_1 \cap P_2)_1$-stable, autrement dit on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{p}_2) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)} \chi^{-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & W \\ D(P_2)_1 \otimes_{D(P_1\cap P_2)_1} \chi^{-1} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \tag{2.4.115}$$

La flèche verticale est continue car la topologie métrisable sur $U(\mathfrak{p}_2) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)} \chi^{-1}$ induite par la topologie de $\bigwedge^q \mathfrak{n}'_2 \otimes_K (D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P)_1}\rho'_{alg})$ est donnée par la distance somme directe selon les sous-espaces $\mathfrak{t}$-isotypiques. Vu que W est aussi le complété de $U(\mathfrak{p}_2) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)} \chi^{-1}$, on obtient une autre flèche continue $j : W \to D(P_2)_1 \otimes_{D(P_1\cap P_2)_1} \chi^{-1}$. Les applications continues $i\circ j$ et $j\circ i$ coïncident avec l'identité sur des sous-espaces denses, donc sont égales à l'identité. On utilise alors l'isomorphisme $D(P_2)_{P_1\cap P_2} \simeq D(P_2 \cap P_1)\hat{\otimes}_{D(P_2\cap P_1)_1} D(P_2)_1$. $\square$

On peut alors conclure en utilisant la proposition suivante, issue des calculs de l'appendice 2.

Proposition 2.4.30. — *Soit λ un poids dominant. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_2$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) =& U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-\lambda) & H^0(\mathfrak{n}_2,F'_{s_2\cdot\lambda,1}) =& U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_2\cdot\lambda)\\
&&& \oplus U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{U(\mathfrak{b})}(-s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) =& U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_1\cdot\lambda) & H^1(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) =& U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_1s_2\cdot\lambda)\\
& \oplus F'_{s_1s_2\cdot\lambda,2} && \oplus U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{U(\mathfrak{b})}(-s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^2(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) =& F'_{s_1s_2\cdot\lambda,2} & H^2(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) =& 0\\
H^0(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) =& U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) =& U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_1s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^2(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) =& 0
\end{aligned} \tag{2.4.116}$$

Exemple 2.4.31. — Calculons par exemple $H^1(N_2,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda)^{\omega}_{P_2P_1})')$. L'espace $H^1(N_2,D(G)_1\otimes_{D(P_1)_1}F'_{\lambda,1})$ est le complété de $H^1(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_\lambda))$, ainsi d'après la formule (2.4.109), les lemmes 2.4.28, 2.4.29 et la proposition 2.4.30,

$$H^1(N_2,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})^{\omega}_{P_2P_1})')\simeq(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{Ind}_{L_2\cap B}^{L_2}(1)^{\infty})'\oplus\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1\cdot\lambda)'. \tag{2.4.117}$$

Corollaire 2.4.32. — *Si ρ est une représentation localement algébrique irréductible de L_1, l'espace topologique $H^q(N_2,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})')$ est un espace de Fréchet nucléaire et on a un isomorphisme $D(L_2)$-équivariant, pour tout $q\geq 0$,*

$$H_q(N_2,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})\simeq H^q(N_2,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})')'. \tag{2.4.118}$$

En particulier l'espace $H_q(N_2,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})$ est de type compact.

2.4.5.5. Conclusion et formulaire. — Nous pouvons à présent revenir à la représentation $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)$.

Corollaire 2.4.33. — *Si ρ est une localement algébrique irréductible de L_1, pour tout $q\geq 0$, l'espace $H_q(N_i,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho))$ est un espace de type compact muni d'une représentation localement analytique de L_i. De plus, on a un isomorphisme topologique L_i -équivariant*

$$H_q(N_i,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho))'\simeq H^q(N_i,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)'). \tag{2.4.119}$$

Enfin, si $q>\dim N_i=2$, ces espaces sont nuls.

Démonstration. — On applique la suite exacte longue d'homologie ou cohomologie à la suite (2.4.50). On applique alors le corollaire 2.4.19, le lemme 2.4.20, le corollaire 2.4.23, ainsi que la proposition 2.4.30 et le corollaire 2.4.32. □

Dans le cas où ρ_{alg} est la représentation de L_1 de plus haut poids dans X_1^+, la représentation de L_i peut se calculer explicitement. On fixe donc λ un poids dominant, et nous donnons ci-dessous la forme des représentations $H_q(N_i,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{w\cdot\lambda,1}))$ pour $w\in\{1,s_2,s_2s_1\}$.

$$\begin{aligned}
H_0(N_1,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}\otimes\rho_\infty)) &= (F_{\lambda,1}\oplus F_{s_2\cdot\lambda,1})\otimes_K\rho_\infty\\
H_1(N_1,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}\otimes\rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_2\cdot\lambda\otimes|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|\otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2}))\oplus(F_{s_2\cdot\lambda,1}\oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})\otimes_K\rho_\infty\\
H_2(N_1,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}\otimes\rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_2s_1\cdot\lambda\otimes|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|\otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2}))\oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}\otimes\rho_\infty
\end{aligned} \tag{2.4.120}$$

$$
\begin{aligned}
H_0(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= (F_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}) \otimes \rho_\infty \\
H_1(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(\lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2})) \oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda} \otimes_K \rho_\infty \\
H_2(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1s_2s_1 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2}))
\end{aligned}
\tag{2.4.121}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty \\
H_1(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2})) \\
H_2(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1s_2 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2}))
\end{aligned}
\tag{2.4.122}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(\lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
H_1(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{L_2\cap B}^{L_2}(J_{N\cap L_1}(\rho_\infty))^\infty \otimes F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
H_2(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \otimes_K \rho_\infty^{s_1s_2} \oplus F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{Ind}_{L_2\cap B}^{L_2}(J_{N\cap L_1}(\rho_\infty))^\infty
\end{aligned}
\tag{2.4.123}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_2 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_2s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
H_1(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1s_2 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_2s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
H_2(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \otimes_K \rho_\infty^{s_1s_2}
\end{aligned}
\tag{2.4.124}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_2s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
H_1(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1s_2s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
H_2(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) &= F_{\lambda,2} \otimes |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \otimes_K \rho_\infty^{s_1s_2}
\end{aligned}
\tag{2.4.125}
$$

De la suite exacte

$$0 \to F_\lambda \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}) \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \to 0, \tag{2.4.126}$$

on déduit

$$H_0(N_1, v_{P_1}^{an}(\lambda)) = F_{s_2\cdot\lambda,1} \tag{2.4.127}$$
$$H_1(N_1, v_{P_1}^{an}(\lambda)) = \mathrm{Ind}_B^{P_1}(s_2 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \tag{2.4.128}$$
$$H_2(N_1, v_{P_1}^{an}(\lambda)) = \mathrm{Ind}_B^{P_1}(s_2s_1 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \tag{2.4.129}$$
$$H_0(N_2, v_{P_1}^{an}(\lambda)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(\lambda)/F_{\lambda,2} \tag{2.4.130}$$
$$H_1(N_2, v_{P_1}^{an}(\lambda)) = F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{Ind}_B^{P_2}(1)^\infty \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1 \cdot \lambda)/F_{s_1\cdot\lambda,2} \tag{2.4.131}$$
$$H_2(N_2, v_{P_1}^{an}(\lambda)) = F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \oplus F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2. \tag{2.4.132}$$

En utilisant ces calculs, la suite spectrale (2.4.40) et le théorème 8.14 de [**63**], on obtient les dimensions suivantes

$$
\begin{aligned}
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) = 2, \quad \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2})) = 0, \\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = 1, \quad \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2})) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.4.133}
$$

En utilisant les suites exactes (2.2.60), on peut également en déduire les groupes d'homologie de la forme $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})$. Nous aurons par exemple besoin plus tard de

$$H_1(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1}) = F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \oplus F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)^\infty \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|). \tag{2.4.134}$$

Enfin, rappelons que N désigne le radical unipotent de B. En associant le calcul précédent de $H_q(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{w\cdot\lambda,1}))$ avec le théorème 8.12 de [**63**], on peut calculer les termes $H_q(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{w\cdot\lambda,1}))$.

$$\begin{aligned}
H_0(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})) &= \lambda \oplus s_2\cdot\lambda \\
H_1(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})) &= (s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus (s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus s_2\cdot\lambda \oplus s_2s_1\cdot\lambda \oplus s_1\cdot\lambda \oplus s_1s_2\cdot\lambda \\
H_2(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})) &= (s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus (s_1s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus s_2s_1\cdot\lambda \oplus (s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \\
&\quad \oplus s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \oplus s_1s_2\cdot\lambda \oplus s_1s_2s_2\cdot\lambda \\
H_3(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})) &= (s_1s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus s_1s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \oplus s_1s_2s_1\cdot\lambda
\end{aligned} \tag{2.4.135}$$

$$\begin{aligned}
H_0(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) &= s_2\cdot\lambda \oplus s_2s_1\cdot\lambda \\
H_1(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) &= (\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus (s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus s_2s_1\cdot\lambda \oplus s_1s_2\cdot\lambda \oplus s_1s_2s_1\cdot\lambda \\
H_2(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) &= (s_1s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus (s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus (s_1\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|) \oplus s_1s_2s_2\cdot\lambda \\
H_3(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) &= (s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)
\end{aligned} \tag{2.4.136}$$

$$\begin{aligned}
H_0(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= s_2s_1\cdot\lambda \\
H_1(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= (s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus s_1s_2s_1\cdot\lambda \\
H_2(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= (s_1s_2s_1\cdot\lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) \oplus (\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|) \\
H_3(N, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= (s_2\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)
\end{aligned} \tag{2.4.137}$$

2.5. Construction de représentations localement analytiques

Dans cette partie, nous utilisons les résultats précédents pour construire des extensions entre les représentations localement analytiques de Steinberg généralisées de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. On fixe λ un poids dominant de G.

2.5.1. Cohomologie de $v_{P_i}^{an}(\lambda)$. — Dans cette partie, P_i désigne un des deux sous-groupes paraboliques P_1 ou P_2.

Proposition 2.5.1. — *L'application quotient $\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda) \to v_{P_i}^{an}(\lambda)$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v_{P_i}^{an}(\lambda)). \tag{2.5.1}$$

Démonstration. — En effet, on a d'après le corollaire 2.4.6

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) = 0 \tag{2.5.2}$$

et on écrit la suite exacte longue associée à

$$0 \to F_\lambda \to \mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda) \to v_{P_i}^{an}(\lambda) \to 0. \tag{2.5.3}$$

□

D'après le théorème 2.4.10, pour tout $p \geq 1$, les L_i-modules $H_p(N_i, F_{\lambda,i})$ et $F_{\lambda,i}$ sont non isomorphes. Donc la suite spectrale (2.4.40) ainsi que la proposition 2.4.5 montrent que

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{L_i,\lambda}(F_{\lambda,i}, F_{\lambda,i}). \tag{2.5.4}$$

Par ailleurs la proposition 2.4.5 donne un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{L_i,\lambda}(F_{\lambda,i}, F_{\lambda,i}) \simeq H^q(\overline{L}_i, 1). \tag{2.5.5}$$

On obtient donc un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda)) \simeq H^q(\overline{L}_i, 1). \tag{2.5.6}$$

Les espaces $H^q(\overline{L}_i, 1)$ se calculent alors en utilisant le corollaire 2.3.14. En particulier, $H^q(\overline{L}_i, 1) \simeq \bigwedge^q \mathrm{Hom}(\overline{L}_i, K)$, pour $0 \leq q \leq 2$. L'espace $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda))$ est donc un K-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est formée par les morphismes de $\overline{L}_i \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans K, c_{P_i} et $c_{P_i,\mathrm{val}}$ définis par

$$c_{P_i}(p) = \log(\det_i(p)), \quad c_{P_i,\mathrm{val}}(p) = \mathrm{val}(\det_i(p)), \tag{2.5.7}$$

avec $\det_1 = \epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2$, $\det_2 = \epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2$ et $p \in \overline{L}_i$. L'inclusion $\overline{T} \subset \overline{L}_i$ induit une flèche de restriction $res : H^1(\overline{L}_i, 1) \to H^1(\overline{T}, 1)$. On note sh_i la composée de cette flèche de restriction avec l'isomorphisme (2.5.6). La flèche sh_i permet ainsi de voir $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda))$ comme un sous-espace de $H^1(\overline{T}, 1)$.

Proposition 2.5.2. — *L'application* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda))$ *provenant de l'application quotient* $\mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda) \to v^{an}_{P_i}(\lambda)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — On sait déjà, par la proposition 2.4.5, que $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) = 0$. Il suffit donc de prouver que la flèche

$$\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) \to \mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \tag{2.5.8}$$

est injective. Or elle s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \\
\downarrow \wr & & {\scriptstyle (2.5.4)}\downarrow \wr \\
H^3(\overline{G}, 1) & \xrightarrow{res} & H^3(\overline{L}_i, 1) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
H^3(\mathfrak{sl}_3, K) & \xrightarrow{res} & H^3(\mathfrak{sl}_2, K).
\end{array} \tag{2.5.9}$$

La flèche verticale en bas à gauche provient du théorème de Casselman et Wigner (2.3.27) puisque le groupe $\overline{G}$ est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe semi-simple. La flèche verticale de droite dans le carré du bas provient du corollaire 2.3.14 appliqué au groupe $\overline{L}_i \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le carré du bas est commutatif par fonctorialité des flèches de restriction. La flèche horizontale du bas est alors un isomorphisme d'après l'exemple 2.3.13. □

Corollaire 2.5.3. — *L'espace* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda))$ *est de dimension* 1, *isomorphe à* $H^2(\overline{L}_i, 1)$, *dont une base est* $c_{P_i} \wedge c_{P_i,\mathrm{val}}$.

Remarquons au passage que d'après le corollaire 2.3.14 et la structure des éléments primitifs de $\mathfrak{sl}_n$, on a $H^4(\overline{L}_i, 1) = 0$, et donc

$$\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda)) = 0. \tag{2.5.10}$$

2.5.2. Cohomologie de $\Sigma(\lambda)$. — Pour calculer la cohomologie de la représentation $\Sigma(\lambda) = v_B^{an}(\lambda)$, nous allons utiliser une résolution par des induites paraboliques. Soit α l'injection diagonale de F_λ dans $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ et β l'application de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ dans $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$ définie par $\beta(f,g) = f - g$.

Proposition 2.5.4. — *Le complexe*

$$0 \to F_\lambda \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ind}_B^G(\lambda) \to \Sigma(\lambda) \to 0 \tag{2.5.11}$$

est exact.

Démonstration. — La surjectivité de β vient de la définition de $\Sigma(\lambda)$, l'injectivité de α a déjà été vue au lemme 2.2.13. Il reste juste à prouver que le noyau de β est exactement l'image de α. Ceci est une conséquence immédiate de la description des composantes irréductibles des $\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda)$ donnée en (2.2.60). □

Ainsi la cohomologie de $\Sigma(\lambda)$ s'identifie à l'hypercohomologie du complexe,

$$C_*(\lambda) = [F_\lambda \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)] \tag{2.5.12}$$

$\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$ étant placé en degré 0. Pour calculer cette hypercohomologie, nous considérons, pour tout $p \geq 0$, la résolution (29) de [**63**] qui est $(C^{an}(G^{q+1}, C_p(\lambda)))_{q\geq 0}$. Comme cette résolution est fonctorielle, nous obtenons des applications G-équivariantes continues

$$C^{an}(G^{q+1}, C_p(\lambda)) \to C^{an}(G^{q+1}, C_{p-1}(\lambda)), \tag{2.5.13}$$

de sorte que l'on obtient un double complexe $(C^{p,q}(\lambda))$ où $C^{p,q}(\lambda) = C^{an}(G^{q+1}, C_{-p}(\lambda))$. L'espace $\mathrm{Ext}^n_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ est alors le n-ième espace de cohomologie du complexe total associé à $(\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, C^{p,q}(\lambda))$.

On obtient une suite spectrale incluse dans le deuxième cadran

$$E_1^{p,q}(\lambda) = \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, C_{-p}(\lambda)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \tag{2.5.14}$$

Les composantes de cette suite spectrale se calculent facilement en utilisant (2.4.40). Pour tout sous-groupe parabolique P de radical unipotent N_P, les représentations $H_q(N_P, F_\lambda)$ sont données par le théorème 2.4.10. En particulier $H_q(N_P, F_\lambda)$ n'a pas de facteur de Jordan-Hölder isomorphe à $F_{\lambda,P}$ pour $q \geq 1$ et $H_0(N_P, F_\lambda) \simeq F_{\lambda,P}$. Ainsi la flèche d'arête $E_2^{0,q} \to \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_P^G(\lambda))$ est un isomorphisme et donne

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_P^G(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{L_P,\lambda}(H_0(N_0, F_\lambda), F_{\lambda,P}) = \mathrm{Ext}^q_{L_P,\lambda}(F_{\lambda,P}, F_{\lambda,P}) \simeq H^q(\overline{L_P}, 1). \tag{2.5.15}$$

Si P est un sous-groupe parabolique de G contenant B, on a un isomorphisme G-équivariant $C^{an}(G^{q+1}, \mathrm{Ind}_P^G(1)) \otimes_K F_\lambda \simeq C^{an}(G^{q+1}, \mathrm{Ind}_P^G(1) \otimes F_\lambda)$ qui permet de définir un morphisme

$$\mathrm{Hom}_G(1, C^{p,q}(1)) \to \mathrm{Hom}_G(F_\lambda, C^{an}(G^{q+1}, \mathrm{Ind}_P^G(F_\lambda))) \tag{2.5.16}$$

commutant aux différentielles. La composition de cette application avec l'application (2.2.77) produit un morphisme de complexes doubles

$$(C^{p,q}(1)^G) \to (\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, C^{p,q}(\lambda))) \tag{2.5.17}$$

induisant un morphisme $H^n(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \to \mathrm{Ext}^n_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$. Or, pour tout $q \geq 0$, l'explicitation (2.4.41) du morphisme d'arête de la suite spectrale (2.4.40) montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_1^{p,q}(0) & \longrightarrow & E_1^{p,q}(\lambda) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \bigoplus_{S\subset\Delta,|S|=-p} H^q(\overline{L}_S, K) & = & \bigoplus_{S\subset\Delta,|S|=-p} H^q(\overline{L}_S, K) \end{array} \quad (2.5.18)$$

Ceci prouve que toutes ces suites spectrales, pour λ variant parmi les poids dominants, sont isomorphes à la suite spectrale obtenue à partir de $C_*(0)$ que nous noterons désormais C_*. Nous obtenons ainsi des isomorphismes

$$\varphi_\lambda : H^q(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \simeq \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \quad (2.5.19)$$

Déterminons maintenant les différentielles d_2 dans la suite spectrale (2.5.14). Pour chaque inclusion $P \subset Q$ de paraboliques, la décomposition (2.4.41) montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q(\overline{G}, \mathrm{Ind}_Q^G(1)) & \longrightarrow & H^q(\overline{G}, \mathrm{Ind}_P^G(1)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^q(\overline{L_Q}, 1) & \xrightarrow{res} & H^q(\overline{L_P}, 1) \end{array} . \quad (2.5.20)$$

Lemme 2.5.5. — *Les lignes $E_1^{\cdot,0}$ et $E_1^{\cdot,1}$ sont exactes.*

Démonstration. — Notons res_i l'application de $\mathrm{Hom}(\overline{L}_i, K)$ dans $\mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$ obtenue par composition avec l'inclusion $\overline{T} \subset \overline{L}_i$. La ligne $E_1^{\cdot,0}$ est

$$1 \to 1 \oplus 1 \to 1. \quad (2.5.21)$$

De même la ligne $E_1^{\cdot,1}$ est isomorphe à

$$0 \to \mathrm{Hom}(\overline{L_1}, K) \oplus \mathrm{Hom}(\overline{L_2}, K) \xrightarrow{res_1 \oplus res_2} \mathrm{Hom}(\overline{T}, K) \quad (2.5.22)$$

qui est exacte car $\overline{T}$ est le produit des centres de $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$. □

Les espaces $E_1^{0,q}$ sont particulièrement simples. D'après le corollaire 2.3.11, on a des isomorphismes

$$E_1^{0,q} = H^q(\overline{T}, 1) \simeq \bigwedge^q \mathrm{Hom}(\overline{T}, 1). \quad (2.5.23)$$

Posons $c_{1,\log} = \log_0 \circ(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2)$, $c_{1,\mathrm{val}} = \mathrm{val} \circ (\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2)$, $c_{2,\log} = \log_0 \circ(\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2)$ et $c_{2,\mathrm{val}} = \mathrm{val} \circ (\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2)$. Ces quatre éléments forment une base de $\mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$. Remarquons que $c_{i,\log}$ et $c_{i,\mathrm{val}}$ se prolongent au groupe $\overline{L}_i$ et engendrent donc l'image de la flèche de restriction

$$H^1(\overline{L}_i, 1) \to H^1(\overline{T}, 1). \quad (2.5.24)$$

De plus $c_{i,\log}$ et $c_{i,\mathrm{val}}$ sont les images par cette flèche de c_{P_i} et $c_{P_i,\mathrm{val}}$, définis dans la section précédente. On en conclut immédiatement que la flèche $d_1^{-1,2}$ est injective d'image engendrée par $c_{1,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}}$ et $c_{2,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$. Ainsi $E_2^{0,2}$ est de dimension 4 et s'identifie au quotient de $\bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$ par l'espace engendré par ces deux éléments. On en conclut au passage que $E_2^{-1,2} = 0$. Le corollaire 2.4.6 nous montre que $E_1^{-2,2} = E_1^{-2,4} = 0$. Enfin, d'après le corollaire 2.3.14, les espaces $H^3(\overline{G}, 1)$ et $H^3(\overline{L}_i, 1)$ sont de dimension 1. Comme la restriction de $\overline{G}$ à $\overline{L}_i$ est injective, on obtient $E_2^{-2,3} = 0$ et $\dim_K E_2^{-1,3} = 1$. En comparant tous ces résultats on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.5.6. — *Les espaces* $\mathrm{Hom}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *et* $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *sont nuls et* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *est de dimension* 5.

Il s'agit maintenant de décrire les éléments de $\mathrm{Ext}^2(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$. Le sous-espace correspondant à $E_2^{0,2}$ est de dimension 4 et peut être décrit de façon élémentaire en termes de cup-produits par (2.5.23). On obtient ainsi une application

$$\kappa : H^2(\overline{T}, 1) \simeq E_1^{0,2} \twoheadrightarrow E_2^{0,2} \hookrightarrow \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \tag{2.5.25}$$

Le noyau de κ a pour base les cocycles $c_{1,\mathrm{log}} \wedge c_{1,\mathrm{val}}$ et $c_{2,\mathrm{log}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ et les éléments

$$\kappa(c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}), \kappa(c_{1,\mathrm{log}} \wedge c_{2,\mathrm{log}}), \kappa(c_{1,\mathrm{log}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}), \kappa(c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{log}}) \tag{2.5.26}$$

forment une base de $E_2^{0,2}$. Par exemple, l'élément $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ provient d'une extension dans la catégorie des représentations localement algébriques.

Proposition 2.5.7. — *La classe $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ engendre l'image de l'application*

$$\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \tag{2.5.27}$$

Démonstration. — D'après le théorème 1 de [**71**] (voir aussi le théorème 1.3 de [**34**]) l'application quotient $\mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty \to \mathrm{St}_3$ induit un isomorphisme $\mathrm{Ext}^2_{\overline{G},\infty}(1, \mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty) \simeq \mathrm{Ext}^2_{\overline{G},\infty}(1, \mathrm{St}_3)$. Ainsi, d'après la proposition 2.4.7, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty) \simeq \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3). \tag{2.5.28}$$

Par ailleurs le corollaire 10 de [**71**] et la proposition 2.4.7 nous donnent un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty) \simeq \bigwedge\nolimits^2 \mathrm{Hom}_\infty(\overline{T}, K). \tag{2.5.29}$$

On obtient alors un diagrammes commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3) \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d] & \bigwedge^2 \mathrm{Hom}_\infty(\overline{T}, K) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) & \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)) \arrow[l] \arrow[r] & \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}, K).
\end{tikzcd} \tag{2.5.30}$$

□

Notons $W(\lambda)$ le sous-espace $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) + \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ de $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$. Le morceau $E_2^{-1,3}$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, W(\lambda))$ et l'application $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) \to E_2^{-1,3}$ est alors l'application bord obtenue à partir de la suite exacte

$$0 \to W(\lambda) \to \mathrm{Ind}_B^G(\lambda) \to \Sigma(\lambda) \to 0. \tag{2.5.31}$$

Son noyau est l'image de κ.

2.5.3. Cohomologie et dilogarithme.

— Soit $W = W(0)$, $\mathrm{St}_3^{an} = \Sigma(0)$. Nous allons montrer comment le dilogarithme p-adique permet de décrire des éléments de $H^3(\overline{G}, W)$ et de les relever en des éléments de $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$.

Notons $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des applications mesurables D de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^4$ dans K vérifiant l'équation fonctionnelle

$$D(xy) - D(x) - D(y) + D(y\frac{1-x}{1-y}) - D(x\frac{1-y}{1-x}) = 0. \tag{2.5.32}$$

Soit li_2 la fonction dilogarithme $\mathbb{Q}_p \backslash \{0, 1\} \to \mathbb{Q}_p$ construite par Robert Coleman dans [**25**]. Cette fonction dépend du choix d'une détermination du logarithme p-adique, c'est-à-dire de la valeur de $\log(p)$. En choisissant la détermination $\log(p) = a$, on pose

$$D_a(z) = li_2(z) + \frac{1}{2} \log_a(z) \log_a(1-z). \tag{2.5.33}$$

La détermination que nous utiliserons le plus souvent est $a = 0$, on note donc, pour alléger les indices, $D = D_0$. On vérifie alors que

$$D_a - D = \frac{a}{2} d \tag{2.5.34}$$

où d est définie sur $\mathbb{Q}_p \backslash \{0\}$ par

$$d(z) = \log(1-z)\mathrm{val}(z) - \log(z)\mathrm{val}(1-z), \tag{2.5.35}$$

et cette fois-ci, d ne dépend pas du choix d'une branche du logarithme. Les fonctions D et d sont deux éléments de $\mathcal{B}$. Nous montrons en appendice que $\mathcal{B}$ est un K-espace vectoriel de dimension 2 ayant pour base (D, d). Nous y construisons également un isomorphisme

$$\theta : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}), \tag{2.5.36}$$

que nous allons à présent utiliser. Le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit trivialement sur St_2^{an}, on a donc une injection

$$H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}) \hookrightarrow H^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}). \tag{2.5.37}$$

Notons $\tilde{\theta}$ la composée de θ avec cette injection.

En quotientant la suite exacte

$$0 \to W \to \mathrm{Ind}_B^G(1) \to \mathrm{St}_3^{an} \to 0 \tag{2.5.38}$$

par $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(1)$, on obtient une suite exacte

$$0 \to v_{P_2}^{an} \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\mathrm{St}_2^{an}) \to \mathrm{St}_3^{an} \to 0. \tag{2.5.39}$$

D'après (2.5.10), $H^3(\overline{G}, v_{P_2}^{an}) = 0$. On obtient donc une surjection

$$H^2(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\mathrm{St}_2^{an})) \twoheadrightarrow H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}). \tag{2.5.40}$$

Comme $H_1(N_1, 1)$ et $H_2(N_1, 1)$ sont, d'après le théorème 2.4.10, des représentations sur lesquelles le centre de $\overline{L}_1$ agit non trivialement, la suite spectrale (2.4.40) prend ici la forme d'un isomorphisme de Shapiro

$$H^2(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\mathrm{St}_2^{an})) \xrightarrow{\sim} H^2(\overline{L_1}, \mathrm{St}_2^{an}) = H^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}). \tag{2.5.41}$$

En composant l'inverse de cet isomorphisme avec l'isomorphisme $\tilde{\theta}$ de l'appendice, et avec (2.5.40), on obtient une flèche

$$\iota_1 : \mathcal{B} \to H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}). \tag{2.5.42}$$

De même en changeant P_1 par P_2 dans (2.5.40), on obtient une flèche $\iota_2 : \mathcal{B} \to H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$.

Lemme 2.5.8. — *Il existe $\alpha \in K$ non nul tel que*

$$\iota_1(d) = -\iota_2(d) = \alpha(c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + c_{2,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}}). \tag{2.5.43}$$

Démonstration. — On sait d'après l'appendice 1 que $\theta(d)$ appartient au noyau de

$$H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}) \to H^3(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), 1). \tag{2.5.44}$$

Notons B_2 le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et T_2 le sous-groupe des matrices diagonales. L'élément $\theta(d)$ est alors l'image d'un élément de $H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1))$. En utilisant le théorème 8.12 de [**63**], on obtient un isomorphisme

$$H^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1)) \simeq H^2(T_2, 1) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(T_2, K). \tag{2.5.45}$$

Il s'agit d'un espace de dimension 1 engendré par $(\log_0 \circ \epsilon) \wedge (\mathrm{val} \circ \epsilon)$ où ϵ est le morphisme de T_2 dans $K^\times$ défini par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto a^{-1}d$. Ainsi il existe $\alpha' \in K^\times$ tel que $\theta(d) = \alpha'(\log_0 \circ \epsilon) \wedge (\mathrm{val} \circ \epsilon)$. On remarque alors, que via l'isomorphisme $\overline{L}_1 \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, ϵ correspond à $\epsilon_0^{-1}\epsilon_1$. Ainsi l'image de d

par ι_1 est $\alpha'(\log_0 \circ \epsilon_0^{-1}\epsilon_1) \wedge (\mathrm{val} \circ \epsilon_0^{-1}\epsilon_1)$ pour un certains $\alpha' \in K^\times$. Comme pour f morphisme de $\mathbb{Q}_p^\times$ dans le groupe additif de K, on a

$$f \circ (\epsilon_0^{-1}\epsilon_1) = -\frac{1}{3}f(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2) + \frac{2}{3}f(\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2), \tag{2.5.46}$$

on en déduit

$$\iota_1(d) = \alpha'[\frac{4}{9}c_{2,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + \frac{1}{9}c_{1,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}} - \frac{2}{9}(c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + c_{2,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}})]. \tag{2.5.47}$$

Comme les deux premiers termes du membre de droite sont annulés par κ, on a le résultat avec $\alpha = -\frac{2}{9}\alpha'$. On raisonne de la même façon pour ι_2 en remarquant que $\iota_2(d) = \alpha'(\log_0 \circ \epsilon_1^{-1}\epsilon_2) \wedge (\mathrm{val} \circ \epsilon_1^{-1}\epsilon_2)$. □

Lemme 2.5.9. — *L'image de $\iota_i(D)$ par $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \to H^3(\overline{G}, W)$ est non nulle. De plus $\iota_1(D)$ et $-\iota_2(D)$ ont même image dans $H^3(\overline{G}, W)$.*

Démonstration. — Cela résulte du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ind}_B^G(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ind}_{P_i}^G(\mathrm{St}_2^{an}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W \arrow[r] & \mathrm{Ind}_B^G(1) \arrow[r] & \mathrm{St}_3^{an} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.5.48}$$

qui donne

$$\begin{tikzcd} H^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}) \arrow[r] & H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), 1) \\ H^2(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(\mathrm{St}_2^{an})) \arrow[r] \arrow[u, "(2.5.41)", "\wr"'] \arrow[d] & H^3(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1)) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] \\ H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \arrow[r] & H^3(\overline{G}, W). \end{tikzcd} \tag{2.5.49}$$

Le carré du haut est commutatif car les flèches verticales sont constituées de restrictions, qui commutent aux opérateurs de bord. L'image de D par la flèche horizontale du haut est non nulle d'après (2.7.15) et la proposition 2.7.5. De plus, la composée

$$H^3(\overline{G}, 1) \to H^3(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1)) \to H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), 1) \tag{2.5.50}$$

est l'application de restriction de $\overline{G}$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ via le plongement

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \overline{L_i} \hookrightarrow \overline{G}. \tag{2.5.51}$$

Comme le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_p^\times$ et que $\dim \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, K) \leq 2$, on a, d'après le corollaire 2.3.14, $H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), K) \simeq H^3(\mathfrak{sl}_2, K)$. De même, on a $H^3(\overline{G}, K) \simeq H^3(\mathfrak{sl}_3, K)$. En utilisant ces isomorphismes, la flèche (2.5.50) devient la flèche φ_1^* de l'exemple 2.3.13. Cet exemple montre alors que la composée (2.5.50) est indépendante de $i \in \{1, 2\}$. Autrement dit, dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), K) \\ H^3(\overline{G}, K) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & H^3(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1)) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] \\ & H^3(\overline{G}, W) \end{tikzcd} \tag{2.5.52}$$

l'isomorphisme entre $H^3(\overline{G},K)$ et $H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),K)$ est indépendant de i. Notons $\widetilde{\iota_i(D)}$ l'image inverse de $\tilde{\theta}(D)$ par (2.5.40). En comparant au diagramme commutatif (2.5.49), on voit que l'image de $(\widetilde{\iota_1(D)},\widetilde{\iota_2(D)})$ dans $H^3(\overline{G},\mathrm{Ind}_{P_1}^G(1)\oplus\mathrm{Ind}_{P_2}^G(1))$ appartient à l'image de

$$H^3(\overline{G},K)\to H^3(\overline{G},\mathrm{Ind}_{P_1}^G(1)\oplus\mathrm{Ind}_{P_2}^G(1)),\tag{2.5.53}$$

obtenue par inclusion diagonale, donc $\iota_1(D)+\iota_2(D)$ est nul dans $H^3(\overline{G},W)$. □

Corollaire 2.5.10. — *Les application ι_i sont injectives.*

Remarque 2.5.11. — Il est possible qu'en fait $\iota_2=-\iota_1$, mais nous ne savons pas le prouver.

On pose alors

$$c_0=\alpha^{-1}\frac{\iota_1(D)-\iota_2(D)}{2}-\frac{1}{2}c_{1,\log}\wedge c_{2,\log}\tag{2.5.54}$$

où α est choisi comme dans le lemme 2.5.8. D'après le lemme 2.5.9, c_0 n'appartient pas à l'image de κ. On obtient donc

$$\begin{aligned}H^2(\overline{G},\mathrm{St}_3^{an})&=\mathrm{Im}(\kappa)\oplus Kc_0\\&=Kc_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\mathrm{val}}\oplus Kc_{1,\log}\wedge c_{2,\mathrm{val}}\oplus Kc_{2,\log}\wedge c_{1,\mathrm{val}}\oplus Kc_{1,\log}\wedge c_{2,\log}\oplus Kc_0.\end{aligned}\tag{2.5.55}$$

Comme le morphisme φ_λ entre $H^2(\overline{G},\mathrm{St}_3^{an})$ et $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))$ provient d'un morphisme de suites spectrales et κ de morphismes d'arêtes dans ces suites spectrales, on a $\kappa=\varphi_\lambda\circ\kappa$. On note également c_0 l'élément de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))$, image de c_0 par φ_λ. On a également une décomposition

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))&=\mathrm{Im}(\kappa)\oplus Kc_0\\&=Kc_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\mathrm{val}}\oplus Kc_{1,\log}\wedge c_{2,\mathrm{val}}\oplus Kc_{2,\log}\wedge c_{1,\mathrm{val}}\oplus Kc_{1,\log}\wedge c_{2,\log}\oplus Kc_0.\end{aligned}\tag{2.5.56}$$

2.5.4. Extensions entre $\Sigma(\lambda)$ et les $v_{P_i}^{an}(\lambda)$. — La nullité des espaces $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))$ et $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda,\Sigma(\lambda)))$ (proposition 2.5.6) montre que l'on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda),\Sigma(\lambda))\simeq\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda),\Sigma(\lambda)).\tag{2.5.57}$$

On peut alors utiliser la résolution (2.5.11) de $\Sigma(\lambda)$ pour calculer ces groupes. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_G(v_{P_1}^{an}(\lambda),\cdot)$ pour obtenir une suite spectrale

$$E_1^{p,q}=\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda),C_{-p}(\lambda))\Rightarrow\mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda),\Sigma(\lambda)).\tag{2.5.58}$$

Par dualité de Schneider et Teitelbaum, on peut éliminer immédiatement les termes

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda),F_\lambda).\tag{2.5.59}$$

En effet d'après le corollaire 2.4.3, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda),F_\lambda)=\mathrm{Ext}^{q-2}_{G,-\lambda}(F'_\lambda,\mathrm{Ind}_{P_i}^G(F'_{\lambda,i}\otimes\mathfrak{d}_{P_i})).\tag{2.5.60}$$

Or, pour tout q, les $\overline{L}_i$-représentations $H_q(N_i,F'_\lambda)$ et $F'_{\lambda,i}\otimes\mathfrak{d}_{P_i}$ ont des caractères centraux différents : le premier est algébrique et le second a une composante lisse non triviale. Ainsi l'application de la suite spectrale (2.4.40) donne le résultat.

De plus, les formules (2.4.135) montrent que le seul $H_q(N,\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda))$ ayant une composante λ-isotypique non triviale est le H_0, et cette composante est de dimension 1. Ainsi la suite spectrale (2.4.40) nous donne

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda),\mathrm{Ind}_B^G(\lambda))\simeq H^q(\overline{T},1)\tag{2.5.61}$$

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda),\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda))\simeq H^q(\overline{L}_i,1).\tag{2.5.62}$$

Les formules (2.4.123) et la suite spectrale (2.4.40) donnent de même, pour tout q,

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda), \mathrm{Ind}^G_{P_2}(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{L_2,\lambda}(\mathrm{Ind}^{L_2}_B(\lambda), F_{\lambda,2}) = 0. \tag{2.5.63}$$

Ainsi

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda), \mathrm{Ind}^G_{P_2}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda), \mathrm{Ind}^G_{P_2}(\lambda)) = 0. \tag{2.5.64}$$

De même

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_2}(\lambda), \mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_2}(\lambda), \mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)) = 0. \tag{2.5.65}$$

Au final, on obtient

Proposition 2.5.12. — *L'espace* $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v^{an}_{P_i}(\lambda), \Sigma(\lambda))$ *est de dimension* 2 *pour* $i \in \{1,2\}$. *De plus, l'inclusion* $F_\lambda \otimes_K v_{P_i} \hookrightarrow v^{an}_{P_i}(\lambda)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v^{an}_{P_i}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes_K v_{P_i}, \Sigma(\lambda)) \tag{2.5.66}$$

Démonstration. — Dans la suite spectrale (2.5.58), la ligne d'ordonnée q est de la forme

$$H^q(\overline{L}_i, K) \xrightarrow{d_1^{-1,q}} H^q(\overline{T}, K) \tag{2.5.67}$$

et cette flèche est une flèche de restriction. Ainsi, d'après le corollaire 2.3.14, $H^q(H,K) \simeq \bigwedge^q \mathrm{Hom}(H,K)$ pour $q \in \{0,1,2\}$ et $H \in \{\overline{L}_i, \overline{T}\}$. Le morphisme $d_1^{-1,q}$ est donc injectif pour $q \leq 2$ et on obtient $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \simeq E_2^{0,1}$. Comme $\mathrm{Hom}(\overline{L}_i, K)$ est de dimension 2, engendré par $c_{i,\mathrm{log}}$ et $c_{i,\mathrm{val}}$ et que $\mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$ est de dimension 4 engendré par $c_{1,\mathrm{log}}$, $c_{1,\mathrm{val}}$, $c_{2,\mathrm{log}}$ et $c_{2,\mathrm{val}}$, l'espace $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda), \Sigma(\lambda))$ est de dimension 2. On conclut alors avec l'isomorphisme (2.5.57). Le même raisonnement en remplaçant $v^{an}_{P_i}(\lambda)$ par $F_\lambda \otimes v_{P_i}$ donne l'isomorphisme (2.5.66). □

En fait, nous obtenons plus que cela, il y a une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda), \Sigma(\lambda))& \\ \twoheadleftarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda), \mathrm{Ind}^G_B(\lambda)) \xrightarrow{\sim} H^1(\overline{T}, 1),&\end{aligned} \tag{2.5.68}$$

ce qui donne une présentation

$$\tilde{sh}_1 : H^1(\overline{T}, 1) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \tag{2.5.69}$$

dont l'image est engendrée par les cocycles $c_{2,\mathrm{log}}$ et $c_{2,\mathrm{val}}$.

Les mêmes résultats sont valables en remplaçant P_1 par P_2. On obtient une application

$$\tilde{sh}_2 : H^1(\overline{T}, 1) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v^{an}_{P_2}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \tag{2.5.70}$$

dont l'image est engendrée par $c_{1,\mathrm{log}}$ et $c_{1,\mathrm{val}}$.

Définition 2.5.13. — Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux éléments de K, on note $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ l'unique représentation localement analytique de G s'insérant dans une suite exacte

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to v^{an}_{P_1}(\lambda) \oplus v^{an}_{P_2}(\lambda) \to 0, \tag{2.5.71}$$

dont la classe dans $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda) \oplus v^{an}_{P_2}(\lambda), \Sigma(\lambda))$ correspond au couple $(c_{2,\mathrm{log}} + \mathcal{L}' c_{2,\mathrm{val}}, c_{1,\mathrm{log}} + \mathcal{L} c_{1,\mathrm{val}})$ par la proposition 2.3.2.

Remarquons que comme les représentations $\Sigma(\lambda)$ et $v^{an}_{P_i}(\lambda)$ sont fortement admissibles. Toute extension comme ci-dessus est également fortement admissible.

Remarque 2.5.14. — L'inclusion $F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \hookrightarrow \Sigma(\lambda)$ induit une injection

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_i}, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_i}, \Sigma(\lambda)), \tag{2.5.72}$$

car d'après (2.2.62), on a $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda \otimes v_{P_i}, \Sigma(\lambda)/(F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3)) = 0$. Le membre de gauche est de dimension 1 d'après le corollaire 2.4.8. L'image de cette injection est engendrée par $\tilde{sh}_i(c_{3-i,\mathrm{val}})$.

Remarque 2.5.15. — Comme dans [**14**, §2], on peut construire explicitement $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ de la façon suivante. On note $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ la K-représentation de dimension 3 de B

$$\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \log_{\mathcal{L}'}(a^{-2}bc) & \log_{\mathcal{L}}(a^{-1}b^{-1}c^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.5.73}$$

On forme l'induite $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda \otimes \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))$. L'unique injection de la représentation triviale dans $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ induit une injection $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\lambda \otimes \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ et donc une injection de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) + \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$. Si Q désigne le quotient par ce sous-espace, on a alors une surjection

$$Q \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)^2. \tag{2.5.74}$$

On note $\widetilde{\Sigma}(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ l'image réciproque de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ dans Q, on obtient donc une extension

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \widetilde{\Sigma}(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda) \to 0. \tag{2.5.75}$$

Comme $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) = 0$, l'injection de F_λ^2 dans $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ se relève en une injection de F_λ^2 dans $\widetilde{\Sigma}(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ et on a un isomorphisme

$$\widetilde{\Sigma}(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')/F_\lambda^2 \simeq \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'). \tag{2.5.76}$$

2.5.5. Construction du complexe. — On peut désormais déterminer les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ et $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$.

Notons $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ l'application

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda)) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) \tag{2.5.77}$$

obtenue à partir de la suite exacte

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda) \to 0. \tag{2.5.78}$$

D'après (2.3.2), les espaces $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\cdot, \cdot)$ peuvent se réinterpréter en termes de groupes de morphismes dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$. On a en particulier

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_i}^{an}(\lambda)') \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)', v_{P_1}^{an}(\lambda)'[1]) \tag{2.5.79}$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)', F_\lambda') \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[1], F_\lambda'[2]). \tag{2.5.80}$$

La composition dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$ permet de définir une application bilinéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_i}^{an}(\lambda)') \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)', F_\lambda') \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F_\lambda'). \tag{2.5.81}$$

La proposition ci-dessous est un moyen commode de calculer cette composition.

Proposition 2.5.16. — *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda), v_{P_i}^{an}(\lambda)') & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)', F_\lambda') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F_\lambda') \\ H^1(\overline{T}, 1) \arrow[u, two heads, "\tilde{sh}_i"] & \times & H^1(\overline{T}, 1) \arrow[u, hook, "sh_i"'] \arrow[r] & H^2(\overline{T}, 1), \arrow[u, "\kappa"'] \end{tikzcd} \tag{2.5.82}$$

l'application du bas étant le cup-produit.

Démonstration. — Nous avons en réalité un gros diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v^{an}_{P_1}(\lambda)') \arrow[d, "\wr"] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', \mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)') & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F'_\lambda) \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', \mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)') \arrow[u, two heads] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[u] \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', \mathrm{Ind}^G_B(\lambda)') \arrow[u, two heads] \arrow[d, "(a)"] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "(e)"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[d, "(g)"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', \mathrm{Ind}^G_B(\lambda)') \arrow[d, "(b)"] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[d, "(h)"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, \mathrm{Ind}^G_B(\lambda)') & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "(f)"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, F'_\lambda) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \arrow[u, "(c)"'] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, F'_\lambda) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, F'_\lambda) \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \arrow[u, "(d)"'] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd} \tag{2.5.83}$$

Le diagramme commute car toutes les applications sont fonctorielles. De plus les composées des flèches (a) et (b), ainsi que (e) et (f) et (g) et (h) sont des isomorphismes d'après (2.4.33). La composée des flèches (d) et (c) est un isomorphisme d'après (2.5.15). En composant toutes les flèches colonne par colonne dans le bon sens, on obtient exactement$\tilde{sh}_i$, sh_i et κ.

Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda)$. D'après (2.4.25) et le corollaire 2.3.11, on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G),\lambda}(-\lambda, -\lambda) \simeq H^1(\overline{T}, 1) \simeq \mathrm{Hom}(\overline{T}, K), \tag{2.5.84}$$

un calcul direct montre que la composition de α et β dans $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda)$ est exactement $\alpha \wedge \beta$ dans

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \simeq H^2(\overline{T}, 1) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}, K). \tag{2.5.85}$$

En effet, si α est un morphisme localement analytique de $\overline{T}$ dans K, la classe d'extension associée est une représentation V de $\overline{T}$ qui, dans une certaine base, est donnée par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. La suite exacte

$$0 \to 1 \to V \to 1 \to 0 \tag{2.5.86}$$

donne lieu à une application de bord $\delta : H^1(\overline{T}, 1) \to H^2(\overline{T}, 1)$. Si β est un morphisme de $\overline{T}$ dans K, $\delta(\beta)$ est la classe de $H^2(\overline{T}, 1)$ dont un représentant est $(g, h) \mapsto \alpha(g)\beta(h)$, c'est-à-dire le cup-produit $\alpha \cup \beta$. Par ailleurs l'application bord δ est exactement la composition avec $\alpha : 1 \to 1[1]$ dans $D^b(\mathcal{M}(\overline{T}))$. $\square$

Corollaire 2.5.17. — *L'application $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ envoie (c,c') sur*

$$(c_{2,\log}+\mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}})\wedge c+(c_{1,\log}+\mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}})\wedge c'. \tag{2.5.87}$$

En particulier, son image est incluse dans l'image de κ.

Démonstration. — L'application $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ est

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}((v_{P_1}^{an}(\lambda)'\oplus v_{P_2}^{an}(\lambda)')[1],F_\lambda')\to\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)',F_\lambda'[2]) \tag{2.5.88}$$

obtenue par composition avec $(c_{2,\log}+\mathcal{L}c_{2,\mathrm{val}},c_{1,\log}+\mathcal{L}'c_{1,\mathrm{val}})$, il suffit alors d'appliquer la proposition 2.5.16. □

Corollaire 2.5.18. — *On a*

$$\dim_K\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}'))=1 \text{ et } \dim_K\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}'))=2. \tag{2.5.89}$$

L'espace $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}'))$ est le sous-espace de dimension 1 de $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda,v_{P_1}^{an}(\lambda)\oplus v_{P_2}^{an}(\lambda))$ engendré par la classe $(c_{1,\log}+\mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}},c_{2,\log}+\mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}})$ et $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}'))$ a pour base les images des classes $c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\mathrm{val}}$ et c_0, c_0 étant défini en (2.5.54).

Démonstration. — La suite exacte (2.5.71) donne lieu à une suite exacte longue

$$\begin{aligned}0\to\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda,v_{P_1}^{an}(\lambda)\oplus v_{P_2}^{an}(\lambda))\xrightarrow{\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}}\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))\to\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}'))\\ \to\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,v_{P_1}^{an}(\lambda)\oplus v_{P_2}^{an}(\lambda))\xrightarrow{\delta'}\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))\end{aligned} \tag{2.5.90}$$

Le 0 de gauche provient de la proposition 2.5.6. Rappelons que l'espace $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))$ a une base constituée des éléments $c_{1,\log}\wedge c_{2,\log}$, $c_{1,\log}\wedge c_{2,\mathrm{val}}$, $c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\log}$, $c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\mathrm{val}}$ et c_0. D'après le corollaire 2.5.17, le noyau de $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ est constitué des multiples du couple $(c_{1,\log}+\mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}},c_{2,\log}+\mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}})$. Ainsi $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}'))$ est de dimension 1. L'image de $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ est donc de dimension 3. Il suffit donc de prouver que la flèche δ' est injective. Pour ce faire notons κ' l'application $H^3(\overline{T},K)\to\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))$ provenant de (2.5.23). On prouve comme précédemment que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)',v_{P_i}^{an}(\lambda)') & \times & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)',F_\lambda') \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ext}^3_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)',F_\lambda') \\
H^1(\overline{T},1) \arrow[u, two heads] & \times & H^2(\overline{T},1) \arrow[r] & H^3(\overline{T},1), \arrow[u, "\kappa'"']
\end{tikzcd} \tag{2.5.91}$$

l'application du bas étant le cup-produit. Ainsi l'application δ' est donnée par

$$(c,c')\mapsto(c_{2,\log}+\mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}})\wedge c+(c_{1,\log}+\mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}})\wedge c'. \tag{2.5.92}$$

Or d'après le corollaire 2.5.3, une base de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,v_{P_1}^{an}(\lambda)\oplus v_{P_2}^{an}(\lambda))$ est donnée par $c_{P_1}\wedge c_{P_1,\mathrm{val}}$ et $c_{P_2}\wedge c_{P_2,\mathrm{val}}$. Leurs images par δ' sont

$$c_{1,\log}\wedge c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\log}+\mathcal{L}'c_{1,\log}\wedge c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\mathrm{val}},\quad c_{2,\log}\wedge c_{2,\mathrm{val}}\wedge c_{1,\log}+\mathcal{L}'c_{2,\log}\wedge c_{2,\mathrm{val}}\wedge c_{1,\mathrm{val}} \tag{2.5.93}$$

et sont linéairement indépendantes dans $H^3(\overline{T},K)$. Mais cette fois-ci, on sait que dans la suite spectrale (2.5.14), $E_1^{-2,4}=0$ et $d_1^{-1,3}=0$, l'application κ' est injective, donc δ' également. □

Remarque 2.5.19. — Ce corollaire peut se reformuler de la façon suivante : l'espace $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}'))$ est le quotient de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda,\Sigma(\lambda))$ par les relations

$$c_{1,\log}\wedge c_{2,\log}-\mathcal{L}\mathcal{L}'c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\mathrm{val}},\quad c_{1,\log}\wedge c_{2,\mathrm{val}}+\mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\mathrm{val}},\quad c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\log}+\mathcal{L}'c_{1,\mathrm{val}}\wedge c_{2,\mathrm{val}} \tag{2.5.94}$$

Par (2.3.12), pour tout sous-groupe parabolique P, on a des isomorphismes

$$\mathcal{E}xt^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_P^G(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_P^G(\lambda)). \tag{2.5.95}$$

Ainsi on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{E}xt^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) \simeq \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')), \tag{2.5.96}$$

et on peut appliquer la proposition 2.3.2 pour construire un objet de la catégorie $D^b(\mathcal{M}_c(G)_\lambda)$.

Soit Q un polynôme de deux variables de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans K.

Définition 2.5.20. — Soit $\underline{\mathcal{L}} \in K^3$, on note $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})_Q$ l'unique objet de la catégorie $D^b(\mathcal{M}_c(G)_\lambda)$ obtenu à partir du cocycle $c_0 + (\mathcal{L}'' - Q(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \in \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ au moyen de la proposition 2.3.2.

A priori, $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ est un complexe de $D(G)$-modules, mais d'après la remarque 2.17 de [**63**], la représentation $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ a une résolution injective $I^\cdot$ par des représentations localement analytiques et on peut utiliser cette résolution et représenter $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ par un complexe de représentations localement analytiques. Comme de plus,

$$\mathcal{E}xt^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) \simeq \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')', F'_\lambda), \tag{2.5.97}$$

le complexe de $D(G)$-module $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'_Q$ s'insère dans un triangle distingué de $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$

$$F'_\lambda \to \Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'_Q \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-1] \to \tag{2.5.98}$$

tel que l'application du foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, F'_\lambda)$ induise un morphisme

$$\mathrm{End}_G(F'_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2], F'_\lambda) \tag{2.5.99}$$

envoyant l'identité sur le cocycle

$$c_0 + (\mathcal{L}'' - Q(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}. \tag{2.5.100}$$

Remarque 2.5.21. — Le polynôme Q est là pour faire le lien avec les constructions géométriques du chapitre suivant. Il existe cependant un choix de Q pour lequel le complexe $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ a un comportement parallèle à celui de la représentation $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ de l'introduction (ici $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (h_2 - 2, h_1 - 1, h_0)$). Il s'agit, ce n'est pas un hasard, du choix $Q = 0$.

(i) Le foncteur D^*_{st} dépend du choix d'une branche du logarithme p-adique pour construire un plongement $B_{st} \hookrightarrow B_{dR}$. Si $D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ est le module filtré associé à $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ en choisissant $\log(p) = 0$, le module filtré associé à $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ en choisissant $\log(p) = a$ est $D(\underline{h}, \widetilde{\underline{\mathcal{L}}})$ avec $\widetilde{\underline{\mathcal{L}}} = (\mathcal{L} + a, \mathcal{L}' + a, \mathcal{L}'' + a\mathcal{L}' + \frac{1}{2}a^2)$. En remplaçant alors $\log_0$ par $\log_a$ dans la construction de $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$, c'est-à-dire en faisant $c_{i,\log} \mapsto c_{i,\log} + ac_{i,\mathrm{val}}$ et $D \mapsto D + \frac{a}{2}d$, on obtient un complexe isomorphe à $\Sigma(\lambda, \widetilde{\underline{\mathcal{L}}})$. En effet, on voit par exemple que c_0 doit être remplacé par

$$\begin{aligned} c_0 + a\frac{\alpha^{-1}}{2}\iota_1(d) - \frac{a}{2}(c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}) - \frac{1}{2}a^2 c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \\ = c_0 - a(c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}) - \frac{a^2}{2}c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \end{aligned} \tag{2.5.101}$$

Or comme $c_{2,\log} = -(a+\mathcal{L}')c_{2,\mathrm{val}}$ dans $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}+a, \mathcal{L}'+a))$, l'extension correspond au paramètre $c_0 + (\mathcal{L}'' + a\mathcal{L}' + \frac{1}{2}a^2)c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$.

(ii) Considérons les représentations galoisiennes,

$$D^*_{st}(V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})^*(2)) \simeq D^*_{st}(V(\widetilde{\underline{h}}, \widetilde{\underline{\mathcal{L}}})), \tag{2.5.102}$$

avec $\widetilde{\underline{h}} = (2 - h_0, 2 - h_1, 2 - h_2)$ et $\widetilde{\underline{\mathcal{L}}} = (\mathcal{L}', \mathcal{L}, \mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{L}'')$. Du côté localement analytique, soit ι l'isomorphisme extérieur de G défini par $\iota(g) = (g^{-1})^t$. Il induit une involution ι de

$D(G)$ et le foncteur $M \mapsto D(G) \otimes_{\iota(D(G))} M$ est un isomorphisme de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\lambda$ sur $\mathcal{M}(G)_{\tilde{\lambda}}$, où $\tilde{\lambda} = (-\lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_0)$. Il induit un isomorphisme de la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$ sur la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_{\tilde{\lambda}})$ et l'image de $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'$ par ce foncteur est justement $\Sigma(\tilde{\lambda}, \widetilde{\underline{\mathcal{L}}})'$. La raison est que ce foncteur envoie $\Sigma(\lambda)$ sur $\Sigma(\tilde{\lambda})$, $v_{P_1}^{an}(\lambda)$ sur $v_{P_2}^{an}(\tilde{\lambda})$, échange $c_{1,\log}$ et $c_{2,\log}$ et envoie $\iota_1(D)$ sur $\iota_2(D)$, donc c_0 sur $-c_0 + c_{1,\log} \wedge c_{2,\log}$ et $c_{1,\log} \wedge c_{2,\log} = \mathcal{L}\mathcal{L}' c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ dans $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}))$.

Ainsi il serait fort tentant de choisir $Q = 0$, mais nous ne savons pas montrer que ce choix convient pour les résultats du chapitre suivant, où nous devrons faire un choix de Q qui dépend de l'espace de Drinfel'd. Il est cependant possible que ces deux choix coïncident.

2.6. Le complexe de de Rham de l'espace de Drinfel'd

Ce dernier chapitre est consacré au lien entre le (φ, N)-module filtré $D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ et le complexe de $D(G)$-modules $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'$ à travers l'espace de Drinfel'd $\mathcal{X}$.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$ définis sur $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{X}(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p) \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H(\mathbb{C}_p)$. Il s'agit des $\mathbb{C}_p$-points d'un espace rigide $\mathbb{Q}_p$-analytique de Stein ([**79**, §1]). L'espace $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$ est un espace homogène pour le groupe algébrique GL_3, fixons un isomorphisme $\mathbb{P}^2 \simeq \mathrm{GL}_3/P_2$, ce qui munit $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p)$ d'une action de $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ stabilisant $\mathcal{X}$. Soit ρ une K-représentation de dimension finie de G. Pour tout faisceau G-équivariant $\mathcal{F}$ en K-espaces vectoriels sur $\mathcal{X}$, on définit le faisceau G-équivariant $\mathcal{F} \otimes_K \rho$, produit tensoriel de $\mathcal{F}$ et du faisceau constant ρ. Pour tout ouvert admissible U de $\mathbb{P}^2$, on a

$$(\mathcal{F} \otimes_K \rho)(gU) \xrightarrow{g} (\mathcal{F} \otimes_K \rho)(U) \tag{2.6.1}$$

$$v \otimes w \mapsto gv \otimes gw. \tag{2.6.2}$$

On appelle alors complexe de de Rham à coefficients dans ρ le complexe d'hypercohomologie de $\Omega^{\cdot} \otimes_K \rho$. Comme l'espace $\mathcal{X}$ est de Stein, ce complexe est en réalité le complexe des sections globales. Nous fixons désormais un poids dominant λ et définissons $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ comme étant le complexe de de Rham de $\mathcal{X}$ à coefficients dans F'_λ. Autrement dit

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) = [\mathcal{O}(\mathcal{X}) \to \Omega^1(\mathcal{X}) \to \Omega^2(\mathcal{X})] \otimes_K F'_\lambda. \tag{2.6.3}$$

On note $H^i_{dR}(\lambda)$ son i-ième groupe de cohomologie. D'après les résultats de Peter Schneider et Ulrich Stuhler ([**79**] §3 théorème et §4 lemme 1), on a des isomorphismes de $D(G)$-modules

$$H^0_{dR}(\lambda) \simeq F'_\lambda \qquad H^1_{dR}(\lambda) \simeq F'_\lambda \otimes_K v'_{P_1} \qquad H^2_{dR}(\lambda) \simeq F'_\lambda \otimes_K v'_B. \tag{2.6.4}$$

Le complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$ est donc un objet de la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$, où $\mathcal{M}(G)_\lambda$ est la catégorie des $D(G)$-modules sur lesquels $D(Z)$ agit par multiplication par le même caractère que sur F'_λ, Z étant le centre de G.

2.6.1. Scindage du complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$. — Le but de cette partie est de prouver que le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$. L'idée est d'utiliser le corollaire $A.1.3$ de [**34**] et de calculer les groupes $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^i_{dR}(\lambda), H^j_{dR}(\lambda))$ pour $j = i - k + 1$. Ce calcul a été fait dans la catégorie des représentations lisses de G par Jean-François Dat et Sascha Orlik. Il s'étend à la catégorie des représentations localement analytiques grâce à la proposition 2.4.7.

Théorème 2.6.1. — *Le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}_K(G)_\lambda)$, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme*

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{2}(H^i_{dR}(\mathcal{X}) \otimes F'_\lambda)[-i] \tag{2.6.5}$$

induisant l'identité sur la cohomologie.

Démonstration. — La catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$ est la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne, c'est une catégorie triangulée munie d'une t-structure. De plus, les calculs de Jean-François Dat et Sascha Orlik ([**34**, Théorème 1.3] ou [**71**, Théorème 1]) montrent que, dans la catégorie abélienne des représentations lisses de G,

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{M}(\overline{G})^\infty}(H^i_{dR}(\mathcal{X}), H^j_{dR}(\mathcal{X})) = 0 \tag{2.6.6}$$

sauf si $k = i - j$. La proposition 2.4.7 montre alors que $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^i_{dR}(\lambda), H^j_{dR}(\lambda)) = 0$ pour $k = i-j+1$. Au vu du corollaire $A.1.3$ de [**34**], le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$. □

Bien entendu un tel isomorphisme n'est pas unique, mais une fois que l'on connaît ce théorème, il est facile d'en déduire la structure de l'algèbre $\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda))$ et donc tous les scindages.

Corollaire 2.6.2. — *L'algèbre $\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda))$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures dans $M_3(K)$. En particulier, l'espace des scindages est un espace homogène principal sous le groupe $N^+ \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ des matrices unipotentes supérieures.*

Démonstration. — On a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{End}(\bigoplus_i H^i_{dR}(\lambda)[-i]). \tag{2.6.7}$$

C'est-à-dire

$$\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \bigoplus_{i\leq j} \mathrm{Ext}^{j-i}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^j_{dR}(\lambda), H^i_{dR}(\lambda)). \tag{2.6.8}$$

D'après la proposition 2.4.7, on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^{j-i}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^j_{dR}(\lambda), H^i_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^{j-i}_{\mathcal{M}(\overline{G})^\infty}(H^j_{dR}(\mathcal{X}), H^i_{dR}(\mathcal{X})). \tag{2.6.9}$$

Ces isomorphismes sont compatibles aux compositions dans les catégories $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$ et $D^b(\mathcal{M}(\overline{G})^\infty)$ car ils proviennent du foncteur de $\mathcal{M}(\overline{G})^\infty$ dans $\mathcal{M}(G)_\lambda$ obtenu par composition de l'inclusion de $\mathcal{M}(\overline{G})^\infty$ dans $\mathcal{M}(G)_\lambda$ et de $M \mapsto F'_\lambda \otimes_K M$. Finalement le théorème 1.3 de [**34**] nous donne le résultat. □

2.6.2. Séries discrètes holomorphes. — Dans [**77**], Peter Schneider définit des représentations de G, appelées séries discrètes holomorphes, permettant de simplifier le complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$. Nous rappelons ici leur définition et calculons leur cohomologie sous certains sous-groupes unipotents de G.

Soit ρ une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique irréductible de P_2. Elle donne lieu à un faisceau G-équivariant $\mathcal{F}_\rho$ sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p} = G/P_2$, en posant, pour tout ouvert admissible U de $\mathbb{P}^2$, $\tilde{U}$ son image réciproque dans G et

$$\mathcal{F}_\rho(U) = \{f \in C^{rig}(\tilde{U}, \rho), \quad \forall p \in P_2,\ f(\cdot p) = \rho(p^{-1})f\}, \tag{2.6.10}$$

où $C^{rig}(\tilde{U}, \rho)$ désigne l'espace des fonctions rigides analytiques de $\tilde{U}$ dans ρ. L'action de G est donnée par la translation à gauche. La série discrète holomorphe associée à ρ est l'espace des sections de $\mathcal{F}_\rho$ au-dessus de $\mathcal{X}$ que l'on note $D_\rho = \mathcal{F}_\rho(\mathcal{X})$. Muni de l'action de G, c'est une représentation localement analytique de G qui est une représentation séparément continue de $D(G)$ sur un espace de Fréchet nucléaire (voir [**72**, §1] et [**84**, §1 et 2]). Si μ désigne le plus haut poids de ρ, ce qui implique $\mu \in X_2^+$, on note D_μ la représentation D_ρ, on l'appelle série discrète holomorphe. On a une injection $N_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ donnée par $u \mapsto uw_0P_2$. L'image U de cette injection étant le complémentaire d'une droite rationnelle, elle contient l'espace $\mathcal{X}$. Or, sur U, le faisceau $\mathcal{F}_\rho$ est constant, ainsi ses sections s'identifient aux fonctions de U dans l'espace de ρ. L'espace D_ρ s'identifie donc à l'espace des fonctions rigides analytiques de $\mathcal{X}$ dans ρ. Pour $z \in \mathcal{X}$, posons $u(z) \in N_1(\mathbb{C}_p)$ tel que $z = u(z)w_0P_2$. L'action de G est alors donnée par la formule suivante.

$$(g \cdot f)(z) = j(g,z)(f(g^{-1}z)), \tag{2.6.11}$$

avec $j(g,z) = \rho(w_0^{-1}u(z)^{-1}gu(g^{-1}z)w_0)$.

Supposons que λ soit un poids dominant. Dans [**77**, §3], Peter Schneider définit trois poids $(\lambda(0), \lambda(1), \lambda(2))$ à partir de λ, des différentielles $d_i : D_{\lambda(i)} \to D_{\lambda(i+1)}$, ainsi qu'un quasi-isomorphisme de complexes de G-représentations

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) \simeq [D_{\lambda(0)} \xrightarrow{d_0} D_{\lambda(1)} \xrightarrow{d_1} D_{\lambda(2)}]. \tag{2.6.12}$$

Les poids $\lambda(i)$ sont donnés par les formules

$$\lambda(0) = -w_0\lambda,\ \ \lambda(1) = s_1 \cdot (\lambda(0)),\ \ \lambda(2) = s_1s_2 \cdot (\lambda(0)). \tag{2.6.13}$$

En particulier la cohomologie du complexe de droite dans (2.6.12) est $H^*_{dR}(\lambda) = H^*_{dR}(\mathcal{X}) \otimes F'_\lambda$.

La N_1-cohomologie de D_μ est particulièrement agréable à calculer et nous sera très utile par la suite.

Proposition 2.6.3. — *On a un isomorphisme $\overline{L_1}$-équivariant*

$$H^i(N_1, D_\mu) \simeq H^0(N_1, H^i_{dR}(\mathcal{X})) \otimes F_{s_2s_1\mu,1}. \tag{2.6.14}$$

Remarquons que les représentations $H^0(N_1, H^i_{dR}(\mathcal{X}))$ sont faciles à calculer car ce sont les duales des modules de Jacquet des représentations $(H^i_{dR}(\mathcal{X}))'$, on peut alors utiliser (2.4.46).

Démonstration. — La formule (2.6.11) montre que, pour $g \in N_1$, $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$, et pour $g \in L_1$, $(g \cdot f) = \rho^{w_0}(g)(f(g^{-1}\cdot))$. Ainsi $D_\mu|_{P_1} \simeq \mathcal{O}(\mathcal{X}) \otimes_K (F_{\mu,2})^{w_0}$ (rappelons que $w_0P_1w_0^{-1} = P_2$). Or la cohomologie d'algèbres de Lie de $\mathfrak{n}_1$ à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ se calcule à partir du complexe de Chevalley-Eilenberg

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}) \to (\mathfrak{n}_1)' \otimes_K \mathcal{O}(\mathcal{X}) \to \bigwedge^2(\mathfrak{n}_1)' \otimes_K \mathcal{O}(\mathcal{X}). \tag{2.6.15}$$

D'après [**77**, §3, page 19], on a des isomorphismes P_1-équivariants $\Omega^i(\mathcal{X}) \simeq \bigwedge^i(\mathfrak{n}_1)' \otimes_K \mathcal{O}(X)$. Il est immédiat de voir que ces isomorphismes sont continus entre espaces de Fréchet, donc ce sont des isomorphismes topologiques. Ainsi le complexe (2.6.15) est quasi-isomorphe topologiquement et de façon P_1-équivariante au complexe de de Rham

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}) \to \Omega^1(\mathcal{X}) \to \Omega^2(\mathcal{X}). \tag{2.6.16}$$

On a donc un isomorphisme topologique P_1-équivariant $H^i(\mathfrak{n}_1, \mathcal{O}(\mathcal{X})) \simeq H^i_{dR}(\mathcal{X})$ qui donne un isomorphisme topologique L_1-équivariant

$$H^i(\mathfrak{n}_1, D_\mu) \simeq H^i_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_K (F_{\mu,2})^{w_0}. \tag{2.6.17}$$

En particulier, cette cohomologie est séparée. Ainsi d'après (2.3.43), on en conclut que $H_i(\mathfrak{n}_1, D'_\mu)$ est isomorphe à la représentation localement algébrique $((F_{\mu,2})^{w_0} \otimes_K H^i_{dR}(\mathcal{X}))'$. On conclut alors par le théorème 7.1 de [**63**] et notre théorème 2.3.15. De plus, comme représentation de L_1, le plus haut poids de $F_{\mu,2}^{w_0}$ est $s_2 s_1 \mu$, donc $F_{\mu,2}^{w_0} = F_{s_2 s_1 \mu}$. □

2.6.3. Caractères infinitésimaux des séries discrètes. — Pour la suite il est utile de voir que les $D(G)$-modules D_μ ont un caractère infinitésimal.

Lemme 2.6.4. — *Le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ agit sur D_μ par le caractère $\chi_{\mu+\delta}$, défini en 2.2.6.*

Démonstration. — Soit ρ la représentation algébrique de L_2 de plus haut poids μ. En fait, $U(\mathfrak{g})$ agit directement sur le faisceau $\mathcal{F}_\rho$. Comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ commute à l'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}_p)$, il suffit de vérifier que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par multiplication par $\chi_{\mu+\delta}$ sur la fibre de $\mathcal{F}_\rho$ en 1. On raisonne alors exactement comme pour la preuve de [**62**, proposition 8.22]. □

Corollaire 2.6.5. — *Si ψ est un caractère localement algébrique de T, alors si $\mathrm{Ind}_B^G(\psi)$ et $(D_{\lambda(i)})'$ ont un sous-quotient en commun, ψ est de la forme $(w \cdot \lambda)\psi_\infty$ pour un $w \in W$ et ψ_∞ lisse.*

Démonstration. — Posons $\psi = \mu\psi_\infty$. Les représentations $D_{\lambda(i)}$ et $(\mathrm{Ind}_B^G(\psi))'$ doivent avoir même caractère infinitésimal. Ces caractères sont $\chi_{\lambda(i)+\delta}$ et $\chi_{-(\mu+\delta)}$. Ils sont égaux si et seulement si il existe $w \in W$ tel que $\lambda(i) + \delta = w(-\mu - \delta)$. Comme $\lambda(i)$ est de la forme $w'(-w_0\lambda + \delta) - \delta = -w'w_0(\lambda + \delta) - \delta$ pour un $w' \in W$, on doit avoir $\mu = w^{-1}w'w_0 \cdot \lambda$. □

Dans le même esprit que le lemme 2.2.23, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.6.6. — *Soit λ un poids dominant, il existe une application G-équivariante continue surjective $F'_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow D_{\lambda(2)}$, telle que sur tout sous-quotient du noyau, le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ n'agisse pas selon $\chi_{-\lambda-\delta}$.*

Démonstration. — Nous reprenons la construction de [**77**, §3]. La proposition 1 de [**77**, §3] montre que $\Omega^2(\mathcal{X})$ est isomorphe à $D_{0(2)}$ avec $0(2) = s_1 s_2 \cdot 0$. Le lemme 5 de [**77**, §3] montre alors que $F'_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X}) \simeq D_{F'_\lambda|_{P_2} \otimes 0(2)}$. Le lemme 7 de [**77**, §3] montre qu'il existe une filtration P_2-équivariante sur F'_λ dont le sommet est isomorphe à $F_{-s_1 s_2 w_0(\lambda)}$, et que cette représentation a multiplicité 1. On obtient ainsi un morphisme surjectif $F'_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow D_{\lambda(2)}$. Pour l'assertion sur le noyau, on remarque que le noyau possède une filtration G-équivariante dont les gradués sont isomorphes à des sommes directes d'espaces de la forme $D_{\mu+0(2)}$ où μ est un poids dominant relativement à α_2 et apparaissant dans $F_{-w_0\lambda}$. Si un tel $D_{\mu+0(2)}$ a $\chi_{-\lambda-\delta}$ pour caractère infinitésimal, on a d'après le lemme 2.6.4 l'existence de $w \in W$ tel que $\mu + 0(2) + \delta = w(-\lambda - \delta)$, c'est-à-dire $\mu + s_1 s_2 \delta = w w_0(-w_0\lambda + \delta)$, et donc $-w_0\lambda = (w_0 w s_1 s_2) \cdot \mu$. Mais comme d'après la proposition 21.3 de [**53**], on a $(w_0 w s_1 s_2)\mu \leq -w_0\lambda$, on doit avoir $(w_0 w s_1 s_2) \cdot 0 \geq 0$, ce qui implique $w_0 w s_1 s_2 = 1$ et $w = s_1$ et au final $\mu = -s_1 s_2 w_0 \lambda$. □

2.6.4. La structure des séries discrètes holomorphes, d'après Orlik. — Dans [**72**], Sascha Orlik construit une filtration décroissante G-équivariante sur les représentations D_μ et décrit les duaux des gradués de cette filtration en termes de sous-représentations de séries principales localement analytiques. Rappelons brièvement ses résultats dans le cas de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\mu \in X_2^+$.

***Théorème 2.6.7* (Orlik).** — *Il existe sur D_μ une filtration décroissante $D(G)$-équivariante*

$$D_\mu = \mathrm{Fil}^0 D_\mu \supset \mathrm{Fil}^1 D_\mu \supset \mathrm{Fil}^2 D_\mu = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}_\mu), \tag{2.6.18}$$

et des suite exactes pour $j \in \{0,1\}$,

$$0 \to H^{2-j}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{F}_\mu)' \otimes v_{Q_j} \to \mathrm{gr}^j(D_\mu)' \to \mathrm{Ind}_{P_{2-j}}^G(U_j)^{\mathfrak{a}_j} \to 0, \tag{2.6.19}$$

où U_j est une représentation localement algébrique $M_j \otimes \mathrm{St}_{2-j}$ de P_{2-j}, $\mathfrak{a}_j$ un sous $U(\mathfrak{g})$-module de $\mathfrak{m}_{2-j}(M'_j)$ et $Q_0 = B$, $Q_1 = P_1$.

Remarque 2.6.8. — Il existe au plus un $j \in \{0,1,2\}$ tel que $H^j(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{F}_\mu) \neq 0$. Cet espace est non nul pour l'unique j pour lequel il existe $w \in W$ de longueur j tel que $w \cdot \mu$ soit dominant. Dans ce cas $H^j(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{F}_\mu)$ est une représentation algébrique de dimension finie isomorphe à $F_{w\cdot\mu}$.

Sascha Orlik précise la nature de M_j. Il définit un ensemble $\psi_{j,\mu}$ de poids dominants pour L_j et montre que la restriction de M_j à L_{2-j} est quotient de

$$\bigoplus_{\nu \in \psi_{2-j,\mu}} F_{\nu,2-j}. \tag{2.6.20}$$

Dans la formulation du théorème 2 de [**72**], il n'est pas clair que ce soit la restriction à L_{2-j} que l'on considère. Cependant, c'est indispensable, car il n'est pas toujours possible de choisir pour M_j une représentation semi-simple de P_{2-j}.

Nous pouvons à présent formuler une légère amélioration du théorème 2 de [**72**].

Proposition 2.6.9. — *Dans le cas où $\mu \in \{\lambda(0), \lambda(1), \lambda(2)\}$. La restriction à L_{2-j} de la représentation M'_j est un quotient de*

$$\bigoplus_{\nu \in \psi^*_{2-j,\mu}} F_{\nu,2-j}, \tag{2.6.21}$$

où $\psi^*_{2-j,\mu} = \psi_{2-j,\mu} \cap \{w \cdot \lambda,\ w \in W\}$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.6.5 puisque dans ce cas, toutes les induites $\mathrm{Ind}_{P_{2-j}}^G(U_j)$ doivent avoir le même caractère central. □

Explicitons tout ceci dans le cas où μ est un des $\lambda(i)$ associé à λ, poids dominant. Reprenons les notations de l'introduction de [**72**]. On a alors

$$\begin{gathered} \mu_{1,\lambda(0)} = \lambda(1), \mu_{2,\lambda(0)} = s_2 s_1 \cdot \lambda(0) = s_2 \cdot \lambda(1) \\ \mu_{1,\lambda(1)} = \lambda(1),\ \mu_{2,\lambda(1)} = \lambda(2) \\ \mu_{1,\lambda(2)} = \lambda(2),\ \mu_{2,\lambda(2)} = s_2 \cdot \lambda(0). \end{gathered} \tag{2.6.22}$$

Posons, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, on en déduit

$$\begin{aligned} \psi_{1,\lambda(0)} &= \{(\lambda_0 - k, \lambda_2 - 1, \lambda_1 + 1 + k) | \, 0 \leq k \leq \lambda_0 + 1 - \lambda_2\} \\ \psi_{2,\lambda(0)} &= \{(\lambda_2 - 2, \lambda_0 + 1, \lambda_1 + 1)\} \\ \psi_{1,\lambda(1)} &= \psi_{1,\lambda(0)} \\ \psi_{2,\lambda(1)} &= \psi_{2,\lambda(2)} \\ \psi_{1,\lambda(2)} &= \{(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1 - k, \lambda_0 + k) | \, 0 \leq k \leq \lambda_0 - \lambda_2\} \\ \psi_{2,\lambda(2)} &= \{(\lambda_1 - 1, \lambda_0 + 1, \lambda_2)\} \end{aligned} \tag{2.6.23}$$

On a

$$\begin{aligned} \{w \cdot \lambda,\ w \in W\} = \{\lambda, (\lambda_1 - 1, \lambda_0 + 1, \lambda_2), \\ (\lambda_0, \lambda_2 - 1, \lambda_1 + 1), (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \lambda_0 + 2), (\lambda_2 - 2, \lambda_0 + 1, \lambda_1 + 1), \\ (\lambda_2 - 2, \lambda_1, \lambda_0 + 2)\}, \end{aligned} \tag{2.6.24}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\psi^*_{1,\lambda(0)} &= \{(\lambda_0, \lambda_2 - 1, \lambda_1 + 1), (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \lambda_0 + 1)\} \\
\psi^*_{2,\lambda(0)} &= \{(\lambda_2 - 2, \lambda_0 + 1, \lambda_1 + 1)\} \\
\psi^*_{1,\lambda(2)} &= \{(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \lambda_0 + 2)\} \\
\psi^*_{2,\lambda(2)} &= \{(\lambda_1 - 1, \lambda_0 + 1, \lambda_2)\}
\end{aligned} \tag{2.6.25}$$

Proposition 2.6.10. — *Pour $D_{\lambda(2)}$, $\mathfrak{a}_1 = 0$ et $\mathfrak{a}_0$ est le sous $U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{d}_2$ de $\mathfrak{m}_2(-s_1 \cdot \lambda)$ défini dans la section 2.2.5. De plus $(\mathrm{St}_3 \otimes F_\lambda)'$ est l'unique quotient simple de $D_{\lambda(2)}$ et $(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$ est son socle. Ainsi, $D_{\lambda(2)}$ est un $D(G)$-module de longueur 3, dont les composantes de Jordan-Hölder sont, du socle au quotient simple*

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))', \quad (\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2})', \quad (F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3)'. \tag{2.6.26}$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que l'unique j tel que $H^j(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{F}_{\lambda(2)}) \neq 0$ est $j = 2$. Le fait que $\mathfrak{a}_1 = 0$ vient de ce que $\mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})$ est irréductible. Remarquons que comme $\mathfrak{a}_0$ est contenu dans $\mathfrak{m}_2(F'_{s_1\cdot\lambda,2})$ qui est de longueur 2, on a soit $\mathfrak{a}_0 = 0$ soit $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{d}_2$. Supposons $\mathfrak{a}_0 = 0$, alors d'après la décomposition du théorème 2.6.7, la représentation $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)'$ est un sous-objet de $\mathrm{gr}^0(D_{\lambda(2)})$. Alors la suite exacte (2.4.49) montre que $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)'$ est un sous-objet de $\mathrm{gr}^0(D_{\lambda(2)})$. La représentation $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)'$ est en fait un sous-objet de $D_{\lambda(2)}$. En effet, $\mathrm{Fil}^1(D_{\lambda(2)}) = (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$ et d'après les formules (2.4.125) et la suite spectrale (2.4.40), on a

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}), \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) = 0. \tag{2.6.27}$$

D'après (2.4.125), il existe une application surjective P_1-équivariante

$$\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda} \otimes \mathrm{St}_2) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1s_2 \cdot \lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|). \tag{2.6.28}$$

Comme d'après la proposition 2.6.3 on a $H^0(N_1, D_{\lambda(2)}) = F_{s_2s_1\lambda(2),1} = F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1}$, on aboutit à une contradiction, et donc $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{d}_2$.

Montrons à présent les assertions sur le socle et les quotients simples. D'après (2.4.43), on a $H^0(N_1, (F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3)') = F'_{\lambda,1} \otimes J_{N_1}(\mathrm{St}_3)'$ qui ne s'injecte pas dans $H^0(N_1, D_{\lambda(2)})$. Ainsi $(F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3)'$ ne peut être un sous-objet de $D_{\lambda(2)}$. De même, par (2.4.123), on obtient $H^0(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_2}^G(\mathrm{St}_2 \otimes F_{s_1\cdot\lambda,2})^{\mathfrak{d}_2})') = (\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}(s_1 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_0^{-1}\epsilon_1|))'$, qui ne s'injecte pas dans $H^0(N_1, D_{\lambda(2)})$. De plus, si $(\mathrm{St}_3 \otimes F_\lambda)'$ n'était pas le seul quotient simple de $D_{\lambda(2)}$, ce dernier contiendrait un sous-espace, extension non triviale de $(F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3)'$ par $(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$, mais le corollaire 2.4.3 montre que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}((F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3)', (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))') = 0. \tag{2.6.29}$$

L'assertion sur la longueur provient alors des résultats d'irréductibilité du chapitre 2. □

Corollaire 2.6.11. — *Il existe une injection G-équivariante de $D'_{\lambda(2)}$ dans $\Sigma(\lambda)$. De plus,*

$$\mathrm{End}_G(D_{\lambda(2)}) = K. \tag{2.6.30}$$

Démonstration. — La seconde assertion est une conséquence immédiate de la proposition 2.6.10. Démontrons la première. Nous allons tout d'abord prouver ce résultat dans le cas où $\lambda = 0$. On a alors $\Sigma(0) \simeq \mathrm{St}_3^{an}$ et $D_{0(2)} \simeq \Omega^2(\mathcal{X})$. Comme me l'a signalé Christophe Breuil, c'est alors une conséquence de résultats d'Adrian Iovita et Michael Spieß. Ils construisent dans [**55**], un sous-espace $\Omega^2_{\log,b}$ de $\Omega^2(\mathcal{X})$, G-stable, et constitué de formes différentielles logarithmiques ([**55**, Définition 4.6]), et ils montrent que l'image de cet espace par l'application $\Omega^2(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow H^2_{dR}(\mathcal{X})$ est dense. Comme d'après la proposition 2.6.10, $H^2_{dR}(\mathcal{X})$ est l'unique quotient simple de $\Omega^2(\mathcal{X})$, l'espace $\Omega^2_{\log,b}$ est dense dans $\Omega^2(\mathcal{X})$. Notons St_3^c la représentation de Steinberg continue, c'est-à-dire le quotient de l'espace de Banach des fonctions continues sur G/B par l'espace engendré par les fonctions provenant de G/P_1 ou de G/P_2, muni de l'action par translation à gauche. On observe alors que d'après le lemme 1 du §4 de [**79**] et la remarque sous la définition 4.6 de [**55**], $\Omega^2_{\log,b}$ est le dual topologique de la représentation de Steinberg continue, c'est donc un $K[[G_0]]$-module de type fini. On obtient donc une injection continue d'image dense

$$(\mathrm{St}_3^c)' \hookrightarrow \Omega^2(\mathcal{X}). \tag{2.6.31}$$

D'après le théorème 7.1 de [**85**], on a $(\mathrm{St}_3^{an})' \simeq D(G_0) \otimes_{K[[G_0]]} (\mathrm{St}_3^c)'$. On obtient donc une flèche $D(G)$-équivariante $(\mathrm{St}_3^{an})' \to \Omega^2(\mathcal{X})$. Comme il s'agit d'une application entre deux $D(G)$-modules coadmissibles, le corollaire 4(ii) et le lemme 3.6 de [**85**] montrent que son image est fermée. Puisque cette image contient déjà un sous-espace dense, l'application est surjective.

Passons maintenant au cas où λ est un poids dominant quelconque. Le cas précédent nous donne une surjection

$$F'_\lambda \otimes (\mathrm{St}_3^{an})' \twoheadrightarrow F'_\lambda \otimes \Omega^2(\mathcal{X}). \tag{2.6.32}$$

On utilise alors les lemmes 2.2.23 et 2.6.6 et le fait que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par $\chi_{-\lambda-\delta}$ sur $\Sigma(\lambda)'$ et $D_{\lambda(2)}$ pour conclure. □

Remarque 2.6.12. — (i) Il faut voir ce résultat $\Sigma(\lambda)' \twoheadrightarrow D_{\lambda(2)}$ comme un analogue pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de la dualité de Morita $O(k) \simeq \Sigma(k)'$ ([**14**, §3.1]). On fixe désormais i_λ une injection de $D'_{\lambda(2)}$ dans $\Sigma(\lambda)$.

(ii) Remarquons que dans (2.6.32), le noyau de la composée

$$F_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X})' \hookrightarrow F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3^{an} \twoheadrightarrow \Sigma(\lambda) \tag{2.6.33}$$

est un supplémentaire de $D'_{\lambda(2)}$. Ainsi $D_{\lambda(2)}$ est facteur direct de $F'_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X})$.

Les mêmes raisonnements que pour la proposition 2.6.10 donnent le résultat suivant pour $D_{\lambda(0)}$.

Proposition 2.6.13. — *Les composantes de Jordan-Hölder de $D_{\lambda(0)}$ sont*

$$F'_\lambda, \quad (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})', \quad (\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2))'. \tag{2.6.34}$$

De plus $(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2))'$ est le seul quotient simple de $D_{\lambda(0)}$ et F'_λ est son socle.

Proposition 2.6.14. — *Il n'y a pas de morphismes $D(G)$-équivariant de $D_{\lambda(1)}$ dans $H^1_{dR}(\lambda)$.*

Démonstration. — Par irréductibilité de $H^1_{dR}(\lambda)$, un tel morphisme non nul est surjectif. Ainsi il induirait une surjection $D(L_1)$-équivariante

$$H^2(N_1, D_{\lambda(1)}) \to H^2(N_1, H^1_{dR}(\lambda)). \tag{2.6.35}$$

Or on peut calculer le premier $D(L_1)$-module en utilisant la proposition 2.6.3 et le second par (2.4.43). On obtient alors une flèche

$$J_{N_1}(v_B)' \otimes F_{s_2s_1\lambda(1),2} \to J_{N_1}(v_{P_1})' \otimes H^1(\mathfrak{n}_1, F'_\lambda) \tag{2.6.36}$$

qui ne peut qu'être nulle par (2.4.46). □

Comme la cohomologie du complexe $[D_{\lambda(0)} \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}]$ est $H^*_{dR}(\lambda)$, on déduit des décompositions de $D_{\lambda(0)}$ et $D_{\lambda(2)}$ en composantes de Jordan-Hölder, les composantes de Jordan-Hölder de $D_{\lambda(1)}$. Pour résumer, les espaces $D'_{\lambda(i)}$ sont munis d'une filtration croissante dont les gradués sont isomorphes aux représentations localement analytiques suivantes, où l'on désigne par A —— B une extension non scindée de B par A.

$$\begin{aligned} D'_{\lambda(0)} = {} & \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2) \;\text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1} \;\text{——}\; F_\lambda \\ D'_{\lambda(1)} = {} & \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2} \;\text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})\oplus F_\lambda\otimes v_{P_1} \\ & \text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2) \;\text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1} \\ D'_{\lambda(2)} = {} & F_\lambda\otimes \mathrm{St}_3 \;\text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2} \;\text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}) \end{aligned} \tag{2.6.37}$$

En fait, la filtration dans le théorème d'Orlik est de telle sorte que l'on peut encore écrire $D'_{\lambda(1)}$ de la façon suivante

$$\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2) \;\text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda})\oplus F_\lambda\otimes v_{P_1} \;\text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1}\ , \tag{2.6.38}$$

le terme de gauche s'insère dans une suite exacte

$$0\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2}\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)\to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)\to 0. \tag{2.6.39}$$

2.6.5. Filtration et extensions. — Cette partie plutôt technique a pour but de transformer les informations sur les extensions dans la série discrète holomorphe en résultats portant sur les morphismes entre complexes dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$.

Le théorème 2.6.1 nous permet de choisir s un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ et le complexe scindé de cohomologie associé. Notons s_i la composition de s et de la projection

$$\bigoplus_i H^i_{dR}(\lambda)[-i]\xrightarrow{p_i} H^i_{dR}(\lambda)[-i]. \tag{2.6.40}$$

L'isomorphisme (2.6.12) composé avec la flèche naturelle $D_{\lambda(2)}[-2]\to[D_{\lambda(0)}\to D_{\lambda(1)}\to D_{\lambda(2)}]$ nous donne une flèche

$$i_2:\ D_{\lambda(2)}[-2]\to R\Gamma_{dR}(\lambda). \tag{2.6.41}$$

L'application $s_0\circ i_2$ est donc un élément de

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2],H^0_{dR}(\lambda))\simeq \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(2)},F'_\lambda). \tag{2.6.42}$$

Nous avons besoin de savoir quelle est son image dans $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)',F_\lambda)$ après composition avec la surjection $\Sigma(\lambda)'\twoheadrightarrow D_{\lambda(2)}$.

Avant cela, nous avons besoin d'un résultat technique.

Lemme 2.6.15. — *L'application $D(G)$-équivariante $D_{\lambda(2)}[-2]\to R\Gamma_{dR}(\lambda)$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2],R\Gamma_{dR}(\lambda)). \tag{2.6.43}$$

De même l'application $D(G)$-équivariante

$$[0\to D_{\lambda(1)}\to D_{\lambda(2)}]\to R\Gamma_{dR}(\lambda) \tag{2.6.44}$$

induit un isomorphisme

$$\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda))\simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))_\lambda}([0\to D_{\lambda(1)}\to D_{\lambda(2)}],R\Gamma_{dR}(\lambda)). \tag{2.6.45}$$

Démonstration. — D'après le corollaire 2.6.2, le membre de gauche est de dimension 6. De la proposition 2.6.10, on tire

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{D(G)}(D_{\lambda(2)},H^2_{dR}(\lambda))=1. \tag{2.6.46}$$

De plus d'après l'exemple 2.4.11 et la proposition 2.6.10,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(D_{\lambda(2)}, H^1_{dR}(\lambda)) &\leq 2 \\ \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(D_{\lambda(2)}, H^0_{dR}(\lambda)) &\leq 3 \end{aligned} \tag{2.6.47}$$

Ainsi il suffit de prouver que la flèche de l'énoncé est injective. Pour cela, remarquons que $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ s'insère dans un triangle exact

$$D_{\lambda(2)}[-2] \to R\Gamma_{dR}(\lambda) \to [D_{\lambda(0)} \to D_{\lambda(1)}] \to \tag{2.6.48}$$

et il suffit donc de prouver que

$$\mathrm{Hom}_G([D_{\lambda(0)} \to D_{\lambda(1)}], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = 0, \tag{2.6.49}$$

ce qui est encore équivalent aux trois égalités

$$\mathrm{Hom}_G(D_{\lambda(1)}, H^1_{dR}(\lambda)) = 0 \tag{2.6.50}$$

$$\mathrm{Hom}_G(D_{\lambda(0)}, F'_\lambda) = 0 \tag{2.6.51}$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(1)}, F'_\lambda) = 0. \tag{2.6.52}$$

Les deux premières égalités découlent de la proposition 2.6.13 et de la proposition 2.6.14. Prouvons la troisième.

Supposons qu'il existe une extension non triviale

$$0 \to H^0_{dR}(\lambda) \to E \to D_{\lambda(1)} \to 0. \tag{2.6.53}$$

Nous allons commencer par prouver que l'injection P_1-équivariante $H^0(N_1, D_{\lambda(1)}) \hookrightarrow D_{\lambda(1)}$ se relève en une injection P_1-équivariante $H^0(N_1, D_{\lambda(1)}) \hookrightarrow E$.

Soit ρ la représentation algébrique irréductible de L_1 de plus haut poids $\lambda(1)$. Nous avons identifié $D_{\lambda(1)}$ avec l'espace des fonctions rigides analytiques $f : \mathcal{X} \to \rho$ muni de l'action donnée par (2.6.11). L'espace $\mathcal{X}$ est inclus dans l'ouvert affine U de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$ défini en 2.6.2, $U(\mathbb{C}_p)$ est l'image de $N_1(\mathbb{C}_p)w_0P_2$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p)$. Soit $M \subset D_{\lambda(1)}$ le sous-espace constitué des fonctions $f : \mathcal{X} \to \rho$ qui sont des polynômes sur $U \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}_p}$. Il s'agit de l'espace des sections algébriques du faisceau $\mathcal{F}_\rho$ au-dessus de U. Ce sous-espace est donc stable pour l'action de $U(\mathfrak{g})$ et, puisque U est stable par P_1, de P_1. Remarquons que le sous-espace des fonctions constantes est stable par P_1 et isomorphe à $F_{\lambda(1),1}$. Ainsi $H^0(\mathfrak{n}_1, D_{\lambda(1)}) = H^0(\mathfrak{n}_1, M)$. Soit $\tilde{M}$ l'image réciproque de M dans E. Nous montrons dans l'appendice 3 que $\tilde{M} \simeq M \oplus H^0_{dR}(\lambda)$, ce qui donne une injection $U(\mathfrak{g})$-équivariante de M dans E, donc une injection $\mathfrak{p}_1$-équivariante de $H^0(\mathfrak{n}_1, D_{\lambda(1)})$ dans E. Comme $F_{\lambda(1),1} \simeq F'_{s_2\cdot\lambda,1}$, on obtient une application non triviale $D(G) \otimes_{D(P_1)} F'_{s_2\cdot\lambda} \to E$. Comme $H^0(N_1, (\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda}))')$, donné par (2.4.122), n'est pas inclus dans $H^0(N_1, E)$, la restriction de cette injection à $(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda}))'$ est nulle, on obtient donc une injection

$$j : (\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})' \hookrightarrow E. \tag{2.6.54}$$

Notons E_1 le quotient de E par ce sous-espace, qui est donc une extension non triviale entre $D_{\lambda(1)}/(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})'$ et $H^0_{dR}(\lambda)$. Utilisons la suite exacte

$$0 \to (\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})' \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(1)}/(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})' \to 0 \tag{2.6.55}$$

pour déterminer $H^0(N_1, D_{\lambda(1)}/(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})')$. On a déjà

$$H^0(N_1, (\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})') \simeq H^0(N_1, D_{\lambda(1)}). \tag{2.6.56}$$

Rappelons de plus que par (2.4.134)),

$$H^1(N_1, (\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})') = F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \oplus \cdots \tag{2.6.57}$$

Comme $H^1(N_1, D_{\lambda(1)})$ est le dual d'une représentation localement algébrique irréductible non isomorphe à $F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}$, on a une injection

$$F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \hookrightarrow H^0(N_1, D_{\lambda(1)}/(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})'). \tag{2.6.58}$$

Comme de plus $H^1(N_1, F'_\lambda) \simeq F'_{s_2\cdot\lambda}$, on a nécessairement une injection P_1-équivariante $F'_{s_2s_1\cdot\lambda} \hookrightarrow E_1$, et donc une injection $D(G)$-équivariante

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))' \hookrightarrow E_1, \tag{2.6.59}$$

par irréductibilité de $(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$. Notons alors E_2 le quotient de E_1 par $(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$. C'est une extension non triviale de la forme

$$F'_\lambda \;\text{——}\; F'_\lambda \otimes v'_{P_1} \;\text{——}\; \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{St}_2)' \tag{2.6.60}$$

Nous allons aboutir à une contradiction. Tout d'abord, $F'_\lambda \otimes v'_{P_1}$, ne peut être un sous-objet de E_2 car d'après (2.4.47), $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2)) = 0$. Le $D(G)$-module E_2 contient donc un sous-module M', extension non scindée de la forme

$$0 \to F'_\lambda \to M' \to F'_\lambda \otimes v'_{P_1} \to 0. \tag{2.6.61}$$

D'après le corollaire 2.4.8, $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes_K v_{P_1})$ est de dimension 1. Il existe donc une unique extension non scindée de la forme (2.6.61). Ainsi M est isomorphe à la représentation localement algébrique $F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_{P_2}^G(|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)^\infty$. Ainsi d'après (2.4.43), $H^q(N_2, M') = H^q(\mathfrak{n}_2, F'_\lambda) \otimes J_{N_2}(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)^\infty)'$. Or les suites exactes (2.4.45) montrent que $J_{N_2}(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)^\infty) \simeq \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)^\infty \oplus |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|$. En utilisant la suite spectrale (2.4.40), on obtient

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(M, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2)) = 0. \tag{2.6.62}$$

Ainsi $E_2 = M' \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2)'$. Mais ceci implique qu'il existe une application $D(G)$-équivariante non triviale de E_2 vers $H^1_{dR}(\lambda) = F'_\lambda \otimes v'_{P_1}$, donc une application non triviale $D_{\lambda(1)} \to H^1_{dR}(\lambda)$, contredisant la proposition 2.6.14.

Enfin, pour prouver la dernière assertion, on utilise le triangle distingué

$$D_{\lambda(2)}[-2] \to [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda_2}] \to D_{\lambda(1)}[-1] \to, \tag{2.6.63}$$

elle est donc équivalente à

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = 0, \tag{2.6.64}$$

ce qui est conséquence de (2.6.50) et (2.6.52). □

Remarque 2.6.16. — Une conséquence de ce lemme est que les inégalités (2.6.47) sont en fait des égalités.

On sait maintenant que la dimension de $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(2)}, H^0_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, D'_{\lambda(2)})$ est 3. Pour la suite, nous avons besoin d'en savoir plus sur l'image de cet espace dans $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ via le plongement $D'_{\lambda(2)} \hookrightarrow \Sigma(\lambda)$. Remarquons déjà que pour toute composante M de $\Sigma(\lambda)$, $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, M) = 0$, donc cette application est injective.

Lemme 2.6.17. — *L'image de* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, D'_{\lambda(2)})$ *dans* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *n'est pas contenue dans* $\mathrm{Im}(\kappa)$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord le cas où $\lambda = 0$ et $\Sigma(0) = \mathrm{St}_3^{an}$. Soit ι l'automorphisme de $\overline{G}$ défini par $g \mapsto (g^{-1})^t$. Si (Σ, ρ) est une représentation localement analytique de $\overline{G}$, on définit la représentation $\iota(\Sigma)$ comme étant $g \mapsto \rho(\iota(g))$. Dire qu'un cocyle de $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$ appartient à $\mathrm{Im}(\kappa)$, c'est dire qu'il est dans l'image de $H^2(\overline{G}, \mathrm{Ind}_B^G(1)) \to H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$. Comme

$\iota(\mathrm{Ind}_B^G(1)) \simeq \mathrm{Ind}_B^G(1)$ et $\iota(\mathrm{St}_3^{an}) \simeq \mathrm{St}_3^{an}$, on voit que si $H^2(\overline{G}, \Omega^2(\mathcal{X})')$ est contenu dans $\mathrm{Im}(\kappa)$, c'est aussi le cas $H^2(\overline{G}, \iota(\Omega^2(\mathcal{X})'))$. Dans la décomposition (2.2.62), on voit que

$$\Omega^2(\mathcal{X})' + \iota(\Omega^2(\mathcal{X})') = \mathrm{Fil}_2(\mathrm{St}_3^{an}). \tag{2.6.65}$$

Supposons $H^2(\overline{G}, \Omega^2(\mathcal{X})') \subset H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$, on a alors

$$H^2(\overline{G}, \mathrm{Fil}_2(\mathrm{St}_3^{an})) \subset \mathrm{Im}(\kappa). \tag{2.6.66}$$

Or un calcul montre que $H^2(\overline{G}, M) = 0$ pour tout M composant de $\mathrm{St}_3^{an}/(\Omega^2(\mathcal{X})' + \iota(\Omega^2(\mathcal{X})'))$. Ceci implique $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \subset \mathrm{Im}(\kappa)$, ce qui est absurde.

Pour λ un poids dominant, on utilise le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2_{\overline{G}}(1, \Omega^2(\mathcal{X})') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2_{\overline{G}}(1, \mathrm{St}_3^{an}) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \Omega^2(\mathcal{X})') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3^{an}) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, D'_{\lambda(2)}) \arrow[r, "i_\lambda"] & \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)).
\end{tikzcd} \tag{2.6.67}$$

Les flèches verticales du carré du haut proviennent du foncteur exact $\Sigma \mapsto F_\lambda \otimes \Sigma$ et celles du bas proviennent de (2.6.32) et du lemme 2.2.23. Le carré du bas est alors commutatif par définition de i_λ. La composée des deux flèches verticales de droite est φ_λ. Comme $\varphi_\lambda \circ \kappa = \kappa$, on déduit le cas général du cas $\lambda = 0$. $\square$

Lemme 2.6.18. — *Notons* $\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)}$ *le sous-objet de* $D_{\lambda(2)}$ *donné par le théorème 2.6.7. L'image de* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, (D_{\lambda(2)}/\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)})')$ *dans* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *est le sous-espace engendré par* $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ *et* $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}$.

Démonstration. — La proposition 2.5.16 et (2.5.66) montrent que les cocycles $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}$ et $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ correspondent, par Yonéda, à des extensions de la formes

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to A \to B \to F_\lambda \to 0 \tag{2.6.68}$$

avec

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to A \to v_{P_1} \otimes F_\lambda \to 0, \tag{2.6.69}$$

il suffit donc de prouver que

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, (D_{\lambda(2)}/\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)})') \simeq \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \Sigma(\lambda)). \tag{2.6.70}$$

Comme $H^1_{dR}(\lambda)' \simeq F_\lambda \otimes_K v_{P_1}$ et $(\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)})' \simeq \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2 s_2 \cdot \lambda, 1})$, c'est une conséquence de la remarque 2.6.16 et de l'exemple 2.4.47 qui donnent

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1(D_{\lambda(2)}, H^1_{dR}(\lambda)) = 2, \quad \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2 s_1 \cdot \lambda, 1})) = 0. \tag{2.6.71}$$

$\square$

On peut à présent comprendre un peu mieux le rapport entre la filtration du complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ et l'isomorphisme s. L'espace

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) = \\ &\quad \mathrm{End}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^0_{dR}(\lambda)) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \oplus \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda))\end{aligned} \tag{2.6.72}$$

est de dimension 3. D'après le corollaire 2.4.8, on a

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) = \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes v_{P_1}) = 1 \tag{2.6.73}$$

Soit donc N une flèche non nulle dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$

$$H^1_{dR}(\lambda)[-1] \to H^0_{dR}(\lambda), \tag{2.6.74}$$

alors d'après le lemme 2.6.15,

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = Ki_2 \oplus N(\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2], H^1_{dR}(\lambda)[-1])). \tag{2.6.75}$$

Comme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(2)}, H^1_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(2)}/\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)}, H^1_{dR}(\lambda)), \tag{2.6.76}$$

la preuve du lemme 2.6.18 montre que l'image de $N(\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2], H^1_{dR}(\lambda)[-1]))$ dans $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$, est contenue dans l'image de κ. Ainsi d'après le lemme 2.6.17, l'élément $s_0 \circ i_2$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}(\kappa)$. Dans la décomposition (2.5.56), on a

$$s_0 \circ i_2 = \alpha c_0 + \beta c_{2,\log} \wedge c_{1,\log} + \gamma c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + \delta c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log} + \epsilon c_{2,\mathrm{val}} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \tag{2.6.77}$$

avec $\alpha \neq 0$. De même, on montre que $s_1 \circ i_1 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', (F_\lambda \otimes v_{P_1})')$ s'écrit

$$s_1 \circ i_2 = r c_{2,\log} + t c_{2,\mathrm{val}} \tag{2.6.78}$$

avec $r \neq 0$.

Notons enfin $D^0_{\lambda(1)}$ le noyau de la différentielle de $D_{\lambda(1)}$ dans $D_{\lambda(2)}$. On a

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = 3. \tag{2.6.79}$$

En effet, comme le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé, on a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], H^0_{dR}(\lambda) \oplus H^1_{dR}(\lambda)). \tag{2.6.80}$$

La décomposition (2.6.37) montre que $\dim_K \mathrm{Hom}_K(D^0_{\lambda(1)}, H^1_{dR}(\lambda)) = 1$ et $\mathrm{Hom}_K(D^0_{\lambda(1)}, H^0_{dR}(\lambda)) = 0$. De plus on a d'après (2.4.47) $\dim_K \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D^0_{\lambda(1)}, H^0_{dR}(\lambda)) \leq 2$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\cdot, R\Gamma_{dR}(\lambda))$ au triangle distingué

$$D^0_{\lambda(1)}[-1] \to [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}] \to H^2_{dR}(\lambda)[-2] \to, \tag{2.6.81}$$

et en utilisant le lemme 2.6.15 ainsi que le fait que $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(H^2_{dR}(\lambda)[-2], R\Gamma_{dR}(\lambda))$ est de dimension 3, on obtient l'inégalité inverse

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) \geq 3. \tag{2.6.82}$$

D'après (2.6.37), l'espace $D^0_{\lambda(1)}$ est une extension non scindée de $(\mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2} \otimes \mathrm{St}_2))'$ par $v^{an}_{P_1}(\lambda)'$ et comme l'utilisation habituelle de la suite spectrale (2.4.40) nous donne

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2} \otimes_K \mathrm{St}_2)) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2} \otimes_K \mathrm{St}_2)) = 0, \tag{2.6.83}$$

on a

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D^0_{\lambda(1)}, H^0_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}((v^{an}_{P_1}(\lambda)', H^0_{dR}(\lambda)). \tag{2.6.84}$$

Soit i_1 l'application naturelle $D^0_{\lambda(1)}[-1] \to [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}] \to R\Gamma_{dR}(\lambda)$. Par (2.6.84), on voit l'application $s_0 \circ i_1$ comme un élément de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}((v^{an}_{P_1}(\lambda)', H^0_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_1}(\lambda)). \tag{2.6.85}$$

et on écrit $s_0 \circ i_1 = u c_{1,\log} + v c_{1,\mathrm{val}}$.

Lemme 2.6.19. — *Dans la décomposition $s_0 \circ i_1 = u c_{1,\log} + v c_{1,\mathrm{val}}$, on a $u \neq 0$.*

Démonstration. — Soit $N \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda))$ un élément non nul. L'égalité dans (2.6.82) montre que l'application

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(H^0_{dR}(\lambda) \oplus H^1_{dR}(\lambda)[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) \tag{2.6.86}$$

obtenue par composition avec $s \circ i_1$ est un isomorphisme. Comme N et $id_{H^0(\lambda)}$ forment une base de l'espace des morphismes, dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$, de $H^1_{dR}(\lambda)[-1] \oplus H^0_{dR}(\lambda)$ vers $H^0_{dR}(\lambda)$, les éléments $s_0 \circ i_1$ et $N \circ s_1 \circ i_1$ sont linéairement indépendants. Comme $s_1 \circ i_1$ est juste l'application quotient $D_{\lambda(1)} \to H^1_{dR}(\lambda)$, l'élément $N \circ s_1 \circ i_1$ engendre l'image de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D^0_{\lambda(1)}, H^0_{dR}(\lambda)). \tag{2.6.87}$$

Comme $H^1_{dR}(\lambda)' \simeq F_\lambda \otimes_K v_{P_1}$, la remarque 2.5.14 montre que cette image est aussi engendrée par $c_{1,\mathrm{val}}$. Ceci implique bien $u \neq 0$. □

2.6.6. Réalisation de $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ dans la cohomologie. — Nous allons à présent munir le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ d'endomorphismes φ et N dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, cette construction est motivée par des considérations géométriques. Fixons donc s un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ et le complexe scindé $\bigoplus H^i_{dR}(\lambda)[-i]$. On utilise les éléments

$$c_{1,\mathrm{val}} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)), \tag{2.6.88}$$

$$c_{2,\mathrm{val}} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^1_{dR}(\lambda)), \tag{2.6.89}$$

$$c_{2,\mathrm{val}} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \tag{2.6.90}$$

pour définir des bases de ces trois espaces de dimension 1. On définit l'endomorphisme N de $\bigoplus H^*_{dR}(\lambda)[-*]$ comme étant $(1,1,0)$ dans cette base. C'est un élément de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^1_{dR}(\lambda)) \times \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \subset \mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \tag{2.6.91}$$

Comme conséquence de la proposition 2.5.16, on a $N^2 = (0,0,1)$.

On définit l'endomorphisme φ de $\bigoplus_i H^i_{dR}(\lambda)[-i]$ comme étant

$$\varphi = p^{\frac{|\lambda|}{3}-1}(Id_{H^0} + pId_{H^1[-1]} + p^2 Id_{H^2[-2]}), \tag{2.6.92}$$

où $|\lambda| = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$. L'isomorphisme s permet alors de transporter φ et N sur $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ en posant $\varphi_s = s^{-1} \circ \varphi \circ s$ et $N_s = s^{-1} \circ \varphi \circ s$. La relation $N_s \varphi_s = p\varphi_s N_s$ est alors immédiate.

Enfin nous munissons le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ de la filtration de Schneider (voir [**48**] §1 formule (14)). D'après [**48**, (18)], on a

$$\begin{cases} \mathrm{Fil}^{\lambda_2-1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{Fil}^{\lambda_2}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) = R\Gamma_{dR}(\lambda) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_2+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}] \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_1+2}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Fil}^{\lambda_0+2}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq D_{\lambda(2)}[-2] \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_0+3}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) = \cdots = 0. \end{cases} \tag{2.6.93}$$

Nous pouvons à présent définir le foncteur $D_{s,\lambda}$ de la façon suivante.

Définition 2.6.20. — Si C est un objet de $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$, on pose

$$D_\lambda(C) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(C, R\Gamma_{dR}(\lambda)). \tag{2.6.94}$$

On le munit des endomorphismes $\varphi_{s,*}$ et $N_{s,*}$ définis par

$$\varphi_{s,*}(f) = \varphi_s \circ f, \quad N_{s,*}(f) = N_s \circ f, \tag{2.6.95}$$

ainsi que de la filtration

$$\mathrm{Fil}^i(D_\lambda(C)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{D_b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(C, \mathrm{Fil}^i(R\Gamma_{dR}(\lambda))) \to D_\lambda(C)). \tag{2.6.96}$$

C'est donc un (φ, N)-module filtré que l'on note $D_{s,\lambda}(\Sigma)$.

Remarquons tout de suite que d'après (2.6.93),

$$\begin{cases} \mathrm{Fil}^{\lambda_2}(D_{s,\lambda}(C)) = D_{s,\lambda}(C) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_2+1}(D_{s,\lambda}(C)) = \cdots = \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(D_{s,\lambda}(C)) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_1+2}(D_{s,\lambda}(C)) = \cdots = \mathrm{Fil}^{\lambda_0+2}(D_{s,\lambda}(C)) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_0+3}(D_{s,\lambda}(C)) = 0, \end{cases} \tag{2.6.97}$$

et que, sous les notations de l'introduction, $\lambda_0 = h_2 - 2$, $\lambda_1 = h_1 - 1$, $\lambda_2 = h_0$.

Nous pouvons à présent calculer quelques images par ce foncteur, ce qui nous mènera à la preuve du théorème 2.1.2.

Proposition 2.6.21. — *Le (φ, N)-module filtré $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])$ est de la forme suivante.*

$$\begin{aligned} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) = & Ke_2 \\ & \oplus Ke_1^{\log} \oplus Ke_1^{\mathrm{val}} \\ & \oplus Ke_0^{dilog} \oplus Ke_0^{\log - \log} \oplus Ke_0^{\log - \mathrm{val}} \oplus Ke_0^{\mathrm{val}-\log} \oplus Ke_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}, \end{aligned} \tag{2.6.98}$$

$$\begin{cases} \varphi(e_2) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}+1} e_2, \\ \varphi(e_1^?) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}} e_1^?, \\ \varphi(e_0^?) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}-1} e_0^?, \end{cases} \qquad \begin{cases} N(e_2) = e_1^{\mathrm{val}}, \\ N(e_1^{\mathrm{val}}) = e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}, \\ N(e_1^{\log}) = e_0^{\log - \mathrm{val}}, \\ N(e_0^?) = 0, \end{cases} \tag{2.6.99}$$

$$\mathrm{Fil}^i(D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])) = \begin{cases} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \\ K(e_2 + re_1^{\log} + te_1^{\mathrm{val}} + \alpha e_0^{dilog} + \beta e_0^{\log - \log} - \gamma e_0^{\log - \mathrm{val}} - \delta e_0^{\mathrm{val}-\log} + \epsilon e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}) \\ \oplus K(e_1^{\log} + ue_0^{\log - \log} + ve_0^{\log - \mathrm{val}}) \oplus K(e_1^{\mathrm{val}} + ue_0^{\mathrm{val}-\log} + ve_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}) \\ K(e_2 + re_1^{\log} + te_1^{\mathrm{val}} + \alpha e_0^{dilog} + \beta e_0^{\log - \log} - \gamma e_0^{\log - \mathrm{val}} - \delta e_0^{\mathrm{val}-\log} + \epsilon e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}) \\ 0 \end{cases} \tag{2.6.100}$$

$$\begin{cases} si\ i \leq \lambda_2 \\ si\ \lambda_2 + 2 \leq i \leq \lambda_1 + 1, \\ si\ \lambda_1 + 2 \leq i \leq \lambda_0 + 2, \\ si\ i \geq \lambda_0 + 3. \end{cases} \tag{2.6.101}$$

Démonstration. — C'est une conséquence des propositions 2.5.12 et 2.5.6. On choisit pour e_2 la flèche duale de l'inclusion $F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \hookrightarrow \Sigma(\lambda)$, $e_1^? = \tilde{sh}_1(c_{2,?})$, avec $? \in \{\log, \mathrm{val}\}$, $e_0^{\sharp,?} = c_{2,\sharp} \wedge c_{1,?}$ avec $\sharp$ et $?$ dans $\{\log, \mathrm{val}\}$ et $e_0^{\mathrm{dilog}} = c_0$. La formule pour l'action de φ est une conséquence immédiate de la définition de φ sur $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ et l'action de N est alors une conséquence du calcul de la proposition 2.5.16. D'après le corollaire 2.6.11, la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', D_{\lambda(2)})$ est 1 et la forme du $\mathrm{Fil}^{\lambda_0+2}$ est conséquence de (2.6.77) et (2.6.78). Il reste à déterminer le $\mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}$. Les applications i_2 et i_1 se factorisent toutes deux à travers

$$\mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}], \tag{2.6.102}$$

on obtient donc une application

$$(i_{2,*}, i_{1,*}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], D_{\lambda(2)}) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', D^0_{\lambda(1)}) \\ \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda))). \quad (2.6.103)$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], \cdot)$ au triangle distingué

$$D^0_{\lambda(1)}[-1] \to \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1} R\Gamma_{dR}(\lambda) \to H^2_{dR}(\lambda)[-2] \to, \quad (2.6.104)$$

on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], D^0_{\lambda(1)}[-1]) \xrightarrow{i_{1,*}} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda))) \\ \xrightarrow{q} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], H^2_{dR}(\lambda)[-2]) \quad (2.6.105)$$

De plus la composition $D_{\lambda(2)}[-2] \to \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \to H^2_{dR}(\lambda)[-2]$ coïncide avec l'application quotient $D_{\lambda(2)} \to H^2_{dR}(\lambda)$ décalée par -2. Ainsi la composée $q \circ i_{2,*}$ ci-dessous est bijective d'après le corollaire 2.6.11.

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], D_{\lambda(2)}[-2]) \xrightarrow{i_{2,*}} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda))) \\ \xrightarrow{q} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], H^2_{dR}(\lambda)[-2]) \quad (2.6.106)$$

Comme d'après (2.6.37) et (2.2.62), le socle de $D_{\lambda(1)}$, n'apparaît pas dans $\Sigma(\lambda)'$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], D_{\lambda(1)}[-2]) = 0. \quad (2.6.107)$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], \cdot)$ au triangle distingué,

$$D_{\lambda(2)}[-2] \to \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \to D_{\lambda(1)}[-1] \to, \quad (2.6.108)$$

on en déduit que $i_{2,*}$ est injective, et donc que son image est en somme directe avec celle de $i_{1,*}$. Autrement dit, l'application (2.6.103) est bijective. L'image de $i_{2,*}$ s'envoie dans $\mathrm{Fil}^{\lambda_0+1} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])$ et a déjà été déterminée. Il suffit donc de déterminer l'image de $\mathrm{Im}(i_{1,*})$ dans $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])$. Pour cela, on utilise la suite exacte

$$0 \to v^{an}_{P_1}(\lambda)' \to D^0_{\lambda(1)} \to \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2} \otimes \mathrm{St}_2)' \to 0 \quad (2.6.109)$$

provenant de (2.6.37). On peut alors montrer, en utilisant les techniques de la section 2.5.2, que $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2} \otimes \mathrm{St}_2), \Sigma(\lambda)) = 0$. Ainsi le terme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', D^0_{\lambda(1)})$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v^{an}_{P_1}(\lambda)')$ et on utilise le calcul de la proposition 2.5.16 et le lemme 2.6.19 pour conclure. □

Le même raisonnement, mais en plus simple prouve la proposition suivante.

Proposition 2.6.22. — *Le (φ, N)-module filtré $D_{s,\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda)'[-1])$ est de la forme*

$$D_{s,\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda)'[-1]) = Ke_1 \oplus Ke_0^{\log} \oplus Ke_0^{\mathrm{val}} \quad (2.6.110)$$

$$\begin{cases} \varphi(e_2) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}} e_1, \\ \varphi(e_0^?) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}-1} e_0^?, \end{cases} \quad \begin{cases} N(e_1) = e_0^{\mathrm{val}}, \\ N(e_0^?) = 0, \end{cases} \quad (2.6.111)$$

$$\mathrm{Fil}^i(D_{s,\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda)'[-1])) = \begin{cases} D_{s,\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda)'[-1]) & \text{si } i \le \lambda_2, \\ K(e_1 + ue_0^{\log} + ve_0^{\mathrm{val}}) & \text{si } \lambda_2 + 1 \le i \le \lambda_1 + 1, \\ 0 & \text{si } i \ge \lambda_1 + 2. \end{cases} \quad (2.6.112)$$

Les (φ, N)-modules filtrés $D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1])$ et $D_{s,\lambda}(F'_\lambda)$ sont respectivement $1(\lambda_2) \oplus 1(\lambda_2)$ et $1(\lambda_2)$, où $1(\lambda_2)$ est le (φ, N)-module tel que $\varphi = id$, $N = 0$ et $\mathrm{Fil}^i(1(\lambda_2)) = 1(\lambda_2)$ si et seulement si $i \leq \lambda_2$, et 0 sinon.

Démonstration. — On a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Hom}_G(v_{P_1}^{an}(\lambda)', v'_{P_1} \otimes F'_\lambda) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)', F'_\lambda) \quad (2.6.113)$$

On choisit alors pour e_1 l'application duale de l'inclusion de $F_\lambda \otimes v_{P_1}$ dans $v_{P_1}^{an}(\lambda)$, et $e_0^{\log} = c_{P_1,\log}$, $e_0^{\mathrm{val}} = c_{P_1,\mathrm{val}}$.

Comme $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda \otimes v_{P_1}, v_{P_2}^{an}(\lambda)) = 0$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1], F'_\lambda) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)', F'_\lambda). \quad (2.6.114)$$

□

Nous pouvons à présent choisir un isomorphisme s convenable. Si A est un automorphisme de $R\Gamma_{dR}(\lambda)$, en composant à droite avec A, on obtient un morphisme de foncteurs A_* de $D_{s,\lambda}$ vers $D_{s\circ A^{-1},\lambda}$. Soit p_i la projection de $\bigoplus_{i=0}^2 H^i_{dR}(\lambda)[-i]$ sur $H^i_{dR}(\lambda)[-i]$. D'après le corollaire 2.6.2, tout automorphisme de $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est de la forme

$$A = s^{-1} \circ (\sum_{i=0}^{2} a_i p_i + b_{1,2} p_1 \circ N \circ p_2 + b_{0,1} p_0 \circ N \circ p_1 + b_{0,2} p_0 N^2 p_2) \circ s, \quad (2.6.115)$$

avec $a_i \neq 0$ pour $0 \leq i \leq 2$. On a alors

$$\begin{aligned} A_*(e_2) &= a_2 e_2 + b_{1,2} e_1^{\mathrm{val}} + b_{0,2} e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}} \\ A_*(e_1^{\log}) &= a_1 e_1^{\log} + b_{0,1} e_0^{\log - \mathrm{val}} \\ A_*(e_1^{\mathrm{val}}) &= a_1 e_1^{\mathrm{val}} + b_{0,1} e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}} \\ A_*(e_0^?) &= a_0 e_0^?. \end{aligned} \quad (2.6.116)$$

Ainsi, quitte à remplacer s par $s \circ A^{-1}$ pour un A bien choisi, on peut supposer $t = v = \epsilon = 0$ et $r = u = -1$ dans les propositions 2.6.21 et 2.6.22. Nous fixons donc désormais s de cette forme, et nous posons

$$Q = \alpha^{-1}(\beta XY + \gamma X + \delta Y). \quad (2.6.117)$$

D'après la proposition 2.5.12, l'espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_1}^{an}(\lambda)')$ est de dimension 2 et a pour base $(\tilde{sh}_1(c_{2,\log}), \tilde{sh}_1(c_{2,\mathrm{val}}))$. Soit $\sharp \in \{\log, \mathrm{val}\}$. La flèche $\tilde{sh}_1(c_{2,\sharp})$ de $\Sigma(\lambda)'[-2]$ vers $v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]$ induit une application

$$\tilde{sh}_1(c_{2,\sharp})^* : D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]) \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]). \quad (2.6.118)$$

La proposition 2.5.16 montre alors que $\tilde{sh}_1(c_{2,\sharp})^*(e_1) = e_1^\sharp$ et $\tilde{sh}_1(c_{2,\sharp})^*(e_0^?) = e_0^{\sharp-?}$.

De même, $D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)[-1])$ est engendré par des éléments $e_0^{\log}$ et e_0^{val}, et

$$\tilde{sh}_2(c_{1,\sharp}) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_2}^{an}(\lambda)') \quad (2.6.119)$$

donne une application

$$\tilde{sh}_2(c_{1,\sharp})^* : D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1]) \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \quad (2.6.120)$$

telle que $\tilde{sh}_2(c_{1,\sharp})^*(e_0^?) = -e_0^{?-\sharp}$.

Nous pouvons à présent démontrer le théorème principal.

Théorème 2.6.23. — *Avec le choix de Q fait en* (2.6.117) *et l'isomorphisme s que nous avons fixé, pour tout $\underline{\mathcal{L}} \in K^3$, les (φ, N)-modules filtrés suivants sont isomorphes*

$$D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'_Q[-1]) \simeq D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}). \tag{2.6.121}$$

Démonstration. — Posons $c_{1,\mathcal{L}} = c_{1,\log} + \mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}}$ et $c_{2,\mathcal{L}'} = c_{2,\log} + \mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}}$. Le $D(G)$-module $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'$ s'insère, par définition, dans un triangle distingué

$$(v_{P_1}^{an}(\lambda)' \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda)')[-2] \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2] \to \Sigma(\lambda)'[-2] \xrightarrow{(\tilde{sh}_1(c_{2,\mathcal{L}'}), \tilde{sh}_2(c_{1,\mathcal{L}}))} (v_{P_1}^{an}(\lambda)' \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda)')[-1] \tag{2.6.122}$$

On en déduit une suite exacte de K-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]) \oplus D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1]) &\xrightarrow{(\tilde{sh}_1(c_{2,\mathcal{L}'}), \tilde{sh}_2(c_{1,\mathcal{L}}))^*} D'_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \\ \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})') \to D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-2]) \oplus D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-2]) &\xrightarrow{\delta'} D'_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-3]). \end{aligned} \tag{2.6.123}$$

Montrons que la flèche δ' est injective. D'après le corollaire 2.4.12, on a déjà

$$D_{s,\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)'[-2], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)', F'_\lambda) \tag{2.6.124}$$

Ainsi, l'application δ' est l'application δ' de la suite exacte longue (2.5.90), elle est donc injective. On en déduit une suite exacte

$$\begin{aligned} D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]) \oplus D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1]) &\xrightarrow{(\tilde{sh}_1(c_{2,\mathcal{L}'}), \tilde{sh}_2(c_{1,\mathcal{L}}))^*} D'_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \\ &\to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})') \to 0 \end{aligned} \tag{2.6.125}$$

On voit alors que le module filtré $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2])$ est le conoyau de la flèche $(\tilde{sh}_1(c_{2,\mathcal{L}'}), \tilde{sh}_2(c_{1,\mathcal{L}}))^*$ dans la catégorie (non abélienne) des modules filtrés. Les calculs précédents montrent alors que le (φ, N)-module filtré $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2])$ est de la forme

$$D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2]) = Ke_2 \oplus Ke_1 \oplus Ke_0^{dilog} \oplus Ke_0, \tag{2.6.126}$$

$$\begin{cases} \varphi(e_2) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}+1} e_2, \\ \varphi(e_1) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}} e_1, \\ \varphi(e_0^?) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}-1} e_0^?, \end{cases} \qquad \begin{cases} N(e_2) = e_1, \\ N(e_1) = e_0, \\ N(e_0^?) = 0, \end{cases} \tag{2.6.127}$$

$$\mathrm{Fil}^i(D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2])) = \begin{cases} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_0+2}(D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2])) \oplus K(e_1 + \mathcal{L}e_0) \\ K(e_2 + \mathcal{L}'e_1 + \alpha e_0^{dilog} + (\beta\mathcal{L}\mathcal{L}' + \gamma\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}' + \epsilon)e_0) \\ 0 \end{cases} \tag{2.6.128}$$

$$\begin{cases} \text{si } i \leq \lambda_2, \\ \text{si } \lambda_2 + 2 \leq i \leq \lambda_1 + 1, \\ \text{si } \lambda_1 + 2 \leq i \leq \lambda_0 + 2, \\ \text{si } i \geq \lambda_0 + 3. \end{cases} \tag{2.6.129}$$

Alors le triangle distingué (2.5.98) donne une suite exacte

$$D_{s,\lambda}(F'_\lambda) \xrightarrow{\delta} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2]) \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'[-1]) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(F'_\lambda, F'_\lambda) = 0. \tag{2.6.130}$$

De plus, par définition de $\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$, l'application δ envoie exactement l'identité sur $e_0^{dilog}-(\mathcal{L}''-Q(\mathcal{L},\mathcal{L}'))e_0$ dans $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}')[-2])$. On obtient au final un isomorphisme de (φ,N)-modules filtrés

$$D_{s,\lambda}(\lambda,\underline{\mathcal{L}})\simeq D(\underline{h},\underline{\mathcal{L}}),\tag{2.6.131}$$

ce qui prouve le théorème 2.1.2. □

Remarque 2.6.24. — Dans le cas où λ est le poids $(0,0,0)$, on remarque que le (φ,N)-module filtré $D_{s,\lambda}((\mathrm{St}_3^{an})'[-2])$ est admissible. Autrement dit, il existe une représentation galoisienne V de dimension 8 telle que $D_{st}^*(V)\simeq D_{s,\lambda}((\mathrm{St}_3^{an})'[-2])$. Cette représentation galoisienne est telle que toutes les représentations $V(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})$, pour $\underline{h}=(0,1,2)$ et $\underline{\mathcal{L}}$ variant dans K^3, apparaissent comme sous-objets de cette représentation. Dans le cas de poids de Hodge-Tate quelconques, toutes les représentations galoisiennes $V(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})$ ne peuvent être sous-objets d'une même représentation galoisienne de dimension finie, mais leurs (φ,N)-modules filtrés associés sont tous quotients d'un même (φ,N)-module filtré (non nécessairement admissible), il s'agit de $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])$.

2.7. Appendices

2.7.1. Appendice 1 : dilogarithme pour $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$**.** — Soit $G=\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Dans cet appendice, nous notons B le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de G et T le sous-groupe des matrices diagonales. On note w la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Rappelons que le groupe G opère de façon continue sur la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ par $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\cdot z=\frac{az+b}{cz+d}$. Trouver un cocycle explicite de $H^3(G,K)$ revient à trouver une fonction continue c de G^4 dans K, G-invariante par translation à gauche et vérifiant une certaine équation fonctionnelle. Cette équation fonctionnelle est liée à l'équation fonctionnelle du dilogarithme p-adique. Notons $[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{(x_3-x_1)(x_2-x_0)}{(x_3-x_0)(x_2-x_1)}$ le birapport de 4 points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Si $(g_0,g_1,g_2,g_3)\in G^4$, on aimerait définir

$$c(g_0,g_1,g_2,g_3)=\mathrm{dilog}([g_0\cdot\infty,g_1\cdot\infty,g_2\cdot\infty,g_3\cdot\infty]).\tag{2.7.1}$$

Il s'agit bien d'une 3-cochaîne, mais elle n'est bien définie que sur un ouvert dense de G^4. Cependant nous pouvons voir cet élément comme une 3-cochaîne mesurable G-invariante de G, c'est pourquoi nous avons besoin de comparer $H^2(G,\mathrm{St}_2^{an})$ avec un groupe de cohomologie mesurable.

Le groupe G est localement compact. Si A est un K-espace de Fréchet muni d'une action continue de G, Calvin Moore ([**69**]) définit des groupes de cohomologie mesurable $H^n_{mes}(G,A)$ vérifiant les propriétés classiques (voir [**69**], §4). Il montre que cette cohomologie vérifie un lemme de Shapiro et il a été prouvé par Wigner ([**69**, §7, (2)]) que si A est une représentation continue de dimension finie de G, alors $H^n_{mes}(G,A)$ coïncide avec la cohomologie continue de A. De plus, si A est une représentation algébrique de dimension finie, ce groupe de cohomologie coïncide encore avec le groupe de cohomologie localement analytique par les théorèmes 1 et 3 de [**23**]. Soit $I_B^G(K)$ l'espace des fonctions mesurables de G dans K, invariantes à droite par B, on pose $\overline{\mathrm{St}}_2=I_B^G(K)/K$. On a alors une inclusion $\mathrm{Ind}_B^G(K)\hookrightarrow I_B^G(K)$ qui induit une inclusion $\mathrm{St}_2^{an}\hookrightarrow\overline{\mathrm{St}}_2$.

Proposition 2.7.1. — *L'inclusion* $\mathrm{St}_2^{an}\hookrightarrow\overline{\mathrm{St}}_2$ *induit un isomorphisme*

$$H^2(G,\mathrm{St}_2)\xrightarrow{\sim}H^2_{mes}(G,\overline{\mathrm{St}}_2).\tag{2.7.2}$$

Démonstration. — La cohomologie $H^2(G, \mathrm{St}_2^{an})$ est calculée par un complexe de cochaînes localement analytiques. Une cochaîne localement analytique est en particulier mesurable. On a donc bien une application entre ces deux espaces de cohomologie. On a alors deux suites exactes de la forme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^2(G, \mathrm{Ind}_B^G(K)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^2(G, \mathrm{St}_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(G, K) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^2_{mes}(G, I_B^G(K)) \arrow[r] & H^2_{mes}(G, \overline{\mathrm{St}}_2) \arrow[r] & H^3_{mes}(G, K) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.7.3}$$

Les deux termes extrêmes sont isomorphes grâce aux lemmes de Shapiro et comparaison avec la cohomologie continue en dimension finie. On a donc un isomorphisme au milieu. □

Ainsi, nous travaillons désormais uniquement avec la cohomologie mesurable et notons H^q à la place de H^q_{mes}.

Nous allons maintenant utiliser une technique due à Bloch dans le cas archimédien ([**8**]) pour prouver que $H^2(G, \overline{\mathrm{St}}_2)$ s'identifie à un espace de fonctions mesurables sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^4$ vérifiant une certaine équation fonctionnelle.

Tout d'abord, nous allons prouver un analogue p-adique d'un théorème de Bloch.

On note li_2 la fonction dilogarithme $\mathbb{Q}_p \backslash \{0,1\} \to \mathbb{Q}_p$ construite par Robert Coleman dans [**25**]. Cette fonction dépend du choix d'une détermination du logarithme p-adique, c'est-à-dire la valeur de $\log(p)$. Robert Coleman définit alors le dilogarithme modifié

$$D(z) = li_2(z) + \frac{1}{2}\log(z)\log(1-z), \tag{2.7.4}$$

prouve l'équation fonctionnelle pour tout $(x, y) \in (\mathbb{C}_p\{0,1\})^2$,

$$D(xy) - D(x) - D(y) + D(y\frac{1-x}{1-y}) - D(x\frac{1-y}{1-x}) = 0, \tag{2.7.5}$$

et montre que D se prolonge par continuité en une fonction $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$ si l'on pose $D(0) = D(1) = D(\infty) = 0$.

Comme dans le cas archimédien, l'équation fonctionnelle du dilogarithme a une interprétation en termes de cocyles pour le groupe G. L'application

$$(g_0, g_1, g_2, g_3) \mapsto D([g_0 \cdot \infty, g_1 \cdot \infty, g_2\infty, g_3 \cdot \infty])$$

est un 3-cocycle mesurable et borné sur le groupe G à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$. Si on remplace $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{C}$, et D par le dilogarithme de Bloch-Wigner, un théorème de Bloch affirme que toutes les fonctions mesurables vérifiant l'équation fonctionnelle (2.7.5) sont les multiples du dilogarithme de Bloch-Wigner. Dans le cas p-adique, la situation n'est plus exactement la même car en choisissant une autre branche du logarithme p-adique, on obtient une fonction dilogarithme vérifiant la même équation. Cette nouvelle fonction est en fait égale à

$$D_{\mathcal{L}}(z) = D(z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\mathrm{val}(z)\log(1-z) - \mathrm{val}(1-z)\log(z)],$$

le dernier terme ne dépendant évidemment pas de la branche choisie dans le logarithme. Notons $d(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{val}(z)\log(1-z) - \mathrm{val}(1-z)\log(z)]$. La fonction d est aussi une fonction mesurable et bornée vérifiant (2.7.5). L'analogue p-adique du théorème de Bloch est que ce sont les seules.

Théorème 2.7.2. — *Si $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \to K$ est mesurable et vérifie* (2.7.5)*, alors il existe λ et μ dans $\mathbb{Q}_p$ tels que $f = \lambda D + \mu d$.*

La preuve de Bloch dans le cas archimédien s'adapte sans problème au cadre p-adique. Comme nous n'avons pas trouvé de trace de cette adaptation dans la littérature, nous la reproduisons ici.

Soit $i \geq 0$ et C^i l'espace des applications mesurables de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^{i+1}$ dans K muni de l'action naturelle de G. On définit $d_i : C^i \to C^{i+1}$ par

$$d_i(f)(x_0, \ldots, x_i) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j f(x_0, \ldots, \hat{x_j}, \ldots, x_i),$$

elle est G-équivariante. Calvin Moore définit sur ces espaces une topologie métrisable qui en font des espaces complets, munis d'une action continue de G. Le complexe $C^\cdot$ est une résolution de la représentation triviale de G, et l'hypercohomologie du foncteur des G-invariants appliqué à $C^\cdot$ donne la cohomologie mesurable. On a donc une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(G, C^p) \Rightarrow H^{p+q}(G, K). \tag{2.7.6}$$

Lemme 2.7.3. — *On a des isomorphismes*

$$\alpha_q : H^q(G, C^0) \simeq H^q(B, K) \text{ et } \beta_q : H^q(G, C^1) \simeq H^q(T, K). \tag{2.7.7}$$

De plus $H^q(G, C^2)$ *est nul sauf lorsque* $q = 0$ *auquel cas il est de dimension* 1.

Démonstration. — L'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à G/B comme espace homogène, on a donc un isomorphisme $C^0 = I_B^G(K)$. D'après le lemme de Shapiro de Moore [**69**, théorème 6], on a un isomorphisme $H^q(G, C^0) \simeq H^q(B, K)$. Pour C^1, on peut remarquer que le complémentaire de la diagonale de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^2$ est dense et isomorphe à l'espace homogène G/T, et on conclut de la même façon. Enfin, pour C^2 on considère l'ouvert dense des triplets de points deux-à-deux distincts, isomorphe à G. □

Lemme 2.7.4. — *L'application* $d_1^{0,q} : H^q(G, C^0) \to H^q(G, C^1)$ *est nulle si* q *est pair et égale à deux fois la restriction si* q *est impair.*

Démonstration. — Rappelons que ev_z désigne l'évaluation en un point z. Notons res_T^B l'application de $H^q(B, K)$ dans $H^q(T, K)$ provenant de l'inclusion $T \hookrightarrow B$. Soit x_0 le point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ fixé par B. Si $c \in H^q(G, C^0)$, l'image de c dans $H^q(B, K)$ est $ev_{x_0}(c|_{B^{q+1}})$. De même l'image de $c \in H^q(G, C^1)$ dans $H^q(T, K)$ est $ev_{(x_0, wx_0)}(c|_{T^{q+1}})$. Notons p_1 et p_2 la première et la deuxième projection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^2$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, $d_1(c) = c \circ p_1 - c \circ p_2$. Ainsi la flèche $H^q(B, K) \to H^q(T, K)$ induite par d_1 est $c \mapsto res_T^B(c) - w(res_T^B(c))$. Or $H^q(T, K) = \Lambda^q H^1(T, K)$ par le corollaire 2.3.11, et l'action de w sur $H^1(T, K)$ est la multiplication par -1. Le résultat s'en déduit. □

Démonstration du théorème 2.7.2. — Notons $Z^i \subset C^i$ le noyau de d_i. Remarquons tout d'abord que si f est une fonction comme dans l'énoncé du théorème, alors la fonction

$$(g_0, g_1, g_2, g_3) \mapsto f([g_0 \cdot \infty, g_1 \cdot \infty, g_2 \cdot \infty, g_3 \cdot \infty]) \tag{2.7.8}$$

est dans $H^0(G, Z^3)$. Nous allons en fait prouver que $\dim H^0(G, Z^3) = 2$, ce qui implique le théorème. Utilisons la suite spectrale (2.7.6) ainsi que le fait que $H^q(G, K) = 0$ pour $q \in \{1, 2\}$ et $\dim_K H^3(G, K) = 1$ (d'après le corollaire 2.3.14). Des lemmes précèdents, on déduit que $E_2^{0,1} = E_2^{1,1} = E_2^{2,1} = 0$. Comme $H^1(G, K) = 0$, et $\dim E_1^{2,0} = 1$, la flèche $d_1^{1,0}$ est nécessairement un isomorphisme de $E_1^{1,0}$ sur $E_1^{2,0}$ et donc $E_2^{1,0} = E_2^{2,0} = 0$. Comme $\dim E_1^{0,2} = 1$, $d_1^{0,2} = 0$ et $H^2(G, K) = 0$, la flèche $d_3^{0,2}$ de $H^2(G, C^0)$ dans $H^0(G, C^3)$ est une injection. Ainsi

$\dim H^0(G,Z^3) - 1 \leq \dim H^3(G,K) = 1$. Comme de plus les fonctions D et d sont déjà dans $H^0(G,Z^3)$ on a $\dim H^0(G,Z^3) \geq 2$. On peut donc bien en conclure

$$H^0(G,Z^3) = KD \oplus Kd. \tag{2.7.9}$$

□

Proposition 2.7.5. — *Le noyau de l'application $H^0(G,Z^3) \to H^3(G,K)$ est engendré par d. De façon équivalente, d appartient à l'image de $d_3^{0,2}$.*

Démonstration. — Pour x_1, x_2, x_3 dans $\mathbb{Q}_p$ deux à deux distincts, posons

$$\begin{aligned} b(x_1,x_2,x_3) = &- \log_0(x_3-x_1)\mathrm{val}(x_3-x_2) + \log_0(x_3-x_1)\mathrm{val}(x_2-x_1) \\ &+ \log_0(x_3-x_2)\mathrm{val}(x_3-x_1) - \log_0(x_3-x_2)\mathrm{val}(x_2-x_1) \\ &- \log_0(x_2-x_1)\mathrm{val}(x_3-x_1) + \log_0(x_2-x_1)\mathrm{val}(x_3-x_2) \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

Alors, si x_0, x_1, x_2, x_3 sont quatre points de $\mathbb{Q}_p = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\backslash\{\infty\}$ deux à deux distincts, on vérifie que

$$d([x_0,x_1,x_2,x_3]) = b(x_1,x_2,x_3) - b(x_0,x_2,x_3) + b(x_0,x_1,x_3) - b(x_0,x_1,x_2). \tag{2.7.11}$$

On définit $B \in C^2(G,K)$ en posant $B(g_0,g_1,g_2) = b(g_0\cdot\infty, g_1\cdot\infty, g_2\cdot\infty)$ presque partout, on voit alors que l'image de d dans $H^3(G,K)$ est $d_2(B)$, donc nulle. □

Les inclusions

$$C^{\cdot}_{\geq 3} \hookrightarrow C^{\cdot}_{\geq 2} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow C^{\cdot} \tag{2.7.12}$$

induisent des morphismes de suites spectrales d'hypercohomologie. Comme de plus $H^q(G, C^{\cdot}_{\geq i}) = H^{q-i}(G,Z_i)$ où $Z_i = \ker d_i$, la flèche $H^0(G,C^3) \to H^3(G,K)$ se factorise de la façon suivante

$$H^0(G,Z^3) \xrightarrow{\delta} H^1(G,Z_2) \xrightarrow{\delta} H^2(G,Z_1) \xrightarrow{\delta} H^3(G,K). \tag{2.7.13}$$

L'application δ est à chaque fois le bord provenant de la suite exacte

$$0 \to Z_i \to C^i \to Z_{i+1} \to 0. \tag{2.7.14}$$

Comme $H^1(G,C^2) = 0$ la première flèche δ est un isomorphisme. De plus, comme $H^1(G,C^0) \simeq H^1(G,C^1)$ et que $H^1(G,C^0) \simeq H^1(G,C^1)$, on voit que la flèche $H^1(G,Z^1) \to H^1(G,C^1)$ est un isomorphisme et donc que $\delta : H^1(G,Z^2) \to H^2(G,Z^1)$ est injective. Comme ces espaces ont même dimension, c'est une bijection.

Comme $Z_1 = \overline{\mathrm{St}}_2$, on obtient finalement un isomorphisme naturel

$$H^0(G,Z^3) \simeq H^2(G,\overline{\mathrm{St}}_2) \tag{2.7.15}$$

qui permet de définir, pour tout $\mathcal{L} \in K$, une classe de cohomologie dont l'image est non triviale dans $H^3(G,K)$ en choisissant $D + \mathcal{L}d$. De plus, la différence de deux telles classes appartient toujours à $H^2(G, I_B^G(K))$ puisque $I_B^G(K) \simeq C^0$.

Finalement, en utilisant la proposition 2.7.1, on obtient un isomorphisme

$$\theta : \mathcal{B} = H^0(G,Z^3) \simeq H^2(G,\overline{\mathrm{St}}_2) \simeq H^2(G,\mathrm{St}_2^{an}). \tag{2.7.16}$$

De plus le noyau de $H^2(G,\mathrm{St}_2^{an}) \to H^3(G,K)$ est engendré par $\theta(d)$.

2.7.2. Appendice 2 : cohomologie d'algèbres de Lie. — Soit $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ un poids dominant de $\mathfrak{sl}_3$, relativement à $-\Delta$. Autrement dit, on a $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Rappelons que si $w \in W$, on pose $w * \lambda = w(\lambda - \delta) + \delta$ avec $\delta = (1, 0, -1)$. Si μ est un poids de $\mathfrak{sl}_3$, on note $L(\mu)$ le $\mathfrak{sl}_3$-module simple de plus haut poids μ, pour l'ordre déterminé par $-\Delta$. On note également $L_i(\mu)$ le $\mathfrak{l}_i$-module simple de plus haut poids μ. Si μ est dominant relativement à $-\alpha_i$, alors $L_i(\mu)$ est de dimension finie, et on pose $\mathfrak{m}_i(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_i)} (L_i(\mu))$. On note $W^i \subset W$ un système de représentants de longueur minimale de $W_i \backslash W$. D'après [**54**, §94], $w * \lambda$ est dominant relativement à $-\alpha_i$ si et seulement si $w \in W^i$. Ici, $W^1 = \{1, s_2, s_2 s_1\}$ et $W^2 = \{1, s_1, s_1 s_2\}$. Le but de cette section est de déterminer les $\mathfrak{l}_i$-modules $H^q(\mathfrak{n}_i, \mathfrak{m}_1(w * \lambda))$ pour $s \in W^1$. Le résultat est contenu dans les deux propositions 2.4.22 et 2.4.30. Il est certainement bien connu, mais je n'ai pas trouvé de référence.

Tout d'abord, prouvons un lemme qui nous sera utile plus tard.

Lemme 2.7.6. — *Soit M un $U(\mathfrak{g})$-module simple de plus haut poids. Alors $H^0(\mathfrak{n}_i, M)$ est un $\mathfrak{l}_i$-module simple.*

Démonstration. — Soit H_1 un sous-$\mathfrak{l}_i$-module non nul de $H = H^0(\mathfrak{n}_i, M)$ et H_2 le quotient de H par H_1. On a alors, par exactitude du foncteur $\mathfrak{m}_i$, une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{m}_i(H_1) \to \mathfrak{m}_i(H) \to \mathfrak{m}_i(H_2) \to 0. \tag{2.7.17}$$

On obtient alors une flèche non nulle $\varphi : \mathfrak{m}_i(H) \to M$ envoyant $1 \otimes H$ sur H. Ainsi, sa restriction à $\mathfrak{m}_i(H_1)$ est non nulle. Par simplicité de M, φ et $\varphi|_{\mathfrak{m}_i(H_1)}$ sont surjectives. En notant K et K_1 leurs noyaux respectifs, on a $\mathfrak{m}_i(H)/K_1 \simeq (\mathfrak{m}_i(H_1)/K_1) \oplus \mathfrak{m}_i(H_2)$. Mais comme $1 \otimes H \cap K = \{0\}$, et $1 \otimes H \cap \mathfrak{m}_1(H_1) = 1 \otimes H_1$, on obtient une décomposition $U(\mathfrak{l}_i)$-équivariante $H \simeq H_1 \oplus H_2$. D'après le théorème 1.2(c) de [**54**], chaque vecteur de M est $U(\mathfrak{n})$-fini, donc chaque vecteur de H_1 et H_2 est $U(\mathfrak{l}_i \cap \mathfrak{n})$-fini. On en conclut que si H_2 est non nul, $H^0(\mathfrak{l}_i \cap \mathfrak{n}, H_j) \neq 0$ pour $j \in \{1, 2\}$, et donc $\dim_K H^0(\mathfrak{n}, M) \geq 2$. Comme M est simple de plus haut poids, le théorème 6.15(b) de [**54**] implique $\dim_K H^0(\mathfrak{n}, M) = 1$. □

Passons maintenant au cas où $i = 1$. Soit ρ un $\mathfrak{l}_1$-module de dimension finie. Les espaces de cohomologie $H^i(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho))$ sont les espaces de cohomologie du complexe de Chevalley-Eilenberg

$$C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2, \tag{2.7.18}$$

où $C^i = \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^i \mathfrak{n}_1, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho)$. Notons $(u_{2,0}^*, u_{2,1}^*)$ la base duale de la base $(u_{2,0}, u_{2,1})$ définie dans les notations. Les flèches d^0 et d^1 sont alors

$$\begin{aligned} d^0(m) &= u_{2,0} m \otimes u_{2,0}^* + u_{2,1} m \otimes u_{2,1}^* \\ d^1(m_1 \otimes u_{2,0}^* + m_2 \otimes u_{2,1}^*) &= (u_{2,0} m_2 - u_{2,1} m_1) \otimes (u_{2,0} \wedge u_{2,1})^*. \end{aligned} \tag{2.7.19}$$

L'algèbre $\mathfrak{l}_1$ agit sur C^i par

$$x(m \otimes u) = (xm) \otimes \omega + m \otimes (\mathrm{ad}(x)\omega). \tag{2.7.20}$$

Les flèches d^i sont alors $\mathfrak{l}_1$-équivariantes pour cette action.

D'après le théorème 9.4(a) de [**54**], les $\mathfrak{l}$-modules C^i sont des sommes directes de $\mathfrak{l}_1$-modules de dimension finie, ainsi leur restriction au tore $\mathfrak{t}$ est semi-simple, et leur classe d'isomorphisme en tant que $\mathfrak{l}_1$-module est déterminée par leur caractère $ch(C^i)$. Il en est donc de même des $\mathfrak{l}_1$-modules $H^i(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho))$.

Proposition 2.7.7. — *Pour toute représentation de dimension finie ρ de $\mathfrak{l}_1$, on a*

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^j ch(H^j(\mathfrak{n}_1,\mathfrak{m}_1(\rho))) = ch(\rho). \tag{2.7.21}$$

Démonstration. — En tant que complexe de $\mathfrak{t}$-représentations, on a

$$C^{\cdot}(\rho) \simeq \rho\otimes[U(\mathfrak{n}_1^+)\to U(\mathfrak{n}_1^+)\otimes\mathfrak{n}_1^+\to U(\mathfrak{n}_1^+)\otimes\bigwedge^2\mathfrak{n}_1^+] \tag{2.7.22}$$

Or la résolution de Chevalley-Eilenberg

$$V_{\cdot}(\mathfrak{n}_1^+) = [\bigwedge^2\mathfrak{n}_1^+\otimes U(\mathfrak{n}_1^+)\to\mathfrak{n}_1^+\otimes U(\mathfrak{n}_1^+)\to U(\mathfrak{n}_1^+)] \tag{2.7.23}$$

est une résolution du $\mathfrak{n}_1^+$-module trivial. Comme elle est $\mathfrak{t}$-équivariante, on a l'égalité

$$ch(1) = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i ch(U(\mathfrak{n}_1^+)\otimes\Lambda^i\mathfrak{n}_1^+) \tag{2.7.24}$$

d'où le résultat en utilisant

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i ch(C^i) = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i ch(H^i(\mathfrak{n}_1,\mathfrak{m}_1(\rho))). \tag{2.7.25}$$

□

L'intérêt de ce résultat est qu'il suffit, pour connaître $H^1(\mathfrak{n}_1,\mathfrak{m}_1(\rho))$ de connaître H^0 et H^2, donc de calculer un noyau et un quotient.

Supposons que $\rho = L_1(\mu)$ avec $\mu = (\mu_0,\mu_1,\mu_2)$ dominant relativement à $-\alpha_1$. On a alors

$$L_1(\mu) = \bigoplus_{k=0}^{\mu_1-\mu_0} Kv_k, \tag{2.7.26}$$

v_k désignant un vecteur de poids $\mu + k\alpha_1$. On a alors $u_{0,1}v_k = v_{k+1}$ et $u_{1,0}v_k = v_{k-1}$. Posons alors, pour $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ et $0\leq k\leq\mu_1-\mu_0$, $v_{n,m,k} = u_{0,2}^n u_{1,2}^m\otimes v_{\mu-k\alpha_1}$. Les vecteurs $(v_{n,m,k})$ forment une base de $\mathfrak{m}_1(\mu)$.

Un calcul explicite donne alors

$$u_{2,0}\cdot v_{n,m,k} = -mv_{n,m-1,k-1} - n(m+n-1+\mu_0-\mu_2+k)v_{n-1,m,k} \tag{2.7.27}$$
$$u_{2,1}\cdot v_{n,m,k} = -nv_{n-1,m,k+1} - m(n+m-1+\mu_1-\mu_2-k)v_{n,m-1,k} \tag{2.7.28}$$

Si on pose $\deg(v_{n,m,k}) = n+m$, les flèches d^i sont de degré -1, il suffit donc de calculer leur noyau et conoyau sur les sous-espaces de degré fixé. Notons $\mathfrak{m}_1(\rho)_r$ le sous-espace de degré r.

Lemme 2.7.8. — *Si $\mu = s_2s_1 * \lambda$, la flèche d^1 est surjective.*

Démonstration. — L'égalité $\mu = s_2s_1*\lambda$ implique $\mu_2<\mu_0$. Si on pose $\deg(v_{n,m,k}) = n+m$, les formules (2.7.27) montrent que les flèches d^i sont de degré -1. Notons $\mathfrak{m}_1(L_1(\mu))_r$ le sous-espace de degré r. Considérons $u_{2,0}:\ \mathfrak{m}_1(\mu)_r\to\mathfrak{m}_1(\mu)_{r-1}$. Elle respecte la filtration $\mathrm{Fil}_i\mathfrak{m}_1(\mu)_r = \sum_{k\leq i}Kv_{n,m,k}$. De plus, au niveau des gradués, on a $u_{2,0}v_{n,m,k} = -n(r-1+\mu_0-\mu_2+k)v_{n-1,m,k}$. Donc $u_{2,0}$ est surjective. D'après (2.7.19), ceci prouve que d^2 est surjective. □

__Proposition 2.7.9.__ — *Soit λ un poids dominant relativement à la base de racines simples $-\Delta$. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_1$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= L_1(\lambda) \oplus L_1(s_2 * \lambda) & H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= L_1(s_2 * \lambda) \oplus L_1(s_2 s_1 * \lambda) \\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= L_1(s_2 * \lambda) \oplus L_1(s_2 s_1 * \lambda) & H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= L_1(s_2 s_1 * \lambda) \\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= L_1(s_2 s_1 * \lambda) & H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= 0 \\
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= L_1(s_2 s_1 * \lambda) \\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= 0 \\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.29}$$

Démonstration. — Tout d'abord, on a des suites exactes

$$\begin{gathered}
0 \to L(s_2 * \lambda) \to \mathfrak{m}_1(\lambda) \to L(\lambda) \to 0 \\
0 \to \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda) \to \mathfrak{m}_1(s_1 * \lambda) \to L(s_2 * \lambda) \to 0,
\end{gathered} \tag{2.7.30}$$

et $L(s_2 s_1 * \lambda) = \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)$ est simple. On connaît la cohomologie de $L(\lambda)$, il s'agit du théorème 2.4.10. Pour tout poids μ dominant relativement à $-\alpha_1$, on a une injection $\mathfrak{p}_1$-équivariante $L_1(\mu) \hookrightarrow \mathfrak{m}_1(\mu)$. Le module de plus haut poids $L(\mu)$ étant un quotient de $\mathfrak{m}_1(\mu)$, la composée

$$L_1(\mu) \hookrightarrow \mathfrak{m}_1(\mu) \twoheadrightarrow L(\mu) \tag{2.7.31}$$

reste injective. Ainsi, d'après le lemme 2.7.6, on a $H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\mu)) = L_1(\mu)$. On en déduit des suites exactes

$$\begin{gathered}
0 \to H^0(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda)) \to H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) \to H^0(\mathfrak{n}_1, L(\lambda)) \to 0 \\
0 \to H^0(\mathfrak{n}_1, L(s_2 s_1 * \lambda)) \to H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) \to H^0(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda)) \to 0.
\end{gathered} \tag{2.7.32}$$

D'après le lemme 2.7.8, on a

$$H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = 0. \tag{2.7.33}$$

On déduit alors de la proposition 2.7.7 que $H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda))$ est nul. On obtient donc des isomorphismes $H^q(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) \simeq H^q(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda))$ pour $q \in \{1, 2\}$. Montrons que $H^2(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda)) = 0$. Étant de dimension finie, c'est une somme directe de $U(\mathfrak{l}_1)$-modules simples. Il est donc uniquement déterminé par les $\mathfrak{t}$-modules $H^1(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1, H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)))$. Par la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie d'algèbres de Lie, il s'agit aussi de $H^3(\mathfrak{n}, L(s_2 * \lambda))$. Or les théorèmes 6.15($b$) et 6.11 de [**54**] impliquent que

$$H^3(\mathfrak{n}, L(s_2 * \lambda))_\mu = 0 \tag{2.7.34}$$

pour tout poids μ. Ainsi $H^2(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda)) = 0$. On en déduit $H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) = 0$ et $H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) = H^2(\mathfrak{n}_1, L(\lambda))$, qui se déduit du théorème 2.4.10. Tout le reste se déduit des suites exactes longues associées à (2.7.30), du théorème 2.4.10 et de la proposition 2.7.7. □

Considérons à présent les $\mathfrak{l}_2$-modules $H^q(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(w * \lambda))$. Il s'agit cette fois-ci des espaces de cohomologie du complexe de Chevalley-Eilenberg

$$C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2, \tag{2.7.35}$$

où $C^i = \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^i \mathfrak{n}_1, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho)$. Notons $(u_{1,0}^*, u_{2,0}^*)$ la base duale de la base $(u_{1,0}, u_{2,0})$ définie dans les notations. Les flèches d^0 et d^1 sont alors

$$\begin{gathered}
d^0(m) = u_{1,0} m \otimes u_{1,0}^* + u_{2,0} m \otimes u_{2,0}^* \\
d^1(m_1 \otimes u_{1,0}^* + m_2 \otimes u_{2,0}^*) = (u_{1,0} m_2 - u_{2,0} m_1) \otimes (u_{1,0} \wedge u_{2,0})^*.
\end{gathered} \tag{2.7.36}$$

À présent, pour ρ une représentation de $\mathfrak{l}_1$ de dimension finie, les $\mathfrak{l}_2$-modules $\mathfrak{m}_1(\rho)$ ne sont plus nécessairement semi-simples. Néanmoins, ce sont toujours des sommes directes de caractères de $\mathfrak{t}$, avec multiplicitées finies. Les caractères des C^i et des $H^i(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\rho))$ ont toujours un sens.

Proposition 2.7.10. — *Soit ρ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{l}_1$ de plus haut poids λ. Alors*

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^j ch(H^j(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\rho))) = (\lambda - s_1 * \lambda) ch(U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2)). \tag{2.7.37}$$

Démonstration. — Comme précédemment, il faut déterminer la somme alternée des caractères du complexe

$$\Lambda^2 \mathfrak{n}_2^+ \otimes U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \rho \to \mathfrak{n}_2^+ \otimes U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \rho \to U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \rho. \tag{2.7.38}$$

En utilisant la décomposition $\mathfrak{t}$-équivariante $U(\mathfrak{n}_1^+) \simeq U(Ku_{0,2}) \otimes U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2)$, on remarque que le caractère recherché est $ch(\rho)ch(U(Ku_{0,1}))^{-1}ch(U(Ku_{1,2}))$, c'est à dire

$$ch(\rho \otimes U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2)) - ch(\rho \otimes U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2) \otimes u_{0,1}) = (\lambda - s_1 * \lambda) ch(U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2)). \tag{2.7.39}$$

□

Supposons que $\rho = L_1(\mu)$ avec $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ dominant relativement à $-\alpha_1$. Reprenons $(v_{n,m,k})$ la base de $\mathfrak{m}_1(\mu)$ considérée précédemment.

Un calcul explicite donne alors

$$u_{1,0} \cdot v_{n,m,k} = v_{n,m,k-1} + n v_{n-1,m+1,k} \tag{2.7.40}$$
$$u_{2,0} \cdot v_{n,m,k} = -m v_{n,m-1,k-1} - n(n+m-1+\mu_0-\mu_2+k) v_{n-1,m,k}. \tag{2.7.41}$$

Remarquons déjà que l'on a une injection $\mathfrak{l}_2$-équivariante

$$U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mu \subset H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\mu)) \tag{2.7.42}$$

pour tout μ, poids dominant relativement à $-\alpha_1$. L'intersection de l'image de ce morphisme avec $\mathfrak{m}_1(\mu)$ est engendrée par le vecteur $v_{0,r,0}$. De plus, on a vu dans la preuve du lemme 2.7.8 que si $\mu = s_2 s_1 * \lambda$, on a $r - 1 + \mu_0 - \mu_2 + k \neq 0$ pour tout $0 \leq k \leq \mu_1 - \mu_0$ et $r \geq 0$. Ainsi $u_{2,0}$ induit une surjection $\mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)_r \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)_{r-1}$ et le noyau de la restriction de $u_{2,0}$ à $\mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)$ est de dimension 1. Ainsi $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = 0$ et $H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda)$ d'après le lemme 2.7.6. Dans le cas général, $r - 1 + \mu_0 - \mu_2 + k = 0$ si $k = \mu_0 - \mu_2 - (r-1)$. Ainsi, pour r assez grand, $u_{2,0}$ est une application surjective de $\mathfrak{m}_1(\mu)_r$ sur $\mathfrak{m}_1(\mu)_{r-1}$. Donc $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\mu))$ est toujours de dimension finie.

Proposition 2.7.11. — *Soit λ un poids dominant (pour $-\Delta$). On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_2$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda)) =& U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \lambda & H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) =& U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 * \lambda) \\
&& &\oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda) \\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda)) =& U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_1 * \lambda) & H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) =& U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_1 s_2 * \lambda) \\
&\oplus L_2(s_1 s_2 * \lambda) & &\oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda) \\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda)) =& L_2(s_1 s_2 * \lambda) & H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) =& 0 \\
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) =& U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda) \\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) =& U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_1 s_2 s_1 * \lambda) \\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) =& 0
\end{aligned} \tag{2.7.43}$$

Démonstration. — Nous avons déjà vu que $H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda)$ et que $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = 0$. On déduit alors $H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda))$ de la proposition 2.7.10. Les suites exactes (2.7.30) montrent alors que l'on a une injection $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} s_2 * \lambda \hookrightarrow H^0(\mathfrak{n}_2, L(s_2 * \lambda))$. D'après le lemme 2.7.6, cette injection est un isomorphisme. Comme $H^0(\mathfrak{n}_2, L(\lambda)) = L_2(\lambda)$ d'après le théorème 2.4.10, l'injection de $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \lambda$ dans $H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda))$ est un isomorphisme. De plus l'injection de $\mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)$ dans $\mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)$ induit une injection de $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda)$ dans $H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda))$. Comme $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda)$ et $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 * \lambda)$ sont deux $U(\mathfrak{l}_2)$-modules simples non isomorphes, on a, à semi-simplification près,

$$H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) = U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 * \lambda) \oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda). \tag{2.7.44}$$

Comme $H^2(\mathfrak{n}_2, L(s_2 s_1 * \lambda)) = 0$, on a un isomorphisme $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) \simeq H^2(\mathfrak{n}_2, L(s_2 * \lambda))$. L'espace $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda))$ étant de dimension finie, c'est une somme directe de $U(\mathfrak{l}_2)$-modules simples. Il est donc uniquement déterminé par les $\mathfrak{t}$-modules $H^1(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_2, H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)))$. Par la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie d'algèbres de Lie, il s'agit aussi de $H^3(\mathfrak{n}, L(s_2 * \lambda))$. Or on a déjà vu, (2.7.34), que $H^3(\mathfrak{n}, L(s_2 * \lambda)) = 0$. Ainsi $H^2(\mathfrak{n}_2, L(s_2 * \lambda)) = 0$. La proposition 2.7.10 nous permet alors de déterminer $H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda))$, et donc $H^2(\mathfrak{n}_2, L(s_2 * \lambda))$. Les suites exactes (2.7.30) et le théorème 2.4.10 nous permettent alors de déterminer $H^q(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda))$ pour $q \in \{1, 2\}$. □

Reprenons les notations du corps de l'article, c'est-à-dire λ un poids dominant pour Δ. Dans ce cas $-\lambda$ est dominant pour $-\Delta$, et pour $w \in W$, on a $-(w \cdot \lambda) = w*(-\lambda)$, donc $F'_{w\cdot\lambda} \simeq L(w*(-\lambda))$ et $F'_{w\cdot\lambda,i} \simeq L_i(w * (-\lambda))$. On peut donc reformuler les résultats de cet appendice sous la forme suivante, qui est celle sous laquelle ils sont utilisés dans le corps de l'article.

Proposition 2.7.12. — *Soit λ un poids dominant relativement à la base de racines simples Δ. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_1$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{\lambda,1} \oplus F'_{s_2\cdot\lambda,1} & H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda})) &= F'_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} \\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} & H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} \\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} & H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= 0 \\
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} \\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= 0 \\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.45}$$

Proposition 2.7.13. — *Soit λ un poids dominant. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_2$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-\lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_1 \cdot \lambda) \oplus F'_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2}\\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2}\\
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_2 \cdot \lambda) \oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_2 s_1 \cdot \lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_1 s_2 \cdot \lambda) \oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_2 s_1 \cdot \lambda)\\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= 0\\
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_2 s_1 \cdot \lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_1 s_2 s_1 \cdot \lambda)\\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.46}$$

2.7.3. Appendice 3. — Le but de cet appendice est de prouver un résultat technique utilisé dans la preuve du lemme 2.6.15. Soit λ un poids dominant de $\mathrm{GL}_{3,\mathbb{Q}_p}$ et $\lambda(1) = s_1 \cdot (-w_0\lambda)$. Le poids $\lambda(1)$ est alors dominant relativement à α_2. On peut donc parler de ρ la représentation algébrique irréductible de P_2 de plus haut poids $\lambda(1)$. Notons $\mathcal{F}_\rho$ le faisceau G-équivariant sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p} \simeq G/P_2$ défini dans la section 2.6.2. On note U l'ouvert affine $N_1 w_0 P_2/P_2$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$. L'espace des sections algébriques de $\mathcal{F}_\rho$ au dessus de U est un K-espace vectoriel M muni d'actions compatibles de $U(\mathfrak{g})$ et P_1. Il est isomorphe à $K[U] \otimes_K \rho^{w_0}$ en tant que P_2-module. Notre but est de montrer qu'il n'existe pas d'extension de $U(\mathfrak{g})$-modules de M par le $U(\mathfrak{g})$-module de dimension finie $F_{-w_0\lambda}$.

On fixe un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}_p} & \xrightarrow{\sim} & U \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & -y & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.7.47}$$

Les actions de N_1 et de L_1 sur M sont alors, dans ces coordonnées

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \cdot f(x,y) = f(x+a, y+b), \quad \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \det^{-1}(M) \end{pmatrix} \cdot f(x,y) = \rho(\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \det^{-1}(M) \end{pmatrix})(f((x,y)M^{-1}\det(M)^2)) \tag{2.7.48}$$

Soit $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$ la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules de type fini, dont la restriction à $U(\mathfrak{l}_1)$ est somme directe de $U(\mathfrak{l}_1)$-modules simples de dimension finie, apparaissant avec multiplicité finie, et dont tout vecteur est $\mathfrak{n}_1$-fini. Tout d'abord le $U(\mathfrak{g})$-module M est un objet de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$. La formule (2.7.48) montre que $\mathfrak{n}_1$ agit par dérivations sur M et donc que pour tout $m \in M$, $U(\mathfrak{n}_1)m$ est de dimension finie. De plus, l'action de P_1 est algébrique sur M, donc l'action de L_1 aussi. Ainsi M est une somme directe de représentations algébriques irréductibles de dimension finie de $U(\mathfrak{l}_1)$. Enfin, le fait que M soit un $U(\mathfrak{g})$-module de type fini est une conséquence de la suite exacte 1.8 et du lemme 1.2.1 de [**72**]. Le module M est un objet de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$, donc aussi de la catégorie $\mathcal{O}$. Supposons à présent que l'on ait une suite exacte de $U(\mathfrak{g})$-modules

$$0 \to F_\lambda \to \tilde{M} \to M \to 0. \tag{2.7.49}$$

Comme F_λ est de dimension finie, c'est un objet de la catégorie $\mathcal{O}$, et il en est de même de $\tilde{M}$. Nous allons prouver que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M, F_{-w_0\lambda}) = 0$, et donc que $\tilde{M} \simeq M \oplus F_{-w_0\lambda}$ en tant que $U(\mathfrak{g})$-modules. Encore une fois, il est plus agréable de renverser l'ordre sur les racines, et de considérer $-\Delta$ comme base de racines positives. Reprenons les notations de l'appendice 2 et notons $L(\mu)$ le $U(\mathfrak{g})$-module simple de plus haut poids μ. On a ainsi, $F_{-w_0\lambda} = L(-\lambda)$.

Remarquons que le sous-espace des fonctions constantes est stable par P_1 et isomorphe à $F_{s_2 s_1 \lambda(1),1} = L_1(s_2 * (-\lambda))$. L'inclusion $\mathfrak{p}_1$-équivariante de $L_1(s_2 * (-\lambda))$ dans M induit une application non triviale

$$\mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) \to M \tag{2.7.50}$$

Cette application n'est pas injective. Dans le cas contraire, on aurait une injection $H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) \hookrightarrow H^0(\mathfrak{n}_1, D_{\lambda(1)})$. C'est impossible d'après les propositions 2.7.9 et 2.6.3. Comme le $U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)$ est de longueur 2 d'après la décomposition 2.2.56, l'image de l'application (2.7.50) est donc le module de plus haut poids $L(s_2 * (-\lambda))$. De plus, comme pour tout poids μ de $\mathfrak{t}$, la composante μ-isotypique de M à même dimension que celle de $\mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda))$, cette inclusion est stricte. Soit $(\cdot)^\vee$ le foncteur de dualité défini sur la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$ (§3. et proposition 9.3(b) de [**54**]). D'après le théorème 3.2 de [**54**], le foncteur $(\cdot)^\vee$ est exact et $L(s_2 * (-\lambda))^\vee \simeq L(s_2 * (-\lambda))$. On obtient donc une surjection $M^\vee \twoheadrightarrow L(s_2 * (-\lambda))$. Comme $H^0(\mathfrak{n}_1, M)$ est un $U(\mathfrak{p}_1)$-module simple, M est indécomposable, et donc en désignant par $P(\lambda(1))$ l'enveloppe projective de $L(s_2 * (-\lambda))$ dans la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$, on a une surjection $P(s_2 * (-\lambda)) \twoheadrightarrow M^\vee$. En appliquant le théorème 9.8 de [**54**] à $P(s_2 * (-\lambda))$, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{m}_1(-\lambda) \to P(s_2 * (-\lambda)) \to \mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) \to 0. \tag{2.7.51}$$

À présent, comme $M^\vee$ ne contient pas le poids $-\lambda$, $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(\mathfrak{m}_1(-\lambda), M^\vee) = 0$, donc l'application (2.7.51) se factorise à travers $\mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda))$. Comme l'inclusion $L(s_2 * (-\lambda)) \hookrightarrow M$ est stricte, l'application (2.7.51) se factorise en un isomorphisme $\mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) \simeq M^\vee$. On a également, d'après le théorème 3.3 de [**54**], que le $U(\mathfrak{g})$-module $L(-\lambda)$ est isomorphe à son dual dans la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$. Comme $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{O}$, pour prouver que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}}(M, L(-\lambda)) = 0$, il suffit de prouver $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(L(-\lambda), \mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) = 0$. D'après le théorème 9.4(b) de [**54**], on a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{m}(s_1 s_2 * (-\lambda)) \to \mathfrak{m}(s_2 * (-\lambda)) \to \mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) \to 0. \tag{2.7.52}$$

D'après le théorème 6.2 de [**54**], on a une résolution de $L(-\lambda)$ de la forme

$$\cdots \to D_m^{-\lambda} \cdots D_1^{-\lambda} \to D_0^{-\lambda} \to L(-\lambda) \to 0 \tag{2.7.53}$$

où $D_m^{-\lambda}$ est une somme directe de modules de Verma $\mathfrak{m}(w * (-\lambda))$ avec w de longueur m. D'après le théorème 6.5(b) de [**54**], on a $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(D_1^{-\lambda}, \mathfrak{m}(s_2 * (-\lambda)) = \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(D_0^{-\lambda}, \mathfrak{m}(s_1 s_2 * (-\lambda)) = 0$ pour q égal à 0 et ou 1, ce qui permet de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. André – « Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique », *Invent. Math.* **148** (2002), no. 2, p. 285–317.

[2] L. Barthel & R. Livné – « Irreducible modular representations of GL_2 of a local field », *Duke Math. J.* **75** (1994), no. 2, p. 261–292.

[3] L. Berger – « Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2 », à paraître à Astérisque.

[4] ———, « Equations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés », *Astérisque* **319** (2008), p. 13–38.

[5] L. Berger & C. Breuil – « Représentations cristallines irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », disponible sur http ://www.ihes.fr/~breuil, 2004.

[6] L. Berger – « Représentations p-adiques et équations différentielles », *Invent. Math.* **148** (2002), no. 2, p. 219–284.

[7] I. N. Bernstein & A. V. Zelevinsky – « Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977), no. 4, p. 441–472.

[8] S. J. Bloch – *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*, CRM Monograph Series, vol. 11, American Mathematical Society, 2000.

[9] A. Borel – « Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **4** (1977), no. 4, p. 613–636.

[10] A. Borel & N. R. Wallach – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 94, Princeton University Press, 1980.

[11] N. Bourbaki – *Topologie générale. chapitre* 9., Hermann, Paris, 1974.

[12] C. Breuil – « Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée », disponible sur http ://www.ihes.fr/~breuil, 2003.

[13] ———, « Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$. I. », *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[14] ———, « Invariant $\mathcal{L}$ et série spéciale p-adique », *Ann. Scient. de l'E.N.S.* **37** (2004), p. 559–610.

[15] C. Breuil & M. Emerton – « Représentations ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global », à paraître à Astérisque, 2005.

[16] C. Breuil & A. Mézard – « Représentations semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$, demi-plan p-adique et réduction modulo p », à paraître à Astérisque.

[17] C. Breuil & V. Paskunas – « Toward a modulo p Langlands correspondence for GL_2 », prépublication IHES.

[18] C. Breuil – « Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II », *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), no. 1, p. 23–58.

[19] C. Breuil & P. Schneider – « First steps towards p-adic Langlands functoriality », *J. Reine Angew. Math.* **610** (2007), p. 149–180.

[20] C. J. Bushnell & G. Henniart – *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[21] H. Carayol – « Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de hilbert », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **19** (1986), p. 409–468.

[22] H. Carayol – « Nonabelian Lubin-Tate theory », Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990, p. 15–39.

[23] W. Casselman & D. Wigner – « Continuous cohomology and a conjecture of serre », *Invent. Math.* **25** (1974), p. 199–211.

[24] R. Coleman & A. Iovita – « Hidden structures on semistable curves », à paraître à Astérisque.

[25] R. F. Coleman – « Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions », *Invent. Math.* **69** (1982), no. 2, p. 171–208.

[26] P. Colmez – « Espaces de Banach de dimension finie », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), no. 1, p. 331–439.

[27] ———, « Invariants $\mathcal{L}$ et dérivées de valeurs propres de frobenius », (2003).

[28] ———, « Série principale unitaire pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2 », à paraître à Astérisque, 2004.

[29] ———, « Une correspondance de Langlands p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2 », à paraître à Astérisque, 2004.

[30] ———, « Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de rham », *Astérisque* **319** (2008), p. 117–186.

[31] ———, « Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules », Prépublication, 2008.

[32] P. Colmez & J.-M. Fontaine – « Construction des représentations p-adiques semi-stables », *Invent. Math.* **140** (2000), no. 1, p. 1–43.

[33] J.-F. Dat – « Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques », *Invent. Math.* **169** (2007), no. 1, p. 75–152.

[34] J. F. Dat – « Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), p. 1–74.

[35] P. Deligne – « Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L », Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), Springer, Berlin, 1973, p. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[36] J. Dixmier – *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars Éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXVII.

[37] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann & D. Segal – *Analytic pro-p-groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 157, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[38] V. G. Drinfel′d – « Coverings of p-adic symmetric domains », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **10** (1976), no. 2, p. 29–40.

[39] M. Emerton – « On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms », disponible sur http ://www.math.northwestern.edu/˜emerton/preprints.html, 2005.

[40] M. Emerton – « Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups », (2004), A paraître à Memoir of the AMS.

[41] ———, « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), no. 5, p. 775–839.

[42] ———, « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction », (2007), A paraître à J. Inst. Math. de Jussieu.

[43] J.-M. Fontaine – « Le corps des périodes p-adiques », *Astérisque* **223** (1994).

[44] ———, « Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables », *Astérisque* **223** (1994).

[45] ———, « Représentations p-adiques semi-stables », *Astérisque* **223** (1994).

[46] H. Frommer – « The locally analytic principal series of split reductive groups », prépublication.

[47] S. Gelbart – *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Mathematic Studies, Princeton University Press, 1975.

[48] E. Grosse-Klönne – « On the p-adic cohomology of some p-adically uniformized varieties ».

[49] ______, « Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfel′d's symmetric space », *J. Algebraic Geom.* **14** (2005), no. 3, p. 391–437.

[50] M. Harris & R. Taylor – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[51] G. Henniart – « Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique », *Invent. Math.* **139** (2000), no. 2, p. 439–455.

[52] J. E. Humphreys – *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, 1975, Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[53] ______, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, 1978, Second printing, revised.

[54] ______, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[55] A. Iovita & M. Spiess – « Logarithmic differential forms on p-adic symmetric spaces », *Duke Math. J.* **110** (2001), no. 2, p. 253–278.

[56] T. Ito – « Weight-monodromy conjecture for p-adically uniformized varieties », *Invent. Math.* **159** (2005), no. 3, p. 607–656.

[57] J. C. Jantzen – *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 131, Academic Press Inc., 1987.

[58] K. S. Kedlaya – « A p-adic local monodromy theorem », *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), no. 1, p. 93–184.

[59] B. Keller – « Derived categories and their uses », Handbook of algebra, Vol. 1, North-Holland, 1996, p. 671–701.

[60] M. Kisin & M. Strauch – « Locally analytic cuspidal representations for GL_2 and related groups », *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (2006), no. 3, p. 373–421.

[61] A. W. Knapp – *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, Mathematical Notes, vol. 34, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.

[62] ______, *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, 2001, An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[63] J. Kohlhaase – « The cohomology of locally analytic representations », prépublication.

[64] ______, « Invariant distributions on p-adic analytic groups. », *Duke Math. J.* **137** (2007), no. 1, p. 19–62.

[65] J.-L. Koszul – « Homologie et cohomologie des algèbres de Lie », *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), p. 65–127.

[66] C. T. Féaux de Lacroix – « Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p-adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p-adischen Körper », Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster. 3. Serie, Heft 23, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster 3. Ser., vol. 23, Univ. Münster, 1999, p. x+111.

[67] B. Mazur, J. Tate & J. Teitelbaum – « On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer », *Invent. Math.* **84** (1986), no. 1, p. 1–48.

[68] Z. Mebkhout – « Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique », *Invent. Math.* **148** (2002), no. 2, p. 319–351.

[69] C. C. Moore – « Group extensions and cohomology for locally compact groups. III », *Trans. Amer. Math. Soc.* **221** (1976), no. 1, p. 1–33.

[70] S. Orlik & M. Strauch – « On the irreducibility of locally analytic principal series representations. », prépublication, 2006.

[71] S. Orlik – « On extensions of generalized Steinberg representations », *J. Algebra* **293** (2005), no. 2, p. 611–630.

[72] ———, « Equivariant vector bundles on Drinfeld's upper half space », *Invent. Math.* **172** (2008), no. 3, p. 585–656.

[73] D. Prasad – « Locally algebraic representations of p-adic groups », *Representation theory* **5** (2001), Appendix to $U(g)$*-finite locally analytic representations.*

[74] T. Saito – « Modular Forms and p-adic Hodge Theory », *Inventiones mathematicae* **129** (1997), p. 607–620.

[75] T. Schmidt – « Auslander regularity of p-adic distribution algebras », *Represent. Theory* **12** (2008), p. 37–57.

[76] ———, « Analytic vectors in continuous p-adic representations », *Compos. Math.* **145** (2009), no. 1, p. 247–270.

[77] P. Schneider – « The cohomology of local systems on p-adically uniformized varieties. », *Math. Ann.* **293** (1992), p. 623–650.

[78] ———, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2002.

[79] P. Schneider & U. Stuhler – « The cohomology of p-adic symmetric spaces », *Invent. Math.* **105** (1991), p. 44–122.

[80] P. Schneider & J. Teitelbaum – « p-adic Fourier theory », *Doc. Math.* **6** (2001), p. 447–481 (electronic).

[81] P. Schneider & J. Teitelbaum – « $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations », *Represent. Theory* **5** (2001), p. 111–128.

[82] ______, « Banach space representations and Iwasawa theory », *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[83] ______, « Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with application to GL_2. », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 443–468.

[84] ______, « p-adic boundary values », *Astérisque* **278** (2002), p. 51–125.

[85] ______, « Algebras of p-adic distributions and admissible representations. », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

[86] P. Schneider & J. Teitelbaum – « Duality for admissible locally analytic representations », *Represent. Theory* **9** (2005), p. 297–326 (electronic).

[87] B. Schraen – « Reprśentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(l)$ et catégories dérivées », disponible sur http ://www.dma.ens.fr/ ˜schraen/.

[88] E. de Shalit – « The p-adic monodromy-weight conjecture for p-adically uniformized varieties », *Compos. Math.* **141** (2005), no. 1, p. 101–120.

[89] M.-F. Vignéras – « La conjecture de Langlands locale pour $\mathrm{GL}(n, F)$ modulo l quand $l \neq p$, $l > n$ », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **34** (2001), no. 6, p. 789–816.

[90] C. A. Weibel – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, 1994.

[91] N. Yoneda – « On Ext and exact sequences », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **8** (1960), p. 507–576 (1960).