Contribution à l'étude des opérateurs dans des espaces de suites et applications à l'optimisation et aux systèmes différentiels

Ali Fares

Université du Havre **Ecole doctorale SPMII**

N° attribué par la bibliothèque

Contribution à l'étude des opérateurs dans des espaces de suites et applications à l'optimisation et aux systèmes différentiels

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 23 juin 2009 pour l'obtention du

Doctorat de l'Université du Havre

(Spécialité : Mathématiques Appliquées)

par

Ali FARES

Composition du jury

Jean-Pierre TROALLIC, Professeur, Université du Havre (France), Président
Eberhard MALKOWSKY, Professeur, Université de Giessen (Allemagne), Rapporteur
Vladimir RAKOCEVIC, Professeur, Université de Niš (Serbie), Rapporteur
Adnan YASSINE, Professeur, Université du Havre, Examinateur
Henri MASCART, Professeur honoraire, Université de Paul Sabatier, Toulouse III (France), examinateur
Bruno de MALAFOSSE, MCF HDR, Université du Havre, Directeur de thèse.

....

Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre - EA 3821

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout mon directeur de thèse Monsieur Bruno de Malafosse, pour m'avoir guidé avec patience tout au long de ces trois années et pour m'avoir permis de mener à bien cette thèse.

Je suis très reconnaissant à Messieurs les Professeurs Eberhard Malkowsky et Vladimir Rakočević d'avoir accepté d'être rapporteurs.

Je remercie infiniment Messieurs les Professeurs Jean-Pierre Troallic, Henri Mascart et Adnan Yassine d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens aussi à exprimer mes chaleureux remerciements envers tous les membres du Laboratoire des Mathématiques Appliquées du Havre (LMAH) et à tous ceux qui m'ont soutenu tout au long de cette période.

Enfin, un grand merci à ma famille et à mes amis qui m'ont supporté et qui m'ont encouragé tout au long de cette thèse.

Table des matières

PRELIMINAIRES

Dans ce travail on étudie des opérateurs répresentés par des matrices infinies et considérés comme des applications d'un espace de suite dans un autre. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la théorie des matrices infinies, citons S. Toeplitz [71] qui a donné la caractérisation des opérateurs de c dans c, Hausdorff [68], Hardy [56], R. Cooke [12]. Ce dernier a rassemblé des résultats sur les matrices infinies et les espaces de suites dans son ouvrage *Infinite matrices and sequence spaces* publié en 1950. Citons également Littlewood, Cesàro, Hölder, Euler, Köthe, G. Pólya et S. Banach. Ce dernier a étudié entre autre des propriétés des solutions de systèmes infinis dans son fameux livre *Théorie des opérations linéaires* en 1932.
Complétons la liste des mathématiciens qui ont étudié ce sujet plus récemment avec Maddox 1973 [77], Wilansky 1984 [102], J.B. Reade [100], Petersen [97, 98], Defransa et Zeller [13], P.N. Shivakumar et R. Yong [8]. Actuellement et dans le prolongement des recherches précédentes citons Malkowsky [79, 78, 84] pour ses résultats sur les matrices de transformations et les opérateurs compacts, D.V. Giang et F. Móricz [63], B. E. Roades [94], Mursaleen [95], H. Mascart [86, 88], B. de Malafosse [17], V. Rakočević [56], R. Labbas [73], C. Çakan et B. Altay [9], Et et Çolak [59, 60], Başar [1, 4], J. Boss, Connor, Fridy, ...etc.
En 1911 Toeplitz a étudié des opérateurs representés par des matrices infinies dont les termes sont égaux le long des diagonales et a caractérisé leur spectre. En 1937, J.B Reade [100] et J.T. Okutoyi [96] ont donné des résultats sur le spectre de l'opérateur de Cesàro considéré comme une application de l'espace des suites à variations bornées bv dans lui-même. Rappelons que bv est l'espace des suites convergentes $x = (x_n)_{n\geq 1}$ tel que $\sum n\,|x_{n+1} - x_n| < \infty$. B. de Malafosse a défini l'espace s_r des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que $\sup\limits_n (|x_n|/r^n) < \infty$, puis a étudié le spectre de l'opérateur de Cesàro considéré comme une application de l'espace de Banach s_r dans lui-même. Cet espace est apparu dans plusieurs travaux, voir R. Labbas et B. de Malafosse [73, 74] ou [16]. Les matrices de transformations ont été étudiées par plusieurs chercheurs, tels que L.W. Cohen et N. Dunford en 1937. Ceux-ci ont donné des caractérisations des matrices de transformations de

ℓ_1 dans ℓ_p, de ℓ_p dans c_0 et de ℓ_p dans ℓ_1, voir [10].
Une trés importante classe de matrices de transformations est donnée par Hausdorff (1868 -1942) [69] qui a défini la matrice $H = H(\mu)$, appelée *matrice d'Hausdorff* associée à la suite $\mu = (\mu_n)_{n\geq 0}$ où $\mu_n \in \mathbb{C}$, de la manière suivante : considérons la matrice diagonale $D_\mu = (d_{nm})_{n,m\geq 0}$ telle que $d_{nn} = \mu_n$ pour tout n et la matrice $M = (a_{nm})_{n,m\geq 0}$ telle que $a_{nm} = (-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ où les nombres $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ sont les coefficients binomiaux. On écrit alors $H = H(\mu) = MDM = (h_{nm})_{n,m\geq 0}$ où

$$h_{nm} = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j+k} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}.$$

La matrice d'Hausdorff généralise celles de Cesàro, Hölder et Euler. D'une part, la matrice de Cesàro d'ordre α, $\alpha > -1$, est une matrice d'Hausdorff associée à la suite μ où $\mu_n = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 0$. En particulier, dans le cas où $\alpha = 1$ on obtient la matrice de Cesàro d'ordre 1, notée $C_1 = D_{(1/n)_n}\Sigma$ où $D_{(1/n)_n}$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux à $1/n$ et Σ est le triangle dont les éléments non nuls sont égaux à 1. On a ainsi

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \mathbf{0} & \\ . & . & . & & \\ \frac{1}{n} & . & . & \frac{1}{n} & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on obtient la matrice de Hölder H^α avec $\alpha > -1$ à partir de celle d'Hausdorff dans le cas où $\mu_n = (n+1)^{-\alpha}$ pour tout $n \geq 0$. Notons que la matrice de Hölder n'a pas une forme explicite. De même, dans le cas où $\mu_n = (q+1)^{-n}$, $q > 0$ et $n \geq 0$, on obtient la matrice d'Euler, notée E_q et définie par $(E_q)_{n,m} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} q^{n-m}/(q+1)^n$. Lorsque $q = (q_n)_{n\geq 0}$ et $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \neq 0$ pour tout n, on obtient la matrice de Nörlund (N, q) définie par $(N, q)_{n,m} = q_{n-m}/Q_n$. En 1920 Hardy a défini les séries C_1-sommable de la manière suivante : on dit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{1}$$

est C_1-sommable si la suite $(1/n \sum_{k=1}^{n} s_k)_{n\geq 1}$ est convergente où $s_k = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Hardy a montré que la série (1) est C_1-sommable si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x_k/k$ est convergente. Cette notion a été généralisée par B. E. Rhoades et F. Móricz en 1998 au cas où C_1 est remplacée par $\overline{N}_q = D_{1/Q}\Sigma D_q$.

En 2006 B. de Malafosse et V. Rakočević ont étudié ce résultat lorsque C_1 est remplacée par $C(\lambda) D_{1/\mu} = D_{1/\lambda}\Sigma D_{1/\mu}$, ce qui donne une caractérisation de la (C, λ, μ)-sommabilité de la série (1), voir [56].
Citons le résultat Hardy Taubérien suivant : lorsque $C_1 X$ tend vers ℓ et $n\Delta x_n = O(1)$ alors x_n tend vers ℓ où Δ est la matrice infinie de différence d'ordre un définie par $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Plus récemment, ce résultat a été étendu au cas où C_1 est remplacée par $\overline{N}_q$ [44].
Dans ce travail on s'intéresse aux opérateurs linéaires considérés comme des applications d'un espace de suites dans un autre. On est ainsi conduit à l'étude de systèmes linéaires infinis ayant une infinité dénombrable d'équations et une infinité dénombrable d'inconnues et à la notion de matrice infinie. Dans ce qui suit nous allons développer les points suivants. Au Chapitre I, on définit des espaces de suites classiques ainsi que des espaces de type BK et de type AK introduits par Wilansky [102]. On considère des opérateurs représentés par des matrices infinies et considérés comme des applications dans des espaces de suites, puis on en donne des propriétés. De tels opérateurs sont appelés des matrices de transformations. Une matrice $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ est dite matrice de transformation de E vers F où E et F sont deux sous espaces de s si les deux conditions suivantes sont vérifiées : Les séries définies par

$$A_n(X) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$$

sont convergentes pour tout $X = (x_n)_{n\geq 1} \in E$ et pour tout n, et la suite de terme général $A_n(X)$ appartient à F. Dans ce cas, on note $A \in (E, F)$. On en donnera ici des illustrations et des exemples. Les problèmes de convergence des séries associées à de telles matrices conduisent à l'étude de la notion de $\alpha-$ *et de* $\beta-$*dual.* Ensuite, nous explicitons le lien entre les *opérateurs linéaires bornés* et les *matrices de transformations,* ainsi que la relation entre les *matrices de Toeplitz* et les séries entières. Enfin on donne des caractérisations de certains opérateurs remarquables dans $(\ell_\infty, \ell_\infty)$, (c_0, c_0) et (c, c).
Au Chapitre II, on étudie des opérateurs définis à partir de l'opérateur Δ de différence d'ordre un et de l'opérateur de Cesàro C_1. On s'intéresse à la résolution des équations $\Delta(\lambda) X = B$ et $C(\lambda) X = B$ où $\lambda \in U$, ainsi qu'à la résolution des équations ${}^t\Delta(\lambda) X = B$ et ${}^tC(\lambda) X = B$ où B appartient à l'un des espaces ℓ_∞, c_0, c, ou l_p.
Au Chapitre III, on explicite une sous algèbre de l'algèbre $\mathcal{B}(\ell_\infty)$ des opérateurs bornés dans ℓ_∞. Dans cette dernière algèbre un opérateur L n'a pas forcément une représentation sous forme de matrice infinie. On s'intéresse donc à l'espace $S_1 = (\ell_\infty, \ell_\infty)$ inclus dans l'espace $\mathcal{B}(\ell_\infty)$ en vue de résoudre dans ℓ_∞ l'équation $AX = B$ où $B \in \ell_\infty$, l'algèbre de Banach S_1 permet de déterminer si une matrice est inversible et de résoudre un système linéaire infini représenté par $AX = B$ lorsque B est borné et $A \in S_1$. Ensuite on définit l'algèbre de Banach S_α qui

généralise S_1 où α appartient à l'ensemble U^+ des suites à termes positifs. Puis on donne des propriétés de la matrice de Toeplitz dans $S_r = S_{(r^n)_n}$ afin de résoudre l'équation matricielle $AX = B$ où $A \in S_r$. Notons que les termes (a_{nm}) d'une matrice de Toeplitz sont égaux le long des diagonales d'équation $m = n+k$ où k est entier.
Au Chapitre IV, on résout des systèmes différentiels linéaires infinis à l'aide de la transformée de Laplace. On étudie des équations de la forme $X'(t) = TX(t) + B$, où T est un triangle et B est une suite donnée. On considère ici les cas où T est l'une de matrices $\Delta(\lambda) = \Delta D_\lambda$, $C(\lambda) = D_{1/\lambda}\Sigma$, ou la matrice de moyenne pondérée $\overline{N}_q$.
Ensuite aux Chapitres V et VI, on présente successivement deux articles de A. Fares et B. de Malafosse [61, 62] où on introduit les espaces s_α, s_α^0, $s_\alpha^{(c)}$ et $l_p(\alpha)$, $\alpha \in U^+$.
Dans le Chapitre V, on résout des équations d'espaces de suites (EES), sequence space equations (SSE) en anglais, qui sont déterminées par une identité dont chaque terme est une somme ou un produit d'ensembles de suites de type s_α et $s_{f(x)}$, où f est une application de U^+ dans lui-même avec $f(x_n) = (f(x))_n$ pour tout $n \geq 1$ et où x est la suite inconnue. La résolution de telles équations revient à déterminer l'ensemble de toutes les suites x qui satisfont l'équation. Dans la plupart des cas cet ensemble est une classe d'équivalence.
Dans le Chapitre VI, on étudie le spectre de l'opérateur de différence d'ordre 1 considéré comme une application de E dans lui-même, où E est l'un des ensembles s_α, s_α^0, $s_\alpha^{(c)}$, ou $\ell_p(\alpha)$ $(1 \leq p < \infty)$. Puis on applique ces résultats à la caractérisation des matrices de transformations considérées comme opérateurs dans $s_\alpha^0\left((\Delta - \lambda I)^h\right)$ et $\ell_p(\alpha)\left((\Delta - \lambda I)^N\right)$, $h \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$.

Enfin, dans le Chapitre VII on propose une application directe de la théorie des matrices infinies à l'Optimisation où on présente des résultats de B. de Malafosse et A. Yassine [57]. L'objet de ce travail est de déterminer le nombre de chemins comportant N arcs et reliant deux points quelconques du plan, en utilisant des matrices booléennes infinies de Toeplitz. On est ainsi conduit à calculer le produit M^N où M est une matrice de Toeplitz. Le nombre de chemins formés de N arcs est égal à l'entier $[M^N]_{nm}$ situé sur la n-ième ligne et la m-ième colonne de M^N. Etant amenés à faire des calculs avec des matrices infinies, il est naturel de se concentrer d'abord sur les matrices triangulaires de Toeplitz. On considère donc M comme un opérateur de s_r dans lui-même, où $s_r = (1/\alpha)^{-1} * l_\infty$ avec $\alpha_n = r^n$ pour tout n (cf. [88, 102]). Nous ferons des calculs dans l'ensemble $S_r = (s_r, s_r)$ de toutes les matrices qui sont des opérateurs de s_r dans lui-même. Nous considèrerons la matrice booléenne $B(i,j)$ dont les entrées non nulles sont situées sur les diagonales définies par $m - n = i$ ou $m - n = j$ et nous calculerons la matrice $B^N(i,j)$, afin d'obtenir le nombre de chemins ayant N arcs associé à $B(i,j)$. Nous étudierons chacun des cas $i < j \leq 0$ ou $0 \leq i < j$, où la matrice

$B^N(i,j)$ est de Toeplitz. Mais le problème est plus compliqué dans le cas où $i < 0 < j$, car ici $B^N(i,j)$ n'est plus une matrice triangulaire de Toeplitz. Enfin, une matrice booléenne infinie étant une application dans des espaces de suites, nous nous concentrons sur la caractérisation de l'ensemble $\left(c\left(B^N(i,0)\right), c\right)$.

Chapitre 1

Espaces de suites et matrices de transformations

Dans ce chapitre nous étudions des espaces de suites classiques ainsi que des espaces de *type BK et de type AK* introduits par Wilansky [102]. Puis on considère des opérateurs représentés par des matrices infinies et considérés comme des applications dans des espaces de suites. De tels opérateurs sont appelés des matrices de transformations. On en donnera ici quelques illustrations et exemples. Les problèmes de convergence des séries associées à de telles matrices conduisent à l'étude de la notion de *$\alpha-$ et de $\beta-$dual.* Ensuite nous explicitons le lien entre les *opérateurs linéaires bornés* et les *matrices de transformations,* ainsi que la relation entre les *matrices de Toeplitz* et les séries entières. Enfin on donne des caractérisations de certains opérateurs remarquables dans $(\ell_\infty,\ell_\infty)$ et (c, c).

1.1 Espaces de suites remarquables, espaces de type BK et de type AK

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés d'espaces de suites fondamentaux tels que ℓ_∞, c_0, c et ℓ_p. Ensuite nous définissons la notion *d'espaces de type BK et de type AK.*

1.1.1 Les espaces de suites classiques.

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés d'espaces de suites fondamentaux tels que ℓ_∞, c_0, c et ℓ_p. Ensuite nous définissons la notion *d'espaces de type BK et de type AK.*

Les espaces ℓ_∞, c_0 et c

Premières propriétés. Tout d'abord nous noterons s l'espace de toutes les suites $X = (x_n)_{n\geq 1}$ réelles ou complexes. L'ensemble s est un espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition

$$X + Y = (x_n + y_n)_{n\geq 1} = (x_n)_{n\geq 1} + (y_n)_{n\geq 1}$$

et de la loi

$$\lambda X = (\lambda x_n)_{n\geq 1} = \lambda (x_n)_{n\geq 1} \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

On utilisera dans la suite les sous espaces de s suivants :

$$\begin{aligned}
\ell_\infty &= \left\{ X = (x_n) \in s \ : \ \sup_n |x_n| < \infty \right\}, \\
c_0 &= \{X = (x_n) \in s \ : \ x_n \to 0 \ \ (n \to \infty)\}, \\
c &= \{X = (x_n) \in s \ : \ x_n \to l \ \ \ (n \to \infty) \ \text{ où } l \in \mathbb{C}\}.
\end{aligned}$$

On dit que ℓ_∞ est l'espace des suites bornées, c_0 est l'espace des suites convergeant vers zéro et c est l'espace de toutes les suites convergentes.

Théorème 1.1. *Les ensembles ℓ_∞, c_0 et c munis de la norme*

$$\|X\|_{\ell_\infty} = \sup_n |x_n|.$$

sont des espaces de Banach.

Preuve. Nous limiterons notre étude à l'espace ℓ_∞. Il est immédiat que ℓ_∞ est un espace vectoriel, car $\|\lambda X\|_{\ell_\infty} = |\lambda| \|X\|_{\ell_\infty}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$; et pour X et $Y \in \ell_\infty$ on a

$$|x_n + y_n| \leq \|X\|_{\ell_\infty} + \|Y\|_{\ell_\infty} \text{ pour tout } n, \tag{1.1}$$

d'où $X + Y \in \ell_\infty$. On voit aisément que $\|\|_{\ell_\infty}$ est une norme sur ℓ_∞. En effet soit $X \in \ell_\infty$. On a

$$\|X\|_{\ell_\infty} = 0 \Leftrightarrow \sup_n |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \text{ pour tout } n.$$

Donc $\|X\|_{\ell_\infty} = 0$ équivaut à $X = 0$. Soit λ un scalaire et $X \in \ell_\infty$. On a

$$\|\lambda X\|_{\ell_\infty} = \sup_n |\lambda x_n| = \sup_n |\lambda| |x_n| = |\lambda| \sup_n |x_n| = |\lambda| \|X\|_{\ell_\infty}.$$

L'inégalité $\|X + Y\|_{\ell_\infty} \leq \|X\|_{\ell_\infty} + \|Y\|_{\ell_\infty}$ se déduit immédiatement de (1.1). Considérons maintenant une suite de Cauchy $X^{(i)} = \left(x_n^{(i)}\right)_{n\geq 1}$ de ℓ_∞. Soient $\varepsilon > 0$ donné et N un entier. Soient i et $j \geq N$ tels que

$$\left\|X^{(i)} - X^{(j)}\right\|_{\ell_\infty} = \sup_n \left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| \leq \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

Pour chaque valeur de n, $\left(x_n^{(i)}\right)_i$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc convergente vers une limite x_n quand i tend vers l'infini. Posons $X = (x_n)_{n\geq 1}$. On a donc $\left|x_n - x_n^{(j)}\right| \leq \varepsilon$ pour tout n. Ceci revient à dire que

$$\lim_{i\to\infty} \left\|X^{(i)} - X^{(j)}\right\|_{\ell_\infty} = \left\|X - X^{(j)}\right\|_{\ell_\infty} \leq \varepsilon.$$

Enfin $X = X - X^{(j)} + X^{(j)} \in \ell_\infty$, ce qui prouve que ℓ_∞ est bien un espace vectoriel complet donc un espace de Banach. On obtient les mêmes résultats avec c_0 et c. ■

L'espace ℓ_p.

On considère ici un autre sous-espace de s défini pour $1 \leq p < \infty$ par

$$\ell_p = \left\{ X = (x_n)_{n\geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Rappelons quelques propriétés élémentaires de ℓ_p qui s'avèreront indispensables pour la suite.

Proposition 1.2. *Soit $1 \leq p < \infty$. On a*

i) ℓ_p est un sous espace vectoriel de s.

ii) ℓ_p muni de la norme

$$\|X\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

Preuve. i) On voit aisément que $\lambda X \in \ell_p$ lorsque $X \in \ell_p$ et λ est un scalaire. Soient maintenant $X, Y \in \ell_p$. D'après l'inégalité Minkowski on a pour tout entier donné N

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En faisant tendre N vers l'infini dans le second membre on déduit :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout N, en faisant tendre N vers l'infini on conclut que $\|X + Y\|_{\ell_p} \leq \|X\|_{\ell_p} + \|Y\|_{\ell_p}$ et $X + Y \in \ell_p$.

ii) Soit $X \in \ell_p$. On a $\|X\|_{\ell_p} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow x_n = 0$ pour tout $n \geq 1 \Leftrightarrow X = 0$. Soit maintenant λ un scalaire et $X \in \ell_p$. On a :

$$\|\lambda X\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|X\|_{\ell_p}.$$

L'inégalité triangulaire découle immédiatement de i). Montrons que ℓ_p est complet. Soit $X^{(i)} = \left(x_n^{(i)}\right)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de ℓ_p. Soient $\varepsilon > 0$ donné et i_0 un entier. Soient i et $j \geq i_0$ tels que

$$\left\|X^{(i)} - X^{(j)}\right\|_{\ell_p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right|^p \leq \varepsilon^p. \tag{1.2}$$

On a alors

$$\left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| \leq \varepsilon \text{ pour tout } n$$

et pour chaque valeur de n, $\left(x_n^{(i)}\right)_i$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc convergente vers une limite x_n quand i tend vers l'infini. Posons $X = (x_n)_{n\geq 1}$. On a donc $\left|x_n - x_n^{(j)}\right| \leq \varepsilon$ pour tout n. D'après (1.2) ceci revient à dire que pour tout N entier on a

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right|^p &= \sum_{n=1}^{N} \left|\lim_{i\to\infty} x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right|^p \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left|x_n - x_n^{(j)}\right|^p \leq \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini on déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n - x_n^{(j)}\right|^p \leq \varepsilon^p.$$

On a montré que

$$\lim_{i\to\infty} \left\|X^{(i)} - X^{(j)}\right\|_{\ell_p} = \left\|X - X^{(j)}\right\|_{\ell_p} \leq \varepsilon.$$

Enfin $X = X - X^{(j)} + X^{(j)} \in \ell_p$, ce qui prouve que ℓ_p est bien un espace vectoriel complet donc un espace de Banach. ∎

1.1.2 Bases de Schauder. Espaces de type BK et espaces de type AK.

L'intérêt de ce paragraphe réside essentiellement dans un résultat dû à Wilansky (cf.[102],[82]), qui dit que tout *opérateur d'un espace de type BK dans un autre espace de type BK, représenté par une matrice infinie est continu.*

Bases de Schauder.

Nous verrons que certains espaces de suites ont des *bases de Schauder* et nous appellerons espace de type AK certains espaces ayant des *bases de Schauder* particulières. De tels espaces seront très utiles dans la suite pour caractériser les matrices de transformations.

Définition 1.3. *Soit $E \subset s$ un espace de Banach muni de la norme $\|\|_E$. La suite $(b_n)_{n\geq 1} \in E$ est appelée base de Schauder de E si pour tout $X \in E$, il existe une unique suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels vérifiant :*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n,$$

c'est à dire

$$\left\| X - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n b_n \right\|_E \to 0 \ \ (N \to \infty).$$

On définit la suite $\left(e^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ par

$$e^{(n)} = (0, 0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$$

où 1 est le $n-$ième terme de cette suite, les autres termes étant nuls. On désigne par e la suite $(1, 1, ...)$. On a alors les résultats suivants.

Proposition 1.4. *i) L'espace c_0 admet $\left(e^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ pour base de Schauder, c'est à dire que pour tout $X \in c_0$ on a*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{(n)}.$$

ii) L'espace c admet pour base de Schauder $\left\{e, e^{(1)}, ..., e^{(n)}, ...\right\}$ et pour tout $X \in c$ on a

$$X = le + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - l)\, e^{(n)},$$

où $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

iii) L'espace ℓ_∞ n'a pas de base de Schauder.

iv) $\left(e^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ est une base de Schauder de l'espace ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$.

Preuve. i) Soit $X \in c_0$. On a

$$X - \sum_{n=1}^{N} x_n e^{(n)} = (0, 0, 0, ..., 0, x_{N+1}, x_{N+2}, ...)$$

et

$$\left\| X - \sum_{n=1}^{N} x_n e^{(n)} \right\|_{\ell_\infty} = \sup_{n \geq N+1} |x_n| \to 0 \ \ (n \to \infty) .$$

Il est clair que cette écriture est unique pour tout $X \in c_0$, donc la suite $\left(e^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ est une base de l'espace c_0.

ii) Soit $X \in c$, et tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. On a

$$X - le = (x_n - l)_{n\geq 1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - l)\, e^{(n)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \left\| X - le - \sum_{n=1}^{N} (x_n - l)\, e^{(n)} \right\|_{\ell_\infty} &= \|(0,0,0,...,0,x_{N+1} - l, x_{N+2} - l, ...)\|_{\ell_\infty} \\ &= \sup_{n\geq N+1} (|x_n - l|) \to 0 \ \ (n \to \infty) . \end{aligned}$$

On conclut que c admet $\left\{e, e^{(1)}, ..., e^{(n)}, ...\right\}$ pour base de Schauder.

iii) Comme ℓ_∞ n'est pas séparable ℓ_∞ n'a pas de base de Schauder, voir [82, Théorème 1.10, p. 150].

iv) Pour tout $X \in \ell_p$ on a

$$\left\| X - \sum_{n=1}^{N} x_n e^{(n)} \right\|_{\ell_p}^{p} = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \to 0 \ \ (N \to \infty) .$$

et $\left(e^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ est une base de Schauder de l'espace ℓ_p. ■

Espaces de type BK et espaces de type AK.

On utilisera dans la suite les espaces de *type BK*, abréviation de

B*anach***K***oordinate*

en allemand et espaces de *type AK*, abréviation

A*bschnitts***k***onvervenz*

(convergence-section) en allemand, dont la définition est la suivante.

Définition 1.5. *Un espace de Banach $E \subset s$ est dit un espace de type BK si la projection P_n de E dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$P_n\,(X) = x_n$$

est continue pour tout n et on dit qu'un espace de type BK possède la propriété AK si E admet $\left(e^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ pour base de Schauder, c'est à dire que pour tout $X \in E$ on a

$$X = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} x_n e^{(n)}\right).$$

On déduit le résultat suivant.

Théorème 1.6. *Les espaces ℓ_∞, c_0, c et ℓ_p sont de type BK et c_0 et ℓ_p ont la propriété AK.*

Preuve. En effet

$$|x_n| \leq \|X\|_{\ell_\infty}$$

pour tout n et pour tout $X \in \ell_\infty$, c_0, ou c. De même on a $|x_n| \leq \|X\|_{\ell_p}$ pour tout n et pour tout $X \in \ell_p$. D'autre part, d'après la Proposition 1.4, c_0 et ℓ_p ont la propriété AK. ■

1.2 Matrices de transformations

Dans cette section on rappelle d'abord la définition d'une matrice de transformation. Ensuite dans la sous section 1.2.2 on rappelle des résultats sur le *multiplicateur de deux espaces de suites et sur la notion de $\alpha-$ et de $\beta-$dual d'un espace*. Dans la sous-section 1.2.3 on donne entre autre les caractérisations de (E, s) où E est l'un des espaces ℓ_∞, c, c_0, ou ℓ_p. Dans la sous-section 1.2.4 on définit et énonce des propriétés des triangles $\Delta(\lambda)$, $C(\lambda)$ et de leurs transposées.

1.2.1 Définitions, propriétés et exemples.

Les notions présentées ici dans le cadre des matrices de transformations seront utilisées au Chapitre II en vue de définir la notion de système linéaire infini.

Définition 1.7. *Soient E et F deux espaces de suites. On dit que l'opérateur $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ est une matrice de transformation de E dans F et on écrit $A \in (E, F)$, si les séries définies par*

$$A_n(X) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$$

sont convergentes pour tout $X = (x_n)_{n\geq 1} \in E$ et pour toute valeur de n, et si

$$(A_n(X))_{n\geq 1} \in F.$$

On note

$$AX = (A_n(X))_{n\geq 1}.$$

Dans la suite nous utiliserons l'espace des opérateurs bornés défini de la manière suivante.

Définition 1.8. *Soient E et $F \subset s$ deux espaces vectoriels normés . On note $\mathcal{B}(E, F)$ l'espace vectoriel des opérateurs L bornés de E dans F. L'espace $\mathcal{B}(E, F)$ muni de la norme*

$$\|L\|_{\mathcal{B}(E,F)} = \sup_{X \neq 0} \frac{\|L(X)\|_F}{\|X\|_E}$$

est un espace de Banach.

Théorème 1.9. *[82, Théorème 1.17, p. 153], Toute matrice de transformation d'un espace de type BK dans un espace de type BK est continue. On a alors*

$$(E, F) \subset \mathcal{B}(E, F).$$

Ensuite, lorsque E est un espace de suites et $A = (a_{nm})_{n,m \geq 1}$ est une matrice infinie considérée comme opérateur, on définit l'ensemble

$$E(A) = \{X \in s : AX \in E\}$$

appelé *domaine de la matrice* A. On voit alors que pour tous E, $F \subset s$ on a

$$A \in (E, F) \Leftrightarrow E \subset F(A).$$

Illustrons la notion de matrice de transformations par deux exemples.

Exemple 1.10. *Considérons l'ensemble de suites $E \subset s$ tel que :*

$$E = \left\{ X = \left(\frac{\lambda^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} \right)_{n \geq 1} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

On a $E \subset \ell_1$, et E n'est pas un espace vectoriel. Soit $A = (a_{nm})_{n,m \geq 1}$ une matrice infinie dont les lignes sont toutes égales, définie par

$$a_{nm} = (-1)^{(m-1)} x^{2(m-1)}, \text{ pour tout } n, m \geq 1$$

où $x \in$, on a $A \in (E, \ell_\infty)$. En effet, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
A_n(X) &= \begin{pmatrix} . & . & . & (-1)^{(m-1)} x^{2(m-1)} & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ \frac{\lambda^{2(m-1)}}{[2(n-1)]!} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m-1)} x^{2(m-1)} \frac{\lambda^{2(m-1)}}{[2(n-1)]!} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m-1)} \frac{(x\lambda)^{2(m-1)}}{[2(n-1)]!} \\
&= \cos(x\lambda).
\end{aligned}$$

D'où

$$^t(AX) = {}^t(\cos(x\lambda), \cos(x\lambda), ..., \cos(x\lambda), ...) \in \ell_\infty.$$

Si $e = (1, ..., 1, ...)$, on a donc

$$AX = [\cos(x\lambda)] \; {}^t e$$

et

$$\|AX\|_{\ell_\infty} = |\cos(x\lambda)| \leq 1,$$

est finie, ce qui implique que $A \in (E, \ell_\infty)$.

Donnons l'exemple analogue suivant.

Exemple 1.11. *Soit $x \in \mathbb{C}$, considérons l'ensemble de suites $F \subset s$ tel que :*

$$F = \left\{ X = \left(\frac{\lambda^{2n-1}}{(2n-1)!} \right)_{n \geq 1} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

De même nous avons $F \subset \ell_1 \subset \ell_\infty$. On définit la matrice infinie $A = (a_{nm})_{n,m \geq 1}$ ayant toutes les lignes égales par

$$a_{nm} = (-1)^{m-1} x^{2m-1}, \text{ pour tout } n, \, m \geq 1.$$

On a $A \in (F, \ell_\infty)$. *En effet, pour tout* $n \geq 1$, *on a*

$$\begin{aligned} A_n(X) &= \begin{pmatrix} . & . & . & (-1)^{m-1}x^{2m-1} & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ \frac{\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1}x^{2m-1}\frac{\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1}\frac{(x\lambda)^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ &= \sin(x\lambda). \end{aligned}$$

Ceci implique que pour tout X *dans* F, *on a*

$$^t(AX) = {}^t(\sin(x\lambda), \sin(x\lambda), ..., \sin(x\lambda), ...) \in \ell_\infty.$$

Donc $AX = [\sin(x\lambda)]\ {}^te$ *et* $\|AX\|_{\ell_\infty} = |\sin(x\lambda)| \leq 1$, *est fini. Ce qui implique* $A \in (F, \ell_\infty)$.

1.2.2 Multiplicateur de deux espaces de suites, notion de $\alpha-$ et de $\beta-$dual.

Multiplicateur $M(E, F)$.

Dans cette partie on s'intéresse à la convergence de chacune des séries définissant le produit AX défini au paragraphe 1.2.1. Pour un espace de suites donné E, l'essentiel est de déterminer toutes les matrices infinies $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ pour lesquelles les séries

$$A_n(X) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m$$

sont convergentes pour tout $X \in E$ et pour tout n. A cet effet il est nécessaire de définir le multiplicateur de deux espaces de suites. Soient E et F deux sous ensembles de s, on note

$$E * F = \{XY : X \in E \text{ et } Y \in F\}$$

où $XY = (x_n y_n)_n$, lorsque $X = (x_n)_n$ et $Y = (y_n)_n$.

Définition 1.12. *Soient $E, F \subset s$. On appelle multiplicateur de E et F l'ensemble*

$$M(E,F) = \{a = (a_n)_n \in s : \ aX = (a_n x_n)_n \in F \text{ pour tout } X \in E\}.$$

Il est bien connu que le multiplicateur de deux espaces de type BK est un espace de type BK, voir [82].

Définition 1.13. *Soit $\tau = (\tau_n)_{n\geq 1}$ une suite dans s. On appelle matrice diagonale associée à la suite τ, la matrice infinie notée D_τ et définie par*

$$[D_\tau]_{nm} = \begin{cases} \tau_n & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier la matrice d'identité d'ordre infini est la matrice diagonale D_e associée à la suite $e = (1, 1, ..., 1, ...)$.

Exemple 1.14. *La matrice D_e est une matrice de transformation de ℓ_∞ dans ℓ_∞. En effet, pour tout $X = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_\infty$ on a*

$$[D_e]_n X = x_n \text{ pour tout } n \geq 1,$$

et $([D_e]_n X)_{n\geq 1} = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_\infty$. D'où $D_e \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$.

Remarque 1.15. *On voit aisément que $a \in M(E,F)$ si et seulement si $D_a \in (E,F)$. En effet, $D_a \in (E,F)$ signifie que $D_a X = (a_n x_n)_{n\geq 1} \in F$ pour tout $X \in E$.*

Rappelons quelques propriétés classiques des espaces $M(E,F)$, voir [82, Lemme 1.25, p. 156].

Lemme 1.16. *Soient E, F, E' et F' des espaces de suites. On a*
(i) $E' \subset E$ implique $M(E,F) \subset M(E',F)$,
(ii) $F \subset F'$ implique $M(E,F) \subset M(E,F')$.

On a aussi les propriétés suivantes, voir [82].

Lemme 1.17. *(i) $M(c_0, F) = \ell_\infty$, pour $F = c_0$, ou c ou ℓ_∞.*
(ii) $M(\ell_\infty, c_0) = c_0$ et $M(\ell_\infty, \ell_\infty) = \ell_\infty$.
(iii) $M(c,c) = c$ et $M(\ell_\infty, c) = c_0$.

Remarque 1.18. *Les espaces c_0, c et ℓ_∞ vérifient*

$$c_0 \subset c \subset \ell_\infty,$$

on déduit des lemmes précédents que :

$$\ell_\infty = M(\ell_\infty, \ell_\infty) \subset M(c, \ell_\infty) \subset M(c_0, \ell_\infty) = \ell_\infty,$$

d'où

$$M(c, \ell_\infty) = \ell_\infty.$$

On peut maintenant définir le $\alpha-$dual et le $\beta-$dual d'un espace de suites.

Notion de $\alpha-$ et de $\beta-$dual.

Dans ce qui suit nous limitons notre étude à celle du $\alpha-$ dual et du $\beta-$dual, ensuite nous considérons le $\alpha-$ dual, puis le $\beta-$dual de chacun des espaces c_0, c, ℓ_∞ et ℓ_p.

Définition 1.19. *Soit E un espace de suites. On appelle $\alpha-$dual de E, l'ensemble*

$$E^\alpha = M\left(E, \ell_1\right).$$

On a donc

$$E^\alpha = \left\{ a = (a_n)_{n\geq 1} \in s : \text{ la série } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \text{ est convergente pour tout } X \in E \right\}.$$

D'une manière analogue on appelle $\beta-$dual de E l'espace

$$E^\beta = M\left(E, cs\right),$$

où

$$cs = \left\{ X = (x_n)_n : \text{la série } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ est convergente} \right\},$$

et on écrit

$$E^\beta = \left\{ a = (a_n)_{n\geq 1} \in s : \text{ la série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ est convergente pour tout } X \in E \right\}.$$

On déduit de ce qui précède qu'une matrice infinie $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ vérifie la propriété suivante :

Lemme 1.20. *On a $A \in (E, s)$ si et seulement si*

$$(a_{nm})_{m\geq 1} \in E^\beta \text{ pour tout } n.$$

Preuve. En effet, $A \in (E, s)$ signifie que les séries

$$A_n(X) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$$

sont convergentes pour tout n et pour tout $X \in E$. On a donc bien $(A_n(X))_{n\geq 1} \in s$ pour tout $X \in E$ et $(a_{nm})_{m\geq 1} \in E^\beta$ pour tout n. ■ On déduit du Lemme 1.16 (i) le résultat suivant.

Lemme 1.21. *Soit $\iota \in \{\alpha, \beta\}$. Alors $E \subset F \Rightarrow F^\iota \subset E^\iota$.*

Il est immédiat que $E^\alpha \subset E^\beta$ pour tout $E \subset s$, puisque toute série absolument convergente est convergente. Rappelons que E est *normal* si pour tout $X = (x_n)_{n\geq 1} \in E$ nous avons l'implication

$$|y_n| \leq |x_n| \text{ pour tout } n \text{ entraîne } Y = (y_n)_{n\geq 1} \in E.$$

Il est bien connu que l'égalité

$$E^\alpha = E^\beta$$

a lieu lorsque E est *normal,* voir Malkowsky *[82].* On déduit aisément que les espaces c_0, et ℓ_p avec $1 \leq p \leq \infty$, sont normaux et donc

$$\ell_p^\alpha = \ell_p^\beta \text{ et } c_0^\alpha = c_0^\beta.$$

Ces résultats nous conduisent à expliciter le $\beta-$dual de certains espaces classiques. On admettra le résultat suivant, où φ est l'espace des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Proposition 1.22. *On a les propriétés suivantes :*
(i) $s^\beta = \varphi$ *et* $\varphi^\beta = s$;
(ii) $\ell_1^\beta = \ell_\infty$;
(iii) $\ell_p^\beta = \ell_q$ *où* $1 < p < \infty$ *où* $q = p/(p-1)$;
(iv) $\ell_\infty^\beta = c_0^\beta = c^\beta = \ell_1$.

Ces résultats vont nous permettre de caractériser certains espaces de la forme (E, s), où $E \subset s$, c'est l'objet du prochain paragraphe.

1.2.3 Application aux matrices de transformations.

Dans ce paragraphe nous considérons l'ensemble (E, s) où E est l'un des espaces précédant. Rappelons que $A \in (E, s)$ si les séries $A_n(X) = \sum_{m=1}^\infty a_{nm}x_m$ sont convergentes pour tout X dans E et pour tout $n \geq 1$. Nous considérons ensuite les classes (E, F) où E et F sont l'un des espaces ℓ_∞, c_0 ou c.

Caractérisation de (E, s) où $E = \ell_\infty$, c_0, c, ou ℓ_p.

Dans cette partie on détermine les classes (ℓ_∞, s), (c_0, s), (c, s) et (ℓ_p, s).

Proposition 1.23. *(i) On a*

$$(\ell_\infty, s) = (c_0, s) = (c, s)$$

et $A \in (\ell_\infty, s)$ *si et seulement si*

$$\sum_{m=1}^\infty |a_{nm}| < \infty \textit{ pour tout } n.$$

(ii) Soit $1 < p < \infty$. *On a* $A \in (\ell_p, s)$ *si et seulement si*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|^{\frac{p}{p-1}} < \infty \text{ pour tout } n.$$

(iii) $A \in (\ell_1, s)$ *si et seulement si*

$$\sup_m |a_{nm}| < \infty \text{ pour tout } n.$$

Preuve. (i) On a vu que $\ell_\infty^\beta = c_0^\beta = c^\beta = \ell_1$, d'après la Proposition 1.20 on a $A \in (\ell_\infty, s)$ si et seulement si

$$(a_{nm})_{m\geq 1} \in \ell_\infty^\beta = \ell_1 \text{ pour tout } n.$$

On conclut en remarquant que $(a_{nm})_{m\geq 1} \in \ell_1$ signifie

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < \infty \text{ pour tout } n.$$

(ii) On a $A \in (\ell_p, s)$ si et seulement si $(a_{nm})_{m\geq 1} \in \ell_p^\beta = \ell_q$ pour tout n où $q = p/(p-1)$. D'où $A \in (\ell_p, s)$ si et seulement si

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|^{\frac{p}{p-1}} < \infty \text{ pour tout } n.$$

(iii) $A \in (\ell_1, s)$ si et seulement si

$$(a_{nm})_{m\geq 1} \in \ell_1^\beta = \ell_\infty \text{ pour tout } n.$$

D'où $A \in (\ell_1, s)$ si et seulement si $\sup_m |a_{nm}| < \infty$ pour tout n. ■

Cette Proposition nous amène à développer les exemples suivants.

Exemple 1.24. *Soit* $(k_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'entiers strictement croissante et soit* $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ *la matrice définie par* $a_{nm} = 0$ *pour tout* n *et pour tout* $m \geq k_n$, *c'est à dire*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & a_{1,k_1} & & \mathbf{0} \\ & & & & \\ a_{n1} & . & . & a_{n,k_n} & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est appelée "matrice à créneaux" voir [14] et naturellement d'après la Proposition 1.23 (i) nous avons $A \in (\ell_\infty, s)$. *En effet,*

$$\begin{aligned} |A_n(X)| &= \left|\sum_{m=1}^{k_n} a_{nm}x_m\right| \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^{k_n} |a_{nm}|\right) \sup_m |x_m| < \infty \text{ pour tout } X \in \ell_\infty \text{ et tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

Exemple 1.25. *Soit $c = (c_n)_{n\geq 1}$ une suite dans U^+et soit A la matrice définie par $A = (c_{n+m-1})_{n,m\geq 1}$, c'est à dire*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & . & c_m & . \\ c_2 & c_3 & . & c_{m+1} & . \\ . & . & . & . & . \\ c_n & c_{n+1} & . & c_{n+m-1} & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

On voit que

$$A \in (\ell_\infty, s) \Leftrightarrow c \in \ell_1.$$

En effet d'après la Proposition 1.23 (i) on a $A \in (\ell_\infty, s)$ si et seulement si

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_{n+m-1}| < \infty \text{ pour tout } n,$$

ce qui équivaut à $c \in \ell_1$.

Matrices de transformations de E dans F où E et F sont de la forme ℓ_∞, c_0, ou c.

Nous énonçons ici des résultats bien connus qui s'avèreront très utiles dans la suite. Les caractérisations suivantes s'obtiennent en utilisant entre autre le $\beta-$dual d'un espace de suites, voir Maddox [77], Malkowsky [82]. De [82, Théorème 1.36 p. 160] on déduit ce qui suit.

Proposition 1.26. *(i) On a $(\ell_\infty, \ell_\infty) = (c_0, \ell_\infty) = (c, \ell_\infty)$ et $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ si et seulement si*

$$\sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \right) < \infty. \tag{1.3}$$

(ii) $A \in (c_0, c_0)$ si et seulement si (1.3) est vérifiée et

$$\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0 \text{ pour tout } m. \tag{1.4}$$

(iii) $A \in (c_0, c)$ si et seulement si (1.3) est vérifiée et

$$\lim_{n\to\infty} a_{nm} = \delta_m \text{ où } \delta_m \in \mathbb{C} \text{ pour tout } m. \tag{1.5}$$

(iv) $A \in (c, c_0)$ si et seulement si (1.3) et (1.4) sont vérifiées et

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \right) = 0.$$

(v) $A \in (c, c)$ si et seulement si (1.3) et (1.5) sont vérifiées et

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \right) = \delta,$$

où δ est un scalaire.

Remarque 1.27. *Il est facile de montrer que (1.3) entraîne $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$. En effet soit $X \in \ell_\infty$. Alors*

$$\begin{aligned} |A_n(X)| &= \left|\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \, \|X\|_{\ell_\infty} \\ &\leq \left(\sup_n \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|\right) \|X\|_{\ell_\infty} \text{ pour tout } n. \end{aligned}$$

On déduit que $\sup_n |A_n(X)| < \infty$ et $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$.

Remarque 1.28. *On peut illustrer la propriété (1.3). Elle équivaut à chacune des propriétés suivantes où $X = (x_n)_n$ est quelconque dans s :*

i)

$$\sup_n |x_n| < \infty \Longrightarrow \sup_n |A_n(X)| < \infty,$$

ii)

$$x_n \to 0 \;\; (n \to \infty) \Longrightarrow \sup_n |A_n(X)| < \infty,$$

iii)

$$x_n \to l \;\; (n \to \infty) \;\; \text{où } l \in \mathbb{C} \Longrightarrow \sup_n |A_n(X)| < \infty.$$

Dans ce qui suit nous écrirons

$$S_1 = \left\{ (a_{nm})_{n,m \geq 1} : \sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \right) < \infty \right\}.$$

D'après la Proposition 1.26 on a donc $(\ell_\infty, \ell_\infty) = S_1$. Nous verrons les propriétés topologiques de cet espace au chapitre suivant. Dans le paragraphe suivant nous considérons des matrices particulières appelées matrices triangles.

1.2.4 Triangles considérés comme des opérateurs dans des espaces de la forme ℓ_∞, c ou c_0

Dans cette sous section nous considérons des triangles très utilisés dans la littérature. L'opérateur Δ a été utilisé pour définir les *espaces de différences de suites* introduits en 1981 par H. Kizmaz [70], puis généralisés successivement par Malkowsky et Parashar [84], Et et Colak [60, 59], A. M. Akhmedov et F. Başar [2], etc...

Le calcul de leurs inverses et de leur produit par des matrices diagonales permet de passer de l'expression d'une matrice à l'autre. C'est ainsi que nous aurons $\Sigma = \Delta^{-1}$, $C(\lambda) = D_{1/\lambda}\Sigma$ et $\Delta(\lambda) = \Delta D_\lambda = [C(\lambda)]^{-1}$, etc....

Nous étudierons ces matrices et leurs transposées en tant qu'opérateurs dans des espaces classiques, voir [77, 82]. D'abord nous allons donner une technique permettant de calculer aisément l'inverse de certaines matrices.

Inverse d'un triangle supérieur de Toeplitz.

En vue de calculer les inverses d'opérateurs de Toeplitz, rappelons un résultat qui traduit la relation entre une *matrice infinie de Toeplitz* et une série entière. Soit $z \in \mathbb{C}$ et R un réel > 0. A toute série entière de la forme

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

définie dans un disque $|z| < R$, on peut associer une matrice triangulaire infinie

$$A = \varphi(f)$$

définie par

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . \\ & & a_0 & a_1 & . \\ & \mathbf{0} & & a_0 & . \\ & & & & . \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice est dite de *Toeplitz*. Pratiquement on écrira $\varphi\,[f(z)]$ au lieu de $\varphi(f)$. Il est essentiel de citer le lemme suivant qui explicite le lien entre les matrices infinies et les séries entières.

Lemme 1.29. *[37, Lemme 19, p. 56] (i) l'application $\varphi : f \to A$ est un isomorphisme de l'algèbre des séries analytiques définies sur le disque $|z| < R$, sur l'algèbre des matrices infinies correspondantes.*

(ii) Supposons qu'on a $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ avec $a_0 \neq 0$ et que $1/f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m z^m$ ait un rayon de convergence $R' > 0$, alors

$$\varphi\left(\frac{1}{f(z)}\right) = [\varphi(f)]^{-1}.$$

Nous pouvons maintenant appliquer ces résultats à certains opérateurs connus. On s'intéresse tout d'abord aux matrices infinies représentées par des triangles.

Les triangles représentés par des matrices infinies.

On désigne par U l'ensemble de toutes les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que $x_n \neq 0$ pour tout n. On appelle *triangle* toute matrice $T = (t_{nm})_{n,m\geq 1}$ telle que $t_{nm} = 0$ pour $m > n \to$ et $t_{nn} \neq 0$ pour tout n. On notera $\pounds$ l'ensemble de tous les triangles. On a ainsi

$$[TX]_n = \sum_{m=1}^{n} t_{nm} x_m \text{ pour tout } n,$$

et on écrit

$$TX = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & \\ . & . & & & \mathbf{0} \\ . & & . & & \\ t_{n1} & . & . & t_{nn} & \\ . & . & . & . & . \\ & & & & & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}x_1 \\ . \\ . \\ \sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k \\ . \\ . \end{pmatrix}.$$

Notons que si T et $T^{'} \in £$ alors

$$T\left(T^{'}X\right) = \left(TT^{'}\right)X \text{ pour tout } X.$$

Les triangles Δ, Σ, C_1, $C(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ et leurs transposées.

Les opérateurs représentés par Δ et Σ. On appelle *matrice de différence d'ordre un* et on désigne par Δ la matrice infinie

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & -1 & 1 & & \\ & & . & . & \\ & \mathbf{0} & & . & . \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$[\Delta X]_n = x_n - x_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et pour tout } X \in s,$$

avec la convention $x_0 = 0$. Nous serons amenés à utiliser l'inverse de Δ. Pour cela nous pouvons appliquer le Lemme 1.29 à $f(z) = 1 - z$ où

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \text{ avec } |z| < 1.$$

L'inverse de Δ est alors défini par

$$\Delta^{-1} = {}^{t}(\varphi(1/f(z))) = {}^{t}(\varphi(1 + z + ... + z^m + ...)) = \Sigma,$$

où Σ est la matrice triangulaire inférieure définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ . & . & . & . & \\ & & & & . \end{pmatrix},$$

et $\Sigma = \Delta^{-1}$. Citons ici quelques propriétés élémentaires de ces opérateurs.

Proposition 1.30. *Nous avons les propriétés suivantes*

a) $\Delta \in (E, E)$ *où* $E = c_0$, c *ou* ℓ_∞,

b) $\Sigma \notin (cs, cs)$, *et* $\Sigma \notin S_1 = (\ell_\infty, \ell_\infty)$,

c) ${}^t\Sigma \in (cs, c_0)$.

Preuve. *a*) est immédiat.

b) En effet, on a $\Sigma e^{(1)} = e$ où $e^{(1)}$ appartient à cs, mais $\Sigma e^{(1)} = e \notin cs$, donc

$$\Sigma \notin (cs, cs).$$

Montrons maintenant que $\Sigma \notin S_1$. Posons $\Sigma = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ donc on a

$$a_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$$

D'où

$$\sum_{m=1}^{n} |a_{nm}| = n \to \infty \ \ (n \to \infty).$$

Donc

$$\sup_n \left(\sum_{m=1}^{n} |a_{nm}| \right) = \infty.$$

On conclut que

$$\Sigma \notin S_1.$$

c) Soit $X = (x_n)_{n\geq 1} \in cs$. Les séries $({}^t\Sigma)_n (X)$ sont alors convergentes pour tout $n \geq 1$ et

$$({}^t\Sigma)_n (X) = \sum_{m=n}^{\infty} x_m \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

D'où

$${}^t\Sigma X \in c_0 \text{ et } {}^t\Sigma \in (cs, c_0).$$

■

L'opérateur de Cesàro C_1 et la matrice $C(\lambda)$. L'opérateur de Cesàro est représenté par le triangle

$$C_1 = D_{\left(\frac{1}{n}\right)_n} \Sigma.$$

où $D_{(1/n)_n}$ est la matrice diagonale associée à la suite $(1/n)_{n\geq 1}$, voir le paragraphe 1.2.2. Si l'on pose $C_1 = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ on a alors

$$a_{nm} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } m \leq n, \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est à dire

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \mathbf{0} & \\ . & . & . & & \\ \frac{1}{n} & . & . & \frac{1}{n} & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

On a $C_1 \in (c, c)$, c'est à dire que pour tout $X = (x_n)_{n \geq 1} \in c$ on a

$$[C_1 X]_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} x_m \to l \ \ (n \to \infty) \text{ où } l \in \mathbb{C}.$$

D'une manière plus générale on a

$$C(\lambda) = D_{1/\lambda} \Sigma,$$

où $\lambda \in U$. On déduit en posant $C(\lambda) = (a'_{nm})_{n,m \geq 1}$ que

$$a'_{nm} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n} & \text{si } m \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opérateur représenté par $\Delta(\lambda)$. Ici nous avons $\Delta(\lambda) = \Delta D_\lambda$, où $\lambda \in U$. De l'égalité

$$\Delta(\lambda)^{-1} = (\Delta D_\lambda)^{-1} = D_{\frac{1}{\lambda}} \Delta^{-1} = D_{\frac{1}{\lambda}} \Sigma$$

on déduit que $\Delta(\lambda)$ est l'inverse de $C(\lambda)$. On a

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & & & \mathbf{0} \\ & -\lambda_2 & . & & \\ & & . & \lambda_n & \\ & \mathbf{0} & & -\lambda_n & . \\ & & & & . \end{pmatrix}.$$

Les triangles $\Delta(\lambda)$, $C(\lambda)$ et leurs transposés en tant que matrices de transformations de $(\ell_\infty, \ell_\infty)$, (c_0, c_0) ou de (c, c).

Dans cette sous-section nous nous limiterons à la caractérisation de $\Delta(\lambda)$, $C(\lambda)$, ${}^tC(\lambda)$, ${}^t\Delta(\lambda)$ considérés comme opérateurs de ℓ_∞ dans ℓ_∞, de c dans c et de c_0 dans c_0. On s'intéressera entre autre à la caractérisation de $C(\lambda) \in (c, c)$ c-à-d pour toute suite $X = (x_n)$ on a

$$x_n \to l \quad (n \to \infty) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_n} \sum_{m=1}^{n} x_m \to l' \quad (n \to \infty) \quad \text{où } l, \ l' \in \mathbb{C} \qquad (1.6)$$

et on verra que 1.6 est équivanlente à

$$\frac{n}{\lambda_n} \to l \ (n \to \infty).$$

De même ${}^{t}C(\lambda) \in (c, c)$ signifie que pour toute suite $X = (x_n)$ on a

$$x_n \to l \quad (n \to \infty) \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{\lambda_k} \to l'' \ (n \to \infty) \text{ où } l,\ l'' \in \mathbb{C},$$

c'est qui équivaut à dire que $1/\lambda \in cs$.
Considérons les hypothèses suivantes :

$$\lambda \in \ell_\infty \tag{1.7}$$

$$\frac{n}{\lambda_n} = O(1) \quad (n \to \infty) \tag{1.8}$$

$$\text{Il existe } l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{n}{\lambda_n} \to l \ (n \to \infty) \tag{1.9}$$

$$\text{Il existe } l' \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda_n - \lambda_{n-1} \to l' \ (n \to \infty) \tag{1.10}$$

Proposition 1.31. *Soit $\lambda \in U^+$.*
(i) a) $\Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ si et seulement si (1.7) est vérifiée,
b) $\Delta(\lambda) \in (c_0, c_0)$ si et seulement si (1.7) est vérifiée,
c) $\Delta(\lambda) \in (c, c)$ si et seulement si (1.7) et (1.10) sont vérifiées.
(ii) a) $C(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ si et seulement si (1.8) est vérifiée,
b) $C(\lambda) \in (c_0, c_0)$ si et seulement si (1.8) est vérifiée,
c) $C(\lambda) \in (c, c)$ si et seulement si (1.9) est vérifiée.

Preuve. (i) a) $\Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ signifie $\Delta(\lambda) \in S_1$, c'est à dire

$$\lambda_n + \lambda_{n-1} = O(1) \quad (n \to \infty).$$

Cette condition équivaut à (1.7).
(i) b) On a $A = (a_{nm})_{nm \geq 1} \in (c_0, c_0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \right) < \infty, \\ \lim_{n \to \infty} a_{nm} = 0 \text{ pour tout } m. \end{cases}$$

D'où $\Delta(\lambda) \in (c_0, c_0)$ si et seulement si

$$\sup_n (\lambda_{n-1} + \lambda_n) < \infty$$

et $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ ceci est équivaut à dire $\lambda \in c_0$.

(i) c) D'après la Proposition 1.26 (v) on a $\Delta(\lambda) \in (c, c)$ si et seulement si la propriété (1.10) est vérifiée et $\Delta(\lambda) \in S_1$. On a vu que $\Delta(\lambda) \in S_1$ équivaut à (1.7), d'où (i) c).

(ii) a) Nous avons (1.8) équivalent à $C(\lambda) \in S_1$. En effet pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{m=1}^{n} [C(\lambda)]_{nm} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{m=1}^{n} 1 = \frac{n}{\lambda_n} \tag{1.11}$$

D'où $C(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ si et seulement si (1.8) est vérifiée.

(ii) b) D'après la Proposition 1.26 ii) $C(\lambda) \in (c_0, c_0)$ équivaut à

$$\frac{n}{\lambda_n} = O(1) \ (n \to \infty),$$

et ainsi $1/\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$. D'où $[C(\lambda)]_{nm} \to 0$ $(n \to \infty)$, pour tout m.

(ii) c) D'après la Proposition 1.26 (v) on a $C(\lambda) \in (c, c)$ si et seulement si (1.8), (1.9) sont vérifiées et $1/\lambda \in c_0$. Or (1.9) implique (1.8) et $1/\lambda \in c_0$. Donc $C(\lambda) \in (c, c)$ est équivalent à (1.9). ■

Remarque 1.32. *Remarquons que $C(\lambda) \in (c, c)$ entraîne $C(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ soit (1.8).*

Concernant les transposées nous avons

$$^t\Delta(\lambda) = D_\lambda \, ^t\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & -\lambda_2 & & & \mathbf{0} & \\ & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & \mathbf{0} & & & \lambda_n & -\lambda_n & \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

et

$$^tC(\lambda) = \, ^t\left(D_{1/\lambda}\Sigma\right) = \, ^t\Sigma D_{\frac{1}{\lambda}}$$

avec

$$^tC(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \cdot & \frac{1}{\lambda_n} & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \cdot & \frac{1}{\lambda_n} & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & \mathbf{0} & & \frac{1}{\lambda_n} & \\ & & & & \cdot \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons énoncer les résultats suivants.

Proposition 1.33. *Soit $\lambda \in U^+$. Considérons les assertions suivantes :*

(i) $^t\Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$,

(ii) $^t\Delta(\lambda) \in (c, c)$,
(iii) $^tC(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$,
(iv) $^tC(\lambda) \in (c, c)$.
1- Les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes à (1.7)
2- (iii) et (iv) sont équivalentes à $1/\lambda \in cs$.

Preuve. 1) $^t\Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ équivaut à

$$\lambda_n + \lambda_n = O(1) \quad (n \to \infty)$$

c'est à dire à (1.7). Donc (i) et (1.7) sont équivalents. Ensuite (ii) équivaut à (1.7) et

$$\sum_{m=n-1}^{n} \left[{}^t\Delta(\lambda)\right]_{nm} = \lambda_n - \lambda_n \to 0 \;\; (n \to \infty). \tag{1.12}$$

La propriété (1.12) étant toujours vraie on déduit que (ii) et (1.7) sont equivalents, ce qui achève la démonstration de 1).

2) On sait que $^tC(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ revient à dire que

$$\sum_{m=n}^{\infty} \left[{}^tC(\lambda)\right]_{nm} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} \text{ est convergente pour tout } n$$

et que

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} = O(1) \quad (n \to \infty).$$

Ces propriétés équivalent à $1/\lambda \in cs$.

On voit que $^tC(\lambda) \in (c, c)$ revient à dire que $^tC(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ et

$$\sum_{m=n}^{\infty} \left[{}^tC(\lambda)\right]_{nm} \to L \;\; (n \to \infty) \text{ pour un certain } L. \tag{1.13}$$

Mais ainsi qu'on vient de le voir $^tC(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ équivaut à $1/\lambda \in cs$ et implique que (1.13) est vérifié pour $L = 0$. ■

Chapitre 2

Systèmes linéaires infinis et applications

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous définirons la notion de *système ayant une infinité dénombrable d'équations linéaires et une infinité dénombrable d'inconnues.* Nous avons défini au paragraphe 2 du chapitre précédent les matrices de transformations en tant qu'applications dans des espaces de suites. Ici on s'intéresse à la nature de cette application, *est-elle injective ? Est-elle surjective ?* Lorsque l'équation $AX = B$ où B est donné admet une solution, peut-on *la calculer, ou l'approcher par une suite à support fini* ? Soit $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ une matrice infinie et $X = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite, que l'on pourra considérer comme une matrice colonne. On écrira $AX = (A_n(X))_{n\geq 1}$ soit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1m} & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nm} & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_m \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} a_{1m}x_m \\ . \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

lorsque les séries sont convergentes pour tout $n \geq 1$.

Par la suite nous utiliserons les systèmes ayant une infinité dénombrable d'équations linéaires. Ce problème se traduit par l'équation matricielle

$$AX = B \tag{2.1}$$

où $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ et $B = {}^t(b_1, b_2, ...) \in s$ sont donnés et $X = {}^t(x_1, x_2, ...) \in s$ est l'inconnue ; l'équation (2.1) s'écrit alors sous la forme d'un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} a_{1m} x_m = b_1, \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} x_m = b_2, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m = b_n, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ou encore

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_m \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ b_n \\ . \\ . \end{pmatrix},$$

lorsque les séries définies par $A_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$ sont convergentes pour tout n. Lorsque $A \in (E, F)$ où E, $F \subset s$, la question qui se pose est la suivante :

"Pour une matrice colonne donnée $B = {}^t(b_1, b_2, ...) \in F$ l'équation (2.1) admet-elle une solution dans E" ?

Cette question conduit à examiner si *cette solution est unique* dans E et à la calculer explicitement ou à en donner une valeur approchée. Notons qu'il n'y a pas de théorèmes généraux pour résoudre ces problèmes, contrairement aux systèmes linéaires finis.

Remarquons que si E a la propriété AK il *admet une base formée des éléments* $e^{(n)}$ $(n = 1, 2, ...)$. Ainsi à tout opérateur linéaire borné $L \in \mathcal{B}(E)$ on peut associer une matrice infinie

$$L_A = A = (a_{nm})_{n,m \geq 1}$$

où

$$a_{nm} = A_n\left({}^t\left(e^{(m)}\right)\right).$$

En effet on a

$$L_A\left({}^t\left(e^{(m)}\right)\right) = A\ {}^t\left(e^{(m)}\right),$$

soit

$$A\ {}^t\left(e^{(m)}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1m} & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nm} & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ . \\ a_{nm} \\ . \\ . \end{pmatrix},$$

que l'on peut aussi écrire :

$$L_A\left({}^t\left(e^{(m)}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}\ {}^t\left(e^{(n)}\right) = {}^t(a_{1m}, ..., a_{nm}, ...) \text{ pour tout } m.$$

Toutes ces questions mènent à l'étude de l'existence d'un inverse à droite ou à gauche d'une matrice infinie. On sera amenés à expliciter des *algèbres de Banach* appropriées dans lesquelles on peut définir *l'inverse d'une matrice infinie.*

Pour l'instant nous allons traiter quelques systèmes triangulaires très utiles pour la suite.

2.2 Résolution de systèmes linéaires infinis remarquables.

Dans cette section nous considérons deux espaces de suites E, $F \subset s$ et nous nous intéressons aux solutions d'un système infini triangulaire

$$TX = B, \tag{2.2}$$

où T est un triangle c-à-d $T \in £$, X appartient à E et B est donné dans F. Nous serons ensuite amenés à l'étude de systèmes de la forme $\Delta(\lambda) X = B$, $C(\lambda) X = B$, où B appartient à l'un des espaces ℓ_∞, c_0, c, ou ℓ_p.

Rappelons que si T et T' sont deux éléments dans £ alors TT' est aussi dans £. En effet, supposons que $T = (t_{nm})_{n,m\geq 1}$ et $T' = \left(t'_{nm}\right)_{n,m\geq 1}$ sont deux matrices triangulaires inférieures, alors

$$TT' = (r_{nm})_{n,m\geq 1},$$

avec

$$r_{nm} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} t_{nj} t'_{jm} & \text{si } m \leq n, \\ \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$$

Donc TT' est aussi une matrice triangulaire inférieure.

Lemme 2.1. *Soient T, T' deux matrices de £, alors on a*

i)

$$T\left(T'X\right) = \left(TT'\right)X, \quad \textit{pour tout } X \in s. \tag{2.3}$$

ii) T admet un inverse unique T^{-1} tel que

$$T\left(T^{-1}X\right) = \left(TT^{-1}\right)X = X, \quad \textit{pour tout } X \in s. \tag{2.4}$$

iii) $\ker T = \{0\}$ *et pour tout $\chi \subset s$, on a*

$$(\ker T) \cap \chi = \{0\}.$$

Preuve. i) Soient $T = (t_{nm})_{n,m\geq 1}$ et $T' = \left(t'_{nm}\right)_{n,m\geq 1}$ deux éléments de £. Montrons que pour tout $X \in s$ on a

$$T\left(T'X\right) = \left(TT'\right)X.$$

En effet, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\left[T\left(T^{'}X\right)\right]_n &= \sum_{j=1}^{n} t_{nj}\left(\sum_{k=1}^{j} t^{'}_{jk}x_k\right) \\
&= t_{n1}t^{'}_{11}x_1 + t_{n2}\left(t^{'}_{21}x_1 + t^{'}_{22}x_2\right) + ... + t_{nn}\left(t^{'}_{n1}x_1 + ... + t^{'}_{nn}x_n\right) \\
&= x_1\left(t_{n1}t^{'}_{11} + ... + t_{nn}t^{'}_{n1}\right) + x_2\left(t_{n2}t^{'}_{22} + ... + t_{nn}t^{'}_{n2}\right) + ... + x_n t_{nn}t^{'}_{nn} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} t_{nj}t^{'}_{jk}\right)x_k \\
&= \left[\left(TT^{'}\right)X\right]_n .
\end{aligned}$$

D'où (2.3).

ii) On sait que l'inverse de tout élément $T \in \pounds$ appartient à $\pounds$, [12, Remarque 2 (a), p. 22]. Donc en utilisant i) avec $T^{'} = T^{-1}$ on prouve que la relation (2.4) est vérifiée.

iii) L'équation $TX = 0$ équivaut à

$$\sum_{k=1}^{n} t_{nk}x_k = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

En prenant $n = 1$ on a

$$t_{11}x_1 = 0, \text{ ce qui implique } x_1 = 0,$$

puis pour $n = 2$ on a

$$t_{21}x_1 + t_{22}x_2 = 0 \text{ implique que } x_2 = 0.$$

De proche en proche on conclut que

$$x_n = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

et $X = 0$. D'où

$$\ker T = \{0\} \text{ et } (\ker T) \cap \chi = \{0\},$$

pour tout $\chi \subset s$. ∎

Enonçons un lemme permettant de montrer l'existence d'une solution d'un tel système.

Lemme 2.2. *Soit $T \in \pounds$. L'équation (2.2) où $B \in F$ admet une seule solution dans E si et seulement si*

$$T^{-1} \in (F, E). \tag{2.5}$$

Preuve. Condition nécessaire. Les matrices T et T^{-1} appartiennent à £ et l'équation (2.2) équivaut à

$$T^{-1}(TX) = \left(T^{-1}T\right)X = X = T^{-1}B.$$

Comme cette équation admet une seule solution dans E pour tout $B \in F$ alors $T^{-1} \in (F, E)$.

Condition suffisante. Supposons qu'on ait (2.5), alors $X = T^{-1}B \in E$ et

$$TX = T(T^{-1}B) = B,$$

car T est un triangle. Donc l'équation (2.2) admet une unique solution dans E, car $(\ker T) \cap E = \{0\}$. ■

Remarque 2.3. *Si $E = F = s$ la condition (2.5) est toujours vérifiée car tout triangle appartient à (s, s).*

Nous utiliserons aussi les trois lemmes suivants où T est un triangle.

Lemme 2.4. *[83] Soient E, $F \subset s$ et soit A une matrice quelconque. Alors $A \in (E, F(T))$ si et seulement si*

$$TA \in (E, F).$$

Lorsque A est un triangle on a aussi le résultat suivant.

Lemme 2.5. *Soient E, $F \subset s$ et $T' \in$ £. On a $T' \in (E(T), F)$ si et seulement si*

$$T'T^{-1} \in (E, F).$$

Preuve. En effet, $T' \in (E(T), F)$ signifie que $T'X \in F$ pour tout $X \in E(T)$. Or on a

$$E(T) = T^{-1}E, \text{ pour tout } E \subset s.$$

C'est à dire pour tout $X \in E(T)$, il existe $Y \in E$ tel que

$$X = T^{-1}Y.$$

Donc $T' \in (E(T), F)$ si et seulement si

$$T'X = T'\left(T^{-1}Y\right) \in F, \text{ pour tout } Y \in E.$$

De l'identité

$$T'\left(T^{-1}Y\right) = \left(T'T^{-1}\right)Y$$

on conclut que $T' \in (E(T), F)$ équivaut à $T'T^{-1} \in (E, F)$. ■

On déduit aisément des deux lemmes précédents le résultat suivant.

Lemme 2.6. *Soit T un triangle et $E \subset s$. Alors T est une application bijective de $E(T)$ dans E.*

Preuve. Ce résultat découle du fait que $T \in (E(T), E)$ et $T^{-1} \in (E, E(T))$ si et seulement si $TT^{-1} = I \in (E, E)$. ■

Dans la suite on désigne par U^+ l'ensemble de toutes les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ telles que $x_n > 0$ pour tout n.

2.2.1 Applications aux opérateurs $\Delta(\lambda)$ et $C(\lambda)$.

Les équations $\Delta(\lambda) X = B$ et $C(\lambda) X = B$

Dans ce qui suit nous poserons

$$\Delta(\lambda) X = B \tag{2.6}$$

et

$$C(\lambda) X = B \tag{2.7}$$

Proposition 2.7. *Soit $\lambda \in U$.*

1) L'équation (2.6) où $B \in s$ admet une unique solution $X = (x_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$x_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{m=1}^{n} b_m, \ \ n = 1, 2, ... \tag{2.8}$$

2) L'équation (2.7) où $B \in s$ admet une unique solution $X = (x_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 b_1, \\ x_n = -\lambda_{n-1} b_{n-1} + \lambda_n b_n, \ \ n \geq 2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Preuve. 1) Soit $B = (b_n)_{n\geq 1} \in s$. Cherchons la suite X qui vérifie l'équation (2.6). Sachant que

$$[\Delta(\lambda)]^{-1} = C(\lambda)$$

on déduit que (2.6) équivaut à

$$C(\lambda) (\Delta(\lambda) X) = (C(\lambda)\Delta(\lambda)) X = X = C(\lambda)B,$$

car $C(\lambda)$ et $\Delta(\lambda)$ sont des triangles. Donc la seule solution dans s est

$$X = C(\lambda)B.$$

D'où (2.8).

2) Cherchons cette fois la suite X qui vérifie l'équation (2.7). D'une façon analogue on a $C(\lambda) X = B$ si et seulement si

$$\Delta(\lambda) (C(\lambda) X) = \Delta(\lambda) B,$$

ce qui signifie que (2.7) équivaut à $X = \Delta(\lambda)B$ et donc (2.9) est vérifiée. ■

L'opérateur $\Delta(\lambda)$ en tant qu'application de E dans E et l'équation $\Delta(\lambda) X = B$, où $B \in E$ et $E = \ell_\infty$, c_0, ou c.

Dans ce paragraphe on étudie l'équation $\Delta(\lambda) X = B$, où $\lambda \in U^+$, B appartient respectivement à l'un des espaces $E = \ell_\infty$, c_0, ou c et on donne des conditions sous lesquelles l'unique solution appartient à ce même espace.

Rappelons maintenant les hypothèses suivantes :

$$\lambda \in \ell_\infty \tag{2.10}$$

$$\frac{n}{\lambda_n} = O(1) \quad (n \to \infty), \tag{2.11}$$

$$\text{Il existe } l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{n}{\lambda_n} \to l \quad (n \to \infty) \tag{2.12}$$

$$\text{Il existe } l' \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda_n - \lambda_{n-1} \to l' \quad (n \to \infty) \tag{2.13}$$

Théorème 2.8. *Considérons les propriétés suivantes.*

i) $\Delta(\lambda) \in (c, c)$,

ii) $c \subset c(\Delta(\lambda))$,

iii) $D_\lambda c \subset c(\Delta)$.

1- i) ii) et iii) sont équivalents à (2.10) et (2.13).

2- On a

$$c(\Delta(\lambda)) \neq c.$$

3- L'opérateur $\Delta(\lambda)$ n'est pas une bijection de c dans c.

Preuve. 1) i) équivaut à (2.10) et (2.13), cela provient de la Proposition 1.31 du Chapitre I. De plus on a évidemment i) équivalent à ii). Donc pour montrer 1, il suffit de montrer que iii) équivaut à ii). En effet iii) s'écrit

$$D_\lambda \, c \subset \Sigma \, c,$$

c'est à dire

$$c \subset D_{\frac{1}{\lambda}} \Sigma \, c = C(\lambda) \ \ c = c \ \ (\Delta(\lambda)).$$

Donc (iii) équivaut à (ii). Ce qui entraîne que (i), (ii) et (iii) sont équivalents à (2.10) et (2.13).

2) Prouvons maintenant que $c \neq c \ (\Delta(\lambda))$. On a vu d'après 1 que $c \subset c \ (\Delta(\lambda))$ est équivalent à (2.10) et (2.13). D'autre part la condition $c(\Delta(\lambda)) \subset c$ équivaut à

$$I \in (c(\Delta(\lambda)), c),$$

ce qui revient à dire que

$$[\Delta(\lambda)]^{-1} = C(\lambda) \in (c, c).$$

On a vu au Chapitre I Proposition 1.31 que cette condition équivaut à (2.12). Or (2.10) et (2.12) sont contradictoires, donc $c \neq c(\Delta(\lambda))$, ce qui achève la démonstration de 2.

3) est une conséquence directe de 2. ■

Considérons maintenant l'équation $\Delta(\lambda) X = B$ où $B \in \ell_\infty$. Nous étudierons successivement les cas où $\lambda \in \ell_\infty$ et $\lambda_n \geq Kn$ pour tout n. On a le théorème suivant.

Théorème 2.9. *1- On suppose que $\lambda \in \ell_\infty$. Alors*

i) a) $\Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$,

b) $\ell_\infty \subset \ell_\infty(\Delta(\lambda))$,

c) $\Delta(\lambda) : \ell_\infty \to \ell_\infty$ n'est pas surjective,

ii) L'équation $\Delta(\lambda) X = B$, où $B \in \ell_\infty$ admet une solution dans $\ell_\infty(\Delta(\lambda))$, cette solution n'appartient pas nécessairement à ℓ_∞.

2- On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\lambda_n \geq Kn \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{2.14}$$

On a les résultats suivants

i) $\Delta(\lambda) \notin (\ell_\infty, \ell_\infty)$,

ii) L'équation $\Delta(\lambda) X = B$, où $B \in \ell_\infty$ admet dans ℓ_∞ une seule solution donnée par (2.8).

Preuve. 1. i) a) Vient du fait que $\lambda \in \ell_\infty$.

i) b) On a $\lambda \in \ell_\infty$ donc $\Delta(\lambda) \in S_1 = (\ell_\infty, \ell_\infty)$ et d'après le Lemme 2.4 on obtient que $I \in (\ell_\infty, \ell_\infty(\Delta(\lambda)))$. Cela implique que tout X de ℓ_∞ est un élément de $\ell_\infty(\Delta(\lambda))$. D'où l'inclusion.

i) c) Comme $\Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$, il reste à prouver que $C(\lambda) \notin (\ell_\infty, \ell_\infty)$. En effet, supposons que $C(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$. D'après la Proposition 1.31 du Chapitre I on a $C(\lambda) \in S_1$ si et seulement si

$$\frac{n}{\lambda_n} = O(1) \ \ (n \to \infty),$$

ce qui revient à dire qu'il existe $K > 0$ tel que $\lambda_n \geq Kn$ pour tout n.

Donc λ_n tend vers l'infini quand $n \to \infty$, ce qui est contradictoire. D'où le résultat.

ii) Du Lemme 2.6 on déduit que $\Delta(\lambda)$ est bijective de $\ell_\infty(\Delta(\lambda))$ dans ℓ_∞. Comme $\lambda \in \ell_\infty$ on a vu qu'alors $C(\lambda) \notin (\ell_\infty, \ell_\infty)$, puisque $C(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ équivaut à (2.11). Donc la solution de (2.6) où $B \in \ell_\infty$ n'appartient pas nécessairement à ℓ_∞.

2. i) D'après la Proposition 1.31 du Chapitre I, on a $\Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ si et seulement si $\lambda \in \ell_\infty$. Or la condition (2.14) implique

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Ce qui est contradictoire. Donc $\Delta(\lambda) \notin (\ell_\infty, \ell_\infty)$.

2. ii) D'après le Lemme 2.2 il suffit que $C(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$, mais on a vu dans la Proposition 1.31 ii) a) du Chapitre I que cette propriété est équivalente à (2.11), elle même équivalente à (2.14). D'où le résultat. ∎

Proposition 2.10. *Soit* $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \in U^+$.

i) Supposons que la condition suivante soit vérifiée

$$\sup_n \left\{ \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{k}{\lambda_n} - \frac{k-1}{\lambda_{n-1}} \right| + \frac{1}{\lambda_n} \right\}, \tag{2.15}$$

alors $C(\lambda) \in (l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta))$.

ii) Supposons que la suite $(n\lambda_n)_{n\geq 1} \in l_\infty$, *alors* $\Delta(\lambda) \in (l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta))$.

Preuve. i) D'après les Lemmes 2.4 et 2.5, on a $C(\lambda) \in (l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta))$ si et seulement si $\Delta C(\lambda) \in (l_\infty(\Delta), l_\infty)$, c-à-d $\Delta C(\lambda)\Delta^{-1} \in S_1 = (l_\infty, l_\infty)$ et comme $\Delta C(\lambda)\Delta^{-1} = \Delta D_{1/\lambda}\Sigma^2$ on conclut que $C(\lambda) \in (l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta))$ équivaut à $\Delta D_{1/\lambda}\Sigma^2 \in S_1$.

La transposée du triangle Σ est la matrice infinie associée à la fonction $f : z \mapsto f(z)$ définie par $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, où on note

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ . & . & . & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = {}^t\left(\varphi\left(f(z)\right)\right) = {}^t\left(\varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\right),$$

où $|z| < 1$. Un calcul simple donne

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & 0 & \\ 3 & 2 & 1 & & & \\ . & . & . & . & & \\ n & n-1 & . & 2 & 1 & \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

car ${}^t\left(\Sigma^2\right) = {}^t\left(\varphi\left(f(z)\right)^2\right)$ est le triangle associé à la fonction $z \mapsto f^2(z) = (1-z)^{-2}$ avec $|z| < 1$, où

$$f^2(z) = (1-z)^{-2} = 1 + 2z + \frac{(-2)(-3)}{2!}z^2 + \ldots + nz^{n-1} + (n+1)z^n + \ldots.$$

On a ensuite

$$D_{\frac{1}{\lambda}}\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & & & \\ \frac{2}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_2} & & \mathbf{0} & & \\ . & . & . & . & & \\ \frac{n}{\lambda_n} & \frac{n-1}{\lambda_n} & . & \frac{2}{\lambda_n} & \frac{1}{\lambda_n} & \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

et en multipliant par Δ on obtient

$$\begin{aligned} \Delta D_{\frac{1}{\lambda}}\Sigma^2 &= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & . & . & & \\ \mathbf{0} & & -1 & 1 & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & & \\ \frac{2}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_2} & & & \mathbf{0} \\ . & . & . & . & \\ \frac{n}{\lambda_n} & \frac{n-1}{\lambda_n} & . & \frac{2}{\lambda_n} & \frac{1}{\lambda_n} \\ & & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & & & \\ \frac{-1}{\lambda_1}+\frac{2}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_2} & & & \mathbf{0} & \\ \frac{-2}{\lambda_2}+\frac{3}{\lambda_3} & \frac{-1}{\lambda_2}+\frac{2}{\lambda_3} & & \frac{1}{\lambda_3} & & \\ . & . & & . & . & \\ \frac{-(n-1)}{\lambda_{n-1}}+\frac{n}{\lambda_n} & \frac{-(n-2)}{\lambda_{n-1}}+\frac{(n-1)}{\lambda_n} & . & . & \frac{-1}{\lambda_{n-1}}+\frac{2}{\lambda_n} & \frac{1}{\lambda_n} \\ & & & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut que $\Delta D_{\frac{1}{\lambda}}\Sigma^2 \in S_1$ si et seulement si la condition (2.15) est vérifiée.

ii) On a $\Delta(\lambda) \in (l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta))$ si et seulement si $\Delta\Delta(\lambda)\Sigma \in (l_\infty, l_\infty)$, ce qui signifie que $\Delta^2 D_\lambda \Sigma \in (l_\infty, l_\infty) = S_1$ car $\Delta(\lambda) = \Delta D_\lambda$. Mais

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -2 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & . & . & . & \\ & \mathbf{0} & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & \end{pmatrix},$$

donc

$$\Delta^2 D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ -2\lambda_1 & \lambda_2 & & & & \\ \lambda_1 & -2\lambda_2 & \lambda_3 & & \mathbf{0} & \\ & \lambda_2 & -2\lambda_3 & \lambda_4 & & \\ & & . & . & . & \\ & \mathbf{0} & & \lambda_{n-2} & -2\lambda_{n-1} & \lambda_n \\ & & & & & \end{pmatrix},$$

et

$$\Delta^2 D_\lambda \Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ -2\lambda_1+\lambda_2 & \lambda_2 & & & & \mathbf{0} & \\ \lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3 & -2\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_3 & & & & \\ . & . & . & . & & & \\ & & & & & . & \\ \lambda_{n-2}-2\lambda_{n-1}+\lambda_n & . & . & \lambda_{n-2}-2\lambda_{n-1}+\lambda_n & & -2\lambda_{n-1}+\lambda_n & \lambda_n \\ . & . & . & . & & . & . \quad . \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que $\Delta^2 D_\lambda \Sigma \in S_1$ si

$$\sup_n \left(\lambda_n + |\lambda_n - 2\lambda_{n-1}| + (n-2)\,|\lambda_{n-2} - 2\lambda_{n-1} + \lambda_n|\right) < \infty.$$

Donc la condition $n\lambda_n = O(1)$ implique

$$|(n-2)\,\lambda_{n-2}| + 2\,|(n-2)\,\lambda_{n-1}| + (n-2)\,\lambda_n = O(1),$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 2.11. *Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \in U^+$ une suite décroissante. Supposons que la condition suivante soit vérifiée*

$$\frac{n^2}{\lambda_n} = O(1). \tag{2.16}$$

Alors $C(\lambda) \in (l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta))$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{k}{\lambda_n}-\frac{k-1}{\lambda_{n-1}}\right|+\frac{1}{\lambda_n} &\leq \sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\lambda_n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{\lambda_{n-1}}+\frac{1}{\lambda_n}\\ &\leq \frac{1}{\lambda_n}+\frac{(n-1)(n+2)}{2\lambda_n}+\frac{n(n-1)}{2\lambda_{n-1}}\\ &\leq \frac{n^2+n}{2\lambda_n}+\frac{n(n-1)}{2\lambda_{n-1}}\\ &\leq \frac{n^2}{\lambda_n}+\frac{n^2}{2\lambda_{n-1}}\\ &\leq \frac{3}{2}\frac{n^2}{\lambda_n}.\end{aligned}$$

Comme $n^2/\lambda_n = O(1)$ est vérifiée, on a alors $C(\lambda) \in (l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta))$. ■

2.2.2 Etude des équations $\Delta(\lambda) X = B$ et $C(\lambda) X = B$ où $\lambda \in U^+$, $B \in \{\ell_\infty, c_0, c, \ell_p(\lambda)\}$.

Citons d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.12. *[27, Lemme 3, pp. 198-199] Soient A une matrice infinie, τ et β deux suites appartenant à U^+. Alors on a l'équivalence suivante*

$$A \in (D_\tau E, D_\beta F) \Leftrightarrow D_{\frac{1}{\beta}} A D_\tau \in (E, F).$$

Tous les résultats précédents peuvent être résumés par le théorème suivant où on définit

$$\ell_p(\lambda) = D_\lambda \ell_p = \left\{X \in s : \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x_n|}{\lambda_n}\right)^p < \infty\right\},$$

et

$$\Gamma = \left\{\theta = (\theta_n)_{n\geq 1} \in U^+ : \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}\right) < 1\right\}.$$

Théorème 2.13. *(i) a) Si (2.11) est vérifiée, l'équation (2.6) où $B \in \ell_\infty$, (respectivement c_0) admet une seule solution dans ℓ_∞, (respectivement c_0).*

b) Si (2.12) est vérifiée, l'équation (2.6) où $B \in c$, admet une seule solution dans c.

c) Soit $1 \leq p < \infty$. Si $\lambda \in \Gamma$, l'équation (2.6) où $B \in D_\lambda \ell_p$, admet une seule solution dans ℓ_p.

(ii) a) Si (2.10) est vérifié, l'équation (2.7) où $B \in \ell_\infty$, (respectivement c_0) admet une seule solution dans ℓ_∞, (respectivement c_0).

b) Si (2.13) est vérifié, l'équation (2.7) où $B \in c$, admet une seule solution dans c.

c) Soit $1 \leq p < \infty$. Si $\lambda \in \ell_\infty$, l'équation (2.7) où $B \in \ell_p$, admet une seule solution dans ℓ_p.

Preuve. (i) a) Le cas où $B \in \ell_\infty$ a été étudié dans le Théorème 9. Supposons maintenant qu'on ait $B \in c_0$, alors d'après le Lemme 2.2, l'équation (2.6) admet une seule solution dans c_0 si et seulement si $C(\lambda) = \Delta(\lambda)^{-1} \in (c_0, c_0)$. Or d'après la Proposition 24 i) du chapitre I on a

$$C(\lambda) \in (c_0, c_0) \text{ si et seulement si l'hypothèse (2.11) est vérifiée.}$$

Donc l'équation (2.6) où $B \in c_0$, admet une seule solution dans c_0.

(i) b) Supposons que (2.12) soit vérifiée. Comme $\Delta(\lambda) \in \pounds$, d'après le Lemme 2.2 l'équation (2.6), où $B \in c$, admet une seule solution dans c si et seulement si $C(\lambda) \in (c, c)$. Or d'après la Proposition 1.31 ii) c) du Chapitre I on sait que $C(\lambda) \in (c, c)$ si et seulement si l'hypothèse (2.12) est vérifiée. D'où le résultat.

(i) c) D'après [31, Th. 6.5 p. 3200] on a $\lambda \in \Gamma$ implique

$$\ell_p(\lambda)(\Delta) = \ell_p(\lambda)$$

Donc Δ est bijective de $\ell_p(\lambda)$ dans lui-même et

$$\Delta^{-1} = \Sigma \in (\ell_p(\lambda), \ell_p(\lambda)).$$

Donc pour tout $B \in \ell_p(\lambda)$ l'équation

$$\Delta(\lambda) X = B$$

admet une seule solution dans ℓ_p, car d'après le Lemme 2.12

$$C(\lambda) = D_{1/\lambda}\Sigma \in (D_\lambda \ell_p, \ell_p).$$

(ii) a) Supposons que (2.10) soit vérifiée, puisque $C(\lambda) \in \pounds$ en utilisant le Lemme 2.2 l'équation (2.7) où $B \in \ell_\infty$, admet une seule solution dans ℓ_∞ si et seulement si $C(\lambda)^{-1} = \Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$. Or on sait d'après la Proposition 1.31 i) a) du Chapitre I que $\Delta(\lambda) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ si et seulement si (2.10) est vérifiée. D'où le résultat.

Supposons maintenant qu'on a $B \in c_0$, alors d'après le Lemme 2.2, l'équation (2.7) admet une seule solution dans c_0 si et seulement si $\Delta(\lambda) \in (c_0, c_0)$. Mais d'après la Proposition 1.31 i) b) du Chapitre I on a $\Delta(\lambda) \in (c_0, c_0)$ si et seulement si (2.10) est vérifiée. Ceci entraîne que l'équation (2.7) où $B \in c_0$, admet une seule solution dans c_0.

(ii) b) Supposons que (2.13) soit vérifiée, l'équation (2.7) où $B \in c$, admet une seule solution dans c si et seulement si $\Delta(\lambda) \in (c, c)$. Or d'après la Proposition

1.31 i) c) du Chapitre I on a $\Delta(\lambda) \in (c, c)$ si et seulement si (2.10) et (2.13) sont vérifiées. Mais on voit évidemment que $\lambda \in \ell_\infty$ et donc (2.10) est vérifiée. Donc l'équation (2.7) où $B \in c$, admet une seule solution dans c.

(ii) c) Supposons que $1 \leq p < \infty$. Si

$$\sup_n (\lambda_n) < \infty,$$

l'équation (2.7) où $B \in \ell_p$, admet une seule solution dans ℓ_p si et seulement si $\Delta(\lambda) \in (\ell_p, \ell_p)$. Mais d'après la Proposition 2.7 la solution $X = (x_n)_{n\geq 1}$ de cette équation est définie par définie par

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 b_1, \\ x_n = -\lambda_{n-1} b_{n-1} + \lambda_n b_n, \ n \geq 2; \end{cases}$$

or $B \in \ell_p$ signifie

$$\|B\|_{\ell_p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p < \infty.$$

On a

$$\|X\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |-\lambda_{n-1} b_{n-1} + \lambda_n b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

avec la condition $b_0 = 0$. D'après l'inégalité de Minkowsky on déduit que

$$\begin{aligned} \|X\|_{\ell_p} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |-\lambda_{n-1} b_{n-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\,\|\lambda\|_{\ell_\infty} \|B\|_{\ell_p} < \infty. \end{aligned}$$

Donc $X = (x_n)_{n\geq 1}$ appartient à l'espace ℓ_p et l'équation (2.7) où $B \in \ell_p$, admet une seule solution dans ℓ_p. ■

2.3 Etude de l'équation $\overline{N}_q X = B$

Soient $q = (q_n)_{n\geq 1}$ et $Q = (Q_n)_{n\geq 1}$ deux suites telles que $q_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, et $Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$. On définit le triangle $\overline{N}_q = (a_{nm})_{nm\geq 1}$ comme suit :

$$a_{nm} = \begin{cases} \frac{q_m}{Q_n} & \text{si } m \leq n, \\ \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$$

Ce qui se traduit par :

$$\overline{N}_q = \begin{pmatrix} \frac{q_1}{Q_1} & & & & \\ \frac{q_1}{Q_2} & \frac{q_2}{Q_2} & & & \\ . & . & . & & \\ \frac{q_1}{Q_n} & . & . & \frac{q_n}{Q_n} & \\ . & . & . & . & . \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est appelée opérateur de la moyenne pondérée. Notons que

$$\overline{N}_q = D_{\frac{1}{Q}} \Sigma D_q,$$

et que $\overline{N}_q$ est inversible et

$$\overline{N}_q^{-1} = \left(D_{\frac{1}{Q}} \Sigma D_q \right)^{-1} = D_{\frac{1}{q}} \Delta D_Q.$$

Ce qui se traduit par :

$$\overline{N}_q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{Q_1}{q_1} & & & & \\ \frac{-Q_1}{q_2} & \frac{Q_2}{q_2} & & \mathbf{0} & \\ & . & . & & \\ & & . & \frac{Q_{n-1}}{q_n} & \\ & \mathbf{0} & \frac{-Q_{n-1}}{q_n} & \frac{Q_n}{q_n} & \\ & & & . & . \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que l'équation $\overline{N}_q X = B$ admet une solution

$$X = \left(D_{\frac{1}{q}} \Delta D_Q \right) B.$$

Cette solution $X = (x_n)_{n \geq 1}$ vérifie les relations suivantes

$$\begin{cases} x_1 = \frac{Q_1 b_1}{q_1}, \\ \\ x_n = \frac{1}{q_n} \left(Q_n b_n - Q_{n-1} b_{n-1} \right), \; n = 2, 3, ... \end{cases} \tag{2.17}$$

Soit $E \subset s$, comme $\overline{N}_q \in$£ notons qu'en application du Lemme 2.6 on a

$$\overline{N}_q : E \left(\overline{N}_q \right) \to E,$$

où E est l'un des espaces c_0, c, ℓ_∞ ou ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, est bijective.

Dans ce qui suit nous poserons

$$\overline{N}_q X = B \tag{2.18}$$

et considèrerons la condition

$$\frac{Q}{q} \in \ell_\infty. \tag{2.19}$$

On va montrer que l'implication

$$\sup_n |b_n| < \infty \text{ implique } \sup_n \left(\left| \frac{1}{q_n} (Q_n b_n - Q_{n-1} b_{n-1}) \right| \right) < \infty \text{ pour tout } B = (b_n)_{n \geq 1}$$

équivaut à $Q/q \in \ell_\infty$.

Théorème 2.14. *i) L'équation (2.18) où B appartient respectivement à ℓ_∞, c_0, c admet une seule solution, définie par (2.17), dans ℓ_∞, c_0, c respectivement si et seulement si (2.19) est vérifié.*

ii) La condition (2.19) implique que l'équation (2.18) avec $B \in \ell_p$ admet une solution unique dans ℓ_p.

Preuve. i) Comme $\overline{N}_q \in$£, d'après le Lemme 2.2 l'équation (2.18) où $B \in \ell_\infty$, admet une solution dans ℓ_∞ si et seulement si $\left(\overline{N}_q\right)^{-1} \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$.

Or on a

$$\overline{N}_q^{-1} = D_{\frac{1}{q}} \Delta D_Q \in S_1$$

si et seulement si

$$\frac{Q_n + Q_{n-1}}{q_n} = \frac{2Q_n}{q_n} - 1 = O(1),$$

c-à-d $Q/q \in \ell_\infty$. Supposons maintenant que $B \in c_0$, l'équation (2.18) où $B \in c_0$ admet une solution dans c_0 si et seulement si $\left(\overline{N}_q\right)^{-1} \in (c_0, c_0)$.

Or $\overline{N}_q^{-1} \in (c_0, c_0)$ si et seulement si $\overline{N}_q^{-1} \in S_1$ et

$$\left[\overline{N}_q^{-1}\right]_{nm} \to 0 \ (n \to \infty) \text{ pour tout } m.$$

La seconde hypothèse est satisfaite car $\overline{N}_q^{-1}$ est une matrice bande. Pour la première hypothèse, on a $\overline{N}_q^{-1} \in S_1$ si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\frac{Q_n}{q_n} + \frac{Q_{n-1}}{q_n} \leq M, \text{ pour tout } n.$$

Comme $0 \leq \frac{Q_n}{q_n} \leq \frac{Q_n}{q_n} + \frac{Q_{n-1}}{q_n} \leq M$, pour tout n, on déduit que $Q/q \in \ell_\infty$. Réciproquement si $Q/q \in \ell_\infty$, comme Q_n est croissante on a

$$\frac{Q_{n-1}}{q_n} \leq \frac{Q_n}{q_n}$$

et $\overline{N}_q^{-1} \in S_1$.

D'une façon analogue, l'équation (2.18), où B appartient à c admet une seule solution dans c si et seulement si $\left(\overline{N}_q\right)^{-1} \in (c, c)$. Or $\left(\overline{N}_q\right)^{-1} \in (c, c)$ équivaut à

$$D_{\frac{1}{q}} \Delta D_Q \in (c, c) \tag{2.20}$$

D'après la Proposition 24 du Chapitre I, (2.20) est vérifiée si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{q_n} \to l \ \ (n \to \infty) \\ \\ \frac{Q_n + Q_{n-1}}{q_n} = O(1) \ \ (n \to \infty). \end{cases}$$

Comme

$$\frac{Q_n - Q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_n}{q_n} = 1,$$

la condition (2.18) est vérifiée si et seulement si

$$\frac{Q_n + Q_{n-1}}{q_n} = \frac{2Q_n}{q_n} - 1 = O(1) \ \ (n \to \infty),$$

ce qui signifie que $Q/q \in \ell_\infty$. D'où le résultat.

ii) D'après le Lemme 2.2 l'équation (2.18) où $B \in \ell_\infty$, admet une solution dans ℓ_p si et seulement si $\left(\overline{N}_q\right)^{-1} \in (\ell_p, \ell_p)$.

Or $B \in \ell_p$ signifie

$$\|B\|_{\ell_p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p < \infty.$$

On a

$$\|X\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{q_n}\left(Q_n b_n - Q_{n-1} b_{n-1}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ avec la convention } b_0 = 0.$$

Sachant que $(Q_n)_{n\geq 1}$ est croissante, on a $\frac{Q_{n-1}}{q_n} \leq \frac{Q_n}{q_n}$ pour tout n et donc

$$\begin{aligned} \|X\|_{\ell_p} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{Q_n}{q_n} b_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{Q_{n-1}}{q_n} b_{n-1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\left\|\frac{Q}{q}\right\|_{\ell_\infty} \|B\|_{\ell_p} < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi $X = (x_n)_{n\geq 1}$ appartient à l'espace ℓ_p et l'équation (2.18) où $B \in \ell_p$, admet une unique solution dans ℓ_p. ■

2.4 Cas des équations $^{t}\Delta(\lambda)X = B$ et $^{t}C(\lambda)X = B$.

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'étude de systèmes de la forme $^{t}\Delta(\lambda)X = B$, $^{t}C(\lambda)X = B$, où B appartient à l'un des espaces ℓ_∞, c_0, c, ou ℓ_p. Rappelons que $^{t}\Delta(\lambda)$ et $^{t}C(\lambda)$ sont les matrices transposées de $\Delta(\lambda)$ et $C(\lambda)$ respectivement. On note $\Delta^+(\lambda)$ et $C^+(\lambda)$ ces deux matrices. Dans le cas où $\lambda = (1, 1, ...)$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.15. *i) $\Sigma^+ : cs \to c_0$ est bijective et l'équation $\Sigma^+ X = B$ où $B \in c_0$ admet $X = \Delta^+ B$ comme seule solution dans cs.*

ii) L'équation $\Delta^+ X = B$ où $B \in s$ admet une infinité de solutions $X = (x_n)_{n \geq 1}$ dans s avec

$$\begin{cases} x_1 = u, \\ x_n = u - \sum_{k=1}^{n-1} b_k, \quad n \geq 2, \end{cases}$$

où u est une constante arbitraire.

Preuve. i) On a $\Sigma^+ \in (cs, c_0)$ d'après la Proposition 28 du Chapitre I. Ensuite soit $B \in c_0$. L'équation $\Sigma^+ X = B$ où $X \in cs$ s'écrit

$$\sum_{m=n}^{\infty} x_m = b_n, \ n = 1, 2, ...$$

ce qui équivaut à

$$x_n = b_n - b_{n+1} = \Delta_n^+ (B), \ n = 1, 2, ...$$

Or $\Delta^+ B \in cs$ car

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_m = \sum_{m=1}^{\infty} (b_m - b_{m+1}) = b_1.$$

D'où pour tout $B \in c_0$ il existe une unique solution $X = \Delta^+ B \in cs$ vérifiant l'équation $\Sigma^+ X = B$. Donc Σ^+ est bijective.

ii) Soit $B \in s$. L'équation $\Delta^+ X = B$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & \mathbf{0} & \\ & & . & . & & \\ & \mathbf{0} & & 1 & -1 & \\ & & & & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \\ . \end{pmatrix},$$

et donc à

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ . \\ x_n - x_{n+1} \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \\ . \end{pmatrix}.$$

En posant $x_1 = u$, où u est une constante arbiraire, on obtient

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + ... + (x_{n-1} - x_n) &= u - x_n \\ &= b_1 + ... + b_{n-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$x_n = u - \sum_{k=1}^{n-1} b_k, \quad n \geq 2.$$

Ce qui donne le résultat. ■

Soit $\lambda \in U$. On rappelle, voir remarque 30, que la transposé $\Delta^+(\lambda)$ de $\Delta(\lambda)$ est le triangle supérieur défini par

$$\begin{cases} [\Delta^+(\lambda)]_{n,n} = \lambda_n, \text{ pour tout } n, \\ [\Delta^+(\lambda)]_{n,n+1} = -\lambda_n, \text{ pour tout } n, \\ [\Delta^+(\lambda)]_{n,m} = 0, \text{ pour } n \neq m \text{ ou } n \neq m+1. \end{cases}$$

La transposée de $C(\lambda)$ est le triangle supérieur $C^+(\lambda)$ défini par

$$\begin{cases} [C^+(\lambda)]_{n,m} = 1/\lambda_m, \text{ pour tout } m \geq n \geq 1, \\ [C^+(\lambda)]_{n,m} = 0, \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Dans la suite, nous poserons

$$\Delta^+(\lambda) X = B \tag{2.21}$$

$$C^+(\lambda) X = B \tag{2.22}$$

On va montrer entre autre que si $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n b_n - \lambda_{n+1} b_{n+1}}{\lambda_n} \text{ est convergente.}$$

Dans ce qui suit nous utiliserons l'espace $D_\lambda cs = cs(\lambda)$, ensemble des suites $X = (x_n)_{n\geq 1}$ telles que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n/\lambda_n$ est convergente.

Proposition 2.16. *Soit $\lambda \in U$.*

1) L'équation (2.21) où $B \in D_\lambda cs$ admet une solution unique $X = (x_n)_{n\geq 1}$ dans c_0 définie par

$$x_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k}, \ n = 1, 2, ... \tag{2.23}$$

2) L'équation (2.22) où $B \in c_0$ admet une unique solution $X = (x_n)_{n\geq 1}$ dans $cs(\lambda) = D_\lambda cs$ définie par

$$x_n = \lambda_n b_n - \lambda_{n+1} b_{n+1}, \ n = 1, 2, ... \tag{2.24}$$

Preuve. 1) L'équation (2.21) avec $B = (b_n)_{n\geq 1} \in D_\lambda cs$ est équivalente à l'équation

$$\Delta^+ X = D_{\frac{1}{\lambda}} B, \tag{2.25}$$

avec $D_{1/\lambda}B \in cs$. D'après la Proposition 2.15 i) on sait que Δ^{+} est bijective de c_0 dans cs, donc pour tout $B \in D_\lambda cs$ il existe une unique solution $X = (x_n)_{n\geq 1}$ dans c_0 qui vérifie l'équation (2.25). D'autre part, lorsque $D_{\frac{1}{\lambda}}B \in cs$ cette dernière équation est équivalente à

$$X = (x_n)_{n\geq 1} = \left(u - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{\lambda_k}\right)_{n\geq 1} \in c_0.$$

avec

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k} \quad \text{et} \quad x_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k}, n = 1, 2, ...$$

D'où le résultat.

2) L'équation (2.22) est équivalente à

$$\Sigma^{+} D_{\frac{1}{\lambda}} X = B.$$

Cette équation est équivalente à l'équation

$$\Sigma^{+} Y = B, \tag{2.26}$$

avec $Y = D_{1/\lambda}X$ soit $X = D_\lambda Y$. D'après la Proposition 2.15 i) on déduit que si $B \in c_0$, alors $Y = \Delta^{+}B \in cs$ est la seule solution de (2.26) et $\Sigma^{+} \in (cs, c_0)$. Donc $X = D_\lambda Y = D_\lambda \Delta^{+} B \in D_\lambda cs = cs(\lambda)$ est la seule solution de l'équation (2.22). Cela implique que l'équation

$$C^{+}(\lambda) : D_\lambda cs \to c_0$$

est bijective et la seule solution de (2.22), où $B \in c_0$, est

$$\begin{aligned} X &= \Delta^{+}(\lambda) B \\ &= (\lambda_n b_n - \lambda_{n+1} b_{n+1})_{n\geq 1} \in cs(\lambda). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 3

L'algèbre de Banach S_1 et application à la résolution de l'équation $AX = B$

Dans ce chapitre nous explicitons une *sous algèbre de l'algèbre des opérateurs bornés de* $\mathcal{B}(\ell_\infty)$. L'espace ℓ_∞ n'ayant pas de base de Schauder et n'étant donc pas un espace de type BK ayant la propriété AK, un opérateur $L \in \mathcal{B}(\ell_\infty)$ n'a pas forcément une représentation sous forme de matrice infinie. On s'intéresse donc à l'espace $S_1 = (\ell_\infty, \ell_\infty)$ distinct de l'espace $\mathcal{B}(\ell_\infty)$ en vue de résoudre dans ℓ_∞ l'équation $AX = B$ où $B \in \ell_\infty$. On va montrer que S_1 est un algèbre de Banach, ce qui permettra de déterminer si une matrice est inversible et de résoudre un système linéaire infini représenté par $AX = B$ lorsque B est borné et $A \in S_1$. On étudiera de tels systèmes lorsque $(1/\nu)\, A \in \Gamma_1$, $D_{1/a}A \in \Gamma_1$ et $AD_{1/a} \in \Gamma_1$. On définit ensuite l'algèbre de Banach S_α qui généralise S_1.

3.1 L'algèbre normée S_1

On utilisera l'espace réel M de toutes les matrices infinies $(a_{nm})_{n,m\geq 1}$ muni de l'addition et de la loi de composition externe habituelles a une structure d'espace vectoriel. Rappelons que

$$S_1 = \left\{ A : \|A\|_{S_1} = \sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \right) < \infty \right\}.$$

Etant donné deux matrices $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ et $B = (b_{nm})_{n,m\geq 1} \in M$, on se demande dans quelle mesure le produit

$$C = A.B = (c_{nm})_{n,m\geq 1}$$

où

$$c_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{km}$$

a un sens ? Le cas échéant le produit $C = A.B$ appartient-il à M ?

On peut affirmer les résultats suivants.

Lemme 3.1. *L'ensemble S_1 a une structure d'algèbre et pour tout $(A, A', X) \in S_1 \times S_1 \times \ell_\infty$ on a*

$$\begin{aligned} i) \ \|AA'\|_{S_1} &\leq \|A\|_{S_1} \|A'\|_{S_1}, \\ ii) \ \|AX\|_{\ell_\infty} &\leq \|A\|_{S_1} \|X\|_{\ell_\infty}. \end{aligned}$$

Preuve. Soient $(A, A') \in S_1 \times S_1$. Montrons que $C = AA' = (c_{nm})_{n,m\geq 1} \in S_1$ où

$$c_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} a'_{km}$$

et

$$\|A\|_{S_1} = \sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \right) < \infty, \ \ \|A'\|_{S_1} = \sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a'_{nm}| \right) < \infty.$$

Soient n, N_1, N_2 dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{m=1}^{N_1} |c_{nm}| = \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} |a_{nk} a'_{km}| \leq \sum_{m=1}^{N_1} |a'_{km}| \sum_{k=1}^{N_2} |a_{nk}|,$$

et faisant N_1 et N_2 tendre vers l'infini on obtient :

$$\begin{aligned} \|C\|_{S_1} &= \sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| \right), \\ &= \sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \right) \sup_k \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a'_{km}| \right), \\ &\leq \|A\|_{S_1} \|A'\|_{S_1}. \end{aligned}$$

L'inégalité ii) est une conséquence de la Remarque 1.27. ■

Ces résultats nous amènent à faire la remarque suivante.

Remarque 3.2. *Soit S l'ensemble des matrices $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ telles que*

$$\|A\|_S = \sup_{n,m} (|a_{nm}|) < \infty.$$

On a alors un résultat analogue au précédent. En effet si $(A, A') \in S_1 \times S$, on a

$$C = AA' \in S \text{ et } \left\|AA'\right\|_{S_1} \leq \|A\|_{S_1} \left\|A'\right\|_S .$$

En effet, soient n, m et N_1 des entiers. On a :

$$|c_{nm}| \leq \sum_{k=1}^{N_1} \left|a_{nk}a'_{km}\right| \leq \left(\sup_{k\leq N_1} \left|a'_{km}\right|\right) \sum_{k=1}^{N_1} |a_{nk}| \text{ pour tout } n,\ m.$$

En faisant N_1 tendre vers l'infini on obtient :

$$\sup_n (|c_{nm}|) \leq \sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk}a'_{km}\right|\right) \leq \sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|\right) \left(\sup_{k,m} \left|a'_{km}\right|\right), \text{ pour tout } m.$$

D'où

$$\left\|AA'\right\|_{S_1} \leq \|A\|_{S_1} \left\|A'\right\|_S .$$

3.2 Application à la résolution de l'équation $AX = B$ dans ℓ_∞ lorsque $(A, B) \in S_1 \times \ell_\infty$ par la méthode du point fixe.

Dans cette partie nous étudions l'équation $AX = B$ lorsque A est une matrice donnée de S_1 et $B \in \ell_\infty$. On a vu que $S_1 = (\ell_\infty, \ell_\infty)$ et donc A est un opérateur de ℓ_∞ dans lui-même. Ainsi pour tout $X \in \ell_\infty$ le produit AX appartient aussi à ℓ_∞. Dans ce qui suit nous donnons une condition nécessaire pour que A soit une bijection de ℓ_∞ dans lui-même en utilisant seulement le Lemme 2.1.

Dans la proposition qui suit les éléments diagonaux de A ne tendent ni vers zéro, ni vers l'infini.

Proposition 3.3. *[14] Soit ν un réel strictement positif, $B \in \ell_\infty$ et A une matrice infinie vérifiant :*

$$\|A - \nu I\|_{S_1} < \nu.$$

Alors l'équation

$$AX = B \tag{3.1}$$

admet une solution unique dans ℓ_∞.

Preuve. On pose

$$A' = \frac{1}{\nu}(A - \nu I),$$

puis on définit la fonction Φ par :

$$\Phi(X) = \frac{1}{\nu}B - A'X \text{ pour tout } X \text{ dans } \ell_\infty.$$

On voit aisément que $\|A'\|_{S_1} < 1$. Soit $Y \in \ell_\infty$, à la fonction Φ on associe la suite $(Y_l)_{l\geq 1}$, définie par :

$$Y_1 = \Phi(Y) \text{ et } Y_l = \Phi(Y_{l-1}) \text{ pour } l \geq 2.$$

Du Lemme 3.1 on déduit

$$\begin{aligned}
\|\Phi(Y_{l-1}) - \Phi(Y_l)\|_{\ell_\infty} &= \left\|A'(Y_{l-1} - Y_l)\right\|_{\ell_\infty} \\
&\leq \left\|A'\right\|_{S_1} \|Y_{l-1} - Y_l\|_{\ell_\infty}, \\
&\leq \left\|A'\right\|_{S_1}^l \|Y - Y_1\|_{\ell_\infty}.
\end{aligned}$$

Donc pour $l < s$, on a :

$$\begin{aligned}
\|Y_l - Y_s\|_{\ell_\infty} &\leq \|Y_l - Y_{l+1}\|_{s_1} + \ldots + \|Y_{s-1} - Y_s\|_{\ell_\infty} \\
&\leq \sum_{i=l}^{\infty} \|A'\|_{S_1}^i \ \|Y - Y_1\|_{\ell_\infty} \\
&\leq \frac{\|A'\|_{S_1}^l}{1 - \|A'\|_{S_1}} \|Y - Y_1\|_{\ell_\infty}.
\end{aligned}$$

Ainsi $(Y_l)_{\geq 1}$ est une suite de Cauchy de ℓ_∞ qui est complet, donc il existe une matrice colonne $\eta \in \ell_\infty$ telle que :

$$\lim_{l\to\infty} \|Y_l - \eta\|_{\ell_\infty} = 0.$$

Enfin,

$$\lim_{l\to\infty} \left\| \left(\frac{1}{\nu}B - A'Y_l\right) - \left(\frac{1}{\nu}B - A'\eta\right) \right\|_{\ell_\infty} \leq \left\|A'\right\|_{S_1} \lim_{l\to\infty} \|Y_l - \eta\|_{\ell_\infty}.$$

Or

$$\lim_{l\to\infty} \|Y_l - \eta\|_{\ell_\infty} = 0,$$

d'où :

$$\lim_{l\to\infty} \|\Phi(Y_l) - \Phi(\eta)\|_{\ell_\infty} = 0.$$

Soit $\Phi(\eta) = \eta$ ou encore $A\eta = B$. Il reste la question de l'unicité de η solution de (3.1) dans ℓ_∞. Soit η_1 et η_2 deux éléments de ℓ_∞ solutions de (3.1) on a :

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_{\ell_\infty} \leq \left\|A'\right\|_{S_1} \|\eta_1 - \eta_2\|_{\ell_\infty}$$

inégalité vérifiée dans le seul cas où $\eta_1 = \eta_2$. Donc l'équation (3.1) admet $X = \eta$ pour solution unique dans s_1. ■

Corollaire 3.4. *Soit ν un réel strictement positif, $B \in \ell_\infty$ et A une matrice infinie telle que : $\|A+\nu I\|_{S_1} < \nu$. Alors, l'équation $AX = B$ admet une solution unique dans ℓ_∞. Ce résultat découle du fait que $A+\nu I = -(-A-\nu I)$, ainsi $\|A+\nu I\|_{S_1} < \nu$ équivaut à $\|-A-\nu I\|_{S_1} < \nu$ et le résultat s'applique en remplaçant A par $-A$.*

3.3 Inverse d'une matrice infinie dans S_1 et application à la résolution de l'équation $AX = B$.

3.3.1 L'algèbre de Banach S_1.

Proposition 3.5. *[14] L'espace S_1 muni de la norme $\|A\|_{S_1}$ est une algèbre de Banach unitaire.*

Preuve. En effet on sait que S_1 est un espace vectoriel et d'après le Lemme 3.1 on déduit que si $(A, A') \in (S_1)^2$ alors AA' est bien dans S_1 et

$$\|AA'\|_{S_1} \leq \|A\|_{S_1} \|A'\|_{S_1} .$$

D'autre part pour tout n, m, $N \in \mathbb{N}^*$ l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{N} a_{nk}(a'_{km} + a''_{km}) = \sum_{k=1}^{N} a_{nk}a'_{km} + \sum_{k=1}^{N} a_{nk}a''_{km}$$

reste vraie lorsque N augmente indéfiniment, car A, A', A'' appartenant à S_1 il s'ensuit que $AA' + AA''$ et $A(A' + A'') \in S_1$.

Montrons que $A(A'A'') = (AA')A''$. Soient n, m, N_1, et N_2 quatre entiers supérieurs à 1. L'égalité :

$$\sum_{k=1}^{N_1} a_{nk} \sum_{l=1}^{N_2} (a'_{kl}a''_{lm}) = \sum_{l=1}^{N_1} \left(\sum_{k=1}^{N_2} a_{nk}a'_{kl} \right) a''_{lm}$$

reste vraie lorsque N_1, N_2 augmentent indéfiniment, ce qui montre que la multiplication est associative et que $A(A'A'') = (AA')A''$.

Par ailleurs, pour tout scalaire λ, A et $A' \in S_1$ on a immédiatement :

$$\lambda(AA') = (\lambda A)A' = A(\lambda A').$$

Du point de vue topologique, montrons que S_1 est complet. Soit $A(l) = (a_{nm}(l))_{n,m\geq 1}$ une suite Cauchy de S_1. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour $l, s > N_\varepsilon$ on a :

$$\|A(l) - A(s)\|_{S_1} := \sup_n \left(\sum_m |a_{nm}(l) - a_{nm}(s)| \right) \leq \varepsilon.$$

Or $(a_{nm}(l))_{n,m\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{C}$, convergente pour tout n et m, car $\mathbb{C}$ est complet , d'où

$$a_{nm} = \lim_{l\to\infty} a_{nm}(l). \tag{3.2}$$

Si maintenant on fixe $s = s_0 > N_\varepsilon$, on a pour tous n, $l > N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \lim_l \sum_m |a_{nm}(l) - a_{nm}(s_0)| &= \sum_m \lim_l |a_{nm}(l) - a_{nm}(s_0)| \\ &= \sum_m |a_{nm} - a_{nm}(s_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

L'expression (3.2) permet de déduire que :

$$\sup_n \sum_m |a_{nm} - a_{nm}(s)| \leq \varepsilon \text{ pour tout } s > N_\varepsilon.$$

Par passage à la limite, on déduit que

$$\lim_s \|A - A(s)\|_{S_1} = 0.$$

On conclut que $A = A - A(s) + A(s) \in S_1$ et S_1 est complet. On notera $I = (\delta_{nm})$, (δ_{nm} étant le symbole de Kronecker), I est bien un élément neutre pour la multiplication des matrices dans S_1. ∎

Remarque 3.6. *L'espace ℓ_1 étant un espace de type BK ayant la propriété AK on a*

$$B(\ell_1) = (\ell_1, \ell_1)$$

et (ℓ_1, ℓ_1) est une algèbre de Banach unitaire.

3.3.2 Application à la résolution de $AX = B$

La sous section précédente permet d'étudier l'équation $AX = B$ et d'expliciter la solution unique de celle-ci. Soit ν un réel strictement positif. Dans la suite il sera plus pratique d'utiliser la notation

$$\Gamma_1 = \left\{A : \|I - A\|_{S_1} < 1\right\}.$$

On est amené à étudier les 3 situations suivantes $(1/\nu)\,A \in \Gamma_1$, $D_{1/a}A \in \Gamma_1$ et $AD_{1/a} \in \Gamma_1$ où $a = (a_{nn})_{n\geq 1} \in U$ et $D_{1/a}$ est la matrice diagonale associée à la suite $1/a$.

Cas où $(1/\nu)\,A \in \Gamma_1$

L'avantage de ce résultat par rapport à la Proposition 3.3 réside dans l'expression de la solution du système, on a ainsi,

Proposition 3.7. *Soit $\nu > 0$. Supposons que $1/\nu \ A \in \Gamma_1$. Alors pour tout $B \in \ell_\infty$ l'équation $AX = B$ admet dans ℓ_∞ une solution unique X_0, définie par*

$$X_0 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=0}^{\infty} \left(I - \frac{1}{\nu} A \right)^i B.$$

Preuve. Soit $B \in \ell_\infty$. L'équation $AX = B$ est équivalente à

$$\left(\frac{1}{\nu} A \right) X = \frac{1}{\nu} B. \tag{3.3}$$

On a $1/\nu \ A \in \Gamma_1$ équivaut à

$$\left\| I - \frac{1}{\nu} A \right\|_{S_1} < 1.$$

L'espace S_1 étant une algèbre de Banach, on déduit que la matrice $1/\nu \ A$ est inversible et que $(1/\nu \ A)^{-1} \in S_1$. En multipliant chaque membre de l'égalité (3.3) par $(1/\nu \ A)^{-1}$ on voit qu'elle est équivalente à

$$\left(\frac{1}{\nu} A \right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\nu} A \right) X \right] = \left(\frac{1}{\nu} A \right)^{-1} \frac{1}{\nu} B.$$

Comme $(1/\nu \ A)^{-1}$, $(1/\nu \ A) \in S_1$ et $X \in \ell_\infty$ on a

$$\left(\frac{1}{\nu} A \right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\nu} A \right) X \right] = \left[\left(\frac{1}{\nu} A \right)^{-1} \left(\frac{1}{\nu} A \right) \right] X = X \text{ pour tout } X \in \ell_\infty.$$

On conclut que

$$X = \left(\frac{1}{\nu} A \right)^{-1} \frac{1}{\nu} B = \sum_{i=0}^{\infty} \left(I - \frac{1}{\nu} A \right)^i \frac{1}{\nu} B$$

est l'unique solution de $AX = B$. ■

Remarque 3.8. *La solution unique précédente n'est autre que $X = A^{-1}B$.*

On déduit facilement le corollaire suivant.

Corollaire 3.9. *Soit A une matrice appartenant à Γ_1. Alors pour tout $B \in \ell_\infty$ l'équation $AX = B$ admet dans ℓ_∞ une solution unique X_0, définie par*

$$X_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (I - A)^i B.$$

Exemple 3.10. *On considère la matrice A_ξ où $|\xi| < 1$, définie par*

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 1 & \xi & & & & \\ & 1 & \xi & & \mathbf{0} & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & \mathbf{0} & & 1 & \xi & \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que

$$\|I - A_\xi\|_{S_1} = |\xi| < 1$$

et l'équation

$$A_\xi X = B$$

où $B \in \ell_\infty$, admet une solution unique dans ℓ_∞. D'après le paragraphe 2.4 du Chapitre I on sait que $A_\xi = \varphi(f)$ avec $f(z) = 1 + \xi z$, et comme

$$\frac{1}{1+\xi z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^n z^n \text{ avec } |\xi| < 1,$$

on déduit que

$$A_\xi^{-1} = \varphi(f^{-1}) = \varphi\left(\frac{1}{1+\xi z}\right),$$

et alors :

$$A_\xi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\xi & \cdot & \cdot & (-\xi)^{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & & & \\ & & 1 & -\xi & \cdot & \cdot & \cdot & (-\xi)^{m-n} \\ & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Notons qu'ici on a

$$A_\xi^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (I - A_\xi)^i .$$

Donc $A_\xi X = B$ où $B \in \ell_\infty$ admet une solution unique dans ℓ_∞ donnée par

$$X = A_\xi^{-1} B = \left(\sum_{m=n}^{\infty} (-\xi)^{m-n} b_n\right)_{n\geq 1}.$$

Il est important de remarquer que cette même équation admet une infinité de solutions appartenant à $s \backslash \ell_\infty$ et que

$$Ker A_\xi \cap s \neq \{0\}, \text{ et } dim(Ker A_\xi \cap s) = 1.$$

En effet, l'équation

$$A_\xi X = 0$$

équivaut au système linéaire infini

$$\begin{cases} x_1 + \xi x_2 = 0 \\ x_2 + \xi x_3 = 0 \\ x_3 + \xi x_4 = 0 \\ \quad \ldots \end{cases}$$

lui-même équivalent à

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{\xi} x_1 \\ x_3 = -\frac{1}{\xi} x_2 = \left(-\frac{1}{\xi}\right)^2 x_1 \\ \quad \ldots \\ x_n = \left(-\frac{1}{\xi}\right)^{n-1} x_1 \\ \quad \ldots. \end{cases}$$

D'où

$$KerA_\xi = \left\{ \left(\left(-\frac{1}{\xi}\right)^{n-1} x_1 \right)_{n \geq 1} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cas où $D_{1/a}A \in \Gamma_1$ ou $AD_{1/a} \in \Gamma_1$.

Soit $a = (a_{nn})_{n \geq 1} \in U$. Nous nous placerons ici dans un cadre plus général où $D_{1/a}B = (b_n/a_{nn})_{n \geq 1} \in \ell_\infty$. On utilisera ici l'espace $s_\tau = D_\tau \ell_\infty$ dont les éléments $X = (x_n)$ vérifient $x_n/\tau_n = O(1)$ et qui sera étudié au paragraphe 3.4.1.

Proposition 3.11. *Soient $A = (a_{nm})_{n,m \geq 1} \in M$ et $B = (b_n)_n \in s$.*

(i) On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

(a)

$$\left(\frac{b_n}{a_{nn}}\right)_{n \geq 1} \in \ell_\infty,$$

(b)

$$D_{\frac{1}{a}} A \in \Gamma_1.$$

Alors l'équation $AX = B$ admet une solution unique dans ℓ_∞ donnée par

$$X = \left(D_{\frac{1}{a}} A\right)^{-1} D_{\frac{1}{a}} B = \sum_{n=0}^{\infty} \left(I - D_{\frac{1}{a}} A\right)^n D_{\frac{1}{a}} B.$$

(ii) On suppose que $B \in \ell_\infty$ et que

$$AD_{\frac{1}{a}} \in \Gamma_1.$$

Alors l'équation $AX = B$ admet une solution unique dans $s_{1/a} = D_{1/a}\ell_\infty$ donnée par

$$X = D_{\frac{1}{a}}\left(AD_{\frac{1}{a}}\right)^{-1} B = D_{\frac{1}{a}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(I - AD_{\frac{1}{a}}\right)^n B.$$

Preuve. (i) Soit $B = (b_n)_n \in s$. D'après le Corollaire 3.9 l'application $X \mapsto D_{1/a}AX$ est bijective de ℓ_∞ dans ℓ_∞ et l'équation $AX = B$ est équivalente à

$$D_{\frac{1}{a}}(AX) = \left(D_{\frac{1}{a}}A\right)X = D_{\frac{1}{a}}B,$$

or d'après les hypothèses (a) et (b) on a $D_{1/a}B \in \ell_\infty$ et

$$\left\|I - D_{\frac{1}{a}}A\right\|_{S_1} = \sup_n\left(\frac{1}{|a_{nn}|}\sum_{\substack{m\neq n\\ m=1}}^{\infty}|a_{nm}|\right) < 1.$$

Cela implique que l'équation $AX = B$ admet une solution unique $X \in \ell_\infty$ définie par

$$X = \left(D_{\frac{1}{a}}A\right)^{-1} D_{\frac{1}{a}}B = \sum_{n=0}^{\infty}\left(I - D_{\frac{1}{a}}A\right)^n D_{\frac{1}{a}}B.$$

(ii) On suppose que $B \in \ell_\infty$ et que

$$\sup_n\left(\sum_{\substack{m\neq n\\ m=1}}^{\infty}\left|\frac{a_{nm}}{a_{mm}}\right|\right) < 1.$$

Alors

$$\left\|I - AD_{\frac{1}{a}}\right\|_{S_1} < 1 \text{ et } D_{\frac{1}{a}}B \in D_{\frac{1}{a}}\ell_\infty = s_{\frac{1}{a}}.$$

Donc en utilisant le Corollaire 3.9 l'équation $AX = B$ admet une solution unique dans $s_{1/a} = D_{1/a}\ell_\infty$ donnée par

$$X = D_{\frac{1}{a}}\left(AD_{\frac{1}{a}}\right)^{-1} B = D_{\frac{1}{a}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(I - AD_{\frac{1}{a}}\right)^n B.$$

D'où le résultat. ■

Dans la suite nous donnons des exemples qui illustrent la première partie de la Proposition 3.11.

Exemple 3.12. *Soit a dans $\mathbb{C}$ où $|a| < 1$. Considérons l'équation $AX = B$ où $(b_n/n)_{n\geq 1} \in \ell_\infty$, telle que*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & & & \\ & 2 & a & & \mathbf{0} \\ & & 3 & a & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

On a

$$D_{\left(\frac{1}{n}\right)_n} A = \begin{pmatrix} 1 & a & & & \\ & 1 & a/2 & & \mathbf{0} \\ & & 1 & a/3 & \\ & \mathbf{0} & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \quad \cdot \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \left\| I - D_{\left(\frac{1}{n}\right)_n} A \right\|_{S_1} &= \sup_n \left(\sum_{\substack{m \neq n \\ m \neq 1}} \left| \frac{a_{nm}}{n} \right| \right) = \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \neq 1}} |a_{nm}| \right) \\ &= \sup_n \left(\left| \frac{a}{n} \right| \right) \leq |a| < 1. \end{aligned}$$

Donc d'après la Proposition 3.11 l'équation $AX = B$ avec $B \in s_{(n)_n}$ admet une solution unique dans $s_1 = \ell_\infty$ définie par

$$\begin{aligned} X &= \left(D_{\left(\frac{1}{n}\right)_n} A \right)^{-1} D_{\left(\frac{1}{n}\right)_n} B \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(I - D_{\left(\frac{1}{n}\right)_n} A \right)^n D_{\left(\frac{1}{n}\right)_n} B. \end{aligned}$$

Exemple 3.13. *On considère le système linéaire infini $A_{\delta_0} X = B$ où $B \in \ell_\infty$, et $A_{\delta_0} = (a_{nm})_{n,m \geq 1}$ est définie par*

$$a_{nm} = \begin{cases} 1/2^{n+m} \text{ pour } m \neq n, \\ \delta_0 \text{ pour tout } m = n, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$A_{\delta_0} = \begin{pmatrix} \delta_0 & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \cdot & \cdot & \frac{1}{2^N} & \cdot \\ \frac{1}{2^3} & \delta_0 & \frac{1}{2^5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \delta_0 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \frac{1}{2^5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & \\ \frac{1}{2^N} & \cdot & & & & & \delta_0 & \\ \cdot & & & & & & & \cdot \end{pmatrix},$$

L'hypothèse (i) est vérifiée pour $\delta_0 \neq 0$. Vérifions ensuite l'hypothèse (ii). On *voit aisément que*

$$\begin{aligned}\left\| I - \frac{1}{\delta_0} A_{\delta_0} \right\|_{S_1} &= \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{|\delta_0|} \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \right) \\ &\leq \frac{1}{|\delta_0|} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{|\delta_0|} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

D'où

$$\left\| I - \frac{1}{\delta_0} A_{\delta_0} \right\|_{S_1} < 1 \text{ si } |\delta_0| > \frac{1}{4}.$$

On conclut que $A_{\delta_0} X = B$ où $B \in \ell_\infty$ admet une solution unique dans ℓ_∞ si $|\delta_0| > 1/4$.

Donnons ici un exemple où l'on voit que (i) et (ii) de la Proposition 3.11 ne sont pas équivalentes, (chacune d'elles ayant son utilité).

Exemple 3.14. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & & & \mathbf{0} \\ 2 & 3^2 & & \\ & 2^2 & 3^3 & \\ \mathbf{0} & & . & . \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple $a = (3^n)_n$, et

$$AD_{1/a} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ \frac{2}{3} & 1 & & & \\ & \frac{2^2}{3^2} & 1 & & \\ & & . & . & \\ \mathbf{0} & & & . & . \end{pmatrix}.$$

Donc on obtient

$$\left\| I - AD_{1/a} \right\|_{S_1} = 2/3 < 1,$$

et d'après la Proposition 3.11 (ii), si $B \in s_1$ l'équation

$$AX = B$$

admet dans $s_{1/a} = s_{(1/3^n)_n}$ une seule solution

$$X = A^{-1} B. \tag{3.4}$$

Par ailleurs on a

$$D_{1/a}A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ \frac{2}{3^2} & 1 & & & \\ & \frac{2^2}{3^3} & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

D'après la Proposition 3.11 (i), si

$$\left\|I - D_{1/a}A\right\|_{S_1} = 2/9 < 1,$$

et $D_{1/a}B \in s_1$, c-à-d si $B \in s_{(3^n)_n}$ l'équation $AX = B$ admet dans $s_1 = \ell_\infty$ la seule solution (3.4).

Maintenant considérons le système linéaire infini

$$2^{n-1}x_{n-1} + 3^n x_n = 3^n \qquad n = 1, 2, ...$$

avec la convention $x_0 = 0$. Il est équivalent à $AX = B$ où $B = (3^n)_n$. On voit que $B \in s_{(3^n)_n}$, la Proposition 3.11 (i) s'applique, et la solution unique de ce système est dans ℓ_∞. Par contre la Proposition 3.11 (ii) ne s'applique pas car $B \notin s_1$.

Une autre façon d'écrire la partie (i) de la Proposition 3.11 donne la formulation suivante.

Corollaire 3.15. *Soit $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1} \in M$ et $B = (b_n)_n \in s$ tels que :*

(i) $(b_n/a_{nn})_{n\geq 1} \in \ell_\infty$.

(ii) Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout n on a :

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq (2 - \varepsilon_0) |a_{nn}|.$$

Alors l'équation $AX = B$ admet une solution unique dans ℓ_∞.

Preuve. On a :

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|\right) - |a_{nn}| \leq (1 - \varepsilon) |a_{nn}|, \text{ d'après (ii)}$$

Donc :

$$\sup_n \left(\frac{1}{|a_{nn}|} \sum_{\substack{m\neq n \\ m=1}}^{\infty} |a_{nm}|\right) \leq 1 - \varepsilon.$$

Maintenant, si on pose $a = (a_{nn})_{n\geq 1}$ on a :

$$\left\|I - D_{1/a}A\right\|_{S_1} = \sup_n \left(\frac{1}{|a_{nn}|} \sum_{\substack{m\neq n \\ m=1}}^{\infty} |a_{nm}|\right) < 1.$$

Donc $D_{1/a}A$ est inversible. D'autre part : $AX = B$ équivaut à l'équation

$$D_{1/a}A.X = B' \text{ où } B' = D_{1/a}B$$

Mais $B' \in \ell_\infty$, donc la solution unique de l'équation $AX = B$ dans ℓ_∞ est définie par :

$$X_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(I - D_{1/a}A)^n B.$$

D'où la démonstration. ■

Remarque 3.16. *Le procédé utilisé consiste en fait "normer" la diagonale de A afin que $D_aA - I$ ne possède que des zéros sur la diagonale; pour résoudre l'équation $AX = B$, aucun des éléments diagonaux de A n'étant nul , on peut toujours se ramener à : $(I + A')X = B$, A'ayant une diagonale nulle. Pour que le problème ait une solution il faut que les termes a'_{nm} de A' pour $n \neq m$ soient "assez petits".*

Lorsque $AD \in \Gamma_1$ où D est une matrice diagonale, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.17. *Soit A un élément de M, tel qu'il existe une matrice diagonale $D \in S_1$ telle que*

$$\|I - AD\|_{S_1} < 1.$$

Alors l'équation $AX = B$ où $B \in \ell_\infty$, admet dans s au moins une solution :

$$X_1 = \sum_{l=0}^{\infty} D(I - AD)^l B \tag{3.5}$$

Preuve. La matrice AD admet C pour inverse dans S_1, donc A admet DC pour inverse à droite. Le produit $A' = DC$ existe car D, $C \in S_1$. Donc les équations $AX = B$ et $X = DX'$ s'écrivent encore :

$$(AD)X' = B \text{ et } X = DX'.$$

D'où :

$$X' = A'.B = \sum_{l=0}^{\infty}(I - AD)^l B,$$

et la continuité de l'application : $X \to DX$ de ℓ_∞ dans lui-même permet d'en déduire (3.5). ■

3.4 Matrices considérées comme des opérateurs dans s_τ. Généralisation de S_1

3.4.1 Les espace s_τ et S_τ

Dans ce paragraphe on considère l'espace s_τ, que nous réétudierons au Chapitre V. Cet espace est défini par

$$s_\tau = \left\{ X = (x_n)_{n\geq 1} \in s : \frac{x_n}{\tau_n} = O(1) \quad (n \to \infty) \right\},$$

où $\tau \in U^+$. L'espace s_τ est un espace de type BK normé par

$$\|X\|_{s_\tau} = \sup_{n\geq 1} \left(\frac{|x_n|}{\tau_n} \right).$$

Voir [12, 25, 36, 24, 39]. Lorsque $\tau = (r^n)_{n\geq 1}$ on écrit $s_\tau = s_r$ pour simplifier et quand $r = 1$, nous obtenons $s_1 = \ell_\infty$. Si on pose $e = (1, 1, ...)$, alors on obtient

$$s_e = s_1 = \ell_\infty.$$

On verra que pour toute suite $\tau \in U^+$ telle que $K_1 \leq \tau_n \leq K_2$ pour tout n, où K_1, $K_2 > 0$ on a $s_\tau = s_e = s_1 = \ell_\infty$. Pour tout scalaire $\lambda > 0$ on a $s_{\lambda e} = s_\lambda = s_1$. Nous avons aussi $s_{\lambda\tau} = s_\tau$ pour $\lambda > 0$ et $\tau \in U^+$.
Soient τ, $\nu \in U^+$. On note $S_{\tau,\nu}$ l'ensemble de matrices infinies $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ telles que

$$\|A\|_{S_{\tau,\nu}} = \sup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\nu_n} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \tau_m \right) < \infty.$$

Notons que l'ensemble $S_{\tau,\nu}$ est un espace de Banach normé par $\|A\|_{S_{\tau,\nu}}$. Cet espace est relié à l'espace S_1 par le théorème suivant :

Théorème 3.18. *[23, Lemme 7, p. 49] Soit $A = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$ une matrice infinie. On a $A \in S_{\tau,\nu}$ si et seulement si $D_{1/\nu} A D_\tau = (a_{nm}\tau_m/\nu_n)_{nm} \in S_1$.*

En particulier, si $\tau = \nu$ on obtient l'espace

$$S_\tau = S_{\tau,\tau} = (s_\tau, s_\tau).$$

Cet espace est un espace de Banach normé par $\|A\|_{S_\tau}$. D'autre part, si $\tau = (r^n)_{n\geq 1}$ et $\nu = (u^n)_{n\geq 1}$ on note $S_{\tau,\nu} = S_{r,u}$. Il est connu, voir [47], que $A \in (s_r, s_u)$ si et seulement si $\mathcal{M} \in S_{r,u}$. Donc nous pouvons écrire $(s_r, s_u) = S_{r,u}$. Quand $r = u$ nous obtenons l'algèbre de Banach avec identité $S_{r,u} = S_r$, normé par $\|A\|_{S_r} = \|A\|_{S_{r,r}}$ (voir [24]). Nous avons aussi $A \in (s_r, s_u)$ si et seulement si $A \in S_r$. Après avoir défini l'espace S_τ qui généralise l'espace S_1 on énonce des propriétés de la matrice de Toeplitz dans S_r, puis on donne un exemple de résolution de l'équation $AX = B$ où $A \in (s_r, s_r)$.

3.4.2 Matrices triangulaires de Toeplitz dans S_r et séries entières

Une matrice de Toeplitz est une matrice infinie dont les éléments sont de la forme $[\mathcal{M}]_{nm} = a_{m-n}$ avec $n, m \geq 1$. Ici nous nous concentrons sur les matrices triangulaires de Toeplitz et considérons $\mathcal{M}$ comme un opérateur défini de s_r dans lui même, $r > 0$. Soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{3.6}$$

une série entière définie dans le disque ouvert $|z| < R$. Rappelons que nous pouvons associer à f la matrice triangulaire supérieure infinie de Toeplitz $\mathcal{M} = \varphi(f) \in \bigcap_{0<r<R} S_r$ définie par

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . \\ & a_0 & a_1 & . \\ \mathbf{0} & & a_0 & . \\ & & & . \end{pmatrix},$$

et que l'application $\varphi : f \mapsto \mathcal{M}$ est un isomorphisme de l'algèbre de séries définies sur le disque $|z| < R$ dans l'algèbre $\overline{\mathcal{M}}$ de matrices correspondantes. Plus précisément on a $\varphi(f^N) = [\varphi(f)]^N$. Dans la suite nous utiliserons la notation $|f|^{\bullet}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| z^k$. Il est évident que $|fg|^{\bullet}(r)$ n'est pas égale à $|f|^{\bullet}(r) \times |g|^{\bullet}(r)$ pour $r < R$, où $f(z)$ et $g(z)$ sont des séries entières définies sur $|z| < R$. D'autre part si on prend $f(z) = 1 + z$, il est facile de voir que $1/|f|^{\bullet}(r)$ n'est pas égal à $|1/f|^{\bullet}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k\right| r^k = 1/(1-r)$ pour $r < 1$.

Lemme 3.19. *[57] Soit f une fonction définie par (3.6) et soit $0 < r < R$. Donc*

(i) a) $\|\varphi(f)\|_{S_r} = \left\|{}^t(\varphi(f))\right\|_{S_{1/r}} = |f|^{\bullet}(r)$.

b) $\|\varphi(-f)\|_{S_r} = \|\varphi(f)\|_{S_r}$.

(ii) a) Pour tout entier N on a

$$\varphi(f^N) \in S_r \text{ et } {}^t(\varphi(f^N)) \in S_{1/r};$$

b) $\left\|\varphi(f^N)\right\|_{S_r} \leq [|f|^{\bullet}(r)]^N$ et $\left\|{}^t(\varphi(f^N))\right\|_{S_{1/r}} \leq [|f|^{\bullet}(r)]^N$.

c) Si $a_n \geq 0$ pour tout n donc

$$\left\|[\varphi(f)]^N\right\|_{S_r} = \|\varphi(f)\|_{S_r}^N = f^N(r).$$

(iii) Supposons que $a_0 \neq 0$ et que la série

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^k$$

ait un rayon de convergence $R' > 0$. Alors pour tout $0 < r < R'$ on a

$$\varphi\left(\frac{1}{f}\right) = [\varphi(f)]^{-1} \in S_r$$

et

$$\left\|[\varphi(f)]^{-1}\right\|_{S_r} \geq \frac{1}{|f|^{\bullet}(r)}. \tag{3.7}$$

Preuve. (i) a) Puisque la série (3.6) est convergente pour $|z| < R$ on a

$$\begin{aligned}\|\varphi(f)\|_{S_r} &= \sup_n \left(\frac{1}{r^n}\sum_{m=n}^{\infty} |a_{m-n}| r^m\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = |f|^{\bullet}(r) < \infty \text{ pour tout } r < R.\end{aligned}$$

Concernant la transposée de $\varphi(f)$ on a

$$\left[{}^t\varphi(f)\right]_{nm} = \begin{cases} a_{n-m} \text{ pour } m \leq n, \\ \quad 0 \qquad \text{sinon.}\end{cases}$$

On déduit

$$\begin{aligned}\left\|{}^t\varphi(f)\right\|_{S_{1/r}} &= \sup_n \left(r^n \sum_{m=1}^{n} |a_{n-m}| \frac{1}{r^m}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = |f|^{\bullet}(r) < \infty \text{ pour tout } r < R.\end{aligned}$$

b) est une conséquence directe de a).

(ii) a) Puisque S_r est une algèbre de Banach et $\varphi(f) \in S_r$ on a $\varphi\left(f^N\right) \in S_r$. De la même façon ${}^t\varphi(f) \in S_{1/r}$ implique ${}^t\varphi\left(f^N\right) \in S_{1/r}$ pour tout $0 < r < R$. (ii) b) vient de (i) a) et du fait que dans l'algèbre de Banach S_r on a $\left\|\varphi\left(f^N\right)\right\|_{S_r} \leq \left(\|\varphi(f)\|_{S_r}\right)^N$.

(ii) c) Puisque les a_k sont positifs la série entière $f^N(z)$ est de forme $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ et $c_k \geq 0$ et d'après (i) a) on a

$$\left\|\varphi\left(f^N\right)\right\|_{S_r} = \left|f^N\right|^{\bullet}(r) = f^N(r) = \|\varphi(f)\|_{S_r}^N.$$

(iii) a été montré dans [88] et l'inégalité (3.7) vient de (i) a) et du fait que S_r est une algèbre de Banach, donc on a

$$\left\|\varphi\left(\frac{1}{f}\right)\right\|_{S_r} = \left\|[\varphi(f)]^{-1}\right\|_{S_r} \geq \frac{1}{\|\varphi(f)\|_{S_r}} = \frac{1}{|f|^{\bullet}(r)}.$$

∎

Remarque 3.20. *D'après (ii) c) on déduit que l'égalité*

$$\sum_{m=n}^{\infty}\left[[\varphi(f)]^N\right]_{nm} r^m = r^n f^N(r),$$

est satisfaite pour tout entier n et pour tout r tel que $0 < r < R$.

On donne maintenant une application directe de ce lemme permettant de résoudre les systèmes linéaires infinis.

Exemple 3.21. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et posons*

$$\mathcal{M} = \varphi(e^{az}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{1!} & \frac{a^2}{2!} & . & . \\ & 1 & \frac{a}{1!} & \frac{a^2}{2!} & . \\ & & 1 & \frac{a}{1!} & . \\ \mathbf{0} & & & . & . \\ & & & & . \end{pmatrix}.$$

Considérons le système linéaire infini représenté par

$$\mathcal{M}X = b, \tag{3.8}$$

où $b \in s_r$. Ce système peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{m=n}^{\infty}\frac{a^{m-n}}{(m-n)!}x_m = b_n \quad n = 1, 2, ...$$

Donc $I - \mathcal{M} = \varphi(g)$ où

$$g(z) = 1 - e^{az} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k!}z^k,$$

et en utilisant le Lemme 3.19 (i) on a

$$\|I - \mathcal{M}\|_{S_r} = |g|^{\bullet}(r) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|ar|^k}{k!} = e^{|a|r} - 1 < 1,$$

donc $\|I - \mathcal{M}\|_{S_r} < 1$ pour $r < (\ln 2)/|a|$. Comme S_r est une algère de Banach, $\mathcal{M}$ est inversible et $\mathcal{M}^{-1} \in S_r$. Donc l'équation (3.8) est équivalente à

$$\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{M}X) = X = \mathcal{M}^{-1}b \text{ pour tout } X \in s_r,$$

voir [73, 15, 16]. On conclut que pour $r < (\ln 2)/|a|$ l'équation (3.8) où $b \in s_r$ possède une solution unique dans s_r définie par

$$X = \mathcal{M}^{-1}b = \varphi\left(e^{-az}\right)b,$$

ce qui implique

$$x_n = \sum_{m=n}^{\infty}(-1)^{m-n}\frac{a^{m-n}}{(m-n)!}b_m \quad n = 1, 2, ...$$

Chapitre 4

Systèmes différentiels infinis

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution des *systèmes différentiels* linéaires infinis de la forme

$$X'(t) = TX(t) + B, \tag{4.1}$$

où $T = (t_{nm})_{n,m\geq 1} \in \pounds$, c'est à dire

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ . & . & . & & \\ t_{n1} & t_{n2} & . & t_{nn} & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

avec $t_{nn} \neq 0$ pour tout n, et $B = (b_n)_{n\geq 1}$ est une suite donnée. On se limite ici aux cas où T est l'une des matrices $\Delta(\lambda)$, $C(\lambda)$, ou la matrice de moyenne pondérée $\overline{N}_q$.

L'équation (4.1) peut aussi être écrite sous la forme

$$x'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k(t) + b_n \quad n = 1, 2, ...$$

En appliquant la transformée de Laplace à la fonction $t \mapsto x_n(t)$ on voit que l'équation (4.1) s'écrit sous la forme

$$TX = \widehat{B}, \tag{4.2}$$

où $T \in \pounds$ et $\widehat{B} = \left(\widehat{b}_n\right)_{n\geq 1}$ est une suite. L'équation (4.2) s'écrit donc sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k = \widehat{b}_n,\ n = 1, 2, ...$$

On a vu que $T \in (s, s)$ étant un triangle, il est inversible. On note T^{-1} cet inverse. Dans l'espace s l'équation (4.2) possède une solution unique donnée par $X = T^{-1}\widehat{B}$. Notons que cette propriété n'est pas toujours vraie pour tout sous-espace de s. En effet, il suffit de considérer l'opérateur $\Delta \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ défini par $\Delta X = (x_n - x_{n-1})_{n\geq 1}$. Il est clair que Δ est non surjective car l'unique solution de l'équation $\Delta X = e$ est donnée par $X = (n)_{n\geq 1} \notin \ell_\infty$. Donc dans le sous-espace ℓ_∞ l'équation $\Delta X = e$ n'admet pas une solution dans ℓ_∞.

4.2 Etude de l'équation $\Delta(\lambda, \mu) X = B$

Soient $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$, $\mu = (\mu_n)_{n\geq 1}$ deux suites dans s. Nous considérons ici le cas d'une matrice bidiagonales $\Delta(\lambda, \mu)$ qui généralise la définition précédente de $\Delta(\lambda)$ où $\Delta(\lambda, \lambda) = \Delta(\lambda)$. Nous utiliserons cette matrice pour la résolution de certains systèmes différentiels infinis.

$$\Delta(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ -\mu_1 & \lambda_2 & & \mathbf{0} & \\ & . & . & & \\ \mathbf{0} & & -\mu_{n-1} & \lambda_n & \\ & & & . & . \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que $\Delta(\lambda, 0) = D_\lambda$ et $\Delta(e, e) = \Delta$. Pour toutes suites λ, μ, $\nu = (\nu_n)_{n\geq 1}$, $\xi = (\xi_n)_{n\geq 1} \in s$, on a

$$\Delta(\lambda, \mu) + \Delta(\nu, \xi) = \Delta(\lambda + \nu, \mu + \xi),$$

et

$$D_\nu \Delta(\lambda, \mu) = \Delta\left(\nu\lambda, \nu^+\mu\right),$$

avec $\nu^+ = (\nu_2, \nu_3, ..., \nu_n, ...)$.

Notons que la matrice $\Delta(\lambda, \mu)$ ainsi que son inverse, noté $C(\lambda, \mu)$, appartiennent à $\pounds$. On obtient donc

$$C(\lambda, \mu) = (\Delta(\lambda, \mu))^{-1} = (c_{nm})_{n,m\geq 1},$$

avec

$$c_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n} & \text{si } n = m, \\ \frac{1}{\lambda_n} \prod_{i=m}^{n-1} \frac{\mu_i}{\lambda_i} & \text{si } m < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(cf. [25, p. 166]). Il est clair que $C(\lambda) = C(\lambda,\lambda)$. En prenant $\lambda = e$ on obtient $\Delta(e) = \Delta(e,e) = \Delta$ et $C(e) = C(e,e) = \Sigma$.

Proposition 4.1. *[36, Lemme 10, p.15] Soient $\tau \in U^+$ et $\mu \in s$. Si*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|\mu_{n-1}|\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\right) < 1, \tag{4.3}$$

alors l'opérateur $\Delta(e,\mu)$ est bijectif de s_τ dans lui même.

Preuve. Considérons la matrice $\Sigma^{(k)}(\mu)$ définie par

$$\Sigma^{(k)}(\mu) = \begin{pmatrix} \left[\Delta^{(k)}(e,\mu)\right]^{-1} & & \\ & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \cdot \\ & & & \cdot \end{pmatrix},$$

où $\Delta^{(k)}(e,\mu)$ est la matrice finie dont les éléments sont ceux des k premières lignes et des k premières colonnes de $\Delta(e,\mu)$.

On obtient $\Sigma^{(k)}(\mu)\Delta(e,\mu) = (a_{nm})_{n,m\geq 1}$, avec $a_{nn} = 1$ pour tout n; $a_{n,n-1} = -\mu_n$ pour tout $n \geq k+1$; et $a_{nm} = 0$ dans les autres cas.

De (4.3), on déduit que il existe un entier $k \geq 1$, tel que

$$\left\| I - \Sigma^{(k)}(\mu)\Delta(e,\mu)\right\|_{S_1} < 1.$$

Pour tout $Y \in s_\tau$, on voit que $\Sigma^{(k)}(\mu)Y \in s_\tau$. Donc l'équation $\Delta(e,\mu)X = Y$ admet une unique solution dans s_τ pour tout $Y \in s_\tau$ car elle est équivalente à l'équation

$$\left(\Sigma^{(k)}(\mu)\Delta(e,\mu)\right)X = \Sigma^{(k)}(\mu)Y.$$

Cela implique que $\Delta(e,\mu)$ est bijective de s_τ dans lui même. ■

Corollaire 4.2. *Soit $\mu \in s$. Si*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(|\mu_n|) < 1,$$

alors l'opérateur $\Delta(e,\mu)$ est bijectif de ℓ_∞ dans ℓ_∞.

Preuve. En supposant $\tau = e = (1,1,...)$ dans le Lemme précédent, on déduit que $\Delta(e,\mu)$ est bijective de s_e dans lui même. Or il est clair que $s_e = \ell_\infty$. D'où le résultat. ■

En remarquant que

$$D_{\frac{1}{\lambda}}\Delta(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{\mu_1}{\lambda_2} & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \mathbf{0} \\ & & \cdot & 1 & \\ & \mathbf{0} & & -\frac{\mu_{n-1}}{\lambda_n} & \cdot \\ & & & & , \end{pmatrix}.$$

on déduit du lemme précédent que la condition

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\left|\frac{\mu_{n-1}}{\lambda_n}\right|\right) < 1,$$

implique que

$$D_{\frac{1}{\lambda}}\Delta(\lambda,\mu) : \ell_\infty \to \ell_\infty$$

est bijective et $\Delta(\lambda,\mu) : \ell_\infty \to s_\lambda$ l'est aussi. Donc l'équation

$$D_{\frac{1}{\lambda}}\Delta(\lambda,\mu)\, X = B$$

où $B \in \ell_\infty$ possède une unique solution dans ℓ_∞ définie par

$$X = \Delta(\lambda,\mu)^{-1} D_\lambda B.$$

4.3 L'équation $X'(t) = \Delta(\lambda)\, X(t) + B$

Soit λ une suite pour laquelle les λ_n sont tous distincts. On considère l'équation

$$X'(t) = \Delta(\lambda)\, X(t) + B \text{ avec } x_n(0) = x_{n,0} \text{ pour tout } n. \tag{4.4}$$

L'équation (4.4) est équivalente au système linéaire infini

$$x'_n(t) = \lambda_n x_n(t) - \lambda_{n-1} x_{n-1}(t) + b_n \quad n = 1, 2, ...$$

Pour résoudre l'équation (4.4) nous avons besoin de la décomposition en éléments simples suivante.

Lemme 4.3. *Soient a_i, $i = k, ..., n$ des réels distincts. Posons*

$$F(x) = \frac{1}{x - a_n}\prod_{j=k}^{n-1}\frac{a_j}{x - a_j}$$

On a

$$F(x) = \frac{A_n}{x - a_n} + \sum_{j=k}^{n-1}\frac{A_j}{x - a_j}$$

avec

$$A_n = \prod_{j=k}^{n-1}\frac{a_j}{a_n - a_j} \text{ et } A_j = \frac{a_j}{a_j - a_n}\prod_{l=k, l\neq j}^{n-1}\frac{a_l}{a_j - a_l}.$$

Maintenant on donne le résultat suivant.

Théorème 4.4. *L'équation (4.4) avec les conditions $x_n(0) = x_{n,0}$ pour tout n possède une solution unique définie par*

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \frac{-1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} b_k + \left[x_{n,0} + \frac{b_n}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(x_{k,0} + \frac{b_k}{\lambda_n} \right) (-1)^{n-k} \pi_{kn} \right] e^{\lambda_n t} \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left[\sum_{i=k}^{n-1} \left(x_{k,0} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_n} \pi'_{kn}(i) + b_k \pi''_{kn}(i) \right) (-1)^{n-k} e^{\lambda_i t} \right], \end{aligned} \tag{4.5}$$

où

$$\pi_{kn} = \prod_{i=k}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n - \lambda_i}, \; \pi'_{kn} = \prod_{\substack{j=k \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \text{ et } \pi''_{kn}(i) = \pi'_{kn} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_n}.$$

Preuve. Appliquons la transformée de Laplace avec

$$Ł(x_n(t)) = X_n(p) = X_n$$

on obtient immédiatement

$$Ł\left[x'_n(t)\right] = pX_n - x_{n,0}, \; Ł(b_n) = \frac{b_n}{p}$$

et l'équation (4.4) est équivalente à

$$\lambda_{n-1} X_{n-1} + (p - \lambda_n) X_n = x_{n,0} + \frac{b_n}{p} \quad n = 1, 2, ...$$

On est amené à résoudre l'équation $T_\lambda X = B'$ où

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} p - \lambda_1 & & & & \\ \lambda_1 & p - \lambda_2 & & 0 & \\ & . & . & & \\ 0 & & \lambda_{n-1} & p - \lambda_n & \\ & & & . & . \end{pmatrix},$$

$B' = (b'_n)_{n \geq 1}$ et

$$b'_n = x_{n,0} + \frac{b_n}{p} \text{ pour tout } n.$$

On déduit du paragraphe 4.2 que

$$[T_\lambda^{-1}]_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{p - \lambda_n} \prod\limits_{i=k}^{n-1} \frac{-\lambda_i}{p - \lambda_i} & \text{si } k < n, \\ \frac{1}{p - \lambda_n} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c-à-d

$$T_{\lambda}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{p-\lambda_1} & & & & \\ . & \frac{1}{p-\lambda_2} & & 0 & \\ & . & . & & \\ . & \frac{1}{p-\lambda_n}\prod\limits_{i=k}^{n-1}\frac{-\lambda_i}{p-\lambda_i} & . & \frac{1}{p-\lambda_n} & \\ & & & . & . \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier, on écrit

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{p-\lambda_n}\left[b_n'+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}\lambda_i}{p-\lambda_i}\right)b_k'\right] \\ &= \frac{x_{n,0}}{p-\lambda_n}+\frac{b_n}{p\,(p-\lambda_n)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{p-\lambda_n}\left(\prod_{i=k}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}\lambda_i}{p-\lambda_i}\right)\left(x_{k,0}+\frac{b_k}{p}\right). \end{aligned}$$

On a

$$X_n=\frac{x_{n,0}}{p-\lambda_n}+\frac{b_n}{p\,(p-\lambda_n)}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\chi_{nk}\,(p)\,x_{k,0}+\chi_{nk}'\,(p)\,b_k\right], \tag{4.6}$$

avec

$$\chi_{nk}\,(p)=\frac{1}{p-\lambda_n}\prod_{i=k}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\lambda_i}{p-\lambda_i}\ \text{ et }\ \chi_{nk}'\,(p)=\frac{1}{p\,(p-\lambda_n)}\prod_{i=k}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\lambda_i}{p-\lambda_i}.$$

En utilisant la Lemme 4.3, la décomposition en éléments simples donne

$$\chi_{nk}\,(p)=\prod_{i=k}^{n-1}\left((-1)^{n-k}\frac{\lambda_i}{\lambda_n-\lambda_i}\right)\frac{1}{p-\lambda_n}+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_n}\left(\prod_{\substack{j=k\\ j\neq i}}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\lambda j}{\lambda_i-\lambda j}\right)\frac{1}{p-\lambda_i},$$

et

$$\chi_{nk}'\,(p)=\left(\frac{-1}{\lambda_n}\right)\frac{1}{p}+\frac{(-1)^{n-k}}{p}\prod_{i=k}^{n-1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n-\lambda_i}\right)\frac{1}{p-\lambda_n}+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{\lambda_i-\lambda_n}\prod_{\substack{j=k\\ j\neq i}}^{n-1}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)\frac{1}{p-\lambda_i}.$$

En appliquant $Ł^{-1}$ à (4.6) on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} x_n\,(t) &= x_{n,0}Ł^{-1}\left(\frac{1}{p-\lambda_n}\right)+b_nŁ^{-1}\left[\frac{1}{p\,(p-\lambda_n)}\right] \\ &\quad+\sum_{k=1}^{n-1}x_{k,0}Ł^{-1}\left(\chi_{nk}\,(p)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}b_kŁ^{-1}\left(\chi_{nk}'\,(p)\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

d'autre part, on a successivement

$$Ł^{-1}\left[\frac{1}{p\,(p-\lambda_n)}\right]=Ł^{-1}\left[-\frac{1}{p\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n\,(p-\lambda_n)}\right]=-\frac{1}{\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n}e^{\lambda_n t} \tag{4.8}$$

$$
\begin{aligned}
Ł^{-1}\left(\chi_{nk}(p)\right) &= Ł^{-1}\left[(-1)^{n-k}\frac{\pi_{kn}}{p-\lambda_n}+\sum_{i=k}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_n}\pi'_{kn}\frac{1}{p-\lambda_i}\right] \\
&= (-1)^{n-k}\pi_{kn}e^{\lambda_n t}+\sum_{i=k}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_n}\pi'_{kn}e^{\lambda_i t}, \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
Ł^{-1}\left(\chi'_{nk}(p)\right) &= Ł^{-1}\left[\frac{-1}{p\lambda_n}+(-1)^{n-k}\frac{1}{\lambda_n}\frac{\pi_{kn}}{p-\lambda_n}+\sum_{i=k}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\pi''_{kn}}{p-\lambda_i}\right] \\
&= \frac{-1}{\lambda_n}+(-1)^{n-k}\frac{1}{\lambda_n}\pi_{kn}e^{\lambda_n t}+\sum_{i=k}^{n-1}(-1)^{n-k}\pi''_{kn}e^{\lambda_i t}. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

D'après (4.7), (4.8), (4.9) et (4.10) on conclut que

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= \frac{-1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n} b_k+\left[x_{n,0}+\frac{b_n}{\lambda_n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(x_{k,0}+\frac{b_k}{\lambda_n}\right)(-1)^{n-k}\pi_{kn}\right]e^{\lambda_n t} \\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=k}^{n-1}\left(x_{k,0}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_n}\pi'_{kn}(i)+b_k\pi''_{kn}(i)\right)(-1)^{n-k}e^{\lambda_i t}\right], \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. ■

Dans ce qui suit on considère l'équation $X'(t) = \Delta(\lambda) X(t) + B$ où $X(t) = (x_n(t))_{n\geq 1}$ et on utilise la programmation Matlab afin de tracer les graphes des fonctions $t \mapsto x_n(t)$. Pour l'étude de cette équation on se limite aux dix premiers termes de la suite X, on se donne les suites (b_n) et (λ_n) et on suppose que $x_{n,0} = 0$ pour $n = 1, 2, ..., 10$. Puis nous choisissons $t \in [0, 1]$ tel que $t = k/10$, $k = 0, 1, 2, ..., 10$. Le programme permet donc d'obtenir les graphes de $x_n(t))_{n\geq 1}$ pour $n = 1, 2, ..., 10$. On considère ici plusieurs cas.

1^{er} cas. Quand (λ_n) est croissante et (b_n) est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, avec $\lambda_n = n/10$, $b_n = (11 - n)/10$ pour $n = 1, 2, ..., 10$, on obtient la figure 4.1.

$2^{ème}$ cas. Quand (λ_n) et (b_n) sont décroissantes sur l'intervalle $[0, 1]$, avec $\lambda_n = b_n = (11 - n)/10$ pour $n = 1, 2, ..., 10$, on obtient la figure 4.2.

$3^{ème}$ cas. Lorsque (λ_n) est décroissante et (b_n) est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$, avec $\lambda_n = (11 - n)/10$, $b_n = n/10$ pour $n = 1, 2, ..., 10$, on obtient la figure 4.3.

$4^{ème}$ cas. Lorsque (λ_n) et (b_n) sont croissantes sur l'intervalle $[0, 1]$, avec $\lambda_n = b_n = n/10$ pour $n = 1, 2, ..., 10$, on obtient la figure 4.4.

$5^{ème}$ cas. Quand les λ_n sont décroissants sauf le dernier terme λ_{10} dont la valeur est supérieure au maximum des λ_i pour $1 \leq i \leq 9$ et les b_n sont décroissants sur l'intervalle $[0, 1]$, on obtient donc la figure 4.5.

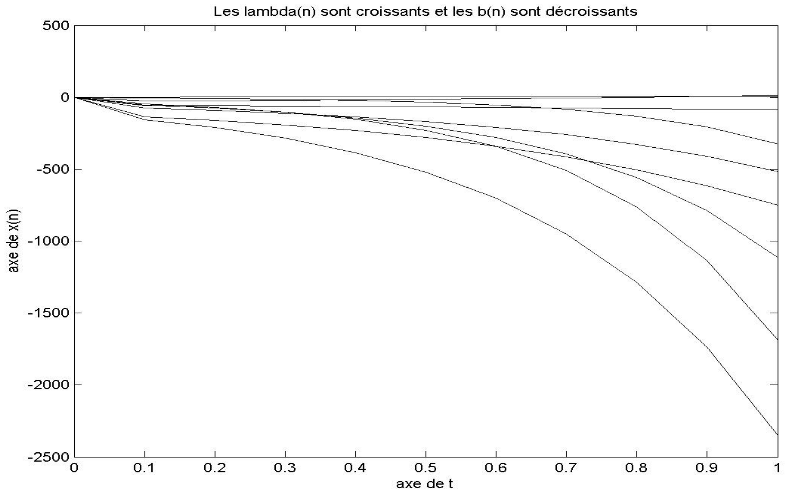

FIG. 4.1: $\lambda_n \nearrow$ et $b_n \searrow$

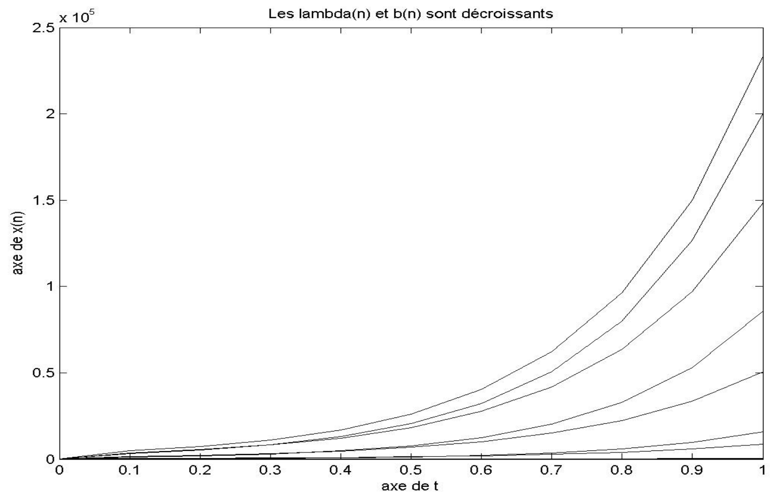

FIG. 4.2: $\lambda_n \searrow$ et $b_n \searrow$

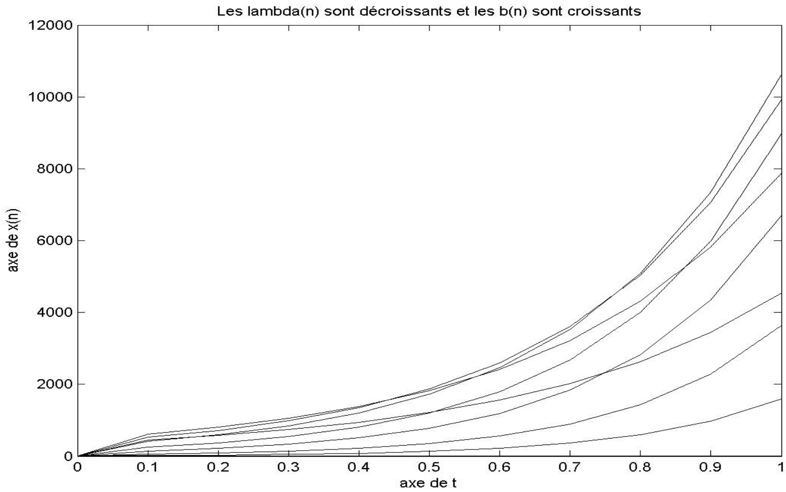

FIG. 4.3: $\lambda_n \searrow$ et $b_n \nearrow$

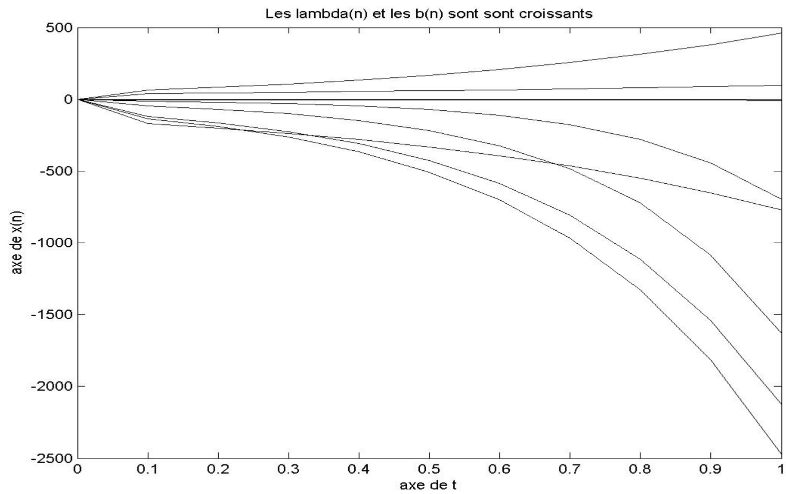

FIG. 4.4: $\lambda_n \nearrow$ et $b_n \nearrow$

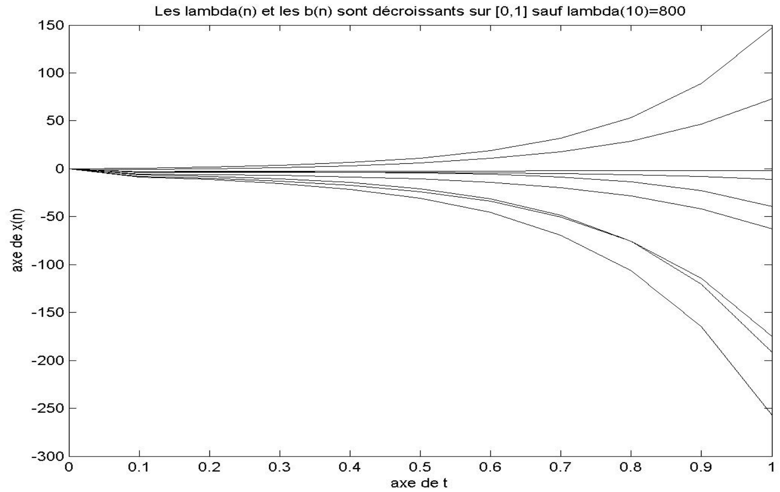

FIG. 4.5: $\lambda_n \searrow$ et $b_n \searrow$ sauf $\lambda_{10} = 800$

Dans la section suivante on étudie le cas où $\Delta(\lambda)$ est remplacé par son inverse $C(\lambda)$.

4.4 L'équation $X'(t) = C(\lambda) X(t) + B$

On s'intéresse ici à l'étude de l'équation

$$X'(t) = C(\lambda) X(t) + B, \tag{4.12}$$

dans le cas où $\lambda_n = \lambda$ pour tout n et dans le cas où les λ_n sont tous distincts.

Ensuite nous utilisons ces résultats pour étudier l'équation $X'(t) = \overline{N}_q X(t) + B$. Dans la suite on suppose que les termes ayant un indice négatif sont nuls.

4.4.1 L'équation $X'(t) = \frac{1}{\lambda}\Sigma X(t) + B$.

Dans ce Paragraphe on suppose que λ est une suite pour laquelle les $\lambda_n = \lambda \neq 0$. Cela implique que l'équation (4.12) est équivalente à l'équation

$$X'(t) = \frac{1}{\lambda}\Sigma X(t) + B, \tag{4.13}$$

qui s'écrit sous la forme

$$x_n'(t) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} x_k(t) + b_n \quad n = 1, 2, ...$$

Dans la suite on donne le résultat suivant.

Théorème 4.5. *Le système (4.13) où $\lambda_n = \lambda \neq 0$ pour tout n, vérifiant les conditions $x_n(0) = x_{n,0}$ pour tout n possède une solution unique donnée par*

$$\begin{aligned} x_n(t) &= e^{t/\lambda} \sum_{k=1}^{n} (x_{k,0} - x_{k-1,0}) \sum_{s=0}^{n-k} C_{n-k}^{s} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{s} \frac{1}{s!} \\ &\quad + \lambda e^{t/\lambda} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sum_{s=0}^{n-k-1} C_{n-k-1}^{s} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{s+1} \frac{1}{(s+1)!}, \end{aligned}$$

avec $\beta_n = b_n - b_{n-1}$ pour tout n.

Preuve. Comme $\Delta = \Sigma^{-1}$ l'équation (4.13) est équivalente à

$$\lambda \Delta X'(t) = X(t) + \lambda \Delta B,$$

cela implique que l'équation (4.13) est équivalente à

$$\lambda \left(x_n'(t) - x_{n-1}'(t)\right) = x_n(t) + \lambda (b_n - b_{n-1}), \; n = 1, 2, ... \tag{4.14}$$

où $x_n'(0) = 0$. Maintenant en appliquant la transformée de Laplace avec $Ł[x_n(t)] = X_n(p) = X_n$ on obtient immédiatement

$$Ł\left[x_n'(t)\right] = pX_n - x_{n,0}, \; Ł[b_n - b_{n-1}] = \frac{(b_n - b_{n-1})}{p},$$

et en supposant $\beta_n = \Delta b_n$ pour tout n, l'équation (4.14) est équivalente à

$$(p\lambda - 1) X_n - p\lambda X_{n-1} = \lambda \left(x_{n,0} - x_{n-1,0} + \frac{\beta_n}{p}\right) \quad n = 1, 2, ...$$

Cette dernière équation est équivalente à l'équation matricielle

$$TX = \widehat{B}$$

où $\left[\widehat{B}\right]_n = \left(\widehat{b}_n\right)_{n \geq 1}$ avec

$$\widehat{b}_n = \lambda \left(x_{n,0} - x_{n-1,0} + \frac{\beta_n}{p}\right),$$

et T est le triangle

$$T = \begin{pmatrix} p\lambda - 1 & & & & \\ -p\lambda & p\lambda - 1 & & 0 & \\ & . & . & & \\ 0 & & -p\lambda & p\lambda - 1 & \\ & & & . & . \end{pmatrix}.$$

On déduit du paragraphe 4.2 que

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{p\lambda-1} & & & & \\ \frac{p\lambda}{(p\lambda-1)^2} & \frac{1}{p\lambda-1} & & 0 & \\ . & . & . & & \\ \frac{(p\lambda)^{n-1}}{(p\lambda-1)^n} & . & \frac{p\lambda}{(p\lambda-1)^2} & \frac{1}{p\lambda-1} & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que

$$\left[T^{-1}\right]_{n,k}=(p\lambda)^{n-k}/(p\lambda-1)^{n-k+1} \text{ pour } k\leq n.$$

Comme

$$(p\lambda)^{n-k}=\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^{i}\,(p\lambda-1)^{i},$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
X_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(p\lambda)^{n-k}}{(p\lambda-1)^{n-k+1}}\widehat{b}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\lambda\left(x_{k,0}-x_{k-1,0}+\frac{\beta_k}{p}\right)\frac{(p\lambda)^{n-k}}{(p\lambda-1)^{n-k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\lambda\left(x_{k,0}-x_{k-1,0}\right)\frac{(p\lambda)^{n-k}}{(p\lambda-1)^{n-k+1}}+\sum_{k=1}^{n}\lambda\left(\frac{\beta_k}{p}\right)\frac{(p\lambda)^{n-k}}{(p\lambda-1)^{n-k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\lambda\left(x_{k,0}-x_{k-1,0}\right)\frac{(p\lambda)^{n-k}}{(p\lambda-1)^{n-k+1}}+\sum_{k=1}^{n}\lambda^2\beta_k\frac{(p\lambda)^{n-k-1}}{(p\lambda-1)^{n-k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\lambda\left(x_{k,0}-x_{k-1,0}\right)\frac{\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^{i}\,(p\lambda-1)^{i}}{(p\lambda-1)^{n-k+1}}+\sum_{k=1}^{n}\lambda^2\beta_k\frac{\sum_{i=0}^{n-k-1}C_{n-k-1}^{i}\,(p\lambda-1)^{i}}{(p\lambda-1)^{n-k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\lambda\left(x_{k,0}-x_{k-1,0}\right)\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^{i}\frac{1}{(p\lambda-1)^{n-k-i+1}} \\
&\quad +\sum_{k=1}^{n}\lambda^2\beta_k\sum_{i=0}^{n-k-1}C_{n-k-1}^{i}\frac{1}{(p\lambda-1)^{n-k-i+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\lambda\left(x_{k,0}-x_{k-1,0}\right)\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^{i}\frac{1}{\left[\lambda\left(p-\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{n-k-i+1}} \\
&\quad +\sum_{k=1}^{n}\lambda^2\beta_k\sum_{i=0}^{n-k-1}C_{n-k-1}^{i}\frac{1}{\left[\lambda\left(p-\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{n-k-i+1}}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$Ł^{-1}\left[\frac{1}{\left[\lambda\left(p-\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{n-k-i+1}}\right]=\frac{1}{\lambda^{n-k-i+1}}\frac{t^{n-k-i}}{(n-k-i)!}e^{t/\lambda},$$

Donc on conclut

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= \text{Ł}^{-1}[X_n] \\
&= \text{Ł}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda(x_{k,0}-x_{k-1,0})\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^{i}\frac{1}{\left[\lambda\left(p-\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{n-k-i+1}}\right] \\
&\quad +\text{Ł}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda^{2}\beta_k\sum_{i=0}^{n-k-1}C_{n-k-1}^{i}\frac{1}{\left[\lambda\left(p-\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{n-k-i+1}}\right] \\
&= e^{t/\lambda}\sum_{k=1}^{n}(x_{k,0}-x_{k-1,0})\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^{i}\frac{1}{\lambda^{n-k-i}}\frac{t^{n-k-i}}{(n-k-i)!} \\
&\quad +\lambda e^{t/\lambda}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\sum_{i=0}^{n-k-1}C_{n-k-1}^{i}\frac{1}{\lambda^{n-k-i}}\frac{t^{n-k-i}}{(n-k-i)!}.
\end{aligned}
$$

En posant $s = n-k-i$ et comme $C_{n-k}^{n-k-s} = C_{n-k}^{s}$ on obtient

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= e^{t/\lambda}\sum_{k=1}^{n}(x_{k,0}-x_{k-1,0})\sum_{s=0}^{n-k}C_{n-k}^{s}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{s}\frac{1}{s!} \\
&\quad +\lambda e^{t/\lambda}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\sum_{s=0}^{n-k-1}C_{n-k-1}^{s}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{s+1}\frac{1}{(s+1)!}.
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. ■

Dans ce qui suit on utilise de nouveau la programmation Matlab afin de tracer les graphes des fonctions $t \mapsto x_n(t)$ qui constituent la solution $X(t) = (x_n(t))_{n\geq 1}$ de l'équation $X'(t) = \frac{1}{\lambda}\Sigma X(t) + B$. Pour cela nous nous donnons les suites (b_n) et (λ_n) et nous supposons que $x_{n,0} = 0$ pour tout n. On se limite ici à $t \in [0,1]$ avec $t = k/10$, $k = 0, 1, 2, ..., 10$. Le programme donne le graphe qui représente la solution $X = (x_n(t))_{n\geq 1}$ pour t fixé et pour chacune des valeurs $n = 1, 2, ..., 10$. On considère plusieurs cas.

1^{er} cas. $\lambda = 8$ et les b_n sont croissants sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient la figure 4.6.

$2^{ème}$ cas. $\lambda = 13$ et les b_n sont décroissants sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient la figure 4.7.

$3^{ème}$ cas. $\lambda = 1000$ et $b_{2k} = 1$, $b_{2k+1} = 2$, on obtient la figure 4.8.

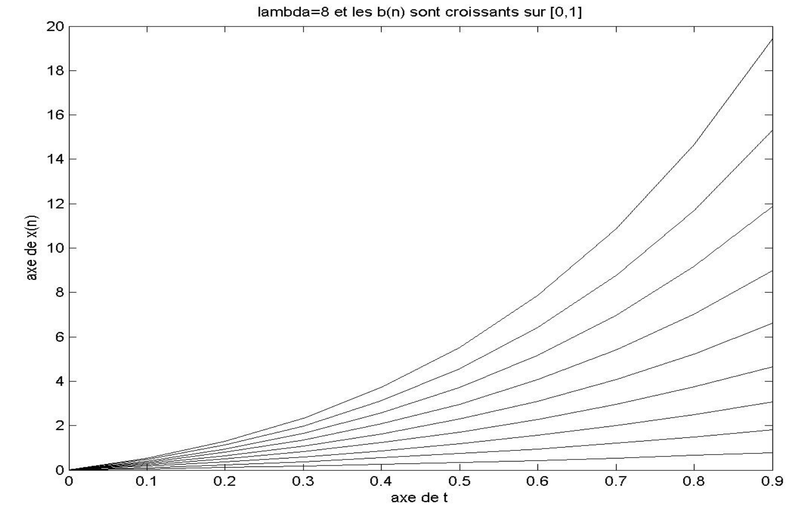

FIG. 4.6: $\lambda = 8$ et les b_n sont croissants sur [0,1]

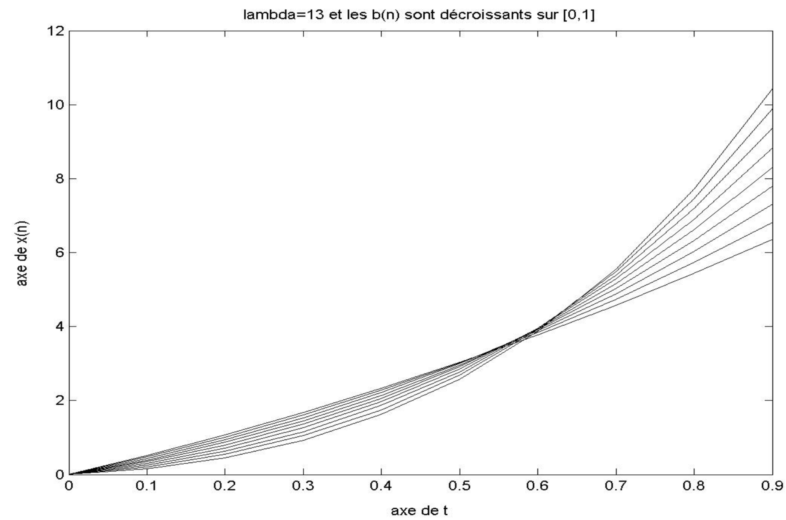

FIG. 4.7: $\lambda = 13$ et les b_n sont décroissants sur $[0, 1]$

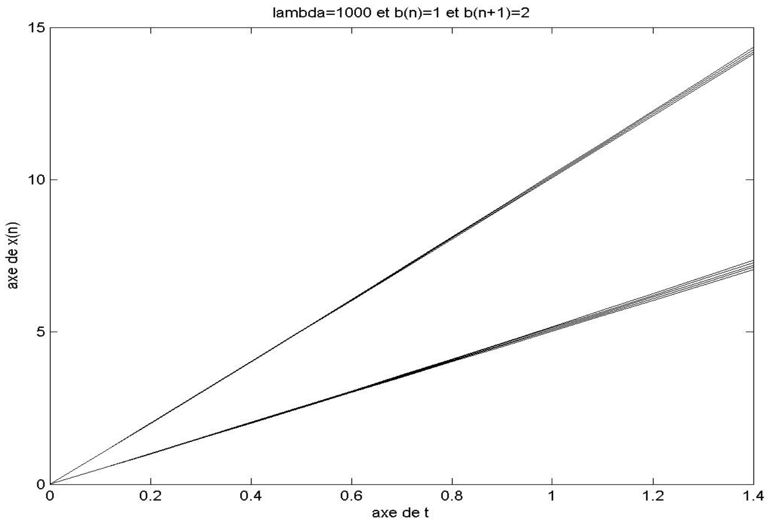

FIG. 4.8: $n = 15$, $\lambda = 1000$ et $b_n = 1$, $b_{n+1} = 2$

4.4.2 L'équation $X'(t) = C(\lambda) X(t) + B$ où les λ_n sont distincts.

Dans ce paragraphe on choisit la suite λ telle que les λ_n sont distincts pour tout n. Pour l'étude de l'équation 4.12 on a besoin de la décomposition en éléments simples suivante.

Lemme 4.6. *Soient a_i, $i = k, ..., n$ des réels distincts. Posons*

$$F(x) = \frac{1}{x - a_n} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{b_j x}{x - a_j}$$

On a

$$F(x) = \frac{A_n}{x - a_n} + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{A_j}{x - a_j}$$

avec

$$A_n = a_n^{n-k} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{a_n - a_j} \text{ et } A_j = \frac{a_j^{n-k} b_j}{a_j - a_n} \prod_{l=k, l \neq j}^{n-1} \frac{b_l}{a_j - a_l}.$$

Preuve. Des calculs élémentaires nous donnent

$$A_n = \lim_{x \to a_n} (x - a_n) F(x) = \prod_{j=k}^{n-1} \frac{b_j a_n}{a_n - a_j} = a_n^{n-k} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{a_n - a_j}.$$

Donc pour $j \leq n-1$

$$A_j = \lim_{x \to a_j} (x - a_j) F(x) = \frac{a_j^{n-k} b_j}{a_j - a_n} \prod_{l=k, l \neq j}^{n-1} \frac{b_l}{a_j - a_l}.$$

■

On voit aisément que $X'(t) = C(\lambda) X(t) + B$ est équivalente au système

$$x_n'(t) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} x_k(t) + b_n, \; n = 1, 2, ... \tag{4.15}$$

Théorème 4.7. *Le système (4.15) où les λ_n sont tous distincts vérifiant les conditions $x_n(0) = x_{n,0}$ pour tout $n \geq 1$ possède une solution unique donnée par*

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{\lambda_n} \left[\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{n-1}} \prod_{l=k}^{n-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_l - \lambda_n} e^{\frac{t}{\lambda_n}} + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{\lambda_{j-1}\lambda_n}{\lambda_j(\lambda_n - \lambda_j)} \prod_{l=k, l \neq j}^{n-1} \left(\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l - \lambda_j} \right) e^{\frac{t}{\lambda_j}} \right] \widetilde{b}_k \\ &+ \frac{\widetilde{b}_n}{\lambda_n} e^{\frac{t}{\lambda_n}} - \zeta_n, \end{aligned} \tag{4.16}$$

où $\widetilde{b}_n = \lambda_n (x_{n,0} + \zeta_n) - \lambda_{n-1}(x_{n-1,0} + \zeta_{n-1})$ et $\zeta_n = -\lambda_{n-1} b_{n-1} + \lambda_n b_n$ pour $n = 1, 2, ...$

Preuve. Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite dont les termes sont tous distincts. L'équation (4.12) est équivalente au système différentiel infini

$$X'(t) = C(\lambda)(X(t) + \Delta(\lambda) B).$$

En Posant $\zeta_n = \lambda_n b_n - \lambda_{n-1} b_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et en supposant que

$$Y(t) = X(t) + \Delta(\lambda) B.$$

On voit évidemment que l'équation (4.12) est équivalente à

$$Y'(t) = C(\lambda) Y(t), \tag{4.17}$$

ce qui revient à dire que

$$\Delta(\lambda) Y'(t) - Y(t) = 0,$$

où $y_n(0) = y_{n,0} = x_{n,0} + \zeta_n$ et $\zeta_n = \lambda_n b_n - \lambda_{n-1} b_{n-1}$ pour tout $n = 1, 2, ...$ Donc l'équation (4.17) est équivalente à

$$-\lambda_{n-1} y_{n-1}'(t) + \lambda_n y_n'(t) - y_n(t) = 0 \quad n = 1, 2, ...$$

En appliquant la transformée de Laplace avec $Ł[y_n(t)] = Y_n(p) = Y_n$ on obtient $Ł[y_n'(t)] = pY_n - y_{n,0}$ et

$$-p\lambda_{n-1} Y_{n-1} + (p\lambda_n - 1) Y_n = -\lambda_{n-1} y_{n-1,0} + \lambda_n y_{n,0} \quad n = 1, ...$$

On est amené donc à résoudre le système $TY = \widetilde{B}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} p\lambda_1 - 1 & & & & \\ -p\lambda_1 & p\lambda_2 - 1 & & 0 & \\ & . & . & & \\ 0 & & -p\lambda_{n-1} & p\lambda_n - 1 & \\ & & & . & . \end{pmatrix}$$

$Y = {}^t(Y_n)_{n\geq 1}$ et $\widetilde{B} = {}^t\left(\widetilde{b}_n\right)_{n\geq 1}$ avec $\widetilde{b}_n = -\lambda_{n-1} y_{n-1,0} + \lambda_n y_{n,0}$. Comme T est un triangle inversible et

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p\lambda_1 - 1} & & & & \\ . & \frac{1}{p\lambda_2 - 1} & & 0 & \\ . & . & . & & \\ . & \frac{1}{p\lambda_n - 1} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{p\lambda_{j-1}}{1 - p\lambda_j} & . & \frac{1}{p\lambda_n - 1} & \\ & & & . & . \end{pmatrix},$$

alors on obtient $Y = T^{-1}\widetilde{B}$ où

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p\lambda_n - 1} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \frac{p\lambda_{j-1}}{1 - p\lambda_j} \right) \widetilde{b}_k + \frac{\widetilde{b}_n}{p\lambda_n - 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} F_k(p)\, \widetilde{b}_k, \end{aligned} \tag{4.18}$$

où

$$F_k(p) = \begin{cases} \frac{1}{p - \frac{1}{\lambda_n}} \left[\prod_{j=k}^{n-1} \frac{-p\lambda_{j-1}}{\lambda_j \left(p - \frac{1}{\lambda_j} \right)} \right] & \text{pour } k \leq n-1, \\ \frac{1}{p - \frac{1}{\lambda_n}} & \text{pour } k = n \end{cases}$$

En décomposant $F_k(p)$ pour $k \leq n-1$ en éléments simples on obtient

$$F_k(p) = \frac{A_n}{p - \frac{1}{\lambda_n}} + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{A_j}{p - \frac{1}{\lambda_j}}.$$

D'après le Lemme 4.6 où $a_j = 1/\lambda_j$ et $b_j = -\lambda_{j-1}/\lambda_j$ on obtient

$$A_n = a_n^{n-k} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{a_n - a_j} = \frac{1}{\lambda_n^{n-k}} \prod_{l=k}^{n-1} \left(-\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l} \right) \prod_{l=k}^{n-1} \left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_l}} \right),$$

et comme

$$\prod_{l=k}^{n-1} \left(-\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l} \right) = (-1)^{n-k} \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{n-1}}$$

et

$$\prod_{l=k}^{n-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_l}}\right)=\prod_{l=k}^{n-1}\frac{\lambda_l\lambda_n}{\lambda_l-\lambda_n}=\lambda_n^{n-k}\prod_{l=k}^{n-1}\frac{\lambda_l}{\lambda_l-\lambda_n}$$

on déduit

$$A_n=(-1)^{n-k}\,\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{n-1}}\prod_{l=k}^{n-1}\frac{\lambda_l}{\lambda_l-\lambda_n}.$$

Donc pour $1\leq j\leq n-1$ on aura

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{a_j^{n-k}b_j}{a_j-a_n}\prod_{l=k,l\neq j}^{n-1}\frac{b_l}{a_j-a_l}=\frac{\frac{1}{\lambda_j^{n-k}}\left(-\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right)}{\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_n}}\prod_{l=k,l\neq j}^{n-1}\left(-\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l}\right)\frac{1}{\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_l}}\\
&= -\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j^{n-k+1}}\frac{\lambda_n\lambda_j}{\lambda_n-\lambda_j}(-1)^{n-k-1}\prod_{l=k,l\neq j}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{l-1}\lambda_j}{\lambda_l-\lambda_j}\right)\\
&= (-1)^{n-k}\,\frac{\lambda_{j-1}\lambda_n}{\lambda_j^{n-k}}\frac{1}{\lambda_n-\lambda_j}\lambda_j^{n-k-1}\prod_{l=k,l\neq j}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l-\lambda_j}\right)\\
&= (-1)^{n-k}\,\frac{\lambda_{j-1}\lambda_n}{\lambda_j\left(\lambda_n-\lambda_j\right)}\prod_{l=k,l\neq j}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l-\lambda_j}\right).
\end{aligned}$$

Donc pour $1\leq k\leq n-1$ on a

$$F_k\left(p\right)=(-1)^{n-k}\left[\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{n-1}}\prod_{l=k}^{n-1}\frac{\lambda_l}{\lambda_l-\lambda_n}\frac{1}{p-\frac{1}{\lambda_n}}+\sum_{j=k}^{n-1}\frac{\lambda_{j-1}\lambda_n}{\lambda_j\left(\lambda_n-\lambda_j\right)}\prod_{l=k,l\neq j}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l-\lambda_j}\right)\frac{1}{p-\frac{1}{\lambda_j}}\right].$$

Donc en supposant

$$\theta_{k,n}=\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{n-1}}\prod_{l=k}^{n-1}\frac{\lambda_l}{\lambda_l-\lambda_n}\text{ et }\theta'_{n,k}\left(j\right)=\frac{\lambda_{j-1}\lambda_n}{\lambda_j\left(\lambda_n-\lambda_j\right)}\prod_{l=k,l\neq j}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l-\lambda_j}\right),$$

on obtient

$$Y_n\left(p\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{\lambda_n}\left[\theta_{k,n}\left(\frac{1}{p-\frac{1}{\lambda_n}}\right)+\sum_{j=k}^{n-1}\theta'_{n,k}\left(j\right)\left(\frac{1}{p-\frac{1}{\lambda_j}}\right)\right]\widetilde{b}_k+\frac{\widetilde{b}_n}{\lambda_n\left(p-\frac{1}{\lambda_n}\right)}.$$

En utilisant (4.18) et comme

$$\text{Ł}^{-1}\left(\frac{1}{p-\frac{1}{\lambda_j}}\right)=e^{\frac{t}{\lambda_j}}\text{ pour tout } j=1,2,....$$

on conclut

$$y_n\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{\lambda_n}\left[\theta_{k,n}e^{\frac{t}{\lambda_n}}+\sum_{j=k}^{n-1}\theta'_{n,k}\left(j\right)e^{\frac{t}{\lambda_j}}\right]\widetilde{b}_k+\frac{\widetilde{b}_n}{\lambda_n}e^{\frac{t}{\lambda_n}}.$$

En remplaçant $y_n(t)$ par sa valeur on obtient

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{\lambda_n} \left[\theta_{k,n} e^{\frac{t}{\lambda_n}} + \sum_{j=k}^{n-1} \theta'_{n,k}(j)\, e^{\frac{t}{\lambda_j}} \right] \widetilde{b}_k \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_n} \left[\lambda_n (x_{n,0} + \zeta_n) - \lambda_{n-1} (x_{n-1,0} + \zeta_{n-1}) \right] e^{\frac{t}{\lambda_n}} - \zeta_n. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

4.5 Application à l'équation $X'(t) = \overline{N}_q X(t) + B$

Dans cette section on applique les résultats précédents pour le cas où $T = \overline{N}_q$, la matrice de la moyenne pondérée. Rappelons que $\overline{N}_q$ est une matrice triangulaire définie par

$$\left[\overline{N}_q\right]_{nm} = \begin{cases} \dfrac{q_m}{Q_n} & \text{pour } m \leq n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

où $q = (q_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes positifs, Q est une suite définie par $Q_n = \sum_{m=1}^{n} q_m$ pour tout $n \geq 1$. On a vu que $\overline{N}_q = D_{1/Q} \Sigma D_q$. Notons que l'équation suivante

$$X'(t) = \overline{N}_q X(t) + B \tag{4.19}$$

est équivalente au système différentiel infini

$$x'_n(t) = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_k x_k(t) + b_n \qquad n = 1, 2, ...$$

Corollaire 4.8. *Supposons que*

$$\theta_{k,n} = \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{n-1}} \prod_{l=k}^{n-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_l - \lambda_n} \text{ et } \theta'_{n,k}(j) = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_n}{\lambda_j(\lambda_n - \lambda_j)} \prod_{l=k,l\neq j}^{n-1} \left(\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l - \lambda_j} \right).$$

L'équation (4.19) avec les conditions $x_n(0) = x_{n,0}$ possède une solution unique donnée par

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \frac{1}{q_n \lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \left[\theta_{k,n} e^{\frac{t}{\lambda_n}} + \sum_{j=k}^{n-1} \theta'_{n,k}(j)\, e^{\frac{t}{\lambda_j}} \right] \widetilde{b}_k \\ &\quad + \frac{1}{q_n \lambda_n} \left[\lambda_n (x_{n,0} + \zeta_n) - \lambda_{n-1} (x_{n-1,0} + \zeta_{n-1}) \right] e^{\frac{t}{\lambda_n}} - \frac{\zeta_n}{q_n}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

où $\lambda_n = Q_n / q_n$, $\widetilde{b}_n = \lambda_n (x_{n,0} + \zeta_n) - \lambda_{n-1} (x_{n-1,0} + \zeta_{n-1})$ et $\zeta_n = \lambda_n q_n b_n - \lambda_{n-1} q_{n-1} b_{n-1}$ pour tout $n = 1, 2, ...$

Preuve. Posons $Y = D_q X$. Comme $\overline{N}_q = D_{1/Q} \Sigma D_q$ l'équation (4.19) est équivalente à

$$\frac{d}{dt} D_{\frac{1}{q}} Y(t) = D_{\frac{1}{q}} \frac{d}{dt} Y(t) = D_{\frac{1}{Q}} \Sigma Y(t) + D_q B.$$

Donc

$$\frac{d}{dt} Y(t) = D_{\frac{q}{Q}} \Sigma Y(t) + D_q B = C(Q/q) Y(t) + D_q B.$$

En posant $\lambda = Q/q$ on conclut que l'équation (4.19) possède une solution unique donnée par $X(t) = D_{1/q} Y(t)$ où $Y(t)$ determinée par (4.16) et B est remplacée par $D_q B$, c-à-d. (4.20). D'où le résulat. ■

Chapitre 5

Equations d'espaces de suites

5.1 Introduction

Dans ce Chapitre, on présente l'article [61], où l'on écrira $x = (x_n)_{n\geq 1}$ pour plus de clarté. Dans le livre [102] intitulé par *Summability through Functional Analysis,* Wilansky a introduit l'espace $1/a * \ell_\infty$ où $a = (a_n)_{n\geq 1}$ est une suite satisfaisant $a_n \neq 0$ pour tout n. Rappelons que $x = (x_n)_{n\geq 1}$ appartient à $1/a * \ell_\infty$ si $(a_n x_n)_{n\geq 1}$ est bornée. Indépendamment dans [14] B. de Malafosse a introduit l'ensemble $s_r = (1/r^n)_n^{-1} * \ell_\infty$ avec $r > 0$ et l'ensemble $s_a = (1/a)^{-1} * \ell_\infty$ avec $a_n > 0$ pour tout n. Le but était d'étudier un système linéaire infini représenté par l'équation matricielle $MX = B$ où X est l'inconnu et X, B sont des matrices colonnes, et $M = (\mu_{nm})_{n,m\geq 1}$ est une matrice infinie considérée comme un opérateur de s_r dans s_r, ou de s_a dans s_a, (cf. [14]). Dans [32, 24] on a défini la somme $s_a + s_b$ et le produit $s_a * s_b$ des ensembles s_a and s_b, on a aussi introduit des caractérisations de matrices de transformations de l'espaces $s_a + s_b^0(\Delta^q)$ dans $s_a + s_b^{(c)}(\Delta^q)$, où Δ est l'opérateur de différence d'ordre 1. Dans [48] de Malafosse et Malkowsky ont donné des propriétés de la matrice de moyenne pondérée $\overline{N}_q$ considérée comme opérateur dans l'ensemble s_a. Dans [49] on trouve des caractérisations de $(s_a(\Delta^q), F)$ où q est un entier, F est l'un des ensembles c_0, c et ℓ_∞. Il y a beaucoup d'autres résultats qui utilisent des ensembles s_a, citons par exemple, l'étude du $\sigma-core$ [38], la résolution de systèmes infinis [37], la mesure de noncompacité d'Hausdorff [54], et la convergence statistique, [55]. Notre but dans ce Chapitre est de résoudre des *équations d'espaces de suites* (EES), sequence space equations (SSE) en anglais, qui sont déterminées par une identité dont chaque terme est *une somme ou un produit d'ensembles de suites de type s_a et $s_{f(x)}$* où f est une application de U^+ dans lui même et x est la suite inconnue. La résolution de telles équations consiste à déterminer l'ensemble de toutes les suites x qui satisfont l'équation. Dans la plupart des cas cet ensemble est une classe d'équivalence.

Ce chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord nous rappelons des résultats sur la somme et le produit d'ensembles de la forme s_a. Ensuite nous résolvons dans quelques cas les *équations d'espaces de suites* $s_a + s_x = s_b$, $s_a + s_b * s_x = s_d$ et $s_c * s_x + s_a = s_d * s_x + s_b$, et nous traitons l'équation $s_{\phi(x)} = s_b$ où ϕ est une fonction strictement monotone, continue et définie sur $]0, +\infty[$ dans lui même avec $[\phi(x)]_n = \phi(x_n)$ pour tout n , et on donne des applications où on détermine les ensembles de toutes les suites x telles que $s_{x^2+x} = s_b$, $s_{(\arg\sinh x_n)_n} = s_b$ et $s_{\exp x - e} = s_b$. Finalement nous traitons les matrices de transformations définies sur s_x, où x est une suite qui vérifie l'équation $s_{\phi(x)} = s_b$.

5.2 Somme et produit d'espaces de suites de la forme s_a

On rappelle que s, ℓ_∞ et c_0 sont les ensembles de suites complexes, bornées et convergentes respectivement, U^+ est l'ensemble de toutes les suites réelles ξ telles que $\xi_n > 0$ pour tout n. Dans la suite nous nous concentrerons sur l'ensemble s_a. Rappelons que pour tout $a \in U^+$ l'espace $s_a = (1/a)^{-1} * \ell_\infty$ est l'ensemble de toutes les suites $\xi \in s$ tel que

$$\|\xi\|_{s_a} = \sup_n \left(\frac{|\xi_n|}{a_n}\right) < \infty.$$

5.2.1 Somme d'ensembles de la forme s_a.

Dons cette section on rappelle quelques propriétés de la somme $E + F$ d'ensembles de la forme s_a.

Soient E, $F \subset s$ deux espaces vectoriel. L'ensemble $E + F$ est défini par

$$E + F = \{\xi \in s \ / \text{ il existe } \zeta \in E, \eta \in F \text{ tels que } \xi = \zeta + \eta\}.$$

Ensuite on utilise la notation $\max(a, b)$ définie par

$$[\max(a, b)]_n = \begin{cases} a_n \text{ if } a_n \geq b_n, \\ b_n \text{ if } a_n \leq b_n. \end{cases}$$

De [32, Proposition 1, p. 244] et [39, Théorème 4, p. 293] on déduit que $E+F = F$ si et seulement si $E \subset F$.

Lemme 5.1. *Soient $a, b \in U^+$. On a*

(i) $s_a \subset s_b$ si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que

$$a_n \leq K b_n \text{ pour tout } n.$$

(ii) $s_a = s_b$ *si et seulement s'il existe* $K_1,\ K_2 > 0$ *tels que*

$$K_1 \leq \frac{b_n}{a_n} \leq K_2 \text{ pour tout } n.$$

(iii) $s_a + s_b = s_{a+b} = s_{\max(a,b)}$.
(iv) $s_a + s_b = s_a$ *si et seulement si* $b/a \in \ell_\infty$.

Ces résultats mènent au lemme suivant où nous posons

$$\mathcal{S} = \left\{ s_a : a \in U^+ \right\}.$$

Lemme 5.2. *L'ensemble* $\mathcal{S}$ *muni de l'addition* $+$ *est un groupoïde commutatif, c'est à dire* $s_a + s_b \in \mathcal{S}$ *pour tout* $a,\ b \in U^+$ *et l'addition est associative et commutative.*

Remarque 5.3. *Notons qu'il n'existe pas d'élément neutre dans* $\mathcal{S}$, *car d'après le Lemme 5.1 (iv) il n'existe pas d'élément* $b \in \mathcal{S}$ *tel que* $s_a + s_b = s_a$ *pour tout* $a \in U^+$.

Pour tous $a,\ b \in U^+$, on peut définir la relation $a\mathcal{R}b$ si et seulement si $s_a = s_b$. On voit aisément que $\mathcal{R}$ est une relation d'*équivalence* sur U^+ compatible avec l'addition de suites. En effet soient $a,\ b, a', b' \in U^+$. Les identités $s_a = s_b$ et $s_{a'} = s_{b'}$ impliquent

$$s_{a+a'} = s_a + s_{a'} = s_b + s_{b'} = s_{b+b'}.$$

Cela montre que $a\mathcal{R}b$ et $a'\mathcal{R}b'$ impliquent $(a + a')\,\mathcal{R}\,(b+b')$. Pour toute suite $a \in U^+$ on a

$$cl\,(a) = \left\{ x \in U^+ :\ \text{il existe } K_1,\ K_2 > 0 \text{ tels que } K_1 a_n \leq x_n \leq K_2 a_n \text{ pour tout } n \right\}.$$

D'où

$$cl\,(e) = \left\{ x \in U^+ :\ \text{il existe } K_1,\ K_2 > 0 \text{ tels que } K_1 \leq x_n \leq K_2 \text{ pour tout } n \right\}.$$

Les résultats précédents nous permettent de caractériser l'ensemble $s_{(\lambda a_n + \mu)_n}$.

Corollaire 5.4. *Soient* $\lambda, \mu > 0$. *On a*

(i) $s_{\lambda a + \mu e} = s_{(\lambda a_n + \mu)_n} = s_a$ *si et seulement s'il existe* $K_1 > 0$ *tel que* $a_n \geq K_1$ *pour tout* n.

(ii) $s_a + \ell_\infty = \ell_\infty$ *si et seulement s'il existe* $K_2 > 0$ *tel que* $a_n \leq K_2$ *pour tout* n.

(iii) On a

$$s_{\lambda a + \mu e} = \begin{cases} s_a \text{ si } a_n \to \infty \ (n \to \infty), \\ \ell_\infty \text{ si } a_n \to L \geq 0 \ (n \to \infty). \end{cases}$$

Preuve. (i) On a

$$s_{\lambda a+\mu e} = s_{\lambda a} + s_{\mu e} = s_{\lambda a} + \ell_\infty = s_a + \ell_\infty.$$

Donc $s_a + \ell_\infty = s_a$ si et seulement si $\ell_\infty \subset s_a$, c'est à dire si $a_n \geq K_1$ pour certain $K_1 > 0$.

(ii) Nous avons $s_a + \ell_\infty = \ell_\infty$ si et seulement si $s_a \subset \ell_\infty$, c'est à dire si $a_n \leq K_2$ pour certain $K_2 > 0$.

(iii) est une conséquence directe de (i) et (ii). ■

Remarque 5.5. *On conclut immédiatement que $s_{(2n+5)_n} = s_{(n)_n}$ et $s_{(3-2/n)_n} = \ell_\infty$, car $1 < 3 - 2/n < 3$ pour tout n.*

Enonçons le résultat suivant qui sera utilisé dans la prochaine section.

Lemme 5.6. *Soient $a = (a_n)_{n\geq 1}$, $b = (b_n)_{n\geq 1} \in U^+$.*

i) Si $a/b \in \ell_\infty$ alors

$$s_a \subset s_{x+b} \tag{5.1}$$

pour tout $x \in U^+$.

ii) Si $a_n/b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, la relation (5.1) est vérifiée si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que $x_n \geq K a_n$ pour tout n.

Preuve. i) La condition $a/b \in \ell_\infty$ implique que $s_a \subset s_b$. Comme on a

$$s_b \subset s_b + s_x = s_{x+b} \text{ pour tout } x \in U^+,$$

on conclut que $s_a \subset s_{x+b}$ si et seulement si $x \in U^+$.

ii) Condition nécessaire. La condition (5.1) signifie qu'il existe $K = K(x) > 0$ tel que pour tout n on a

$$a_n \leq K(x_n + b_n)$$

c'est à dire

$$x_n \geq a_n \left(\frac{1}{K} - \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ pour tout } n.$$

Comme $a_n/b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ on a $b/a \in c_0$ et il existe un entier N et un réel $K_1 > 0$ tels que

$$\frac{1}{K} - \frac{b_n}{a_n} \geq K_1 \text{ pour tout } n \geq N.$$

Donc $x_n \geq K_1' a_n$ pour tout n avec $K_1' = \min\{K_1, \min_{1\leq n\leq N-1}\{x_n\}\}$.

Condition suffisante. Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que $x_n \geq K a_n$ pour tout n. Alors $s_x \supset s_a$ et comme

$$s_x + s_b = s_{x+b} \supset s_x$$

on déduit que $s_{x+b} \supset s_a$. D'où le résultat. ■

5.2.2 Produit d'espaces des suites.

Dans cette section on étudie les propriétés du produit $E * F$ de certains sous espaces de s. Pour toute suite $\xi \in E$ et $\eta \in F$ on pose $\xi\eta = (\xi_n \eta_n)_{n\geq 1}$. La plupart des résultats suivants ont été montrés dans [32]. Pour tous ensembles de suites E et F, on pose

$$E * F = \bigcup_{\xi \in E} (1/\xi)^{-1} * F = \{\xi\eta \in s \ : \ \xi \in E \text{ et } \eta \in F\}.$$

Définition 5.7. *On appelle équation d'espaces de suites et note (EES) toute égalité contenant une somme ou une somme de produit d'espaces de suites de la forme s_x, $x \in U^+$.*

On obtient immédiatement les résultats suivants.

Proposition 5.8. *L'ensemble $\mathcal{S}$ muni de la multiplication $*$ est un groupe commutative possédant ℓ_∞ comme élément neutre.*

Preuve. D'après [32, Proposition 1, p. 244] on a $s_a * s_b = s_{ab}$. On déduit que l'application $\psi : U^+ \mapsto \mathcal{S}$ définie par $\psi(a) = s_a$ est un homomorphisme surjectif et comme U^+ muni de la multiplication des suites est un groupe, il en est de même pour $\mathcal{S}$. Donc l'élément neutre de $\mathcal{S}$ est $\psi(e) = s_1 = \ell_\infty$. ■

Notons que l'inverse de s_a est $s_{1/a}$.

Comme conséquence directe de la Proposition 5.8 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.9. *Soient a, b, $c \in U^+$. Donc*

(i) $s_a * s_b = s_{ab}$.

(ii) $s_a * s_b = s_a * s_c$ si et seulement si $s_b = s_c$.

(iii) La suite $x = (x_n)_{n\geq 1} \in U^+$ vérifie l'équation

$$s_a * s_x = s_b$$

si et seulement si

$$K_1 \frac{b_n}{a_n} \leq x_n \leq K_2 \frac{b_n}{a_n} \text{ pour tout } n \tag{5.2}$$

pour K_1, $K_2 > 0$ dépendant de x.

Preuve. (i) et (ii) sont des conséquences directes de la Proposition 5.8.

(iii) est une conséquence directe du fait que $\mathcal{S}$ muni de la multiplication $*$ est un groupe commutatif. Donc l'égalité $s_a * s_x = s_b$ est équivalente à

$$s_{\frac{1}{a}} * (s_a * s_x) = s_{\frac{1}{a}} * s_b$$

et à

$$s_x = s_{\frac{b}{a}},$$

c'est à dire $x \in cl(b/a)$. ■

Remarque 5.10. *Notons que la relation $\mathcal{R}$ définie dans la sous section 5.2.1 est compatible avec le produit des suites. On a aussi $a\mathcal{R}b$ implique $(1/a)\,\mathcal{R}\,(1/b)$ pour tout $a,\ b \in U^+$.*

5.3 Résolution d'équations d'espaces de suites

Dans cette section on détermine l'ensemble de toutes les suites $x = (x_n)_{n\geq 1} \in U^+$ vérifiant les équations $s_a + s_x = s_b$, $s_a + s_b * s_x = s_d$ et $s_c * s_x + s_a = s_d * s_x + s_b$. On considère un type spécial d'*équations d'espaces de suites* et on le note (EES), c'est une égalité dont les termes sont une somme ou une somme de produit d'ensembles de suites de la forme s_a *et* $s_{f(x)}$ *où* f *est une fonction définie de* U^+ *dans lui même et* $x = (x_n)_{n\geq 1} \in U^+$ *est la suite inconnue.*

5.3.1 Résolution de l'équation $s_a + s_x = s_b$

Théorème 5.11. *Soient $a = (a_n)_{n\geq 1}$, $b = (b_n)_{n\geq 1} \in U^+$ et considérons l'équation*

$$s_a + s_x = s_b \tag{5.3}$$

où $x = (x_n)_{n\geq 1} \in U^+$ est la suite inconnue. On a

(i) Si $a/b \in c_0$ alors l'équation (5.3) est vérifiée si et seulement s'il existe K_1, $K_2 > 0$ dépendant de x, tels que

$$K_1 b_n \leq x_n \leq K_2 b_n \text{ pour tout } n,$$

c'est à dire

$$s_x = s_b.$$

(ii) Si $a/b, b/a \in \ell_\infty$ alors l'équation (5.3) est vérifiée si et seulement s'il existe $K > 0$ dépendant de x tel que

$$0 < x_n \leq K b_n \text{ pour tout } n.$$

Cela veut dire que

$$s_x \subset s_b.$$

(iii) Si $a/b \notin \ell_\infty$ alors l'équation (5.3) ne possède pas de solutions dans U^+.

Preuve. (i) Condition nécessaire. Montrons que si $x = (x_n)_{n\geq 1} \in U^+$ vérifie l'équation (5.3) alors $s_x = s_b$. Comme $s_a + s_x = s_{a+x}$, l'équation (5.3) est équivalente à $s_{a+x} = s_b$. Donc (5.3) est vérifiée s'il existe K_1, $K_2 > 0$ tels que

$$0 < K_1 \leq \frac{a_n + x_n}{b_n} \leq K_2 \text{ pour tout } n.$$

Donc
$$K_1 - \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{x_n}{b_n} \leq K_2 - \frac{a_n}{b_n} \text{ pour tout } n.$$
Comme $a/b \in c_0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\frac{a_n}{b_n} < \frac{K_1}{2} \text{ pour tout } n \geq N.$$
Donc
$$0 < \frac{K_1}{2} \leq \frac{x_n}{b_n} \leq K_2 - \frac{a_n}{b_n} \tag{5.4}$$
pour tout $n \geq N$. Comme $x_n/b_n > 0$ pour tout n, on a $\inf_{n \leq N-1} \{x_n/b_n\} > 0$ et il existe K_3 tel que
$$K_3 \leq \frac{x_n}{b_n} \leq K_2 \text{ pour tout } n \geq N.$$
Donc on montre que l'équation (5.3) implique $s_x = s_b$.

Condition suffisante. On montre que si x vérifie l'égalité $s_x = s_b$, l'équation (5.3) est alors vérifiée. Comme $s_x = s_b$ on obtient alors trivialement $s_a + s_x = s_a + s_b$ et la condition $a/b \in c_0$ implique que
$$s_a \subset s_b$$
et donc $s_a + s_x = s_a + s_b = s_b$.

(ii) La condition $a/b, b/a \in \ell_\infty$ signifie que $s_a = s_b$ et (5.3) est équivalente à
$$s_b + s_x = s_b$$
et à $s_x \subset s_b$. D'où (ii).

iii) est une conséquence immédiate du fait que
$$a \in s_a \text{ et } s_a \subset s_a + s_x$$
et alors
$$s_a + s_x = s_b \text{ implique } a \in s_b \text{ et } a/b \in \ell_\infty.$$

■

Corollaire 5.12. *Soient r, $u > 0$. L'équation*
$$s_r + s_x = s_u \tag{5.5}$$
est équivalente à
$$\begin{cases} s_x = s_u & \text{pour } r < u, \\ s_x \subset s_u & \text{pour } r = u; \end{cases}$$
et l'équation (5.5) ne possède pas de solutions si $r > u$.

5.3.2 Etude de l'équation $s_a + s_b * s_x = s_d$

Dons la suite on s'intéresse à la résolution de l'équation de suites (EES)

$$s_a + s_b * s_x = s_d \tag{5.6}$$

où $x = (x_n)_{n\geq 1} \in U^+$ est l'inconnue.

Comme une conséquence de la Théorème 5.11 on obtient le résultat suivant.

Corollaire 5.13. *Soit* $a = (a_n)_{n\geq 1}$, $b = (b_n)_{n\geq 1}$, $d = (d_n)_{n\geq 1} \in U^+$.

(i) Si $a/d \in c_0$ *alors l'équation (5.6) est vérifiée si et seulement si*

$$s_x = s_{d/b}.$$

(ii) Si a/d, $d/a \in \ell_\infty$ *alors l'équation (5.6) est vérifiée si et seulement si*

$$s_x \subset s_{d/b}.$$

(iii) Si $a/d \notin \ell_\infty$ *alors l'équation (5.6) ne possède pas de solutions.*

Preuve. *(i) L'équation (5.6) est équivalente à*

$$s_a + s_{bx} = s_d \tag{5.7}$$

et en utilisant le Théorème 5.11 (i) où $a/d \in c_0$ *(5.7) est équivalente à*

$$s_{bx} = s_d$$

et à $s_x = s_{d/b}$.

(ii) L'équation (5.6) est équivalente à (5.7) et comme a/d, $d/a \in \ell_\infty$*, d'après le Théorème 5.11 (ii) l'équation (5.7) est alors équivalente à* $s_{bx} \subset s_d$ *et* $s_x \subset s_{d/b}$.

(iii) S'obtient en en raisonnant comme ci-dessus et en utilisant le Théorème 5.11 (iii). ■

Exemple 5.14. *Considérons l'équation*

$$s_{(n)_n} + s_{(r^n x_n)_n} = s_{(n^2)_n} \tag{5.8}$$

avec $r > 0$*, où* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *est l'inconnue. En appliquant le Corollaire 5.13 il est facile de voir que les solutions de (5.8) vérifient*

$$K_1 \frac{n^2}{r^n} \leq x_n \leq K_2 \frac{n^2}{r^n} \text{ pour tout } n,$$

pour K_1, $K_2 > 0$. *On voit aisément que si* $r > 1$ *on a* $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ *et si* $r \leq 1$ *on a* $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

5.3.3 Sur l'équation $s_c * s_x + s_a = s_d * s_x + s_b$

Dans cette partie on considère l'équation d'espaces de suites (EES) $s_c * s_x + s_a = s_d * s_x + s_b$ avec $a/b \in c_0$ et on traite le cas où $d/c \in c_0$, le cas où $d/c,\, c/d \in \ell_\infty$ et le cas où $d/c \notin \ell_\infty$. Ensuite on considère l'équation $s_c * s_x + s_a = s_d * s_x + s_b$ où $s_c = s_d = \ell_\infty$, c'est à dire $s_x + s_a = s_x + s_b$ et on traite les cas où $a/b \in \ell_\infty$ et $a_n/b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Théorème 5.15. *Soient a, b, c, $d \in U^+$*

(i) Supposons que $a/b \in c_0$ et considérons l'équation

$$s_c * s_x + s_a = s_d * s_x + s_b \tag{5.9}$$

où $x \in U^+$. Donc on a

(a) Si $d/c \in c_0$, l'équation (5.9) est vérifiée si et seulement s'il existe K_1, $K_2 > 0$ tels que

$$K_1 \frac{b_n}{c_n} \leq x_n \leq K_2 \frac{b_n}{c_n} \text{ pour tout } n,$$

c'est à dire $s_x = s_{b/c}$.

(b) Si d/c, $c/d \in \ell_\infty$, l'équation (5.9) est vérifiée si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que

$$x_n \geq K \frac{b_n}{c_n} \text{ pour tout } n,$$

c'est à dire $s_x \supset s_{c/b}$.

(c) Si $d/c \notin \ell_\infty$, l'équation (5.9) ne possède pas de solutions dans U^+.

(ii) Supposons que $b_n < a_n$ pour tout n et considérons l'équation

$$s_x + s_a = s_x + s_b \tag{5.10}$$

où $x \in U^+$.

(a) Si $a/b \in \ell_\infty$, l'équation (5.10) est vérifiée pour tout $x \in U^+$.

(b) Si $a_n/b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, l'équation (5.10) est vérifiée si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que

$$x_n \geq K a_n \text{ pour tout } n,$$

c'est à dire $s_a \subset s_x$.

Preuve. (i) a) L'équation (5.9) est équivalente à

$$s_c * s_x + s_a = s_{dx+b}. \tag{5.11}$$

Comme $a/b \in c_0$ implique $a/(b + dx) \in c_0$ et $s_c * s_x = s_{cx}$ on déduit que (5.11) est équivalente à

$$s_{cx} = s_{dx+b}. \tag{5.12}$$

Donc (5.12) est équivalente à

$$s_{\frac{dx+b}{cx}} = s_1$$

et comme

$$s_{\frac{dx+b}{cx}} = s_{\frac{d}{c}} + s_{\frac{b}{cx}},$$

on conclut que

$$s_{\frac{d}{c}} + s_{\frac{b}{cx}} = s_1. \tag{5.13}$$

Si $d/c \in c_0$, l'équation donc (5.13) est équivalente à $s_{b/(cx)} = s_1$ et en utilisant la Proposition 5.8 on a

$$s_x = s_{b/c},$$

d'où (i) a).

(i) b) Si d/c, $c/d \in \ell_\infty$, l'équation (5.13) est équivalente à $s_{b/c} \subset s_x$. (i) c) Finalement si $d/c \notin \ell_\infty$, l'équation (5.9) ne possède pas de solutions.

(ii) (a) vient du fait qu'il existe $K > 0$ tel que

$$1 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq K \text{ pour tout } n$$

et $s_a = s_b$.

(ii) (b) La condition (5.10) est vérifiée si et seulement si $s_{x+a} = s_{x+b}$ et

$$s_{\frac{x+a}{x+b}} = s_{e+\frac{a-b}{x+b}} = s_1 + s_{\frac{a-b}{x+b}} = s_1.$$

Donc

$$s_{\frac{a-b}{x+b}} \subset s_1$$

et

$$s_{a-b} \subset s_{x+b}.$$

Comme $a_n/b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ on a $b/(a-b) \in c_0$ et en utilisant le Lemme 5.6 on conclut qu'il existe $K = K(x) > 0$ tel que

$$x_n \geq K(a_n - b_n) = Ka_n \left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) \text{ pour tout } n.$$

Comme $b/a \in c_0$ on conclut qu'il existe $K_1 > 0$ tel que $x_n \geq K_1 a_n$ pour tout n.

Par contre supposons que $x_n \geq K_1 a_n$ pour tout n. Alors $s_a \subset s_x$ et comme $b/a \in c_0$ on a $s_b \subset s_a$, $s_b \subset s_x$ et $s_a + s_x = s_x = s_b + s_x$. Donc nous avons montré que $s_a \subset s_x$ implique (5.10). ■

Comme une conséquence immédiate de la Proposition 5.15 on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.16. *Soient r, r_1, u, u_1 et $u < u_1$, $r < r_1$.*

(i) La suite x est une solution de l'équation

$$s_u + s_{r_1} * s_x = s_{u_1} + s_r * s_x$$

si et seulement s'il existe K_1, $K_2 > 0$ tels que

$$K_1 \left(\frac{u_1}{r_1}\right)^n \leq x_n \leq K_2 \left(\frac{u_1}{r_1}\right)^n \text{ pour tout } n.$$

(ii) Soient η, $\xi > 0$ et $\xi < \eta$ et soit $\varepsilon \in c_0 \cap U^+$. Alors $x \in U^+$ est une solution de l'équation

$$\ell_\infty + s_{(n^\xi)_n} * s_x = s_\varepsilon + s_{(n^\eta)_n} * s_x \tag{5.14}$$

si et seulement s'il existe K_1, $K_2 > 0$ tel que

$$K_1 \frac{1}{n^\eta} \leq x_n \leq K_2 \frac{1}{n^\eta} \text{ pour tout } n.$$

Remarque 5.17. *Dans le Corollaire 5.16 (i) on voit aisément que $r_1 > u_1$ entraîne $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$; si $r_1 < u_1$ on a $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ et si $r' = u_1$, la suite x est une suite bornée avec $x_n \geq K > 0$ pour tout n. Notons que les solutions de l'équation (5.14) convergent vers zéro.*

Exemple 5.18. *Soient $r, u > 0$ avec $0 < u < r$. On a $s_x + s_r = s_x + s_u$ si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que*

$$x_n \geq K r^n \text{ pour tout } n.$$

Exemple 5.19. *L'équation*

$$s_x + s_{(n)_n} = s_x + s_{(\sqrt{n})_n}$$

est équivalente à $s_{(n)_n} \subset s_x$, ce qui signifie que $x_n \geq Kn$ pour tout n.

Exemple 5.20. *Pour tout $r > 0$ l'équation*

$$s_x + s_{(n!)_n} = s_x + s_r$$

est équivalente à $s_{(n!)_n} \subset s_x$, c'est à dire $x_n \geq Kn!$ pour tout n.

5.4 Sur l'équation $s_{\phi(x)} = s_b$

Dans cette section on étudie la résolution de l'équation (EES) $s_{\phi(x)} = s_b$, où ϕ est une fonction continue strictement monotone *de* $]0, +\infty[$ dans lui même. on détermine l'ensemble des suites x de U^+ telles que $s_{x^2+x} = s_b$, lorsque $b \in c$, et $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. On considère ensuite les équations $s_{(\arg\sinh x_n)_n} = s_b$ et $s_{\exp x - e} = s_b$.

Théorème 5.21. *Soit $b = (b_n)_{n\geq 1} \in U^+$ et supposons que les conditions suivantes sont vérifiées.*

i) Il existe une fonction $\phi :]0,+\infty[\longmapsto]0,+\infty[$ continue et strictement monotone.

ii) Pour tout $k > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{-1}(kb_n)}{\phi^{-1}(b_n)} = L_k > 0 \tag{5.15}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi\left(k\phi^{-1}(b_n)\right)}{b_n} = L'_k > 0. \tag{5.16}$$

Les solutions de l'équation

$$s_{\phi(x)} = s_b \tag{5.17}$$

sont alors données par

$$s_x = s_{\phi^{-1}(b)},$$

ce qui signifie qu"il existe K_1, $K_2 > 0$ tels que

$$K_1\phi^{-1}(b_n) \leq x_n \leq K_2\phi^{-1}(b_n) \text{ pour tout } n.$$

Preuve. Supposons que ϕ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. La preuve est semblable pour ϕ strictement décroissante. D'après i) on a $s_{\phi(x)} = s_b$ si et seulement s'il existe C_1, $C_2 > 0$ tel que

$$C_1 b_n \leq \phi(x_n) \leq C_2 b_n \text{ pour tout } n. \tag{5.18}$$

D'après (5.15) on déduit qu'il existe K_1, et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{\phi^{-1}(C_1 b_n)}{\phi^{-1}(b_n)} \geq K_1 > 0 \tag{5.19}$$

pour tout $n \geq N$ et comme $\phi^{-1}(C_1 b_n)/\phi^{-1}(b_n) > 0$ pour tout $n \leq N-1$, la condition (5.19) est vérifiée pour tout n. On a aussi

$$\frac{\phi^{-1}(C_2 b_n)}{\phi^{-1}(b_n)} \leq K_2 \text{ pour tout } n.$$

On déduit que $s_{\phi(x)} = s_b$ implique

$$K_1\phi^{-1}(b_n) \leq \phi^{-1}(C_1 b_n) \leq x_n \leq \phi^{-1}(C_2 b_n) \leq K_2\phi^{-1}(b_n) \text{ pour tout } n,$$

c'est à dire $s_x = s_{\phi^{-1}(b)}$. D'autre part supposons que $s_x = s_{\phi^{-1}(b)}$. Alors il existe K_1, $K_2 > 0$ tels que

$$K_1\phi^{-1}(b_n) \leq x_n \leq K_2\phi^{-1}(b_n) \text{ pour tout } n. \tag{5.20}$$

Comme ϕ est strictement croissante, la condition (5.20) implique

$$\phi\left(K_1\phi^{-1}(b_n)\right) \leq \phi(x_n) \leq \phi\left(K_2\phi^{-1}(b_n)\right) \text{ pour tout } n.$$

Donc d'après (5.16) il existe K_1', $K_2' > 0$ tels que

$$K_1'b_n \leq \phi\left(K_1\phi^{-1}(b_n)\right) \text{ et } \phi\left(K_2\phi^{-1}(b_n)\right) \leq K_2'b_n \text{ pour tout } n,$$

et

$$K_1'b_n \leq \phi(x_n) \leq K_2'b_n \text{ pour tout } n.$$

D'où la preuve. ■

Il est possible de montrer aisément que pour tout $b \in U^+$ les solutions de l'équation.

$$s_{x^2} = s_b$$

sont données par $s_x = s_{\sqrt{b}}$. De la même façon, des calculs élémentaires montrent que les solutions de l'équation

$$s_{1/x} = s_b$$

sont données par $s_x = s_{1/b}$. Donnons un exemple simple qui illustre le Théorème 5.21.

Exemple 5.22. *Dans cet exemple on va traiter l'équation*

$$s_{x^2+x} = s_b \tag{5.21}$$

dans chacun des cas $b \in c_0$, $b_n \to l > 0$ et finie, et $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

(a) Soit $b \in c_0$. On montre qu'il existe K_1, $K_2 > 0$ pour lesquelles les solutions de (5.21) vérifient

$$K_1b_n \leq x_n \leq K_2b_n \textit{ pour tout } n$$

On a $\phi : t \longmapsto \phi(t) = t^2 + t$ est strictement monotone de $]0, +\infty[$ dans lui même. Des calculs élémentaires donnent

$$\phi^{-1}(t) = \frac{-1+\sqrt{1+4t}}{2} \textit{ pour tout } t > 0.$$

On a $\phi^{-1}(t) \sim t$ $(t \to 0)$. Donc pour tout $k > 0$ on a

$$\frac{\phi^{-1}(kb_n)}{\phi^{-1}(b_n)} \sim \frac{kb_n}{b_n} = k > 0 \ (n \to \infty),$$

et

$$\frac{\phi\left(k\phi^{-1}(b_n)\right)}{b_n} = \frac{k\phi^{-1}(b_n)\left[k\phi^{-1}(b_n)+1\right]}{b_n} \sim \frac{kb_n(kb_n+1)}{b_n} \sim k > 0 \ (n \to \infty).$$

D'où ii) dans le Théorème 5.21 est vérifiée. On conclut que (5.21) est équivalente à

$$s_x = s_{\phi^{-1}(b)} = s_{\frac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}}.$$

Mais

$$\phi^{-1}(b_n) = \frac{-1+\sqrt{1+4b_n}}{2} \sim b_n \ \ (n \to \infty).$$

On conclut que $s_x = s_b$.

(b) Si $b_n \to l > 0$ *quand* $n \to \infty$, l *finie, alors*

$$\phi^{-1}(b_n) \to \frac{-1+\sqrt{1+4l}}{2} > 0$$

et $s_x = \ell_\infty$.

(c) Cas où $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. *On a successivement*

$$\phi^{-1}(b_n) \sim \frac{1}{2}\sqrt{4b_n} \sim \sqrt{b_n}\,(n \to \infty),$$

$$\frac{\phi^{-1}(kb_n)}{\phi^{-1}(b_n)} \sim \frac{\sqrt{kb_n}}{\sqrt{b_n}} = \sqrt{k} > 0 \ \ (n \to \infty),$$

et

$$\frac{\phi\left(k\phi^{-1}(b_n)\right)}{b_n} \sim \frac{k\sqrt{b_n}\left[k\sqrt{b_n}+1\right]}{b_n} \sim k^2 > 0 \ \ (n \to \infty).$$

Comme

$$\frac{\frac{-1+\sqrt{1+4b_n}}{2}}{\sqrt{b_n}} \to 1 \ \ (n \to \infty)$$

on conclut que (5.21) *est équivalente à*

$$s_x = s_{\phi^{-1}(b)} = s_{\frac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}} = s_{\sqrt{b}}.$$

Exemple 5.23. *Considérons l'équation*

$$s_{(\arg\sinh x_n)_n} = s_b \tag{5.22}$$

où $b \in c_0$. *On a*

$$\frac{\phi^{-1}(kb_n)}{\phi^{-1}(b_n)} \sim \frac{\sinh kb_n}{\sinh b_n} = k > 0 \ \ (n \to \infty)$$

et

$$\frac{\arg\sinh(k\sinh b_n)}{b_n} \sim \frac{\arg\sinh(kb_n)}{b_n} \sim \frac{kb_n}{b_n} \to k \ \ (n \to \infty).$$

On conclut que les solutions de l'équation (5.22) *satisfont l'équation* $s_x = s_{\sinh b}$. *Comme* $\sinh b_n/b_n \to 1$ $(n \to \infty)$, *on conclut que* $s_x = s_b$.

Exemple 5.24. *Dans cet exemple on va écrire* $\exp x = (\exp x_n)_{n\geq 1}$ *et* $\exp x - e = (\exp x_n - 1)_{n\geq 1}$. *Supposons que* b *soit convergente et considérons l'équation*

$$s_{\exp x - e} = s_b. \tag{5.23}$$

Etudions d'abord le cas où $b \in c_0$. La fonction $\phi : t \longmapsto \phi(t) = -1 + \exp t$ vérifie la condition i) du Théorème 5.21 et $\phi^{-1}(t) = \ln(1+t)$. On a

$$\frac{\phi^{-1}(kb_n)}{\phi^{-1}(b_n)} = \frac{\ln(1+kb_n)}{\ln(1+b_n)} \to k \ \ (n \to \infty),$$

et

$$\frac{\phi\left(k\phi^{-1}(b_n)\right)}{b_n} = \frac{(1+b_n)^k - 1}{b_n} \sim \frac{kb_n}{b_n} = k > 0.$$

On conclut que les solutions de (5.23) sont données par

$$s_x = s_{\ln(1+b)} = s_b.$$

Si $b_n \to l > 0$ et finie, on voit que les solutions de (5.23) sont données par $s_x = s_1$.

5.5 Application aux matrices de transformations

Pour des raisons de notations, on note ici les matrices de transformations $M = (\mu_{nm})_{n,m \geq 1}$ et pour toute suite $\xi = (\xi_n)_{n \geq 1}$ de nombres complexes on écrit $M_n(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}\xi_m$, (à condition que les séries $M_n(\xi)$ soient convergentes) et $M\xi = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}\xi_m\right)_{n \geq 1}$. Le résultat suivant a été montré dans [38, p. 231]

Lemme 5.25. *Soit a, $a' \in U^+$. Alors $(s_a, s_a) = (s_{a'}, s_{a'})$ si et seulement si $s_a = s_{a'}$, c'est à dire $a' \in cl(a)$.*

On peut affirmer le résultat suivant qui est une conséquence directe du Théorème 5.21 et du Lemme 5.25 et dont la démonstration est laissée au lecteur.

Théorème 5.26. *Soit $b \in U^+$ et supposons que les hypothèses i), (ii) du Théorème 5.21 sont vérifiées. Alors x est une solution de l'équation de suites (EES) (5.17) si et seulement si*

$$(s_x, s_x) = \left(s_{\phi^{-1}(b)}, s_{\phi^{-1}(b)}\right).$$

Remarque 5.27. *Notons que pour tout x l'équation (5.17) équivaut à $M = (\mu_{nm})_{n,m \geq 1} \in (s_x, s_x)$, c'est à dire à*

$$\sup_n \left(\frac{1}{\phi^{-1}(b_n)} \sum_{m=1}^{\infty} |\mu_{nm}| \, \phi^{-1}(b_m) \right) < \infty \text{ pour tout } M.$$

On déduit aisément que pour tout $b \in c_0$, la suite x est une solution de l'équation (5.23) si et seulement si $(s_x, s_x) = (s_b, s_b)$, c'est à dire

$$M \in (s_x, s_x) \Longleftrightarrow \sup_n \left(\frac{1}{b_n} \sum_{m=1}^{\infty} |\mu_{nm}| \, b_m \right) < \infty \text{ pour tout } M.$$

Si $b_n \to l > 0$ et finie, donc x est une solution de l'équation (5.21), si et seulement si

$$M \in (s_x, s_x) \Longleftrightarrow \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} |\mu_{nm}| < \infty.$$

On obtient un résultat similaire en remplaçant l'équation (5.21) par l'équation (5.23). Notons que si $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, l'équation (5.21) est alors vérifiée si et seulement si

$$M \in (s_x, s_x) \Longleftrightarrow \sup_n \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{m=1}^{\infty} |\mu_{nm}| \sqrt{b_m} \right) < \infty.$$

Chapitre 6

Sur le spectre de l'opérateur de différence d'ordre 1

6.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente l'article [62] de A. Farés et B. de Malafosse où nous étudions le spectre de l'opérateur Δ de différence d'ordre 1, défini au paragraphe 1.2.4 et considéré comme une application de E dans lui même, où E est l'un des ensembles s_α, s_α^0, $s_\alpha^{(c)}$, ou $\ell_p(\alpha)$ $(1 \leq p < \infty)$. Puis on donne des applications aux matrices de transformations dans $s_\alpha^0\left((\Delta - \lambda I)^h\right)$ et $\ell_p(\alpha)\left((\Delta - \lambda I)^N\right)$, $h \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme on a déjà vu dans le chapitre V, l'espace s_α pour $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in U^+$ est défini par

$$s_\alpha = D_\alpha l_\infty = l_\infty(\alpha) = \{X \in s \ : \ x_n/\alpha_n = O(1) \ \ (n \to \infty)\},$$

où D_α est la matrice diagonale définie par $[D_\alpha]_{nn} = \alpha_n$ pour tout n.
On définit de la même façon l'espace

$$s_\alpha^0 = D_\alpha c_0 = \left\{X \in s \ : \ \frac{x_n}{\alpha_n} \to 0 \ \ (n \to \infty)\right\},$$

et l'espace

$$s_\alpha^{(c)} = D_\alpha c = \left\{X \in s \ : \ \frac{x_n}{\alpha_n} \to l \quad (n \to \infty) \text{ for some } l\right\}.$$

Ces espaces s_α^0 et $s_\alpha^{(c)}$ sont des espaces de Banach munis de la norme $\|\|_{s_\alpha}$, (cf. [28]). Rappelons que l_p, $(p > 0)$, est l'ensemble de suites $X = (x_n)_{n\geq 1}$ telles que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$. Ensuite pour $p\geq 1$ on considère l'ensemble

$$l_p(\alpha)=\left\{X\in s\ :\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x_n|}{\alpha_n}\right)^p<\infty\right\}.$$

On a l'égalité $l_p(\alpha)=D_\alpha l_p$. Il est facile de voir que $l_p(\alpha)$ est un espace de *Banach muni le la norme*

$$\|X\|_{l_p(\alpha)}=\left\|D_{\frac{1}{\alpha}}X\right\|_{l_p}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x_n|}{\alpha_n}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

On utilise ces résultats pour caractériser les matrices de transformations de $E\left((\Delta-\lambda I)^\chi\right)$, où E est l'un des ensembles s_α^0 ou $\ell_p(\alpha)$ pour $1\leq p\leq\infty$ et $\chi\in\mathbb{C}$, dans $F\in s_\alpha,s_\alpha^0,s_\alpha^{(c)}$. Ce chapitre généralise certains résultats donnés en [24] et [1]. Rappelons que B. Altay et F. Başar [4, 3] ont déjà traité le spectre de l'application Δ considéré comme opérateur dans c_0, c et ℓ_∞ respectivement. En utilisant la notation

$$\overline{D(\lambda_0,r)}=\{\lambda\in c:|\lambda-\lambda_0|\leq r\},$$

où $\lambda_0\in\mathbb{C}$ et $r>0$ on a le résultat suivant :

Théorème 6.1. *[4, Théorème 2.1, Théorème 2.12], [1, Théorème 2.8]. Soit $1\leq p<\infty$, on a les égalités suivantes :*

$$\sigma(\Delta,c_0)=\sigma(\Delta,c)=\sigma(\Delta,\ell_p)=\overline{D(1,1)}.$$

Maintenant, pour énoncer le résultat suivant, rappelons quelques propriétés de la suite $C(\eta)\eta$.

Propriétés de la suite $C(\eta)\eta$, où $\eta\in U^+$.

La matrice $C(\eta)$ a été définit dans le Chapitre I. Considérons l'ensemble suivant

$$\widehat{C_1}=\left\{\eta\in U^+:C(\eta)\eta=\left(\frac{1}{\eta_n}\sum_{m=1}^{n}\eta_m\right)_{n\geq 1}\in s_1=\ell_\infty\right\}$$

et rappelons que

$$\Gamma=\left\{\eta\in U^+:\ \lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}\right)<1\right\}.$$

Lemme 6.2. *[9, Proposition 2.1 p. 1786]. Soit $\alpha\in U^+$. On a*

(i) $\Gamma\subset\widehat{C_1}$,

(ii) Si $\alpha\in\widehat{C_1}$, il existe $k>0$ et $\gamma>1$ tels que

$$\alpha_n\geq k\gamma^n,\ \textit{pour tout } n\geq 1.$$

6.2 Le spectre de $\triangle$ considéré comme un opérateur de E dans lui même où $E = s_\alpha, s_\alpha^0, s_\alpha^{(c)}$.

Soit E un ensemble de suite et A un opérateur de E dans lui même. On note $\sigma(A, E)$ l'ensemble de nombres complexes λ tel que $\lambda I - A$ considéré comme opérateur de E dans lui même est non inversible, c-à-d :

$$\sigma(A, E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \in (E, E) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

L'ensemble résolvant de A est noté $\rho(A, E)$ avec

$$\rho(A, E) = \sigma(A, E)^c.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 6.3. *Soit $\alpha \in U^+$. Supposons que*

$$\sup_n \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) < \infty.$$

Alors :

(i) $\sigma(\Delta, s_\alpha) = \sigma(\Delta, s_\alpha^0)$ et $\lambda \in \sigma(\Delta, s_\alpha)$ si et seulement si

$$\lambda = 1 \text{ ou } (|\lambda - 1|^n \alpha_n)_{n\geq 1} \notin \widehat{C_1}.$$

(ii) a) On a

$$\sigma(\Delta, s_\alpha) = \sigma(\Delta, s_\alpha^0) \subset \overline{D\left(1, \lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)\right)},$$

et l'inclusion est stricte.

b) Si $(\alpha_{n-1}/\alpha_n)_{n\geq 2} \in c$ alors

$$\sigma\left(\Delta, s_\alpha^{(c)}\right) \subset \overline{D\left(1, \lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)\right)}.$$

(iii) Pour tout $R > 0$, on a

$$\sigma(\Delta, s_R) = \sigma(\Delta, s_R^0) = \sigma\left(\Delta, s_R^{(c)}\right) = \overline{D\left(1, \frac{1}{R}\right)}.$$

Preuve. (i) D'abord montrons que $\lambda \in \sigma(\Delta, s_\alpha)$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou $(|\lambda - 1|^n \alpha_n)_{n\geq 1} \notin \widehat{C_1}$.

Soit $\lambda \in \rho(\Delta, s_\alpha)$, alors $(\Delta - \lambda I) : s_\alpha \to s_\alpha$ est inversible et

$$(\Delta - \lambda I)^{-1} \in (s_\alpha, s_\alpha).$$

En utilisant le Lemme 2.12 on a $(\Delta - \lambda I) \in (s_\alpha, s_\alpha) = (D_\alpha \ell_\infty, D_\alpha \ell_\infty)$ si et seulement si

$$\Delta_\alpha^{'} = D_{\frac{1}{\alpha}} (\lambda I - \Delta) D_\alpha \in S_1 = (s_1, s_1).$$

Ceci est vrai pour tout α vérifiant

$$\sup_n \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right) < \infty.$$

Pour $\lambda \neq 1$, on a $(\Delta - \lambda I)^{-1} = (\xi_{nm})_{n,m \geq 1}$ où

$$\xi_{nm} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-m}}{(\lambda-1)^{n-m+1}} & \text{si } m \leq n, \\ \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \tag{6.1}$$

Comme $S_\alpha = (s_\alpha, s_\alpha)$, la condition $(\lambda I - \Delta)^{-1} \in S_\alpha$ est donc équivalente à $\lambda \neq 1$ et

$$\chi = \sup_n \left(\frac{|\lambda - 1|^m \alpha_m}{|\lambda - 1|^n \alpha_n} \right) < \infty,$$

C'est à dire à

$$(|\lambda - 1|^n \alpha_n)_{n \geq 1} \in \widehat{C_1}.$$

On conclut que $\lambda \in \sigma(\Delta, s_\alpha)$ si et seulement si

$$\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad (|\lambda - 1|^n \alpha_n)_{n \geq 1} \notin \widehat{C_1}.$$

Montrons maintenant que

$$\sigma(\Delta, s_\alpha) = \sigma\left(\Delta, s_\alpha^0\right).$$

Condition nécessaire. Soit $\lambda \in \rho\left(\Delta, s_\alpha^0\right)$. Donc $\lambda I - \Delta$ considéré comme opérateur de s_α^0 dans lui même est inversible et $(\lambda I - \Delta)^{-1} \in \left(s_\alpha^0, s_\alpha^0\right)$. Mais comme

$$\left(s_\alpha^0, s_\alpha^0\right) \subset \left(s_\alpha^0, s_\alpha\right) = (s_\alpha, s_\alpha)$$

(car $(c_0, l_\infty) = (l_\infty, l_\infty)$). On déduit que $\lambda I - \Delta$ est bien un opérateur de s_α dans lui même, avec $(\lambda I - \Delta)^{-1} \in (s_\alpha, s_\alpha)$, et $\lambda \in \rho(\Delta, s_\alpha)$. Ceci implique que $\rho\left(\Delta, s_\alpha^0\right) \subset \rho(\Delta, s_\alpha)$ et ensuite

$$\sigma(\Delta, s_\alpha) \subset \sigma\left(\Delta, s_\alpha^0\right).$$

Condition suffisante. Montrons maintenant que $\sigma\left(\Delta, s_\alpha^0\right) \subset \sigma(\Delta, s_\alpha)$. Soit $\lambda \in \rho(\Delta, s_\alpha)$. Donc $\lambda I - \Delta$ considéré comme opérateur de s_α dans lui même est inversible et $(\lambda I - \Delta)^{-1} \in (s_\alpha, s_\alpha)$. Or $(\lambda I - \Delta)^{-1} \in \left(s_\alpha^0, s_\alpha^0\right) = (D_\alpha c_0, D_\alpha c_0)$ si et seulement si $D_{\frac{1}{\alpha}} (\lambda I - \Delta)^{-1} D_\alpha \in (c_0, c_0)$, on déduit qu'il suffit de démontrer que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \left[\Delta_\alpha^{'} \right]_{nm} \right| = 0, \text{ pour tout } m.$$

Comme on a déjà vu $(\lambda I - \Delta)^{-1} \in S_\alpha$ implique

$$(|(\lambda-1)^n|\,\alpha_n)_{n\geq 1} \in \widehat{C_1}$$

et

$$|(\lambda-1)^n|\,\alpha_n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

et alors pour tout $m \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \left|\left[\Delta'_\alpha\right]_{nm}\right| &= \left|\frac{\alpha_m}{(\lambda-1)^{n-m+1}\,\alpha_n}\right| \\ &= |(\lambda-1)^m|\,\alpha_m \frac{1}{|(\lambda-1)^n|\,\alpha_n} = 0(1) \quad (n\to\infty)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda \in \rho\left(\Delta, s_\alpha^0\right)$. D'où

$$\sigma\left(\Delta, s_\alpha^0\right) \subset \sigma\left(\Delta, s_\alpha\right),$$

et comme on a $\sigma\left(\Delta, s_\alpha\right) \subset \sigma\left(\Delta, s_\alpha^0\right)$, on conclut que

$$\sigma\left(\Delta, s_\alpha\right) = \sigma\left(\Delta, s_\alpha^0\right).$$

(ii) $a)$ Soit $\lambda \in \sigma\left(\Delta, s_\alpha\right)$. D'après le Lemme 6.2 $i)$ on déduit aisément que $(|(\lambda-1)^n|\,\alpha_n)_{n\geq 1} \notin \widehat{C_1}$ implique

$$(|(\lambda-1)^n|\,\alpha_n)_{n\geq 1} \notin \Gamma,$$

et

$$\frac{1}{|\lambda-1|}\limsup_n \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) \geq 1$$

c'est à dire

$$|\lambda-1| \leq \limsup_n \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right).$$

Ceci montre l'inclusion $\sigma\left(\Delta, s_\alpha\right) \subset \overline{D\left(1, \lim_{n\to\infty} \sup\left(\alpha_{n-1}/\alpha_n\right)\right)}$. De plus comme $\widehat{C_1} \neq \Gamma$, en utilisant [32, Remarque 6, p. 225] on trouve que l'inclusion est stricte. D'où le résultat.

(ii) $b)$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$|\lambda-1| > \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) = \lim\sup_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right).$$

Donc il existe un entier q_0 tel que

$$\sup_{n\geq q_0+1}\left(\frac{1}{|\lambda-1|}\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) < 1.$$

Maintenant on définie par $\Sigma^{q_0} = (\sigma_{nm})_{nm\geq 1}$ le triangle dont les q_0 premières lignes et le q_0 premières colonnes sont égales à celles de

$$\Delta_\lambda = \frac{1}{\lambda - 1}(\lambda I - \Delta),$$

on a : $\sigma_{nn} = 1$ pour tout n et $\sigma_{nm} = 0$ pour tout n, m avec $n \geq q_0 + 1$ et $m < n$. D'après [37, Corollary 9, p. 47], on a déjà vu que $\lambda I - \Delta \in \left(s_\alpha^{(c)}, s_\alpha^{(c)}\right)$ et

$$\|I - \Delta_\lambda \Sigma^{q_0}\|_{S_\alpha} = \sup_{n\geq q_0+1}\left(\frac{1}{|\lambda - 1|}\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) < 1,$$

D'après [13, Corollaire 9, p.47] on déduit que

$$\Lambda = (\Delta_\lambda \Sigma^{q_0})^{-1} \in \left(s_\alpha^{(c)}, s_\alpha^{(c)}\right),$$

et

$$(\lambda I - \Delta)^{-1} = (\lambda - 1)^{-1}\,\Sigma^{q_0}\Lambda \in \left(s_\alpha^{(c)}, s_\alpha^{(c)}\right).$$

Donc on a montré que

$$\lambda \notin \overline{D\left(1, \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)\right)}$$

ce qui implique $\lambda \in \rho\left(\Delta, s_\alpha^{(c)}\right)$. D'où *ii) b)*.

(*iii*) L'égalité $\sigma(\Delta, s_R) = \overline{D(1, 1/R)}$ a été démontrée dans [24], donc en utilisant *i*) on déduit que

$$\sigma\left(\Delta, s_R^0\right) = \overline{D\left(1, \frac{1}{R}\right)}.$$

Montrons maintenant que $\sigma\left(\Delta, s_R^{(c)}\right) = \overline{D(1, 1/R)}$.

De la caractérisation de (c, c) on déduit la caractérisation de $\left(s_R^{(c)}, s_R^{(c)}\right)$. En effet d'après le Lemme 2.12 on a

$$A \in \left(s_R^{(c)}, s_R^{(c)}\right) \text{ si et seulement si } D_{1/R} A D_R \in (c, c),$$

avec $D_R = D_{(R^n)_{n\geq 1}}$, alors on obtient $A \in \left(s_R^{(c)}, s_R^{(c)}\right)$ si et seulement si

$$\begin{cases} D_{1/R} A D_R \in S_1, \\ \lim_{n\to\infty} \left[D_{1/R} A D_R\right]_{nm} = l_m \text{ pour tout } m, \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[D_{1/R} A D_R\right]_{nm} = l. \end{cases}$$

Soit $\lambda \in \rho\left(\Delta, s_R^{(c)}\right)$. Posons

$$\Delta'_R = D_{1/R}(\lambda I - \Delta)\,D_R,$$

on remarque aisément que

$$\left\|\Delta'_R\right\|_{S_1} = \frac{1}{R} + |\lambda - 1| < \infty,$$

d'où $\Delta'_R \in S_1$ et comme Δ'_R est une matrice bande on a

$$(\lambda I - \Delta) \in \left(s_R^{(c)}, s_R^{(c)}\right) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

De plus, on a

$$(\lambda I - \Delta)^{-1} \in \left(s_R^{(c)}, s_R^{(c)}\right) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Donc $(\lambda I - \Delta)^{-1} \in S_R$ et d'après (6.1) on obtient

$$\begin{aligned} \chi &= R \sup_n \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(|\lambda - 1| R)^{n-m+1}}\right) \\ &= R \sup_n \left\{\frac{\left(\frac{1}{|\lambda-1|R}\right)^{n+1} - \frac{1}{|\lambda-1|R}}{\frac{1}{|\lambda-1|R} - 1}\right\} < \infty. \end{aligned}$$

D'où $1/(|\lambda - 1| R) < 1$ et on conclut que

$$\lambda \notin \overline{D(1, 1/R)} \text{ et } \overline{D(1, 1/R)} \subset \sigma\left(\Delta, s_R^{(c)}\right).$$

L' inclusion $\sigma\left(\Delta, s_R^{(c)}\right) \subset \overline{D(1, 1/R)}$ est la conséquence directe de *ii*) *b*) et on conclut que $\sigma\left(\Delta, s_R^{(c)}\right) = \overline{D(1, 1/R)}$. ■

Comme une conséquence directe du Théorème 6.3 *ii*) on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 6.4. *i)* $\sigma\left(\Delta, s_{(n)_n}\right) = \sigma\left(\Delta, s^0_{(n)_n}\right) = \overline{D(1, 1)}$.

ii) Si $\limsup_{n\to\infty} (\alpha_{n-1}/\alpha_n) = 0$ *alors*

$$\sigma(\Delta, s_\alpha) = \{1\}.$$

iii) $\sigma(\Delta, s_\alpha) = \{1\}$ *pour* $\alpha = (n!)_n$ *, ou* $(n^n)_n$ *.*

Preuve. *i*) En utilisant le Théorème 6.3 *i*) $(|\lambda - 1|^n n)_{n\geq 1} \in \widehat{C_1}$ si et seulement si

$$c_n = \frac{|\lambda - 1| + 2|\lambda - 1|^2 + ... + n|\lambda - 1|^n}{n|\lambda - 1|^n} = O(1) \quad (n \to \infty).$$

Il est facile de montrer que pour tout $x \neq 1$ réel on a

$$\begin{aligned} x + 2x^2 + ... + nx^n &= x\left(1 + x + x^2 + ... + x^n\right)' \\ &= x\frac{x^n(nx - n - 1) + 1}{(1 - x)^2}. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$c_n = |\lambda - 1| \frac{n|\lambda - 1| - n - 1}{n\left(1 - |\lambda - 1|^2\right)} + \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1 - |\lambda - 1|^2\right)|\lambda - 1|^{n-1}}$$

et

$$c_n = O(1)\,(n \to \infty) \text{ si et seulement si } |\lambda - 1| > 1.$$

On conclut que

$$\left(|\lambda - 1|^n n\right)_{n\geq 1} \notin \widehat{C}_1 \text{ si et seulement si } |\lambda - 1| \leq 1$$

et en utilisant $i)$ on conclut que $\sigma\left(\Delta, s_{(n)_n}\right) = \overline{D(1,1)}$.

$ii)$ est une conséquence directe du Théorème 6.3 $ii)$ $a)$.

$iii)$ Trivialement on a $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\alpha_{n-1}/\alpha_n\right) = 0$ pour $\alpha = (n^n)_n$ et pour $\alpha = (n!)_n$.

■

6.3 Spectre de Δ considéré comme un opérateur dans $\ell_p(\alpha)$.

Dans ce paragraphe on donne des caractérisations des ensembles $\sigma(\Delta, \ell_1(\alpha))$ et $\sigma(\Delta^+, \ell_1(\alpha))$ et on calcule explicitement $\sigma(\Delta, \ell_p(\alpha))$ et $\sigma(\Delta^+, \ell_p(\alpha))$. Dans la suite on utilise deux lemmes où on note

$$E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{C})$$

l'ensemble de toutes les fonctions linéaires continues définies sur E, où E est un espace de Banach, et le β-dual de E est noté E^β, voir chapitre I. Pour tout $L \in \mathcal{B}(E)$, l'opérateur L^* est défini par

$$L^*(\varphi)(u) = \varphi(L(u))$$

pour tout $\varphi \in E^*$ et pour tout $u \in E$. Pour illustrer le résultat suivant on a besoin de rappeler le lemme suivant :

Lemme 6.5. *[64, p. 71] Soit E un espace vectoriel normé. Lorsque $L \in \mathcal{B}(E)$ on a*

$$\sigma(L, E) = \sigma(L^*, E^*).$$

Si E est de type BK ayant la propriété AK il existe une relation entre E^* et E^β. Rappelons que E^β est l'ensemble de toutes les suites $a = (a_n)_{n\geq 1}$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ est convergente pour tout X dans E. D'après [102, Théorème 7.2.9, p. 107] on déduit que l'application

$$\widehat{\ }: E^\beta \to E^*$$

définie par

$$\widehat{\ }(a) = \widehat{a} : E \to \mathbb{C} \left(a \in E^{\beta}\right)$$

où

$$\widehat{a}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ pour tout } X \in E,$$

est un isomorphisme dans E^*. Cela veut dire que E^* est isomorphe à E^{β} et on note $E^* \equiv E^{\beta}$. D'après [102, Theorem 4.4.2, p.66] on conclut que

$$(D_\alpha E)^* \equiv \left(D_{\frac{1}{\alpha}} E\right)^{\beta}.$$

De ce qui précède on déduit le lemme suivant.

Lemme 6.6. *Soit $\alpha \in U^+$ et soit E un espace de type BK ayant la propriété AK. On a*

$$(D_\alpha E)^* = D_{1/\alpha} E^*.$$

Dans la suite nous utiliserons également les ensembles Γ^+ et $\widehat{C_1^+}$ définis par

$$\Gamma^+ = \left\{\alpha \in U^+ : \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) < 1\right\}.$$

et

$$\widehat{C_1^+} = \left\{\alpha \in U^+ \bigcap cs \ : \ \frac{1}{\alpha_n}\left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k\right) = O(1) \ \ (n \to \infty)\right\},$$

où cs est l'ensemble de toutes les séries convergentes. Nous utiliserons dans la suite le résultat suivant.

Lemme 6.7. *[31, Proposition 6.1, p. 3199] On a $\Gamma^+ \subset \widehat{C_1^+}$.*

Concernant le spectre de l'opérateur Δ de $\ell_p(\alpha)$ dans lui même, on a le résultat suivant où on pose $\Delta^+ = {}^t\Delta$.

Théorème 6.8. *Soit $\alpha \in U^+$. On a*

i) a) $\lambda \in \sigma(\Delta, \ell_1(\alpha))$ si et seulement si

$$\lambda = 1 \text{ ou } \left(\frac{1}{|\lambda - 1|^n \alpha_n}\right)_{n\geq 1} \notin \widehat{C_1^+}. \tag{6.2}$$

b) $\lambda \in \sigma(\Delta^+, \ell_1(\alpha))$ si et seulement si

$$\lambda = 1 \text{ ou } \left(\frac{|\lambda - 1|^n}{\alpha_n}\right)_{n\geq 1} \notin \widehat{C_1}. \tag{6.3}$$

ii) On a

$$\sigma\left(\Delta,\ell_1(\alpha)\right)\subset\overline{D\left(1,\limsup_{n\to\infty}\left(\alpha_n/\alpha_{n+1}\right)\right)}\ \textit{et}\ \sigma\left(\Delta^+,\ell_1(\alpha)\right)\subset\overline{D\left(1,\limsup_{n\to\infty}\left(\alpha_{n+1}/\alpha_n\right)\right)}.$$

iii) Soit $r>0$ et $1\leq p<\infty$. On a

$$\sigma\left(\Delta,\ell_p(r)\right)=\overline{D\left(1,1/r\right)}\ \textit{et}\ \sigma\left(\Delta^+,\ell_p(r)\right)=\overline{D\left(1,r\right)}.$$

Preuve. $i)$ $a)$ D'après le Lemme 6.5 on déduit

$$\sigma\left(\Delta,\ell_1(\alpha)\right)=\sigma\left(\Delta^+,\left(\ell_1(\alpha)\right)^*\right)$$

et d'après le Lemme 6.6 on a

$$\left(\ell_1(\alpha)\right)^*=\left(D_\alpha\ell_1\right)^*\equiv D_{1/\alpha}\ell_1^\beta=D_{1/\alpha}\ell_\infty=s_{1/\alpha},$$

d'où

$$\sigma\left(\Delta,\ell_1(\alpha)\right)=\sigma\left(\Delta^+,s_{1/\alpha}\right).$$

Donc $\lambda\in\rho\left(\Delta^+,s_{1/\alpha}\right)$ signifie que $\left(\lambda I-\Delta^+\right)^{-1}\in S_{1/\alpha}$, c'est à dire

$$\sup_n\left\{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-1|^{m-n+1}}\frac{\alpha_n}{\alpha_m}\right\}<\infty.$$

En raisonnant comme dans le Théorème 6.3 on conclut $\lambda\in\sigma\left(\Delta,\ell_1(\alpha)\right)$ si et seulement si $\lambda=1$ ou $\left(1/\left|\lambda-1\right|^n\alpha_n\right)_{n\geq1}\notin\widehat{C_1^+}$.

$i)$ $b)$ On a

$$\sigma\left(\Delta^+,\ell_1(\alpha)\right)=\sigma\left(\Delta,\left(\ell_1(\alpha)\right)^*\right)$$

et comme on a déjà vu

$$\left(\ell_1(\alpha)\right)^*=s_{1/\alpha}.$$

Donc

$$\sigma\left(\Delta^+,\ell_1(\alpha)\right)=\sigma\left(\Delta,s_{1/\alpha}\right)$$

et on conclut d'après le Théorème 6.3 $i)$.

$ii)$ Comme on a déjà vu $\lambda\in\sigma\left(\Delta,\ell_1(\alpha)\right)$ implique que (6.2) est vérifiée. En utilisant le Lemme 6.7 la condition (6.2) implique

$$\left(\frac{1}{\left|\lambda-1\right|^n\alpha_n}\right)_{n\geq1}\notin\Gamma^+$$

et

$$|\lambda-1|\leq\lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right).$$

Ce qui montre la première inclusion. La deuxième inclusion vient de l'égalité

$$\sigma\left(\Delta^+,\ell_1(\alpha)\right)=\sigma\left(\Delta,s_{1/\alpha}\right),$$

et du Théorème 6.3 *ii*).

iii) Pour montrer que

$$\sigma(\Delta, \ell_p(r)) \subset \overline{D(1, 1/r)}$$

on va prouver que

$$\overline{D(1, 1/r)}^c \subset \rho(\Delta, \ell_p(r)).$$

Prenons $\lambda \notin \overline{D(1, 1/r)}$. On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \left(I - \Delta'_\lambda\right) X \right\|_{\ell_p(r)}^p &= \frac{1}{|\lambda - 1|^p} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{|x_{n-1}|^p}{r^{np}} \right) \\ &= \frac{1}{(|\lambda - 1| r)^p} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{|x_{n-1}|^p}{r^{(n-1)p}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\left\| \left(I - \Delta'_\lambda\right) X \right\|_{\ell_p(r)} = \frac{1}{|\lambda - 1| r} \|X\|_{\ell_p(r)}.$$

Donc

$$\|I - \Delta_\lambda\|_{\mathcal{B}(\ell_p(r))} < 1$$

où $|\lambda - 1| r > 1$, et comme $\ell_p(r)$ a la propriété AK, alors

$$\mathcal{B}(\ell_p(r)) = (\ell_p(r), \ell_p(r))$$

est un algèbre de Banach, (cf. [37]) on a

$$(\Delta_\lambda)^{-1} \in (\ell_p(r), \ell_p(r))$$

et $\lambda \in \rho(\Delta, \ell_p(r))$. Donc on a prouvé que $\sigma(\Delta, \ell_p(r)) \subset \overline{D(1, 1/r)}$.

Inversement, montrons que

$$\overline{D(1, 1/r)} \subset \sigma(\Delta, \ell_p(r)).$$

Pour cela prenons $\lambda \in \rho(\Delta, \ell_p(r))$. Donc

$$(\lambda I - \Delta)^{-1} \in (\ell_p(r), \ell_p(r))$$

et comme $e^{(1)} = {}^t(1, 0, ..., 0, ...) \in \ell_p(r)$ on déduit

$$(\lambda I - \Delta)^{-1} \; {}^t\left(e^{(1)}\right) = \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(\lambda - 1)^n} \right)_{n \geq 1} \in \ell_p(r).$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(r |\lambda - 1|)^n} \right]^p < \infty$$

et $1/\left(r\left|\lambda-1\right|\right)<1$. On a montré que $\lambda\in\rho\left(\Delta,\ell_p\left(r\right)\right)$ implique $\left|\lambda-1\right|>1/r$ c'est à dire

$$\overline{D\left(1,1/r\right)}\subset\sigma\left(\Delta,\ell_p\left(r\right)\right).$$

On conclut que

$$\sigma\left(\Delta,\ell_p\left(r\right)\right)=\overline{D\left(1,1/r\right)}.$$

Montrons $\sigma\left(\Delta^+,\ell_p\left(r\right)\right)=\overline{D\left(1,r\right)}$. Premièrement considérons le cas $p>1$. Soit $q>1$ tel que $1/p+1/q=1$. Donc $\ell_q^*\equiv\ell_p$ et du Lemme 6.6 on déduit

$$\left(D_{1/r}\ell_q\right)^*\equiv D_r\ell_q^*$$

et

$$\left(\ell_q\left(1/r\right)\right)^*=\left(D_{1/r}\ell_q\right)^*\equiv D_r\ell_q^\beta=D_r\ell_p=\ell_p\left(r\right).$$

D'où

$$\Delta\in\left(\ell_q\left(1/r\right),\ell_q\left(1/r\right)\right).$$

Posons

$$\Delta_r=D_r\Delta D_{1/r}=\begin{pmatrix}1 & & & \mathbf{0}\\ -1/r & 1 & & \\ & . & . & \\ \mathbf{0} & & -1/r & 1\end{pmatrix},$$

donc d'après l'inégalité de Minkowsky on obtient

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left[\Delta_rX\right]_n\right|^q\right)^{1/q} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-\frac{1}{r}x_{n-1}\right|^q\right)^{1/q}\\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|^q\right)^{1/q}+\frac{1}{r}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_{n-1}\right|^q\right)^{1/q}\\ &\le \left(1+\frac{1}{r}\right)\left\|X\right\|_{\ell_q}.\end{aligned}$$

Donc $\Delta_r\in\left(\ell_q,\ell_q\right)$ et $\Delta\in\left(\ell_q\left(1/r\right),\ell_q\left(1/r\right)\right)$. D'après le Lemme 6.5 on conclut que

$$\sigma\left(\Delta^+,\ell_p\left(r\right)\right)=\sigma\left(\Delta,\ell_q\left(1/r\right)\right)=\overline{D\left(1,r\right)}.$$

Cas où $p=1$. Comme on a vu en *i*) *a*) on a

$$\left(\ell_1\left(r\right)\right)^*\equiv s_{1/r}.$$

On conclut

$$\sigma\left(\Delta^+,\ell_1\left(r\right)\right)=\sigma\left(\Delta,\left(\ell_1\left(r\right)\right)^*\right)=\sigma\left(\Delta,s_{1/r}\right)=\overline{D\left(1,r\right)}.$$

■

6.4 Applications aux matrices de transformations définies sur $s_\alpha^0\left((\Delta-\lambda I)^h\right)$ et sur $\ell_p(\alpha)\left((\Delta-\lambda I)^N\right)$, $h\in\mathbb{C}$ et $N\in\mathbb{N}$.

6.4.1 sur l'ensemble $(E(T),F)$

Ici on va reformuler un théorème dû à Malkowsky et Rakočević [83] concernant les matrices de transformations de $E(T)$ dans F, où T est une matrice triangle. Pour cela on pose $T^{-1}=(s_{nm})_{n,m\geq 1}$ et $R={}^t\left(T^{-1}\right)$. Enonçons le résultat suivant, où $\widehat{A}$ est une matrice ayant comme colonnes

$$\widehat{A_n}={}^t\left(R\ {}^tA_n\right)$$

pour tout n et $A_n=(a_{n1},...,a_{nm},...)$.

Lemme 6.9. *[83] Soit E un espace de type BK ayant la propriété AK et F un sous ensemble quelconque de s. Alors on a $A\in(E(T),F)$ si et seulement si*

$$\widehat{A}\in(E,F)$$

et

$$V^{(i)}\in(E,c)\ \text{ pour tout } i,$$

où $V^{(i)}=\left(w_{nm}^i\right)_{n,m\geq 1}$ est définie par

$$w_{nm}^i=\begin{cases}\sum_{j=m}^n s_{jm}a_{ij} & 1\leq m\leq n,\\ 0 & \text{pour } m>n.\end{cases}$$

Réécrivons ce résultat en utilisant l'inverse du triangle T.

Lemme 6.10. *Soit E un espace de type BK ayant la propriété AK et F un sous ensemble quelconque de s. On a $A\in(E(T),F)$ si et seulement si*

$$AT^{-1}\in(E,F)$$

et

$$\Sigma D_{(a_{in})_n}T^{-1}\in(E,c)\ \text{ pour tout } i=1,2,....$$

Preuve. Montrons que $\widehat{A}=AT^{-1}$ et $V^{(i)}=\Sigma D_{(a_{in})_n}T^{-1}$. On a

$${}^t\left(\widehat{A_n}\right)=R\ {}^tA_n={}^t\left(T^{-1}\right)\ {}^tA_n={}^t\left(A_nT^{-1}\right).$$

Donc

$$\widehat{A_n}=A_nT^{-1}=\left(\sum_{j=m}^{\infty}a_{nj}s_{jm}\right)_{m\geq 1}$$

et

$$\widehat{A} = AT^{-1}.$$

Maintenant, pour tout entier i on a

$$\Sigma D_{(a_{in})_n} = \begin{pmatrix} a_{i1} & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & \mathbf{0} & \\ . & . & . & & \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{in} & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

et trivialement $V^{(i)} = \Sigma D_{(a_{in})_n} T^{-1}$. ■

6.4.2 Applications aux matrices de transformations de $s_\alpha^0\left((\Delta - \lambda I)^h\right)$ dans s_μ

Dans ce paragraphe nous allons utiliser l'opérateur Δ^h, où $h \in \mathbb{C}$. Pour cela nous avons besoin de la notation suivante où $h \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} -h+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{-h(-h+1)\dots(-h+k-1)}{k!} & \text{si } k > 0, \\ 1 & \text{si } k = 0\ , \end{cases}$$

(cf. [5]). Pour simplifier on pose $[-h, k] = \begin{pmatrix} -h+k-1 \\ k \end{pmatrix}$. Si $\Delta^h = (\tau_{nm})_{n,m\geq 1}$, on a

$$\tau_{nm} = \begin{cases} [-h, n-m] & \text{si } m \leq n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases} \tag{6.4}$$

On peut établir le résultat suivant.

Théorème 6.11. *Soit α, $\mu \in U^+$.*

i) Soit $h \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 1$. Alors

a) $A \in \left(s_\alpha^0\left((\Delta - \lambda I)^h\right), s_\mu\right)$ si et seulement si

$$\sup_n \left\{ \frac{1}{\mu_n} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{m=k}^{\infty} [h, m-k] \frac{a_{nm}}{(1-\lambda)^{h+m-k}} \right| \alpha_k \right\} < \infty, \tag{6.5}$$

$$\sup_n \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{m=k}^{n} [h, m-k] \frac{a_{im}}{(1-\lambda)^{h+m-k}} \right| \alpha_k \right\} < \infty \text{ pour } i = 1, 2, ..., \tag{6.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{m=k}^{n} [h, m-k] \frac{a_{im}}{(1-\lambda)^{h+m-k}} \right\} = l_k \text{ pour } l_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, ...; \tag{6.7}$$

b) $A \in \left(s_{\alpha}^{0}\left((\Delta-\lambda I)^{h}\right), s_{\mu}^{0}\right)$ *si et seulement si (6.5), (6.6), (6.7) sont vérifiées et*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\mu_n}\sum_{m=k}^{n}[h,m-k]\frac{a_{im}}{(1-\lambda)^{h+m-k}}\right\}=0 \text{ pour } k=1,2,...;$$

c) $A \in \left(s_{\alpha}^{0}\left((\Delta-\lambda I)^{h}\right), s_{\mu}^{(c)}\right)$ *si et seulement si (6.5), (6.6), (6.7) sont vérifiées et*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\mu_n}\sum_{m=k}^{n}[h,m-k]\frac{a_{im}}{(1-\lambda)^{h+m-k}}\right\}=l_k \text{ pour } l_k\in\mathbb{C},\ k,i=1,2,...,$$

ii) Soit h un entier. Supposons que $|\lambda-1|>\limsup_{n\to\infty}(\alpha_{n-1}/\alpha_n)$. *Alors*

a) $A \in \left(s_{\alpha}^{0}\left((\Delta-\lambda I)^{h}\right), s_{\mu}\right)$ *si et seulement si*

$$\sup_n\left(\frac{1}{\mu_n}\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}|\,\alpha_m\right)<\infty; \tag{6.8}$$

b) $A \in \left(s_{\alpha}^{0}\left((\Delta-\lambda I)^{h}\right), s_{\mu}^{0}\right)$ *si et seulement si (6.8) est vérifiée et* $a_{nm}/\mu_n \to 0$ $(n\to\infty)$ *pour* $m=1,2,...;$

c) $A \in \left(s_{\alpha}^{0}\left((\Delta-\lambda I)^{h}\right), s_{\mu}^{(c)}\right)$ *si et seulement si (6.8) est vérifiée et* $a_{nm}/\mu_n \to l'_m$ $(n\to\infty)$ *pour* $l'_m\in\mathbb{C}$, $m=1,2,....$

Preuve. i) Comme s_{α}^{0} est un espace de type BK ayant la propriété AK, il suffit d'appliquer le lemme 6.10 avec $T=(\Delta-\lambda I)^{h}$. On voit facilement que $T^{-1}=(\Delta-\lambda I)^{-h}$ est le triangle défini par

$$\left[(\Delta-\lambda I)^{-h}\right]_{nm}=\frac{[h,n-m]}{(1-\lambda)^{h+n-m}} \text{ pour } m\le n.$$

Donc

$$\left[A(\Delta-\lambda I)^{-h}\right]_{nk}=\sum_{m=k}^{\infty}[h,m-k]\frac{a_{nm}}{(1-\lambda)^{h+m-k}} \text{ pour tout } n,k\ge 1.$$

Comme $\left(s_{\alpha}^{0}, s_{\beta}\right)=S_{\alpha,\beta}$ la condition

$$A(\Delta-\lambda I)^{-h}\in\left(s_{\alpha}^{0}, s_{\beta}\right)$$

est équivalente à (6.5).

Pour tout i on obtient,

$$\left[\Sigma D_{(a_{in})_n}(\Delta-\lambda I)^{-h}\right]_{nk}=\sum_{m=k}^{n}a_{im}\frac{[h,m-k]}{(1-\lambda)^{h+m-k}} \text{ pour } k\le n,$$

on conclut en utilisant la caractérisation de $\left(s_{\alpha}^{0}, c\right)$ qui peut être déduite du lemme 1.26 du chapitre I.

ii) a) Si $|\lambda - 1| > \limsup_{n\to\infty}(\alpha_{n-1}/\alpha_n)$, alors $\lambda \in \rho\left(\Delta, s_{\alpha}^{0}\right)$ et $\Delta - \lambda I$ est bijective de s_{α}^{0} dans lui même et $s_{\alpha}^{0}\left((\Delta - \lambda I)^{h}\right) = s_{\alpha}^{0}$. On a donc

$$\left(s_{\alpha}^{0}\left((\Delta - \lambda I)^{h}\right), s_{\mu}\right) = S_{\alpha,\mu},$$

ceci donne la conclusion de ii) a). Les cas ii) b) et ii) c) peuvent être démontrés d'une façon analogue en utilisant le lemme 1.26 du chapitre I. ■

En raisonnant comme plus haut et en utilisant le Théorème 6.8 *iii*) et la caractérisation de (ℓ_p, ℓ_∞), (cf. [82]) on obtient le résultat suivant

Théorème 6.12. *Soit N un entier, r un réel strictement positif. Soit $\mu \in U^{+}$. Supposons $1 < p < \infty$ et posons $q = p/(p-1)$.*

i) $A \in \left(\ell_p(r)\left((\Delta - \lambda I)^{N}\right), s_{\mu}\right)$ si et seulement si

$$\sup_{n}\left\{\frac{1}{\mu_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{m=k}^{\infty}[N, m-k]\frac{a_{nm}}{(1-\lambda)^{N+m-k}}\right|^{q} r^{kq}\right\} < \infty, \tag{6.9}$$

$$\sup_{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{m=k}^{n}[N, m-k]\frac{a_{im}}{(1-\lambda)^{N+m-k}}\right|^{q} r^{kq}\right\} < \infty \text{ pour } i = 1, 2, ..., \tag{6.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} r^{k}\sum_{m=k}^{n}[N, m-k]\frac{a_{im}}{(1-\lambda)^{N+m-k}} = l_k \text{ pour } l_k \in \mathbb{C},\ k, i = 1, 2, ...$$

ii) Si $|\lambda - 1| > 1/r$ alors $A \in \left(\ell_p(r)\left((\Delta - \lambda I)^{N}\right), s_{\mu}\right)$ si et seulement si

$$\sup_{n}\left\{\frac{1}{\mu_n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{nm}|\, r^{m}\right)^{p/(p-1)}\right\} < \infty.$$

Chapitre 7

Applications directes à l'Optimisation et matrices de transformations

7.1 Introduction

Dans ce chapitre on considère des applications directes de la théorie de matrices infinies à des problèmes d'optimisation. On présente des résultats donnés par B. de Malafosse et A. Yassine [57]. Le but est de déterminer le nombre de chemins comportant N arcs et reliant deux points quelconques dans le plan à l'aide de la matrice booléenne infinie de Toeplitz $\mathcal{M}$. Pour cela nous avons besoin de calculer le produit $\mathcal{M}^N$. Le nombre de chemins est égal à l'entier $[\mathcal{M}^N]_{nm}$ qui se situe sur la n-ième ligne et la m-ième colonne de $\mathcal{M}^N$. Etant amenés à faire des calculs avec des matrices infinies, il est naturel de se concentrer sur les matrices triangulaires de Toeplitz. On considère donc $\mathcal{M}$ comme un opérateur de s_r dans lui-même (cf. [88, 102]). L'isomorphisme φ nous permet d'associer à une série entière la matrice triangulaire de Toeplitz considérée comme une application de s_r dans lui-même. Nous ferons les calculs dans l'ensemble $S_r = (s_r, s_r)$ de toutes les matrices infinies considérées comme des applications de s_r dans lui-même. Puis nous considèrerons la matrice booléenne $B(i,j)$ dont les entrées non nulles sont situées sur les diagonales définies par les équations $m - n = i$ ou $m - n = j$ et nous calculons la matrice $B^N(i,j)$, afin d'obtenir le nombre de chemins ayant N arcs associé à $B(i,j)$. Nous considèrerons chacun des cas $i < j \leq 0$ ou $0 \leq i < j$, où la matrice $B^N(i,j)$ est de Toeplitz. Le problème est plus compliqué lorsque $i < 0 < j$, car $B^N(i,j)$ n'est plus une matrice triangulaire de Toeplitz. Ensuite nous traitons le cas $i = -1$ et $j = 1$. En outre une *matrice booléenne infinie pouvant être considérée comme une application dans des espaces de suites, nous nous concentrons sur la caractérisation de l'ensemble* $\left(c\left(B^N(i,0)\right),c\right)$. *Ce résultat est analogue à celui qui est donné dans [82] où l'on explicite la caractérisation de* $\left(c\left(\Delta^N\right),c\right)$.

7.2 Applications aux matrices booléennes $B(i,j)$, $B(0,1,2)$, B_∞^+ et ${}^t\left(B_\infty^+\right)$

On sait qu'une matrice infinie $\mathcal{M}=(a_{nm})_{n,m\geq 1}$ *est booléenne si* a_{nm} *est égal à* 0 *ou* 1. *Soient* A_1, A_2,..., A_n,... *une suite des points dans un plan. Pour tout* n, $m\in\mathbb{N}^*$ *on définit la relation* $A_n\mathcal{R}A_m$ *s'il existe un arc de* A_n *vers* A_m. *Dans ce cas on pose* $a_{nm}=1$. *S'il n'existe pas d'arc reliant* A_n *vers* A_m *on écrit* $a_{nm}=0$.

Il est connu que le nombre de chemins ayant N *arcs allant de* A_n *vers* A_m, *où* n, $m=1$, 2,... *associé avec* $\mathcal{M}$ *est égal à* $\left[\mathcal{M}^N\right]_{nm}$. *Notons que pour tout entier* n *on a*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathcal{M}^N\right]_{nm}\alpha_m\leq\left\|\mathcal{M}^N\right\|_{S_\alpha}\alpha_n \text{ pour } \mathcal{M}\in S_\alpha,$$

et en particulier on a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathcal{M}^N\right]_{nm}r^m\leq\left\|\mathcal{M}^N\right\|_{S_r}r^n \text{ pour } \mathcal{M}\in S_r.$$

7.2.1 Les matrices booléennes $B(i,j)$

Soient i, $j\in\mathbb{Z}$ *avec* $i<j$ *et posons* $d=j-i$. *On définit ici la matrice booléenne* $B(i,j)$ *par*

$$[B(i,j)]_{nm}=\begin{cases}1 \text{ pour } m-n=i, \text{ ou } m-n=j,\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

1. *Pour* $i=-2$ *et* $j=-1$ *on a*

$$B(-2,-1)={}^t\left[\varphi\left(z+z^2\right)\right]=\begin{array}{c} \\ A_1\\ A_2\\ .\\ A_n\\ .\\ . \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & . & A_m & . & . \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \mathbf{0}\\ 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ \mathbf{0} & & . & . & .\\ & & & & \end{array}\right] \end{array}.$$

On voit aisément que si $j\leq 0$ *la matrice* $B(i,j)$ *est triangulaire inférieure et donc inversible. Pour* $i\geq 0$ *la matrice* $B(i,j)$ *est triangulaire supérieure.*

On considère la matrice $B^N(i,j)$ comme un opérateur dans s_α et on donne explicitement son expression dans chacun de cas $i<j\le 0$, $0\le i<j$, et $i=-1$ et $j=1$. Nous allons voir que l'expression de $B^N(i,j)$ dans les deux cas précédents est naturelle, cette matrice étant de Toeplitz. Le problème est plus compliqué dans le cas où $i<0<j$ comme nous allons le voir dans la suite pour $i=-1$ et $j=1$.

La matrice $B^N(i,j)$ comme opérateur dans s_α

On considère ici la matrice $B^N(i,j)$ comme un opérateur dans $S_\alpha=(s_\alpha,s_\alpha)$. On pose

$$\Lambda_{ij}(\alpha)=\sup_{n\ge\max\{1,-i+1\}}\left(\frac{\alpha_{n+i}+\alpha_{n+j}}{\alpha_n}\right)<\infty. \tag{7.1}$$

Notons qu'on a évidemment

$$\Lambda_{ij}(\alpha)=\sup_{n\ge 1}\left(\frac{\alpha_{n+i}+\alpha_{n+j}}{\alpha_n}\right)\ \text{pour } i\ge 0.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 7.1. *[57] Soient $i,j\in\mathbb{Z}$ et $N\ge 1$ un entier.*

(i) Si $0\le i<j$ on a $B^N(i,j)\in S_\alpha$ pour α vérifiant la condition (7.1) et

$$\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_\alpha}\le(\Lambda_{ij}(\alpha))^N. \tag{7.2}$$

(ii) Soit $i<j\le 0$. On a $B^N(i,j)\in S_\alpha$ pour α vérifiant (7.1) et

$$\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_\alpha}\le\left[\max\left\{\Lambda_{ij}(\alpha),\sup_{-j+1\le n\le -i}\left(\frac{\alpha_{n+j}}{\alpha_n}\right)\right\}\right]^N<\infty. \tag{7.3}$$

(iii) Soit $i<0<j$. On a $B^N(i,j)\in S_\alpha$ pour α vérifiant (7.1) et

$$\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_\alpha}\le\left[\max\left\{\Lambda_{ij}(\alpha),\sup_{1\le n\le -i}\left(\frac{\alpha_{n+j}}{\alpha_n}\right)\right\}\right]^N<\infty. \tag{7.4}$$

Preuve. *(i) Pour $0\le i<j$ on a $\|B(i,j)\|_{S_\alpha}=\Lambda_{ij}(\alpha)$. D'après (7.1) et comme S_α est une algèbre de Banach on déduit $B^N(i,j)\in S_\alpha$ et (7.2) est vérifiée.*

(ii) On a

$$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\infty}\left[B^N(i,j)\right]_{nm}\alpha_m=\begin{cases}\dfrac{\alpha_{n+i}+\alpha_{n+j}}{\alpha_n} & \text{pour } n\ge -i+1,\\ \dfrac{\alpha_{n+j}}{\alpha_n} & \text{pour } -j+1\le n\le -i,\\ 0 & \text{pour } n\le -j.\end{cases}$$

Donc

$$\|B(i,j)\|_{S_\alpha}=\max\left\{\Lambda_{ij}(\alpha),\sup_{-j+1\le n\le -i}\left(\frac{\alpha_{n+j}}{\alpha_n}\right)\right\}$$

et comme dans l'algèbre de Banach S_α *on a* $\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_\alpha} \leq \|B(i,j)\|_{S_\alpha}^N$ *on conclut que (7.3) est vérifiée.*

(iii) vient de l'identité

$$\|B(i,j)\|_{S_\alpha} = \max\left\{\Lambda_{ij}(\alpha), \sup_{1\leq n\leq -i}\left(\frac{\alpha_{n+j}}{\alpha_n}\right)\right\}$$

et en raisonnant comme précédemment on déduit (7.4). ■

On déduit immédiatement le résultat suivant.

Proposition 7.2. *[57] Soient* $i, j \in \mathbb{Z}$ *et soit* $N \geq 1$ *un entier. Donc*

(i) a) $B^N(i,j) \in S_r$ *pour tout* $r > 0$,

$$\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_r} \leq \left(r^i + r^j\right)^N \text{ et } \left[B^N(i,j)\right]_{nm} \leq \inf_{r>0}\left\{\frac{\left(r^i + r^j\right)^N}{r^{m-n}}\right\} \text{ pour tout } n, m;$$

b) dans le cas où $i \geq 0$ *on a* $\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_r} = \left(r^i + r^j\right)^N$.

(ii) Soit ξ *un réel avec* $0 < \xi < i$. *Il existe* $r_0 > 0$ *tel que pour tout* $r < r_0$ *on ait*

$$\frac{\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_r}}{r^{\xi N}} \to 0 \quad (N \to \infty). \tag{7.5}$$

Preuve. *(i) a) Il est facile de vérifier que*

$$\|B(i,j)\|_{S_r} = \Lambda'_{ij}(\alpha) = r^i + r^j$$

car $\alpha_n = r^n$ *pour tout* n. *On conclut que*

$$\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_r} \leq \|B(i,j)\|_{S_r}^N = \left(r^i + r^j\right)^N.$$

Comme

$$\left[B^N(i,j)\right]_{nm} r^{m-n} \leq \left\|B^N(i,j)\right\|_{S_r} \leq \left(r^i + r^j\right)^N \text{ pour tout } r > 0$$

on déduit

$$\left[B^N(i,j)\right]_{nm} \leq \inf_{r>0}\left\{\left(r^i + r^j\right)^N r^{n-m}\right\} \text{ pour tout } n, m \geq 1.$$

D'où la preuve de (i) a).

b) Encore d'après le Lemme 3.19 (ii) c) et comme $i \geq 0$ *on a*

$$\left\|B^N(i,j)\right\|_{S_r} = \|B(i,j)\|_{S_r}^N = \left(r^i + r^j\right)^N.$$

D'où (i) b).

(ii) Comme $r^{i-\xi} + r^{j-\xi} \to 0$ *quand* $r \to 0$, *on déduit qu'il existe* $r_0 > 0$ *tel que* $r^{i-\xi} + r^{j-\xi} < 1$ *pour tout* $r < r_0$ *et (7.5) est vérifiée.* ■

Remarque 7.3. *Dans la partie (ii) de la Proposition 7.2 on voit aisément que pour tout n on obtient successivement*

$$\sum_{m=n+Ni}^{n+Nj} \left[B^N(i,j)\right]_{nm} r^{m-n} = r^{\xi N} o(1) \quad (N \to \infty)$$

et

$$\left[B^N(i,j)\right]_{nm} = r^{\xi N + n - m} o(1) \quad (N \to \infty)$$

pour $m \in [n+Ni, n+Nj]$ et pour r assez petit.

Nombre de chemins ayant N arcs allant de A_n vers A_m associée avec $B^N(i,j)$ dans les cas $i < j \leq 0$, ou $0 \leq i < j$.

Pour obtenir le nombre de chemins ayant N arcs on utilise la formule connue $C_N^k = N(N-1)\ldots(N-k+1)/k!$ pour $0 \leq k \leq N$, qui donne le nombre de combinaisons de k éléments parmi N. On a le résultat suivant.

Proposition 7.4. *Le nombre de chemins ayant N arcs allant de A_n vers A_m associé à $B^N(i,j)$ est donné par la formule suivante.*

(i) Soit $0 \leq i < j$. On a

$$\left[B^N(i,j)\right]_{nm} = \begin{cases} C_N^{\frac{m-n-Ni}{d}} & \text{pour } m-n-Ni = 0, d, 2d\ldots, Nd, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7.6}$$

(ii) Pour $i < j \leq 0$ on a

$$\left[B^N(i,j)\right]_{nm} = \begin{cases} C_N^{\frac{n-m+Nj}{d}} & \text{pour } n-m+Nj = 0, d, 2d\ldots, Nd, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7.7}$$

Preuve. *(i) Pour obtenir la matrice $B^N(i,j)$ on calcule*

$$B^N(i,j) = \varphi\left[\left(z^i + z^j\right)^N\right] = \varphi\left[z^{iN}\left(1+z^d\right)^N\right] = \varphi\left(\sum_{k=0}^{N} C_N^k z^{iN+dk}\right).$$

On voit que si $m - n = iN + dk$, $k = 0, 1, .., N$ on a $\left[B^N(i,j)\right]_{nm} = C_N^k$. Cela montre (7.6).

(ii) Pour i et j entiers avec $i < j \leq 0$ on a

$$B(i,j) = {}^t\left[B(-j,-i)\right], \tag{7.8}$$

et si $0 \leq -j < -i$ on déduit de (i) que :

$$\left[\left(B^N(-j,-i)\right)\right]_{nm} = \begin{cases} C_N^k & \text{pour } m = n - Nj + (-i+j)k,\ k = 0, 1, \ldots, N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$\left[B^N(i,j)\right]_{nm} = \left[\, ^t\left(B^N(-j,-i)\right)\right]_{nm} = \begin{cases} C_N^k & \text{pour } n = m - Nj + dk,\ k = 0,1,...,N, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $d = j - i$. *On déduit (7.7).* ■

On obtient immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 7.5. *(i) Pour* $j > 0$ *on a*

$$\left[B^N(0,j)\right]_{nm} = \begin{cases} C_N^k & \text{pour } m = n + jk,\ k = 0,1,...,N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7.9}$$

(ii) Pour $i < 0$ *on a*

$$\left[B^N(i,0)\right]_{nm} = \begin{cases} C_N^k & \text{pour } n = m - ik,\ k = 0,1,...,N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice booléenne $B(-1,1)$.

Pour calculer $B^N(i,j)$ *dans le cas où* $i < 0 < j$ *on ne peut pas appliquer la formulation précédente. Nous allons voir que* $B^N(i,j)$ *n'est pas une matrice de Toeplitz car les entiers* $\left[B^N(i,j)\right]_{nm}$ *ne sont pas sous la forme* a_{m-n}.

On considère ici le cas où $i = -1$ *et* $j = 1$, *on obtient la matrice booléenne infinie*

$$B(-1,1) = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ . \\ A_n \\ . \\ . \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & . & A_m & . & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \mathbf{0} & \\ & . & . & . & & \\ \mathbf{0} & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & . & . & . \\ & & & & & \end{array}\right] \end{array}.$$

On voit aisément qu'il n'existe pas de chemin de A_n *vers* A_m, *dans les cas* $n = m$, *ou* $|n - m| \geq 2$, *où* n, $m = 1, 2,....$ *et qu'il existe un chemin unique allant de* A_n *vers* A_m *pour* $n = m - 1$, $m \geq 2$, *ou* $n = m + 1$ *avec* $m = 1, 2, 3,....$

La précédente formulation ne peut pas être appliquée ici car $B(-1,1)$ *n'est pas triangulaire. D'après la Proposition 7.1 et d'après [73, Lemme 1, pp. 166-167] la matrice* $B^N(-1,1)$ *est définie comme suit.*

Lemme 7.6. *Soit* $N \geq 1$ *un entier. Donc*

(i) a) $B^N(-1,1) \in S_r$ *pour tout* $r > 0$,

b) $B^N(-1,1) \in S_\alpha$ *avec* $\Lambda_{2,1}(\alpha) < \infty$ *et*

$$\left\|B^N(-1,1)\right\|_{S_\alpha} \leq \left(\max\left\{\Lambda_{2,1}(\alpha), \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right\}\right)^N.$$

(ii) a) $\left[B^N(-1,1)\right]_{nm} = 0$ *dans chacun des cas suivants : N pair et $|m-n|$ impair, N impair et $|m-n|$ pair, ou $|m-n| \geq N+1$ pour tout n, $m \geq 1$;*

b) pour $n \geq N-k+1$, avec $k = 0,1,\ldots, N$ on a

$$\left[B^N(-1,1)\right]_{n,n-N+2k} = C_N^k,$$

c) si N est impair et $n \leq N$, ou N est pair, $n \leq N-1$ et $k \geq 2n-N$, on a

$$\left[B^N(-1,1)\right]_{n,n-k} = C_N^{\frac{N+k}{2}} - C_N^{\frac{N-2n+k}{2}}.$$

Comme conséquence directe du Lemme 7.6 on obtient immédiatement la reformulation suivante du résultat précédent qui donne le nombre $\left[B^N(-1,1)\right]_{nm}$ de chemins ayant N arcs associé à la matrice $B(-1,1)$.

Théorème 7.7. *Le nombre $\left[B^N(-1,1)\right]_{nm}$ de chemins ayant N arcs associé à la matrice $B(-1,1)$ est donné par*

(i) $\left[B^N(-1,1)\right]_{nm} = 0$ pour $|m-n| \geq N+1$ avec n, $m \geq 1$.

(ii) Soit N un entier pair.

a) si $|m-n|$ est impair on a $\left[B^N(-1,1)\right]_{nm} = 0$;

b) si $|m-n|$ est pair, on a

$$\left[B^N(-1,1)\right]_{nm} = \begin{cases} C_N^{\frac{N-n+m}{2}} & \text{pour } N-n+2 \leq m \leq n+N+1; \\ C_N^{\frac{N+n-m}{2}} - C_N^{\frac{N-n-m}{2}} & \text{pour } n+m \leq N. \end{cases}$$

(iii) Soit N un entier impair.

a) si $|m-n|$ est pair alors $\left[B^{(N)}(-1,1)\right]_{nm} = 0$;

b) si $|m-n|$ est impair, on a

$$\left[B^N(-1,1)\right]_{nm} = \begin{cases} C_N^{\frac{N-n+m}{2}} & \text{pour } N-n-2 \leq m \leq n+N; \\ C_N^{\frac{N+n-m}{2}} - C_N^{\frac{N-n-m}{2}} & \text{pour } n+m \leq N. \end{cases}$$

Application directes. *Soit $B^3(-1,1)$ la matrice définie par*

$$B^3(-1,1) = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \cdot & & & & \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & \cdot & & \mathbf{0} & \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & \cdot & & \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \mathbf{0} & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \end{array}.$$

Le nombre de chemins ayant 3 *arcs allant de* A_4 *vers* A_3 *est égal à*

$$\left[B^3\left(-1,1\right)\right]_{4,3} = C_3^1 = 3.$$

Le nombre de chemins ayant 3 *arcs allant de* A_1 *vers* A_2 *est égal à*

$$\left[B^3\left(-1,1\right)\right]_{1,2} = C_3^2 - 1 = 2.$$

Considérons la matrice $B^5\left(-1,1\right)$ *définie par*

$$B^5\left(-1,1\right) = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ . \\ . \\ . \\ . \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & . & . \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 1 & & & & & \\ 5 & 0 & 9 & 0 & 5 & 0 & 1 & & & \mathbf{0} & \\ 0 & 9 & 0 & 10 & 0 & 5 & 0 & 1 & & & \\ 4 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 5 & 0 & 1 & & \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 5 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 5 & 0 & . \\ & 1 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 5 & . \\ \mathbf{0} & & & . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & & . & . & . & . & . \end{array}\right] \end{array}.$$

Le nombre de chemins ayant 5 *arcs allant de* A_7 *vers* A_4 *est égal à*

$$\left[B^5\left(-1,1\right)\right]_{7,4} = C_5^1 = 5.$$

Le nombre de chemins ayant 5 *arcs allant de* A_3 *vers* A_2 *est égal à*

$$\left[B^5\left(-1,1\right)\right]_{3,2} = C_5^3 - 1 = 9.$$

Le nombre de chemins ayant 20 *arcs de* A_{11} *vers* A_9 *est donné par*

$$\left[B^{20}\left(-1,1\right)\right]_{11,9} = C_{20}^{11} - 1.$$

Remarque 7.8. *Nous pouvons étendre la définition de* $\varphi\left(z^k\right)$ *au cas où* $k \in \mathbb{Z}$ *et nous définissons par* $\overline{\varphi}\left(z^k\right)$ *la matrice dont les éléments non nuls sont égaux à* 1 *et sont sur le diagonale d'équation* $m - n = k$. *On a donc*

$$\left(z^i + z^j\right)^N = C_N^0 z^{iN} + C_N^1 z^{iN+d} + ... + C_N^k z^{iN+kd} + ... + C_N^N z^{jN}.$$

En posant $\chi = \max\left(\left|i\right|, \left|j\right|\right)$ *on peut poser la conjecture suivante, pour tout* n, m *vérifiant* $m - n = iN + kd$ $k = 0, 1, ..., N$ *et* $n + m > \chi N$ *on a*

$$\left[\overline{\varphi}\left(\left(z^i + z^j\right)^N\right)\right]_{nm} = \left[B^N\left(i,j\right)\right]_{nm} = C_N^k.$$

On obtient donc

$$\left[B^5\left(-1,1\right)\right]_{7,6} = \left[B^5\left(-1,1\right)\right]_{7,8} = C_5^3 = 10.$$

De plus on a $m - n = 1 = -5 + 3.2$ *et* $n + m = 13 > 5$. *De la même façon on voit aisément que* $\left[B^{100}\left(-1,1\right)\right]_{300,260} = C_{100}^{30}$, *car* $m - n = -40 = -100 + 2k$ *et* $k = 30$.

Cas de la matrice booléenne tridiagonale $B(0,1,2)$.

On peut calculer explicitement le nombre de chemins ayant N arcs allant de A_n vers A_m associé à la matrice $B(0,1,2)$ définie par

$$B(0,1,2) = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ . \\ A_n \\ . \\ . \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & . & A_m & . & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & . & . & & \\ \mathbf{0} & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & . & . \\ & & & & & . \end{bmatrix} \end{array}.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 7.9. *(i) Le nombre de chemins ayant N arcs allant de A_n vers A_m associé à la matrice $B(0,1,2)$ est donné par la formule suivante où $z_0 = \left(-1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)/2$ et $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$,*

$$\left[B^N(0,1,2)\right]_{nm} = \begin{cases} (-1)^k \sum_{\substack{i+j=k, \\ 0\le i,j\le N}} C_N^i C_N^j z_0^{j-i} & \text{pour } m = n+k,\ k = 0,1,...,2N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) On a

$$\left\|B^N(0,1,2)\right\|_{S_r} = \left(1+r+r^2\right)^N$$

et

$$\left[B^N(0,1,2)\right]_{nm} \le \inf_{r>0}\left\{r^{n-m}\left(1+r+r^2\right)^N\right\} \text{ pour } n+2N \ge m \ge n.$$

Preuve. *(i) On a $B(0,1,2) = \varphi\left(1+z+z^2\right)$, et comme $1+z+z^2 = (z-z_0)(z-\overline{z_0})$ on déduit que*

$$\begin{aligned} \left(1+z+z^2\right)^N &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N C_N^i C_N^j z_0^{-i}\overline{z_0^{-j}}(-z)^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{2N}\left((-1)^k \sum_{\substack{i+j=k, \\ 0\le i,j\le N}} C_N^i C_N^j z_0^{j-i}\right) z^k, \text{ d'où (i).} \end{aligned}$$

(ii) est une conséquence directe du Lemme 3.19. ■

7.2.2 Cas des matrices B_∞^+ et $^t(B_\infty^+)$.

Dans cette partie on considère les matrices qui possèdent un nombre infini de diagonales formées d'entiers non nuls. Donc on considère la matrice B_∞^+ notée par $^t\Sigma$ dans la littérature et on calcule explicitement B_∞^{+N}.

La matrice B_∞^+.

On définie la matrice B_∞^+ par

$$B_\infty^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ & 1 & 1 & 1 & . & . \\ & & 1 & 1 & . & . \\ & & & 1 & . & . \\ & \mathbf{0} & & & . & . \\ & & & & & . \end{bmatrix}.$$

On a

$$B_\infty^+ = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \varphi\left(\frac{1}{1-z}\right) \text{ pour } |z| < 1. \tag{7.10}$$

Posons

$$\widehat{C_1^+} = \left\{\alpha \in U^+ \bigcap cs \ : \quad r_n(\alpha) = O(1) \ \ (n \to \infty)\right\},$$

où $r_n(\alpha) = \left(\sum\limits_{m=n}^{\infty} \alpha_m\right)/\alpha_n$, *(cf. [43]). On peut établir le résultat suivant.*

Proposition 7.10. *Soit $N \geq 1$ un entier.*

(i) a) On a $(B_\infty^+)^N \in S_\alpha$ pour $\alpha \in \widehat{C_1^+}$ et

$$\left\|(B_\infty^+)^N\right\|_{S_\alpha} \leq \left(\sup_n r_n(\alpha)\right)^N. \tag{7.11}$$

b) On a $(B_\infty^+)^N \in S_r$ pour $r < 1$ et

$$\left\|(B_\infty^+)^N\right\|_{S_r} = \|B_\infty^+\|_{S_r}^N = \frac{1}{(1-r)^N}. \tag{7.12}$$

.

(ii) Le nombre $\left[(B_\infty^+)^N\right]_{nm}$ de chemins ayant N arcs allant de A_n vers A_m est donné par

$$\left[(B_\infty^+)^N\right]_{nm} = \begin{cases} C_{N+m-n-1}^{m-n} & \text{for } m \geq n, \\ 0 & \text{for } m < n. \end{cases}$$

Preuve. *(i) a) Il est immédiat que $B_\infty^+ \in S_\alpha$ implique que $\alpha \in \widehat{C_1^+}$. Comme S_α est une algèbre de Banach on conclut que $(B_\infty^+)^N \in S_\alpha$. L'inégalité (7.11) est une conséquence directe de l'identité $\|B_\infty^+\|_{S_\alpha} = \sup_n r_n(\alpha)$. On peut montrer (i) b) et (ii) ensemble. D'après (7.10) et le Lemme 7.6 (ii) on a successivement $(B_\infty^+)^N \in S_r$ pour $r < 1$ et*

$$(B_\infty^+)^N = \varphi\left[\left(\frac{1}{1-z}\right)^N\right] = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{N+k-1}^k \, z^k\right), \tag{7.13}$$

cela montre (ii). Donc en utilisant le Lemme 3.19 (ii) c) on conclut que

$$\begin{aligned}\left\|\left(B_{\infty}^{+}\right)^{N}\right\|_{S_r} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{N+k-1}^{k} r^{k} \\ &= \frac{1}{(1-r)^{N}} = \|B_{\infty}^{+}\|_{S_r}^{N}\end{aligned}$$

ce qui montre les égalités données dans (7.12). (ii) vient de l'identité (7.13). ∎

Remarque 7.11. *Notons qu'on a*

$$\left[\left(B_{\infty}^{+}\right)^{N}\right]_{nm} = C_{N+m-n-1}^{m-n} \leq \inf_{r<1}\left\{r^{n-m}\frac{1}{(1-r)^{N}}\right\} \text{ pour } m \geq n.$$

Pour le résultat suivant on rappelle que

$$\widehat{C_1} = \left\{\alpha \in U^{+} : \quad s_n(\alpha) = O(1) \quad (n \to \infty)\right\},$$

où $s_n(\alpha) = \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m\right)/\alpha_n$*, voir le paragraphe 6.1. On déduit de ce qui précède le corollaire suivant où on pose* $B_{\infty} = {}^{t}(B_{\infty}^{+})$.

Corollaire 7.12. *Soit $N \geq 1$ un entier. On a alors les résultats suivants.*

(i) a) $B_{\infty}^{N} \in S_{\alpha}$ *pour* $\alpha \in \widehat{C_1}$,

b) $B_{\infty}^{N} \in S_r$ *pour* $r > 1$

et

$$\|B_{\infty}^{N}\|_{S_r} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^{N}. \tag{7.14}$$

.

(ii) Le nombre $\left[B_{\infty}^{N}\right]_{nm}$ *de chemins ayant N arcs allant de A_n vers A_m est donné par*

$$\left[B_{\infty}^{N}\right]_{nm} = \begin{cases} C_{N+n-m-1}^{n-m} & \text{for } m \leq n, \\ 0 & \text{for } m > n. \end{cases}$$

Preuve. *(i) a) La condition* $B_{\infty} \in S_{\alpha}$ *signifie que* $\sup_n s_n(\alpha) < \infty$*, c-à-d.* $\alpha \in \widehat{C_1}$*. Comme S_{α} est une algèbre de Banach on déduit que* $B_{\infty}^{N} \in S_{\alpha}$.

b) D'après le Lemme 3.19 et la Proposition 7.10 pour tout r tel que $0 < 1/r < 1$ *on a*

$$\|B_{\infty}\|_{S_r} = \|{}^{t}(B_{\infty}^{+})\|_{S_{1/r}} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1}.$$

De (7.12) on déduit aisément que

$$\|B_{\infty}^{N}\|_{S_r} = \left\|\left({}^{t}(B_{\infty}^{+})\right)^{N}\right\|_{S_{1/r}} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^{N}.$$

(ii) est une conséquence directe de la Proposition 7.10 (ii). ∎

Dans la section suivante nous allons utiliser la matrice $B^{N}(i,0)$ pour étudier une autre problème dans les matrices de transformations.

7.3 Matrices de transformations de $c\left(B^N(i,0)\right)$ dans c où $N \geq 1$

Dans cette partie on s'intéresse aux matrices de transformations entre $c\left(B^N(i,0)\right)$ et c. Cela signifie qu'on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice infinie vérifie la propriété

$$B^N(i,0)\,x_n = \sum_{k=0}^{N} C_N^k x_{n+ik} \to l \text{ implique } \mathcal{M}_n(x) \to l' \ \ (n \to \infty)$$

où l et l' sont des scalaires l et pour toute suite x. On a besoin de déterminer l'inverse de $B^N(i,0)$. Donc d'après (7.8) on a $B^N(i,0) = {}^t\left[B^N(0,-i)\right] = {}^t\left[\varphi\left(1+z^{-i}\right)^N\right]$. D'après le Lemme 3.19 (iii) on a

$$\left[B^N(i,0)\right]^{-1} = {}^t\left[\varphi\left(\frac{1}{1+z^{-i}}\right)^N\right].$$

Caractérisations de $\left(c\left(B^N(i,0)\right), c\right)$.
Comme conséquence directe du lemme 6.10, il est facile de déduire le résultat suivant où $D_{(a_{sn})_n}$ pour un s donné est une matrice diagonale avec $\left[D_{(a_{sn})_n}\right]_{nn} = a_{sn}$ pour tout n et

$$B_\infty D_{(a_{sn})_n} = \begin{pmatrix} a_{s1} & & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & & \mathbf{0} & \\ . & . & . & & \\ a_{s1} & a_{s2} & . & a_{sn} & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Rappelons que pour tout triangle T on a $\mathcal{M} \in (c(T), c)$ si et seulement si les séries intervenant dans le produit $\mathcal{M}T^{-1}$ sont convergentes et $\mathcal{M}T^{-1} \in (c,c)$ et

$$B_\infty D_{(a_{sn})_n} T^{-1} \in (c,c) \ \text{ pour tout } s = 1, 2, \ldots.$$

Dans la suite on rappelle que

$$\begin{aligned} [N,k] &= C_{N+k-1}^k \\ &= \frac{(N+k-1)(N+k-2)\ldots(N+k-1-k+1)}{k!} \\ &= \frac{N(N+1)\ldots(N+k-1)}{k!}, \end{aligned}$$

et on considère les conditions

$$\sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{n,m-ik}[N,k]\right|\right) < \infty, \tag{7.15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}a_{n,m-ik}\left[N,k\right]\right)=l \text{ pour un scalaire } l, \tag{7.16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{k}a_{n,m-ik}\left[N,k\right]=l_{m} \text{ for } m=1,2,... \tag{7.17}$$

$$\sup_{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{k=0}^{E\left(-\frac{n-m}{i}\right)}\left(-1\right)^{k}a_{s,m-ik}\left[N,k\right]\right|\right)<\infty \text{ pour tout } s, \tag{7.18}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{E\left(-\frac{n-m}{i}\right)}\left(-1\right)^{k}a_{s,m-ik}\left[N,k\right]\right)=l \text{ pour un certain scalaire } l \text{ et pour tout } s, \tag{7.19}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{E\left(-\frac{n-m}{i}\right)}\left(-1\right)^{k}a_{s,m-ik}\left[N,k\right]=l_{m} \text{ pour un certain scalaire } l_{m},\ m=1,2,.... \text{ et pour tout } s \tag{7.20}$$

On a

Théorème 7.13. *$\mathcal{M}\in\left(c\left(B^{N}\left(i,0\right)\right),c\right)$ si et seulement si (7.15), (7.16), (7.17), (7.18), (7.19) et (7.20) sont vérifiées.*

Preuve. *La matrice $\left(B^{N}\left(i,0\right)\right)^{-1}=B^{-N}\left(i,0\right)$ peut être explicitement calculée comme*

$$\begin{aligned}\left(1+z^{-i}\right)^{-N} &= 1-Nz^{-i}+\frac{N\left(N+1\right)}{2!}z^{-2i}-...+\left(-1\right)^{k}\frac{N\left(N+1\right)...\left(N+k-1\right)}{k!}z^{-ki}+...\\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\left[N,k\right]z^{-ik} \text{ pour } \left|z\right|<1.\end{aligned}$$

On obtient immédiatement

$$\left[\,^{t}\left(B^{-N}\left(i,0\right)\right)\right]_{nm}=\varphi\,^{t}\left(\frac{1}{\left(1+z^{-i}\right)^{N}}\right)=\begin{cases}\left(-1\right)^{k}\left[N,k\right] & \text{pour } n-m=-ik,\ k=0,1,...\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{M}B^{-N}\left(i,0\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,m-ik}\left(-1\right)^{k}\left[N,k\right]\right)_{n,m\geq 1},$$

et $\mathcal{M}B^{-N}\left(i,0\right)\in\left(c,c\right)$ est équivalente à (7.15), (7.16) et (7.17). Donc on obtient aisément pour tout s

$$B_{\infty}D_{\left(a_{sn}\right)_{n}}B^{-N}\left(i,0\right)=\left(\sum_{k=0}^{E\left(-\frac{n-m}{i}\right)}\left(-1\right)^{k-m}a_{s,m-ik}\left[N,k\right]\right)_{n,m\geq 1}.$$

Donc $B_\infty D_{(a_{sn})_n} B^{-N}(i,0) \in (c,c)$ *si et seulement si (7.18), (7.19) et (7.20) sont vérifiées.* ■

Bibliographie

[1] *Akhmedov, A. M., Başar, F., The fine spectra of the difference operator* Δ *over the sequence space* ℓ_p*,* $(1 \leq p < \infty)$*, Info. Sci. (2004).*

[2] *Akhmedov, A. M., Başar, F., The Fine Spectra of the Difference Operator* Δ *Over the Sequence Space* bv_p*,* $(1 \leq p \leq \infty)$*. Acta Mathematica Sinica, 23, pp. 1757-1768 (2005).*

[3] *Altay, A.F, Summation order. Mat. Tidsskr. B. (1946), 33-52.*

[4] *Altay, B., Başar, F., On the fine spectrum of the difference operator on* c_0 *and c, Inform. Sci.* ***168*** *(2004), 217-224.*

[5] *Andersen, A.F., Summation of nonintegral order. Mat. Tidsskr. B. (1946), 33-52.*

[6] *Başar, F., Malkowsky, E., Altay, B., Matrix transformations on the matrix domains of triangles in the spaces of strongly* C_1*-summable and bounded sequences, Publ. Math. Debercen,* ***73/1-2*** *(2008), 193-213.*

[7] *Benahmed B., de Malafosse, B., Yassine A., Matrix transformations and quasi-Newton method. Int. J. of Math. and Math. Sc. (2007).*

[8] *P.N Chivakumar, R. Wong, Linear equations in infinite matrices, Linear Algebra Appl.* ***7*** *1 (1997) 53-62.*

[9] *C. Çakan, B. Altay, Statistically boundedness and statistical core of double sequences, J. Math. Anal. Appl.* ***317****, 2 (2006), 690-697.*

[10] *L.W. Cohen and N. Dunford, Transformations on sequence spaces, Duke Math. J.* ***3*** *(1937), 689-701.*

[11] *Combes J. Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires, I Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse 4e s, t XXI (1957), 253-265. II et III ibid. 4e s, t XXIII (1959), 85-113.*

[12] Cooke, R.G., Infinite matrices and sequences spaces, Macmillan and Co., London, 1949.

*[13] Defranza, J. and Zeller, K., Hardy-Bohr Positivity, Proc. Amer. Soc., **123**, 12 (1995), 3783-3788.*

[14] de Malafosse, B., Contribution à l'étude des systèmes infinis, Thèse de Doctorat de III^{è} cycle, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 1980.

*[15] de Malafosse, B., Résolution des systèmes linéaires infinis et variation d'un élément dans une matrice infinie, Atti dell'Accademia di Scienze Lettere e Arti di Palermo. Série IV, **40** Parte I, (1982), 227-230.*

*[16] de Malafosse, B., Systèmes linéaires infinis admettant une infinité de solutions, Accademia Peloritana dei Pericolanti di Messina, Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat. **65** (1988), 49-59.*

*[17] de Malafosse, B., On the spectrum of the Cesàro operator in the space s_r, Fac. des Sc. Univ. d'Ankara, Series Al Mathematics and statistics **48**, (1999), 53-71.*

*[18] de Malafosse, B., Bases in sequences spaces and expansion of a function in a series of power series, Matematicki Vesnik **52**, N° 3-4, (2000), 99-112.*

*[19] de Malafosse, B., Application of the sum of operators in the commutative case to the infinite matrix theory, Soochow journal of mathematics **27**, N°.4, (2001), 405-421.*

*[20] de Malafosse, B., Matrix transformations between new matrix domains, Soochow journal of mathematics **29**, N°.1, (2001), 15-34.*

*[21] de Malafosse, B., Some new properties of sequence spaces, and application to the continued fractions, Matematicki Vesnik **53** (2001), 91-102.*

*[22] de Malafosse, B., Recent results in the infinite matrix theory and application to Hill equation, Demonstratio Matematica **35**, N°1 (2002), 11-26.*

*[23] de Malafosse, B., Variation of an element in the operator of first difference, Novi Sad Journal of Mathematics **32**, N°1, (2002), 141-158.*

*[24] de Malafosse, B., Properties of some sets of sequences and application to the spaces of bounded difference sequences of order μ, Hokkaido Math. J. **31** (2002), 283-299.*

*[25] de Malafosse, B., Sets of sequences that are strongly τ- bounded and matrix transformations between these sets, Demonstratio Matematica **36**, 1 (2003), 155-171.*

*[26] de Malafosse, B., Some properties of the sum of linear operators, Novi Sad J. of Math. **33**, 1 (2003), 75-91.*

[27] *de Malafosse, B., On matrix transformations and sequence spaces, Rend. del Circ. Mat. di Palermo* ***52****, 2 (2003), 189-210.*

[28] *de Malafosse, B., On some BK space, Internat. J. of Math. and Math. Sc.,* ***28*** *(2003), 1783-1801.*

[29] *de Malafosse, B., On the set of sequences that are strongly α-bounded and α-convergent to naught with index p, Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* ***61,*** *1 (2003), 13-32.*

[30] *de Malafosse, B. : Duality in new sequence spaces, Hokkaido Math. J.* ***32*** *(2003), 643-660.*

[31] *de Malafosse, B., On the Banach algebra $B(l_p(\alpha))$, Internat. J. of Math. and Math. Sc.* ***60*** *(2004) 3187-3203.*

[32] *de Malafosse, B., Sum and product of certain BK spaces and matrix transformations between these spaces, Acta Mathematica Hungarica* ***104****, 3 (2004) 241-263.*

[33] *de Malafosse, B., Calculations on some sequence spaces, Internat. J. of Math. and Math. Sc.* ***31*** *(2004), 1653-1670.*

[34] *de Malafosse, B., The Banach algebra S_α and applications. Acta Sci. Math Szeged* ***70*** *(2004), 125-145.*

[35] *de Malafosse, B., Sur la théorie des matrices infinies et applications. Habilitation à diriger des Recherches, Université du Havre (2004).*

[36] *de Malafosse, B., Linear operators mapping in new sequence spaces, Soochow J. Math.* ***31*** *N°2 (2005), 403-427.*

[37] *de Malafosse, B., The Banach algebra $B(X)$, where X is a BK space and applications, Mat. Vesnik* ***57*** *(2005), 41-60.*

[38] *de Malafosse, B., Space $S_{\alpha,\beta}$ and $\sigma-$core, Studia Math* ***172*** *(2006), 229-241.*

[39] *de Malafosse, B., Sum of sequence spaces and matrix transformations, Acta Math. Hung.* ***113 (3)*** *(2006), 289-313.*

[40] *de Malafosse, B., An application of the infinite matrix theory to Mathieu equation, Comput. Math. Appl.* ***52*** *(2006) 1439-1452.*

[41] *de Malafosse, B., On the set of α, p-bounded variation of order h, Tamkang J. Math.* ***38*** *N° 2 (2007).*

[42] *de Malafosse, B., On the sets of $\nu-$analytic and $\nu-$entire sequences and matrix transformations, International Mathematical Forum,* ***2****, 36 (2007), 1975-1810.*

[43] *de Malafosse, B., Calculations in new sequence spaces, Arch. Math., Brno* ***43*** *(2007), 1-18.*

[44] *de Malafosse, B., Tauberian Theorems for the Operator of Weighted Means. Communications in Mathematical Analysis,* ***5*** *2 (2007), 1-12.*

[45] *de Malafosse, B., Matrix transformations in sets generalizing spaces of lacunary sequences, Acta Sc. Math. Szeged,* ***74*** *(2007), 135-145.*

[46] *de Malafosse, B., The* μ, λ^{+r}*-statistical convergence. Soumis pour publication.*

[47] *de Malafosse, B., Malkowsky, E. : Sequence spaces and inverse of an infinite matrix. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, Serie II,* ***51*** *(2002), 277-294.*

[48] *de Malafosse, B., Malkowsky, E., Matrix transformations in the sets* $\chi\left(\overline{N}_p\overline{N}_q\right)$ *where* χ *is in the form* s_ξ*, or* $\overset{\circ}{s}_\xi$*, or* $s_\xi^{(c)}$*, Filomat* ***17*** *(2003), 85-106.*

[49] *de Malafosse, B., Malkowsky, E., Sets of difference sequences of order* m*, Acta Sci. Math. (Szeged)* ***70*** *(2004), 659-682.*

[50] *de Malafosse, B., Malkowsky, E., The Banach algebra* $(w_\infty(\lambda), w_\infty(\lambda))$ *accepté pour publication au FJMS, Far East Journal of Mathematical Sciences (2005).*

[51] *de Malafosse, B., Malkowsky, E., Matrix transformations between sets of the form* W_ξ *and operator generators of analytic semigroups, Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS),* ***1****, 1 (2008), 51-67.*

[52] *de Malafosse, B., Medeghri, A., Matrix transformations and generators of analytic semigroups, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 67062 (2006) 1-14.*

[53] *de Malafosse, B., Malkowsky, E., Rakočević, V., Measure of noncompactness of operators and matrices on the space* c *and* c_0*, Int. Journal of Math. and Mathematical Sciences, N° 1 (2006), 1-5.*

[54] *de Malafosse, B., Rakočević, V., Applications of measure of noncompactness in operators on the spaces* s_α*,* s_α^0*,* $s_\alpha^{(c)}$ *and* l_α^p*, J. Math. Anal. Appl.* ***323,*** *1 (2006), 131-145.*

[55] *de Malafosse, B., Rakočević, V., Matrix Transformations and Statistical convergence, Linear Algebra and its Applications* ***420*** *(2007) 377-387.*

[56] *de Malafosse, B., Rakočević, V., A generalization of a Hardy theorem, Linear Algebra and its Applications,* ***421*** *(2007) 306-314.*

[57] *de Malafosse, B. and Yassine, A., Infinite matrices associated with power series and application to optimisation and matrix transformations, Math. J. Okayama Univ., ZZ (20XX), Japon (2008).*

[58] *Dore, G., Venni, A., On the closedness of the sum of two closed operators, Mathematische Zeitschrift,* ***196*** *(1987), 270-286.*

[59] *Et, M., On some topological properties of generalized difference sequence spaces. Internat. J. Math. & Math. Sci.* ***24****, 11 (2000) 785-791.*

[60] *Et, M. et Çolak, R., On some generalized difference sequence spaces. Soochow Journal of Mathematics,* ***21****, 4 (1995), 377-386.*

[61] *Farés, A., de Malafosse, B., Sequence spaces equations and application to matrix transformations, International Mathematical Forum,* ***3****, 19 (2008), 911-927.*

[62] *Farés, A., de Malafosse, B., Spectra of the operator of the first difference in* s_α, s_α^0, $s_\alpha^{(c)}$ *and* $\ell_p(\alpha)$ $(1 \leq p < \infty)$ *and application to matrix transformations, Demonstratio Mathematica, Vol.* ***XLI,*** *N°3 (2008), 661-676.*

[63] *Giang, D.V.; Móricz, F. : The Cesàro operator on the Banach algebra of* $L(\mathbb{R}^2)$ *multipliers. I : Odd case., Acta Sci. Math.* ***62****, No.3-4, 433-456 (1996).*

[64] *Goldberg, S., Unbounded linear operators, Dover Publications Inc. New York 1985.*

[65] *Grisvard, P., Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications. J. Maths.Pures et Appl.* ***45*** *(1966), 143-290.*

[66] *G. H. Hardy, Divergent Series, Oxford University Press, 1973.*

[67] *G. H. Hardy, A theorem concerning summable series, Proc. Cambridge Philos. Soc.* ***20*** *(1920) 304-307.*

[68] *Hausdorff, F., Summationsmethoden und Momentenfolgen, Math. Zeit,* ***9*** *(1921), 74-109.*

[69] *Jarrah A. M., Malkowsky E., Ordinary, absolute and strong summability and matrix transformations, Filomat,* ***17*** *(2003) 59-78.*

[70] *Kizmaz, H., On certain sequences spaces. Canad. Math. Bull.* ***24,*** *2, pp. 168–176 (1981).*

[71] *Kothe G. et Toeplitz O. Linear Raüme mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlichvielen Matrizen, J. Reine Angew. Math.* ***17*** *(1934), 193-226.*

[72] *Labbas, R., Terrini, B., Somme d'opérateurs linéaires de type parabolique, 1ère partie. Boll. Un. Mat. Italiana,* ***7****, 2-B (1988), 545-569.*

[73] Labbas, R., de Malafosse, B., On some Banach algebra of infinite matrices and applications, Demonstr. Math. ***31*** *(1998), 153- 168.*

[74] Labbas, R., de Malafosse, B., An application of the sum of linear operators in infinite matrix theory, Fac. des Sc. de l'Univ. Ankara ***46*** *(1997), 191-210.*

[75] I. J. Maddox, On Kuttner's theorem, J. London Math. Soc., ***43*** *(1968), 285-290.*

[76] I. J. Maddox, Elements of Functionnal Analysis, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1971.

[77] I. J. Maddox, Infinite matrices of operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1980.

[78] Malkowsky, E. : The continuous duals of the spaces $c_0(\Lambda)$ *and* $c(\Lambda)$ *for exponentially bounded sequences, Acta Sci. Math (Szeged),* ***61*** *(1995), 241-250.*

[79] Malkowsky, E. : Linear operators in certain BK spaces, Bolyai Soc.Math. Stud. ***5*** *(1996), 259-273.*

[80] Malkowsky, E. : BK spaces, bases and linear operators, Rend. del Circ. Mat. di Palermo. Serie II. Suppl. 52 (1998), 177-191.

[81] Malkowsky, E. : Linear operators between some matrix domains, Rend. del Circ. Mat. di Palermo. Serie II, ***68*** *(2002), 641-655.*

[82] Malkowsky, E., Rakočević, V., An introduction into the theory of sequence spaces and measure of noncompactness, Zb. Rad., Beogr. ***9*** *(17) (2000), 143-243.*

[83] Malkowsky, E., Rakočević, V., On matrix domains of triangles. Under review. To appear in Applied Math. and Computation (2007).

[84] Malkowsky, E., Parashar, S.D. : Matrix transformations in spaces of bounded and convergent difference sequences of order m, Analysis ***17****, 1 (1997), 87-97.*

[85] Martineau A., Equations différentielles d'ordre inifini, Bull. Soc. math. France ***95*** *(1997), 109-154.*

[86] Mascart H., Sur quelques opérateurs linéaires différentiels, Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse 4e s, t XXIV (1960), 5-73.

[87] Mascart, H., de Malafosse, B. : Caractérisation des espaces images d'une classe de systèmes linéaires infinis, Accademia Peloritana dei Pericolanti di Messina, Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat. ***64*** *(1988), 31-34.*

[88] Mascart, H., de Malafosse, B., Systèmes linéaires infinis associés à des séries entières, Accademia Peloritana dei Pericolanti di Messina, Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat. ***64*** *(1988), 25-29.*

[89] *Mascart, H., de Malafosse, B. : Propriétés des matrices symétriques infinies, Accademia Peloritana dei Pericolanti di Messina, Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat.* ***65*** *(1988), 43-47.*

[90] *Mascart, H., de Malafosse, B. : Extension de l'ensemble d'unicité d'un système linéaire infini, Seminarberichte Fachbereich Mathematik und Informatik, Hagen* ***34*** *(1989), 119-124.*

[91] *Medeghri, A., Schéma numérique pour une équation différentielle abstraite du second ordre de type élliptique, Maghreb Mathematical Review* ***5*** *n° 1 et 2, (1996), 81-94.*

[92] *Medhegri, A., de Malafosse, B., Numerical scheme for a complete abstract second order differential equation of elliptic type, Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara. Series A1 Mathematics and statistics* ***50*** *(2001), 43-54.*

[93] *Moricz F., On* $\Lambda-$*strong convergence of numerical sequences and Fourier series, Acta Math. Hung.,* ***54*** *(1989), 319-327.*

[94] *Moricz F., Rhoades B. E., An equivalent reformulation of summability by weighted mean methods, Linear Algebre Appl.,* ***349*** *(2002) 187-192.*

[95] *Mursaleen, Application of infinite matrices to Walsh fonctions, Demonstratio Math.,* ***27****, 2 (1994), 279-282.*

[96] *Okutoyi, J. T., On the spectrum of* C_1 *as operator on* bv*, Commun. Fac. Sci. Sci. Univ. Ank.,* ***41*** *(1992) 197-207.*

[97] *Petersen, G. M. and Baker Anne, C., Solvable infinite systems of linear equations, J. London Math. Soc.,* ***39*** *(1964) 501-510.*

[98] *Petersen, G. M., Regular matrix transformations, Mc Graw-Hill, 1966.*

[99] *A. Peyerimhoff, Lectures on Summability, Lecture Notes in Mathematics* ***107,*** *Springer Verlag, Heidelberg-Berlin-New York, 1960.*

[100] *Reade J. B., On the spectrum of the Cesàro operator, Bull. London Math. Soc.,* ***17*** *(1985) 263-267.*

[101] *Von Koch H. Sur les équations différentielles d'ordre infini, Ark. für Math., Astr. och Phy.* ***16,*** *n° 6, (1921),*

[102] *Wilansky, A., Summability through Functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies* ***85****, 1984.*

[103] *K. Zeller, W. Beekmann, Theorie der Limitierungsverfahren, Springer Verlag, Heidelberg-Berlin-New York, 1968.*

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse aux matrices infinies considérées comme des opérateurs linéaires dans des espaces de suites. On est ainsi conduit à l'étude des matrices de transformations et à la résolution de systèmes linéaires infinis ayant une infinité dénombrable d'équations et une infinité dénombrable d'inconnues. On donne des applications à la résolution de systèmes différentiels infinis où interviennent des matrices infinies remarquables. Ensuite, on s'intéresse à la résolution d'équations d'espaces de suites (EES) qui sont déterminées par une identité dont chaque terme est une somme ou un produit d'espaces de suites de type s_a et $s_{\phi(x)}$ où ϕ est une application de U^+ dans lui même et x est la suite inconnue. La résolution de telles équations consiste à déterminer l'ensemble de toutes les suites x qui satisfont l'équation. Puis, on étudie le spectre de l'opérateur de différence d'ordre un Δ dans de nouveaux espaces de suites et on considère enfin des applications directes de la théorie des matrices infinies à des problèmes d'optimisation où on présente des résultats donnés par B. de Malafosse et A. Yassine pour déterminer le nombre de chemins comportant N arcs et reliant deux points quelconques dans le plan à l'aide d'une matrice booléenne infinie de Toeplitz.

Mots-clés : *Matrice de transformation, équations d'espaces de suites, systèmes linéaires infinis, transformée de Laplace, spectre de l'opérateur de différence, matrice booléenne infinie, systèmes différentiels infinis.*

Abstract

In this thesis we deal with linear operators between sequence spaces. We are led to studying matrix transformations and solving linear systems of infinitely many equations in infinitely many unknowns. We give some applications to solving differential systems involving special matrices. Then we are interested in solving sequence space equations (SSE), which are identities in which each term is a sum or product of sets of sequences of the form s_a and $s_{\phi(x)}$ where ϕ is a map from U^+ into itself and x is the unknown sequence. Solving such equations is equivalent to determining the set of all sequences x which satisfy the equation. Then, we study the spectrum of the operator of the first difference Δ in the new sequences spaces s_a, s_a^0, $s_a^{(c)}$ and $\ell_p(a)$ where $1 \leq p < \infty$. Finally we consider direct applications of the theory of infinite matrices in optimization problems where we present some results given by B. of Malafosse and A. Yassine to determine the number of ways having N arcs and connecting any two points in the plane with an infinite Boolean Toeplitz matrix.

Keywords : *Matrix transformation, sequence space equations, infinite linear systems, Laplace transform, spectrum of the operator of first difference, infinite boolean matrix, infinite differential systems.*