



**HAL**  
open science

# Modélisation des paramètres R et L de matériels électriques bobinés par la méthode des éléments finis 3D.

Michaël Joan

## ► To cite this version:

Michaël Joan. Modélisation des paramètres R et L de matériels électriques bobinés par la méthode des éléments finis 3D.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2004. Français. NNT: . tel-00408300

**HAL Id: tel-00408300**

**<https://theses.hal.science/tel-00408300>**

Submitted on 30 Jul 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Institut National Polytechnique de Grenoble**

*N° attribué par la bibliothèque*

/ / / / / / / / / / / / / / /

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

Spécialité : « Génie Electrique »

Préparée au **Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble**

Dans le cadre de l'école doctorale « Electronique, Electrotechnique, Automatique,  
Traitement du Signal »

présentée et soutenue publiquement par

**Michaël JOAN**

Le 9 janvier 2004

**Titre :**

---

**Modélisation des paramètres R et L de matériels électriques bobinés par la méthode des éléments finis 3D.**

---

*Directeurs de thèse : Gérard Meunier et Thierry Chevalier*

**JURY**

M. JEAN-PIERRE KERADEC

M. STEPHANE CLENET

M. JAVAD FOULADGAR

M. GERARD MEUNIER

M. THIERRY CHEVALIER

M. OLIVIER MOREAU

Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur



# Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé pendant les deux premières années au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble et la dernière année au centre de Recherche et de Développement d'EDF Clamart. Je remercie Monsieur Jean-Pierre Rognon, Directeur du LEG, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire. Je remercie Messieurs Jean-Louis Coulomb et Yves Maréchal, respectivement ancien et nouveau Directeur de l'Equipe Modélisation et CAO en Electromagnétisme, pour m'avoir accueilli dans leur équipe.

Pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse j'adresse de respectueux remerciements à Messieurs :

Jean-Pierre Kéradec, Professeur à l'Université Joseph Fourier et Chercheur au LEG, qui a accepté de présider le jury,

Stéphane Clénet, Professeur à l'ENSAM, qui a accepté d'être rapporteur du mémoire de thèse,

Javad Fouladgar, Professeur à l'IUT de Saint-Nazaire, qui a accepté d'être rapporteur du mémoire de thèse,

Gérard Meunier, Directeur de Recherche au LEG, qui a encadré cette thèse,

Olivier Moreau, Ingénieur Chercheur à EDF, qui a co-encadré cette thèse,

Thierry Chevalier, Maître de Conférence à l'ENSIEG, qui a co-encadré cette thèse.

Je voudrais avant tout exprimer une profonde gratitude à mes directeurs de thèse. Merci à toi Gérard pour tes qualités d'enseignant, de chercheur pour ta diplomatie mais également pour ta bonne humeur. Merci à toi Thierry pour ton avis éclairé et rationnel sur de nombreux sujets et ton soutien à chaque moment.

Merci à toi Olivier pour avoir été mon responsable au sein d'EDF et pour m'avoir guidé tout au long de ces 3 années de thèse. Tes remarques pertinentes, les nombreuses discussions et tes qualités pédagogiques m'ont été très précieuses et encourageantes.

Je remercie les nombreux chercheurs du LEG, dont la qualité et la renommée ne sont plus à démontrer, pour ce climat serein et joyeux qu'ils contribuent à créer.

Je remercie tous les Ingénieurs, Techniciens et Administratifs du LEG pour leur aide. Un grand Merci à Patrice Labie et à Patrick Eustache qui m'ont aidé tout au long de cette thèse à résoudre mes petits et gros tracas informatiques. Merci pour votre sympathie et votre sincérité. Un grand Merci également à Danielle Collin, Florence François, Marie-Thérèse Loubinoux, Elise Riado, Monique Boizard.

Pour ces trois années passées en votre compagnie, je remercie de tout cœur les Doctorants et DEA du LEG. Chaque journée avec son lot de pause café, chaque sortie ski, randonnée, chaque conférence, chaque tournoi de foot resteront dans mes souvenirs. Merci à Fleur, Singva la surfeuse d'argent, Jean-Daniel l'amiénois, Gérald le marseillais, Olivier le Breton, Christophe dit CCM, Aktham celui qui ne dit jamais non à une pause café, Gregory le footeux, Raphaël, Sébastien.

Je tiens à remercier également tous ceux du Volley-ball et plus particulièrement Daniel, mon capitaine, sans qui je n'aurais jamais eu l'idée de construire une équipe de foot et la faire participer à un championnat. Ce fut une grande expérience même si nous avons dû attendre plusieurs mois pour connaître notre première victoire. Je remercie tous ceux qui m'ont suivi dans

cette aventure : Joël, Laurent, Yvon, Bruno, Orphée, Stéphane, Niko, Nicolas, Alain et Greg, Raph, Aktham (désolé pour toutes ces blessures).

Je tiens à remercier mes amis Anwar, Christophe, Edwina, Laure, Luc, Marie, Rachel, Razia et Romu pour leur sincérité, générosité mais aussi pour leur méconnaissance de mon sujet de thèse et pour notre amitié toujours grandissante.

Je ne saurais pas dire ou écrire assez de remerciements à la Femme de ma vie. Merci à toi pour avoir été toujours là pour corriger mon mémoire et surtout pour m'avoir soutenu à chaque instant.

Merci également à ma Sœurette, une professeur de sciences physiques motivée et passionnée.

Mes derniers remerciements s'adressent à ma Maman à qui je dois une infinité de fois plus que je ne pourrais lui rendre. Tu n'as jamais économisé tes forces, ton temps ou ton argent pour nous donner à ma sœur et à moi ce qu'il y a de mieux. Merci Maman.

# Table des matières

<b>TABLE DES MATIÈRES</b> .....	<b>2</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	<b>6</b>
<b>CHAPITRE 1 :</b> .....	<b>10</b>
<b>FORMULATIONS POUR MODÉLISER UN TRANSFORMATEUR</b> .....	<b>10</b>
I.    MISE EN FORME DU PROBLÈME PHYSIQUE .....	12
II.   FORMULATIONS SANS PRISE EN COMPTE DES COURANTS DE FOUCAULT .....	14
II.1.  Formulation $T_0 - \phi$ .....	14
II.2.  Formulation $T_0 - \Phi \phi$ .....	15
II.3.  Calcul de $T_0$ .....	16
II.4.  Prise en compte des régions magnétiques non simplement connexes .....	18
III.  FORMULATIONS AVEC PRISE EN COMPTE DES COURANTS INDUITS.....	21
III.1.  Formulation $T - \phi$ (régions conductrices simplement connexes) .....	21
III.2.  Formulation $T - T_0 - \phi$ (régions conductrices non simplement connexes) .....	22
III.3.  Formulation $T_0 - \phi$ utilisant une perméabilité complexe ( $\mu^*$ ).....	25
<b>CHAPITRE 2 :</b> .....	<b>28</b>
<b>MÉTHODE DE SUBSTITUTION PAR UNE PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE COMPLEXE POUR MODÉLISER UN TRANSFORMATEUR</b> .....	<b>28</b>
I.    PRINCIPE DE LA PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE COMPLEXE .....	30
II.   PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE COMPLEXE 2D .....	31
II.1.  Equations générales .....	32
II.2.  Expression de la perméabilité magnétique complexe 2D .....	33
II.2.1.  Matériau réel : conductivité électrique réelle $\sigma$ et une perméabilité $\mu$ réelle : .....	33
II.2.2.  Matériau équivalent : conductivité électrique nulle et perméabilité magnétique $\mu^*$ complexe .....	34
III.  PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE COMPLEXE 3D .....	35
III.1.  Le principe pour la résolution de cette équation différentielle : .....	36
III.2.  Passage du problème physique au problème mathématique : .....	36
III.3.  Décomposition spectrale de la partie spatiale de $(P)$ .....	38
III.4.  Calcul des $Q_n(x)$ .....	40
III.5.  Conclusion : .....	42
IV.   HOMOGÉNÉISATION .....	43
V.    LES EFFETS PROPRES – RÉSISTANCE DE STOLL.....	46
V.1.  Calcul du champ magnétique $H$ .....	46
V.2.  Calcul de la densité de puissance harmonique dans le conducteur.....	47
V.2.1.  Puissance réactive .....	48
V.2.2.  Puissance active .....	48
V.3.  Le calcul des matrices $(R)$ et $(L)$ .....	49

<b>CHAPITRE 3 :</b>	<b>52</b>
<b>VALIDATION 2D – 3D</b>	<b>52</b>
I. VALIDATION 2D	54
I.1. <i>Champ extérieur imposé parallèle au bord d'un conducteur isolé</i>	54
I.1.1. Conducteur avec une section 10×40 mm <sup>2</sup>	54
I.1.2. Cas particulier d'un conducteur à section carrée	60
I.1.3. Conclusion	62
I.2. <i>Cas d'un champ magnétique extérieur quelconque sur un conducteur isolé</i>	63
I.2.1. Analyse des phénomènes	63
I.2.2. Etude complète	66
I.2.3. Conclusion	67
I.3. <i>Etude multi-brins, étude des phénomènes</i>	67
I.3.1. Vérification de l'hypothèse sur le champ surfacique $H_s$ ( $H_s$ uniforme aux bords des conducteurs)	67
I.3.2. Comparaison entre modèles $(\mu, \sigma)$ et $(\mu^*)$	69
I.3.3. Effet de proximité	70
I.3.4. Conclusion	72
I.4. <i>Multi-brins. Homogénéisation</i>	72
I.4.1. Cas d'étude	72
I.4.2. Simulations et résultats	74
I.4.3. Conclusion	75
I.5. Conclusion	75
II. VALIDATION 3D	76
II.1. <i>Cas idéal</i>	76
II.2. <i>Comparaison avec des approximations circulaires</i>	77
II.3. <i>Cas où le champ est perpendiculaire</i>	79
II.4. <i>Comparaison entre les composantes 2D et la 3D de <math>\mu^*</math></i>	81
II.4.1. Cas d'une perméabilité magnétique complexe anisotrope	81
II.4.2. Cas d'une perméabilité magnétique complexe isotrope	82
II.4.3. Conclusion	83
II.5. Conclusion	83
III. CONCLUSION	84
<b>CHAPITRE 4 :</b>	<b>86</b>
<b>DU CONDUCTEUR AU TRANSFORMATEUR</b>	<b>86</b>
I. LE TENSEUR DE PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE COMPLEXE	88
II. LA PERMÉABILITÉ COMPLEXE POUR LE CIRCUIT MAGNÉTIQUE	91
III. CAS AXISYMETRIQUES	92
III.1. <i>Deux conducteurs circulaires</i>	93
III.1.1. Cas général	94
III.1.2. Cas de la dissociation des effets	95
III.2. <i>Deux paquets de quatre conducteurs</i>	97
III.3. Conclusion	106
IV. PRÉSENCE D'UN CIRCUIT MAGNÉTIQUE	106
1) Cas complet : présence d'un circuit magnétique de perméabilité magnétique complexe (anisotrope)	109
2) Cas avec $\text{Re}(\mu_{CM}^*)$ : seule la partie réelle de $\mu^*$ du circuit magnétique est prise en compte	110
3) Cas complet avec un conducteur homogénéisé	111
4) Cas avec $\text{Re}(\mu_{CM}^*)$ et homogénéisation des galettes	112

V. <u>CONCLUSION</u> .....	113
<b>CHAPITRE 5 :</b> .....	<b>116</b>
<b>TRANSFORMATEUR CAS-TEST</b> .....	<b>116</b>
I. <u>PRÉSENTATION DE LA PROBLÉMATIQUE</u> .....	118
I.1. <u>Les transformateurs</u> .....	118
I.2. <u>Notre cas test</u> .....	120
I.3. <u>Calcul des matrices</u> .....	121
II. <u>LE PRÉ-PROCESSEUR</u> .....	124
III. <u>RÉSULTATS DES SIMULATIONS 2D – 3D AVEC <math>\mu^*</math></u> .....	127
III.1. <u>Dispositif 3D</u> .....	127
III.2. <u>Etude avec circuit magnétique (<math>\mu_0, \sigma = 0</math>)</u> .....	128
III.2.1. <u>Fréquence de 50 Hz</u> .....	129
III.2.2. <u>Fréquence de 10 kHz</u> .....	131
III.3. <u>Etude avec circuit magnétique (<math>\mu^*</math>)</u> .....	133
IV. <u>CONCLUSION</u> .....	133
<u>CONCLUSION GENERALE</u> .....	134
<u>BIBLIOGRAPHIE</u> .....	136
<u>ANNEXE 1 : EXPRESSION DU CHAMP MAGNÉTIQUE POUR UN CONDUCTEUR RECTANGULAIRE ALIMENTÉ (FORMULE DE STOLL)</u> .....	140
<u>ANNEXE 2 : FORMULES SUR LES COSINUS ET SINUS HYPERBOLIQUES UTILISANT DES NOMBRES COMPLEXES</u> .....	144
<u>ANNEXE 3 : PROGRAMME FORTRAN CALCULANT LES PERMÉABILITÉS MAGNÉTIQUES COMPLEXES</u> .....	146
<u>ANNEXE 3 : FIGURES DU CHAMP 2D</u> .....	160
<u>ANNEXE 5 : USR_DBDH.F</u> .....	162
<u>ANNEXE 6</u> .....	178
1. <u>Etude sur le calcul EF de la résistance Stoll</u> .....	178
2. <u>Influence du rayon de courbure sur le calcul EF de la résistance de Stoll</u> .....	178
<u>ANNEXE 7 : VALEURS DES <math>\mu^*</math> POUR LE TRANSFORMATEUR CAS-TEST</u> .....	180



107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115  
116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133  
134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156  
157  
158  
159  
160  
161  
162  
163  
164  
165  
166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186  
187  
188  
189  
190  
191  
192  
193  
194  
195  
196  
197  
198  
199  
200

# INTRODUCTION GENERALE

De nos jours, l'Homme utilise l'énergie électrique sous de nombreuses formes de manière instinctive : dans sa maison, pour ses loisirs, sur son lieu de travail, dans sa voiture qui deviendra peut-être toute électrique, etc. Que se passe-t-il lorsque subitement l'électricité vient à manquer ? L'activité économique de notre société est totalement bloquée [Californie en 2001, New-York en août 2003 et Italie en septembre 2003]. Pourtant, l'Homme de la rue imagine rarement le cheminement de cette énergie depuis son lieu de production jusqu'à l'amplificateur haute fidélité duquel il écoute ses morceaux de musique préférés. A sa sortie de centrale, l'électricité produite est inutilisable. Plusieurs transformations doivent amener le niveau de tension de quelques milliers de volts en sortie de l'alternateur à quelques dizaines ou quelques centaines de volts pour les appareils électrique d'usage courant. Dans ce but, nous utilisons des transformateurs de tension. Cet élément est essentiel dans la conversion d'énergie. Les puissances mises en jeu dans un transformateur vont de plusieurs mégawatts en sortie de centrale à quelques watts pour les petits appareils électriques ménagers. Les objectifs recherchés sont toujours les mêmes : passer d'un niveau de tension à un autre, la plupart du temps avec une isolation galvanique entre les deux. Les problèmes auxquels sont confrontés les constructeurs sont souvent de natures différentes. Pour un transformateur d'amplificateur très haute fidélité, il faut surtout tenir compte, de l'inductance dite « de fuite » et des pertes. Pour un transformateur de 400/220 kV, les tensions mises en jeu sont telles que la préoccupation principale du fabricant concerne l'isolation entre spires.

Ce travail de recherche a été financé par EDF dont la préoccupation majeure est de conserver son parc de transformateurs en service aussi longtemps que possible.

Les surtensions entre enroulements peuvent être à l'origine d'avaries dans les transformateurs ; les contraintes internes alors engendrées peuvent dépasser la tenue diélectrique des isolants et produire un amorçage entre spires. Les spécifications techniques et les essais normalisés en vigueur actuellement ne permettent pas, aujourd'hui, d'éliminer tous les risques de défaillances liés à l'excitation des résonances internes par des ondes oscillantes ou de fronts raides issus de postes blindés. De plus, la réduction des marges de tenue des matériels, consécutive à une meilleure optimisation de leur conception, explique aussi la nécessité de mieux connaître ces phénomènes. Ainsi, la confrontation à ces nouveaux contextes d'exploitation et à l'évolution des matériels a justifié la mise en œuvre d'un outil de simulation numérique du transformateur en Hautes Fréquences (du kHz à plusieurs MHz) : SUMER (SURtension dans les Matériels Electriques en Réseau) [Moreau et al., 1995]. Cet outil sera utilisé tant pour l'expertise que pour la définition de futures spécification ou l'élaboration de méthode de surveillance et de diagnostic des interactions Hautes Fréquences entre un transformateur et un réseau.

La méthode retenue pour l'étude des surtensions internes consiste à représenter un transformateur par un réseau d'élément localisé RLC caractérisant les effets résistifs (R), inductifs (L) et capacitifs (C) de ses bobinages. Pour cela, les bobinages (HT, BT, Neutre, Intermédiaire, réglage...) sont discrétisés en éléments électriques correspondant à une portion de bobinage (spire, groupe de spires, galettes...). La modélisation de l'élément électrique par une cellule en II conduit alors à un réseau électrique, représentant le transformateur. La validité d'une telle représentation demande à ce que les longueurs de bobinage des éléments électriques soient petites devant la plus courte longueur d'onde du domaine fréquentiel considéré. Le calcul des contraintes internes en exploitation consiste à déterminer les niveaux de potentiels aux noeuds de ce réseau lorsqu'il est connecté à un poste en manœuvre ou en situation de défaut.

La démarche de modélisation mise en œuvre dans le logiciel SUMER développé par EDF peut se diviser en huit étapes définissant trois grandes phases :

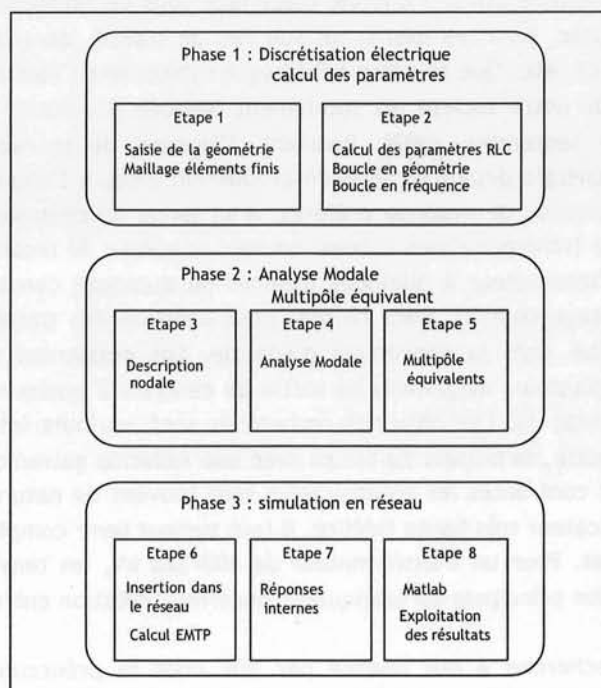


Figure 0 : Déroulement de la simulation.

La première phase consiste à choisir la discrétisation électrique conduisant au réseau électrique représentant le transformateur, à choisir la discrétisation de la plage de fréquence étudiée et déterminer les paramètres de ce réseau (inductances propres et mutuelles, capacités et résistances) à chaque fréquence à partir des données constructives du transformateur (géométrie et matériaux). La seconde phase est consacrée à l'analyse modale et à la détermination des multipôles équivalents du transformateur afin de permettre son intégration dans le réseau pour effectuer des simulations en réseau (phase 3).

Notre travail de recherche a eu principalement pour but de développer la première phase, en particulier la détermination des paramètres R et L d'un transformateur. Dans ce mémoire, il n'a pas été question du calcul des paramètres capacitifs C. Cette démarche de modélisation a tout d'abord été mise au point en 2D. Notre rôle durant ces trois dernières années a été de développer la méthode en 3D.

L'option choisie par EDF a été d'utiliser le logiciel de calcul de champ électromagnétique Flux2D [Sabonnadière et al., 1982], tant pour la saisie des données géométriques définissant implicitement la discrétisation électrique choisie, que pour le calcul des paramètres.

La simulation 2D prend en compte des pertes dites de proximité, dues aux courants de Foucault dans les conducteurs massifs, négligées auparavant. Cette étude a consisté à rechercher une méthode de calcul de ces pertes compatible avec le choix de détermination des paramètres électromagnétiques R, L, C et G par calcul de champ 2D (meilleur compromis temps CPU-précision).

Elle est basée sur une équivalence énergétique. Ceci a amené au concept de perméabilité magnétique complexe.

Des développements spécifiques [Girard, 1995] réalisés dans Flux2D ont permis le calcul automatisé des matrices capacité, inductance et résistance, échantillonnées en fréquence, caractérisant les interactions électromagnétiques entre les éléments de bobinage modélisés par des cellules en  $\Pi$  :

- Les capacités et les pertes diélectriques sont déterminées à partir d'un calcul électrostatique à permittivité magnétique complexe.
- Les inductances et les pertes magnétiques (résistances, courants de Foucault ou hystérésis dans le circuit magnétique) sont obtenues par un calcul magnétodynamique à perméabilité magnétique complexe.

Jusqu'à présent, il n'était pas envisageable de modéliser un transformateur de manière tridimensionnelle puisque les techniques ne le permettaient pas. En effet, la prise en compte indispensable des courants induits demandait des besoins informatiques importants (capacité mémoire, rapidité des processeurs,...). Avec les récents développements en terme de modélisation numérique, des formulations ont été mises au point [Le Floch, 2002] et ont permis de repousser les limites d'utilisation. Couplé au concept de perméabilité magnétique complexe, cela va nous permettre de traiter des cas de transformateurs tridimensionnels.

Dans un premier chapitre, nous présenterons la formulation la plus adéquate pour modéliser un problème physique contenant des régions conductrices, magnétiques et ferromagnétiques tout en permettant un couplage avec les équations de circuit.

Le second chapitre présentera le concept de la perméabilité magnétique complexe. Ce concept est basé sur la substitution d'un matériau conducteur par un matériau hystérétique, non conducteur. La perméabilité magnétique complexe est obtenue à partir d'un calcul analytique de puissances actives et réactives dans un milieu conducteur. Ce calcul est détaillé dans le chapitre 2.

Suite à ces deux premiers chapitres assez théoriques nous allons tester notre méthode sur des cas simples en 2D et 3D. Le chapitre présentera tous les tests de validation effectués. Cela nous aura permis également d'améliorer notre compréhension des phénomènes mis en jeu.

Dans le but de modéliser un transformateur de puissance cette validation ne nous a pas suffi pour passer directement à l'étude d'un cas industriel. Dans le quatrième chapitre nous traiterons des cas de simulation plus complets qui nous ont permis de valider notre méthode tridimensionnelle d'obtention des matrices (R) et (L).

Dans le cinquième et dernier chapitre de ce mémoire nous présenterons la problématique complète liée à un transformateur de puissance ainsi que l'obtention des matrices (R) et (L) de manière plus précise. Nous présenterons également un pré-processeur développé au cours de ce travail de recherche dans le cadre d'un stage de DEA [Jeanniard, 2003].

Le premier chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

Le cinquième chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

Le sixième chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

Le septième chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

Le huitième chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

Le neuvième chapitre est consacré à la présentation de l'ouvrage et à la justification de son existence.

## **CHAPITRE 1 :**

# **Formulations pour modéliser un transformateur**

## CHAPITRE 1 :

# Formulations pour modéliser un transformateur

## Introduction

La modélisation des phénomènes électromagnétiques en trois dimensions a connu depuis quelques années un essor considérable. Cela a permis de voir apparaître de nombreuses méthodes et formulations :

- Formulations en champ (H, E) [Dular, 1996], [Midgard, 1997], [Bossavit, 1997], [Kettunen et al., 1993], [Dular et al., 1999].
- Formulations en potentiel (AV, T $\phi$ ) [Preston and Reece, 1982], [Biro and Preis, 1989], [Biro et al., 1993], [Lu et al, 1995], [Biro, 1999], [Ren and Razek, 2000], [Ren, 2002].

Ce premier chapitre présente la méthode choisie pour la modélisation de transformateurs de puissance. En premier lieu, nous devons choisir la formulation à utiliser pour modéliser un problème physique contenant des régions conductrices, magnétiques et ferromagnétiques, et permettant un couplage avec les équations de circuit. Des travaux récents ont montré l'intérêt des formulations utilisant le potentiel scalaire magnétique dans les régions non conductrices associé au potentiel vecteur électrique dans les régions conductrices. Ce type de formulations permet l'obtention de solutions de qualité tout en limitant les coûts de temps de calcul et la place mémoire nécessaire [LeFloch, 2002]. Nous nous sommes donc orientés vers ce type de solution, beaucoup plus économique que celles utilisant le potentiel vecteur magnétique.

Nous présentons ci-dessous les formulations que nous avons utilisées au cours de ce travail. Toutes les études ont été réalisées en magnéto harmonique, supposant des propriétés des matériaux linéaires.

## I. Mise en forme du problème physique

Notre domaine d'étude est constitué de régions conductrices massives ou filaires ( $\Omega_c$ ), d'air (ou de régions équivalents magnétiquement) ( $\Omega_0$ ), de régions ferromagnétiques ( $\Omega_1$ ). Les régions conductrices peuvent être alimentées ou non par des circuits électriques extérieurs au domaine d'étude.

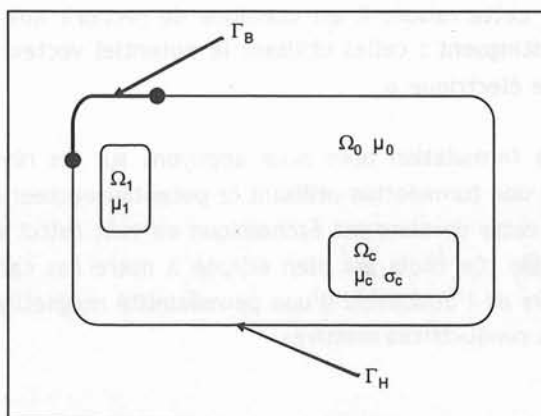


Figure 1.1 : Problème physique.

Les conditions aux limites sur les bords sont :

- Sur  $\Gamma_H$ , on impose  $H_n = 0$ , composante tangentielle nulle.
- Sur  $\Gamma_B$ , on impose  $B_n = 0$ , composante normale nulle.



Dans le cas d'une fenêtre de transformateur, nous avons par exemple (figure 1.2) :

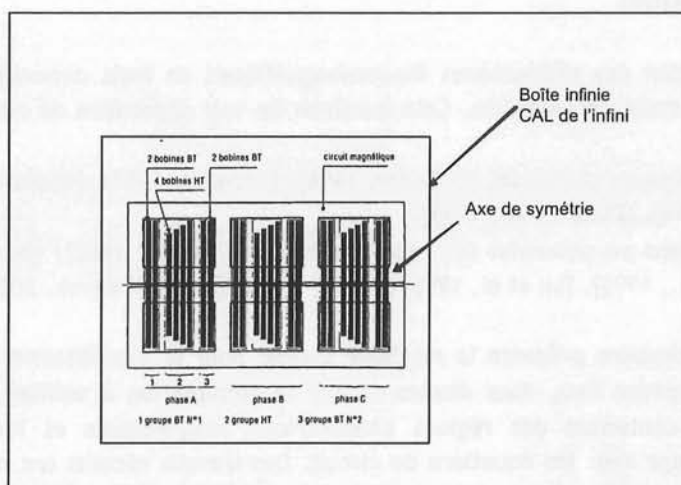


Figure 1.2 : Vue du dessus montrant le principe de la disposition des bobines dans les groupes et des groupes dans les phases d'un transformateur triphasé à deux enroulements.

Les propriétés des champs magnétiques et électriques nous sont données par les équations de Maxwell :

✓ Conservation de flux :  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  (1.1)

✓ Loi d'Ampère :  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  (1.2)

✓ Loi de Faraday :  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  (1.3)

Nous supposons que les matériaux suivent des lois de comportements linéaires qui peuvent être tensorielles :

$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H}$  (1.4)

$\mathbf{J} = [\sigma] \mathbf{E}$  (1.5)

La résolution directe de ces équations est rendue difficile en raison des discontinuités de certaines composantes des grandeurs physiques aux interfaces entre matériaux de propriétés physiques différentes. Pour cette raison, il est classique de recourir aux inconnues en potentiels. Deux grandes familles se distinguent : celles utilisant le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  et celles utilisant le potentiel scalaire électrique  $\phi$ .

Pour le choix de la formulation nous nous appuyons sur les résultats de Yann Le Floch [LeFloch, 2002] qui propose une formulation utilisant le potentiel vecteur électrique et le potentiel scalaire magnétique ( $\mathbf{T}-\phi$ ) : cette dernière est économique en coût calcul et place mémoire tout en garantissant de bons résultats. Ce choix est bien adapté à notre cas car il permet de ne garder qu'une inconnue scalaire lors de l'utilisation d'une perméabilité magnétique complexe équivalente pour représenter les régions conductrices massives.

## II. Formulations sans prise en compte des courants de Foucault de Foucault

### II.1. Formulation $T_0 - \phi$

Tout d'abord nous considérons les problèmes où les effets des courants de Foucault dans les régions conductrices peuvent être négligés. Cette hypothèse est très largement utilisée dans le cas de bobines filaires parcourues par un courant  $I$ . La densité de courant  $J$  de ces régions est alors représentée sous la forme homogénéisée :

$$J = \frac{NI}{S} \quad (1.6)$$

Où  $N$  et  $S$  représentent respectivement le nombre de spires et la surface de la bobine. Ces régions, constituées d'air ou d'isolant ( $\Omega_0$ ) et de régions conductrices ( $\Omega_c$ ), seront notées ( $\Omega_b$ ).

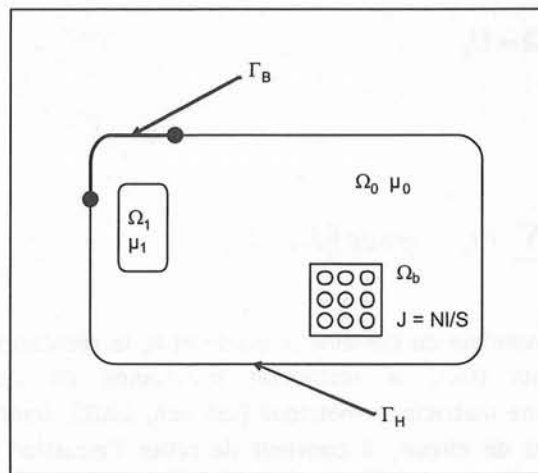


Figure 1.3 : Utilisation de régions non conductrices homogénéisées ( $\Omega_b$ ).

La formulation utilisant le potentiel scalaire magnétique s'appuie sur l'introduction d'un potentiel auxiliaire  $T_0$  vérifiant [LeFloch, 2002] :

$$\text{rot } T_0 = J \quad (1.7)$$

Il peut par exemple être obtenu par un calcul du champ inducteur dans le vide ou encore, dans le cas de bobines de formes simples, par une expression analytique. Si les courants  $I_k$  des bobines sont connus et fixes, ce potentiel peut être déterminé a priori une fois pour toutes.

D'une façon plus générale nous l'exprimons sous la forme :

$$T_0 = \sum t_{0k} I_k \quad (1.8)$$

où les courants  $I_k$  des différentes bobines peuvent être des inconnues du système à résoudre et où  $t_{0k}$  représente le champ  $T_0$  créé par la bobine  $k$  alimentée avec 1 ampère. Il est alors nécessaire de prédéterminer ces différents  $t_{0k}$ . La loi d'Ampère s'écrit :

$$\text{rot } H = \text{rot } T_0 \quad (1.9)$$

Ce qui permet l'introduction d'un potentiel scalaire  $\phi$  qui vérifie :

$$H = T_0 - \text{grad } \phi \quad (1.10)$$

La conservation du flux s'écrit sous la forme

$$\text{div} ( [\mu] \text{grad } \phi ) = \text{div} ( [\mu] T_0 )$$

Dans le cas d'une alimentation des bobines en tension, les courants  $I_k$  ne sont pas connus, nous devons introduire une équation supplémentaire qui relie le courant à la tension. Cette dernière s'écrit sous la forme [LeFloch, 2002] :

$$R_k I_k + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} t_{0k} B \cdot d\Omega = U_k \quad (1.11)$$

Soit

$$R_k I_k + \int_{\Omega} t_{0k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu \left( \sum_l I_l t_{0l} - \text{grad } \phi \right) \right] d\Omega = U_k \quad (1.12)$$

où  $\Omega$  représente l'ensemble du domaine d'étude et  $R_k$  la résistance du conducteur  $k$ . Après discrétisation par éléments finis, la résolution simultanée de ces équations conduit à l'établissement d'un système matriciel symétrique [LeFloch, 2002]. Dans le cas plus général d'un couplage avec les équations de circuit, il convient de relier l'équation courant-tension avec les équations issues d'une méthode de modélisation des circuits.

## II.2. Formulation $T_0$ - $\phi/\phi$

En présence de régions ferromagnétiques à perméabilité magnétique élevée, certaines imprécisions peuvent se produire lors du calcul du champ  $H$  [Luong, 1997], [Sivasubramaniam et al., 2000], ce dernier, très faible, étant obtenu par la différence de deux termes proches ( $T_0 - \text{grad } \phi$ ). Une solution consiste à ne pas réduire le potentiel scalaire magnétique dans les régions ferromagnétiques, puisque la densité de courant y est nulle. Nous avons alors :

$$H = -\text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.13)$$

$$H = T_0 - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{\text{to}} = \Omega_b + \Omega_0 \quad (1.14)$$

La conservation de  $H_t$  entre régions ferromagnétiques et les autres ( $\partial\Omega_{T0}$ ) se traduit sous la forme :

$$\text{grad } \phi \times n = (\text{grad } \phi + T_0) \times n \quad (1.15)$$

ce qui implique, puisque nous gardons  $\phi$  continu, la relation :

$$T_0 \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{T_0} \quad (I.16)$$

Le système d'équations s'écrit alors :

$$\operatorname{div}([\mu] \operatorname{grad} \phi) - \operatorname{div}([\mu] T_0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{T_0} \quad (I.17)$$

$$\operatorname{div}([\mu] \operatorname{grad} \phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (I.18)$$

$$R_k I_k + \int_{\Omega_{T_0}} t_{0k} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(T_0 - \operatorname{grad} \phi)] d\Omega = U_k \quad (I.19)$$

Les deux premières équations (I.17) et (I.18), qui expriment  $\operatorname{div} B = 0$ , assurent la continuité de  $B_n$  à l'interface entre les régions ferromagnétiques et les autres. Après discrétisation par éléments finis, le système matriciel obtenu est symétrique.

### II.3. Calcul de $T_0$

Différentes méthodes de calcul de  $T_0$  (ou des  $t_{0k}$ ) sont envisageables. Certaines sont analytiques et généralement basée sur la formule de Biot et Savart. D'autres nécessitent une pré résolution par éléments finis. La liste des méthodes présentées ci-dessous n'est pas exhaustive.

#### a. Méthode analytique

Ce calcul analytique repose sur la formule de Biot et Savart, qui calcule un champ source dans le vide. Le champ dû à une bobine (inducteur) alimentée par une densité de courant  $J_0$  s'écrit :

$$H_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_c} \frac{J_0 \times r}{\|r\|^3} d\Omega \quad (I.20)$$

où  $r$  représente la distance entre le point d'évaluation et un point d'intégration courant de l'inducteur. Dans le cas de la formulation  $T_0$ - $\phi$  (où  $T_0$  est calculé partout), nous pouvons simplement choisir :

$$T_0 = H_0 \quad (I.21)$$

Dans le cas où le champ magnétique  $H$  dérive directement d'un gradient dans les régions magnétiques ( $H = -\operatorname{grad} \phi$ ) la détermination du potentiel  $T_0$  peut être déduite de l'équation suivante :

$$\operatorname{rot} T_0 = \operatorname{rot} H_0 \quad (I.22)$$

en s'assurant que  $T_0 \times n = 0$  sur  $\partial\Omega_{T_0}$ . En pratique ce calcul de  $T_0$  s'effectue par minimisation d'un problème éléments finis sur  $\Omega_{t_0}$ . L'utilisation d'éléments finis d'arête permet d'imposer naturellement  $T_0 \times n = 0$ .

Cette méthode de calcul présente un avantage intéressant car elle ne nécessite pas une description géométrique (au sens éléments finis) des bobines : ces dernières peuvent être décrites indépendamment du maillage. Pour des formes simples (une spire circulaire par exemple), une expression analytique peut être établie, ce qui est très avantageux. Cependant cette méthode peut devenir coûteuse pour des bobines de formes quelconques, où des intégrations numériques longues sont alors nécessaires.

### b. Méthode numérique

Dans le cas où les bobines sont maillées, l'utilisation de la formule de Biot et Savart pour déterminer  $T_0$  devient vite fastidieuse. Un autre mode de calcul, qui s'effectue en deux étapes, peut être envisagé :

- 1) Résolution électrocinétique pour l'obtention de la densité de courant source  $J_0$ .
- 2) Obtention du champ magnétique source  $T_0$  par la minimisation de l'expression  $\text{rot } T_0 - J_0$  (comme précédemment avec les éléments d'arête).

Le tableau ci-dessous compare quelques avantages et inconvénients des deux méthodes précédentes :

	Avantages	Inconvénients
Biot et Savart	- Précise - Temps de calculs court, si géométrie simple	- Temps de calcul long pour un inducteur de forme complexe
Utilisation des EF	- Méthode très générale	- Description géométrique (maillée) des inducteurs

Tableau I.1 : Avantages et inconvénients des méthodes de calcul de  $T_0$ .

### c. Méthode du saut de potentiel

Cette méthode est issue du couplage réduit-total classiquement utilisé dans les formulations utilisant le potentiel scalaire magnétique. Elle consiste à exprimer un champ  $T_0$  nodal sous la forme :

$$T_0 = H_0 - \text{grad } \delta\phi \quad (1.23)$$

Où  $\delta\phi$  est calculé de telle sorte à vérifier  $T_0 \times n = 0$ . Les incréments  $\delta\phi$  peuvent être par exemple obtenus par une résolution éléments finis (minimisation) vérifiant :

$$(H_0 - \text{grad } \delta\phi) \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{T_0} \quad (1.24)$$

Comme précédemment le calcul de  $H_0$  peut être conduit numériquement ou analytiquement (Biot et Savart). Dans le cas d'un couplage avec les équations de circuit, il est nécessaire de calculer autant de  $t_{0k}$  qu'il y a de bobines. Il est donc nécessaire de pré calculer les  $t_{0k}$  et les  $\delta\phi_k$ . Ces derniers peuvent être stockés aux nœuds du maillage, ce qui est particulièrement intéressant lorsque nous sommes dans le cas de multi - résolutions. Nous avons choisi la méthode numérique pour déterminer  $T_0$ , les raisons sont exposées plus loin dans ce chapitre.

## II.4. Prise en compte des régions magnétiques non simplement connexes

La formulation  $T_0 - \phi / \phi$  n'est pas utilisable en présence de régions ferromagnétiques non simplement connexes traitées en potentiel scalaire magnétique total. En effet, en considérant le cas de la figure 1.4, où une spire parcourue par un courant  $I$  traverse le circuit magnétique, nous avons :

$$\text{Dans le circuit magnétique } (\Omega_1) : \quad H = -\text{grad } \phi \quad (1.25)$$

$$\text{Dans l'air } (\Omega_0) : \quad H = T_0 - \text{grad } \phi \quad (1.26)$$

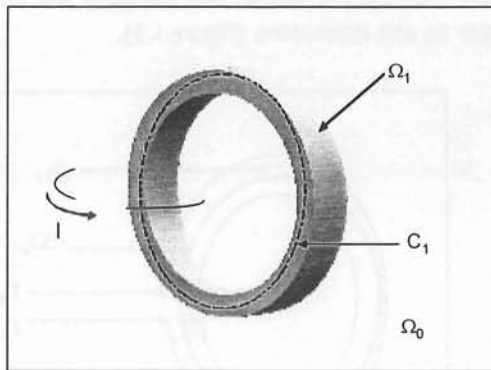


Figure 1.4 : Circuit magnétique non simplement connexe.

Le théorème d'Ampère nous dit que pour tout chemin fermé  $C$ , l'intégrale du champ  $H$  sur ce chemin est égale au courant total qui traverse une surface de contour  $C$ . Si on applique le théorème d'Ampère sur le chemin  $C_1$  nous devons avoir :

$$\int_{C_1} H \cdot dl = I \quad (1.27)$$

Mais avec la définition des champs ci-dessus, nous avons :

$$\int_{C_1} H \cdot dl = - \int_{C_1} \text{grad } \phi \cdot dl = 0$$

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre le problème de connexité :

- I. La première, simple de mettre en œuvre, est de couper le circuit magnétique par une couche d'éléments dans la région  $\Omega_{t0}$  (tout en gardant les mêmes matériaux). Cette technique pose le problème de l'imprécision de la formulation en potentiel scalaire dans les régions de forte perméabilité.
- II. La deuxième solution est de mettre en entrefer surfacique d'épaisseur faible pour que sa réluctance soit négligeable devant celle du circuit magnétique.
- III. La troisième est l'utilisation d'une coupure pour créer une discontinuité du potentiel scalaire magnétique dans le circuit magnétique, égale aux courants qui l'entourent.

Nous avons utilisé cette troisième méthode. Elle nécessite une modification de la formulation  $T_0 - \phi / \phi$  qui consiste à calculer  $H$  de la façon suivante, tout en gardant le calcul de  $T_0$  ( $H_0, \delta\phi$ ) précédent :

$$H = H_0 - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{T_0} \quad (1.29)$$

$$H = - \text{grad } \phi - \text{grad } \delta\phi \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.30)$$

Elle peut s'appliquer comme précédemment au circuit magnétique non simplement connexe en remarquant que la conservation de  $H$  est toujours assurée en calculant le même incrément  $\delta\phi$  qui vérifie  $(H_0 - \text{grad } \delta\phi) \times n = 0$  sur  $\partial\Omega_{T_0}$ .

Dans le cas d'un circuit magnétique fermé, une coupure est introduite de telle sorte que  $\phi$  soit toujours  $\phi$  continu mais que  $\delta\phi$  soit discontinu (figure I.5).

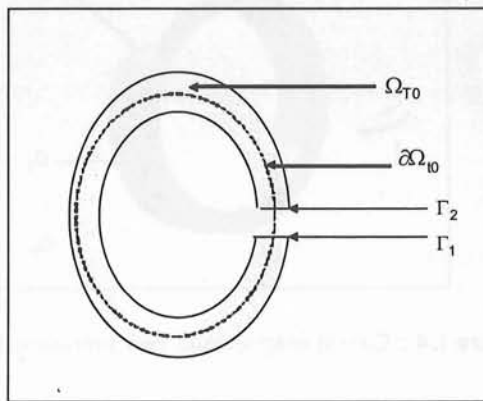


Figure I.5 : Représentation d'une domaine  $\partial\Omega_{T_0}$  ouvert.

Le calcul de l'incrément  $\delta\phi$  sur  $\partial\Omega_{T_0}$  conduit donc, compte tenu de la coupure, à une valeur différente de chaque côté. Par construction, si  $I$  est le courant qui produit  $H_0$  nous avons, entre deux points 1 et 2 (figure I.5), de chaque côté de la coupure :

$$\delta\phi_1 - \delta\phi_2 = I \quad (1.31)$$

En effet, puisque  $\delta\phi$  est défini par :

$$(H_0 - \text{grad } \delta\phi) \times n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{T_0} \quad (1.32)$$

nous avons, en intégrant le long du chemin  $C_{12}$  sur  $\partial\Omega_{T_0}$  qui rejoint le point 1 au point 2 :

$$\delta\phi_2 - \delta\phi_1 = \int_{C_{12}} H_0 \cdot dl = I \quad (1.33)$$

En intégrant  $H$  sur un contour fermé nous avons donc, en gardant  $\phi$  continu :

$$\int_{C_1} H \cdot dl = \int_{C_1} (- \text{grad } \delta\phi - \text{grad } \phi) \cdot dl = \int_{C_1} - \text{grad } \delta\phi \cdot dl = I \quad (1.34)$$

Par conséquent, nous vérifions le théorème d'Ampère.

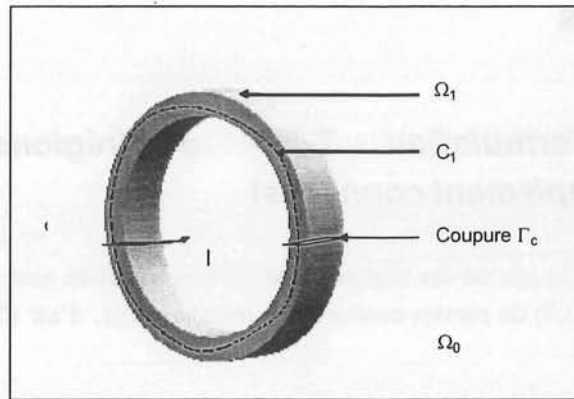


Figure 1.6 : Circuit magnétique avec coupure.

Les équations à résoudre sont finalement :

$$\operatorname{div}([\mu] \operatorname{grad} \phi) - \operatorname{div}([\mu] H_0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{t0} \quad (1.35)$$

$$\operatorname{div}([\mu] \operatorname{grad} \phi) + \operatorname{div}([\mu] \operatorname{grad} \delta \phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.36)$$

$$R_k I_k + \int_{\Omega_{T0}} (h_{0k} - \operatorname{grad} \delta \phi_k) \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega = U_k \quad (1.37)$$

Après discrétisation du système, la symétrie du système linéaire peut être obtenue en remarquant que la relation courant - tension du conducteur k peut s'écrire sous la forme :

$$R_k I_k + \int_{\Omega_{t0}} h_{0k} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega_1} \operatorname{grad} \delta \phi_k \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega = U_k \quad (1.38)$$

En effet, compte tenu que  $\operatorname{div} B = 0$  nous avons :

$$\int_{\Omega_{t0}} \operatorname{grad} \delta \phi_k \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega = \int_{\Omega_{t0}} \delta \phi_k \frac{\partial B_n}{\partial t} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega_1} \operatorname{grad} \delta \phi_k \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega \quad (1.39)$$

Si il y a plusieurs circuits magnétiques ouverts ou fermés, les formulations précédentes se combinent sans difficulté. Par exemple dans le cas de deux circuits magnétiques dont l'un est fermé ( $\Omega_{1f}$ ) et l'autre ouvert simplement connexe ( $\Omega_{1s}$ ), le champ magnétique H peut se mettre sous la forme :

$$H = h_{0s} + h_{0f} - \operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} \delta \phi_s \quad \text{dans } \Omega_{t0} \quad (1.40)$$

$$H = - \operatorname{grad} \phi \quad \text{dans } \Omega_{1s} \quad (1.41)$$

$$H = - \operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} \delta \phi_f \quad \text{dans } \Omega_{1f} \quad (1.42)$$



### III. Formulations avec prise en compte des courants induits

#### III.1. Formulation $T - \phi$ (régions conductrices simplement connexes)

Nous considérons le cas où les régions conductrices massives sont présentes. Le problème est donc composé (figure I.7) de parties conductrices massives ( $\Omega_c$ ), d'air ( $\Omega_0$ ) et de bobines filaires ( $\Omega_b$ ).

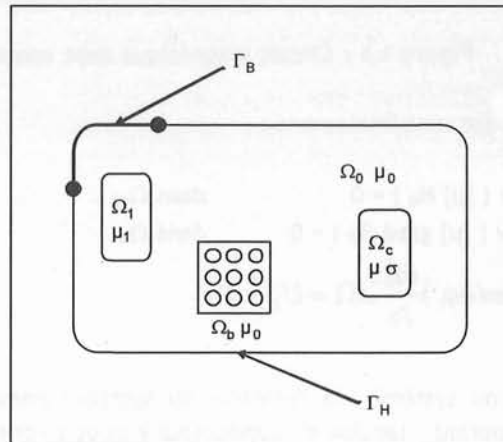


Figure I.7 : Problème physique avec régions conductrices massives.

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div } B = 0$$

$$\text{rot } H = J$$

$$\text{rot } E = -\partial B / \partial t$$

et les lois constitutives des matériaux :

$$B = [\mu] H$$

(I.43)

$$J = [\sigma] E$$

(I.44)

Puisque  $\text{div } J = 0$ , nous pouvons écrire  $J$  sous la forme :

$$J = \text{rot } T$$

(I.45)

où  $T$  est le potentiel vecteur électrique. Sur l'interface conducteur / non conducteur nous imposons  $T \times n = 0$  pour assurer la conservation du courant. Deux types d'interpolation sont envisageables : les éléments finis nodaux et les éléments finis d'arêtes. Ces derniers sont bien adaptés à notre problème physique et permettent en particulier d'imposer naturellement la condition  $T \times n = 0$ .

La loi d'Ampère nous donne :

$$H = T - \text{grad } \phi \quad (1.46)$$

Finalement, les équations résolues dans les régions conductrices sont :

$$\text{rot}([\sigma]^{-1} \text{rot} T) + \frac{\partial}{\partial t} [\mu(T - \text{grad} \phi)] = 0 \quad (1.47)$$

$$\text{div}([\mu] \text{grad} \phi) = 0 \quad (1.48)$$

Sous cette forme, le couple de potentiel  $(T, \phi)$  n'est pas unique. Afin d'assurer l'unicité de la solution, nous nous devons d'imposer une jauge. Dans le cas des éléments finis nodaux, nous imposons la jauge de Coulomb sur le potentiel vecteur  $T$  dans  $\Omega_c$  ( $\text{div } T = 0$ ). Dans le cas des éléments d'arêtes il est coutumier d'utiliser un arbre [Albanese and Rubinacci, 1990], [Dular et al., 1995], [Midgard, 1997], [Golias and Tsiboukis, 1994].

Ces équations se couplent naturellement avec les équations des régions bobinées et isolantes (cf. paragraphes précédents). Lorsque les champs sources sont représentés par des bobines filaires parcourues par des courants  $I_k$ , deux cas sont envisageables pour le domaine  $\Omega_c$  :

- réduire le champ magnétique  $H$  par rapport au champ auxiliaire  $T_0 = \sum t_{0k} \cdot I_k$  produit par ces bobines (comme cela se fait dans  $\Omega_{t0}$ )
- conserver le champ  $H$  sous la forme  $H = T - \text{grad } \phi$ .

Dans le premier cas les équations précédentes doivent être modifiées en écrivant les champs  $H$  sous la forme :

$$H = T + T_0 - \text{grad } \phi \quad (1.49)$$

Dans le second cas, nous devons alors imposer  $t_{0k} \times n = 0$  sur les interfaces,  $\partial\Omega_c$ , lors du calcul des  $t_{0k}$ , ceci afin d'assurer la continuité du champ magnétique tangentiel.

### **III.2. Formulation $T - T_0 - \phi$ (régions conductrices non simplement connexes)**

Dans le cas d'une région conductrice non simplement connexe, la formulation précédente n'est plus valable puisqu'elle ne permet pas la vérification du théorème d'Ampère, comme l'indique la figure 1.8 en intégrant le champ magnétique le long d'un contour  $C$  lorsque le conducteur massif est parcouru par un courant  $I_c$ .

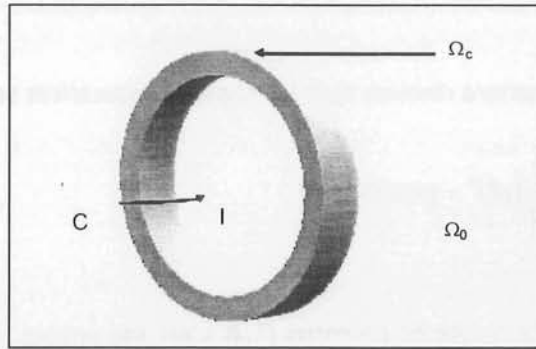


Figure I.8 : Conducteur non simplement connexe.

Une solution consiste à réduire le potentiel vecteur électrique  $T$  en introduisant un potentiel vecteur auxiliaire  $T_{0c} = t_{0c} \cdot l_c$  tel que  $t_{0c}$  vérifie  $\text{rot } t_{0c} = j_{0c}$  où  $j_{0c}$  représente une densité de courant quelconque produisant un courant de 1A dans le conducteur  $\Omega_c$ . Nous pouvons par exemple choisir la solution électrocinétique pour  $j_{0c}$ .

Sans région ferromagnétique nous pouvons par exemple choisir  $t_{0c} = h_{0c}$  où  $h_{0c}$  est le champ de Biot et Savart. En présence de régions ferromagnétiques, nous calculons  $t_{0c}$  de manière analogue à celui des bobines :

$$T_{0c} = h_{0c} - \text{grad } \delta\phi_c$$

Prenons le cas d'un domaine comprenant : une région conductrice non simplement connexe  $\Omega_c$ , une bobine  $k$  (comprise dans  $\Omega_{t0}$ ) et un circuit magnétique non simplement connexe  $\Omega_1$ . Nous pouvons écrire le champ magnétique sous la forme :

$$H = t_{0k} \cdot l_k + t_{0c} \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (1.50)$$

$$H = - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.51)$$

$$H = T + t_{0k} \cdot l_k + t_{0c} \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_c \quad (1.52)$$

Par contre, si le circuit magnétique est fermé et que les conducteurs traversent ce dernier nous devons réduire  $H$ , soit partiellement (une coupure est alors nécessaire dans le circuit magnétique) :

$$H = h_{0k} \cdot l_k + h_{0c} \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{t0} \quad (1.53)$$

$$H = \text{grad } \delta\phi_k \cdot l_k + \text{grad } \delta\phi_c \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.54)$$

$$H = T + h_{0k} \cdot l_k + h_{0c} \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_c \quad (1.55)$$

Soit totalement :

$$H = t_{0k} \cdot l_k + t_{0c} \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{t0} \text{ et } \Omega_1 \quad (1.56)$$

$$H = T + h_{0k} \cdot l_k + h_{0c} \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_c \quad (1.57)$$

Dans le cas d'un transformateur, nous sommes en présence d'un circuit magnétique fermé et de boucles de courant entourant ces circuits (figure I.9). Si nous souhaitons prendre en compte les courants de Foucault lors de la simulation, nous devons décrire chaque bobine comme une région conductrice.

Nous pouvons choisir :

$$H = \sum h_{0k} \cdot l_k - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{t0} \quad (1.58)$$

$$H = \sum \text{grad } \delta\phi_c \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.59)$$

$$H = T + \sum h_{0c} \cdot l_c - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_c \quad (1.60)$$

$$J_c = \text{rot } T + j_{0c} \cdot l_c \quad \text{dans } \Omega_c \quad (1.61)$$

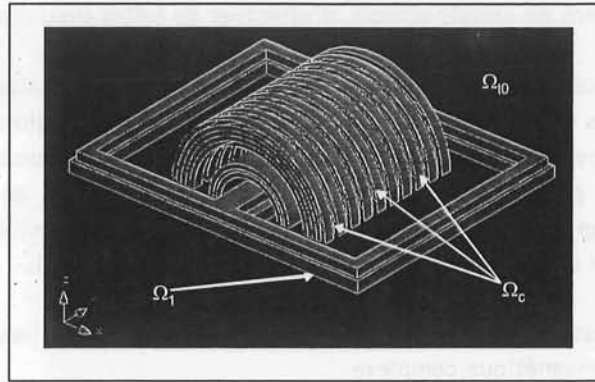


Figure 1.9 : Exemple de géométrie d'un transformateur colonne.

Dans le cas de courants totaux  $l_c$  imposés, les équations à résoudre sont :

$$\text{rot}([\sigma]^{-1} \text{rot}(T + H_0)) + \frac{\partial}{\partial t} [\mu(T + H_0 - \text{grad}\phi)] = 0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (1.62)$$

$$\text{div}([\mu] \text{grad } \phi) - \text{div}([\mu] H_0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \text{ et } \Omega_c \quad (1.63)$$

$$\text{div}([\mu] \text{grad } \phi) + \text{div}([\mu] \text{grad } \delta\phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.64)$$

où  $H_0$  et  $\delta\phi$  représentent respectivement un champ et un incrément obtenus par une résolution préliminaire issue des répartitions de courant  $J_{0c} = j_{0c} \cdot l_c$ . Dans le cas le plus général où les courants ne sont pas connus, nous écrivons :

$$H_0 = \sum h_{0c} \cdot l_c \quad (1.65)$$

$$\delta\phi = \sum \delta\phi_c \cdot l_c \quad (1.66)$$

et les inconnues  $l_c$  sont des inconnues du système matriciel global. Les équations précédentes sont alors couplées à des relations courant - tension de chaque conducteur, elles-mêmes couplables avec des équations de circuit extérieures au domaine d'étude éléments finis. Ces relations s'écrivent [Meunier et al., 2003] :

$$\int_{\Omega_c} j_{0c} \cdot E \cdot d\Omega + \int_{\Omega_0} (h_{0c} - \text{grad}\delta\phi_c) \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega = U_c \quad (1.67)$$

ou encore pour permettre un système d'équation symétrique :

$$\int_{\Omega_c} j_{0c} \cdot E \cdot d\Omega + \int_{\Omega_0} h_{0c} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega_1} \text{grad } \delta\phi_c \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega = U_c \quad (1.68)$$

Cette formulation permet de modéliser les transformateurs, en prenant en compte les effets de courants de Foucault dans chaque conducteur. En pratique, l'augmentation de la fréquence entraîne une concentration de la densité de courant dans l'épaisseur de peau des conducteurs. Pour obtenir une solution correcte, les simulations numériques par éléments finis nécessitent 2 éléments dans cette épaisseur. Compte tenu du grand nombre de conducteurs et des fréquences auxquelles nous souhaitons modéliser les transformateurs, il devient rapidement impossible, avec les moyens de calculs actuels, d'effectuer de telles simulations en 3D.

Dans ces conditions, il nous a paru intéressant de rechercher une alternative moins coûteuse pour ces simulations. Des travaux précédents, effectués en 2D et en régime magnéto harmonique, ont montré que nous pouvions substituer les propriétés des régions conductrices ( $\mu, \sigma$ ) par une perméabilité équivalente  $\mu^*$  pour représenter correctement les effets de pertes par proximité (produites par un champ extérieur sur chaque conducteur). Nous verrons dans le chapitre 2 comment cette technique a été mise en œuvre dans le cas tridimensionnel.

Nous nous intéressons dans le paragraphe suivant à la mise en œuvre d'une formulation utilisant la perméabilité magnétique complexe.

### **III.3. Formulation $T_0\text{-}\phi$ utilisant une perméabilité complexe ( $\mu^*$ )**

Dans le cas de l'utilisation d'une perméabilité magnétique complexe, il n'est plus nécessaire d'utiliser un potentiel vecteur électrique  $T$  pour représenter les courants de Foucault : l'inconnue principale est le potentiel scalaire magnétique  $\phi$ . Les spires de courants peuvent être regroupées pour former des conducteurs électriques possédant une perméabilité magnétique équivalente  $\mu^*$  (cf. chapitre 2).

Les formulations  $T_0\text{-}\phi$  proposées précédemment restent valables avec les restrictions suivantes :

- > toutes les grandeurs sont sinusoïdales et la notation complexe est utilisée ( $\partial/\partial t$  remplacé par  $j\omega$ )
- > les régions conductrices homogénéisées doivent être décrites géométriquement puisque possédant une propriété physique particulière ( $\mu^*$ ).

Intéressons nous au cas des transformateurs : nous sommes en présence de boucles de conducteurs (figure 1.9) entourées par un circuit magnétique. Deux formulations peuvent être retenues suivant que nous faisons une réduction partielle ou totale du champ  $H$  dans le circuit magnétique.

Dans le premier cas nous avons :

$$H = \sum h_{0k} \cdot l_k - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{10} \quad (1.69)$$

$$H = \sum \text{grad } \delta\phi_k \cdot l_k - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.70)$$

et les équations à résoudre sont :

$$\text{div} ( [\mu] \text{grad } \phi ) - \text{div} ( [\mu] \sum h_{0k} \cdot l_k ) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{10} \quad (1.71)$$

$$\operatorname{div}([\mu] \operatorname{grad} \phi) + \operatorname{div}([\mu] \Sigma \operatorname{grad} \delta \phi_k) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.72)$$

$$R_k I_k + \int_{\Omega_{i0}} h_{0k} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega_1} \operatorname{grad} \delta \phi_k \cdot j \omega \cdot B \cdot d\Omega = U_k \quad (1.73)$$

où  $[\mu]$  prend des valeurs complexes dans les régions conductrices homogénéisées.

La dernière équation, qui représente la relation courant - tension fait apparaître  $R_k$  qui représente la valeur de la résistance propre du circuit électrique. Lorsque la fréquence augmente, les effets propres (dus au conducteur sur lui même) conduisent à une augmentation très sensible de cette résistance. Il faut noter que ces derniers ne sont pas pris en compte par la perméabilité complexe qui ne traduit que les effets de proximité (la notion de perméabilité complexe sera détaillée dans le chapitre 2). Nous verrons également, dans ce même chapitre 2, comment tenir compte des effets propres.

Cette formulation nécessite d'établir une coupure dans le circuit magnétique, ce qui peut être contraignant pour le descripteur de géométrie. Nous pouvons donc nous orienter vers la solution utilisant un potentiel réduit dans tout le domaine, sachant que dans les cas linéaires, cette formulation n'est pas pénalisante. Nous avons alors la formulation plus simple :

$$H = t_{0k} \cdot I_k - \operatorname{grad} \phi \quad \text{dans } \Omega \quad (1.74)$$

Avec les équations suivantes :

$$\operatorname{div}([\mu] \operatorname{grad} \phi) - \operatorname{div}([\mu] \Sigma t_{0k} \cdot I_k) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.75)$$

$$R_k I_k + \int_{\Omega} t_{0k} \cdot j \omega B \cdot d\Omega = U_k \quad (1.76)$$

Où  $\Omega$  représente le domaine d'étude entier.

$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3}{1} \right) = \frac{1}{2} \ln 3$

The function  $f(x) = \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)$  is an odd function. Therefore,  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = 0$ .

The function  $f(x) = \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)$  is an odd function. Therefore,  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = 0$ .

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) dx = 0$

## **CHAPITRE 2 :**

**Méthode de substitution par une perméabilité magnétique complexe pour modéliser un transformateur**



## CHAPITRE 2 :

Méthode de substitution par une perméabilité magnétique complexe pour modéliser un transformateur

## Introduction

Cependant, même avec ce choix de formulation (cf. chapitre 1), le coût d'une résolution tridimensionnelle devient rapidement important en temps calcul et place mémoire lorsque nous sommes en présence de courants de Foucault 3D. En effet, dans ce cas, il est nécessaire, et ce d'autant plus que la fréquence est élevée, de mailler avec précision les régions massives conductrices qui par ailleurs portent une inconnue vectorielle. Dans le cas particulier d'un transformateur de puissance, où l'on souhaite prendre en compte les effets des courants induits dans les conducteurs, il devient rapidement impossible d'envisager une résolution de ce type, et ce en raison du grand nombre de conducteurs. Afin de pouvoir remédier à cette situation nous nous appuyons sur une méthode de substitution de propriétés physiques, où les régions conductrices sont redéfinies en régions non-conductrices par équivalence énergétique et introduction d'une perméabilité équivalente [Moreau et al., 1996].

Nous présentons ci-dessous les fondements de l'approche utilisant une perméabilité magnétique complexe équivalente. La perméabilité équivalente s'exprimera alors sous la forme d'un tenseur de perméabilité complexe.

### I. Principe de la perméabilité magnétique complexe

L'objectif de la méthode présentée dans ce paragraphe est d'approcher les grandeurs globales de flux coupés dans les éléments électriques en s'affranchissant du calcul des courants de Foucault dans les conducteurs qui nécessitent un maillage éléments finis important en hautes fréquences. Pour cela, la méthode consiste à substituer au matériau conducteur des éléments électriques un matériau hystérétique, non conducteur, donnant naissance à la même énergie réactive (inductance) et active (pertes) dans chaque élément électrique (figure II.1). Un matériau hystérétique d'un cycle simple s'obtient en considérant une perméabilité magnétique complexe, caractéristique d'un cycle d'hystérésis elliptique :

$$H = H_0 \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(H_0 e^{j\omega t}) \quad (\text{II.1})$$

$$B = B_0 \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(\mu H_0 e^{-j\phi} e^{j\omega t}) \quad (\text{II.2})$$

Les grandeurs locales champ magnétique  $H$  et induction  $B$  sont alors déphasées dans le temps d'un angle constant, mais sans rapport avec les valeurs locales réelles dans les éléments électriques.

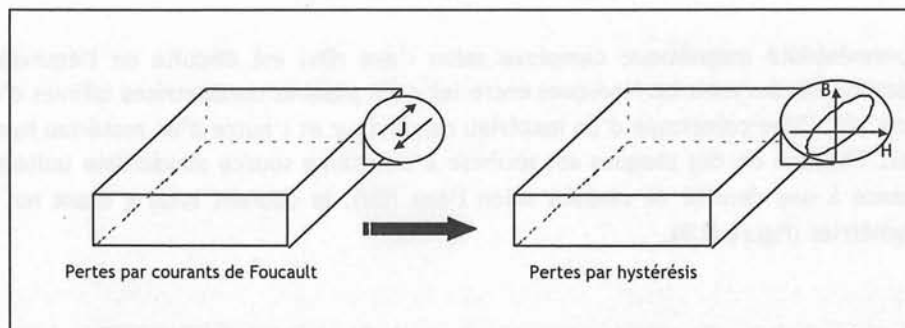


Figure II.1 : Principe de la perméabilité magnétique complexe.

La perméabilité magnétique complexe intervient dans le second terme du développement de la puissance de Poynting en série de Fourier de l'angle polaire. Le premier terme est l'effet de peau. Il s'agit d'une approximation au premier harmonique qui, à elle seule, ne prend donc pas en compte toute l'énergie. Cette approximation néanmoins apparaît judicieuse du fait que les harmoniques suivantes sont négligeables.

## II. Perméabilité magnétique complexe 2D

La perméabilité s'obtient à partir d'un calcul analytique 1D de puissances active et réactive (pertes et induction magnétique) dans un milieu conducteur. Les pertes par courants de Foucault sont alors représentées par des pertes hystérétiques fictives équivalentes. Les éléments électriques étant constitués de conducteur (cuivre) et d'isolant entre conducteurs (guipage), la perméabilité complexe obtenue pour un milieu conducteur sera ensuite homogénéisée afin d'affecter à chaque élément électrique un unique matériau. Les pertes dites de « proximité » dans un conducteur massif sont dues aux courants de Foucault se refermant dans l'épaisseur du conducteur lorsque celui-ci est considéré comme ouvert et baignant dans un champ magnétique source extérieur (créé par les autres conducteurs du système). Considérons le conducteur rectangulaire de la figure II.2 :

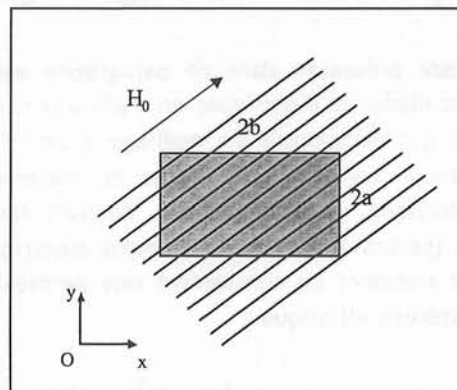


Figure II.2 : Élément électrique soumis à un champ source imposé.

L'approximation d'un champ source localement uniforme et l'application du principe de superposition (les matériaux étant linéaires) permet alors de définir une perméabilité magnétique complexe pour chacun des axes  $x$  et  $y$  que nous noterons  $\mu_x^*$  et  $\mu_y^*$ .

La perméabilité magnétique complexe selon l'axe  $(Ox)$  est déduite de l'équivalence des puissances actives et réactives harmoniques entre les deux plaques conductrices infinies d'épaisseur  $2b$  (géométrie 1D), l'une constituée d'un matériau conducteur et l'autre d'un matériau hystérétique à déterminer. Chacune de ces plaques est soumise à un champ source sinusoïdale uniforme  $H_{x0}$  et donne naissance à une densité de courant selon l'axe  $(Oz)$ , le courant total  $I_z$  étant nul pour des raisons de symétries (figure II.3).

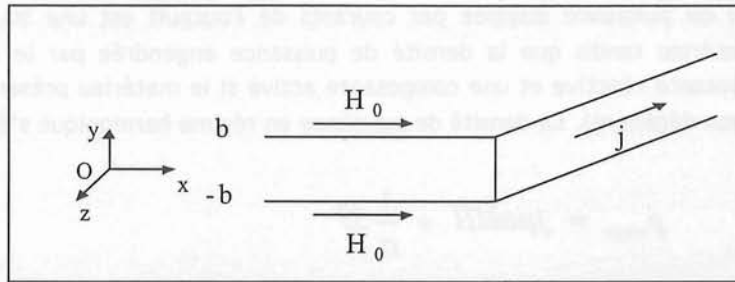


Figure II.3 : Plaque conductrice infinie dans un champ extérieur imposé.

Notons que nous faisons une approximation supplémentaire lorsque nous orientons successivement  $H_0$  selon (Ox) et selon (Oy).

## II.1. Equations générales

Pour un matériau de conductivité  $\sigma$  et de perméabilité  $\mu$  (réelle ou complexe), les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday (induction) dans l'hypothèse quasi-statique s'écrivent pour des matériaux linéaires comme suit :

$$\text{rot } H = J \quad (\text{II.3})$$

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{II.4})$$

avec les lois de comportements linéaires suivantes :

$$B = \mu H \quad (\text{II.5})$$

$$J = \sigma E \quad (\text{II.6})$$

Il vient l'équation générale sous forme de « Laplacien » du champ magnétique H:

$$\Delta H = \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

Les conditions aux limites et de symétrie de la plaque infinie de la figure 2 impliquent :

$$H = H_x(y, t) \quad (\text{II.8})$$

L'équation précédente devient alors :

$$\frac{\partial^2 H_x(y)}{\partial y^2} = j\omega\sigma\mu H_x(y) \quad (\text{II.9})$$

La densité de puissance instantanée dans un matériau magnétique s'écrit :

$$P_{\text{magn}} = P_{\text{hyst}} + P_{\text{Fouc}} \quad (\text{II.10})$$

$$P_{\text{Fouc}} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \bar{\mathbf{J}} \quad (\text{II.11})$$

$$P_{\text{hyst}} = \mu H \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

Lorsque la perméabilité magnétique est de nature complexe nous pouvons écrire l'équation (II.12) comme suit (Régime harmonique):

$$P_{\text{hyst}} = j\omega\mu^* H \cdot B$$

La densité de puissance dissipée par courants de Foucault est une source de puissance active dans le matériau tandis que la densité de puissance engendrée par le cycle d'hystérésis possède une composante réactive et une composante active si le matériau présente des pertes par hystérésis (cycle non dégénéré). La densité de puissance en régime harmonique s'écrit alors :

$$p_{magn} = j\mu\omega H\bar{H} + \frac{1}{\sigma} J\bar{J} \quad (II.13)$$

## II.2. Expression de la perméabilité magnétique complexe 2D

La plaque étant soumise à un champ magnétique sinusoïdal uniforme dans l'espace, les conditions aux limites pour le champ magnétique s'écrivent alors :

$$H_x(b) = H_0 \quad (II.14)$$

$$H_x(-b) = H_0 \quad (II.15)$$

### II.2.1. Matériau réel : conductivité électrique réelle $\sigma$ et une perméabilité $\mu$ réelle :

En utilisant la méthode de séparation de variable l'équation (9) s'écrit :

Le champ H dans la plaque supposée infinie s'écrit (cf. Annexe 1):

$$H_x(y) = H_0 \frac{\cosh(\alpha y)}{\cosh(\alpha b)} \quad (II.16)$$

Avec  $\alpha = \frac{1+j}{\delta}$  et  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$ .

La densité de courant s'écrit :

$$J_y(y) = H_0 \sqrt{\sigma\omega\mu} \frac{\cosh\left(\frac{2y}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2y}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \quad (II.17)$$

La densité de puissance harmonique est égale à :

$$p = \mu\omega H_0^2 \left( \frac{\cosh\left(\frac{2y}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2y}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} + j \frac{\cosh\left(\frac{2y}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2y}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right) \quad (II.18)$$

## II.2.2. Matériau équivalent : conductivité électrique nulle et perméabilité magnétique $\mu^*$ complexe.

La répartition du champ magnétique dans la plaque est dans ce cas de la forme  $H_x(y) = H_0$  et la densité de puissance harmonique devient alors :

$$p = j\mu^* \omega H \bar{H} = (\text{Re}(\mu^*) + j \text{Im}(\mu^*)) j \omega H_0^2 \quad (\text{II.19})$$

En identifiant les deux expressions de la puissance harmonique nous avons obtenu les parties réelle et imaginaire de la perméabilité magnétique complexe selon les axes Ox et Oy.

Selon Ox :

$$\text{Re}(\mu^*) = \frac{\mu}{2b} \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \cdot \frac{\left( \sinh \left( \frac{2b}{\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}} \right) + \sin \left( \frac{2b}{\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}} \right) \right)}{\left( \cosh \left( \frac{2b}{\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}} \right) + \cos \left( \frac{2b}{\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}} \right) \right)}$$

$$\text{Im}(\mu^*) = -\frac{\mu}{2b} \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \cdot \frac{\left( \sinh \left( \frac{2b}{\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}} \right) - \sin \left( \frac{2b}{\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}} \right) \right)}{\left( \cosh \left( \frac{2b}{\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}} \right) + \cos \left( \frac{2b}{\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}} \right) \right)}$$

Selon (Oy) : l'expression est identique à l'exception de la grandeur géométrique b qui est remplacée par a.

La perméabilité selon l'axe (Oy) du conducteur s'écrit selon le même principe :

$$\text{Re}(\mu^*) = \frac{\mu\sigma}{2a} \left( \frac{\sinh \left( \frac{2a}{\delta} \right) + \sin \left( \frac{2a}{\delta} \right)}{\cosh \left( \frac{2a}{\delta} \right) + \cos \left( \frac{2a}{\delta} \right)} \right)$$

$$\text{Im}(\mu^*) = -\frac{\mu\delta}{2a} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)} \right)$$

### III. Perméabilité magnétique complexe 3D

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer la troisième composante de la perméabilité complexe.

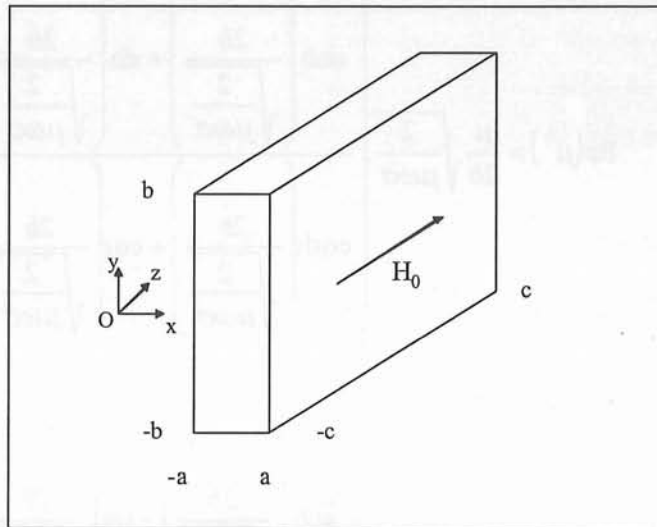


Figure II.4 : Plaque conductrice infinie 3D.

Comme dans le cas 2D, nous cherchons le champ magnétique à l'intérieur du conducteur résultant d'un champ extérieur imposé sur les bords du conducteur. Ce champ extérieur a une unique direction qui est selon (Oz), notons le  $H_0$ . Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, les phénomènes électromagnétiques peuvent se décrire avec les équations Maxwell - Ampère et Maxwell - Faraday qui nous amènent à l'équation différentielle suivante :

$$\Delta H = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t}$$

Cette équation doit satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} H(x, b) = H_0 & \quad \text{et} & \quad H(a, y) = H_0 \\ H(x, -b) = H_0 & & \quad H(-a, y) = H_0 \end{aligned}$$

### III.1. Le principe pour la résolution de cette équation différentielle :

Nous nous inspirons du traitement du problème hyperbolique  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f$  que propose

[RT, 1983]. Son principe est :

- Recherche d'une base  $(\varphi_n)$  de fonction propre de la partie spatiale de l'opérateur, i.e. D (Dirichlet) + CL (Conditions Limites) spatiales.
- Utilisation d'un cadre fonctionnel où cette base est complète de sorte que la solution se décompose en :

$$u(t, x_1, \dots, x_d) = \sum_n \alpha_n(t) \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

- Injection de cette décomposition dans l'EDP, du produit scalaire par chaque  $\varphi_n$  pour obtenir une famille d'équations différentielles « orthogonales » (EDO) caractérisant les  $\alpha_n$  :

$$\alpha_n'(t) = \lambda_n \alpha_n(t) + \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$$

Les résolutions de ces EDO linéaires et l'utilisation des CI (conditions initiales) nous amèneront à notre expression du champ magnétique. Le cadre fonctionnel est celui des espaces de Sobolev standard, le produit scalaire est celui de Lebesgue qui rend la famille  $(\varphi_n)$  complète. Notons que ces EDO dépendent du temps et des coordonnées spatiales alors que notre problème est indépendant du temps. En effet, l'adaptation développée ici consiste à traiter un problème elliptique. Pour cela, nous choisissons arbitrairement une coordonnée et nous lui faisons jouer le rôle du temps, les autres restent alors spatiales. Un terme d'ordre zéro est aussi ajouté, il est imaginaire pur. Le problème traité est donc vu comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + \lambda u + f$$

L'impact de la complexité de  $\lambda$  et de l'ordre du terme  $u$  restent mineur. Par contre le changement de signe devant  $\Delta$  est loin d'être anodin (surtout du point de vue physique).

### III.2. Passage du problème physique au problème mathématique :

Nous nous trouvons en régime harmonique de pulsation  $\omega$ . Le conducteur à une section rectangulaire de  $2a \times 2b$  (valeur en millimètres) occupé par un matériau caractérisé par une perméabilité magnétique  $\mu$  et une conductivité électrique  $\sigma$  (cf. figure II.5). L'équation

$$\Delta H = \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} \text{ se transforme donc en l'équation suivante dans l'hypothèse du régime harmonique :}$$

$$-\Delta H + \lambda H = 0.$$

Nous cherchons le champ tel que  $H : (x, y) \rightarrow H(x, y) \in \mathbb{C}$  solution de :

$$-\Delta H + \lambda H = 0 \quad \text{dans } ]0, a[ \times ]0, b[$$

$$H = H_0 \quad \text{sur le bord.}$$



Où  $H_0$  est une constante réelle et  $\lambda = j\omega\sigma\mu$ .

Pour des raisons de symétrie, on travaille sur  $\Omega = ]0,a[ \times ]0,b[$ , et on cherche à trouver  $H : (x,y) \rightarrow H(x,y) \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\begin{aligned} -\Delta H + \lambda H &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial H}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \{0\} \times ]0,b[ \text{ et } ]0,a[ \times \{0\} \\ H &= H_0 && \text{sur } \{a\} \times ]0,b[ \text{ et } ]0,a[ \times \{b\} \end{aligned}$$

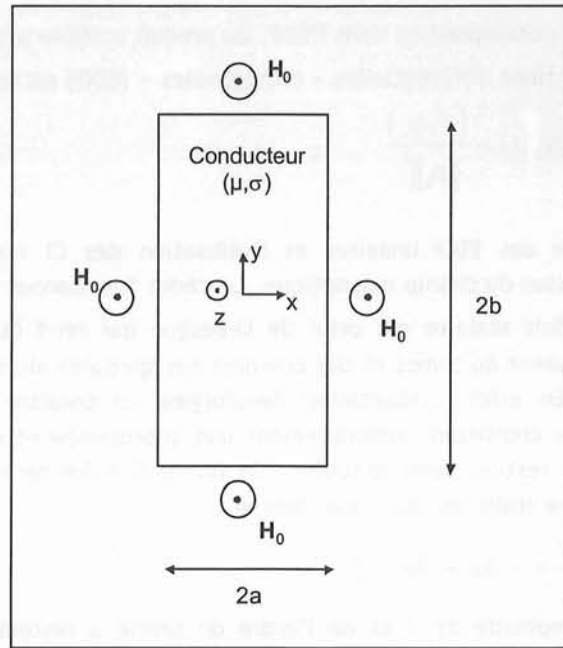


Figure II.5 : représentation du conducteur placé dans un champ magnétique selon (Oz).

Pour utiliser la méthode de décomposition sur base complète, il faut utiliser des CL homogènes, c'est obligatoire (puisque sans cela nous ne pourrions aboutir à une solution unique).

Nous introduisons donc le changement d'inconnue :  $u(x,y) = H(x,y) + H_0$ .

De sorte que le problème devient :

Trouver  $u : (x,y) \rightarrow u(x,y) \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda u &= -\lambda H_0 && \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{dans } \Gamma_N \\ u &= 0 && \text{dans } \Gamma_D. \end{aligned}$$

Nous pourrions aussi faire un changement d'échelle qui conduirait à  $H_0 = 1$  et  $\lambda = L^2\omega\mu\sigma$  où  $L$  serait une longueur caractéristique.

Nous pouvons maintenant séparer les variables, nous choisissons  $x$  pour jouer le rôle du temps et le problème s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 \text{EDP :} & \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u + \lambda H_0 & \text{dans } ]0, a[ \times ]0, b[ \\
 \text{CI et F :} & \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \quad \text{et} \quad u(a, y) = 0 & \forall y \in ]0, b[ \quad (P) \\
 \text{CL :} & \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x, b) = 0 & \forall x \in ]0, a[
 \end{aligned}$$

Nous noterons que l'habituelle condition de Cauchy d'un problème d'évolution d'ordre deux en temps (i.e. la donnée de deux informations, l'une sur  $u$  et l'autre sur  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , pour  $t=0$ ) est remplacée par une condition initiale et finale. Mais n'oublions pas que pour le problème est en fait elliptique.

Nous commençons la construction d'une solution formelle<sup>(1)</sup> par le calcul éléments propres de la partie spatiale de l'opérateur.

<sup>(1)</sup> Par formelle on entend : « on fait tout ce qu'on a envie de faire : les séries convergent, on peut commuter le signe somme avec les opérateurs différentielles, etc. ».

### III.3. Décomposition spectrale de la partie spatiale de (P)

La partie spatiale de l'opérateur de (P) est l'opérateur :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x, b) = 0$$

Nous cherchons les éléments propres de cette partie spatiale. Pour la suite, nous allons faire quelques rappels ponctuels sur l'analyse fonctionnelle sous forme de définitions, de propriétés et de preuves qui nous permettront de progresser par étape jusque la solution de notre équation différentielle partielle.

#### Définition :

On appelle éléments propres de la partie spatiale de (P) les couples  $(\lambda_n, \varphi_n)$  tels que :

$$\left. \begin{aligned}
 & \lambda_n \in \mathbb{C}, \quad \varphi_n : y \in ]0, b[ \rightarrow \varphi_n(y) \in \mathbb{C} \\
 & \varphi_n \neq 0 \text{ est une solution de :} \\
 & \quad \varphi''_n + \lambda \varphi_n = \lambda_n \quad \text{dans } ]0, y[ \\
 & \quad \varphi'_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_n(b) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{PbS})$$

#### propriété 1 :

La famille des éléments propres est une famille infinie et dénombrable.

Preuve :

Le but de la preuve est de calculer explicitement les couples d'éléments propres. En effet, la propriété est le résultat de l'application d'un théorème important d'analyse fonctionnelle (cf. propriété 3 qui suit).

Nous travaillons formellement et en plus en 1D, donc :

$$\begin{aligned} -\varphi_n'' + \lambda\varphi_n &= \lambda_n\varphi_n \Rightarrow \varphi_n'' = (\lambda - \lambda_n)\varphi_n \\ \Rightarrow \varphi_n(y) &= \alpha_n \cosh(\sqrt{\lambda - \lambda_n}y) + \beta_n \sinh(\sqrt{\lambda - \lambda_n}y) \end{aligned}$$

$$\text{Mais, } \varphi_n'(0) = 0 \text{ donc } \beta_n \sqrt{\lambda - \lambda_n} = 0.$$

Nous rejetons  $\lambda_n = \lambda$  sinon nous n'aurions qu'un seul élément propre et en plus il ne serait pas propre. Donc, récursivement nous avons  $\beta_n = 0$ .

Dans ces conditions,  $\varphi_n(y) = \alpha_n \cosh(\sqrt{\lambda - \lambda_n}y)$  avec  $\varphi_n(b) = 0$  ce qui donne :

$$\alpha_n \cosh(\sqrt{\lambda - \lambda_n}b) = 0$$

Nous voulons  $\varphi_n \neq 0$ , donc  $\alpha_n \neq 0$ , il reste donc :

$$\cosh(\sqrt{\lambda - \lambda_n}b) = 0$$

Ce qui caractérise  $\lambda_n$  :

$$\text{or } \cosh(z) = 0 \Leftrightarrow z = i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Donc } \cosh(\sqrt{\lambda - \lambda_n}b) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda - \lambda_n}b = i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Comme un vecteur propre est choisi à une constante multiplicative près nous choisissons  $\alpha_n = 1$ .

Nous avons alors établi que si  $(\lambda_n, \varphi_n)$  est une solution de (PbS), alors :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda + \frac{1}{b^2} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2 \\ \varphi_n(y) &= \cosh(\sqrt{\lambda - \lambda_n}y) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\frac{y}{b}\right] \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad (\text{EP}) \end{aligned}$$

Comme la réciproque est vraie, nous avons la propriété ainsi que l'expression des éléments propres.

Nous passons maintenant aux propriétés d'orthogonalité qui sont fondamentales dans la méthode de séparations de variables. Ces propriétés sont énoncées dans l'espace  $L^2(]0, y[)$  des fonctions dont le carré du module est sommable sur  $]0, y[$  muni du produit scalaire :

$$(\varphi, \phi) = \int_0^b \varphi(y) \overline{\phi(y)} dy.$$

Qui confère à  $L^2(]0, y[)$  la structure d'espace de Hilbert.

**Propriété 2 :**

La fonction propre vérifie :

$$(\varphi_n, \phi_m) = 0 \quad \forall n \neq m$$

$$\|\varphi_n\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) = \frac{b}{2}$$

$$\int_0^b \varphi_n(y) dy = 2 \frac{(-1)^n b}{(1 + 2n)\pi}$$

**Preuve :** calcul direct (matlab en formel)

Nous retrouvons bien la propriété habituelle : « les vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux ».

**Propriété 3 :**

La famille  $(\varphi_n)$  est une famille complète de  $L^2(]0, y[)$ .

**Preuve :**

Etant donné que  $\lambda \in i\mathbb{R}$  et que  $\text{Re}(\lambda_n) \neq 0$ ,  $\lambda$  ne peut être valeur propre de l'opérateur.

Donc,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda$  avec ses conditions aux limites est un opérateur compact et auto adjoint de  $H^2(]0, y[)$ . Alors, nous pouvons appliquer un théorème classique (et difficile) de l'analyse fonctionnel [RT, 1983].

**Application :**

Puisque  $(\varphi_n)$  est une famille complète de  $L^2(]0, y[)$ , nous allons chercher la solution  $u : (x, y) \rightarrow u(x, y)$  comme une fonction  $u : x \in ]0, a[ \rightarrow u(x) \in L^2(]0, b[)$  et décomposons  $u(x)$  sur  $\varphi_n$  les coefficients de cette décomposition dépendent alors de  $x$  :

$$u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} Q_n(x) \varphi_n(y) \quad (D)$$

C'est le principe de superposition interpréter comme une méthode de séparation des variables.

**III.4. Calcul des  $Q_n(x)$**

Nous cherchons donc  $(\alpha_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  pour que  $u$  décomposé sous la forme (D) soit solution de (P).

En ce qui concerne les CL de (P), comme chaque  $(\varphi_n)$  vérifie ces conditions limites chaque terme de la série (D) les vérifie aussi. Nous avons le droit de faire ce que l'on veut donc :  $u$  définie par (D) vérifie les CL de (P).

En ce qui concerne l'EDP, toute la potentialité des espaces de Hilbert (et de la géométrie d'Euclide) va se développer. Nous injectons l'expression (D) de  $u$  dans l'EDP (P), nous commutons la somme avec les opérateurs de dérivation et nous obtenons :

$$\sum_m \mathcal{Q}_m \dot{\varphi}_m = \sum_m (-\mathcal{Q}_m \ddot{\varphi}_m + \lambda \varphi_m) + \lambda H_0$$

Expression dont on prend le produit scalaire par un quelconque des  $\varphi_n$  et grâce à la propriété 2 nous obtenons :

$$\mathcal{Q}_n'' = \lambda_n \alpha_n + \lambda H_0 \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Cela forme une famille d'EDO linéaire, du second ordre, et surtout découplées.

Les EDO s'intègrent à vue :

$$\mathcal{Q}_n(x) = C_n \cosh(\sqrt{\lambda_n} x) + D_n \sinh(\sqrt{\lambda_n} x) - \frac{\lambda}{\lambda_n} H_0 \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration  $C_n$  et  $D_n$  nous utiliserons ce qui reste : à savoir les CI et CF :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_n \alpha_n'(0) \varphi_n(y) = 0 \text{ nous avons commuté la somme à } \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n'(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ car } (\varphi_n) \text{ est une famille complète.}$$

Donc  $D_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$\mathcal{Q}_n$  se simplifie en :

$$\mathcal{Q}_n(x) = C_n \cosh(\sqrt{\lambda_n} x) - \frac{\lambda}{\lambda_n} H_0 \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi}$$

Comme  $u(a, y) = 0$ , nous avons alors  $\sum_n \alpha_n(a) \varphi_n(y) = 0$

Donc  $C_n(a) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

i.e.

$$C_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} H_0 \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \frac{1}{\cosh(\sqrt{\lambda_n} a)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### III.5. Conclusion :

Nous rassemblons tous les résultats précédents pour écrire :

$$H(x, y) = u(x, y) + H_0$$

$$u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} Q_n(x) \varphi_n(y)$$

$$\varphi_n(y) = \cosh(\sqrt{\lambda - \lambda_n} y)$$

$$\lambda_n = \lambda + \frac{1}{b^2} \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right)^2 = j\omega\mu\sigma + \frac{1}{b^2} \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right)^2$$

$$Q_n(x) = C_n \cosh(\sqrt{\lambda_n} x) - \frac{4}{\pi} H_0 \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

$$C_n = \frac{\lambda H_0 4(-1)^n}{\lambda_n (2n+1)\pi} \frac{1}{\cosh(\sqrt{\lambda_n} a)}$$

Soit encore :

$$H(x, y) = H_0 + \sum_n \frac{4(-1)^n H_0}{(2n+1)\pi} \frac{\lambda}{\lambda_n} \left[ \frac{\cosh(\sqrt{\lambda_n} x)}{\cosh(\sqrt{\lambda_n} a)} - 1 \right] \cos\left( \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \frac{y}{b} \right)$$

**NB :** La formule n'est pas symétrique. C'est normale, nous avons fait de x le temps et de y l'espace. Cela dit, nous aurions pu faire l'inverse et dans ce cas nous aurions alors obtenue la même formule où x et y auraient échangés leur rôle ainsi que a et b. Il est alors possible de faire une moyenne des deux formules. Les formules utilisant les nombres complexes qui nous ont été utiles sont récapitulées dans l'annexe 2.

Nous en déduisons alors la densité de courant par  $J = \text{rot } H$  :

$$J_x(x, y) = \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} = - \sum_n \frac{4(-1)^n H_0}{(2n+1)\pi} \frac{\lambda}{\lambda_n} \left[ \frac{\cosh(\sqrt{\lambda_n} x)}{\cosh(\sqrt{\lambda_n} a)} - 1 \right] \left[ \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \frac{1}{b} \right] \sin\left( \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \frac{y}{b} \right)$$

$$J_y(x, y) = - \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} = - \sum_n \frac{4(-1)^n H_0}{(2n+1)\pi} \frac{\lambda}{\lambda_n} \left[ \frac{\sqrt{\lambda_n} \sinh(\sqrt{\lambda_n} x)}{\cosh(\sqrt{\lambda_n} a)} \right] \cos\left( \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \frac{y}{b} \right)$$

Après obtention des champs nous avons pu en déduire les densités de courant ( $\text{rot } H = J$ ), ce qui nous a permis ensuite de calculer par intégration numérique les densités de puissance dans le matériau magnétique considéré. Pour cette intégration nous avons utilisé la méthode de Gauss avec 10 points de calcul (cf. Annexe ? pour avoir le programme fortran de calcul de  $\mu^*$ ). Les expressions

du champ et des densités de courants sont fonction de cosinus et sinus hyperboliques qui nous limites en fréquence dans le calcul de la perméabilité magnétique complexe selon (Oz). En effet, nous constatons que l'argument de ces cosinus et sinus sont fonction de la fréquence et également du nombre d'itérations. Plus la fréquence est élevée plus nous devons aller loin en itération pour obtenir la convergence dans le calcul de H et de J. Cela reste contradictoire car numériquement nous sommes bloqués par la précision numérique des outils utilisés pour l'évaluation des sinus et cosinus hyperboliques. Des valeurs des densités de puissance nous avons obtenu la perméabilité magnétique complexe en fonction des fréquences, figure II.6.

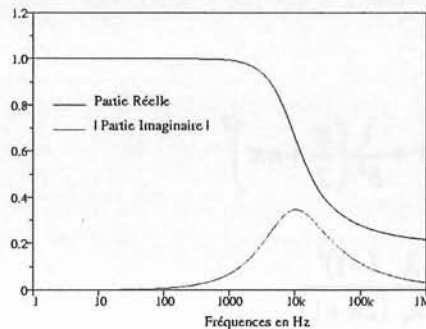


Figure II.6 : Représentation de la perméabilité magnétique complexe selon le troisième axe,  $\mu_z$ .

Cette composante a même allure que  $\mu_x$  et  $\mu_y$ .

#### IV. Homogénéisation

Dans l'objectif de modéliser un transformateur de puissance (plus généralement des machines électriques) nous avons été amenés à faire l'étude d'un paquet de conducteurs. En effet, les éléments électriques (figure II.7) étant constitués de conducteur entourés d'isolant (guipage), le tenseur perméabilité magnétique calculé précédemment pour un conducteur doit être homogénéisé afin d'affecter un unique matériau à chaque élément électrique (figure II.7).

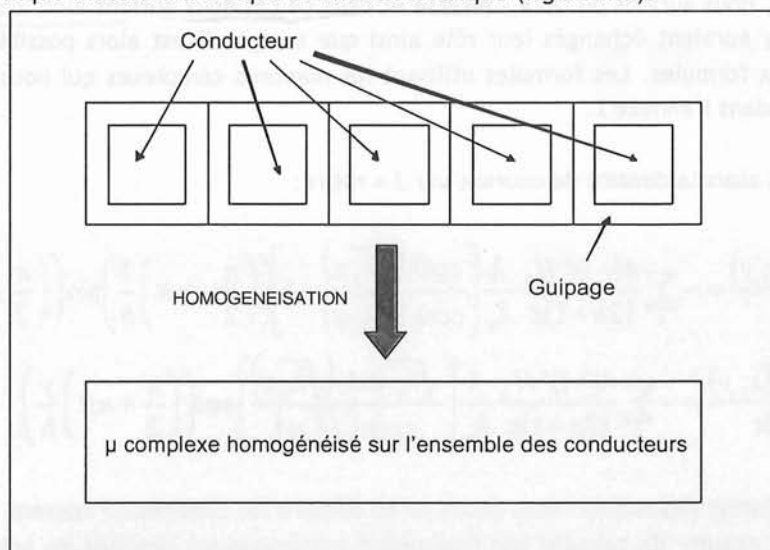


Figure II.7 : Représentation d'un élément électrique.

Cette homogénéisation est réalisée à partir des caractéristiques matériaux et de la géométrie de la cellule élémentaire conducteur - isolant (Figure II.8).

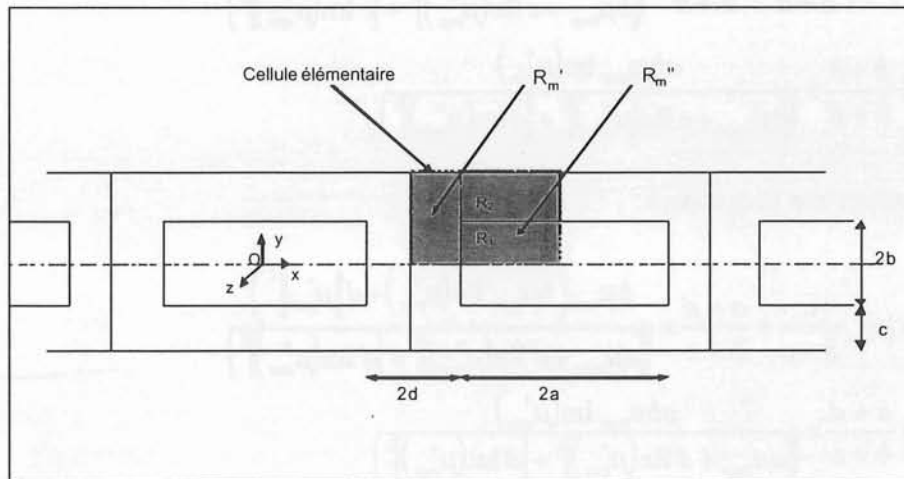


Figure II.8 : Représentation d'une cellule élémentaire.

Cette homogénéisation est basée sur la notion de réductance magnétique développée dans le rapport d'EDF [Moreau et al., 1996]:

$$R_m = \int \frac{dl}{c \mu S}$$

En considérant le cas général d'un matériau isolant anisotrope posons :

- $\mu_{cux}^*$  : la perméabilité complexe du conducteur selon l'axe (Ox) ;
- $\mu_{cuy}^*$  : la perméabilité complexe du conducteur selon l'axe (Oy) ;
- $\mu_{isox}$  : la perméabilité réelle selon l'axe (Ox) pour l'isolant ;
- $\mu_{isoy}$  : la perméabilité réelle selon l'axe (Oy) pour l'isolant.

La réductance de la cellule élémentaire suivant (Oy) s'écrit :

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R'_m} + \frac{1}{R''_m}$$

$R'_m$  et  $R''_m$  étant en parallèle, notons que  $R''_m$  est l'équivalent des réductance  $R_1$  et  $R_2$  qui sont, elles, en série :  $R''_m = R_1 + R_2$ .

C'est à dire dans l'hypothèse 2D (réductance par mètre) :

$$\mu_{egy}^* \frac{a+d}{b+c} = \mu_{isoy} \frac{d}{b+c} + \frac{1}{R_1 + R_2}$$

$$\mu_{egy}^* \frac{a+d}{b+c} = \mu_{isoy} \frac{d}{b+c} + \frac{1}{\frac{b}{a\mu_{cuy}^*} + \frac{c}{a\mu_{isoy}}}$$

$$\mu_{egy}^* = \mu_{isoy} \frac{d}{a+d} + \frac{b+c}{a+d} \times \frac{a\mu_{cuy}^* \mu_{isoy}}{b\mu_{isoy} + c\mu_{cuy}^*}$$

On obtient finalement :



$$\operatorname{Re}(\mu_{eqy}^*) = \mu_{isoy} \frac{d}{a+d} + \frac{b+c}{a+d} \times \frac{a\mu_{isoy} (b\mu_{isoy} \operatorname{Re}(\mu_{cuy}^*) + c\|\mu_{cuy}^*\|^2)}{[b\mu_{isoy} + c \operatorname{Re}(\mu_{cuy}^*)]^2 + [c \operatorname{Im}(\mu_{cuy}^*)]^2}$$

$$\operatorname{Im}(\mu_{eqy}^*) = \frac{b+c}{a+d} \times \frac{ab\mu_{isoy} \operatorname{Im}(\mu_{cuy}^*)}{[b\mu_{isoy} + c \operatorname{Re}(\mu_{cuy}^*)]^2 + [c \operatorname{Im}(\mu_{cuy}^*)]^2}$$

De même selon l'axe (Ox) il vient :

$$\operatorname{Re}(\mu_{eqx}^*) = \mu_{isox} \frac{c}{b+c} + \frac{a+d}{b+c} \times \frac{b\mu_{isox} (b\mu_{isox} \operatorname{Re}(\mu_{cux}^*) + d\|\mu_{cux}^*\|^2)}{[a\mu_{isox} + d \operatorname{Re}(\mu_{cux}^*)]^2 + [d \operatorname{Im}(\mu_{cux}^*)]^2}$$

$$\operatorname{Im}(\mu_{eqx}^*) = \frac{a+d}{b+c} \times \frac{ab\mu_{isox} \operatorname{Im}(\mu_{cux}^*)}{[a\mu_{isox} + d \operatorname{Re}(\mu_{cux}^*)]^2 + [d \operatorname{Im}(\mu_{cux}^*)]^2}$$

En ce qui concerne l'homogénéisation de la troisième composante, elle revient en fait en un rapport de surface entre le conducteur et le guipage.

Considérons la cellule élémentaire suivante :

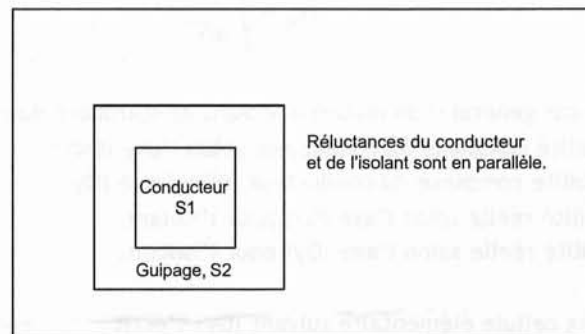


Figure II.9 : homogénéisation selon (Oz).

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ce qui nous donne comme expression :

$$\frac{\mu_{eq} S_t}{l} = \frac{\mu_1 S_1}{l_1} + \frac{\mu_2 S_2}{l_2}$$

$$\mu_{eq} = \frac{\mu_1 S_1}{S_t} + \frac{\mu_2 S_2}{S_t}$$

avec  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_t (=S_1+S_2)$  respectivement la surface de la section du conducteur, celle du guipage et la somme des deux précédentes.

## V. Les effets propres – résistance de Stoll.

La perméabilité magnétique complexe déterminée précédemment, appliquée à un élément électrique (notre conducteur), permet de calculer ses pertes dues à un effet de proximité induit par les autres éléments présents non alimentés du système global (réaction d'induit) mais ne prend pas en compte ses pertes par effet de peau. La méthode utilisée pour prendre en compte les deux effets consiste à affecter la perméabilité complexe calculée précédemment (correspondant à un élément électrique non alimenté) à l'élément électrique alimenté lors du calcul Flux2D - Flux3D et d'ajouter ensuite en post-processeur à chaque terme propre des matrices R et L respectivement une résistance et une inductance, calculées analytiquement, caractérisant l'effet de peau dans l'élément électrique considéré (comme expliqué dans l'introduction et détaillé dans le chapitre 5). Nous utilisons donc le principe d'orthogonalité pour effectuer l'addition des effets de peau et de proximité.

### V.1. Calcul du champ magnétique H

Ces résistances et inductances sont obtenues à partir de l'expression analytique du champ magnétique dans un conducteur rectangulaire alimenté (figure II.10) .

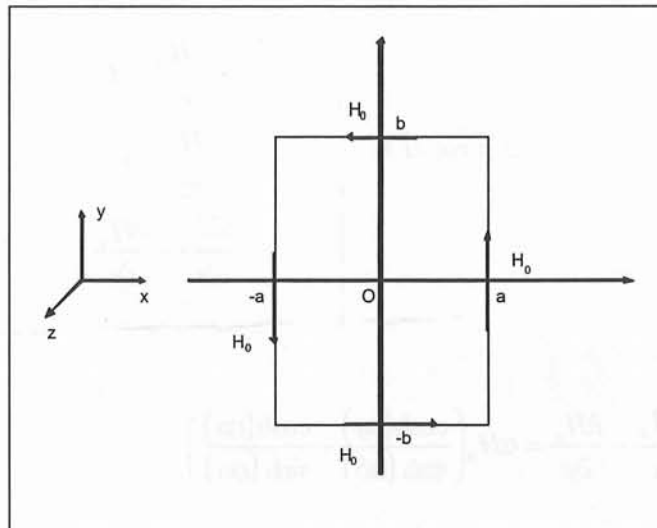


Figure II.10 : Conducteur rectangulaire alimenté.

Avec les conditions aux limites , le potentiel vecteur A, colinéaire à l'axe (Oz), s'exprime (Annexe 1) par:

$$A = -\frac{\mu H_0}{\alpha} \left( \frac{\cosh(\alpha y)}{\sinh(\alpha b)} + \frac{\cosh(\alpha x)}{\sinh(\alpha a)} \right)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{1+j}{\delta} \text{ et } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} .$$

On en déduit alors :

$$H_x = -H_0 \left( \frac{\sinh(\alpha y)}{\sinh(\alpha b)} \right) \quad \text{et} \quad H_y = H_0 \left( \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha a)} \right)$$

C'est à dire :

$$H_x = -H_0 \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{2y}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2y}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)}} * \exp(j(\theta_y - \theta_b))$$

$$H_y = H_0 \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{2x}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2x}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)}} * \exp(j(\theta_x - \theta_a))$$

avec  $\theta_i = \arctan\left(\tan\left(\frac{i}{\delta}\right) * \cot \operatorname{anh}\left(\frac{i}{\delta}\right)\right)$ .

Sachant que :

$$\vec{J} = \overline{\operatorname{rot}} \vec{H} =$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Il vient :

$$J_z(x, y) = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \alpha H_0 \left( \frac{\cosh(\alpha y)}{\sinh(\alpha b)} + \frac{\cosh(\alpha x)}{\sinh(\alpha a)} \right)$$

## V.2. Calcul de la densité de puissance harmonique dans le conducteur

Nous considérons uniquement le premier quart de cellule pour ce calcul.

### V.2.1. Puissance réactive

Elle s'écrit :

$$P_{réact} = j\omega\mu H\bar{H} = j\omega\mu(H_x\bar{H}_x + H_y\bar{H}_y)$$

$$P_{réact} = j\omega\mu H_0^2 \left[ \frac{\cosh\left(\frac{2x}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2x}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)} + \frac{\cosh\left(\frac{2y}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2y}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right]$$

La puissance réactive par mètre s'écrit alors :

$$P_{réact} = \iiint_{x,y,z} p_{réact} dx dy dz = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^l p_{réact} dx dy dz$$

$$P_{réact} = j\omega\mu H_0^2 * l * \left[ \frac{a\delta}{2} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right) + \frac{b\delta}{2} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)} \right) \right]$$

### V.2.2. Puissance active

La densité de puissance active a l'expression suivante :  $p_{act} = \frac{1}{\sigma} J\bar{J}$ .

D'où la puissance active par mètre :

$$P_{act} = \iiint_{x,y,z} p_{act} dx dy dz = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^l p_{act} dx dy dz$$

$$P_{act} = \frac{l * H_0^2}{\sigma} * \left[ \frac{a}{\delta} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right) + \frac{b}{\delta} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2a}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)} \right) + 2 \right]$$

Le théorème d'Ampère,  $\oint H dl = I_0$ , appliqué au conducteur donne :  $4(a+b)H_0 = I_0$ .

#### Résistance de Stoll :

La résistance, pour le conducteur entier, s'obtient alors à partir de la puissance active en écrivant :

$$4P_{act} = RI_0^2.$$

$$R_{Stoll} = \frac{l}{4\sigma(a+b)^2} \left[ \frac{a}{\delta} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right) + \frac{b}{\delta} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2a}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)} \right) + 2 \right]$$

On vérifie que lorsque  $\omega$  tend vers 0 (i.e. l'épaisseur de peau  $d$  tend vers l'infini) l'on obtient à partir d'un développement limité à proximité de zéro l'expression de la résistance en continu :

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{2a * 2b}.$$

### Inductance de Stoll :

L'inductance, pour le conducteur entier, se détermine à partir de la puissance réactive en posant :  $4P_{réact} = jL\omega I_0^2$ .

$$L_{Stoll} = \frac{\mu * l}{4 * (a+b)^2} \left[ \frac{a\delta}{2} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right) + \frac{b\delta}{2} \left( \frac{\sinh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2a}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)} \right) \right]$$

Cette résistance et cette inductance calculées analytiquement seront donc additionnées aux termes diagonaux des matrices échantillonnées avec la perméabilité magnétique complexe définie précédemment pour un conducteur non alimenté (cf. Chapitre 4 §III).

## **V.3. Le calcul des matrices (R) et (L)**

Les inductances et résistances représentant les pertes d'origine magnétique (courant de Foucault dans les conducteurs et le circuit magnétique dans le cas général) sont alors déterminées à partir d'un calcul de champ magnétique à une fréquence donnée. Pour un transformateur modélisé par  $n$  éléments électriques, le calcul s'organise de la façon suivante :

- Résolution de l'équation de Maxwell-Ampère en potentiel scalaire,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}$ .

Avec

- $\mu^*$ , perméabilité magnétique complexe
- condition limite de champ tangentiel sur la frontière extérieure du circuit magnétique,
- source de courant sur l'élément électrique  $i$  de  $1 \text{ A/mm}^2$ ,
- élément électrique  $j$  non alimenté pour  $j=1, \dots, n$  avec  $j \neq i$ .

La résolution en régime harmonique à la pulsation  $\omega$ , de l'équation Maxwell-Ampère permet alors le calcul du flux  $\varphi_j^*$  (complexe) sur chacun des éléments électriques  $j$  (moyenne de la circulation du potentiel vecteur sur la section de l'élément électrique  $j$ ). Soit :

$$\varphi_j^* = \frac{1}{S_j} \iint_{s_j} A ds$$

L'inductance (respectivement la résistance) série mutuelle entre l'élément électrique  $i$  et l'élément électrique  $j$  s'obtient alors par la partie réelle (respectivement partie imaginaire) du flux vu par l'élément électrique  $j$ . En effet, en tenant compte des tours des éléments électriques  $i$  et  $j$ , nous pouvons écrire :

$$\Phi_j^* = n_j \varphi_j^* = \left( -L_{ij} + \frac{R_{ij}}{\omega} \right) i_i$$

d'où :

$$L_{ij} = - \frac{n_i n_j \operatorname{Re}(\varphi_j^*)}{I_i}$$

$$R_{ij} = \frac{\omega n_i n_j \operatorname{Im}(\varphi_j^*)}{I_i}$$

- Un calcul magnétique permet donc de déterminer, par post-processing, une ligne des matrices  $R$  et  $L$ . Les matrices complètes s'obtiennent alors en répétant le processus précédent (une résolution et  $n$  calculs de flux) pour chaque élément électrique.

Les matrices inductance et résistance calculées par FLUX2D modélisant les effets inductifs constituent la partie imaginaire et la partie réelle d'une matrice impédance série harmonique  $Z$  :

$$Z = R + j\omega L$$

Les pertes par effet de peau sont ajoutées en post-processeur pour chaque fréquence par le logiciel SUMER.

L'objectif principal de ce document est de fournir une vue d'ensemble des résultats obtenus lors de la phase de développement de l'application. Les données sont présentées sous forme de tableaux et de graphiques.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. Les données sont présentées sous forme de tableaux et de graphiques.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. Les données sont présentées sous forme de tableaux et de graphiques.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. Les données sont présentées sous forme de tableaux et de graphiques.

**CHAPITRE 3 :**  
**Validation 2D - 3D**



## CHAPITRE 3 :

### Validation 2D - 3D

## Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la perméabilité magnétique complexe est basée sur le calcul du champ magnétique dans un conducteur soumis à un champ extérieur. Elle sera utilisée pour le calcul des pertes par proximité en fréquence élevée, ce qui permettra de s'affranchir d'un maillage éléments finis dense. Nous remarquons que les composantes du tenseur de perméabilité complexe ont été obtenues en deux étapes distinctes :

- la première a été de calculer les composantes dans la section du conducteur en le considérant de profondeur infinie,
- la seconde a permis la détermination de sa composante suivant l'axe du conducteur.

Par conséquent, nous avons validé, dans un premier temps, notre approche 2D du calcul des pertes par effet de proximité par l'étude d'un conducteur de profondeur infinie à section rectangulaire ou carrée. Notons que lorsque plusieurs conducteurs sont soumis à un champ extérieur, il est possible d'envisager une homogénéisation et donc de remplacer ce paquet de conducteurs par un unique matériau avec une perméabilité magnétique complexe (cf. chapitre 2). La validation de cette homogénéisation a été effectuée par l'étude d'un paquet de 4 conducteurs. Ce calcul de pertes sera ensuite effectué en 3D par l'étude d'un barreau « conducteur » de dimensions finies soumis à un champ extérieur parallèle à son axe de révolution ou quelconque.

## I. Validation 2D

### I.1. *Champ extérieur imposé parallèle au bord d'un conducteur isolé*

#### I.1.1. **Conducteur avec une section $10 \times 40 \text{ mm}^2$**

Tout d'abord essayons de nous placer dans un cas se rapprochant le plus du calcul analytique de la perméabilité magnétique complexe 2D. Ceci équivaut à placer un conducteur de section rectangulaire dans un domaine dans lequel nous imposons un champ magnétique extérieur source parallèle à son plus long côté (figure III.1). Notons que pour toutes les simulations 2D nous utilisons la formulation en potentiel vecteur magnétique A de Flux2D.



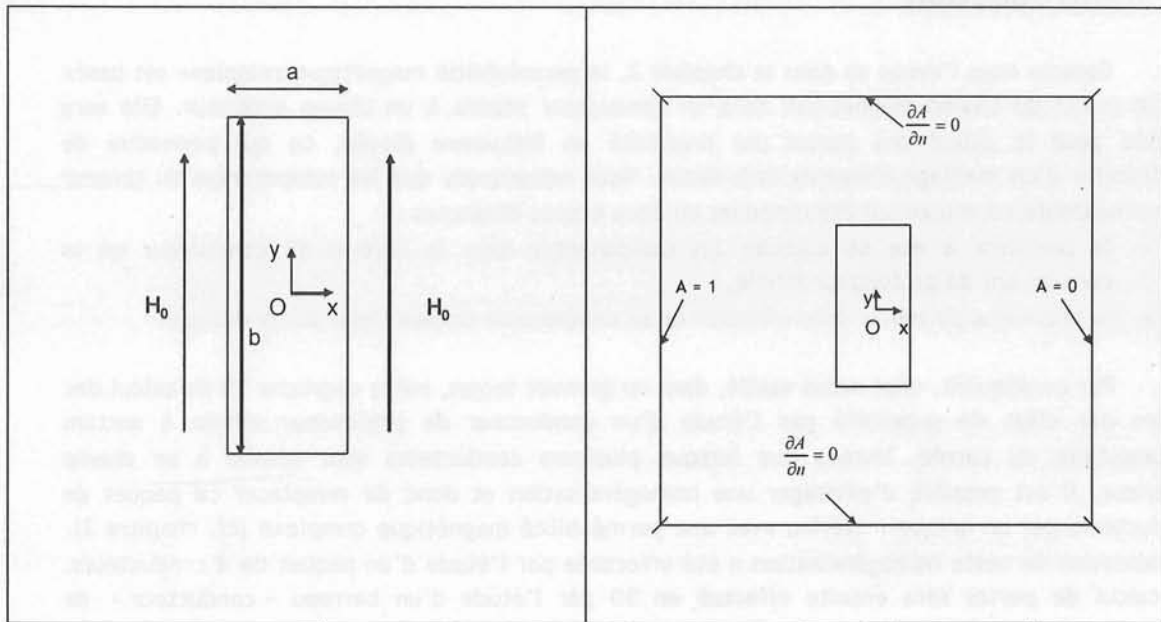


Figure III.1 : Représentation des dimensions du conducteur dans un champ magnétique ainsi que les conditions aux limites pour obtenir un champ extérieur parallèle au plus long côté.

Le champ est imposé par des conditions aux limites sur le potentiel vecteur magnétique (figure III.1) et notre domaine d'étude est suffisamment grand pour représenter l'infini. En effet, mettre un domaine plus large ne change pas les valeurs de champ magnétique obtenues. Le courant total dans le conducteur pour les simulations en  $(\mu, \sigma)$  est nul (dans le domaine temporel).

De part sa géométrie, le conducteur aura donc une perméabilité complexe anisotrope puisque cette dernière dépend fortement des dimensions du matériau considéré et de la fréquence à laquelle il sera utilisé. La figure III.2 nous montre la perméabilité calculée grâce à l'expression (cf. chapitre 2 § II.2.2) en fonction de la fréquence. Lorsque la fréquence tend vers zéro la perméabilité tend vers une valeur strictement réelle ( $\mu^* = \mu_0$ ). Par contre, à hautes fréquences les parties réelles et imaginaires ont tendance à devenir égales (en valeur absolue).

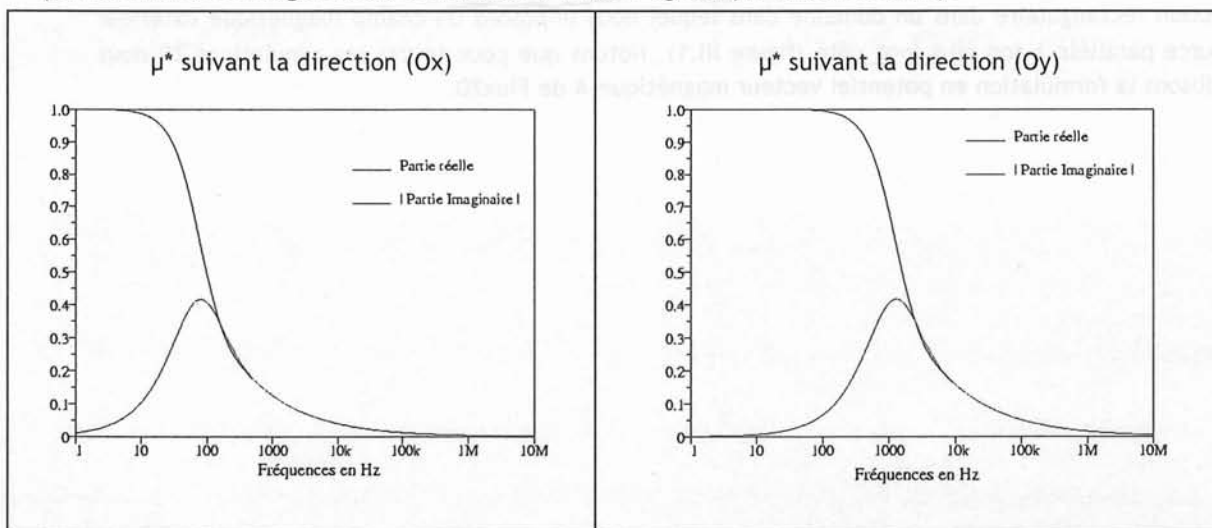


Figure III.2 : Perméabilité complexe relative en fonction de la fréquence.

Les composantes de  $\mu^*$  ont pratiquement même allure hormis le maximum de  $|\text{Im}(\mu^*)|$  qui n'apparaît pas à la même fréquence. En effet, les expressions de  $\mu_x^*$  et  $\mu_y^*$  sont respectivement, fonction de  $b/\delta$  et de  $a/\delta$  (cf. chapitre 2 § II.2.2),  $\delta$  étant l'épaisseur de peau (illustrée par la figure III.4). Cette épaisseur nous permet de déterminer l'épaisseur minimum de conducteur nécessaire pour avoir des courants de Foucault non négligeables dans l'épaisseur du conducteur (figure III.3). Les courants induits deviennent non négligeables dans un conducteur quand celui-ci à une dimension deux fois plus grande que  $\delta$  suivant la direction perpendiculaire à la direction du champ magnétique extérieur (figure III.3).

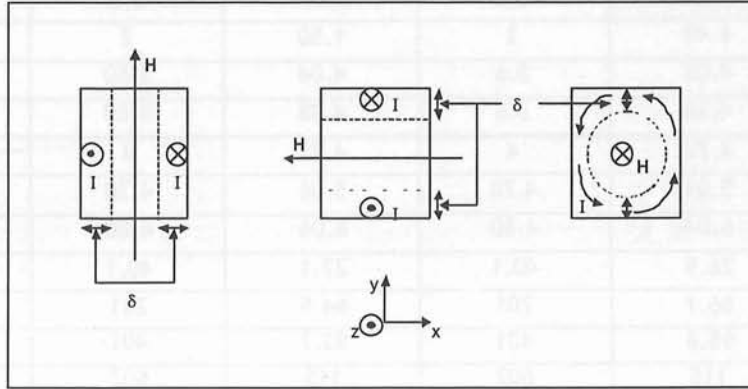


Figure III.3 : Développement des courants de Foucault dans un conducteur soumis à un champ magnétique extérieur.

La figure III.3 représente la manière dont se développent les courants de Foucault sur un conducteur soumis à un champ magnétique extérieur. Elle illustre également les différentes possibilités suivant la direction du champ.

$\delta$  étant fonction de la fréquence par conséquent nous avons :

- dans le premier cas  $\mu_x^*(b/\delta) \rightarrow$  les courants deviennent non négligeables dans l'épaisseur  $b$  du conducteur à des fréquences relativement faibles (à partir 100-200 Hz),
- dans le second,  $\mu_y^*(a/\delta) \rightarrow$  ils deviennent non négligeables à partir de 2000 Hz.

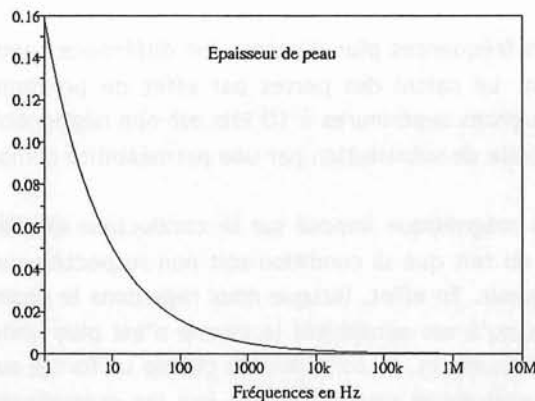


Figure III.4 : Epaisseur de peau (en m) en fonction de la fréquence.

Nous traitons le cas où  $\mu^*$  est fonction de  $(a/\delta)$ , les résultats du calcul des pertes par proximités avec  $(\mu^*)$  sont récapitulés dans le tableau III.1.

Fréquences	Puissances (W) avec $\mu^*$		Puissances (W) avec $(\mu, \sigma)$		Erreur Relative Sur $P_{act}$
	Partie réelle ( $\times 10^7$ )	Partie imag ( $\times 10^{10}$ )	Actives ( $\times 10^7$ )	Réactives ( $\times 10^{10}$ )	
50 Hz	0.0164	0.2	0.0164	0.2	$\leq 1\%$
100 Hz	0.0654	0.4	0.0655	0.4	$\leq 1\%$
200 Hz	0.259	0.8	0.259	0.8	$\leq 1\%$
500 Hz	1.49	2	1.50	2	$\leq 1\%$
900 Hz	4.02	3.6	4.04	3.60	$\leq 1\%$
950 Hz	4.36	3.8	4.38	3.80	$\leq 1\%$
1000 Hz	4.70	4	4.72	4	$\leq 1\%$
1050 Hz	5.04	4.20	5.06	4.20	$\leq 1\%$
1200 Hz	6.04	4.80	6.06	4.80	$\leq 1\%$
10 kHz	26.9	40.1	27.1	40.1	$\leq 1\%$
50 kHz	66.1	201	64.9	201	1.85 %
100 kHz	95.6	401	93.2	401	2.58 %
150 kHz	118	602	115	602	2.60 %

Tableau III.1 : Puissances actives et réactives (en W) en fonction de la fréquence.

Nous pouvons constater que l'erreur entre les résultats obtenus avec un matériau « réel »  $(\mu, \sigma)$  et un matériau avec un  $\mu$  complexe ne dépasse pas 2.6% pour les puissances actives, alors que pour les puissances réactives il n'y a presque pas d'erreur. La justesse du calcul des puissances réactives est normale puisque nous ne posons aucune condition restrictive par rapport à la perméabilité magnétique, ce qui est le cas pour la conductivité. Notons que pour l'obtention de la perméabilité magnétique complexe nous imposons un champ uniforme le long du conducteur. Nous verrons par la suite que cette condition sur le champ est importante.

Pour les puissances actives, à basses fréquences, la faible erreur relative obtenue est compréhensive puisqu'en dessous de 4000 Hz (fréquence à laquelle  $\delta = a/2$ ) les courants en réaction du champ extérieur sont négligeables. La constitution du conducteur  $[(\mu, \sigma)$  ou  $(\mu^*)]$  ne doit pas influencer le calcul des puissances dans celui-ci. Cela explique les résultats similaires entre  $(\mu, \sigma)$  et  $(\mu^*)$ .

Par contre, pour des fréquences plus élevées, des différences entre le calcul avec  $(\mu, \sigma)$  et celui avec  $(\mu^*)$  apparaissent. Le calcul des pertes par effet de proximité devient alors effectif. L'erreur relative à des fréquences supérieures à 10 kHz est non négligeable et traduit bien l'erreur faite en utilisant notre méthode de substitution par une perméabilité complexe.

Regardons le champ magnétique imposé sur le conducteur étudié : nous pourrions penser que cette erreur provienne du fait que la condition soit non respectée sur les bords du conducteur et en particulier sur sa longueur. En effet, lorsque nous regardons le champ surfacique appliqué au conducteur, nous constatons qu'à ses extrémités le champ n'est plus uniforme à la surface (région linéique en 2D). A hautes fréquences, la condition de champ uniforme au conducteur devient très importante. Lors du calcul analytique nous supposons que les composantes du champ magnétique sont uniformes à sa surface alors qu'en pratique elles ne le sont pas. Au niveau des coins du conducteur il y a présence d'effets de bord (cf. figure III.5).

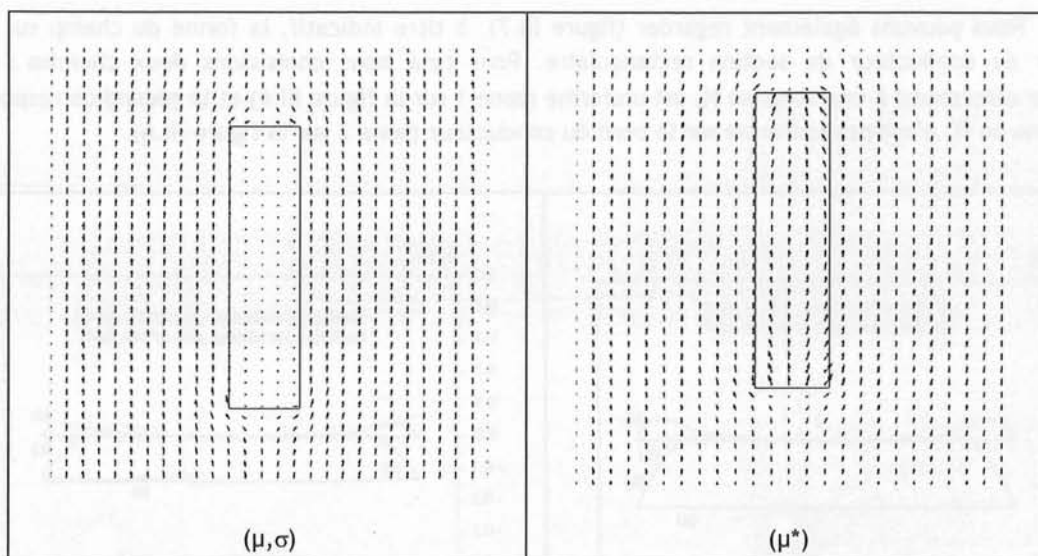


Figure III.5 : Visualisation des effets des conducteurs  $(\mu, \sigma)$  et  $(\mu^*)$  sur le champ imposé à  $f = 150$  kHz.

De la figure III.5 nous voyons que le champ magnétique est peu perturbé par la présence d'un matériau « complexe » alors qu'avec le matériau « réel » le champ est repoussé à l'extérieur du conducteur. Le champ est presque uniforme dans le cas « complexe ». Cela traduit bien l'hypothèse faite lors du calcul de la perméabilité complexe :  $H_y = H_0$  au bord du conducteur. Notons que les composantes du champ sont uniformes sur la majeure partie du bord du conducteur (cf. figure III.6). Il est à noter que le champ magnétique résultant admet des valeurs faibles à cause de nos conditions aux limites. A ses extrémités elles deviennent moins uniformes. Cette déviation du champ magnétique, lorsque le conducteur est affecté d'une conductivité électrique réelle, nous montre que notre hypothèse pour le calcul de la perméabilité complexe sur le champ extérieur imposé, composantes de  $H$  uniforme sur chaque côté du conducteur, n'est pas totalement valable.

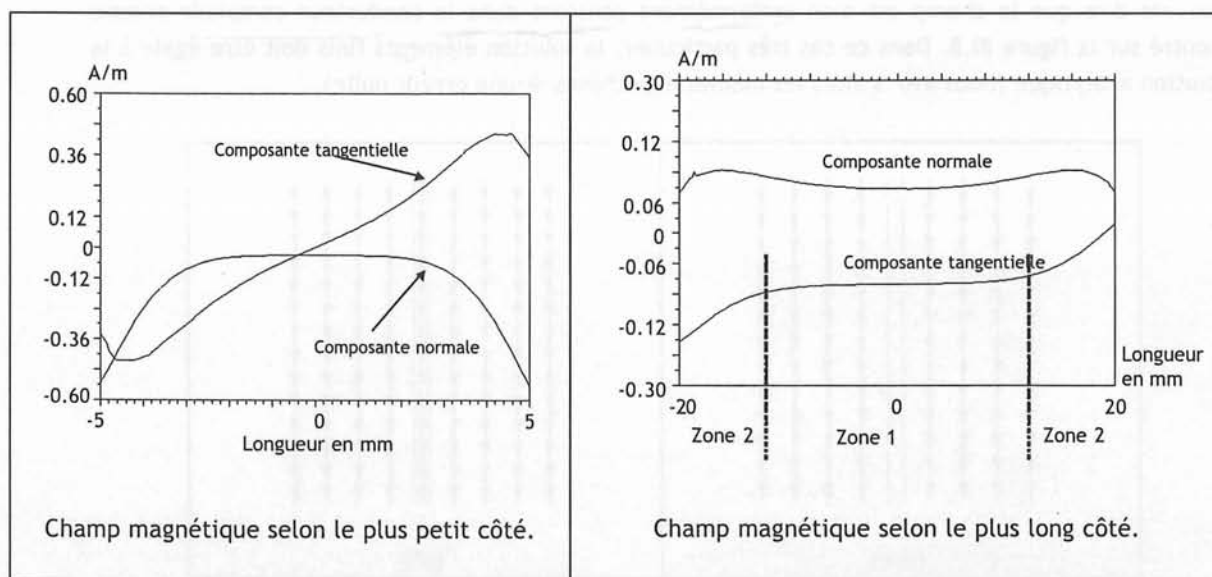


Figure III.6 : Champ magnétique sur les bords du conducteur  $(\mu, \sigma)$ .

Nous pouvons également regarder (figure III.7), à titre indicatif, la forme du champ sur la largeur du conducteur de section rectangulaire. Pour cela nous choisissons deux chemins : le premier correspond à une zone où  $H_y$  est uniforme (zone 1 sur la figure III.6) et le second correspond à la zone où  $H_y$  n'est pas uniforme sur le bord du conducteur (zone 2 sur la figure III.6).

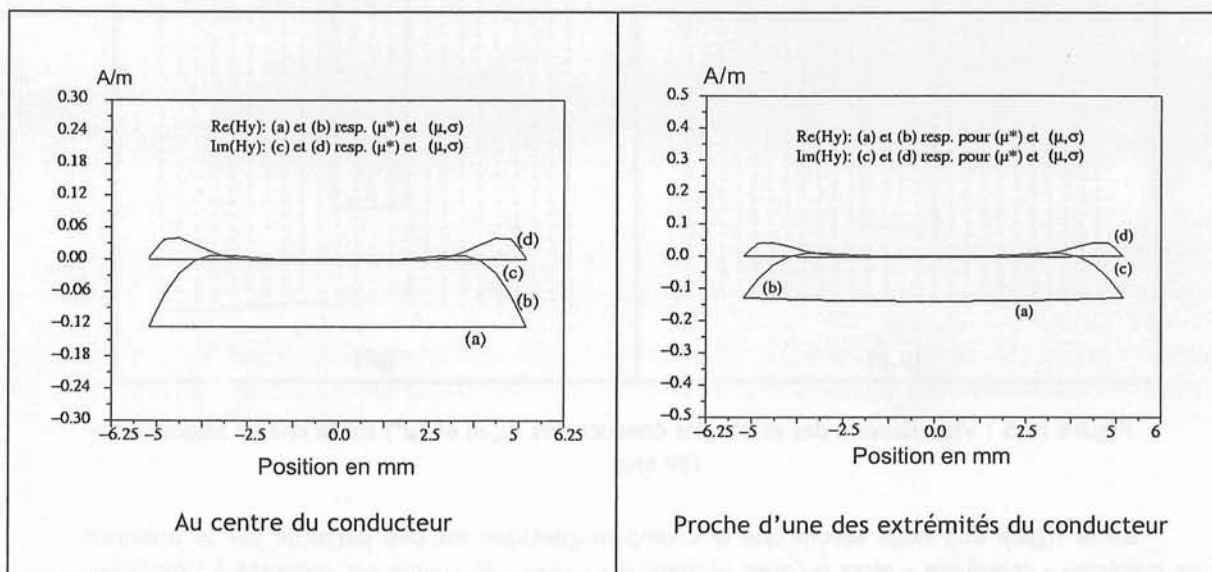


Figure III.7 : Champ surfacique sur la largeur du conducteur.

Le contraste entre l'uniformité du champ dans le cas  $(\mu^*)$  et sa variation dans le cas  $(\mu, \sigma)$  provient directement du calcul de la perméabilité magnétique complexe basé sur une équivalence énergétique (hypothèse de calcul, cf. chapitre 2) qui a tendance à uniformiser le champ magnétique dans le conducteur.

A contrario, si nous nous rapprochons du cas de la plaque infinie (hypothèse de calcul) nous pouvons dire que le champ est bien uniformément constant dans le conducteur complexe comme montré sur la figure III.8. Dans ce cas très particulier, la solution éléments finis doit être égale à la solution analytique (nous avons alors les mêmes hypothèses  $\rightarrow$  une erreur nulle).

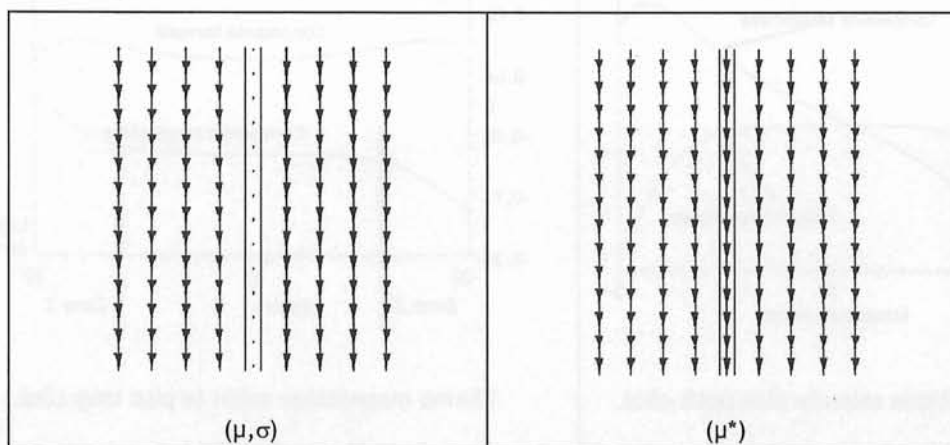


Figure III.8 : Représentation du champ magnétique imposé à une plaque infinie.

En conclusion de cette étude, nous pouvons dire que les résultats sont satisfaisants à différents points de vue :

- Le champ extérieur sur un conducteur de section rectangulaire est le même dans les deux cas  $[(\mu, \sigma) \text{ et } (\mu^*)]$  mais à l'intérieur du conducteur leurs profils sont totalement différents. C'est ce à quoi nous nous attendions puisque la perméabilité magnétique complexe est basée sur l'hypothèse d'une équivalence énergétique.
- Nous obtenons les mêmes pertes dans les deux cas, ce qui valide notre méthode de définition de la perméabilité magnétique complexe (erreur  $\leq 2.6\%$  à 150 kHz).
- Les effets 2D influencent faiblement le calcul des pertes.

### I.1.2. Cas particulier d'un conducteur à section carrée

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser uniquement au champ magnétique appliqué à un conducteur isolé de section carrée.

#### Hypothèses :

- La section est carrée :  $5 \times 5 \text{ mm}^2$ ,
- Le champ est imposé par une bobine alimentée en courant ( $I = 10 \text{ A}$ ),
- Le courant total dans le conducteur étudié (pour  $(\mu, \sigma)$ ) est nul.

NB : Nous imposons le champ comme indiqué ci-dessus afin de tester la mise en œuvre dans les simulations de bobines/inducteurs. Ce qui nous sera utile lors de l'étude de transformateurs que nous verrons par la suite.

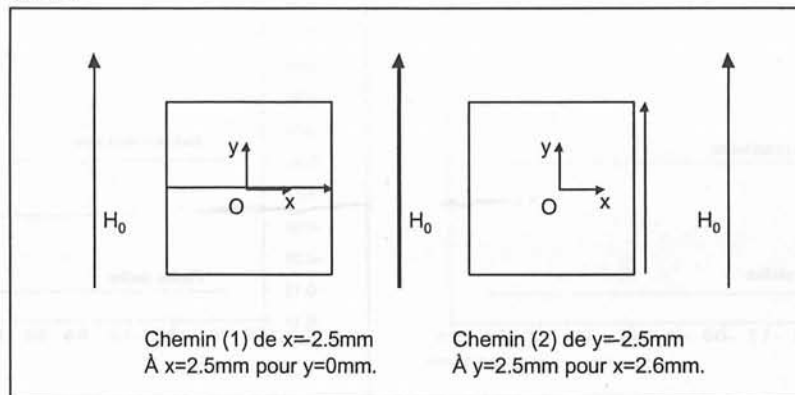


Figure III.9 : Chemins prédéfinis pour  $H_y$ , (1) selon  $(Ox)$  et (2) selon  $(Oy)$ .

A partir du moment où nous obtenons les mêmes pertes entre les simulations avec un matériau « réel » et celles avec un matériau « complexe » (§ I.1.1), nous nous sommes intéressés plus particulièrement au champ magnétique dans le conducteur afin d'observer son profil dans les deux cas étudiés. Dans ce paragraphe, nous allons étudier le champ magnétique dans le conducteur massif, afin de pouvoir vérifier les hypothèses émises lors de nos calculs. Pour cela, nous allons définir deux chemins le long desquels nous allons relevé la valeur du champ. Ces chemins sont définis respectivement selon  $(Ox)$  et selon  $(Oy)$  (figure III.9).



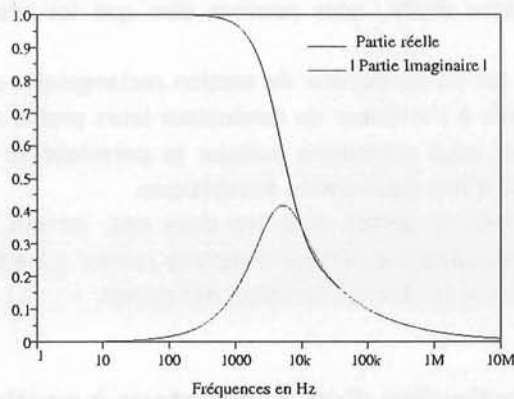


Figure III.10 : Valeur de la perméabilité magnétique complexe selon (Ox) et (Oy) pour un conducteur de section carrée ( $5 \times 5 \text{ mm}^2$ ).

Tout d'abord, nous avons regardé le comportement à basses fréquences ( $f = 10 \text{ Hz}$ ). Nous constatons d'abord que les champs obtenus avec  $(\mu, \sigma)$  et  $(\mu^*)$  sont équivalents (leurs courbes sont confondues). Le champ n'a qu'une partie réelle non nulle (courbe III.11.1) le long de (1) et sa partie imaginaire est négligeable. Cela nous démontre bien qu'à basses fréquences notre modèle avec une perméabilité magnétique complexe est totalement équivalent à un modèle « réel ». Nous pouvons voir que le champ le long du chemin (2) est également uniforme (courbe III.11.2).

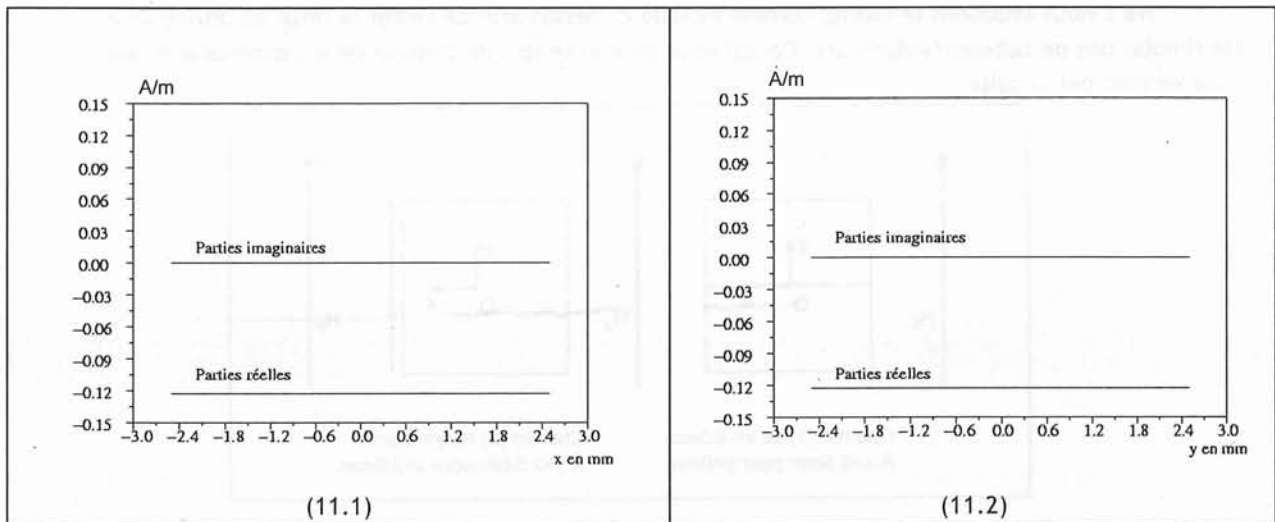


Figure III.11 : Champ magnétique dans le conducteur à  $f = 10 \text{ Hz}$  le long de (1) et (2) (cf. figure III.9).

Par contre, lorsque nous regardons le champ magnétique à une fréquence beaucoup plus élevée il y a apparition d'effets de bord dus aux dimensions finies du conducteur qui est carré. Ils se manifestent par une non uniformité du champ dans le conducteur  $(\mu, \sigma)$  (figure III.12.1). Le principe de la perméabilité complexe est basée sur une équivalence énergétique afin de substituer un conducteur  $(\mu, \sigma)$  par un conducteur  $(\mu^*)$  qui tend à uniformiser le champ dans le conducteur. Cela est très clairement observable sur la courbe III.12.1 (a et c).

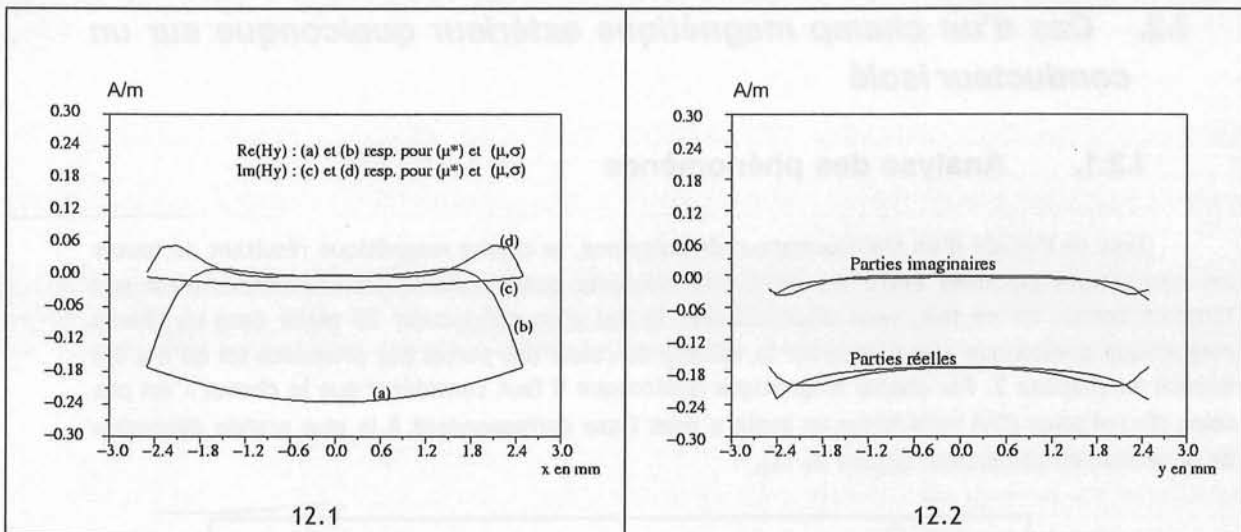


Figure III.12 : Champ dans le conducteur à  $f = 150$  kHz le long de (1) et (2) (cf. figure III.9).

Nous constatons que le champ magnétique imposé au bord du conducteur est presque identique dans les deux cas (cela peut-être observé sur la courbe III.12.2). Les effets de bord, visualisables sur la figure III.12, sont d'autant plus importants que le conducteur a une section carrée et que sa dimension caractéristique est petite.

### I.1.3. Conclusion

En conclusion de ce paragraphe nous pouvons dire que le calcul des pertes par effet de proximité par Flux3D est très satisfaisant, bien que notre hypothèse faite sur le champ magnétique lors du calcul de la perméabilité magnétique complexe, ne soit pas complètement vérifiée. Cela aura permis de bien appréhender les phénomènes mis en jeu dans le calcul des pertes par effet de proximité. En se plaçant dans un cas 2D, les effets 2D sont présents mais ne modifient pas de manière significative les résultats sur les pertes calculées.

Grâce à la méthode d'équivalence énergétique nous avons pu obtenir une expression analytique simple de la perméabilité magnétique complexe. Cette perméabilité va nous permettre de traiter des problèmes plus complexes (au niveau des dispositifs étudiés) du fait que son utilisation ne nécessite pas un maillage dense, contrairement au cas  $(\mu, \sigma)$  pour lequel il est nécessaire d'avoir 2 éléments finis dans l'épaisseur de peau. Cette substitution de  $(\mu, \sigma)$  par  $(\mu^*)$  a été validée puisque le calcul des pertes par résolution numérique utilisant  $(\mu^*)$  s'avère correct à moins de 3% près (cf. tableau III.1).

## 1.2. Cas d'un champ magnétique extérieur quelconque sur un conducteur isolé

### 1.2.1. Analyse des phénomènes

Lors de l'étude d'un transformateur de puissance, le champ magnétique résultant de toutes les interactions possibles entre les différents éléments constituant le transformateur n'est pas toujours connu. De ce fait, nous allons étudier le cas d'un conducteur 2D placé dans un champ magnétique quelconque afin d'observer la validité du calcul des pertes par proximité tel qu'il a été énoncé au chapitre 2. Par champ magnétique quelconque il faut considérer que le champ n'est pas selon (Ox) ni selon (Oy) mais forme un angle  $\alpha$  avec l'axe correspondant à la plus grande dimension de la section du conducteur (figure III.13).

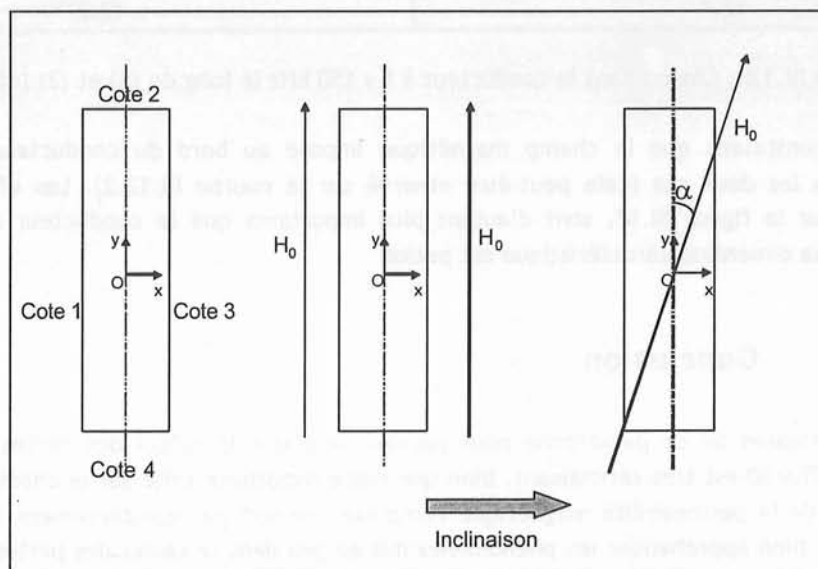


Figure III.13 : Définition des côtés du matériau.

Regardons, figure III.14, le profil du champ magnétique imposé au conducteur à une fréquence de 50 kHz et pour une inclinaison du champ de  $\alpha = 25^\circ$  par rapport à la verticale.

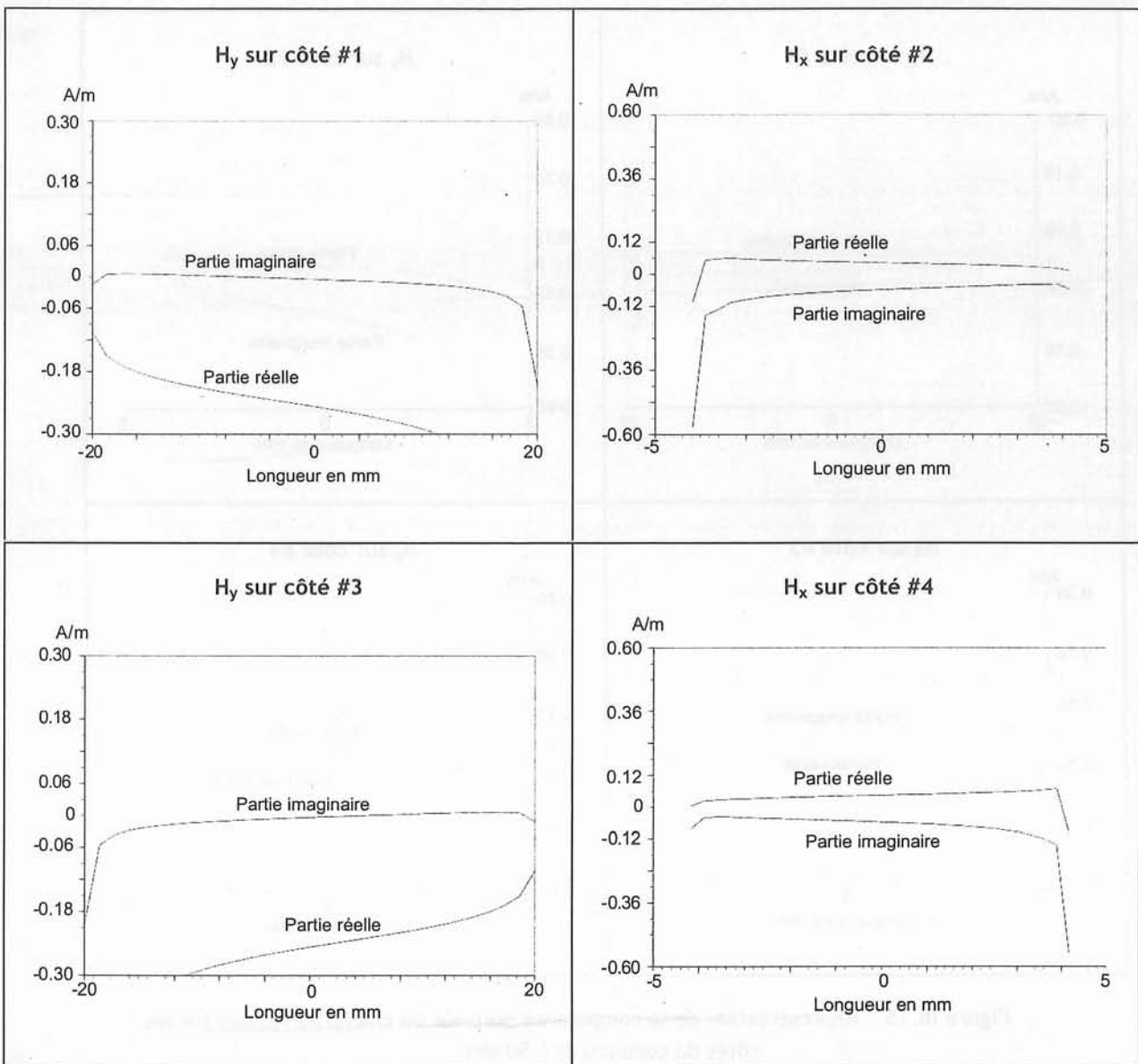


Figure III.14 : Représentation de la composante tangentielle du champ surfacique sur les 4 côtés du conducteur à 50 kHz.

Nous avons vu que les composantes du champ extérieur aux bords du conducteur ne sont pas uniformes lorsque le champ magnétique extérieur est parallèle au plus long côté du conducteur (§ I.1). En imposant un champ extérieur quelconque, ses composantes sont d'autant moins uniformes qu'auparavant (figures III.14 et III.15).

Pour définir notre perméabilité complexe nous sommes partis, entre autre, de l'hypothèse  $H_s(b) = H_s(-b)$  ( $H_s$  étant le champ surfacique) sur le bord du conducteur. Nous voyons que cette hypothèse n'est plus vérifiée puisque le champ imposé n'a plus la même valeur de part et d'autre du conducteur (cf. figure III.14 en  $y = \pm 8$  mm sur les côtés #1 et #3).

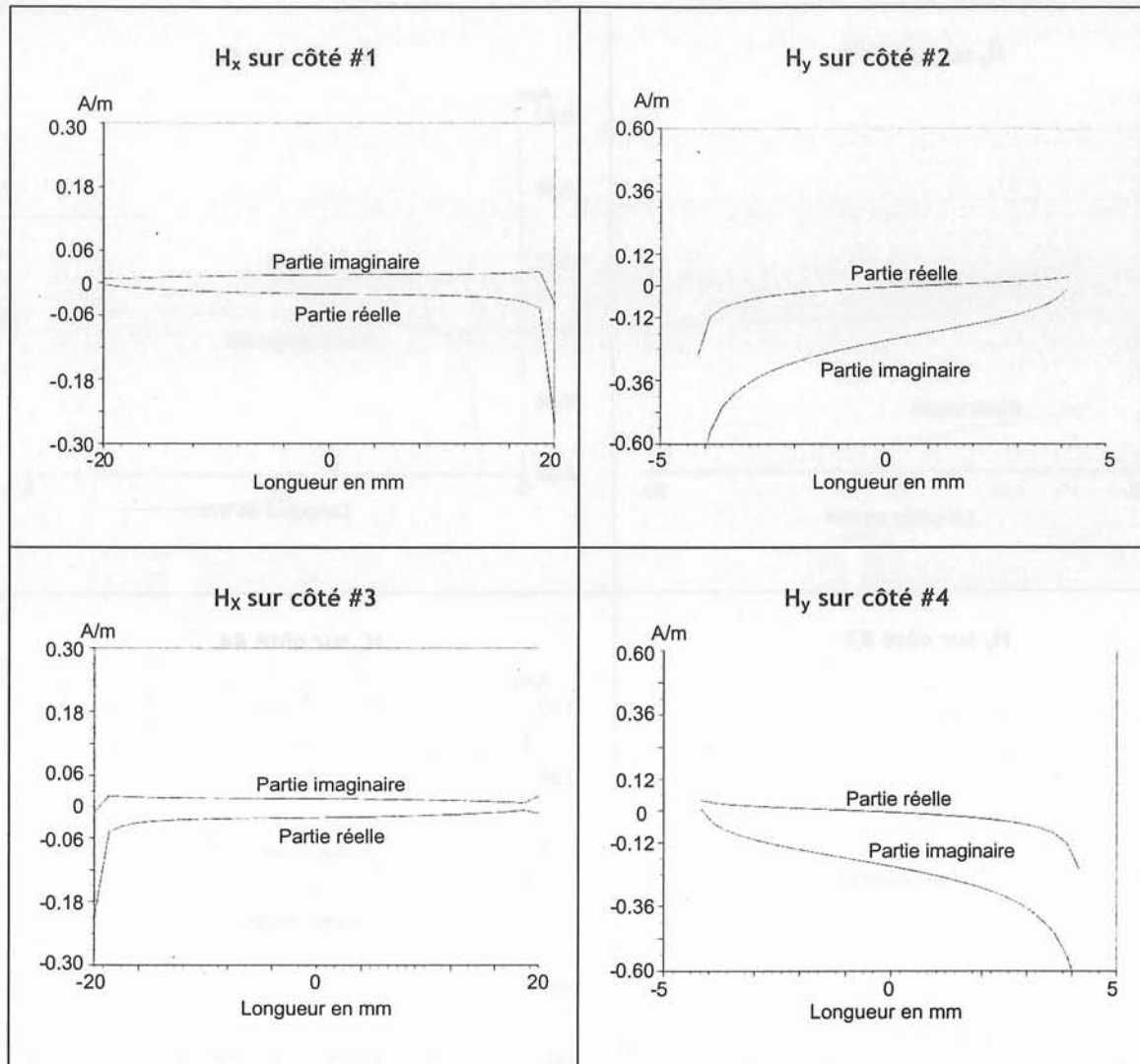


Figure III.15 : Représentation de la composante normale du champ surfacique sur les 4 côtés du conducteur à 50 kHz.

Il y a plusieurs phénomènes qui participent à cette asymétrie et non uniformité des composantes du champ surfacique :

- L'inclinaison favorise une direction plus qu'une autre dans notre cas analytique de la perméabilité complexe (anisotropie de la perméabilité) ;
- Les effets de bords ;
- La réaction d'induit accentue cette dissymétrie, ce qui amène donc des différences de champ surfacique encore plus importantes.

Différentes vues représentant des lignes de champ sont données dans l'annexe 4.

## I.2.2. Etude complète

Regardons de manière plus approfondie comment évolue le calcul des pertes par effet de proximité en fonction de l'inclinaison du champ par rapport au conducteur et du rapport de ces dimensions. Ceci nous permettra de comprendre le comportement anisotrope de la perméabilité magnétique complexe. Le rapport représente la longueur divisée par la largeur. Nous avons récapitulé tous les résultats pour les rapports 1 ; 4 ; 8 à la fréquence  $f = 50 \text{ kHz}$  dans le tableau III.2. Celui-ci nous donne les erreurs relatives (le résultat de référence étant le calcul 2D  $(\mu, \sigma)$ ). Notons qu'en prenant une fréquence de 50 kHz nous nous plaçons dans un cas très défavorable.

Rapport	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
1	$\leq 1\%$	$\leq 1\%$	$\leq 1\%$	$\leq 1\%$	$\leq 1\%$	$\leq 1\%$
4	$\leq 1\%$	5.4 %	12.5 %	25.4 %	33.1 %	34.6 %
8	$\leq 1\%$	13.7 %	28.1 %	45.2 %	52.8 %	54.3 %

Tableau III.2 : Erreur relative en fonction de l'angle conducteur/champ magnétique.

Dès que le champ magnétique imposé fait un angle non nul avec le conducteur, le calcul des pertes par effet de proximité par la perméabilité magnétique complexe n'est précis que lorsque le conducteur a une section carrée. Cela vient du fait que la perméabilité magnétique complexe est isotrope et par conséquent ne dépend pas de la direction du champ magnétique extérieur.

Dans les autres cas (rapport = 4 ou 8) la perméabilité complexe est anisotrope et donc dépendante des dimensions du conducteur. Sa détermination est basée sur l'uniformité de  $H_x$  et  $H_y$ . Nous avons vu au paragraphe I.2.1 qu'avec l'inclinaison, les composantes du champ ne sont pas uniformes aux bords du conducteur. Plus l'inclinaison est importante, plus les effets de bord se feront ressentir sur le calcul des pertes. En effet, si nous prenons le cas extrême  $\alpha = 90^\circ$ , le champ extérieur est parallèle au plus petit des côtés du conducteur ce qui rend les effets de bord et les erreurs relatives maximum : 34.6% pour un rapport égal à 4 et 54.3% pour un rapport égal à 8.

Pour un rapport de 4, nous avons regardé l'influence de la fréquence sur l'inclinaison (pour  $\alpha = 15^\circ$  et  $\alpha = 45^\circ$ ) :

Fréquences	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
200 Hz	1.7 %	3.2 %
1000 Hz	12.5 %	11.6 %
10000 Hz	0.8 %	9.2 %
25000 Hz	1.9 %	19.1 %
40000 Hz	4.7 %	23.7 %

Tableau III.3 : Erreur relative en fonction de la fréquence à un angle donné.

Les erreurs restent très importantes, notamment lorsque la fréquence est élevée. Plus le conducteur est dévié de sa position « idéale » (i.e. angle d'inclinaison nul) plus l'erreur sera importante (Tableau III.3). Nous nous sommes placés dans des cas extrêmes avec un champ qui, n'étant plus dans l'axe du conducteur, s'ajoute à un rapport de dimensions de la section très grand. Tout cela contribue à l'apparition d'erreur dans le calcul des pertes ; de part l'inclinaison (champ de direction différente de l'axe) les hypothèses ne sont plus vérifiées, ce qui entraîne des erreurs. De plus, à des fréquences élevées, la réaction d'induit accroît les différences avec les hypothèses.

### **1.2.3. Conclusion**

L'étude consistant à imposer un champ magnétique quelconque sur un conducteur a mis en évidence les limites de notre méthode et a également permis d'insister sur ses points faibles (anisotropie du conducteur). En effet, lorsque nous nous éloignons des conditions sur lesquelles nous sommes basées pour obtenir les valeurs de  $\mu^*$ , nous observons une dégradation de la précision dans le calcul des pertes. L'erreur peut aller jusqu'à 54% quand nous nous plaçons dans un cas extrême (Rapport = 8 à  $f = 50$  kHz). Cela reste très satisfaisant puisque lors de l'étude de transformateurs dans leur domaine d'utilisation ( $f = 10$  kHz et des rapports inférieurs à 4) les erreurs relatives obtenues sont correctes ( $\leq 10\%$ ) pour l'effet de proximité tel qu'il a été défini.

### **1.3. Etude multi-brins, étude des phénomènes**

Intéressons nous à un paquet de conducteurs soumis à un champ magnétique extérieur. Cela nous permettra d'étudier l'influence de plusieurs conducteurs sur le champ imposé, particulièrement sur un seul des conducteurs. Nous pourrons alors observer les effets de proximité qui doivent apparaître. Cette étude a été traitée dans le but de préparer à la validation de l'homogénéisation 2D sur un paquet de conducteurs qui sera faite au paragraphe 1.4.

#### **1.3.1. Vérification de l'hypothèse sur le champ surfacique $H_s$ ( $H_s$ uniforme aux bords des conducteurs ( $\mu, \sigma$ ))**

Nous avons choisi de valider cette homogénéisation (§ 1.4) avec un paquet de quatre conducteurs à section carrée de côté égale à cinq millimètres. A fortiori, la présence de plusieurs conducteurs doit modifier le profil du champ source ce qui nous amène, dans un premier temps, à essayer de mettre en évidence les changements provenant des interactions entre conducteurs qu'ils soient en ( $\mu, \sigma$ ) ou en ( $\mu^*$ ).

A partir du moment où nous étudions un conducteur ( $\mu, \sigma$ ) seul plongé dans un champ magnétique extérieur imposé nous obtenons un champ surfacique uniforme sur la majeure partie du bord et égal de part et d'autre du conducteur considéré. En appliquant ce même champ extérieur à un paquet de 4 conducteurs ( $\mu, \sigma$ ) qu'en est-il de l'uniformité des composantes du champ surfacique sur chacun des conducteurs ? La figure III.15 représente le paquet de conducteurs placé dans un champ extérieur imposé. Nous y avons représenté les chemins (4a et 4b) sur lesquels nous étudierons le champ surfacique. La géométrie étant symétrique, l'étude sur chacun des conducteurs s'avère inutile.

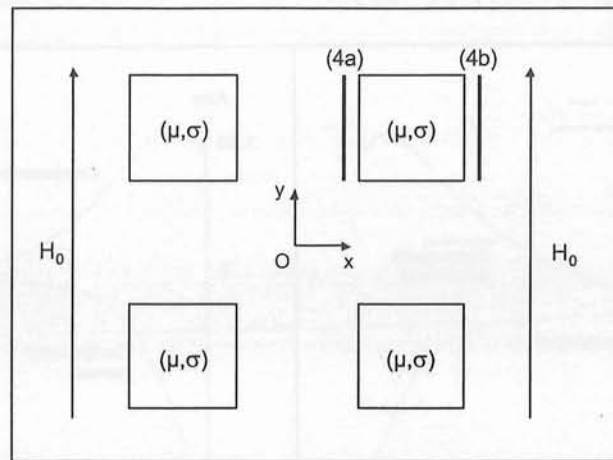


Figure III.15 : Etude du champ surfacique sur un paquet de conducteur.

Sur la figure III.16 nous observons que les champs surfaciques sur (4a) et (4b) ont presque les mêmes composantes tangentielles (suivant la direction  $Oy$ ). Par contre leurs composantes normales sont anti-symétriques ; le conducteur  $(\mu, \sigma)$  a donc tendance à repousser le champ magnétique extérieur.

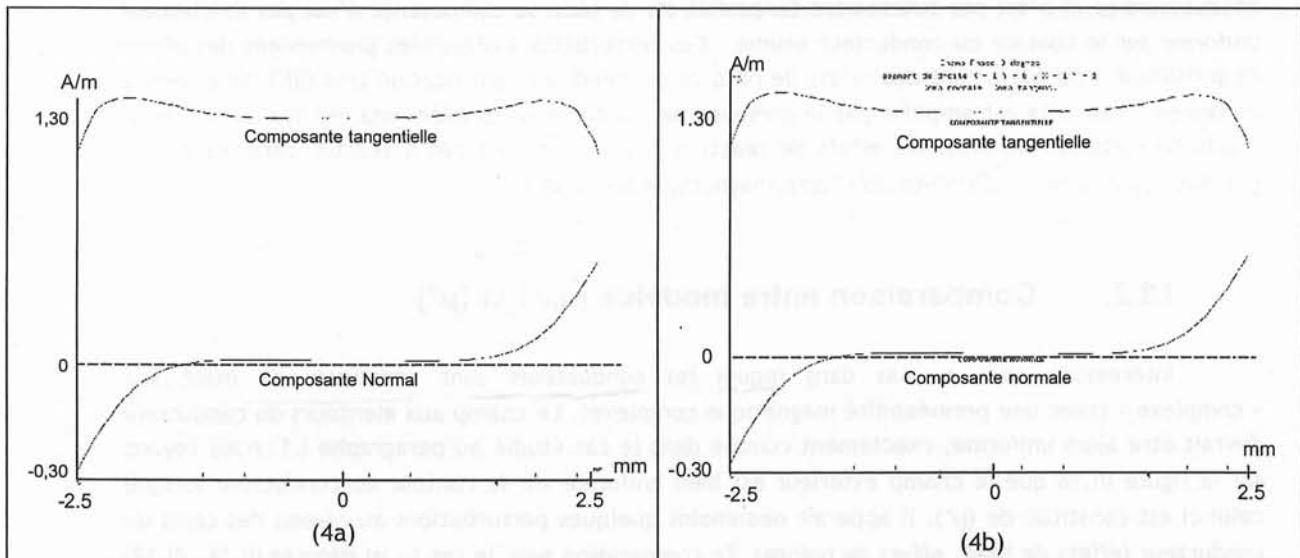


Figure III.16 :  $H_s$  à 150 kHz sur les côtés gauche et droit du conducteur.

De la figure III.17 nous pouvons constater que le champ au voisinage du conducteur est modifié. Le champ a tendance à éviter le conducteur (ou que le conducteur repousse le champ source). Ceci se traduit sur la courbe par des composantes normales de part et d'autre du conducteur asymétriques.



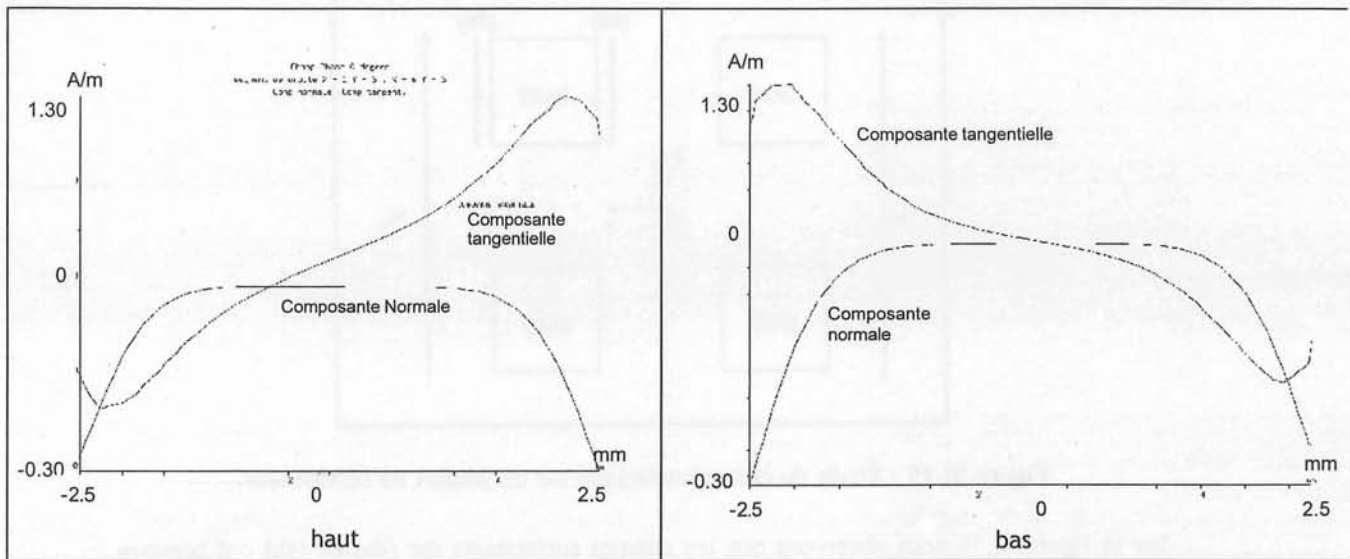


Figure III.17 :  $H_s$  à 150 kHz respectivement sur les côtés haut et bas du conducteur.

Par conséquent, nous pouvons dire que le champ appliqué sur un conducteur d'un paquet de conducteurs ( $\mu, \sigma$ ) n'est pas strictement tangentiel et, de plus, sa composante n'est pas strictement uniforme sur le contour du conducteur étudié. Ces perturbations observées proviennent des effets de proximité mais également des effets de bord ce qui rend la quantification très difficile à mettre en œuvre. Tout cela est amplifié par la présence de conducteurs supplémentaires aux alentours du conducteur étudié. De plus, les effets de réaction d'induit ne sont pas à écarter dans les causes possibles pour la non uniformité du champ magnétique surfacique.

### I.3.2. Comparaison entre modèles ( $\mu, \sigma$ ) et ( $\mu^*$ )

Intéressons nous au cas dans lequel les conducteurs sont constitués de matériaux « complexe » (avec une perméabilité magnétique complexe). Le champ aux alentours du conducteur devrait être alors uniforme, exactement comme dans le cas étudié au paragraphe I.1. Nous voyons sur la figure III.18 que le champ extérieur est bien uniforme sur le contour du conducteur lorsque celui-ci est constitué de ( $\mu^*$ ). Il apparaît néanmoins quelques perturbations au niveau des coins du conducteur (effets de bord, effets de pointe). En comparaison avec le cas ( $\mu, \sigma$ ) (figures III.16, III.17) nous pouvons dire que le champ magnétique extérieur est plus uniforme lorsque la perméabilité magnétique complexe est utilisée.

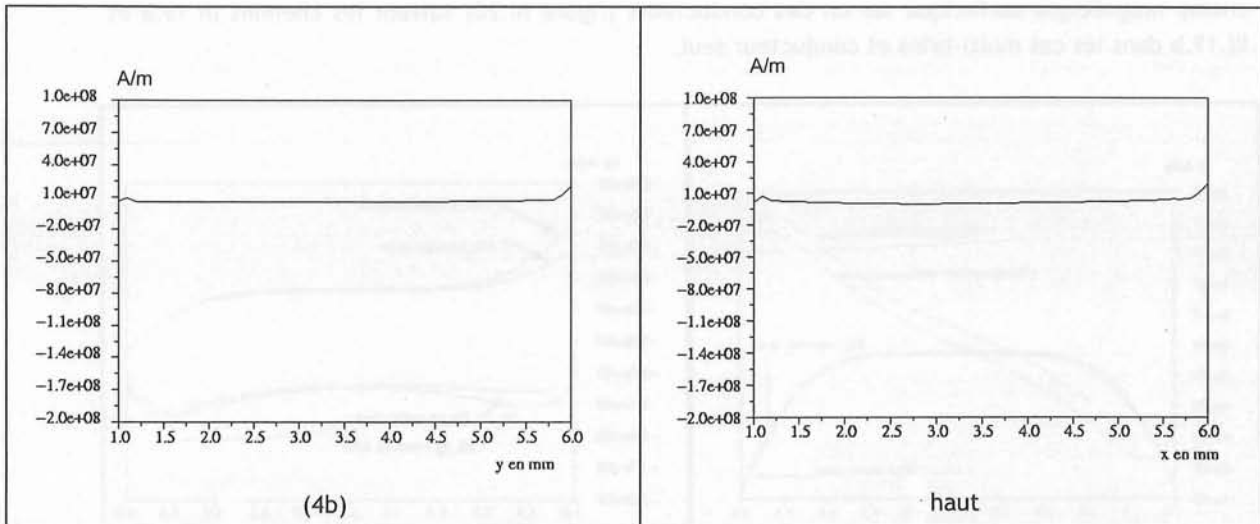


Figure III.18 : Champ magnétique surfacique normal ( $\mu^*$ ) sur les côté droit et haut du conducteur ( $f = 150 \text{ kHz}$ ).

Notons de manière générale que les champs extérieurs aux bords des conducteurs ( $\mu, \sigma$ ) et ( $\mu^*$ ) sont équivalents (même valeur de champ):

- la courbe de gauche de la figure III.18 est équivalente à la courbe de droite de la figure III.16,
- la courbe de droite de la figure III.18 est équivalente à la courbe de gauche de la figure III.17.

### I.3.3. Effet de proximité

A présent intéressons nous à quantifier les perturbations sur le champ magnétique surfacique sur un conducteur (conducteur (2), voir figure III.19). Pour cela nous relevons le champ surfacique dans les deux cas suivants (figure III.19) :

- multi-brins (paquet de 4 conducteurs) ;
- conducteur seul.

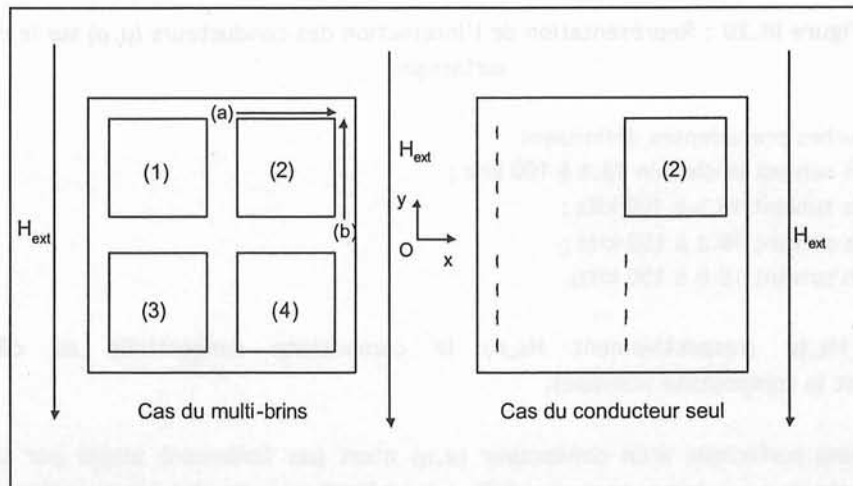


Figure III.19 : Cas pour l'étude des effets de proximité, conducteurs massifs ( $\mu, \sigma$ ).

Nous avons représenté sur la figure III.20 les composantes tangentielle et normale du champ magnétique surfacique sur un des conducteurs (figure III.20) suivant les chemins III.19.a et III.19.b dans les cas multi-brins et conducteur seul.

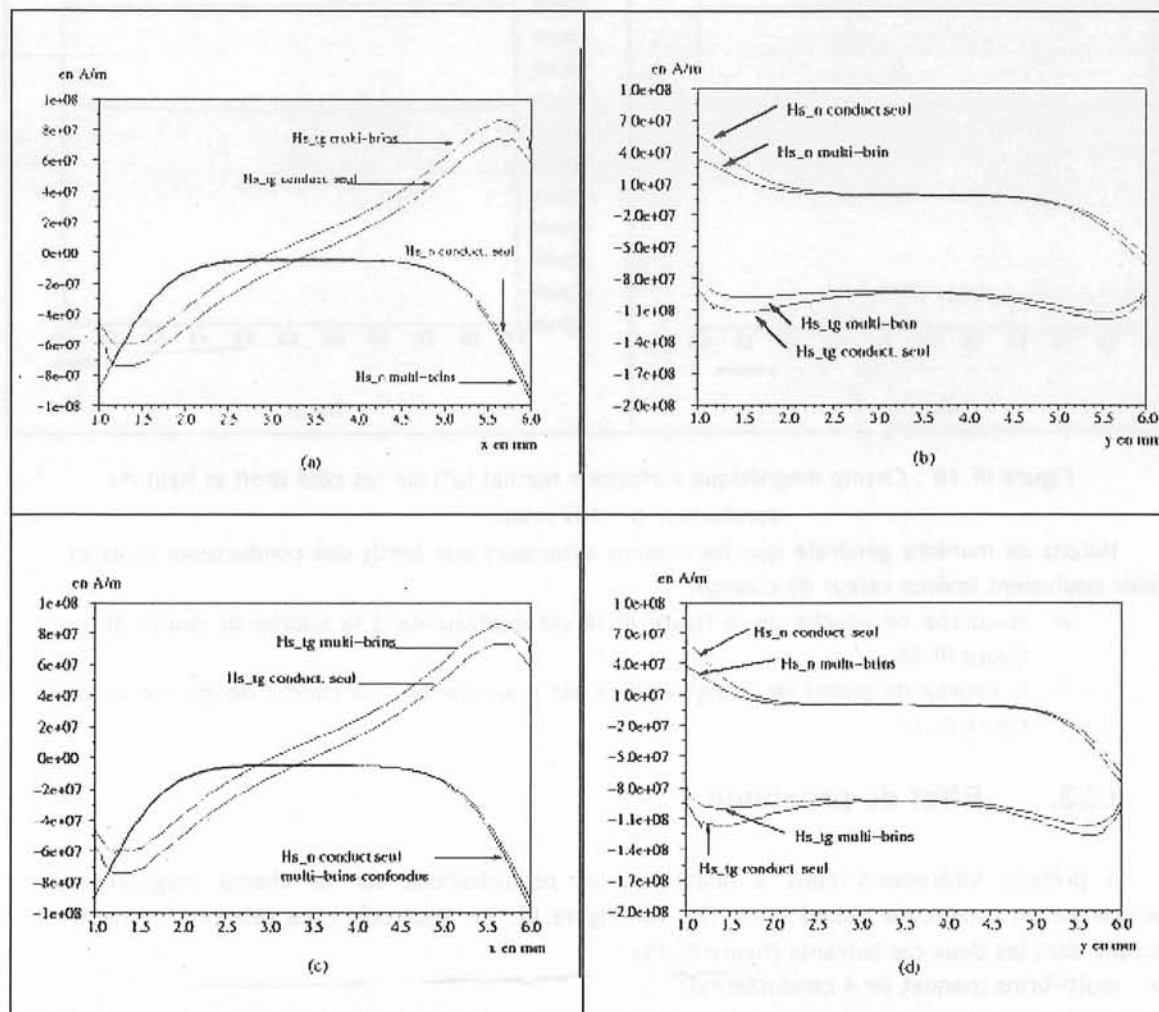


Figure III.20 : Représentation de l'interaction des conducteurs ( $\mu, \sigma$ ) sur le champ surfacique.

- Les courbes précédentes définissent :
- 20.a Hs suivant le chemin 18.a à 100 kHz ;
  - 20.b Hs suivant 18.b à 100 kHz ;
  - 20.c Hs suivant 18.a à 150 kHz ;
  - 20.d Hs suivant 18.b à 150 kHz.

Avec  $H_{s\_tg}$  (respectivement  $H_{s\_n}$ ) la composante tangentielle au côté étudié (respectivement la composante normale).

Le champ surfacique d'un conducteur ( $\mu, \sigma$ ) n'est pas fortement altéré par la présence d'autres conducteurs ( $\mu, \sigma$ ) à ses alentours. Cela a été vérifié pour des fréquences allant jusque 150 kHz. Notons que la plus nette perturbation survient lorsque le champ appliqué est perpendiculaire

au côté étudié (courbes III.20.a et III.20.c). Nous constatons même un lissage du champ surfacique comme nous pouvons le voir sur la courbe III.20.d : le champ entre  $y = 1 \text{ mm}$  et  $y = 1.5 \text{ mm}$  est plus lisse lorsque les 4 conducteurs sont présents.

### I.3.4. Conclusion

Le fait d'avoir plusieurs conducteurs en série ne modifie pas de manière significative l'allure du champ magnétique extérieur aux bords d'un des conducteurs du paquet. L'uniformité des composantes du champ aux alentours de ce conducteur reste équivalente à celle d'un conducteur isolé. Il y a également un lissage du champ extérieur appliqué. Le champ surfacique sur le conducteur entouré de conducteurs apparaît sur la figure III.20 plus lisse que lorsqu'il est seul, notamment sur les extrémités.

## I.4. Multi-brins, Homogénéisation

### I.4.1. Cas d'étude :

Intéressons nous maintenant à quatre conducteurs de section carrée dont le côté est  $a = 5 \text{ mm}$  placés à une distance  $c = 2 \text{ mm}$  les uns des autres (espacement relativement important, ce qui nous permettra de tester la méthode d'homogénéisation) comme représenté sur la figure III.21 :

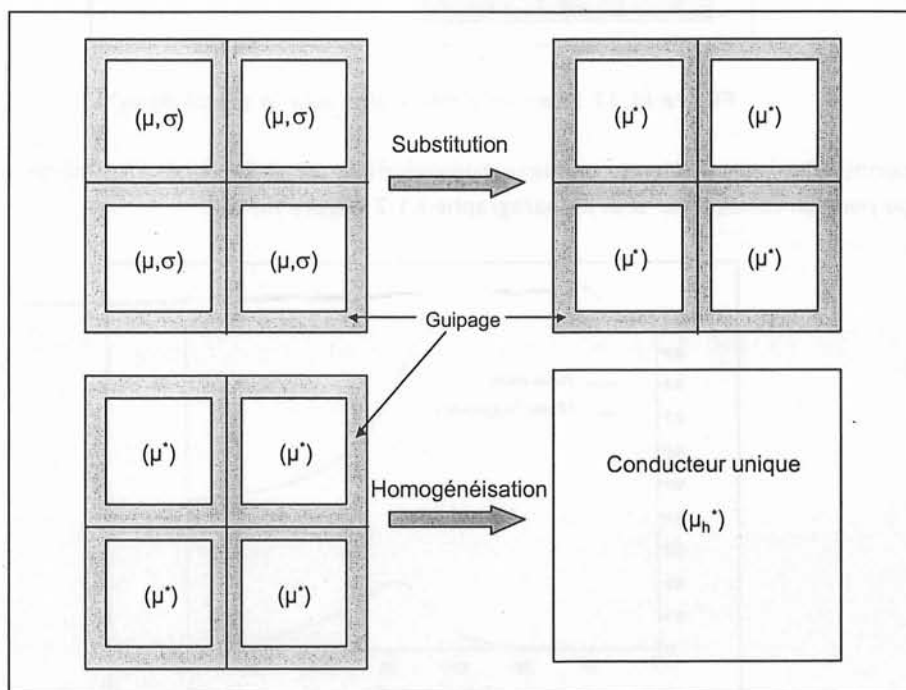


Figure III.21 : Méthode d'homogénéisation.

Nous avons donc, en reprenant les notations utilisées au chapitre 2 §??, les valeurs numériques suivantes :

- $a = b = 2.5 \text{ mm}$ ;
- $c = d = 1 \text{ mm}$ , pour l'épaisseur du guilage ( $\mu_{iso}$ ) qui est représenté en grisé sur la figure précédente;
- $\mu_{isoX} = \mu_{isoY} = 4\pi \times 10^{-07}$ ;
- $\mu_{CuX} = \mu_{CuY}$ .

Dans le but de simplifier le calcul d'homogénéisation (cf. chapitre 2) nous avons effectué le calcul uniquement sur une cellule élémentaire (comme illustré sur la figure III.23). Cela n'est envisageable qu'à la condition d'avoir le motif de la cellule duplicable un nombre entier de fois pour obtenir le conducteur homogénéisé. Il faut alors noter l'importance de la gaine entourant les conducteurs dans le calcul de  $\mu_h^*$  puisque sinon la méthode n'est plus applicable (pour cause de symétrie non respectée). Ce qui impliquera un calcul sur l'ensemble de la géométrie.

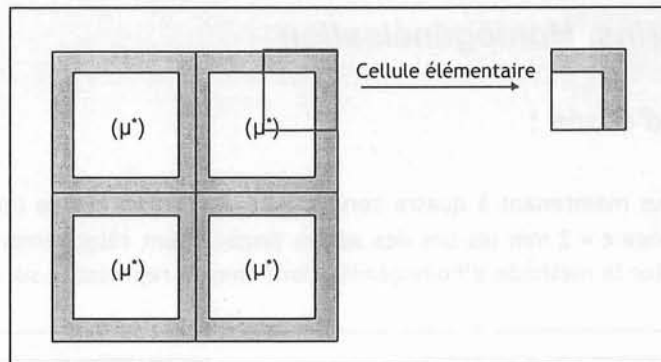


Figure III.23 : Cellule élémentaire pour le calcul de  $\mu_h^*$

La perméabilité magnétique complexe homogénéisée ainsi obtenue a la même allure que celle obtenue pour un conducteur seul au paragraphe I.1.2 (figure III.10).

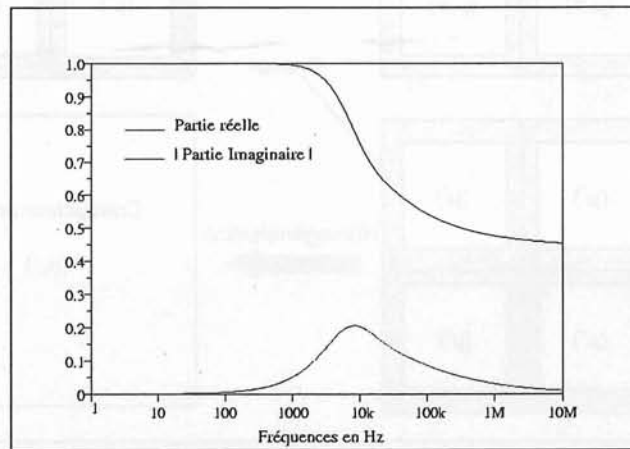


Figure III.22 : Représentation de la perméabilité magnétique complexe homogénéisée pour un matériau de section carrée.

Le maillage est constitué de 31953 nœuds et de 14682 éléments surfaciques du second ordre (25 nœuds sur chaque côté des conducteurs afin d'obtenir au minimum deux éléments dans

l'épaisseur de peau à 150 kHz). La figure III.24 nous donne un aperçu du maillage utilisé lors de nos simulations.

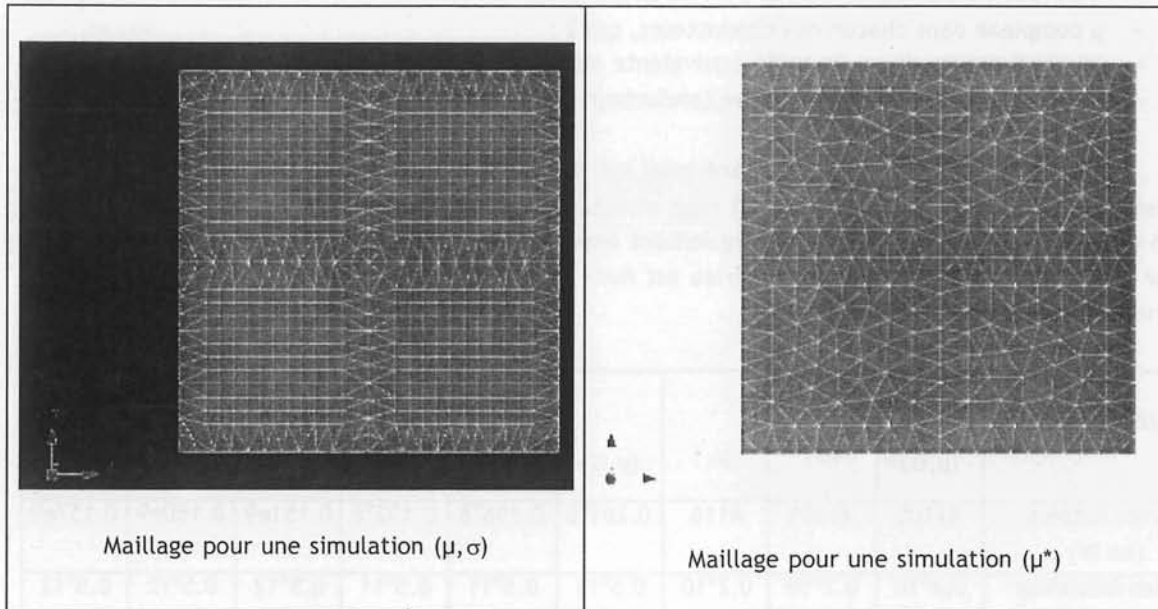


Figure III.24 : Représentation des maillages pour les simulations  $(\mu, \sigma)$  et  $(\mu^*)$

#### I.4.2. Simulations et résultats

Tout d'abord, fixons uniquement trois fréquences de références, représentatives des différents effets, déduites de la figure III.25 et représentant la perméabilité magnétique complexe d'un conducteur à section carrée de côté égal à 5mm (cette perméabilité est isotrope). Nous prenons les fréquences pour lesquelles :

- les parties réelle et imaginaire de  $\mu^*$  sont distinctes soit  $f = 200$  Hz ;
- la fréquence du pic de la partie imaginaire soit  $f = 5000$  Hz ;
- les parties réelle et imaginaire sont égales en valeur absolue, soit  $f = 50$  kHz.

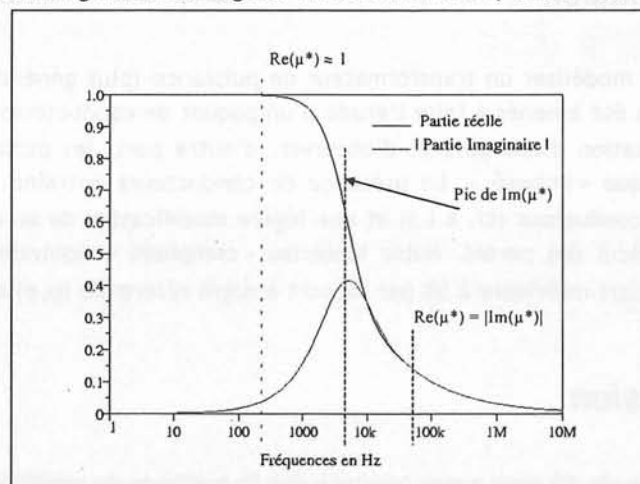


Figure III.25 : Représentation des fréquences de références pour la validation de l'homogénéisation.

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à comparer les pertes quand nous utilisons :

- 4 conducteurs affectés chacun à un matériau  $(\mu, \sigma)$ , cas 1 ;
- $\mu$  complexe dans chacun des conducteurs, cas 2 ;
- un conducteur unique de taille équivalente aux 4 conducteurs plus la gaine de guipage de 1 mm d'épaisseur autour de chaque conducteur, cas 3.

Nous nous assurons que le courant total est bien nul dans les conducteurs du système. En présence du matériau avec  $(\mu, \sigma)$  [cas 1] nous effectuons un couplage circuit, en imposant  $I = 0A$ , afin de s'en assurer (nous aurions pu également imposer une résistance très grande voir infinie). Pour les cas où la conductivité du matériau est nulle [cas 2 et cas 3], cette condition est vérifiée intrinsèquement.

Fréquences	200 Hz			5000 Hz			50000 Hz		
	$(\mu, \sigma)$	$(\mu^*)$	$(\mu_h^*)$	$(\mu, \sigma)$	$(\mu^*)$	$(\mu_h^*)$	$(\mu, \sigma)$	$(\mu^*)$	$(\mu_h^*)$
Pertes Actives (en W)	41105	41101	4116	0.201 <sup>e8</sup>	0.198 <sup>e8</sup>	0.192 <sup>e8</sup>	0.151e9	0.150e9	0.157e9
Pertes Réactives (en W)	0.2 <sup>e10</sup>	0.2 <sup>e10</sup>	0.2 <sup>e10</sup>	0.5 <sup>e11</sup>	0.5 <sup>e11</sup>	0.5 <sup>e11</sup>	0.5 <sup>e12</sup>	0.5 <sup>e12</sup>	0.5 <sup>e12</sup>
Erreur sur Act.	-	≤ 1%	≤ 1%	-	≤ 1%	4.48%	-	≤ 1%	3.97%

Tableau III.4 : Pertes actives et réactives dans un conducteur appartenant à un paquet de conducteurs.

L'homogénéisation via le calcul de réluctance magnétique est très satisfaisante aux vues des résultats reportés dans le tableau III.4 précédent. Les écarts sont faibles entre les différents cas de figure pris en compte.

### 1.4.3. Conclusion

Dans le but de modéliser un transformateur de puissance (plus généralement des machines électriques) nous avons été amenés à faire l'étude d'un paquet de conducteurs afin de valider notre méthode d'homogénéisation d'une part et d'observer, d'autre part, les perturbations engendrées sur le champ magnétique « imposé ». La présence de conducteurs entraîne un lissage du champ surfacique sur chaque conducteur (cf. § 1.3) et une légère modification de sa valeur qui n'influence pas si fortement le calcul des pertes. Notre matériau « complexe » équivalent nous mène à des pertes présentant un écart inférieure à 5% par rapport à notre référence  $(\mu, \sigma)$  calculée via Flux3d.

## 1.5. Conclusion

Lors de cette étude 2D nous avons constaté que la méthode de substitution d'un conducteur  $(\mu, \sigma)$  par un conducteur  $(\mu^*)$  donne de très bons résultats. En effet,

- Pour un conducteur de section rectangulaire isolé placé dans un champ magnétique parallèle à son plus long côté nous pouvons déterminer ces pertes par effet de proximité à moins de 3% d'erreur (à des fréquences inférieures à 150 kHz).
- Pour un conducteur placé dans un champ quelconque nous obtenons des résultats satisfaisants si le rapport des dimensions de sa section n'est pas supérieur à 4 et que la fréquence d'étude soit inférieure à 10 kHz. Le cas particulier d'une section carrée évalue les pertes avec moins de 1% d'erreurs quel que soit la fréquence et le champ extérieur.

Avec la méthode d'homogénéisation par réluctance magnétique (vue au chapitre 2) les pertes par effet de proximité sont évaluées avec moins de 5% d'erreur tout en réduisant la densité du maillage. Cela nous permettra alors de traiter des cas de complexité supérieure que nous verrons par la suite.

## II. Validation 3D

### II.1. Cas idéal

Dans ce premier essai de calcul 3D avec Flux3D nous nous plaçons dans un cas d'école. En effet, le problème simulé consiste à placer un conducteur dont la longueur est très grande par rapport aux dimensions de sa section dans un champ magnétique imposé parallèle à son axe (figure III.26.b). Nous choisissons une section carrée afin de faciliter la saisie de la perméabilité magnétique complexe :

- Longueur = 30 mm (grandeur  $c$  sur la figure III.26);
- Section carrée de côté = 5 mm (grandeur  $a$  sur la figure III.26).

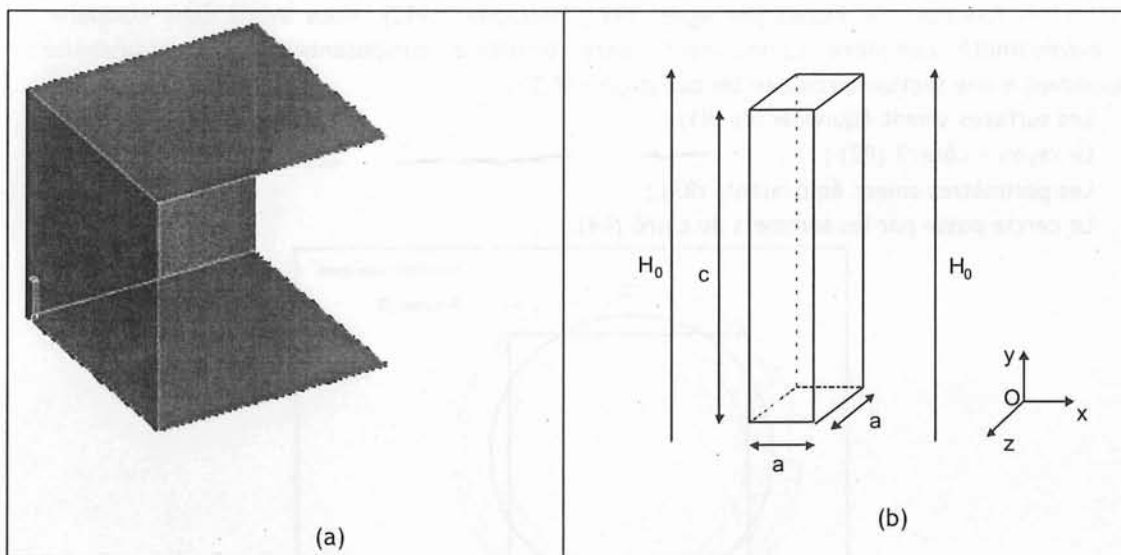


Figure III.26 : Champ extérieur sur un barreau 3D.

Les simulations avec un conducteur ( $\mu, \sigma$ ) utilisent la formulation  $T-T_0-\phi$  (cf. chapitre 1) et pour celles avec un conducteur ( $\mu^*$ ) c'est la formulation  $T_0-\phi$  qui est utilisée. Nous imposons le



champ par des conditions aux limites sur le potentiel scalaire magnétique sur les surfaces bleues de la figure III.26.a.

Fréquences	Pertes (W) cas ( $\mu, \sigma$ )	Pertes (W) cas ( $\mu^*$ )	Erreur relative
100 Hz	0.007106-j0.634e-8	0.007106-j0.631e-8	0.48 %
10 kHz	0.710581-j0.355e-4	0.710581-j0.351e-4	1.10 %
50 kHz	3.55271-j0.122e-3	3.55271-j0.123e-3	-0.81 %

Tableau III.5 : Erreur relative sur les pertes actives (parties imaginaires) en fonction de la fréquence.

Nous pouvons dire que les résultats obtenus sont très satisfaisants. En effet, il y a en moyenne 1% d'erreur jusqu'à 50 kHz (cf. tableau III.5). Les valeurs obtenues pour la troisième composante de la perméabilité complexe sont donc à priori adéquates et nous avons défini complètement notre perméabilité magnétique complexe 3D  $\mu^*$ .

## II.2. Comparaison avec des approximations circulaires

Le pré-calcul de notre troisième composante de la perméabilité magnétique complexe est obtenue, comme exprimé au chapitre 2, par l'intégration sur la section du conducteur d'une somme de termes en sinus et cosinus hyperboliques. Cette série a quelques difficultés à converger lorsque les fréquences deviennent importantes. En effet, plus la fréquence est grande plus le nombre d'itérations nécessaires sur la somme doit être grand, mais cela est limité par la précision numérique de la machine puisque les cosinus et sinus hyperboliques deviennent trop grands. Lorsque les conducteurs ont une section circulaire, il existe un moyen rapide et sûr de calculer les composantes de la perméabilité complexe selon sa section et selon son axe. Les expressions sont basées sur les fonctions de Bessel [Matagne, 1991],[Matagne, 1992]. Nous avons donc comparé notre perméabilité complexe (uniquement notre troisième composante) à la perméabilité correspondant à une section circulaire tel que (figure III.27) :

- Les surfaces soient équivalentes (R1) ;
- Le rayon = côté/2 (R2) ;
- Les périmètres soient équivalents (R3) ;
- Le cercle passe par les sommets du carré (R4).

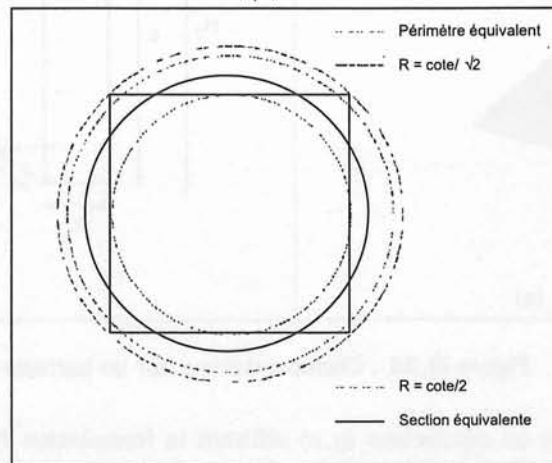


Figure III.27 : représentation des cercles équivalents par rapport à la section carrée.

Pour un conducteur de section circulaire, il considère le conducteur comme un milieu anisotrope de perméabilité transversale  $\mu_{\perp}$  (dans le plan contenant la section) et de perméabilité longitudinale  $\mu_{\parallel}$  (suivant l'axe du conducteur).

Elles sont de la forme :

$$\mu_{\perp} = \frac{J_0(\varepsilon) + J_2(\varepsilon)}{J_0(\varepsilon) - J_2(\varepsilon)} \mu_0$$

$$\mu_{\parallel} = \frac{J_0(\varepsilon) + J_2(\varepsilon)}{J_0(\varepsilon)} \mu_0$$

Avec  $\varepsilon = i^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\delta} r$  et  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$  où  $r$  représente le rayon de la section,  $\delta$  l'épaisseur de

peau et  $J_0$  et  $J_2$  les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 2.

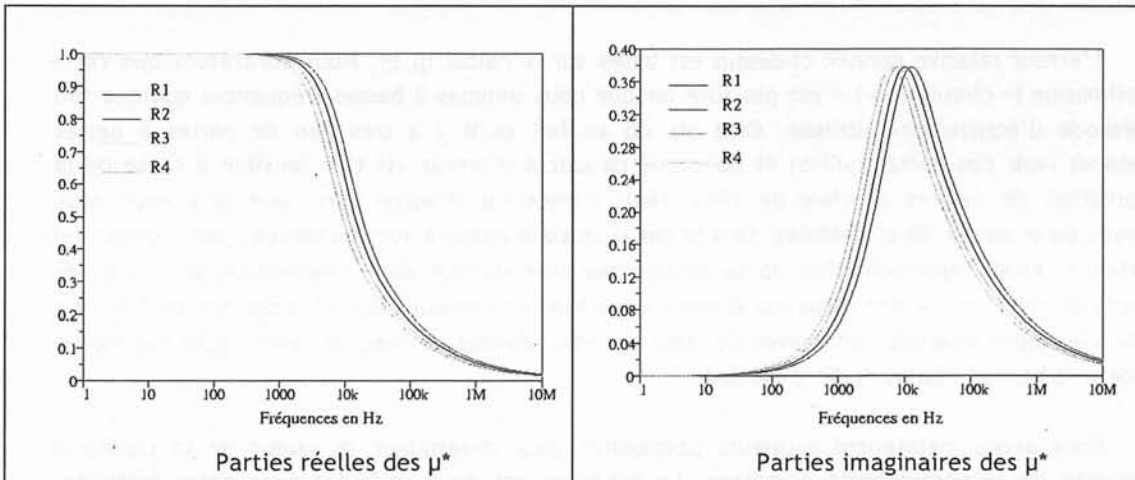


Figure III.28 : Représentation des  $\mu^*$  obtenues par approximation circulaire.

Sur la figure III.28 nous avons représenté les différentes perméabilités magnétiques complexes suivant la fréquence (en Hz). Nous pouvons voir que les différentes approximations circulaires donnent globalement la même perméabilité suivant l'axe (Oz). De plus, ces approximations circulaires sont proches du cas où la perméabilité est calculée pour une section carrée. Nous remarquons que plus le rayon équivalent est grand, plus nous nous éloignons de la valeur calculée pour une section carrée (cf. §1.4.2 Figure III.25).

A partir de ces valeurs obtenues également par calcul analytique nous obtenons les résultats suivants :

Fréquences	100 Hz (Erreur relative)	10 kHz (Erreur relative)	50 kHz (Erreur relative)
Pertes (avec R1) (en W)	0.007106-j0.722e-8 10.73 %	0.710577-j0.367e-4 3.10 %	3.55269-j0.117e-3 4.10 %
Pertes (avec R2) (en W)	0.007106-j0.567e-8 10.57 %	0.710577-j0.352e-4 1.13 %	3.55271-j0.128e-3 4.92 %
Pertes (avec R3) (en W)	0.007106-j0.914e-8 44.16 %	0.710577-j0.365e-4 2.54 %	3.55268-j0.106e-3 13.11 %
Pertes (avec R4) (en W)	0.007106-j0.112e-8 44.16 %	0.710577-j0.351e-4 2.54 %	3.55267-j0.979e-4 19.75 %

Tableau III.6 : Erreur relative sur les pertes actives (parties imaginaires) en fonctions de la fréquence.

L'erreur relative donnée ci-dessus est basée sur le calcul  $(\mu, \sigma)$ . Nous constatons que cette approximation (« circulaire ») n'est pas sûre lorsque nous sommes à basses fréquences quelque soit la méthode d'équivalence utilisée. Cela est dû au fait qu'il y a très peu de pertes à basses fréquences (voir des pertes nulles) et donc que ce calcul d'erreur est très sensible à cause de la manipulation de valeurs proches de zéro. Nous constatons d'autre part, que plus nous nous éloignons de la valeur de  $\mu^*$  calculée dans le cas d'un conducteur à section carrée, plus l'erreur est importante. Ainsi l'approximation de la section par une surface dont l'extrémité passe par les sommets du carré est la plus mauvaise d'entre elles avec une erreur pouvant atteindre 19.75% à  $f = 50$  kHz. Les approximations faites avec des sections équivalentes ou avec un rayon égale à la moitié du côté sont bonnes (moins de 5% d'erreur).

Nous avons maintenant plusieurs possibilités pour déterminer la valeur de la troisième composante de la perméabilité complexe. La première est de la calculer avec notre méthode. L'inconvénient majeur est qu'à hautes fréquences, au-delà de 500 kHz, la série risque de ne pas converger. Pour remédier à cela, il nous faudrait faire un développement limité avec changement de variable de la série afin de s'affranchir de l'incertitude de convergence. Pour nos cas de validation nous pouvons nous en abstenir, mais à terme pour la pérennité de la méthode, il faudra obligatoirement le développer. La seconde est d'utiliser l'une des deux approximations circulaires donnant de bons résultats (section équivalente ou  $R = \text{côté}/2$ ). Leur principal avantage est de pouvoir calculer la perméabilité complexe à hautes fréquences mais leur inconvénient majeur est qu'elles ne donnent pas la vraie valeur. De plus, quelle grandeur caractéristique prendrions-nous pour déterminer le rayon de la section circulaire équivalente à une section rectangulaire? Nous garderons alors notre méthode de calcul, expliquée au chapitre 2, pour des raisons de justesse de calcul.

### II.3. Cas où le champ est perpendiculaire

Nous imposons donc un champ magnétique perpendiculaire à l'axe du conducteur suivant (Ox) pour être précis (figure III.29). Le conducteur a les mêmes dimensions que dans le cas idéal (§ II.1). Ce champ est imposé par des potentiels imposés sur les limites du domaine.

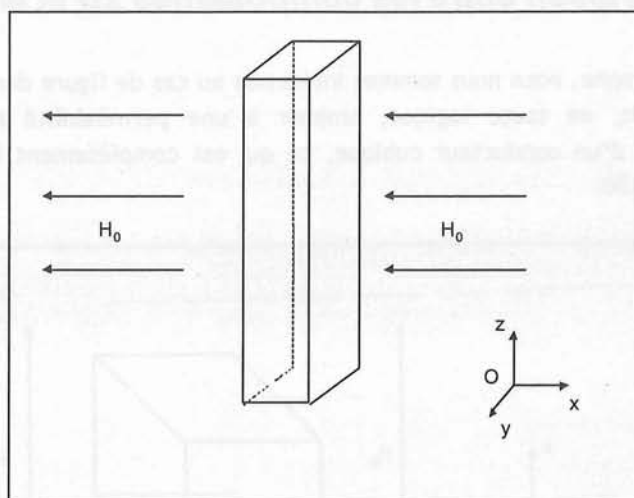


Figure III.29 : Visualisation du champ extérieur perpendiculaire.

Notons que le calcul des erreurs relatives est basé sur les pertes actives, soit la partie imaginaire des pertes données dans les tableaux. A basses fréquences, ces pertes sont très faibles : leur valeur est de l'ordre de  $10^{-7}$  W à 100 Hz et plus nous nous rapprochons de zéro, plus elle devient faible. Notons qu'à basses fréquences il y a très peu de pertes (voir des pertes nulles) et donc le calcul d'erreur est très sensible à cause de la manipulation de valeurs proches de zéro. C'est pourquoi, il n'est pas judicieux de trouver une cause physique pour les erreurs à 100 Hz ; les valeurs ne sont là qu'à titre indicatif.

Fréquences	Pertes (W) cas ( $\mu, \sigma$ )	Pertes (W) cas ( $\mu^*$ )	Erreur relative (sur partie imaginaire)
100 Hz	0.007106-j0.134e-7	0.007106-j0.150e-7	11.94 %
10 kHz	0.710547-j0.669e-4	0.710541-j0.637e-4	1.79 %
50 kHz	3.5524-j0.206e-3	3.5524-j0.195e-3	-6.34 %

Tableau III.7 : Erreur relative lors du calcul des pertes actives quand le champ est perpendiculaire en fonction de la fréquence.

Dans ce cas de figure nous obtenons des erreurs importantes sur le calcul des pertes par effet de proximité. En effet, dans le cas idéal nous avons moins de 1% d'erreur à 10 kHz alors que maintenant nous avons 1.79%. A 50 kHz la différence est encore plus significative : nous obtenons une erreur de 6.34% contre 0.81% auparavant.

Notre cas de figure est mal conditionné. Pour que les conditions de calcul de la perméabilité magnétique complexe soient respectées, il aurait fallu étudier un conducteur dont la section aurait été rectangulaire ( $a \times c$ ) avec une profondeur de  $a$ . Ce n'est pas le cas et les résultats le prouvent. Ces erreurs sont principalement liées à la valeur finie de la dimension  $c$ . Si  $c$  devait tendre vers l'infini nous aurions un problème 2D à traiter.

## II.4. Comparaison entre les composantes 2D et la 3D de $\mu^*$

Dans ce paragraphe, nous nous sommes intéressés au cas de figure dans lequel la géométrie du conducteur devrait, en toute logique, amener à une perméabilité magnétique complexe isotrope. C'est le cas d'un conducteur cubique, ce qui est complètement irréal (fictif), comme montré sur la figure III.30.

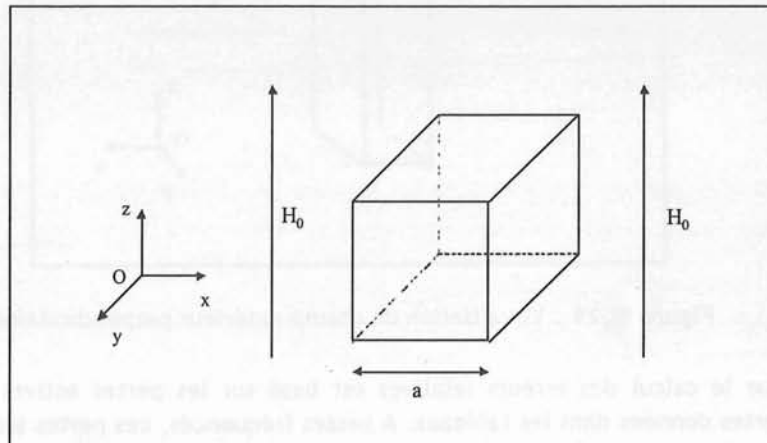


Figure III.30 : Un cube conducteur plongé dans un champ magnétique.

Avec cette forme de conducteur qui devrait alors avoir, à priori, une perméabilité complexe isotrope (de part sa définition géométrique, elle dépend principalement des dimensions du matériau) vient une interrogation : quelle méthode de calcul faut-il choisir pour déterminer la valeur de  $\mu^*$  ? Celle dans laquelle intervient une approximation 1D (comme dans le calcul de  $\mu_x^*$  et  $\mu_y^*$ ) ou celle qui fait une approximation 2D comme lors de la détermination de la troisième composante de  $\mu^*$  ( $\mu_z^*$ ). Ce paragraphe va nous permettre de voir si notre méthode reste correcte d'une part et si réellement nous pouvons attribuer une perméabilité complexe isotrope au conducteur étudié d'autre part.

### II.4.1. Cas d'une perméabilité magnétique complexe anisotrope

Tout d'abord calculons les pertes de manière simple en attribuant au conducteur une propriété telle que la perméabilité magnétique complexe reste anisotrope, c'est à dire  $\mu^*=(\mu_x^*, \mu_y^*, \mu_z^*)$  avec  $\mu_x^* \neq \mu_y^* \neq \mu_z^*$ .

Fréquences	Pertes cas ( $\mu, \sigma$ )	Pertes cas ( $\mu^*$ )	Erreur relative
100 Hz	0.007106-j0.106e-8	0.007106-j0.105e-8	0.94 %
10 kHz	0.710607-j0.740e-5	0.710607-j0.693e-5	6.35 %
50 kHz	3.55298-j0.346e-4	3.5599-j0.322e-4	6.94 %

Tableau III.8 : Erreur relative en fonction de  $\mu^*$  et de la fréquence.

Nous obtenons alors les résultats reportés dans le tableau III.8 ci-dessus. Les erreurs de cette méthode reste correctes, inférieures à 7% pour une fréquence de 50 kHz. Ceci est

encourageant dans le sens où nous pouvons voir une stabilisation de la valeur de l'erreur vu ses valeurs à  $f = 10$  kHz et à  $f = 50$  kHz. Cela est d'autant plus prometteur que nous nous trouvons dans une configuration très désavantageuse du fait des dimensions finies et relativement petites du conducteur. Ces conditions géométriques accroissent les effets de bord (ou de pointe), mais cela n'a pas été vérifié pour le moment.

#### II.4.2. Cas d'une perméabilité magnétique complexe isotrope

Suivant que nous calculons, toujours dans le cas d'un cube, les composantes de  $\mu^*$  soit avec l'approximation 1D soit avec la 2D nous n'obtenons pas les mêmes valeurs (comme nous pouvons l'observer sur la figure III.31 représentant les parties imaginaires et réelles de  $\mu_x^*$  et de  $\mu_z^*$ ). Nous pouvons observer un réel écart entre les deux approches.

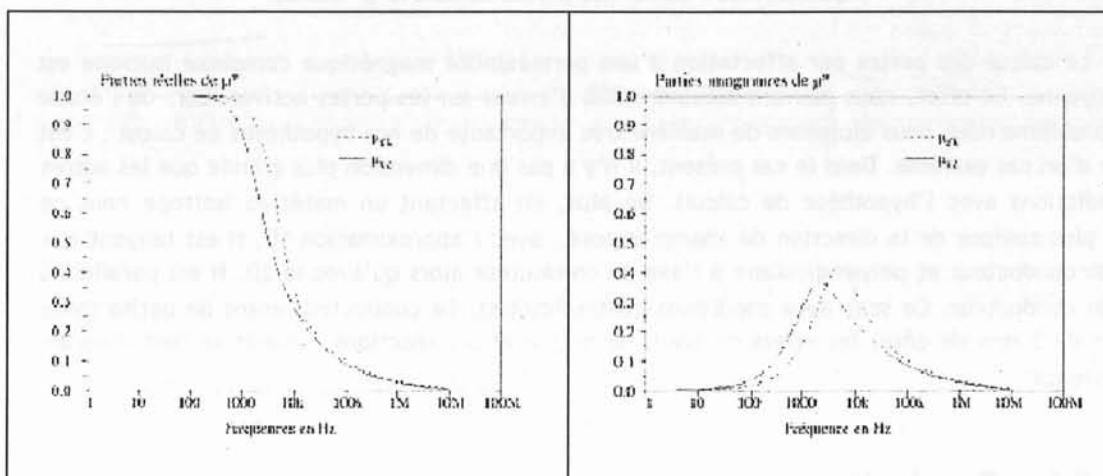


Figure III.31 : Comparaisons des perméabilités complexes suivant (Ox) et (Oz).

La grande différence qui ressort du calcul de ces perméabilités suivant le 1D et le 2D (approximations) est que l'effet de peau n'apparaît pas à la même fréquence ; il apparaît plus tôt (plus bas en fréquence) pour un calcul avec une approximation 2D (cf. figure III.31).

Considérons les cas suivants :

- Cas (1) →  $\mu_x^*$  suivant (Ox), (Oy) et  $\mu_z^*$  suivant (Oz) ;
- Cas (2) →  $\mu_x^*$  dans toutes les directions ;
- Cas (3) →  $\mu_z^*$  dans toutes les directions.

Les résultats nous sont donnés par le tableau III.9 ci-dessous :

Fréquences	100 Hz			10 kHz			100 kHz		
	Cas (1)	Cas(2)	Cas(3)	Cas (1)	Cas(2)	Cas(3)	Cas (1)	Cas(2)	Cas(3)
Pertes Actives (en W)	0.11 <sup>e-8</sup>	0.25e-8	0.53e-8	0.74e-5	0.92e-5	0.65e-5	0.16e-3	0.15e-3	0.13e-3
Pertes Réactives (en W)	0.00711	0.00711	0.00711	0.71061	0.71060	0.71060	3.55222	3.55224	3.55223
Erreur sur P <sub>Active</sub>	0.91%	66.22%	28.65%	6.35%	24.60%	12.43%	27.93%	32.43%	41.89%

Tableau III.9 : Calcul des pertes suivant le  $\mu^*$  utilisé.

Le calcul des pertes par affectation d'une perméabilité magnétique complexe isotrope est très moyenne. En effet, nous pouvons atteindre 50% d'erreur sur les pertes actives. Lors de l'étude de ce problème nous nous éloignons de manière très importante de nos hypothèses de calcul ; c'est l'étude d'un cas extrême. Dans le cas présent, il n'y a pas une dimension plus grande que les autres (contradictions avec l'hypothèse de calcul). De plus, en affectant un matériau isotrope nous ne tenons plus compte de la direction du champ imposé : avec l'approximation 1D, H est tangent aux faces du conducteur et perpendiculaire à l'axe du conducteur alors qu'avec la 2D, H est parallèle à l'axe du conducteur. Ce sont deux conditions contradictoires. Le conducteur étant de petite taille (section de 5 mm de côté) les effets de bord, de pointe et les réactions d'induit se font d'autant plus ressentir.

### II.4.3. Conclusion

Les écarts entre les cas isotropes avec  $\mu^* = \mu_x^*$  et celui avec  $\mu^* = \mu_z^*$  au niveau des pertes actives sont prévisibles puisque sur la figure III.31 les perméabilités respectives sont déjà différentes de façon significative, notamment les parties imaginaires qui sont directement liées aux pertes actives. Ceci laisse logiquement penser à une répercussion sur les pertes actives.

## II.5. Conclusion

Les premiers essais 3D sont satisfaisants puisque lorsque nous nous plaçons dans un cas favorable il y a moins de 2% d'erreur relative. De plus notre méthode numérique donne de meilleurs résultats que celle utilisant les fonctions de Bessel même si un de ses avantages est de donner des résultats quasi instantanés (pour le pré calcul de  $\mu_z^*$ ). En effet, en approximant la section carrée par une section circulaire nous n'obtenons pas de meilleurs résultats quelque soit l'équivalence faite. Cette approximation circulaire ne sera presque jamais envisageable puisque dans un transformateur de puissance les conducteurs ont le plus souvent une section rectangulaire. Dans le paragraphe de comparaison des méthodes d'obtention des composantes de  $\mu^*$ , où nous n'appliquons aucune de nos conditions hypothèses de calcul de  $\mu^*$ , nous obtenons une erreur restant encore acceptable (dans le meilleur des cas c'est à dire avec un  $\mu^*$  anisotrope). Cette étude 3D nous a permis de valider notre méthode de calcul de pertes par la perméabilité magnétique complexe.

### III. Conclusion

L'objectif de cette étude a été d'introduire et de valider la méthode d'évaluation des pertes de proximité dans les conducteurs massifs par la perméabilité magnétique complexe en 2D puis de l'appliquer en 3D. Il s'agissait de bien appréhender les phénomènes physiques mis en jeu :

- Affranchissement des courants de Foucault ;
- Considérations énergétiques (électromagnétiques) .

Nous avons validé l'équivalence du matériau ayant pour seule propriété physique une perméabilité magnétique complexe (tenseur). La validation est faite sur la comparaison des puissances active et réactive en 2D et 3D. Cette étude nous a montré que lorsque le champ magnétique n'est pas uniforme aux bords du conducteur, nous avons apparition d'une erreur sur le calcul des pertes (actives principalement). Cependant l'approximation reste tout à fait satisfaisante dans le cadre de l'étude des transformateurs de puissance. L'homogénéisation 2D de conducteurs-isolants donne de bons résultats.

Pour valider l'utilisation la perméabilité magnétique complexe nous n'avons considéré qu'un conducteur placé dans un champ magnétique extérieur imposé que ce soit en 2D ou en 3D. Cette substitution donne de bons résultats. Nous allons voir de quelle façon l'utiliser dans la détermination des paramètres RLCG d'un transformateur de puissance.



The following information is being furnished to you for your information only. It is not intended to be used for any other purpose. This information is being furnished to you in confidence and should be kept confidential.

The information contained herein is for your information only and is not intended to be used for any other purpose. This information is being furnished to you in confidence and should be kept confidential.

The information contained herein is for your information only and is not intended to be used for any other purpose. This information is being furnished to you in confidence and should be kept confidential.

## **CHAPITRE 4 :**

### **Du conducteur au transformateur**

## CHAPITRE 4 :

### Du conducteur au transformateur

## Introduction

Jusqu'à présent, il n'a été question que de simples conducteurs et non de transformateurs. En effet, notre validation 2D-3D du chapitre 3, n'a traité que le calcul des pertes par effet de proximité dans un ou plusieurs conducteurs. Ce chapitre 4 est un préambule de la méthode qui servira à obtenir les matrices résistance (R) et inductance (L) caractérisant le transformateur de puissance. A terme, nous souhaitons obtenir les paramètres caractéristiques d'un transformateur donné à partir d'une simulation tridimensionnelle.

Il faut d'abord préciser que la modélisation 3D d'un transformateur n'est pas si aisée à mettre en œuvre. Par conséquent, après avoir validé notre méthode de calcul des pertes par effet de proximité sur un ou plusieurs conducteurs parallélépipédiques (cf. chapitre 3) il nous a fallu mettre au point la meilleure façon d'affecter le tenseur de perméabilité magnétique complexe aux conducteurs (paragraphe I).

Nous avons ensuite extrapolé ce concept de perméabilité magnétique complexe au circuit magnétique dont la méthode est développée au paragraphe II.

Secondairement, ces deux concepts ont été intégrés dans nos simulations 3D pour le calcul de (R) et de (L). Ces simulations ont, dans un premier temps, testé notre méthode sur un système de deux conducteurs avant de l'appliquer sur deux paquets de conducteurs en série (paragraphe III). Suite à cela nous avons mis en application notre méthode d'homogénéisation 3D basée sur les réluctances magnétiques.

Enfin, nous avons introduit un circuit magnétique de perméabilité complexe dans le dispositif composé de deux galettes de quatre conducteurs (paragraphe IV). Ce dernier dispositif représente un prémisses à l'étude d'un transformateur cas-test plus complet et qui sera automatisé (cf. chapitre 5).

## I. Le tenseur de perméabilité magnétique complexe

Les conducteurs dans un transformateur pouvant être parallélépipédiques, circulaires ou coniques (pour les galettes inclinées), il est important de s'assurer que la perméabilité magnétique complexe affectée au conducteur est exacte en tout point de sa région volumique. Nous nous sommes aperçus que Flux3D ne permettait pas d'avoir un repère dépendant de la position géométrique. Or pour des conducteurs circulaires ou coniques, il est impératif que ce changement de repère soit bien pris en compte. Du fait de l'introduction future d'un circuit magnétique dans nos problèmes il devient nécessaire de remédier à cette limitation. Par conséquent, nous avons développé un programme utilisateur permettant de s'assurer de la bonne affectation de la perméabilité magnétique complexe en tout point de chaque conducteur.

Regardons l'évolution des composantes de la perméabilité complexe pour le cas particulier d'un conducteur circulaire de section carrée ou rectangulaire. Comme illustré sur la figure IV.1, nous constatons que la composante selon (Oz) est invariante. Par contre, les composantes selon (Ox) et (Oy) sont modifiées. En effet, en se plaçant sur le plan de coupe n°3 nous avons  $\mu_x^*$  selon (Oy) et  $\mu_y^*$  selon (Ox). Cela correspond à une rotation de 90° autour de (Oz) de 1 à 3. Sur le plan n° 2, le tenseur de perméabilité complexe est à nouveau équivalent à celui défini en 1 (au signe près des

composantes). Cette évolution des composantes de la perméabilité anisotrope doit nécessairement être prise en compte lors de la résolution magnéto harmonique 3D.

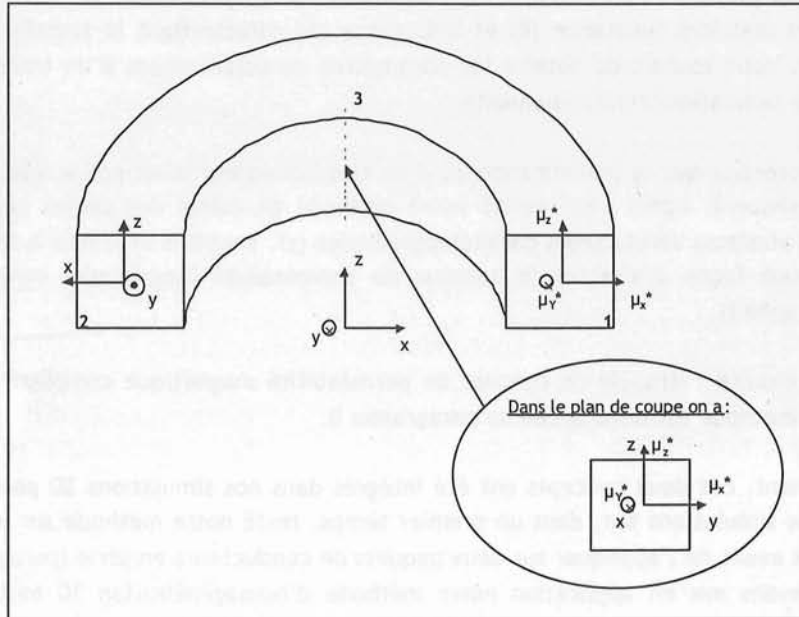


Figure IV.1 : Composantes de la perméabilité complexe dans un conducteur circulaire.

L'objectif de notre programme utilisateur est d'assurer le maintien de la valeur de la perméabilité magnétique complexe sur tout le domaine du conducteur. Ce programme utilisateur permet de calculer en chaque point (chaque nœud) de la région volumique concernée la perméabilité magnétique complexe dans le repère absolu cartésien.

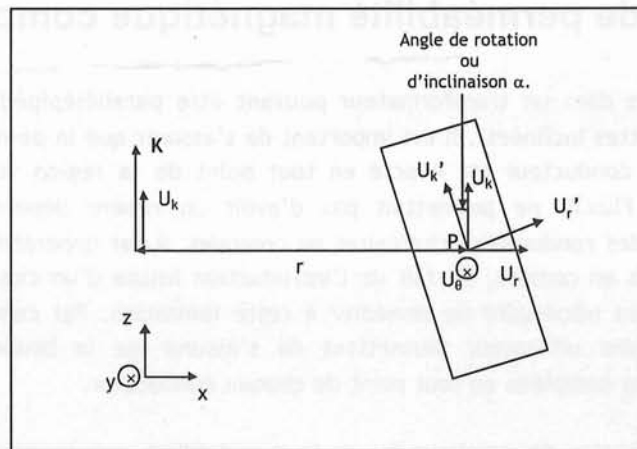


Figure IV.2 : Coupe transversale d'une galette inclinée.

A partir du moment où le vecteur directeur de l'axe de la galette  $K$  est connu ainsi que le centre de la galette  $P$  (figure IV.2), nous pouvons alors obtenir les composantes de sa perméabilité magnétique complexe en chaque point de sa région volumique.

En raisonnant par rapport aux champ et induction magnétiques nous avons :

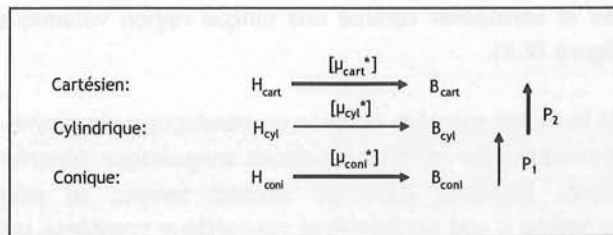


Figure IV.3 : Différentes étapes du changement de repère.

Avec  $P_1$  une simple matrice de rotation autour d'un axe, et  $P_2$  la matrice de passage d'un repère cylindrique à un repère cartésien. Nous avons donc :

$$\bullet P_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe ayant pour vecteur unitaire  $U_\theta$ .  
Notons que  $U_\theta = U_\theta'$ .

$$\bullet P_2 = \begin{bmatrix} U_{rx} & U_{\theta x} & U_{kx} \\ U_{ry} & U_{\theta y} & U_{ky} \\ U_{rz} & U_{\theta z} & U_{kz} \end{bmatrix}$$

avec pour  $P_2$  :

$$\vec{U}_k = \frac{\vec{K}}{\|\vec{K}\|}$$

$$\vec{U}_\theta = \frac{\vec{U}_k \times \vec{r}}{\|\vec{K} \times \vec{r}\|}$$

$$\vec{U}_r = \vec{U}_\theta \times \vec{U}_k$$

Nous obtenons alors l'expression de la perméabilité dans le repère cartésien :

$$[\mu_{cart}] = P_1 P_2 [\mu_{con}] P_1^{-1} P_2^{-1}$$

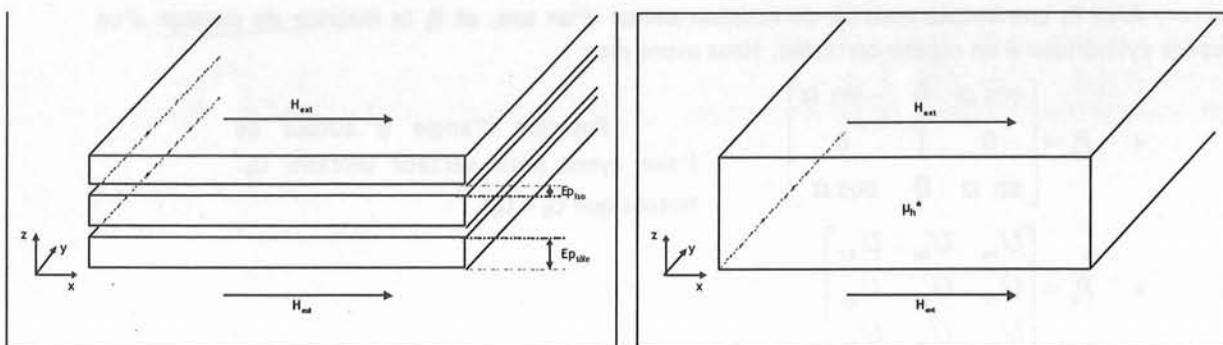
**NB :** La résolution du système linéaire est faite dans le repère absolu cartésien du domaine d'étude. Cela explique la nécessité de déterminer notre perméabilité magnétique complexe dans le repère cartésien. Le fait de raisonner vectoriellement nous affranchi de la recherche d'angles entre vecteurs directeurs par projections axiales. Le sous-programme développé est donné dans l'annexe 5.

Ce programme utilisateur intervient dans la résolution magnéto harmonique lors de l'intégration des régions supposées être conductrices ; le calcul de la perméabilité magnétique complexe est alors calculée en chaque nœud du maillage du conducteur.

## II. La perméabilité complexe pour le circuit magnétique

Nous pouvons également affecter une perméabilité magnétique complexe au circuit magnétique afin de pouvoir le considérer comme une unique région volumique et non plus comme un empilement de tôles (figure IV.4).

Nous raisonnons de la même manière qu'avec un conducteur de cuivre. Considérons dans un premier temps une à une chaque tôle formant le circuit magnétique séparément pour lui affecter une perméabilité complexe. Prenons, dans un second temps, le paquet de tôles pour l'homogénéiser : cela nous amène à une perméabilité magnétique complexe unique pour l'ensemble du circuit magnétique.



Circuit magnétique.

Circuit magnétique homogénéisé.

Figure IV.4 : Circuit magnétique placé dans un champ magnétique extérieur, homogénéisation.

Nous nous trouvons dans les mêmes conditions que le calcul de la perméabilité magnétique complexe pour un conducteur puisque la seule dimension caractéristique finie de la tôle est son épaisseur (en pratique toutes les dimensions sont finies, nous faisons une hypothèse de calcul). En effet, son épaisseur est très petite devant toute autre grandeur de la tôle (longueur ou largeur sont de l'ordre de plusieurs centaines de millimètres). Nous obtenons alors  $\mu_{rx}^*$  et  $\mu_y^*$  (composantes dans le plan (xOy) correspondant à un champ tangent à ce plan) à partir des équations (II.22 et II.23) :

$$\mu_{rx,y}^* = \frac{\mu_{rtôle} \delta}{Ep_{tôle}} \left( \frac{\sinh\left(\frac{Ep_{tôle}}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{Ep_{tôle}}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{Ep_{tôle}}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{Ep_{tôle}}{\delta}\right)} \right) - j \frac{\mu \delta}{Ep_{tôle}} \left( \frac{\sinh\left(\frac{Ep_{tôle}}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{Ep_{tôle}}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{Ep_{tôle}}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{Ep_{tôle}}{\delta}\right)} \right)$$

Avec  $Ep_{tôle}$  l'épaisseur de la tôle considérée et  $\mu_{rtôle}$  la valeur de la perméabilité magnétique relative (réelle) du circuit magnétique.

Pour le circuit magnétique choisi nous avons :

- Perméabilité magnétique relative :  $\mu_{rtôle} = 10000$
- Conductivité électrique  $\sigma = 2.2E6$
- Epaisseur de chaque tôle,  $Ep_{tôle} = 3E-4$  m
- Epaisseur d'isolant,  $Ep_{iso} = 9E-6$  m.

Ensuite nous procédons à une homogénéisation par la méthode des réductances magnétiques (II.24) qui se ramène à :

$$\mu_{rhz,y}^* = \frac{\mu_{rx,y}^* \times Ep_{tole} + \mu_{riso} \times Ep_{iso}}{Ep_{tole} + Ep_{iso}}, \text{ quand il y a une épaisseur d'isolant.}$$

Nous avons, néanmoins, négligé les effets d'un champ extérieur perpendiculaire au plan du circuit magnétique (i.e. les courants pouvant se développer dans le plan de la tôle sont négligés). En effet, pour les prendre en compte il aurait fallu déterminer  $\mu_{rz}^*$  de la même manière que pour un conducteur. Cela n'est, pour l'instant, pas réalisable du fait de la convergence limitée de la série définissant la composante selon (Oz) de la perméabilité complexe (cf. § III du chapitre 2). Nous allons alors choisir une perméabilité arbitraire indépendante de la fréquence.

$\mu_{rz}^*$  aura alors une valeur strictement réelle et elle représentera l'homogénéisation tôle magnétique - isolant dont la valeur est donnée par l'expression suivante :

$$\mu_{rhz}^* = \frac{\mu_{rtole} \times (Ep_{tole} + Ep_{iso})}{(\mu_{rtole} \times Ep_{iso} + \mu_{riso} \times Ep_{tole})}, \text{ l'homogénéisation est directement prise en compte.}$$

Cette expression est donc totalement indépendante de la fréquence. Nous pouvons alors calculer sa valeur avec les caractéristiques géométriques et physiques données précédemment.

$$\mu_{rhz}^* = 34.2$$

### III. Cas axisymétriques

Considérons, tout d'abord, un système constitué de plusieurs conducteurs. Les pertes dites par « effet de proximité » dans un conducteur massif correspondent aux pertes ohmiques engendrées par les courants de Foucault se rebouclant dans l'épaisseur du conducteur et induits par les autres conducteurs du système. Ce type de pertes est à distinguer des pertes dites par effet de peau dues au champ magnétique propre du conducteur alimenté, sans prise en compte de la « réaction d'induit » des autres conducteurs du système. Les pertes par proximité peuvent être négligées dans le cas de conducteurs éloignés les uns des autres. Par ailleurs, ces deux types de pertes disparaissent dans l'approximation conducteurs filaires où l'épaisseur de peau est très grande devant les dimensions des conducteurs (hypothèse valide pour l'étude des matériels industriels à leur fréquence industrielle).

Dans un transformateur, les conducteurs ne sont ni éloignés les uns des autres ni filaires. Par conséquent, ces deux types de perte interviennent lors de l'étude d'un transformateur. Dans notre approche de caractérisation des paramètres électriques d'un transformateur nous ne faisons, à priori, pas la distinction entre les pertes par effet de proximité et celles par effet de peau lorsque les simulations sont effectuées en affectant une conductivité électrique non nulle aux conducteurs massifs. Par contre, en utilisant la perméabilité magnétique complexe, seules les pertes par effet de proximité sont prises en compte. Les pertes par effet de peau sont ajoutées par le biais des résistances et inductances de Stoll sur les éléments diagonaux, respectivement, des matrices résistance et inductance. L'influence de ces pertes sur le calcul des éléments matriciels



peut-être mise en évidence par l'étude de dispositifs très simplifiés se rapprochant de plus en plus d'une géométrie de transformateur.

Tout d'abord, nous avons étudié un système de deux conducteurs isolés dans le but de dissocier les différents types de pertes (effet de peau et effet de proximité) intervenant dans le calcul matriciel. Ensuite, nous avons considéré deux paquets de quatre conducteurs afin de tester notre méthode d'homogénéisation 3D.

La détermination des éléments matriciels est faite par post-traitement Flux3D en utilisant les valeurs circuit : tensions et courants aux bornes des composants. Ensuite par la relation  $U = ZI$ , nous pouvons déduire les valeurs des inductances et résistances des composants en imposant à un des conducteurs une intensité à 1A et à l'autre zéro.

### III.1. Deux conducteurs circulaires

Le dispositif est constitué de deux conducteurs circulaires à section carrée (figure IV.5). Dans un premier temps ils ne seront pas entourés d'un circuit magnétique, ce qui sera le cas plus tard. Pour cette étape nous avons choisis des conducteurs dont la géométrie est donnée ci-après :

- Conducteur circulaire de diamètre moyen égal à 25 mm,
- section carrée de côté égal à 5 mm,
- une épaisseur de 5 mm.

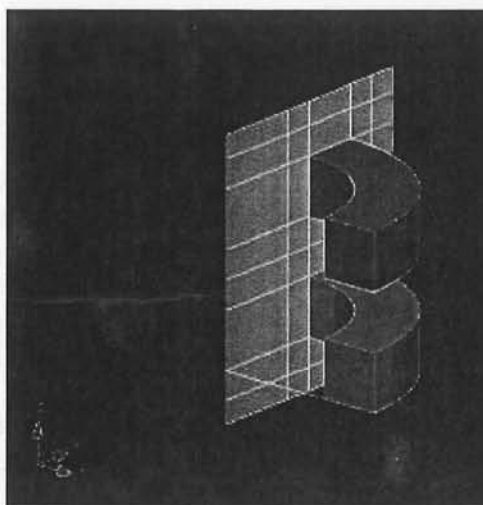


Figure IV.5 : Représentations des 2 conducteurs circulaires de même rayon, quart de géométrie.

Les éléments diagonaux de R et L dépendent des pertes par effet de proximité et par effet de peau :  $R_{ii} = R_{i\text{propre}} + R_{i\text{proximité}}$  et  $L_{ii} = L_{i\text{propre}} + L_{i\text{proximité}}$ . Ces éléments diagonaux représentent respectivement la résistance et l'inductance de chaque conducteur i. Sur chaque conducteur nous supposons qu'il y a une contribution due à sa propre alimentation et une causée par la présence (interaction) d'autres conducteurs. La contribution due à son alimentation sera notée avec l'indice « propre » et celle provoquée par la présence d'autres conducteurs sera notée avec l'indice

« proximité ». Pour plus de détails sur le calcul des éléments matriciels il faut directement passer au chapitre 5 au paragraphe 1.3 qui donne une explication sur un cas plus général.

Le fait de disposer uniquement de deux conducteurs permet de déterminer plus simplement l'influence de chacun des effets sur les résistances. En alimentant le conducteur #1 à 1A,  $I_1 = 1A_{eff}$ , et le conducteur #2 à zéro,  $I_2 = 0A$ , nous obtenons alors les résistances propres et de proximité du conducteur #1 ainsi que la résistance mutuelle entre les 2 conducteurs. En inversant les conditions d'alimentation nous obtenons les résistances du conducteur #2. Notons que le terme  $R_{iiproximité}$  (respectivement  $L_{iiproximité}$ ) calculé représente les pertes par effet de proximité auxquelles s'ajoutent également les pertes représentant la contribution circulaire du champ source. La séparation de ces deux contributions est complexe. Dans nos résultats ces deux contributions sont présentes.

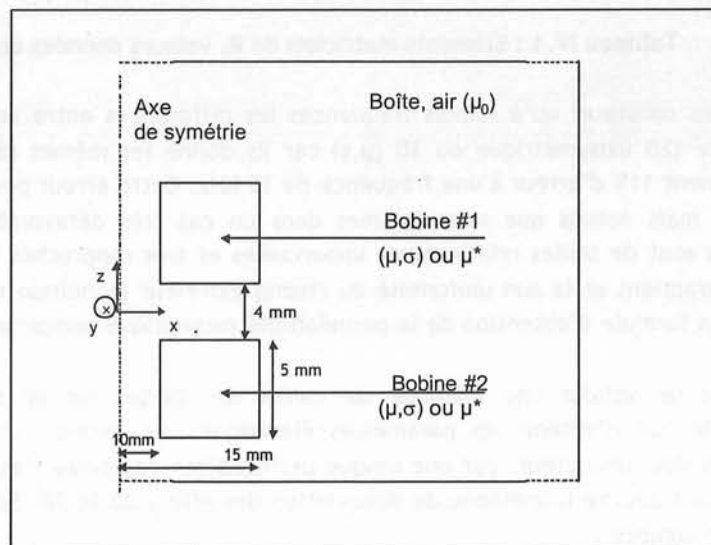


Figure IV.6 Schéma et propriétés physiques des matériaux.

En appliquant la méthode détaillée auparavant, nous allons comparer un système avec deux conducteurs  $(\mu, \sigma)$  à un système comportant deux conducteurs  $(\mu^*)$ . C'est ce que nous appellerons le cas général. Ensuite, dans le but de dissocier les effets mis en jeu sur chacun des conducteurs nous avons mis en place deux cas de figure qui sont détaillés dans le paragraphe III.1.2.

### III.1.1. Cas général

Nous constatons que ce système est totalement symétrique : que nous alimentions le conducteur #1 ou le conducteur #2, nous sommes dans la même configuration. Il en résulte l'obtention des matrices (R) et (L) symétriques :

$$(R) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (L) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

Les éléments  $X_{ii}$  représentent les résistance et inductance du conducteur  $i$ , et les éléments  $X_{ij}$ , les mutuelles. Dans le tableau IV.1 suivant nous n'avons noté que les éléments  $X_{11}$  et  $X_{12}$  puisque

$R_{11} = R_{22}$  et  $R_{12} = R_{21}$ , de même pour la matrice inductance. La comparaison entre les simulations 3D ( $\mu^*$ ) et 2D axisymétriques ou 3D ( $\mu, \sigma$ ) a uniquement été réalisée sur les éléments matriciels (R) car les erreurs sur le calcul des inductances sont faibles. Nous verrons cela par la suite.

		Fréquences	2 Hz	50 Hz	700 Hz	5000 Hz	15000 Hz
		Rstoll	3,14E-04	3,14E-04	3,14E-04	3,34E-04	4,41E-04
3D ( $\mu, \sigma$ ) 2D axi	R11		3,10E-04	3,10E-04	3,14E-04	3,47E-04	4,93E-04
	R12		$\cong 0$	$\cong 0$	2,87E-07	1,09E-05	1,05E-05
3D ( $\mu^*$ )	R11		3,14E-04	3,14E-04	3,23E-04	3,90E-04	5,45E-04
	Erreur Rel		$\cong 0$	-0,02%	-2,61%	-12,3%	10,5%
	R12		0	0	2,27E-07	1,17E-05	1,15E-05
	Erreur Rel		-	-	21,1%	-8,01%	-9,06%

Tableau IV.1 : Eléments matriciels de R, valeurs données en  $\Omega$ .

Nous pouvons constater qu'à faibles fréquences les différences entre nos résultats et les calculs de référence (2D axisymétrique ou 3D ( $\mu, \sigma$ ) car ils donne les mêmes résultats) sont très faibles. Elles atteignent 11% d'erreur à une fréquence de 15 kHz. Cette erreur peut-être considérée comme importante mais notons que nous sommes dans un cas très défavorable. En effet, les conducteurs étudiés sont de tailles relativement importantes et très rapprochés l'un de l'autre ce qui favorise les interactions et la non uniformité du champ extérieur (condition importante lors de l'établissement de la formule d'obtention de la perméabilité magnétique complexe).

Nous venons de valider une méthode de calcul des pertes sur un système de deux conducteurs, dans le but d'obtenir les paramètres électriques de celui-ci. La substitution des propriétés physiques des conducteurs par une unique perméabilité complexe s'est révélée valable. Il nous faut maintenant décrire la méthode de dissociation des effets 2D et 3D. Seuls les problèmes linéaires sont pris en compte .

### III.1.2. Cas de la dissociation des effets

La figure IV.7 représente le cas test qui nous a servi à faire la dissociation des effets (peau/proximité). Par rapport au cas précédent, un seul des conducteurs est affecté avec une propriété physique donnée ( $\mu_0, \sigma$ ). Les propriétés physiques de l'air sont attribués au second conducteur, c'est à dire qu'il a une perméabilité magnétique relative égale à 1 et qu'il est non conducteur. Par conséquent sa présence n'entraîne pas d'interactions avec l'autre conducteur.

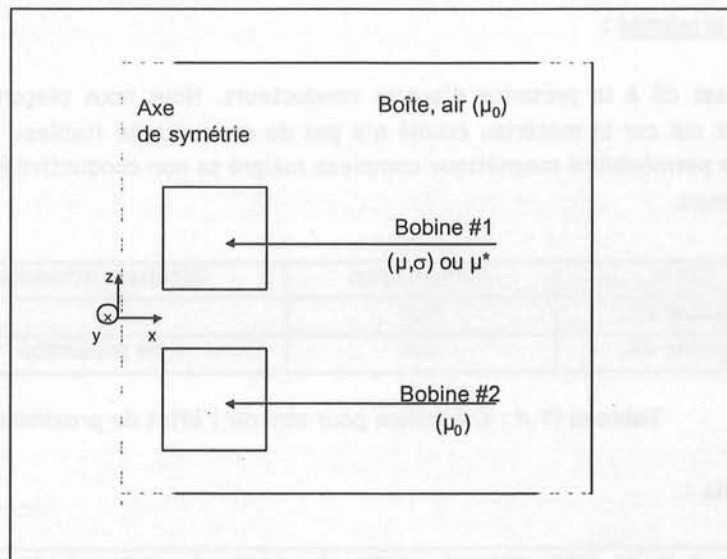


Figure IV.7 : Dispositif de la dissociation des effets.

L'effet de peau :

Cet effet correspond à un conducteur alimenté. Pour ne pas avoir d'interaction avec d'autres conducteurs, nous avons affecté au second conducteur (bobine) les propriétés de l'air. Il n'y a pas d'effets de proximité qui s'ajoutent. Le tableau IV.2 résume les conditions du calcul.

Cas a	Alimentation	Résultats attendus
Bobine #1	Oui	R propre ( = Stoll )
Bobine #2	Non	-

Tableau IV.2 : Conditions pour obtenir l'effet de peau.

Fréquences En Hz	50	100	500	1000	2000	5000	10000	15000
Résistances 3D	3,10E-04	3,10E-04	3,11E-04	3,13E-04	3,15E-04	3,39E-04	3,90E-04	4,47E-04
Résistance Stoll	3,14E-04	3,14E-04	3,14E-04	3,15E-04	3,17E-04	3,34E-04	3,83E-04	4,41E-04
Erreur relative	1,27%	1,27%	0,96%	0,64%	0,63%	-1,50%	-1,83%	-1,36%

Tableau IV.3 : Résistances propre calculées par Flux3D (l'unité est l'Ohm).

Le calcul de la résistance propre pour un élément électrique était précis dans le cas général. Du fait de la suppression des interactions entre conducteurs la détermination de cette résistance est encore plus précise (moins de 2% d'erreur en 3D).

### L'effet de proximité :

Cet effet est dû à la présence d'autres conducteurs. Nous nous plaçons dans un cas où l'effet de peau est nul car le matériau étudié n'a pas de conductivité (tableau IV.4). Cela nous a permis de voir si la perméabilité magnétique complexe malgré sa non conductivité avait un effet sur les autres conducteurs.

Cas b	Alimentation	Résultats attendus
Bobine #1	Non	-
Bobine #2	Oui	R de proximité

Tableau IV.4 : Conditions pour obtenir l'effet de proximité.

### Les résultats :

Fréquences En Hz	50	100	500	1000	2000	5000	10000	15000
Résistances 3D	1,12E-09	4,41E-09	1,10E-07	4,37E-07	1,70E-06	8,77E-06	2,21E-05	3,18E-05
Résistance 3D ( $\mu^*$ )	1,20E-09	4,77E-09	1,18E-07	4,72E-07	1,81E-06	8,98E-06	2,13E-05	3,02E-05
Erreur relative	-7,14%	-8,16%	-6,98%	-8,01%	-6,66%	-2,42%	3,75%	5,06%

Tableau IV.5 : Résistances de proximité (en  $\Omega$ ) obtenu avec Flux3d et ( $\mu^*$ ).

A basses fréquences, l'effet de proximité est quasi inexistant. Par contre, il devient non négligeable à des fréquences au-delà de 10 kHz. A basses fréquences, l'effet de peau est prépondérant. Par contre à hautes fréquences ce sont les effets de proximités qui deviennent prépondérants. Cela sera d'autant plus visible dans les résultats qui vont suivre.

Remarque : Les calculs de référence sont les calculs effectués sous Flux2D en 2D axisymétrique ou ceux effectués sous Flux3D ( $\mu, \sigma$ ). Ces deux méthodes donnant les mêmes résultats.

## **III.2. Deux paquets de quatre conducteurs**

Nous verrons par la suite que lors de la modélisation des transformateurs nous considérons, comme région élémentaire (de référence), les bobines (ou galettes) plutôt que les conducteurs. En effet, un transformateur est discrétisé en éléments électriques (cf. chapitre 5) regroupant des conducteurs en série. Animé de la volonté de se rapprocher de la géométrie d'un transformateur nous allons, maintenant, traiter le cas de deux galettes (ou bobines) de quatre conducteurs connectés en série. De la même manière que nous calculions la tension aux bornes du conducteur, nous allons obtenir la tension aux bornes, cette fois-ci, de la galette. Par analogie avec le cas précédent, nous obtenons toujours des matrices (R) et (L)  $2 \times 2$  symétriques.

Il nous sera possible de faire la comparaison de nos résultats avec les simulations SUMER puisque la géométrie du problème est axisymétrique (figure IV.8 et IV.9) et également aux

simulations faites avec Flux2D (qui seront notre référence). Cela va nous permettre de comparer notre méthode 3D à SUMER et de la valider avant de considérer un problème typiquement 3D.

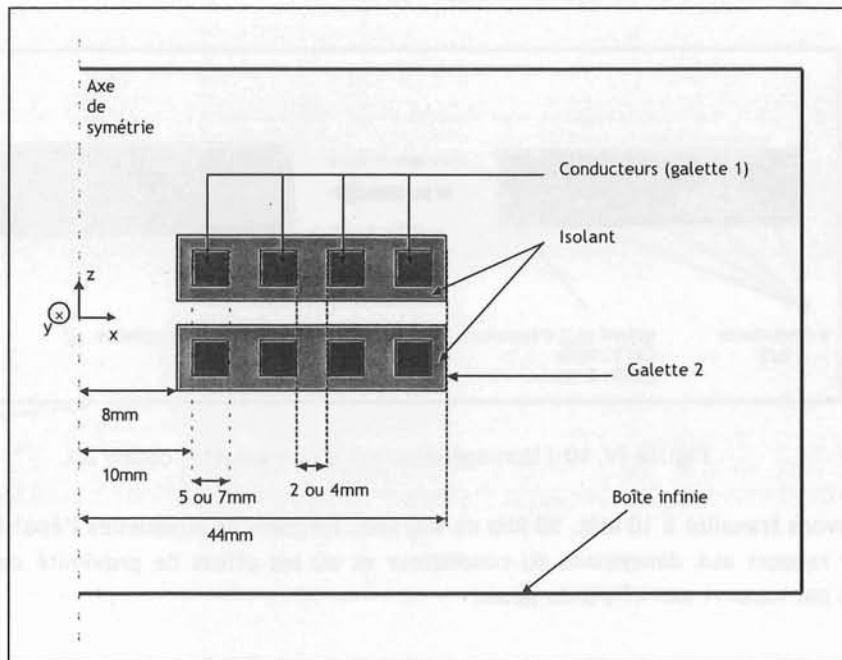


Figure IV.8 : Représentation des 2 galettes, géométrie 2D utilisée par Flux2D et SUMER.

Les matrices (R) et (L) sont carrées ( $2 \times 2$ ) et symétriques ; cela nous permet de ne faire qu'une série de résolutions numériques. Nous alimentons alors la première galette à 1A et la seconde à zéro. Nous allons obtenir alors les éléments  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $L_{11}$  et  $L_{12}$ .

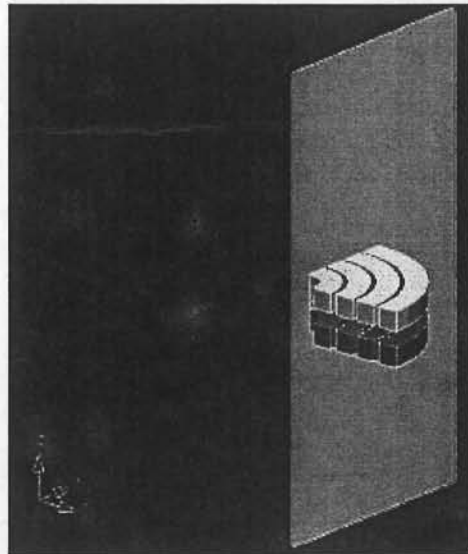


Figure IV.9 : Représentation des 2 galettes, géométrie 3D pour Flux3D ( $\mu^*$ ).

Dans ce paragraphe, nous procéderons également à la détermination de ces matrices avec l'affectation d'une perméabilité magnétique complexe homogénéisée (figure IV.10) et nous

regarderons l'effet du guipage sur la détermination des éléments matriciels. En effet, nous avons effectué nos calculs pour deux épaisseurs de guipage (1 et 2 mm) de telle manière que le conducteur homogénéisé conserve une taille fixe.

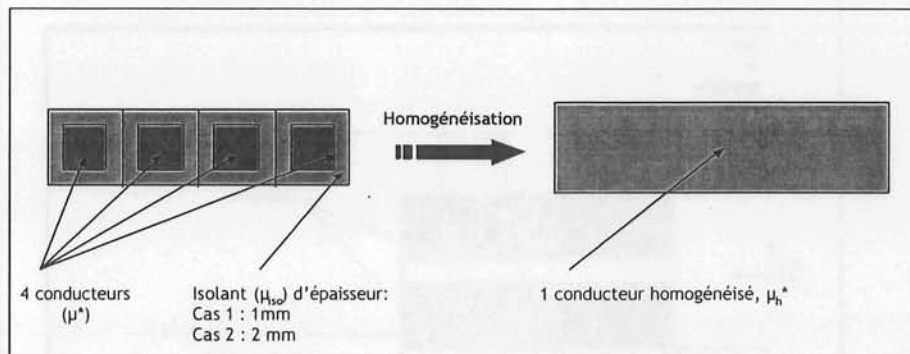


Figure IV.10 : Homogénéisation d'une galette, coupe 2D.

Nous avons travaillé à 10 kHz, 50 kHz et 100 kHz, fréquences auxquelles l'épaisseur de peau est petite par rapport aux dimensions du conducteur et où les effets de proximité devraient être prépondérants par rapport aux effets de peau.

En résumé :

Système de 2 galettes de 4 conducteurs avec

- Rayons moyens des conducteurs : 12.5 mm ; 21.5 mm ; 30.5 mm et 39.5 mm.
- Conducteur homogénéisé :
  - Section =  $36 \times 9 \text{ mm}^2$
  - Rayon moyen de 26 mm
- Echantillonnage fréquentiel :
  - F1 = 10 kHz
  - F2 = 50 kHz
  - F3 = 100 kHz

Section des conducteurs :

- Cas 1 : section de  $7 \times 7 \text{ mm}^2$  et un guipage de 1 mm autour de chaque conducteur.
- Cas 2 : section de  $5 \times 5 \text{ mm}^2$  et un guipage de 2 mm autour de chaque conducteur.

Avec :

	Fréquences	1 kHz	10 kHz	50 kHz	100 kHz
Cas 1	R Stoll	0,0014	0,0021	0,0040	0,0053
	L Stoll	3,40E-08	2,37E-08	1,04E-08	7,38E-09
Cas 2	R Stoll	0,0026	0,0032	0,0059	0,0078
	L Stoll	3,42E-08	3,00E-08	1,46E-08	1,03E-08
Ep de peau en m	Ep de peau en m	5,00E-03	1,60E-03	7,12E-04	5,03E-04

Tableau IV.6 : Résistances (en  $\Omega$ ) et inductances (en H) de Stoll.

Fréquences	$\mu^*$		$\mu_h^*$	
	Re( $\mu^*$ )	Im( $\mu_h^*$ )	Re( $\mu_h^*$ )	Im( $\mu_h^*$ )
10 kHz	0,2237	-0,2344	0,4454	-0,2063
	0,4574	-0,33	0,6718	-0,1996
	0,2237	-0,2344	0,4454	-0,2063
50 kHz	0,1017	-0,1017	0,3237	-0,96
	0,2034	-0,177	0,5181	-0,1071
	0,1017	-0,1017	0,3237	-0,096
100 kHz	0,0719	-0,0719	0,2941	-0,069
	0,1438	-0,1306	0,4821	-0,079
	0,0719	-0,0719	0,2941	-0,069

Tableau IV.7 : Perméabilités relatives complexes du cas 1.

Fréquences	$\mu^*$		$\mu_h^*$	
	Re( $\mu^*$ )	Im( $\mu_h^*$ )	Re( $\mu_h^*$ )	Im( $\mu_h^*$ )
10 kHz	0,3471	-0,3471	0,7602	-0,203
	0,6654	-0,364	0,9664	-0,0365
	0,3471	-0,3471	0,7602	-0,203
50 kHz	0,1423	-0,142	0,5838	-0,1133
	0,2845	0,2327	0,9277	-0,0234
	0,1423	-0,142	0,5838	-0,1133
100 kHz	0,1007	-0,1007	0,544	0,0857
	0,2013	0,1755	0,9198	-0,0176
	0,1007	-0,1007	0,544	0,0857

Tableau IV.8 : Perméabilités relatives complexes du cas 2.

Les éléments matriciels ainsi obtenus sont reportés dans les tableaux IV.9 , IV.10 , IV.11 et IV.12.

**Remarque :**

Pour la lecture des tableaux, aux éléments diagonaux des matrices  $R_{11}$  (respectivement  $L_{11}$ ) il faut ajouter les résistances (respectivement inductances) de Stoll avant de les comparer aux valeurs obtenues par Flux2D.



ELEMENT R<sub>11</sub> :

F1 = 10 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	6,41E-03	5,73E-03
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	4,73E-03	3,28E-03
		$\Delta$ %	-6,56	-13,14
	$\mu_h^*$	Valeur	4,60E-03	3,16E-03
		$\Delta$ %	-4,52	-10,96
3D	$\mu^*$	Valeur	4,70E-03	3,23E-03
		$\Delta$ %	-6,08	-10,92
	$\mu_h^*$	Valeur	4,60E-03	3,16E-03
		$\Delta$ %	-4,52	-10,99

F2 = 50 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	1,60E-02	1,40E-02
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	1,43E-02	1,03E-02
		$\Delta$ %	-13,70	-15,80
	$\mu_h^*$	Valeur	13,6	1,07E-02
		$\Delta$ %	-9,40	-18,80
3D	$\mu^*$	Valeur	1,39E-02	9,63E-03
		$\Delta$ %	-11,30	-12,80
	$\mu_h^*$	Valeur	1,36E-02	1,07E-02
		$\Delta$ %	-11,90	-22,60

F3 = 100 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	2,34E-02	2,03E-02
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	2,22E-02	1,64E-02
		$\Delta$ %	4,98	19,30
	$\mu_h^*$	Valeur	2,09E-02	1,71E-02
		$\Delta$ %	10,62	19,30
3D	$\mu^*$	Valeur	2,14E-02	1,51E-02
		$\Delta$ %	8,55	25,62
	$\mu_h^*$	Valeur	2,09E-02	1,71E-02
		$\Delta$ %	10,68	15,76

Tableau IV.9 : Résistance propre de l'élément électrique 1 en  $\Omega$ .

Notre méthode, avec des conducteurs maillés en extrusif, et SUMER obtiennent globalement les mêmes résultats. Nous constatons que notre homogénéisation aboutie même à de meilleurs résultats (à F = F3). C'est peut-être dû à une meilleure prise en compte des effets 3D puisque notre tenseur de perméabilité à trois composantes. Lorsque la surface de guipage est moins importante nous obtenons de meilleurs résultats.

ELEMENT R<sub>12</sub> :

F1 = 10 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	3,01E-03	1,75E-03
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	2,90E-03	1,66E-03
		$\Delta$ %	3,60	5,36
	$\mu_h^*$	Valeur	2,84E-03	1,70E-03
		$\Delta$ %	5,59	3,01
3D	$\mu^*$	Valeur	2,90E-03	1,65E-03
		$\Delta$ %	3,65	5,714285
	$\mu_h^*$	Valeur	2,86E-03	1,71E-03
		$\Delta$ %	4,98	2,29

F2 = 50 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	8,33E-03	5,35E-03
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	9,37E-03	5,72E-03
		$\Delta$ %	-12,47	-6,83
	$\mu_h^*$	Valeur	9,03E-03	6,26E-03
		$\Delta$ %	-8,47	-17,07
3D	$\mu^*$	Valeur	9,15E-03	5,49E-03
		$\Delta$ %	-9,86	-2,62
	$\mu_h^*$	Valeur	9,08E-03	6,30E-03
		$\Delta$ %	-8,96	-17,76

F3 = 100 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	1,25E-02	8,04E-03
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	1,48E-02	9,26E-03
		$\Delta$ %	-18,36	-15,14
	$\mu_h^*$	Valeur	1,41E-02	1,02E-02
		$\Delta$ %	-13,15	-26,95
3D	$\mu^*$	Valeur	1,43E-02	8,73E-03
		$\Delta$ %	-14,58	-8,58
	$\mu_h^*$	Valeur	1,42E-02	1,03E-02
		$\Delta$ %	-13,78	-28,11

Tableau IV.10 : Résistance mutuelle de l'élément électrique 1 avec l'élément 2 en  $\Omega$ .

Pour l'élément R<sub>2</sub>, les différences entre le tenseur de perméabilité 3D et SUMER sont faibles. Cela implique que notre approche équivaut à celle de SUMER dont la qualité des calcul a été validée. Nous remarquons également que lorsque le guipage a une superficie plus petite, les résultats SUMER et 3D se rapprochent du calcul 2D de référence. Lorsque les conducteurs sont non

homogénéisés les résultats sont meilleurs dans le cas 2 contrairement à la configuration où les conducteurs sont homogénéisés ; le cas 1 est le plus proche de la référence (Flux2D).

Par exemple :

➤ Sans homogénéisation à  $f = 100$  kHz :

Avec SUMER nous obtenons une erreur de -18,4% dans le cas 1 et -15,1% dans le cas 2.

Avec Flux3D nous obtenons une erreur de -14,4% dans le cas 1 et -8,6% dans le cas 2.

➤ Avec homogénéisation à  $f = 100$  kHz :

Avec SUMER nous obtenons une erreur de -13,1% dans le cas 1 et -26,9% dans le cas 2.

Avec Flux3D nous obtenons une erreur de -13,8% dans le cas 1 et -28,1% dans le cas 2.

Cas 1		Cas 2		Référence	
Flux3D	SUMER	Flux3D	SUMER	Flux3D	SUMER
-14,4%	-18,4%	-13,8%	-13,1%	-14,4%	-18,4%
-8,6%	-15,1%	-28,1%	-26,9%	-8,6%	-15,1%

ELEMENT  $L_{11}$  :

F1 = 10 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	4,90E-07	6,21E-07
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	4,84E-07	6,08E-07
		$\Delta$ %	1,25	2,10
	$\mu_h^*$	Valeur	4,60E-07	5,48E-07
		$\Delta$ %	6,02	11,62
3D	$\mu^*$	Valeur	4,86E-07	6,10E-07
		$\Delta$ %	0,82	1,68
	$\mu_h^*$	Valeur	4,62E-07	5,50E-07
		$\Delta$ %	5,71	11,36

F2 = 50 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	4,22E-07	5,64E-07
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	4,24E-07	5,60E-07
		$\Delta$ %	-0,58	0,78
	$\mu_h^*$	Valeur	4,03E-07	4,97E-07
		$\Delta$ %	4,45	11,81
3D	$\mu^*$	Valeur	4,28E-07	5,65E-07
		$\Delta$ %	-1,42	-0,18
	$\mu_h^*$	Valeur	4,05E-07	4,99E-07
		$\Delta$ %	4,08	11,52

F3 = 100 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	4,06E-07	5,50E-07
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	4,08E-07	5,47E-07
		$\Delta$ %	-0,43	0,51
	$\mu_h^*$	Valeur	3,88E-07	4,84E-07
		$\Delta$ %	4,54	11,97
3D	$\mu^*$	Valeur	4,12E-07	5,53E-07
		$\Delta$ %	-1,48	-0,55
	$\mu_h^*$	Valeur	3,89E-07	4,86E-07
		$\Delta$ %	4,14	11,67

Tableau IV.11 : Inductance propre de l'élément électrique 1.

L'évaluation des  $L_{11}$  est précise à moins de 5% dans le cas 1 et à moins de 12% dans le cas 2. La précision des calculs avec homogénéisation dépend fortement de l'épaisseur de guipage que nous considérons. En effet, à une fréquence de 100 kHz nous obtenons (Flux3D) 4,13% d'erreur avec un guipage de 1mm d'épaisseur contre 11,8% pour un guipage de 2mm.

ELEMENT  $L_{12}$  :

F1 = 10 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	2,78E-07	3,32E-07
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	2,88E-07	3,36E-07
		$\Delta$ %	-3,74	-1,35
	$\mu_h^*$	Valeur	2,93E-07	3,42E-07
		$\Delta$ %	-5,32	-3,10
3D	$\mu^*$	Valeur	2,91E-07	3,39E-07
		$\Delta$ %	-4,68	-2,14
	$\mu_h^*$	Valeur	2,95E-07	3,45E-07
		$\Delta$ %	-6,01	-3,77

F2 = 50 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	2,41E-07	3,05E-07
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	2,49E-07	3,10E-07
		$\Delta$ %	-3,49	-1,61
	$\mu_h^*$	Valeur	2,54E-07	3,13E-07
		$\Delta$ %	-5,71	-2,66
3D	$\mu^*$	Valeur	2,51E-07	3,14E-07
		$\Delta$ %	-4,28	-2,79
	$\mu_h^*$	Valeur	2,56E-07	3,15E-07
		$\Delta$ %	-6,40	-3,34

F3 = 100 kHz		Epaisseur du guipage	cas1	cas2
Référence		Flux2D axi	2,31E-07	2,99E-07
2D SUMER	$\mu^*$	Valeur	2,38E-07	3,03E-07
		$\Delta$ %	-2,93	-1,26
	$\mu_h^*$	Valeur	2,44E-07	3,05E-07
		$\Delta$ %	-5,47	-2,05
3D	$\mu^*$	Valeur	2,41E-07	3,07E-07
		$\Delta$ %	-4,33	-2,61
	$\mu_h^*$	Valeur	2,45E-07	3,07E-07
		$\Delta$ %	-6,23	-2,71

Tableau IV.12 : inductance mutuelle de l'élément électrique 1 avec l'élément 2.

Au vu des résultats sur  $L_{11}$  et  $L_{12}$ , nous pouvons dire que :

- Le calcul d'inductance est plus précis que celui des résistances,
- Il y a peu de différences entre les résultats SUMER et 3D,

- L'effet de la superficie du guipage apparaît également pour les inductances, plus le rapport surface guipage sur surface de conducteurs est petite plus les résultats avec l'homogénéisation se rapprochent du calcul de référence 2D.

Nous avons également regardé avec quelle précision la résistance de Stoll est calculée par Flux2D, ainsi que l'influence du rayon de courbure sur son calcul par éléments finis. Les résultats de ces deux études sont données dans l'annexe 6.

### III.3. Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons réussi à déterminer les éléments matriciels de (R) et de (L) de manière simple en utilisant le post traitement de Flux3D après avoir imposé dans les conducteurs une perméabilité magnétique complexe  $\mu^*$ . Nous obtenons des résultats équivalents à ceux obtenus par SUMER par l'intermédiaire de Flux2D.

Les effets de proximité deviennent prépondérants à hautes fréquences ; à 50 kHz elles sont 3.5 fois supérieures que celles de Stoll ( $R_{11prox} = 0,0139$  et  $R_{stoll} = 0,0040$ ). C'est pourquoi, notre méthode de calcul des résistances et inductances en utilisant la perméabilité complexe joue un rôle très important dans la future modélisation de transformateurs.

## IV. Présence d'un circuit magnétique

Avant d'appliquer directement tous les nouveaux développements qui vont nous permettre de modéliser des transformateurs de géométrie 3D, nous allons uniquement observer si la propriété anisotropique du tenseur de perméabilité est bien prise en compte. Ayant obtenu de bons résultats avec des dispositifs axisymétriques nous regardons, maintenant, comment évoluent les éléments matriciels de (R) et de (L) lorsque un circuit magnétique est introduit (figure IV.11). Cela a pour conséquence d'introduire des effets tridimensionnels sur le champ magnétique.

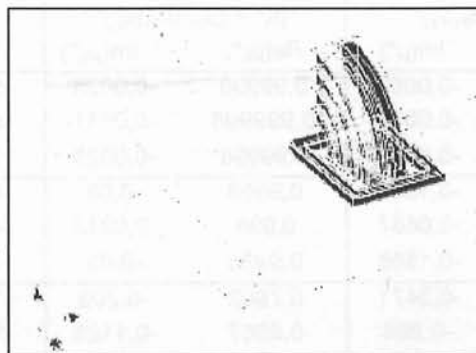


Figure IV.11 : Dispositif composé de 2 galettes à 4 conducteurs en série.

Reprenons le cas du système de deux galettes étudié au paragraphe III et introduisons un circuit magnétique comme il est représenté sur la figure IV.12 suivante :

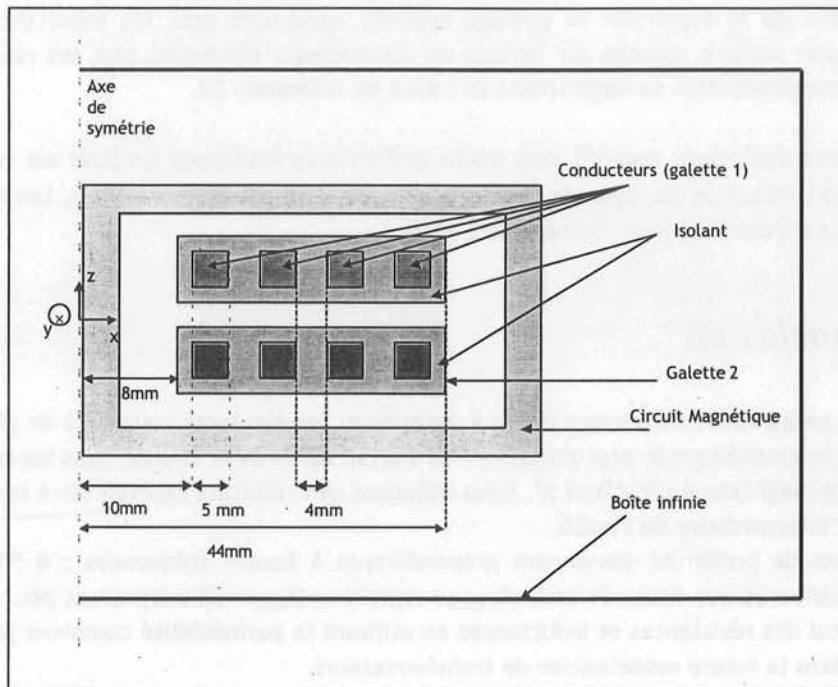


Figure IV.12 : Cas 3D avec circuit magnétique, 2x4 conducteurs.

De la même façon qu'auparavant nous allons donc alimenter la première galette à un ampère et la seconde à zéro pour obtenir les éléments matriciels de (R) et (L). Nous allons comparer des simulations 3D pour lesquelles les conducteurs seront affectés de  $(\mu, \sigma)$  à celles où les conducteurs auront une perméabilité magnétique complexe dont les valeurs sont données dans le tableau IV.1 :

Fréquences	$\mu^*$		$\mu_h^*$		Circuit Magnétique	
	$\mu^* = (\mu_r, \mu_\theta, \mu_z)$		$\mu_h^* = (\mu_{hr}, \mu_{h\theta}, \mu_{hz})$		$\mu_{tote} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$	
	Re( $\mu^*$ )	Im( $\mu^*$ )	Re( $\mu_h^*$ )	Im( $\mu_h^*$ )	Re( $\mu_t^*$ )	Im( $\mu_t^*$ )
50 Hz	0,99991	-0,0082	0,99998	-0,0025	9660	-629
	0,99998	-0,0035	0,999998	-0,0011	9660	-629
	0,99991	-0,0082	0,99998	-0,0025	34,2	0
1 kHz	0,9688	-0,1583	0,9938	-0,05	4054	-3730
	0,9938	-0,0687	0,998	-0,0212	4054	-3730
	0,9688	-0,1586	0,9938	-0,05	34,2	0
10 kHz	0,3471	-0,3471	0,7602	-0,203	1100	-1100
	0,6654	-0,364	0,8967	-0,1123	1100	-1100
	0,3471	-0,3471	0,7602	-0,203	34,2	0

Tableau IV.13 : Perméabilités magnétiques des conducteurs et du circuit magnétique en fonction de la fréquence.

Notons que nous affectons au circuit magnétique une perméabilité magnétique complexe calculée au paragraphe II de ce même chapitre. Les valeurs correspondant aux fréquences d'étude du système sont également données dans le tableau IV.13.

Fréquences	50 Hz	1000 Hz	10000 Hz
Ep. de peau en m	2,25E-02	5,03E-03	1,59E-03
R <sub>stoll</sub> (en Ω)	2,61E-03	2,62E-03	3,20E-03
L <sub>stoll</sub> (en H)	3,42E-08	3,42E-08	3,00E-08

Tableau IV.14 : Epaisseur de peau et constantes de Stoll (R et L).

Le cas test de validation est donc un système de deux galettes avec un circuit magnétique. Cela nous amène à observer quels effets aura le circuit magnétique de perméabilité complexe sur les éléments matriciels des galettes.

Nous allons donc traiter deux cas distincts lors de cette validation 3D :

- Il faut d'abord considérer le problème dans son ensemble : nous affecterons une perméabilité magnétique complexe anisotrope au circuit magnétique. Par ailleurs nous nous servirons du programme de changement de repère lorsque nous utiliserons  $\mu^*$  pour les conducteurs.
- Il faut ensuite affecter une perméabilité réelle anisotrope au circuit magnétique afin de supprimer les effets induits dans les régions conductrices par sa présence.

Nous comparerons le problème  $4 \times (\mu, \sigma)$  avec  $4 \times (\mu^*)$ , ensuite nous ferons la comparaison de  $4 \times (\mu, \sigma)$  avec  $(\mu_h^*)$ . Les résultats sont données par les tableaux IV.15, IV.16, IV.17, IV.18 .



### 1) Cas complet : présence d'un circuit magnétique de perméabilité magnétique complexe (anisotrope).

Le circuit magnétique est de type colonne constitué de 5 gradins.

Fréquences		$(\mu, \sigma)$		$(\mu^*)$	
		Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
F = 50 Hz	U1	0,00661	0,04536	0,002915	0,04517
	U2	0,002923	0,04513	0,002913	0,044982
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,004673	0,002066	4,67E-03	0,002059
	Erreur Rel (%)			-0,50	0,34
	L (en H)	1,021E-04	1,016E-04	1,02E-04	1,012E-04
	Erreur Rel (%)			0,39	0,33
F = 1000 Hz		Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
	U1	0,351128	0,385578	0,345846	0,383761
	U2	0,34705	0,382006	0,345531	0,380346
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,248285	0,245402	0,247	0,244327
	Erreur Rel (%)			0,45	0,44
	L (en H)	4,339E-05	4,299E-05	4,32E-05	4,280E-05
	Erreur Rel (%)			0,39	0,43
F = 10 kHz		Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
	U1	1,03157	1,10155	1,02316	1,09494
	U2	1,02429	1,07093	1,01977	1,06638
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,729431	0,724284	0,727	0,721088
	Erreur Rel (%)			0,377	0,441281
	L (en H)	1,2397E-05	1,205E-05	1,24E-05	1,200E-05
	Erreur Rel (%)			0,36	0,42

Tableau IV.15 : Matrices R et L avec circuit magnétique.

Les valeurs obtenues pour les éléments matriciels (R) et (L) avec la perméabilité magnétique complexe sont très proches de ceux obtenus avec  $(\mu, \sigma)$ . Nous obtenons des erreurs relatives inférieures à 1%, ce qui est satisfaisant. Notons que la présence du circuit amène des réactions d'induit supplémentaires. Les termes matriciels intègrent les contributions propres du conducteur (pour  $(\mu, \sigma)$ ) ; celles induites par le conducteur voisin et celles du circuit magnétique. Regardons, maintenant, les valeurs de ces termes matriciels si nous supprimons les contributions dues au circuit magnétique. Nous imposons pour cela, la partie imaginaire de la perméabilité du circuit magnétique à zéro.

Remarque : U1 est la tension aux bornes du conducteur 1  
U2 est la tension aux bornes du conducteur 2

**2) Cas avec  $Re(\mu_{CM}^*)$  : seule la partie réelle de  $\mu^*$  du circuit magnétique est prise en compte.**

En ne prenant en compte que la partie réelle de la perméabilité complexe du circuit magnétique nous nous affranchissons des effets induits sur les galettes par le circuit magnétique.

Fréquences		$(\mu, \sigma)$		$(\mu^*)$	
		Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
F = 50 Hz	U1	0,003682	0,045357	2,55E-07	0,04517
	U2	2,88E-07	0,04513	2,99E-07	0,044982
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,002604	2,04E-07	2,61E-03	2,11E-08
	Erreur rel (%)			-0,344	89,2
	L (en H)	1,021E-04	1,016E-04	1,02E-04	1,017E-04
	Erreur rel (%)			0,38	-0,09
F = 1000 Hz	U1	0,003746	0,385567	9,98E-05	0,38375
	U2	1,19E-05	0,381998	1,19E-05	0,380337
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,002648	8,419E-06	2,69E-03	8,41E-06
	Erreur rel (%)			-1,61	0,06
	L (en H)	4,339E-05	4,299E-05	4,32E-05	4,281E-05
	Erreur rel			0,39	0,44
F = 10 kHz	U1	0,00674	1,101145	3,15E-03	1,09454
	U2	5,43E-04	1,070574	4,98E-04	1,06603
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,004765	3,842E-04	5,43E-03	3,52E-04
	Erreur rel (%)			-13,90	8,35
	L (en H)	1,239E-05	1,205E-05	1,23E-05	1,1997E-05
	Erreur rel (%)			0,36	0,42

**Tableau IV.16 :** Matrices R et L avec circuit magnétique ayant une perméabilité strictement réelle.

Nous remarquons que les résultats obtenus sont très satisfaisants et que les effets de proximité à une fréquence de 10 kHz sont déjà prépondérants. A 10 kHz, l'erreur sur  $R_{11}$  représente 13% ce qui peut paraître important. Cela est dû principalement à la particularité du problème traité. En effet, nous nous trouvons dans un cas fortement désavantageux.

**NB :** L'erreur importante à 50 Hz pour  $R_{12}$  (89,2%) est due à la manipulation de valeur proche de zéro (division par zéro).

### 3) Cas complet avec un conducteur homogénéisé

Le tableau IV.17 nous montre les paramètres circuit obtenus après avoir utilisé une perméabilité magnétique complexe homogénéisée. Le guipage a une épaisseur de 2 mm et la profondeur (ou longueur équivalente) de l'unique spire est égale à la somme des longueurs des conducteurs constituant la galette.

Fréquences		$(\mu, \sigma)$		$(\mu_h^*)$	
F = 50 Hz	U1	Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
		U2	0,00661	0,04536	0,002914
F = 50 Hz		0,002923	0,04513	0,002913	0,044973
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,004673	0,002066	4,67E-03	0,002059
	Erreur Rel (%)			0,01	0,34
	L (en H)	1,021E-04	1,016E-04	1,02E-04	1,012E-04
	Erreur Rel (%)			0,49	0,35
F = 1000 Hz		Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
	U1	0,351128	0,385578	0,345701	0,382989
	U2	0,34705	0,382006	0,345454	0,380277
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,248285	0,245402	0,247	0,244273
	Erreur Rel (%)			0,49	0,46
	L (en H)	4,339E-05	4,299E-05	4,31E-05	4,27962E-05
	Erreur Rel			0,59	0,45
F = 10 kHz		Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
	U1	1,03157	1,10155	1,02296	1,08892
	U2	1,02429	1,07093	1,01951	1,0664
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,729431	0,724284	0,727	0,720904
	Erreur Rel (%)			0,40	0,47
	L (en H)	1,2397E-05	1,205E-05	1,23E-05	1,200E-05
	Erreur Rel (%)			0,91	0,42

Tableau IV.17 : Matrices R et L avec un circuit magnétique de perméabilité complexe et avec homogénéisation des galettes HT et BT.

La méthode de substitution fonctionne très bien : nous avons obtenu des erreurs relatives inférieures à 1%. Cela nous laisse envisager que l'homogénéisation des galettes devra être systématique dans le but de réduire les coûts du calcul numérique. En effet, nous maillerons en rapport avec la taille de la galette et non plus avec celle du conducteur.

#### 4) Cas avec $Re(\mu_{CM}^*)$ et homogénéisation des galettes

Dans le cas présent, nous ne prenons en compte les pertes par effet de peau et celles par effet de proximité du conducteur (galette) voisin. Les pertes par effet de proximité induites par la présence du circuit ne seront donc pas considérées dans la détermination des éléments de (R).

Fréquences		$(\mu, \sigma)$		$(\mu_h^*)$	
F = 50 Hz	U1	Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
		U2	0,003682	0,045357	1,89E-07
		2,88E-07	0,04513	2,25E-07	0,044973
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,002604	2,04E-07	2,61E-03	1,59E-08
	Erreur rel (%)			-0,34	92,2
	L (en H)	1,021E-04	1,016E-04	1,02E-04	1,0156E-04
	Erreur rel (%)			0,49	0,02
F = 1000 Hz	U1	Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
		0,003746	0,385567	7,57E-05	0,382978
	U2	1,19E-05	0,381998	9,91E-06	0,380268
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,002648	8,419E-06	2,67E-03	7,01E-06
	Erreur rel (%)			-0,97	16,80
	L (en H)	4,339E-05	4,299E-05	4,31E-05	4,2795E-05
	Erreur rel (%)			0,59	0,45
F = 10 kHz	U1	Partie Réelle	Partie Imag	Partie Réelle	Partie Imag
		0,00674	1,101145	3,32E-03	1,08852
	U2	5,43E-04	1,070574	5,19E-04	1,06604
		X11	X12	X11	X12
	R (en $\Omega$ )	0,004765	3,842E-04	5,55E-03	3,67E-04
	Erreur rel (%)			-16,40	4,48
	L (en H)	1,239E-05	1,205E-05	1,23E-05	1,1997E-05
	Erreur rel (%)			0,91	0,42

Tableau IV.18 : Matrices R et L avec un circuit magnétique dont la perméabilité magnétique est strictement réelle et avec homogénéisation des galettes HT et BT.

Les résultats obtenus avec une galette homogénéisée sont très proches de ceux obtenus lorsque nous affectons une perméabilité magnétique complexe à chacun des conducteurs. A 10 kHz, les erreurs sur le terme propre de la matrice résistance est importante (environ 16%). Cela est dû principalement à la non uniformité du champ magnétique aux bords des galettes. c'est d'autant plus prépondérant du fait de considérer des régions conductrices ayant des dimensions importantes.

NB : L'erreur importante à 50 Hz pour  $R_2$  (92,2%) est due à la manipulation de valeur proche de zéro (division par zéro).

## Temps de calcul :

Nous avons relevé les temps de calcul dans chacun des cas à 10 kHz :

1. cas  $(\mu, \sigma)$  : 5H15 min (18900 secondes) (système Windows, Pentium4, 1,7 GHz, RAM de 512 Mo et 1 Go de swap)
2. cas  $4 \times (\mu^*)$  : 15 min et 30 secondes (930 secondes) (système Linux, Pentium3, 900 MHz, RAM de 512 Mo et 512 Mo de swap)
3. cas  $(\mu_h^*)$  : 4 min et 15 secondes (39 secondes)

Nous remarquons que le gain en temps de calcul est considérable. Nous le divisons par 484 grâce à la perméabilité complexe homogénéisée. Cela est dû, d'une part à la diminution du nombre de variables par nœud dans les conducteurs (nous passons de 4 inconnues au nœud à 1) et d'autre part à la réduction du nombre de  $T_0$  calculés. En effet, lors du calcul avec  $\mu_h^*$  pour chaque galette il est calculé un seul  $T_0$  contrairement au cas où il y avait 4 conducteurs dans chaque galette (4 calculs de  $T_0$  pour chacune des galettes). Notons qu'en passant d'une modélisation à quatre conducteurs ( $\mu^*$ ) à celle utilisant ( $\mu_h^*$ ) nous divisons les temps de calcul par 23.

La diminution du nombre d'inconnues aux nœuds vient s'ajouter au fait que pour utiliser la méthode de substitution par une perméabilité magnétique complexe il n'est plus nécessaire d'avoir deux éléments finis dans l'épaisseur de peau. Cela a directement une répercussion sur les temps de calculs 3D.

### Remarque :

Nous avons choisis pour référence des calculs le calcul Flux3D en affectant au conducteur le couple  $(\mu, \sigma)$ . Le faible nombre de fréquences est dû à la capacité mémoire restreinte de la machine utilisée.

## V. CONCLUSION

Ce chapitre avait un rôle de transition entre une validation 2D-3D théorique (cf. chapitre 3) satisfaisante et l'application des concepts aux transformateurs industriels. Il nous a permis de décrire proprement ces concepts de perméabilité magnétique complexe dans les régions supposées conductrices et celles supposées ferromagnétiques.

Nous avons mis en évidence l'importance de notre méthode de substitution par la perméabilité complexe pour déterminer les matrices (R) et (L) du fait de la prépondérance des effets de proximité à hautes fréquences. En effet, à 50 kHz ils sont 3,5 fois plus importants que les effets de peau (cf. paragraphe III).

La détermination de (R) et (L) par notre méthode de substitution est équivalente à celle de SUMER (axisymétrie). De plus, quand le guipage (surface d'isolant) est de petite dimension nous obtenons de bons résultats en comparaison avec notre référence Flux2D (cf. paragraphe III).

En présence d'un circuit magnétique, notre méthode donne des résultats très satisfaisants puisque nous n'obtenons pas d'erreurs supérieures à 1% (cf. paragraphe IV). Cela est d'autant plus

appréciable que le gain sur le temps de calcul est considérable : environ 400 fois plus rapide qu'une simulation  $(\mu, \sigma)$  habituelle.

Par conséquent, il est maintenant possible d'envisager l'étude d'un transformateur de puissance.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or title.

Second line of faint, illegible text.

## **Chapitre 5 :**

# **Transformateur Cas-Test**



Chapitre 5 :

Transformateur Cas-Test

## Introduction

La modélisation d'un cas test, certes, de petite taille tant au niveau de sa géométrie qu'au niveau du nombre d'éléments électriques; mérite réflexion. Dans l'optique de la modélisation d'appareils électriques volumineux et complexes, le coût de la description géométrique, de la mise en place de la physique du problème et de la construction du maillage est important. Nous avons, par l'utilisation du tenseur de perméabilité complexe associé à la formulation  $T_0-\Phi$  avec couplage circuit, réduit considérablement les temps de calcul : de 5 heures à 15 minutes pour une galette à une fréquence donnée (temps de calcul donnés au chapitre 4). Il devient alors indispensable d'automatiser, dans un premier temps, la description géométrique et physique des appareils ainsi que la série de simulations nécessaire à l'obtention des éléments matriciels (R) et (L). Le maillage sera introduit après dans cette automatisation. Il est plus aisé de concevoir ce type d'outil à partir de cas simples, du fait d'un nombre moins important de paramètres à gérer et de pouvoir contrôler directement le résultat obtenu.

Dans le premier paragraphe nous poserons la problématique de la modélisation d'un transformateur. Cela nous permettra de définir de manière rigoureuse notre cas test ainsi que la méthode employée pour déterminer les matrices (R) et (L) du transformateur. Le second paragraphe sera consacré à la présentation du pré-processeur élaboré pour l'automatisation de la procédure d'étude. Enfin, le dernier paragraphe traitera de la simulation du cas test et discutera des résultats obtenus.

## I. Présentation de la problématique

### I.1. Les transformateurs

Il existe deux grandes familles de transformateurs de puissance monophasés et triphasés : les transformateurs cuirassés et les transformateurs colonnes. D'une manière très générale, un transformateur est constitué d'un circuit magnétique feuilleté et d'un ensemble de bobines séparées par des écrans électrostatiques qui entourent des noyaux magnétiques. Chaque bobine est organisée en « paquets » de spires et chaque spire est constituée de brins élémentaires. Les spires (précisément les brins) forment le milieu conducteur. Les différents types de transformateurs se distinguent suivant la disposition géométriques de leurs constituants et de la forme de leur circuit magnétique.

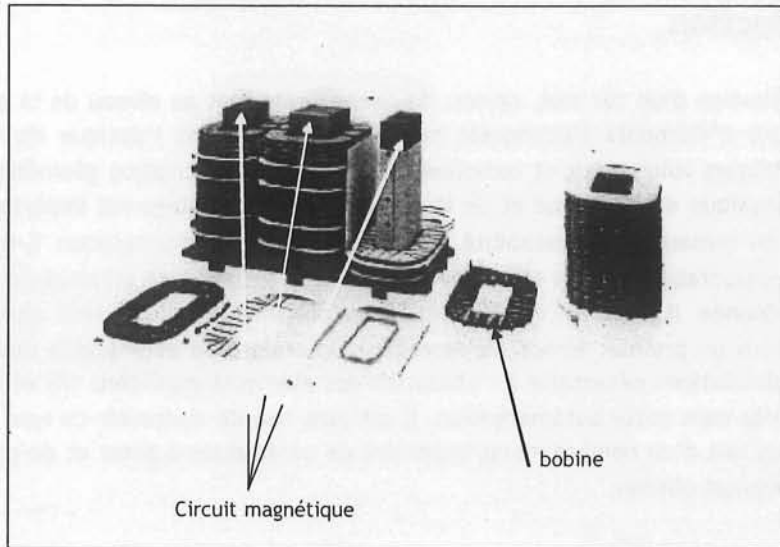


Figure V.1 : Représentation d'un transformateur avec ses constituants.

Nous nous intéressons plus spécialement aux parties conductrices du transformateur (figure V.1) qui sont à l'origine des difficultés de modélisation numérique de ce type d'appareil industriel, c'est-à-dire aux bobines que nous détaillons dans la figure V.2.

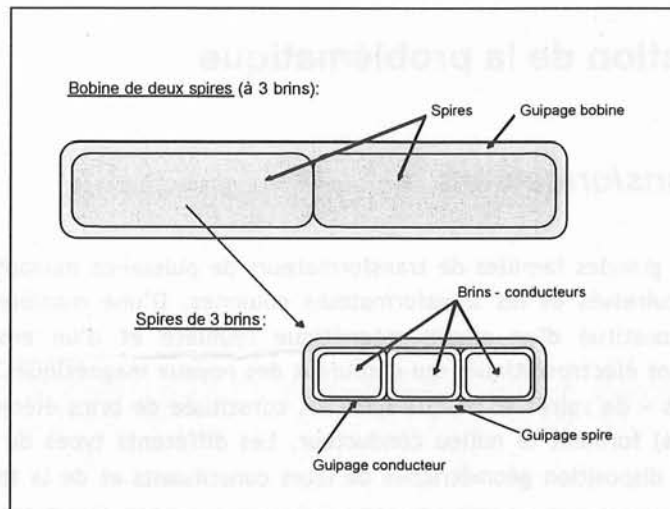


Figure V.2 : Représentation d'une bobine de 2 spires à 3 brins.

Les premières simulations réalisées sur un transformateur industriel [Guillot et al., 1995] ont mis en évidence une mauvaise représentation des pertes électromagnétiques. Ceci conduit à envisager la prise en compte des pertes dites de proximité, dues aux courants de Foucault dans les conducteurs massifs, négligées auparavant. Cette étude consiste à chercher une méthode de calcul de ces pertes qui soit compatible avec le choix de détermination des paramètres électromagnétiques R et L par calcul de champ 3D.

Le calcul par éléments finis des courants de Foucault se développant dans l'épaisseur de peau des conducteurs n'est pas possible pour un transformateur industriel. En effet, un modèle de simulation d'un transformateur doit être valide jusqu'à plusieurs mégahertz, or l'épaisseur de peau

devient, très vite, trop petite (nous avons  $\delta = 0.1 \text{ mm}$  à  $500 \text{ kHz}$ ) en regard des autres dimensions de l'appareil électrique pour que le phénomène puissent être traité par la méthode des éléments finis. Celle-ci demandant à minima deux éléments finis dans l'épaisseur de peau, la limite en capacité mémoire est rapidement atteinte et les temps de calcul depuis longtemps irréalistes. Nous allons alors appliquer la méthode utilisant une perméabilité magnétique homogénéisée pour s'affranchir de cette difficulté. Cette thèse a traité la validation de la méthode sur un cas test bien particulier décrit ci-après.

## 1.2. Notre cas test

Le cas test choisi consiste en un transformateur colonne monophasé fictif de petites dimensions afin de permettre le maillage éléments finis des conducteurs sur la plage de fréquences considérée (de  $50 \text{ Hz}$  à  $500 \text{ kHz}$ ) sans générer un maillage trop important de l'ensemble du transformateur (représenté en coupe 2D dans la figure V. 3). Le schéma électrique comprend un groupe Haute Tension composé de 10 galettes en série et un groupe Basse Tension composé de 4 galettes également en série. Chaque galette est constituée de conducteurs guipés en série : 5 pour la HT et 2 pour la BT (figure V. 4). Tout d'abord, SUMER ne pouvant pas prendre en compte les pertes dans le circuit magnétique, celui-ci sera considéré comme non conducteur et de perméabilité  $\mu_0$  pour pouvoir comparer nos résultats 3D. Ensuite, nous lui affecterons une perméabilité magnétique complexe afin de prendre en compte ses pertes.

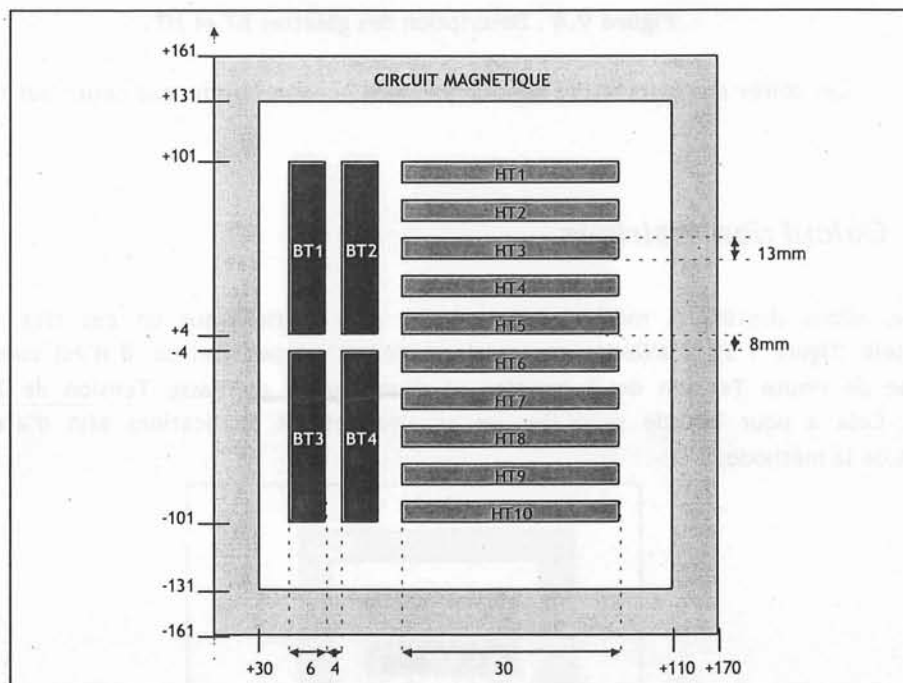


Figure V.3 : Coupe 2D du transformateur test (l'unité est le millimètre).

Chaque galette BT a 2 tours avec 2 brins par spire et 5 couches par spire. Nous pouvons procéder à une homogénéisation pour chaque spire de BT. Par contre, chaque galette HT a 5 tours mais un seul brin et une seule couche par spire. L'homogénéisation de la galette HT n'est pas possible puisque les galettes HT sont connectés en interstice. La figure V.4 schématise les galettes BT et HT.

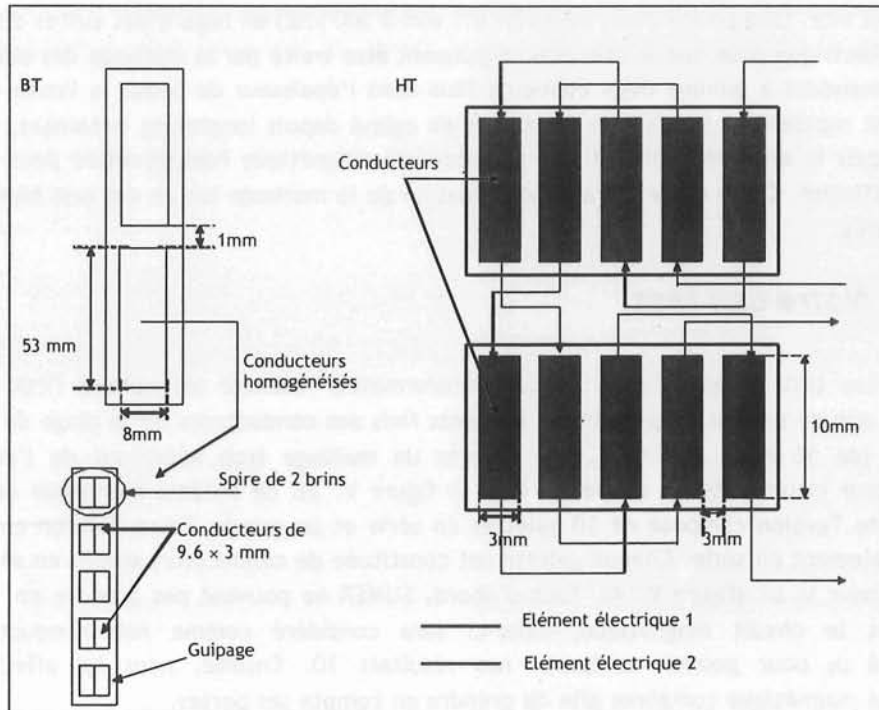


Figure V.4 : Description des galettes BT et HT.

Les spires des galettes BT sont connectées en série tandis que celles des HT sont en interstice.

### 1.3. Calcul des matrices

Nous allons décrire la méthode d'obtention des matrices sur un cas très simple de transformateur (figure V.5). D'ailleurs, ce transformateur n'est pas réel car il n'est constitué que d'un groupe de Haute Tension de 2 galettes et d'un groupe de Basse Tension de 2 galettes également. Cela a pour but de simplifier les schémas et les explications afin d'acquérir les fondements de la méthode.

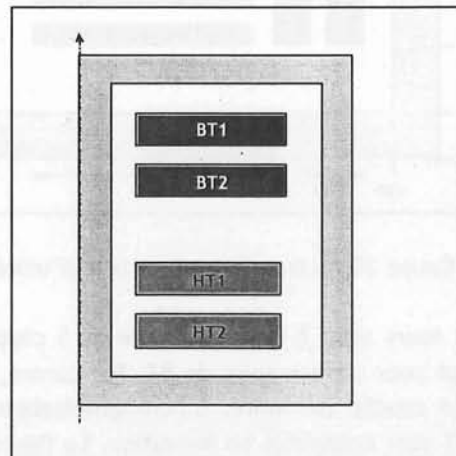


Figure V.5 : Transformateur fictif.

L'objectif consiste à calculer les matrices  $R(\omega)$  et  $L(\omega)$  du circuit équivalent à éléments localisés (modèle réseau) modélisant le transformateur fictif, discrétisé électriquement à la galette [Moreau et al., 1996] (figure V. 5). Ces matrices caractérisent le comportement magnétique du transformateur et dépendent donc de la fréquence. Elles sont dans notre cas d'ordre 4, le maillage électrique comportant 4 éléments électriques (les galettes). Ainsi la matrice  $L$  représente les inductances propres et mutuelles du modèle réseau tandis que la matrice résistance  $R$  décrit l'effet des pertes d'origines électromagnétiques ; représentées dans le cas général par les pertes fer (Foucault et hystérétiques) et les pertes cuivre (effet de peau et de proximité) qui font l'objet de cette étude.

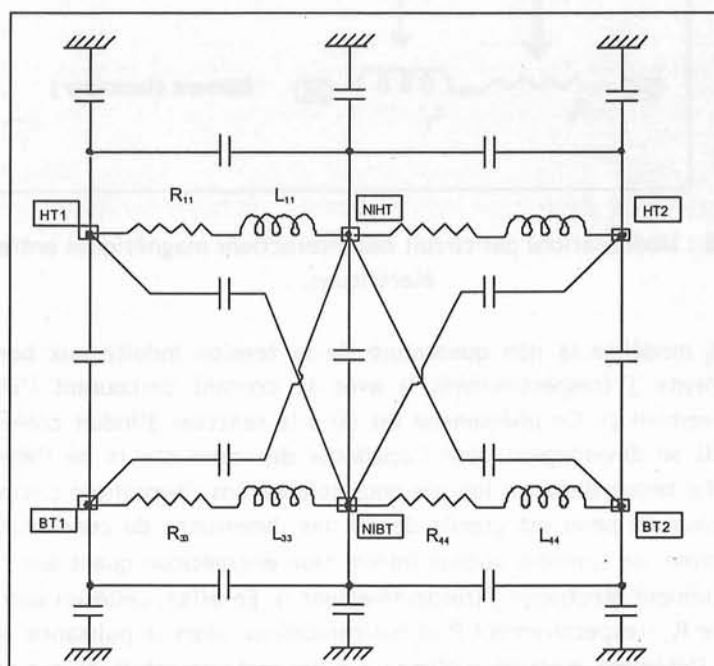


Figure V.6 : Modèle réseau.

Le modèle réseau de la figure V.6 résulte de l'assemblage des éléments électriques (portion de bobinage qui sont dans notre cas des galettes) modélisés par des cellules en  $\Pi$ , conformément au schéma électrique ou connectique du transformateur (figure V.7). Les bornes du transformateur HT1, HT2, BT1, BT2 sont appelés les nœuds de liaison du maillage électrique du réseau tandis que les nœuds NIBT et NIHT constituent les nœuds électriques internes.

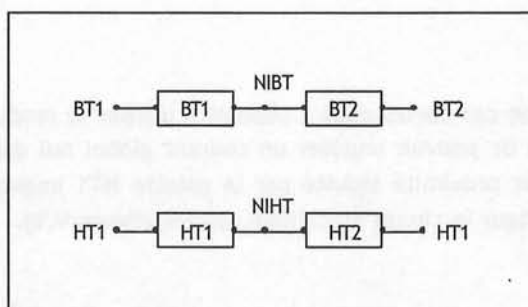


Figure V.7 : Connectique du transformateur test.

Cette modélisation implique des interactions magnétiques entre les éléments électriques  $i$  et  $j$ , celles-ci sont représentées par les deux circuits suivants (figure V.8) :

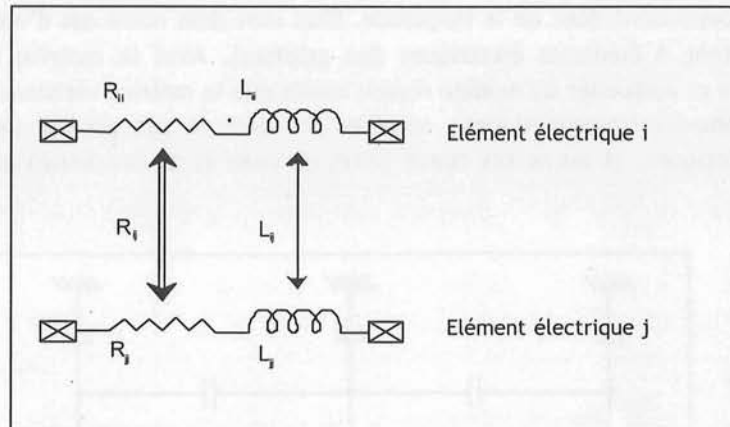


Figure V.8 : Modélisations par circuit des interactions magnétiques entre deux éléments électriques.

Le terme  $R_j$  modélise la non quadrature de la tension induite aux bornes de l'élément électrique non alimenté  $j$  (respectivement  $i$ ) avec le courant parcourant l'élément électrique alimenté  $i$  (respectivement  $j$ ). Ce phénomène est dû à la réaction d'induit créée par la boucle de courants de Foucault se développant dans l'épaisseur des conducteurs de l'élément électrique  $j$  (respectivement  $i$ ). Ce terme disparaît lorsque nous considérons l'hypothèse circuit filaire ; c'est-à-dire lorsque l'épaisseur de peau est grande devant les dimensions du conducteur. Par ailleurs, il faut noter que ce terme ne contient aucune information énergétique quant aux pertes par courant de Foucault dans l'élément électrique  $j$  (respectivement  $i$ ). En effet, celles-ci sont prises en compte dans le terme propre  $R_{ii}$  (respectivement  $R_{jj}$ ) qui caractérise alors la puissance active dissipée par effet de peau dans l'élément électrique alimenté  $i$  (respectivement  $j$ ) et par effet de proximité dans tous les éléments électriques  $j$  (respectivement  $i$ ) avec  $j \neq i$  du système.

Ainsi la détermination des éléments propre et mutuelle de la matrice impédance magnétique s'obtient en imposant :

- $I_j = 0A$
- $I_i = 1A$

Ce qui donne les équations de tensions suivantes:

- $U_i = (R_{ii} + j\omega L_{ii})I_i$
- $U_j = (R_{ij} + j\omega L_{ij})I_j$

La prise en compte de ces pertes nous a conduit à utiliser le module de couplage circuit du logiciel Flux3D [Flux3D] afin de pouvoir imposer un courant global nul dans une région volumique. Ainsi le calcul des pertes par proximité induite par la galette HT1 implique d'associer au modèle éléments finis du transformateur le circuit électrique suivant (figure V.9).

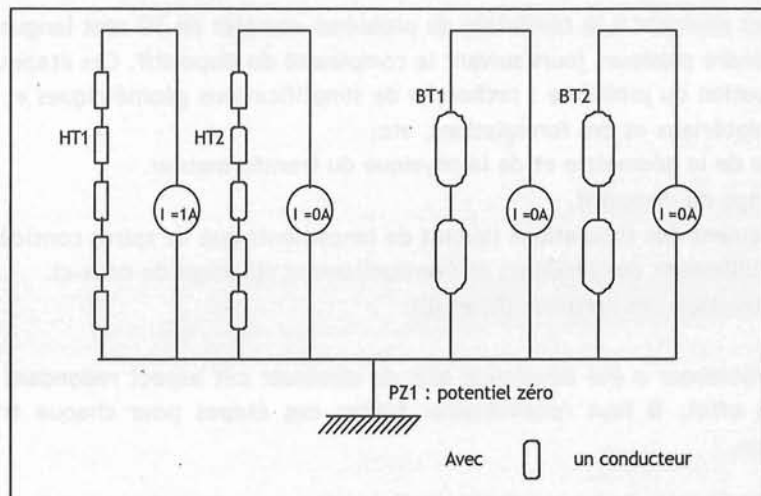


Figure V.9 : Circuit associé à la galette HT1 alimentée.

Nous appliquons successivement un courant global de  $1A_{eff}$  aux bornes d'une galette (HT1 ci-dessus) et nous imposons  $I_{total} = 0$  dans les autres galettes afin de calculer l'impédance propre de cette galette et ses mutuelles impédances avec les autres galettes.

L'équation de Maxwell - Ampère (équation II.3) est résolue en potentiel scalaire réduit par la méthode des éléments finis en magnéto-harmonique pour les 4 circuits correspondant à l'alimentation successive des 4 galettes.

Les éléments matriciels de (R) et de (L) sont obtenus en utilisant le module « exploitation » (des résultats) de Flux3D dans la partie « paramètres circuit ». Nous récupérons alors les tensions et courants aux bornes des éléments électriques (galettes) et ensuite nous avons donc directement :

$$R_{ij} = \frac{\text{Re}(U_j)}{I_i} \quad \text{et} \quad L_{ij} = \frac{\text{Im}(U_j)}{\omega I_i}$$

Cette méthode est totalement transposable à notre transformateur monophasé, ce que nous verrons au paragraphe III.

## II. Le pré-processeur

Jusqu'à présent, l'ensemble des modélisations était réalisé en deux dimensions. Cette thèse a pour but de prendre en compte des géométries tridimensionnelles de transformateurs afin de rendre compte au mieux de l'ensemble des phénomènes présents. Il s'agit de réaliser un pré-processeur qui soit adapté à la description des dispositifs volumineux et complexes, qui soit également possible d'interfacer avec Flux3D.

L'application obtenue doit s'appliquer à l'ensemble des transformateurs de puissance (pour débiter). Les descriptions des dispositifs et hypothèses de modélisation pouvant être modifiées il faut que l'application puisse évoluer et être modifiée à moindre coût. Elle doit être robuste et la plus stable possible vis-à-vis de l'outil de simulation.



Les étapes amenant à la résolution du problème complet en 3D sont longues et fastidieuses. Elles peuvent prendre plusieurs jours suivant la complexité du dispositif. Ces étapes sont :

- Evaluation du problème : recherche de simplifications géométriques et physiques, choix des matériaux et des formulations, etc.
- Saisie de la géométrie et de la physique du transformateur.
- Maillage du dispositif.
- Lancement des simulations (autant de lancements que de spires considérées).
- Dépouillement des résultats et éventuellement stockage de ceux-ci.
- Construction des matrices (R) et (L).

Le pré-processeur a été développé afin de diminuer cet aspect redondant du processus de modélisation. En effet, il faut recommencer toutes ces étapes pour chaque transformateur ou appareil électrique.

Cet outil a été conçu pour répondre à plusieurs besoins :

- Factorisation des travaux
- Gain de temps
- Réduction des erreurs humaines dues à la longueur et au caractère répétitif du protocole
- Automatisation
- Facilité la modification et/ou l'évolution du protocole

Cette application a été développée au sein du Laboratoire d'électrotechnique de Grenoble par Luc Jeanniard au cours de son stage de DEA [Jeanniard, 2003]. Nous présentons succinctement ce pré-processeur.

Ce pré-processeur doit alors permettre de définir l'ensemble des paramètres géométriques et des informations sur la physique (matériaux, conditions aux limites, type de transformateur étudié, etc.). Il doit être la liaison entre une banque de données constructeur et l'utilisateur comme illustrée sur la figure V.10 :

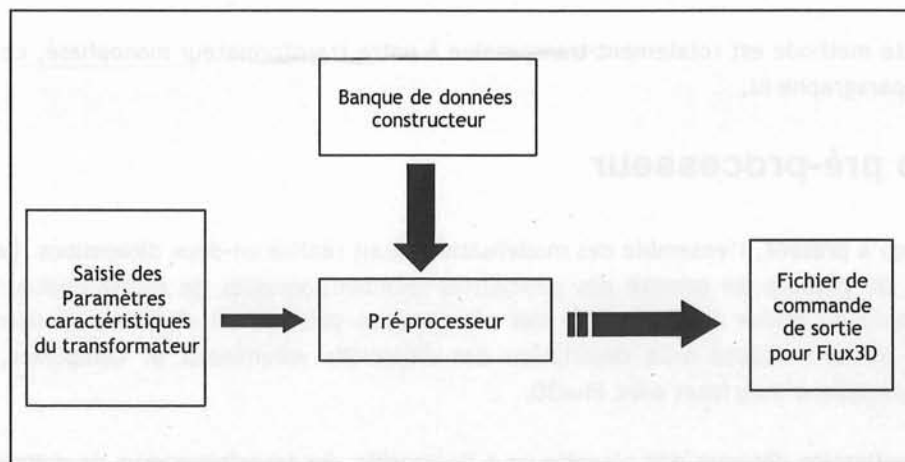


Figure V.10 : Entrées - sortie du pré-processeur.

Le pré-processeur guide l'utilisateur pour la création de son transformateur sous Flux3D :

1. Type de transformateur : monophasé ou triphasé, cuirassé ou colonne.
2. Définition de sa géométrie avec :
  - i. la saisie des matériaux si non présents dans la base de données
  - ii. le circuit magnétique
  - iii. bobinage du groupe primaire
  - iv. bobinage du groupe secondaire
3. Créations des régions volumiques et affectation de leurs propriétés physiques.

Suite à cela nous obtenons un fichier résultat directement utilisable par Flux3D. Nous avons alors un fichier de commande Flux3D permettant la création de notre transformateur. Le langage de commande est un langage interprété spécifique à Flux3D. Il permet l'automatisation de Flux3D grâce aux fichiers de commandes .SPI, couramment appelés « fichiers espions ». La construction de fichiers espions est réalisée en utilisant la syntaxe de commande de Flux3D [Flux3D].

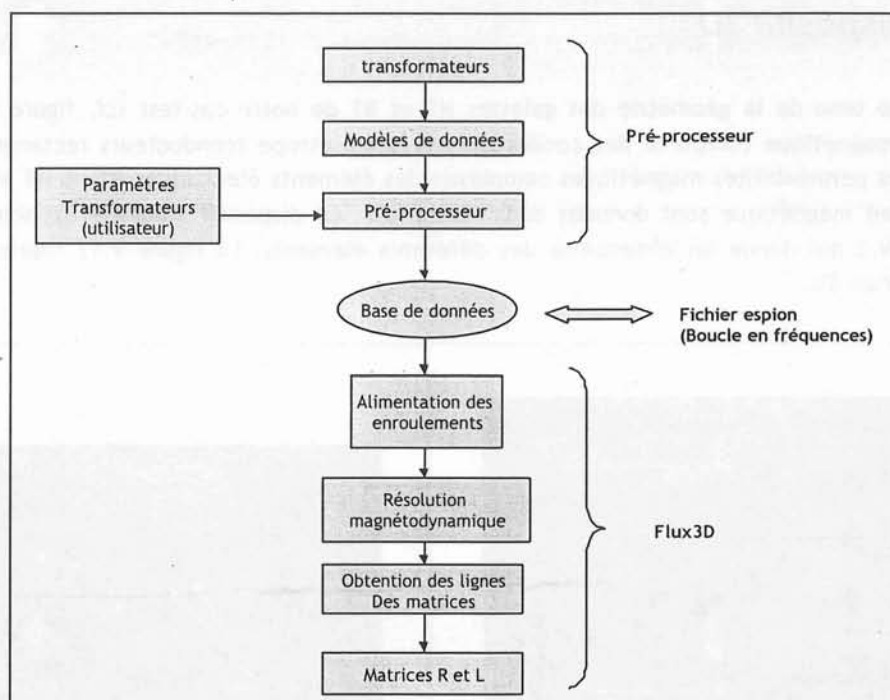


Figure V.11 : Etapes pour la détermination des matrices R et L.

La figure V.11 nous illustre le déroulement de la modélisation d'un transformateur avec l'utilisation du pré-processeur. Le pré-processeur construit alors le fichier espion qui pilotera ensuite l'ensemble des résolutions sous Flux3D jusqu'à l'obtention des matrices R et L.

### III. Résultats des simulations 2D – 3D avec $\mu^*$

Nous avons maintenant tous les éléments pour faire l'étude de notre transformateur cas-test. Dans le but de valider notre méthode 3D de détermination des éléments matriciels R et L nous allons comparer nos résultats à une étude faite par SUMER (logiciel interne EDF développé à la R&D de Clamart). Ce logiciel est considéré comme sûr puisqu'il a été validé par des résultats expérimentaux sur du matériel industriel utilisé par EDF. Tout d'abord, SUMER ne permettant pas de réaliser une étude de transformateur avec circuit magnétique nous établirons les matrices (R) et (L) sans circuit magnétique. Le problème modélisé sera alors bidimensionnel axisymétrique. Ensuite, nous pourrons utiliser notre méthode 3D pour caractériser ce transformateur test.

Pour des raisons de temps, nous présentons uniquement les résultats obtenus par SUMER puisque l'étude avec Flux3D est en cours.

#### III.1. Dispositif 3D

Compte tenu de la géométrie des galettes HT et BT de notre cas-test (cf. figure V.4), la perméabilité magnétique complexe des conducteurs sera anisotrope (conducteurs rectangulaires). Les valeurs des perméabilités magnétiques complexes des éléments électriques BT et HT ainsi que celles du circuit magnétique sont données dans l'annexe 7. Le dispositif modélisé est schématisé par la figure V.3 qui donne les dimensions des différents éléments. La figure V.12 représente le transformateur en 3D.

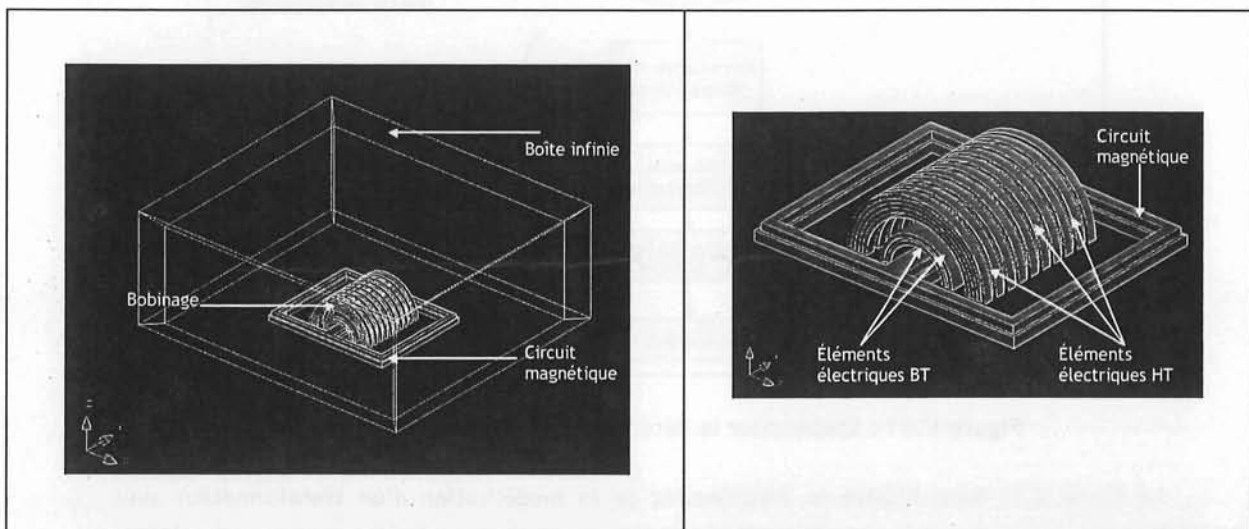


Figure V.12 : Dispositif 3D.

**NB :** Ce dispositif 3D (figure V.12) a été obtenu avec le pré-processeur en moins de 2h.

Nous avons choisi arbitraire un numéro pour chaque élément électrique, ces indices sont énumérés dans le tableau V.1. Cela va nous permettre d'identifier plus facilement les éléments matriciels.

Élément électrique		Numéro	Élément électrique		Numéro	Élément électrique		Numéro
EE10	↔	1	EE5	↔	6	BT1	↔	11
EE9	↔	2	EE4	↔	7	BT2	↔	12
EE8	↔	3	EE3	↔	8	BT3	↔	13
EE7	↔	4	EE2	↔	9	BT4	↔	14
EE6	↔	5	EE1	↔	10			

Tableau V.1 : Indices des éléments électriques.

### III.2. Etude avec circuit magnétique ( $\mu_0, \sigma = 0$ )

Nous présentons dans ce paragraphe une étude de transformateur avec un circuit magnétique non conducteur et de perméabilité magnétique  $\mu_0$  dans le but de comparer notre méthode 3D à SUMER. A basses fréquences, le circuit magnétique peut être pris en compte avec SUMER par une étude 2D plan en prenant comme épaisseur la hauteur de la colonne du circuit magnétique.

La figure V.13 explique la manière dont est organisée une simulation SUMER, l'organigramme ci-dessous ressemble fortement à celui du pré-processeur (cf. figure V.11). L'analogie entre notre méthode 3D et SUMER est donc naturelle.

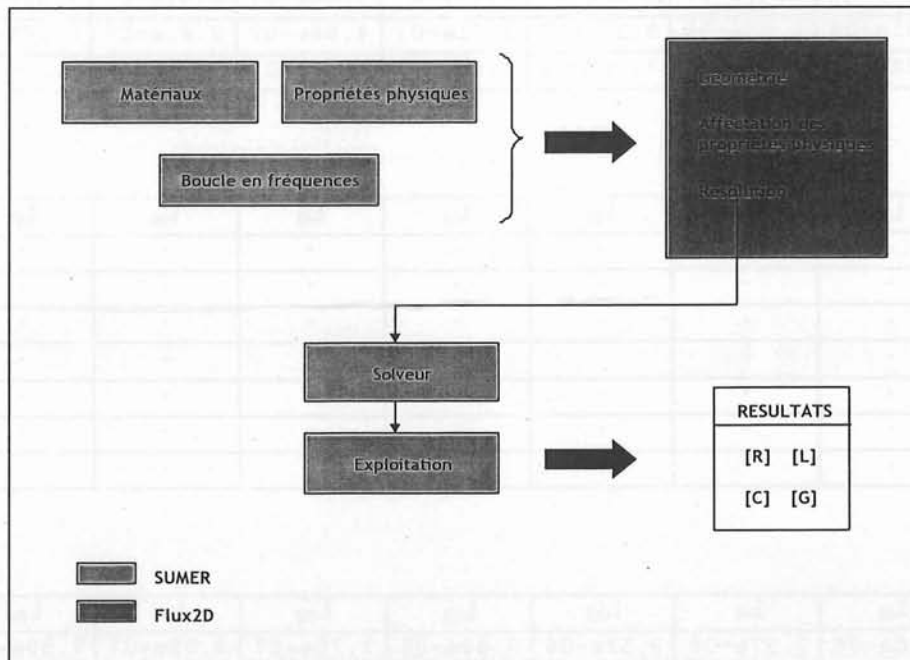


Figure V.13 : Détermination des matrices R et L avec SUMER.

Nous présentons maintenant les éléments matriciels pour des fréquences de 50 Hz et de 10 kHz.

### III.2.1. Fréquence de 50 Hz :

Matrice Inductance SUMER :

i	L <sub>i1</sub>	L <sub>i2</sub>	L <sub>i3</sub>	L <sub>i4</sub>	L <sub>i5</sub>	L <sub>i6</sub>	L <sub>i7</sub>
1	8.99e-06	8.61e-06	3.52e-06	3.16e-06	9.30e-07	8.35e-07	2.59e-07
2	-	9.14e-06	3.97e-06	3.56e-06	1.05e-06	9.41e-07	2.92e-07
3	-	-	9.70e-06	9.24e-06	3.71e-06	3.34e-06	9.81e-07
4	-	-	-	9.71e-06	4.14e-06	3.71e-06	1.09e-06
5	-	-	-	-	9.75e-06	9.28e-06	3.71e-06
6	-	-	-	-	-	9.74e-06	4.14e-06
7	-	-	-	-	-	-	9.70e-06

i	L <sub>i8</sub>	L <sub>i9</sub>	L <sub>i10</sub>	L <sub>i11</sub>	L <sub>i12</sub>	L <sub>i13</sub>	L <sub>i14</sub>
1	2.32e-07	6.98e-08	6.19e-08	3.17e-07	5.84e-07	2.85e-08	4.82e-08
2	2.62e-07	7.86e-08	6.98e-08	3.37e-07	6.21e-07	3.21e-08	5.42e-08
3	8.80e-07	2.62e-07	2.32e-07	4.13e-07	7.59e-07	9.88e-08	1.70e-07
4	9.81e-07	2.92e-07	2.59e-07	4.09e-07	7.51e-07	1.09e-07	1.88e-07
5	3.34e-06	9.41e-07	8.35e-07	2.81e-07	5.06e-07	2.61e-07	4.68e-07
6	3.71e-06	1.05e-06	9.30e-07	2.61e-07	4.68e-07	2.81e-07	5.06e-07
7	9.24e-06	3.56e-06	3.16e-06	1.09e-07	1.88e-07	4.09e-07	7.51e-07

i	L <sub>i1</sub>	L <sub>i2</sub>	L <sub>i3</sub>	L <sub>i4</sub>	L <sub>i5</sub>	L <sub>i6</sub>	L <sub>i7</sub>
8	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-

i	L <sub>i8</sub>	L <sub>i9</sub>	L <sub>i10</sub>	L <sub>i11</sub>	L <sub>i12</sub>	L <sub>i13</sub>	L <sub>i14</sub>
8	9.70e-06	3.97e-06	3.52e-06	9.88e-08	1.70e-07	4.13e-07	7.59e-07
9	-	9.13e-06	8.60e-06	3.21e-08	5.42e-08	3.37e-07	6.21e-07
10	-	-	8.99e-06	2.85e-08	4.82e-08	3.17e-07	5.84e-07
11	-	-	-	2.94e-07	2.74e-07	2.26e-08	3.28e-08
12	-	-	-	-	4.75e-07	3.28e-08	5.15e-08
13	-	-	-	-	-	2.94e-07	2.74e-07
14	-	-	-	-	-	-	4.75e-07

Matrice Résistance SUMER:

i	R <sub>i1</sub>	R <sub>i2</sub>	R <sub>i3</sub>	R <sub>i4</sub>	R <sub>i5</sub>	R <sub>i6</sub>	R <sub>i7</sub>
1	2.42e-05	2.40e-05	-6.89e-07	-2.10e-06	-5.61e-06	-5.43e-06	-3.01e-06
2	-	2.68e-05	1.56e-06	-2.14e-07	-5.67e-06	-5.53e-06	-3.20e-06
3	-	-	3.56e-05	3.40e-05	1.21e-06	-4.27e-07	-5.21e-06
4	-	-	-	3.56e-05	3.22e-06	1.26e-06	-5.29e-06
5	-	-	-	-	3.58e-05	3.42e-05	1.26e-06
6	-	-	-	-	-	3.58e-05	3.222e-06
7	-	-	-	-	-	-	3.56e-05

i	R <sub>i8</sub>	R <sub>i9</sub>	R <sub>i10</sub>	R <sub>i11</sub>	R <sub>i12</sub>	R <sub>i13</sub>	R <sub>i14</sub>
1	-2.82e-06	-1.26e-06	-1.16e-06	6.46e-07	1.60e-06	-3.57e-07	-5.34e-07
2	-3.01e-06	-1.37e-06	-1.26e-06	8.29e-07	1.94e-06	-3.79e-07	-5.64e-07
3	-5.10e-06	-3.00e-06	-2.82e-06	1.58e-06	3.33e-06	-4.72e-07	-6.24e-07
4	-5.21e-06	-3.20e-06	-3.01e-06	1.55e-06	3.28e-06	-4.58e-07	-5.87e-07
5	-4.25e-07	-5.52e-06	-5.42e-06	4.94e-07	1.28e-06	3.53e-07	1.00e-06
6	1.21e-06	-5.66e-06	-5.61e-06	3.53e-07	1.00e-06	4.94e-07	1.28e-06
7	3.40e-05	-1.834e-07	-2.07e-06	-4.58e-07	-5.87e-07	1.55e-06	3.28e-06

i	R <sub>i1</sub>	R <sub>i2</sub>	R <sub>i3</sub>	R <sub>i4</sub>	R <sub>i5</sub>	R <sub>i6</sub>	R <sub>i7</sub>
8	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-

i	R <sub>i8</sub>	R <sub>i9</sub>	R <sub>i10</sub>	R <sub>i11</sub>	R <sub>i12</sub>	R <sub>i13</sub>	R <sub>i14</sub>
8	3.56e-05	1.60e-06	-6.56e-07	-4.72e-07	-6.24e-07	1.58e-06	3.33e-06
9	-	2.70e-05	2.42e-05	-3.79e-07	-5.64e-07	8.27e-07	1.93e-06
10	-	-	2.44e-05	-3.57e-07	-5.34e-07	6.43e-07	1.59e-06
11	-	-	-	6.47e-07	7.34e-07	-1.82e-07	-2.10e-07
12	-	-	-	-	1.46e-06	-2.10e-07	-2.51e-07
13	-	-	-	-	-	6.47e-07	7.35e-07
14	-	-	-	-	-	-	1.46e-06

### III.2.2. Fréquence de 10 kHz

Matrice Inductance SUMER:

i	L <sub>i1</sub>	L <sub>i2</sub>	L <sub>i3</sub>	L <sub>i4</sub>	L <sub>i5</sub>	L <sub>i6</sub>	L <sub>i7</sub>
1	7.65e-06	7.33e-06	3.22e-06	2.93e-06	1.03e-06	9.40e-07	3.49e-07
2	-	7.69e-06	3.56e-06	3.24e-06	1.14e-06	1.03e-06	3.83e-07
3	-	-	7.79e-06	7.45e-06	3.26e-06	2.96e-06	1.03e-06
4	-	-	-	7.79e-06	3.59e-06	3.25e-06	1.13e-06
5	-	-	-	-	7.78e-06	7.44e-06	3.25e-06
6	-	-	-	-	-	7.78e-06	3.59e-06
7	-	-	-	-	-	-	7.79e-06

i	L <sub>i8</sub>	L <sub>i9</sub>	L <sub>i10</sub>	L <sub>i11</sub>	L <sub>i12</sub>	L <sub>i13</sub>	L <sub>i14</sub>
1	3.19e-07	1.23e-07	1.12e-07	2.79e-07	4.36e-07	4.53e-08	6.40e-08
2	3.50e-07	1.34e-07	1.23e-07	2.90e-07	4.54e-07	4.92e-08	6.97e-08
3	9.35e-07	3.50e-07	3.19e-07	3.27e-07	5.12e-07	1.09e-07	1.58e-07
4	1.03e-06	3.83e-07	3.49e-07	3.24e-07	5.07e-07	1.17e-07	1.70e-07
5	2.96e-06	1.03e-06	9.40e-07	2.39e-07	3.67e-07	2.25e-07	3.44e-07
6	3.26e-06	1.14e-06	1.03e-06	2.25e-07	3.44e-07	2.39e-07	3.67e-07
7	7.45e-06	3.23e-06	2.93e-06	1.17e-07	1.70e-07	3.24e-07	5.07e-07

i	L <sub>i1</sub>	L <sub>i2</sub>	L <sub>i3</sub>	L <sub>i4</sub>	L <sub>i5</sub>	L <sub>i6</sub>	L <sub>i7</sub>
8	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-

i	L <sub>i8</sub>	L <sub>i9</sub>	L <sub>i10</sub>	L <sub>i11</sub>	L <sub>i12</sub>	L <sub>i13</sub>	L <sub>i14</sub>
8	7.79e-06	3.56e-06	3.22e-06	1.09e-07	1.58e-07	3.27e-07	5.12e-07
9	-	7.67e-06	7.31e-06	4.92e-08	6.97e-08	2.90e-07	4.54e-07
10	-	-	7.63e-06	4.52e-08	6.40e-08	2.79e-07	4.36e-07
11	-	-	-	2.43e-07	2.21e-07	3.05e-08	3.86e-08
12	-	-	-	-	3.41e-07	3.86e-08	5.15e-08
13	-	-	-	-	-	2.43e-07	2.21e-07
14	-	-	-	-	-	-	3.41e-07

Matrice Résistance SUMER:

i	R <sub>i1</sub>	R <sub>i2</sub>	R <sub>i3</sub>	R <sub>i4</sub>	R <sub>i5</sub>	R <sub>i6</sub>	R <sub>i7</sub>
1	2.27e-02	2.10e-02	7.90e-03	6.95e-03	6.81e-05	-6.77e-05	-1.04e-03
2	-	2.41e-02	9.42e-03	8.28e-03	4.99e-04	3.22e-04	-9.48e-04
3	-	-	2.98e-02	2.75e-02	1.11e-02	1.01e-02	1.74e-03
4	-	-	-	3.01e-02	1.26e-02	1.14e-02	2.14e-03
5	-	-	-	-	3.20e-02	2.96e-02	1.14e-02
6	-	-	-	-	-	3.20e-02	1.26e-02
7	-	-	-	-	-	-	3.01e-02

i	R <sub>i8</sub>	R <sub>i9</sub>	R <sub>i10</sub>	R <sub>i11</sub>	R <sub>i12</sub>	R <sub>i13</sub>	R <sub>i14</sub>
1	-1.06e-03	-1.12e-03	-1.09e-03	6.97e-04	2.85e-03	-4.57e-04	-3.63e-04
2	-9.85e-04	-1.14e-03	-1.12e-03	8.28e-04	3.13e-03	-4.54e-04	-3.38e-04
3	1.38e-03	-9.86e-04	-1.06e-03	1.42e-03	4.27e-03	-1.05e-04	4.71e-04
4	1.74e-03	-9.48e-04	-1.04e-03	1.40e-03	4.22e-03	-3.76e-05	6.10e-04
5	1.01e-02	3.24e-04	-6.53e-05	8.27e-04	2.71e-03	7.40e-04	2.47e-03
6	1.11e-02	5.02e-04	7.14e-05	7.41e-04	2.47e-03	8.27e-04	2.71e-03
7	2.75e-02	8.31e-03	6.98e-03	-3.75e-05	6.11e-04	1.40e-03	4.22e-03

i	R <sub>i1</sub>	R <sub>i2</sub>	R <sub>i3</sub>	R <sub>i4</sub>	R <sub>i5</sub>	R <sub>i6</sub>	R <sub>i7</sub>
8	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-

i	R <sub>i8</sub>	R <sub>i9</sub>	R <sub>i10</sub>	R <sub>i11</sub>	R <sub>i12</sub>	R <sub>i13</sub>	R <sub>i14</sub>
8	2.98e-02	9.45e-03	7.93e-03	-1.05e-04	4.71e-04	1.42e-03	4.27e-03
9	-	2.42e-02	2.12e-02	-4.55e-04	-3.39e-04	8.21e-04	3.12e-03
10	-	-	2.29e-02	-4.58e-04	-3.64e-04	6.89e-04	2.84e-03
11	-	-	-	9.59e-04	9.90e-04	-1.74e-04	-1.10e-04
12	-	-	-	-	2.49e-03	-1.10e-04	3.75e-05
13	-	-	-	-	-	9.60e-04	9.91e-04
14	-	-	-	-	-	-	2.49e-03



### III.3. Etude avec circuit magnétique ( $\mu^*$ )

Cette étude est en cours.

## IV. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'étude d'un transformateur cas-test. Tout d'abord, nous avons exposé la problématique de la modélisation d'un transformateur avant de décrire le cas test choisi pour la validation. Ensuite, nous avons expliqué la méthode d'obtention des éléments matriciels de (R) et de (L). Dans le but d'automatiser la modélisation d'un transformateur, il a été mis au point un pré-processeur.

Malheureusement, nous ne pouvons pas conclure sur la validité de la méthode 3D puisque l'étude est en cours. Les résultats SUMER donnés dans ce chapitre serviront de référence à notre calcul 3D.

# CONCLUSION GENERALE

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire avaient pour principal objectif la détermination des paramètres RLC caractérisant un transformateur de puissance. Pour des raisons de temps, nous avons pu uniquement traiter la détermination des paramètres résistifs et inductifs. Cette caractérisation du transformateur a été possible par la modélisation numérique, les simulations ont été réalisées avec le logiciel de calcul de champ électromagnétique Flux3D utilisant les éléments finis.

Tout d'abord, nous nous sommes appliqués à définir la manière la plus adéquate pour modéliser un problème physique contenant des régions conductrices, magnétiques et ferromagnétiques. La formulation utilisant le potentiel scalaire magnétique dans les régions non conductrices associé au potentiel vecteur électrique dans les régions conductrices a été choisie suite aux résultats des travaux de Y. Le Floch [LeFloch, 2002]. Même avec ce choix de formulation il nous a fallu prendre en compte différemment les pertes dites « de proximité », dues aux courants de Foucault dans les conducteurs massifs. Il est en effet nécessaire, dans ce cas et ce, d'autant plus que la fréquence est élevée, de mailler avec précision les régions massives conductrices qui par ailleurs portent une inconnue vectorielle. Nous avons ensuite, développé une méthode permettant la prise en compte de ces effets de proximité. Cette méthode a pour objectif d'approcher les grandeurs globales de flux coupés dans les éléments électriques en s'affranchissant du calcul des courants de Foucault dans les conducteurs. Elle est basée sur un principe d'équivalence énergétique entre un conducteur massif et un conducteur hystérétique non conducteur. Cela nous a amené au concept de perméabilité magnétique complexe.

La modélisation des pertes dites « de proximité » dans les conducteurs massifs par perméabilité magnétique complexe a donné d'excellents résultats lors des validations 2D et 3D. D'une part, cela nous a permis de mieux appréhender les phénomènes physiques mis en jeu comme l'affranchissement des courants de Foucault ou la validité des considérations énergétiques. A Hautes Fréquences les effets de proximité deviennent prépondérants par rapport aux effets de peau. D'autre part, les résultats obtenus sur des conducteurs isolés en 2D ou 3D sont très satisfaisants. En effet, l'évaluation des pertes de proximité par perméabilité complexe a mis en évidence des erreurs inférieures à 3% en 2D et à 7% pour un barreau 3D. Précisons que dans le cadre d'étude d'un transformateur de puissance dans ses conditions d'utilisation (fréquences inférieures à 10 kHz), l'approximation reste tout à fait satisfaisante.

Après avoir discuté sur la mise en œuvre du tenseur de perméabilité complexe au sein d'une simulation magnétodynamique 3D de Flux3D nous avons extrapolé ce concept au circuit magnétique. L'utilisation de ce tenseur de perméabilité complexe dans les conducteurs massifs et dans le circuit magnétique s'est avérée judicieuse pour l'obtention des matrices (R) et (L) servant à caractériser un transformateur. L'élaboration de tests simplifiés comportant deux éléments électriques nous a permis de valider notre méthode de calcul des éléments matriciels 3D. Les éléments électriques ont tout d'abord été de simples conducteurs afin de dissocier les effets de peau et ceux de proximité. Cela nous a à nouveau permis de mettre en évidence la prépondérance des effets de proximité à Hautes Fréquences (à 50 kHz, ils sont 3,5 fois plus élevés que les effets de peau). Ensuite, les éléments électriques ont été constitués de quatre conducteurs dans le but de vérifier la méthode d'homogénéisation par réductance magnétique avec ou sans circuit magnétique. La détermination des éléments matriciels est obtenue en ayant une erreur relative ne dépassant pas 2% lorsque le circuit magnétique est présent dans le dispositif. Dans le cas où le circuit magnétique est absent, les erreurs peuvent atteindre 25%. Notons que l'homogénéisation est sensible à la quantité de

guipage utilisée. En effet, quand la surface d'isolant est de petite dimension nous obtenons de meilleurs résultats (erreurs relatives moins importantes).

Tous ces résultats encourageants nous ont amené à définir un transformateur cas-test afin d'appliquer notre méthode d'obtention des éléments matriciels de (R) et de (L). Certes, ce cas-test est de petite taille tant au niveau de sa géométrie qu'au niveau du nombre d'éléments électriques (14 éléments) mais il reste très intéressant au niveau de la méthode. Cela nous a permis de tester les développements réalisés en vue d'une automatisation du processus par le biais de la création d'un pré-processeur [Jeanniard, 2003].

Cependant, la phase de validation doit être poursuivie et élargie à des dispositifs industriels plus complexes. Enfin, des efforts restent à faire pour optimiser l'automatisation du processus d'étude fréquentielle du transformateur de puissance. En effet, le maillage du dispositif n'est pas actuellement inséré dans le pré-processeur.

# Bibliographie

Abramowitz, M. (ed.) (1964), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas*, U.S. Govt. Print. Off. (Washington DC), Reprint by Dover (New York) 1965..

[Albanese and Rubinacci, 1990] Albanese R., and Rubinacci G., *Magnetostatic field computations in terms of two component vector potential*. International journal for numerical methods in engineering, 29 : 515-532.

[Bertagnolli, 1996] Bertagnolli G., *Short-circuit duty of power transformers*. The ABB Approach, 1996.

[Biro, 1999] Biro O., *Edge element formulations of eddy current problems*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 169 : 391-405, 1999.

[Biro and Peis, 1989] Biro O. and Preis K., *On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents*. IEEE Transaction on Magnetics, 25(4) : 3145-3148, 1989.

[Biro et al., 1993] Biro O., Preis K., Renhart W., Vrck G., and Richter K.R., *Computation of 3D current driven skin effect problems using a current vector potential*. IEEE Transaction on Magnetics, 29(2) : 1325-1328, 1993.

[Bossavit, 1997] Bossavit A., *Computational electromagnetism: variational formulations, complementarity, edge elements*. Academic Press, 1997.

[Dular, 1996] Dular P., *Modélisation du champ magnétique et ses courants induits dans des systèmes tridimensionnels non-linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1996.

[Dular et al., 1995] Dular P., Nicolet A., Genon A., Legros W., *A discrete sequence associated with mixed 3D finite elements and its gauge condition for vector potentials*. IEEE Transaction on Magnetics, 31(3) : 1356-1359, 1995.

[Dular et al., 1999] Dular P., Geuzaine C. and Legros W., *A natural method for coupling magnetodynamic H-formulations and circuit equations*. IEEE Transaction on Magnetics, 35(3) : 1626-1629, 1999.

[Flux3D] Notice d'utilisation générale de Flux3D version 3.10.

[Girard, 1995] Girard P., *Calculs des capacités et des inductances complexes dans Flux2D*. Rapport de contrat CEDRAT, 1995.

[Golias and Tsiboukis, 1994] Golias N.A., Tsiboukis T.D., *Magnetostatics with edge elements: a numerical investigation in the choice of the tree*. IEEE Transaction on Magnetics, 30(5) : 2877-2880, 1994.

[Guillot et al., 1995] Guillot Y., Moreau O., *Comportement Haute fréquence des Transformateurs : Premiers Calculs utilisant l'outil TRANSFO HF*. Note Technique EDF-DER HM-11/95/0067, 1995.

[Hochart, 1987] Hochard B., *Power transformer handbook*. Butterworths, 1987.

[Kettunen et al., 1998] Kettunen L., Forsman K., and Bossavit A., *Formulation of the eddy current problem multiply connected regions in terms of h*. International journal of numerical methods in engineering, 41 : 935-954, 1998.

[Jeanniard, 2003] Jeanniard L., *Création d'un pré-processeur de géométrie 3D complexe pour Flux3D. Développement d'un outil métier de modélisation de transformateurs*. DEA Génie Electrique, INPG, 2003.

[Joan, 2001] Joan M., *Modélisation des paramètres RLCG de matériels électriques bobinés par la méthode des éléments finis 3D*. Rapport ANRT n°540/00, 2001.

[Joan et al., 2002] Joan M., Moreau O., Meunier G., Chevalier T., *Proximity losses computation using a 3D complex permeability*. In proceeding of CEFC 2002, page 40.

[Joan et al., 2003] Joan M., Moreau O., Meunier G., Chevalier T., *Magnetic scalar potential formulation using a 3D complex permeability for proximity losses computation*. In proceeding of COMPUMAG 2003.

[LeFloch, 2002] Le Floch Y., *Développement de formulations 3D éléments finis  $T-\phi$  pour la prise en compte de conducteurs massifs et bobinés avec un couplage circuit*. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, novembre 2002.

[LeFloch et al., 2002] Le Floch Y., Meunier G., Guérin C., Labie P., Brunotte X., et Boulaud D., *Coupled problem computation of 3D multiply connected magnetic circuits and electric circuits*. IEEE Transaction on Magnetics, Vol 39(3) : page 1725-1728, 2002.

[Lu et al., 1995] Lu J.H., Li J.R. and Schao K.R., *Transient eddy current calculation using magnetic vector potential method combined with incomplete tree gauge*. IEEE Transaction on Magnetics, 31(6) : 3515-3517, 1995.

[Luong, 1997] Luong H.T., *Amélioration de la formulation en potentiel magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuit électrique*. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.

[Matagne, 1991] Matagne E., *Contributions à la modélisation de dispositifs électrotechniques en vue de leur optimisation*. Thèse de doctorat UCL, décembre 1991.

[Matagne, 1992] Matagne E., *Modélisation magnétique macroscopique des faisceaux de conducteurs*. NUMELEC, 1992.

[Meunier et al, 2002a] Meunier G. et al, *Electromagnétisme et éléments finis Tome 2* Edition Lavoisier 2002.

[Meunier et al, 2002b] Meunier G. et al, *Electromagnétisme et éléments finis Tome 3* Edition Lavoisier 2002.

[Meunier et al., 2003] Meunier G., Le Floch Y. et Guérin C., *A Nonlinear circuit Coupled  $t_0$ - $\phi$  Formulation for solid conductors*. IEEE Transaction on Magnetics, Vol 39(3): 1729-1732, 2003.

[Midtgard, 1997] Midtgard O.M., *Construction and assessment of hierarchal edge elements for three dimensional computations of eddy currents*. Thèse de doctorat, Norwegian University of Science and Technology, 1997.

[Moreau et al., 1996] Moreau O. , Pages J.L , *Modélisation 2D des pertes de « proximité » dans les conducteurs massifs par perméabilité complexe*, Note Technique interne EDF-DER-HM-11/96/075, 1996.

[Moreau et al., 1995] Moreau O. , Michel R. , *Principes théoriques de l'outil de modélisation Haute Fréquence des transformateurs*, Note Technique interne EDF-DER-HM-11/95/074, 1995.

[3] Moreau O. , Reyboz F. , *Validation TransoHF : cas tests théoriques sur un transformateur principal Jeumont Schneider 570MVA*, Note Technique interne EDF-DER-HM-11/96/074, 1996.

[Pencreach Y., 1995] Pencreach Y., *Résultats des essais Hautes Fréquences sur un transformateur principal Jeumont Schneider 570MVA*. Note Technique EDF-DER-HM-11/95/020, 1995.

[Preston and Reece, 1982] Preston T.W. and Reece A.B.J., *Solution of 3-dimensional eddy currents problems : the  $T - \Omega$  method*. IEEE Transaction on Magnetics, pages 486-491, 1982.

[Press et al., 1992] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. et Flannery B.P., *Numerical recipes in Fortran. The art of scientific computing, second edition*. Cambridge University Press, 1992.

[Ren, 2002] Ren Z.,  *$T - \Omega$  formulation for eddy current problems in multiply connected regions*. IEEE Transaction on Magnetics, 38(2) : 557-560, 2002.

[Ren and Razek, 2000] Ren Z. and Razek A., *Comparison of some 3D eddy current formulations in dual systems*. IEEE Transaction on Magnetics, 36(4) : 751-755, 2000.

[RT, 1989] Ravairt P.A. et Thomas J.M., *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Edition Masson, 1983.

[Sabonnadière et al., 1982] Sabonnadière J.C., Meunier G. et Morel B., *Flux : a genral Interactive Finite Element Package for 2D Electromagnetic Fields*. IEEE Transaction on Magnetics, 18 : 411-415, 1982.

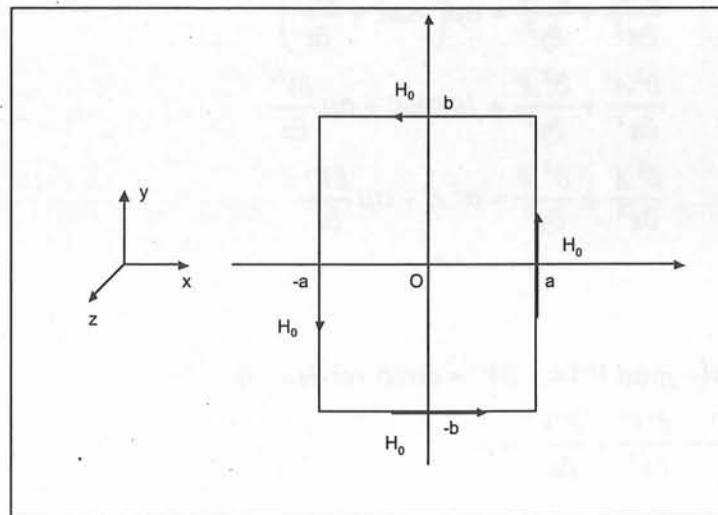
[Stoll, 1974] Stoll R.L. , *The analysis of eddy current*, Charendon Press Oxford, 1974.

[Sivasubramaniam et al., 2000] Sivasubramaniam K., Salon S., and Chari M.V.K, Numerical errors in the scalar potential formulations used in low-frequency field problems. IEEE Transaction on Magnetics, 36(5) : 3096-3098, 2000.

[Touzot et Dhat, 1984] Touzot G, Dhat G., *Une présentation de la méthode des éléments finis, deuxième édition*. Maloine S.A Editeur, 1984.

# ANNEXE 1 : Expression du champ magnétique pour un conducteur rectangulaire alimenté (formule de Stoll)

Nous considérons un conducteur rectangulaire isolé traversé par un courant de charge. A la surface extérieure correspond une ligne de champ magnétique  $H_0 = \text{Constante}$ .



Un conducteur alimenté.

A partir des équations :

$$\text{rot } H = J$$

$$H = \frac{1}{\mu} \text{rot } A$$

$$J = \sigma E$$

$$E = -\text{grad } V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Nous en déduisons:

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } A \right) = -\sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad } V \right) \text{ ou } -\Delta A = -\sigma \mu \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad } V \right)$$

Le problème est bidimensionnel en régime harmonique pour une longueur  $l$  de conducteur dans le direction (Oz).

Par projections sur (Oz) nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = \sigma \mu \left( \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (1)$$



L'excitation du système varie sinusoïdalement avec le temps ; on exprime  $A_z$  et  $V$  sous forme complexe :

$$A_z = \text{Re}(A' \exp(j\omega t))$$

$$V = \text{Re}(V' \exp(j\omega t))$$

(1) devient alors :

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} = \sigma\mu \left( j\omega A' + \frac{\partial V'}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} = j\omega\sigma\mu A' + \sigma\mu \frac{\partial V'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} = \alpha^2 A' + \sigma\mu \frac{\partial V'}{\partial z}$$

Etant donné :

$$\text{div } E = \text{div}(-\text{grad } V') = -\Delta V' = \text{div}(\sigma \text{ rot } H) = 0$$

$$\Delta V' = \frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = 0$$

Par séparation des variables :

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = \text{cste} = 0$$

$$\frac{\partial V'}{\partial y} = \text{cste} = 0$$

$$\frac{\partial V'}{\partial z} = \text{cste} = -E_z$$

Soit  $\alpha^2 A = \alpha^2 A' + \sigma\mu \frac{\partial V'}{\partial z}$  avec  $\alpha^2 = j\omega\sigma\mu$ .

Nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \alpha^2 A$$

Avec  $\alpha^2 = j\omega\sigma\mu = \frac{1+j}{\delta^2}$  et  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$

Nous avons l'expression du champ magnétique par :

$$\vec{H} = \begin{cases} H_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ H_y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ H_z = 0 \end{cases}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{array}{ll} H_x = 0 & \text{en } y = 0 \\ H_x = -H_0 & \text{en } y = b \\ H_y = 0 & \text{en } x = 0 \\ H_y = H_0 & \text{en } x = a \end{array}$$

La méthode de séparations de variables nous donne comme résultats :

$$A = \sum_m (L_{1m} \cosh(My) + L_{2m} \sinh(My)) \cos\left(\frac{m\Pi x}{a}\right) + \sum_n (Q_{1n} \cosh(Nx) + L_{2n} \sinh(Nx)) \cos\left(\frac{n\Pi y}{b}\right)$$

Avec :

$$M = \sqrt{\alpha^2 + \frac{m^2 \Pi^2}{a^2}} \quad \text{et} \quad N = \sqrt{\alpha^2 + \frac{n^2 \Pi^2}{b^2}}$$

Avec les conditions aux limites, nous obtenons :

$$A = -\frac{\mu H_0}{\alpha} \left( \frac{\cosh(\alpha y)}{\sinh(\alpha b)} + \frac{\cosh(\alpha x)}{\sinh(\alpha a)} \right)$$

Nous en déduisons donc :

$$H_x = -H_0 \left( \frac{\sinh(\alpha y)}{\sinh(\alpha b)} \right) \quad \text{et} \quad H_y = H_0 \left( \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha a)} \right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sum_{n=1}^{\infty} n\omega \left( A_n \sin(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t) \right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2\omega^2 \left( A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \right)$$

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = 0$$

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = 0$$

## ANNEXE 2 : Formules sur les cosinus et sinus hyperboliques utilisant des nombres complexes

Notons quelques formules utilisant les nombres complexes qui nous ont été utiles :

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \cosh(x + iy) = \cosh(x)\cosh(iy) + \sinh(x)\sinh(iy) \\ &= \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)\end{aligned}$$

$$\cosh(i\omega) = \cos(\omega) \quad \text{et} \quad \sinh(i\omega) = i\sin(\omega)$$

$$\sqrt{x + iy} = \pm \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

$$\begin{aligned}\cosh(z) = 0 &\Leftrightarrow \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y) \\ &\Leftrightarrow \cosh(x)\cos(y) = 0 \quad \text{et} \quad \sinh(x)\sin(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(y) = 0 \quad \text{et} \quad \sinh(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{et} \quad x = 0\end{aligned}$$

# ANNEXE 2 : Formules sur les cosinus et sinus hyperboliques utilisant des nombres complexes

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe quelconque. On a :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (e^{iy}) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x} (e^{-iy}) = e^{-x} (\cos y - i \sin y)$$

$$e^z + e^{-z} = e^x (\cos y + i \sin y) + e^{-x} (\cos y - i \sin y)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} (\cos y + i \sin y) + \frac{e^x - e^{-x}}{2} (\cos y - i \sin y)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + i \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin y + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y - i \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y + i \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin y - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y \right)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y + i \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} \sin y$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y + i \frac{2e^{-x}}{2} \sin y$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y + i e^{-x} \sin y$$

## ANNEXE 3 : Programme fortran calculant les perméabilités magnétiques complexes

```

C----- SUBROUTINE USR_DBDH -----
C
C
SUBROUTINE USR_DBDH (MATERIAL_NAME,STRING_LENGTH,
&                   NBRCN,COOPT,
&                   TIMESTEP,
&                   NBRCOEF,USER_COEFF,
&                   NB_SPAT_PAR,VAL_SPAT_PAR,VAL_SPAT_PAR_P,
&                   NB_VAR_PAR,VAL_VAR_PAR,VAL_VAR_PAR_P,
&                   NREAL,NCOMP,HMAG ,
&                   BMAG,DB_OUTOF_DH,
&                   IOSTAT)
C
C User SUBROUTINE for B(H) property
C
CHARACTER*(*)      MATERIAL_NAME
INTEGER            STRING_LENGTH
C
INTEGER            NBRCN
DOUBLE PRECISION  COOPT(NBRCN)
C
DOUBLE PRECISION  TIMESTEP(2)
C
INTEGER            NBRCOEF
DOUBLE PRECISION  USER_COEFF(*)
C
INTEGER            NB_SPAT_PAR
DOUBLE PRECISION  VAL_SPAT_PAR(2,3,*),VAL_SPAT_PAR_P(2,3,*)
C
INTEGER            NB_VAR_PAR
DOUBLE PRECISION  VAL_VAR_PAR(2,3,*),VAL_VAR_PAR_P(2,3,*)
C
INTEGER            NREAL,NCOMP
DOUBLE PRECISION  HMAG(NREAL,NCOMP)
C
DOUBLE PRECISION  BMAG(NREAL,NCOMP)
DOUBLE PRECISION  DB_OUTOF_DH (NREAL,NCOMP,NCOMP)
C
INTEGER            IOSTAT
C
C Input data :
C -----
C MATERIAL_NAME : Name of the MATERIAL.
C STRING_LENGTH : Length of the string MATERIAL_NAME
C NBRCN         : Number of coordinate of the point COOPT
C               NBRCN = 3 for FLUX3D solver)
C COOPT         : Coordinates of the point of computation in meter
C               (dimension NBRCN)
C TIMESTEP      : If transient problem :
C               TIMESTEP2(1) : Value of the current time step

```

```

C          TIMESTEP2(2) : Value of the previous time step
C          else
C          0
C  NBRCOEF      : Number of user coefficients
C  USER_COEFF  : Values of the user coefficients
C  NB_SPAT_PAR : Number of spatial parameters
C  VAL_SPAT_PAR : Values of spatial parameters
C          VAL_SPAT_PAR (i,j,k) :
C          real (i=1) or imaginary part (i=2) of the jth
component of the kth parameter
C
C          Example with three parameters.
C          The first parameter is a 3 component real vector,
C          VAL_SPAT_PAR (1,1,1)
C          VAL_SPAT_PAR (1,2,1)
C          VAL_SPAT_PAR (1,3,1)
C          The second parameter is a 3 component complex vector,
C          VAL_SPAT_PAR (1,1,2)
C          VAL_SPAT_PAR (1,2,2)
C          VAL_SPAT_PAR (1,3,2)
C          VAL_SPAT_PAR (2,1,2)
C          VAL_SPAT_PAR (2,2,2)
C          VAL_SPAT_PAR (2,3,2)
C          The third parameter is a complex scalar,
C          VAL_SPAT_PAR (1,1,3)
C          VAL_SPAT_PAR (2,1,3)
C  VAL_SPAT_PAR_P : If transient problem :
C          Value of spatial parameter at the previous time step
C          else
C          0
C          The storage is the same as for VAL_SPAT_PAR
C  NB_VAR_PAR    : Number of varrying parameters
C  VAL_VAR_PAR   : Values of the varrying parameters at the current time
step
C          The storage is the same as for VAL_SPAT_PAR
C  VAL_VAR_PAR_P : If transient problem :
C          Values of the varrying parameters at the previous time step
C          else
C          0
C          The storage is the same as for VAL_SPAT_PAR
C  NREAL        : 1 : Real property is expected (static and transient
C                problem)
C                2 : Complex property is expected (harmonic problem)
C  NCOMP        : Number of components of variables HMAG and BMAG
C                NCOMP = 3 for FLUX3D solver
C  HMAG         : Value of the magnetic field (Ampere / meter )
C
C  Output
C  -----
C  BMAG         : Magnetic induction (Tesla)
C                (including the permanent magnetization for magnet)
C  DB_OUTOF_DH  : permeability tensor *** de cylindrique a cartisien ***
C  IOSTAT       : IOSTAT = 1 : Property computed : REAL PROPERTY for
static
C                and transient problem
C                IOSTAT = 2 : Property computed : COMPLEX PROPERTY for
C                harmonic problem
C                other      : Error

```

```

C
C ****
C
C 060401 : First version (Author : M. RAKOTOVAO 30/11/2001)
C          Non linear magnet using the following model
C           $B(H) = \mu_0 \cdot (H - H_c) \cdot (1 + (\mu - 1) / (1 + a \cdot (H - H_c)))$ 
C 260803 : mu complex anisotrope (auteur OM et Michael Joan)
C
C *****
C
C-----
C
C          MU COMPLEXE ANISOTROPE DEFINI DANS UN REPERE LOCAL
C          POUR LES TROIS CAS DE FIGURE SUIVANTS :
C-----
C
C          USER_COEFF(1) = 1
C          Circuit magnetique constitue de toles a grains orientes
C          (passage du repere cartésien du tenseur de permeabilite local
C          au repere cartésien global)
C
C          USER_COEFF(2) : Composante selon i dans repere global de Ux
C          USER_COEFF(3) : Composante selon j dans repere global de Ux
C          USER_COEFF(4) : Composante selon k dans repere global de Ux
C
C          avec : Ux, vecteur directeur de l'orientation des grains (Mu max)
C
C          USER_COEFF(5) : Composante selon i dans repere global de Uz
C          USER_COEFF(6) : Composante selon j dans repere global de Uz
C          USER_COEFF(7) : Composante selon k dans repere global de Uz
C
C          avec : Uz, vecteur directeur de l'empilage des toles (Ux.Uz = 0)
C
C          VAL_VAR_PAR(*,1,2) : Re et Im de Mu selon Ux
C          VAL_VAR_PAR(*,2,2) : Re et Im de Mu selon  $Uy = Ux \wedge Uz$ 
C          VAL_VAR_PAR(*,3,2) : Re et Im de Mu selon Uz
C-----
C
C          USER_COEFF(1) = 2
C          Conducteur a anisotropie cartésienne
C          (passage du repere cartésien du tenseur de permeabilite local
C          au repere cartésien global)
C
C          USER_COEFF(2) : Composante selon i dans repere global de Ux
C          USER_COEFF(3) : Composante selon j dans repere global de Ux
C          USER_COEFF(4) : Composante selon k dans repere global de Ux
C
C          avec : Ux, vecteur de base de section du conducteur
C
C          USER_COEFF(5) : Composante selon i dans repere global de Uy
C          USER_COEFF(6) : Composante selon j dans repere global de Uy
C          USER_COEFF(7) : Composante selon k dans repere global de Uy
C
C          avec : Uy, vecteur de base de section du conducteur (Ux.Uy = 0)
C
C          VAL_VAR_PAR(*,1,2) : Re et Im de Mu selon Ux

```



```

C          VAL_VAR_PAR(*,2,2) : Re et Im de Mu selon Uy
C          VAL_VAR_PAR(*,3,2) : Re et Im de Mu selon Uz = Ux ^ Uy
C
C-----
C
C          USER_COEFF(1) = 3
C          Conducteur a anisotropie conique
C          (passage du repere conique du tenseur de permeabilite local
C          au repere cartésien global)
C
C          USER_COEFF(2) : coordonnee selon i dans repere global de C
C          USER_COEFF(3) : coordonnee selon j dans repere global de C
C          USER_COEFF(4) : coordonnee selon k dans repere global de C
C
C          avec : C, un point de l'axe de revolution
C
C          USER_COEFF(5) : Composante selon i dans repere global de K
C          USER_COEFF(6) : Composante selon j dans repere global de K
C          USER_COEFF(7) : Composante selon k dans repere global de K
C
C          avec : K, vecteur directeur de l'axe de revolution
C
C          USER_COEFF(8) : Angle entre les vecteurs K et Uk
C
C          avec : Uk, vecteur pseudo-axial du repere conique
C
C          VAL_VAR_PAR(*,1,2) : Re et Im de Mu selon Ur
C          VAL_VAR_PAR(*,2,2) : Re et Im de Mu selon Uteta
C          VAL_VAR_PAR(*,3,2) : Re et Im de Mu selon Uk
C
C          avec : Uteta, vecteur de base azymutal du repere conique
C                   Uteta = K ^ r / || K ^ r ||
C                   Ur, vecteur de base radial du repere conique
C                   Ur = Uteta ^ Uk
C                   r, vecteur CP = OP - OC
C                   P, point de calcul
C                   O, origine du repere global
C
C-----
C
C          INCLUDE          'geom_re_ind.inc'
C
C          CHARACTER*(*)    NOMSP
C          PARAMETER        (NOMSP='USR_DBDH')
C          INTEGER          I, J
C
C          DECLARATION DES VAR LOCALES SERVANT AU CHANGEMENT DE COORD
C-----
C
C          DOUBLE PRECISION  MULOC(2,3), P(3,3), INVP(3,3)
C          DOUBLE PRECISION  P1(3,3), INVP1(3,3)
C          DOUBLE PRECISION  P2(3,3), INVP2(3,3)
C
C          DOUBLE PRECISION  ORI(3), R(3)
C          DOUBLE PRECISION  UR(3), UT(3), UK(3)
C          DOUBLE PRECISION  UX(3), UY(3), UZ(3)
C          DOUBLE PRECISION  UI(3), UJ(3)
C          INTEGER          K

```

```

DOUBLE PRECISION    MU0, PI, EPS
DOUBLE PRECISION    REK, IMK ,DET
PARAMETER           (MU0=12.5663706D-7)
DOUBLE PRECISION    AXE_BOB(3), ALPHA
DOUBLE PRECISION    NORME_K, NORME_UT
DOUBLE PRECISION    NORME_UX, NORME_UY, NORME_UZ
DOUBLE PRECISION    UXUY, UXUZ

C
C   WRITE(*,*)'ACCES AU PROGRAMME UTILISATEUR USR_DBDH'
C
C   IOSTAT Initialization
IOSTAT = -1
C   WRITE(*,*)'MATERIAU = ',MATERIAL_NAME
IOSTAT = 2
C
C   Definition du zero machine
C
EPS = 1.0D-8
C
C   Test sur la validite de l'appel a ce prog. utilisateur.
C
      IF ( NREAL .NE. 2 ) THEN
        IOSTAT = -1
        GOTO 900
      ENDIF
C
C=====
C
IF ( USER_COEFF(1) .EQ. 1) THEN
C
      CAS CIRCUIT MAGNETIQUE (TOLE A GRAINS ORIENTE)
C=====
C
C-DBG      WRITE(*,*)'REGION TYPE CIRCUIT MAGNETIQUE '
C
C   RECUPERATION DES COEFFICIENTS UTILISATEURS
C   -----
C
C   Tenseur mu complexe dans repere cartesien du circuit magnetique
C   -----
C
      MULOC(1,1) = VAL_VAR_PAR(1,1,1) * MU0
      MULOC(2,1) = VAL_VAR_PAR(1,1,2) * MU0
      MULOC(1,2) = VAL_VAR_PAR(1,1,3) * MU0
      MULOC(2,2) = VAL_VAR_PAR(1,1,4) * MU0
      MULOC(1,3) = VAL_VAR_PAR(1,1,5) * MU0
      MULOC(2,3) = VAL_VAR_PAR(1,1,6) * MU0
C
      K = 2
C
C   Vecteur Ux, direction d'orientation des grains (Mu max)
C   -----
C
      DO I = 1 , 3
        UX(I) = USER_COEFF(K)
        K = K+1
      ENDDO

```

```

C
C   Vecteur Uz : direction d'empilage des toles
C   -----
C
      DO I = 1 , 3
      UZ(I) = USER_COEFF(K)
      K=K+1
ENDDO
C
C
C   VERIFICATION DE L'ORTHOGONALITE DES VECTEURS UX ET UY
C   -----
C
      UXUZ = UX(1)*UZ(1)
      &      + UX(2)*UZ(2)
      &      + UX(3)*UZ(3)
      C
      IF ( ABS(UXUZ) .GT. EPS ) THEN
      WRITE(*,*)'!! ERREUR : VECTEURS UX ET UZ NON ORTHOGONAUX !!'
      IOSTAT = -1
      GOTO 900
ENDIF
C
C   VECTEUR UNITAIRE Ux / || Ux || : Ui
C   -----
C
      NORME_UX=SQRT(UX(1)*UX(1)
      &              +UX(2)*UX(2)
      &              +UX(3)*UX(3))
      C
      DO I = 1 , 3
      UI(I) = UX(I)/NORME_UX
      ENDDO
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' UI = ', UI
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C   VECTEUR UNITAIRE Uz / || Uz || : Uk
C   -----
C
      NORME_UZ=SQRT(UZ(1)*UZ(1)
      &              +UZ(2)*UZ(2)
      &              +UZ(3)*UZ(3))
      C
      DO I = 1 , 3
      UK(I) = UZ(I)/NORME_UZ
      ENDDO
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' UK = ', UK
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C   CALCUL DU VECTEUR Uj : Uk ^ Ui
C   -----
C
      UJ(1) = UK(2)*UI(3)-UK(3)*UI(2)
      UJ(2) = UK(3)*UI(1)-UK(1)*UI(3)

```

```

      UJ(3) = UK(1)*UI(2)-UK(2)*UI(1)
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' UJ = ', UJ
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C   MATRICE DE PASSAGE CART -> CART : P
C   -----
C
      DO I=1,3
      P(I,1)=UI(I)
      P(I,2)=UJ(I)
      P(I,3)=UK(I)
ENDDO
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' P = ', P
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C   INVERSION DE LA MATRICE P
C   -----
C
      CALL INVMAT(P,INVP)
C
      DET= (P(1,1)*P(2,2)-P(1,2)*P(2,1))*P(3,3)
&        + (P(1,3)*P(2,1)-P(1,1)*P(2,3))*P(3,2)
&        + (P(1,2)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,2))*P(3,1)

      INVP(1,1) = (P(2,2)*P(3,3)-P(2,3)*P(3,2))/DET
      INVP(1,2) = -(P(1,2)*P(3,3)-P(1,3)*P(3,2))/DET
      INVP(1,3) = (P(1,2)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,2))/DET
      INVP(2,1) = -(P(2,1)*P(3,3)-P(2,3)*P(3,1))/DET
      INVP(2,2) = (P(1,1)*P(3,3)-P(1,3)*P(3,1))/DET
      INVP(2,3) = -(P(1,1)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,1))/DET
      INVP(3,1) = (P(2,1)*P(3,2)-P(2,2)*P(3,1))/DET
      INVP(3,2) = -(P(1,1)*P(3,2)-P(1,2)*P(3,1))/DET
      INVP(3,3) = (P(1,1)*P(2,2)-P(1,2)*P(2,1))/DET
C
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' INVP = ', INVP
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C   CALCUL DE [MUcart2] = P*[MUcart1]*INVP
C   -----
C
      DO I=1,3
      DO J=1,3
      REK = 0.
      IMK = 0.
DO K = 1,3
      REK = REK + P(I,K)*MULOC(1,K)*INVP(K,J)
      IMK = IMK + P(I,K)*MULOC(2,K)*INVP(K,J)
ENDDO
      DB_OUTOF_DH(1,I,J) = REK
      DB_OUTOF_DH(2,I,J) = IMK
ENDDO
ENDDO

```

```

C
C=====
C
ELSEIF ( USER_COEFF(1) . EQ. 2) THEN
C
C          CAS CONDUCTEUR ANISOTROPIE CARTESIENNE
C
C=====
C
C-DBG      WRITE(*,*) 'REGION CONDUCTEUR ANISOTROPIE CARTESIENNE '
C
C  RECUPERATION DES COEFFICIENTS UTILISATEURS
C  -----
C
C          Tenseur mu complexe dans repere cartesien local
C          -----
C
C          MULOC(1,1) = VAL_VAR_PAR(1,1,1) * MU0
C          MULOC(2,1) = VAL_VAR_PAR(1,1,2) * MU0
C          MULOC(1,2) = VAL_VAR_PAR(1,1,3) * MU0
C          MULOC(2,2) = VAL_VAR_PAR(1,1,4) * MU0
C          MULOC(1,3) = VAL_VAR_PAR(1,1,5) * MU0
C          MULOC(2,3) = VAL_VAR_PAR(1,1,6) * MU0
C
C          Vecteur Ux
C          -----
C
C          K = 2
C
C          DO I = 1 , 3
C            UX(I) = USER_COEFF(K)
C            K = K+1
C          ENDDO
C
C          Vecteur Uy
C          -----
C
C          DO I = 1 , 3
C            UY(I) = USER_COEFF(K)
C            K=K+1
C          ENDDO
C
C          VERIFICATION DE L'ORTHOGONALITE DES VECTEURS UX ET UY
C          -----
C
C          UXUY = UX(1)*UY(1)
C          &      + UX(2)*UY(2)
C          &      + UX(3)*UY(3)
C
C          IF ( ABS(UXUY) .GT. EPS ) THEN
C            WRITE(*,*) '!! ERREUR : VECTEURS UX ET UY NON ORTHOGONAUX !! '
C            IOSTAT = -1
C            GOTO 900
C          ENDIF
C
C          VECTEUR UNITAIRE Ux / || Ux || : Ui
C          -----

```

```

C
NORME_UX=SQRT(UX(1)*UX(1)
&           +UX(2)*UX(2)
&           +UX(3)*UX(3))
C
DO I = 1 , 3
UI(I) = UX(I)/NORME_UX
ENDDO
C
C WRITE(6,*)' '
C WRITE(6,*)' UI = ', UI
C WRITE(6,*)' '
C
C VECTEUR UNITAIRE Uy / || Uy || : Uj
C -----
C
NORME_UY=SQRT(UY(1)*UY(1)
&           +UY(2)*UY(2)
&           +UY(3)*UY(3))
C
DO I = 1 , 3
UJ(I) = UY(I)/NORME_UY
ENDDO
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' UJ = ', UJ
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C CALCUL DU VECTEUR Uk : Ui ^ Uj
C -----
C
UK(1) = UI(2)*UJ(3)-UI(3)*UJ(2)
UK(2) = UI(3)*UJ(1)-UI(1)*UJ(3)
UK(3) = UI(1)*UJ(2)-UI(2)*UJ(1)
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' UK = ', UK
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C MATRICE DE PASSAGE CART -> CART : P
C -----
C
DO I=1,3
P(I,1)=UI(I)
P(I,2)=UJ(I)
P(I,3)=UK(I)
ENDDO
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' P = ', P
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C INVERSION DE LA MATRICE P
C -----
C
CALL INVMAT(P, INVP)
C
DET= (P(1,1)*P(2,2)-P(1,2)*P(2,1))*P(3,3)

```

```

&      + (P(1,3)*P(2,1)-P(1,1)*P(2,3))*P(3,2)
&      + (P(1,2)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,2))*P(3,1)

INVP(1,1) = (P(2,2)*P(3,3)-P(2,3)*P(3,2))/DET
INVP(1,2) = -(P(1,2)*P(3,3)-P(1,3)*P(3,2))/DET
INVP(1,3) = (P(1,2)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,2))/DET
INVP(2,1) = -(P(2,1)*P(3,3)-P(2,3)*P(3,1))/DET
INVP(2,2) = (P(1,1)*P(3,3)-P(1,3)*P(3,1))/DET
INVP(2,3) = -(P(1,1)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,1))/DET
INVP(3,1) = (P(2,1)*P(3,2)-P(2,2)*P(3,1))/DET
INVP(3,2) = -(P(1,1)*P(3,2)-P(1,2)*P(3,1))/DET
INVP(3,3) = (P(1,1)*P(2,2)-P(1,2)*P(2,1))/DET

C
C
C-DBG WRITE(6,*) ' '
C-DBG WRITE(6,*) ' INVP = ', INVP
C-DBG WRITE(6,*) ' '
C
C  CALCUL DE [MUcart2] = P*[MUcart1]*INVP
C  -----
C
      DO I=1,3
      DO J=1,3
        REK = 0.
        IMK = 0.
DO K = 1,3
REK = REK + P(I,K)*MULOC(1,K)*INVP(K,J)
IMK = IMK + P(I,K)*MULOC(2,K)*INVP(K,J)
ENDDO
DB_OUTOF_DH(1,I,J) = REK
DB_OUTOF_DH(2,I,J) = IMK
ENDDO
ENDDO

C
C-----
C
ELSEIF ( USER_COEFF(1) .EQ. 3 ) THEN
C
C          CAS CONDUCTEUR ANISOTROPIE CONIQUE
C
C-----
C
C-DBG      WRITE(*,*) 'REGION CONDUCTEUR ANISOTROPIE CONIQUE OU CYLINDRIQUE'
C
C
C  RECUPERATION DES COEFFICIENTS UTILISATEURS
C  -----
C
C  Tenseur mu complexe dans repere conique local
C  -----
C
      MULOC(1,1) = VAL_VAR_PAR(1,1,1) * MU0
      MULOC(2,1) = VAL_VAR_PAR(1,1,2) * MU0
      MULOC(1,2) = VAL_VAR_PAR(1,1,3) * MU0
      MULOC(2,2) = VAL_VAR_PAR(1,1,4) * MU0
      MULOC(1,3) = VAL_VAR_PAR(1,1,5) * MU0
      MULOC(2,3) = VAL_VAR_PAR(1,1,6) * MU0
C

```

```

      K = 2
C
C   Centre bobine
C   -----
      DO I = 1 , 3
      ORI(I) = USER_COEFF(K)
      K = K+1
ENDDO
C
C   Vecteur directeur de l'axe bobine
C   -----
      DO I = 1 , 3
      AXE_BOB(I) = USER_COEFF(K)
      K=K+1
ENDDO
C
C   Angle (radian) spires / axe bobine
C   -----
      PI = ACOS(-1.DO)
      ALPHA = PI * USER_COEFF(K) / 180.
C
C
C   PASSAGE ESPACE AFFINE -> ESPACE VECTORIEL
C   -----
      DO I = 1 , 3
      R(I) = COOPT(I)-ORI(I)
ENDDO
C
C
C   MATRICE DE PASSAGE CONIQUE -> CYLINDRIQUE (ROTATION AUTOUR DE Uteta) : P1
C   -----
      P1(1,1) = COS(ALPHA)
      P1(1,2) = 0.
      P1(1,3) = - SIN(ALPHA)
C
      P1(2,1) = 0.
      P1(2,2) = 1.
      P1(2,3) = 0.
C
      P1(3,1) = SIN(ALPHA)
      P1(3,2) = 0.
      P1(3,3) = COS(ALPHA)
C
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' P1 = ', P1
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C
C   INVERSION DE LA MATRICE P1
C   -----
      INV P1(1,1) = COS(ALPHA)
      INV P1(1,2) = 0.

```



```

INVP1(1,3) = SIN(ALPHA)
C
INVP1(2,1) = 0.
INVP1(2,2) = 1.
INVP1(2,3) = 0.
C
INVP1(3,1) = - SIN(ALPHA)
INVP1(3,2) = 0.
INVP1(3,3) = COS(ALPHA)
C
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' INVP1 = ', INVP1
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C VECTEUR UNITAIRE DE L'AXE DE LA BOBINE : Uk
C -----
C
NORME_K=SQRT(AXE_BOB(1)*AXE_BOB(1)
&           +AXE_BOB(2)*AXE_BOB(2)
&           +AXE_BOB(3)*AXE_BOB(3))
C
DO I = 1 , 3
UK(I) = AXE_BOB(I)/NORME_K
ENDDO
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' UK = ', UK
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C
C VECTEUR Uteta DU REP. CYL. LOCAL : Uk ^ R / || Uk ^ R ||
C -----
C
UT(1) = UK(2)*R(3)-UK(3)*R(2)
UT(2) = UK(3)*R(1)-UK(1)*R(3)
UT(3) = UK(1)*R(2)-UK(2)*R(1)
C
NORME_UT=SQRT(UT(1)*UT(1)+UT(2)*UT(2)+UT(3)*UT(3))
C
UT(1) = UT(1) / NORME_UT
UT(2) = UT(2) / NORME_UT
UT(3) = UT(3) / NORME_UT
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' UT = ', UT
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C
C CALCUL DU VECTEUR Ur DU REP. CYL. LOCAL : Uteta ^ Uk
C -----
C
UR(1) = UT(2)*UK(3)-UT(3)*UK(2)
UR(2) = UT(3)*UK(1)-UT(1)*UK(3)
UR(3) = UT(1)*UK(2)-UT(2)*UK(1)
C
C-DBG WRITE(6,*)' '

```

```

C-DBG WRITE(6,*)' UR = ', UR
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C   MATRICE DE PASSAGE CYL -> CART : P2
C   -----
C
      DO I=1,3
      P2(I,1)=UR(I)
      P2(I,2)=UT(I)
      P2(I,3)=UK(I)
ENDDO
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' P2 = ', P2
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C   INVERSION DE LA MATRICE P2
C   -----
C
C
      DET= (P2(1,1)*P2(2,2)-P2(1,2)*P2(2,1))*P2(3,3)
&      + (P2(1,3)*P2(2,1)-P2(1,1)*P2(2,3))*P2(3,2)
&      + (P2(1,2)*P2(2,3)-P2(1,3)*P2(2,2))*P2(3,1)

      INVP2(1,1) = (P2(2,2)*P2(3,3)-P2(2,3)*P2(3,2))/DET
      INVP2(1,2) = -(P2(1,2)*P2(3,3)-P2(1,3)*P2(3,2))/DET
      INVP2(1,3) = (P2(1,2)*P2(2,3)-P2(1,3)*P2(2,2))/DET
      INVP2(2,1) = -(P2(2,1)*P2(3,3)-P2(2,3)*P2(3,1))/DET
      INVP2(2,2) = (P2(1,1)*P2(3,3)-P2(1,3)*P2(3,1))/DET
      INVP2(2,3) = -(P2(1,1)*P2(2,3)-P2(1,3)*P2(2,1))/DET
      INVP2(3,1) = (P2(2,1)*P2(3,2)-P2(2,2)*P2(3,1))/DET
      INVP2(3,2) = -(P2(1,1)*P2(3,2)-P2(1,2)*P2(3,1))/DET
      INVP2(3,3) = (P2(1,1)*P2(2,2)-P2(1,2)*P2(2,1))/DET
C
C
C-DBG WRITE(6,*)' '
C-DBG WRITE(6,*)' INVP2 = ', INVP2
C-DBG WRITE(6,*)' '
C
C   CALCUL DE [MUcart] = P2*P1*[MUconi]*INVP1*INVP2
C   -----
C
C   1ere etape : Calcul de P = P2*P1 et INVP = INVP1*INVP2
C   -----
      DO I=1,3
      DO J=1,3
      P(I,J) = 0.
      INVP(I,J) = 0.
      DO K = 1,3
      P(I,J) = P(I,J) + P2(I,K)*P1(K,J)
      INVP(I,J) = INVP(I,J) + INVP1(I,K)*INVP2(K,J)
      ENDDO
      ENDDO
ENDDO
C
C   2eme etape : Calcul de [MUcart] = P*[MUconi]*INVP
C   -----

```

```

DO I=1,3
DO J=1,3
REK = 0.
IMK = 0.
DO K = 1,3
REK = REK + P(I,K)*MULOC(1,K)*INVP(K,J)
IMK = IMK + P(I,K)*MULOC(2,K)*INVP(K,J)
ENDDO
DB_OUTOF_DH(1,I,J) = REK
DB_OUTOF_DH(2,I,J) = IMK
ENDDO
ENDDO
C
C
C=====
C
ELSE
C
C          CAS NON DEFINI
C
C=====
C
WRITE(*,*)'MATERIAU UTILISATEUR INCONNU'
C
C=====
C
ENDIF
C
C=====
C
C  CALCUL DE BMAG DANS LE REPERE CARTESIEN GLOBAL
C -----
C
DO I = 1, 3
BMAG(1,I) = 0
BMAG(2,I) = 0
DO J = 1, 3
BMAG(1,I) = BMAG(1,I)
& + DB_OUTOF_DH(1,I,J)*HMAG(1,J)
& - DB_OUTOF_DH(2,I,J)*HMAG(2,J)
BMAG(2,I) = BMAG(2,I)
& + DB_OUTOF_DH(1,I,J)*HMAG(2,J)
& + DB_OUTOF_DH(2,I,J)*HMAG(1,J)
ENDDO
ENDDO
C
C
900 CONTINUE
C
END

```

## ANNEXE 3 : Figures du champ 2D

Quelques figures pour illustrer les effets de proximité.

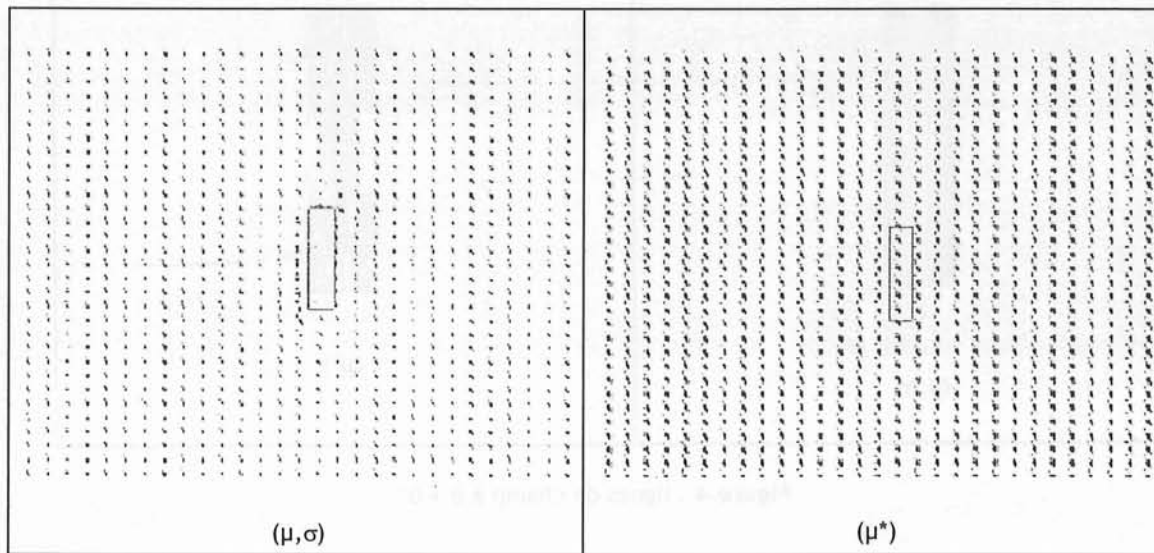


Figure 2 : Impact du conducteur sur le champ source extérieur à 150 kHz.

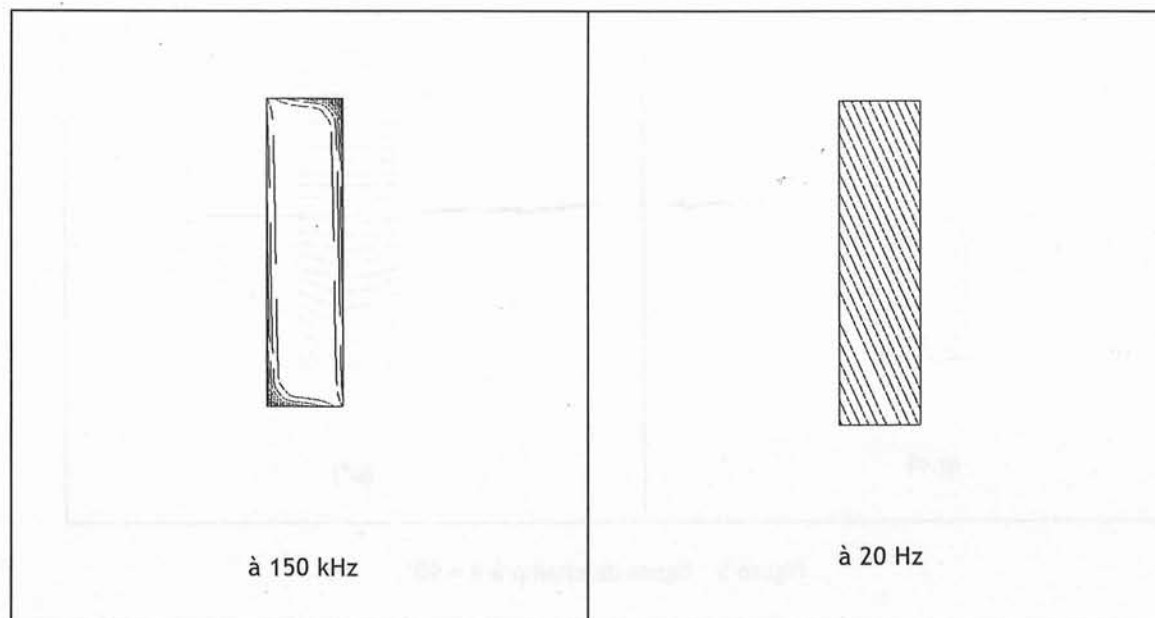


Figure 3 : Champ magnétique à deux fréquences significatives pour  $\theta = 90^\circ$

Voici les lignes de champ à  $f = 25$  kHz à différents angles :

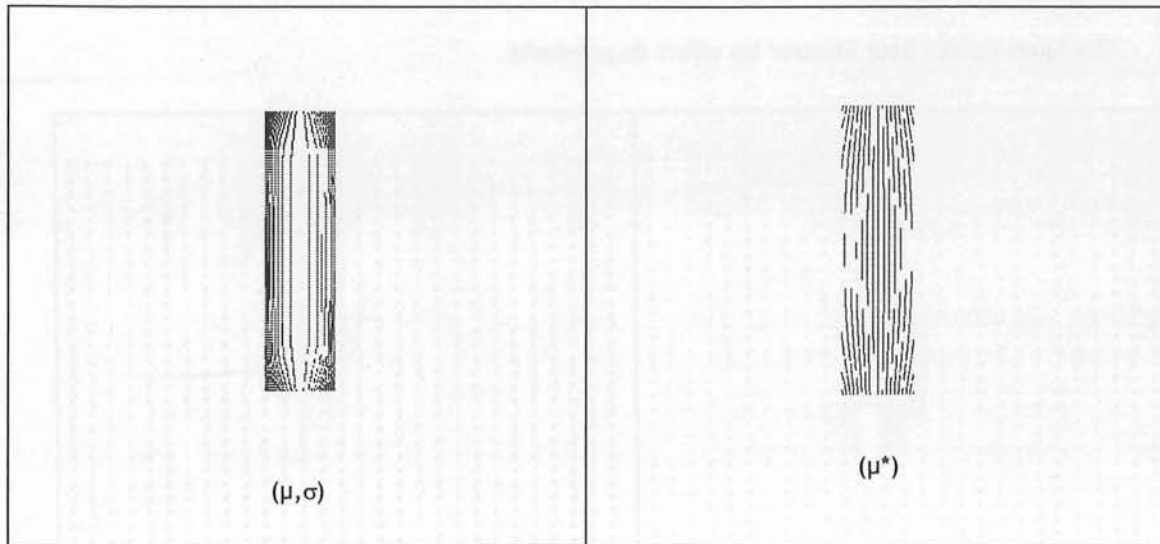


Figure 4 : lignes de champ à  $\theta = 0^\circ$ .

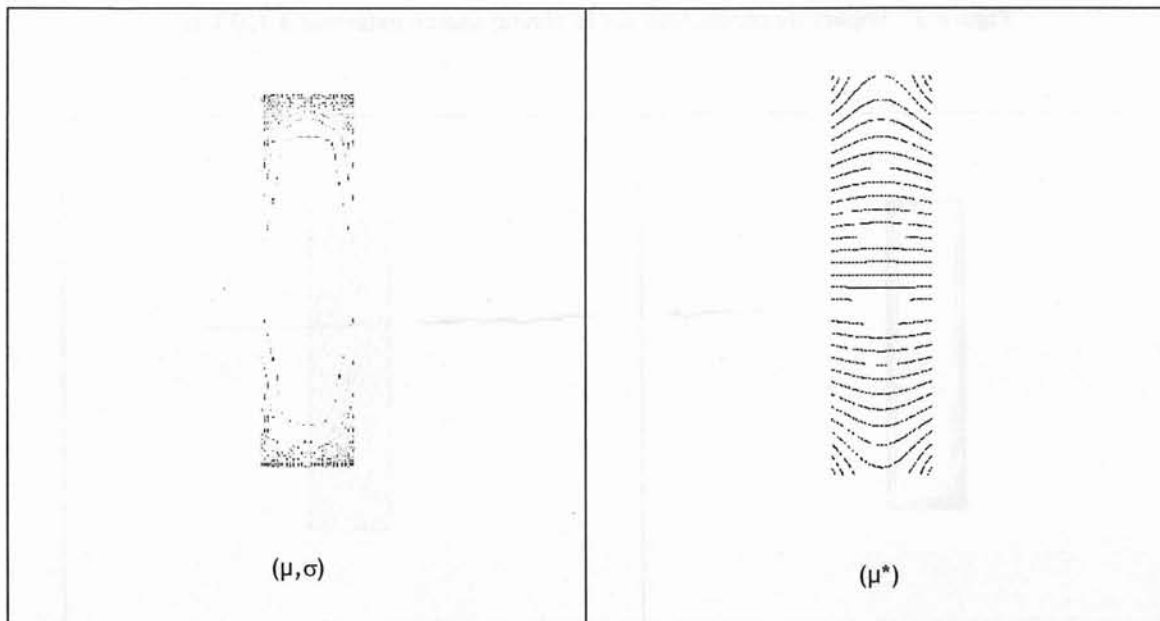


Figure 5 : lignes de champ à  $\theta = 90^\circ$ .

## ANNEXE 5 : usr\_dbdh.f

usr\_dbdh.f est le programme utilisateur de changement de repère conique à cartésien. Ce programme est en fortran et introduit dans Flux3D en bibliothèques partagées. Cela nécessite une recompilation de Flux3D.

```
C----- SUBROUTINE USR_DBDH -----
C
C
C      SUBROUTINE USR_DBDH (MATERIAL_NAME,STRING_LENGTH,
&          NBRCN,COOPT,
&          TIMESTEP,
&          NBRCOEF,USER_COEFF,
&          NB_SPAT_PAR,VAL_SPAT_PAR,VAL_SPAT_PAR_P,
&          NB_VAR_PAR,VAL_VAR_PAR,VAL_VAR_PAR_P,
&          NREAL,NCOMP,HMAG ,
&          BMAG,DB_OUTOF_DH,
&          IOSTAT)
C
C User SUBROUTINE for B(H) property
C
C      CHARACTER*(*) MATERIAL_NAME
C      INTEGER      STRING_LENGTH
C
C      INTEGER      NBRCN
C      DOUBLE PRECISION COOPT(NBRCN)
C
C      DOUBLE PRECISION TIMESTEP(2)
C
C      INTEGER      NBRCOEF
C      DOUBLE PRECISION USER_COEFF(*)
C
C      INTEGER      NB_SPAT_PAR
C      DOUBLE PRECISION VAL_SPAT_PAR(2,3,*),VAL_SPAT_PAR_P(2,3,*)
C
C      INTEGER      NB_VAR_PAR
C      DOUBLE PRECISION VAL_VAR_PAR(2,3,*),VAL_VAR_PAR_P(2,3,*)
C
C      INTEGER      NREAL,NCOMP
C      DOUBLE PRECISION HMAG(NREAL,NCOMP)
C
C      DOUBLE PRECISION BMAG(NREAL,NCOMP)
C      DOUBLE PRECISION DB_OUTOF_DH (NREAL,NCOMP,NCOMP)
C
C      INTEGER      IOSTAT
C
C Input data :
C -----
```

C MATERIAL\_NAME : Name of the MATERIAL.  
C STRING\_LENGTH : Length of the string MATERIAL\_NAME  
C NBRCN : Number of coordinate of the point COOPT  
C NBRCN = 3 for FLUX3D solver)  
C COOPT : Coordinates of the point of computation in meter  
C (dimension NBRCN)  
C TIMESTEP : If transient problem :  
C TIMESTEP2(1) : Value of the current time step  
C TIMESTEP2(2) : Value of the previous time step  
C else  
C 0  
C NBRCOEF : Number of user coefficients  
C USER\_COEFF : Values of the user coefficients  
C NB\_SPAT\_PAR : Number of spatial parameters  
C VAL\_SPAT\_PAR : Values of spatial parameters  
C VAL\_SPAT\_PAR (i,j,k) :  
C real (i=1) or imaginary part (i=2)  
C of the jth component of the kth parameter  
C  
C Example with three parameters.  
C The first parameter is a 3 component real vector,  
C VAL\_SPAT\_PAR (1,1,1)  
C VAL\_SPAT\_PAR (1,2,1)  
C VAL\_SPAT\_PAR (1,3,1)  
C The second parameter is a 3 component complex vector,  
C VAL\_SPAT\_PAR (1,1,2)  
C VAL\_SPAT\_PAR (1,2,2)  
C VAL\_SPAT\_PAR (1,3,2)  
C VAL\_SPAT\_PAR (2,1,2)  
C VAL\_SPAT\_PAR (2,2,2)  
C VAL\_SPAT\_PAR (2,3,2)  
C The third parameter is a complex scalar,  
C VAL\_SPAT\_PAR (1,1,3)  
C VAL\_SPAT\_PAR (2,1,3)  
C VAL\_SPAT\_PAR\_P : If transient problem :  
C Value of spatial parameter at the previous time step  
C else  
C 0  
C The storage is the same as for VAL\_SPAT\_PAR  
C NB\_VAR\_PAR : Number of varrying parameters  
C VAL\_VAR\_PAR : Values of the varrying parameters at the current time step  
C The storage is the same as for VAL\_SPAT\_PAR  
C VAL\_VAR\_PAR\_P : If transient problem :  
C Values of the varrying parameters at the previous time step  
C else  
C 0  
C The storage is the same as for VAL\_SPAT\_PAR  
C NREAL : 1 : Real property is expected (static and transient problem)  
C 2 : Complex property is expected (harmonic problem)  
C NCOMP : Number of components of variables HMAG and BMAG

```

C          NCOMP = 3 for FLUX3D solver
C HMAG      : Value of the magnetic field (Ampere / meter )
C
C Output
C -----
C BMAG      : Magnetic induction (Tesla)
C            (including the permanent magnetization for magnet)
C DB_OUTOF_DH : permeability tensor *** de cylindrique a cartisien ***
C IOSTAT     : IOSTAT = 1 : Property computed : REAL PROPERTY for static
C             and transient problem
C             IOSTAT = 2 : Property computed : COMPLEX PROPERTY for
C             harmonic problem
C             other      : Error
C
C ****
C
C 060401 : First version (Author : M. RAKOTOVAO 30/11/2001)
C         Non linear magnet using the following model
C          $B(H) = \mu_0 \cdot (H - H_c) \cdot (1 + (\mu - 1) / (1 + a \cdot (H - H_c)))$ 
C 260803 : mu complexe anisotrope (auteur OM et Michael Joan)
C
C *****
C
C -----
C
C         MU COMPLEXE ANISOTROPE DEFINI DANS UN REPERE LOCAL
C         POUR LES TROIS CAS DE FIGURE SUIVANTS :
C
C -----
C
C         USER_COEFF(1) = 1
C         Circuit magnetique constitue de toles a grains orientes
C         (passage du repere cartisien du tenseur de permeabilite local
C         au repere cartisien global)
C
C         USER_COEFF(2) : Composante selon i dans repere global de Ux
C         USER_COEFF(3) : Composante selon j dans repere global de Ux
C         USER_COEFF(4) : Composante selon k dans repere global de Ux
C
C         avec : Ux, vecteur directeur de l'orientation des grains (Mu max)
C
C         USER_COEFF(5) : Composante selon i dans repere global de Uz
C         USER_COEFF(6) : Composante selon j dans repere global de Uz
C         USER_COEFF(7) : Composante selon k dans repere global de Uz
C
C         avec : Uz, vecteur directeur de l'empilage des toles (Ux.Uz = 0)
C
C         VAL_VAR_PAR(*,1,2) : Re et Im de Mu selon Ux
C         VAL_VAR_PAR(*,2,2) : Re et Im de Mu selon Uy = Ux ^ Uz
C         VAL_VAR_PAR(*,3,2) : Re et Im de Mu selon Uz

```



C  
C-----  
C  
C USER\_COEFF(1) = 2  
C Conducteur a anisotropie cartesienne  
C (passage du repere cartesien du tenseur de permeabilite local  
C au repere cartesien global)  
C  
C USER\_COEFF(2) : Composante selon i dans repere global de Ux  
C USER\_COEFF(3) : Composante selon j dans repere global de Ux  
C USER\_COEFF(4) : Composante selon k dans repere global de Ux  
C  
C avec : Ux, vecteur de base de section du conducteur  
C  
C USER\_COEFF(5) : Composante selon i dans repere global de Uy  
C USER\_COEFF(6) : Composante selon j dans repere global de Uy  
C USER\_COEFF(7) : Composante selon k dans repere global de Uy  
C  
C avec : Uy, vecteur de base de section du conducteur (Ux.Uy = 0)  
C  
C VAL\_VAR\_PAR(\*,1,2) : Re et Im de Mu selon Ux  
C VAL\_VAR\_PAR(\*,2,2) : Re et Im de Mu selon Uy  
C VAL\_VAR\_PAR(\*,3,2) : Re et Im de Mu selon Uz = Ux ^ Uy  
C  
C-----  
C  
C USER\_COEFF(1) = 3  
C Conducteur a anisotropie conique  
C (passage du repere conique du tenseur de permeabilite local  
C au repere cartesien global)  
C  
C USER\_COEFF(2) : coordonnee selon i dans repere global de C  
C USER\_COEFF(3) : coordonnee selon j dans repere global de C  
C USER\_COEFF(4) : coordonnee selon k dans repere global de C  
C  
C avec : C, un point de l'axe de revolution  
C  
C USER\_COEFF(5) : Composante selon i dans repere global de K  
C USER\_COEFF(6) : Composante selon j dans repere global de K  
C USER\_COEFF(7) : Composante selon k dans repere global de K  
C  
C avec : K, vecteur directeur de l'axe de revolution  
C  
C USER\_COEFF(8) : Angle entre les vecteurs K et Uk  
C  
C avec : Uk, vecteur pseudo-axial du repere conique  
C  
C VAL\_VAR\_PAR(\*,1,2) : Re et Im de Mu selon Ur  
C VAL\_VAR\_PAR(\*,2,2) : Re et Im de Mu selon Uteta  
C VAL\_VAR\_PAR(\*,3,2) : Re et Im de Mu selon Uk

```

C
C      avec : Uteta, vecteur de base azymutal du repere conique
C              Uteta = K ^ r / || K ^ r ||
C      Ur, vecteur de base radial du repere conique
C              Ur = Uteta ^ Uk
C      r, vecteur CP = OP - OC
C      P, point de calcul
C      O, origine du repere global
C
C=====
C
C  INCLUDE      'geom_re_ind.inc'
C
C  CHARACTER*(*)  NOMSP
C  PARAMETER      (NOMSP='USR_DBDH')
C  INTEGER        I,J
C
C  DECLARATION DES VAR LOCALES SERVANT AU CHANGEMENT DE COORD
C  -----
C
C      DOUBLE PRECISION  MULOC(2,3), P(3,3), INVP(3,3)
C      DOUBLE PRECISION  P1(3,3), INVP1(3,3)
C      DOUBLE PRECISION  P2(3,3), INVP2(3,3)
C
C      DOUBLE PRECISION  ORI(3), R(3)
C      DOUBLE PRECISION  UR(3), UT(3), UK(3)
C      DOUBLE PRECISION  UX(3), UY(3), UZ(3)
C      DOUBLE PRECISION  UI(3), UJ(3)
C      INTEGER          K
C      DOUBLE PRECISION  MU0, PI, EPS
C      DOUBLE PRECISION  REK, IMK ,DET
C      PARAMETER      (MU0=12.5663706D-7)
C      DOUBLE PRECISION  AXE_BOB(3), ALPHA
C      DOUBLE PRECISION  NORME_K, NORME_UT
C      DOUBLE PRECISION  NORME_UX, NORME_UY, NORME_UZ
C      DOUBLE PRECISION  UXUY, UXUZ
C
C      WRITE(*,*)'ACCES AU PROGRAMME UTILISATEUR USR_DBDH'
C
C      IOSTAT Initialization
C      IOSTAT = -1
C      WRITE(*,*)'MATERIAU = ',MATERIAL_NAME
C      IOSTAT = 2
C
C      Definition du zero machine
C
C      EPS = 1.0D-8
C
C      Test sur la validite de l'appel a ce prog. utilisateur.
C

```

```

IF ( NREAL .NE. 2 ) THEN
  IOSTAT = -1
  GOTO 900
ENDIF
C
C=====
C
IF ( USER_COEFF(1) .EQ. 1) THEN
C
C   CAS CIRCUIT MAGNETIQUE (TOLE A GRAINS ORIENTE)
C
C=====
C
C   WRITE(*,*)'REGION TYPE CIRCUIT MAGNETIQUE '
C
C RECUPERATION DES COEFFICIENTS UTILISATEURS
C -----
C
C   Tenseur mu complexe dans repere cartésien du circuit magnetique
C -----
C
DO I = 1 , 3
  MULOC(1,I) = MU0*VAL_VAR_PAR(1,I,2)
  MULOC(2,I) = MU0*VAL_VAR_PAR(2,I,2)
ENDDO
C
K = 2
C
C   Vecteur Ux, direction d'orientation des grains (Mu max)
C -----
C
DO I = 1 , 3
  UX(I) = USER_COEFF(K)
  K = K+1
ENDDO
C
C   Vecteur Uz : direction d'empilage des toles
C -----
C
DO I = 1 , 3
  UZ(I) = USER_COEFF(K)
  K=K+1
ENDDO
C
C
C VERIFICATION DE L'ORTHOGONALITE DES VECTEURS UX ET UY
C -----
C
UXUZ = UX(1)*UZ(1)
&   + UX(2)*UZ(2)

```

```

&   + UX(3)*UZ(3)
C
C   IF ( ABS(UXUZ) .GT. EPS ) THEN
      WRITE(*,*)!! ERREUR : VECTEURS UX ET UZ NON ORTHOGONAUX !!'
      IOSTAT = -1
      GOTO 900
C   ENDIF
C
C   VECTEUR UNITAIRE Ux / || Ux || : Ui
C   -----
C
      NORME_UX=SQRT(UX(1)*UX(1)
&       +UX(2)*UX(2)
&       +UX(3)*UX(3))
C
      DO I = 1 , 3
        UI(I) = UX(I)/NORME_UX
      ENDDO
C
C
C   VECTEUR UNITAIRE Uz / || Uz || : Uk
C   -----
C
      NORME_UZ=SQRT(UZ(1)*UZ(1)
&       +UZ(2)*UZ(2)
&       +UZ(3)*UZ(3))
C
      DO I = 1 , 3
        UK(I) = UZ(I)/NORME_UZ
      ENDDO
C
C   CALCUL DU VECTEUR Uj : Uk ^ Ui
C   -----
C
      UJ(1) = UK(2)*UI(3)-UK(3)*UI(2)
      UJ(2) = UK(3)*UI(1)-UK(1)*UI(3)
      UJ(3) = UK(1)*UI(2)-UK(2)*UI(1)
C
C   MATRICE DE PASSAGE CART -> CART : P
C   -----
C
      DO I=1,3
        P(I,1)=UI(I)
        P(I,2)=UJ(I)
        P(I,3)=UK(I)
      ENDDO
C
C   INVERSION DE LA MATRICE P
C   -----
C

```

```

C      CALL INVMAT(P,INVP)
C
      DET= (P(1,1)*P(2,2)-P(1,2)*P(2,1))*P(3,3)
&      + (P(1,3)*P(2,1)-P(1,1)*P(2,3))*P(3,2)
&      + (P(1,2)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,2))*P(3,1)

      INVP(1,1) = (P(2,2)*P(3,3)-P(2,3)*P(3,2))/DET
      INVP(1,2) = -(P(1,2)*P(3,3)-P(1,3)*P(3,2))/DET
      INVP(1,3) = (P(1,2)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,2))/DET
      INVP(2,1) = -(P(2,1)*P(3,3)-P(2,3)*P(3,1))/DET
      INVP(2,2) = (P(1,1)*P(3,3)-P(1,3)*P(3,1))/DET
      INVP(2,3) = -(P(1,1)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,1))/DET
      INVP(3,1) = (P(2,1)*P(3,2)-P(2,2)*P(3,1))/DET
      INVP(3,2) = -(P(1,1)*P(3,2)-P(1,2)*P(3,1))/DET
      INVP(3,3) = (P(1,1)*P(2,2)-P(1,2)*P(2,1))/DET

C
C      CALCUL DE [MUcart2] = P*[MUcart1]*INVP
C      -----
C
      DO I=1,3
        DO J=1,3
          REK = 0.
          IMK = 0.
          DO K = 1,3
            REK = REK + P(I,K)*MULOC(1,K)*INVP(K,J)
            IMK = IMK + P(I,K)*MULOC(2,K)*INVP(K,J)
          ENDDO
          DB_OUTOF_DH(1,I,J) = REK
          DB_OUTOF_DH(2,I,J) = IMK
        ENDDO
      ENDDO

C
C=====
C
      ELSEIF ( USER_COEFF(1) . EQ. 2) THEN
C
C          CAS CONDUCTEUR ANISOTROPIE CARTESIENNE
C
C=====
C
C      WRITE(*,*)'REGION CONDUCTEUR ANISOTROPIE CARTESIENNE '
C
C      RECUPERATION DES COEFFICIENTS UTILISATEURS
C      -----
C
C      Tenseur mu complexe dans repere cartisien local
C      -----
C
      DO I = 1 , 3
        MULOC(1,I) = MU0*VAL_VAR_PAR(1,I,2)

```

```

      MULOC(2,I) = MUO*VAL_VAR_PAR(2,I,2)
ENDDO

C
C   Vecteur Ux
C   -----
C
C   K = 2
C
C   DO I = 1 , 3
      UX(I) = USER_COEFF(K)
      K = K+1
C   ENDDO

C
C   Vecteur Uy
C   -----
C
C   DO I = 1 , 3
      UY(I) = USER_COEFF(K)
      K=K+1
C   ENDDO

C
C
C   VERIFICATION DE L'ORTHOGONALITE DES VECTEURS UX ET UY
C   -----
C
C   UXUY = UX(1)*UY(1)
&   + UX(2)*UY(2)
&   + UX(3)*UY(3)
C
C   IF ( ABS(UXUY) .GT. EPS ) THEN
      WRITE(*,*)!! ERREUR : VECTEURS UX ET UY NON ORTHOGONAUX !! '
      IOSTAT = -1
      GOTO 900
C   ENDIF

C
C   VECTEUR UNITAIRE Ux / || Ux || : Ui
C   -----
C
C   NORME_UX=SQRT(UX(1)*UX(1)
&   +UX(2)*UX(2)
&   +UX(3)*UX(3))
C
C   DO I = 1 , 3
      UI(I) = UX(I)/NORME_UX
C   ENDDO

C
C   VECTEUR UNITAIRE Uy / || Uy || : Uj
C   -----
C

```

```

NORME_UY=SQRT(UY(1)*UY(1)
&      +UY(2)*UY(2)
&      +UY(3)*UY(3))
C
DO I = 1 , 3
  UJ(I) = UY(I)/NORME_UY
ENDDO
C
C CALCUL DU VECTEUR Uk : Ui ^ Uj
C -----
C
UK(1) = UI(2)*UJ(3)-UI(3)*UJ(2)
UK(2) = UI(3)*UJ(1)-UI(1)*UJ(3)
UK(3) = UI(1)*UJ(2)-UI(2)*UJ(1)
C
C MATRICE DE PASSAGE CART -> CART : P
C -----
C
DO I=1,3
  P(I,1)=UI(I)
  P(I,2)=UJ(I)
  P(I,3)=UK(I)
ENDDO
C
C INVERSION DE LA MATRICE P
C -----
C
C CALL INVMAT(P,INVP)
C
DET= (P(1,1)*P(2,2)-P(1,2)*P(2,1))*P(3,3)
&    + (P(1,3)*P(2,1)-P(1,1)*P(2,3))*P(3,2)
&    + (P(1,2)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,2))*P(3,1)

INVP(1,1) = (P(2,2)*P(3,3)-P(2,3)*P(3,2))/DET
INVP(1,2) = -(P(1,2)*P(3,3)-P(1,3)*P(3,2))/DET
INVP(1,3) = (P(1,2)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,2))/DET
INVP(2,1) = -(P(2,1)*P(3,3)-P(2,3)*P(3,1))/DET
INVP(2,2) = (P(1,1)*P(3,3)-P(1,3)*P(3,1))/DET
INVP(2,3) = -(P(1,1)*P(2,3)-P(1,3)*P(2,1))/DET
INVP(3,1) = (P(2,1)*P(3,2)-P(2,2)*P(3,1))/DET
INVP(3,2) = -(P(1,1)*P(3,2)-P(1,2)*P(3,1))/DET
INVP(3,3) = (P(1,1)*P(2,2)-P(1,2)*P(2,1))/DET
C
C CALCUL DE [MUcart2] = P*[MUcart1]*INVP
C -----
C
DO I=1,3
  DO J=1,3
    REK = 0.
    IMK = 0.

```

```

      DO K = 1,3
        REK = REK + P(I,K)*MULOC(1,K)*INVP(K,J)
        IMK = IMK + P(I,K)*MULOC(2,K)*INVP(K,J)
      ENDDO
      DB_OUTOF_DH(1,I,J) = REK
      DB_OUTOF_DH(2,I,J) = IMK
    ENDDO
  ENDDO
C
C=====
C
C   ELSEIF ( USER_COEFF(1) .EQ. 3 ) THEN
C
C       CAS CONDUCTEUR ANISOTROPIE CONIQUE
C
C=====
C
C   WRITE(*,*)'REGION CONDUCTEUR ANISOTROPIE CONIQUE OU CYLINDRIQUE'
C
C   RECUPERATION DES COEFFICIENTS UTILISATEURS
C   -----
C
C   Tenseur mu complexe dans repere conique local
C   -----
C
C   DO I = 1 , 3
C     MULOC(1,I) = MU0*VAL_VAR_PAR(1,I,2)
C     MULOC(2,I) = MU0*VAL_VAR_PAR(2,I,2)
C   ENDDO
C
C   K = 2
C
C   Centre bobine
C   -----
C   DO I = 1 , 3
C     ORI(I) = USER_COEFF(K)
C     K = K+1
C   ENDDO
C
C   Vecteur directeur de l'axe bobine
C   -----
C
C   DO I = 1 , 3
C     AXE_BOB(I) = USER_COEFF(K)
C     K=K+1
C   ENDDO
C
C   Angle (radian) spires / axe bobine
C   -----
C

```



```

PI = ACOS(-1.D0)
ALPHA = PI * USER_COEFF(K) / 180.
C
C
C PASSAGE ESPACE AFFINE -> ESPACE VECTORIEL
C -----
C
DO I = 1 , 3
  R(I) = COOPT(I)-ORI(I)
ENDDO
C
C
C MATRICE DE PASSAGE CONIQUE -> CYLINDRIQUE (ROTATION AUTOUR DE Uteta) : P1
C -----
C
P1(1,1) = COS(ALPHA)
P1(1,2) = 0.
P1(1,3) = - SIN(ALPHA)
C
P1(2,1) = 0.
P1(2,2) = 1.
P1(2,3) = 0.
C
P1(3,1) = SIN(ALPHA)
P1(3,2) = 0.
P1(3,3) = COS(ALPHA)
C
C INVERSION DE LA MATRICE P1
C -----
C
INVP1(1,1) = COS(ALPHA)
INVP1(1,2) = 0.
INVP1(1,3) = SIN(ALPHA)
C
INVP1(2,1) = 0.
INVP1(2,2) = 1.
INVP1(2,3) = 0.
C
INVP1(3,1) = - SIN(ALPHA)
INVP1(3,2) = 0.
INVP1(3,3) = COS(ALPHA)
C
C VECTEUR UNITAIRE DE L'AXE DE LA BOBINE : Uk
C -----
C
NORME_K=SQRT(AXE_BOB(1)*AXE_BOB(1)
&      +AXE_BOB(2)*AXE_BOB(2)
&      +AXE_BOB(3)*AXE_BOB(3))
C
DO I = 1 , 3

```

```

      UK(I) = AXE_BOB(I)/NORME_K
    ENDDO
C
C VECTEUR Uteta DU REP. CYL. LOCAL : Uk ^ R / || Uk ^ R ||
C -----
C
C
      UT(1) = UK(2)*R(3)-UK(3)*R(2)
      UT(2) = UK(3)*R(1)-UK(1)*R(3)
      UT(3) = UK(1)*R(2)-UK(2)*R(1)
C
      NORME_UT=SQRT(UT(1)*UT(1)+UT(2)*UT(2)+UT(3)*UT(3))
C
      UT(1) = UT(1) / NORME_UT
      UT(2) = UT(2) / NORME_UT
      UT(3) = UT(3) / NORME_UT
C
C CALCUL DU VECTEUR Ur DU REP. CYL. LOCAL : Uteta ^ Uk
C -----
C
      UR(1) = UT(2)*UK(3)-UT(3)*UK(2)
      UR(2) = UT(3)*UK(1)-UT(1)*UK(3)
      UR(3) = UT(1)*UK(2)-UT(2)*UK(1)
C
C MATRICE DE PASSAGE CYL -> CART : P2
C -----
C
      DO I=1,3
        P2(I,1)=UR(I)
        P2(I,2)=UT(I)
        P2(I,3)=UK(I)
      ENDDO
C
C INVERSION DE LA MATRICE P2
C -----
C
      DET= (P2(1,1)*P2(2,2)-P2(1,2)*P2(2,1))*P2(3,3)
&      + (P2(1,3)*P2(2,1)-P2(1,1)*P2(2,3))*P2(3,2)
&      + (P2(1,2)*P2(2,3)-P2(1,3)*P2(2,2))*P2(3,1)

      INVP2(1,1) = (P2(2,2)*P2(3,3)-P2(2,3)*P2(3,2))/DET
      INVP2(1,2) = -(P2(1,2)*P2(3,3)-P2(1,3)*P2(3,2))/DET
      INVP2(1,3) = (P2(1,2)*P2(2,3)-P2(1,3)*P2(2,2))/DET
      INVP2(2,1) = -(P2(2,1)*P2(3,3)-P2(2,3)*P2(3,1))/DET
      INVP2(2,2) = (P2(1,1)*P2(3,3)-P2(1,3)*P2(3,1))/DET
      INVP2(2,3) = -(P2(1,1)*P2(2,3)-P2(1,3)*P2(2,1))/DET
      INVP2(3,1) = (P2(2,1)*P2(3,2)-P2(2,2)*P2(3,1))/DET
      INVP2(3,2) = -(P2(1,1)*P2(3,2)-P2(1,2)*P2(3,1))/DET
      INVP2(3,3) = (P2(1,1)*P2(2,2)-P2(1,2)*P2(2,1))/DET

```

```

C
C
C CALCUL DE [MUcart] = P2*P1*[MUconi]*INVP1*INVP2
C -----
C
C 1ere etape : Calcul de P = P2*P1 et INVP = INVP1*INVP2
C -----
  DO I=1,3
    DO J=1,3
      P(I,J) = 0.
      INVP(I,J) = 0.
      DO K = 1,3
        P(I,J) = P(I,J) + P2(I,K)*P1(K,J)
        INVP(I,J) = INVP(I,J) + INVP1(I,K)*INVP2(K,J)
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO
C
C 2eme etape : Calcul de [MUcart] = P*[MUconi]*INVP
C -----
  DO I=1,3
    DO J=1,3
      REK = 0.
      IMK = 0.
      DO K = 1,3
        REK = REK + P(I,K)*MULOC(1,K)*INVP(K,J)
        IMK = IMK + P(I,K)*MULOC(2,K)*INVP(K,J)
      ENDDO
      DB_OUTOF_DH(1,I,J) = REK
      DB_OUTOF_DH(2,I,J) = IMK
    ENDDO
  ENDDO
C
C
C-----
C
C ELSE
C
C       CAS NON DEFINI
C
C-----
C
C       WRITE(*,*)'MATERIAU UTILISATEUR INCONNU'
C
C-----
C
C ENDIF
C
C-----

```

```

C
C CALCUL DE BMAG DANS LE REPERE CARTESIEN GLOBAL
C -----
C
  DO I = 1 , 3
    BMAG(1,I) = 0
    BMAG(2,I) = 0
    DO J = 1 , 3
      BMAG(1,I) = BMAG(1,I)
&          + DB_OUTOF_DH(1,I,J)*HMAG(1,J)
&          - DB_OUTOF_DH(2,I,J)*HMAG(2,J)
      BMAG(2,I) = BMAG(2,I)
&          + DB_OUTOF_DH(1,I,J)*HMAG(2,J)
&          + DB_OUTOF_DH(2,I,J)*HMAG(1,J)
    ENDDO
  ENDDO
C
C
900 CONTINUE
C
  END

```

SECRET

SECRET

SECRET

SECRET

SECRET

SECRET

# ANNEXE 6

## 1. Etude sur le calcul EF de la résistance Stoll

Nous avons voulu vérifier si notre calcul EF de résistance était juste quand nous considérons un conducteur massif ( $\mu, \sigma$ ) alimenté. Ce calcul a été effectué sur un conducteur de section égale à  $5 \times 10 \text{ mm}^2$  en considérant une boîte infinie. Cette dernière condition représente la seule différence entre la simulation éléments finis et les hypothèses du calcul analytique. En effet, lors du calcul analytique la résistance de Stoll est obtenue pour un champ strictement uniforme sur chacun des côtés du conducteur.

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Fréquences	R Flux2D	R Stoll	$\Delta \%$
10 kHz	3,03E-03	0,0029	-4,38
50 kHz	6,29E-03	0,0056	-12,25
100 kHz	8,70E-03	0,0075	-16

Plus nous montons en fréquence, plus la différence entre le calcul analytique et celui par éléments finis (Flux2D) est grande.

## 2. Influence du rayon de courbure sur le calcul EF de la résistance de Stoll

Cette étude va nous permettre de voir comment évolue le calcul éléments finis en fonction du rayon de courbure du conducteur. En effet, lors du calcul par Stoll nous considérons un barreau parallélépipédique alors que dans un transformateur les conducteurs ont des dimensions finies et ont pour la plupart des parties courbées.

Considérons un conducteur de section  $5 \times 10 \text{ mm}^2$  dont le plus long côté est suivant le rayon du conducteur (de forme circulaire).

	Fréquences	10 kHz	50 kHz	100 kHz
2D axi	R=12,5mm	0,0025	0,0049	0,0066
	$\Delta \%$	13,79	12,5	12
	R=25mm	0,0026	0,0052	0,0071
	$\Delta \%$	10,34	7,14	5,33
	R=50mm	0,0026	0,0053	0,0072
	$\Delta \%$	10,34	5,36	4
Référence:	R Stoll	0,0029	0,0056	0,0075

Nous remarquons que plus le rayon de courbure est petit, plus l'erreur est importante. Cela confirme bien l'hypothèse faite lors du calcul de Stoll.

Tableau 1 : Les indicateurs de la performance

Les indicateurs de la performance sont des mesures quantitatives ou qualitatives qui permettent d'évaluer les performances d'une organisation. Ils sont utilisés pour mesurer l'efficacité, l'efficience, la qualité, la sécurité, l'innovation, etc. Les indicateurs de la performance sont classés en deux catégories : les indicateurs de processus et les indicateurs de résultats. Les indicateurs de processus mesurent l'efficacité des activités internes de l'organisation, tandis que les indicateurs de résultats mesurent l'impact des activités de l'organisation sur ses parties prenantes.

Tableau 1 : Les indicateurs de la performance

Indicateur	Unité	Objectif	Statut
Productivité	\$/heure	Augmenter de 10%	En cours
Qualité	% de défauts	Réduire de 5%	Atteint
Sécurité	Nombre d'accidents	Diminuer de 20%	En cours
Innovation	Nombre de brevets	Augmenter de 15%	En cours

Les indicateurs de la performance sont des mesures quantitatives ou qualitatives qui permettent d'évaluer les performances d'une organisation. Ils sont utilisés pour mesurer l'efficacité, l'efficience, la qualité, la sécurité, l'innovation, etc. Les indicateurs de la performance sont classés en deux catégories : les indicateurs de processus et les indicateurs de résultats. Les indicateurs de processus mesurent l'efficacité des activités internes de l'organisation, tandis que les indicateurs de résultats mesurent l'impact des activités de l'organisation sur ses parties prenantes.

2. Influence du type de construction sur la performance

Le type de construction a une influence majeure sur la performance d'un bâtiment. Les constructions modernes, utilisant des matériaux innovants et des techniques de construction avancées, offrent de meilleures performances en termes de consommation d'énergie, de qualité de l'air intérieur, de confort thermique et acoustique, et de durabilité. En revanche, les constructions traditionnelles, utilisant des matériaux et des techniques moins avancés, ont tendance à avoir de moins bonnes performances. Il est donc essentiel de choisir le type de construction adapté à ses besoins et à son budget.

Indicateur	Construction traditionnelle	Construction moderne
Consommation d'énergie	100 kWh/m²/an	50 kWh/m²/an
Qualité de l'air intérieur	1.5	0.5
Confort thermique	1.5	2.5
Confort acoustique	1.5	2.5
Durabilité	10 ans	20 ans

Le type de construction a une influence majeure sur la performance d'un bâtiment. Les constructions modernes, utilisant des matériaux innovants et des techniques de construction avancées, offrent de meilleures performances en termes de consommation d'énergie, de qualité de l'air intérieur, de confort thermique et acoustique, et de durabilité. En revanche, les constructions traditionnelles, utilisant des matériaux et des techniques moins avancés, ont tendance à avoir de moins bonnes performances. Il est donc essentiel de choisir le type de construction adapté à ses besoins et à son budget.

## ANNEXE 7 : Valeurs des $\mu^*$ pour le transformateur cas-test

Valeurs de la perméabilité complexe aux fréquences de l'échantillonnage choisi pour le cas test.

Conducteur HT 3mm\*10mm + guipage de 1.5mm  
Conducteur BT 3mm\*9.7mm

Circuit magnétique : tole d'épaisseur 0.3mm,  
isolant d'épaisseur 9e-3mm  
murtole 10000, sigma tole 2.2E6

La composante de muc du circuit magnétique selon la direction d'empilage est constant et réelle.

Frequence = 2

-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.99998431645276  
Im(muh\_HT\_r) = -2.9354879176433D-03

Re(muh\_HT\_t) = 0.99999984440938  
Im(muh\_HT\_t) = -2.1420230561881D-04

Re(muh\_HT\_k) = 0.9999982409766  
Im(muh\_HT\_k) = -2.6420159856288D-04

Re(muh\_BT\_r) = 0.99993811746842  
Im(muh\_BT\_r) = -7.1808740371814D-03

Re(muh\_BT\_t) = 0.9999960034210  
Im(muh\_BT\_t) = -5.5325228608516D-04

Re(muh\_BT\_k) = 0.9999943376213  
Im(muh\_BT\_k) = -6.8692399400399D-04

Re(muh\_CM\_xy) = 9708.6878956586  
Im(muh\_CM\_xy) = -25.296599866865

Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990

Frequence = 50

-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.99038219417943  
Im(muh\_HT\_r) = -7.2059935861953D-02

Re(muh\_HT\_t) = 0.99990287179211  
Im(muh\_HT\_t) = -5.3532388229863D-03

Re(muh\_HT\_k) = 0.99989009262454  
Im(muh\_HT\_k) = -6.6031801869198D-03

Re(muh\_BT\_r) = 0.96307721366026



Im(muh\_BT\_r) = -0.17148639708495  
Re(muh\_BT\_t) = 0.99975057938570  
Im(muh\_BT\_t) = -1.3821115006995D-02  
Re(muh\_BT\_k) = 0.99964625508659  
Im(muh\_BT\_k) = -1.7165734996621D-02  
Re(muh\_CM\_xy) = 9659.6400622252  
Im(muh\_CM\_xy) = -628.53545057001  
Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990

Frequence = 1000  
-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.53110561691241  
Im(muh\_HT\_r) = -0.21796844004000  
Re(muh\_HT\_t) = 0.96596101614267  
Im(muh\_HT\_t) = -9.4354596101678D-02  
Re(muh\_HT\_k) = 0.96056374302343  
Im(muh\_HT\_k) = -0.11873682617187  
Re(muh\_BT\_r) = 0.45660507715444  
Im(muh\_BT\_r) = -0.22953766318019  
Re(muh\_BT\_t) = 0.91248321625895  
Im(muh\_BT\_t) = -0.24390326517509  
Re(muh\_BT\_k) = 0.94652286153789  
Im(muh\_BT\_k) = -0.15164827248092  
Re(muh\_CM\_xy) = 4054.0628766036  
Im(muh\_CM\_xy) = -3730.6260163401  
Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990

Frequence = 10000  
-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.33166091881964  
Im(muh\_HT\_r) = -8.9113418810647D-02  
Re(muh\_HT\_t) = 0.72453923892912  
Im(muh\_HT\_t) = -9.7733884294964D-02  
Re(muh\_HT\_k) = 0.64027440301853  
Im(muh\_HT\_k) = -0.12884115894308  
Re(muh\_BT\_r) = 6.8129453252999D-02  
Im(muh\_BT\_r) = -6.8129354631166D-02  
Re(muh\_BT\_t) = 0.28588638853448  
Im(muh\_BT\_t) = -0.25498391150433

Re(muh\_BT\_k) = 0.21639553935028  
Im(muh\_BT\_k) = -0.22569726014790

Re(muh\_CM\_xy) = 1098.5906185012  
Im(muh\_CM\_xy) = -1098.2113334689

Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990

Frequence = 50000  
-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.27616255952902  
Im(muh\_HT\_r) = -4.2859935330695D-02

Re(muh\_HT\_t) = 0.66464027727151  
Im(muh\_HT\_t) = -4.6369411007336D-02

Re(muh\_HT\_k) = 0.56392971453729  
Im(muh\_HT\_k) = -6.0367696427330D-02

Re(muh\_BT\_r) = 3.0468382453607D-02  
Im(muh\_BT\_r) = -3.0468382453607D-02

Re(muh\_BT\_t) = 0.12899907855954  
Im(muh\_BT\_t) = -0.12148383981595

Re(muh\_BT\_k) = 9.8515081979684D-02  
Im(muh\_BT\_k) = -9.8525297284775D-02

Re(muh\_CM\_xy) = 491.12389734998  
Im(muh\_CM\_xy) = -491.09476708028

Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990

Frequence = 100000  
-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.26289317116020  
Im(muh\_HT\_r) = -3.0835150266156D-02

Re(muh\_HT\_t) = 0.65021556804152  
Im(muh\_HT\_t) = -3.3467897847248D-02

Re(muh\_HT\_k) = 0.54524127480350  
Im(muh\_HT\_k) = -4.3426129060059D-02

Re(muh\_BT\_r) = 2.1544399844731D-02  
Im(muh\_BT\_r) = -2.1544399844731D-02

Re(muh\_BT\_t) = 9.1210669074234D-02  
Im(muh\_BT\_t) = -8.7551857408974D-02

Re(muh\_BT\_k) = 6.9660323016363D-02  
Im(muh\_BT\_k) = -6.9660164471500D-02

Re(muh\_CM\_xy) = 347.28556874788  
Im(muh\_CM\_xy) = -347.25644253398

Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990

Frequence = 500000  
-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.24514507329665  
Im(muh\_HT\_r) = -1.4112062672607D-02

Re(muh\_HT\_t) = 0.63064376564543  
Im(muh\_HT\_t) = -1.4851428531997D-02

Re(muh\_HT\_k) = 0.52024597822612  
Im(muh\_HT\_k) = -1.9874488263922D-02

Re(muh\_BT\_r) = 9.6349485174508D-03  
Im(muh\_BT\_r) = -9.6349485174508D-03

Re(muh\_BT\_t) = 4.0074584407115D-02  
Im(muh\_BT\_t) = -3.9128938108120D-02

Re(muh\_BT\_k) = 3.1153000206424D-02  
Im(muh\_BT\_k) = -3.1153000206424D-02

Re(muh\_CM\_xy) = 155.32692843959  
Im(muh\_CM\_xy) = -155.29780222600

Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990

Frequence = 1000000  
-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.24093535332249  
Im(muh\_HT\_r) = -1.0033508679538D-02

Re(muh\_HT\_t) = 0.62581063929853  
Im(muh\_HT\_t) = -1.0129693077102D-02

Re(muh\_HT\_k) = 0.51431728926251  
Im(muh\_HT\_k) = -1.4130524723683D-02

Re(muh\_BT\_r) = 6.8129374330727D-03  
Im(muh\_BT\_r) = -6.8129374330727D-03

Re(muh\_BT\_t) = 2.7463515661971D-02  
Im(muh\_BT\_t) = -2.6613008553895D-02

Re(muh\_BT\_k) = 2.2028497700269D-02  
Im(muh\_BT\_k) = -2.2028497700269D-02

Re(muh\_CM\_xy) = 109.84125527097  
Im(muh\_CM\_xy) = -109.81212905737

Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990

Frequence = 5000000  
-----

Re(muh\_HT\_r) = 0.23531597195894  
Im(muh\_HT\_r) = -4.5200239330335D-03

Re(muh\_HT\_t) = 0.61931512309894  
Im(muh\_HT\_t) = -3.6862742982918D-03

Re(muh\_HT\_k) = 0.50640332717550  
Im(muh\_HT\_k) = -6.3657003723556D-03

Re(muh\_BT\_r) = 3.0468382453607D-03  
Im(muh\_BT\_r) = -3.0468382453607D-03

Re(muh\_BT\_t) = 1.0471795429834D-02  
Im(muh\_BT\_t) = -9.5174591887339D-03

Re(muh\_BT\_k) = 9.8514436599997D-03  
Im(muh\_BT\_k) = -9.8514436599997D-03

Re(muh\_CM\_xy) = 49.138603278846  
Im(muh\_CM\_xy) = -49.109477065254

Re(muh\_CM\_k) = 34.219269102990