



**HAL**  
open science

# Etude, conception et optimisation d'une plate-forme de mesure de micro et nano force par flottaison magnétique.

Ali Cherry

## ► To cite this version:

Ali Cherry. Etude, conception et optimisation d'une plate-forme de mesure de micro et nano force par flottaison magnétique.. Automatique / Robotique. Université de Franche-Comté, 2009. Français. NNT: . tel-00417240

**HAL Id: tel-00417240**

**<https://theses.hal.science/tel-00417240>**

Submitted on 15 Sep 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

*préparée au*

Département AS2M de l'institut FEMTO-ST (UMR CNRS 6174)

*présentée à*

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE  
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

*pour obtenir le*

GRADE DE DOCTEUR D'UNIVERSITÉ  
*spécialité Automatique et Informatique*

## Étude, conception et optimisation d'une plate- forme de mesure de micro et nano force par flottaison magnétique

*par*

**Ali Cherry**

(Master Signaux et Image en Biologie et Médecine)

Soutenue le 4 juin 2009 devant la commission d'examen :

Rapporteurs

**Hannes Bleuler** (Professeur à l'EPFL, Lausanne)

**Hervé Tanneguy Redarce** (Professeur à l'INSA, Lyon)

Examineurs

**Stéphane Régnier** (Professeur à l'université Paris 6, Paris)

**Jérôme Delamare** (Professeur à l'université Grenoble 1, Grenoble)

**David Marsaut** (Ingénieur de recherche chez STILL, Aix-en-Provence)

Directeurs de thèse

**Emmanuel Piat** (Maître de conférences HDR à l'ENSMM, Besançon)

**Joël Abadie** (Ingénieur de recherche CNRS, Besançon)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>La mesure de micro et nano force</b>	<b>7</b>
1.1	Principe de mesure de force passif . . . . .	7
1.2	Principe de mesure de force actif . . . . .	8
1.2.1	Problématiques de l'automatisation à l'échelle microscopique . .	9
1.2.2	Compréhension de la boucle d'asservissement d'un capteur de force	10
1.3	Micromanipulation et mesure de force . . . . .	11
1.3.1	Notion de micromonde et macromonde . . . . .	11
1.3.2	La micromanipulation . . . . .	12
1.3.3	Problèmes liés à la micromanipulation : exemple didactique . . .	13
1.3.4	La mesure de force pour la micromanipulation . . . . .	15
1.4	Nanotribologie et mesure de force . . . . .	16
1.4.1	Frottement . . . . .	16
1.4.2	Les tribomètres . . . . .	18
1.5	La mesure de force par capteur passif . . . . .	18
1.5.1	Les capteurs à petites déformations . . . . .	19
1.5.2	Les capteurs à grandes déformations ou grands déplacements . .	29
1.6	La mesure de force par capteur actif . . . . .	33
1.7	Le marché des capteurs de forces pour la micromanipulation . . . . .	37
1.8	Le marché de la nanotribologie . . . . .	38
1.9	Caractéristiques d'un capteur . . . . .	40
1.10	Conclusion . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Mécanisme de flottaison-magnétique</b>	<b>43</b>
2.1	Principe de mesure de force passif . . . . .	43
2.2	Lévitiation : définition et formes existantes . . . . .	44
2.3	Flottaison . . . . .	56
2.4	Configuration du <i>MF</i> M . . . . .	60
2.5	Etude statique du <i>MF</i> M . . . . .	60
2.5.1	Force et couple magnétiques . . . . .	60
2.5.2	Stabilité de la flottaison-magnétique . . . . .	68
2.5.3	Bilan de forces en régime permanent . . . . .	71
2.6	Principe de mesure de force actif . . . . .	73
2.6.1	Modélisation analytique des bobines . . . . .	74

2.6.2	Bilan de forces en présence des bobines $b$ . . . . .	78
2.6.3	Placement des bobines de commande . . . . .	79
2.6.4	Stabilité de la flottaison-magnétique asservie . . . . .	82
2.7	Conclusion . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Plate-forme de mesure de micro et nano forces</b>	<b>85</b>
3.1	Conception de la plate-forme . . . . .	85
3.2	Configuration particulière de la plate-forme . . . . .	87
3.3	Etude dynamique de la plate-forme . . . . .	90
3.3.1	Bilan des forces et moments . . . . .	90
3.3.2	Changement de repère . . . . .	91
3.3.3	Dynamique en translation . . . . .	94
3.3.4	Dynamique en rotation . . . . .	96
3.3.5	Simulateur du comportement dynamique . . . . .	96
3.4	Modèle dynamique linéaire de la plate-forme . . . . .	99
3.4.1	Changement de repère . . . . .	105
3.4.2	Position de la plate-forme . . . . .	105
3.4.3	Mise en équation linéaire de la dynamique de la plate-forme . . .	108
3.5	Configuration finale de la plate-forme . . . . .	111
3.6	Identification des paramètres du modèle linéaire de la plate-forme . . . .	111
3.7	Validation du modèle linéaire de la plate-forme . . . . .	115
3.8	Conclusion . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Asservissement de la plate-forme par placement de pôles</b>	<b>122</b>
4.1	Système à asservir . . . . .	122
4.2	Asservissement du $MFM$ . . . . .	124
4.2.1	Transmittances du $MFM$ . . . . .	124
4.2.2	Analyse temporelle du $MFM$ . . . . .	127
4.2.3	Commande par retour d'état . . . . .	128
4.3	Estimation de la grandeur d'entrée $F_x^{ext}$ . . . . .	129
4.3.1	Estimation bayésienne . . . . .	130
4.3.2	Estimation par déconvolution . . . . .	132
4.3.3	Régularisation de la déconvolution par introduction d'une infor- mation a priori sur la solution . . . . .	134
4.3.4	Déconvolution par commande optimale . . . . .	135
4.3.5	Déconvolution par placement de pôles . . . . .	136
4.4	Asservissement de la position du flotteur . . . . .	138
4.5	Simulation de la réponse de l'estimateur $B$ en boucle fermée . . . . .	149
4.6	Discrétisation de la commande . . . . .	155
4.7	Validation expérimentale . . . . .	155
4.8	Asservissement de la plate-forme . . . . .	157
4.9	Conclusion . . . . .	163



<b>5</b>	<b>Asservissement de la plate-forme par synthèse <math>H_2</math></b>	<b>165</b>
5.1	Estimation de la force externe $F_x^{ext}$ . . . . .	165
5.2	Réglage et optimisation du filtre de <i>Kalman</i> . . . . .	173
5.3	Mesure de force : mode actif . . . . .	182
5.4	Commande par synthèse $H_2$ . . . . .	183
5.4.1	Elaboration du modèle standard . . . . .	184
5.4.2	Détermination d'un reconstituteur d'état . . . . .	186
5.5	Asservissement en position du <i>MFM</i> . . . . .	189
5.5.1	Décomposition selon la commandabilité . . . . .	189
5.5.2	Rejet asymptotique de la partie non commandable . . . . .	190
5.6	Influence du choix de $T_c$ et $T_o$ sur les performances du système . . . . .	193
5.7	Simulation du régulateur $H_2$ . . . . .	196
5.8	Validation expérimentale . . . . .	199
5.9	Robustesse de la commande par synthèse $H_2$ . . . . .	202
5.10	Asservissement de la plate-forme . . . . .	205
5.10.1	Elaboration du modèle standard . . . . .	206
5.10.2	Simulation . . . . .	208
5.11	Discrétisation de la commande . . . . .	212
5.12	Conclusion . . . . .	215
<b>A</b>	<b>Modélisation d'un aimant permanent par une distribution de charges magnétiques : détail de calcul</b>	<b>224</b>
A.1	Calcul des matrices de préfiltre . . . . .	226
A.1.1	Matrice $H_o$ . . . . .	226
A.1.2	Matrice $H_c$ . . . . .	227
A.1.3	Matrice $H'_o$ . . . . .	227
	<b>Bibliographie</b>	<b>229</b>

# Table des figures

1.1	Capteur de force passif . . . . .	8
1.2	Mesure par la méthode dite du «zéro» . . . . .	8
1.3	Exemple de courbe de réponse statique pour un capteur non linéaire, avec un grandeur d'opposition $u(t)=0$ . . . . .	9
1.4	Synthèses des problématiques de la commande des systèmes agissant dans le micromonde [1]. . . . .	10
1.5	Capteur-actionneur de force . . . . .	10
1.6	Capteur asservi . . . . .	11
1.7	Représentation sphère-plan . . . . .	14
1.8	Evolution des forces en fonction du rayon de la sphère [2] . . . . .	15
1.9	Définition de la force tangentielle $F_t$ . . . . .	17
1.10	Evolution de la force de frottement au cours du temps : (a) glissement sans <i>stick – slip</i> ; (b) glissement avec <i>stick – slip</i> . . . . .	17
1.11	Tribomètre pion-plan . . . . .	18
1.12	Principe de mesure de forces avec un <i>AFM</i> . . . . .	20
1.13	Effet de la direction de sollicitation sur la réponse d'un <i>AFM</i> . . . . .	20
1.14	Configuration permettant d'augmenter la précision de mesure de l' <i>AFM</i> . . . . .	21
1.15	Déplacement de la pointe de l' <i>AFM</i> à la surface d'un substrat comportant trois zones (1, 2 et 3) de natures différentes. La pointe est soumise à une torsion d'autant plus importante que le frottement pointe-surface est élevé (a). En (b), on peut voir le signal enregistré, montrant l'évolution de la force latérale pendant le déplacement de la pointe . . . . .	22
1.16	Structure d'un capteur de force <i>PVDF</i> à 2 axes . . . . .	23
1.17	Capteur piézorésistif intégré . . . . .	25
1.18	(a) Capteur de micro forces tri-axial, (b) placement des jauges sur le capteur . . . . .	26
1.19	Condensateur à deux armatures planes. . . . .	26
1.20	Configuration de mesure de forces. . . . .	27
1.21	Capteur de forces reposant sur un principe électrostatique. . . . .	28
1.22	Capteur de micro force et couple multi-axes reposant sur un principe électrostatique. . . . .	28
1.23	Configuration du capteur . . . . .	29
1.24	Capteur de forces à grandes déformation . . . . .	30
1.25	Pente de la caractéristique force-déplacement. . . . .	31
1.26	Prototype de capteur de micro forces par lévitation diamagnétique. . . . .	32

1.27	Tige en lévitation diamagnétique . . . . .	33
1.28	Caractéristique (théorique) force-déplacement du capteur . . . . .	34
1.29	Station de caractérisation d'une raideur mécanique . . . . .	35
1.30	Principe de caractérisation d'une raideur mécanique . . . . .	35
1.31	Shéma diagramme de l'appareil à force de surface . . . . .	36
1.32	shéma diagramme du système bouclé . . . . .	36
1.33	Configuration de l'accéléromètre. . . . .	37
1.34	<i>CSM</i> Nano Tribomètre . . . . .	39
2.1	Principe de mesure de force . . . . .	43
2.2	Lévitation acoustique . . . . .	45
2.3	Lévitation électrostatique (vue de côté et de haut) . . . . .	46
2.4	Lévitation aérodynamique. . . . .	47
2.5	Bilan des forces extérieures appliquée par une source laser. . . . .	48
2.6	Bilan des forces extérieures dans le cas de deux sources laser. . . . .	49
2.7	Mise en évidence de l'instabilité par approche expérimentale. . . . .	50
2.8	Lévitation des corps ferromagnétiques [3]. . . . .	52
2.9	Manifestation de l'effet diamagnétique à l'échelle macroscopique [3]. . .	53
2.10	Manifestation de l'effet diamagnétique à l'échelle microscopique [3]. . . .	53
2.11	Configurations de base permettant d'assurer une lévitation diamagnétique stable [3]. . . . .	54
2.12	Vue globale du capteur de forces [3]. . . . .	55
2.13	Configuration des aimants adoptée pour obtenir des lignes de champ d'induction magnétique quasi-parallèles [3]. . . . .	56
2.14	Simulation des lignes de champ d'induction magnétique produites par la configuration des aimants $M_1$ [3]. . . . .	56
2.15	Bilan des forces de pression. . . . .	57
2.16	Principe de flottaison. . . . .	59
2.17	Mécanisme de flottaison-magnétique : (a) vue de côté (b) vue du dessus. . . . .	59
2.18	Orientation aléatoire des moments magnétiques. . . . .	61
2.19	Alignement des moments magnétiques avec le champ. . . . .	61
2.20	Modélisation d'un aimant permanent par distribution de charges magnétiques. . . . .	62
2.21	Induction magnétique créée par une distribution de charges magnétiques. . . . .	63
2.22	Relevé expérimental et simulé du champ magnétique produit par un aimant permanent (5x5mm) suivant $\vec{z}$ pour différents angles . . . . .	64
2.23	Discrétisation du volume de l'aimant $M$ en plusieurs éléments de petit volume $dV$ . . . . .	66
2.24	Relevé expérimental et simulé du champ magnétique $B_z$ produit par l'aimant $M$ suivant $z$ . . . . .	67
2.25	Force magnétique produite par les aimants permanents $p$ suivant $\vec{x}$ . . . . .	68
2.26	Bilan de forces suivant $\vec{z}$ . . . . .	69
2.27	Evaluation de $F_z^{mag} = F_z^{att} + F_z'^{att}$ . . . . .	70
2.28	Evaluation de la force totale $F_t$ suivant $\vec{z}$ . . . . .	70
2.29	Champ de forces produit par $p$ dans le plan ( $xOy$ ) et pour $z = 0$ . . . . .	71

2.30	Bilan de forces agissant sur la partie flottante pour différentes positions.	72
2.31	Système d'asservissement . . . . .	74
2.32	Spire circulaire . . . . .	75
2.33	Réponses analytique et simulée du champ $B_z^{elec}$ de la bobine suivant $\vec{x}$ (à $z = 1cm$ ) . . . . .	76
2.34	Validation du modèle analytique de la bobine par des mesures expérimentales	77
2.35	Force électromagnétique $F_x^{elec}$ produite par les bobines $b$ suivant $\vec{x}$ pour différentes valeurs de $i$ . . . . .	79
2.36	Position optimale des bobines de rappel . . . . .	80
2.37	Asservissement à la position d'équilibre stable $S$ . . . . .	80
2.38	Symétrie de la force électromagnétique pour un changement de signe du courant $i$ . . . . .	81
2.39	Courbe de force électromagnétique $F_x^{elec}(S)$ de la bobine sur le point d'équilibre stable $S$ pour différentes valeurs de courant $i$ . . . . .	81
2.40	Evaluation de la force totale $\vec{F}^T$ suivant $\vec{x}$ . . . . .	82
2.41	Champ de forces magnétique et électromagnétique dans le plan $(xOy)$ pour $i = 0.4A$ , $i = 0A$ et $i = -0.4A$ . . . . .	83
3.1	Représentation schématique de la plate-forme (vue de côté) . . . . .	86
3.2	Représentation schématique de la plate-forme (vue du dessus) . . . . .	86
3.3	Configuration particulière de la plate-forme (vue du dessus) . . . . .	87
3.4	Repère global $R_o$ et repères locaux des aimants porteurs . . . . .	89
3.5	Repère global $R_o$ et repères locaux des bobines de commande . . . . .	89
3.6	repérage de la plate-forme (représentée par un parachutiste) dans l'espace.	92
3.7	Modèle de comportement global de la plate-forme suivant $6ddl$ . . . . .	96
3.8	Modèle dynamique. . . . .	97
3.9	Modèle magnétique. . . . .	98
3.10	Schéma bloc détaillé du modèle de comportement global de la plate-forme suivant $6ddl$ . . . . .	98
3.11	Interface graphique du modèle de comportement global de la plate-forme suivant $6ddl$ . . . . .	99
3.12	Asservissement de la plate-forme dans le plan $(xOy)$ à la position «zéro».	100
3.13	Champ de forces produit par les aimants porteurs $P_i$ dans le plan $(xOy)$ .	102
3.14	Force magnétique $F_x^{mag}$ en fonction de $y$ pour différents valeurs de $x$ . . .	103
3.15	Champ de forces produit par les bobines $b_i$ dans le plan $(xOy)$ . . . . .	104
3.16	Configuration élémentaire avec un seul capteur confocal (vue du dessus)	106
3.17	Configuration particulière des capteurs confocaux (vue du dessus). . . .	107
3.18	Configuration finale de la plate-forme de mesure de micro et nano force.	111
3.19	Modèle $CAO$ de la plate-forme finale. . . . .	112
3.20	Prototype expérimental du mécanisme de flottaison magnétique ( $MFM$ ).	112
3.21	Force magnétique produite par les aimants permanents $p$ suivant $\vec{x}$ . . .	113
3.22	Banc expérimental pour l'enregistrement de la réponse libre . . . . .	114
3.23	Réponse libre du capteur suivant $\vec{x}$ . . . . .	115
3.24	Position des bobines de commande . . . . .	116

3.25	Réponses suivant $\vec{x}$ et $\psi$ des modèles analytiques linéaire ( $ML$ ) et non-linéaire ( $MNL$ ) à un échelon de courant $i_1 = 0.4A$ . . . . .	117
3.26	Réponses suivant $\vec{x}$ des deux modèles $ML$ et $MNL$ à une rampe de courant $i_1$ . . . . .	118
3.27	Réponses suivant $\vec{x}$ et $\psi$ des modèles analytiques linéaire ( $ML$ ) et non-linéaire ( $MNL$ ) à un échelon de force $F_x^{ext} = 20 \mu N$ . . . . .	119
3.28	Réponses suivant $\vec{x}$ et $\psi$ des modèles analytiques linéaire ( $ML$ ) et non-linéaire ( $MNL$ ) à un échelon de courant $i_1 = 2A$ . . . . .	120
3.29	Réponses suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des modèles à un échelon de courant $i_1 = 0.4A$ appliqué à l'instant $t = 0s$ et deux échelons de courant $i_2 = i_3 = 0.4A$ appliqués à l'instant $t = 5s$ . . . . .	121
4.1	Système à asservir. . . . .	123
4.2	Mécanisme de flottaison magnétique $MFM$ . . . . .	124
4.3	Bloc diagramme du $MFM$ . . . . .	125
4.4	Position des pôles du système en boucle ouverte . . . . .	127
4.5	Réponse du système à un échelon unitaire de force $F_x^{ext}$ . . . . .	128
4.6	Réponse du système à un échelon unitaire de courant $i$ . . . . .	129
4.7	Le problème inverse associé à la convolution ou à l'estimation bayésienne. . . . .	132
4.8	Instabilité et non unicité de la solution de l'opération de déconvolution [4]. . . . .	133
4.9	Principe de la méthode de déconvolution par la commande optimale . . . . .	135
4.10	Estimation de $F_x^{ext}$ via une commande par retour d'état . . . . .	137
4.11	Estimateur en mode passif ( $i=0$ ). . . . .	137
4.12	Asservissement de la position du flotteur . . . . .	139
4.13	Emplacement dans le plan- $s$ des pôles du système en boucle ouvert et fermé. . . . .	140
4.14	Erreur statique sur l'estimation de la force externe à l'aide de l'estimateur $A$ . . . . .	141
4.15	Erreur statique sur la position $x$ du flotteur pour une consigne $x_c=0$ . . . . .	141
4.16	Suppression de l'erreur statique de l'estimation en utilisant le courant $i$ . . . . .	142
4.17	Estimateur en mode actif ( $i \neq 0$ ). . . . .	144
4.18	Configuration du système en boucle ouverte. . . . .	145
4.19	Réponse $x(t)$ simulée et estimée du système en boucle ouverte à un échelon de force de $20\mu N$ . . . . .	145
4.20	Echelon de forces $F_x^{ext}(t)$ simulé et estimé. . . . .	146
4.21	Réponse $x(t)$ simulée et estimée du système en boucle ouverte à une force aléatoire. . . . .	147
4.22	Force aléatoire simulée et estimée . . . . .	147
4.23	Force $F_x^{ext}(t)$ simulée avec un bruit de mesure et force $\hat{F}_x^{ext}(t)$ estimée bruitée . . . . .	148
4.24	Réponse $x(t)$ du flotteur simulée et estimée bruitée . . . . .	148
4.25	Force déterministe $F_x^{ext}(t)$ simulée avec un bruit de mesure et force $\hat{F}_x^{ext}(t)$ estimée bruitée . . . . .	149
4.26	Force $F_x^{ext}(t)$ simulée avec un bruit de mesure et force $\hat{F}_x^{ext}(t)$ estimée bruitée . . . . .	150

4.27	Réponse $x(t)$ du flotteur simulée et estimée bruitée . . . . .	150
4.28	Configuration du système bouclé. . . . .	151
4.29	Réponse $x(t)$ simulée et estimée du système bouclé à un échelon de force de $20\mu N$ . . . . .	151
4.30	Echelon de force $F_x^{ext}(t)$ simulé et estimé. . . . .	152
4.31	Courant $i$ dans les bobines $b$ . . . . .	153
4.32	Suppression des oscillations sur le tracé de la force estimée à l'aide d'un filtre passe-bas. . . . .	153
4.33	Système bouclé avec compensation de l'erreur statique sur le déplacement	154
4.34	Réponse $x(t)$ simulée et estimée à un échelon de force . . . . .	155
4.35	Force $F_x^{ext}(t)$ simulée et estimée . . . . .	156
4.36	Système de manipulation . . . . .	157
4.37	Force mesurée et déplacement du flotteur . . . . .	158
4.38	Asservissement de la plate-forme . . . . .	158
4.39	Echelon de couple simulé et estimé bruité . . . . .	159
4.40	Rotation de la plate-forme autour de $z$ . . . . .	159
4.41	Echelon de force simulé et estimé . . . . .	160
4.42	Déplacements de la plate-forme suivant $y$ . . . . .	161
4.43	Echelon de force $F_y^{ext}$ simulé et estimé pour différentes valeurs de $F_x^{ext}$ .	161
4.44	Déplacements de la plate-forme dans le plan $(xOy)$ pour $F_y^{ext} = 10 \mu N$ et pour différentes valeurs de $F_x^{ext}$ . . . . .	162
5.1	Système dynamique. . . . .	166
5.2	Evolution de la variance donnée par le modèle de connaissance <i>a priori</i> de $\underline{F}_x^{ext}(t)$ . . . . .	169
5.3	Processus de Wiener générateur de la force externe. . . . .	170
5.4	Force externe simulée à l'aide du modèle $\underline{x}^{ext} = \underline{w}_F$ pour $Q_F = 10^{-18} N^2 s$ . .	171
5.5	Estimation de $F_x^{ext}$ par filtrage de <i>Kalman</i> . . . . .	171
5.6	Organisation du filtre. . . . .	172
5.7	Simulation de la réponse du filtre à une force externe générée par le processus générateur de la figure 5.3. . . . .	173
5.8	Force simulée et estimée avec $Q_F$ connu. . . . .	174
5.9	Déplacement simulé et estimé du flotteur avec $Q_F$ connu. . . . .	174
5.10	Réponse du filtre avec $Q_{\hat{F}} = 0.01Q_F$ . . . . .	175
5.11	Réponse du filtre avec $Q_{\hat{F}} = 10Q_F$ . . . . .	176
5.12	Réponse du filtre avec $Q_{\hat{F}} = 100Q_F$ . . . . .	176
5.13	Force $\hat{F}_x^{ext}(t)$ de $20 nN$ estimée par le filtre Kalman et force $\hat{F}_x^{ext}(t)$ estimée à partir de la caractéristique statique du capteur force/déplacement. .	177
5.14	Réponse $x(t)$ du flotteur simulée et estimée. . . . .	178
5.15	Réponse du filtre à un échelon de force de $10 nN$ . . . . .	178
5.16	Influence de $Q_{\hat{F}}$ sur la rapidité et la qualité de l'estimation. . . . .	179
5.17	Influence de $Q_{\hat{F}}$ sur la rapidité et la qualité de l'estimation. . . . .	179
5.18	Présence d'une erreur de poursuite dans la force estimée. . . . .	180

5.19	Estimation d'un profil déterministe de force avec une amplitude maximale de $10 nN$ . . . . .	181
5.20	Estimation d'un profil déterministe de force avec une amplitude maximale de $1 nN$ ( $Q_{\hat{F}} = 3 \times 10^{-19} N^2 s$ ). . . . .	181
5.21	Estimation d'un profil déterministe de force avec une amplitude maximale de $1 nN$ ( $Q_{\hat{F}} = 2.10^{-20} N^2 s$ ). . . . .	182
5.22	asservissement . . . . .	183
5.23	Loi de commande finale . . . . .	187
5.24	Influence de $T_c$ sur l'estimation de la force. . . . .	194
5.25	Influence de $T_c$ sur la réponse du système bouclé. . . . .	195
5.26	Rapport $IR$ (%) en fonction de $F_x^{ext}$ pour différents valeurs de $T_o$ . . . . .	196
5.27	Rapport $IR$ (%) en fonction de $F_x^{ext}$ . . . . .	197
5.28	Influence de $T_o$ sur l'estimation de la force. . . . .	197
5.29	Influence de $T_o$ sur la réponse du système bouclé. . . . .	198
5.30	Courant $i$ dans les bobines de commande. . . . .	198
5.31	Echelon de force de $20 \mu N$ simulé et estimé. . . . .	199
5.32	Réponse $x(t)$ simulée et réponse $\hat{x}(t)$ estimée du système bouclé suite à l'application d'un échelon de force de $20 \mu N$ . . . . .	200
5.33	Force externe simulée et estimée . . . . .	200
5.34	Force externe simulée et estimée bruitée . . . . .	201
5.35	Force externe simulée et estimée atténuée . . . . .	201
5.36	Force mesurée et déplacement du flotteur . . . . .	202
5.37	Influence de la connaissance des paramètres du modèle sur la réponse du système bouclé. . . . .	203
5.38	Influence de la connaissance des paramètres du modèle sur l'estimation de la force. . . . .	204
5.39	Influence de la connaissance de $K^e$ sur l'estimation de la force. . . . .	204
5.40	asservissement . . . . .	207
5.41	Loi de commande finale . . . . .	208
5.42	Echelon de couple de $10 nNm$ simulé et estimé . . . . .	209
5.43	Rotation de la plate-forme autour de $z$ . . . . .	209
5.44	Echelons de force $F_x^{ext}$ et $F_y^{ext}$ simulés et estimés. . . . .	210
5.45	Déplacements de la plate-forme suivant $x$ et $y$ . . . . .	211
5.46	Echelon de force simulé et estimé . . . . .	211
5.47	Déplacements de la plate-forme suivant $y$ . . . . .	212
5.48	Echelon de force $F_y^{ext}$ simulé et estimé pour différentes valeurs de $F_x^{ext}$ . . . . .	213
5.49	Déplacements de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ) pour $F_y^{ext} = 10 \mu N$ et pour différentes valeurs de $F_x^{ext}$ . . . . .	213
5.50	Les étapes de synthèse d'un correcteur discret . . . . .	214
5.51	Filtrage numérique des efforts perturbateurs retardés. . . . .	221
5.52	Principe d'un nanotribomètre avec la plate-forme par flottaison active. . . . .	222
A.1	Représentation d'un aimant permanent par une distribution surfacique de charges magnétiques. . . . .	224

# Remerciements

Ce travail représente l'aboutissement de trois années de formation au métier de la recherche, effectuées à l'institut FEMTO-ST, UMR 6174, et plus précisément au département Automatique et Systèmes Micro-Mécatronique (AS2M).

On ne peut pas passer à la page suivante sans remercier toutes les personnes qui m'ont aidé au cours de mon travail de thèse.

Mes remerciements s'adressent en premier à M. Nicolas Chaillet, Professeur à l'Université de Franche-Comté et directeur du département Automatique et Systèmes Micro-Mécatronique (AS2M) de l'institut FEMTO-ST de Besançon, qui m'a permis, en mettant à ma disposition tous les moyens nécessaires, de mener à bien ces travaux de recherche.

Je tiens à exprimer mon infini gratitude à mes directeurs de thèse, M. Emmanuel Piat, maître de conférences à l'ENSMM, ainsi qu'à M. Joël Abadie, ingénieur de recherche CNRS au département Automatique et Systèmes Micro-Mécatronique, pour m'avoir aiguillé dans ma recherche. Par leur gentillesse et leur disponibilité, ils ont grandement contribué à rendre ce travail agréable.

Je ne saurais oublier, personnels permanents et doctorants, qui ont durant ces dernières années contribué à créer un atmosphère de travail agréable et conviviale.

J'adresse aussi mes remerciements à tous ceux qui ont contribué à enrichir mon travail de thèse, par leurs travaux, leurs idées, leurs conseils. Enfin, à tous ceux qui d'une façon ou d'une autre m'ont aidé à la réalisation de cette thèse.

Mes pensées vont finalement à l'ensemble de mes proches. Leur amour, leur confiance et leur soutien m'ont aidé à surmonter bien des obstacles. Ce travail est autant le mien que le leur.

Pour finir, un grand merci à la personne qui m'a donné la force intérieure d'aller au bout de cette aventure et ces quelques mots ne suffiront jamais à exprimer tout ce que je lui dois : encore merci.



Je cherche le chemin  
J'entrouvre une porte  
La referme mais en vain  
Libère l'immense cohorte  
D'une infinité de chemins.

*À mon père, parti trop tôt,  
À ma mère*

# Introduction

Ce mémoire, construit autour du thème de la mesure de microforce, s'inscrit dans la thématique plus générale du département AS2M<sup>1</sup> de l'Institut FEMTO-ST (UMR CNRS 6174) qui consiste à proposer des outils technologiques capables d'effectuer des tâches automatisées de micro-assemblage et de micromanipulation. En effet, la manipulation entièrement automatisée d'objets de taille micrométrique, sur au moins un axe dimensionnel, est une problématique non encore résolue. Ces manipulations nécessitent de mettre en oeuvre des boucles perception-décision-action adaptées au contexte particulier de la microrobotique. La maîtrise de ces boucles passe notamment par le choix pertinent des grandeurs physiques et des paramètres du système à observer ainsi que par l'élaboration de dispositifs technologiques capable de les observer. Cette observation doit de plus être conduite avec une précision/incertitude compatible avec la robustesse des algorithmes de commande des micro-actionneurs.

Parmi les grandeurs physiques qu'il est impératif de pouvoir observer, on peut citer les forces présentes à l'échelle micrométrique ou nanométrique. Du fait du facteur d'échelle, le comportement dynamique des micro-objets n'est que faiblement gouverné par leur masse (force volumique). En revanche, ce comportement est fortement gouverné par les effets de surface qui correspondent aux forces d'adhésion (tension de surface, forces électrostatiques, forces de Van Der Waals). Ainsi, ces forces surfaciques, dont les effets sont négligables à l'échelle macroscopique, modifient de façon drastique la mécanique du contact et les interactions entre les différents micro-objets. Dans ces conditions, la compréhension et la prédiction du comportement dynamique des micro-objets nécessitent, au minimum, d'une part la connaissance de leurs positions dans le micromonde et d'autre part la connaissance du gradient des forces qui s'exercent sur eux.

Par le biais du micro-assemblage, l'équipe SAMMI<sup>2</sup> du département AS2M est également concernée par la production d'objets de petites dimensions tels que les micro-systèmes hybrides qui sont assemblés à partir de composants souvent monolithiques dont les dimensions ont de plus en plus tendances à devenir micrométriques sur au moins un axe. Le succès de ces micro-assemblages passe notamment par la caractérisation des propriétés mécaniques des composants, car les stratégies d'assemblage utilisent notamment

---

<sup>1</sup>Automatique et Systèmes Micro-Mécatroniques

<sup>2</sup>Systèmes Automatisés de Micromanipulation et Micro-assemblage

la compliance des micro-objets, mais aussi par l'utilisation de surfaces fonctionnalisées. Cette caractérisation est nécessaire dès l'instant où la structure de ces produits est complexe (par exemple présence de gradients de propriétés mécaniques dans les microstructures), ce qui induit généralement des dispersions au moment de la production de chaque composant, des problèmes de contrôle-qualité ainsi que des problèmes d'assemblage des différents éléments... La caractérisation expérimentale des propriétés mécaniques de ces composants nécessitent d'utiliser des capteurs de forces adaptés. D'un point de vue plus général, la mesure des interactions mécaniques intervenant à cette échelle ouvre la voie à la physique du micromonde dans laquelle il reste beaucoup d'actions de recherche à mener. En effet, même s'il existe des modèles performants permettant de comprendre les phénomènes à l'échelle atomique, les modèles dynamiques utilisés dans le micro restent approximatifs et peu fiables. La mesure expérimentale de micro et nano force doit naturellement mener à la compréhension fine des interactions entre objets micrométriques, ainsi qu'à la mise au point de modèles servant à les prédire.

La mesure de micro et nano force trouve aussi ses applications dans le domaine de la biocaractérisation. L'étude mécanique de la cellule constitue un enjeu intéressant dans le cadre de la compréhension et l'analyse des mécanismes biophysiques et chimiques car il a été démontré que certaines cellules vivantes répondent à des stimuli mécaniques en modifiant leurs structures internes, ce qui engendre en retour des modifications de leur comportement mécanique. Ce type d'étude pourrait permettre une meilleure compréhension des corrélations entre les facteurs mécaniques et certaines fonctions biologiques.

Outre le domaine de la microrobotique, la mesure de force est aussi indispensable en nanotribologie (étude et contrôle des forces de frottement à l'échelle du nanonewton). En effet, la miniaturisation des systèmes mécatroniques (micro-pompes, micro-engrenage, etc.) s'accompagne d'une augmentation considérable du rapport surface sur volume et par conséquent d'une augmentation des énergies dissipées par frottement aux liaisons mécaniques. Il est donc important de pouvoir mesurer les forces de frottement à l'échelle nanométrique afin d'optimiser le choix des matériaux et des traitements de surface dans les applications microtechniques. Notons que dans le domaine des revêtements et de la fonctionnalisation des surfaces à l'échelle micro ou nanométrique, on cherche, selon les besoins applicatifs, à diminuer ou au contraire à augmenter les efforts de friction (frottements) entre deux surfaces antagonistes. Il convient alors de pouvoir étudier ces efforts pour des rugosités allant jusqu'à l'échelle nanométrique.

Actuellement les principes technologiques qui permettent une mesure de micro ou nano force sont en nombre réduit et l'étalonnage précis des dispositifs associés est souvent un problème du fait de l'absence d'étalon de mesure à ces échelles de force. Quel que soit le principe utilisé, la mesure de force est un processus indirect qui nécessite :

1. d'observer l'effet de la force,
2. de déduire de cette observation la force en question.

L'effet de la force consiste toujours en un déplacement ou une déformation d'une struc-

ture mécanique que l'on appelle corps d'épreuve. Cet effet mécanique induit à son tour par causalité d'autres effets comme par exemple une variation de résistance électrique, un déplacement de charges, une déviation de faisceau laser qui vont servir à observer l'effet de la force. Un capteur de force est donc un transducteur dont l'entrée est la force et la sortie l'effet de la force. Connaissant l'effet de la force (la sortie) il faut donc pouvoir remonter à la force (l'entrée). Si la partie mécanique du transducteur possède une dynamique dont le régime transitoire influe fortement sur la sortie, il convient alors de déconvoluer le signal de sortie pour pouvoir remonter proprement au signal d'entrée.

Cette problématique de déconvolution constitue la principale *problématique scientifique* développée dans ce mémoire. Cette problématique a été abordée sous l'angle de l'automatique par le biais de l'observation d'un état étendu qui permet d'estimer l'entrée inconnue grâce à un filtrage de Kalman. Elle a été développée dans le cadre d'un capteur de force passif et actif.

En raison des échelles de force considérées ainsi que des résolutions de mesure attendues, la conception et la réalisation des capteurs de micro et nano force se heurtent à de nombreuses difficultés. Solutionner ces difficultés en proposant de nouveaux concepts de réalisation constitue un des enjeux actuels de la microrobotique. Ce mémoire explore cette *problématique technologique* en investiguant un principe novateur de mesure de micro et nano forces. Plutôt que d'utiliser un corps d'épreuve microscopique comme c'est habituellement le cas pour les capteurs de micro et nano force, ce principe utilise un corps d'épreuve qui est une masse sismique flottante macroscopique. Cette masse sismique est stabilisée passivement dans l'espace grâce à l'action conjuguée de la poussée d'archimède et de ressorts magnétiques. Elle se présente donc sous la forme d'une plate-forme macroscopique de quelques centimètres carrés sur laquelle viennent s'exercer les efforts à mesurer. Cette configuration permet de mesurer les forces dans le plan horizontal et le couple selon l'axe vertical. La raideur du capteur est par ailleurs ajustable et au moins comparable aux raideurs classiquement obtenues avec les microscopes à force atomique. La particularité de ce capteur est qu'il possède à la fois une grande sensibilité et une grande plage de mesure ce qui lui permet de mesurer des efforts allant du nanonewton à quelques dizaines voir centaines de micronewton. La dynamique de la masse sismique qui est du type masse-ressort-amortisseur limite cependant la bande passante du capteur à quelques hertz du fait de la masse élevée de la plate-forme macroscopique.

Le travail présenté dans ce mémoire consiste à montrer la faisabilité et la pertinence des choix qui ont été fait pour la conception de ce capteur de microforce, au travers de la réalisation d'un prototype expérimental élémentaire qui a permis la construction d'un modèle numérique réaliste du comportement du capteur final. La réalisation de ce dernier est actuellement en cours, dans le cadre du projet ANR *STIL $\mu$ FORCE* de l'appel PSIROB 2007. Démarré en février 2008, ce projet porte sur la phase de recherche et développement de deux stations de mesure de micro et nano forces de manière à ce

que l'industriel STIL SA<sup>3</sup> se rende maître de ces nouvelles technologies pour pouvoir à terme les commercialiser et ainsi élargir son domaine d'activité aux marchés naissants de la mesure de micro et nano forces. Ce mémoire s'inscrit donc aussi dans le contexte d'une *problématique industrielle* qui, bien qu'en arrière fond dans ce travail, impose notamment de pouvoir garantir à terme un étalonnage précis des capteurs, une simplicité d'utilisation et une déclinaison du concept de mesure en une gamme de capteurs modulaires ayant des résolutions et des plages de mesures complémentaires.

Ce manuscrit se divise en cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous faisons un état de l'art des dispositifs actuels de mesure de micro et nano forces. Nous présentons les difficultés liées à cette mesure ainsi que les facteurs limitant les performances des capteurs. L'énumération de ces facteurs sert de base à notre démarche de conception qui est abordée dans le deuxième chapitre. Ce dernier présente les concepts et les éléments fondamentaux indispensables à la compréhension de notre plate-forme de mesure de force, étayée par la réalisation d'un démonstrateur réel, montrant le mécanisme de flottaison magnétique élémentaire. Dans le troisième chapitre, nous détaillons la conception de la plate-forme par le biais de sa modélisation et de son optimisation. Nous y développons notamment le choix des divers éléments qui la constituent ainsi que la configuration particulière adoptée. Le modèle dynamique non linéaire de la plate-forme et sa linéarisation sont présentés. Les deux derniers chapitres sont consacrés à la problématique de la déconvolution de la sortie afin d'estimer les efforts inconnus qui excitent le corps d'épreuve. Cette problématique est abordée via la synthèse d'un observateur des efforts inconnus. Cette synthèse a été développée pour une plate-forme de mesure passive et active. Pour la plate-forme active, deux types de commande sont abordés. Une commande par retour d'état dans le chapitre 4 et une commande robuste par synthèse  $H_2$  dans le chapitre 5. Grâce à son formalisme très simple, la commande par retour d'état permet de facilement comprendre le comportement dynamique du système bouclé et notamment les effets perturbateurs de la commande sur l'observateur des entrées inconnues. La commande par synthèse  $H_2$  permet quant à elle de minimiser ces effets perturbateurs tout en répondant aux diverses exigences qui sont les nôtres concernant les performances dynamiques, les performances statiques, la faible sensibilité aux bruits (de mesure et d'état) ainsi que la robustesse. Par ailleurs elle offre à la fois des performances et une simplicité de réglage qui la rend compatible avec une future utilisation dans un contexte industriel.

---

<sup>3</sup>L'entreprise STIL implantée à Aix en Provence propose ses compétences et son savoir faire dans le domaine de l'instrumentation optique à haute performance. Elle a inventée le principe de la mesure de distance par capteur optique confocal chromatique et ces capteurs sont utilisés sur les deux plate-forme de mesure de force du projet *STIL $\mu$ FORCE*.

# Chapitre 1

## La mesure de micro et nano force

*Récemment, la mesure de force à l'échelle microscopique, voire nanoscopique (quelques dizaines de nanonewtons à quelques centaines de micronewtons), est devenue un défi pour des nombreuses applications, principalement dans les domaines de la micromanipulation, du micro-assemblage des microsystèmes hybrides, de la biomanipulation ainsi que de la caractérisation des surfaces. Parmi ces domaines, nous avons choisi de nous intéresser dans ce chapitre à l'importance que revêt la mesure de force au sein de deux problématiques formant le coeur de nos travaux : la micromanipulation en microrobotique et la nanotribologie en caractérisation des surfaces. Dans un premier temps, nous présentons les deux principes de mesure de force passif et actif. Nous cernerons, par la suite, les problématiques de la mesure de force imposées par l'effet d'échelle et les solutions actuelles adoptées relatives aux champs applicatifs de ce type de mesure ainsi que les facteurs limitant leurs performances.*

### 1.1 Principe de mesure de force passif

La force  $\vec{F}(N)$  appliquée à une masse  $m(kg)$  est définie par la loi fondamentale de la dynamique :  $\vec{F} = m\vec{\gamma}$  où  $\vec{\gamma} (m.s^{-2})$  est l'accélération résultante. Cette relation est utilisée pour la détermination de l'accélération à partir de la connaissance de la force plutôt que pour la détermination de la force à partir d'une mesure d'accélération[5].

Tout capteur de force est constitué d'un corps d'épreuve soumis à une force inconnue et subissant de ce fait une déformation ou d'une masse sismique soumise à une force inconnue et subissant de ce fait un déplacement (voir figure 1.1).

Si on se focalise sur la déformation, il y a proportionnalité dans le domaine élastique entre déformation et force (Loi de Hooke). De ce fait, la déformation et donc la force peuvent être mesurées :

- directement à l'aide de jauges extensométrique ou de capteurs de déplacement,
- indirectement, si l'une des propriétés électriques du matériau constituant le corps d'épreuve dépend de sa déformation : capteur capacitif, matériau piézoélectrique ou magnétostrictif.

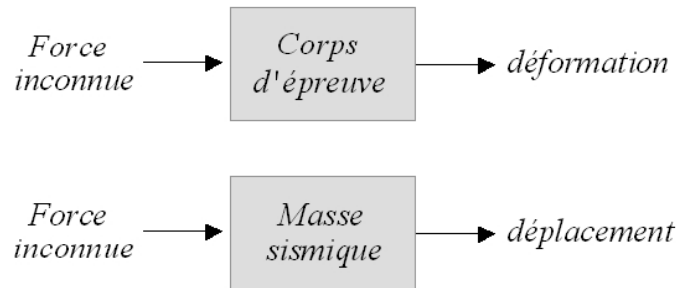


FIG. 1.1 – Capteur de force passif

Dans le micromonde, la mesure de déformation du corps d'épreuve ou de déplacement de la masse sismique doit être conduite de manière à ne pas induire d'effet en retour sur la force elle-même, ce qui nécessite notamment d'utiliser des techniques de mesure sans contacts afin d'éviter les frottements secs.

## 1.2 Principe de mesure de force actif

Il est également possible de mesurer des forces sans déformation ou sans déplacement, grâce à un contrôle actif utilisant des forces de rappel de type électromagnétique ou électrostatique. Ce type de capteur met en oeuvre le principe de mesure par la méthode dite de «zéro» (balance de Roberval) [6], illustrée sur la figure 1.2.

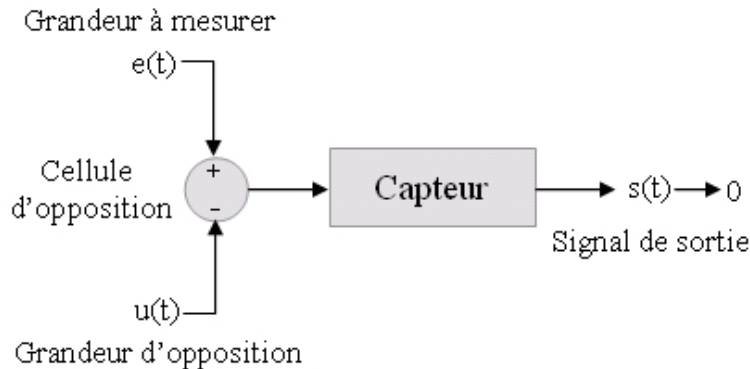


FIG. 1.2 – Mesure par la méthode dite du «zéro»

Dans ce type de mesure, un capteur est fortement sensible à la grandeur à mesurer  $e(t)$  et on dispose d'un moyen (entrée  $u(t)$ ) pour s'opposer à l'action de la grandeur  $e(t)$  sur la sortie du capteur  $s(t)$ . Cette technique s'applique à une classe particulière de capteur, que l'on peut appeler *capteur – actionneur* [6] qui sont des capteurs qui nécessitent un asservissement de la grandeur d'opposition pour fonctionner. On parle alors de capteurs asservis. La mesure n'est plus le signal  $s(t)$  issu du capteur mais la

valeur de la grandeur d'opposition  $u(t)$  (s'il s'agit de grandeur de même nature) qui permet d'annuler le signal  $s(t)$ . Le signal  $s(t)$  en sortie du capteur fournit alors une information sur l'erreur de mesure.

La mise en place de ce principe peut avoir pour objectif de maintenir le capteur dans une plage de fonctionnement où son comportement entrée-sortie (courbe de réponse statique) peut être considéré comme linéaire, figure 1.3, d'augmenter l'étendue de mesure du capteur ou encore de réduire certaines dérives - fluage, biais de sortie ...

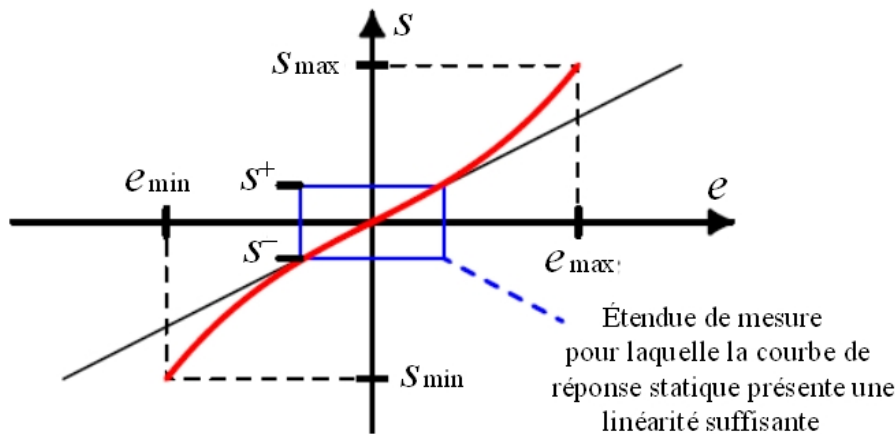


FIG. 1.3 – Exemple de courbe de réponse statique pour un capteur non linéaire, avec un grandeur d'opposition  $u(t)=0$

Dans le cas d'une mesure dynamique, à savoir lorsque la grandeur à mesurer  $e(t)$  varie continûment dans le temps, on introduit un système de correction dynamique ou correcteur. Le rôle de ce correcteur est de compenser, en temps réel, l'effet de la grandeur à mesurer  $e(t)$  sur la sortie  $s(t)$  grâce à l'entrée (commande)  $u(t)$ .

### 1.2.1 Problématiques de l'automatisation à l'échelle microscopique

L'étude de l'automatisation des procédés microrobotiques est à ce jour une thématique centrale de la microrobotique non encore résolue. L'automatisation est confrontée à plusieurs problématiques synthétisées sur la figure 1.4 .

Une des premières spécificités du micromonde tient au fait que les actionneurs et les capteurs ont une très forte sensibilité à l'environnement. De la même façon, les signaux de commande ou aux issus des capteurs sont de niveaux faibles et donc particulièrement sensibles aux bruits. L'étude des stratégies de commande originales adaptées au paradigme du micromonde représente une perspective scientifique majeure des activités microrobotiques.



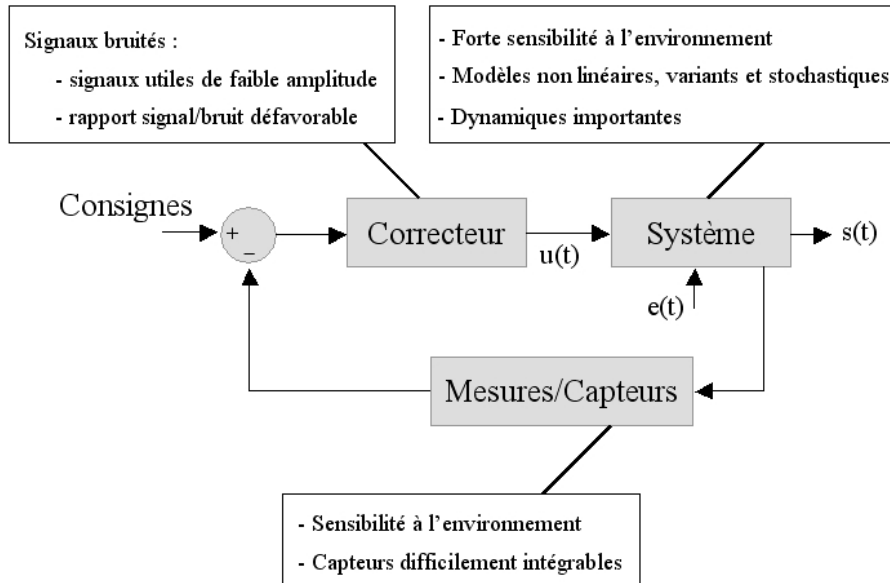


FIG. 1.4 – Synthèses des problématiques de la commande des systèmes agissant dans le micromonde [1].

### 1.2.2 Compréhension de la boucle d'asservissement d'un capteur de force

Le capteur-actionneur de force est un système à 2 entrées et une sortie (voir figure 1.5). Les deux entrées sont la force externe  $F^{ext}(t)$  à mesurer et la commande  $u(t)$  (d'origine électrique) ramenée à la même nature que  $F^{ext}(t)$  grâce à un transducteur. Dans le cas général, les grandeurs  $F^{ext}(t)$  et  $u(t)$  sont des vecteurs. Si on désire mesurer la totalité du torseur des efforts (forces et couples), ce sont des vecteurs à six composantes. La sortie  $s(t)$  est la déformation du corps d'épreuve ou le déplacement de la masse sismique mesuré à l'aide d'un capteur adéquat.

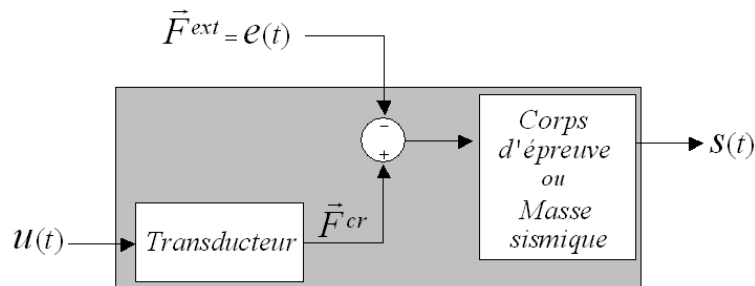


FIG. 1.5 – Capteur-actionneur de force

On considère par la suite que le capteur est construit de manière à ce que sa dyna-

mique vis-à-vis de ses entrées (grandeur à mesurer et commande) soit «suffisamment» linéaire autour du point de fonctionnement choisi sur lequel la sortie  $s(t)$  du capteur-actionneur est asservi.

Le capteur asservi est représenté par le schéma de la figure 1.6, où les bruits perturbateurs  $b_e(t)$  et  $b_s(t)$  sont rajoutés.  $b_e(t)$  représente le bruit présent sur l'entrée, c'est-à-dire l'ensemble des entrées de perturbation autres que  $F^{ext}(t)$  et  $u(t)$ . Ceci peut par exemple représenter le bruit additif présent sur  $u(t)$  qui est induit par l'électronique de commande.  $b_s(t)$  représente le bruit observé en sortie, dû à l'électronique de détection.  $s_{ref}$  est le signal de référence correspondant au souhait d'asservir la sortie du capteur autour d'un point de fonctionnement.

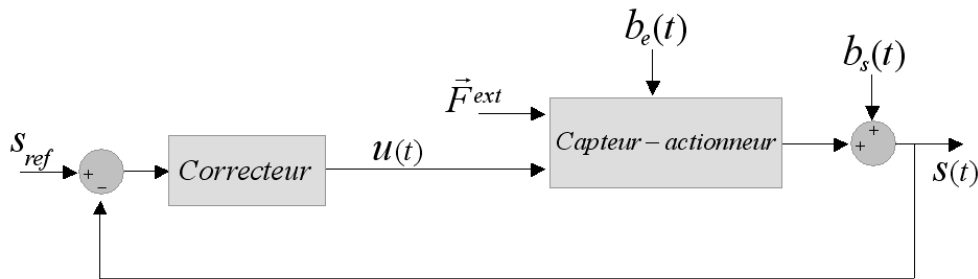


FIG. 1.6 – Capteur asservi

Pour la problématique de l'asservissement du capteur autour du point de fonctionnement, la grandeur physique à mesurer  $F^{ext}(t)$  apparaît comme une perturbation à rejeter par le système de correction ; quelle que soit la valeur de la grandeur physique en entrée  $F^{ext}(t)$ , le correcteur devra maintenir la sortie du capteur  $s(t)$  aussi près que possible du point de fonctionnement  $s_{ref}$  choisi.

## 1.3 Micromanipulation et mesure de force

### 1.3.1 Notion de micromonde et macromonde

La notion de micromonde est couramment utilisée pour définir un espace (monde) aux caractéristiques particulières. Il s'agit d'un monde où évoluent des objets dont au moins une des dimensions caractéristiques varie de  $1 \mu m$  à  $1 mm$ . Par comparaison, le macromonde est le terme usité pour désigner le monde des objets dont toutes les dimensions caractéristiques excèdent le millimètre. Les interactions entre les objets dans le micromonde sont régies par les lois de la «micro-physique». Ce terme peut laisser penser que les lois qui régissent le comportement des corps dans le micromonde sont différentes de celles du macromonde. En réalité ce n'est pas du tout le cas, la différence provient du fait que des forces, totalement négligeables à l'échelle macroscopique, deviennent prépondérantes du fait de la taille réduite des objets. Les effets de surface jouent

alors un rôle plus important que les effets de volume. Afin de mettre en évidence cette différence, prenons deux sphères d'un diamètre de  $20 \mu m$  et  $20 mm$  respectivement. Le calcul du ratio entre la surface et le volume, égal à  $3/r^1$ , est de 300 000 et 300 pour chaque sphère. Autrement dit, la surface de la sphère de  $20 \mu m$  de diamètre est 300 000 fois plus grande que son volume tandis qu'elle n'est que 300 fois plus importante pour la seconde sphère. Ainsi, les forces d'origine surfacique (forces de tension de surface, forces électrostatiques, etc.) seront beaucoup plus importantes, par rapport aux forces d'origine volumique (poids), sur la sphère de  $20 \mu m$  de diamètre que sur celle de  $20 mm$ .

Dans la vie courante, un bon nombre d'exemples attestent de l'influence des forces surfaciques dans le micromonde. L'exemple le plus flagrant est le moustique qui peut rester accroché au plafond. Ceci est possible dès lors que les forces d'adhésion (forces surfaciques) entre les pattes de l'insecte et le plafond sont suffisamment importantes pour compenser son propre poids (force volumique). Un second exemple est celui de l'individu qui essaye de saisir un objet de petite taille (tel qu'une épingle). Très souvent, et de manière inconsciente d'ailleurs, il humecte son doigt pour saisir l'objet en question plus facilement en exploitant l'adhésion par tension de surface. En procédant ainsi, il augmente les forces d'adhésion entre l'épingle et son doigt.

### 1.3.2 La micromanipulation

Une des problématiques majeures de la microrobotique est la micromanipulation. Bien que plusieurs définitions existent, le terme de manipulation désigne généralement l'utilisation d'une force extérieure pour réaliser des tâches telles que : prise et dépose, poussée d'objets, découpe, assemblage, etc. La micromanipulation, quant à elle, concerne la manipulation d'objets, rigides ou ductiles, dont les dimensions varient du micromètre à quelques millimètres. La micromanipulation peut être réalisée *avec* ou *sans contact*. Ce terme fait référence à la présence ou non de contacts mécaniques entre le manipulateur et l'objet à manipuler.

La micromanipulation trouve des champs d'application variés tels que la caractérisation et l'assemblage de micromécanismes, de microlentilles, de microsystèmes ou encore dans le domaine biomédical pour la manipulation d'objets biologiques (cellules, microorganismes, etc.). A ce titre, le domaine biomédical n'a fait que récemment l'objet d'attentions par les microroboticiens. En matière de réalisations, on constate pourtant un certain nombre de microrobots qui ont eu pour application la micromanipulation de cellules [7]. La micromanipulation dans ce genre d'applications est sujette à des difficultés particulières liées à la nature du milieu dans lequel la micromanipulation est effectuée. Ces difficultés sont généralement celles de la micromanipulation en général, auxquelles s'ajoutent les problèmes de biocompatibilité.

---

<sup>1</sup><sub>r</sub> étant le rayon de la sphère considérée.

### 1.3.3 Problèmes liés à la micromanipulation : exemple didactique

De nombreuses difficultés liées à la micromanipulation apparaissent en raison des effets d'échelles. En effet, les phénomènes physiques aux échelles considérées sont plus complexes qu'à l'échelle macroscopique. Dans le macromonde, des forces surfaciques et d'adhésions, comme la force électrostatique ou encore de capillarité, sont souvent négligeables devant des forces volumiques comme le poids. Pour ces raisons, les modèles physiques établis actuellement pour le macromonde ne tiennent généralement pas compte de ces forces. Par ailleurs, ces modèles ne sont plus valables pour décrire les lois de comportements dans le micromonde. Négliger ces forces dans les modèles physiques de comportements dans le micromonde conduirait à la réalisation de microrobots inopérants ou aux performances limitées.

Trois types de forces dans le micromonde doivent être prises en compte :

- les forces électrostatiques : ces forces résultent des interactions coulombiennes (attraction et répulsion) entre surfaces préalablement chargées ou qui le deviennent après frottement (triboelectrification). Elles s'expriment à l'aide des équations classiques de l'électrostatique et sont fortement dépendantes de l'humidité ;
- les forces de Van Der Waals : ces forces résultent des interactions du type dipôle-dipôle, soit entre molécules polaires, soit entre molécules polaires et molécules neutres (dipôles induits). Elles peuvent également être la conséquence des effets de dispersion (forces de dispersion de *London*) dus aux mouvements des électrons, qui font apparaître des dipôles instantanés dont la durée de vie est extrêmement courte ;
- les forces de tension de surface : sauf environnement exceptionnel, le taux d'humidité dans l'air est généralement compris entre 30 et 60%. Dans ces conditions, un film d'eau se forme à la surface des matériaux et induit une nouvelle force d'adhésion, dite force capillaire ou force de tension de surface.

Afin d'illustrer les problèmes liés à ces trois forces lors de la micromanipulation, prenons le cas de la manipulation d'objets de petites tailles dans l'air à l'aide d'une pince. Les objets à manipuler sont des sphères en silicium ( $10 \mu m$  de rayon). La tâche de micromanipulation consiste en la prise et la dépose des sphères sur le plan de travail. Dans le but de faciliter l'interprétation des données, nous allons utiliser les modèles existants, certes simplifiés, mais qui permettent le calcul des trois forces dans le cas d'interactions entre une sphère en silicium et un plan. Cette situation est d'ailleurs similaire au cas qu'on souhaite étudier dès lors que l'on considère le plan comme étant un des doigts du préhenseur (voir figure 1.7). Les hypothèses suivantes sont également faites :

- les sphères ainsi que le plan de travail sont des isolants ;
- les doigts du préhenseur sont conducteurs ;
- les surfaces mises en jeu ne sont pas rugueuses.

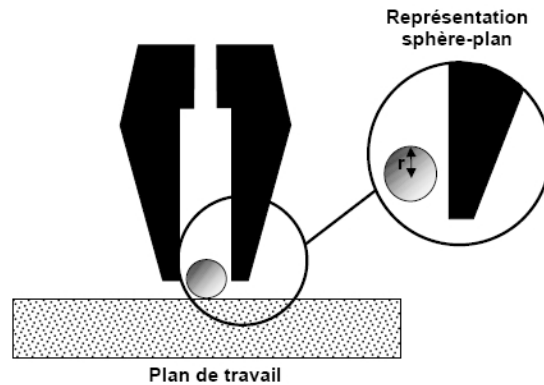


FIG. 1.7 – Représentation sphère-plan

La figure 1.8 tirée de [2] présente l'amplitude des forces gravitationnelles ( $F_{grav}$ ), électrostatiques ( $F_{elec}$ ), de Van Der Waals ( $F_{vdw}$ ) et de tension de surface ( $F_{tens}$ ) en fonction du rayon de la sphère.

Pour évaluer l'ordre de grandeur de ces forces, prenons à titre d'exemple le cas d'une sphère en silicium de rayon  $r = 100\mu m$ . Aux échelles considérées en l'absence d'humidité, on constate que les forces de Van Der Waals ( $F_{vdw} \approx 10\mu N$ ) sont plus importantes que les forces électrostatiques ( $F_{elec} \approx 0.01\mu N$ ) et gravitationnelles ( $F_{grav} \approx 0.5\mu N$ ). Cela se traduit par le fait que si on saisit la sphère et qu'on tente de la poser, après ouverture de la pince, la sphère reste collée à l'un des doigts. Ce phénomène disparaît pour des rayons de sphère supérieurs à  $0,6 mm$ .

Si à présent, on dépose un film d'humidité sur un des deux plans formant le préhenseur, on constate, d'après la figure 1.8, que les forces de tension de surface ( $F_{tens} \approx 100\mu N$ ) sont prépondérantes face aux forces électrostatiques, gravitationnelles et de Van Der Waals. De plus, cette prépondérance est observée sur toute la plage de variation du rayon des objets compatibles avec la micromanipulation ( $1\mu m$  à  $1 mm$ ). Les forces de tension de surface vont donc également compliquer la dépose de la sphère. Ces forces agissent aussi à distance, ce qui complique encore davantage la tâche de dépose [8].

En conclusion, on se rend compte que le facteur d'échelle n'a pas le même effet sur toutes les forces. Ainsi, la force gravitationnelle n'a pas d'effet prépondérant aux dimensions considérées et n'influe par conséquent que faiblement sur le comportement des objets. Les trois forces électrostatique, Van Der Waals et tension de surface sont utiles lors de la prise de l'objet à manipuler mais ne facilitent guère la dépose de celui-ci. Il est donc difficile de lâcher l'objet et de contrôler très précisément sa position d'arrivée. Les forces de tension de surface sont constamment prépondérantes dans le cas de présence d'humidité et elles varient fortement lorsque les paramètres environnementaux changent. Afin de réduire cet effet, il est possible d'atténuer le degré d'humidité de l'environnement

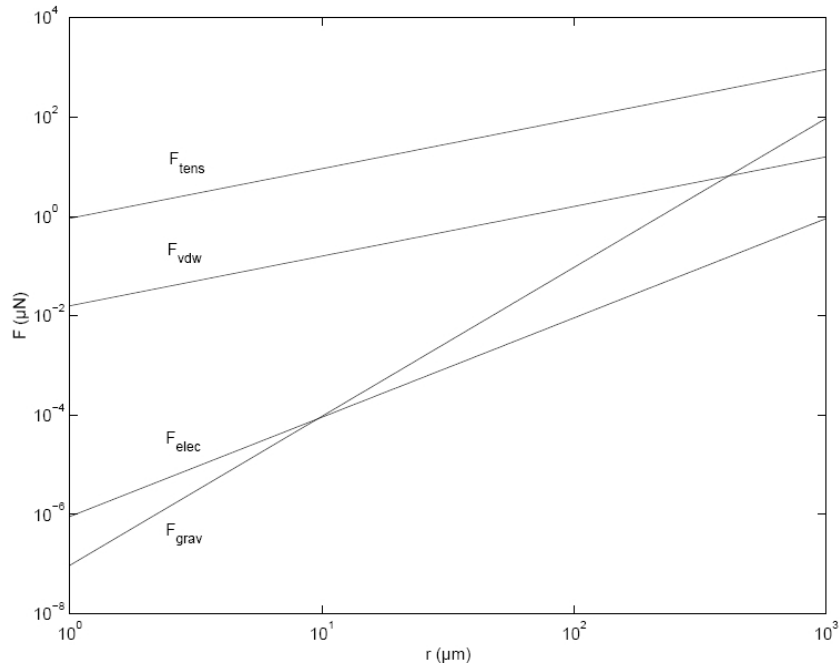


FIG. 1.8 – Evolution des forces en fonction du rayon de la sphère [2]

ou d'augmenter la rugosité des préhenseurs en réalisant des structures aux formes pyramidales. La dépose de couches hydrophobes sur les préhenseurs et la mise en vibration [9], servant à créer des forces d'inertie, permet également de réduire la prépondérance des forces de tension de surface. Par ailleurs, notons qu'il est nécessaire, pour détacher l'objet collé au préhenseur, d'appliquer une force antagoniste d'une intensité supérieure à la somme de toutes les forces qui engendrent l'adhésion de l'objet.

### 1.3.4 La mesure de force pour la micromanipulation

La mesure de force est dans la plupart des cas nécessaire durant les tâches de micromanipulation. Lorsqu'il s'agit d'applications de saisie d'objets, la mesure de force permet de quantifier l'effort appliqué par le préhenseur sur l'objet manipulé. Il est alors possible d'envisager un contrôleur dont le rôle est de moduler cet effort en fonction des objets à manipuler et cela pour ne pas endommager l'objet et/ou le préhenseur. Ainsi, l'effort nécessaire à la saisie peut être appliqué sans risque de causer des dommages irréversibles.

Le second champ applicatif de la mesure de forces est l'étude et la caractérisation des objets à manipuler dans le micromonde. Cette étude conduit à déterminer principalement certaines propriétés mécaniques des objets (module d'élasticité, limite élastique, etc.). En outre, la mesure de force dans le micromonde permet une meilleure compréhension des interactions objet-objet, milieu-objet et préhenseur-objet. Actuellement, il n'existe

pas encore de modèles suffisamment précis permettant de prédire le comportement intrinsèque des objets dans le micromonde. Habituellement, le calcul se limite à des cas bien définis (contact sphère-plan) avec des hypothèses parfois fortes. Or, la maîtrise des tâches de micromanipulation passe avant tout par la compréhension des phénomènes mis en jeu dans le micromonde. A ce titre, la modélisation des forces du micromonde est l'un des enjeux actuels en microrobotique. Au vu de toutes ces contraintes, l'approche expérimentale est absolument nécessaire pour valider les modèles. Les dispositifs qui permettent la mesure des forces du micromonde mettent ainsi en évidence les phénomènes existants aux dimensions considérées. La plate-forme de mesure de micro et nano force que nous avons développée s'insère dans cette démarche. Elle permettra, à terme, de caractériser les objets du micromonde et d'établir les interactions qui se produisent aux échelles considérées par le biais de la mesure de forces. Elle permet également de contrôler les efforts appliqués lors de la micromanipulation.

## 1.4 Nanotribologie et mesure de force

Le mot tribologie vient du grec *tribos*, qui signifie frottement. Il a été utilisé pour la première fois en 1966 en Grande-Bretagne pour désigner l'ensemble des sciences et techniques qui s'intéressent aux frottements et à l'usure des matériaux [10]. La tribologie est aujourd'hui un large domaine d'études et de recherches pluridisciplinaires qui ont pour objectifs de :

- réduire l'usure des matériaux et d'augmenter la durée de vie et la fiabilité des systèmes mécaniques et mécatroniques ;
- maîtriser (optimiser) le frottement.

A l'échelle microscopique, les forces de surface (forces électrostatique, forces de Van der Waals et forces capillaires) jouent un rôle important dans le frottement et leur influence est particulièrement sensible dans les microcontacts, notamment lorsque les efforts mis en jeu sont faibles (quelques micronewtons à quelques centaines de micronewtons).

Ces forces sont principalement étudiées à l'aide de deux types de dispositifs : les appareils à force de surface (SFA : *Surface Force Apparatus*) et la microscopie de force de frottement (FFM : *Friction Force Microscopy*).

### 1.4.1 Frottement

Les frottements sont des interactions qui s'opposent à la persistance d'un mouvement relatif entre deux systèmes en contact. Ces frottements sont généralement quantifiés par un coefficient  $\mu$  dit coefficient de frottement.

Considérons un corps solide de forme parallélépipédique, déposé sur un plan horizontal et supportant une charge normale  $F_n$ . Appliquons lui, progressivement, une force  $F$  parallèle au plan afin de le mettre en mouvement et faire passer progressivement sa vitesse

( $v$ ) de la valeur 0 à la valeur  $V$  (voir figure 1.9).

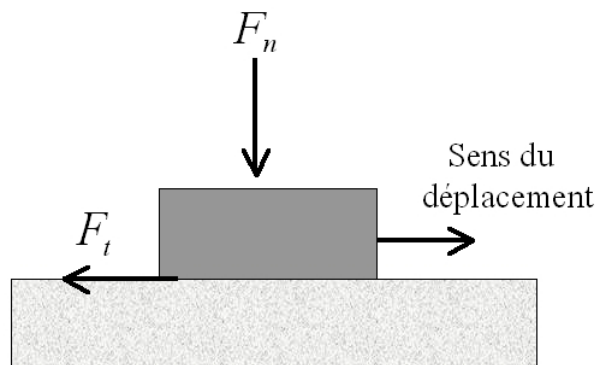


FIG. 1.9 – Définition de la force tangentielle  $F_t$

Ce déplacement va provoquer l'apparition, dans le plan, d'une force de frottement  $F_t$ , dirigée dans le sens inverse du glissement et qui s'oppose à lui. On peut voir sur la figure 1.10 l'évolution de cette force en fonction du temps.

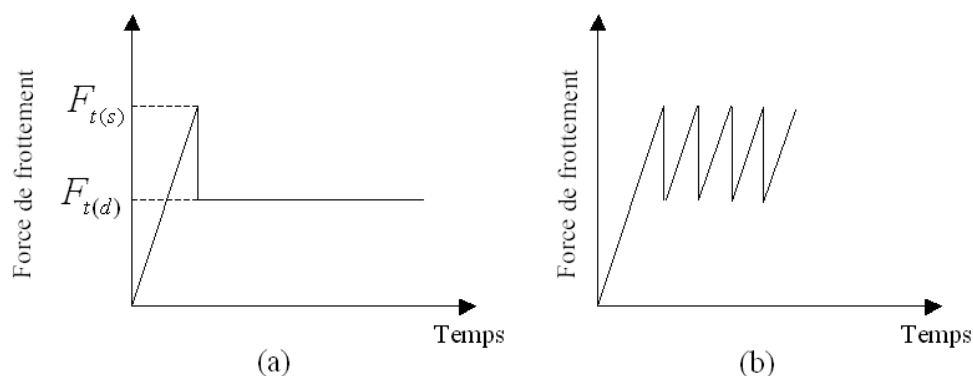


FIG. 1.10 – Evolution de la force de frottement au cours du temps : (a) glissement sans *stick - slip*; (b) glissement avec *stick - slip*

La connaissance de la force  $F_n$  et la détermination expérimentale de  $F_t$  permettent d'accéder au coefficient de frottement  $\mu$ , qui est défini par l'expression suivante :

$$\mu = \frac{F_t}{F_n} \quad (1.1)$$

On distingue le coefficient de frottement statique ( $\mu_s$  pour lequel  $F_t = F_{t(s)}$ ) du coefficient de frottement dynamique ( $\mu_d$  pour lequel  $F_t = F_{t(d)}$ ).  $F_{t(s)}$  et  $F_{t(d)}$  sont définis sur la figure 1.10a :



- $F_{t(s)}$  est la force maximale qu'il faut exercer pour mettre en mouvement le solide ;
- $F_{t(d)}$  est la force appliquée pour entretenir le mouvement.

On observe souvent une évolution de la force de frottement en dents de scie (figure 1.10b). Cette évolution correspond au phénomène de *stick – slip* qui résulte d'une succession d'adhésions et de ruptures aux points de contact entre les surfaces antagonistes. Suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitation, divers comportements peuvent être observés. Ils résultent des transformations chimiques, topographiques ou structurales des surfaces frottantes (oxydation, transformation allotropique, transformation de phases, amorphisation, cristallisation, diffusion, fusion, polissage, arrachement de matière).

### 1.4.2 Les tribomètres

Les tests tribologiques sont conduits à l'aide de tribomètres qui peuvent travailler à l'air ou sous atmosphère contrôlée, à sec ou en présence d'un lubrifiant.

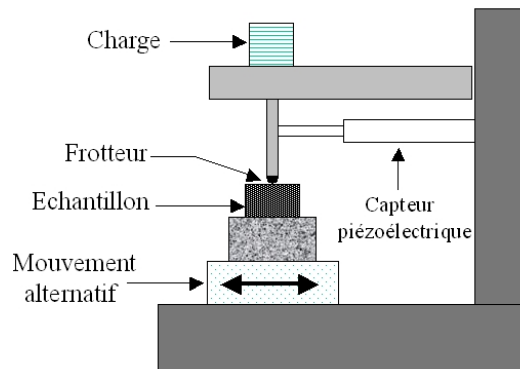


FIG. 1.11 – Tribomètre pion-plan

La figure 1.11 montre un exemple de tribomètre de laboratoire de type *pion – plan* à mouvement linéaire alternatif. Les paramètres imposés sont généralement la charge appliquée, la vitesse de glissement et les conditions environnementales (taux d'humidité, atmosphère contrôlée : nature et pression des gazs introduits, etc.). Les grandeurs mesurées sont généralement la force de frottement, la température des surfaces, la résistance de contact et l'usure. En fonction de l'application envisagée, les essais peuvent être conduits à l'aide de différentes géométries de contact.

## 1.5 La mesure de force par capteur passif

L'importance de la mesure de force à l'échelle microscopique a conduit à de nombreux prototypes de capteurs de micro et nano forces. Dans ce qui suit, nous présenterons une liste des capteurs, les plus classiques, liées majoritairement au domaine de la micromanipulation. Ces capteurs seront classés en deux catégories :

- les capteurs conçus pour de très «petites» déformations de leur corps d'épreuve ou très petits déplacements de leur masse sismique ;
- les capteurs à «grandes» déformations ou à grands déplacements.

Ce choix volontaire de catégorisation vient du fait que le capteur étudié dans ce mémoire appartient à la deuxième catégorie citée. D'autres catégorisations reposant sur d'autres critères sont évidemment possibles.

### 1.5.1 Les capteurs à petites déformations

**Les capteurs de type *AFM*** : Le microscope à force atomique (*AFM*<sup>2</sup>) appartient à la famille des *SPM*'s (Scanning Probe Microscope<sup>3</sup>). Ces dispositifs sont équipés de sondes dites *locales*. Ce terme signifie que les dimensions de la sonde et la distance de celle-ci par rapport à l'échantillon sont très faibles devant l'objet à imager. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle il faut *balayer* (scanning) l'ensemble de l'objet avec la sonde pour reconstruire l'image de celui-ci.

La figure 1.12 présente le schéma habituel qui permet de réaliser une mesure de forces en utilisant un *AFM*. Le principe de la mesure de forces sur un *AFM* est celui de la flexion et la torsion d'une poutre-encastrée libre. Si l'on se place dans le cas où la force appliquée est normale à la poutre et sous l'hypothèse de petites déformations, il est possible d'établir une relation entre la force appliquée  $\vec{F}$  en extrémité du cantilever<sup>4</sup> et la flèche  $\delta$  donnée par [11] :

$$\|\vec{F}\| = \frac{Ebh^3}{4l^3}\delta \quad (1.2)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} E & : & \text{module d'élasticité} \\ l, b \text{ et } h & : & \text{longueur, largeur et épaisseur du cantilever} \\ \delta & : & \text{déflexion mesurée à l'extrémité du cantilever} \end{cases}$$

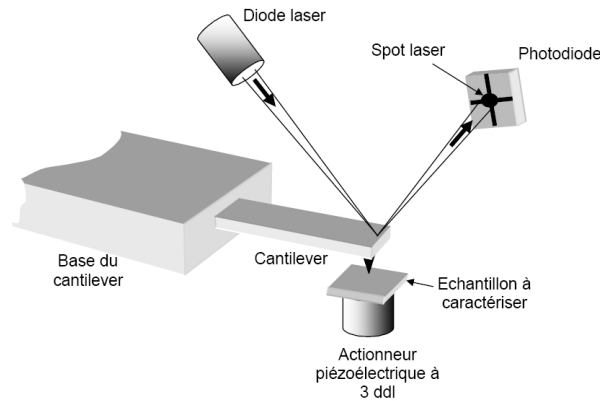
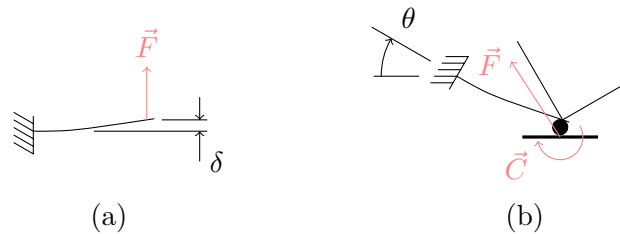
On constate d'après l'équation précédente que la force est inversement proportionnelle au cube de la longueur de la poutre. Ainsi, pour un même  $E$ ,  $b$ ,  $h$  et  $\delta$  la résolution de mesure de forces peut être augmentée si l'on augmente la longueur  $l$  du cantilever. En pratique, le phénomène oscillatoire du cantilever engendré par ses dimensions importantes ne constitue pas une solution viable. De ce fait, les longueurs typiques des cantilevers n'excèdent que rarement la centaine de micromètres.

Afin de mesurer la déflexion du cantilever, un faisceau laser est focalisé à l'extrémité du cantilever [12] [13] [14] . Le laser est réfléchi par le cantilever vers une photo-diode

<sup>2</sup>Acronyme anglo-saxon qui signifie *Atomic Force Microscope*.

<sup>3</sup>Comme *SPM* on peut citer les *SFM* (*Scanning Force Microscope*), les *STM* (*Scanning Tunneling Microscope*), les *SNOM* (*Scanning Near-field Optical Microscopy*), etc.

<sup>4</sup>Terme anglo-saxon désignant un levier.

FIG. 1.12 – Principe de mesure de forces avec un *AFM*FIG. 1.13 – Effet de la direction de sollicitation sur la réponse d'un *AFM*.

à quatre quadrants. En fonction de la position du spot réfléchi sur la photo-diode, une tension est délivrée en sortie. Cette tension dépend directement de la surface occupée par le spot sur les quadrants. La sortie en tension ainsi obtenue est l'image de la déflexion du cantilever. Un autre moyen pour mesurer la déformation du cantilever est l'utilisation du principe de l'interférométrie [15].

Lorsqu'un AFM est utilisé en mesure de force, la mesure est basée sur un modèle de poutre en flexion (voir figure 1.13a).

En réalité, d'autres phénomènes sont mis en jeu, pouvant provoquer des erreurs de mesure non négligeables. Prenons l'exemple de la mesure d'une interaction entre une sphère micrométrique et un substrat plan (voir figure 1.13b). En utilisant un levier du commerce équipé de sphères calibrées, la première source d'erreur provient du positionnement angulaire initial  $\theta$  du levier qui nous éloigne du modèle poutre en flexion. Viennent ensuite, les efforts de friction et les efforts normaux appliqués à la zone de contact et dont la résultante n'est pas appliquée suivant la verticale. Enfin, la mesure de la déflexion  $\delta$  est assurée par le dispositif diode laser-photodiode qui est extrêmement sensible au rotation de l'extrémité du levier. Ces rotations sont provoquées par la composante horizontale de l'effort de contact et les couples éventuels générés par les défauts de surface au niveau de la zone de contact.

Les *AFM* classiques sont caractérisés par des raideurs faibles (typiquement de  $0.01\text{ N/m}$  à  $1\text{ N/m}$ ). Un autre type de capteur *AFM* utilise un nanotube de carbone (*CNT*), calibrés par résonance électromécanique [16] et qui présente des propriétés élastiques remarquables. La *CNT* est attachée à l'extrémité du cantilever par des faisceaux d'ions focalisés (*FIBID*) ou par des faisceaux d'électrons (*EBID*). Une fois fixé à l'extrémité du cantilever, il est utilisé comme sonde (voir figure 1.14).

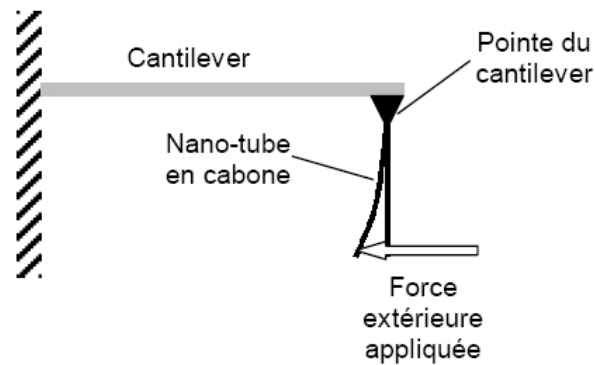


FIG. 1.14 – Configuration permettant d'augmenter la précision de mesure de l'AFM.

La déflexion de la sonde n'est plus mesurée par triangulation mais par un procédé de vision. Le microscope électronique à balayage est la solution la plus utilisée actuellement pour ce faire. Les plus faibles efforts mesurés par ce type d'AFM est de l'ordre de  $5\text{ pN}$ . Par contre la plage de mesure est faible du fait que la flèche maximale du cantilever est généralement de quelques nanomètres. L'inconvénient majeur de cette technique est qu'il s'agit d'une quantification globale de la force sans indication de la direction de mesure et donc du type de sollicitation.

**La microscopie de force de frottement (*FFM*) :** Cette technique offre une meilleure résolution aussi bien au niveau de la force appliquée qu'au niveau du déplacement vertical, et permet des analyses plus ponctuelles (le rayon de courbure d'une pointe *FFM* est de quelques nanomètres à quelques dizaines de nanomètres, alors que les sphères utilisées dans les *SFA*, présentent des rayons de plusieurs millimètres).

La *FFM* est tout simplement un *AFM* (voir paragraphe 1.1.2) utilisé pour mesurer, à la fois la force normale ainsi que la force latérale (frottement). En mode contact, la pointe de l'*AFM* est maintenue en contact avec la surface dont elle relève la topographie. Ce mode présente l'inconvénient de rayer ou déformer la surface sondée dans le cas de matériaux mous, d'où le recours au mode vibrant. Ce dernier consiste à maintenir la pointe à une distance d'un à quelques nanomètres de la surface et à lui imposer un mouvement vibratoire.

Dans la configuration en mode contact, il est également possible de mesurer le frotte-

ment entre la pointe et l'échantillon. Sous l'action des forces de frottement, le microlevier subit des distorsions qui modifient la trajectoire du faisceau laser réfléchi (voir figure 1.15).

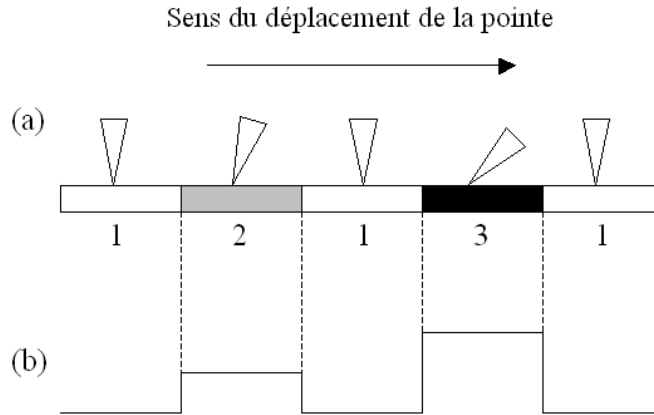


FIG. 1.15 – Déplacement de la pointe de l'*AFM* à la surface d'un substrat comportant trois zones (1, 2 et 3) de natures différentes. La pointe est soumise à une torsion d'autant plus importante que le frottement pointe-surface est élevé (a). En (b), on peut voir le signal enregistré, montrant l'évolution de la force latérale pendant le déplacement de la pointe

L'utilisation d'un photodétecteur à quatre quadrants permet la détection simultanée des déviations verticales et latérales du faisceau lumineux. Les premières donnent accès à la topographie de la surface, alors que les secondes permettent de mesurer les forces de frottement. Les inconvénients de cette technique sont les mêmes que ceux cités pour les *AFM*.

**Les capteurs piézoélectriques :** Le phénomène de piézoélectricité consiste en l'apparition d'une polarisation électrique, ou la variation d'une polarisation déjà existante dans certains diélectriques anisotropes naturels (quartz, tourmaline...) ou artificiels (sulfate de lithium, quartz de synthèse, céramiques traitées...) lorsqu'ils sont déformés sous l'effet d'une force de direction convenable. Si l'on constitue un condensateur en déposant une paire d'armature sur les faces opposées d'une lame piézoélectrique, il apparaît sous l'influence d'une force des charges de signes contraires sur les armatures opposées et donc une différence de potentiel, proportionnelle à la force appliquée. Un tel dispositif permet la mesure des forces, et toute grandeur physique susceptible de s'y ramener : pression, accélération et vibration.

Le milieu piézoélectrique étant anisotrope, l'intensité et le signe de l'effet piézoélectrique dépendent :

- de la direction d'observation, donc de la position des faces collectrices de charges ;
- de l'orientation de la contrainte.

Le capteur de forces piézoélectrique le plus largement utilisé est fabriqué à partir des films de polyfluorure de vinylidène (*PVDF*). Le *PVDF* est un matériau idéal en raison de sa capacité de répondre à une large gamme de fréquences, de sa haute résistance mécanique et de sa grande sensibilité. En matière de réalisation, il existe de nombreux prototypes de capteur de forces piézoélectrique. On peut relever la réalisation d'un capteur de force *PVDF* 2D faite par *Shen* [17]. Ce capteur à résolution sub-micron utilise le principe illustré dans la figure 1.16.

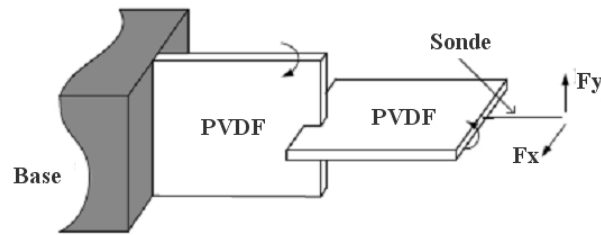


FIG. 1.16 – Structure d'un capteur de force *PVDF* à 2 axes

Dans chaque direction, un film *PVDF* est utilisé pour détecter la force. On peut voir, que cette structure permet des mesures de forces découplées suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

Les principaux inconvénients des capteurs piézoélectriques sont :

- coefficient pyroélectrique (variation de la polarisation spontanée en fonction de la température) important,
- variation thermique des modules piézoélectriques et des permittivités diélectriques,
- hystérésis de température, c'est-à-dire influence des antécédents thermiques sur les caractéristiques actuelles ; l'hystérésis de température est notablement atténuée par un vieillissement artificiel.
- le signal électrique généré par l'élément piézo diminue rapidement après l'application de la force. Cela rend impossible la mesure d'une force statique.

**Les capteurs à jauges d'extensométrie :** Les jauges de déformation sont des capteurs passifs qui traduisent leur propre déformation (proportionnelle à la déformation de la structure où elles sont collées) par une variation de leur résistance électrique. Une jauge est constituée d'une grille formée par un conducteur collé sur un support isolant servant de corps d'épreuve. Le conducteur est soit de nature métallique, soit un semi-conducteur. Le nombre de brins dans la grille diffère selon le type de jauge. Il varie entre 10 et 20 pour un conducteur métallique et est égale à 1 pour les jauges semi-conductrices. Ainsi, il convient de classer les jauges en deux classes : les jauges à fil résistant d'une part, et les semi-conductrices<sup>5</sup> d'autre part. Bien que la mesure établie avec ces jauges soit la même, il reste que les principes physiques utilisés sont différents. Ainsi, dans une jauge à fil résistant, l'effet prépondérant est dû à la déformation géométrique du

<sup>5</sup>Cette catégorie de jauges est également appelée jauge piézorésistive.

fil. Dans une jauge semi-conductrice, l'effet principal est dû à la variation de résistivité sous l'action du champ de contraintes auquel elle est soumise. L'effet piézorésistif se caractérise par une variation anisotropique de la mobilité des porteurs de charge sous l'effet et suivant la direction des contraintes appliquées [18].

La résistance isotropique de la jauge à fil résistant formé pour un conducteur ayant pour résistivité  $\rho$ , longueur  $l$  et section  $S$  est exprimée par :

$$R = \frac{\rho l}{S} \quad (1.3)$$

Dans la cas d'une jauge semi-conductrice, la résistivité est exprimée par :

$$\rho = \frac{1}{en\mu} \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mu & : \text{ mobilité moyenne des porteurs} \\ n & : \text{ nombre de porteurs par unité de volume} \\ e & : \text{ charge de l'électron} \end{cases}$$

Dans le cadre de la micromanipulation, les jauges de déformation se prêtent bien à la mesure de forces. En intégrant par exemple ces jauges dans la structure qui permet de réaliser la fonction de préhension, il est possible de mesurer la force appliquée sur l'objet manipulé. De plus, parce que les jauges semi-conductrices sont compatibles avec les procédés de réalisation microtechniques, elles peuvent être intégrées en même temps que la réalisation du préhenseur.

En raison de la forte dynamique et de la « facilité » de fabrication de ce type de dispositifs, les jauges de déformation sont massivement utilisées pour la mesure de forces.

Les principaux inconvénients des capteurs à jauges d'extensométrie sont :

- leur sensibilité à la variation de température ambiante. Pour réduire cette sensibilité, des montages électroniques appropriés doivent être introduits dans la chaîne de mesure. L'intégration des jauges à fil résistant sur les effecteurs de préhenseurs devient difficile si la surface disponible de ces effecteurs n'excède pas le  $mm^2$ . Par ailleurs, la majorité des effecteurs réalisés pour des tâches de micromanipulation ont des surfaces avoisinant le  $\mu m^2$ . Par conséquent, les jauges sont délocalisées de l'endroit où l'on souhaite mesurer la force. Ceci à pour effet, en fonction de la complexité de la forme des préhenseurs, de rendre l'interprétation de la mesure de force difficile ;
- l'hystérésis ; non-retour à zéro. La déformation  $\epsilon$  induit par une force  $F$ , d'abord croissante puis décroissante, appliquée à un solide élastique présente une hystérésis ( $\Delta\epsilon$ ) qui se traduit, après annulation de la force, par une déformation résiduelle  $\Delta\epsilon_0$  (non-retour à zéro). Ce défaut apparaît pour une déformation même très faible du métal constituant le corps d'épreuve ;

- le fluage. Lorsqu'un solide est soumis à une force constante, sa déformation augmente avec le temps. Ce phénomène, le fluage, est lié à la viscosité du matériau.

En matière de réalisation, il existe de nombreux prototypes de préhenseurs équipés de jauges piézorésistives. On peut relever la réalisation faite par *Fahlbusch* [19]. Cette réalisation est une pince dont l'un des deux doigts est un cantilever (voir figure 1.17). La mesure de forces est rendue possible par quatre jauges piézorésistives disposées sur le cantilever. La déflexion du cantilever est mesurée à l'aide d'un capteur capacitif placé dans la pince. Cette pince, équipée de capteur de force, est pilotée par une interface haptique avec retour d'efforts pour réaliser des tâches de micromanipulation.

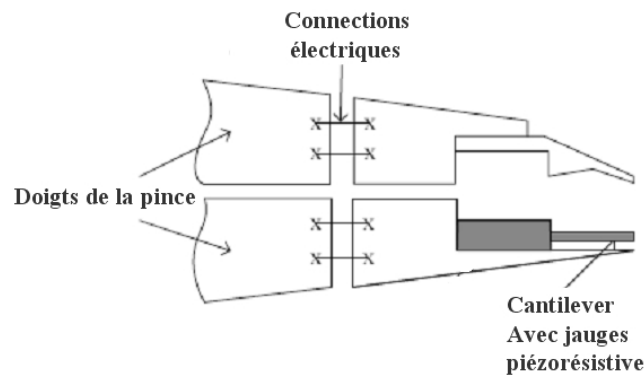


FIG. 1.17 – Capteur piézorésistif intégré

Avec un arrangement correct des jauges, un capteur de force multi-axial peut être réalisé. *Arai* [20] a conçu un capteur de micro forces tri-axial (voir figure 1.18). Le centre de masse est suspendu par quatre Cantilever ( $200\mu m \times 500\mu m \times 50\mu m$ ). Les Cantilevers sont faits par gravure anisotrope du silicium.

**Les capteurs capacitifs :** Bien que l'utilisation de l'*AFM* et des jauges de contraintes soit les solutions les plus courantes retenues pour la mesure de forces aux échelles micrométriques, il existe également des dispositifs de mesure de forces reposant sur un principe électrostatique. Un condensateur formé par deux plans conducteurs et alimenté convenablement va en effet provoquer des forces d'attraction électrostatiques qui tendent à rapprocher les deux armatures (voir figure 1.19).

L'amplitude de la force d'interaction électrostatique entre les armatures peut être



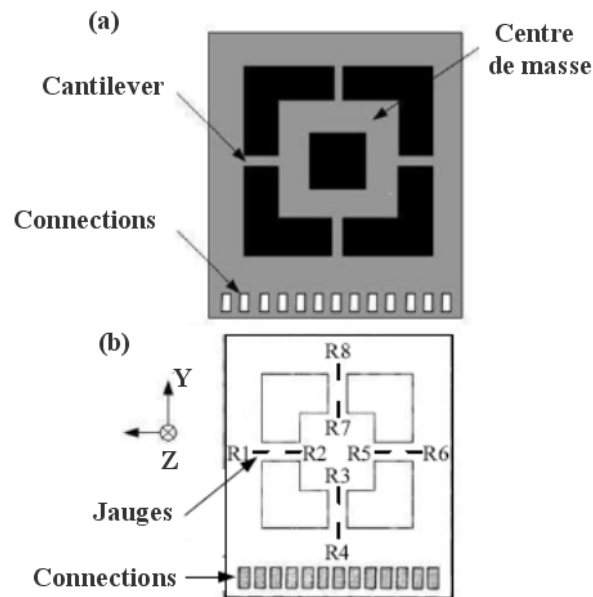


FIG. 1.18 – (a) Capteur de micro forces tri-axial, (b) placement des jauges sur le capteur

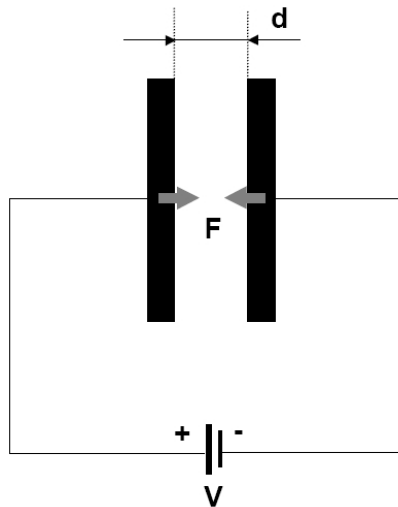


FIG. 1.19 – Condensateur à deux armatures planes.

exprimée comme suit :

$$\|\vec{F}\| = \varepsilon \frac{SV^2}{2d^2} \tag{1.6}$$

avec :

$$\begin{cases} S : \text{surface des armatures} \\ V : \text{différence de potentiel entre les armatures} \\ \varepsilon : \text{constante diélectrique} \\ d : \text{distance séparant les armatures} \end{cases}$$

On modifie la configuration de ce condensateur de sorte à avoir une des armatures fixe et l'autre mobile suivant  $\vec{x}$ . De plus, on relie l'armature mobile à un ressort de raideur  $K$  connue (voir figure 1.20). Pour une tension  $V$  donnée, l'équilibre statique est obtenu lorsque la force de rappel du ressort et la force électrostatique se compensent. A partir de la même configuration, on va appliquer, à présent, une force mécanique sur l'armature mobile qui tend à la rapprocher de la seconde. La nouvelle position d'équilibre statique est obtenue lorsque les forces appliquées sur le système se compensent pour une tension  $V$  donnée. Ainsi, si on connaît la raideur du ressort ainsi que l'espacement entre les armatures à la position d'équilibre, il est possible de déterminer l'amplitude de la force appliquée à l'armature mobile.

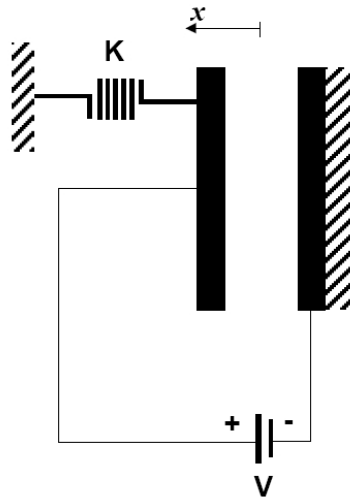


FIG. 1.20 – Configuration de mesure de forces.

Ce principe a été utilisé par *Sun* [21] [22] pour le développement d'un capteur de forces aux dimensions micrométriques destiné aux tâches de micromanipulation. Le cœur de ce capteur est composé de deux matrices de condensateurs disposés en série et reliés à quatre ressorts (voir figure 1.21). Au vu de ses dimensions, le capteur de forces est réalisé par des procédés de fabrication relevant des microtechniques. Il est possible d'assurer, grâce aux deux matrices de condensateurs, une mesure de forces suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Une tige solidaire à la matrice de condensateurs est utilisée comme effecteur. La mesure de déplacement des matrices n'est effectuée par aucun dispositif de mesure extérieur. Le déplacement provoqué par la force extérieure diminue l'espacement entre les armatures des condensateurs. Ainsi, la valeur de la capacité totale  $C$  des matrices se voit aussi affectée. La simple mesure de  $C$  suffit à connaître le déplacement produit. Les résolutions de mesure annoncées sont de  $0,01 \mu N$  suivant  $\vec{x}$  et  $0,24 \mu N$  suivant  $\vec{y}$ . La plage de mesure s'étend jusqu'à  $490 \mu N$  suivant  $\vec{x}$  et  $900 \mu N$  suivant  $\vec{y}$ .

Des travaux de recherche menés tout récemment par *Beyeler* [23] ont permis le

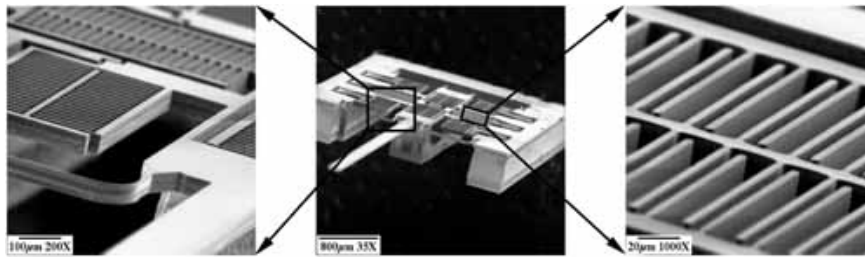


FIG. 1.21 – Capteur de forces reposant sur un principe électrostatique.

developpement d'un nouveau capteur de micro force et couple (voir figure 1.22).

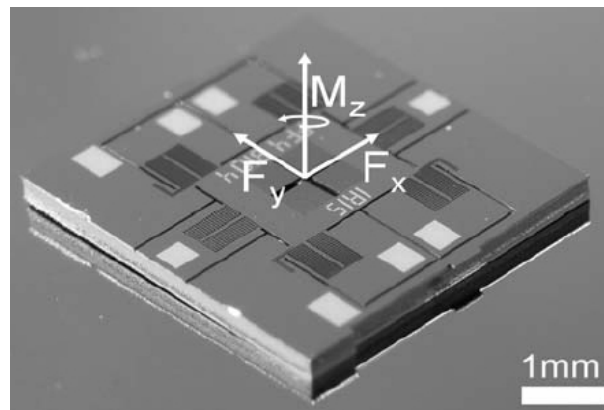


FIG. 1.22 – Capteur de micro force et couple multi-axes reposant sur un principe électrostatique.

Le capteur est capable de mesurer des forces dans le plan ( $xOy$ ) et des couples perpendiculaires à ces forces à l'aide d'une matrice de capacités en forme de peigne. Le capteur a été utilisé pour mesurer les forces et les couples appliqués sur un microrobot, actionné magnétiquement, utilisé pour délivrer des médicaments directement dans le corps humain. Le capteur est constitué de trois parties principales comme le montre la figure 1.23 :

- le corps mobile du capteur ;
- quatre éléments fléchissants qui convertissent l'effort appliqué en déformation ;
- trois paires de condensateurs qui transforment la déformation en un changement de capacitance.

La déflexion du corps mobile est détectée par 3 paires de condensateurs :  $C_a$  (composé de  $C_{a1}$  et  $C_{a2}$ ) est utilisé pour mesurer les déplacements suivant  $\vec{x}$ ,  $C_b$  (composé de  $C_{b1}$  et  $C_{b2}$ ) et  $C_c$  (composé de  $C_{c1}$  et  $C_{c2}$ ) sont utilisés pour mesurer les déplacements suivant  $\vec{y}$  et les rotations autour de  $\vec{z}$ . Le capteur est conçu pour mesurer des forces jusqu'à  $700 \mu N$  et un couple maximum de  $750 nNm$  avec une résolution sub-micronewton.

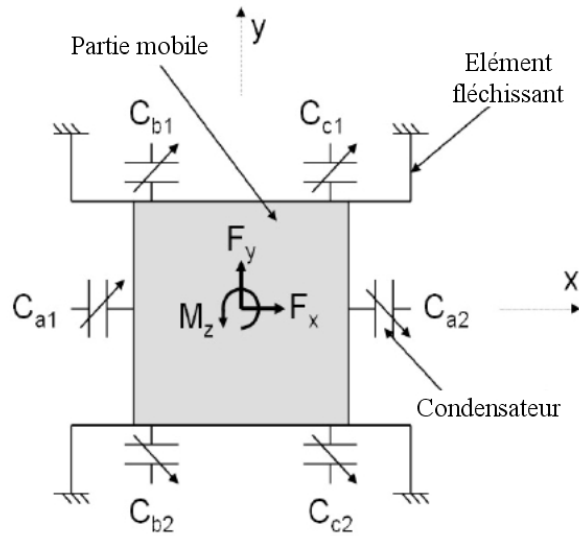


FIG. 1.23 – Configuration du capteur

### 1.5.2 Les capteurs à grandes déformations ou grands déplacements

Certains capteurs de microforces utilisent comme partie sensible une poutre embarquée dans une structure qui permet des grandes déformations. Dans ce cas, la déformation de la poutre est mesurée à l'aide des dispositifs optiques comme les microscopes, les cameras, les capteurs laser . . . Ces capteurs possèdent généralement des plages de mesure étendues du fait des grandes déformations possibles.

Le capteur de type *MEMS* présenté dans [24] est un capteur 1ddl utilisé pour étudier les effets d'une sollicitation mécanique sur des cellules biologiques. Le capteur se compose d'une sonde souple et de poutres flexibles (voir figure 1.24).

La sonde est utilisée pour étirer les cellules, les poutres, quant à elles, mesurent la force appliquée. La raideur estimée du capteur est de l'ordre de  $0.0034N/m$  dans l'axe longitudinal de la poutre (les raideurs beaucoup plus grandes dans les autres directions ne sont pas précisées). La poutre est donc censée se déplacer uniquement longitudinalement lorsqu'un effort est appliqué à son extrémité. Ce déplacement est ensuite mesuré à l'aide d'un microscope optique couplé à une caméra *CCD*.

Dans les dispositifs que nous avons décrits, on observe que la mesure de force dépend fortement de la mesure des déplacements des parties compliantes. Habituellement en microrobotique, on utilise des dispositifs de grande précision et répétabilité pour la détection des déplacements. Ainsi, ces deux critères ne sont pas les facteurs limitatifs des performances de ces capteurs. La limitation de la mesure vient plutôt des critères suivants :

- **la plage de mesure (ou l'étendue de mesure)** : il s'agit de la plage de mesure  $\Delta F_{max}$  dans laquelle le constructeur garantit les performances métrologiques dans

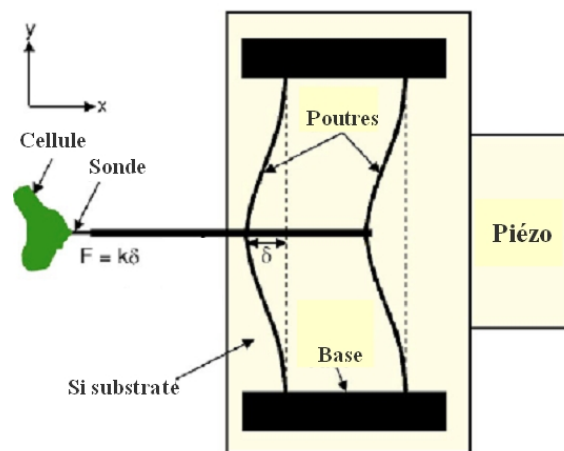


FIG. 1.24 – Capteur de forces à grandes déformation

la limite d'une certaine tolérance ;

- **la résolution** : c'est la plus petite variation  $\delta F_{min}$  de la force que peut mesurer le capteur de force.

La résolution est affectée par les deux paramètres suivants :

- **la raideur**  $K$  : c'est la pente de la caractéristique statique «force  $F$  en fonction du déplacement ou de la déformation  $\Delta d$ ». Précisons que si cette caractéristique est non linéaire, la pente n'est pas constante ;
- le plus petit déplacement  $\delta d_{min}$  mesurable qui est lié au capteur de déplacement utilisé.

En microrobotique nous utilisons des dispositifs de mesure de déplacement de grande résolution (typiquement de l'ordre d'une dizaine de  $nm$ ). De ce fait, la résolution d'un capteur de forces  $\delta F_{min}$  n'est principalement affectée que par la raideur (voir figure 1.25). Ainsi, plus la raideur est faible et plus la résolution de mesure de forces augmente pour un  $\delta d_{min}$  donné.

La plage de mesure  $\Delta F_{max}$  est affectée, quant à elle, par les deux paramètres suivants :

- la plus grande déformation ou le plus grand déplacement  $\Delta d_{max}$  produit et mesurable du corps d'épreuve ou de la masse sismique ;
- la raideur  $K$ .

Pour avoir une grande plage de mesure  $\Delta F_{max}$  il faut soit que la raideur soit importante pour un déplacement  $\Delta d_{max}$  donné, soit que le déplacement  $\Delta d_{max}$  soit important pour une raideur donnée (voir figure 1.25). Cependant, nous avons vu précédemment que pour avoir une résolution importante, il faut avoir la plus petite raideur possible. De ce fait, il faut alors augmenter le débattement du corps d'épreuve ou de la masse

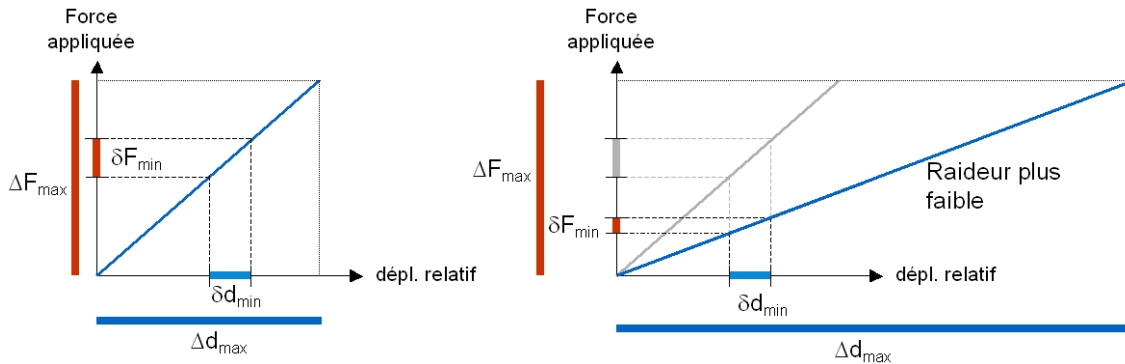


FIG. 1.25 – Pente de la caractéristique force-déplacement.

sismique pour que la plage de mesure de forces soit la plus grande possible (figure 1.25, schéma de droite).

En conclusion, un « bon » capteur de forces pour la microrobotique, si on désire à la fois une bonne résolution et une grande plage de mesure, est un capteur caractérisé par une raideur faible (si possible constante) et une grande capacité de déformation ou de déplacement. Par ailleurs, la plage de mesure de forces attendue en microrobotique varie typiquement de quelques  $nN$  à plusieurs  $mN$ . Les débattements des parties compliantes ne sont plus suffisants pour effectuer une mesure de forces sur toute cette plage. La solution qui peut être envisagée pour ces problèmes est de remplacer les parties compliantes de faibles dimensions par des parties mobiles, équipées de liaisons mécaniques. Bien que les débattements soient plus importants en procédant ainsi, ces corps d'épreuve sont sujets aux problèmes des frottements secs par le contact mécanique entre les pièces en mouvement. De ce fait, les performances globales des capteurs de forces se voient dégradées. Une solution possible pour diminuer cet effet néfaste, tout en gardant le principe du déplacement d'une partie mobile, est de réduire la surface de contact mécanique entre les liaisons mécaniques. Grâce aux procédés des microtechniques, il est possible actuellement de réduire les dimensions des liaisons mais les forces de frottements secs restent encore importantes. Dans l'optique de la conception d'un capteur de forces, une solution possible qui permet de supprimer tout contact mécanique entre la partie mobile et l'ossature du capteur est l'utilisation de la lévitation. Grâce à la lévitation, la partie mobile est particulièrement sensible à toute force extérieure. Elle peut de plus subir des déplacements importants ce qui permet de concevoir un capteur de force avec une grande résolution et une grande plage de mesure.

C'est dans cet esprit qu'un capteur de micro et nano force a été développé au Laboratoire d'Automatique de Besançon (LAB) devenu depuis le département Automatique et Systèmes Micro-Mécatronique (AS2M) de l'institut Femto-ST [25][26]. Ce capteur utilise la mise en lévitation passive de deux aimants permanents  $m$  solidarisés par un micro-capillaire en verre de diamètre  $0.5\text{ mm}$  et d'épaisseur  $0.1\text{ mm}$ . Cette structure  $S$  forme

donc une masse sismique sous la forme d'une tige qui va léviter passivement de manière stable. Elle est représentée sur le schéma de droite de la figure 1.26 (sur ce schéma, les 2 aimants  $m$  de la tige sont cachés par les plaques de graphite diamagnétique).

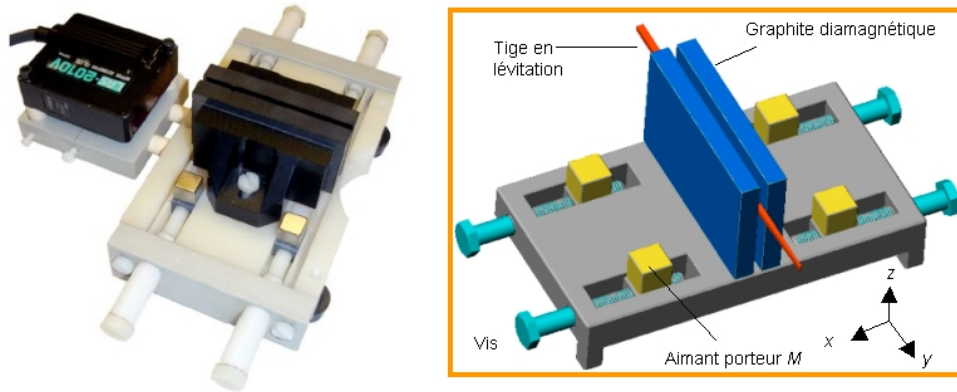


FIG. 1.26 – Prototype de capteur de micro forces par lévitation diamagnétique.

Les aimants cubiques  $M$  génèrent le champ magnétique statique dans lequel sont plongés les aimants  $m$  de la tige. Ces derniers subissent de ce fait une force et un couple magnétique. Ces efforts magnétiques génèrent une position d'équilibre stable dans le plan  $(yOz)$  pour chaque aimant  $m$  de la tige. Les plaques diamagnétiques permettent de stabiliser cet équilibre dans la direction  $x$  grâce aux efforts diamagnétiques répulsifs qu'elles exercent sur les aimants de la tige. La tige possède donc une position d'équilibre stable dans l'espace. Si on la déplace de plusieurs millimètres dans le plan  $(yOz)$ , elle revient naturellement à sa position d'équilibre et forme de ce fait un «ressort magnétique».

Sous l'action d'une force  $F^{ext}$  portée par  $y$  et exercée sur l'extrémité de la tige, cette dernière va se déplacer selon  $y$  et va donc subir la force de rappel du ressort magnétique (voir figure 1.27). A l'équilibre statique, cette force magnétique compense exactement l'effort  $F^{ext}$ . Pour des déplacements selon  $y$  inférieurs au millimètre, on montre que cette force est (quasi) linéaire en fonction du déplacement (voir figure 1.28), d'où une raideur  $K_y$  constante.

Connaissant le déplacement via un capteur situé à l'arrière de la tige et connaissant la raideur  $K_y$  par étalonnage, on peut donc déterminer la force  $F^{ext}$  à l'équilibre statique. La raideur  $K_y$  peut être ajustée en modifiant l'écartement des aimants  $M$  (les vis de la figure 1.26). Une telle capacité d'ajustement est très rare sur un capteur de microforce. La raideur minimale  $K_y$  obtenue avec ce prototype est de l'ordre de  $0,02 N/m$ . La tige pouvant léviter sur plusieurs millimètres, ce capteur possède donc à la fois une grande sensibilité et une grande plage de mesure.

Le problème majeur de cette technique reste le poids du corps en lévitation. En effet, les forces de rappel magnétiques sont faibles, ce qui impose des contraintes par rapport au poids de la structure qui lévite.

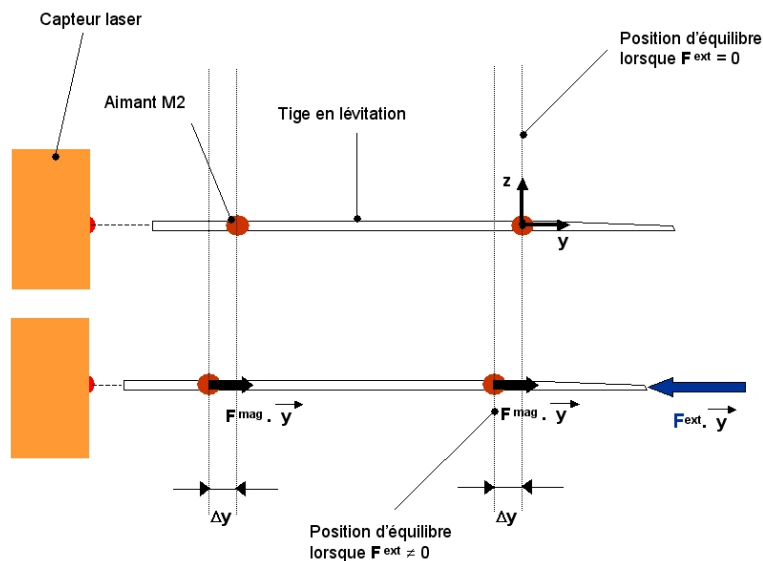


FIG. 1.27 – Tige en lévitation diamagnétique

### Caractérisation de raideur mécanique

A partir de ce principe de mesure, il est possible d'envisager une station de caractérisation de raideur mécanique telle que représentée sur la figure 1.29.

Le principe est donné sur la figure 1.30 : une microstructure déformable solidaire d'une plate-forme  $P$  (support échantillon) est mise en contact avec la tige du capteur qui est à sa position d'équilibre. La plate-forme  $P$  est avancée d'une distance  $\Delta p$  connue.

La tige se déplace d'une distance  $\Delta y$  connue qui vaut  $\Delta p$  moins la déformation  $\Delta d$  de la microstructure au point de contact. Autrement dit, on a  $\Delta y = \Delta p - \Delta d$ . La déformation inconnue est donc  $\Delta d = \Delta p - \Delta y$  qui est générée par la force  $F = K_y \Delta y$  mesurée par le capteur, d'où la raideur :

$$K = \frac{F}{\Delta d} = \frac{K_y \Delta y}{\Delta p - \Delta y} \quad (1.7)$$

## 1.6 La mesure de force par capteur actif

Tous les capteurs de microforce que nous avons cités jusqu'à présent, sont des capteurs passifs (non-asservis), dans lesquels, la force est mesurée à partir d'un déplacement ou d'une déformation (petite ou grande selon le type de capteur) d'un corps d'épreuve. Certains capteurs de microforces utilisent le principe de mesure de force actif décrit dans la section (1.2).

En matière de réalisation, nous citons le prototype de *SFA* (appareils à force de surface) de l'école centrale de Lyon [27] [28]. Le principe du *SFA* consiste à rapprocher



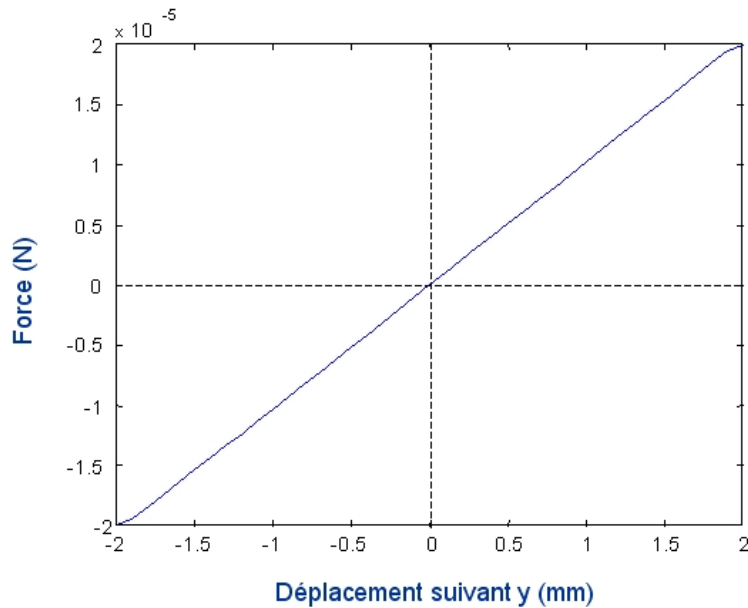


FIG. 1.28 – Caractéristique (théorique) force-déplacement du capteur

une surface mobile (un plan ou une sphère) d'une surface fixe (un plan) et à imposer l'écart entre les deux, on travaille donc à déplacement imposé. Ensuite, on mesure lors des phases d'approche et de retrait, la force d'interaction entre elles, ainsi que la distance qui les sépare [29] (voir figure 1.31).

La sonde est une pointe de diamant capable de balayer la surface d'un échantillon, grâce à trois actionneurs piézoélectriques, contrôlés par trois capteurs capacitifs. Ces capteurs capacitifs spécialement conçus, permettent de contrôler précisément les déplacements suivant les trois axes  $x$ ,  $y$  (parallèle au plan porte-échantillon) et  $z$  (la normale au plan porte-échantillon). La sensibilité aux déplacements est de  $10^{-2}nm$  dans chaque direction. Deux cantilevers qui soutiennent l'échantillon sont équipés de deux capteurs capacitifs haute résolution ( $2 \times 10^{-6} m/N$ ), permettent la mesure de la force normale quasi-statique et les deux forces tangentielles ( $F_x$  et  $F_y$ ), avec une résolution de  $10^{-8} N$ . Trois boucles de rétroaction sont utilisées pour contrôler la haute tension des amplificateurs associés aux actionneurs piézoélectriques. Deux boucles de rétroaction permettent de contrôler les déplacements tangentiels  $x$  et  $y$ . La figure 1.32 représente le diagramme du système bouclé.

La sortie  $u(t)$  du contrôleur est à l'entrée d'un amplificateur de puissance qui alimente l'actionneur piézoélectrique. Les consignes de déplacement (à l'entrée du contrôleur) suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont respectivement  $x_c$  et  $y_c$ .

Les opérations dans le sens normal peuvent être effectuées, soit en contrôlant les déplacements suivant  $z$ , soit en contrôlant la force normale  $F_z$  [30]. Dans ce cas, un *scratch test* peut se faire, soit avec une profondeur de pénétration constante, soit avec une force normale constante.

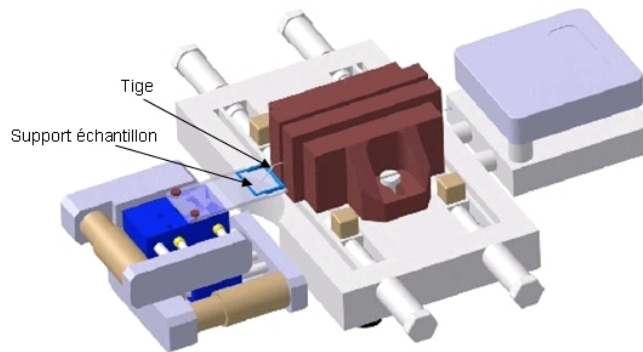


FIG. 1.29 – Station de caractérisation d'une raideur mécanique

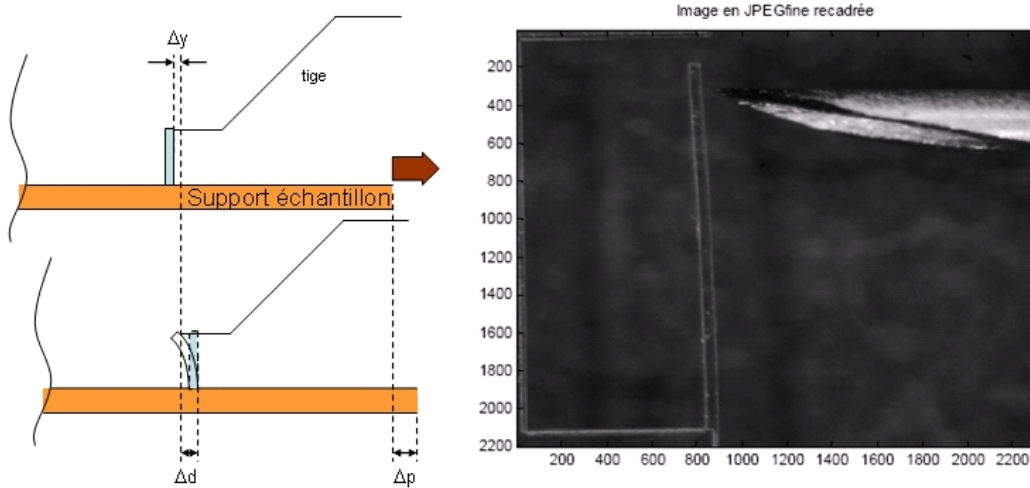


FIG. 1.30 – Principe de caractérisation d'une raideur mécanique

En ce qui concerne la micromanipulation, on ne trouve pas dans la littérature de capteurs de microforces asservis dédiés à ce type de problématique. Par contre, on trouve des micro-accéléromètres asservis dont le principe de mesure est très similaire au principe des capteurs de microforces.

L'accélération  $\gamma$  correspond, d'après la loi fondamentale de la dynamique  $\vec{F} = m\vec{\gamma}$  à une relation entre une force  $\vec{F}$  et une masse  $m$  ; les capteurs d'accélération font tous appel dans leur principe à un phénomène physique permettant, à partir de cette relation, d'obtenir une grandeur électrique ou une information visualisable pour un opérateur.

Côté principes de mesure, l'offre est globalement divisée en quatre.

Les accéléromètres piézoélectriques, piézorésistifs, capacitifs et asservis couvrent à eux quatre la grande majorité des applications. Leur principe est très similaire. Ces capteurs intègrent généralement une masse sismique suspendue par un ressort. En mesurant la force à laquelle est soumise cette masse, on déduit l'accélération. Seul le principe de

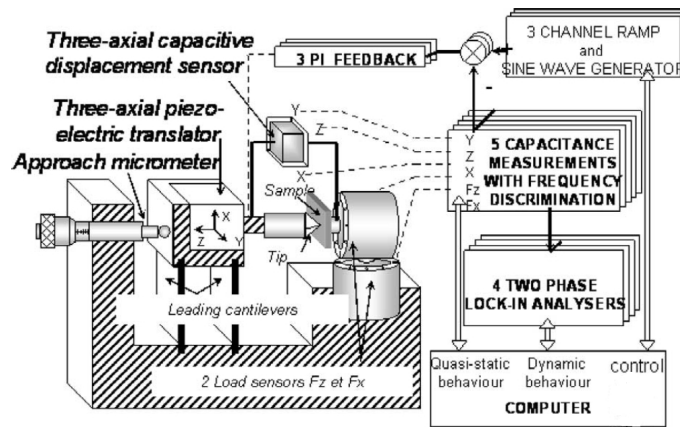


FIG. 1.31 – Shéma diagramme de l'appareil à force de surface

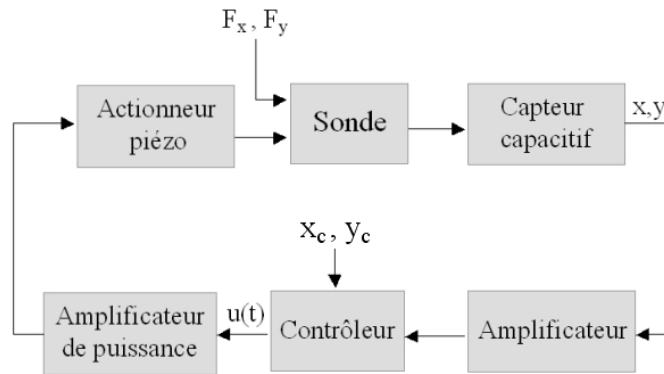


FIG. 1.32 – shéma diagramme du système bouclé

mesure de la force change d'une technologie à l'autre.

Dans la plupart des capteurs piézoélectriques, la masse sismique exerce des efforts de compression ou (le plus souvent) de cisaillement sur un matériau piézoélectrique qui génère alors une charge électrique proportionnelle à la force qui lui est appliquée (donc l'accélération à mesurer). Dans les capteurs piézorésistifs, c'est un peu le même principe, sauf que la masse sismique est le plus souvent solidaire d'une poutre dont on mesure la déformation (avec des jauges piézorésistives). Avec les accéléromètres capacitifs, en revanche, on s'intéresse généralement au déplacement de la masse sismique sous l'effet de l'accélération. La masse se déplace en effet entre deux électrodes. La variation de tension aux bornes de celles-ci traduit alors l'accélération (d'autres accéléromètres capacitifs intègrent une sorte de diaphragme dont le mouvement varie en fonction de l'accélération).

Dans le cas des accéléromètres asservis, enfin, il n'y a pas de déplacement de la masse sismique : on crée une force (d'origine électrostatique ou électromagnétique) égale et opposée à celle qu'induit l'accélération pour maintenir la masse sismique dans sa posi-

tion initiale. La force appliquée est alors proportionnelle à l'accélération à mesurer. Les accéléromètres asservis ont en général de très bonnes caractéristiques et sont les plus onéreux. Parmi leurs avantages, on peut noter qu'ils passent la composante continue et qu'ils offrent de très hautes résolutions.

En matière de réalisation, il existe de nombreux prototypes d'accéléromètres asservis. On peut relever la réalisation faite à l'université *Joseph Fourier* de Grenoble [31]. Cette réalisation est un micro-accéléromètre linéaire asservis, dont le corps d'épreuve est une masse sismique  $m$  micro-usinée sur un substrat silicium (*SOI*). Cette masse sismique est suspendue et maintenue dans sa position centrale ( $x = 0$ ) par quatre bras de suspension appelés poutre  $P$  (voir figure 1.33).

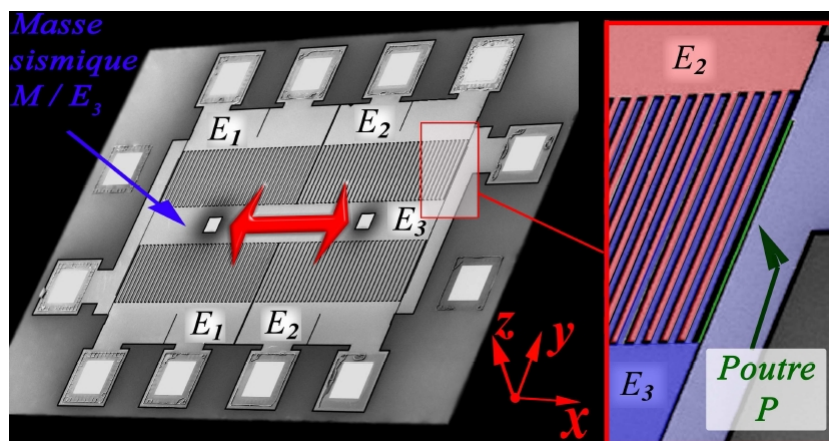


FIG. 1.33 – Configuration de l'accéléromètre.

L'accéléromètre est sensible aux forces inertielles appliquées dans la direction ( $Ox$ ) (axe de déplacement autorisé par les bras de suspension). Des capacités de type peignes interdigités sont formées entre l'électrode  $E_3$  correspondant à la masse sismique mobile  $m$  et les électrodes fixes  $E_1$  et  $E_2$ . Ces électrodes permettent de réaliser la lecture du déplacement  $x(t)$  et de générer la force électrostatique  $F_{cr}(t)$  de contre réaction. L'étendue de mesure de l'accéléromètre est limitée par la valeur maximale de la force électrostatique et elle est comprise entre  $-80 \text{ m.s}^{-2}$  et  $80 \text{ m.s}^{-2}$ , avec une résolution de  $1 \mu\text{m.s}^{-2}$  et une bande passante de  $122 \text{ Hz}$ .

## 1.7 Le marché des capteurs de forces pour la micromanipulation

La mesure de forces inférieures au millinewton constitue un marché émergent sur lequel sont positionnés pour l'instant très peu d'acteurs industriels. En Europe, on peut citer entre autres :

- **Picotwist** qui est une jeune entreprise positionnée sur la mesure d'efforts inférieurs au nanonewton (piconewton) [32]. Récemment, cette entreprise a mis sur le marché un appareillage de pinces magnétiques. Le dispositif se compose de deux parties distinctes : un algorithme de positionnement 3D et un jeu d'électro-aimants permettant un déplacement 3D de la particule étudiée. Cet appareil permet de manipuler des particules micrométriques complexes telles que l'ADN à l'aide des billes magnétiques et de mesurer les forces qui leurs sont appliquées. Ces billes magnétiques sont d'abord piégées dans un puit de potentiel de raideur  $10^{-7} N/m$  et observées par microscopie optique. Ainsi, elles peuvent être déplacées (translation et rotation) grâce à six électro-aimants produisant les gradients de champ requis. Une analyse du mouvement brownien des particules permet de mesurer des forces comprises entre  $10^{-14}$  et  $10^{-10} N$ .

- **Femtotools**<sup>6</sup> qui a développé un capteur de micro forces capacitif avec une large bande passante (7,8 kHz). Le capteur est doté d'une sonde (3 mm de longueur) sur laquelle la charge est appliquée, et il est capable de mesurer des forces comprises entre 10 nN et 10  $\mu N$ . L'électronique de lecture intégrée convertit la charge en un signal analogique. La tension de sortie du capteur varie entre 0 et 5V.

## 1.8 Le marché de la nanotribologie

Le marché de la nanotribologie, est un marché en pleine expansion à cause du développement des microsystèmes et l'avènement des nanomatériaux. En matière de réalisation, il existe de nombreux prototypes de laboratoire. Alors que sur le marché, on trouve peu d'acteurs industriels. On peut relever :

- Le nanotribomètre (*CSM Nano Tribometer*), commercialisé par l'entreprise *CSM Instrument*<sup>7</sup> dont le siège Européen est en Suisse. L'effecteur est une bille ou un pion (voir figure 1.34) monté sur un cantilever de raideur prédéterminée.

Ce pion est appliqué sur une surface avec une faible force normale  $F_n$  parfaitement contrôlée à l'aide d'un capteur piézoélectrique. Le coefficient de frottement est déterminé en temps réel en mesurant la déflexion du bras élastique du cantilever à l'aide d'un capteur optique. Le taux d'usure de l'échantillon est évalué en calculant le volume érodé au cours du test. Le nanotribomètre de *CSM* est capable d'appliquer sur une surface, un effort normal allant de 50  $\mu N$  à 1N avec une résolution de 1 $\mu N$ . Il est proposé sous deux modes de fonctionnement (rotatif et alternatif). La plage de mesure des forces tangentielles (force de frottement) varie de 10 $\mu N$  à 1N, avec une résolution de 1 $\mu N$ . Un point particulier de cet instrument repose sur la possibilité d'interrompre le test dès que le coefficient de frottement atteint une valeur prédéfinie, ou, lorsqu'un nombre de cycles est réalisé. De plus, les tribomètres sont équipés d'une enceinte de confinement afin d'utiliser l'instrument dans des conditions atmosphériques de température et d'hygrométrie contrôlées.

<sup>6</sup><http://www.femtotools.com/>

<sup>7</sup><http://www.csm-instruments.com/>

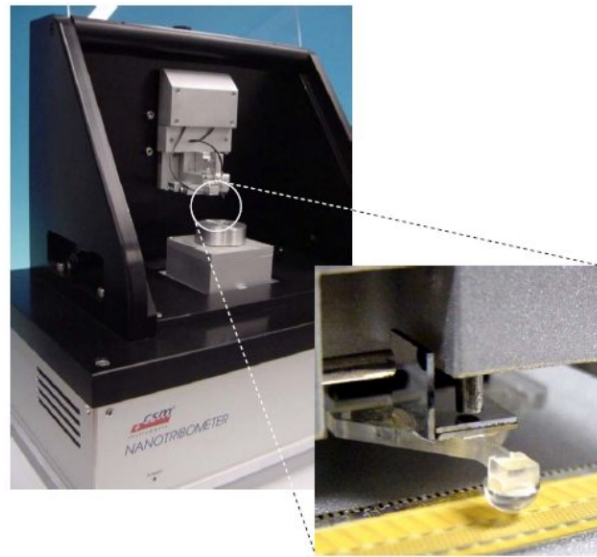


FIG. 1.34 – CSM Nano Tribomètre

- L'entreprise *TETRA GmbH* située en Allemagne, propose également un système de mesure de microforces pour des applications en microtribologie [33] [34]. Le capteur est composé d'une petite structure mécanique déformable de quelques centimètres carrés en métal et d'un système optique de mesure de déplacement utilisant une fibre optique.

- *Robomat*<sup>8</sup> est un important projet qui a débuté en 2005 avec un partenariat entre *Conti Temic GmbH* (Nürnberg, Deutschland), *Forschungszentrum Caesar* (Bonn, Allemagne), *Amic GmbH* (Berlin, Deutschland), *Klocke Nanotechnik* (Aachen, Allemagne) et *Nanoscale Technologies GmbH* (Kassel, Allemagne). Le but du projet est le développement d'un système de mesure et d'analyse pour l'indentation des matériaux et les scratch tests, en partie avec un système d'imagerie intégré pour la topographie. Dans le cadre de ce projet, *Klocke Nanotechnik*<sup>9</sup> a mis au point des nouveaux appareils de mesure et de conception des surfaces à l'échelle du nanomètre. Outre les expériences d'indentation et les mesures topographiques des surfaces en 2D et 3D, le système permet la mesure des microforces mises en jeu, l'imagerie 3D ou la lithographie des surfaces. Dans le cadre du même projet, *Caesar GmbH*<sup>10</sup> a mis au point deux capteurs pour la caractérisation mécanique des surfaces. La première est un guide d'onde optique fixé sur un cantilever en silicium. Ce capteur permet de mesurer la flexion du cantilever durant l'indentation et les scratch tests. Le deuxième capteur est conçu pour des raideurs plus élevées et des forces plus importantes. Une structure mécanique piézo-tube possède plusieurs électrodes capables de mesurer les forces en 3D durant l'indentation et les scratch

<sup>8</sup><http://www.mstnews.de/downloads/pdf/news-0507.pdf>

<sup>9</sup><http://www.nanomotor.de/>

<sup>10</sup><http://www.caesar.de/>

*tests.*

## 1.9 Caractéristiques d'un capteur

Dans cette section, nous allons présenter les critères utilisés pour caractériser communément un capteur ainsi que les définitions couramment utilisées. Outre que la résolution et la plage de mesure, abordés dans la section (1.5.2) de ce chapitre, plusieurs critères permettent de caractériser un capteur. Parmi ces critères, on trouve les caractéristiques fréquentielles suivantes :

- **la bande passante** : la notion de bande passante est primordiale pour caractériser les performances d'un capteur, à savoir la plage de fréquence pour laquelle un signal en entrée est observé en sortie avec un gain supérieur à une certaine valeur (en général 3 ou 6 *dB* inférieure au gain maximal de la fonction de transfert). On peut distinguer deux types de capteurs : les capteurs capables de mesurer les signaux continus (*pas*se – *bas*) et ceux ne le pouvant pas (*pas*se – *bande*) ;
- **la fréquence de résonance (ou fréquence propre)** : c'est la fréquence à laquelle l'élément sensible du capteur entre en résonance. Elle doit bien sûr être la plus élevée possible, et largement supérieure aux fréquences dans lesquelles se fait la mesure. L'excitation de la fréquence de résonance du capteur suffit à l'endommager.

Pour les capteurs incluant le continu et lorsque la grandeur à mesurer varie lentement dans le temps, la dynamique du capteur peut être négligée. Il est alors possible de définir les critères de performances statiques suivantes :

- **l'hystérésis** : la qualité de la courbe de réponse statique peut être dégradée par des phénomènes donnant lieu à une hystérésis (utilisation de matériaux magnétiques, par exemple) ;
- **dérive** : les dérives sont les modifications de la courbe de réponse statique du capteur dans le temps. Ces modifications peuvent être dues à des changements à court terme des conditions de fonctionnement :
  - perturbations : pression, température, humidité . . . On parle alors de sensibilité extrinsèque. Elles sont éventuellement compensables si l'on dispose d'une mesure et d'un modèle correct de l'influence de ces perturbations. D'autres dérives peuvent être dues à des phénomènes à plus long terme et sont éventuellement irréversibles ;
  - vieillissement, fatigue des structures, fluage, oxydation. La dérive du biais de sortie est un type courant de dérive. La courbe de réponse est alors décalée verticalement d'une valeur identique pour toutes les valeurs de l'entrée ;

- **la répétabilité** : c'est la capacité d'un capteur à restituer la même information de sortie pour des mesures identiques, dans des conditions identiques et séparés par un court laps de temps. La répétabilité caractérise donc la dispersion des mesures.

Dans le cas des capteurs asservis, on s'intéresse plutôt aux critères dynamiques suivantes :

- **stabilité** : Un système est stable si à tout signal d'entrée  $e(t)$  borné correspond une réponse  $s(t)$  bornée ;
- **la rapidité** : c'est le temps de réaction d'un capteur entre la variation de la grandeur physique qu'il mesure et l'instant où l'information est prise en compte et compensée par la partie commande ;
- **la précision dynamique** : c'est l'écart entre la sortie et l'entrée pendant le régime transitoire. Précision et rapidité sont intimement liées durant cette phase d'évolution du système ;
- **la réponse en gain** sur la bande passante de la mesure : si le gain de la fonction de transfert associée au capteur n'est pas constant sur la bande passante, la sensibilité du capteur est fonction de la fréquence de variation de la grandeur en entrée ;

A côté des caractéristiques liées à la qualité de la mesure, on peut associer à un capteur d'autres critères de performances, tels que l'encombrement, la consommation, le coût de fabrication et la durée de vie. L'ensemble de ces critères détermine les applications et le marché potentiel du capteur.

## 1.10 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons détaillé le contexte de la mesure de force à l'échelle microscopique et nanoscopique. Nous nous sommes particulièrement intéressés à deux problématique qui concernent la micromanipulation et la nanotribologie. Les moyens, les difficultés et les contraintes imposées ont été mis en évidence pour ces deux problématiques. Nous avons vu que les modèles physiques qui régissent le comportement de ces objets sont différents de ceux que nous employons habituellement. Ainsi, des forces que nous avons l'habitude de négliger dans le macromonde de par leur faible influence, deviennent prépondérantes et engendrent des interactions avec le micromonde difficilement prédictibles. Malgré les efforts des microroboticiens, des lacunes subsistent encore sur les lois physiques de comportement dans le micromonde.

Les dispositifs actuels de mesure de micro et nano forces permettent de caractériser dans une certaine mesure les interactions présentes dans le micromonde. Ainsi, il est possible d'étoffer les modèles de comportement du micromonde ou encore d'en établir



de nouveaux. Ce travail ne peut se réaliser qu'au travers de la mesure expérimentale des forces dans des cas concrets et représentatifs des phénomènes physiques. Il est donc nécessaire de disposer de capteurs de forces performants et adaptés à ces problématiques. Le capteur de forces «idéal» pour la microrobotique est un capteur conjuguant à la fois grande résolution et grande étendue de mesure (grand déplacement ou déformation). Dans les capteurs de forces actuellement utilisés en microrobotique, les parties compliantes ne permettent pas un débattement suffisant pour couvrir une large plage de mesure (typiquement du  $nN$  au  $mN$ ). Une solution pour augmenter ce débattement consiste à utiliser un principe de mesure qui ne repose pas sur la déformation d'un corps d'épreuve mais sur le déplacement d'une masse sismique. Si la partie mobile peut subir un grand déplacement, le capteur sera alors capable de mesurer une large plage de force à condition que la raideur reste faible pendant tout le déplacement. Le principal facteur qui limitera les performances d'un tel capteur sera évidemment les frottements secs que subira la masse sismique. Il s'agit donc de concevoir un capteur dépourvu de frottement sec et ayant de performances plus intéressantes que celui initialement développé à l'AS2M en 2003 (figure 1.26). Ce capteur devra utiliser une masse sismique, être capable de mesurer les efforts selon 3ddl et devra pouvoir être asservi.

## Chapitre 2

# Mécanisme de flottaison-magnétique

*Au cours de ce chapitre, nous allons présenter les concepts et les éléments fondamentaux indispensables à la compréhension de la plate-forme de mesure de micro et nano forces. Ces principes importants ont servi de fondement pour la conception de la plate-forme, notamment au travers d'une configuration élémentaire que l'on a appelé mécanisme de flottaison magnétique (MFM).*

### 2.1 Principe de mesure de force passif

Nous avons vu au cours du premier chapitre qu'un capteur de force qui présente des intérêts en basse fréquence pour la microrobotique est un capteur avec une faible raideur (si possible constante) et une grande plage de mesure. Nous avons vu aussi que la réalisation d'un tel capteur est possible, en utilisant un principe qui repose sur le déplacement d'une partie mobile macroscopique indéformable pour la plage d'effort considérée, caractérisée par une faible raideur  $K$ , ajustable si possible (voir figure 2.1).



FIG. 2.1 – Principe de mesure de force

Cette partie mobile constitue l'organe sensible (aux efforts) du capteur et doit présenter un équilibre stable dans l'espace. Cette stabilité doit être de préférence passive pour limiter la complexité du dispositif. Le déplacement  $\vec{d}$  de la partie mobile, suite à une force externe  $\vec{F}_{ext}$  qui lui est appliquée, est mesuré à l'aide d'un capteur de position à grande résolution. En régime stationnaire, si le capteur est linéaire sur sa plage de fonctionnement, ce déplacement est proportionnel à la force externe appliquée, avec :

$$\vec{F}^{ext} = K.\vec{d} \quad (2.1)$$

où  $K$  est la matrice de raideur qui donne la relation entre la force et la déformation constatée.

Dans le micromonde, ce principe de mesure doit se faire sans contact mécanique direct entre la partie mobile du capteur et la partie fixe, afin de supprimer les frottements secs. Ces derniers sont difficilement prédictibles, ils réduisent les performances du capteur (phénomène de *stick – slip*). Par ailleurs, au prix d’une réduction de bande passante, on peut tolérer des frottements visqueux entre la partie mobile du capteur et son environnement proche qui peut être de ce fait de nature gaz ou liquide. Dans ce cas, cette partie mobile sera dépourvue de toute sorte de contact sec, et elle sera sensible au moindre effort qui s’applique sur elle. Les principes physiques qui permettent d’éviter les frottements secs et qui tolèrent les frottements visqueux sont au moins au nombre de deux : la lévitation et la flottaison.

## 2.2 Lévitiation : définition et formes existantes

Depuis toujours la lévitation a suscité la fascination de l’homme. Elle a même été, durant les siècles derniers, attribuée à des actes de sorcellerie ou de magie. De nos jours, la manifestation de la lévitation sous la plupart de ses formes est bien assimilée. Ceci étant, le terme de lévitation a souvent été utilisé à tort et prêté à confusion. Une définition, n’ayant pas caractère d’exhaustivité, peut être formulée ainsi : *Tout objet, quelle que soit sa nature, lévite s’il est suspendu en équilibre stable sous l’action de forces sans qu’il y ait un frottement sec entre l’objet et son environnement proche*. La lévitation peut être réalisée dans différents environnements (air, vide et milieux liquides), elle s’utilise cependant plus communément dans l’air.

La lévitation peut être de différente nature selon l’origine des forces mises en jeu pour stabiliser l’objet. Ainsi, la lévitation, telle qu’elle a été définie, peut être d’origine magnétique, électromagnétique, aérostatique, aérodynamique, électrostatique, électrodynamique, acoustique ou lumineuse. A cela, peuvent s’ajouter la qualification *passive* ou *active*. Cette qualification dénote s’il y a apport d’énergie extérieure (électrostatique, électromagnétique, etc.) ou pas pour créer le phénomène physique mis en jeu.

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques formes possibles de la lévitation, en citant les avantages et les inconvénients de chaque forme.

### Lévitiation acoustique

La lévitation acoustique repose sur le principe qu’une onde acoustique exercée sur un objet distant de  $h$  de la source, produit une pression  $P$  sur l’objet [35]. Sous certaines

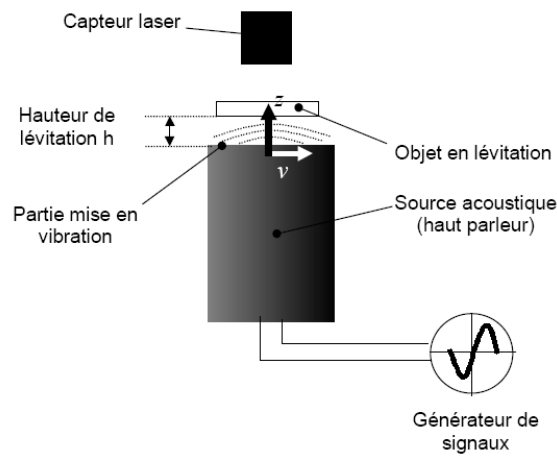


FIG. 2.2 – Lévitation acoustique

conditions (fréquence et amplitude du signal, géométrie, etc.), il est possible de faire léviter des objets, de quelques grammes, sous leur forme liquide ou solide. La lévitation acoustique est une lévitation active et non asservie.

La configuration la plus couramment utilisée est présentée à la figure 2.2. Elle est composée d'une source acoustique (tel qu'un haut-parleur) alimentée par un générateur de tensions sinusoïdales. L'objet à faire léviter est placé au-dessus de la source acoustique. La forme de l'objet est considérée comme un paramètre de réglage supplémentaire car il conditionne la lévitation. Les fréquences d'excitation sont de l'ordre d'une vingtaine de kilohertz. La hauteur de lévitation n'excède pas la centaine de micromètres. De ce fait, l'étude se limite le plus souvent à l'effet d'une onde acoustique à champ proche. Ainsi, il est possible de faire l'hypothèse que l'onde produite est quasi-stationnaire.

Les avantages de la lévitation acoustique peuvent être résumés ainsi :

- lévitation non asservie ;
- s'emploie pour des objets à l'état solide ou liquide ;
- plusieurs positions d'équilibre (dans le plan) existent pour une hauteur de lévitation constante ;
- hauteur de lévitation variant proportionnellement à la tension d'excitation de la source acoustique.

Les inconvénients de la lévitation acoustique se résument ainsi :

- emploi de matériel onéreux ;
- inexistence de couple de rappel sur l'objet en lévitation induit par l'utilisation de l'effet acoustique (pas de stabilité selon 6ddl) ;
- risque de mettre en résonance l'objet en lévitation en raison de l'ordre des fréquences utilisées.

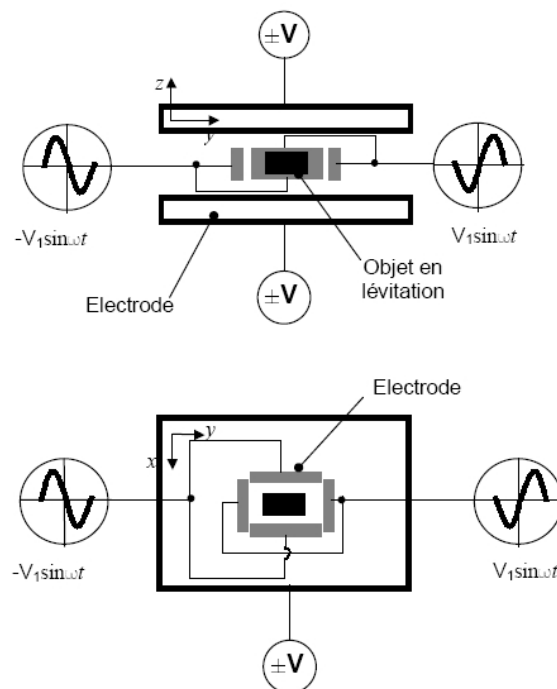


FIG. 2.3 – Lévitation électrostatique (vue de côté et de haut)

### Lévitation électrostatique

La lévitation électrostatique s'appuie sur le fait que des charges électriques présentes sur les surfaces d'éléments conducteurs engendrent des forces d'attraction ou de répulsion qui tendent à attirer ou à repousser les surfaces conductrices. La configuration de base réalisant la lévitation électrostatique est présentée sur la figure 2.3. Des surfaces conductrices immobiles sont chargées suite à l'application d'un champ électrostatique  $\vec{E}$ . L'objet à faire léviter étant lui aussi chargé, il va subir des forces qui tendent à le rapprocher ou à l'éloigner des surfaces conductrices [36].

Les électrodes du haut et du bas, lorsqu'elles sont alimentées convenablement, servent à produire la stabilité suivant la direction  $\vec{z}$ . L'objet en lévitation étant libre de se mouvoir suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , les électrodes de part et d'autre de l'objet servent à son immobilisation. La lévitation électrostatique s'apparente à de la lévitation active et asservie. Du fait de son instabilité naturelle, le recours à l'asservissement est nécessaire.

Les avantages de la lévitation électrostatique peuvent être résumés ainsi :

- dimensions des électrodes pouvant être de taille réduite conduisant à la réalisation de prototypes compacts avec des dimensions micrométriques possibles ;
- s'emploie sur des objets de différentes natures et formes dès lors qu'ils présentent une caractéristique diélectrique ;
- l'instabilité produite par l'effet électrostatique ne porte que suivant une seule di-

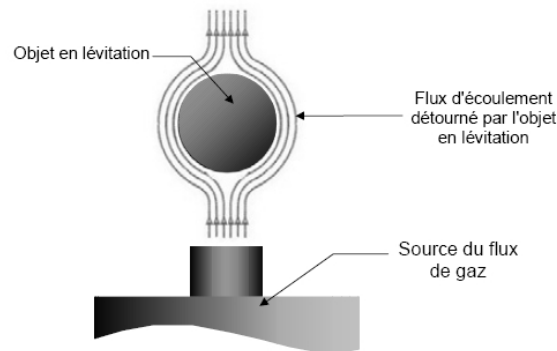


FIG. 2.4 – Lévitation aérodynamique.

rection.

Les inconvénients de la lévitation électrostatique se résument ainsi :

- lévitation asservie ;
- tensions d'alimentation de l'ordre du  $kV$  ;
- nécessité de charger l'échantillon ;

### Lévitation aérodynamique

Dans la lévitation aérodynamique, l'objet en lévitation reste suspendu sous l'action du flux d'un gaz ascendant. L'écoulement de ce flux, au contact d'un objet solide, est détourné de sa voie normale. Les caractéristiques du nouvel écoulement ainsi obtenu sont fonctions de la vitesse du flux ainsi que du profil de l'objet. La figure 2.4 présente la structure conventionnelle pour la réalisation de la lévitation aérodynamique d'un objet présentant des symétries.

Les avantages apportés par l'utilisation de la lévitation aérodynamique se résument ainsi :

- lévitation non asservie ;
- facilité de mise en œuvre ;
- possibilité de faire léviter des objets de masse importante (de l'ordre du  $kg$ ) ;

Les inconvénients de la lévitation aérodynamique sont :

- conditions de lévitation fortement liées à la forme de l'objet à faire léviter ;
- s'emploie seulement pour des objets peu déformables ;
- phénomènes mis en jeu complexes ;
- lévitation sensible aux perturbations extérieures<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Un exemple caractéristique est le passage de la main proche d'un banc de lévitation aérodynamique.

### Lévitiation par faisceau laser

La lévitiation par faisceau laser est une variante du laser trapping qui, sous l'action de la focalisation d'un spot laser, permet de déplacer des objets de quelques  $\mu g$ . La lévitiation par faisceau laser s'apparente à de la lévitiation active et non asservie dont le concept a été découvert récemment. Le laser trapping, qui utilise un seul faisceau laser, n'offre pas la possibilité de soulever de manière stable l'échantillon focalisé. La figure 2.5 présente le bilan des forces appliquées par une source laser sur un échantillon sphérique.

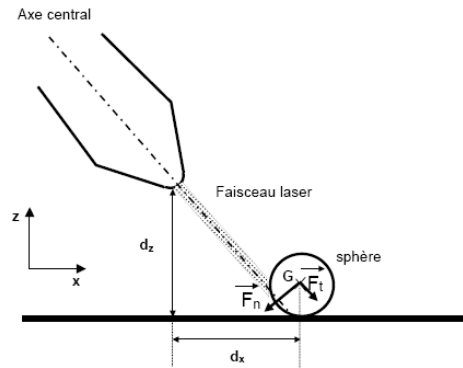


FIG. 2.5 – Bilan des forces extérieures appliquée par une source laser.

La sphère en position statique subit, en plus de son poids  $\vec{P}$  et de la force de contre-réaction  $\vec{R}^2$ , deux forces  $\vec{F}_n$  et  $\vec{F}_t$  (de l'ordre de quelques picoNewtons) dues à la focalisation du faisceau. La direction de la force  $\vec{F}_t$  est colinéaire avec l'axe central passant par le long du faisceau laser [37]. La direction de la force  $\vec{F}_n$ , quant à elle, est normale à l'axe du faisceau [37]. Si  $F_{tx}$  et  $F_{nx}$  sont les composantes respectives de  $\vec{F}_t$  et  $\vec{F}_n$  suivant  $\vec{x}$ , la sphère se meut jusqu'à ce que l'équilibre soit établi. Plus le centre de gravité  $G$  de la sphère se rapproche de l'axe du faisceau plus la composante  $F_{nx}$  diminue. A présent, si la source laser se déplace suivant  $\vec{x}$  en même temps que la sphère, l'équilibre statique n'est jamais atteint et la sphère continue à suivre le faisceau. Le module des forces  $\vec{F}_n$  et  $\vec{F}_t$  dépend en partie<sup>3</sup>, pour une puissance de laser donnée, des distances  $d_z$  et  $d_x$ .

Afin de soulever l'échantillon et le faire léviter, l'auteur utilise deux faisceaux laser de même puissance s'impose. Sous certaines conditions (espacement entre les sources, positions de celles-ci, etc.), il est possible de créer un point d'équilibre stable dans l'espace. La figure 2.6 présente la configuration permettant de réaliser la lévitiation ainsi que le bilan des forces qui s'exercent sur l'objet en sustentation. Notons que comme les faisceaux laser excitent cette fois-ci la moitié supérieure de la sphère, les forces  $\vec{F}_n$  sont maintenant dirigées vers le haut et compensent le poids de la sphère.

Aux échelles micrométriques considérées la force gravitationnelle n'est pas prépondérante,

<sup>2</sup>Les forces  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  ne sont pas représentées par souci de lisibilité.

<sup>3</sup>L'indice de réfraction de la sphère conditionne également le module de ces forces.

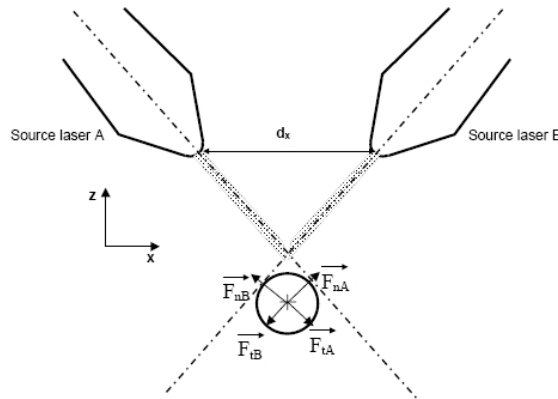


FIG. 2.6 – Bilan des forces extérieures dans le cas de deux sources laser.

ainsi la position d'équilibre suivant  $\vec{z}$  s'obtient lorsque les forces produites par les sources laser se compensent. La position d'équilibre suivant la direction  $\vec{x}$  se trouve très exactement à  $d_x/2$ . En déplaçant convenablement les sources laser suivant les mêmes directions, le point d'équilibre dans l'espace est déplacé ainsi que la position de l'échantillon.

Les avantages de l'utilisation de la lévitation par faisceau laser sont :

- lévitation non asservie ;
- peut être réalisée dans différents types de milieux <sup>4</sup> ;
- dimensions compactes du banc expérimental.

Les inconvénients sont :

- matériel onéreux ;
- limitée à la lévitation d'objets de dimensions micrométriques ;
- principe non reproductible aux dimensions macroscopiques ;
- plage de zone de stabilité restreinte ;
- sensible aux phénomènes vibratoires.

### Lévitation magnétique

La lévitation fondée sur le phénomène magnétique est, probablement, le principe de lévitation le plus répandu. Ses atouts restent le faible coût, la facilité de mise en œuvre ou encore la robustesse.

La lévitation magnétique repose sur le fait qu'un corps para ou ferromagnétique soumis à un champ magnétique (statique ou non) subit une force volumique qui tend à le rapprocher des zones à fort champ magnétique. L'intensité de cette force est conditionnée, d'une part, par l'intensité du champ magnétique extérieur appliqué et d'autre

<sup>4</sup>Sous réserve que l'indice de réfraction du milieu soit inférieur à celui des objets à faire léviter.



part par le degré d'aimantation du corps. Plus l'aimantation au sein du corps est importante plus la force magnétique l'est aussi. Actuellement, les matériaux les plus aimantables sont les matériaux ferromagnétiques. La connaissance du cycle d'hystérésis du matériau utilisé est impérative afin d'éviter d'éventuels changements de comportement magnétique (désaimantation, inversion d'aimantation, etc.) qui risquent de nuire à la stabilité de la lévitation.

### Stabilité d'une lévitation magnétique

Prenons deux aimants identiques et fixons l'un d'eux sur un bâti fixe (voir figure 2.7). A présent, essayons de trouver une position d'équilibre pour le second aimant tout le long de l'axe central de l'aimant fixe. Très rapidement, on va constater qu'il n'est pas possible de trouver une position stable. On observe que l'aimant a tendance, soit à se coller à celui du dessus, soit à tomber en chute libre. Il existe pourtant bien une position où la force magnétique compense parfaitement la force gravitationnelle mais cette position d'équilibre est instable (voir figure 2.7).

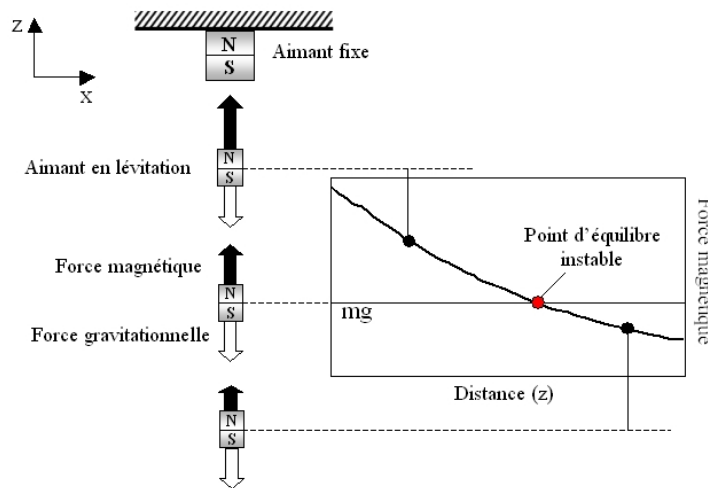


FIG. 2.7 – Mise en évidence de l'instabilité par approche expérimentale.

Sur un plan théorique, le théorème d'Earnshaw<sup>5</sup>[38] montre clairement qu'il n'est pas possible d'obtenir un point d'équilibre stable dans l'espace si le champ magnétique est statique. La démonstration simplifiée de ce théorème peut être formulée comme suit : considérons un corps ferromagnétique de volume  $V$ , de perméabilité magnétique relative  $\mu_r > 1$  et d'aimantation rigide<sup>6</sup>  $\vec{M}$ . Un point  $P$  entouré d'un volume  $dV$  (appartenant au volume  $V$ ) placé dans un champ magnétostatique extérieur  $\vec{B}$ , subit un

<sup>5</sup>Théorème formulé par le mathématicien et physicien anglais Samuel Earnshaw en 1841.

<sup>6</sup>Terme employé pour désigner un corps dont l'aimantation est peu sensible aux perturbations extérieures et constante dans tout son volume.

champ d'induction magnétique  $\vec{B}(P)$ . L'énergie d'interaction magnétostatique est :

$$U = - \iiint_V \vec{M} \cdot \vec{B}(P) dV \quad \text{en joule} \quad (2.2)$$

La force magnétique d'interaction  $\vec{F}^{mag}$  est exprimée par :

$$\vec{F}^{mag} = -\nabla U \quad (2.3)$$

Or, les raideurs magnétiques produites par cette force suivant les directions  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  en coordonnées cartésiennes sont par définition :

$$\begin{aligned} K_x^m &= -\frac{\partial F_x^{mag}}{\partial x} \\ K_y^m &= -\frac{\partial F_y^{mag}}{\partial y} \\ K_z^m &= -\frac{\partial F_z^{mag}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.4)$$

De 2.3 et 2.4 on obtient :

$$\sum K_i^m = K_x^m + K_y^m + K_z^m = -div(\vec{F}^{mag}) = -div(-\nabla U) = \nabla^2 U \quad (2.5)$$

Appliquons l'opérateur Laplacien  $\nabla^2$  à l'équation (2.2) :

$$\nabla^2 U = - \iiint_V \nabla^2(\vec{M} \cdot \vec{B}(P)) dV \quad (2.6)$$

$$= - \iiint_V \vec{M} \cdot (\nabla^2 \vec{B}(P)) dV \quad \text{puisque } \vec{M} \text{ est constant.} \quad (2.7)$$

Or, pour un champ magnétostatique la propriété suivante est toujours vérifiée :

$$\nabla^2 \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

Ainsi, l'équation (2.5) devient :

$$\sum K_i^m = K_x^m + K_y^m + K_z^m = 0 \quad (2.9)$$

Cela signifie qu'au moins une des raideurs engendrées par la force magnétique  $\vec{F}^{mag}$  est négative. Par conséquent, l'équilibre suivant l'axe correspondant sera instable. La lévitation d'un corps ferromagnétique dans un champ magnétostatique est alors impossible. De plus, ceci reste vrai indépendamment de la géométrie des sources magnétostatiques utilisées puisque la démonstration découle de la propriété même du champ magnétostatique.

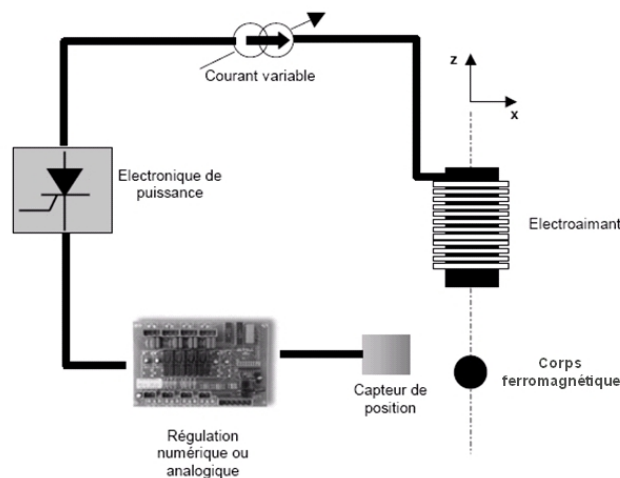


FIG. 2.8 – Lévitation des corps ferromagnétiques [3].

### Stabilisation de la lévitation magnétique

L'instabilité engendrée fait que la lévitation magnétique doit être stabilisée par l'introduction d'une boucle de régulation. La configuration classique qui permet de faire léviter un corps ferromagnétique est présentée à la figure 2.8.

La régulation s'opère seulement suivant l'axe  $\vec{z}$ . En effet, la force magnétique  $\vec{F}^{mag}$  de l'aimant fixe (voir figure 2.7) dans le plan, tend à déplacer l'aimant en lévitation vers le centre de l'électroaimant. La force électromagnétique quant à elle contre le poids de l'aimant en lévitation et assure la stabilité suivant  $\vec{z}$ . L'emploi de ce dernier ainsi que l'usage de la boucle de régulation fait de la lévitation magnétique une lévitation active et asservie.

Une autre technique pour stabiliser une lévitation magnétique est l'utilisation des matériaux diamagnétiques. Bien que l'effet diamagnétique reste faible à température ambiante, il existe des configurations pour stabiliser la lévitation d'un aimant permanent dans un champ magnétostatique. Dans ces configurations le poids de l'aimant est généralement compensé par un effet magnétique.

Lorsqu'un matériau diamagnétique est placé dans un champ magnétique extérieur, il représente un comportement magnétique particulier. Ce comportement peut être mis en évidence, à l'échelle macroscopique, par l'expérience suivante : on suspend un barreau d'un matériau diamagnétique à température ambiante au bout d'une ficelle (voir figure 2.9).

La source du champ magnétique extérieur est produite par l'approche d'un aimant permanent à deux faces magnétiques et à fort champ rémanent<sup>7</sup>. On présente au départ la face nord de l'aimant au matériau diamagnétique. Plus on tente de rapprocher la face

<sup>7</sup>Souhaitable pour améliorer la visualisation du comportement du matériau diamagnétique.

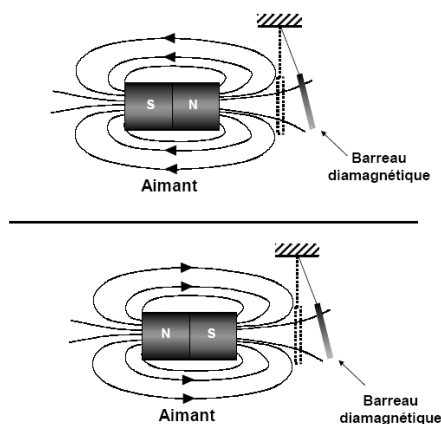


FIG. 2.9 – Manifestation de l’effet diamagnétique à l’échelle macroscopique [3].

nord de l’aimant et plus ce dernier a tendance à s’éloigner . A présent, on présente la face sud de l’aimant au matériau diamagnétique en effectuant les mêmes opérations. On observe rigoureusement le même phénomène que précédemment, le barreau diamagnétique est repoussé. Ainsi, quelle que soit la direction du champ magnétique extérieur appliqué, une force d’interaction de nature répulsive est appliquée sur le corps diamagnétique. Celle-ci tend à l’orienter vers les zones à faible intensité magnétique.

A l’échelle microscopique, le barreau diamagnétique se comporte ainsi : si l’on note le volume du corps  $V$  soumis à un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ , chaque volume élémentaire  $dV$  réagit alors en produisant une aimantation  $\vec{M}$  (voir figure 2.10).

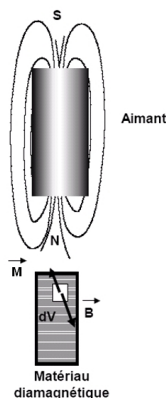


FIG. 2.10 – Manifestation de l’effet diamagnétique à l’échelle microscopique [3].

Le sens de ce vecteur d’aimantation est opposé à celui du champ magnétique appliqué dans ce volume élémentaire. De ce fait, il en résulte une force d’interaction qui tend à repousser le matériau diamagnétique afin de minimiser l’énergie magnétique totale. L’intensité de la force produite dépend essentiellement, pour une même source magnétique

extérieure, de la susceptibilité magnétique  $\chi_m = \mu_r - 1$  du matériau diamagnétique (avec  $\chi_m < 0$ ).

Il existe trois configurations de base possibles permettant de stabiliser la lévitation d'un aimant permanent dans un champ magnétostatique par l'ajout des matériaux diamagnétiques. Ces configurations sont représentées sur la figure 2.11. L'avantage de cette technique de stabilisation est qu'elle fait de la lévitation diamagnétique, une lévitation stable, passive et non-asservie.

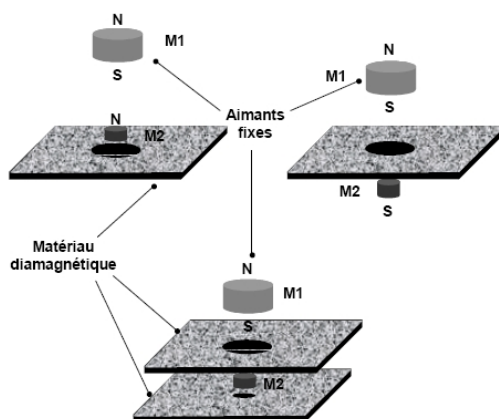


FIG. 2.11 – Configurations de base permettant d'assurer une lévitation diamagnétique stable [3].

Dans chacune des configurations possibles, le matériau diamagnétique joue le rôle d'un agent répulsif du champ magnétique produit par l'aimant en suspension  $M_2$ . Le matériau diamagnétique étant fixe, il exerce une force contraire au sens de déplacement de l'aimant  $M_2$  et empêche ce dernier de se coller à l'aimant fixe  $M_1$  ou de tomber en chute libre. Le module de cette force augmente (non linéairement) à mesure que  $M_2$  se rapproche du matériau diamagnétique. Rappelons que l'intensité de la force de répulsion exercée varie en fonction de deux paramètres : l'intensité du champ magnétique appliqué et la nature du matériau diamagnétique utilisé.

Depuis quelques années, le département *AS2M* de l'institut *Femto – ST* s'intéresse à la lévitation magnétique passive. C'est dans cet esprit qu'un capteur de micro et nano forces a été développé dans le cadre de la thèse de *Mehdi Boukallel* [3], intitulée «Etude, conception et réalisation d'un capteur de micro et nano-forces» et soutenue en 2003. Ce capteur repose sur le principe physique de la lévitation diamagnétique passive. Il est constitué de quatre aimants permanents  $M_1$ , dits aimants porteurs, qui permettent par l'ajout des matériaux diamagnétiques (graphite) de soutenir une tige sur laquelle ont été fixés deux petits aimants permanents  $M_2$  (voir figure 2.12).

Cette tige constitue la masse sismique sensible à l'effort à mesurer. Dans le repère

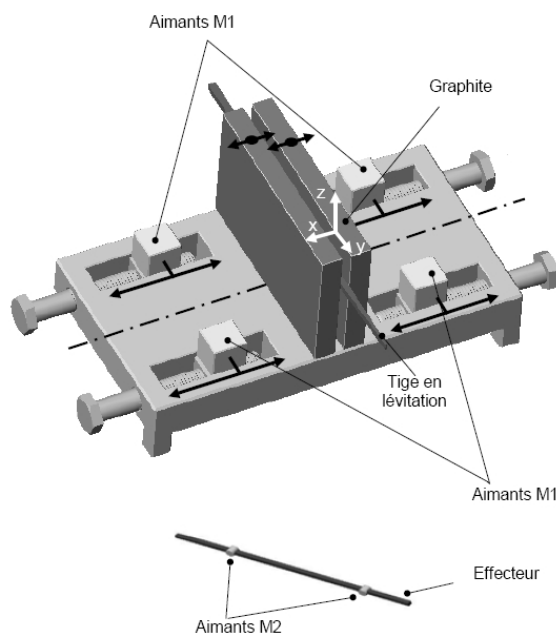


FIG. 2.12 – Vue globale du capteur de forces [3].

donné sur la figure 2.12, les forces magnétiques des quatre aimants porteurs  $M_1$  assurent la stabilité de la tige dans le plan  $(yOz)$ , les forces diamagnétiques des plaques de graphite quant à elles assurent la stabilité de la tige suivant  $\vec{x}$ . Le principe de mesure de force repose sur la connaissance de la position spatiale de la tige en suspension, et par conséquent les forces magnétiques et diamagnétiques qui s'appliquent sur les deux aimants  $M_2$ . Ces forces jouent le rôle de la force de rappel. Leur calcul ou leur identification, en tout point de l'espace, est indispensable pour la détermination de la force externe à l'équilibre statique.

La configuration particulière des aimants permanents qui permet d'obtenir des lignes de champ d'induction magnétique quasi-parallèles, au niveau de l'aimant en lévitation, est composée de deux aimants aux caractéristiques identiques (composition, géométrie) disposés tels que les pôles magnétiques soient opposés (voir figure 2.13). L'espacement entre les aimants est déterminé en fonction des conditions de lévitation souhaitées (raideur magnétique ajustable).

Afin de vérifier la forme du champ d'induction magnétique produit au niveau de  $M_2$ , cette configuration a été simulée sous *Flux3D*<sup>8</sup>. Les aimants permanents  $M_1$ , choisis pour la simulation, sont des *NdFeB* cubiques de  $1\text{ cm}^3$  avec une induction magnétique rémanente  $B_r$  de  $1.3\text{ T}$ . La figure 2.14 présente la forme des lignes de champ dans cette configuration.

Le problème majeur de la configuration de ce capteur reste le poids du corps en

<sup>8</sup>Logiciel qui permet l'étude et l'analyse des dispositifs électriques, magnétiques et thermiques par la méthode des éléments finis

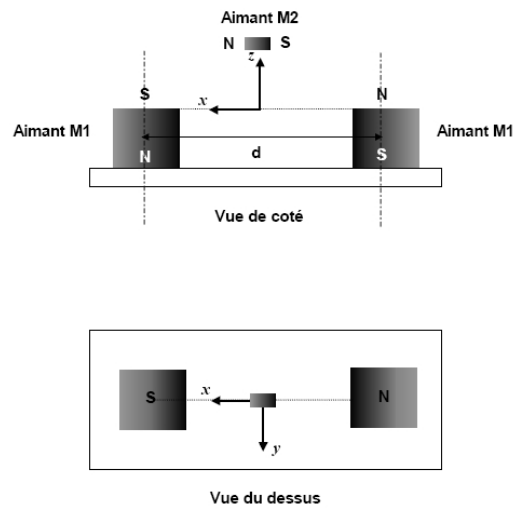


FIG. 2.13 – Configuration des aimants adoptée pour obtenir des lignes de champ d'induction magnétique quasi-parallèles [3].

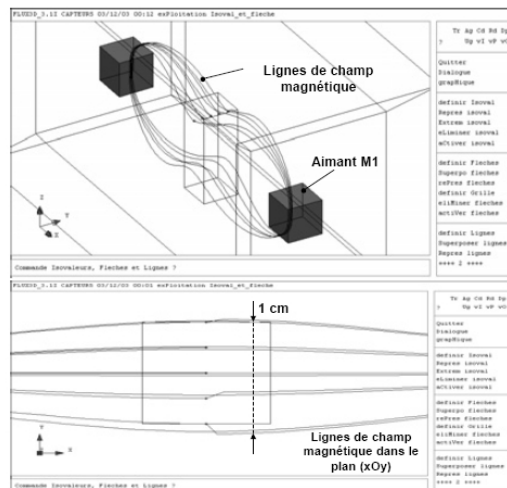


FIG. 2.14 – Simulation des lignes de champ d'induction magnétique produites par la configuration des aimants  $M_1$  [3].

lévitation. En effet, les forces de rappel magnétiques qui compensent le poids sont faibles, ce qui impose des contraintes par rapport au poids de la structure qui lévite.

## 2.3 Flottaison

Lorsqu'un corps est placé dans un volume liquide, il est soumis à des forces de pression de la part du liquide sur toute sa surface mouillée. Or, la pression à l'intérieur

du liquide augmentant avec la profondeur, la force exercée sur la paroi ne sera pas la même en tout point. Il en résulte ainsi une force de pression totale appelée force de poussée d'Archimède dirigée vers le haut et tendant à faire flotter le corps. Suivant les valeurs relatives du poids (force dirigée vers le bas) et de la force d'Archimède, le corps montera, flottera ou coulera.

Dans le cas d'un liquide incompressible au repos situé dans un champ de pesanteur uniforme, la pression absolue  $P_{abs}$  vaut :

$$P_{abs} = P_0 + \rho \cdot g \cdot z \quad (2.10)$$

où  $P_0$  est la pression atmosphérique,  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $g$  est l'accélération de la gravité,  $z$  est la profondeur dans le fluide et  $\rho \cdot g \cdot z$  est la pression hydrostatique.

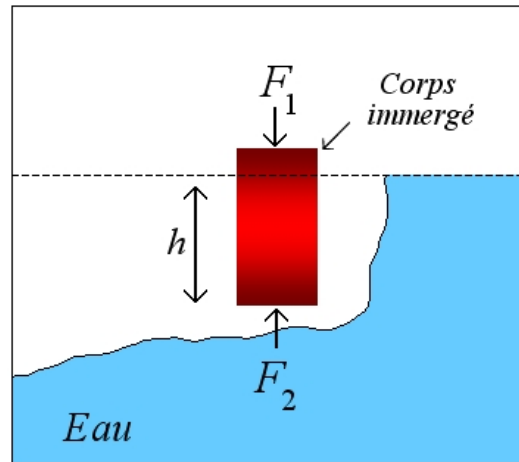


FIG. 2.15 – Bilan des forces de pression.

Les forces de pression exercées sur les faces latérales du corps immergé s'annulent et la force  $F_1$  (voir figure 2.15) s'exerçant sur la face du haut vaut :

$$F_1 = P_{abs}(z) \cdot s_1 = (P_0 + \rho \cdot g \cdot z) \cdot s_1 \quad (2.11)$$

$s_1$  étant la surface de la face du haut du corps immergé.

La force  $F_2$  (voir figure 2.15) s'exerçant sur la face du bas est :

$$F_2 = -P_{abs}(z + h) \cdot s_2 = -(P_0 + \rho \cdot g \cdot (z + h)) \cdot s_2 \quad (2.12)$$

$s_2$  étant la surface de la face du bas du corps immergé et  $h$  la hauteur de la partie immergée.



Pour  $s_1=s_2=s$ , le bilan est :

$$F_1 + F_2 = -(\rho \cdot g \cdot h) \cdot s = -\rho \cdot g \cdot V \quad (2.13)$$

où  $V$  est le volume du corps en flottaison, c'est-à-dire le volume immergé. La force résultante  $\rho \cdot g \cdot V$  est bien le poids du fluide représentant un volume  $V$ , et étant négative, elle est bien dirigée du bas vers le haut. On peut étendre cette démonstration à un objet de forme quelconque en intégrant le vecteur force calculé sur des surfaces infinitésimales  $ds$  supposées planes.

La partie immergée se voit appliquée une poussée d'Archimède égale au poids du volume de liquide déplacé. Plus la masse volumique  $\rho$  de l'objet est importante, plus l'objet sera immergé. On a donc l'équation d'équilibre suivante :  $\rho_0 \cdot g \cdot V_s = \rho \cdot g \cdot V$ , cela implique :

$$V_s/V = \rho/\rho_0 \quad (2.14)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} V : \text{volume total de l'objet} \\ V_s : \text{volume immergé de l'objet} \\ \rho : \text{masse volumique de l'objet} \\ \rho_0 : \text{masse volumique du liquide déplacé} \end{array} \right.$$

### Point d'application

Tout se passe comme si la poussée d'Archimède  $\vec{P}_a$  s'appliquait au centre de carène  $C$  (voir figure 2.16), c'est à dire au centre de gravité du volume de fluide déplacé. Cette caractéristique est importante pour le calcul de la stabilité du corps en flottaison. En effet la stabilité est assurée si et seulement si  $C$  se trouve au dessus du centre de gravité  $G_f$  du corps en flottaison. Ce qui revient à lester la partie inférieure du flotteur. Dans la suite de nos études, nous supposons que  $C$  et  $G_f$  sont confondus et que la poussée d'Archimède s'applique en  $G_f$ .

Pour la conception de la plate-forme de mesure de micro et nano forces, nous avons décidé d'adopter ce principe de flottaison qui d'après notre connaissance n'a jamais été exploré auparavant dans le cadre de mesure de force. La partie flottante sera maintenue en équilibre dans le plan horizontal par des ressorts magnétiques. Pour ce faire, on a décidé d'utiliser la configuration des deux aimants porteurs identiques décrite précédemment (voir figure 2.13). Dans la nouvelle configuration, les aimants porteurs seront placés verticalement afin de pouvoir intégrer le principe de flottaison qui agira à son tour suivant  $\vec{z}$  (voir figure 2.17). Ce principe de flottaison magnétique présente plusieurs avantages :

- stabilité passive ;
- facilité de mise en œuvre ;
- raideur ajustable en jouant sur l'espacement qui sépare les deux aimants porteurs ;
- pas de limitations de poids du corps suspendu.

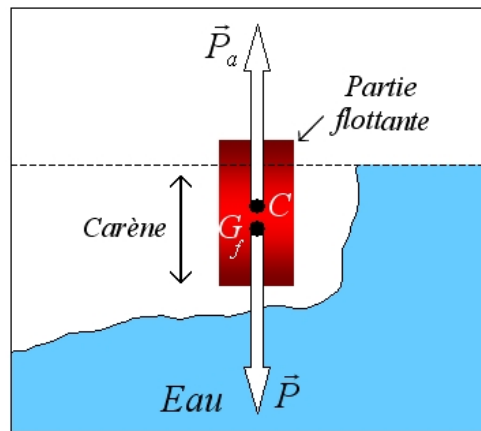


FIG. 2.16 – Principe de flottaison.

L'inconvénient de cette approche est que la partie flottante va subir les effets perturbateurs du liquide. Ces effets seront au moins au nombre de deux :

- les effets capillaires sur les flotteurs ;
- les ondes de surfaces qui vont se propager sur le liquide lorsque le flotteur se déplacera. Ces ondes vont générer des efforts perturbateurs atténués lors de leur retour vers le flotteur (après réflexion sur les bords du bassin). L'élimination de ces ondes de surfaces peut se faire soit mécaniquement en traitant les bords du bassins, soit par filtrage numérique.

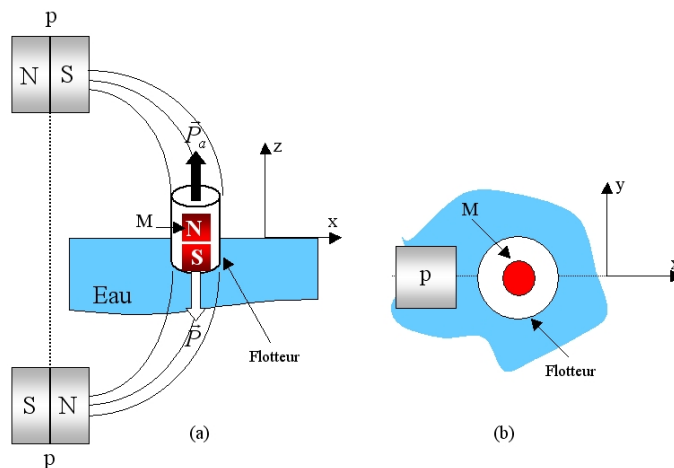


FIG. 2.17 – Mécanisme de flottaison-magnétique : (a) vue de côté (b) vue du dessus.

Dans la suite de ce manuscrit, cette nouvelle configuration sera appelé mécanisme de flottaison-magnétique *MFM*.

## 2.4 Configuration du *MF**M*

La figure 2.17 représente la configuration du *MF**M*. Cette configuration est une configuration élémentaire qui servira de base pour le développement de la plate-forme complète. Elle est composée d'un petit aimant  $M$ , en *NdFeB* de  $2\text{mm}$  de rayon et  $2.5\text{mm}$  d'épaisseur, placé à l'intérieur d'un flotteur cylindrique afin de diminuer son rapport  $m/V$  et de le faire flotter.  $M$  est en interaction avec deux aimants porteurs  $p$  aux caractéristiques identiques (*NdFeB* cubiques ( $5 \times 5\text{mm}$ )) disposés tels que les pôles magnétiques soient opposés. L'espacement  $D$  entre les aimants sera déterminé en fonction des conditions de lévitation, spécialement la raideur magnétique  $K^m$  souhaitée.

Avec une telle configuration, les aimants porteurs  $p$  génèrent un champ magnétique statique dans lequel l'aimant  $M$  est plongé. Ce dernier subit de ce fait une force de rappel magnétique  $\vec{F}^{mag}$ , qui va le contraindre vers une position d'équilibre stable dans le plan ( $xOy$ ) et une orientation stable selon  $\vec{z}$ . Cette position correspond à une force magnétique nulle ( $\vec{F}^{mag} = 0$ ). La poussée d'Archimède  $\vec{P}_a$ , quant à elle, contre le poids  $\vec{P}$  de la partie flottante et assure l'équilibre dans les autres directions de l'espace. Au final, ce principe permet à la partie flottante d'avoir un équilibre stable selon 6 *ddl*.

## 2.5 Etude statique du *MF**M*

Cette section est dédiée à l'étude statique du mécanisme de flottaison magnétique *MF**M*. Grâce à cette étude nous serons en mesure de cerner les effets des forces magnétiques et de la poussée d'Archimède sur les conditions de lévitation et le principe de mesure de force.

### 2.5.1 Force et couple magnétiques

Alors qu'il existe des méthodes d'éléments finis qui permettent le calcul des forces et des couples d'interaction entre deux aimants permanents (*Flux3D*, *Dipole3D*<sup>9</sup>, etc.), nous avons décidé d'évaluer ces dernières à partir d'un modèle analytique qui sera dans la suite intégré dans le modèle analytique complet de la plate-forme, présenté dans le chapitre suivant.

#### Aimants permanents

Il existe dans la nature différents matériaux aux propriétés magnétiques. Ces matériaux sont dits *matériaux magnétiques*. La particularité de ces corps est qu'ils peuvent devenir une source de champ magnétique sous certaines conditions. Très souvent, les phénomènes magnétiques observés dans ces matériaux sont très faibles à l'état naturel. Ainsi pour la plupart des corps, les propriétés magnétiques ne se manifestent réellement

---

<sup>9</sup>Logiciels conçus pour calculer les différentes interactions (force, couple, raideur, champ) entre deux aimants de formes arbitraires.

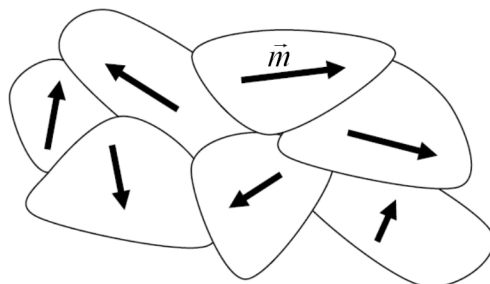


FIG. 2.18 – Orientation aléatoire des moments magnétiques.

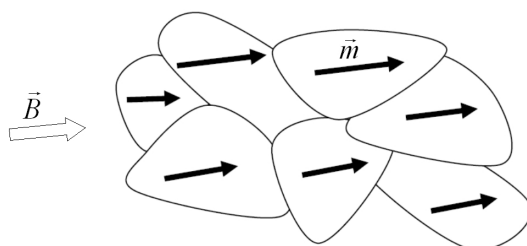


FIG. 2.19 – Alignement des moments magnétiques avec le champ.

qu'en présence d'un activateur. A l'échelle microscopique, les matériaux magnétiques sont formés de domaines magnétiques appelés aussi domaines de *Weiss*. Chaque domaine magnétique possède une aimantation  $\vec{m}$  d'origine atomique.

A l'état d'équilibre, sans application d'un champ magnétique extérieur, l'aimantation totale dans le matériau est nulle. L'agitation thermique provoque l'orientation des domaines dans toutes les directions avec une égale probabilité (voir figure 2.18). Ceci explique pourquoi ces corps ne représentent qu'une faible manifestation magnétique à l'état naturel. Lorsque ces corps sont soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  extérieur, les domaines magnétiques s'orientent et une aimantation moyenne apparaît (voir figure 2.19).

Ceci a pour effet de créer un champ magnétique issu du corps magnétique même. La direction de l'aimantation moyenne obtenue suite à l'application du champ dépend de la nature du corps.

Les matériaux ferromagnétiques sont constitués de petits domaines à l'intérieur desquels les atomes, présentant une aimantation parallèle, tendent à s'aligner comme autant de dipôles élémentaires dans la direction d'un champ magnétique extérieur. Les moments magnétiques de chaque atome peuvent s'aligner spontanément dans ces domaines, même en l'absence de champ extérieur. Ces corps ont la particularité de modifier de façon considérable la forme du champ magnétique dans lequel ils sont plongés. Si la forme du champ magnétique extérieur est non uniforme, une force d'attraction se crée, dont l'action tend à faire rapprocher les corps ferromagnétiques vers les zones de forte intensité.

De nombreux matériaux ferromagnétiques ont fait l'objet d'études. Parmi ces matériaux on trouve les aimants permanents qui sont en grande partie formés de matériaux ferromagnétiques et de leurs alliages, ils sont essentiellement au nombre de quatre : les Alnicos, les ferrites, les samarium-cobalt (*SmCo*) et les néodyme-fer-bore (*NdFeB*).

Bien que les aimants *SmCo* présentent un net avantage concernant la stabilité du champ magnétique en fonction de la température, dans le cadre de cette thèse nous avons néanmoins privilégié les *NdFeB* pour leur induction rémanente élevée ( $B_r=1.3T$ ) et leur coût bas.

### Modélisation analytique des aimants permanents

L'induction magnétique  $\vec{B}$  produite par un aimant permanent, à l'extérieur de celui-ci, peut être calculée par des modèles appropriés. Parmi, les modèles possibles nous avons retenu celui qui consiste à remplacer l'aimant permanent par une distribution de charges magnétiques sur ces pôles. Par convention, le pôle nord de l'aimant est représenté par des charges positives et le pôle sud par des charges négatives. Cette approximation est valable lorsque l'induction à mesurer reste à une distance suffisamment grande devant les dimensions de l'aimant. L'aimantation de l'aimant peut être alors assimilée à un moment magnétique concentré au centre de l'aimant [39]. La figure 2.20 présente l'équivalence possible entre un aimant cubique et sa représentation par une distribution de charges magnétiques. Il convient habituellement de représenter le pôle nord de l'aimant par une densité de charge positive  $J^+$  et le pôle sud par une densité de charges négative  $J^-$ .

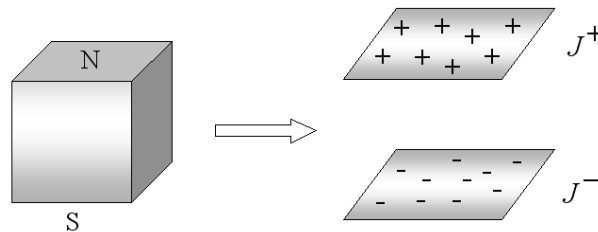


FIG. 2.20 – Modélisation d'un aimant permanent par distribution de charges magnétiques.

Le calcul de l'induction magnétique produite par l'aimant permanent se résume au calcul de l'induction produite par plusieurs dipôles magnétiques. De plus, le théorème de superposition permet de découpler l'influence de chaque dipôle et de calculer ainsi l'induction magnétique totale en sommant les influences individuelles de chaque dipôle. Ceci est valable uniquement en absence d'éléments ferromagnétiques dans l'environnement proche de l'aimant.

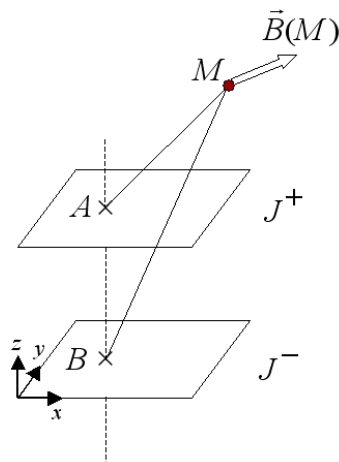


FIG. 2.21 – Induction magnétique créée par une distribution de charges magnétiques.

La figure 2.21 schématise l'induction magnétique  $\vec{B}(M)$  créée au point  $M$  par un aimant permanent modélisé à l'aide d'une représentation de charges magnétiques. Notons respectivement deux points  $A$  et  $B$  appartenant aux deux surfaces chargées. Chaque élément de surface  $ds^+$  et  $ds^-$  produit respectivement un champ d'induction magnétique  $d\vec{B}^+(M)$  et  $d\vec{B}^-(M)$ . Ces champs d'induction sont exprimés à partir du potentiel vecteur magnétique par [40] :

$$d\vec{B}^+(M) = \frac{J^+}{4\pi} \frac{A\vec{M}}{\|A\vec{M}\|^3} ds^+ \quad (2.15)$$

$$d\vec{B}^-(M) = \frac{J^-}{4\pi} \frac{B\vec{M}}{\|B\vec{M}\|^3} ds^- \quad (2.16)$$

En appliquant le théorème de superposition, le champ magnétique  $d\vec{B}(M)$  produit par les deux surfaces  $ds^+$  et  $ds^-$  est la somme vectorielle de la contribution individuelle de chaque surface. Soit :

$$d\vec{B}(M) = d\vec{B}^+(M) + d\vec{B}^-(M) \quad (2.17)$$

$$d\vec{B} = \frac{J^+}{4\pi} \frac{A\vec{M}}{\|A\vec{M}\|^3} ds^+ + \frac{J^-}{4\pi} \frac{B\vec{M}}{\|B\vec{M}\|^3} ds^- \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

L'induction magnétique totale  $\vec{B}(M)$  produite par la contribution de toute les sur-

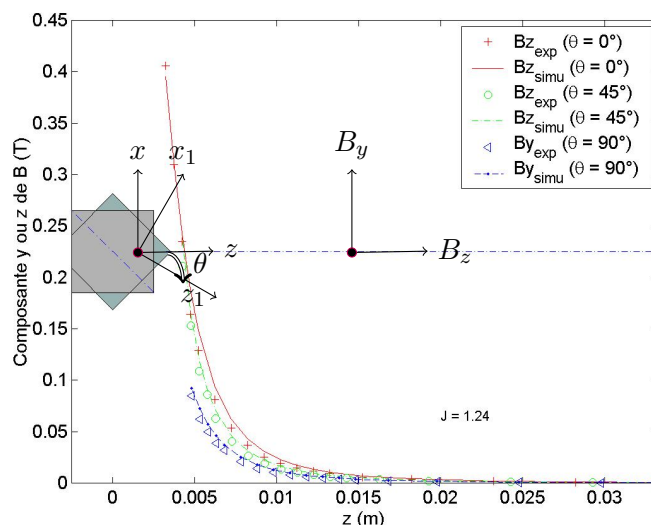


FIG. 2.22 – Relevé expérimental et simulé du champ magnétique produit par un aimant permanent (5x5mm) suivant  $\vec{z}$  pour différents angles

faces élémentaires est alors exprimée par :

$$\vec{B}(M) = \iint_{s^+} \frac{J^+}{4\pi} \frac{A\vec{M}}{\|A\vec{M}\|^3} ds^+ + \iint_{s^-} \frac{J^-}{4\pi} \frac{B\vec{M}}{\|B\vec{M}\|^3} ds^- \quad (2.20)$$

La détermination des composantes  $B_x(M)$ ,  $B_y(M)$  et  $B_z(M)$  sous forme exploitable est présentée en annexe A.

Notons que la modélisation des aimants permanents par une distribution de charges magnétiques se prête bien au calcul analytique lorsque les faces magnétiques sont planes.

### Densité de courant $J$

Dans cette partie, nous nous intéressons au calcul de la densité de courant surfacique  $J$ . Cette densité de courant apparaît indispensable pour le calcul des composantes de l'induction magnétique produite par un aimant permanent.

La figure 2.22 présente les résultats obtenus par mesure expérimentale des composantes  $B_z$  et  $B_y$  du champ magnétique  $\vec{B}$ , le long de l'axe  $z$ , produit par un aimant permanent pour différentes orientations  $\theta$  de ce dernier. Ces données sont comparées au modèle analytique développé sous *Matlab* à partir de l'équation 2.20. Sur cette figure  $R(O, x, y, z)$  est un repère global fixe dont l'origine  $O$  est confondue avec le centre de gravité de l'aimant et  $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$  est un repère local mobile attaché à l'aimant permanent que l'on oriente.  $\theta$  est l'angle formé entre l'axe  $z$  du repère fixe  $R$  et  $z_1$  du

repère mobile  $R_1$ . L'aimant permanent utilisé pour la simulation analytique est un aimant *NdFeB* cubique ( $5 \times 5mm$ ). Ensuite, on a déterminé manuellement la densité de courant surfacique  $J$  qui rapproche au mieux les réponses simulées et expérimentales. Cette dernière est de l'ordre de  $1.24 A \cdot m^{-2}$ .

### Théorème de superposition

Le théorème de superposition est applicable dans le cas de la magnétostatique. Ce théorème est utile lorsqu'il s'agit de déterminer le champ d'induction magnétique en un point de l'espace provoqué par plusieurs sources de polarisation magnétique  $\vec{J}$ . Le champ produit est alors la somme de chaque contribution indépendante due à la polarisation magnétique.

Prenons l'exemple de deux aimants qui engendrent deux champs d'induction magnétiques  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  en un point  $x, y$  et  $z$  de l'espace. Le champ d'induction magnétique total  $\vec{B}_0$  engendré par ces deux sources est alors exprimé par :

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (2.21)$$

Lorsque des symétries existent dans une configuration qui comprend des sources magnétiques, ce théorème s'avère très utile pour faciliter le calcul de l'induction magnétique. Ainsi d'après ce théorème, le champ  $\vec{B}$  dans lequel l'aimant en flottaison  $M$  baigne est la somme des deux champs magnétiques produits par les deux aimants porteurs  $p$ .

### Expression analytique de la force magnétique

A présent, nous allons nous intéresser au calcul de la force magnétique appliquée par les aimants porteurs  $p$  sur  $M$  (voir figure 2.17).

Notons  $\vec{B}$  le champ d'induction magnétique produit par les aimants porteurs  $p$ .

La force magnétique élémentaire qui s'exerce sur un point  $P$  centré sur un élément d'un volume  $dV$ , d'aimantation  $\vec{m}_M$  de l'aimant  $M$  (voir figure 2.23) s'exprime par le produit matriciel suivant [41] :

$$d\vec{F}^{mag} = \vec{\nabla} \vec{B}(P) \cdot \vec{m}_M dV \quad (2.22)$$

où  $\vec{B}(P)$  représente le champ d'induction magnétique produit par  $p$  au point  $P$  et  $d\vec{F}^{mag}$  la force magnétique élémentaire. L'opérateur  $\vec{\nabla}$  appliqué au champ d'induction  $\vec{B}(P)$  est égale à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_x(P)}{\partial x} & \frac{\partial B_y(P)}{\partial x} & \frac{\partial B_z(P)}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x(P)}{\partial y} & \frac{\partial B_y(P)}{\partial y} & \frac{\partial B_z(P)}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x(P)}{\partial z} & \frac{\partial B_y(P)}{\partial z} & \frac{\partial B_z(P)}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Les composantes  $dF_x^{mag}$ ,  $dF_y^{mag}$  et  $dF_z^{mag}$  données par le produit matriciel dans l'équation 2.22 s'expriment aussi de manière plus condensée par :



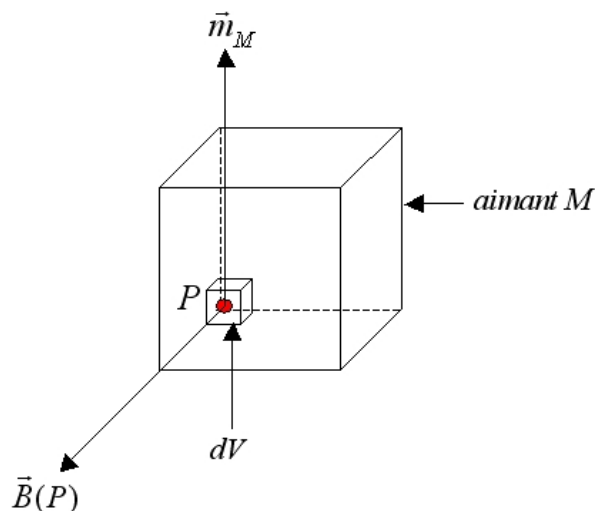


FIG. 2.23 – Discrétisation du volume de l'aimant  $M$  en plusieurs éléments de petit volume  $dV$ .

$$dF_x^{mag} = \frac{\partial \vec{B}(P)^T}{\partial x} \cdot \vec{m}_M dV \quad (2.24)$$

$$dF_y^{mag} = \frac{\partial \vec{B}(P)^T}{\partial y} \cdot \vec{m}_M dV \quad (2.25)$$

$$dF_z^{mag} = \frac{\partial \vec{B}(P)^T}{\partial z} \cdot \vec{m}_M dV \quad (2.26)$$

Ainsi, la force magnétique qui s'exerce sur l'ensemble du volume  $V_M$  de l'aimant  $M$  s'expriment comme une intégrale volumique :

$$\vec{F}^{mag} = \iiint_{V_M} \vec{\nabla} \vec{B}(P)^T \cdot \vec{m}_M dV \quad (2.27)$$

Lorsque  $M$  est petit,  $\vec{\nabla} \vec{B}$  est quasi-uniforme sur le volume  $V_M$  et peut être sorti de l'intégrale. Par conséquent, en faisant l'hypothèse que la magnétisation  $\vec{m}_M$  de l'aimant  $M$  est constante dans le volume  $V_M$ , la force magnétique appliquée par les aimants porteurs  $p$  au centre de l'aimant  $M$  peut être exprimée comme suit :

$$\vec{F}^{mag} = \vec{\nabla} \vec{B}(P)^T \cdot \vec{m}_M \cdot V_M \quad (2.28)$$

En conclusion, pour déterminer la force magnétique, il est nécessaire de déterminer l'aimantation  $\vec{m}_M$  de l'aimant  $M$ , les grandeurs de l'induction magnétique  $\vec{B}(P)$  ainsi que le gradient  $\vec{\nabla} \vec{B}(P)$ .

### Identification de l'aimantation $\vec{m}_M$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'identification, par la méthode des éléments finis, de l'aimantation  $\vec{m}_M$  de l'aimant  $M$ . Cette aimantation apparaît indispensable pour le calcul des composantes de la force magnétique appliquée par les aimants porteurs  $p$  sur  $M$ .

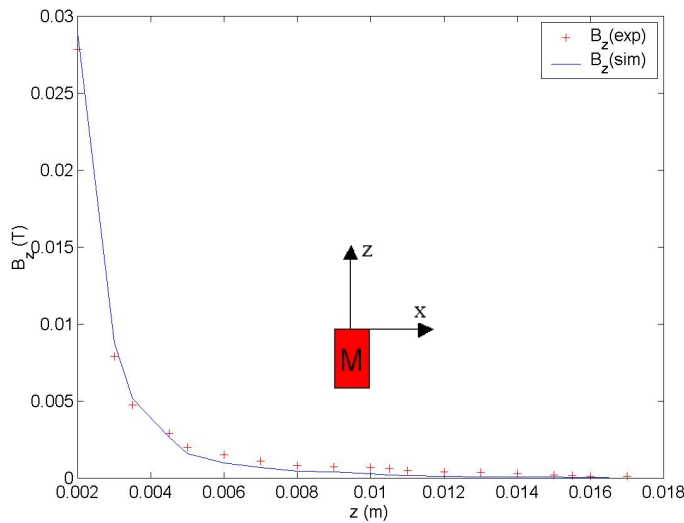


FIG. 2.24 – Relevé expérimental et simulé du champ magnétique  $B_z$  produit par l'aimant  $M$  suivant  $z$ .

La figure 2.24 présente les résultats obtenus par mesure expérimentale des composantes  $B_z$  du champ magnétique  $\vec{B}_M$ , produit par l'aimant  $M$  suivant l'axe  $z$ . Ces données sont comparées aux résultats obtenus par simulation sous *COMSOL*. Ensuite, on a déterminé manuellement l'aimantation  $\vec{m}_M$  qui rapproche au mieux les réponses simulées et expérimentales. Cette dernière est de l'ordre de  $15 \times 10^4 \text{ A.m}^{-1}$ .

Grâce aux équations de force et de champ magnétique présentées, nous avons construit un modèle analytique complet du mécanisme de flottaison-magnétique *MF* sous *Borland C++*, ce qui nous a permis de simuler la force magnétique totale produit par les deux aimants porteurs  $p$ . La figure 3.21 présente l'évolution de la composante  $\vec{F}_x^{\text{mag}}$  le long de l'axe  $\vec{x}$ . Sur cette caractéristique, nous notons une position particulière, le point d'équilibre stable  $S$  du système situé ici à  $11.7 \text{ mm}$  de l'axe des aimants porteurs. En ce point, la force magnétique est nulle.

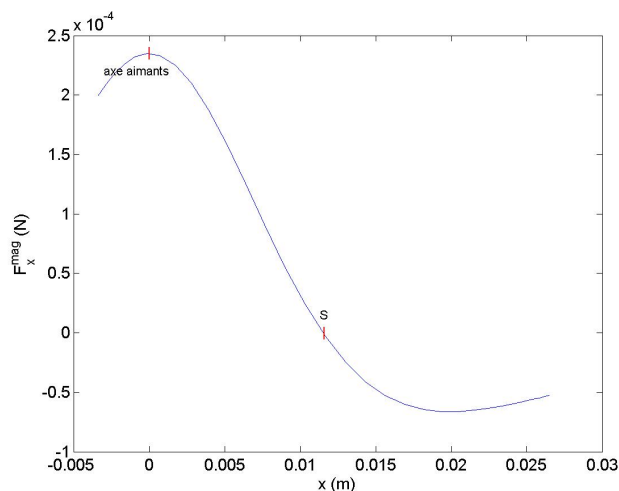


FIG. 2.25 – Force magnétique produite par les aimants permanents  $p$  suivant  $\vec{x}$

### Expression analytique du couple magnétique

A présent, nous allons nous intéresser au calcul du couple magnétique appliqué par les aimants porteurs  $p$  sur  $M$ .

Le couple magnétique élémentaire qui s'exerce sur un point  $P$  centré sur un élément d'un volume  $dV$ , d'aimantation  $\vec{m}_M$  de l'aimant  $M$ , sous un champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  produit par les aimants porteurs  $p$ , est exprimé par :

$$d\vec{\Gamma}^{mag} = \vec{m}_M \wedge \vec{B}(P) dV \quad (2.29)$$

Si on considère que la variation de  $\vec{B}(P)$  est faible dans l'ensemble du volume  $V_M$  de l'aimant  $M$  et que  $\vec{m}_M$  est constante dans le volume  $V_M$ , il est possible de formuler l'expressions du couple magnétique par :

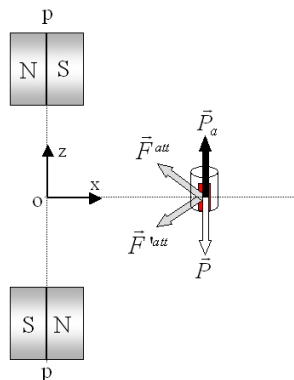
$$\vec{\Gamma}^{mag} = \vec{m}_M \wedge \vec{B}(P) V_M \quad (2.30)$$

#### 2.5.2 Stabilité de la flottaison-magnétique

Dans cette partie, nous allons principalement nous intéresser à la stabilité de la partie flottante dans le plan  $(xOy)$  et suivant  $\vec{z}$ . Nous n'allons pas démontrer mathématiquement cette stabilité mais l'illustrer par une simulation sous *Matlab*. Cette simulation correspond aux calculs du champ de force exercé par les deux aimants porteurs  $p$  sur l'aimant  $M$ , à une hauteur  $z$  donnée et de la poussée d'Archimède appliquée en  $G_f$ .

**Stabilité suivant  $\vec{z}$** 

La figure 2.26 présente le bilan de forces appliquées en  $G_f$  suivant  $\vec{z}$ . Le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est un repère local aux aimants porteurs  $p$  dont l'origine  $O$  est au centre de ces derniers.

FIG. 2.26 – Bilan de forces suivant  $\vec{z}$ .

La force totale  $F_t$  appliquée en  $G_f$  suivant  $\vec{z}$  est la somme des forces magnétiques ( $F_z^{att} + F_z'^{att}$ ) des deux aimants porteurs  $p$  et de la poussée d'Archimède  $P_a$ .

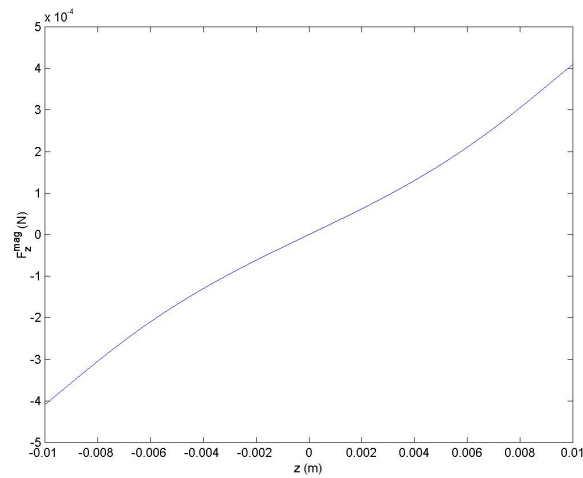
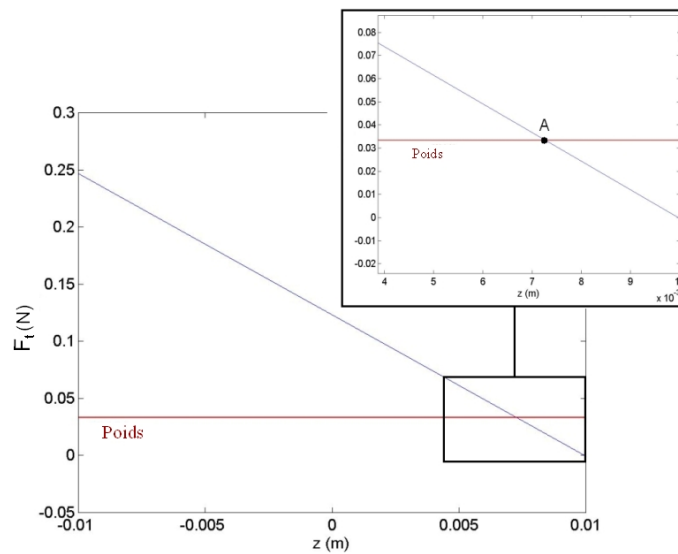
Nous avons, grâce à l'équation de la force magnétique (2.28), simulé  $F_z^{att} + F_z'^{att}$  (voir figure 2.27). Sur cette courbe, on ne trouve pas de position d'équilibre stable. Le poids de l'aimant  $M$  ( $P = 0.033N$ ) étant plus important que la force de rappel magnétique  $F_z^{mag}$  suivant  $\vec{z}$  :

$$F_z^{mag} = F_z^{att} + F_z'^{att}$$

ce dernier, en absence de la poussée d'Archimède, à tendance à tomber en chute libre.

Ensuite, nous avons grâce aux équations de la force magnétique (2.28) et de la poussée d'Archimède (2.13), simulé la force totale  $F_t$  appliquée en  $G_f$  suivant  $\vec{z}$  (voir figure 2.28) pour un niveau de liquide  $z = 1cm$  et pour les caractéristiques suivantes du flotteur cylindrique ( $r = 1cm$  et  $h = 2cm$ ).

La partie «zoomée» (à droite) représente l'évolution de la force totale  $F_t$  entre 4 et 10mm. Sur cette caractéristique, nous notons une position particulière  $A$  où la force totale  $F_t$  compense parfaitement le poids  $P$  de la partie flottante. A partir de cette position, un léger déplacement de l'aimant  $M$  vers le haut, se traduit par une force totale  $F_t$  inférieure au module du poids  $P$ , et donc  $M$  revient à sa position initiale  $A$ . Un léger déplacement de l'aimant  $M$  vers le bas, se traduit par une force totale  $F_t$  supérieure au module du poids  $P$ , et donc  $M$  va se positionner de nouveau sur  $A$ . Ainsi, le point  $A$  est un point d'équilibre stable suivant  $\vec{z}$ . Finalement, nous avons réglé le niveau d'eau pour que  $A$  se retrouve à une position  $z = 0$  par rapport au repère local  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ,

FIG. 2.27 – Evaluation de  $F_z^{mag} = F_z^{att} + F_z^{'att}$ .FIG. 2.28 – Evaluation de la force totale  $F_t$  suivant  $\vec{z}$ .

correspondant à  $F_z^{att} + F_z^{'att} = 0$ . Par conséquent, la force magnétique  $\vec{F}^{mag}$  n'a que des composantes dans le plan  $(xOy)$ .

### Stabilité dans le plan $(xOy)$

La stabilité dans le plan  $(xOy)$  fait intervenir la force magnétique  $\vec{F}^{mag}$  produite par les deux aimants porteurs  $p$ . La poussée d'Archimède et le poids de la partie flottante, quant à eux, n'ont qu'une composante suivant  $\vec{z}$ . La figure 3.13 présente le champ

de forces magnétiques dans le plan ( $xOy$ ) produit par les deux aimants porteurs  $p$  (représentés par un rectangle) sur  $M$ . On constate que la position d'équilibre  $S$  de la partie flottante correspond à la position  $x = 11.7mm$  et  $y = 0$ . En ce point, la force magnétique  $F^{mag}$  est nulle.

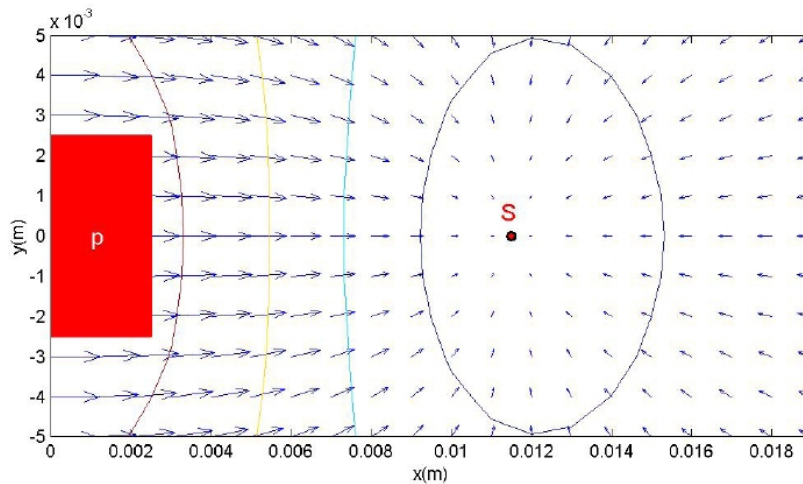


FIG. 2.29 – Champ de forces produit par  $p$  dans le plan ( $xOy$ ) et pour  $z = 0$ .

### 2.5.3 Bilan de forces en régime permanent

Cette partie est consacrée à l'étude du comportement statique du *MFM* pour la mesure de forces en régime permanent. Dans un premier temps, nous allons établir le bilan des forces qui s'exercent sur la partie flottante (voir figure 2.30).

On recense trois forces :

- la force magnétique  $\vec{F}^{mag}$  des deux aimants porteurs  $p$ ;
- la poussée d'Archimède  $\vec{P}_a$ ;
- la force gravitationnelle  $\vec{P}$  : cette force représente le poids de la partie flottante.

A la position d'équilibre statique, la relation suivante est vérifiée :

$$\vec{F}^{mag} + \vec{P}_a + \vec{P} = \vec{0} \quad (2.31)$$

Jusqu'à présent nous avons présenté les forces agissantes sur la partie flottante sans spécifier leurs directions. Les directions de la poussée d'Archimède  $\vec{P}_a$  et du poids  $\vec{P}$  sont facile à imaginer puisqu'elles ne possèdent qu'une seule composante suivant  $\vec{z}$ . Par contre, la visualisation tridimensionnelle de la force magnétique est plus complexe. Nous

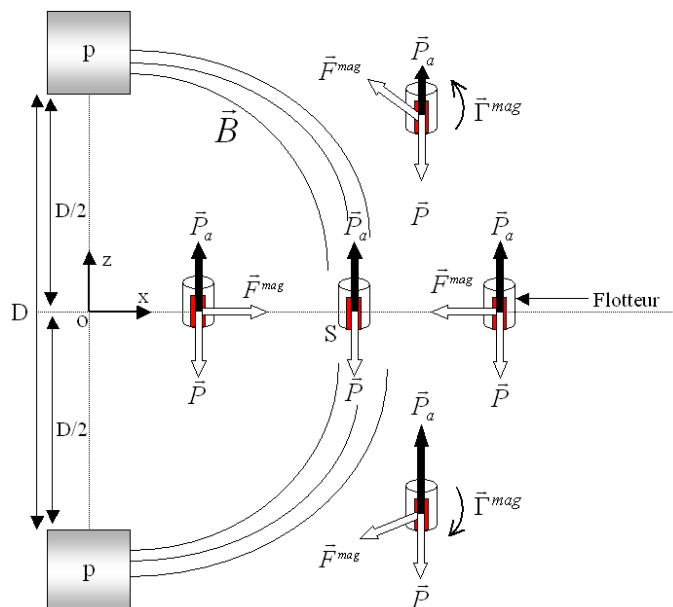


FIG. 2.30 – Bilan de forces agissant sur la partie flottante pour différentes positions.

avons tracé séparément dans la figure 2.30, les résultantes de la force magnétique qui s'applique sur la partie flottante pour différentes positions par rapport aux aimants porteurs. De manière similaire, la direction et l'intensité de la poussée d'Archimède suivant l'axe  $\vec{z}$  sont présentées sur cette figure.

A la position d'équilibre stable  $S$ , la partie flottante ne subit aucune force dans le plan  $(xOy)$ . Les seules forces qui agissent pour maintenir l'équilibre suivant cette direction sont la poussée d'Archimède  $\vec{P}_a$  et le poids  $\vec{P}$ . Cet équilibre est obtenu lorsque la poussée d'Archimède compense parfaitement le poids  $\vec{P}$ .

Dans le cas où le flotteur se déplace, les composantes de la force magnétique des aimants porteurs tendent à le ramener à sa position d'équilibre stable comme nous le montre la figure 2.30. Ces forces sont plus au moins importantes en fonction de la position du flotteur par rapport à l'axe des aimants porteurs  $p$ .

sur la figure 2.30 nous avons également présenté les couples magnétiques appliqués au flotteur qui tendent à l'aligner le long des lignes de champ.

### Mesure de forces multi-directionnelles

La partie flottante possède six degrés de liberté  $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ . Chaque degré de liberté peut constituer une direction de mesure de forces ou de couples. Dans ce paragraphe, nous allons nous attacher plus particulièrement à caractériser la mesure de forces suivant  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , lorsqu'une force extérieure  $\vec{F}^{ext}$  de module inconnu est appliquée en  $G_f$ . La mesure de couples ne sera pas abordée ici, elle sera présentée dans le chapitre suivant pour la plate-forme complète.

Notons que l'application d'une force externe au point  $G_f$  ne produit pas de moments de forces. La nouvelle position d'équilibre statique est obtenue en appliquant le principe de la statique :

$$\vec{F}^{mag} + \vec{P}a + \vec{F}^{ext} + \vec{P} = \vec{0} \quad (2.32)$$

$\vec{P}$  est la force gravitationnelle de la partie flottante de masse  $m$ .  $\vec{F}^{mag}$  désigne la force magnétique totale produite par les deux aimants porteurs  $p$  et  $\vec{P}a$  désigne la poussée d'Archimède appliquée en  $G_f$ .

Les projections de l'équation 2.32 suivant  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  conduisent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} F_x^{mag} - F_x^{ext} &= 0 \\ F_y^{mag} - F_y^{ext} &= 0 \\ F_z^{mag} - F_z^{ext} - mg + Pa &= 0 \end{aligned}$$

Si on isole les composantes de la force  $\vec{F}^{ext}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} F_x^{ext} &= F_x^{mag} \\ F_y^{ext} &= F_y^{mag} \\ F_z^{ext} &= F_z^{mag} - mg + F_{pa} \end{aligned}$$

La détermination des composantes de la force  $\vec{F}^{ext}$  est conditionnée par la connaissance de la force magnétique et de la poussée d'Archimède qui s'appliquent en  $G_f$ .

## 2.6 Principe de mesure de force actif

Une autre approche pour mesurer des efforts externes consiste à rendre la partie flottante active. L'idée est de trouver un dispositif qui permet des mesures de forces sans déplacements ou plus précisément pour des déplacements de faible amplitude (par exemple micrométriques), et cela à l'aide d'un système d'asservissement à la position d'équilibre stable  $S$ . Ce principe de mesure présente plusieurs avantages. Il permet notamment :

- de maintenir la partie flottante dans une plage de fonctionnement où son comportement entrée-sortie est considéré linéaire ;
- d'augmenter la précision ;
- d'augmenter la plage de mesure ;
- de contrôler la dynamique de mesure en présence d'un effort externe ;



- de mesurer des forces sans déplacement, ce qui présente des intérêts évidents pour les tâches à grande précision, comme par exemple le micro-assemblage ou la micromanipulation sous microscope, là où l'objet à manipuler doit rester «immobile».

Le système d'asservissement est composé de deux bobines  $b$  placées de part et d'autre du flotteur (voir figure 2.31), couplées à un capteur de position à haute résolution. En présence d'une force externe qui tend à écarter la partie flottante de sa position d'équilibre stable  $S$ , l'alimentation en courant des bobines va opposer une force électromagnétique de manière à maintenir le flotteur immobile. Dans ce cas, le courant qui traverse les bobines  $b$  est l'image de cette force externe appliquée.

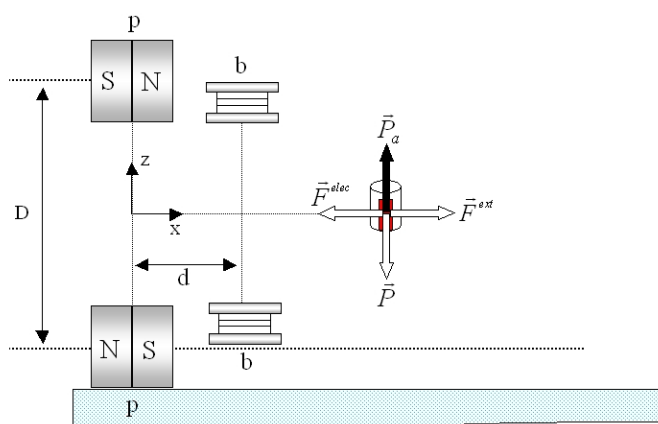


FIG. 2.31 – Système d'asservissement

### 2.6.1 Modélisation analytique des bobines

Dans cette partie nous décrirons une bobine circulaire et la méthode utilisée pour la modéliser. Cette méthode de modélisation est en partie extraite de [42], elle est valable dans le cas de micro-bobines, en supposant que toutes les spires sont concentrées au même endroit.

Les champs magnétiques peuvent être analytiquement modélisés seulement pour très peu de dispositifs simples. Généralement, quand ils présentent des symétries axiales importantes (linéaire, plat, cylindrique)..., et seulement sur une certaine partie de l'espace. Pour la plupart des géométries, les solutions analytiques n'existent pas et les dispositifs doivent être modélisés par des méthodes numériques approximatives, comme par exemple la méthode des éléments finis. Néanmoins, il est toujours utile d'avoir un modèle analytique avec des structures simplifiées. Le premier modèle analytique sera réalisé pour une spire circulaire symétrique, car celle-ci est la base de la plupart des dispositifs électromagnétiques, en particulier les micro-systèmes.

### Spire circulaire

Si on considère une spire circulaire de rayon  $a$  représentée sur la figure 2.32, le champ d'induction électromagnétique  $\vec{B}^{elec}(M)$  produit par cette spire au point  $M$  peut s'exprimer comme suit :

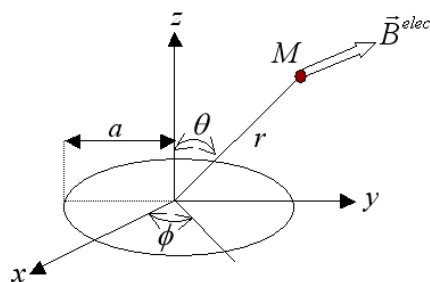


FIG. 2.32 – Spire circulaire

$$\begin{aligned} B_r^{elec}(M) &= \frac{\mu_0}{2\pi} (I\pi a^2) \frac{\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta^{elec}(M) &= \frac{\mu_0}{2\pi} (I\pi a^2) \frac{\sin\theta}{r^3} \\ B_\phi^{elec}(M) &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

### Bobine de N spires

Dans le cas d'une géométrie plus complexe avec  $N$  spires, il suffit d'appliquer le théorème de superposition en sommant les champs générés par chaque spire afin d'avoir le champ total. Si la bobine est de petite dimension par rapport à  $r$ , on peut de plus supposer que toutes les spires sont concentrées au même emplacement.

Dans ce cas les composantes du champ d'induction électromagnétique  $\vec{B}^{elec}$  produit par la bobine au point  $M$  sont :

$$\begin{aligned} B_r^{elec}(M) &= \frac{\mu_0}{2\pi} (I\pi N a^2) \frac{\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta^{elec}(M) &= \frac{\mu_0}{2\pi} (I\pi N a^2) \frac{\sin\theta}{r^3} \\ B_\phi^{elec}(M) &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

$N$  étant le nombre de spire.

Le vecteur  $\vec{B}^{elec}$  exprimé par  $(B_r^{elec}, B_\theta^{elec}, B_\phi^{elec})^T$  dans le repère sphérique  $(O_s, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  est transformé dans les coordonnées  $(B_x^{elec}, B_y^{elec}, B_z^{elec})^T$  du repère fixe  $(O_f, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  au moyen de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} B_x^{elec} \\ B_y^{elec} \\ B_z^{elec} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) & \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\phi) & \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_r^{elec} \\ B_\theta^{elec} \\ B_\phi^{elec} \end{pmatrix}$$

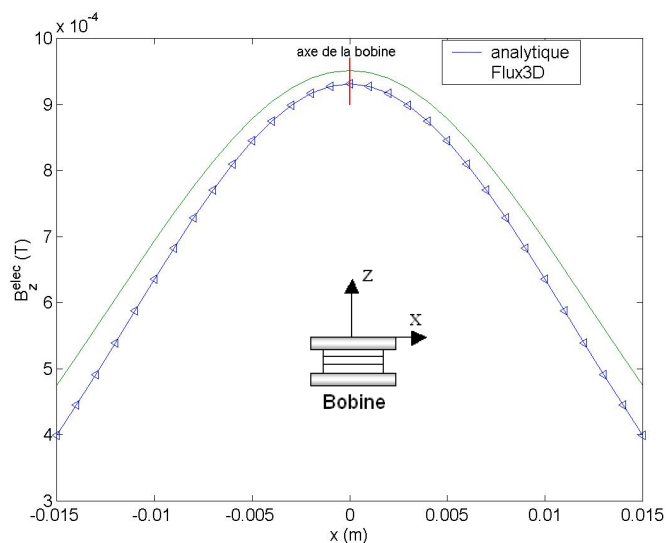


FIG. 2.33 – Réponses analytique et simulée du champ  $B_z^{elec}$  de la bobine suivant  $\vec{x}$  (à  $z = 1cm$ )

avec :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \phi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (2.35)$$

### Validation du modèle analytique de la bobine

Dans une optique de validation, nous avons simulé le champ électromagnétique produit par une bobine circulaire à l'aide du logiciel *Flux3D*. Cet outil permet l'étude et l'analyse des dispositifs magnétiques et électromagnétiques par la méthode des éléments finis.

La figure 2.33 présente les résultats obtenus par simulation sous *Flux3D* et ceux issus du modèle analytique. Ces résultats sont obtenus pour une bobine de 100 spires avec un rayon de 1cm, et un courant d'alimentation  $i$  de 2A. Par comparaison des courbes issues des deux méthodes de simulations, l'approche analytique de détermination du champ électromagnétique  $B_z^{elec}$  présente un petit écart absolu par rapport à la simulation par éléments finis que nous allons tolérer par la suite.

### Validation expérimentale

Afin de juger de la pertinence des résultats fournis par le modèle analytique, nous avons mesuré expérimentalement le champ d'induction électromagnétique  $B_x^{elec}$  produit

par une bobine dont la géométrie est connue. Les mesures ont été faites suivant l'axe  $\vec{x}$ , à  $z = 1\text{cm}$  (voir figure 2.33).

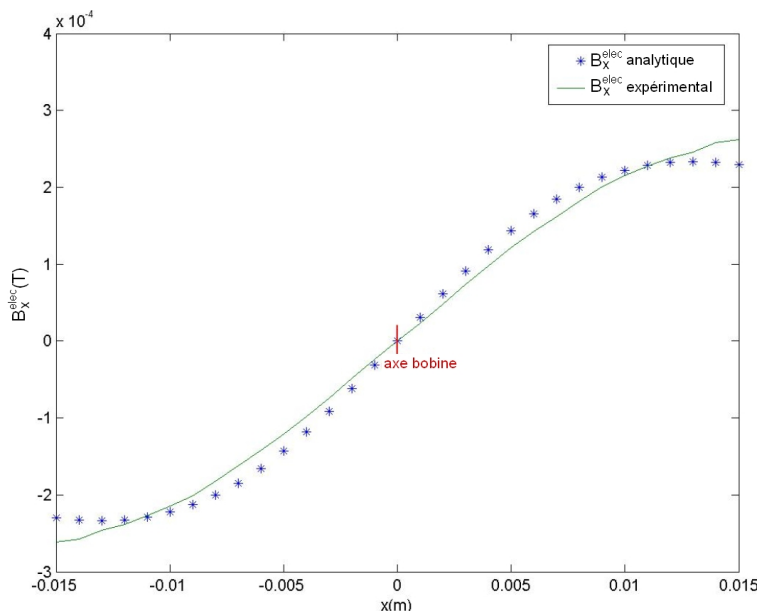


FIG. 2.34 – Validation du modèle analytique de la bobine par des mesures expérimentales

La bobine utilisée pour la validation expérimentale est une bobine circulaire de 150 spires avec un rayon de  $1\text{cm}$  et un courant d'alimentation  $i$  de  $0.4\text{A}$ . La mesure expérimentale du champ est réalisée par le biais d'un teslamètre de haute résolution tout en déplaçant la sonde suivant  $\vec{x}$  et avec un pas de  $1\text{mm}$ .

La figure 2.34 présente les résultats obtenus par mesure expérimentale et ceux issus du modèle analytique. D'après cette comparaison, on remarque clairement que plus on s'éloigne de l'axe de la bobine plus les valeurs divergent. Ce qui nous permet de valider l'utilisation de ce modèle pour des déplacements proches de l'axe de la bobine (une dizaine de centimètre).

### Force et couple électromagnétiques

Comme pour la force magnétique produite par un aimant permanent, la force électromagnétique appliquée par les bobines de rappel  $b$  au centre de l'aimant peut être exprimée comme suit :

$$\vec{F}^{elec} = \vec{\nabla} \vec{B}^{elec}(M) \cdot \vec{m}_M \cdot V_M \quad (2.36)$$

Le couple électromagnétique, quant à lui, est donné par l'expression suivante :

$$\vec{\Gamma}^{elec} = \vec{m}_M \wedge \vec{B}^{elec}(M) V_M \quad (2.37)$$

### 2.6.2 Bilan de forces en présence des bobines $b$

Cette partie est consacrée à l'étude du comportement statique du  $MFM$  asservi pour la mesure de force en régime permanent. Dans un premier temps, nous allons établir le bilan des forces qui s'exercent sur la partie flottante, à la position d'équilibre stable  $S$ . Notons qu'à cette position la force magnétique  $\vec{F}^{mag}$  est nulle.

On recense trois forces :

- la force électromagnétique  $\vec{F}^{elec}$  des deux bobines  $b$ ;
- la poussée d'Archimède  $\vec{P}a$ ;
- la force gravitationnelle  $\vec{P}$ .

A la position d'équilibre stable  $S$  et en présence d'une force externe  $\vec{F}^{ext}$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\vec{F}^{elec} + \vec{P}a + \vec{F}^{ext} + \vec{P} = \vec{0} \quad (2.38)$$

Les projections de l'équation 2.38 suivant  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  conduisent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} F_x^{elec} - F_x^{ext} &= 0 \\ F_y^{elec} - F_y^{ext} &= 0 \\ F_z^{elec} - F_z^{ext} - mg + Pa &= 0 \end{aligned}$$

Si on isole les composantes de la force  $\vec{F}^{ext}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} F_x^{ext} &= F_x^{elec} \\ F_y^{ext} &= F_y^{elec} \\ F_z^{ext} &= F_z^{elec} - mg + F_{pa} \end{aligned}$$

Par conséquent, la détermination des composantes de la force  $\vec{F}^{ext}$  est conditionnée par la connaissance de la force électromagnétique  $\vec{F}^{elec}$  et de la poussée d'Archimède  $\vec{P}a$  qui s'appliquent en  $G_f$ . Ainsi, pour avoir une étendue de mesure la plus large possible (en mode actif), la force électromagnétique  $F^{elec}$  doit être maximisée au point  $S$ .

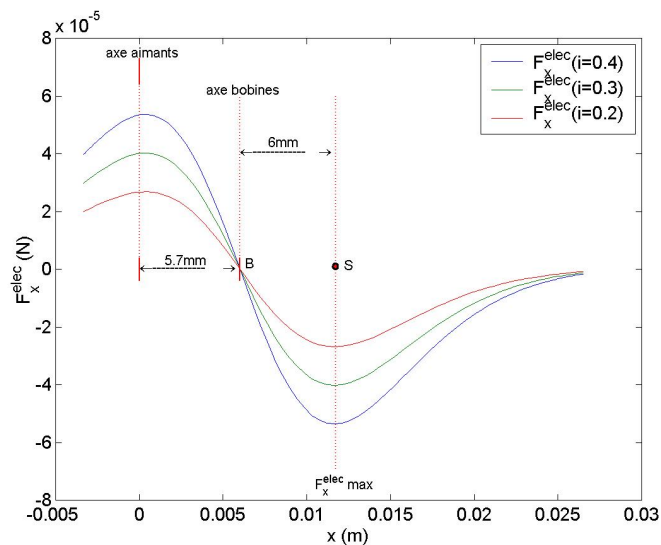


FIG. 2.35 – Force électromagnétique  $F_x^{elec}$  produite par les bobines  $b$  suivant  $\vec{x}$  pour différentes valeurs de  $i$ .

### 2.6.3 Placement des bobines de commande

Grâce aux équations 2.34, 2.35, 2.36 et 2.37, nous avons codé en Borland C++ un modèle analytique complet des bobines  $b$ , ce qui nous a permis de simuler la force électromagnétique totale produite par les deux bobines de la figure 2.31. Les bobines utilisées pour cette simulation sont des bobines circulaires de 50 spires avec un rayon de  $1\text{cm}$ . Elles sont alimentés avec un courant  $i$  de  $0.4\text{A}$  (courant maximum admissible tout en gardant une marge de sécurité pour la dissipation thermique par effet joules). La figure 2.35 présente l'évolution de la composante  $\vec{F}_x^{elec}$  le long de l'axe  $\vec{x}$ , dans le repère local  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . On remarque que la disposition des bobines  $b$  doit être bien choisie, afin d'optimiser l'action de  $\vec{F}^{elec}$ . Sur cette caractéristique, nous notons deux positions particulières, le point  $B$  d'équilibre instable selon  $\vec{z}$  (mais stable dans le plan  $xOy$ ) situé sur l'axe des bobines (force électromagnétique nulle) et la valeur maximum de la force électromagnétique produite à  $6\text{mm}$  de l'axe des bobines qui est de l'ordre de  $69\ \mu\text{N}$ . Par conséquent, les bobines ont été placées à une distance  $d = 5.7\text{mm}$  de l'axe des aimants porteurs  $P$  afin d'avoir une force de rappel électromagnétique maximale au niveau du point d'équilibre stable  $S$  du système (voir figure 2.36).

On peut soit éloigner l'aimant  $M$  de l'axe des bobines  $b$  soit le rapprocher en appliquant des courants  $i$  positifs ou négatifs. Lorsque l'aimant  $M$  se trouve à gauche du point d'équilibre stable  $S$  (cas 1 de la figure 2.37), l'alimentation des bobines  $b$  par un courant  $i$  négatif nous permet d'appliquer une force électromagnétique répulsive. Cette force a tendance à écarter l'aimant  $M$  du point d'équilibre instable  $B$  pour le ramener au point  $S$ .

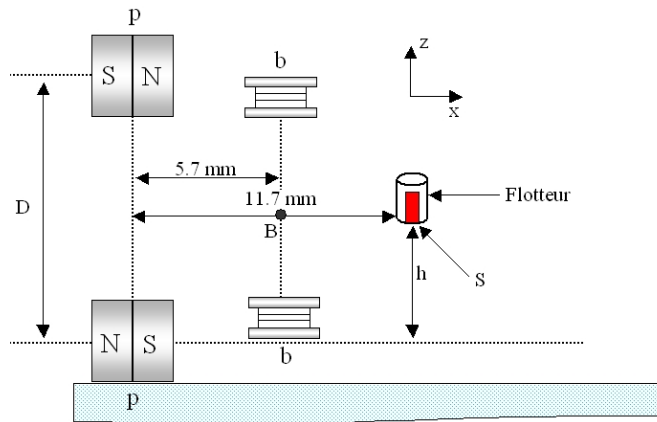
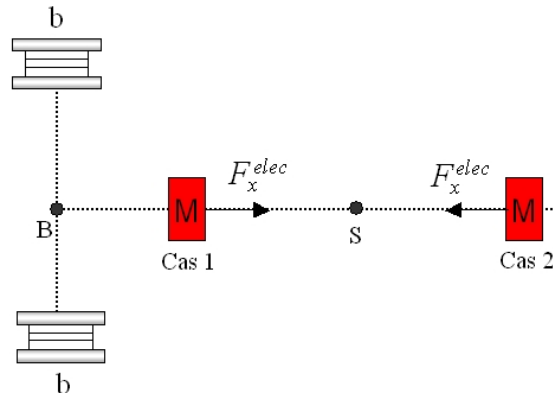


FIG. 2.36 – Position optimale des bobines de rappel

FIG. 2.37 – Asservissement à la position d'équilibre stable  $S$ .

Lorsque l'aimant  $M$  se trouve à droite du point d'équilibre stable  $S$  (cas 2 de la figure 2.37), l'alimentation des bobines  $b$  par un courant  $i$  positif nous permet d'appliquer une force électromagnétique attractive. Cette force a tendance à rapprocher l'aimant  $M$  du point d'équilibre instable  $B$  pour le ramener au point  $S$ .

D'après la figure 2.38 on remarque clairement que les deux forces attractive et répulsive des bobines  $b$  sont parfaitement symétriques.

Sous Matlab on a tracé la composante  $F_x^{elec}$  en fonction du courant  $i$ , lorsque le flotteur reste sur le point d'équilibre stable  $S$  (voir figure 2.39).

On remarque qu'il s'agit d'une relation linéaire entre force et courant qui nous permet d'écrire  $F_x^{elec} = K_x^e \cdot i(t)$ .  $K_x^e$  étant la raideur électromagnétique suivant  $\vec{x}$ , elle est de l'ordre de  $1.14 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{A}^{-1}$ . Ce point est développé plus en détail dans le chapitre 3.

La figure 2.40 représente l'évaluation de la force totale  $\vec{F}^T$  ( $F^{\vec{mag}} + F^{\vec{elec}}$ ) suivant  $\vec{x}$  pour différentes valeurs de  $i$ . Sur cette courbe, on remarque bien que dans l'axe des

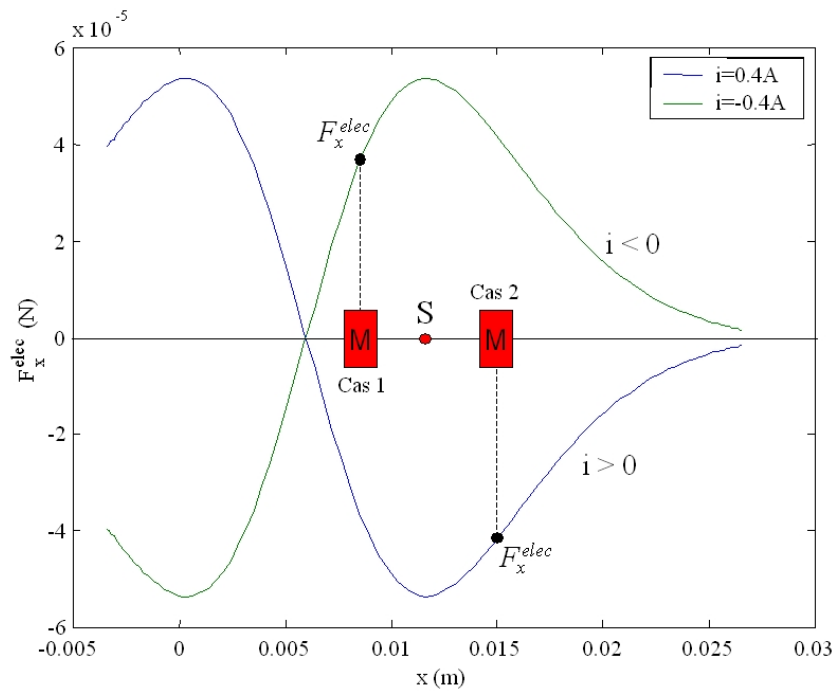


FIG. 2.38 – Symétrie de la force électromagnétique pour un changement de signe du courant  $i$

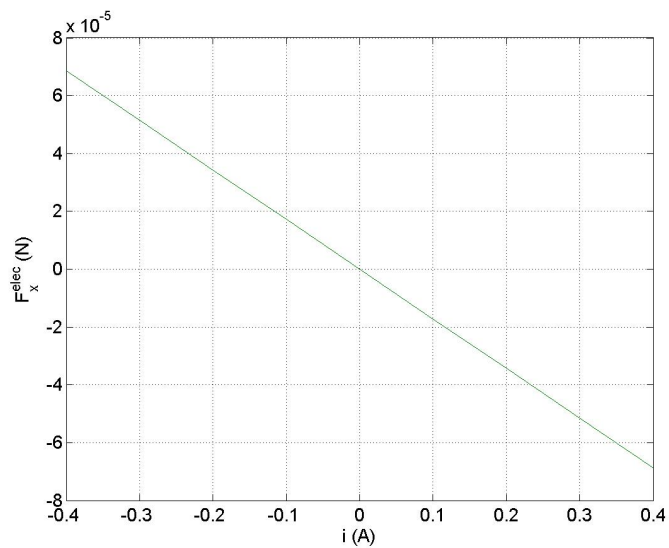


FIG. 2.39 – Courbe de force électromagnétique  $F_x^{elec}(S)$  de la bobine sur le point d'équilibre stable  $S$  pour différentes valeurs de courant  $i$



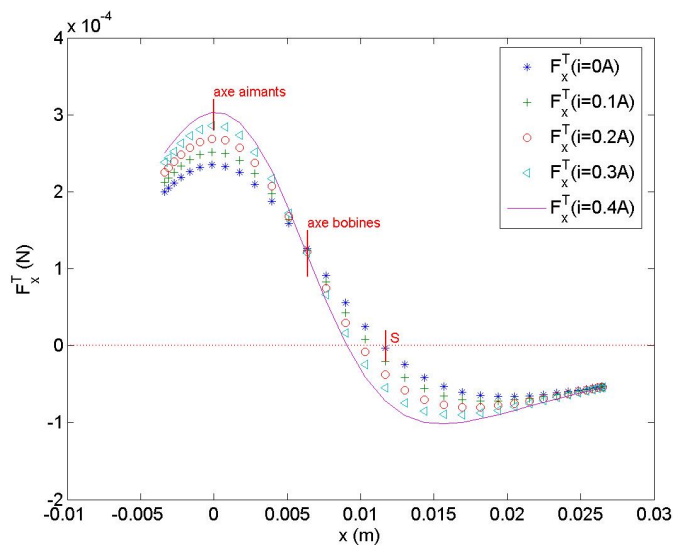


FIG. 2.40 – Evaluation de la force totale  $\vec{F}^T$  suivant  $\vec{x}$

bobines la force électromagnétique  $F^{elec}$  est nulle. Par conséquent, en ce point la force totale  $\vec{F}^T$  ne varie pas en fonction du courant  $i$ .

#### 2.6.4 Stabilité de la flottaison-magnétique asservie

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe à la stabilité de l'aimant  $M$  dans le plan  $(xOy)$  en présence des forces électromagnétiques des bobines  $b$ .

La figure 2.41 présente le champ de forces magnétiques  $\vec{F}^{mag}$  et électromagnétiques  $\vec{F}^{elec}$  dans le plan  $(xOy)$  produit sur  $M$  par les aimants porteurs  $p$  (représentés par un rectangle) et les bobines  $b$  (représentées par un cercle en pointillé) pour différents courants  $i$ . On constate que pour un courant  $i$  nul, la position d'équilibre stable de la partie flottante correspond à la position  $S$  qui vaut  $x = 11.7mm$ ,  $y = 0$ . Un courant  $i$  différent de zéro ne perturbe pas la stabilité dans le plan, mais change la position de  $S$  (voir figure 2.41). Le point  $Si$  est la nouvelle position d'équilibre stable pour un courant  $i$  non nul.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé la démarche qui a guidé la conception de la plate-forme de mesure de micro et nano forces. Afin de faciliter la compréhension et pour illustrer certains principes importants qui régiront la conception de la plate-forme, les études ont été menées, dans ce chapitre, sur une configuration élémentaire qui servira de base pour le développement de la plate-forme complète.

Le début de ce chapitre a introduit les différentes techniques de lévitation et de flottaison ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients. Pour la conception de la plate-forme,

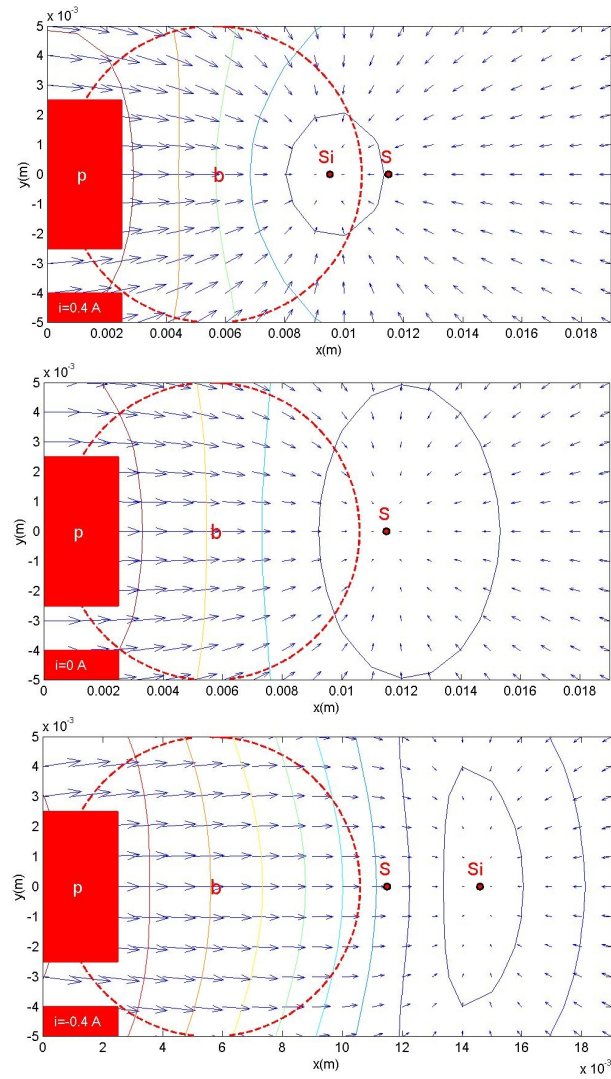


FIG. 2.41 – Champ de forces magnétique et électromagnétique dans le plan  $(xOy)$  pour  $i = 0.4\text{A}$ ,  $i = 0\text{A}$  et  $i = -0.4\text{A}$

un principe de flottaison-magnétique a été adopté. Les atouts restent le faible coût, la facilité de mise en oeuvre et la robustesse.

Ce principe qui apparemment n'a jamais été exploré, permet de s'affranchir du problème de poids du corps en lévitation. Nous avons vu par la suite comment les choix des divers composants de la configuration élémentaire ont été faits en tentant d'argumenter au mieux les solutions choisies à chaque stade de l'évolution.

En ce qui concerne la configuration des aimants porteurs, notre choix s'est porté sur une configuration stable qui induit des lignes de champ d'induction magnétique parallèles dans la zone de flottaison. Cette configuration va permettre de réduire les effets du couple magnétique. Dans la suite, nous nous sommes attachés particulièrement à l'étude statique de la configuration élémentaire ainsi que le principe de mesure de forces passif. Le principe de mesure de forces actif a été détaillé à la fin de ce chapitre. Ce principe de mesure utilise deux bobines de rappel commandées en courant et couplées à un capteur de position à grande résolution.

## Chapitre 3

# Plate-forme de mesure de micro et nano forces

*Ce chapitre est divisé en deux parties respectivement dédiées à la conception et à l'étude dynamique de la plate-forme. Le mécanisme de flottaison-magnétique (MFM) asservi, présenté dans le chapitre précédent, servira de base pour le développement de la plate-forme complète. Deux modèles de comportement dynamique sont développés : un modèle complet suivant les six degrés de liberté et un modèle linéaire modélisant le comportement dynamique de la plate-forme dans le plan horizontal. Après validation, ce modèle linéaire sera retenu pour l'asservissement de la plate-forme qui permet une mesure active de la force.*

### 3.1 Conception de la plate-forme

Le mécanisme de flottaison-magnétique (MFM) asservi, présenté à la fin du deuxième chapitre, va être utilisé pour construire un dispositif de mesure de micro et nano forces. Ce dispositif aura, comme élément sensible, une plate-forme macroscopique flottante, suspendue par trois MFM suffisamment éloignés les uns par rapport aux autres (voir figures 3.1 et 3.2) pour que les interactions magnétiques respectives soient négligeables.

Les aimants porteurs des trois mécanismes sont appelés  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . De même, les bobines de commande des trois mécanismes sont appelées  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  et les trois aimants en flottaison sont notés  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

Les poussées d'Archimède des trois flotteurs placés aux coins de la plate-forme compensent son poids  $\vec{P}$  et assurent l'équilibre vertical. Les forces de rappel magnétiques de  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , quant à elles, assurent la stabilité de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  défini sur la figure 3.2. La plate-forme possède six degrés de liberté  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \phi, \theta, \psi)$ , avec :

- $\phi$  l'angle formé entre la plate-forme et l'axe  $\vec{x}$  ;
- $\theta$  l'angle formé entre la plate-forme et l'axe  $\vec{y}$  ;
- $\psi$  l'angle formé entre la plate-forme et l'axe  $\vec{z}$ .

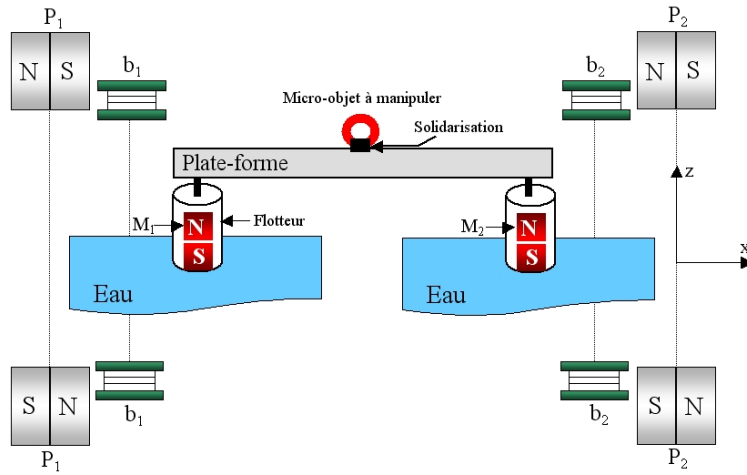


FIG. 3.1 – Représentation schématique de la plate-forme (vue de côté)

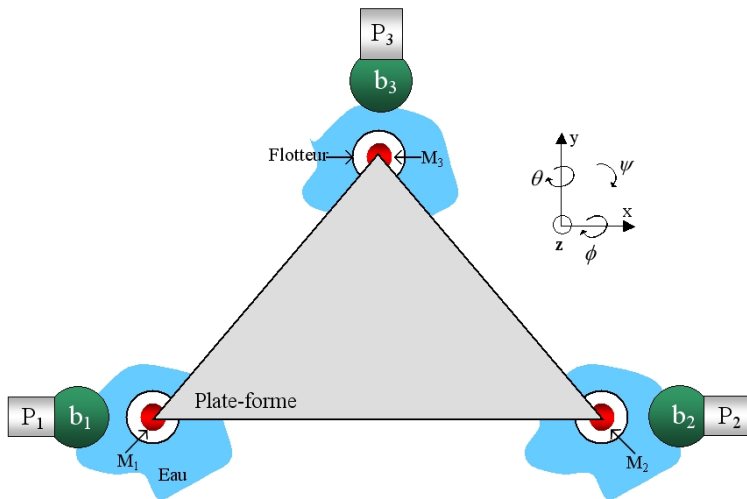


FIG. 3.2 – Représentation schématique de la plate-forme (vue du dessus)

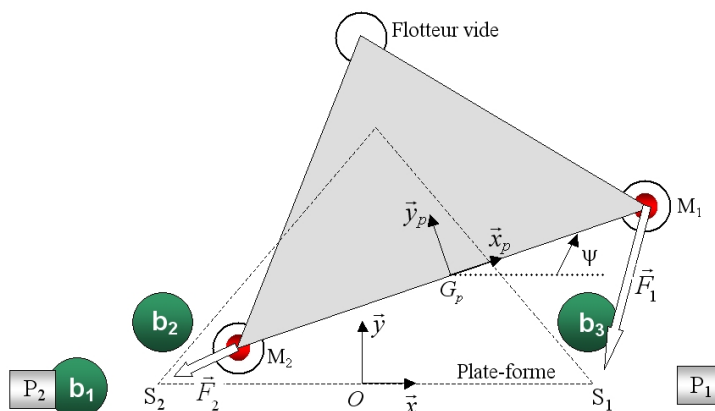


FIG. 3.3 – Configuration particulière de la plate-forme (vue du dessus)

Au final, l'action conjuguée des forces de rappel magnétiques et de la poussée d'Archimède permet à la plate-forme d'avoir un équilibre stable selon ces 6 ddl (cf. chapitre 2). Chaque degré de liberté peut constituer une direction de mesure de force ou de couple. Dans la suite, nous allons nous attacher plus particulièrement à caractériser la mesure de forces suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Cela est dû à la présence de la poussée d'Archimède, le long de l'axe  $\vec{z}$ , qui dégrade la sensibilité du capteur dans cette direction de mesure. Nous allons nous attacher aussi, et pour la même raison, à la mesure de couple suivant  $\psi$  sans exploiter la mesure de couple suivant  $\theta$  et  $\phi$ .

## 3.2 Configuration particulière de la plate-forme

Les équations différentielles qui régissent le comportement dynamique de la plate-forme représentée aux figures 3.1 et 3.2, sont complexes en raison des couplages entre les différentes directions de mesure.

La figure 3.3 représente une configuration particulière de la plate-forme comprenant deux paires d'aimants porteurs  $p_i$ , deux aimants en flottaison  $M_1$  et  $M_2$  et trois paires de bobines de commande  $b_i$ . Le choix d'un couple d'aimant porteurs  $(P_1, P_2)$  qui permet la stabilité dans le plan  $(xOy)$  est justifié par [3] où la masse sismique est une tige. Le remplacement de la tige par une plate-forme, impose d'ajouter deux flotteurs vides pour assurer la stabilité en rotation suivant  $\phi$ . Notons que seulement la moitié de la plate-forme est représentée sur la figure 3.3. Les trois paires de bobines de commande  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ , quant à elles, ont pour rôle de contrôler la position de la plate-forme suivant les deux directions de mesure  $\vec{x}, \vec{y}$  et l'angle  $\psi$  définies sur la figure 3.2. L'étude comportementale des effets des courants dans chaque paire de bobine sera développée progressivement dans ce chapitre. Cette configuration a été retenue afin de simplifier au maximum les équations différentielles qui régissent le mouvement de la plate-forme et pour limiter les couplages entre les différentes directions de mesure afin de simplifier au maximum la

commande du dispositif.

La plate-forme est en mouvement quelconque par rapport à un repère fixe  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , défini sur la figure 3.3, dont l'origine  $O$  est au milieu de  $M_1M_2$  lorsque la plate-forme est au repos, avec :

- $Ox$  un axe parallèle à l'axe reliant  $S_1$  à  $S_2$  ( $S_1$  et  $S_2$  étant les deux points d'équilibre stable de  $M_1$  et  $M_2$ );
- $Oy$  un axe horizontal perpendiculaire à l'axe  $Ox$ ;
- $Oz$  un axe vertical perpendiculaire au plan  $(xOy)$  formé par les deux axes  $Ox$  et  $Oy$ .

Nous définissons également un repère  $R_p(G_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  lié à la plateforme (voir figure 3.3), dont l'origine est au centre de gravité  $G_p$  (supposé être au milieu de  $M_1M_2$ ) de cette dernière, avec :

$$G_p = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}_{/R_0} \quad (3.1)$$

Notons que sur la figure 3.3, la position de  $G_p$  suppose une plate-forme non triangulaire qui n'a pas été représentée pour simplifier le dessin. Lorsque la plateforme est à sa position initiale les deux repères  $R_p$  et  $R_0$  sont confondus. L'angle  $\psi$  est l'angle de rotation de la plate-forme autour de l'axe  $z$ , définie sur la figure 3.2)

A chaque paire de bobines  $b_i$  est associé un repère  $R_{b_i}$  et à chaque paire d'aimants porteurs  $P_i$  est associé un repère  $R_{p_i}$ . Par souci de lisibilité, les repères locaux  $R_{p_i}$  et  $R_{b_i}$  ne sont pas présentés sur la figure 3.3 et uniquement sur la figure 3.4. Reste à noter que le point d'équilibre stable  $S_1$  de  $P_1$  est l'origine du repère  $R_{p_1}$  et que le point d'équilibre stable  $S_2$  de  $p_2$  est l'origine du repère  $R_{p_2}$ . Les coordonnées de  $S_1$  et  $S_2$  dans  $R_0$  sont égales aux coordonnées de  $M_1$  et  $M_2$  dans  $R_p$ , avec :

$$S_{1/R_0} = M_{1/R_p} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$S_{2/R_0} = M_{2/R_p} = \begin{bmatrix} -\delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

L'angle  $\alpha_{p_1}$  formé par les deux repères  $R_{p_1}$  et  $R_0$  est égale à  $\pi$ , l'angle  $\alpha_{b_2} = \alpha_{b_3} = -\pi/2$  et  $\alpha_{p_2} = \alpha_{b_1} = 0$  (voir figures 3.4 et 3.5).

Avec une telle configuration, la détermination de la force externe appliquée à la plate-forme est conditionnée par la détermination des deux forces de rappel  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  appliquées sur  $M_1$  et  $M_2$  qui sont la somme des forces magnétiques de  $P_1$  et  $P_2$  et des forces électromagnétiques de  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  (voir figure 3.3).

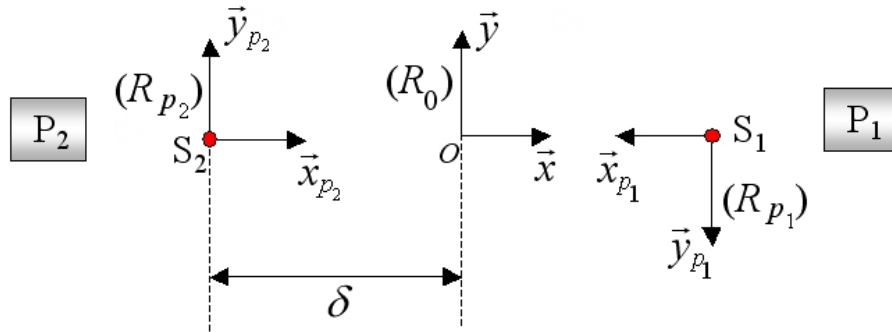


FIG. 3.4 – Repère global  $R_o$  et repères locaux des aimants porteurs

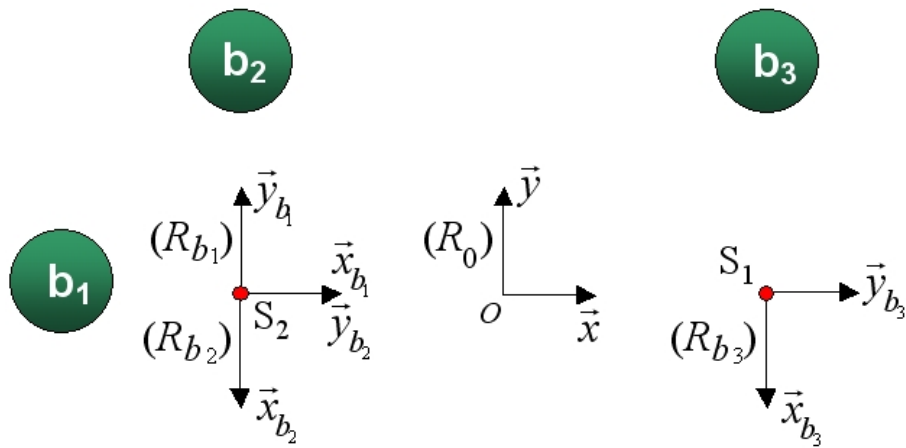


FIG. 3.5 – Repère global  $R_o$  et repères locaux des bobines de commande



### 3.3 Etude dynamique de la plate-forme

Dans cette section, nous allons présenter le modèle de comportement dynamique de la plate-forme. L'étude dynamique va permettre de déterminer le comportement dynamique oscillatoire du régime transitoire, pour permettre la mise en place d'une loi de commande dans les chapitres qui suivent. Enfin, un élément essentiel de l'étude dynamique est la possibilité d'identifier différents paramètres du système, notamment le coefficient de frottement visqueux sans avoir recours à des capteurs supplémentaires.

Bien que la plate-forme n'ait été conçue que pour mesurer des forces et des couples suivant les trois directions  $\vec{x}, \vec{y}$  et  $\psi$ , dans la suite, nous allons présenter un modèle de comportement dynamique complet de la plate-forme suivant les six degrés de liberté. Ce modèle fortement non-linéaire, sera utilisé pour les simulations réalistes du comportement.

#### 3.3.1 Bilan des forces et moments

Pour les besoins de cette étude nous allons introduire de nouvelles notations afin d'établir le bilan des forces et moments. Notons  $\vec{F}_{p_1}^{mag}(M_1)$  la force magnétique appliquée par  $P_1$  sur  $M_1$ .  $\vec{F}_{b_3}^{elec}(M_1)$  la force électromagnétique appliquée par  $b_3$  sur  $M_1$ . On définit, de manière similaire, les forces générées par  $P_1, P_2, b_1, b_2$  et  $b_3$  sur  $M_1$  et  $M_2$ .

Les deux aimants en flottaison  $M_1$  et  $M_2$  sont suffisamment éloignés l'un par rapport à l'autre, pour que les forces magnétiques et électromagnétiques appliquées par  $P_2, b_1$  et  $b_2$  sur  $M_1$  soient négligeables. Autrement dit seules  $\vec{F}_{p_1}^{mag}(M_1)$  et  $\vec{F}_{b_3}^{elec}(M_1)$  s'appliquent sur  $M_1$ .

De même, les forces magnétiques et électromagnétiques appliquées par  $P_1$  et  $b_3$  sur  $M_2$  sont supposées négligeables par rapport aux autres forces présentes. Ainsi, dans la suite de cette étude dynamique, nous supposons que :

$$\vec{F}_{p_1}^{mag}(M_2) = \vec{F}_{p_2}^{mag}(M_1) = \vec{F}_{b_3}^{elec}(M_2) = \vec{F}_{b_2}^{elec}(M_1) = \vec{F}_{b_1}^{elec}(M_1) = 0$$

Notons  $\Gamma_x^v, \Gamma_y^v$  et  $\Gamma_z^v$  les composantes du couple de frottement visqueux  $\vec{\Gamma}^v$  (entre l'eau et les trois flotteurs) dû à la rotation de la plate-forme autour de  $\vec{x}, \vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Ce couple est proportionnel au vecteur de rotation angulaire  $\vec{\Omega}$  de la plate-forme, défini dans la section 3.2 :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_x^v \\ \Gamma_y^v \\ \Gamma_z^v \end{pmatrix} / R_p = \begin{pmatrix} k_{yz}^v & 0 & 0 \\ 0 & k_{xz}^v & 0 \\ 0 & 0 & k_{xy}^v \end{pmatrix} \cdot \vec{\Omega} / R_p \quad (3.4)$$

avec  $k_{yz}^v, k_{xz}^v$  et  $k_{xy}^v$  les coefficients de frottement visqueux.

De même, notons  $F_x^v$ ,  $F_y^v$  et  $F_z^v$  les composantes de la force de frottement visqueux  $\vec{F}^v$ , dans le repère  $R_0$ , qui s'oppose aux mouvements de la plate-forme suivant  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Cette force est proportionnelle à la vitesse  $\vec{G}_p$  ( $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p$ ) de la plate-forme :

$$\begin{vmatrix} F_x^v \\ F_y^v \\ F_z^v \end{vmatrix}_{/R_0} = \begin{vmatrix} k_x^v & 0 & 0 \\ 0 & k_y^v & 0 \\ 0 & 0 & k_z^v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{vmatrix}_{/R_0} \quad (3.5)$$

avec  $k_x^v$ ,  $k_y^v$  et  $k_z^v$  les coefficients de frottement visqueux suivant  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .

### 3.3.2 Changement de repère

Le calcul des forces magnétiques et électromagnétiques engendrées par  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  se fait dans les repères locaux  $R_{p_i}$  et  $R_{b_i}$  en utilisant les résultats du deuxième chapitre. Il est ensuite nécessaire de calculer ces forces dans le repère global  $R_0$ .

Deux types de mouvement sont à considérer dans un changement de repère, à savoir les translations et les rotations. Alors que la description des translations est relativement simple, il existe différentes possibilités de modélisation pour exprimer les rotations, on trouve principalement [43] :

- les rotations successives de différents repères (angles d'*Euler*, angles nautiques, etc. . . ;
- Les quaternions.

Les rotations successives sont pratiques pour modéliser de très petites rotations. Le principal inconvénient de cette approche est que les rotations ne sont pas commutatives : l'objet ne se trouve pas dans la même position si l'ont fait des rotations par exemple par rapport à  $(x, y, z)$  ou par rapport à  $(y, x, z)$ .

La deuxième approche exploite les *quaternions* [44] qui sont un type de nombres hypercomplexes, constituant une extension des nombres complexes, extension similaire à celle qui avait conduit des nombres réels aux nombres complexes. Alors qu'un nombre complexe s'écrit  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels, un quaternion s'écrit :

$$Q = q_0 + \vec{u} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (3.6)$$

avec  $q_0$  réel et  $\vec{u}$  un vecteur de  $E_3$ , espace euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; le réel  $q_0$  est la partie réelle de  $Q$  et  $\vec{u}$  sa partie imaginaire.

Notre choix s'est porté sur l'utilisation des quaternions pour déterminer en dynamique l'attitude de la plateforme et faire tous les changements de repère qui conviennent entre les différents repères locaux définis. L'orientation d'un repère local par rapport au repère  $R_o$  sera donnée par le quaternion d'attitude associé  $Q$ , que l'on décline de différentes manières, notamment afin de disposer des matrices de transformation, lesquelles servent à exprimer des points locaux à la plateforme dans le repère  $R_o$  et inversement. La même méthode est utilisée pour exprimer les champs magnétiques générés

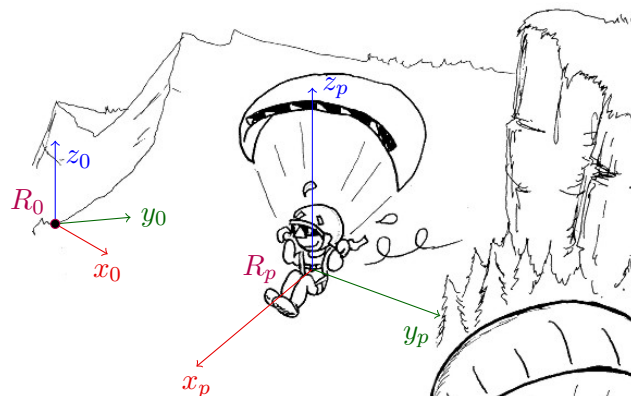


FIG. 3.6 – repérage de la plate-forme (représentée par un parachutiste) dans l'espace.

par les aimants porteurs ou les bobines dans les repères locaux ou le repère global  $R_o$ .

De la même manière que dans le plan complexe où l'on peut définir des opérateurs de rotation, le quaternion d'attitude  $Q$  n'est autre qu'un opérateur de rotation indépendant de la base choisie. D'ailleurs on retrouve, à partir des quatre composantes de  $Q$ , les caractéristiques de la rotation qui, si elle est appliquée aux axes du repère  $R_o$ , définissent l'orientation du repère local de l'élément ou l'objet que l'on considère. Cette rotation est définie par un vecteur à trois composantes, fixant une direction (l'axe de rotation), puis d'un angle de rotation que l'on applique autour de cet axe. En pratique, on choisit de normer le quaternion d'attitude pour représenter des rotations en tant qu'isométrie :

$$\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1 \quad (3.7)$$

### Quaternion d'attitude et angles nautiques

En choisissant de définir l'attitude des éléments ou des objets à partir du quaternion d'attitude, on se passe complètement des autres représentations. Toutefois, lorsque l'on souhaite par exemple définir l'orientation initiale de la plateforme (c'est-à-dire l'orientation de  $R_p$ ), il est plus pratique de la définir à partir des angles nautiques. On en déduit  $Q$  immédiatement.

Soient  $\psi'$ ,  $\theta'$ ,  $\phi'$  les angles de lacet, de tangage et de roulis de la plate-forme permettant de définir  $R_p$ , avec :

- $\psi'$  l'angle de rotation autour de  $z_0$  (lacet) ;
- $\theta'$  l'angle de rotation autour de l'axe déduit de  $y_0$  par la rotation précédente (tangage) ;
- $\phi'$  l'angle de rotation autour de l'axe déduit de  $x_0$  par le produit des deux rotations précédentes (roulis).

Le quaternion d'attitude  $Q$ , associé à un élément de la plate-forme, s'exprime en fonction de ces angles nautiques conventionnels de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \cos \frac{\phi'}{2} + \sin \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \sin \frac{\phi'}{2} \\ q_1 &= \cos \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \sin \frac{\phi'}{2} - \sin \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \cos \frac{\phi'}{2} \\ q_2 &= \cos \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \cos \frac{\phi'}{2} + \sin \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \sin \frac{\phi'}{2} \\ q_3 &= -\cos \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \sin \frac{\phi'}{2} + \sin \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \cos \frac{\phi'}{2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

### Calcul des matrices de changement de repère

On considère un point  $M$  appartenant à la plate-forme mobile. Les coordonnées du point  $M$  sont exprimées dans  $R_0$  ou bien dans  $R_p$ . Le passage de l'un à l'autre s'écrit :

$$M_{/R_p} = P_{p0} \cdot (M_{/R_0} - G_{p/R_0}) \quad (3.9)$$

$$M_{/R_0} = P_{0p} \cdot M_{/R_p} + G_{p/R_0} = P_{p0}^{-1} \cdot M_{/R_p} + G_{p/R_0} \quad (3.10)$$

où  $G_{p/R_0}$  sont les coordonnées de  $G_p$  dans  $R_0$ ,  $P_{0p}$  la matrice de passage de  $R_p$  à  $R_0$  et  $P_{p0}$  la matrice de passage de  $R_0$  à  $R_p$ .

Ces matrices sont calculées à partir du quaternion d'attitude  $Q$  de la plate-forme, avec :

$$P_{0p} = P_{p0}^{-1} = \begin{vmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

Le changement de repère pour un vecteur  $\vec{F}$ , dans les mêmes conditions, se fait par la transformation suivante :

$$\vec{F}_{/R_0} = P_{0p} \cdot \vec{F}_{/R_p} \quad (3.12)$$

### Evolution du quaternion d'attitude

Lorsque la plate-forme est en mouvement de rotation autour de son centre de gravité l'évolution temporelle du quaternion d'attitude unitaire  $Q$  est donnée par l'équation :

$$Q_\Omega = 2 \bar{Q} \dot{Q} \quad (3.13)$$

avec  $\bar{Q}$  le conjugué de  $Q$ , donné par l'expression suivante :

$$\bar{Q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \quad (3.14)$$

et  $Q_\Omega$  le quaternion associé au vecteur de rotation angulaire  $\vec{\Omega}$  de la plate-forme pris dans le repère  $R_p(G_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  défini sur la figure 3.6 et qui s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{\Omega} = \left| \begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array} \right|_{R_p} \iff Q_\Omega = 0 + p i + q j + r k \quad (3.15)$$

En pratique la dérivée d'un quaternion, tout comme le quaternion lui-même n'a pas de lien avec la base, puisqu'elle caractérise l'évolution d'une transformation géométrique intrinsèque. C'est une notion intrinsèque (à ne pas confondre avec la dérivée d'un vecteur). Ainsi, on a :

$$\dot{Q} = \dot{q}_0 + \dot{q}_1 i + \dot{q}_2 j + \dot{q}_3 k = \frac{1}{2} Q \cdot Q_\Omega \quad (3.16)$$

qui vérifie bien l'équation 3.13 :

$$Q_\Omega = 2 \bar{Q} \dot{Q} = 2 \bar{Q} \left( \frac{1}{2} Q Q_\Omega \right) = \bar{Q} Q Q_\Omega \quad (3.17)$$

On peut facilement vérifier que lorsque  $Q$  est unitaire, on a  $Q \bar{Q} = 1$  et donc 3.17 est bien vérifiée.

Comme le produit de deux quaternions  $Q_1 = a + bi + cj + dk$  et  $Q_2 = a' + b'i + c'j + d'k$ , noté  $Q_1 \cdot Q_2$ , est défini comme suit :

$$Q_1 \cdot Q_2 = \begin{cases} a a' - b b' - c c' - d d' & (i) \\ a b' + b a' + c d' - d c' & (j) \\ a c' + c a' + d b' - b d' & (k) \\ a d' + d a' + b c' - c b' & \end{cases}$$

D'après l'équation 3.16, on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{2} Q \cdot Q_\Omega \\ &= \frac{1}{2} (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \cdot (0 + p i + q j + r k) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} -p q_1 - q q_2 - r q_3 & (i) \\ p q_0 + r q_2 - q q_3 & (j) \\ q q_0 + p q_3 - r q_1 & (k) \\ r q_0 + q q_1 - p q_2 & \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nous verrons, par la suite, que la connaissance de  $\dot{Q}$  est essentielle pour le développement du modèle dynamique de la plate-forme.

### 3.3.3 Dynamique en translation

A présent, nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique sur la plate-forme pour déterminer les équations différentielles qui régissent son comportement dynamique dans le repère  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  défini précédemment :

$$\sum \vec{F}_{/R_0} = m \vec{G}_{p/R_0} \quad (3.19)$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}_{p_i/R_0}^{mag} + \sum_{i=1}^3 \vec{F}_{b_i/R_0}^{elec} + \vec{F}_{/R_0}^v + \vec{F}_{/R_0}^{ext} + \vec{P}_a + \vec{P} = m\vec{G}_{p/R_0} \quad (3.20)$$

avec  $\vec{F}^{ext}$  la force externe appliquée au centre de gravité  $G_p$  de la plate-forme,  $m$  la masse totale de la plate-forme,  $\vec{F}_{p_i}^{mag}$  la somme des deux forces magnétiques  $\vec{F}_{p_1}^{mag}$  appliquée par  $P_1$  sur  $M_1$  et  $\vec{F}_{p_2}^{mag}$  appliquée par  $P_2$  sur  $M_2$ ,  $\vec{F}_{b_i}^{elec}$  la somme des trois forces électromagnétiques  $\vec{F}_{b_1}^{elec}$  appliquée par  $b_1$  sur  $M_2$ ,  $\vec{F}_{b_2}^{elec}$  appliquée par  $b_2$  sur  $M_2$  et  $\vec{F}_{b_3}^{elec}$  appliquée par  $b_3$  sur  $M_1$ .

La projection de l'équation 3.20 suivant  $\vec{x}$  vaut :

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^2 F_{x,p_i/R_0}^{mag} - \sum_{i=1}^3 F_{x,b_i/R_0}^{elec} - F_{x/R_0}^v + F_{x/R_0}^{ext} = m\ddot{x}_{p/R_0} \\ \Rightarrow & - \sum_{i=1}^2 F_{x,p_i/R_0}^{mag} - \sum_{i=1}^3 F_{x,b_i/R_0}^{elec} - k_x^v \cdot \dot{x}_{p/R_0} + F_{x/R_0}^{ext} = m\ddot{x}_{p/R_0} \\ \Rightarrow & \ddot{x}_{p/R_0} = \frac{1}{m} \left( - \sum_{i=1}^2 F_{x,p_i/R_0}^{mag} - \sum_{i=1}^3 F_{x,b_i/R_0}^{elec} - k_x^v \cdot \dot{x}_{p/R_0} + F_{x/R_0}^{ext} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La projection de l'équation 3.20 suivant  $\vec{y}$  donne :

$$\ddot{y}_{p/R_0} = \frac{1}{m} \left( - \sum_{i=1}^2 F_{y,p_i/R_0}^{mag} - \sum_{i=1}^3 F_{y,b_i/R_0}^{elec} - k_y^v \cdot \dot{y}_{p/R_0} + F_{y/R_0}^{ext} \right) \quad (3.22)$$

La projection de l'équation 3.20 suivant  $\vec{z}$  donne :

$$\ddot{z}_{p/R_0} = \frac{1}{m} \left( - \sum_{i=1}^2 F_{z,p_i/R_0}^{mag} - \sum_{i=1}^3 F_{z,b_i/R_0}^{elec} - k_z^v \cdot \dot{z}_{p/R_0} + F_{z/R_0}^{ext} + P_a \right) - g \quad (3.23)$$

Les calculs des forces magnétiques  $\vec{F}^{mag}$  et électromagnétiques  $\vec{F}^{elec}$  dans les repères locaux  $R_{p_i}$  et  $R_{b_i}$  ainsi que la poussée d'Archimède  $P_a$  ont été définis dans le chapitre 2.

Notons que dans cette étude dynamique, la force externe  $\vec{F}^{ext}$  regroupe, à la fois, la force externe appliquée à la plate-forme et la force de perturbation  $\vec{F}^p$  qui, à son tour, regroupe les effets capillaires sur les flotteurs et les ondes de surface. Cette force de perturbation devra être ensuite éliminée par filtrage numérique ou mécanique (amortissement sur les bords du bassin en ce qui concerne les ondes de surface) si elle s'avère gênante pour la mesure.

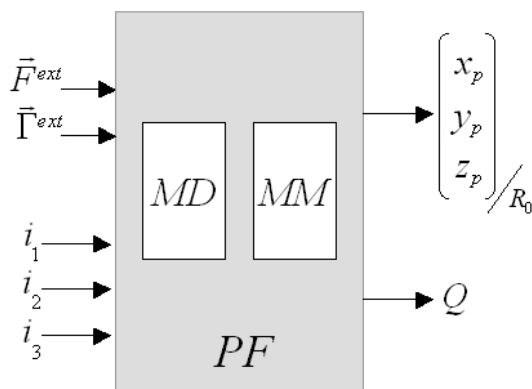


FIG. 3.7 – Modèle de comportement global de la plate-forme suivant 6ddl.

### 3.3.4 Dynamique en rotation

Appliquons à présent la relation fondamentale de la dynamique dans le cas des corps en mouvement circulaire sur la plate-forme. L'équation caractérisant la relation entre les moments de forces exercés sur la plate-forme et sa vitesse angulaire  $\Omega$  est définie par la relation suivante [45] :

$$\sum \vec{M}_{F/G_p} = \bar{I} \dot{\Omega} + \Omega \wedge (\bar{I} \Omega) \quad \text{avec} \quad \dot{\Omega} = \begin{vmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{vmatrix}_{R_p} \quad (3.24)$$

$\bar{I}$  étant la matrice d'inertie de la plate-forme, avec :

$$\bar{I} = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}_{R_p} \quad (3.25)$$

Cette matrice est calculée à partir du modèle CAO de la plate-forme.

### 3.3.5 Simulateur du comportement dynamique

A partir des équations différentielles que nous avons établies précédemment, nous avons élaboré un modèle de comportement global de la plate-forme suivant les 6 ddl. Le modèle reçoit en entrée la force  $\vec{F}^{ext}$  et le couple  $\vec{\Gamma}^{ext}$  externes ainsi que les courants  $i_1, i_2$  et  $i_3$  appliqués aux bobines de commande  $b_1, b_2$  et  $b_3$ . Il fournit en sortie les coordonnées  $x_p, y_p, z_p$  et  $Q$  de la plate-forme dans  $R_0$  (voir figure 3.7). Ce modèle est formé d'un modèle dynamique ( $MD$ ) couplé à un modèle magnétique ( $MM$ ).

Le modèle de comportement dynamique, représenté sur la figure 3.8, reçoit en entrée :

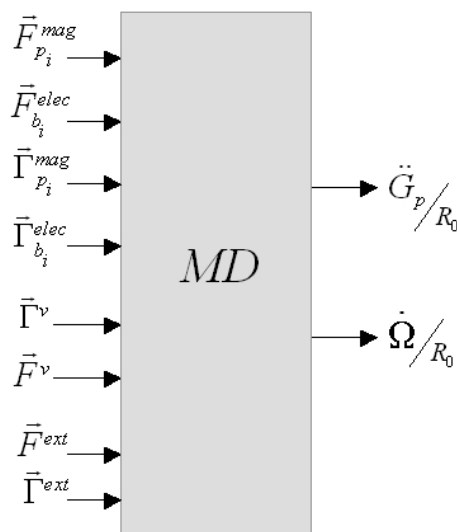


FIG. 3.8 – Modèle dynamique.

- $\vec{F}_{p_i}^{mag}$ ,  $\vec{F}_{b_i}^{elec}$ ,  $\vec{\Gamma}_{p_i}^{mag}$ ,  $\vec{\Gamma}_{b_i}^{elec}$  : les forces et les couples magnétiques et électromagnétiques qui s'exercent sur les aimants  $M_1$  et  $M_2$  ;
- $\vec{F}^{ext}$ ,  $\vec{\Gamma}^{ext}$  : La force et le couple externes appliqués à la plate-forme ;
- $\vec{F}^v$ ,  $\vec{\Gamma}^v$  : La force et le couple de frottement visqueux.

Il fournit en sortie les accélérations  $\ddot{G}_p$  et  $\dot{\Omega}$  de la plate-forme, calculées dans le repère global  $R_0$  via les équations 3.20 et 3.24.

Le modèle magnétique, quant à lui, reçoit la position  $G_p$  de la plate-forme dans  $R_0$ , son attitude  $Q$  et les courants  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  appliqués aux bobines de commande  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ . A partir de ces informations le modèle calcule les forces et les couples magnétiques et électromagnétiques qui s'exercent sur les aimants  $M_1$  et  $M_2$  (voir figure 3.9).

Ces forces calculées dans un premier temps dans les repères locaux fixes  $R_{p_i}$  et  $R_{b_i}$  sont ensuite exprimées dans le repère global  $R_0$  via la matrice de passage  $p_{0p}$  avant d'être restituées à l'entrée du modèle dynamique ( $MD$ ). Cette matrice de passage est calculée à partir de l'attitude  $Q$  de la plate-forme. Cette attitude  $Q$  est, à son tour, calculée à partir de  $\dot{Q}$  et  $\Omega$  via l'équation 3.16.

La figure 3.10 présente le schéma bloc détaillé du modèle global de comportement dynamique de la plate-forme. Dans ce modèle, La vitesse  $\dot{G}_p$  est calculée par intégration à partir de  $\ddot{G}_p$  fournie par le modèle dynamique. Elle intervient dans le calcul de la force de frottement visqueux  $\vec{F}^v$  via l'équation 3.5. De même, la vitesse angulaire  $\Omega$  est



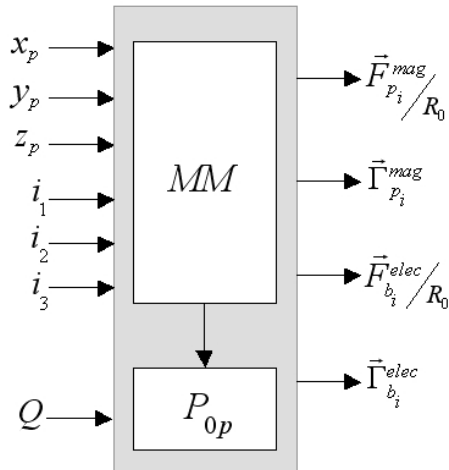


FIG. 3.9 – Modèle magnétique.

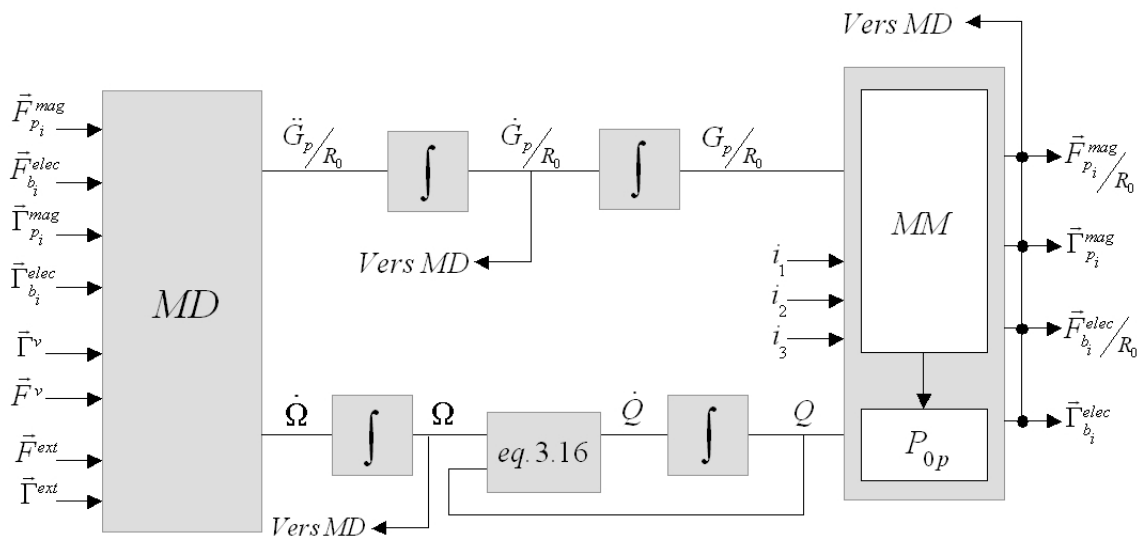


FIG. 3.10 – Schéma bloc détaillé du modèle de comportement global de la plate-forme suivant 6ddl.

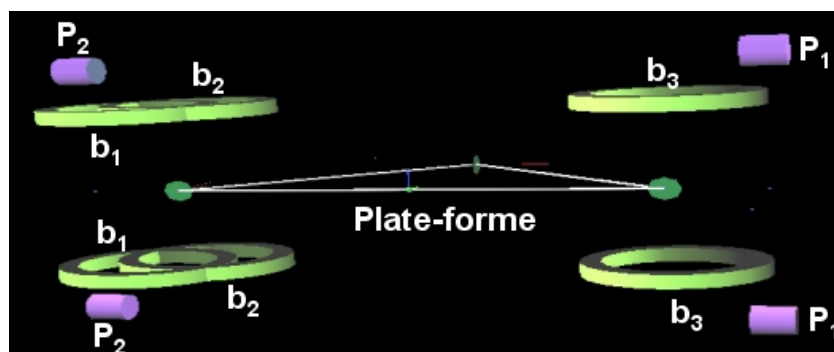


FIG. 3.11 – Interface graphique du modèle de comportement global de la plate-forme suivant *6ddl*.

calculée par intégration à partir de l'accélération angulaire fournie par le modèle dynamique. Elle intervient dans le calcul du couple de frottement visqueux  $\vec{\Gamma}^v$  via l'équation 3.4. La position  $G_p$  de la plate-forme, quant à elle, est calculée par intégration à partir de  $\dot{G}_p$ . Elle intervient dans le calcul des forces magnétiques et électromagnétiques.

Nous avons également conçu une interface graphique qui modélise l'évolution de la position de la plate-forme dans le temps ainsi que les couples et forces qui lui sont appliqués (voir figure 3.11).

En plus d'offrir la possibilité d'observer le comportement dynamique de la plate-forme, le modèle facilite l'analyse des phénomènes de couplage existant. D'autres fonctionnalités viennent se greffer à ce modèle telles que la détermination des positions d'équilibre stable  $S_1$  et  $S_2$  de  $M_1$  et  $M_2$  ou encore la détermination des zones de lévitation stables. Il est possible aussi de modifier l'ensemble des paramètres susceptibles d'affecter le comportement dynamique du capteur de forces. Parmi ces paramètres, on trouve la masse  $m$  de la plate-forme, l'espacement  $D$  entre les aimants porteurs indépendamment dans chaque module mécanisme de flottaison (*MFM*), les dimensions des aimants porteurs et mobiles, les dimensions des bobines, les aimantations des aimants  $M$  etc. . .

### 3.4 Modèle dynamique linéaire de la plate-forme

L'objectif de cette étude dynamique est de rendre possible par la suite, le calcul d'un contrôleur qui permettra des mesures de force (dans le plan  $(xOy)$ ) pour une consigne de déplacement nulle de la plate-forme en position et en orientation.

La figure 3.12 décrit la nature du problème à résoudre. Les entrées du système sont les courants dans les bobines ( $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$ ), la force externe appliquée à la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  et le couple externe selon  $\vec{z}$  qui sont considérés comme des entrées inconnues de perturbations qu'il va falloir déterminer. Les sorties sont les coordonnées  $(x_p, y_p$  et  $\psi)$  de la plate-forme dans  $R_0$  avec  $\psi$  l'angle de rotation de la plate-forme au-

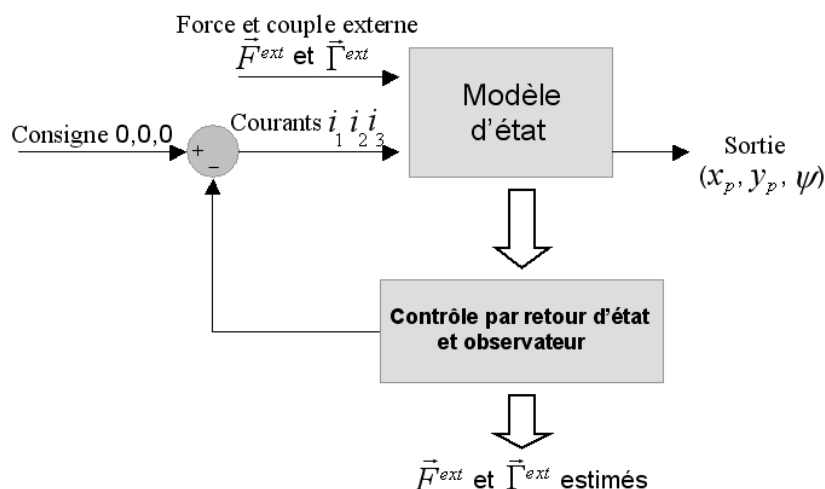


FIG. 3.12 – Asservissement de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  à la position «zéro».

tour de la verticale. Le modèle dynamique de la plate-forme dans le plan horizontal est fortement non-linéaire. La synthèse d'un correcteur pour l'asservissement devrait être réalisé en utilisant des techniques spécifiques de l'automatique non-linéaire. Une autre approche plus simple consiste à se contenter d'une approximation linéaire autour d'un point de fonctionnement pour avoir un modèle dynamique linéaire. Ce point de fonctionnement est ici  $(x_p, y_p, \psi) = (0, 0, 0)$  qui correspond à la consigne de positionnement de la plate-forme.

Dans la suite, nous allons nous intéresser au développement d'un modèle linéaire du comportement dynamique de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$ , qui reposent sur les hypothèses suivantes :

- la plate-forme se déplace uniquement suivant  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et autour  $\vec{z}$ . La poussée d'Archimède ayant une raideur beaucoup plus élevée (plusieurs ordres de grandeur) que les raideurs magnétiques, une force très faible (ou inférieur à quelques dizaines de micronewtons) ne va exciter la plate-forme que suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . De même, un couple de force très faible n'excitera la plate-forme qu'autour de  $\vec{z}$ ;
- les deux aimants  $M_1$  et  $M_2$  flottent au centre des paires d'aimants porteurs  $P_1$  et  $P_2$  (pas de déplacement suivant  $z$ ). Par conséquent, les forces magnétique  $\vec{F}^{mag}$  et électromagnétique  $\vec{F}^{elec}$  n'ont que des composantes dans le plan  $(xOy)$  :

$$\vec{F}^{mag} = \begin{bmatrix} F_x^{mag} \\ F_y^{mag} \end{bmatrix}$$

et

$$\vec{F}^{elec} = \begin{bmatrix} F_x^{elec} \\ F_y^{elec} \end{bmatrix}$$

### Force magnétique

La figure 3.13 représente le champ de forces magnétiques produit par les aimants porteurs  $P_i$  dans le plan  $(xOy)$ . D'après cette figure, on constate que plus on est dans le voisinage immédiat du point d'équilibre stable  $S$  (quelques  $\mu m$ ) et plus les iso-forces sont elliptiques. Ce qui permet d'écrire :

$$\vec{F}_{/R_{p_i}}^{mag} = \begin{bmatrix} F_x^{mag} \\ F_y^{mag} \end{bmatrix}_{/R_{p_i}} = \begin{bmatrix} K_x^m & 0 \\ 0 & K_y^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{/R_{p_i}} \quad (3.26)$$

avec  $K_x^m$ ,  $K_y^m$  les raideurs magnétiques suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

Ainsi, une iso-force magnétique est donnée par :

$$\begin{aligned} \|F^{mag}\| &= \sqrt{cte} = \sqrt{\alpha} \\ \Rightarrow (F_x^{mag})^2 + (F_y^{mag})^2 &= \alpha \\ \Rightarrow (K_x^m)^2 \cdot x^2 + (K_y^m)^2 \cdot y^2 &= \alpha \quad (d'après 3.26) \\ \Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{\sqrt{\alpha}}{K_x^m})^2} + \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{\alpha}}{K_y^m})^2} &= 1 \quad (Ellipse) \end{aligned}$$

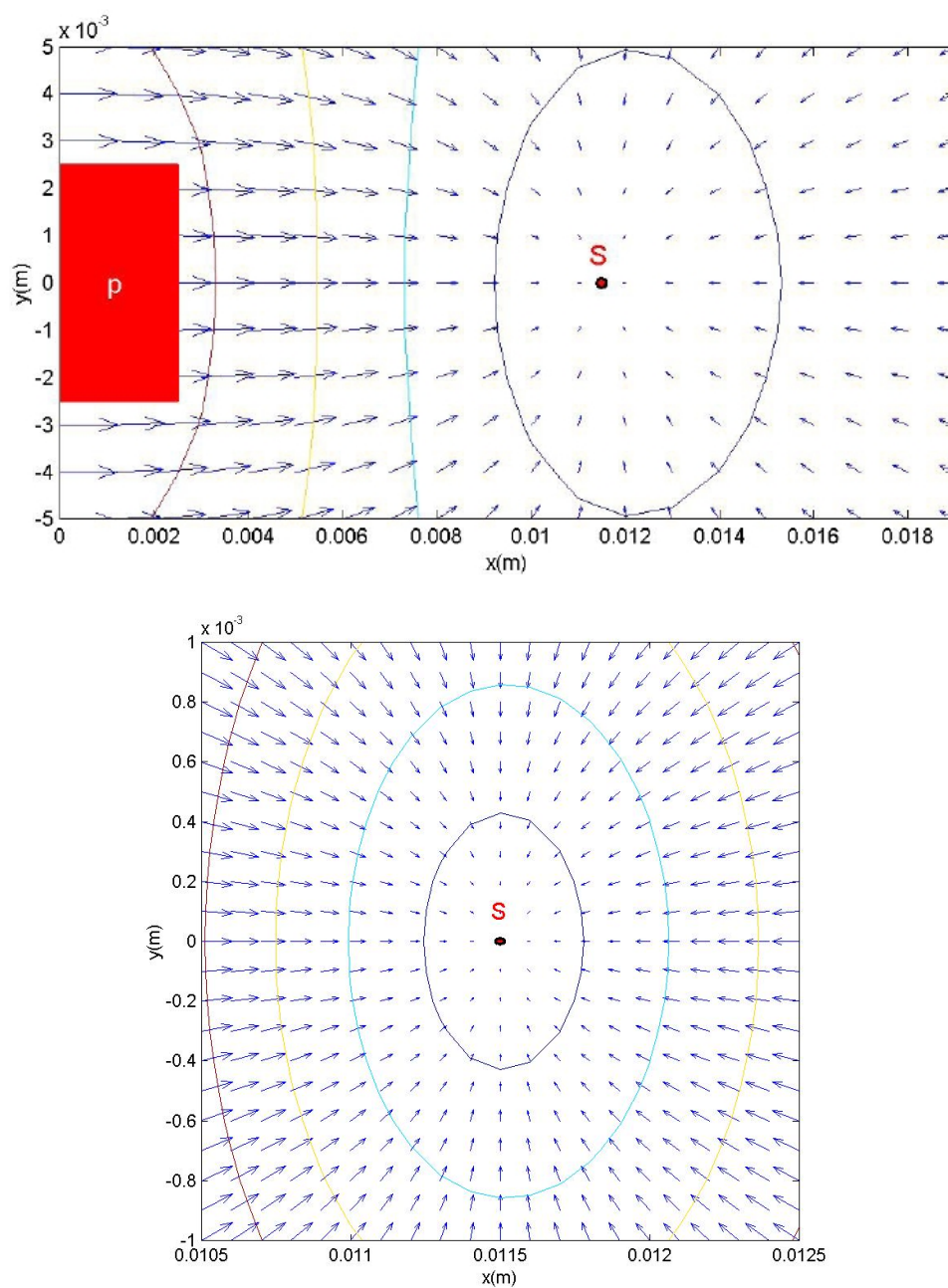
Afin de déterminer le domaine de validité de l'équation 3.26, nous avons tracé à l'aide du modèle non-linéaire (MNL) de la plate-forme la composante  $F_x^{mag}$  de la force magnétique produit par les aimants porteurs  $p_i$  en fonction de  $y$ . La figure 3.14 représente  $F_x^{mag}$  en fonction de  $y$  pour différentes valeurs de  $x$ . Si le modèle 3.26 était exact,  $F_x^{mag}$  devrait être indépendante de  $y$  (droite horizontale sur la figure 3.14).

Or, d'après la figure 3.14,  $F_x^{mag}$  reste constante (à 80  $nN$  près), quelque soit  $x$ , pour des déplacements  $d = 0.25 \text{ mm}$  autour du point  $S$ .

Le modèle 3.26 va conditionner la qualité du calcul des forces magnétiques. Ce qui, à son tour, conditionnera la qualité de l'estimation de la force externe  $F^{ext}$  à mesurer. Plus on est proche du point  $S$  et plus l'estimation sera bonne. Ainsi, le modèle 3.26 présentera, en régime transitoire, un comportement légèrement différent de celui du modèle non-linéaire (MNL). Dans le chapitre 5, nous montrerons par des simulations la différence de comportement des deux modèles qui dépendra forcément de l'amplitude de la force externe  $F^{ext}$  appliquée.

### Force électromagnétique

La figure 3.15 représente le champ de forces électromagnétiques produit par les bobines  $b_i$  dans le plan  $(xOy)$ . Comme pour la force magnétique, on constate que les iso-forces représentent une forme elliptique au voisinage immédiat de  $S$  (quelques  $\mu m$ ). Ce qui permet d'écrire :

FIG. 3.13 – Champ de forces produit par les aimants porteurs  $P_i$  dans le plan  $(xOy)$ .

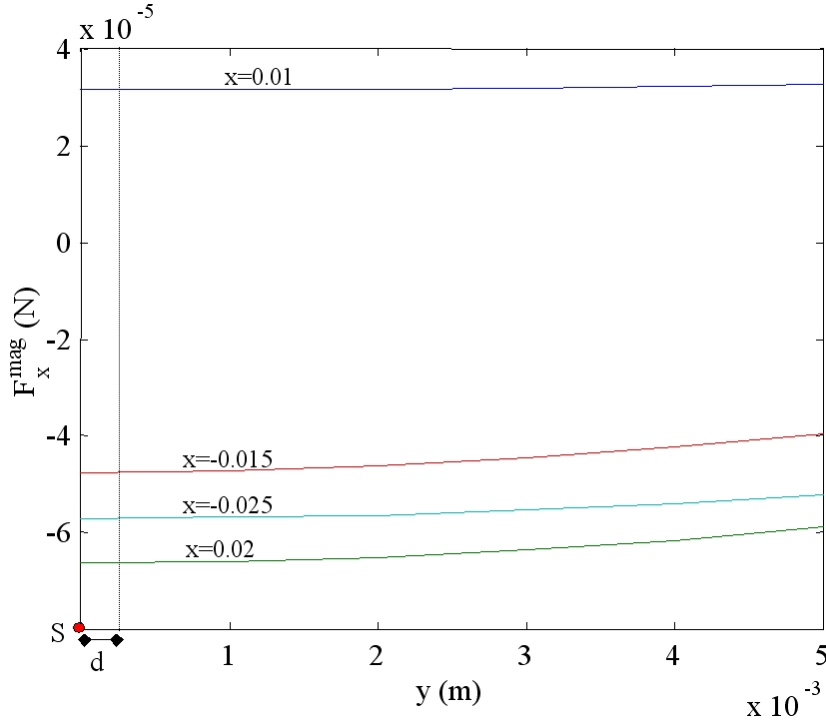


FIG. 3.14 – Force magnétique  $F_x^{mag}$  en fonction de  $y$  pour différents valeurs de  $x$ .

$$\vec{F}_{/R_{b_i}}^{elec} = \begin{bmatrix} F_x^{elec} \\ F_y^{elec} \end{bmatrix}_{/R_{b_i}} = \begin{bmatrix} K_x^e(i) & 0 \\ 0 & K_y^e(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{/R_{b_i}} \quad (3.27)$$

avec  $K_x^e(i)$ ,  $K_y^e(i)$  les raideurs électromagnétiques suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

Ainsi, une iso-force électromagnétique est donnée par :

$$\begin{aligned} \left\| F^{elec} \right\| &= \sqrt{cte} = \sqrt{\alpha} \\ \Rightarrow (F_x^{elec})^2 + (F_y^{elec})^2 &= \alpha \\ \Rightarrow (K_x^e(i))^2 \cdot x^2 + (K_y^e(i))^2 \cdot y^2 &= \alpha \\ \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{K_x^e(i)}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{K_y^e(i)}\right)^2} &= 1 \text{ (Ellipse)} \end{aligned}$$

A ce stade, nous posons  $\sqrt{\alpha} = K^e \cdot i$ . Ce qui signifie que nous recherchons les iso-forces proportionnelles au courant  $i$  qui traverse les bobines. Ceci permet d'écrire :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{K_x^e \cdot i}{K_x^e(i)}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{K_y^e \cdot i}{K_y^e(i)}\right)^2} = 1 \quad (3.28)$$

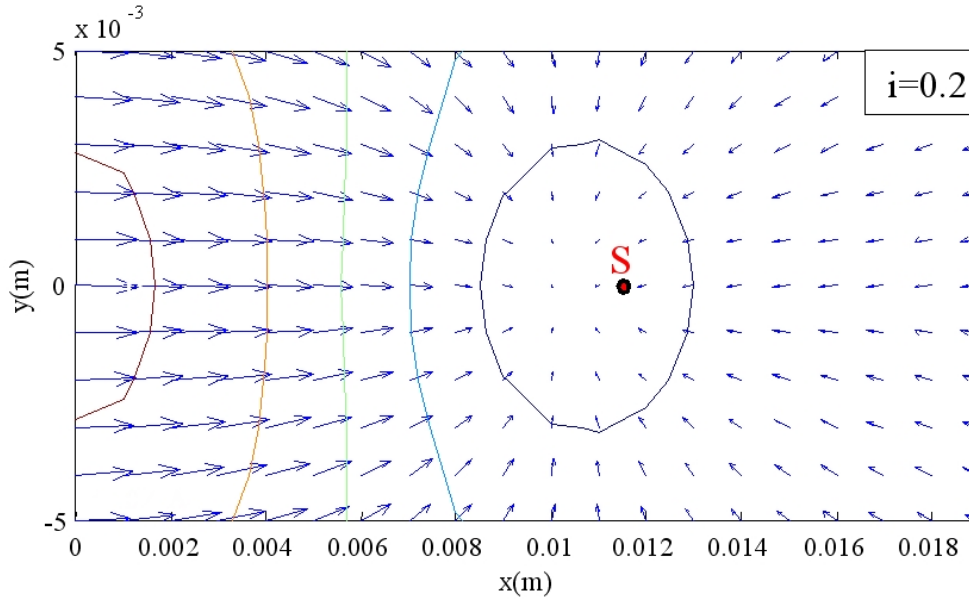


FIG. 3.15 – Champ de forces produit par les bobines  $b_i$  dans le plan  $(xOy)$ .

En  $S$  ( $x = 11.5\text{mm}$ ,  $y = 0$ ), l'équation 3.28 devient :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{K^e \cdot i}{K_x^e(i)}\right)^2} + 0 = 1$$

et on trouve :

$$x = \frac{K^e \cdot i}{K_x^e(i)} \quad (3.29)$$

En remplaçant  $x$  et  $y$  par leurs valeurs dans l'équation 3.27, on trouve :

$$\vec{F}^{elec} = \begin{bmatrix} K_e \\ 0 \end{bmatrix} [i] \quad (3.30)$$

Ce modèle n'est valable théoriquement qu'en  $S$ . Nous le conservons néanmoins dans un voisinage de  $S$  pour obtenir des expressions linéaires par la suite. Comme les bobines de commande  $b_1$  agissent uniquement suivant  $\vec{x}$  et les bobines  $b_2$  et  $b_3$  agissent uniquement suivant  $\vec{y}$ , on a :

$$\vec{F}_{b_1}^{elec} = \begin{bmatrix} K_e \\ 0 \end{bmatrix} [i_1], \quad \vec{F}_{b_2}^{elec} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_e \end{bmatrix} [i_2] \quad \text{et} \quad \vec{F}_{b_3}^{elec} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_e \end{bmatrix} [i_3] \quad (3.31)$$

avec  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  les courants dans les bobines de commande  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ .

### 3.4.1 Changement de repère

Il s'agit ici d'exprimer la position des aimants mobiles  $M_1$  et  $M_2$  de la plate-forme par rapport aux repères locaux  $R_{p_i}$  et  $R_{b_i}$  des aimants porteurs et des bobines de commande. Dans le cas d'une seule rotation, cette dernière est exprimée par un simple changement de repère sans avoir recours aux *quaternions*. Ainsi, le changement de repère pour  $M_1$  et  $M_2$  appartenant à la plate-forme (dont les coordonnées sont exprimées dans le repère  $R_p$ ), se fait par la transformation suivante :

$$M_{i/R_{b_i,p_i}} = P_{10}[(P_{0p} \cdot M_{i/R_p}) + R_p - R_{b_i,p_i}] \quad (3.32)$$

$P_{10}$  et  $P_{0p}$  sont les matrices de passage de  $R_0$  à  $R_{b_i,p_i}$  et de  $R_p$  à  $R_0$  et elles ont les expressions suivantes :

$$P_{10} = [P_{01}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 & \sin\psi_1 \\ -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 \end{bmatrix} \text{ et } P_{0p} = \begin{bmatrix} \cos\psi_2 & \sin\psi_2 \\ -\sin\psi_2 & \cos\psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

avec  $\psi_1$  l'angle formé par les deux repères  $R_{b_i,p_i}$  et  $R_0$  et  $\psi_2$  l'angle formé par les deux repères  $R_p$  et  $R_0$ .

Par la suite, le modèle magnétique permet de calculer les efforts appliqués aux aimants  $M_1$  et  $M_2$  dans les repères locaux  $R_{p_i}$  et  $R_{b_i}$ . Pour résoudre les équations de la dynamique, ces efforts seront ensuite exprimés dans le repère global  $R_0$  à l'aide de la transformation suivante :

$$\vec{F}_{/R_0} = P_{01} \cdot \vec{F}_{/R_{b_i,p_i}} \quad (3.34)$$

### 3.4.2 Position de la plate-forme

Il s'agit ici de déterminer les trois composantes  $x$ ,  $y$  et  $\psi$  de la position de la plate-forme à partir de trois capteurs de déplacement sans contact dont on devra déterminer la disposition optimale. Cette mesure est obligatoire afin de calculer les efforts magnétiques appliqués aux aimants mobiles  $M_1$  et  $M_2$ . En effet la détermination de la force externe  $\vec{F}^{ext}$  dans le plan  $(xOy)$  est conditionnée par la détermination des forces électromagnétiques ( $F_{b_1}^{elec}$ ,  $F_{b_2}^{elec}$ ,  $F_{b_3}^{elec}$ ) et des forces magnétiques ( $F_{p_1}^{mag}$ ,  $F_{p_2}^{mag}$ ) appliquées sur  $M_1$  et  $M_2$  par le biais des modèles de connaissance magnétique. Les forces électromagnétiques sont connues grâce aux courants  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  dans les bobines  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ . La détermination des forces magnétiques est possible connaissant la position de la plate-forme.

Nous avons choisi d'utiliser les capteurs confocaux de la société *STIL*. Ces capteurs composés d'un système optique passif permettent des mesures de déplacement et de distance avec une très haute précision. Chaque capteur confocal peut être disposé indifféremment de manière à mesurer la distance d'un bord de la plate-forme par l'intermédiaire d'un déflecteur fixé sur cette dernière. La figure 3.16 montre



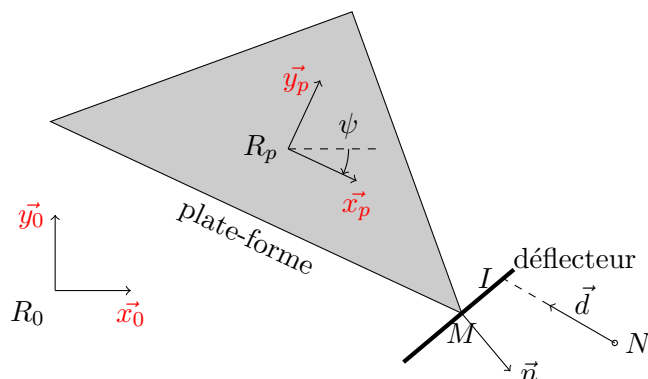


FIG. 3.16 – Configuration élémentaire avec un seul capteur confocal (vue du dessus)

la plate-forme équipée d'un déflecteur défini par sa normale  $\vec{n}$  et passant par le point  $M$ . La source de la lumière est placée en  $N$  et pointe suivant la direction  $\vec{d}$ . Il mesure la distance entre  $N$  et le point d'impact  $I$  sur le déflecteur.

La distance mesurée par le capteur confocal est donnée par l'expression suivante :

$$l = \frac{\vec{n}_{/R_0} \cdot \vec{NM}_{/R_0}}{\vec{n}_{/R_0} \cdot \vec{d}_{/R_0}} \quad \text{avec : } \vec{NI} = l \cdot \vec{d}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} N : \text{l'origine de mesure} \\ \vec{d} : \text{la direction du faisceau de lumière} \\ I : \text{le cible du faisceau de lumière sur le déflecteur} \\ \vec{n} : \text{la normale à la surface du déflecteur} \\ l : \text{la distance entre } N \text{ et } I \end{array} \right.$$

d'où l'on tire :

$$l = \frac{(P_{01} \cdot \vec{n}) \cdot (P_{01} \cdot M + R_p - N)}{(P_{01} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{d}} \quad (3.35)$$

avec :

$$P_{01} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, R_p = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}_{/R_0}, \vec{d} = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix}_{/R_0}$$

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{/R_0}, \vec{n} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}_{/R_p}, \vec{M} = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix}_{/R_p}$$

Le développement de l'équation (3.35) nous a permis d'écrire :

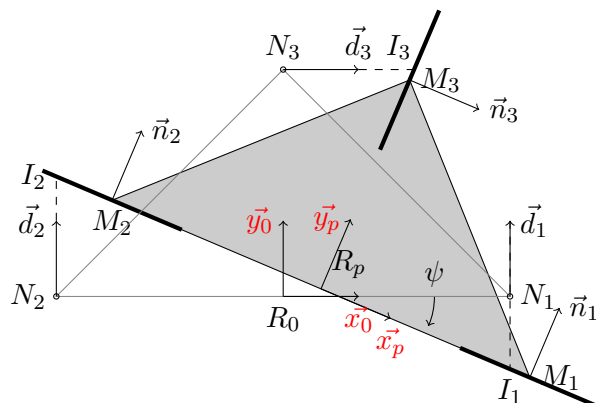


FIG. 3.17 – Configuration particulière des capteurs confocaux (vue du dessus).

$$l = \frac{(x_n \cos \psi - y_n \sin \psi)x_p + (x_n \sin \psi + y_n \cos \psi)y_p}{(y_d x_n - x_d y_n) \sin \psi + (x_d x_n + y_d y_n) \cos \psi} + \frac{\det[\vec{N}, \vec{n}] \sin \psi - (\vec{n} \cdot \vec{N}) \cos \psi + \vec{n} \cdot \vec{M}}{(y_d x_n - x_d y_n) \sin \psi + (x_d x_n + y_d y_n) \cos \psi} \quad (3.36)$$

avec  $\det[\vec{N}, \vec{n}] = (y_n x - x_n y)$ .

Avec trois capteurs confocaux, la détermination de la position  $(x_p, y_p, \psi)$  de la plate-forme n'est possible que si les trois équations correspondantes (3.36) sont inversibles.

Comme l'équation (3.36) n'est pas inversible, une idée pour déterminer  $(x_p, y_p, \psi)$  est d'utiliser une configuration particulière qui la rend inversible.

### Configuration particulière des capteurs confocaux

La configuration particulière adoptée est représentée sur la figure figure 3.17. Au repos (plate-forme représentée en pointillé) :

- les origines de mesure  $N_1, N_2$  et  $N_3$  sont confondus avec  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .
- $\vec{d}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires et de norme égale à 1.
- $\vec{n}$  est perpendiculaire à  $\vec{N}$  et à  $\vec{M}$ .

On obtient alors :

$$l = (x_n - y_n \tan \psi)x_p + (x_n \tan \psi + y_n)y_p + (y_n x - x_n y) \tan \psi \quad (3.37)$$

Les capteurs confocaux sont placés sur  $N_1, N_2$  et  $N_3$  avec :

$$N_1 = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}_{/R_0}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} -\delta \\ 0 \end{bmatrix}_{/R_0} \quad \text{et} \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix}_{/R_0}$$

Ainsi, le système non-linéaire à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} l_1 = -x_p \tan \psi + y_p + \delta \tan \psi \\ l_2 = -\tan \psi x_p + y_p - \delta \tan \psi \\ l_3 = x_p + y_p \tan \psi - \delta \tan \psi \end{cases} \quad (3.38)$$

L'inversion<sup>1</sup> de (3.38) donne l'état :

$$\tan \psi = \frac{l_1 - l_2}{2\delta} \quad (3.39)$$

$$x_p = \frac{\delta (2\delta l_1 - 2\delta l_2 + 4\delta l_3 - l_1^2 + l_2^2)}{4\delta^2 + l_1^2 - 2l_1 l_2 + l_2^2} \quad (3.40)$$

$$y_p = \frac{\delta (l_1^2 - 2l_1 l_2 + 2l_1 l_3 + l_2^2 - 2l_2 l_3 + 2\delta l_1 + 2\delta l_2)}{4\delta^2 + l_1^2 - 2l_1 l_2 + l_2^2} \quad (3.41)$$

avec  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  les trois distances mesurées par les trois capteurs confocaux.

### 3.4.3 Mise en équation linéaire de la dynamique de la plate-forme

Dans cette section, nous allons présenter le modèle de comportement dynamique linéaire de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ) et autour de l'axe  $\vec{z}$ .

#### Dynamique en translation

Nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique sur la plate-forme pour déterminer les équations différentielles qui régissent son comportement dynamique suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . La projection de l'équation 3.20 suivant  $\vec{x}$  donne :

$$-\sum_{i=1}^2 F_{x,p_i/R_0}^{mag} - F_{x,b_1/R_0}^{elec} - F_{x/R_0}^v + F_{x/R_0}^{ext} = m\ddot{x}_{p/R_0} \quad (3.42)$$

Sa projection suivant  $\vec{y}$  donne :

$$-\sum_{i=1}^2 F_{y,p_i/R_0}^{mag} + F_{y,b_2/R_0}^{elec} + F_{y,b_3/R_0}^{elec} - F_{y/R_0}^v + F_{y/R_0}^{ext} = m\ddot{y}_{p/R_0} \quad (3.43)$$

---

<sup>1</sup>Faite avec *Matlab symbolique*

Le développement des équations (3.42) et (3.43) avec les équations (3.31), (3.26) et (3.5) permet d'écrire :

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2K_x^m & 0 \\ 0 & -2K_y^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_x^v & 0 \\ 0 & -K_y^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K^e & 0 & 0 \\ 0 & K^e & K^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x^{ext} \\ F_y^{ext} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

### Dynamique en rotation

Appliquons à présent la relation fondamentale de la dynamique dans le cas des corps en mouvement circulaire sur la plate-forme. La projection de l'équation 3.24 sur  $z$  vaut :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}(\vec{F}_{x,p_1}^{mag}) + \mathcal{M}(\vec{F}_{x,p_2}^{mag}) + \mathcal{M}(\vec{F}_{x,b_1}^{elec}) + \mathcal{M}(\vec{F}_{y,p_1}^{mag}) + \mathcal{M}(\vec{F}_{y,p_2}^{mag}) + \mathcal{M}(\vec{F}_{y,b_2}^{elec}) \\ & + \mathcal{M}(\vec{F}_{y,b_3}^{elec}) - \Gamma_z^v + \Gamma_z^{ext} = I_z \ddot{\psi} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Le développement de l'équation (3.45) avec les équations (3.31), (3.26) et (3.4) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & -K^e \cdot \delta(i_1 \cdot \sin\psi + i_2 \cdot \cos\psi - i_3 \cdot \cos\psi) + 2((K_x^m - K_y^m)\cos\psi - K_x^m) \cdot \sin\psi \cdot \delta^2 \\ & - K_{xy}^v \dot{\psi} + \Gamma_z^{ext} = I_z \ddot{\psi} \end{aligned}$$

Pour des petits déplacements de la plate-forme autour de l'axe  $\vec{z}$  ( $\psi \rightarrow 0$ ), on a  $\sin\psi = \psi$ ,  $\cos\psi = 1$  et  $i_1 \cdot \sin\psi \approx 0$ , Ainsi :

$$I_z \ddot{\psi} = -K^e \cdot \delta(i_2 - i_3) - 2K_y^m \psi \delta^2 - K_{xy}^v \dot{\psi} + \Gamma_z^{ext} \quad (3.46)$$

Les équations (3.44) et (3.46) donnent le modèle d'état linéaire pour des petits déplacements de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2K_x^m}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2K_y^m}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\delta^2 \cdot K_y^m}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \psi \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\frac{K_x^v}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_y^v}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_{xy}^v}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\frac{K^e}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K^e}{m} & \frac{K^e}{m} \\ 0 & -\frac{\delta \cdot K^e}{I_z} & \frac{\delta \cdot K^e}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^{ext} \\ F_y^{ext} \\ \Gamma_z^{ext} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Soit sous forme d'état :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\psi} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \psi \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} F_x^{ext} \\ F_y^{ext} \\ \Gamma_z^{ext} \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \psi \end{bmatrix} &= C \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \psi \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2K_x^m}{m} & 0 & 0 & -\frac{K_x^v}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2K_y^m}{m} & 0 & 0 & -\frac{K_y^v}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\delta^2 \cdot K_y^m}{I_{zz}} & 0 & 0 & -\frac{K_{xy}^v}{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & -\frac{K^e}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & \frac{K^e}{m} & \frac{K^e}{m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} & 0 & -\frac{\delta \cdot K^e}{I_{zz}} & \frac{\delta \cdot K^e}{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

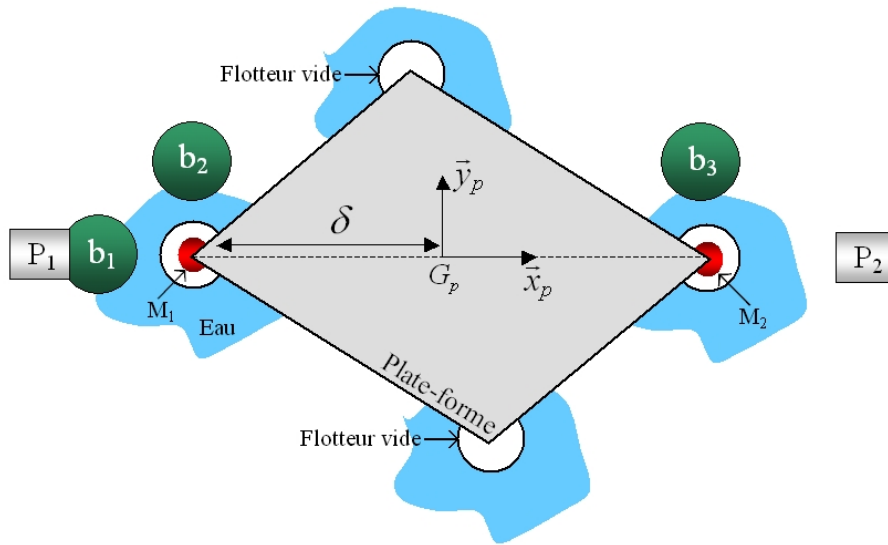


FIG. 3.18 – Configuration finale de la plate-forme de mesure de micro et nano force.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.5 Configuration finale de la plate-forme

Nous avons supposé, au cours de ce chapitre, que le centre de gravité  $G_p$  de la plate-forme se trouve au milieu des deux aimants en flottaison  $M_1$  et  $M_2$ . Une configuration possible de la plate-forme qui vérifie cette hypothèse est représentée sur la figure 3.18, avec  $\delta = 3cm$ .

Un flotteur vide est placé au quatrième coin de la plate-forme pour assurer sa stabilité en  $\theta$ . La figure 3.19 représente le modèle *CAO* du premier prototype qui est en cours de réalisation.

### 3.6 Identification des paramètres du modèle linéaire de la plate-forme

Cette partie est consacrée à l'identification des paramètres du modèle linéaire de la plate-forme. Parmi les paramètres à identifier, on trouve : la raideur magnétique  $K^m$ , le coefficient de frottement visqueux  $K^v$  et la masse  $m$  de la plate-forme. En absence de la plate-forme réelle, les identifications ont été menées sur un prototype élémentaire que nous avons réalisé (voir figure 4.2).

Ce prototype représente uniquement le mécanisme de flottaison magnétique (*MFM*)

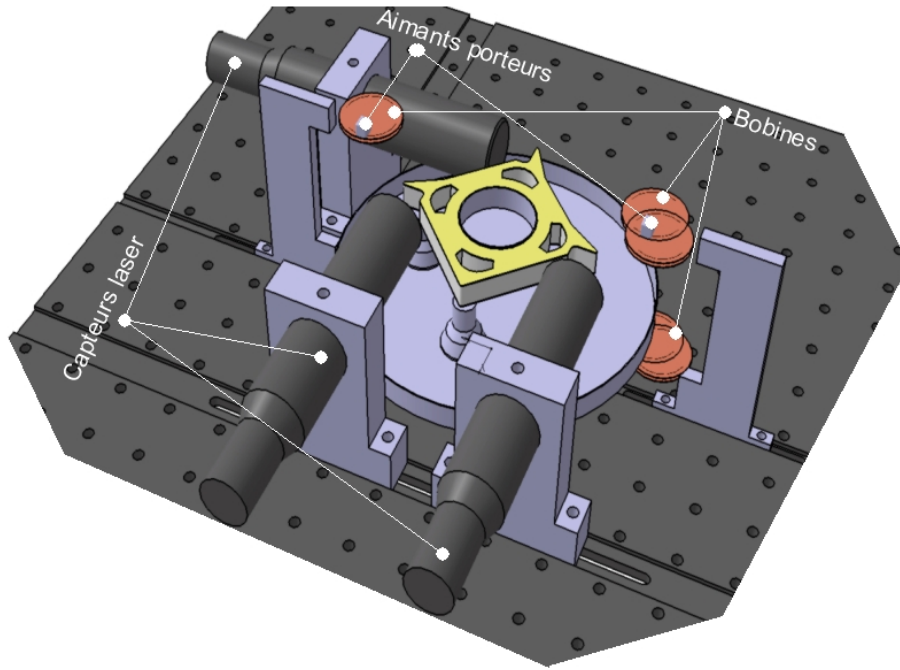


FIG. 3.19 – Modèle CAO de la plate-forme finale.

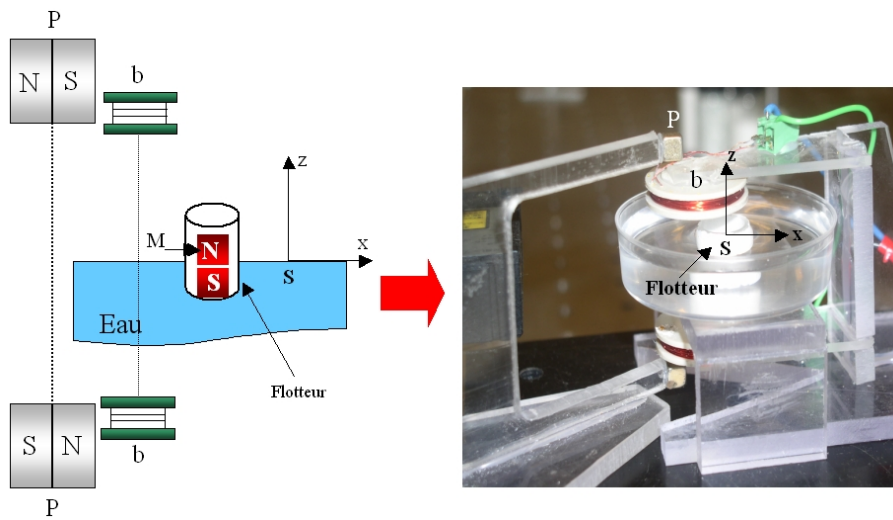


FIG. 3.20 – Prototype expérimental du mécanisme de flottaison magnétique (*MFM*).

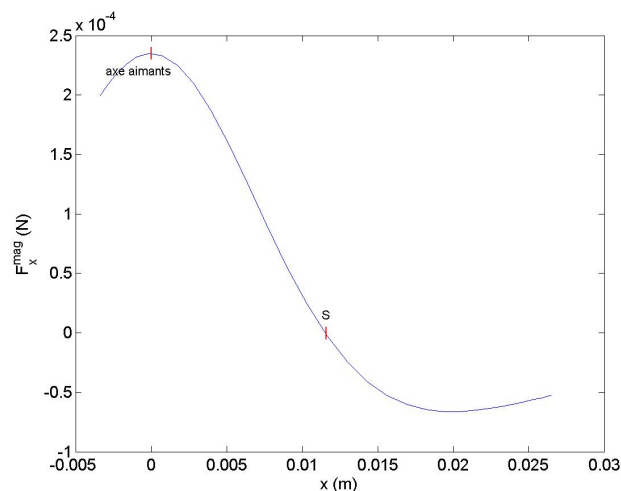


FIG. 3.21 – Force magnétique produite par les aimants permanents  $p$  suivant  $\vec{x}$

présenté en détail dans le deuxième chapitre. L'objectif était simplement d'avoir une idée approchée des ordres de grandeur de ces paramètres. L'identification a été faite par des approches analytique sans avoir recours à des approches d'identification traditionnelles.

- **raideur magnétique**  $K^m$  : la figure 3.21 présente l'évolution de la force magnétique  $F_x^{mag}$  produite par les deux aimants porteurs  $P$  suivant  $\vec{x}$ .

Cette courbe calculé à partir du champs magnétique  $\vec{B}$  (validé expérimentalement dans le chapitre 2) produit par  $P$ , nous a permis de calculer la composante  $K_x^m = \frac{\partial F_x^{mag}}{\partial x}$  de la raideur magnétique du mécanisme de flottaison magnétique (MFM). Cette dernière est la pente de la tangente à la courbe  $F_x^{mag}$  en  $S$  (dans le domaine de linéarité). Elle est de l'ordre de de  $0.015 \text{ N/m}$ . De même, La composante  $K_y^m = \frac{\partial F_y^{mag}}{\partial y}$  est calculée à partir de la courbe de force magnétique  $F_y^{mag}$  produite par les deux aimants porteurs  $p$  suivant  $\vec{y}$ . On trouve  $K_x^m = K_y^m = 0.015 \text{ N/m}$ .

- **la masse**  $m$  : la masse  $m$  de la partie flottante a été mesurée à l'aide d'une microbalance. Elle est de l'ordre de  $566.2 \times 10^{-6} \text{ kg}$ .
- **coefficient de frottement visqueux**  $K^v$  : Le dernier paramètre du modèle est le coefficient de frottement visqueux  $K^v$ . Comme la détermination de ce paramètre n'est pas aisée, nous avons évalué son ordre de grandeur à partir de la réponse libre du système.

Cette réponse est obtenue à l'aide des mesures expérimentales que nous avons réalisé. Ces mesures ont été faites à l'aide d'un capteur de déplacement laser possédant une plage de mesure de  $2 \text{ mm}$  et une résolution de  $1 \mu\text{m}$ . Les



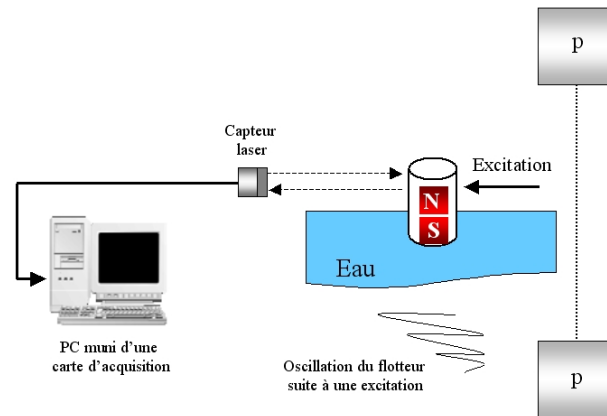


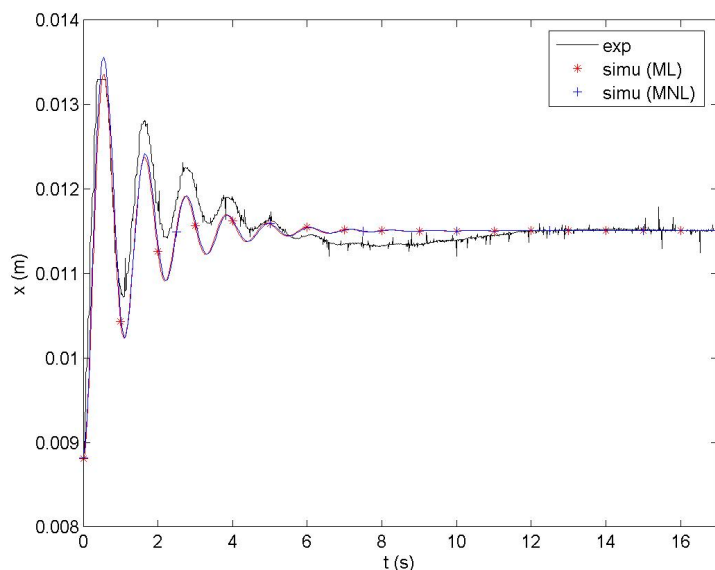
FIG. 3.22 – Banc expérimental pour l’enregistrement de la réponse libre

déplacements du flotteur sont obtenus en poussant manuellement (suivant  $\vec{x}$ ) le flotteur au-delà de sa position d’équilibre  $S$  et en le relâchant. Ces déplacements sont ensuite enregistrés simultanément par le biais d’un ordinateur équipé d’une carte d’acquisition (voir figure 3.22). L’enregistrement de la réponse libre s’est fait sur une durée de 18s avec une fréquence d’échantillonnage de 10ms. Notons que les conditions de mesure non-optimale (bruit de mesure, onde de surface, excitation manuelle, traversée de parois transparentes par le faisceau laser, etc. . .) sont à l’origine de la différence entre les réponses simulées et la réponse mesurée. Sous *Matlab*, on a superposé la réponse libre, simulée (des deux modèles de la plate-forme, linéaire (*ML*) et non-linéaire (*MNL*)) et expérimentale, et on a déterminé par recherche qualitative (sans avoir recours à des méthodes de minimisation de l’erreur) le coefficient de frottement  $K_x^v$  qui rapprochent au mieux ces réponses (voir figure 3.23). Ce dernier est de l’ordre de  $0.9 \times 10^{-3} N \cdot s/m$ . De même, La composante  $K_y^v$  du coefficient de frottement visqueux  $K^v$  est calculée à partir de la réponse libre du flotteur suivant  $\vec{y}$ . On trouve  $K_x^v = K_y^v = 0.9 \times 10^{-3} N \cdot s/m$ .

En ce qui concerne le prototype de la plate-forme, la réalisation se fera de manière à avoir les mêmes ordres de grandeur des paramètres identifiés sur le prototype élémentaire. Ainsi, pour la simulation de la réponse (en boucle ouverte) de la plate-forme, nous avons choisis les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_x^m = K_y^m = 0.015 \text{ N/m} \\ m = 0.004 \text{ kg} \\ K_x^v = K_y^v = 0.9 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m} \end{array} \right.$$

Le coefficient de frottement visqueux  $K_{xy}^v$ , dans le cas d’une rotation de la plate-forme autour de l’axe  $\vec{z}$ , a été choisie d’une manière heuristique  $K_{xy}^v = 1.2 \times 10^{-3} N \cdot$

FIG. 3.23 – Réponse libre du capteur suivant  $\vec{x}$ 

$s/rad$ .

La matrice d'inertie  $I$  de la plate-forme a été calculée à partir du modèle  $CAO$ , on trouve :

$$\bar{I}(kg.m^2) = \begin{vmatrix} 2,231 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 2,272 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 3,747 \times 10^{-6} \end{vmatrix}_{R_p} \quad (3.49)$$

Lorsque le prototype de la plate-forme sera fonctionnel, tous ces paramètres seront expérimentalement identifiés dans le cadre du projet *ANR StilμForce*. Des techniques traditionnelles d'identification de système linéaire seront alors utilisées.

### 3.7 Validation du modèle linéaire de la plate-forme

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la validation du modèle linéaire de la plate-forme. Dans un premier temps, nous rappelons la configuration finale de la plate-forme (voir figure 3.3). Cette configuration fait appel à trois paires de bobines de commande  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  pour contrôler la position de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  (voir figure 3.24).

Avec une telle configuration, un courant  $i_1 \neq 0$  dans  $b_1$  avec  $i_2 = i_3 = 0$  déplacera la plate-forme suivant  $\vec{x}$ . Deux courants  $i_2 = i_3 \neq 0$  dans  $b_2$  et  $b_3$  avec  $i_1 = 0$

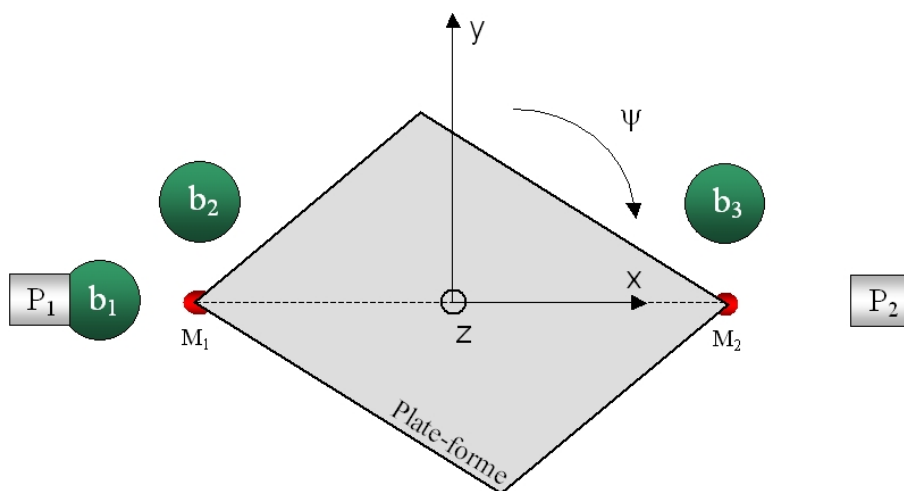


FIG. 3.24 – Position des bobines de commande

déplaceront la plate-forme suivant  $\vec{y}$ . Finalement, deux courants  $i_2 = -i_3 \neq 0$  avec  $i_1 = 0$  feront tourner la plate-forme autour de  $\vec{z}$ .

Grâce aux équations différentielles (3.44) et (3.46) qui régissent le comportement dynamique de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$ , nous avons construit un modèle analytique linéaire ( $ML$ ) sous *Matlab/Simulink*. Ce modèle nous a permis de simuler la réponse (en boucle ouverte) de la plate-forme à une force externe appliquée et à des courants dans les bobines.

Dans un premier temps, nous illustrons la réponse de la plate-forme à un échelon et une rampe de courant  $i_1 \neq 0$  (avec  $i_2 = i_3 = 0$ ). Ensuite nous illustrons la réponse de la plate-forme à un échelon de force externe  $F_x^{ext}$  appliqué suivant  $x$ . Finalement, quelques limitations du modèle linéaire ( $ML$ ) seront présentées.

La figure 3.25 présente les réponses, à un échelon de courant  $i_1 = 0,4 A$ , du modèle linéaire ( $ML$ ) et du modèle non-linéaire ( $MNL$ ) de la plate-forme. La différence de  $10^{-8} rad$  entre les réponses des modèles linéaire et non-linéaire suivant  $\psi$  est due aux erreurs d'intégration sur les calculs numériques des forces et des couples magnétiques dans le modèle non-linéaire. Les réponses sont similaires suivant  $y$  et  $\psi$  pour des courants  $i_2 = i_3$  et  $i_2 = -i_3$ .

La figure 3.26 présente les réponses suivant  $\vec{x}$  des deux modèles, à une rampe de courant  $i_1$ .

La figure 3.27 présente les réponses suivant  $\vec{x}$  et  $\psi$  des deux modèles  $ML$  et  $MNL$ , à un échelon de force externe  $F_x^{ext} = 20 \mu N$ , appliqué à la plate-forme suivant  $\vec{x}$ .

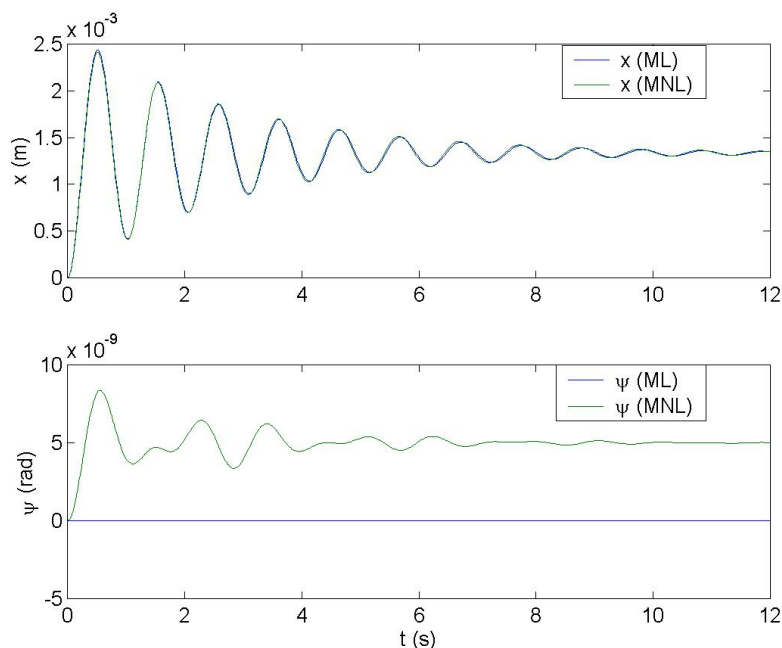


FIG. 3.25 – Réponses suivant  $\vec{x}$  et  $\psi$  des modèles analytiques linéaire ( $ML$ ) et non-linéaire ( $MNL$ ) à un échelon de courant  $i_1 = 0.4A$

Le modèle linéaire présente certaines limitations. Pour illustrer ces limitations, nous avons simulé la réponse de la plate-forme à un échelon de courant de forte amplitude  $i_1 = 2 A$ . La figure 3.28 présente les réponses suivant  $\vec{x}$  et  $\psi$  des deux modèles, suite à l'application de cet échelon de courant  $i_1$ . Sur cette figure, on remarque une différence entre les réponses des modèles suivant  $\vec{x}$  qui est due à la non-linéarité de la force magnétique  $F^{mag}$  (non prise en compte dans le modèle linéaire ( $ML$ ) qui apparaît dans le cas des grands déplacements ( $> 1mm$ ) de la plate-forme). La petite différence entre les réponses des deux modèles suivant  $\psi$  (inférieure à  $10^{-8}$  radians) est probablement due aux erreurs d'intégration sur les calculs numériques.

La figure 3.29 présente les réponses suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  des deux modèles, à un échelon de courant  $i_1 = 0.4A$  appliqué à l'instant  $t = 0s$  puis deux échelons de courant  $i_2 = i_3 = 0.4A$  appliqués à l'instant  $t = 5s$ . Sur cette figure, nous remarquons une différence entre les réponses des deux modèles suivant  $\vec{x}$  après la deuxième sollicitation suivant  $\vec{y}$ . L'origine de cette différence est la deuxième composante de la force électromagnétique  $F^{elec}$ , non prise en compte dans le modèle linéaire. Les bobines sont supposées agir suivant une seule direction ( $x$  pour  $b_1$  et  $y$  pour  $b_2$  et  $b_3$ ) dans le modèle linéaire, voir équation (3.31)).

Par comparaison des courbes résultant des deux modèles, le modèle linéaire ( $ML$ )

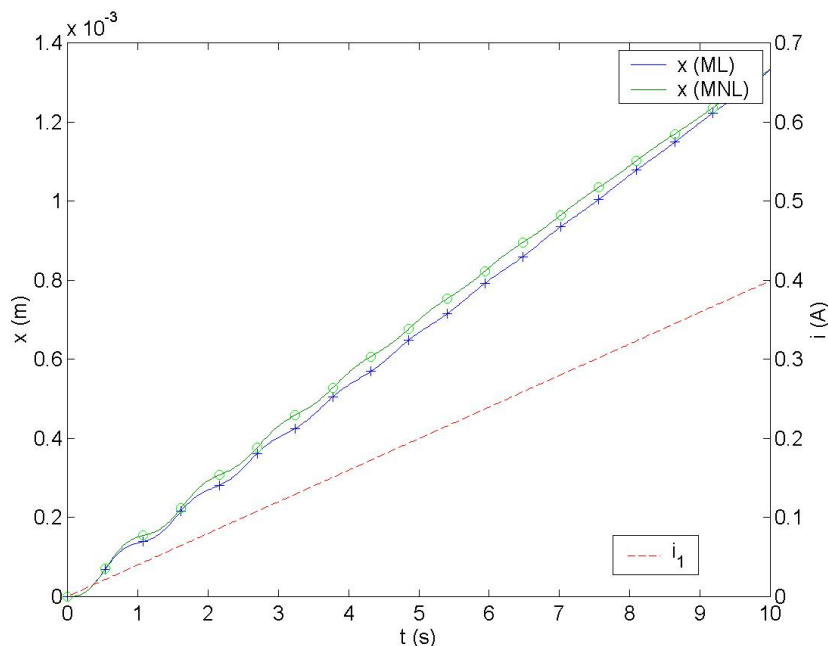


FIG. 3.26 – Réponses suivant  $\vec{x}$  des deux modèles *ML* et *MNL* à une rampe de courant  $i_1$

entraîne des changements dans le comportement temporel du système que l'on va tolérer dans le cas des petits déplacements (jusqu'à  $1\text{mm}$ ) de la plate-forme autour de sa position d'équilibre stable. Par conséquent, ce modèle linéaire sera retenu pour l'asservissement de la plate-forme à la position «zéro» dans le plan  $(xOy)$ . L'écart entre les réponses en boucle fermée du modèle linéaire (*ML*) et du modèle non-linéaire (*MNL*) sera présenté dans le chapitre 5.

### 3.8 Conclusion

Ce chapitre a été dédié à la conception et l'étude dynamique de la plate-forme de mesure de micro et nano forces. Cette plate-forme macroscopique destinée à accueillir les objets à manipuler, repose sur un principe de flottaison-magnétique qui, à notre connaissance, n'a jamais été utilisé auparavant. Une configuration particulière de la plate-forme a été retenue afin de simplifier au maximum les équations différentielles qui régissent son mouvement et de limiter les couplages entre les différentes directions de mesure. Le développement complet de la plate-forme expérimentale ne fait pas partie des objectifs de ces travaux, elle sera développée dans le cadre du projet *ANR StilμForce* démarré en février 2008.

Deux modèles de comportement dynamique de la plate-forme ont été développés au cours de ce chapitre. Un modèle de comportement dynamique complet suivant les

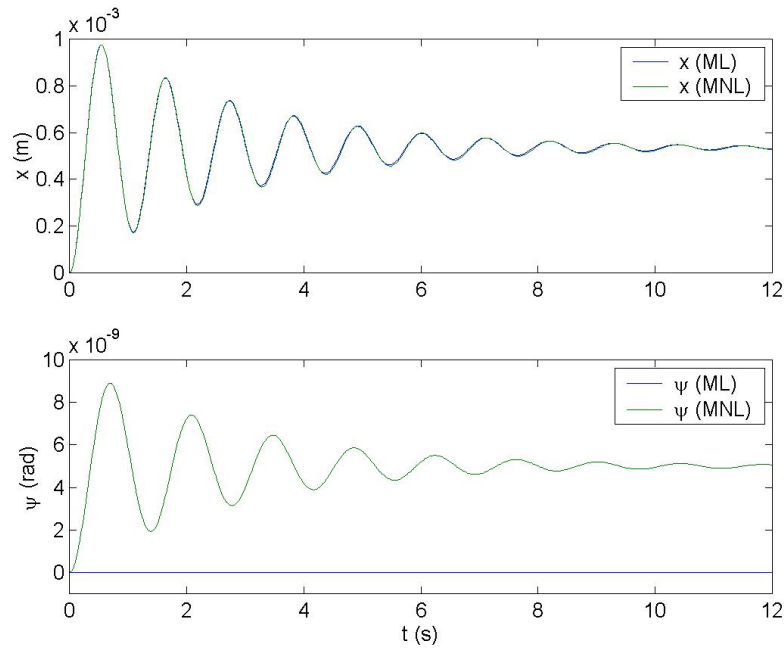


FIG. 3.27 – Réponses suivant  $\vec{x}$  et  $\psi$  des modèles analytiques linéaire ( $ML$ ) et non-linéaire ( $MNL$ ) à un échelon de force  $F_x^{ext} = 20 \mu N$

six degrés de liberté et un modèle linéaire modélisant le comportement dynamique de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ). Ce modèle linéaire est une approximation du comportement de la plate-forme autour de sa position d'équilibre stable  $S$ . Ce modèle linéaire sera adopté pour le contrôle de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ). Finalement, un moyen pour déterminer la position de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ) à l'aide de trois capteurs confocaux, montés dans une configuration particulière, a été également présenté.

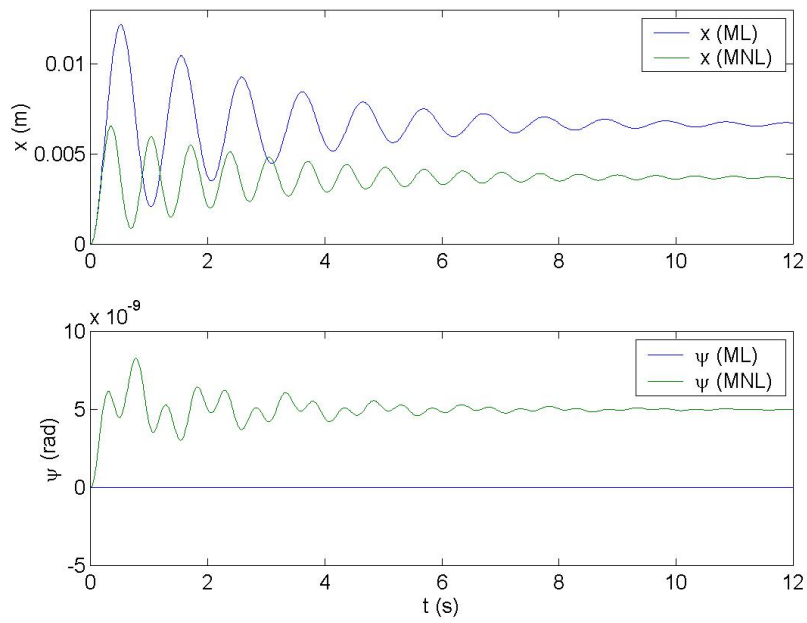


FIG. 3.28 – Réponses suivant  $\vec{x}$  et  $\psi$  des modèles analytiques linéaire (ML) et non-linéaire (MNL) à un échelon de courant  $i_1 = 2A$

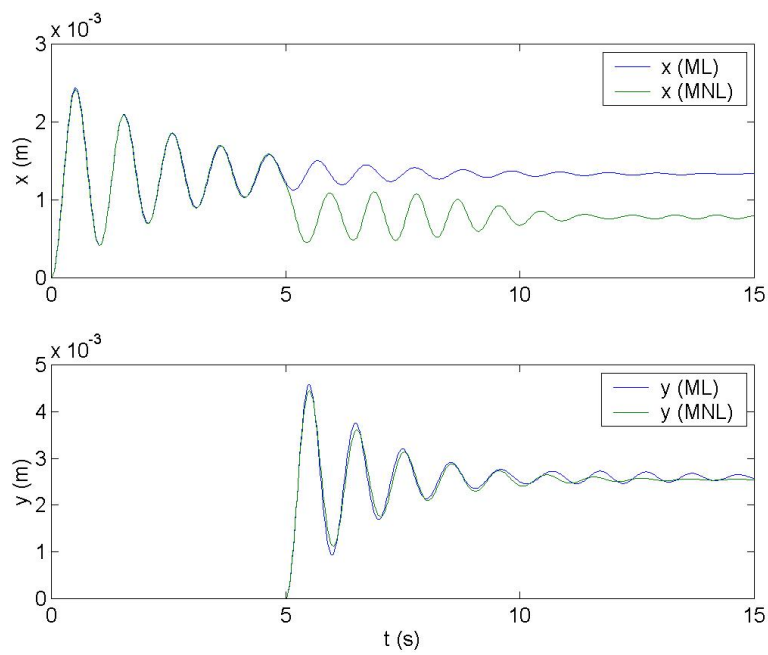


FIG. 3.29 – Réponses suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  des modèles à un échelon de courant  $i_1 = 0.4A$  appliqué à l'instant  $t = 0s$  et deux échelons de courant  $i_2 = i_3 = 0.4A$  appliqués à l'instant  $t = 5s$ .



## Chapitre 4

# Asservissement de la plate-forme par placement de pôles

*Ce chapitre est consacré à la commande de la plate-forme de mesure de micro et nano force. Il est construit autour de deux grandes idées, l'estimation de l'effort externe  $F^{ext}$  (entrée inconnue) et l'asservissement en position de la plate-forme. En ce qui concerne l'estimation de la force externe, nous citons au cours de ce chapitre les différents moyens existants en mettant l'accent sur les avantages et les inconvénients de chacun. Pour l'asservissement en position de la plate-forme, nous avons décidé de donner à ce chapitre un aspect pédagogique illustré par une commande élémentaire par placement de pôles. Cela permet de procéder étape par étape pour montrer les difficultés de l'estimation d'une entrée inconnue à l'aide d'un capteur actif. L'influence des bruits de mesure et d'état sur la performance de l'asservissement et de l'estimation sont également illustrés.*

### 4.1 Système à asservir

L'objectif est de déterminer une loi de commande par retour d'état permettant des mesures de force dans le plan  $(xOy)$  et de couple autour de l'axe  $\vec{z}$ , pour une consigne de déplacement *nulle* de la plate-forme. La plate-forme à commander est un système à six entrées et trois sorties (voir figure 4.1).

Les entrées sont les courants dans les bobines  $(i_1, i_2, i_3)$ , les composantes  $F_x^{ext}$  et  $F_y^{ext}$  de la force externe et le couple externe  $\Gamma_z^{ext}$  appliqué à la plate-forme suivant  $\psi$ . Les sorties sont les coordonnées de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$ , mesurées à l'aide de trois capteurs de distance montés dans une configuration particulière. Nous souhaitons que les sorties de la plate-forme  $(x_p, y_p$  et  $\psi)$  soient régulées sur une consigne  $(x_c, y_c$  et  $\psi_c)$  correspondant à la position initiale de la plate-forme au repos. Cette position initiale est aussi la position d'équilibre stable et correspond à la consigne nulle  $(0,0,0)$ .

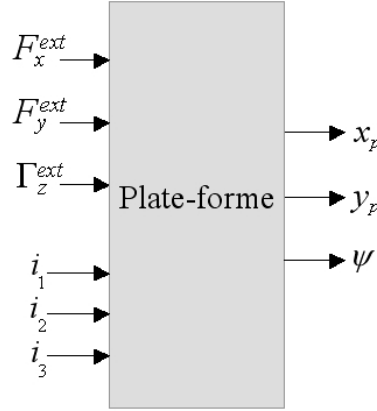


FIG. 4.1 – Système à asservir.

D'après le chapitre 3, les équations différentielles linéarisées qui régissent la dynamique de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_p &= -2K_x^m \cdot x_p - K_x^v \cdot \dot{x}_p - K^e \cdot i_1 + F_x^{ext} \\
 m\ddot{y}_p &= -2K_y^m \cdot y_p - K_y^v \cdot \dot{y}_p + K^e(i_2 + i_3) + F_y^{ext} \\
 I_z\ddot{\psi} &= -K^e \cdot \delta(i_2 - i_3) - 2K_y^m \psi \delta^2 - k_{xy}^v \dot{\psi} + \Gamma_z^{ext}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dans le but de simplifier la tâche d'asservissement de la plate-forme, nous allons procéder dans un premier temps au découplage des trois axes à contrôler  $x$ ,  $y$  et  $\psi$ . Ce qui nous permettra dans la suite de commander séparément les axes en se mettant dans le cas d'un système 1 *ddl*.

Dans notre cas, il suffit de poser  $i_y = i_2 + i_3$  et  $i_\psi = i_2 - i_3$  pour se retrouver avec un système découplé décrit par les nouvelles équations différentielles :

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_p &= -2K_x^m \cdot x_p - K_x^v \cdot \dot{x}_p - K^e \cdot i_1 + F_x^{ext} \\
 m\ddot{y}_p &= -2K_y^m \cdot y_p - K_y^v \cdot \dot{y}_p + K^e \cdot i_y + F_y^{ext} \\
 I_z\ddot{\psi} &= -K^e \cdot \delta \cdot i_\psi - 2K_y^m \psi \delta^2 - k_{xy}^v \dot{\psi} + \Gamma_z^{ext}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

On retrouve dans le modèle découplé trois équations similaires à celle du mécanisme de flottaison-magnétique (*MFM*), présenté dans le chapitre 2, qui a servi de base pour la conception de la plate-forme (voir figure 4.2). Ainsi, dans la suite, nous allons reprendre ce mécanisme de flottaison et nous allons nous intéresser à l'asservissement en position du flotteur tout en supposant que ce dernier se déplace uniquement suivant  $x$  (système avec un degré de liberté). Notre but est aussi de valider expérimentalement la loi de commande par des mesures de forces effectuées sur le prototype expérimental de *MFM* que nous avons développé. Pour l'asservissement en position de la plate-forme suivant les trois axes  $x$ ,  $y$  et  $\psi$ , nous suivrons

la même démarche mais toutes les illustrations seront faites en simulation car la fabrication de la plate-forme n'est pas achevée.

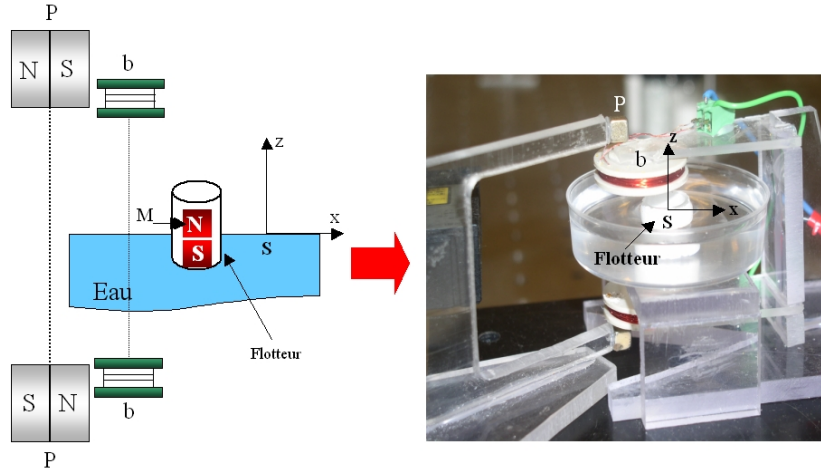


FIG. 4.2 – Mécanisme de flottaison magnétique *MFM*.

## 4.2 Asservissement du *MFM*

L'objectif est ici de déterminer une loi de commande par retour d'état permettant des mesures de forces suivant  $x$  sans déplacement du flotteur (consigne nulle en position).

Le mécanisme de flottaison *MFM* est un système à deux entrées et une sortie. Les entrées sont le courant  $i$  dans les bobines  $b$  et la composante  $F_x^{ext}$  de la force externe appliquée au flotteur suivant  $x$  et considérée comme perturbation. La sortie est la position  $x$  du flotteur mesurée à l'aide d'un capteur laser. La sortie  $x$  du système doit suivre une consigne ( $x_c$ ) correspondant à la position initiale du flotteur. Cette position initiale est aussi le point d'équilibre stable  $S$  du flotteur.

L'équation différentielle qui régit le mouvement du flotteur suivant  $x$  est la suivante :

$$m\ddot{x} = F_x^{ext} + K^e \cdot i - K_x^m \cdot x - K_x^v \cdot \dot{x} \quad (4.3)$$

Dans cette équation, les forces capillaires sont censées agir uniquement suivant  $z$  (ménisque symétrique) et donc n'avoir aucun effet suivant  $x$ . La figure 4.3 représente le bloc diagramme du mécanisme de flottaison magnétique *MFM*.

### 4.2.1 Transmittances du *MFM*

La relation entre les entrées et la sortie du *MFM* peut être décrite dans le domaine de *Laplace* comme suit :

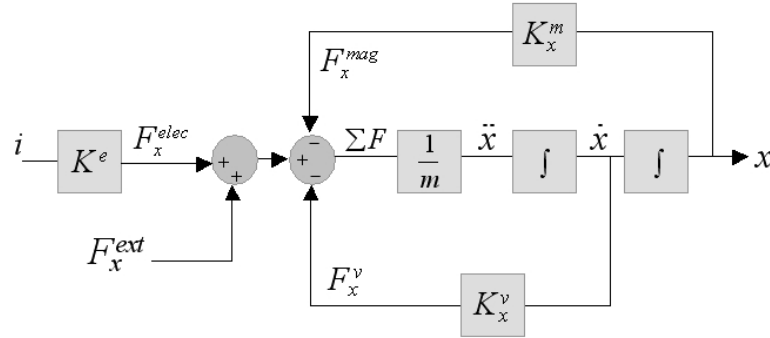


FIG. 4.3 – Bloc diagramme du MFM

$$x(s) = G_1(s).i(s) + G_2(s).F_x^{ext}(s) \quad (4.4)$$

En utilisant la transformation de *Laplace* avec les conditions de *Heaviside* ( $x(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ ), nous déduisons de l'équation (4.3) les fonctions de transfert  $G_1(s)$  et  $G_2(s)$  du système :

$$G_1(s) = \frac{\frac{K^e}{m}}{s^2 + \frac{K_v^v}{m}s + \frac{K_x^m}{m}} \quad (4.5)$$

et

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{K_v^v}{m}s + \frac{K_x^m}{m}} \quad (4.6)$$

En reprenant les valeurs identifiées au chapitre 3, on a :

$$\begin{cases} K_m^x = 15.5 \times 10^{-3} N.m^{-1} \\ K_e^x = 1.14 \times 10^{-4} N.A^{-1} \\ K_v^x = 0.9 \times 10^{-3} N.S.m^{-1} \\ m = 5.66 \times 10^{-4} kg \end{cases}$$

Ainsi, les fonctions de transfert (4.5) et (4.6) du système peuvent être écrites comme suit :

$$G_1(s) = \frac{0.2}{s^2 + 1.59s + 27.38} \quad (4.7)$$

et

$$G_2(s) = \frac{1766}{s^2 + 1.59s + 27.38} \quad (4.8)$$

En écrivant les équations de second ordre (4.5) et (4.6) de manière canonique, on a :

$$G_1(s) = \frac{x(s)}{i(s)} = \frac{k_1 \cdot w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad (4.9)$$

et

$$G_2(s) = \frac{x(s)}{F_{ext}(s)} = \frac{k_2 \cdot w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad (4.10)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1, k_2 : \text{les gains statiques} \\ \xi : \text{le coefficient d'amortissement} \\ w_n : \text{la pulsation naturelle} \end{array} \right.$$

Par identification des équations (4.7), (4.8), (4.9) et (4.10), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = 0.0073 \\ k_2 = 64.5 \\ \xi = 0.15 \\ w_n = 5.23 \end{array} \right.$$

En fixant  $s = 0$  et en comparant les équations (4.6) et (4.10), nous remarquons que le gain statique  $k_2$  est égal à :

$$k_2 = G_2(0) = \frac{1}{K_x^m} \quad (4.11)$$

Ainsi,  $k_2$  est l'inverse de la raideur magnétique de la partie flottante, qui est très petite (plus  $K_x^m$  est petit, plus la sensibilité de mesure est grande). Ce qui explique sa valeur élevée.

Notons que le mécanisme de flottaison-magnétique *MF* est un système masse-ressort-amortisseur. Ainsi, la pulsation naturelle  $w_n$  est liée à la raideur magnétique  $K_x^m$  de la partie flottante et à sa masse  $m$ , par la relation suivante :

$$w_n = \sqrt{\frac{K_x^m}{m}}$$

Le coefficient d'amortissement, quant à lui, est donné par l'expression suivante :

$$\xi = \frac{K_x^v}{2mw_n}$$

La pulsation propre  $w_p$  du système est liée à la pulsation naturelle  $w_n$  et au coefficient d'amortissement  $\xi$  par la relation suivante :

$$w_p = w_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Le système possède deux pôles complexes conjugués  $p_1$  et  $p_2$  avec :

$$p_1 = -\xi w_n + j\sqrt{1 - \xi^2} w_n = -0.78 + 0.94.j$$

$$p_2 = -\xi w_n - j\sqrt{1 - \xi^2} w_n = -0.78 - 0.94.j$$

La figure 4.4 montre la position des deux pôles  $p_1$  et  $p_2$  dans le plan complexe ( $s$ ). Cette position est caractéristique d'un système oscillant avec un temps de réponse important.

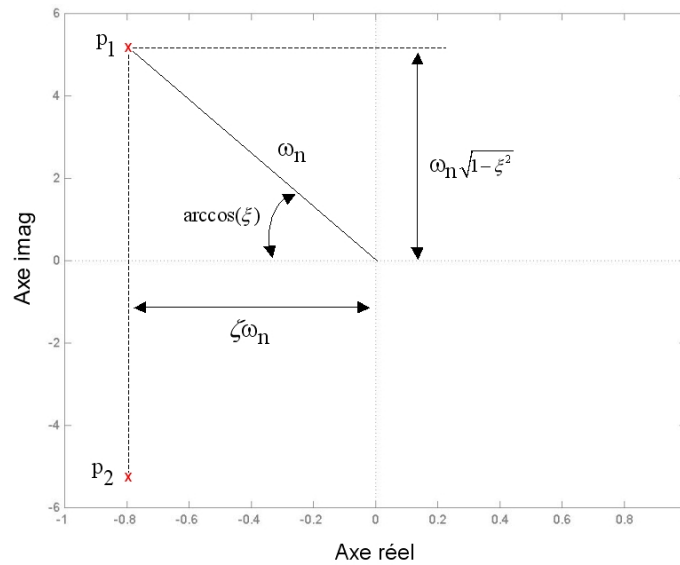


FIG. 4.4 – Position des pôles du système en boucle ouverte

#### 4.2.2 Analyse temporelle du *MF*

Les figures 4.5 et 4.6 montrent les réponses du flotteur à un échelon unitaire de courant  $i$  et de force  $F_x^{ext}$ . Ces réponses sont notamment caractérisées par trois paramètres liés à la pulsation naturelle  $w_n$  et au coefficient d'amortissement  $\xi$  du système :

$$\text{Dépassement } D\% = 100.e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 60\%$$

$$\text{Temps de montée } t_m = \frac{1}{w_n\sqrt{1-\xi^2}(\pi - \cos^{-1}\xi)} = 0.37s$$

$$\text{Temps de réponse à 5\% } t_r = \frac{1}{w_n\xi} \ln\left(\frac{100}{5\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 3.8s$$

Compte tenu de la faible raideur du dispositif, on remarque d'après la figure 4.5 qu'à une échelle macroscopique, l'application d'un échelon de force de 1N fait

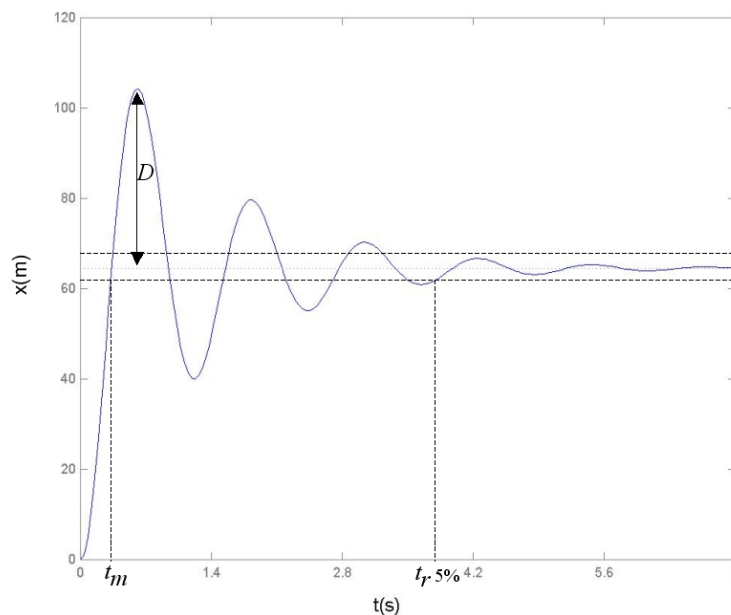


FIG. 4.5 – Réponse du système à un échelon unitaire de force  $F_x^{ext}$

osciller au maximum l'aimant  $M$  de  $105m$  pour se stabiliser finalement à une distance de  $63m$ .

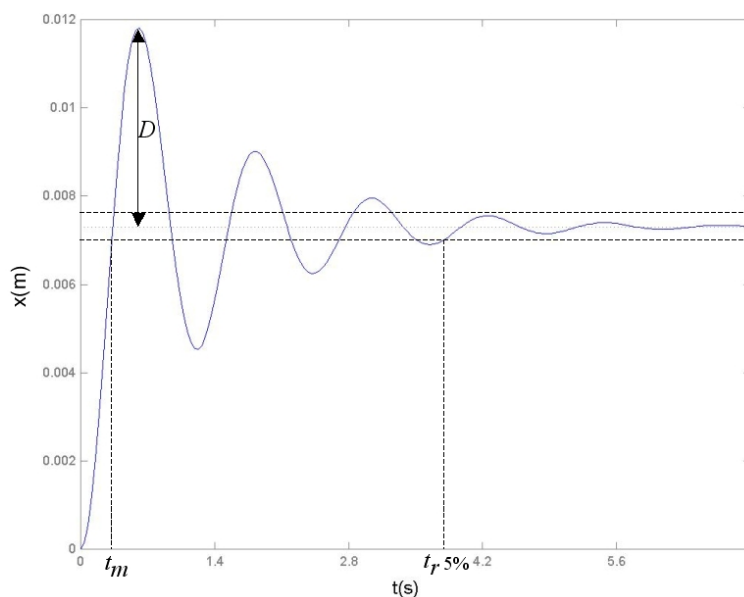
### 4.2.3 Commande par retour d'état

Après avoir précisé les caractéristiques des transmittances et des réponses temporelles du *MF*, nous allons maintenant nous intéresser à l'asservissement en position du flotteur suivant  $x$ . L'objectif est de déterminer une commande par retour d'état telle que les pôles du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfassent des spécifications d'amortissement, de stabilité, de rapidité...

L'intérêt de cette technique est que les pôles, correspondant aux valeurs propres du système, vont influencer la future dynamique du système bouclé.

L'implémentation d'une commande par retour d'état n'est possible que si toutes les variables du vecteur d'état  $X$  du système sont accessibles à la mesure. Ce qui n'est pas le cas ici car seulement la position  $x$  du flotteur sera connue grâce au capteur de position. La composante  $\dot{x}$  de  $X$  reste inaccessible et pour éviter une amplification de bruit, la dérivation de  $x$  doit être évitée. Par contre, sous des conditions d'observabilité, cet état peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé :  $F_x^{ext}([0, t]), x([0, t])$ .

Le fait que  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  soient inaccessibles rend également impossible un calcul direct de  $F_x^{ext}$  à partir de l'équation (4.3). C'est pourquoi nous avons décidé de l'estimer avec l'état du système.

FIG. 4.6 – Réponse du système à un échelon unitaire de courant  $i$ 

### 4.3 Estimation de la grandeur d'entrée $F_x^{ext}$

Un processus physique est souvent soumis à des perturbations qui ont des effets néfastes sur le comportement normal du processus et leur estimation peut servir à concevoir un système de commande capable d'en minimiser les effets. Les perturbations sont appelées entrées inconnues lorsqu'elles affectent l'entrée du processus et leur présence peut rendre difficile l'estimation de l'état du système.

Plusieurs travaux ont été réalisés concernant l'estimation de l'état et de la sortie en présence d'entrées inconnues ; ils peuvent être regroupés en deux catégories. La première suppose la connaissance a priori d'informations sur ces entrées non mesurables (processus générateur, densité spectrale de puissance, composantes déterministes, etc.). C'est le cas des méthodes de filtrage optimal. La deuxième catégorie suppose qu'on a aucune connaissance a priori sur les entrées inconnues et procède soit par estimation de ces dernières (estimation bayésienne, déconvolution, déconvolution aveugle etc.), soit par leur élimination complète des équations du système comme dans le cas des observateurs à entrées inconnues (UIO). Ces observateurs ont été développés pour estimer l'état d'un système, en dépit de l'existence des entrées inconnues ou des perturbations. Ce type d'observateur a suscité l'attention de beaucoup de chercheurs [46][47][48][49].

Dans cette section, nous allons nous intéresser particulièrement aux méthodes procédant par estimation de l'entrée inconnue et non pas par son élimination. Parmi ces méthodes, on trouve les méthodes qui nécessitent un modèle du système (estimation bayésienne, déconvolution) ainsi que les méthodes qui n'en nécessitent



pas (déconvolution aveugle [4]). Dans la suite, nous allons nous intéresser particulièrement aux méthodes nécessitant un modèle du système.

### 4.3.1 Estimation bayésienne

En mode passif ( $i = 0$ ), notre système (voir figure 4.7) est un système à une entrée ( $F_x^{ext}$ ) et une sortie (le déplacement  $x$  du flotteur). Le problème est celui de l'estimation d'un paramètre d'intérêt  $F_x^{ext}$  inconnu, tout en disposant d'une mesure  $x$  liée à la valeur de ce paramètre. Ces mesures sont généralement corrompues par des valeurs aléatoires (mesures bruitées). L'idée est donc de générer une valeur estimée de  $F_x^{ext}$ , utilisant la mesure  $x$  et toute connaissance qu'on dispose sur la relation entre  $F_x^{ext}$  et  $x$  ainsi que sur le phénomène qui corrompt les mesures [50] [51] [52]. Par ailleurs on veut que cette estimation soit optimale dans un sens donné.

#### Cas statique

Dans le cas du mécanisme de flottaison-magnétique *MF**M*, la relation entre l'entrée inconnue  $F_x^{ext}$  et le déplacement  $x$  du flotteur, à l'équilibre, est la suivante :

$$F_x^{ext} = K_x^m .x \quad (4.12)$$

avec  $K_x^m$  la raideur magnétique de la partie flottante.

Le déplacement  $x$  du flotteur est mesuré à l'aide d'un capteur de position qui produit une mesure  $x_b$  bruitée, on a alors :

$$x_b = x + v \quad (4.13)$$

avec  $v$  le bruit additif généré par le capteur.

En remplaçant  $x$  par sa valeur, on obtient à l'équilibre :

$$x_b = H F_x^{ext} + v \quad (4.14)$$

avec  $H = \frac{1}{K_x^m}$ .

Il y a 5 composants fondamentaux dans un problème d'estimation bayésienne dans le cadre linéaire gaussien statique :

- le paramètre d'intérêt  $F_x^{ext}$  à estimer qui est supposé constant ;
- les mesures ou les observations  $x_b$  disponibles ;
- le modèle mathématique 4.14 qui relie les mesures aux variables d'intérêt ;

- la connaissance a priori sur  $F_x^{ext}$  qui sera modélisée par une variable aléatoire  $\underline{F}$  supposée gaussienne et caractérisée par :
  - sa moyenne  $\hat{F}^-$  ;
  - sa covariance  $P^-$ .

$\underline{F}$  modélise ici une «croyance» *a priori* sur la valeur de  $F_x^{ext}$  supposée constante. Notons que le signe – dénote la valeur de la moyenne et de la covariance avant incorporation de la connaissance sur les mesures disponibles.

- la connaissance *a priori* sur le bruit gaussien aléatoire  $v$ , engendré par le capteur de position, qui sera modélisée par une variable aléatoire gaussienne centrée  $\underline{V}$  et caractérisée par :
  - sa moyenne 0 ;
  - sa covariance  $R$ .

Au modèle  $x_b = HF_x^{ext} + v$  correspond le modèle stochastique suivant :

$$\underline{X}_b = H\underline{F} + \underline{V} \quad (4.15)$$

où  $\underline{X}_b$  est une variable aléatoire gaussienne puisque c'est la somme des variables aléatoires gaussiennes  $H\underline{F}$  et  $\underline{V}$ .

On suppose de plus que les variables aléatoires  $\underline{F}$  et  $\underline{V}$  sont indépendantes. Par conséquent, toute connaissance sur la valeur  $v$  de  $\underline{V}$  n'influe en aucune manière sur la valeur de  $\underline{F}$  :

$$f_{\underline{F}|\underline{V}}(\xi|v) = f_{\underline{F}}(\xi) \quad \forall \xi \quad \forall v \quad (4.16)$$

$f$  ici représente une densité de probabilité. L'approche bayésienne stipule que pour déterminer *a posteriori* la connaissance sur  $\underline{F}$  qui exploite toute la connaissance qu'apportent les mesures  $x_b$ , il suffit de déterminer la loi *a posteriori* sur  $\underline{F}$  sachant la valeur prise par  $\underline{X}_b$ .

On doit donc calculer  $f_{\underline{F}|\underline{X}_b}(\xi|x_b) \forall \xi$ . La règle de Bayes donne :

$$f_{\underline{F}|\underline{X}_b}(\xi|x_b) = \frac{f_{\underline{F},\underline{X}_b}(\xi, x_b)}{f_{\underline{X}_b}(x_b)} = \frac{f_{\underline{X}_b|\underline{F}}(x_b|\xi)f_{\underline{F}}(\xi)}{f_{\underline{X}_b}(x_b)} \quad (4.17)$$

Dans le cadre linéaire gaussien (statique), ce calcul est simple et donne une loi gaussienne dont on peut facilement calculer la moyenne et la covariance. Il s'agit ensuite de déterminer une valeur estimée de  $F_x^{ext}$  à partir de la loi  $f_{\underline{F}|\underline{X}_b}(\cdot|x_b)$ . Des critères de choix possibles sont par exemple l'espérance a posteriori (espérance de  $\underline{F}$  sachant la valeur  $x_b$  de  $\underline{X}_b$  :  $\hat{F}_x^{ext}{}_{EAP}(x_b) = E[\underline{F}|\underline{X}_b = x_b]$ ) où le maximum a posteriori (valeur  $F_x^{ext}{}_{MAP}$  qui maximise  $f_{\underline{F}|\underline{X}_b}(\cdot|x_b)$  :  $\hat{F}_x^{ext}{}_{MAP}(x_b) =$

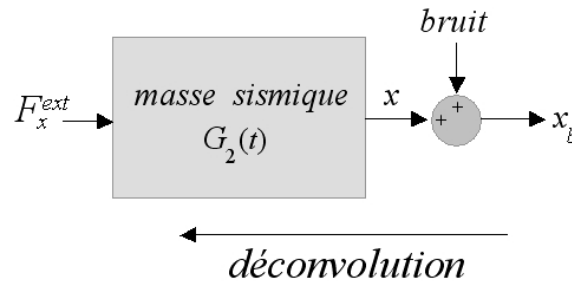


FIG. 4.7 – Le problème inverse associé à la convolution ou à l'estimation bayésienne.

$\operatorname{argmax}_{F_x^{ext}} f_{E|X_b}(F_x^{ext}|x_b)$ ). Dans le cas gaussien, ces critères classiques donnent le même résultat et si on pose  $\hat{F}_x^{ext}{}_{EAP}(x_b) = \hat{F}^+(x_b)$ , on obtient :

$$\hat{F}^+(x_b) = \hat{F}^- + K(x_b - H\hat{F}^-) \quad (4.18)$$

$$P^+ = P^- - KHP^- \quad (4.19)$$

avec la matrice de gain  $K = P^-H^T(HP^-H^T + R)^{-1}$ . On démontre que  $P^+$  est la covariance de l'erreur d'estimation qui est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle (estimateur sans biais).

### Cas dynamique

Lorsque le paramètre d'intérêt  $F_x^{ext}$  n'est plus constant, le problème d'estimation de ce dernier possède une solution explicite, appelée filtrage de Kalman. Cette solution nécessite un modèle a priori de l'entrée inconnue  $F_x^{ext}$  qu'on cherche à estimer. Ce point est présenté en détail au début du chapitre 5.

#### 4.3.2 Estimation par déconvolution

La déconvolution est le problème inverse associé à la convolution. Typiquement il consiste à estimer le signal d'entrée d'un système à partir de son signal de sortie et de sa fonction de transfert. Dans notre cas, on cherche à estimer (en mode passif  $i = 0$ ) la composante  $F_x^{ext}$  de la force externe appliquée au flotteur (masse sismique) à partir du déplacement  $x$  de ce dernier tout en connaissant la réponse impulsionnelle  $G_2(t)$  reliant les deux paramètres (voir figure 4.7) :

$$F_x^{ext}(t) = G_2^{-1}(t) * x(t) \quad (4.20)$$

Dans le domaine fréquentiel, si on appelle  $F_x^{ext}(j\omega)$  la transformée de Fourier de  $F_x^{ext}(t)$  et  $x(j\omega)$  la transformée de Fourier de  $x$ , l'opération de déconvolution prend la forme d'une simple division :

$$F_x^{ext}(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{G_2(j\omega)} \quad (4.21)$$

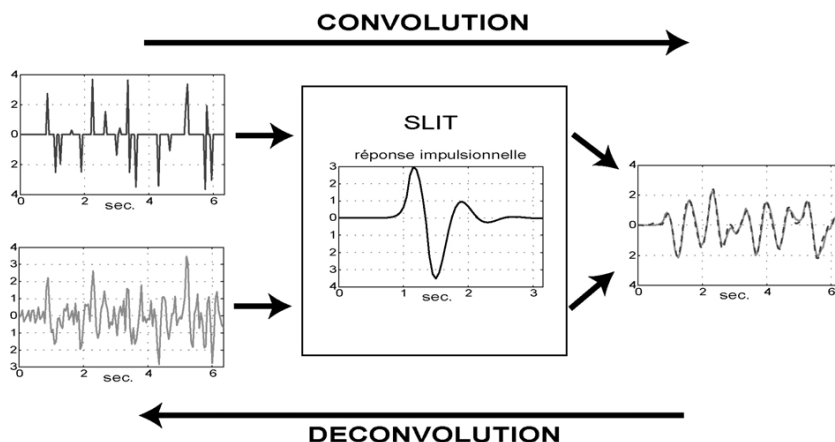


FIG. 4.8 – Instabilité et non unicité de la solution de l'opération de déconvolution [4].

avec  $G_2(jw)$  la transformée de *Fourier* de la réponse impulsionnelle  $G_2(t)$ .

Même si la formulation fréquentielle présente l'avantage de ne pas nécessiter l'inversion de matrices de dimension importante pouvant être mal conditionnées (contrairement aux méthodes temporelles d'inversion par moindres carrés [4]), elle se heurte aussi à des problèmes de stabilité, notamment pour des systèmes à bande limitée. En effet, lorsque  $G_2(jw_0) = 0$ , le terme  $\frac{1}{G_2(jw_0)}$  diverge, il est alors impossible d'accéder à  $F_x^{ext}(jw_0)$ . Avoir  $G_2(jw) = 0$  signifie que le système filtre totalement la fréquence  $jw$  en entrée. Autrement dit, on n'a plus aucune information en sortie sur l'amplitude de la fréquence  $jw$  présente à l'entrée ni le déphasage associé. Dans ces conditions il est évidemment impossible de reconstruire cette fréquence dans le signal d'entrée à partir de la sortie. C'est entre autre pour cette raison que l'opération de déconvolution est un problème inverse mal posé.

D'après [53], c'est à Jacques Hadamard que l'on doit la notion de problème inverse bien posé. Un problème inverse est dit bien posé lorsque sa solution satisfait les trois conditions suivantes : existence, unicité et stabilité. Ce qui n'est pas le cas de la déconvolution comme le montre la figure 4.8 : la convolution de deux signaux distincts par un même système peut fournir des signaux quasi identiques avec une erreur très faible (par exemple  $-15dB$  dans [4]). Par conséquent, l'opération de déconvolution associée n'a pas une solution unique.

D'autre part, la déconvolution peut être instable. En effet, une petite perturbation sur le signal de sortie (l'observation étant bruitée) engendrera des signaux de déconvolution complètement différents, ce qui peut avoir des conséquences néfastes quant à la qualité du signal obtenu par déconvolution.

Par pallier à ces différents problèmes, la déconvolution par méthode de régularisation

a été introduite dès les années 60.

### 4.3.3 Régularisation de la déconvolution par introduction d'une information a priori sur la solution

D'après ce qui précède, on remarque qu'il est impossible d'obtenir la vraie solution à partir de données erronées ou bruitées. Plutôt que de chercher la vraie solution, il est possible d'en trouver une approximation grâce à l'utilisation de méthodes de régularisation. Parmi ces méthodes, on trouve les méthodes de régularisation par analyse spectrale matricielle basée sur l'étude des valeurs propre de  $G_2$ . Celles-ci consistent à éliminer les valeurs propres trop faibles du dénominateur de  $G_2$  en les seillant à un certain pourcentage de la valeur maximale du gain du système à inverser [54]. Ces méthodes permettent de stabiliser l'opération de déconvolution, mais lissent la solution obtenue. Ainsi une partie de l'information du signal initial reste inaccessible. Une autre méthode de régularisation d'un problème inverse consiste à trouver une solution approchée de la vraie solution en incorporant toute forme d'information *a priori* sur la solution.

La transformation du problème initial mal posé en un problème bien posé afin d'obtenir des résultats plus stables peut consister à régulariser le problème initial en introduisant une information a priori sur la solution. Pour estimer «au mieux» le signal originel à partir du signal enregistré, un critère de qualité quadratique peut être utilisé. Ainsi la régularisation d'un problème inverse consiste à trouver un compromis entre une solution  $\hat{F}_{x_0}^{ext}$  fidèle aux données mais souvent instable, et une solution  $\hat{F}_{x_\infty}^{ext}$  stable mais moins précise.

De façon générale, une solution régularisée s'obtient par minimisation d'un coût conjoint [55] :

$$\hat{F}_x^{ext}(\mu, x) = \operatorname{argmin} \left[ J_1(F_x^{ext}, \hat{F}_{x_0}^{ext}) + \mu J_2(F_x^{ext}, \hat{F}_{x_\infty}^{ext}) \right] \quad (4.22)$$

où  $J_1$  est souvent un critère quadratique sur l'erreur d'estimation :  $J_1(F_x^{ext}, \hat{F}_{x_0}^{ext}) = \|x - G_2 F_x^{ext}\|^2$ . Il nous donne la solution la plus fidèle aux données (bruitées) et au système.  $J_2$  représente quant à lui, la connaissance a priori que l'on veut intégrer dans la solution. Le rôle de  $J_2$  est en quelque sorte de réintroduire, lors de l'inversion, une partie de l'information ou des propriétés intrinsèques du signal initial qui ont été perdues à cause de la bande passante limitée du système. Ainsi,  $J_2$  peut être un critère de *douceur* de la solution  $\hat{F}_x^{ext}$  obtenu en la bornant, ou en bornant sa dérivée pour compenser le bruit de mesure qui intervient dans  $J_1$ .

Le paramètre  $\mu$  appelé coefficient de régularisation, est un coefficient jouant le rôle de balance, quantifiant la crédibilité que l'on désire accorder aux mesures par rapport à celle accordée aux informations a priori. On comprend bien que le choix de  $\mu$  est crucial pour la qualité de la déconvolution. Malheureusement, son choix

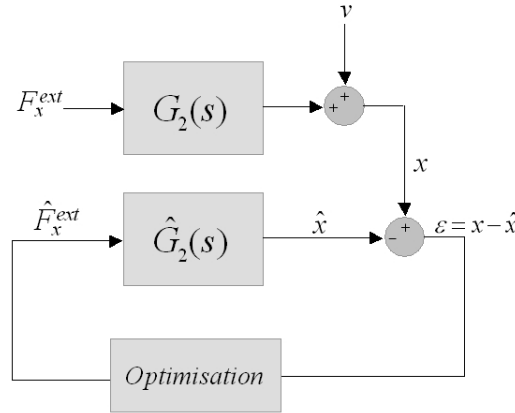


FIG. 4.9 – Principe de la méthode de déconvolution par la commande optimale

est souvent délicat et n'est pas encore proprement résolu.

#### 4.3.4 Déconvolution par commande optimale

Lorsque le système est un système causal admettant un modèle d'état, il existe une autre approche de régularisation relevant de la technique de la commande optimale développée par *Thomas* [56]. Cette approche propose de poser le problème de déconvolution comme un problème de poursuite comme illustre la figure 4.9. L'objectif est de déterminer une commande optimale  $\hat{F}_x^{ext}$  de l'approximation  $\hat{G}_2(s)$  du processus réel  $G_2(s)$  qui garantie que la sortie  $\hat{x}$  de  $\hat{G}_2(s)$  suit sans erreur la sortie  $x$  du processus réel  $G_2(s)$  en dépit du bruit de mesure  $v$  et de l'approximation présente dans  $\hat{G}_2(s)$  afin que l'estimation présente une bonne robustesse. En absence de bruit ( $v=0$ ) et dans le cas d'une estimation parfaite ( $\hat{x}=x \forall t$ ),  $\hat{F}_x^{ext}$  est une estimation correcte de  $F_x^{ext}$ . En présence de bruit ( $v \neq 0$ ), ce dernier va venir corrompre dans une certaine mesure la force estimée  $\hat{F}_x^{ext}$  en la bruitant. L'objectif est alors de rejeter ce bruit.

En mode passif ( $i = 0$ ), une représentation d'état du mécanisme de flottaison-magnétique *MFM* déduite de l'équation (4.3) est la suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_x^m}{m} & -\frac{k_x^v}{m} \end{bmatrix}}_{A_f} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B_f} [ F_x^{ext} ] \quad (4.23)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_f} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_X$$

avec  $X$  le vecteur d'état,  $A_f$  la matrice d'état et  $B_f$  la matrice d'entrée.

Le modèle  $\hat{G}_2$  doit correctement mimer le comportement dynamique du processus réel  $G_2$ . Par conséquent, il sera défini par les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{X} &= A_f \hat{X} + B_f \hat{F}_x^{ext} \\ \hat{Y} &= C_f \hat{X}\end{aligned}\quad (4.24)$$

avec :

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\dot{x}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{Y} = \hat{x}$$

Soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps pendant lequel est effectué la poursuite du signal  $x$ .

L'erreur d'estimation  $\epsilon$  commise sur l'estimation de  $x$  est donnée par :

$$\epsilon = x - \hat{x} \quad (4.25)$$

Le problème d'une commande optimale consiste à trouver parmi les commandes  $\hat{F}_x^{ext}$  réalisables, celles qui rend un coût quadratique minimum. Cela est possible, en minimisant le critère de performance [56] :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x - \hat{x})^2 + \mu (\hat{F}_x^{ext})^2 dt \quad (4.26)$$

où on retrouve le coefficient de régularisation  $\mu$  dont le choix est souvent difficile à fixer *a priori*. Si  $\mu$  est grand, la minimisation de  $J$  va avoir tendance à minimiser la variance de  $\hat{F}_x^{ext}$ , ce qui va produire un signal de force lissé. Si  $\mu$  est petit, la minimisation de  $J$  va produire un signal de force bruité qui permettra de faire correspondre au mieux  $\hat{x}$  au déplacement bruité  $x$  fourni par le capteur.

### 4.3.5 Déconvolution par placement de pôles

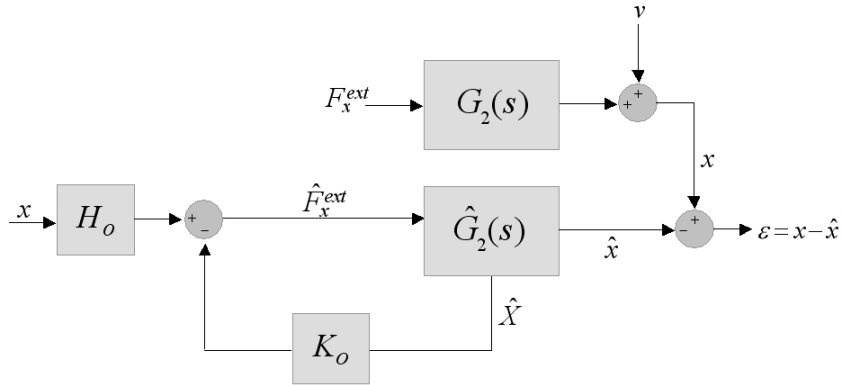
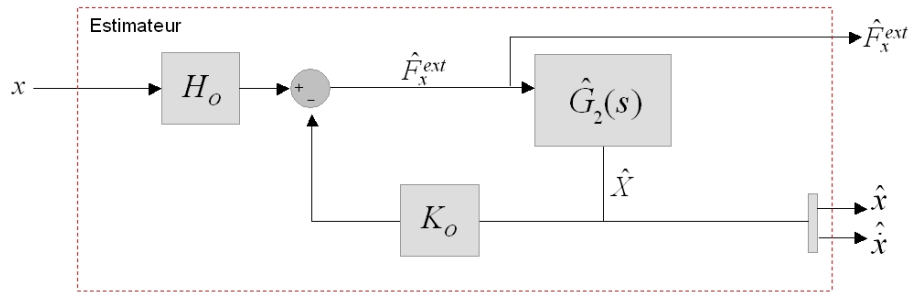
Afin de simplifier la tâche d'observation et pour rester dans un cadre pédagogique simple, nous allons remplacer la commande optimale de la section 4.3.4 par une simple commande par retour d'état de la forme suivante (voir figure 4.10) :

$$\hat{F}_x^{ext} = H_o \hat{Y}_c - K_o \hat{X} \quad (4.27)$$

avec  $\hat{X}$  le vecteur d'état du système  $\hat{G}_2$  et  $\hat{Y}_c$  la consigne qui est égale à la position  $x$  du flotteur.  $K_o$  est la matrice de retour utilisée pour corriger la performance dynamique de l'estimateur et  $H_o$  la matrice de préfiltre utilisée dans le cas classique pour assurer l'annulation de l'erreur statique, avec :

$$H_o = [ h_{11} ] \quad \text{and} \quad K_o = [ k_{11} \quad k_{12} ]$$

Le développement de l'équation (4.27) permet de sortir l'expression de  $\hat{F}_x^{ext}$  :

FIG. 4.10 – Estimation de  $F_x^{ext}$  via une commande par retour d'étatFIG. 4.11 – Estimateur en mode passif ( $i=0$ ).

$$\hat{F}_x^{ext} = h_{11} \cdot x - k_{11} \cdot \hat{x} - k_{12} \cdot \dot{\hat{x}} \quad (4.28)$$

En remplaçant (4.27) dans (4.24), les équations d'état du modèle  $\hat{G}_2$  deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= A_f \hat{X} + B_f \left[ H_o \hat{Y}_c - K_o \hat{X} \right] \\ &= (A_f - B_f K_o) \hat{X} + B_f H_o \hat{Y}_c \\ \hat{Y} &= C_f \hat{X} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Finalement, on se retrouve avec un estimateur à une entrée et trois sorties (voir figure 4.11), que l'on appellera par la suite estimateur  $A$ . L'entrée est la mesure de la position  $x$  du flotteur qui joue le rôle de la consigne. Les sorties sont la force externe estimée  $\hat{F}_{ext}^x$  ainsi que  $\hat{x}$  et  $\dot{\hat{x}}$  les deux composantes du vecteur d'état. Ce vecteur d'état jouera un rôle primordial dans l'asservissement à la position «zéro» du flotteur à l'aide d'une commande par retour d'état.

### Détermination de $K_o$

L'estimateur de  $\hat{F}_x^{ext}$  est synthétisé de telle sorte que la différence entre la sortie du système et son estimé ( $\hat{x}(t) - x(t)$ ) tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infinie. Donc



il faut que le système modélisé par 4.29 soit stable c'est à dire que les valeurs propres de la matrice  $(A_f - B_f K_o)$  soient à parties réelles négatives. Le gain de l'observateur  $K_o$  peut être déterminé par la méthode de placement de pôles si la paire  $(A_f, C_f)$  est observable, et une grande liberté est laissée à l'utilisateur pour fixer la matrice  $K_o$ . De façon générale, cette matrice est choisie telle que les valeurs propres de la matrice  $(A_f - B_f K_o)$  soient à parties réelles négatives et que la partie réelle des valeurs propres soit plus grande, en valeur absolue, que la partie réelle des valeurs propres ( $p_1$  et  $p_2$  calculées dans la section 4.2.1) de la matrice d'état  $A_f$ ; dans ces conditions, la dynamique de l'observation est donc plus rapide que celle du processus. Mais il existe deux considérations contradictoires dont on doit tenir compte et qui interviennent dans le choix de la matrice  $K_o$  :

- les perturbations sur la paire  $(A_f, B_f)$  conduisent, si elles sont importantes, à choisir une valeur élevée de la matrice  $K_o$  afin de renforcer l'influence des mesures sur l'estimation de l'état ;
- le bruit entachant la mesure de la sortie  $x$ , amplifié par le gain, exige une petite valeur de  $K_o$ .

Le gain de l'observateur doit donc être choisi en effectuant un compromis pour satisfaire au mieux ces contraintes. Dans ce qui suit, les deux pôles de la matrice  $(A_f - B_f K_o)$  ont été placés à  $-50$  de manière à garantir des bonnes caractéristiques (rapidité, stabilité) de l'estimateur. Le résultat de ce choix sera illustré plus loin.

### Determination de $H_o$

La composante  $h_{11}$  de la matrice  $H_o$  est calculée en phase stationnaire. Lorsque cette phase est atteinte, on peut déduire l'équation suivante de l'équation (4.29) :

$$(B_f K_o - A_f)\hat{X} = (B_f H_o)\hat{Y}_c \quad (4.30)$$

Le développement de cette équation (voir Annexe A) nous a permis de calculer  $h_{11}$  :

$$H_o = [h_{11}] = [K_x^m + k_{11}] \quad (4.31)$$

## 4.4 Asservissement de la position du flotteur

Dans la section 4.3, nous avons abordé l'estimation d'une grandeur d'entrée inconnue dans le cadre d'un système passif non asservi. Cette problématique va maintenant être étendue au cas d'un système asservi avec un cadre pédagogique qui prolonge l'estimateur vu à la section 4.3.5.

Dans ce qui suit, nous allons donc nous attacher à l'asservissement de la position du flotteur suivant  $x$ . Ainsi, en mode actif ( $i \neq 0$ ), la nouvelle représentation d'état

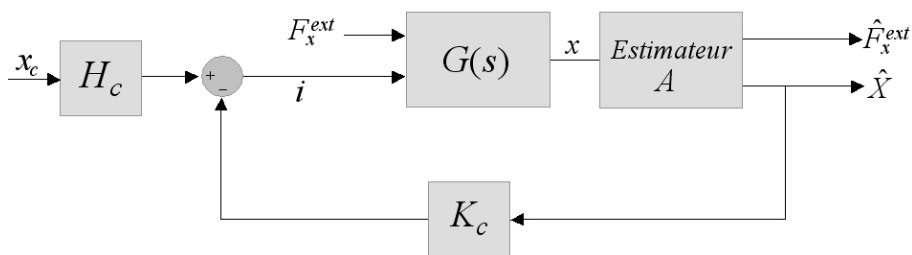


FIG. 4.12 – Asservissement de la position du flotteur

du système est la suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_x^m}{m} & -\frac{k_x^v}{m} \end{bmatrix}}_{A_f} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_x^e}{m} \end{bmatrix}}_{B_f'} [i] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_W [F_x^{ext}] \quad (4.32)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_f} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_X$$

avec  $W$  la matrice de perturbation.

Rappelons que les pôles du système, représenté sur la figure 4.12 par sa fonction de transfert  $G(s)$ , sont les valeurs propres  $(p_1, p_2)$  de la matrice  $A_f$ . Notre objectif est d'utiliser l'entrée  $i$  qui est le courant dans les bobines de commande  $b$  en vue de modifier les valeurs propres du système et de fixer sa dynamique.

Si on utilise une commande par retour d'état (voir figure 4.12) on a :

$$i = H_c x_c - K_c X \quad (4.33)$$

avec  $x_c$  la consigne correspondante à la position initiale du flotteur ( $x(0) = 0$ ),  $K_c$  la matrice de retour et  $H_c$  la matrice de préfiltre.

Ainsi, l'équation d'état du système bouclé est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_f X + B_f'(H_c x_c - K_c X) \\ \dot{X} &= (A_f - B_f' K_c) X + B_f' H_c x_c \end{aligned} \quad (4.34)$$

avec :

$$H_c = [h_1] \quad \text{et} \quad K_c = [k_1 \quad k_2]$$

### Determination de $K_c$

Comme pour l'estimateur  $A$ , les valeurs de la matrice  $K_c$  sont choisies telle que les valeurs propres de la matrice  $(A_f - B_f' K_c)$  soient à parties réelles négatives. La

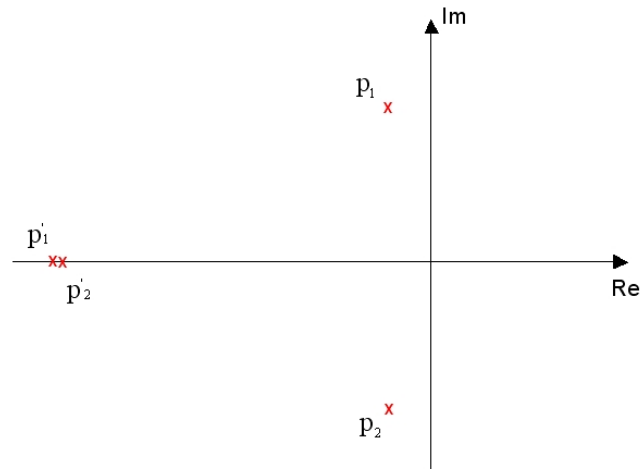


FIG. 4.13 – Emplacement dans le plan-s des pôles du système en boucle ouverte et fermée.

matrice  $(A_f - B'_f K_c)$  est la matrice d'état du système en boucle fermée. Le nouvel emplacement des pôles du système bouclé doit assurer de bonnes caractéristiques (rapidité, facteur d'amortissement, dépassement ...). Un compromis est nécessaire entre la rapidité du système et sa stabilité lors du placement des pôles. La figure 4.13 montre l'emplacement dans le plan-s des pôles du système en boucle ouverte et fermée.

#### Détermination de $H_c$

Lorsque le régime stationnaire est atteint, on peut déduire l'équation suivante de l'équation (4.34) :

$$(B'_f K_c - A_f)X = B'_f H_c x_c \quad (4.35)$$

Le développement de cette équation (voir Annexe A) permet de calculer  $H_c$  :

$$H_c = [h_1] = \left[ \frac{K_x^m}{K^e} + k_1 \right] \quad (4.36)$$

Dans une optique de validation, nous avons simulé la réponse du système bouclé à un échelon de force de  $20\mu N$  appliqué à l'instant  $t = 5s$ . Cette simulation correspond au schéma de la figure 4.12.

La figure 4.14 représente l'échelon de force simulé et estimé par l'estimateur  $A$  de la figure 4.11 dont la dynamique est donnée par l'équation 4.29. La figure 4.15, quant à elle, représente la réponse du flotteur simulée et estimée. Sur ces deux figures, nous remarquons une erreur statique sur la position  $x$  (consigne  $x_c=0$ ) ainsi que sur l'estimation de la force externe. Cette erreur est induite par le courant  $i(\infty)$  (deuxième entrée du système) non pris en compte par l'estimateur  $A$ .

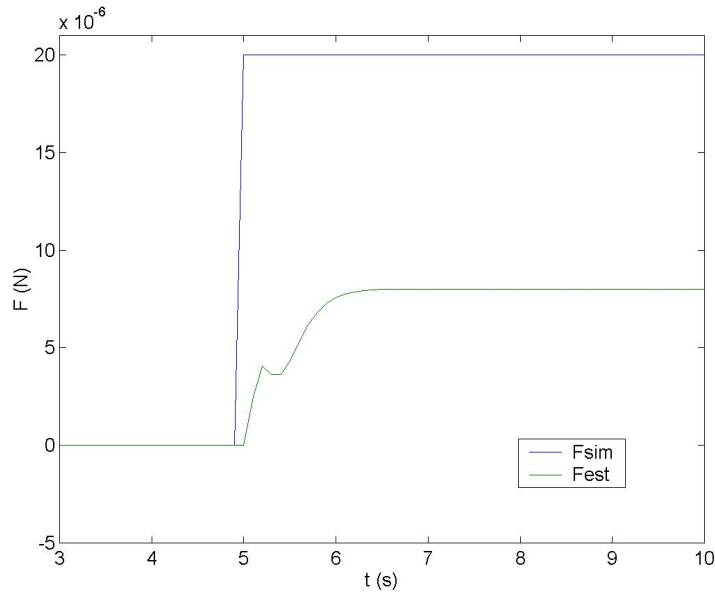


FIG. 4.14 – Erreur statique sur l'estimation de la force externe à l'aide de l'estimateur A.

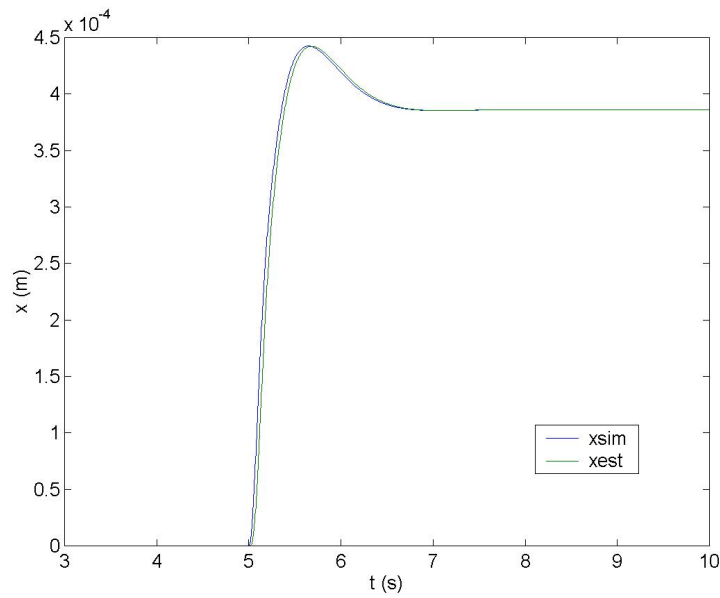
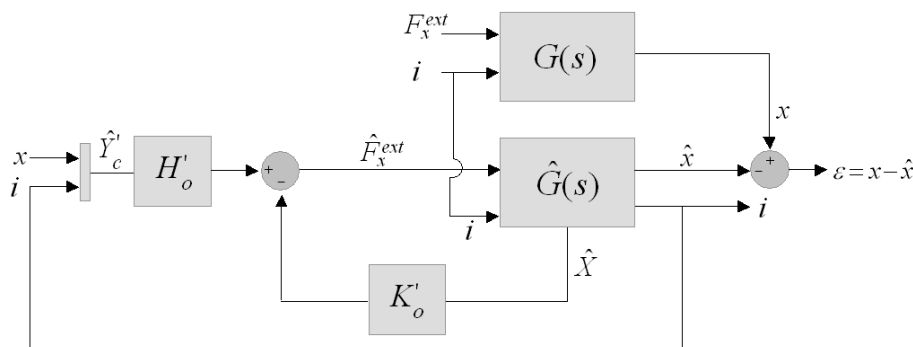


FIG. 4.15 – Erreur statique sur la position  $x$  du flotteur pour une consigne  $x_c=0$ .

FIG. 4.16 – Suppression de l’erreur statique de l’estimation en utilisant le courant  $i$ .

### Calcul de l’erreur statique induite par le courant $i(\infty)$

Nous allons nous intéresser au calcul de l’erreur statique sur l’estimation de la force externe  $F_x^{ext}$ , induite par le courant  $i(\infty)$ . Cette erreur statique est calculée en régime stationnaire à partir de l’équation (4.28).

Le développement de cette équation, utilisant le principe de séparation ( $\hat{X} = X$ ), nous a permis de sortir l’expression de  $\hat{F}_x^{ext}(\infty)$  :

$$\hat{F}_x^{ext}(\infty) = (K_x^m + k_1)x - k_1x + \beta \quad (4.37)$$

$$= K_x^m x + \beta \quad (4.38)$$

avec  $\beta$  l’erreur statique qu’on cherche à calculer.

En régime permanent, d’après l’équation (4.4) on a :

$$x(\infty) = \frac{K^e}{K_x^m} i(\infty) + \frac{1}{K_x^m} \hat{F}_x^{ext}(\infty) \quad (4.39)$$

$$= \frac{K^e}{K_x^m} i(\infty) + x(\infty) + \frac{\beta}{K_x^m} \quad (4.40)$$

d’où :

$$\beta = -K^e \cdot i(\infty) \quad (4.41)$$

### Calcul d’un estimateur tenant compte du courant $i$

Pour annuler cette erreur, il suffit de modifier l’estimateur  $A$  pour lui faire utiliser en plus le courant  $i$  (voir figure 4.16).

Ce courant va permettre à l’estimateur d’ajuster la force estimée de manière à ce que l’estimation soit faite correctement. Dans ce cas, l’équation (4.27) devient :

$$\hat{U} = H'_o \hat{Y}'_c - K'_o \hat{X} \quad (4.42)$$

avec

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{F}_x^{ext} \\ i \end{bmatrix}, \quad \hat{Y}'_c = \begin{bmatrix} x \\ i \end{bmatrix}, \quad H'_o = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K'_o = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le développement de cette équation permet de sortir la nouvelle expression de  $\hat{F}_x^{ext}$  :

$$\hat{F}_x^{ext} = h_{11} \cdot x + h_{12} \cdot i - k_{11} \cdot \hat{x} - k_{12} \cdot \hat{i} \quad (4.43)$$

Ainsi, l'estimateur aura les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{X} &= A_f \hat{X} + B_f'' \underbrace{(H'_o \hat{Y}'_c - K'_o \hat{X})}_{\hat{U}} \\ \hat{X} &= \underbrace{(A_f - B_f'' K'_o)}_{\tilde{A}} \hat{X} + \underbrace{(B_f'' H'_o)}_{\tilde{B}} \hat{Y}'_c \\ \hat{Y} &= C_f \hat{X} + D_f \hat{U} \end{aligned} \quad (4.44)$$

avec :

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ i \end{bmatrix}, \quad B_f'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{K^e}{m} \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans notre cas particulier, la matrice de transfert direct  $D_f$  n'est pas nulle car on retrouve le courant  $i$ , qui est une entrée, à la sortie de l'estimateur. En effet, l'estimateur n'estime pas  $i$  qui est déjà connu mais seulement  $x$  en ajustant  $\hat{F}_x^{ext}$ . La présence du courant  $i$  dans la consigne  $\hat{Y}'_c$  n'a qu'un seul objectif qui est la suppression de l'erreur statique.

Finalement, on se retrouve avec un estimateur à deux entrées et trois sorties (voir figure 4.17), que l'on appellera par la suite estimateur  $B$ . Les entrées sont la mesure de la position  $x$  du flotteur et la commande  $i$ . Les sorties sont la force externe estimée  $\hat{F}_{ext}^x$  ainsi que  $\hat{x}$  et  $\hat{i}$  les deux composantes du vecteur d'état.

### Détermination de $H'_o$

Les deux composantes  $h_{11}$  et  $h_{12}$  de la matrice  $H'_o$  sont calculées en régime stationnaire.  $h_{12}$  est déduit directement de l'équation (4.3) en régime stationnaire avec  $\dot{x} = \ddot{x} = 0$  et  $x = x_\infty = 0$  (l'objectif est de faire des mesures de forces sans déplacement du flotteur). Cette composante représente la relation entre la force



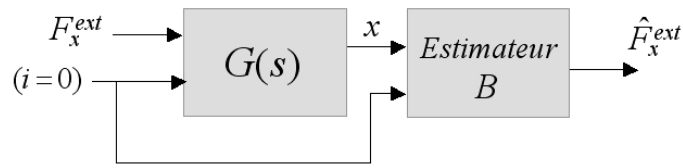
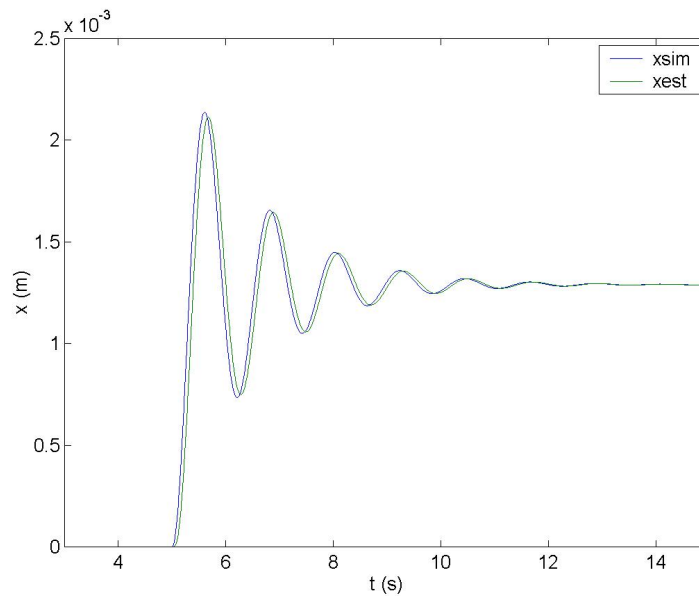


FIG. 4.18 – Configuration du système en boucle ouverte.

FIG. 4.19 – Réponse  $x(t)$  simulée et estimée du système en boucle ouverte à un échelon de force de  $20\mu N$ .

L'estimateur  $B$ , quant à lui, utilise le modèle linéaire ( $ML$ ) du mécanisme de flottaison (représenté par sa fonction de transfert  $\hat{G}(s)$ ) présenté dans le chapitre 3.

La figure 4.19 représente la réponse  $x(t)$  simulée et estimée du système en boucle ouverte à un échelon de force de  $20\mu N$  appliqué à l'instant  $t = 5s$ . La figure 4.20, quant à elle, représente l'échelon de force  $F_x^{ext}(t)$  simulé et estimé.

La figure 4.21 représente la réponse simulée et estimée du système en boucle ouverte à une force aléatoire appliquée au système à l'instant  $t = 0s$ . La figure 4.22 représente la force aléatoire simulée et estimée. Sur cette figure, on remarque un déphasage entre le tracé de la force  $F_x^{ext}(t)$  simulée et celui de la force estimée. Ce déphasage est dû au choix de la dynamique de l'estimateur. Un moyen pour réduire ce déphasage consiste à placer différemment les pôles de l'estimateur de manière à accélérer sa dynamique tout en restant dans la marge de robustesse vis-à-vis des bruits entachant les mesures.



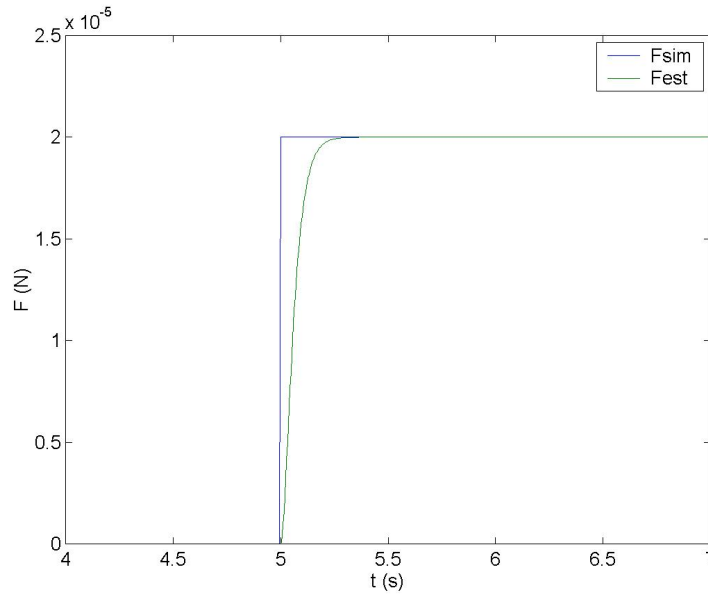


FIG. 4.20 – Echelon de forces  $F_x^{ext}(t)$  simulé et estimé.

Pour illustrer l'effet des bruits de mesure sur la réponse de l'estimateur  $B$ , nous avons simulé sa réponse à une force déterministe après avoir ajouté un bruit de mesure. La variance de ce bruit a été évaluée à partir de la sortie du capteur laser à l'aide d'un oscilloscope. Elle est de  $1.25 \times 10^{-12} (m^2s)$ . La figure 4.23 représente la force  $F_x^{ext}(t)$  simulée et estimée bruitée. La figure 4.24, quant à elle, représente la réponse  $x(t)$  du flotteur simulée et estimée suite à l'application de la force déterministe.

Nous avons ensuite simulé la réponse de l'estimateur  $B$  à la même force pour des amplitudes inférieures au micronewton ( $0.5 \mu N$  d'amplitude maximum). La figure 4.25 représente la nouvelle force  $F_x^{ext}(t)$  simulée et estimée bruitée.

Cette figure, illustre clairement l'influence du bruit de mesure sur la qualité de l'estimation de la force. La solution permettant de diminuer l'effet de ce bruit entachant les mesures, consiste à changer la valeur du gain  $K_o$  de l'estimateur en plaçant différemment ses pôles dans le plan de *Laplace*. En effet, en diminuant la dynamique de ce dernier, on fait ressortir davantage la partie basse fréquence de la force estimée en rejetant les hautes fréquences.

Les réponses qui suivent ont été faites en plaçant les pôles en  $-10$  au lieu de  $-50$  c'est à dire en ralentissant la dynamique de l'estimateur. Après avoir calculé la nouvelle matrice  $K_o$ , nous avons simulé à nouveau la réponse de l'estimateur  $B$  avec la même force de faible amplitude ( $0.5 \mu N$  d'amplitude maximum). La figure

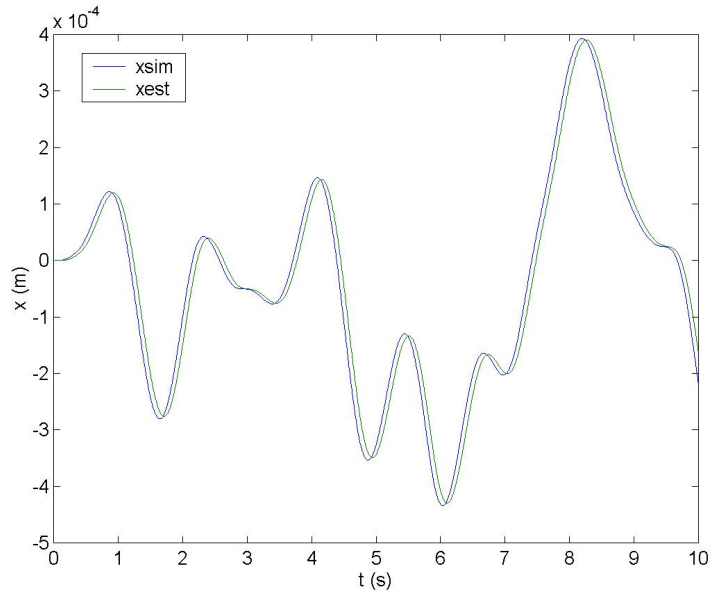


FIG. 4.21 – Réponse  $x(t)$  simulée et estimée du système en boucle ouverte à une force aléatoire.

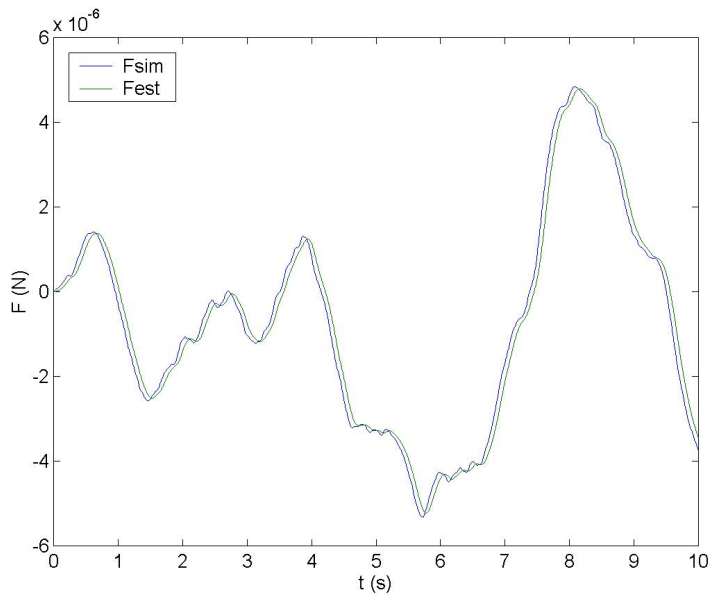


FIG. 4.22 – Force aléatoire simulée et estimée

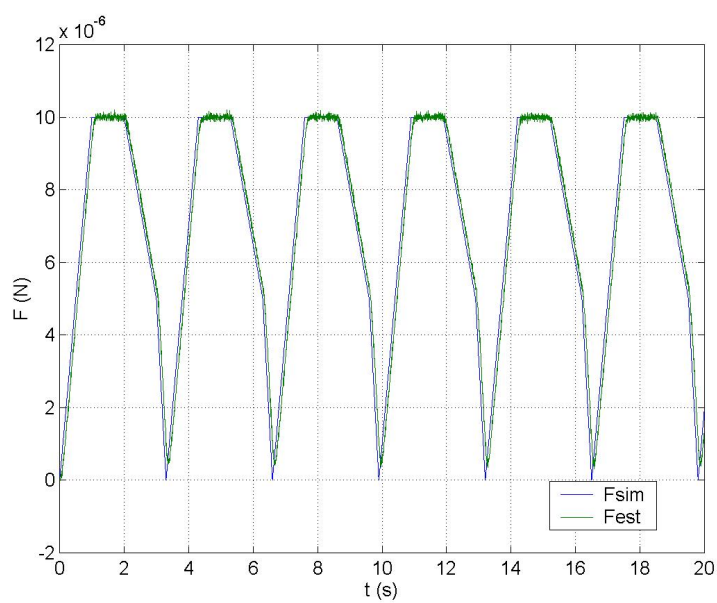


FIG. 4.23 – Force  $F_x^{ext}(t)$  simulée avec un bruit de mesure et force  $\hat{F}_x^{ext}(t)$  estimée bruitée

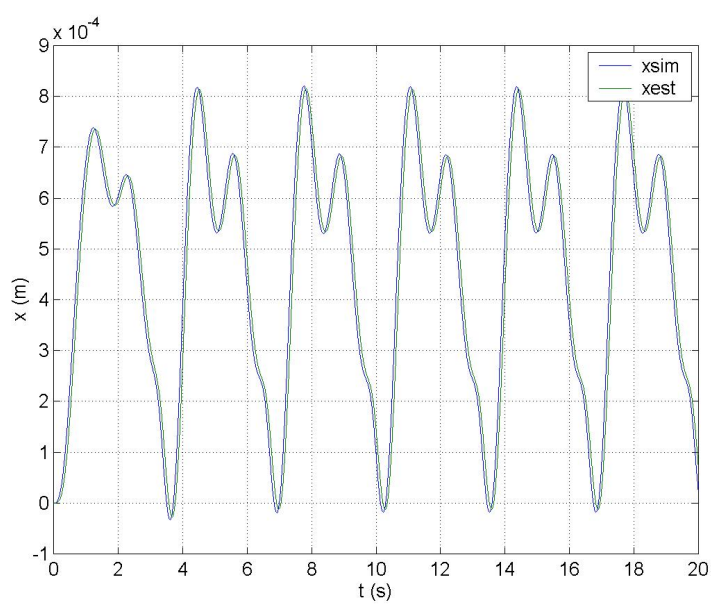


FIG. 4.24 – Réponse  $x(t)$  du flotteur simulée et estimée bruitée

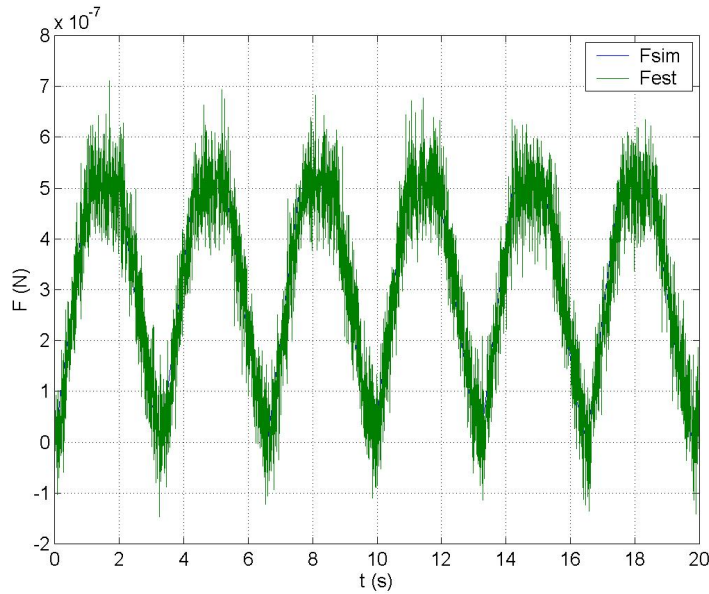


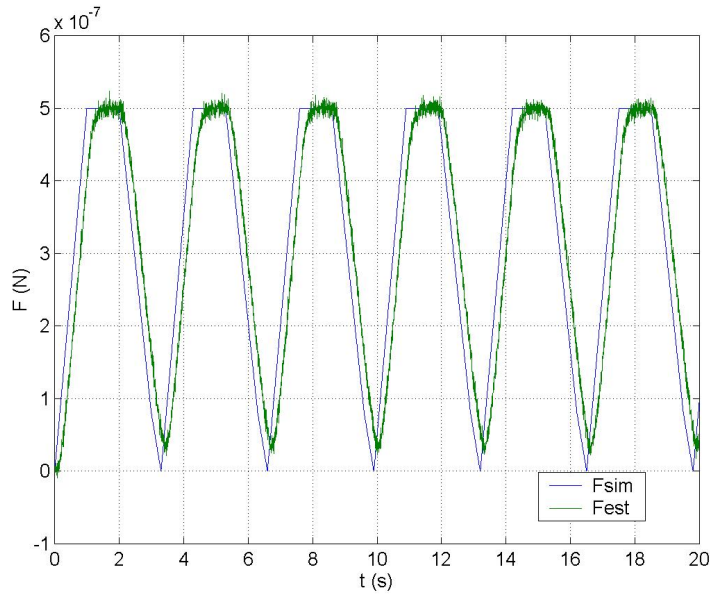
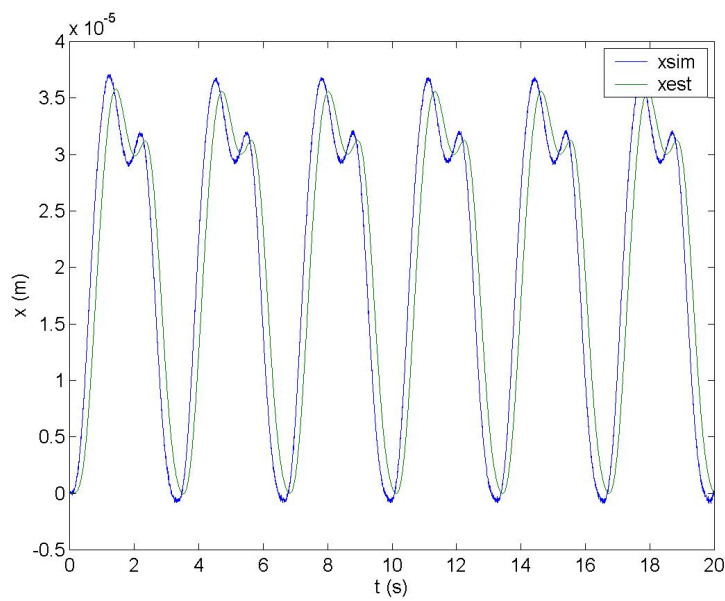
FIG. 4.25 – Force déterministe  $F_x^{ext}(t)$  simulée avec un bruit de mesure et force  $\hat{F}_x^{ext}(t)$  estimée bruitée

4.26 représente la force  $F_x^{ext}(t)$  simulée et estimée bruitée. La figure 4.27, quant à elle, représente la réponse  $x(t)$  du flotteur simulée et estimée suite à l'application de la force.

D'après ces figures, on arrive à limiter l'influence du bruit sur l'estimation de la force en ralentissant la dynamique de l'estimateur. Par contre, cette faible dynamique de l'estimateur induit classiquement un retard dans l'estimation de la dynamique du système. Cela peut avoir des conséquences néfastes sur l'asservissement en position du flotteur. Le gain de l'observateur doit donc être choisi en effectuant un compromis pour satisfaire au mieux ces contraintes.

## 4.5 Simulation de la réponse de l'estimateur $B$ en boucle fermée

Après avoir illustré les performances en boucle ouverte de l'estimateur  $B$  de la figure 4.17, nous allons nous intéresser dans cette partie à sa réponse en boucle fermée. La figure 4.28 représente la configuration du système bouclé avec l'estimateur  $B$  qui tient désormais compte de la commande  $i$ . Rappelons que les pôles de l'estimateur sont placés en  $-10$  et que les pôles du système bouclé sont placés en  $-8$  afin d'avoir un estimateur moins rapide et par conséquent moins sensible au bruit de mesure.

FIG. 4.26 – Force  $F_x^{ext}(t)$  simulée avec un bruit de mesure et force  $\hat{F}_x^{ext}(t)$  estimée bruitéeFIG. 4.27 – Réponse  $x(t)$  du flotteur simulée et estimée bruitée

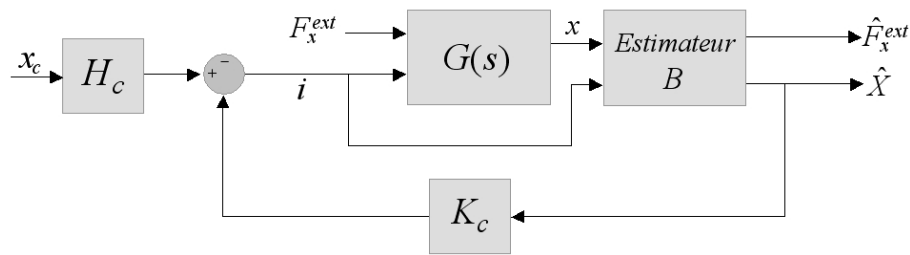
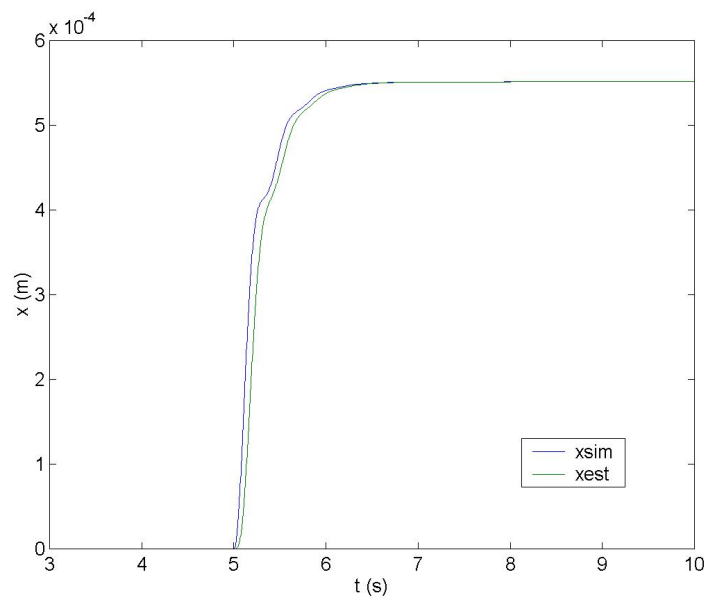


FIG. 4.28 – Configuration du système bouclé.

FIG. 4.29 – Réponse  $x(t)$  simulée et estimée du système bouclé à un échelon de force de  $20\mu N$ .

Dans l'optique d'une validation, nous avons simulé la réponse du système bouclé à un échelon de force de  $20\mu N$  appliqué à l'instant  $t = 5s$ . La figure 4.29 représente la réponse  $x(t)$  simulée et estimée.

Cette figure montre une erreur statique sur la position  $x$  du flotteur. Cette erreur statique est induite par la force externe  $F_x^{ext}$  considérée comme une entrée de perturbation.

La figure 4.30 représente l'échelon de force  $F_x^{ext}(t)$  simulé et estimé. Les oscillations sur le tracé de la force estimée sont engendrées par le courant  $i$  qui intervient dans l'estimation de la force externe d'après l'équation (4.43). Ce courant est un courant oscillant (voir figure 4.31), car il doit permettre de contrer les déplacements du

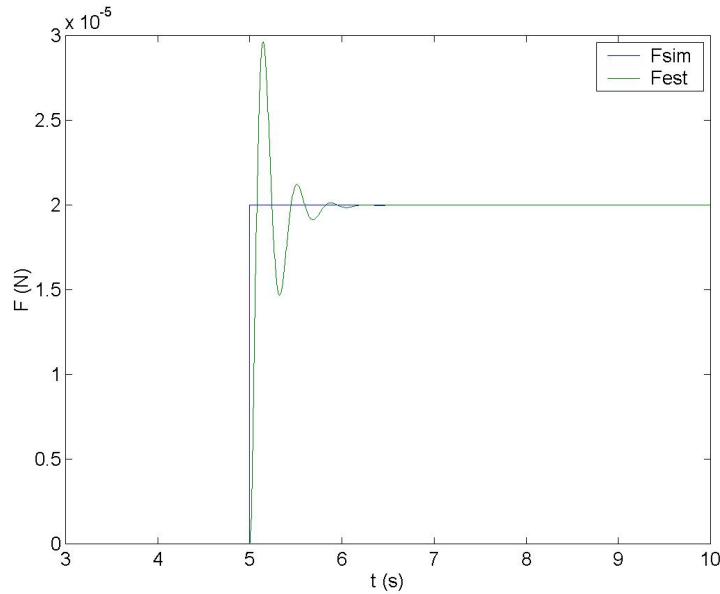


FIG. 4.30 – Echelon de force  $F_x^{ext}(t)$  simulé et estimé.

flotteur suite à la force externe qui lui est appliquée de manière à garder le flotteur à la position zéro.

Comme le mécanisme de flottaison  $MFM$  est un système naturellement très oscillant, on retrouve ces oscillations sur le tracé du courant et par conséquent sur le tracé de la force estimée sur la figure 4.30.

Pour s'affranchir de ces oscillations, un moyen simple consiste à ajouter un filtre passe-bas sur l'estimation de la force (voir figure 4.32) afin de rejeter les hautes fréquences engendrées par le courant.

Ce filtre a été choisi d'une manière heuristique uniquement pour illustrer notre propos. Une étude fréquentielle du problème permettrait le calcul d'un filtre avec une fréquence de coupure et une atténuation correctement ajustées en fonction des performances voulues sur l'estimation de la force. La figure 4.32 représente les forces estimées avant et après le filtre ainsi que la force simulée.

### Calcul et suppression de l'erreur statique sur la position $x$

Nous avons vu au début de la section 4.6 qu'il y avait une erreur statique sur la position  $x$  du flotteur induit par la force externe  $F_x^{ext}$  considérée comme une entrée de perturbation. Dans cette section, nous allons nous intéresser à la suppression de cette erreur statique calculée en régime stationnaire à partir de l'équation (4.4) :

$$x(\infty) = G_1(0).i(\infty) + G_2(0).F_x^{ext}(\infty) \quad (4.47)$$

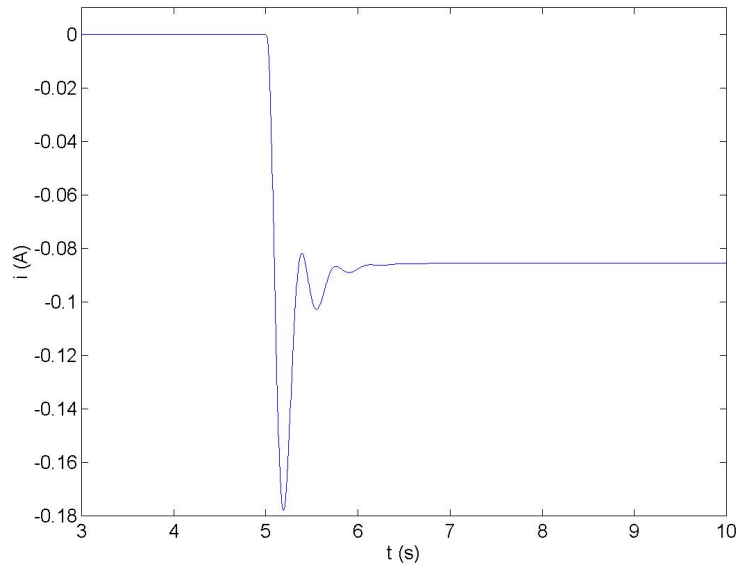
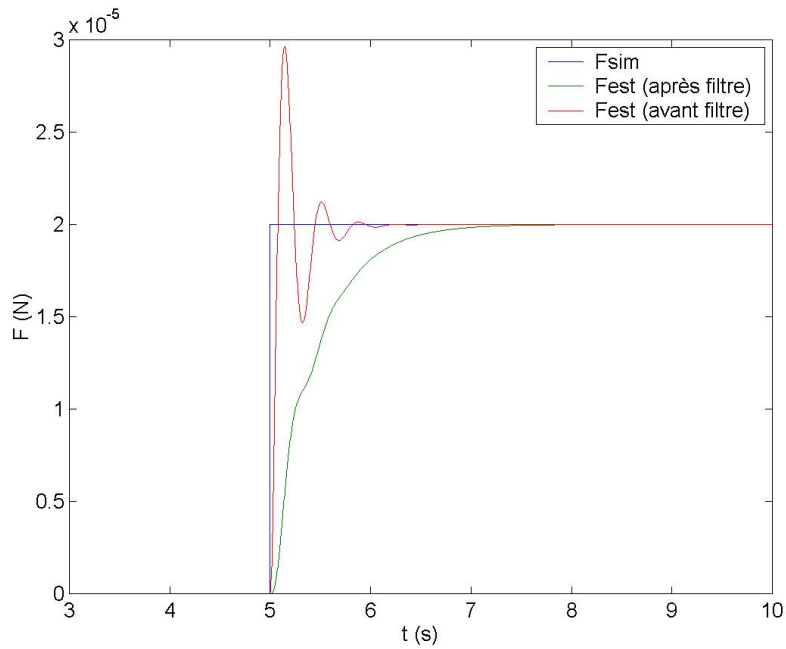
FIG. 4.31 – Courant  $i$  dans les bobines  $b$ 

FIG. 4.32 – Suppression des oscillations sur le tracé de la force estimée à l'aide d'un filtre passe-bas.



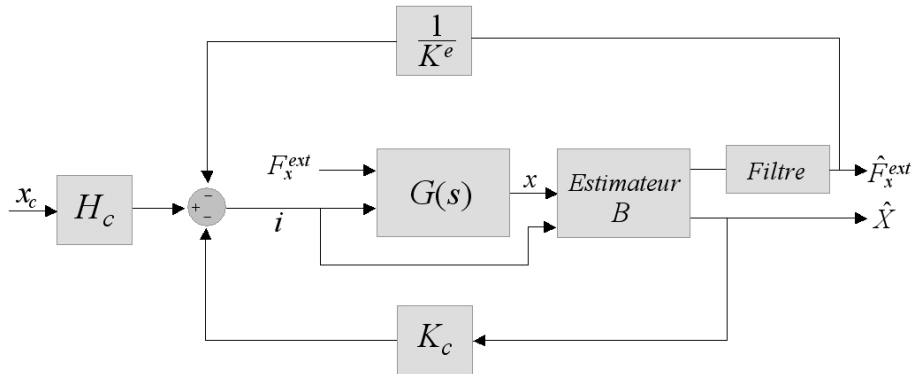


FIG. 4.33 – Système bouclé avec compensation de l'erreur statique sur le déplacement

avec :

$$\begin{cases} x(\infty) = x_c = 0 \\ i(\infty) = \text{constante} = i \\ F_x^{ext}(\infty) = \text{constante} = F_x^{ext} \end{cases}$$

Ainsi :

$$0 = \frac{K_e^x}{K_m^x} i + \frac{1}{K_m^x} F_x^{ext} \quad (4.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} i(t) &= H_c x_c - k_1 x - k_2 \dot{x} + \alpha \\ \Rightarrow i(\infty) &= i = \alpha \end{aligned}$$

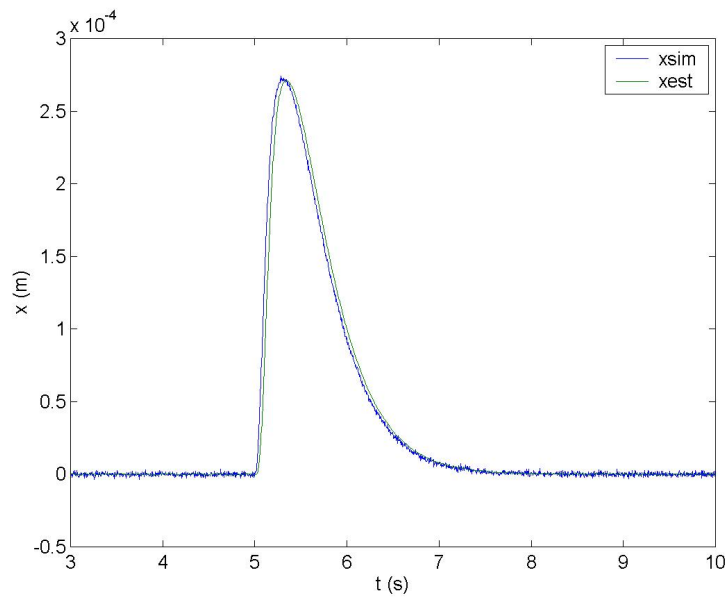
$\alpha$  représente l'erreur statique à calculer.

En remplaçant  $i$  par sa valeur dans l'équation (4.48), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{K_e^x}{K_m^x} \alpha + \frac{1}{K_m^x} F_x^{ext} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{-1}{K_e^x} F_x^{ext} \end{aligned}$$

Cette valeur sera réinjectée dans le système bouclé, avec un signe négatif, afin de supprimer l'erreur statique. Le système bouclé complet est représenté dans la figure 4.33.

La figure 4.34 représente la réponse  $x(t)$  simulée et reconstruite du système bouclé à un échelon de force de  $20 \mu N$  et pour une consigne nulle. La figure 4.35 représente la force  $F_x^{ext}(t)$  simulée et estimée appliquée au flotteur. L'absence du bruit sur le tracé de la force estimée est due au filtre passe-bas.

FIG. 4.34 – Réponse  $x(t)$  simulée et estimée à un échelon de force

En conclusion, cette commande par placement de pôle donne des résultats acceptables en ce qui concerne la rapidité, la stabilité et l'amortissement du système bouclé. Son intérêt principal est sa simplicité puisqu'elle n'utilise que des méthodes élémentaires de l'automatique. Sa vocation est donc essentiellement pédagogique afin d'illustrer les difficultés du problème et notamment du courant qui déstabilise l'estimateur. L'inconvénient majeur de cette commande est qu'elle ne tient pas compte des bruits de mesure qui interviennent pour corrompre les mesures et qui peuvent aller jusqu'à la déstabilisation de la boucle d'asservissement. Une approche plus poussée a donc été retenue afin de mener à bien l'asservissement de la plate-forme. Elle sera représentée en détail dans le dernier chapitre.

## 4.6 Discrétisation de la commande

Pour implémenter cette approche sur un calculateur numérique, il suffit de discrétiser le modèle linéaire utilisé et de reprendre la même approche avec les outils de la transformée en  $z$  et de la commande par retour d'état discrète. Ce point ne présente pas de difficulté particulière.

## 4.7 Validation expérimentale

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la validation expérimentale de l'estimateur et de l'asservissement par retour d'état. Pour réaliser une mesure de

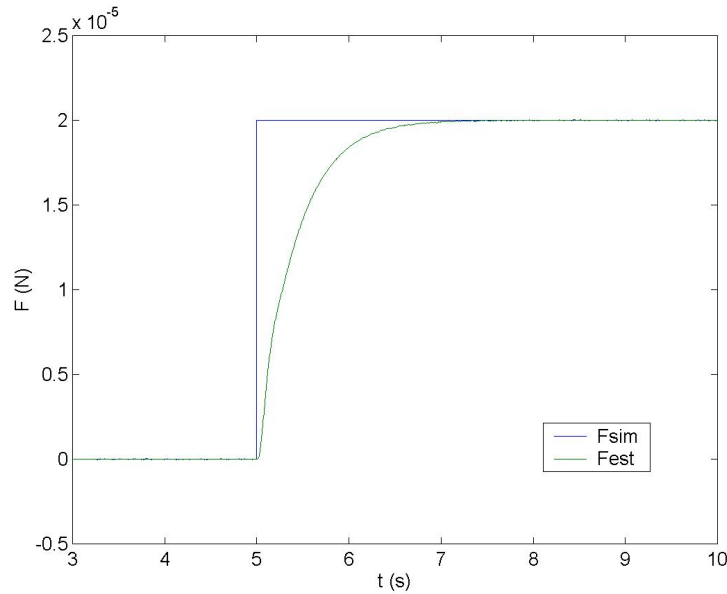


FIG. 4.35 – Force  $F_x^{ext}(t)$  simulée et estimée

force en utilisant le prototype expérimental développé, nous avons construit la maquette présentée sur la figure 4.36.

Dans cette maquette de test nous disposons d'un effecteur qui est un cheveu humain fixé au bout d'une tige montée sur une table XY de micropositionnement. Le cheveu a été caractérisé avant la manipulation à l'aide d'un capteur de micro force développé au département *AS2M*. Ce capteur basé sur un principe de lévitation diamagnétique a été présenté en détail au cours du premier chapitre (cf. section 1.5.2 page 30). La raideur mesurée du cheveu est de l'ordre de  $0.093 N.m^{-1}$ . La manipulation consiste à appliquer un effort horizontal orienté suivant  $x$  dont l'intensité est de  $20 \mu N$ . Cela se produit par une déformation du cheveu de l'ordre de  $215 \mu m$ , compte tenu de sa raideur. Le déplacement du flotteur lorsqu'il est en contact avec le cheveu est mesuré à l'aide d'un capteur laser de  $1 \mu m$  de résolution. La figure 4.37 représente la force mesurée ainsi que le déplacement du flotteur suite à l'application de cette force. Malgré les difficultés de la manipulation, des courbes répétables ont pu être produites.

Notons que les bruits entachants les mesures ont plusieurs origines :

- mauvaise qualité du capteur de position laser utilisé ;
- mauvaises conditions de manipulation ;
- les ondes de retour qui se propagent sur le liquide lorsque le flotteur se déplace. Ces ondes vont perturber les mesures lors de leur retour vers le flotteur (après réflexion sur les bords du bassin). Un moyen pour éliminer ces ondes consiste à

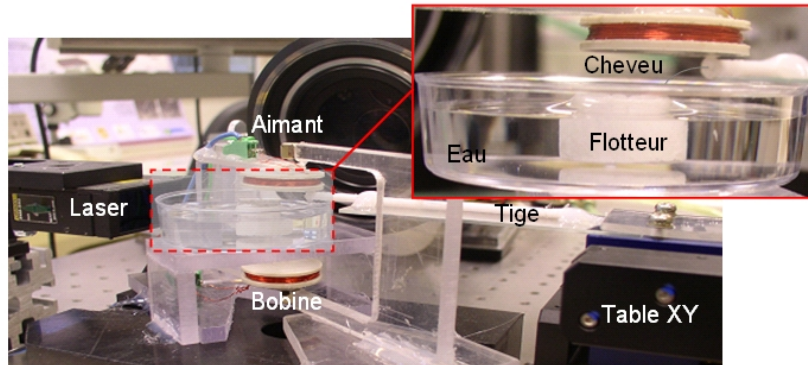


FIG. 4.36 – Système de manipulation

traiter les bords du bassin ou à les filtrer numériquement (méthodes d'*echo – cancellation* utilisées en traitement de signal).

## 4.8 Asservissement de la plate-forme

Après avoir validé l'asservissement du mécanisme de flottaison-magnétique *MFM*, nous allons nous intéresser, dans cette section, à l'asservissement de la plate-forme complète. L'asservissement des trois axes (découplés sur le modèle linéaire)  $x$ ,  $y$  et  $\psi$  de la plate-forme, définis par les équations différentielles 4.2, se fait séparément en suivant la même démarche qu'on avait suivi pour asservir la position du flotteur du *MFM* (voir figure 4.38). Les courants  $i_2$  et  $i_3$  sont recalculés à partir des courants  $i_y$  et  $i_\psi$  avant d'être injectés dans le système.

Dans une optique de validation, nous avons simulé la réponse de la plate-forme bouclée à un échelon de couple de  $10nNm$  appliqué à la plate-forme autour de  $z$ . La simulation correspond au schéma-bloc de la figure 4.38. Elle a été faite avec le modèle non-linéaire (*MNL*) de la plate-forme, présenté en détail au cours du chapitre 3 et appelé *PF* sur la figure 4.38. Les estimateurs, quant à eux, utilisent les trois modèles linéaires calculés à partir des trois équations différentielles 4.2 du système découplé. La figure 4.39 représente l'échelon de couple externe simulé et estimé bruité. La figure 4.40 représente la rotation autour de  $z$  de la plate-forme suite à l'application de l'échelon de couple.

Nous avons ensuite simulé la réponse de la plate-forme à un échelon de force de  $10\mu N$  appliqué suivant  $y$  à l'instant  $t = 10s$ . La simulation a été faite, dans un premier temps, avec le modèle non-linéaire (*MNL*) de la plate-forme appelée *PF* sur la figure 4.38. Cette même simulation a été refaite avec le modèle linéaire de la plate-forme (*ML*) présenté en détail au cours du chapitre 3. Sur la figure 4.41, on a superposé les courbes de la force simulée ainsi que les

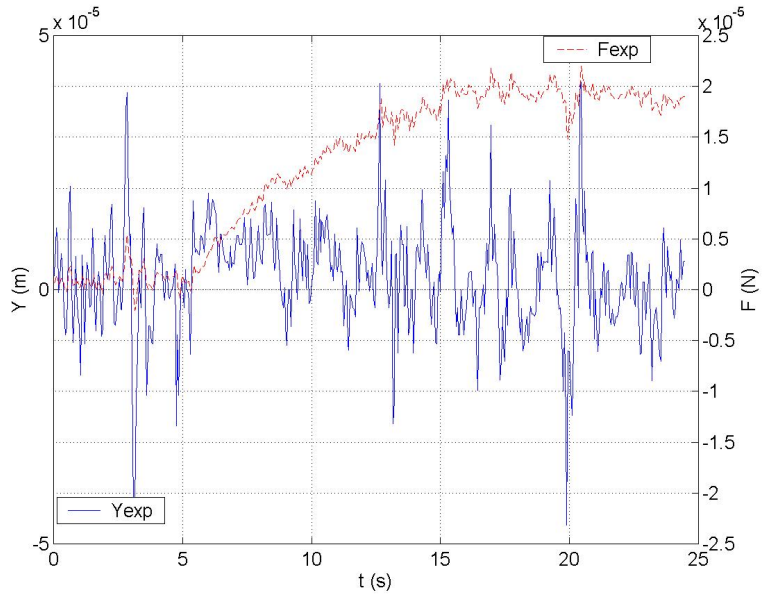


FIG. 4.37 – Force mesurée et déplacement du flotteur

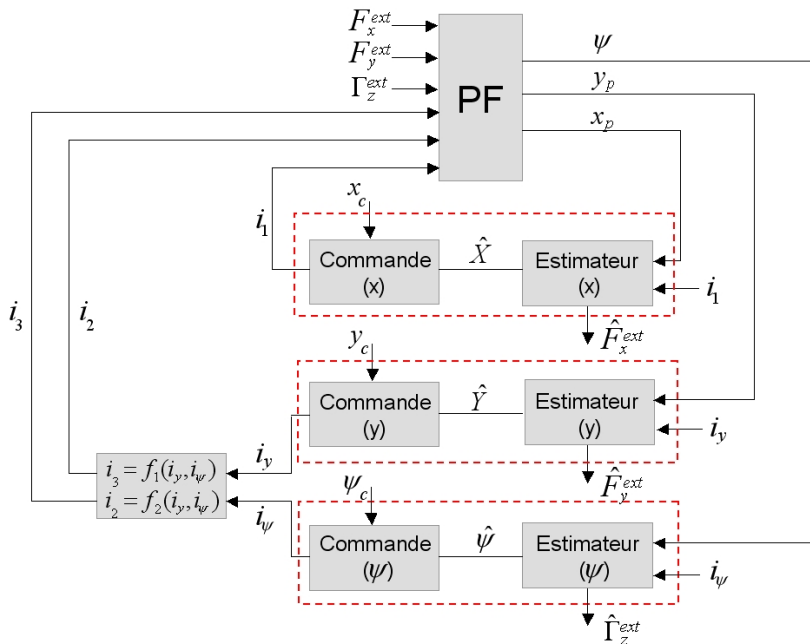


FIG. 4.38 – Asservissement de la plate-forme

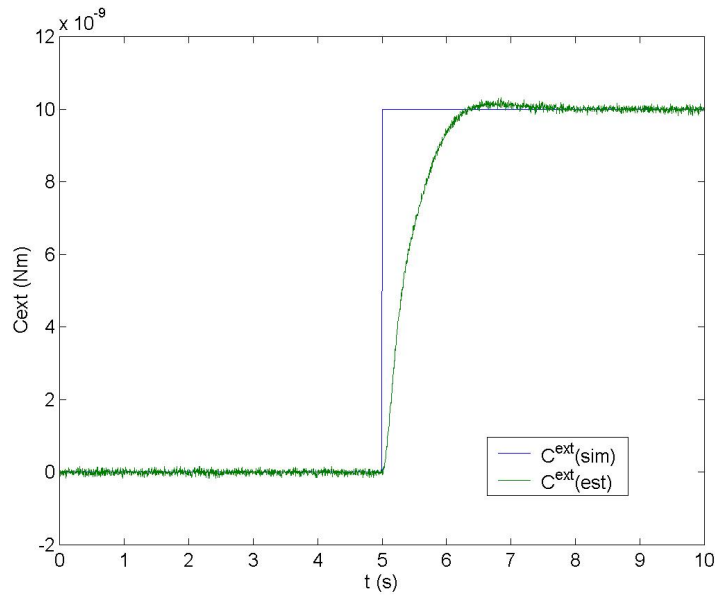
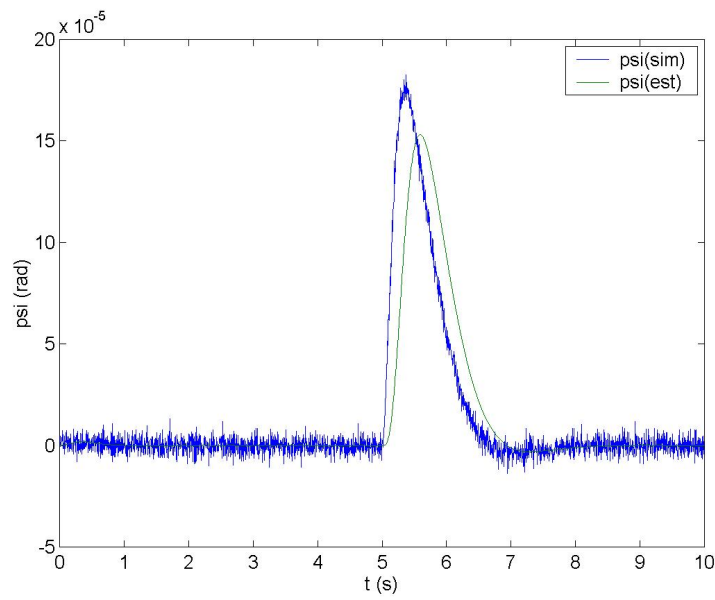


FIG. 4.39 – Echelon de couple simulé et estimé bruité

FIG. 4.40 – Rotation de la plate-forme autour de  $z$

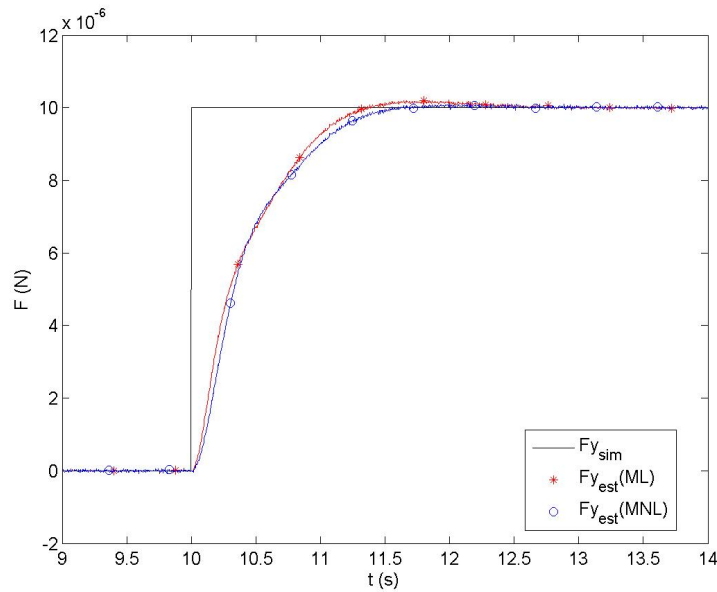


FIG. 4.41 – Echelon de force simulé et estimé

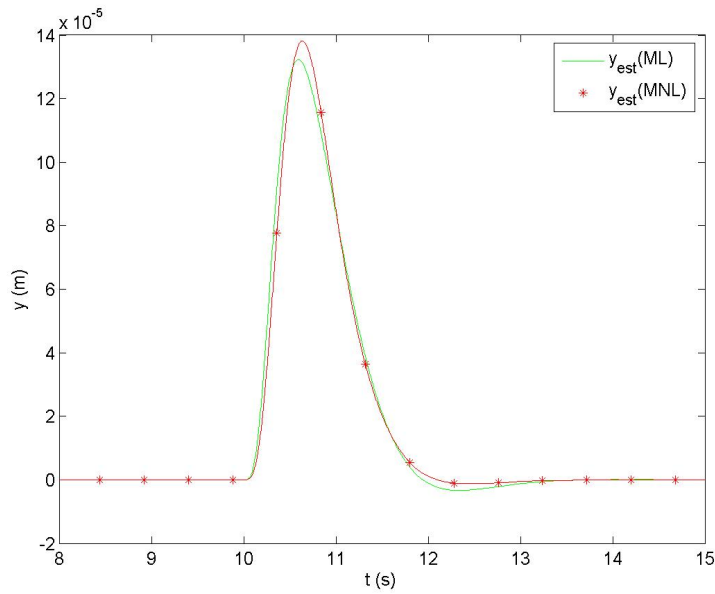
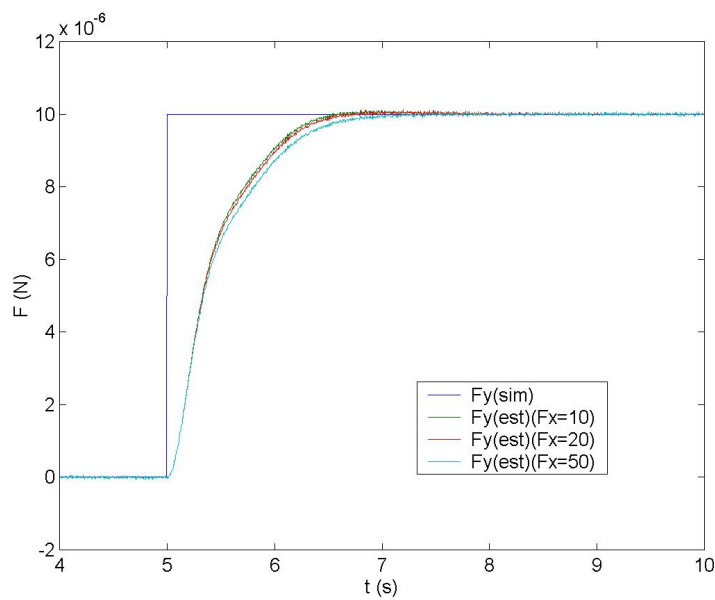
deux forces estimées avec les deux modèles. On constate une petite différence tolérable entre les deux tracés de la force estimée en régime transitoire. En régime stationnaire, les réponses des deux modèles collent correctement au bruit près. La variance de ce bruit de mesure ajouté est de l'ordre de  $1.25 \times 10^{-12} (m^2 s)$ .

La figure 4.42, quant à elle, représente la réponse selon  $y$  de la plate-forme à l'échelon de force appliqué suivant  $y$ .

Pour illustrer l'effet du couplage entre les différentes directions de mesure sur la dynamique du système bouclé, nous avons simulé la réponse de la plate-forme à deux échelons de force  $F_x^{ext}$  et  $F_y^{ext}$ , appliqués simultanément à l'instant  $t = 5$  s. La simulation a été faite avec le modèle non-linéaire de la plate-forme (*MNL*), pour  $F_y^{ext} = 10 \mu N$  et pour différentes valeurs de  $F_x^{ext}$  (10, 20 et 50  $\mu N$ ). Rappelons que ce couplage n'est pas modélisé dans les modèles linéaires utilisés et qu'il va donc dégrader la qualité de l'estimation des efforts.

Sur la figure 4.43, on a superposé les courbes de la force  $F_y^{ext}$  estimée pour les différentes valeurs de  $F_x^{ext}$ . La différence entre les forces  $F_y^{ext}$  estimées, montre que le couplage entre les différentes directions de mesure présente une influence plutôt faible sur l'estimation de la force dans ce cas de figure.

La figure 4.44, représente le déplacement de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ) suite à l'application des échelons de force  $F_y^{ext}$  et  $F_x^{ext}$ .

FIG. 4.42 – Déplacements de la plate-forme suivant  $y$ FIG. 4.43 – Echelon de force  $F_y^{ext}$  simulé et estimé pour différentes valeurs de  $F_x^{ext}$



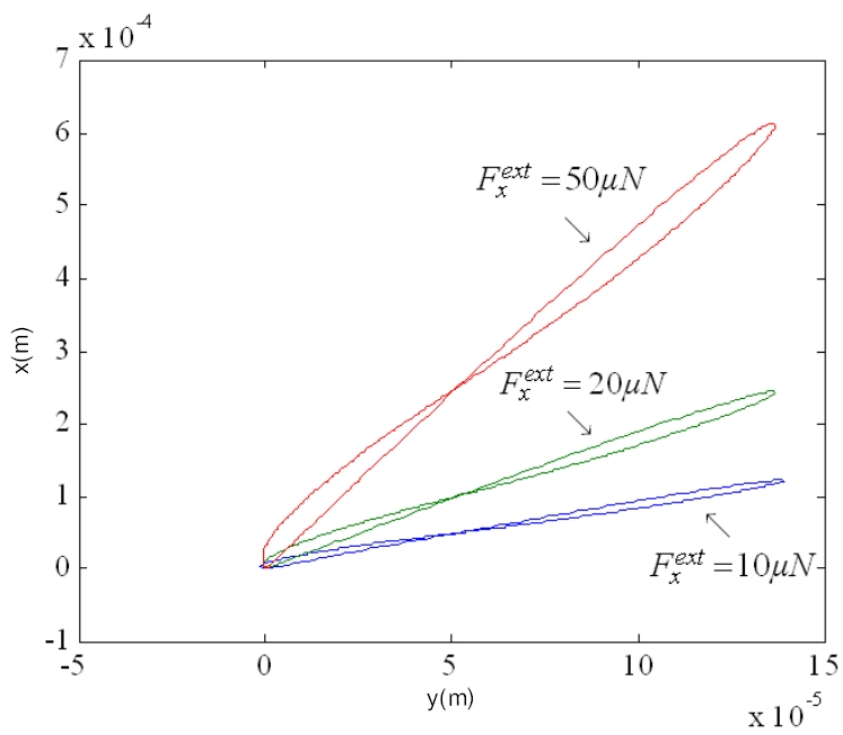


FIG. 4.44 – Déplacements de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  pour  $F_y^{ext} = 10 \mu N$  et pour différentes valeurs de  $F_x^{ext}$

## 4.9 Conclusion

Nous avons, au cours de ce chapitre, abordé la problématique de l'asservissement en position de la plate-forme de mesure de micro et nano force dans le plan  $(xOy)$ . Dans le but de simplifier la tâche d'asservissement, nous avons procédé dans un premier temps au découplage des trois axes  $x$ ,  $y$  et  $\psi$  de la plate-forme. Cela nous a permis ensuite de commander séparément les axes en se mettant dans le cas d'un système *1ddl*. La validation expérimentale de la commande développée a été effectuée sur le prototype expérimental du mécanisme de flottaison-magnétique *MFM*.

Dans le but de donner un aspect pédagogique à ce chapitre, nous avons choisi une méthode d'asservissement très simple par placement de pôles. Nous avons choisi pour la même raison d'estimer la force externe  $F^{ext}$  (entrée inconnue) à l'aide d'une «déconvolution» par placement de pôles. Cela nous a permis d'illustrer l'influence des bruits de mesure induits par les capteurs de position ainsi que l'influence du bruit de boucle induit par la commande  $i$  du système bouclé qui est très perturbatrice pour l'estimation de la force externe. Un moyen pour résoudre ce problème consiste à rendre l'estimateur moins sensible à ces bruits en plaçant différemment ses pôles dans le plan  $s$  sans oublier que cela se fait au prix de la stabilité de l'estimateur lui même.

En conclusion, ce chapitre fait ressentir le besoin d'une approche plus aboutie conditionnée par deux contraintes : tout d'abord, il faut que, pour les incertitudes du modèle  $\hat{G}$  du processus à asservir et pour le bruit de boucle induit par  $i$ , on puisse déterminer un estimateur robuste stable pour l'estimation de la force externe ainsi que le vecteur d'état du système indispensable à l'implémentation de la commande par retour d'état ; Ensuite, la loi de commande optimale doit stabiliser le système incertain en boucle fermée pour toutes les incertitudes admissibles connues.

Ce type de commande peut découler d'une minimisation d'un critère linéaire quadratique qui est souvent de type énergétique. Le but étant d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Il existe un certain nombre de méthodologies de synthèse de correcteurs linéaires optimaux. Certaines sont basées sur les spécifications fréquentielles des performances de l'asservissement comme la synthèse par placement de pôle avec calibrage des fonctions de sensibilité, la synthèse  $H_\infty$  et la synthèse  $\mu$ . D'autres sont basées sur les spécifications temporelles des performances de l'asservissement comme la synthèse *LQG* et la synthèse  $H_2$ .

Sans contester un instant l'intérêt de la théorie  $H_\infty$ , nous avons décidé dans le cadre de ce mémoire de poser le problème de l'asservissement de la plate-forme

dans le domaine temporel en choisissant la commande robuste par synthèse  $H_2$ . Cette commande qui suppose une connaissance *a priori* d'informations sur les entrées inconnues et les perturbations du système va présenter de nombreux avantages pour notre capteur :

- performances dynamiques et statiques ;
- faible sensibilité aux variations des paramètres du modèle et aux bruits de mesure ;
- facilité de réglage du contrôleur et de l'estimateur à l'aide de deux scalaires  $T_o$  et  $T_c$  représentant des horizons de filtrage et de commande.

Le principe de cette commande est présenté en détail dans le chapitre 5.

## Chapitre 5

# Asservissement de la plate-forme par synthèse $H_2$

*Un obstacle à une reconstruction satisfaisante de la force tient aux bruits de mesure et aux erreurs de modélisation qui dégradent les performances des capteurs de force. Ce problème se pose que le capteur fonctionne en mode actif ou passif (commande nulle). Un cadre naturel pour traiter ce problème est celui de l'estimation optimale dans le cadre linéaire qui est associé au Filtrage de Kalman. Ce chapitre explicite comment mettre en oeuvre un tel filtre. Dans le cas de figure où le capteur fonctionne en mode actif, cette mise en oeuvre aboutit à une commande par synthèse  $H_2$ .*

### 5.1 Estimation de la force externe $F_x^{ext}$

Dans ce chapitre, nous allons évaluer l'intérêt de la synthèse  $H_2$  pour commander notre capteur actif de force. Il s'agit donc d'asservir en déplacement la plate-forme tout en estimant *simultanément* les efforts inconnus qui s'exercent dessus. De ce fait, il est nécessaire de mettre en place un observateur qui devra estimer à la fois l'état de la plate-forme (reconstructeur d'état) pour pouvoir la commander et les efforts inconnus (estimateur d'entrées inconnues) qui constituent les grandeurs à mesurer. La question qui se pose est donc de savoir si les observateurs à base de filtrage de *Kalman* utilisés classiquement en synthèse  $H_2$  pour reconstruire l'état permettent également d'estimer des entrées inconnues, et si oui, sous quelles restrictions.

Pour commencer à répondre à cette question, la première partie de ce chapitre montre l'intérêt et les limitations du filtrage de *Kalman* pour estimer une entrée inconnue uniquement à partir de la sortie bruitée d'un système dynamique, c'est-à-dire en mode entièrement *passif*. L'entrée à estimer correspond ici aux efforts inconnus, la sortie correspond aux déplacements mesurés et donc bruités de la masse sismique (voir figure 5.1). La deuxième partie du chapitre, consacrée au

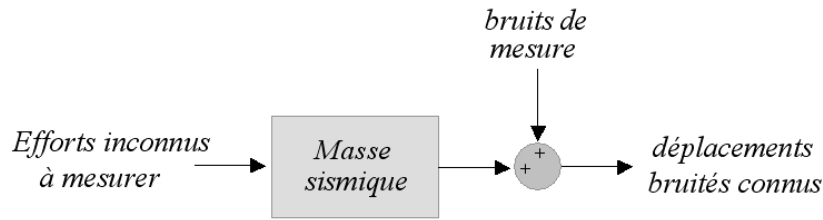


FIG. 5.1 – Système dynamique.

mode actif, introduira la partie commande dans un cadre unifié permettant de faire à la fois l'estimation des forces et la commande.

Comme dans les chapitres précédents, l'intérêt et les limitations du filtrage de *Kalman* pour l'estimation d'entrées inconnues sera introduit simplement via le mécanisme de flottaison-magnétique (*MFM*) présenté en 2.4. La deuxième partie du chapitre s'appuiera ensuite sur le modèle complet de la plate-forme.

La représentation d'état du mécanisme de flottaison magnétique en mode passif ( $i=0$ ) est donnée par l'équation (4.3) page 123 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_x^m}{m} & -\frac{k_x^v}{m} \end{bmatrix}}_{A_f} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B_f} [ F_x^{ext} ] + \underbrace{\begin{bmatrix} w_x \\ w_{\dot{x}} \end{bmatrix}}_w \quad (5.1)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_f} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_X + v$$

avec  $w_x$  et  $w_{\dot{x}}$  respectivement les bruits d'état (processus stochastiques supposés blanc gaussiens et centrés) sur la position et la vitesse du flotteur, caractérisés par une intensité  $Q_x$  et  $Q_{\dot{x}}$ . Le bruit  $v$  blanc gaussien et centré d'intensité  $R$  est le bruit d'observation ajouté par le capteur de position. La notion d'intensité d'un processus stochastique blanc gaussien sera rappelée plus loin. Les bruits  $w$  et  $v$  sont indépendants.

## Filtre de Kalman

En utilisant les propriétés statistiques des bruits d'état ( $w_x, w_{\dot{x}}$ ) et de mesure ( $v$ ), *Kalman* a proposé en 1960 la structure d'observateur suivante qui minimise, sous un certain nombre de conditions, la variance de l'erreur d'estimation de l'état pour un système linéaire tel que (5.1) :

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = A_f \cdot \hat{X} + B_f \cdot U + K(y - C_f \cdot \hat{X}) \quad (5.2)$$

Cet observateur, dont (5.2) est la version stationnaire (le gain  $K$  du filtre est indépendant du temps), correspond à une étape de prédiction ( $\frac{d\hat{X}}{dt} = A_f \cdot \hat{X} + B_f \cdot U \dots$ ), corrigée par l'écart constaté entre la sortie observée et la sortie reconstruite ( $\dots + K(y - C_f \cdot \hat{X})$ ).

La première difficulté pour estimer une entrée inconnue avec un filtre de *Kalman* vient du fait que ce filtrage permet d'estimer l'état  $X(t)$  d'un système dynamique (à partir des observations  $y(t)$ ) mais pas son entrée. La représentation d'état du *MFM* sous la forme présentée dans (5.1) ne permet donc pas d'estimer la force externe  $F_x^{ext}$  à l'aide du filtre *Kalman* (5.2) puisque  $F_x^{ext}$  n'est pas incluse dans l'état du système.

Une solution pour y remédier consiste à modéliser l'évolution de  $F_x^{ext}$  à l'aide d'un processus générateur et à l'introduire dans le modèle d'état du procédé. Dans notre cas de figure, cela revient à rechercher un modèle d'état étendu qui contienne  $F_x^{ext}$  dans l'état en plus de  $x$  et  $\dot{x}$ . Déterminer *a priori* un modèle d'état qui contienne des informations sur la dynamique de  $F_x^{ext}$  revient à injecter de l'information *a priori* sur l'entrée inconnue afin de pouvoir la reconstruire. On retrouve donc ici une démarche classique en déconvolution (voir chapitre 4).

A partir du modèle augmenté et sous des hypothèses que nous détaillerons par la suite, il devient possible d'estimer l'état étendu par un filtrage de *Kalman* avec uniquement la mesure bruitée  $y(t)$  fournie par le capteur de déplacement. Comme la force modélisée  $F_x^{ext}$  est incluse dans l'état étendu, le filtrage permet donc d'obtenir une estimation<sup>1</sup>  $\hat{F}_x^{ext}$  de  $F_x^{ext}$ .

## Modélisation de la dynamique de la force inconnue

Le processus générateur de la force  $F_x^{ext}(t)$  que nous avons choisi consiste à modéliser *a priori* la dynamique de  $F_x^{ext}$  par une évolution brownienne (processus de Wiener) :

$$\dot{F}_x^{ext} = \underline{w}_F \quad (5.3)$$

avec  $\underline{w}_F : T \times \Omega \rightarrow \Re$  un processus stochastique scalaire blanc gaussien et centré, où  $T$  représente le temps et  $\Omega$  un espace échantillonné lié aux phénomènes physiques qui engendrent la force. Ce choix d'un modèle brownien sera justifié plus loin. De ce fait, quels que soient  $t_1, \dots, t_N \in T$ , les  $N$  variables aléatoires  $\underline{w}_F(t_1), \dots, \underline{w}_F(t_N)$

---

<sup>1</sup>Un estimateur est une variable aléatoire noté ici  $\hat{F}$ . La valeur estimée est la valeur que prend l'estimateur à l'issue du processus d'estimation. Elle est noté ici  $\hat{F}$ . L'estimation est un processus déterministe (par exemple un algorithme écrit à partir d'une équation de calcul) qui permet de déterminer la valeur estimée  $\hat{F}$ . Par abus de langage, on confond souvent valeur estimée et estimation en écrivant par exemple  $\hat{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dots$

sont des *variables aléatoire gaussiennes centrées et indépendantes*, ce qui implique l'absence de corrélation temporelle, même pour des intervalles de temps  $\tau$  infiniment petits :

$$\phi_{\underline{w}_F, \underline{w}_F}(t, \tau) = E [\underline{w}_F(t) \underline{w}_F(t + \tau)^T] = Q_F(t) \delta(\tau) \quad \forall t, \forall \tau \quad (5.4)$$

où  $\phi_{\underline{w}_F, \underline{w}_F}(t, \tau)$  est la fonction d'autocorrélation du processus  $\underline{w}_F$  et  $Q_F(t)$  est le coefficient de diffusion à l'instant  $t$  de l'évolution brownienne de  $\underline{F}_x^{ext}(t)$ .  $Q_F(t)$  est aussi appelé l'*intensité* du bruit blanc gaussien  $\underline{w}_F(t)$ . C'est cette appellation que nous utiliserons par la suite. Nous allons de plus supposer que le processus  $\underline{w}_F(., .)$  est stationnaire au sens strict, ce qui entraîne que [?] :

$$Q_F(t) = Q_F = \text{constante} \quad \forall t$$

Ainsi la fonction d'autocorrélation de  $\underline{w}_F$  ne dépend plus que de  $\tau$  :

$$\phi_{\underline{w}_F, \underline{w}_F}(t, \tau) = \phi_{\underline{w}_F, \underline{w}_F}(\tau) = Q_F \delta(\tau) \quad \forall \tau \quad (5.5)$$

L'intensité  $Q_F$  est alors également la valeur de la densité spectrale de puissance  $\psi_{\underline{w}_F}(w)$  (transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de  $\underline{w}_F$ ) qui devient constante pour toutes les pulsations  $w$  :

$$\phi_{\underline{w}_F, \underline{w}_F}(\tau) = E [\underline{w}_F(t) \underline{w}_F(t + \tau)^T] = Q_F \delta(\tau) \quad \forall t, \forall \tau \quad (5.6)$$

$$\psi_{\underline{w}_F}(w) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \phi_{\underline{w}_F, \underline{w}_F}(\tau) e^{-jw\tau} d\tau = Q_F \quad \forall w^2 \quad (5.7)$$

De part les propriétés d'une dynamique brownienne [?], la variance de l'incrément de  $\underline{F}_x^{ext}(t)$  entre n'importe quel instant  $t_1$  et n'importe quel instant  $t_2$  est une fonction linéaire de la différence de temps  $t_2 - t_1$  et on a alors :

$$E \left[ (\underline{F}_x^{ext}(t_2) - \underline{F}_x^{ext}(t_1))^2 \right] = Q_F |t_2 - t_1| \quad (5.8)$$

Autrement dit, plus le temps passe et plus  $\underline{F}_x^{ext}(t_2)$  est susceptible de prendre des valeurs différentes par rapport à  $\underline{F}_x^{ext}(t_1)$ .

Comme on a par convention  $\underline{F}_x^{ext}(0) = 0$  pour un processus de Wiener, si on pose  $t_2 = t$  et  $t_1 = 0$ , la variance du processus stochastique  $\underline{F}_x^{ext}$  est donnée d'après (5.8) par :

$$\sigma_{\underline{F}_x^{ext}}(t) = E \left[ (\underline{F}_x^{ext}(t))^2 \right] = Q_F \times t \quad (5.9)$$

---

<sup>2</sup>Si  $\underline{w}_F$  n'est pas stationnaire, l'amplitude constante de la densité spectrale de puissance du bruit blanc gaussien non stationnaire évolue dans le temps :

$$\psi_{\underline{w}_F}(t, w) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \phi_{\underline{w}_F, \underline{w}_F}(t, \tau) e^{-jw\tau} d\tau = Q_F(t) \quad \forall w$$

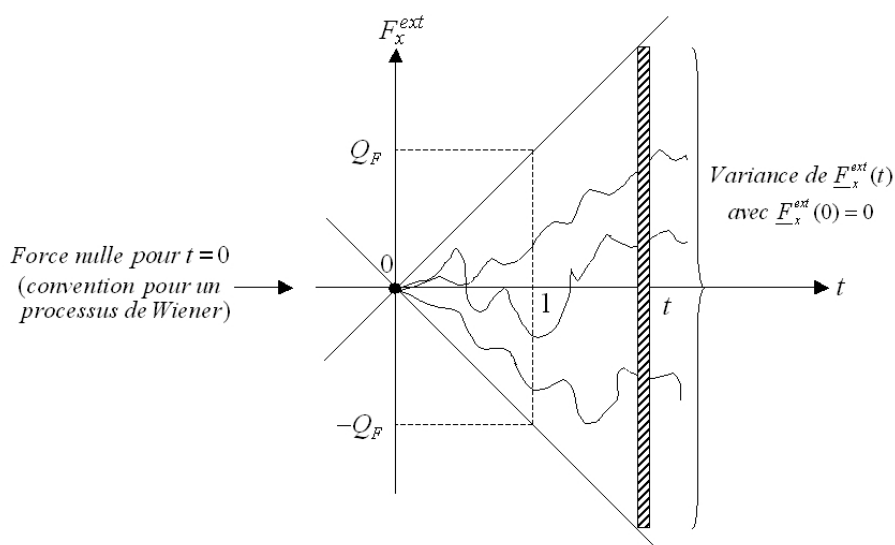


FIG. 5.2 – Evolution de la variance donnée par le modèle de connaissance *a priori* de  $\underline{F}_x^{ext}(t)$ .

puisque  $\underline{F}_x^{ext}(t_1) = \underline{F}_x^{ext}(0) = 0$ . La variance de  $\underline{F}_x^{ext}(t)$  est donc une fonction linéaire du temps (voir figure 5.2) et  $Q_F$  est un paramètre qui représente avec quelle «rapidité»  $\underline{F}_x^{ext}(t)$  est susceptible d'évoluer dans le futur. Plus  $Q_F$  est grand et moins on a d'information sur la manière dont la force va évoluer.

Par ailleurs, comme un processus brownien est un processus à incréments indépendants<sup>3</sup>, le fait de savoir de combien s'est accrue la force entre une succession d'instantanés données  $t_1 - t_0$ ,  $t_2 - t_1$ ,  $t_3 - t_2$  etc., ne donne strictement aucune information sur de combien elle va s'accroître entre d'autres successions d'instantanés.

Le modèle (5.1) qui traduit l'information *a priori* sur  $F_x^{ext}$  qui est injectée dans le système est donc globalement peu informatif et est paramétré par un unique scalaire  $Q_F$ . Nous verrons plus loin que cette information *a priori* est généralement suffisante pour que le Filtrage de Kalman obtienne des performances satisfaisantes.

Notons que si  $\underline{w}_F = 0 \forall t$ , le modèle (5.1) devient :

$$\underline{F}_x^{ext} = 0 \quad (5.10)$$

Dans ce cas, le modèle de connaissance *a priori* de la dynamique de  $F_x^{ext}$  stipule que la force inconnue est constante mais ne stipule pas sa valeur. Ceci revient à dire que la variance de  $\underline{F}_x^{ext}(t)$  est nulle pour tout  $t$ , ce qui revient à faire  $Q_F = 0$  sur la figure 5.2 (et à relâcher la convention qui stipule pour un processus de Wie-

<sup>3</sup>Dans un processus de Wiener, les incréments sont en plus des variables gaussiennes.



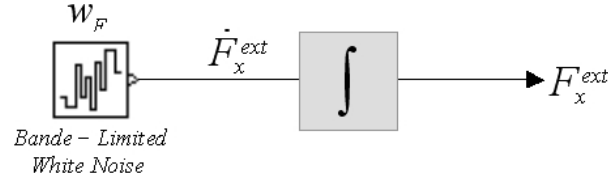


FIG. 5.3 – Processus de Wiener générateur de la force externe.

ner que  $F_x^{ext}(0) = 0$ , sans quoi la force devient connue et restera toujours nulle). Nous retiendrons donc que poser  $Q_F = 0$  revient à stipuler que la force inconnue est constante.

En terme de simulation, un bruit blanc gaussien n'ayant pas d'existence physique<sup>4</sup>, une dynamique brownienne de la force  $F_x^{ext}$  ne pourra être approximée qu'en intégrant un bruit pseudo blanc gaussien à bande passante limitée (voir l'équation 5.1 et la figure 5.3). Un pseudo bruit blanc gaussien  $w_F$  avec une densité spectrale  $Q_F$  constante jusqu'à la fréquence de coupure  $f_c$  est obtenue par tirage aléatoire d'une variable gaussienne de variance :

$$\sigma_{w_F} = Q_F/T_c \quad (5.11)$$

dont toutes les réalisations sont indépendantes les unes des autres et sont bloquées pendant une période  $T_c$ . On a alors  $f_c = 1/T_c$ . Il convient de choisir  $T_c$  très petite par rapport à toutes les constantes de temps présentes dans le système simulé pour que le pseudo bruit blanc ait une bande passante qui couvre celle du système . D'après (5.11), on voit que si  $T_c$  tend vers 0 (ie si la bande passante du bruit blanc augmente), on retrouve le fait que la variance  $\sigma_{w_F}$  du bruit blanc gaussien tend vers l'infini.

## Modèle d'état étendu

En incluant le modèle d'évolution de la force externe  $F_x^{ext}$  dans le modèle d'évolution du flotteur, on obtient le modèle d'état étendu suivant qui n'a plus d'entrée :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{F}_x^{ext} \end{bmatrix}}_{\dot{X}_K} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_f & & B_f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_K} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ F_x^{ext} \end{bmatrix}}_{X_K} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_x \\ w_{\dot{x}} \\ w_F \end{bmatrix}}_w \quad (5.12)$$

<sup>4</sup>Car sa puissance (et donc sa variance s'il est centré) donnée par l'aire sous la densité spectrale de puissance est infinie.

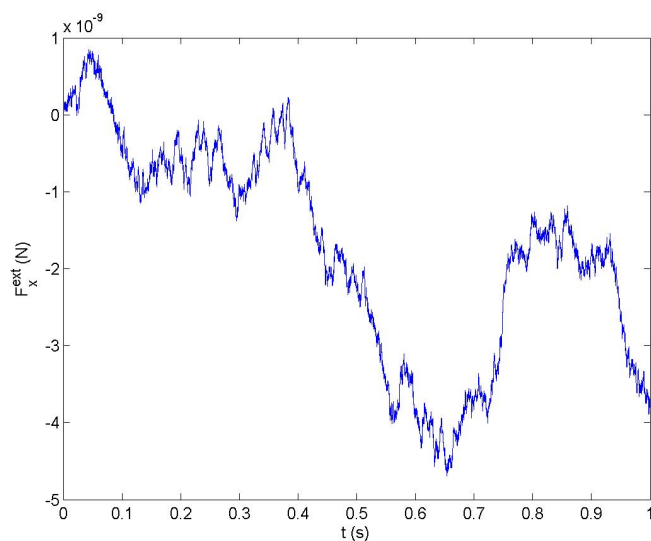


FIG. 5.4 – Force externe simulée à l'aide du modèle  $\dot{F}_x^{ext} = \underline{w}_F$  pour  $Q_F = 10^{-18} \text{ N}^2 \text{ s}$ .

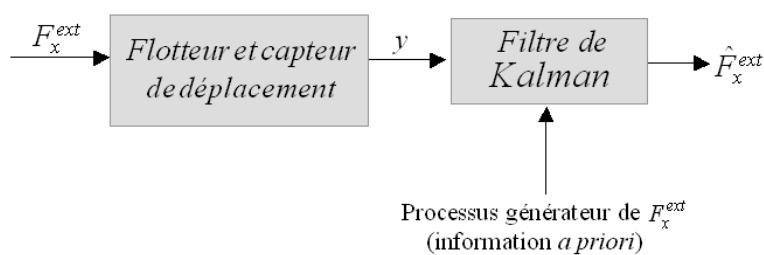


FIG. 5.5 – Estimation de  $F_x^{ext}$  par filtrage de *Kalman*.

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_K} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ F_x^{ext} \end{bmatrix}}_{X_K} + \underline{v}$$

Dans ce modèle, les bruits d'état sont générés par trois processus stochastiques blancs gaussiens centrés ( $\underline{w}_x$ ,  $\underline{w}_{\dot{x}}$  et  $\underline{w}_F$ ) dont les intensités (ou densité spectrale de puissance) sont ( $Q_x$ ,  $Q_{\dot{x}}$  et  $Q_F$ ). Le bruit de mesure est généré par la variable aléatoire  $\underline{v}$  dont l'intensité est  $R$ . Ce modèle va permettre d'estimer l'état étendu incluant  $F_x^{ext}$  par un filtrage de *Kalman* à partir de la mesure bruitée  $y$  ( $y=x+v$ ) du capteur de position (voir figure 5.5). Les bruits  $w$  et  $v$  sont indépendants et la paire  $(A_K, C_K)$  est observable.

Ainsi, tout le problème consiste à déterminer le gain  $K$  du filtre (5.2), de sorte que

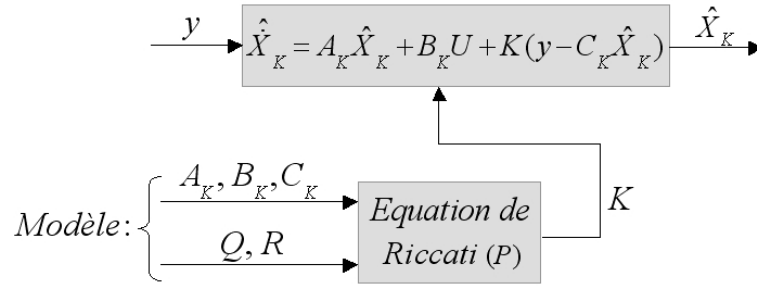


FIG. 5.6 – Organisation du filtre.

l'espérance de l'erreur d'estimation  $E[\hat{X}_K - X_K]$  conditionnée par les mesures  $y(t)$  tende vers zéro et que sa covariance  $P$  soit minimale.  $K$  est donné par la relation :

$$K = P \cdot C_K^T \cdot R^{-1} \quad (5.13)$$

avec  $P$  la solution symétrique positive de l'équation de *Riccati* (voir figure 5.6) :

$$A_K \cdot P + P \cdot A_K^T + Q - P \cdot C_K^T \cdot R^{-1} \cdot C_K \cdot P = 0 \quad (5.14)$$

et  $Q$  la matrice des densités spectrales et interspectrales de puissance du bruit d'état que nous avons choisi diagonale :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\dot{x}} & 0 \\ 0 & 0 & Q_F \end{bmatrix}$$

Ces bruits d'état  $w_x$  et  $w_{\dot{x}}$  traduisent le fait que les variables d'état réelles  $x$  et  $\dot{x}$  n'évoluent pas exactement comme le prédit le modèle dynamique identifié, à cause des incertitudes propres au système étudié. Ces incertitudes sont dues aux erreurs d'identification, de modélisation (simplification physique du modèle), aux entrées de perturbation aléatoires inconnues qui agissent sur l'état du flotteur. Les intensités  $Q_x$  et  $Q_{\dot{x}}$  sont sensées majorer à tout instant l'intensité effective du vrai état du flotteur (non mesurable). L'intensité  $Q_F$ , quant à elle, règle la dynamique de variation de  $F_x^{ext}$ . En pratique, la valeur de  $Q_F$  est inconnue. Fixer cette valeur revient donc à injecter de la connaissance a priori sur la force inconnue (voir figure 5.5). Faire des hypothèses a priori sur le signal d'entrée inconnue est, comme nous l'avons vu au chapitre 4, classique en déconvolution mais constitue aussi un talon d'achille redoutable. Dans notre cas de figure, il est donc indispensable d'avoir une bonne stratégie du choix de  $Q_F$ ...

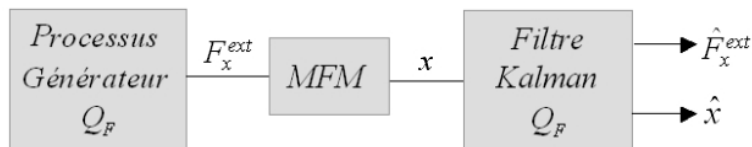


FIG. 5.7 – Simulation de la réponse du filtre à une force externe générée par le processus générateur de la figure 5.3.

## 5.2 Réglage et optimisation du filtre de *Kalman*

Dans cette section, nous allons illustrer par des simulations l'influence du choix des intensités ( $Q_x$ ,  $Q_{\dot{x}}$  et  $Q_F$ ) sur la qualité d'estimation du filtre.

Dans un premier temps, nous simulons les réponses du processus et du filtre à une force externe  $F_x^{ext}$  qui a une évolution brownienne et dont on connaît parfaitement le processus générateur 5.1, ce qui suppose que  $Q_F$  est connue. Dans un deuxième temps, on va voir ce qu'il se passe si on ne connaît pas  $Q_F$ .

### Cas où $Q_F$ est connu

La figure 5.8 donne la force réelle  $F_x^{ext}$  simulée à l'aide du processus générateur 5.1 ainsi que la force estimée  $\hat{F}_x^{ext}$ . La simulation correspond au schéma bloc de la figure 5.7. Le modèle du mécanisme de flottaison-magnétique *MFM*, utilisé pour cette simulation, est donnée par l'équation 5.1. Dans cette simulation, nous avons pris :

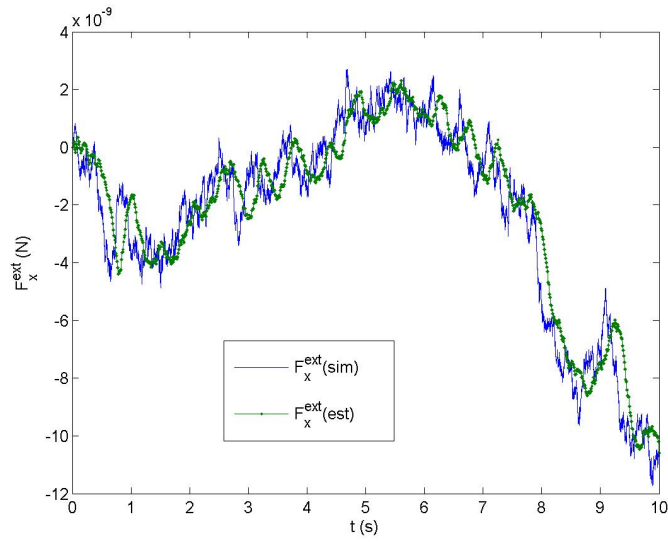
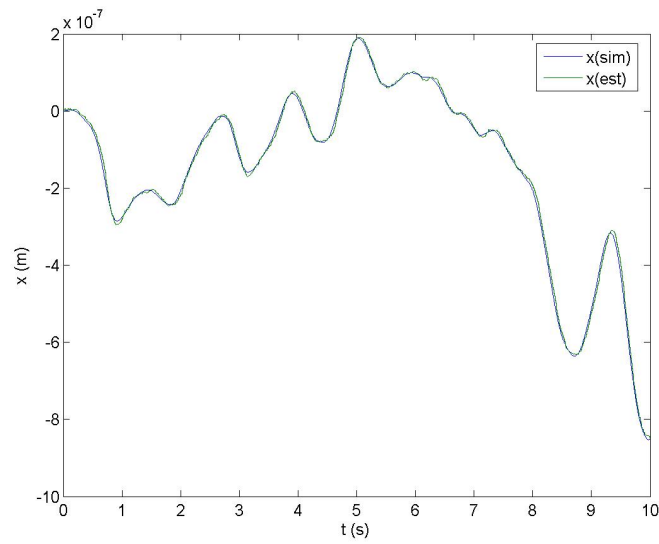
$$\begin{aligned} Q_F &= 10^{-18} N^2 s \\ Q_x &= Q_{\dot{x}} = 10^{-24} m^2 s \\ R &= 4 \times 10^{-18} m^2 s \end{aligned}$$

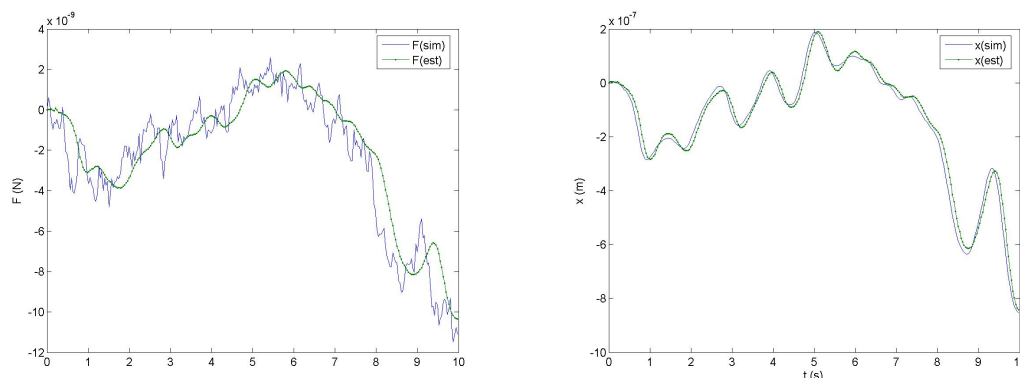
avec  $R$  l'intensité du bruit du capteur confocal de la société *STIL* utilisé pour cette simulation.

Sur cette figure, on remarque un retard dans l'estimation de  $\hat{F}_x^{ext}$  dû à la dynamique du filtre. Ce cas de figure supposant une connaissance parfaite de  $Q_F$  correspond à une estimation optimale  $\hat{F}_x^{ext}$  de  $F_x^{ext}$ . La figure 5.9, quant à elle, représente le déplacement simulé  $x$  et estimé  $\hat{x}$  du flotteur.

### Cas où $Q_F$ n'est pas connu

Si la force  $F_x^{ext}$  a une évolution brownienne mais qu'on ignore la vraie valeur de  $Q_F$ , on va en pratique soit la minorer, soit la majorer. Dans la suite nous appellerons  $Q_{\hat{F}}$  cette minoration ou cette majoration. Le cas  $Q_F = Q_{\hat{F}}$  de la figure 5.8

FIG. 5.8 – Force simulée et estimée avec  $Q_F$  connu.FIG. 5.9 – Déplacement simulé et estimé du flotteur avec  $Q_F$  connu.

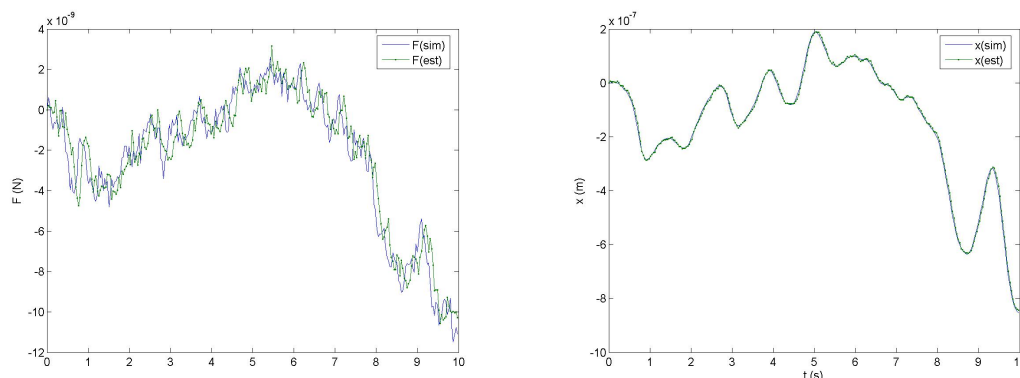
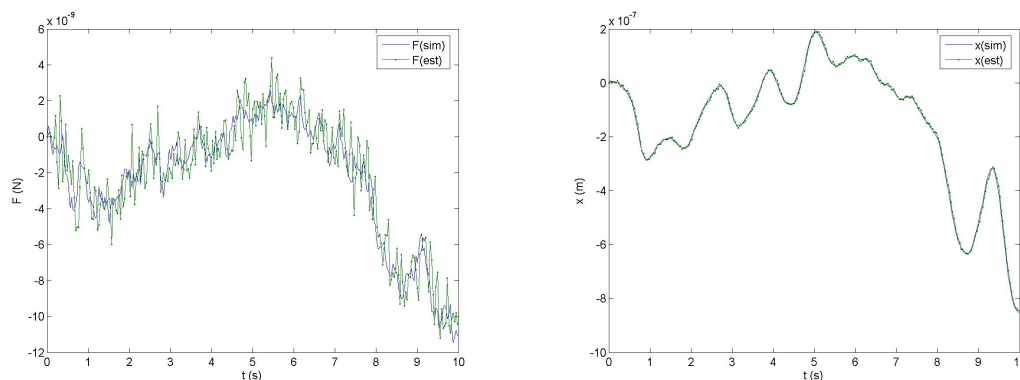
FIG. 5.10 – Réponse du filtre avec  $Q_{\hat{F}} = 0.01Q_F$ .

correspond au filtre optimal vis-à-vis de la minimisation de l'erreur d'estimation du vecteur d'état  $X_K$  défini sur l'équation (5.12). En majorant ou en minorant  $Q_F$ , les estimations deviennent sous-optimales par rapport au même critère et la variance finale de  $\hat{F}_x^{ext}$  (incluse dans  $\hat{X}_K$ ) dépend du niveau de majoration ou de minoration appliqué. De ce fait,  $Q_{\hat{F}}$  devient *un paramètre de synthèse* qui influe sur la qualité de l'estimation  $\hat{F}_x^{ext}$  de  $F_x^{ext}$ .

La figure 5.10 donne la réponse du filtre pour  $Q_{\hat{F}} = 0.01Q_F$ . Le processus générateur de  $F_x^{ext}$  a une intensité  $Q_F = 10^{-18}N^2s$ . Cette figure montre que dans le cas où  $Q_{\hat{F}} < Q_F$ , on a une perte d'information (lissage) sur le tracé de la force estimée  $\hat{F}_x^{ext}$ . Nous retrouvons le même phénomène en déconvolution par méthode de régularisation dans le cas d'un mauvais ajustement du coefficient de régularisation  $\mu$  qui lisse la solution.

En plus du phénomène de lissage, cette figure montre que le déplacement estimé  $\hat{x}$  suit mal le déplacement simulé  $x$ . Ceci vient du fait que si  $Q_{\hat{F}} \ll Q_F$  l'étape d'estimation accorde une confiance très importante dans la force estimée  $\hat{F}_x^{ext}$  (différente de  $F_x^{ext}$ ). Par conséquent, pendant l'étape de prédiction, cette estimation erronée de la force  $F_x^{ext}$  entraîne une mauvaise prédiction de  $x$  et  $\dot{x}$  qu'il va être plus difficile de recalculer. De ce fait, une stratégie de réglage de la valeur de  $Q_F$  consiste à monitorer les mesures bruitées  $y$ . Avec un bon choix de  $Q_{\hat{F}}$ ,  $\hat{x}$  doit suivre correctement la sortie  $y$  tout en la débruitant. Cette stratégie est d'autant plus simple à mettre en oeuvre que le bruit de sortie  $v$  est très faible. Dans ce cas, il suffit juste de vérifier que  $\hat{x}$  suit correctement la sortie  $y$  (bonne dynamique de poursuite)

La figure 5.11 donne la réponse du filtre pour  $Q_{\hat{F}} = 10Q_F$ . Cette figure montre une «bonne» qualité d'estimation due à un choix de l'intensité  $Q_{\hat{F}}$  qui reste acceptable. Le paragraphe suivant explique comment améliorer cette qualité.

FIG. 5.11 – Réponse du filtre avec  $Q_{\hat{F}} = 10Q_F$ .FIG. 5.12 – Réponse du filtre avec  $Q_{\hat{F}} = 100Q_F$ .

La figure 5.12 donne la réponse du filtre pour  $Q_{\hat{F}} = 100Q_F$ . Cette figure montre que dans le cas où  $Q_{\hat{F}} \gg Q_F$ , on a un mauvais rapport  $S/B$  sur l'estimation de la force qui devient très bruitée (les variations de  $\hat{F}_x^{ext}$  sont beaucoup plus importantes que celles du signal aléatoire  $F_x^{ext}$ ). Par contre, ce bruit ne se retrouve pas sur le déplacement estimé  $\hat{x}$  du fait du caractère *passé-bas* de la masse sismique dont le modèle va filtrer  $\hat{F}_x^{ext}$  pendant l'étape de prédiction. Pour régler  $Q_{\hat{F}}$  il faut donc abaisser sa valeur *tant que*  $\hat{x}$  suit correctement  $y$ . Si on revient sur l'exemple précédent, le choix  $Q_{\hat{F}} = 10Q_F$  peut donc être affiné en diminuant  $Q_{\hat{F}}$  tant que  $\hat{x}$  suit correctement  $y$ .

## Estimation d'une force constante

L'estimation d'une force constante correspond au cas où  $Q_F=0$ . De ce fait, tout  $Q_{\hat{F}} > 0$  est un majorant de  $Q_F$  et en fixant  $Q_{\hat{F}}$  on va jouer sur le rapport  $S/B$  de l'estimation de la force (voir analyse précédente) mais également sur la dynamique

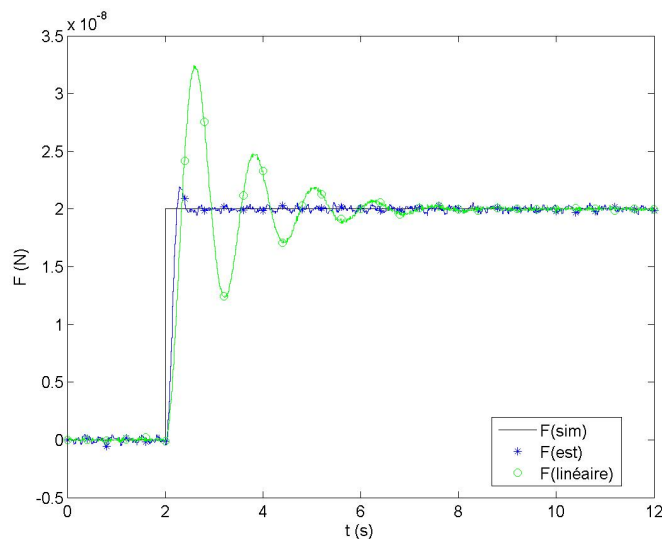


FIG. 5.13 – Force  $\hat{F}_x^{ext}(t)$  de  $20 \text{ nN}$  estimée par le filtre Kalman et force  $\hat{F}_x^{ext}(t)$  estimée à partir de la caractéristique statique du capteur force/déplacement.

d'établissement de  $\hat{F}_x^{ext}$  (et de  $\hat{x}$ ). Dans cette partie, nous allons illustrer par des simulations l'influence du choix de l'intensité  $Q_{\hat{F}}$  sur la qualité d'estimation du filtre.

La figure 5.13 donne un exemple d'estimation d'un échelon de force de  $20 \text{ nN}$  avec  $Q_{\hat{F}} = 2 \times 10^{-18} \text{ N}^2 \text{ s}$ ,  $Q_x = Q_{\dot{x}} = 10^{-24} \text{ m}^2 \text{ s}$  et  $R = 4 \times 10^{-18} \text{ m}^2 \text{ s}$ . Sur cette figure, on a superposé la courbe de la force externe  $F_x^{ext}$  estimée par le filtre *Kalman* ainsi que la courbe de la force externe calculée de manière simpliste à partir de la caractéristique statique force/déplacement du capteur, c'est-à-dire sans tenir compte de la dynamique de la masse sismique (flotteur dans le cas du *MMF*) :

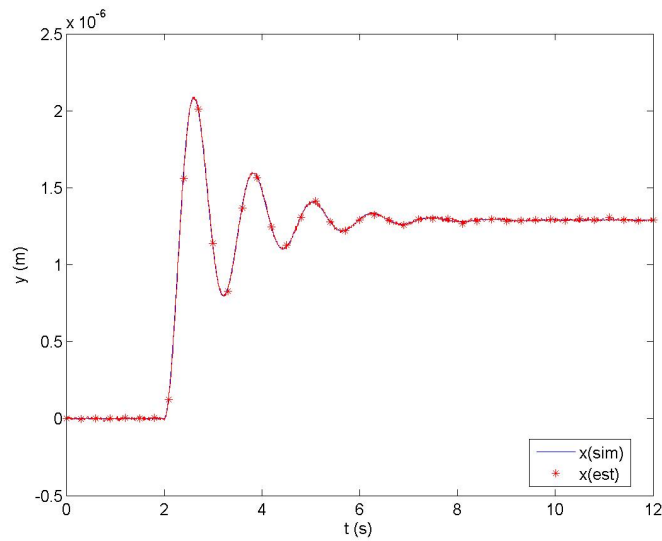
$$\hat{F}_x^{ext} = K_x^m \cdot x \quad (5.15)$$

$K_x^m$  est la raideur magnétique suivant  $x$  du flotteur. On constate qu'avec la relation (5.15), la dynamique oscillante  $y(t)$  (voir figure 5.14) de la masse sismique n'est pas déconvoluée et on retrouve cette dynamique oscillante sur le tracé de la force.

La figure 5.15 donne un exemple d'estimation d'un échelon de force de  $10 \text{ nN}$  avec  $Q_{\hat{F}} = 10^{-21} \text{ N}^2 \text{ s}$ ,  $Q_x = Q_{\dot{x}} = 10^{-24} \text{ m}^2 \text{ s}$  et  $R = 4 \times 10^{-18} \text{ m}^2 \text{ s}$ . Sur cette figure, on remarque une convergence assez lente du filtre mais un bon rejet du bruit.

La figure 5.16 donne un exemple de réponse qui minimise le temps de réponse en prenant une valeur  $Q_{\hat{F}}$  10 fois plus importante que pour l'exemple de la figure 5.15 ( $Q_{\hat{F}} = 10^{-20} \text{ N}^2 \text{ s}$ ,  $Q_x = Q_{\dot{x}} = 10^{-24} \text{ m}^2 \text{ s}$  et  $R = 4 \times 10^{-18} \text{ m}^2 \text{ s}$ ). On peut noter

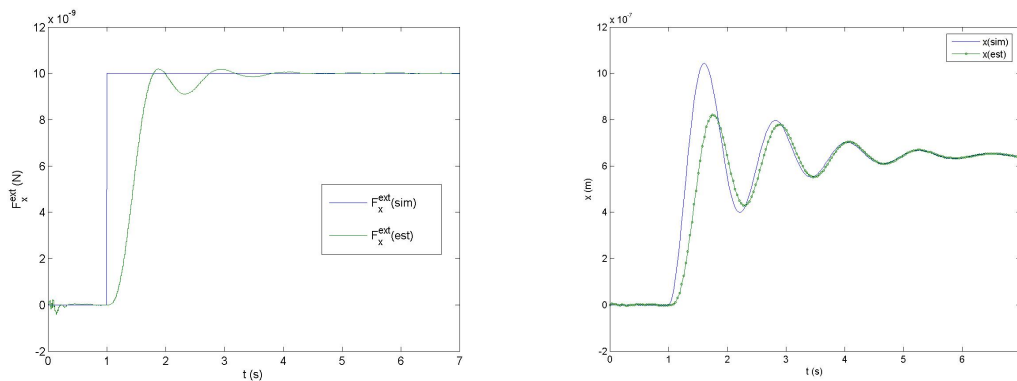


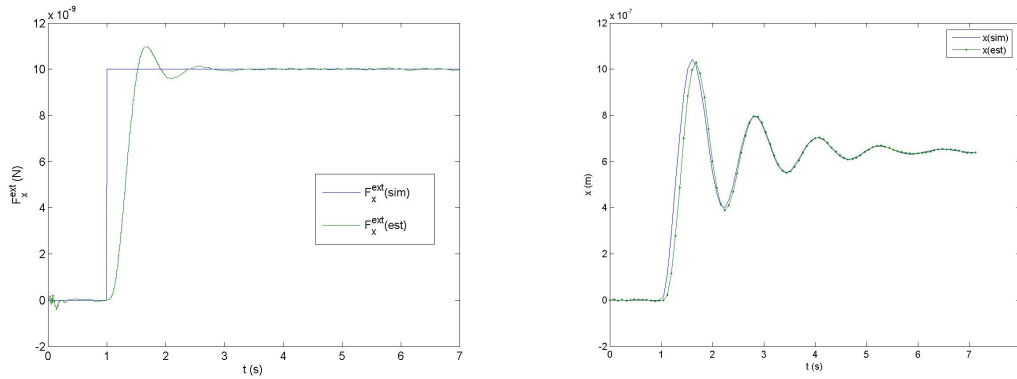
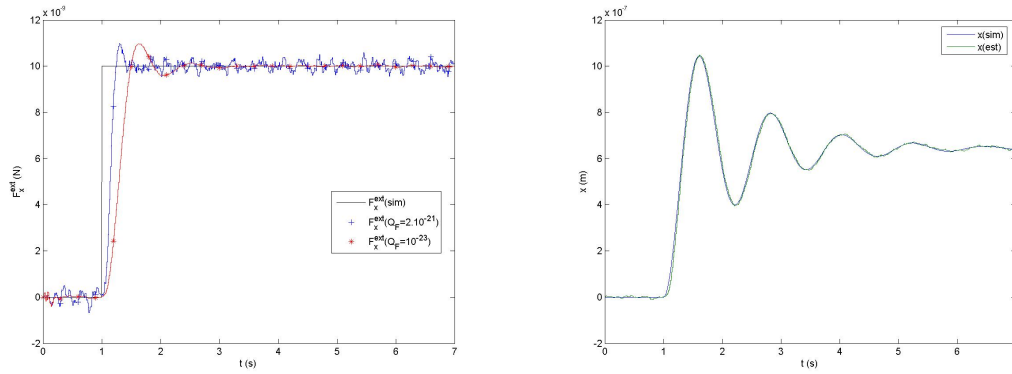
FIG. 5.14 – Réponse  $x(t)$  du flotteur simulée et estimée.

que le déplacement  $\hat{x}$  est bien plus vite correctement estimé avec cette nouvelle valeur de  $Q_{\hat{F}}$  : dès une seconde, l'estimation de  $\hat{x}$  est déjà correcte alors que la force n'est pas encore correctement estimée.

La figure 5.17 donne un exemple de l'estimation d'une force de  $10 \text{ nN}$  où on recherche en priorité un faible temps de réponse ( $tr=0.25s$ ) pour  $\hat{F}_x^{ext}$  tout en conservant une intensité la plus faible possible ( $Q_{\hat{F}} = 2 \times 10^{-18} N^2 s$ ) pour garder un rapport  $S/B$  acceptable.

D'après les simulations précédentes, choisir  $Q_{\hat{F}}$  revient à faire un compromis entre

FIG. 5.15 – Réponse du filtre à un échelon de force de  $10 \text{ nN}$ .

FIG. 5.16 – Influence de  $Q_{\hat{F}}$  sur la rapidité et la qualité de l'estimation.FIG. 5.17 – Influence de  $Q_{\hat{F}}$  sur la rapidité et la qualité de l'estimation.

précision de l'estimation et temps de réponse. En effet, une faible valeur de  $Q_{\hat{F}}$  détériore le temps de réponse mais améliore le rapport  $S/B$  de l'estimation. Alors qu'une grande valeur de  $Q_{\hat{F}}$  détériore le rapport  $S/B$  et améliore le temps de réponse de l'estimation.

## Processus générateur différent

Dans le cas où le processus générateur de la force  $F_x^{ext}$  est totalement différent de celui retenu dans le modèle (5.1), l'estimation  $\hat{F}_x^{ext}$  peut devenir biaisée : autrement dit, son espérance conditionnée par les mesures effectuées peut ne pas redonner  $F_x^{ext}$ .

La figure 5.18 montre la réponse du filtre à une force  $F_x^{ext}$  sous forme de rampe avec une pente de  $1nN$  par seconde. La simulation a été faite pour  $Q_{\hat{F}} = 2 \times 10^{-18} N^2 s$ ,  $Q_x = Q_{\dot{x}} = 10^{-24} m^2 s$  et  $R = 4 \times 10^{-18} m^2 s$ . Sur cette figure, on constate la

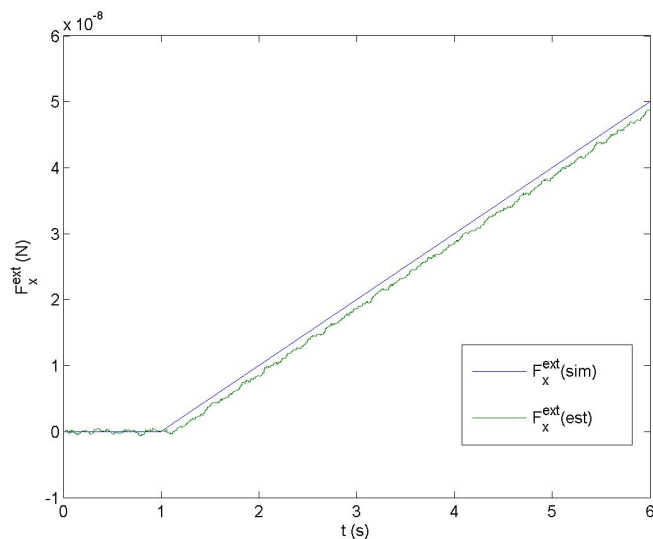


FIG. 5.18 – Présence d’une erreur de poursuite dans la force estimée.

présence d’une erreur de poursuite.

Pour supprimer l’erreur de poursuite lors de l’estimation de la force, il est nécessaire d’intégrer la dérivée  $\dot{F}_x^{ext}$  de  $F_x^{ext}$  dans le modèle d’état étendu. Le modèle stochastique de la force devient alors :

$$\ddot{\underline{F}}_x^{ext}(t) = \underline{w}(t) \quad (5.16)$$

et on obtient un état étendu de dimension 4 :

$$X_k = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ F_x^{ext} \\ \dot{F}_x^{ext} \end{bmatrix}$$

On a maintenant deux paramètres à ajuster qui sont  $Q_{\hat{F}}$  et  $Q_{\dot{\hat{F}}}$ . Ce modèle permet d’estimer correctement une force  $F_x^{ext}$  constante et une rampe de force qui sont des cas particuliers du modèle 5.16. Néanmoins, dans ce cas de figure, le filtre «peine» davantage pour trouver l’estimation car il doit estimer  $\dot{F}_x^{ext}$  en plus de  $F_x^{ext}$ . Nous verrons plus tard dans ce chapitre que l’erreur de poursuite, pour une rampe de force, s’annule automatiquement dans le cas des capteurs asservis.

## Estimation de profils de force déterministes

Dans cette partie, nous donnons un exemple d’estimation de profils de force déterministes comportant des forces constantes et des rampes avec différentes am-

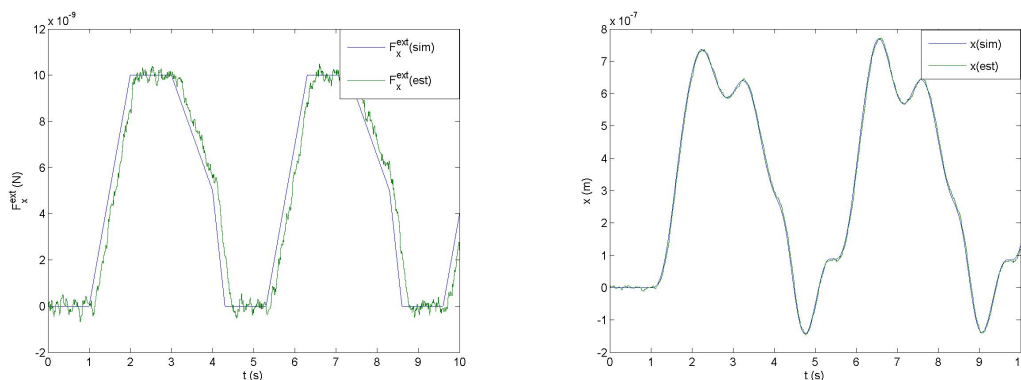


FIG. 5.19 – Estimation d'un profil déterministe de force avec une amplitude maximale de  $10 \text{ nN}$ .

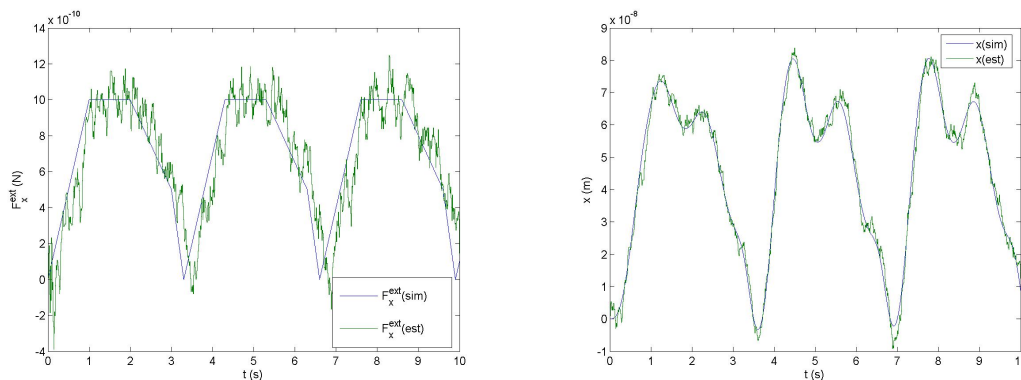


FIG. 5.20 – Estimation d'un profil déterministe de force avec une amplitude maximale de  $1 \text{ nN}$  ( $Q_{\hat{F}} = 3 \times 10^{-19} \text{ N}^2 \text{ s}$ ).

plitudes. La figure 5.19 correspond à l'estimation d'un profil déterministe dont l'amplitude maximale est de  $10 \text{ nN}$  avec  $Q_{\hat{F}} = 2 \times 10^{-18} \text{ N}^2 \text{ s}$ . Cette figure montre que le capteur de position de la société *STIL*, utilisé pour cette simulation, permet d'obtenir une qualité d'estimation intéressante concernant le temps de réponse et le rapport  $S/B$ .

La figure 5.20 correspond à l'estimation d'un profil déterministe dont l'amplitude maximale est de  $1 \text{ nN}$  avec  $Q_{\hat{F}} = 3 \times 10^{-19} \text{ N}^2 \text{ s}$ . Cette figure illustre un rapport  $S/B$  qui se dégrade. Pour améliorer la qualité d'estimation, nous avons simulé à nouveau le même profil déterministe d'amplitude maximale de  $1 \text{ nN}$  avec  $Q_{\hat{F}} = 2 \times 10^{-20} \text{ N}^2 \text{ s}$  (voir figure 5.21). On constate que le bruit sur  $\hat{F}_x^{ext}$  diminue au détriment du temps de réponse.

A ces échelles, le facteur limitant sera évidemment la maîtrise des conditions en-

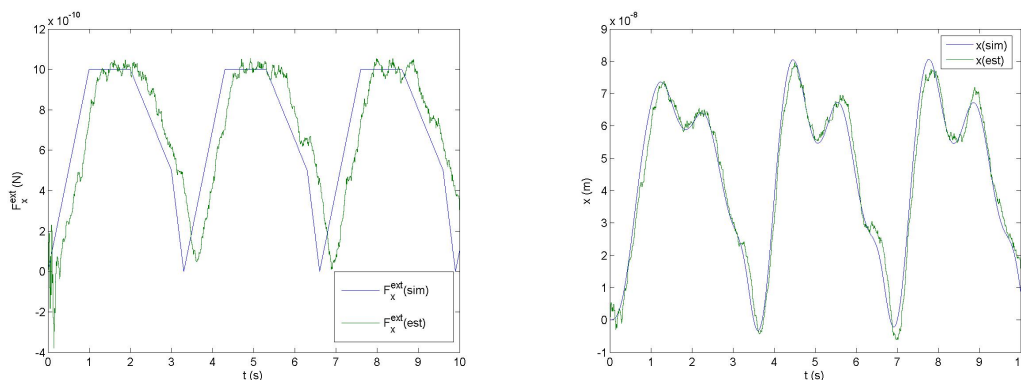


FIG. 5.21 – Estimation d'un profil déterministe de force avec une amplitude maximale de  $1 \text{ nN}$  ( $Q_{\hat{F}} = 2.10^{-20} \text{ N}^2 \text{ s}$ ).

vironnementales (vibrations, comportement du liquide, température, humidité,...) qui n'ont pas été simulées.

En conclusion, les simulations présentées précédemment illustrent que le filtrage de *Kalman* est une solution intéressante pour estimer une entrée inconnue (force externe  $F_x^{ext}$  dans notre cas) à condition de l'inclure dans un modèle d'état étendu obtenu en modélisant l'évolution de cette entrée inconnue et en l'introduisant dans le modèle d'état du système dynamique. Un compromis entre précision de l'estimation et temps de réponse apparaît en réglant le paramètre de synthèse  $Q_{\hat{F}}$ . Une méthode simple pour régler ce paramètre de synthèse consiste à analyser la qualité de l'estimation du déplacement  $\hat{x}$  du flotteur et à la comparer aux mesures  $y$ . Dans le cas d'un bon choix de  $Q_{\hat{F}}$ ,  $\hat{x}$  doit suivre «correctement»  $y$ .

La possibilité d'utiliser un état étendu incluant la force étant illustrée, nous allons maintenant développer ce type d'approche dans le cas d'un capteur actif grâce à la synthèse  $H_2$ .

### 5.3 Mesure de force : mode actif

En mode actif, l'objectif est de déterminer une loi de commande optimale permettant des mesures de force dans le plan  $(xOy)$  et de couple suivant  $\vec{z}$  sans déplacement de la plate-forme. Cette régulation se fera pour une consigne de déplacement et de rotation *nulle* qui correspond à la position d'équilibre stable de la plate-forme.

Comme pour la commande par placement de pôles naïf, présentée en détail au cours du chapitre 4, nous allons dans un premier temps nous intéresser à l'asservissement du mécanisme de flottaison-magnétique *MFM*, le but étant toujours de

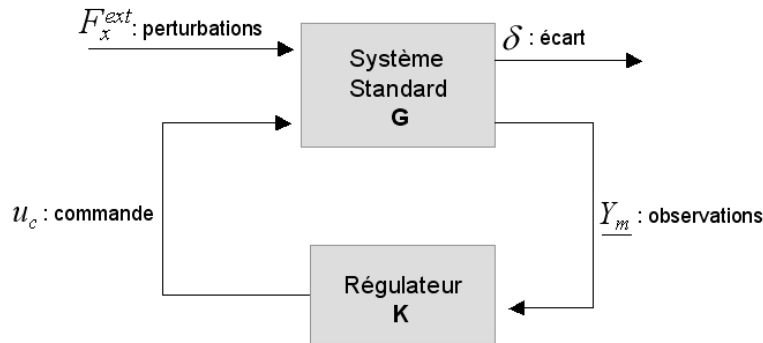


FIG. 5.22 – asservissement

valider expérimentalement la loi de commande développée par des mesures de force effectuées sur le prototype expérimental. Nous suivrons ensuite la même démarche pour l'asservissement en position de la plate-forme.

Le mécanisme de flottaison-magnétique  $MFM$ , en mode actif, est un système à deux entrées et une sortie. Les entrées sont le courant  $i$  dans les bobines de commande  $b$  et la composante  $F_x^{ext}$  de la force externe appliquée au flotteur suivant  $x$  et considérée comme perturbation. La sortie est la position  $x$  du flotteur mesurée à l'aide d'un capteur de distance qui ajoute un bruit de mesure pour fournir des valeurs  $y$ .

Nous souhaitons que la sortie  $x$  du système soit régulée sur une consigne ( $y_c$ ) correspondant à la position d'équilibre stable du flotteur tout en respectant certains critères.

La synthèse de la loi de commande doit permettre d'arbitrer entre plusieurs exigences :

- performances dynamiques ;
- performances statiques ;
- faible sollicitation de la commande, faible sensibilité aux bruits de mesure (pour limiter l'énergie requise et donc le coût associé) ;
- robustesse.

Une loi de commande qui répond notamment aux exigences qu'on vient de citer et qui a été retenue est la commande robuste par synthèse  $H_2$ .

## 5.4 Commande par synthèse $H_2$

Tout asservissement peut se mettre sous la forme standard de la figure 5.22. Le système standard  $G$ , bouclé par le régulateur  $K$ , engendre un système ayant

pour entrée la perturbation  $F^{ext}$  et pour sortie l'écart  $\delta$  se définissant naturellement comme la différence entre la consigne  $y_c$  et la grandeur à piloter  $Y$ . Le problème standard se traduit alors par la recherche du régulateur  $K$  qui minimise le transfert  $H$  de  $F^{ext}$  vers  $\delta$  de manière à ce que  $\delta$  tende vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. L'entrée  $F^{ext}$  représente, dans le cas du mécanisme de flottaison-magnétique (*MFM*), la force externe appliquée au flotteur (suivant  $\bar{x}$ ) qui tend à le déplacer de sa position d'équilibre stable. Par ailleurs, cette entrée peut aussi comporter des signaux irréductibles qui sont supposés être à l'origine des bruits, consignes et perturbations diverses intervenant sur le procédé à piloter. Le vecteur des observations  $\underline{Y}_m$ , quant à lui, regroupe tous les signaux d'entrée du régulateur. Il inclut non seulement la mesure des grandeurs à piloter, mais encore les mesures annexes disponibles sur le procédé, les mesures éventuelles des perturbations et également les signaux de consignes.

Dans le cadre de la commande par synthèse  $H_2$ , on cherche à établir une loi de commande par retour d'état qui minimise un critère quadratique [59] [60] [61] (critère de compromis entre l'énergie de commande et la vitesse de rejet de perturbation) du type suivant :

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{X}^T(t) \cdot Q \cdot \underline{X}(t) + \underline{u}^T(t) \cdot R \cdot \underline{u}(t)) dt \quad (5.17)$$

$Q$  est une matrice symétrique définie non négative telle que :  $\underline{X}^T(t) \cdot Q \cdot \underline{X}(t) \geq 0 \forall \underline{X}(t)$ .  $R$  est une matrice symétrique définie positive telle que :  $\underline{u}^T(t) \cdot R \cdot \underline{u}(t) > 0$ , si  $\underline{u}(t) \neq 0$ . C'est la matrice de pondération de la commande. On peut ainsi affecter un poids différent à chaque composante du vecteur de commande. Dans le cas du *MFM*, il s'agit d'une seule composante, le courant  $i$  dans les bobines de commande  $b$ .

#### 5.4.1 Elaboration du modèle standard

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'élaboration de la représentation d'état du système standard  $G$  pour la commande en position du flotteur, en suivant la démarche générique exposée dans [59].

La représentation d'état du *MFM* à commander est la suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{X}}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_x}{m} & -\frac{k_v}{m} \end{bmatrix}}_{A_{11}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\underline{X}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_e}{m} \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{[i]}_{u_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{G_1} [F_x^{ext}] \quad (5.18)$$

$$y = \underbrace{[1 \ 0]}_{C_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\underline{X}_1} \quad (5.19)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}}_1 = A_{11} \cdot \underline{X}_1 + B_1 \cdot u_c + G_1 \cdot F_x^{ext} \\ \underline{Y}_1 = C_1 \cdot \underline{X}_1 \end{cases} \quad (5.20)$$

Dans cette représentation, les bruits d'état  $\alpha$  et de mesure  $\beta$  sont supposés être nuls.

L'élaboration d'un modèle standard consiste à modéliser les perturbations, les bruits ainsi que les consignes intervenants sur le procédé et à introduire ces derniers dans le modèle d'état du procédé afin d'obtenir un modèle étendu.

L'évolution des perturbations et des consignes peut être modélisée par des équations différentielles, auxquelles on peut donc associer un modèle d'état. Pour cela, on élabore un vecteur  $\underline{X}_2$  que l'on nomme vecteur de perturbation, dans lequel on modélise notre consigne ( $y_c$ ) et notre perturbation ( $F_x^{ext}$ ). La consigne et la perturbation seront représentées dans le vecteur  $\underline{X}_2$  par leur amplitude et leur dérivée, D'où :

$$\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} y_c \\ \dot{y}_c \\ F_x^{ext} \\ \dot{F}_x^{ext} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Dans notre cas, la consigne est nulle ( $y_c = 0$ ) et la perturbation  $F_x^{ext}$  est supposée avoir une faible dynamique. Ainsi, par simplification, nous avons supposé leurs dérivées nulles ( $\dot{F}_x^{ext} = 0$  et  $\dot{y}_c = 0$ ). La représentation du vecteur  $\underline{X}_2$  est alors la suivante :

$$\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} y_c \\ F_x^{ext} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Par concaténation, on réunit les équations du procédé (5.18), (5.1) et le vecteur  $\underline{X}_2$  représentant la consigne  $y_c$  et la perturbation  $F_x^{ext}$ . Il en résulte un système dont l'entrée est  $u_c$  et la sortie est  $y$ ,  $y_c$  et  $(y - y_c)$ . Ce système aura la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{X}_1}{dt} = A_{11} \cdot \underline{X}_1 + A_{12} \cdot \underline{X}_2 + B_1 \cdot u_c \\ \underline{Y}_m = \begin{bmatrix} y \\ y_c \end{bmatrix} = C_{1m} \cdot \underline{X}_1 + C_{2m} \cdot \underline{X}_2 \\ \delta = [y_c - y] = D_1 \cdot \underline{X}_1 + D_2 \cdot \underline{X}_2 \end{cases} \quad (5.23)$$

On retrouve le fait que  $\underline{Y}_m$  comprend les consignes et on a :



$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} & C_{1m} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C_{2m} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & D_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \\ D_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cette décomposition va permettre dans la suite de rejeter l'effet qu'a  $\underline{X}_2$  (qui comprend  $F_x^{ext}$ ) sur  $\delta$  et sur  $\underline{X}_1$ , effet propagé par les matrices  $A_{12}$  et  $D_2$ .

Ce modèle standard  $G$  (5.23) s'écrit encore :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{X}_i}{dt} = A_i \cdot \underline{X}_i + B_i \cdot u_c \\ \underline{Y}_i = C_i \cdot \underline{X}_i \end{cases} \quad (5.24)$$

avec  $\underline{X}_i$  l'état étendu qui vaut :

$$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y_c \\ F_x^{ext} \end{bmatrix}$$

On retrouve ici le fait que la force est incluse dans l'état étendu  $\underline{X}_i$  comme c'était le cas pour le capteur passif.

On a alors :

$$\underline{Y}_i = \begin{bmatrix} \frac{Y_m}{\delta} \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_i = \begin{bmatrix} C_{1m} & C_{2m} \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

La paire  $(A_i, C_i)$  du modèle standard est entièrement observable.

### 5.4.2 Détermination d'un reconstituteur d'état

Comme la synthèse  $H_2$  est basée sur une commande par retour d'état minimisant un critère quadratique, la détermination d'un reconstituteur d'état (voir figure 5.23) apparaît indispensable dans la mesure où les composantes du vecteur d'état étendu  $\underline{X}_i$  sont généralement inaccessibles à la mesure. Parmi ces composantes inaccessibles on trouve la vitesse du flotteur  $\dot{x}$  ainsi que la perturbation  $F_x^{ext}$  que nous cherchons à estimer.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la reconstruction de l'état  $\underline{X}_i$  à partir de la mesure de  $\underline{Y}_m$ . Pour simplifier la tâche, nous allons extraire un sous-modèle  $W$  observable du modèle standard  $G$  sans tenir compte de  $\delta$  qui n'intervient pas dans l'élaboration du reconstituteur. Ce sous-modèle  $W$  aura comme entrée la

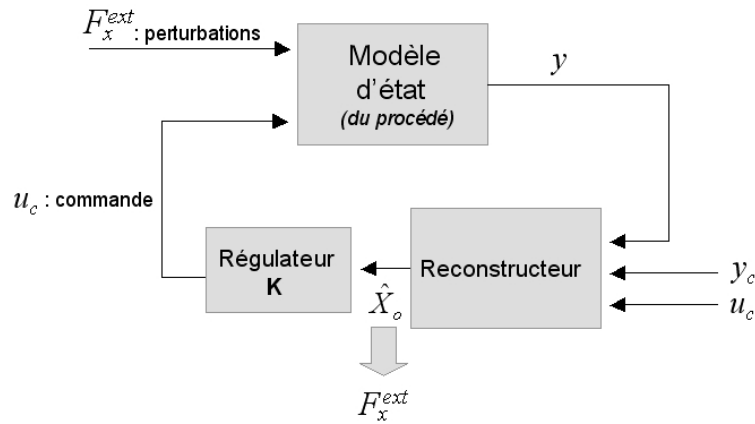


FIG. 5.23 – Loi de commande finale

commande  $u_c$  et comme sortie  $\underline{Y}_m$  qui regroupe la sortie  $y$  à piloter et la consigne  $y_c$ .  $W$  est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{X}_o}{dt} = A_o \cdot \underline{X}_o + B_o \cdot u_c \\ \underline{Y}_m = C_o \cdot \underline{X}_o \end{cases} \quad (5.25)$$

avec  $X_o = X_i$  et  $C_o = [C_{1m} C_{2m}]$

A ce stade, il est nécessaire de faire apparaître les bruits dans notre sous-modèle  $W$ , afin que l'observateur en tienne compte. On a donc en fait :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{X}_o}{dt} = A_o \cdot \underline{X}_o + B_o \cdot u_c + \alpha \\ \underline{Y}_m = C_o \cdot \underline{X}_o + \beta \end{cases} \quad (5.26)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les vecteurs des bruits d'état et d'observation.

Comme pour le capteur de force passif vu en première partie du chapitre, la reconstruction de l'état  $X_o$  se fait à l'aide d'un filtre de Kalman stationnaire défini par son modèle :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}_o}{dt} &= A_o \cdot \hat{X}_o + B_o \cdot u_c + K_o(Y_m - C_o \cdot \hat{X}_o) \\ &= (A_o - K_o \cdot C_o) \cdot \hat{X}_o + B_o \cdot u_c + K_o \cdot Y_m \end{aligned} \quad (5.27)$$

avec  $K_o$  le gain du reconstructeur.

Il s'agit de calculer un filtre stationnaire (gain  $K_o$  constant), pour reconstruire de manière optimale l'état du processus linéaire invariant (matrices  $A_o, B_o, C_o$  invariantes). Si les bruits  $\alpha$  et  $\beta$  sont des processus stochastiques supposés blancs gaussiens centrés et de matrice d'intensité  $Q_o$  et  $R_o$ , également invariantes, cette reconstruction est possible par minimisation de la variance engendrée par les bruits d'état et de mesure  $\alpha$  et  $\beta$ . Cette minimisation peut être obtenue par la minimisation du critère quadratique suivant :

$$J_o = \int_0^{\infty} (\underline{X}_o^T \cdot Q_o \cdot \underline{X}_o + R_o \cdot u_c^2) dt \quad (5.28)$$

La démarche pour obtenir  $K_o$  est alors la suivante : on constate dans un premier temps que la matrice  $(A_o - K_o \cdot C_o)$  de l'équation (5.27) possède les mêmes valeurs propres que sa transposée  $(A_o^T - C_o^T \cdot K_o^T)$ . Or on peut montrer que cette dernière matrice est celle que l'on obtient en réalisant une commande par retour d'état  $u_c = -K_o^T \cdot \underline{X}_o$  sur le système dual défini par :

$$\frac{d\underline{X}_o}{dt} = A_o^T \cdot \underline{X}_o + C_o^T \cdot u_c \quad (5.29)$$

On va donc rechercher la commande par retour d'état  $u_c$  agissant sur le modèle dual par minimisation du critère quadratique  $J_o$  de l'équation (5.28).

On sait alors que la matrice de gain  $K_o^T$  qui en résulte est la suivante [59] :

$$K_o^T = P_o \cdot C_o^T \cdot R_o^{-1} \quad (5.30)$$

où  $P_o$  est l'unique solution symétrique positive d'une équation matricielle du second ordre, dite équation de Riccati :

$$A_o \cdot P_o + P_o \cdot A_o^T + Q_o - P_o \cdot C_o^T \cdot R_o^{-1} \cdot C_o \cdot P_o = 0 \quad (5.31)$$

### Choix de $Q_o$ et $R_o$

Dans le cas du *MF*, l'intensité  $R_o$  du bruit de mesure est estimable (il suffit de faire une campagne de mesure sur un déflecteur fixe). Par contre  $Q_o$  qui est associée au bruit d'état est difficilement estimable et rien ne prouve que le bruit associé soit véritablement blanc et gaussien. Plutôt que de rechercher  $K_o$  qui minimise la variance de l'erreur d'estimation de  $\underline{X}_o$  sous l'hypothèse de bruit gaussien parfaitement caractérisé ( $Q_o$  et  $R_o$  connues), l'idée retenue dans [60] est de considérer les matrices  $Q_o$  et  $R_o$  comme des matrices de pondération agissant sur la matrice de gain  $K_o$ . Cette hypothèse est vraie dans le cas où le reconstruteur possède une certaine robustesse vis-à-vis des incertitudes modélisées par le bruit d'état.

Dans le contexte d'une optimisation  $H_2$ ,  $Q_o$  et  $R_o$  deviennent des paramètres de synthèse et deux options sont alors possibles : soit le concepteur choisit librement les intensités  $Q_o$  et  $R_o$  affectées à  $\alpha$  et  $\beta$ , soit il déduit  $Q_o$  et  $R_o$  de paramètres de synthèse de plus haut niveau (par exemple un horizon de filtrage  $T_o$  spécifié). Pour élaborer ce paramètre de haut niveau, De Larminat propose d'utiliser un «grammien partiel d'observabilité» défini comme suit :

$$H_o(T_o) = \int_0^{T_o} \exp(A_o^T \cdot t) \cdot C_o^T \cdot C_o \cdot \exp(A_o \cdot t) \cdot dt \quad (5.32)$$

avec  $T_o$  l'horizon de filtrage.

La paire  $(A_o, C_o)$  est entièrement observable. De ce fait,  $H_o(T_o)$  est une matrice symétrique positive, et il est possible de choisir [60] :

$$R_o = I \quad (5.33)$$

$$Q_o = T_o H_o(T_o) \quad (5.34)$$

avec  $I$  la matrice d'identité.

$R_o$  étant normalisée, cette approche offre donc la possibilité de modifier les composantes de la matrice  $Q_o$  en modifiant simplement le scalaire  $T_o$ .

## 5.5 Asservissement en position du *MF*

Une fois que l'estimation des variables d'état du système est faite, il reste à spécifier l'asservissement en position du flotteur suivant  $x$ . On poursuit la synthèse en appliquant le principe de séparation, qui conduit à annuler les bruits  $\alpha$  et  $\beta$  et à évaluer  $\hat{X}_o$  et  $X_o$ .

Le modèle standard élaboré n'est pas commandable du fait des perturbations (entrées inconnues) prises en compte dans le vecteur d'état étendu  $X_i$ . Dans cette partie, nous allons nous intéresser dans un premier temps à la décomposition de notre modèle standard sous la forme canonique de la commandabilité dans le but de rejeter les états non commandables. Ensuite, après avoir rejeté l'effet des modes non commandables, on élaborera la commande finale pour le système dynamique. Rappelons que le rôle de la commande n'est pas seulement de stabiliser le processus proprement dit (paire  $A_{11}, B_1$ ), mais aussi de rejeter l'effet qu'a  $X_2$  (et donc l'effet qu'a  $F_x^{ext}$ ) sur  $\delta$  et sur  $X_1$ , effet propagé par les matrices  $A_{12}$  et  $D_2$  dans (5.23).

### 5.5.1 Décomposition selon la commandabilité

Dans un premier temps, on détermine une nouvelle transformation  $T_{co}$  qui réalise la décomposition canonique du vecteur d'état  $X_0$  en deux parties, une commandable notée  $X_c$  et l'autre non commandable notée  $X_{nc}$  :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_c \\ \underline{X}_{nc} \end{bmatrix} = T_{co} \cdot \underline{X}_o \quad (5.35)$$

Il se trouve que la décomposition canonique selon la commandabilité est déjà réalisée avec la forme initiale du modèle standard, avec  $\underline{X}_1 = \underline{X}_c$  la partie commandable par  $u_c$  du vecteur d'état  $\underline{X}_o$  et  $\underline{X}_2 = \underline{X}_{nc}$  la partie non commandable par  $u_c$ . Cette partie non commandable est généralement instable. On a donc :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_c \\ \underline{X}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} = \underline{X}_o \quad (5.36)$$

### 5.5.2 Rejet asymptotique de la partie non commandable

Pour l'instant le problème se réduit à celui de la recherche d'un gain de retour d'état qui assure la convergence de  $\delta$  vers zéro en dépit de  $\underline{X}_2$  qui est non commandable.

Présupposons que la commande  $u_c$  s'écrive :

$$u_c = \nu + u_a \quad (5.37)$$

où  $\nu$  est la commande de la partie commandable  $\underline{X}_c$  du vecteur d'état  $\underline{X}_o$  et  $u_a$  la commande asymptotique, destinée à compenser les effets de  $\underline{X}_2 = \underline{X}_{nc}$  sur  $\delta$ , pour laquelle on postule la forme suivante :

$$u_a = -G_a \underline{X}_{nc} \quad (5.38)$$

Introduisons une transformation de la forme générale :

$$\begin{cases} \tilde{\underline{X}}_c = \underline{X}_c + T_a \underline{X}_{nc} \\ \tilde{\underline{X}}_{nc} = \underline{X}_{nc} \end{cases} \quad (5.39)$$

En substituant (5.37), (5.38) et (5.39) dans le modèle standard (5.23), on obtient le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\underline{X}}}_c = A_{11} \tilde{\underline{X}}_c + [-A_{11}T_a - B_1G_a + A_{12}] \tilde{\underline{X}}_{nc} + B_1\nu \\ \dot{\tilde{\underline{X}}}_{nc} = D_1 \tilde{\underline{X}}_c + [D_2 - D_1T_a] \tilde{\underline{X}}_{nc} \end{cases} \quad (5.40)$$

Pour compenser les effets qu'a la partie non commandable  $\underline{X}_2 = \underline{X}_{nc}$  sur  $\delta$  et sur  $\underline{X}_1 = \underline{X}_c$ , il suffit d'annuler les termes entre crochets des équations ci dessus. Pour cela,  $T_a$  et  $G_a$  devront donc satisfaire simultanément les équations linéaires suivantes (voir (5.40)) :

$$\begin{cases} A_{12} = A_{11}T_a + B_1G_a \\ D_2 = D_1T_a \end{cases} \quad (5.41)$$

Les équations (5.40) deviennent alors :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}_c = A_{11}\tilde{X}_c + B_1\nu \\ \delta = D_1\tilde{X}_c \end{cases} \quad (5.42)$$

où la paire  $A_{11}, B_1$  est commandable, et où il existe donc génériquement une commande par retour d'état de la forme suivante :

$$\nu = -K_c\tilde{X}_c \quad (5.43)$$

avec  $K_c$  le gain de retour.

Celle-ci engendrera  $\tilde{X}_c \rightarrow 0$ , en choisissant  $K_c$  de manière à que la matrice  $(A_{11} - B_1 \cdot K_c)$  aie des valeurs propres  $< 1$ , d'où :

$$\begin{aligned} \delta &= D_1\tilde{X}_c \rightarrow 0 \\ \nu &= -K_c\tilde{X}_c \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La détermination de  $K_c$  se fait par minimisation du critère quadratique  $J_c$  qui pénalise  $\tilde{X}_c$  et  $\nu$  :

$$J_c = \int_0^\infty (\tilde{X}_c^T(t) \cdot Q_c \cdot \tilde{X}_c(t) + R_c \cdot \nu^2(t)) dt \quad (5.44)$$

La matrice de gain  $K_c$  qui en résulte est la suivante :

$$K_c = R_c^{-1} \cdot B_1^T \cdot P_c \quad (5.45)$$

où  $P_c$  est l'unique solution symétrique positive d'une équation matricielle du second ordre, dite équation de Riccati :

$$A_{11}^T \cdot P_c + P_c \cdot A_{11} + Q_c - P_c \cdot B_1 \cdot R_c^{-1} \cdot B_1^T \cdot P_c = 0 \quad (5.46)$$

$Q_c$  et  $R_c$  sont des paramètres de synthèse.

On revient maintenant aux variables  $u_c, \underline{X}_1$  et  $\underline{X}_2$  (5.37). La commande s'écrit :

$$\begin{aligned} u_c &= \nu + u_a \\ &= -K_c\tilde{X}_c - G_a\tilde{X}_{nc} \\ &= -K_c(\underline{X}_1 + T_a\underline{X}_2) - G_a\underline{X}_2 \\ &= -K_c\underline{X}_1 - [K_cT_a + G_a]\underline{X}_2 \\ &= -[K_c, (K_c \cdot T_a + G_a)] \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

or d'après (5.36) on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}_c \\ \underline{X}_{nc} \end{bmatrix} = \underline{X}_o$$

et par conséquent la loi de commande par retour d'état reconstruit aura pour expression (principe de séparation) :

$$u_c = -G \cdot \underline{X}_o = -G \cdot \hat{\underline{X}}_o \quad (5.47)$$

avec :

$$G = -[K_c, (K_c \cdot T_a + G_a)] \quad (5.48)$$

En tenant compte de l'équation (5.27) du restructeur d'état, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\underline{X}}_o}{dt} &= [A_o - K_o \cdot C_o] \cdot \hat{\underline{X}}_o + B_o \cdot u_c + K_o \cdot \underline{Y}_m \\ &= [A_o - K_o \cdot C_o] \cdot \hat{\underline{X}}_o - B_o \cdot G \cdot \hat{\underline{X}}_o + K_o \cdot \underline{Y}_m \\ &= [A_o - B_o \cdot G - K_o \cdot C_o] \cdot \hat{\underline{X}}_o + K_o \cdot \underline{Y}_m \end{aligned}$$

Par conséquent la matrice d'état  $[A_o - B_o \cdot G - K_o \cdot C_o]$  est la matrice qui définit la dynamique globale du système bouclé.

Il apparaît ainsi clairement que la dynamique du procédé bouclé dépendra du choix des matrices  $K_o$  et  $K_c$  ( $K_c$  intervient dans le calcul de la matrice  $G$  d'après l'équation (5.48)). Par conséquent avec les équations (5.30) et (5.45), cette dynamique dépendra du choix des matrices de pondération  $Q_o$ ,  $R_o$ ,  $Q_c$  et  $R_c$ .

### Détermination de $Q_c$ et $R_c$

En vue d'ajuster la pondération des matrices  $Q_c$  et  $R_c$  du critère quadratique  $J_c$ , on peut définir un scalaire positif  $h_c$  et un horizon de commande positif  $T_c$  tels que [60] :

$$T_c = T_o/h_c \quad (5.49)$$

Pour ajuster facilement la matrice  $R_c$ , on peut alors utiliser un «grammien partiel de commandabilité» défini comme suit :

$$H_c(T_c) = \int_0^{T_c} \exp(A_{11}^T \cdot t) \cdot D_1^T \cdot D_1 \cdot \exp(A_{11} \cdot t) \cdot dt \quad (5.50)$$

Il est ensuite possible de choisir [60] :

$$R_c = T_c \cdot B_1^T \cdot H_c(T_c) \cdot B_1 \quad (5.51)$$

$$Q_c = D_1^T \cdot D_1 \quad (5.52)$$

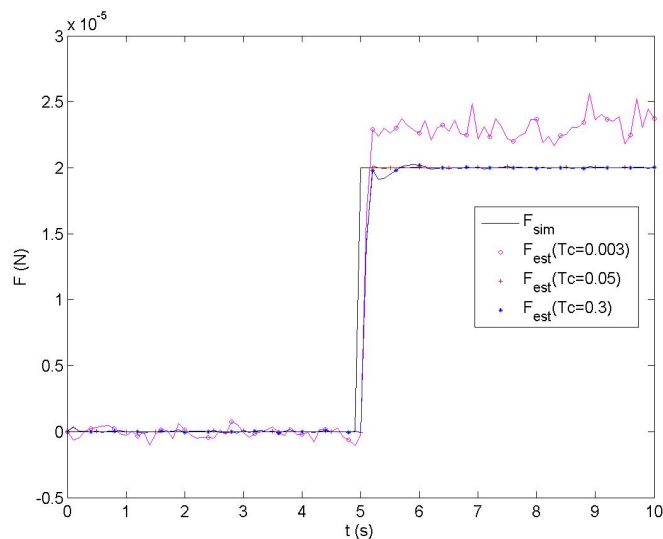
## 5.6 Influence du choix de $T_c$ et $T_o$ sur les performances du système

Il est clair que le réglage des paramètres  $T_o$ ,  $T_c$  et  $h_c$ , intervenant dans le calcul des matrices  $K_o$  and  $K_c$ , aura des incidences sur les performances du système. La démarche de réglage proposée dans [60] est la suivante : une première étape consiste à attribuer une valeur fixe à  $h_c$  (5 est souvent une bonne valeur de départ) avec  $T_c = \frac{1}{\lambda_2}$ ,  $\lambda_2$  étant le module du deuxième pôle du transfert en boucle ouverte, en partant du mode le plus lent.  $T_o$  est calculé à partir de  $T_c$  et  $h_c$  via l'équation (5.49). Il faut ensuite que le concepteur varie  $T_c$  et  $T_o$  dans de très larges proportions à partir de ce choix initial. L'objectif est de trouver  $T_o$  et  $T_c$  qui donnent des «bonnes» performances concernant le temps de réponse et le rapport  $S/B$ .

Pour illustrer l'influence de  $T_o$  et  $T_c$  sur les performances d'estimation et de poursuite de consigne, nous avons simulé la réponse du système à un échelon de force de  $20\mu N$  appliqué à l'instant  $t = 5s$ . La simulation a été faite avec le modèle (5.18) du *MFM* et pour différentes valeurs de  $T_o$ . La valeur de  $T_c$  a été fixée à 0,05. Sur la figure 5.28, on a superposé les courbes de la force  $F_x^{ext}$  estimée pour les différentes valeurs de  $T_o$ . La figure 5.29 représente le déplacement du flotteur, suite à l'application de l'échelon de force  $F_x^{ext}$  et pour les différentes valeurs de  $T_o$ . D'après la figure 5.28, on remarque que plus on diminue l'horizon d'observation  $T_o$ , plus la dynamique de l'estimateur est rapide et plus il est sensible aux bruit attachants les mesures. En conclusion, le concepteur devra régler  $T_o$  en fonction de l'échelle de force visée. En effet, lorsqu'il s'agit de forces à «grande» amplitude (quelques  $\mu N$ ), le concepteur à intérêt a choisir un petit  $T_o$  pour se retrouver avec un estimateur à dynamique rapide avec des bonnes performances en poursuite tout en tolérant une estimation faiblement bruitée. Alors que, lorsqu'il s'agit des forces à faible amplitude (quelques  $nN$ ), le concepteur à intérêt a choisir un grand  $T_o$  afin d'augmenter le rapport *signal/bruit* au détriment du temps de réponse.

La même démarche d'analyse peut être faite en fixant  $T_o$  à 0.1 et en faisant varier  $T_c$ . Sur la figure 5.24, on a superposé les courbes de la force  $\hat{F}_x^{ext}$  estimée pour les différentes valeurs de  $T_c$ . La figure 5.25 représente le déplacement du flotteur, suite à l'application de l'échelon de force  $F_x^{ext}$  pour les différentes valeurs de  $T_c$ . D'après ces figures, on remarque bien l'influence du choix de  $T_c$  sur les performances en poursuite de la consigne ( $y_c = 0$ ). En effet, pour de grandes valeurs de  $T_c$  comme  $T_c = 0.3$ , on constate une forte sollicitation de l'actionneur (bobine de commande  $b$ ) qui se traduit par un pic de déplacement de  $280 \mu m$  (voir figure 5.25). On constate



FIG. 5.24 – Influence de  $T_c$  sur l'estimation de la force.

également qu'une très faible valeur de  $T_c$  finit par entraîner une erreur statique sur l'estimation de la force externe  $F_x^{ext}$  (voir figure 5.24).

L'échelle de force que nous visons varie de  $0.01\mu N$  à  $100\mu N$ . Une manière de caractériser les performances du capteur vis-à-vis des bruits de mesure consiste à estimer l'incertitude relative  $IR$  des valeurs estimées  $\hat{F}_x^{ext}$  fournies par l'estimateur :

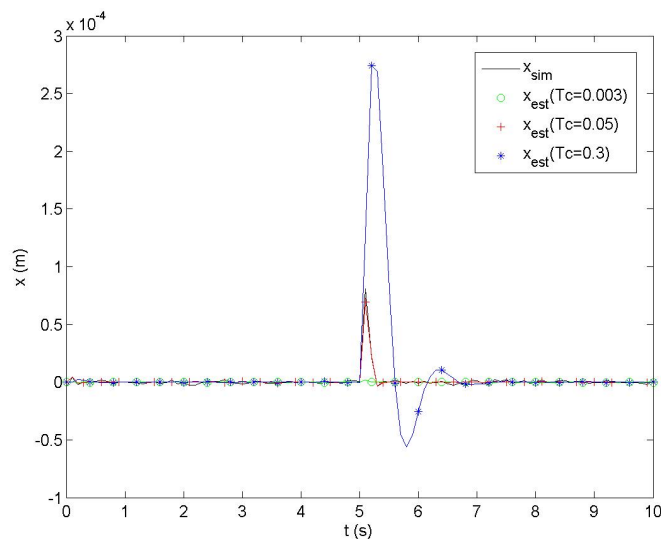
$$IR = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{F}_x^{ext}}}{\hat{\mu}_{\hat{F}_x^{ext}}} \times 100 \quad (\text{en } \%) \quad (5.53)$$

où  $\hat{\mu}_{\hat{F}_x^{ext}}$  est la moyenne estimée sur  $N$  valeurs de l'estimateur  $\hat{F}_x^{ext}$  (estimateur de la variable aléatoire inconnue  $F_x^{ext}$  supposée constante) :

$$\hat{\mu}_{\hat{F}_x^{ext}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{F}_x^{ext}(t_n) \quad (5.54)$$

et  $\hat{\sigma}_{\hat{F}_x^{ext}}$  est l'écart-type (débiaisé) estimé sur  $N$  valeurs de l'estimateur  $\hat{F}_x^{ext}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\hat{F}_x^{ext}} &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left( \hat{F}_x^{ext}(t_n) - \mu_{\hat{F}_x^{ext}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left( \hat{F}_x^{ext}(t_n) - F_x^{ext} \right)^2} \end{aligned} \quad (5.55)$$

FIG. 5.25 – Influence de  $T_c$  sur la réponse du système bouclé.

car dans la simulation  $\mu_{\hat{F}_x^{ext}} = E[\hat{F}_x^{ext}] = E[F_x^{ext}] = F_x^{ext}$ , puisque la force externe est constante (connue uniquement en simulation).

Le rapport  $IR$  représente l'incertitude relative<sup>5</sup> des valeurs estimées  $\hat{F}_x^{ext}$ .  $IR$  est la transposition en termes statistiques de la définition habituelle de l'incertitude relative qui est [valeur mesurée-vraie valeur]/valeur mesurée. Notons qu'avec une entrée inconnue constante, l'expression de  $IR$  n'est intéressante à calculer que lorsque l'estimateur a convergé (et pas pendant le régime transitoire de l'estimation de la force).

Les simulations de la figure 5.26 ont été faites pour différentes amplitudes de force  $F_x^{ext}$  (50, 20, 1, 0.1 et  $0.01\mu N$ ) et pour différentes valeurs de  $T_o$  (0.2, 0.4 et 0.6). Cette figure illustre différents rapport  $IR$  en fonction de différents  $T_o$  choisis. Elle montre que plus la force est petite et plus l'incertitude relative augmente. Ainsi, pour avoir une incertitude relative la plus petite possible, avec une force donnée, il faut augmenter  $T_o$ .

Les simulations de la figure 5.27 ont été faites pour différentes amplitudes de force  $F_x^{ext}$  (50, 20, 1, 0.1 et  $0.01\mu N$ ) avec pour chacune la valeur de  $T_o$  réglée de manière à avoir une amplitude de bruit minimale sur la force  $\hat{F}_x^{ext}$  estimée ( $T_o$  vaut respectivement 0.1, 0.18, 0.25, 0.4 et 0.8). Le rapport  $IR$  obtenu est  $\leq$  à 3%. Ce résultat montre qu'un réglage du paramètre  $T_o$ , permet de diminuer le bruit en-

<sup>5</sup>Avec des variables supposées gaussiennes,  $3 \times IR$  représenterait une estimation de l'incertitude relative maximale (avec une probabilité de 99%) de l'estimateur de la force.

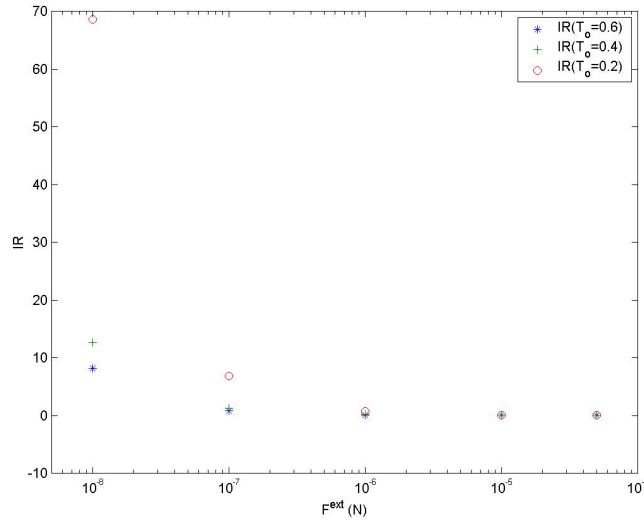


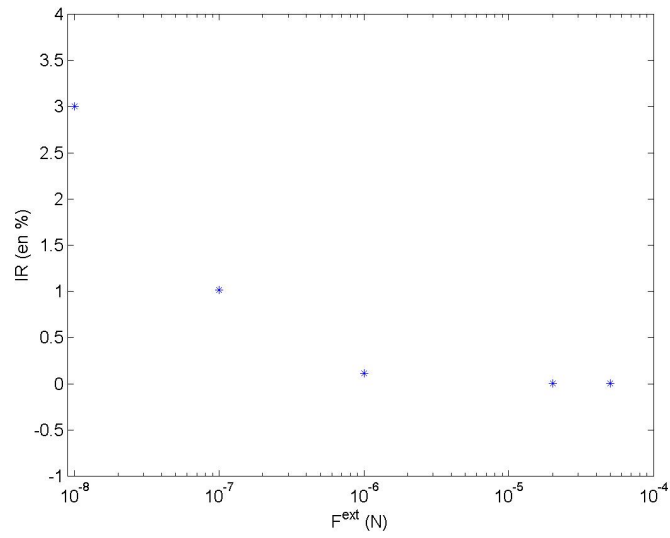
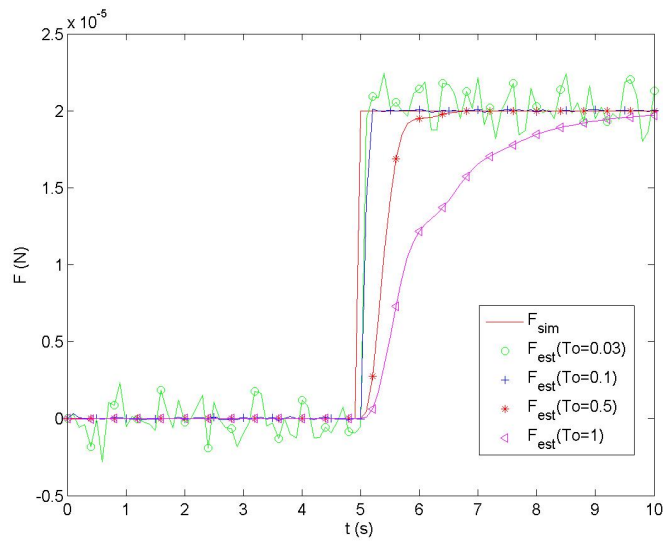
FIG. 5.26 – Rapport  $IR$  (%) en fonction de  $F_x^{ext}$  pour différents valeurs de  $T_o$ .

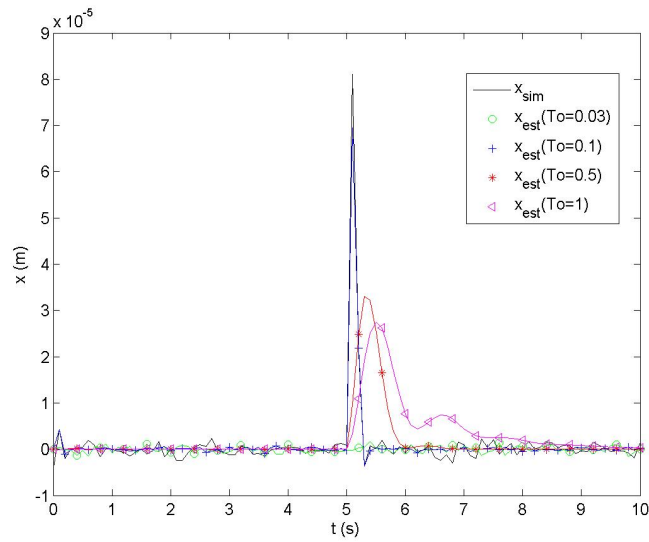
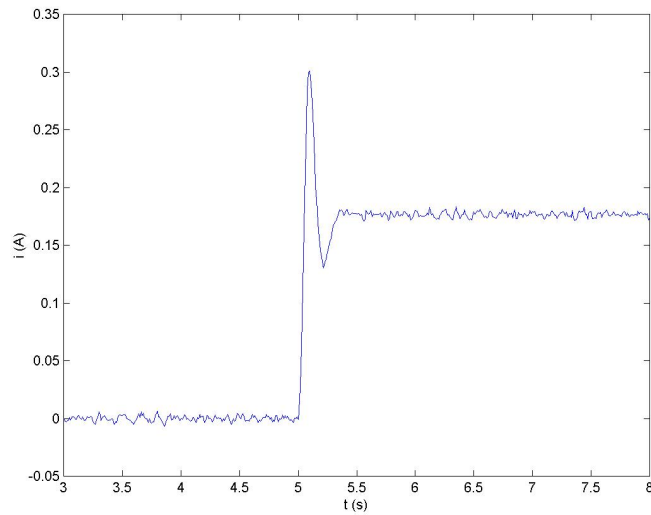
tachant l'estimation  $\hat{F}_x^{ext}$  de  $F_x^{ext}$  et ainsi d'avoir un bon rapport signal sur bruit. L'autre paramètre qui influencera le réglage de  $T_o$  sera le temps de réponse du système bouclé, car il y a un compromis à trouver entre le temps de réponse de l'observateur et l'incertitude relative.

## 5.7 Simulation du régulateur $H_2$

Dans une optique de validation, nous avons simulé la réponse du système bouclé à un échelon de force de  $20\mu N$  appliqué à l'instant  $t = 5s$ . Cette simulation a été faite avec le modèle linéaire (5.18) du *MFM*. Le modèle *Simulink* du système bouclé a été affiné par l'ajout d'un bruit de mesure. L'intensité de ce bruit est de  $1.25 \times 10^{-12} m^2$ , elle a été évaluée à partir de la sortie du capteur de déplacement laser monté sur le prototype expérimental du *MFM*. La figure 5.31 représente l'échelon de force de  $20\mu N$  simulé et estimé. D'après cette figure, on remarque que le temps de réponse du système a été réduit à  $0.25s$  par rapport au temps de réponse du système en boucle ouverte qui est de  $3.8s$  (voir section 4.2.2). Le dépassement, quant à lui, a été supprimé. La figure 5.32 représente la réponse du flotteur simulée et estimée suite à l'application de l'échelon de force. Ces résultats ont été obtenus pour  $T_o = 0.1$  et  $T_c = 0.05$ .

Le courant  $i$  dans les bobines de commande varie de  $0$  à  $0.18A$  (voir figure 5.30) afin de contrer la force externe  $F_x^{ext}$  et de maintenir le flotteur immobile. Un saturateur est placé à l'entrée des bobines de commande pour éviter leur endommagement

FIG. 5.27 – Rapport  $IR$  (%) en fonction de  $F_x^{ext}$ .FIG. 5.28 – Influence de  $T_o$  sur l'estimation de la force.

FIG. 5.29 – Influence de  $T_o$  sur la réponse du système bouclé.FIG. 5.30 – Courant  $i$  dans les bobines de commande.

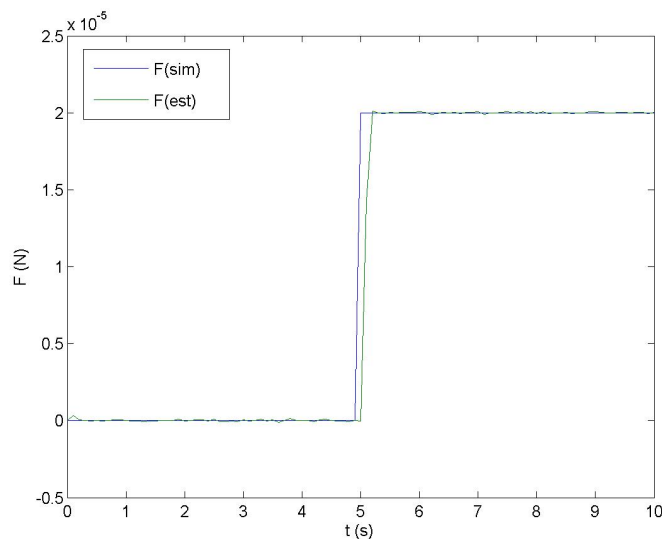


FIG. 5.31 – Echelon de force de  $20\mu N$  simulé et estimé.

suite à un surcourant (le courant  $i$  maximum autorisé dans les bobines est de  $0.4A$ ).

Nous avons ensuite simulé la réponse du système bouclé à une force externe en forme de rampe avec une pente de  $1.34 \times 10^{-6}$ . La figure 5.33 représente la force externe simulée appliquée au flotteur ainsi que la force estimée. On note l'absence d'erreur de poursuite.

Toujours dans une optique de validation, nous avons simulé la réponse du système à une force externe sous forme de sinusoïde. La figure 5.34 représente la force simulée appliquée au flotteur ainsi que la force estimée. Il conviendra de faire à l'avenir une étude fréquentielle complète de la plate-forme. Par simulation, il est néanmoins simple de déterminer par essai-erreur la pulsation de coupure à  $-3dB$  pour laquelle la force estimée  $\hat{F}_x^{ext}$  vaut  $0.707 F_x^{ext}$ . On obtient une fréquence de coupure de  $3.66Hz$  (voir figure 5.35).

## 5.8 Validation expérimentale

La même manipulation décrite dans la section 4.7 du quatrième chapitre a été utilisée afin de valider expérimentalement la méthode de contrôle par synthèse  $H_2$ . Il est important de rappeler les conditions difficiles de cette manipulation :

- mauvaise qualité du capteur de position laser utilisé ;
- mauvaises conditions de manipulation ;
- présence des ondes de retour qui se propagent sur le liquide lorsque le flotteur se déplace.

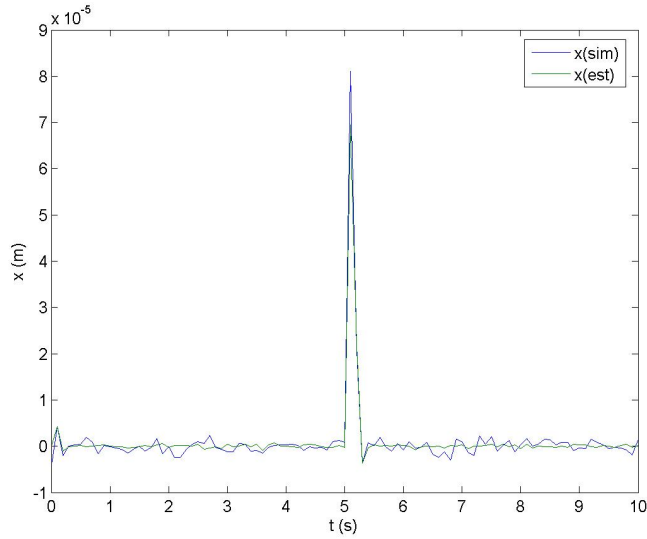


FIG. 5.32 – Réponse  $x(t)$  simulée et réponse  $\hat{x}(t)$  estimée du système bouclé suite à l'application d'un échelon de force de  $20\mu\text{N}$ .

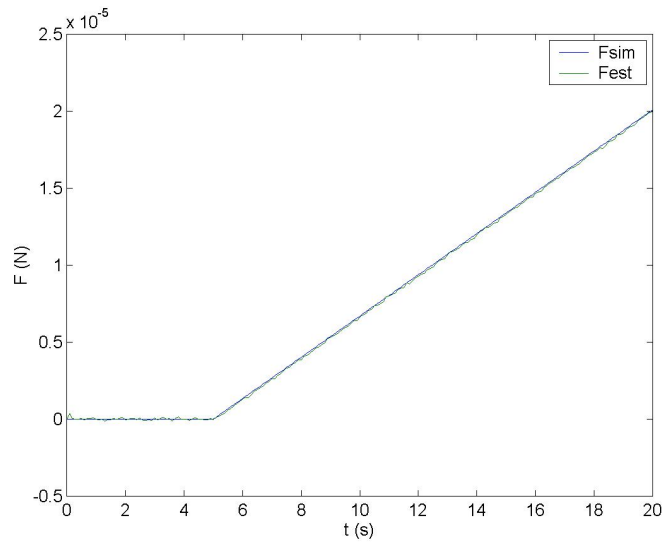


FIG. 5.33 – Force externe simulée et estimée

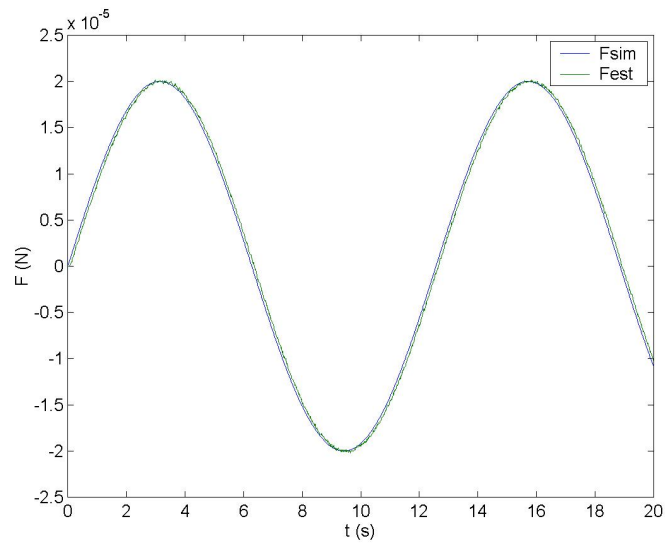


FIG. 5.34 – Force externe simulée et estimée bruitée

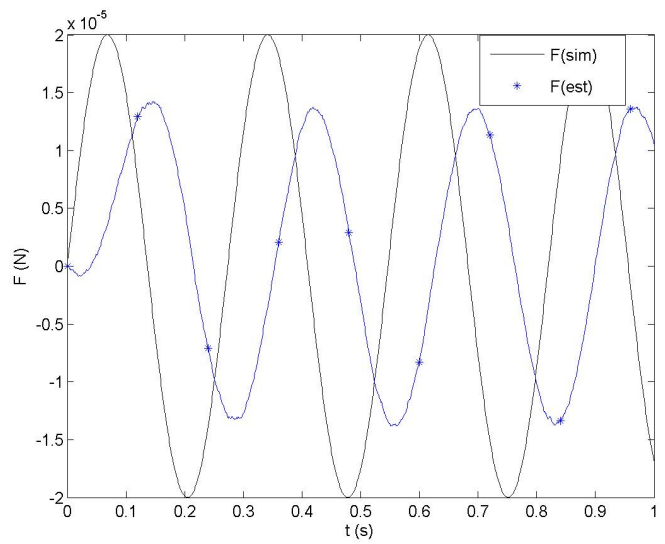


FIG. 5.35 – Force externe simulée et estimée atténuée



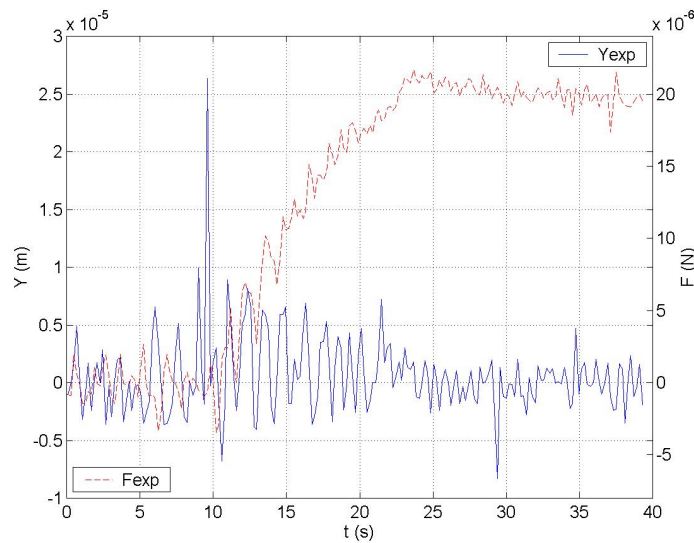


FIG. 5.36 – Force mesurée et déplacement du flotteur

La figure 5.36 représente la force mesurée ainsi que le déplacement du flotteur suite à l'application de cette force. D'après cette figure, nous retrouvons le même phénomène de bruit entachant les mesures. Malgré les difficultés de la manipulation, des courbes répétables ont pu être produites. Une nouvelle campagne de mesure avec un capteur confocal chromatique de la société *STIL* est en cours de préparation.

## 5.9 Robustesse de la commande par synthèse $H_2$

Cette section est consacrée à l'étude de la robustesse du contrôle par synthèse  $H_2$ . Nous distinguons deux types de robustesse :

- robustesse vis-à-vis des bruits de mesure ;
- robustesse vis-à-vis de l'évolution des paramètres du système.

La robustesse vis-à-vis des bruits de mesure représente la capacité de la méthode de contrôle à anticiper et à compenser le facteur bruit qui influence de manière significative le système. Nous avons vu, dans la section 5.6, que la méthode de contrôle par synthèse  $H_2$  présente des bonnes performances concernant le problème du bruit ajouté. Par conséquent, dans cette section, nous allons nous intéresser (qualitativement) à la robustesse vis-à-vis de l'évolution des paramètres du système.

En conservant le même régulateur, conçu à partir du modèle nominal, on a fait varier les paramètres du modèle du processus. Les nouveaux paramètres choisis

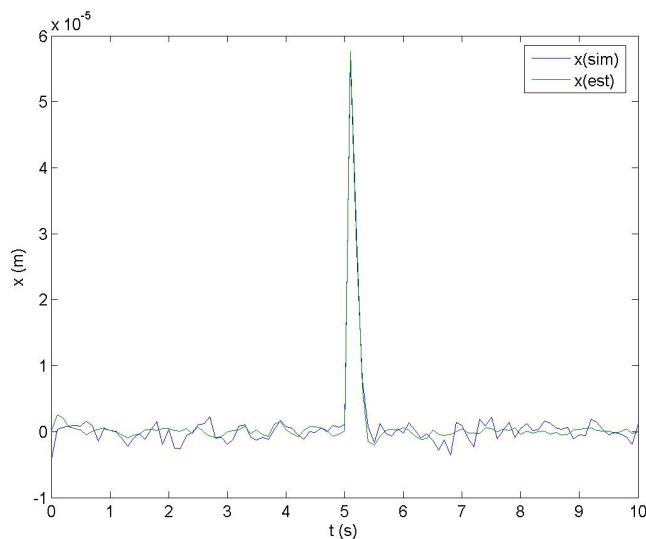


FIG. 5.37 – Influence de la connaissance des paramètres du modèle sur la réponse du système bouclé.

sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_m^x = 12 \times 10^{-3} N.m^{-1} \text{ (variation de 23\% par rapport au modèle nominal)} \\ K_v^x = 0.2 \times 10^{-3} N.S.m^{-1} \text{ (variation de 78\% par rapport au modèle nominal)} \\ m = 3 \times 10^{-4} kg \text{ (variation de 47\% par rapport au modèle nominal)} \end{array} \right.$$

La figure 5.37 représente la nouvelle réponse du système bouclé a un échelon de force de  $20\mu N$  appliqué au système à l'instant  $t = 5s$ . La figure 5.38, quant à elle, représente la force simulée et estimée bruitée.

D'après ces courbes que l'on doit comparer aux figures 5.31 et 5.32, nous notons que :

- la stabilité est robuste : il n'y a pas de déstabilisation ;
- le rejet asymptotique est robuste : il n'y a pas d'erreur finale, ni en poursuite, ni en régulation ;
- les performances sont robustes : pas de détérioration majeure des temps de réponse.

Cela n'est pas le cas en ce qui concerne la raideur électromagnétique  $K^e$ . Un mauvais calibrage de ce paramètre se traduit par une erreur statique sur l'estimation de  $F_x^{ext}$  (voir figure 5.39). La nouvelle valeur de  $K^e$ , choisie pour cette simulation, est de  $0.8 \times 10^{-4} N.A^{-1}$  (variation de 30% par rapport au modèle nominal).

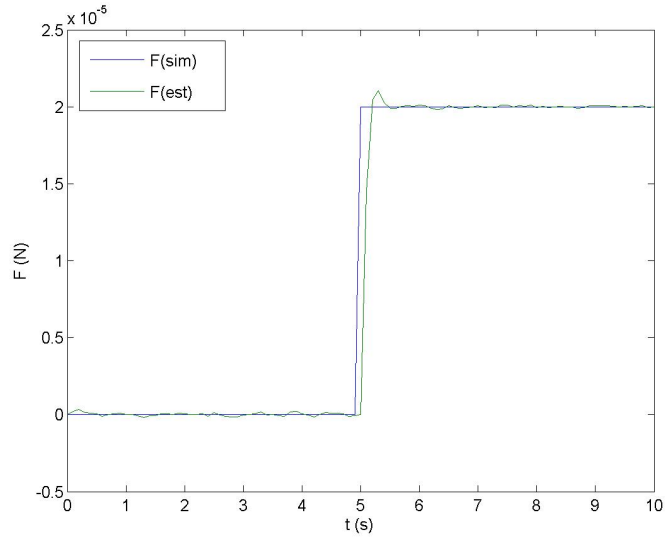


FIG. 5.38 – Influence de la connaissance des paramètres du modèle sur l'estimation de la force.

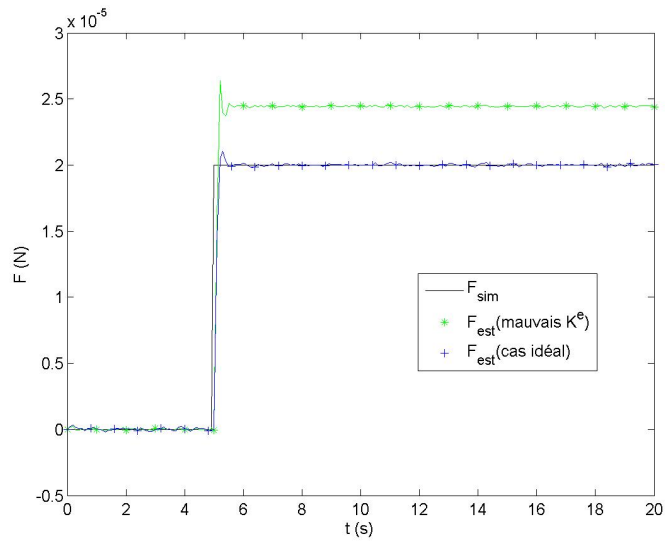


FIG. 5.39 – Influence de la connaissance de  $K^e$  sur l'estimation de la force.

## 5.10 Asservissement de la plate-forme

Après avoir validé l'asservissement du mécanisme de flottaison-magnétique *MMF*, nous allons nous intéresser, dans cette section, à l'asservissement de la plate-forme complète tout en suivant la même démarche suivie pour asservir en position le flotteur du *MMF*.

La plate-forme à commander est un système à six entrées et trois sorties. Les entrées sont les courants dans les bobines  $(i_1, i_2, i_3)$ , les composantes  $F_x^{ext}$  et  $F_y^{ext}$  de la force externe et le couple externe  $\Gamma_z^{ext}$  appliqué à la plate-forme suivant  $\psi$ . Dans la suite, on appellera  $\underline{T}^{ext}$  le torseur d'effort externe. Les sorties sont les coordonnées de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$ , mesurées à l'aide de trois capteurs de position montés dans une configuration particulière (voir chapitre 3). Nous souhaitons que les sorties de la plate-forme  $(x_p, y_p$  et  $\psi)$  suivent sans erreur une consigne  $(x_c, y_c$  et  $\psi_c)$  correspondant à sa position initiale. Cette position initiale est aussi la position d'équilibre stable de la plate-forme.

Les équations différentielles linéarisées qui régissent le mouvement de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_p &= -2K_x^m \cdot x_p - K_x^v \cdot \dot{x}_p - K^e \cdot i_1 + F_x^{ext} \\ m\ddot{y}_p &= -2K_y^m \cdot y_p - K_y^v \cdot \dot{y}_p + K^e (i_2 + i_3) + F_y^{ext} \\ I_z \ddot{\psi} &= -K^e \cdot \delta (i_2 - i_3) - 2K_y^m \psi \delta^2 - k_{xy}^v \dot{\psi} + \Gamma_z^{ext} \end{aligned} \quad (5.56)$$

La représentation d'état qui dérive de ces équations différentielles est la suivante :

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\psi} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{X}}_1} &= A_{11} \underbrace{\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \psi \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_{\underline{X}_1} + B_1 \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_c} + G_1 \underbrace{\begin{bmatrix} F_x^{ext} \\ F_y^{ext} \\ \Gamma_z^{ext} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{ext}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \psi \end{bmatrix}}_{\underline{Y}} &= C_1 \underbrace{\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \psi \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_{\underline{X}_1} \end{aligned} \quad (5.57)$$

avec :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2K_x^m}{m} & 0 & 0 & -\frac{K_x^v}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2K_y^m}{m} & 0 & 0 & -\frac{K_y^v}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\delta^2 \cdot K_y^m}{I_z} & 0 & 0 & -\frac{K_{xy}^v}{I_z} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K^e}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K^e}{I_z} & \frac{K^e}{I_z} \\ 0 & -\frac{m \cdot K^e}{I_z} & \frac{m \cdot K^e}{I_z} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}$$

### 5.10.1 Elaboration du modèle standard

Le système standard  $G$  (voir figure 5.40), bouclé par le régulateur  $K$ , engendre un système ayant pour entrée le vecteur de perturbation  $\underline{T}^{ext}$  et pour sortie le vecteur des écarts  $\underline{\delta}$  se définissant naturellement comme la différence entre les consignes  $\underline{Y}_c$  et les grandeurs à piloter  $\underline{Y}$ , avec :

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \underline{Y}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ \psi_c \end{bmatrix}, \quad \underline{F}^{ext} = \begin{bmatrix} F_x^{ext} \\ F_y^{ext} \\ \Gamma_z^{ext} \end{bmatrix}$$

Le vecteur de perturbation  $\underline{X}_2$  modélisant les consignes et les perturbations est le suivant :

$$\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ \psi_c \\ F_x^{ext} \\ F_y^{ext} \\ \Gamma_z^{ext} \end{bmatrix}$$

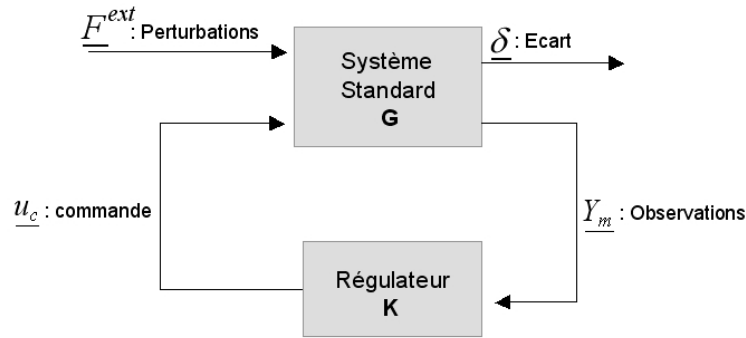


FIG. 5.40 – asservissement

Par concaténation, on réunit le modèle d'état de la plate-forme (5.57) et le vecteur  $\underline{X}_2$ . Il en résulte un système de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{X}_1}{dt} = A_{11} \cdot \underline{X}_1 + A_{12} \cdot \underline{X}_2 + B_1 \cdot \underline{u}_c \\ \underline{Y}_m = C_{1m} \cdot \underline{X}_1 + C_{2m} \cdot \underline{X}_2 \\ \underline{\delta} = D_1 \cdot \underline{X}_1 + D_2 \cdot \underline{X}_2 \end{cases} \quad (5.58)$$

avec :

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \quad C_{1m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce modèle élargi s'écrit encore :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{X}_i}{dt} = A_i \cdot \underline{X}_i + B_i \cdot \underline{u}_c \\ \underline{Y}_i = C_i \cdot \underline{X}_i \end{cases} \quad (5.59)$$

avec :

$$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{Y}_i = \begin{bmatrix} \underline{Y}_m \\ \underline{\delta} \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_i = \begin{bmatrix} C_{1m} & C_{2m} \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

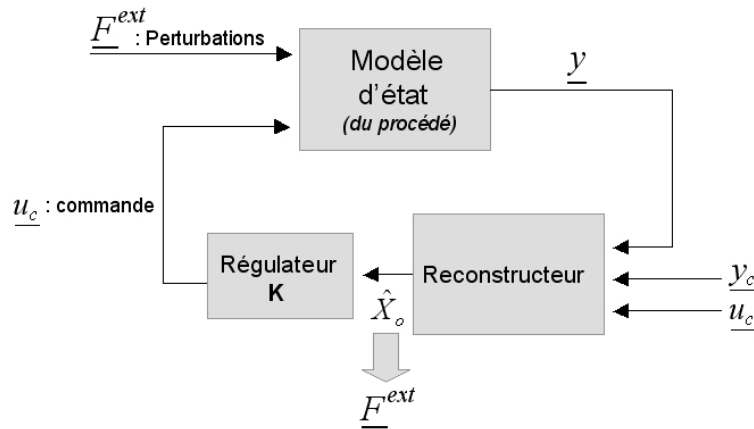


FIG. 5.41 – Loi de commande finale

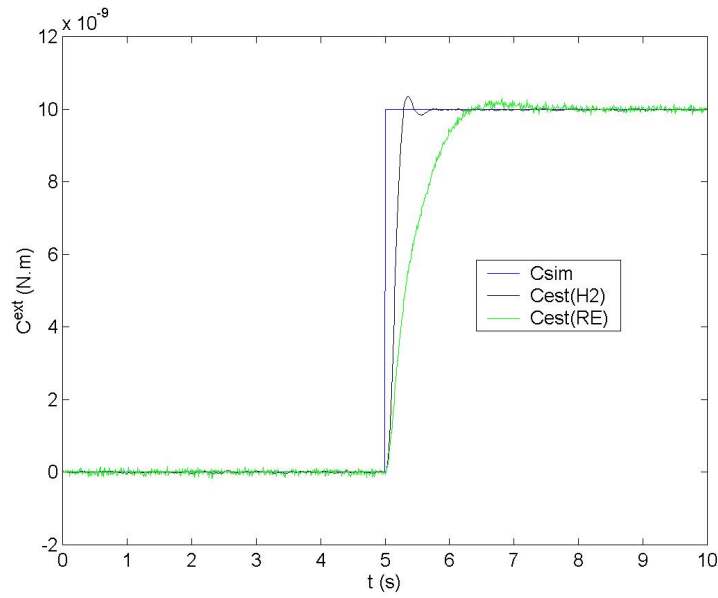
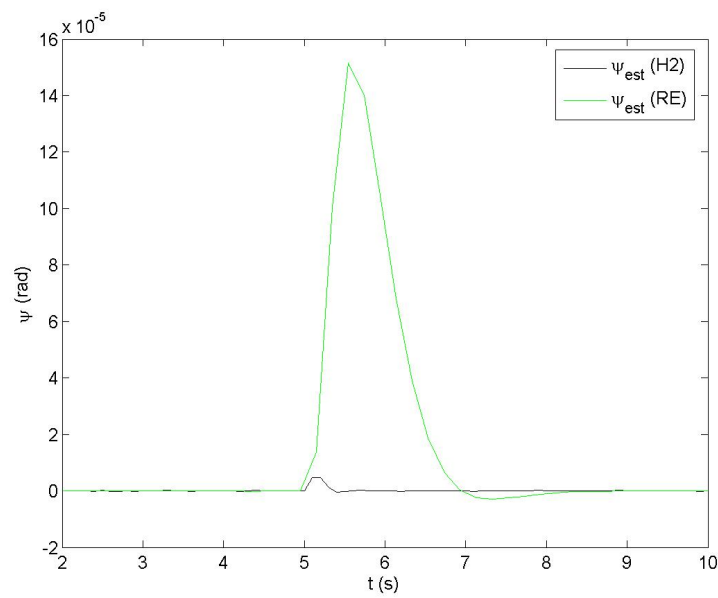
Nous suivrons dans la suite la même démarche qu'on avait suivi pour asservir en position le flotteur du *MFM*. Le nouveau reconstruteur utilise les consignes  $\underline{Y}_c$ , les grandeurs à piloter  $\underline{Y}$  et la commande  $\underline{u}_c$  pour estimer le vecteur d'état «étendu»  $\underline{X}_o$ . L'estimation  $\hat{\underline{X}}_o$  sera l'entrée du régulateur  $K$ . A la sortie du régulateur  $K$ , on retrouve le vecteur de commande  $\underline{u}_c$  qui sera injecté dans le procédé (voir figure 5.41).

### 5.10.2 Simulation

Dans une optique de validation, nous avons simulé la réponse en boucle fermée de la plate-forme à un échelon de couple de  $10nNm$  appliqué à la plate-forme autour de  $z$ . Les simulations ont été faites avec le modèle non-linéaire (*MNL*) de la plate-forme pour  $T_o = 0.2$  et  $T_c = 0.008$ . La figure 5.42 représente l'échelon de couple externe simulé et estimé bruité. Sur cette figure, nous avons superposé la courbe de la force estimée obtenue avec la commande par synthèse  $H_2$  et celle obtenue avec la commande par retour d'état présentée en détail dans le chapitre 4. Ces courbes illustrent les meilleures performances obtenues avec la commande par synthèse  $H_2$  concernant le temps de réponse ( $0.3s$  pour  $H_2$  et  $1.1s$  pour  $RE$ ) ainsi que l'intensité du bruit sur le tracé de la force estimée.

La figure 5.43 représente la rotation autour  $z$  de la plate-forme suite à l'application de l'échelon de couple. Sur cette figure, on remarque qu'on a un pic de rotation de  $15 \times 10^{-5}rad$  au moment de l'application de l'échelon de couple pour la commande par retour d'état, alors qu'on se retrouve avec un pic de  $0.5 \times 10^{-5}rad$  pour la commande par synthèse  $H_2$ .

Nous avons ensuite simulé la réponse de la plate-forme à deux échelons de force de  $10\mu N$ . Le premier est appliqué suivant  $x$  à l'instant  $t = 5s$  et le deuxième est appliqué suivant  $y$  à l'instant  $t = 10s$ . La figure 5.44 représente les échelons de

FIG. 5.42 – Echelon de couple de  $10nNm$  simulé et estiméFIG. 5.43 – Rotation de la plate-forme autour de  $z$



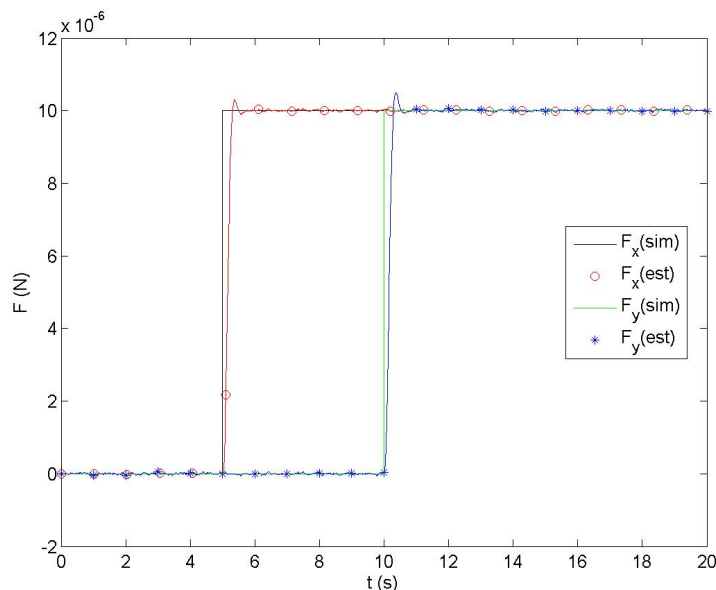


FIG. 5.44 – Echelons de force  $F_x^{ext}$  et  $F_y^{ext}$  simulés et estimés.

force simulés et estimés. La figure 5.45, quant à elle, représente le déplacement de la plate-forme, suivant  $x$  et  $y$ , suite à l'application des deux échelons de force. D'après ces figures, nous avons des réponses quasiment identiques suivant  $x$  et  $y$ . Cela est dû au faible couplage entre ces deux directions de mesure.

Nous avons aussi simulé la réponse de la plate-forme à un échelon de force de  $10\mu N$  appliqué suivant  $y$  à l'instant  $t = 10s$ . La simulation a été faite, dans un premier temps, avec le modèle non-linéaire ( $MNL$ ) de la plate-forme présenté en détail au cours du chapitre 3. Puis cette même simulation a été refaite avec le modèle linéaire de la plate-forme ( $ML$ ).

Sur la figure 5.46, les courbes de la force simulée ainsi que les deux forces estimées avec les deux modèles ont été superposées. On constate une petite différence tolérable entre les deux tracés de la force estimée en régime transitoire. En régime stationnaire, les réponses des deux modèles collent correctement. Notons que les deux modèles ont été raffinés par l'ajout d'un bruit de mesure avec une intensité de  $1.25 \times 10^{-12}(m^2s)$ .

La figure 5.47, quant à elle, représente la réponse selon  $y$  de la plate-forme à l'échelon de force appliqué suivant  $y$ .

Pour illustrer l'effet du couplage entre les différentes directions de mesure sur la dynamique du système bouclé, nous avons simulé la réponse de la plate-forme à deux échelons de force  $F_x^{ext}$  et  $F_y^{ext}$ , appliqués simultanément à l'instant  $t = 5s$ . La simulation a été faite avec le modèle non-linéaire de la plate-forme ( $MNL$ ), pour

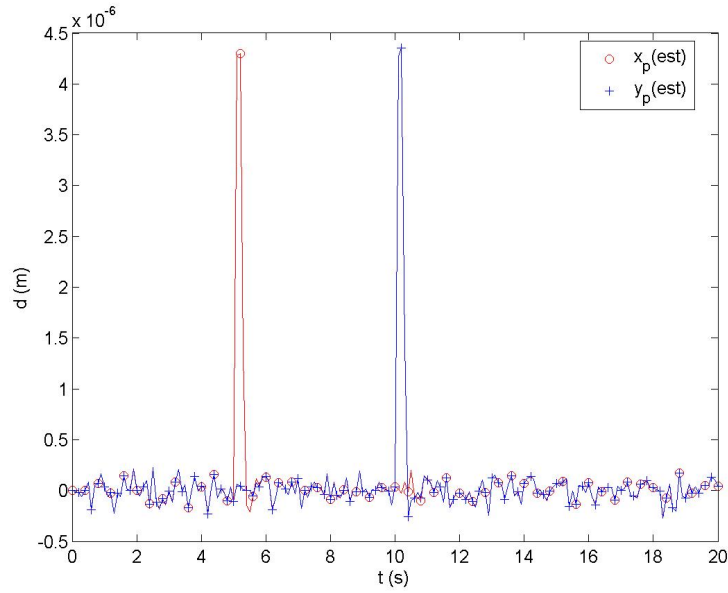
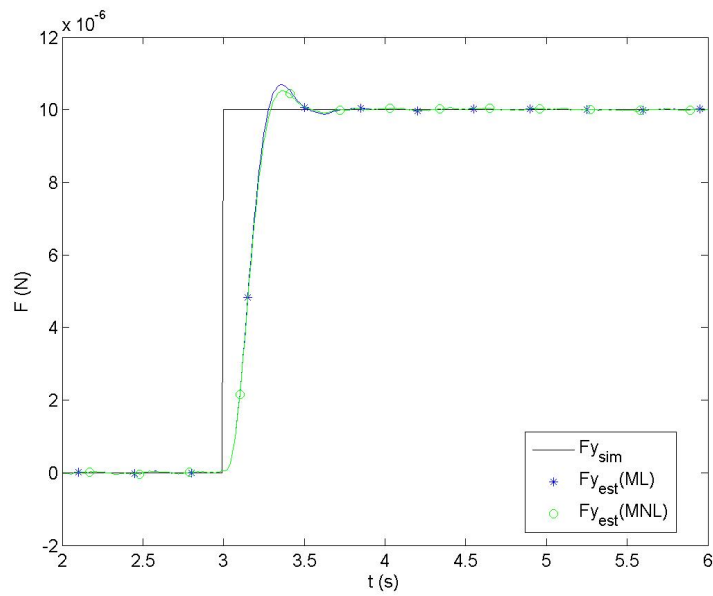
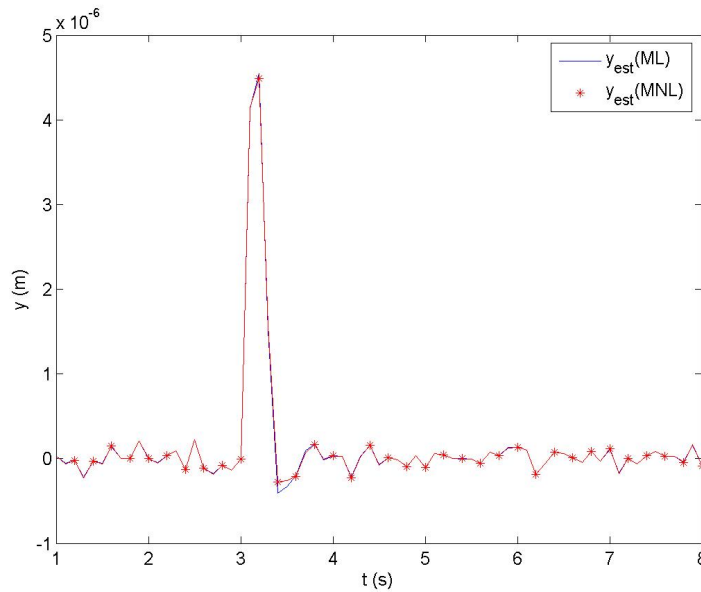
FIG. 5.45 – Déplacements de la plate-forme suivant  $x$  et  $y$ 

FIG. 5.46 – Echelon de force simulé et estimé

FIG. 5.47 – Déplacements de la plate-forme suivant  $y$ 

$F_y^{ext} = 10 \mu N$  et pour différentes valeurs de  $F_x^{ext}$  (10, 20 et 50  $\mu N$ ). Rappelons que ce couplage n'est pas modélisé dans les modèles linéaires utilisés et qu'il va donc dégrader la qualité de l'estimation des efforts.

Sur la figure 5.48, on a superposé les courbes de la force  $F_y^{ext}$  estimée pour les différentes valeurs de  $F_x^{ext}$ . Comme pour la commande par retour d'état (voir figure 4.43), la différence entre les forces  $F_y^{ext}$  estimées montre que le couplage entre les différentes directions de mesure présente une influence plutôt faible sur l'estimation de la force dans ce cas de figure.

La figure 5.49, représente le déplacement de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ) suite à l'application des échelons de force  $F_y^{ext}$  et  $F_x^{ext}$ . Cette figure illustre que le trajet parcouru par la plate-forme est beaucoup plus linéaire que celui obtenu dans le cas de la commande par retour d'état illustré sur la figure 4.44.

## 5.11 Discrétisation de la commande

Comme le contrôleur doit être implémenté sur un ordinateur numérique, une synthèse discrète doit être considérée. Il existe deux méthodes pour obtenir un contrôleur numérique. Une méthode simple consiste à discrétiser le système et à calculer ensuite un contrôleur numérique à partir du modèle discret du processus (voir figure 5.50 (1)). Une deuxième méthode d'obtention de correcteur discret consiste à passer par la transformation bilinéaire. Il s'agit de synthétiser un correcteur continu à partir d'un modèle continu équivalent au modèle discret du

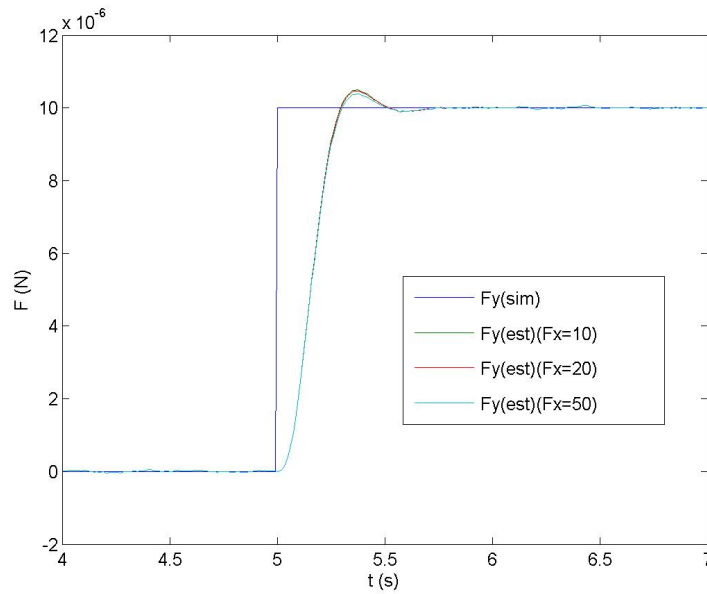


FIG. 5.48 – Echelon de force  $F_y^{ext}$  simulé et estimé pour différentes valeurs de  $F_x^{ext}$

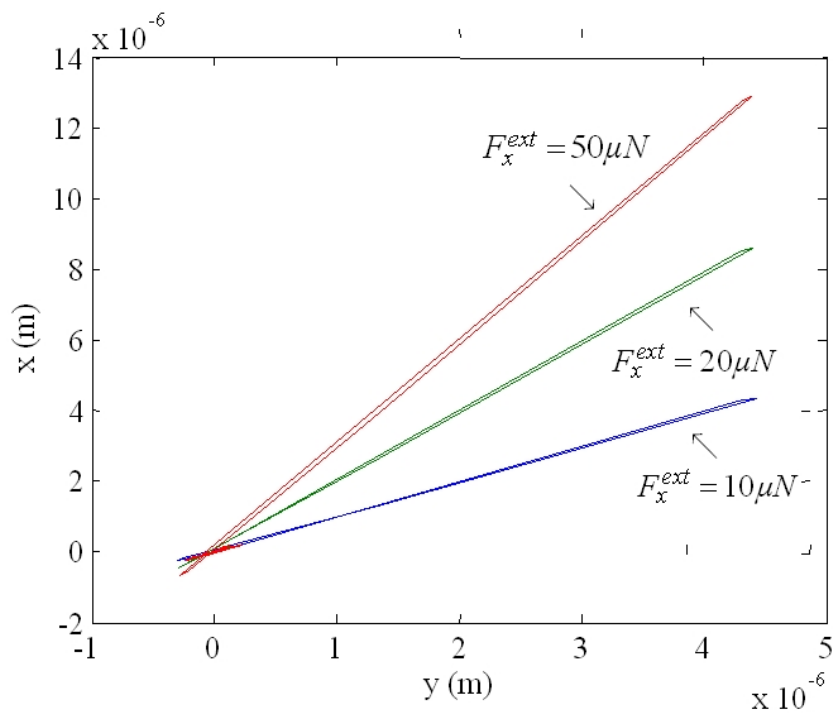


FIG. 5.49 – Déplacements de la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  pour  $F_y^{ext} = 10 \mu\text{N}$  et pour différentes valeurs de  $F_x^{ext}$

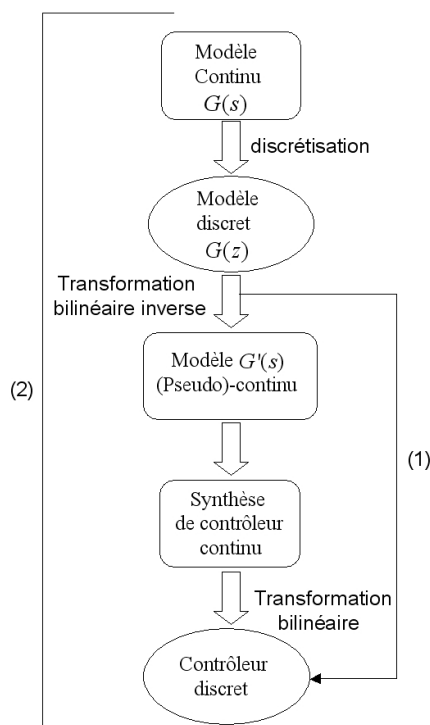


FIG. 5.50 – Les étapes de synthèse d'un correcteur discret

processus (voir figure 5.50 (2)). Les raisons principales sont le fait que l'analyse continue en synthèse  $H_2$  est plus simple, plus standard et possède des significations physiques.

La transformation bilinéaire est définie comme un difféomorphisme  $w = f(z)$  où  $w$  est «analogue» à la variable *Laplace*  $p$  et  $z$  indique l'opérateur discret [62] :

$$w = \lambda \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (5.60)$$

Dans le cas de la transformation bilinéaire de *Tustin*, on a  $\lambda = \frac{2}{T_e}$ , avec  $T_e$  la période d'échantillonnage. A partir d'un modèle discret, la transformation bilinéaire inverse de *Tustin* donne un modèle pseudo-continu à partir duquel on peut synthétiser un correcteur (voir figure 5.50 (2)). Le fait de discrétiser le système continu, puis de revenir en continu par transformation bilinéaire inverse, permet de prendre en compte la période d'échantillonnage. Le système pseudo-continu obtenu a les mêmes propriétés structurelles (stabilité, commandabilité et observabilité) que le système discret [62].

## 5.12 Conclusion

Ce chapitre a été construit autour de deux idées majeures : l'estimation optimale par filtrage de *Kalman* des états du système à commander ainsi que la force externe  $\vec{F}^{ext}$  (entrée inconnue), et l'établissement d'une loi de commande par retour d'état minimisant un critère quadratique de type énergétique.

Cette méthode d'asservissement donne des bons résultats en ce qui concerne la rapidité, la stabilité, l'amortissement et la robustesse (au sens de la robustesse du rejet des perturbations) du système bouclé. Le choix des matrices  $Q_o$  et  $R_o$  affectées aux bruits d'état  $\alpha$  et de mesure  $\beta$  ainsi que les matrices de pondérations  $Q_c$  et  $R_c$  étant difficile, nous avons proposé de les synthétiser à partir des paramètres de synthèse de haut niveau  $T_c$  (horizon de commande) et  $T_o$  (horizon de filtrage). Il faudra ensuite que le concepteur ajuste  $T_c$  et  $T_o$  dans de très larges proportions afin de trouver les matrices  $Q_o$ ,  $R_o$ ,  $Q_c$  et  $R_c$  donnant les performances souhaitées.

Cette approche qui présente des bonnes performances concernant le problème du bruit ajouté, présente également une robustesse vis-à-vis de l'évolution des paramètres du modèle de la plate-forme hormis la raideur électromagnétique  $K^e$ . En effet, un mauvais calibrage de ce paramètre se traduit par une erreur statique sur l'estimation de la force externe  $\vec{F}^{ext}$ .

# Conclusion et perspectives

Ce mémoire a abordé le thème de la mesure de force dans le micromonde par le biais de la modélisation, de l'optimisation et de la conception d'une plate-forme novatrice de mesure de micro et nano force. Grâce à l'action combinée de deux ressorts magnétiques et de la poussée d'Archimède, cette plate-forme supposée rigide est naturellement stable selon ses 6 degrés de liberté. La matrice de raideur autour de son point d'équilibre stable possède un certain nombre de composantes suffisamment faibles pour rendre possible la mesure de micro et nano forces dans le plan horizontal et d'un micro et nano couple selon l'axe vertical. Cette mesure d'efforts peut se faire selon un mode passif ou actif.

Dans le premier chapitre de ce manuscrit nous avons rappelé le principe de mesure d'un capteur de force qui est un transducteur dont l'entrée est la force inconnue et la sortie l'effet de la force qui est mesuré à l'aide d'un capteur approprié. La partie mécanique du transducteur qui subit la force est appelée corps d'épreuve. Si le corps d'épreuve possède une dynamique d'évolution dont le régime transitoire influe fortement sur la sortie, il convient alors de déconvoluer le signal de sortie pour pouvoir remonter proprement au signal d'entrée, c'est-à-dire à la force inconnue. C'est le cas par exemple si le régime transitoire est faiblement amorti : en absence de déconvolution, ce transitoire induit alors une erreur dynamique (dépassement, oscillations) importante sur la force...

Nous avons présenté un état de l'art des capteurs de microforce les plus classiques. Ces capteurs utilisent tous des corps d'épreuve de dimensions micrométriques. Ils ont de ce fait des régimes transitoires très rapides. Aucun de ces capteurs n'utilise de techniques de déconvolution pour s'affranchir de la dynamique du corps d'épreuve et remonter à la force.

Le principe de mesure de ces capteurs, offre la possibilité d'avoir des faibles raideurs mais ne permet pas de déformations ou de déplacements suffisants pour obtenir une large plage de mesure ( typiquement du nN au mN ).

Une solution pour augmenter l'étendue de mesure consiste à utiliser un principe de mesure qui ne repose pas sur la déformation d'un corps d'épreuve mais sur le déplacement d'une masse sismique supposé rigide. Si la partie mobile peut subir un grand déplacement, le capteur sera alors capable de mesurer une large plage

de force à condition que la raideur reste faible pendant tout le déplacement. Dans le micromonde, ce principe de mesure doit se faire sans contact mécanique direct entre la partie mobile du capteur et la partie fixe, afin de supprimer les frottements secs. Ces derniers sont difficilement prédictibles, ils réduisent les performances du capteur. Par ailleurs, au prix d'une réduction de bande passante, on peut tolérer des frottements visqueux entre la partie mobile du capteur et son environnement proche qui peut être de ce fait de nature gaz ou liquide. Dans ce cas, cette partie mobile sera dépourvue de toute sorte de contact sec, et elle sera sensible à tout effort qui s'applique sur elle. Les principes physiques qui permettent d'éviter les frottements secs et qui tolèrent les frottements visqueux sont au moins au nombre de deux : la lévitation et la flottaison.

La plate-forme que nous avons conçue exploite le principe de la flottaison et repose sur l'utilisation de ressorts magnétiques, couplé à la poussée d'Archimède. L'organe sensible du nouveau capteur est une plate-forme macroscopique rectangulaire sur lequel sont fixés deux aimants permanents. Le maintien dans le plan horizontal de la plate-forme, destinée à accueillir les objets à manipuler, est assuré par le biais des forces magnétiques exercées par des aimants porteurs. Sa sustentation est assurée par les poussées d'Archimède des quatre flotteurs placés à ses coins.

L'inconvénient de cette configuration est que la partie flottante va subir les effets perturbateurs du liquide. Ces effets seront au moins au nombre de deux : les effets capillaires (raideur supérieur de plusieurs ordres de grandeur) sur les flotteurs qui vont rendre impossible une mesure de force sur l'axe  $z$  avec une sensibilité identique ainsi que les ondes de surfaces qui vont se propager sur le liquide lorsque le flotteur se déplacera. Ces ondes vont générer des efforts perturbateurs atténués, lors de leurs retours vers le flotteur, qu'il faudra ensuite éliminer. Un autre inconvénient majeur de cette plate-forme réside dans sa faible bande passante ( $3.66 \text{ Hz}$ ) due à son poids important.

La plate-forme présente un équilibre stable passif dans l'espace. Elle est capable de mesurer des forces dans le plan horizontal (norme et direction) ainsi que le couple associé (norme) sur une étendue de mesure qui varie entre  $-100$  et  $+100 \mu\text{N}$  et pour une résolution de l'ordre de  $10 \text{ nN}$ . Il est possible, en agissant sur les aimants porteurs, de modifier la raideur suivant chaque direction de mesure.

Sous l'influence d'une force externe horizontale et d'un couple suivant l'axe vertical, la plate-forme va se déplacer dans le plan horizontal (deux translations et une rotation) jusqu'à une position d'équilibre où les forces et le couple magnétiques s'opposent aux forces et au couple externe. Connaissant les raideurs magnétiques associées, on peut donc déterminer les deux composantes de la force externe ainsi que le couple associé. La détermination des trois composantes  $x$ ,  $y$  et  $\psi$  de la position de la plate-forme dans le plan horizontal est assurée à l'aide de trois capteurs confocaux de déplacement, à très haute précision, dans une configuration particulière.

Cette plate-forme est aussi conçue pour faire des mesures de force actives grâce à un



asservissement à la position «zéro», utilisant des efforts de rappel électromagnétique générés par des bobines commandées en courant. La mise en place de ce principe de mesure a pour objectif de maintenir le capteur dans une plage de fonctionnement où son comportement entrée-sortie (courbe de réponse statique) peut être considéré comme linéaire, de contrôler la dynamique de mesure en présence d'un effort externe, d'augmenter l'étendue de mesure du capteur ou encore de réduire certains dérives-fluage, biais de sortie. Il permet notamment de mesurer des forces sans déplacement de la plate-forme, ce qui présente des intérêts évident : si par exemple, le micro-composant sur lequel on exerce l'effort doit rester immobile (tâche de micro-insertion par exemple), le mode actif s'impose de lui même. L'opérateur ou le système automatisé agira ainsi sur le micro-composant sans le déplacer (ou très peu) mais en connaissant l'effort qu'il exerce sur lui.

Dans le deuxième chapitre de ce manuscrit, nous avons présenté les concepts et les éléments fondamentaux indispensable à la compréhension de la plate-forme de mesure de micro et nano force. Ces principes importants ont servi de fondement pour la conception de la plate-forme, notamment au travers d'un prototype expérimental élémentaire que l'on a appelé mécanisme de flottaison-magnétique (*MFM*). Afin de faciliter la compréhension et pour illustrer certains principes importants qui régiront la conception de la plate-forme, les études ont été menées sur le *MFM* qui a servi de base pour le développement de la plate-forme complète. Ce prototype nous a permis aussi de mettre au point un modèle numérique réaliste de la plate-forme qui a servi à concevoir sa configuration mécanique finale et à tester les lois de commande pour la mesure active. Le début de ce deuxième chapitre a introduit les différentes techniques de lévitation et de flottaison ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients. Dans la suite, nous nous sommes attachés particulièrement à l'étude statique de la configuration élémentaire ainsi que du principe de mesure de force passif. Le principe de mesure de force actif a été détaillé à la fin de ce chapitre.

Le troisième chapitre de ce mémoire a été divisé en deux parties respectivement dédiées à la conception et à l'étude dynamique de la plate-forme. Une configuration particulière a été retenue afin de simplifier au maximum les équations qui régissent le mouvement de la plate-forme et de limiter les couplages entre les différentes directions de mesure. Deux modèles de comportement dynamique ont été développés : un modèle non-linéaire complet suivant les six degrés de liberté et un modèle linéaire modélisant le comportement dynamique de la plate-forme dans le plan horizontal. Après validation, ce modèle linéaire a été retenu pour l'asservissement de la plate-forme qui permet une mesure active de la force. Finalement, un moyen pour déterminer la position de la plate-forme dans le plan horizontal à l'aide de trois capteurs de déplacement, montés dans une configuration particulière, a été présenté.

Les chapitres 4 et 5 ont été consacrés à la commande de la plate-forme. Ils sont

construits autour de deux grandes idées, l'estimation de l'effort externe (entrée inconnue) et l'asservissement en position de la plate-forme.

Nous avons décidé de donner au quatrième chapitre un aspect pédagogique en choisissant une méthode d'asservissement très simple par placement de pôles d'un modèle découplé de la plate-forme. Cela nous a permis d'illustrer l'influence des bruits de mesure induits par les capteurs de position ainsi que l'influence du bruit de boucle induit par la commande du système bouclé qui est très perturbatrice pour l'estimation de la force externe. Les simulations nous ont fait sentir le besoin d'une approche plus aboutie conditionnée par deux contraintes : tout d'abord, il faut que, pour les incertitudes du modèle de la plate-forme à asservir et pour le bruit de boucle induit par la commande on puisse déterminer un estimateur robuste stable pour l'estimation de l'effort externe ainsi que le vecteur d'état. Ensuite, la loi de commande optimale doit stabiliser le système incertain en boucle fermée pour toutes les incertitudes admissibles connues. Ce type de commande peut découler d'une minimisation d'un critère quadratique qui est souvent de type énergétique. Parmi les méthodologies de synthèse de correcteurs linéaires optimaux, nous avons décidé dans le cadre de ce mémoire de poser le problème de l'asservissement de la plate-forme dans le domaine temporel en choisissant la commande robuste par synthèse  $H_2$ , sans contester l'intérêt de la théorie  $H_\infty$  basée sur les spécifications fréquentielles des performances de l'asservissement.

Dans le cinquième chapitre, nous avons abordé, dans un premier temps, la problématique de l'estimation d'une entrée inconnue (en mode passif) à l'aide d'une méthode de déconvolution par filtrage de *Kalman*. Cette méthode d'estimation, nécessite d'injecter une connaissance *a priori* sur l'entrée inconnue et un modèle d'évolution brownienne (processus de Wiener) de la force inconnue a été utilisé. Pour l'asservissement de la plate-forme, nous avons choisi la synthèse  $H_2$  afin de réduire au maximum les bruits que peuvent générer un bouclage à partir des informations fournies par le filtre *Kalman*. Cette méthode d'asservissement a permis d'obtenir les performances souhaitées en dynamique et en statique, de faible sensibilité aux variations des paramètres du modèle et aux bruits de mesure et de facilité de réglage du contrôleur et de l'estimateur à l'aide de deux scalaires  $T_c$  et  $T_o$  représentant des horizons de filtrage et de commande.

Nous envisageons plusieurs axes de recherche à la suite de ces travaux. Dans un premier temps, il va être nécessaire de mener à bien l'identification des paramètres du modèle linéaire découplé, utilisant des techniques traditionnelles d'identifications à partir de la réponse libre du système. Cela est possible en alimentant les bobines de commande par des courants impulsionnels suffisant pour modifier brièvement le champ magnétique et donc pour mettre en oscillation la plate-forme. Le modèle linéaire étant découplé, il est ainsi possible de générer successivement des excitations suivant les trois directions de mesure  $x$ ,  $y$  et  $\psi$  et de mesurer la réponse libre de la plate-forme suivant ces directions.

Dans un second temps, il sera nécessaire d'effectuer une première évaluation de l'importance des efforts perturbateurs dus aux ondes de surface qui se propagent sur le liquide lorsqu'un flotteur se déplace. Il s'agit ici de déterminer la matrice des réponses impulsionnelles du système. Une fois les réponses impulsionnelles obtenues, on pourra évaluer l'importance des échos sur la sortie du système, c'est-à-dire les déplacements retardés dus au retour des ondes de surface. Toute la question est alors de savoir s'il est possible de préfiltrer la mesure de manière à supprimer les échos (déterministe) et donc les forces perturbatrices dues aux retours d'ondes. Deux approches complémentaires sont envisageables :

- Filtrage numérique : cette problématique est très proche de celle de la suppression d'échos dans les approches de type RDC (Dynamic Room Correction) en acoustique ou en télécommunication. On parle alors de multi delayed echos cancellation. Il va donc falloir déterminer si les méthodes de suppression d'échos à base de filtre RIF<sup>6</sup> qui sont utilisées en RDC sont adaptables ou non au capteur passif. Ces méthodes utilisent des filtres numériques RIF acausaux qui pour être utilisés nécessitent d'introduire un retard et une mémorisation de la sortie (voir figure 5.51). L'introduction d'un retard ne pose pas de problème de mise en oeuvre sur le capteur passif. Simplement l'effort filtré ne sera connu qu'après ce retard constant.
- Filtrage mécanique : il s'agit de traiter les bords de chaque bassin pour faire perdre un maximum d'énergie à l'onde qui repart en direction du flotteur. Comme les fréquences présentes sont basses, les absorber efficacement semble difficile. Par contre, il est possible de les diffuser assez facilement en utilisant par exemple des diffuseurs quadratiques sur les bords (diffuseur de Schroeder). On pourra également donner des formes spécifiques à la périphérie de chaque bassin afin de ne pas reconstruire l'énergie des ondes réfléchies vers le flotteur. Des bassins à débordement constant utilisant des pompes à micro débit pourraient également constituer une solution pour simuler des bassins infinis.

Il sera aussi nécessaire d'évaluer l'influence des effets capillaire sur les flotteurs. L'idée est ici de minimiser ces effets par le choix d'un liquide avec des tensions de surface appropriées.

En ce qui concerne l'amélioration de la stratégie d'asservissement de la plateforme, on peut citer les perspectives suivantes :

- le développement de modèles de force plus élaborés (filtre formeur) en fonction des applications envisagées et des connaissances *a priori* qu'on a sur les forces à mesurer ;

---

<sup>6</sup>Réponse impulsionnelle finie

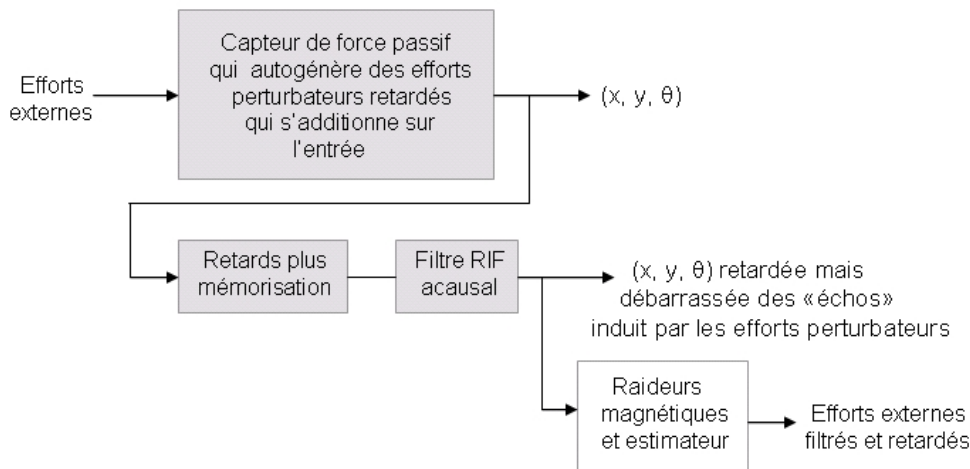


FIG. 5.51 – Filtrage numérique des efforts perturbateurs retardés.

- la mise au point d'une stratégie de réglage automatique des performances dynamiques du système bouclé à partir des deux paramètres de synthèse de haut niveau  $T_c$  et  $T_o$ . Ce réglage dépend de l'incertitude de mesure et du temps de réponse de l'estimation qui sont souhaités. Dans le cas où il est possible de réaliser plusieurs fois l'évènement qui génère la force qu'on désire caractériser, l'analyse de la réponse de l'estimateur devrait permettre d'ajuster «au mieux» ces deux paramètres ;
- étudier la possibilité de faire tourner plusieurs observateurs en parallèles avec différentes  $T_o$  pour avoir des incertitudes de mesure différentes. L'opérateur choisira ensuite la meilleure mesure obtenue ;
- le développement d'une stratégie de détection des instants pendant lesquels le modèle de force (processus de Wiener) adopté n'est plus valable. Régler  $T_o$  revient indirectement à spécifier le paramètre de diffusion  $Q_F$  du modèle de l'évolution brownienne de la force. Ce modèle suppose que la variance de la force à l'instant  $t$  vaut  $Q_F \times t$ , ce qui se traduit par un «cône» d'ouverture (cf. figure 5.2). Il se peut néanmoins que la force varie beaucoup plus rapidement que le paramètre  $Q_F$  le prévoit. Pour détecter l'inadéquation de  $Q_F$ , on peut monitorer les mesures des capteurs de position qui permettent de déterminer à quel moment les mesures deviennent aberrantes si on se fie au modèle de la force. D'après la théorie, la forme innovation est censée suivre une loi gaussienne de moyenne et d'écart-type connus. En faisant un test d'hypothèse basé sur une approche par maximum de vraisemblance, on devrait donc pouvoir déterminer à quel moment l'estimation de la force est vraisemblable et à quel moment elle ne l'est pas ;

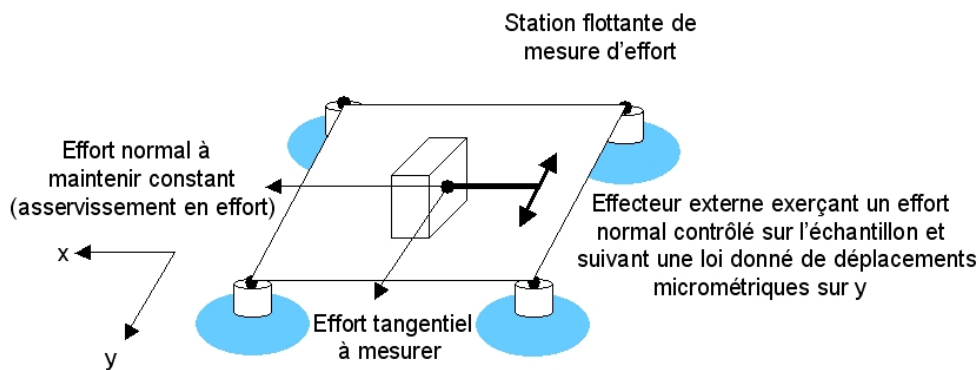


FIG. 5.52 – Principe d'un nanotribomètre avec la plate-forme par flottaison active.

- enfin il nous paraît intéressant de comparer les performances obtenues avec la synthèse  $H_2$  avec celles obtenues dans le cas d'une commande par synthèse  $H_\infty$  afin de mettre en évidence les avantages et les inconvénients de chaque commande.

La mesure de micro et nano force est une nécessité dans des domaines de recherche qui tendent à devenir de plus en plus pluridisciplinaire. Parmi ces domaines, on peut citer la nanotribologie qui est l'étude de la friction à l'échelle nanométrique. Cette étude nécessite de mettre en contact un échantillon avec un autre matériau (effecteur) ayant un profil de surface parfaitement connu (sphère par exemple). Lors du frottement entre les deux surfaces, on doit alors :

- pouvoir contrôler très précisément l'effort normal exercé sur l'échantillon. Cet effort normal peut être constant ou suivre une loi donnée (accroissement linéaire) ;
- mesurer l'effort tangentiel obtenu lorsqu'on met en mouvement l'effecteur afin de caractériser la friction entre les deux matériaux.

Il s'agit donc de dimensionner une plate-forme de mesure afin que sa plage de mesure, sa sensibilité et sa bande passante soient compatibles avec la nanotribologie. Il s'agit ensuite de traiter le signal pour en extraire les paramètres pertinents en nanotribologie. L'échantillon sera disposé verticalement pour que l'effort normal et tangentiel soient contenus dans le plan horizontal de la plate-forme. Il sera soumis à la sollicitation de l'effecteur externe piloté avec un profil de déplacement et de vitesse donné (voir figure 5.52). Il faudra déterminer :

- si l'ajustement de l'effort normal peut être obtenu via un asservissement en force. Cet asservissement se traduira par un ajustement du déplacement de la plate-forme selon  $x$  (voir figure 5.52) pour maintenir l'effort normal à une consigne donnée avec une erreur dynamique la plus faible possible. La consigne en force

pourra être constante ou suivre une progression linéaire ;

- si l'effort tangentiel peut être simultanément mesuré en mode actif ou passif en mesurant le déplacement (ou en l'asservissant) dans la direction  $y$  perpendiculaire à l'effort normal.

Une autre application envisageable est celle de l'étude du comportement élastique des surfaces nanostructurées lors d'une sollicitation par un champ de force en compression. Le rôle exercé par la géométrie, la taille et la périodicité des architectures nanométriques pourra ainsi être étudié.

La réalisation du premier prototype expérimental de la plate-forme est actuellement en cours, dans le cadre du projet ANR *STIL $\mu$ FORCE*. Démarré en février 2008, ce projet porte sur la phase de recherche et développement de deux stations de mesure de micro et nano force de manière à ce que l'industriel STIL basé à Aix en Provence puisse, à terme, les commercialiser.

## Annexe A

# Modélisation d'un aimant permanent par une distribution de charges magnétiques : détail de calcul

Cette annexe présente le calcul des composantes de l'induction magnétique produite par un aimant permanent modélisé par une distribution surfacique de charges magnétiques.

Si on considère un aimant cubique représenté sur la figure A.1 avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  les dimensions des côtés. Le champ d'induction magnétique produit au point  $M$  dû à la présence des deux surfaces chargées  $S^+$  et  $S^-$  avec une densité de charges magnétique  $J^+$  et  $J^-$  peut s'exprimer comme suit [39] :

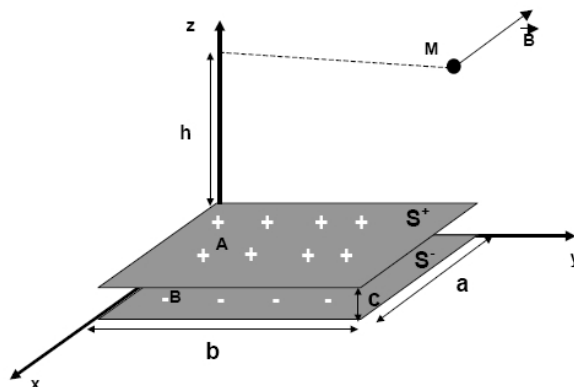


FIG. A.1 – Représentation d'un aimant permanent par une distribution surfacique de charges magnétiques.

$$\vec{B}(M) = \iint_{S^+} \frac{J}{4\pi} \frac{A\vec{M}}{|A\vec{M}|} dS^+ + \iint_{S^-} \frac{-J}{4\pi} \frac{B\vec{M}}{|A\vec{M}|} dS^-$$

L'intégration de l'équation précédente suivant  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  conduit à la détermination des composantes  $B_x(M)$ ,  $B_y(M)$  et  $B_z(M)$  :

$$B_x(M) = \frac{J}{4\pi} \log \left( \frac{b - y + \sqrt{x^2 - 2x a + y^2 + a^2 + b^2 - 2y b + z^2 - 2z c + c^2}}{b - y + \sqrt{x^2 + b^2 - 2y b + z^2 + y^2 - 2z c + c^2}} \cdot \frac{-y + \sqrt{x^2 - 2z c + z^2 + y^2 + c^2}}{-y + \sqrt{x^2 - 2x a + y^2 + a^2 + c^2 + z^2 - 2z c}} \cdot \frac{b - y + \sqrt{x^2 + b^2 - 2y b + z^2 + y^2}}{b - y + \sqrt{x^2 - 2x a + y^2 + a^2 + b^2 - 2y b + z^2}} \cdot \frac{-y + \sqrt{x^2 - 2x a + y^2 + a^2 + z^2}}{-y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$B_y(M) = \frac{J}{4\pi} \log \left( \frac{a - x + \sqrt{x^2 - 2x a + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2y b - 2z c}}{a - x + \sqrt{x^2 + a^2 - 2x a + z^2 + y^2 - 2z c + c^2}} \cdot \frac{-x + \sqrt{x^2 - 2z c + z^2 + y^2 + c^2}}{-x + \sqrt{x^2 - 2y b + y^2 + b^2 + c^2 + z^2 - 2z c}} \cdot \frac{a - x + \sqrt{x^2 + a^2 - 2x a + z^2 + y^2}}{a - x + \sqrt{x^2 - 2x a + y^2 + a^2 + b^2 - 2y b + z^2}} \cdot \frac{-x + \sqrt{x^2 - 2y b + y^2 + b^2 + z^2}}{-x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$



$$\begin{aligned}
B_z(M) = \frac{-J}{4\pi} & \left( \arctan \frac{xy}{(c-z)\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}} + \right. \\
& \arctan \frac{(a-x)y}{(c-z)\sqrt{(x-a)(x-a)+y^2+(z-c)^2}} + \\
& \arctan \frac{(b-y)x}{(c-z)\sqrt{(y-b)(y-b)+x^2+(z-c)^2}} + \\
& \arctan \frac{(x-a)(y-b)}{(c-z)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} + \\
& \arctan \frac{xy}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \arctan \frac{(a-x)y}{z\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \\
& \arctan \frac{(b-y)x}{z\sqrt{(y-b)^2+x^2+z^2}} + \\
& \left. \arctan \frac{(a-x)(b-y)}{z\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} \right)
\end{aligned}$$

## A.1 Calcul des matrices de préfiltre

Cette annexe présente le calcul détaillé des matrices de préfiltre  $H_o$ ,  $H_c$  et  $H'_o$  du chapitre 4.

### A.1.1 Matrice $H_o$

La composante  $h_{11}$  de la matrice  $H_o$  est calculée en régime stationnaire ( $x = x_c$  et  $\dot{x} = 0$ ) à partir de l'équation suivante :

$$(B'_f K_c - A_f)X = B'_f H_c x_c$$

Le développement de cette équation permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
& \left( \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{m} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{-k_x^m}{m} & \frac{-k_x^v}{m} \end{array} \right] \right) \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} (h_{11}) \cdot x_c \\
& \Rightarrow \left( \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{k_{11}}{m} & \frac{k_{12}}{m} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{-k_x^m}{m} & \frac{-k_x^v}{m} \end{array} \right] \right) \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_{11} \cdot x_c}{m} \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{k_{11}+k_x^m}{m} & \frac{k_{12}+k_x^v}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_{11} \cdot x_c}{m} \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_c \cdot (k_{11}+k_x^m)}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_{11} \cdot x_c}{m} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_{11} = k_{11} + k_x^m$$

### A.1.2 Matrice $H_c$

La composante  $h_1$  de la matrice  $H_c$  est calculée en régime stationnaire ( $x = x_c$  et  $\dot{x} = 0$ ) à partir de l'équation suivante :

$$(B_f' K_c - A_f)X = B_f' H_c x_c \quad (\text{A.1})$$

Le développement de cette équation permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K^e}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_x^m}{m} & \frac{-k_x^v}{m} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K^e}{m} \end{pmatrix} (h_1) \cdot x_c \\ & \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_1 \cdot K^e}{m} & \frac{k_2 \cdot K^e}{m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_x^m}{m} & \frac{-k_x^v}{m} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_1 \cdot x_c \cdot K^e}{m} \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{k_1 \cdot K^e + k_x^m}{m} & \frac{k_2 \cdot K^e + k_x^v}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_1 \cdot x_c \cdot K^e}{m} \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_c \cdot (k_1 \cdot K^e + k_x^m)}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_1 \cdot x_c \cdot K^e}{m} \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow h_1 = k_1 + \frac{k_x^m}{K^e} \end{aligned}$$

### A.1.3 Matrice $H_o'$

La composante  $h_{11}$  de la matrice  $H_o'$  est calculée en régime stationnaire ( $x = x_c$  et  $\dot{x} = 0$ ) à partir de l'équation suivante :

$$\underbrace{(B_f'' K_o - A_f)}_{\hat{A}} \hat{X} = \underbrace{(B_f'' H_o')}_{\hat{B}} \hat{Y}'_c \quad (\text{A.2})$$

Le développement de cette équation, en utilisant le principe de séparation ( $\hat{X} = X$ ), permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{K^e}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_x^m}{m} & \frac{-k_x^v}{m} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{K^e}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & -K^e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ i \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{11}}{m} & \frac{k_{12}}{m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_x^m}{m} & \frac{-k_x^v}{m} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{h_{11}}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{k_{11}+k_x^m}{m} & \frac{k_{12}+k_x^v}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{h_{11}}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ i \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_c \cdot (k_{11}+k_x^m)}{m} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_{11} \cdot x_c}{m} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x_c \cdot (k_{11} + k_x^m) &= h_{11} \cdot x_c \\ \Rightarrow h_{11} &= k_{11} + k_x^m\end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] M. Gauthier and S. Régnier, “Manipulation aux échelles microscopiques,” *JNRR07, Obernai*, 2007.
- [2] N. Chaillet, “Rencontre de la robotique et des microsystèmes,” *proc. of the Journées Nationales de la recherche en robotique-JNRR’99, Montpellier, France*, pp. 9–24, 1999.
- [3] M. Boukallel, “Etude, conception et réalisation d’un capteur de micro et nano-forces - application à la caractérisation de l’élasticité des ovocytes,” Ph.D. dissertation, Université de Franche-Comté, 2003.
- [4] O. Sébe, “Déconvolution aveugle et sismologie : estimation de la source sismique et des effets site,” Ph.D. dissertation, Université Joseph Fourier-Grenoble I, 2004.
- [5] G. Asch, “Les capteurs en instrumentation industrielle,” *Dunod*, 1999.
- [6] J. Courtier and P. Giacomo, “Vocabulaire de la mesure,” *Techniques de l’Ingénieur*, 2003.
- [7] T. Stöckli, J. Auerswald, P. Schmid, S. Perroud, A. Steinecker, A. Codourey, and H. Knapp, “High precision robotics for automated cell handling,” *Rapport d’activité du CSEM*, 2006.
- [8] P. Lambert, “A contribution to microassembly : a study of capillary forces as a gripping principle,” Ph.D. dissertation, Université libre de Bruxelles, 2005.
- [9] H. Butt, B. Capella, and M. Kappl, “Force measurements with the atomic force microscope : technique, interpretation and applications,” *Surface science reports*, vol. 59, pp. 12–22, 2005.
- [10] J. Takadoum, *Matériaux et surfaces en tribologie*, Lavoisier, Ed. Hermes science, 2007.
- [11] T. Ando, N. Kodera, D. Maruyama, E. Takai, K. Saito, and A. Toda, “A high-speed atomic force microscope for studying biological macromolecules in action,” *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 4851-4856, p. 41, 2002.
- [12] P. Rougeot, S. Régnier, and N. Chaillet, “Forces analysis for micro-manipulation,” *Proceedings 2005 IEEE international symposium on computational intelligence in robotics and automation, espoo, Finland*, pp. 105–110, june 2005.

- [13] M. Girot, M. Boukhalel, and S. Régnier, "Towards a non-destructive in vitro biomechanical characterization," *ASM - IEEE EMBS Conference on Bio-, Micro- and Nanosystems, San Francisco, USA*, janvier 2006.
- [14] F. Dionnet, "Télé-micro-manipulation par adhésion," Master's thesis, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, 2005.
- [15] N. Kato, I. Suzuki, H. Kikuta, and K. Iwata, "Force-balancing microforce sensor with an optical-fiber interferometer," *Review of scientific instruments*, vol. 68, pp. 2475–2478, juin 1997.
- [16] F. Arai, M. Nakajima, L. Dong, and T. Fukuda, "Pico-newton order force measurement using a calibrated carbon nanotube probe by electromechanical resonance," *Proceedings of the 2003 IEEE international conference on robotics and automation Taipei, Taiwan*, pp. 300–305, september 14-19 2003.
- [17] X. N. L. W. J. Shen, Y. T. and J. Tan, "A high sensitivity force sensor for microassembly : design and experiments," *IEEE/ASME Int. Conf. on advanced intelligent mechatronics*, pp. 703–708, 2003.
- [18] N. White and J. Turner, "Thick-film sensors : past, present and futur," *Measurement science technology*, vol. 8 : 43831, 1996.
- [19] S. Fahlbush and S. Fatikow, "Micro-force sensing in a micro robotic system," *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3435–3440, 2001.
- [20] F. Arai, A. Kawaji, T. Sugiyama, Y. Onomura, M. Ogawa, T. Fukuda, H. Iwata, and K. Itoigawa, "3d micromanipulation system under microscope," *International symposium on micromechatronics and human science*, pp. 127–134, 1998.
- [21] Y. Sun, N. Fry, D. Potasek, D. Bell, and B. Nelson, "Characterizing fruit fly flight behaviour using a microforce sensor with a new comb-drive configuration," *Journal of microelectromechanical systems*, vol. 14, pp. 4–11, 2005.
- [22] Y. Sun, W. Kai-Tak, K. Roberts, J. Bischof, and J. Bradley, "Mechanical property characterization of mouse zona pellucida," *IEEE transactions on nanobioscience*, vol. 2, no. 4, pp. 279–285, December 2003.
- [23] F. Beyeler, Z. Muntwyler, M. Nagy, and B. Nelson, "A multi-axis mems force-torque sensor for measuring the load on a microrobot actuated by magnetic fields," *Proc. IEEE Int. Conf. on intelligent Robots and systems and Automation, San diego, CA, USA*, pp. 3803–3808, 2007.
- [24] Y. Shengyuan and S. Taher, "Micromachined force sensors for study of cell mechanics," *Review of scientific instruments* 76, 044301, 2005.
- [25] M. Boukallel, E. Piat, and J. Abadie, "Passive diamagnetic levitation : theoretical foundations and application to the design of a micro-nano force sensor," *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ intl. Conference on Intelligent Robots and Systems Las Vegas, Nevada*, pp. 1062–1067, October 2003.
- [26] M. Boukallel, J. Abadie, and E. Piat, "Levitated micro-nano force sensor using diamagnetic levitation," *Proc. of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*, pp. 3219–3224, september 2003.

- [27] A. Tonck, S. Bec, D. Mazuyer, J. Georges, and A. Lubrecht, "The ecole centrale de lyon surface force apparatus : an application overview," *Proc Inst Mech Eng*, vol. 213, pp. 353–61, 1999.
- [28] J. Cayer-Barrioz, A. Tonck, D. Mazuyer, P. Kapsa, and A. Chateauminois, "Nanoscale mechanical characterization of polymeric fibres," *J Polym Sci : Part B : Polym Phys*, 2005.
- [29] J. Georges, A. Tonck, and D. Mazuyer, "Interfacial friction of wetted monolayers," *Wear*, vol. 175, pp. 59–62, 1994.
- [30] S. Bec, A. Tonck, J. Georges, E. Georges, and J. Loubet, "Improvements in the indentation methode with a surface force apparatus," *Philos Mag A*, vol. 74(5), pp. 1061–72, 1996.
- [31] J. Soen, "Contribution à la modélisation et à la commande des microsystèmes capteurs non linéaires," Ph.D. dissertation, Université Joseph Fourier, 2007.
- [32] C. Gosse and V. Croquette, "Magnetic tweezers : Micromanipulation and force measurement at the molecular level," *Biophysical Journal*, 2002.
- [33] Z. Dai, S. N.Gorb, and U. Schwarz, "Roughness-dependent friction force of the tarsal claw system in the beetle pachnoda marginata (coleoptera, scarabaeidae)," *The journal of experimental biology*, vol. 205, pp. 2479–2488, 2002.
- [34] A. Varenberg, S. Peressadko, S. Gorb, E. Arzt, and S. Mroczek, "Advanced testing of adhesion and friction with microtribometer," *Review of scientific instruments*, vol. 77, pp. 066 105–1 to 066 105–3, 2006.
- [35] M. Zaeh, J. Zimmermann, A. Zitzmann, and M. Schilp, "Non-contact handling in microfabrication," *Proceedings of the Euspen international topical conference, Aachen, Germany*, pp. 325–328, 2003.
- [36] V. Vandaele, P. Lambert, and A. Delchambre, "Non-contact handling in microassembly : Acoustical lévitation," *Precision Engineering*, vol. 29, pp. 491–505, 2005.
- [37] K. Taguchi, K. Atsuta, T. Nakata, and M. Ikeda, "Levitation of a microscopic object using plural optical fibers," *optics communications*, vol. 176, pp. 43–47, 2000.
- [38] S. Earnshaw, "On the nature of the molecular forces," *trans. Cambridge phil.Soc.*, pp. 97–112, 1842.
- [39] J. Yonnet, "Pratique des matériaux industriels," *Les référentiels Dunod*, 2000.
- [40] F. Bancel and G. Lemarquand, "Three-dimensional analytical optimization of permanent magnets alternated structure," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34(1), pp. 242–247, 1998.
- [41] B. Bleaney and B. Bleaney, *Electricity and magnetism*, T. edn, Ed. Oxford university press, 1976.
- [42] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, T. Edition, Ed. John Willey and sons, 1998.

- [43] J. Stepanek, H. Rostaing, S. Lesecq, J. Delmare, and O. Cugat, “position control of a levitating magnetic actuator applications to microsystems,” *Proceeding of the IFAC world congress*, 2005.
- [44] J. Radix, “Quaternions : application aux rotations dans l’espace,” *Techniques de l’Ingénieur*.
- [45] R. Guiziou, R. et Chivassa, “Cours de mathématiques appliquées à la mécanique,” 1994.
- [46] C. Johnson, “Observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs,” *International journal of control*, vol. 21, pp. 825–831, 1975.
- [47] M. Hou and P. Mtiller, “Design of observer for linear systems with unknown inputs,” *IEEE trans. on Automatic Control*, vol. 37, p. 871, 1992.
- [48] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. XU, “Full-order observers for linear systems with unknown inputs,” *IEEE trans. on Automatic Control*, vol. 39, pp. 606–609, 1994.
- [49] X. Yi and S. Mehrdad, “Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design,” *Automatica*, vol. 39, pp. 1389–1398, 2003.
- [50] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, and J. Zerubia, “Estimation rapide du paramètre de régularisation en déconvolution d’images,” *ORASIS*, 2001.
- [51] D. Commenges, “Approche bayésienne en traitement de signal : estimation du signal d’entrée d’un système linéaire,” *Revue de statique appliquée*, vol. 30, pp. 13–22, 1982.
- [52] A. Jalobeanu, “Modèles, estimation bayésienne et algorithmes pour la déconvolution d’images satellitaires et aériennes,” Ph.D. dissertation, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2001.
- [53] A. Tikhonov and V. Arsenin, “Méthodes de résolution des problèmes mal posés,” *Moscou, Editions Mir*, 1997.
- [54] R. Clayton and R. Wiggins, “Source shape estimation and deconvolution of teleseismic bodywaves,” *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, vol. 47, pp. 151–177, 1976.
- [55] G. Demoment, “Image reconstruction and restoration : overview of common estimation structures and problems,” *IEEE transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37(12), pp. 2024–2036, 1989.
- [56] E. Sekko, “Quelques applications du filtrage optimal à la déconvolution,” Ph.D. dissertation, Université Claude Bernard-Lyon I, 1992.
- [57] C. Johnson, “Accomodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems,” *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 16, pp. 635–644, 1971.
- [58] G. Hostetter and J. Meditch, “Observing systems with unmeasurable inputs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, pp. 307–308, 1973.

- [59] P. De Larminat, *Automatique, commande des systèmes linéaires*, 2nd ed. Hermès, 2000.
- [60] —, *Automatique appliquée*. Hermès, 2007.
- [61] B. Lang, P. Paquier, and J. Friedt, “One way to design the control law of a mini-uav,” *3rd US-European competition and workshop on micro air vehicle systems (MAV07) and european air vehicle conference and flight competition (EMAV2007)*, september 2007.
- [62] H. Bourlès, *Systèmes linéaires : de la modélisation à la commande*, I. . 978-2-7462-1300-5), Ed. Hermès - Lavoisier, 2006.



## Résumé

En microrobotique, la mesure de micro et nano force figure parmi les informations nécessaires pour caractériser les interactions mécaniques présentes à l'échelle micrométrique. Dans cette optique, nous avons développé un capteur de mesure de micro et nano force reposant sur un principe de flottaison-magnétique. L'organe sensible du capteur est une plate-forme macroscopique rectangulaire sur laquelle s'appliquent les forces et couples à mesurer. La sustentation et le maintien de la plate-forme sont assurés par le biais de forces magnétiques et de la poussée d'Archimède appliquée à quatre flotteurs placés à ses coins. La plate-forme est conçue pour mesurer uniquement des forces dans le plan horizontal ainsi que le couple vertical associé. L'étendue de mesure des forces varie entre  $\pm 100 \mu\text{N}$  avec une résolution de l'ordre du nanoNewton. Elle travaille en mode actif grâce à un asservissement autour de sa configuration d'équilibre (établie en absence d'efforts à mesurer). La nature des efforts de rappel utilisés pour la mise en œuvre de l'asservissement est électromagnétique. Les modèles magnétique et électromagnétique développés permettent de déterminer les forces qui s'appliquent au centre de gravité de la plate-forme par le biais de la connaissance de la configuration spatiale de cette dernière et des courants dans les bobines de commande. En termes d'application, cette plate-forme peut être utilisée dans le cadre de la caractérisation des micro-objets déformables (micromécanismes, cellules, etc.) et des microsursaces.

**Mots clés** : mesure de micro et nano force, microrobotique, ressort magnétique, estimation active d'entrée inconnue, synthèse H2, nanotribologie, électromagnétisme.

## Abstract

In microrobotics, the micro and nano force measurement is among the necessary information needed to characterize mechanical interactions present at the micrometer scale. Accordingly, we developed a micro and nano force sensor based on a floating-magnetic principle. The sensor sensing part is a macroscopic rectangular platform on which is applied the forces and the torques to be measured. The sustentation of the platform is done thanks to magnetic forces and upthrust buoyancy applied on four floats placed at its corners. The platform is designed to only measure forces in the horizontal plane and the associated vertical torque. The forces measurement range varies between  $\pm 100 \mu\text{N}$  with a nanoNewton resolution. The platform works in active mode with a control around its equilibrium configuration (established in absence of external efforts). The nature of return forces used for the implementation of the control loop is electromagnetic. The magnetic and electromagnetic models allow determining forces applied on the platform centre of gravity according to the knowledge of its spatial configuration and currents in the control coils. In terms of application, this platform can be used for deformable micro-objects (micromechanisms, cells, etc.) and microsursaces characterization.

**Keywords** : micro and nano force measurement, microrobotic, magnetic spring, unknown input active estimation, H2 synthesis, nanotribology, electromagnetism.