

# Soutenance d'Habilitation à Diriger des Recherches

David Hernandez

Autour des représentations des algèbres  
quantiques : géométrie, dualité de Langlands  
et catégorification des algèbres cluster.

17 juillet 2009

Ecole Normale Supérieure - Paris

# Catégorie des représentations de dimension finie $\mathcal{F}$

## Rappels de résultats fondamentaux

- $\mathcal{F}$  non semi-simple, tensorielle, non tressée.
- Paramétrisation des simples de  $\mathcal{F}$  par les polynômes de Drinfeld (Chari-Pressley).
- Théorie des caractères pour  $\mathcal{F}$  :  $q$ -caractères de Frenkel-Reshetikhin. Conséquence : l'anneau de Grothendieck  $\text{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$  de  $\mathcal{F}$  est commutatif.
- Types  $ADE$  : construction géométrique de Nakajima (variétés carquois).
- Pas de formule de caractères "de Weyl".
- Pas de bases cristallines en général. Les modules fondamentaux en ont une pour un bon choix du paramètre spectral (Kashiwara).
- Critère de cyclicité des produits tensoriels de modules fondamentaux (Chari, Kashiwara, Varagnolo-Vasserot).

## Conjecture de Kirillov-Reshetikhin

Pour  $\nu = (\nu_k^{(i)})_{i \in I, k > 0}$  des entiers positifs presque tous nuls et  $a \in \mathbb{C}^*$  :

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i \in I, k \geq 1} (\chi(W_{k,a}^{(i)}))^{\nu_k^{(i)}} \\
 &= \frac{\sum_{N=(N_k^{(i)})_{i \in I, k > 0}} \prod \binom{P_k^{(i)}(\nu, N) + N_k^{(i)}}{N_k^{(i)}} e(-k N_k^{(i)} \alpha_i)}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))},
 \end{aligned}$$

avec

$$= \sum_{l=1 \dots \infty} \nu_l^{(i)} \min(k, l) - \sum_{j \in I, l > 0} N_l^{(j)} r_i C_{i,j} \min(k/r_j, l/r_i),$$

et

$$\binom{b}{c} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(c+1)}$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma usuelle.

## T-systèmes

Pour  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $k \geq 1$ ,  $i \in I$ , on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow S_{k,a}^{(i)} \rightarrow W_{k,a}^{(i)} \otimes W_{k,aq_i^2}^{(i)} \rightarrow W_{k+1,a}^{(i)} \otimes W_{k-1,aq_i^2}^{(i)} \rightarrow 0.$$

Définition du module  $S_{k,a}^{(i)}$ . Pour  $r_i \geq 2$  :

$$\left( \bigotimes_{j/a_{j,i}=-1} W_{k,aq_i}^{(j)} \right) \otimes \left( \bigotimes_{j/a_{j,i} \leq -2} W_{d_i k, aq}^{(j)} \right).$$

Pour  $\mathfrak{g} \neq G_2$  et  $r_i = 1$  :

$$\left( \bigotimes_{j/a_{i,j}=-1} W_{k,aq}^{(j)} \right) \otimes \left( \bigotimes_{j/a_{i,j}=-2} W_{r,aq}^{(j)} \otimes W_{r,aq^3}^{(j)} \right) \text{ si } k = 2r,$$

$$\left( \bigotimes_{j/a_{i,j}=-1} W_{k,aq}^{(j)} \right) \otimes \left( \bigotimes_{j/a_{i,j}=-2} W_{r+1,aq}^{(j)} \otimes W_{r,aq^3}^{(j)} \right) \text{ si } k = 2r + 1.$$

Pour  $r_i = 1$  et  $\mathfrak{g} = G_2$  :

$$S_{k,a}^{(i)} = \begin{cases} W_{r,aq}^{(j)} \otimes W_{r,aq^3}^{(j)} \otimes W_{r,aq^5}^{(j)} & \text{si } k = 3r, \\ W_{r+1,aq}^{(j)} \otimes W_{r,aq^3}^{(j)} \otimes W_{r,aq^5}^{(j)} & \text{si } k = 3r + 1, \\ W_{r+1,aq}^{(j)} \otimes W_{r+1,aq^3}^{(j)} \otimes W_{r,aq^5}^{(j)} & \text{si } k = 3r + 2, \end{cases}$$

avec  $j \neq i$  est l'autre sommet.

# Exemples de formules de branchement

Type  $D_{n+1}^{(2)}$ .

$res : \text{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \rightarrow \text{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ , foncteur de restriction.

Pour  $1 \leq i \leq n - 1$  :

$$res(W_{k,a}^{(i)}) = \bigoplus_{m_1 \geq 0, \dots, m_i \geq 0 \text{ et } m_1 + \dots + m_i \leq k} L(m_1\omega_1 + \dots + m_i\omega_i)$$

et

$$res(W_{k,a}^{(n)}) = L(k\omega_n).$$

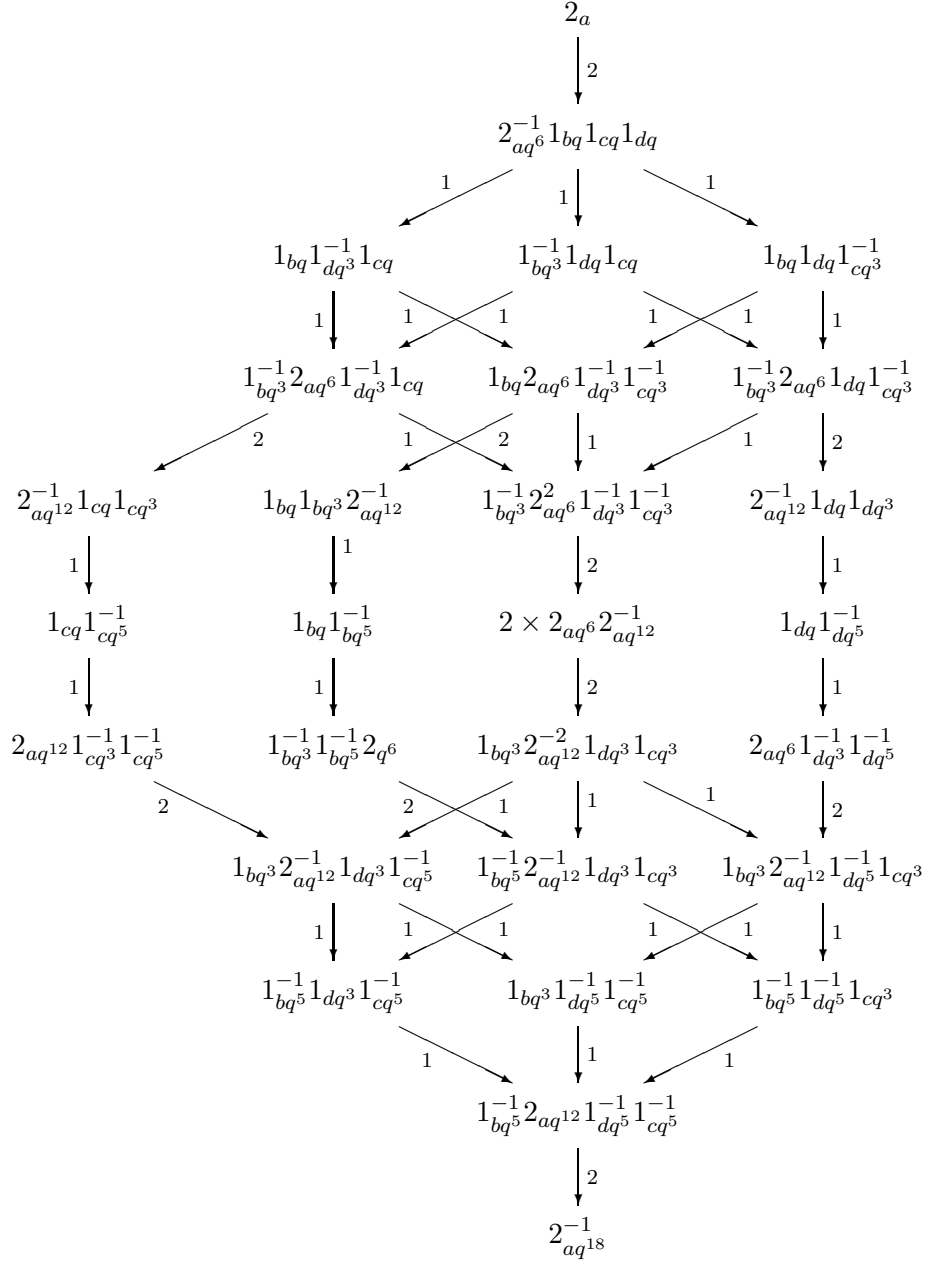


FIG. 1 – **Type**  $D_4^{(3)}$  :  $\chi_q^\sigma(V_{2,a})$

# Réalisation monomiale des cristaux finis

Type  $A_3^{(1)}$ .

Cristal extrémal infini :

$$\dots \xrightarrow{0} 1_{q^0}0_{q^{-1}} \xrightarrow{1} 2_q1_{q^2} \xrightarrow{2} 3_{q^2}2_{q^3} \xrightarrow{3} 0_{q^3}3_{q^4} \xrightarrow{0} 1_{q^4}0_{q^5} \xrightarrow{1} \dots$$

Identification  $1_{q^4}0_{q^5} \equiv 1_{q^0}0_{q^{-1}}$  : automorphisme de Kashiwara.

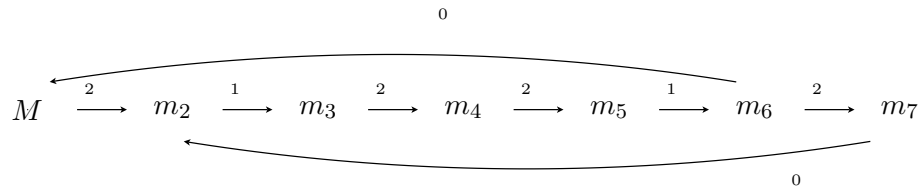
Décalage d'indice de  $q^4$ .

Quotient : cristal fini de cardinal 4.

# Cristaux de représentations fondamentales

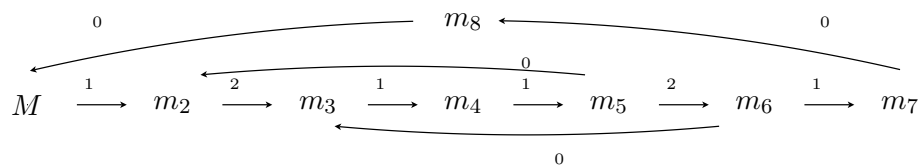
Type  $G_2^{(1)}$ .

Représentation fondamentale correspondant à  $\omega_2$ .



Type  $D_4^{(3)}$ .

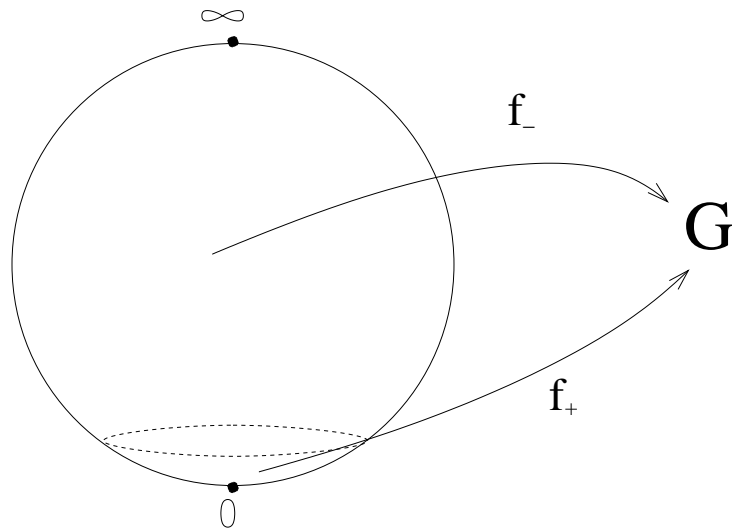
Représentation fondamentale correspondant à  $\omega_1$ .





# Factorisation de Riemann-Hilbert

$$f \in LG$$



$$f = f_+ h f_-$$

$f_+ \in LG_+$  : germe de fonction holomorphe en 0

$f_- \in LG_-$  : fonction holomorphe  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow G$

$h$  : sous-groupe à un paramètre de  $B_+ \cap B_-$  (intersection de Borel opposés).

## Exemple $GL_1 = \mathbb{C}^*$

Factorisation de Riemann-Hilbert de  $f \in LGL_1$  :

$$f = f_+ z^{n(f)} f_-$$

avec  $f_{\pm} \in L^{\pm}GL_1$ ,  $n(f) \in \mathbb{Z}$ ,  $f_-(\infty) = 1$ .

$$(LGL_1)_0 = \{f \in LGL_1 | n(f) = 0\}.$$

$$\hat{\mathcal{L}} = (LGL_1)_0 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*.$$

Triplet de Manin  $(\tilde{G}L_1, H, K)$ ,

$$\tilde{G}L_1 = \hat{\mathcal{L}} \times \hat{\mathcal{L}},$$

$K$  : le sous-groupe diagonal

$$H = \{((f_+, \Lambda, \Gamma), (f_-, \Lambda^{-1}, \Gamma^{-1})) \in \tilde{G}L_1$$

$$| f_{\pm} \in (LGL_1)^{\pm}, f_+(0) = f_-(\infty)^{-1}\}.$$

Eléments  $h \in H$  :

$$h = ((ae^{\sum_{n>0} a_n z^n}, \lambda, \gamma), (a^{-1}e^{\sum_{n<0} a_n z^n}, \lambda^{-1}, \gamma^{-1})) \in H.$$

Fonctions

$$k(h) = a, \quad \Lambda(h) = \lambda, \quad \Gamma(h) = \gamma, \quad h_m(h) = a_m.$$

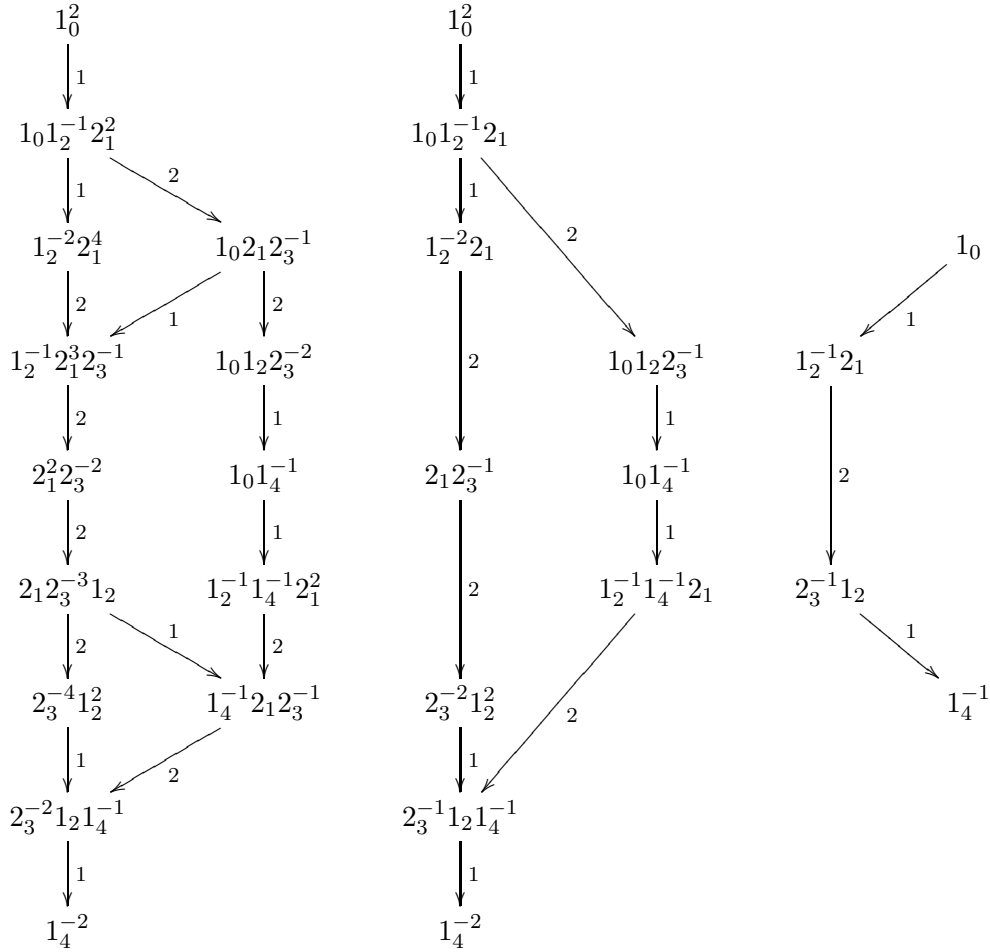
$$C[H] = \mathbb{C}[\Lambda^{\pm 1}, \Gamma^{\pm 1}, k^{\pm 1}, h_m]_{m \in \mathbb{Z} \setminus 0}.$$

$$\{h_m, h_{m'}\} = \delta_{m, -m'} (\Gamma^{2m} - \Gamma^{-2m}), \quad \{h_m, \Lambda\} = m \Lambda h_m.$$

Relations de  $\mathcal{U}_{\epsilon}(\hat{gl}_1)$  (algèbre de Heisenberg quantique).

# Dualité de Langlands - représentations de $\mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}$  de type  $B_2$



$\mathfrak{g}^L$  de type  $C_2$ .

$(B_2, 2, 1) : (\lambda_1, \lambda_2 > 0)$

$$\begin{aligned} \Pi(\chi(2\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)) &= \chi^L(\lambda_1\check{\omega}_1 + \lambda_2\check{\omega}_2) + \chi^L(\lambda_1\check{\omega}_1 + (\lambda_2 - 1)\check{\omega}_2) \\ &+ \chi^L((\lambda_1 - 1)\check{\omega}_1 + (\lambda_2 + 1)\check{\omega}_2) + \chi^L((\lambda_1 - 1)\check{\omega}_1 + \lambda_2\check{\omega}_2). \end{aligned}$$

# Groupes quantiques d'interpolation

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{g}) & \\
 \swarrow^{t=1} & & \searrow^{q=\epsilon} \\
 \tilde{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\text{Langlands}} & \tilde{\mathcal{U}}_{-t}(\mathfrak{g}^L)
 \end{array}$$

Exemple :  $\mathcal{U}_{q,t}(B_1)$ .

Générateurs :  $X^\pm, K^{\pm 1}, \tilde{K}^{\pm 1}, \eta, C, \tilde{C}$ .

Relations :

$\mathbb{C}[K^{\pm 1}, \tilde{K}^{\pm 1}, \eta]$  est commutative,  $C, \tilde{C}$  centraux

$$KX^\pm = q^{\pm 2}X^\pm K, \tilde{K}X^\pm = t^{\pm 1}X^\pm \tilde{K}, \eta X^\pm = X^\pm(\eta \pm 1),$$

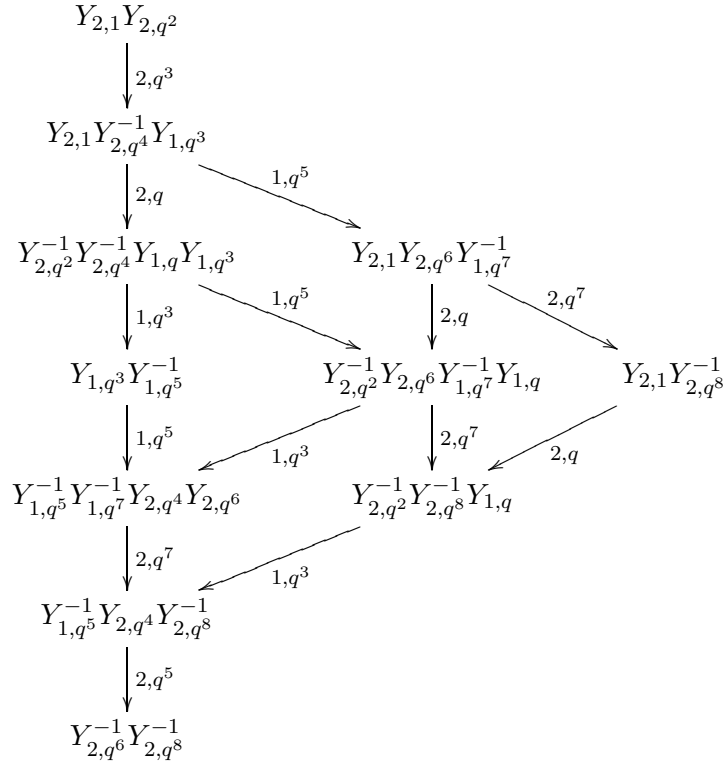
$$\begin{aligned}
 & (q - q^{-1})(qt - (qt)^{-1})X^\pm X^\mp = q^C (t^{\tilde{c}} \tilde{K}^{\pm 1})^P \\
 & + q^{-C} (t^{\tilde{c}} \tilde{K}^{\pm 1})^{-P} - q^{\mp 1} t^{\pm \tilde{c}} \tilde{K} K - q^{\pm 1} t^{\mp \tilde{c}} (\tilde{K} K)^{-1},
 \end{aligned}$$

où  $P = (-1)^\eta$  et  $\tilde{c} = P\tilde{C} - 1/2$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{U}_{q,t}(B_1) & \\
 \swarrow^{t=1} & & \searrow^{q=i} \\
 \mathcal{U}_q(sl_2) = \mathcal{U}_q(B_1) & \xrightarrow{\text{Langlands}} & \mathcal{U}_{t^2}(sl_2) = \mathcal{U}_{-t}(B_1^L)
 \end{array}$$

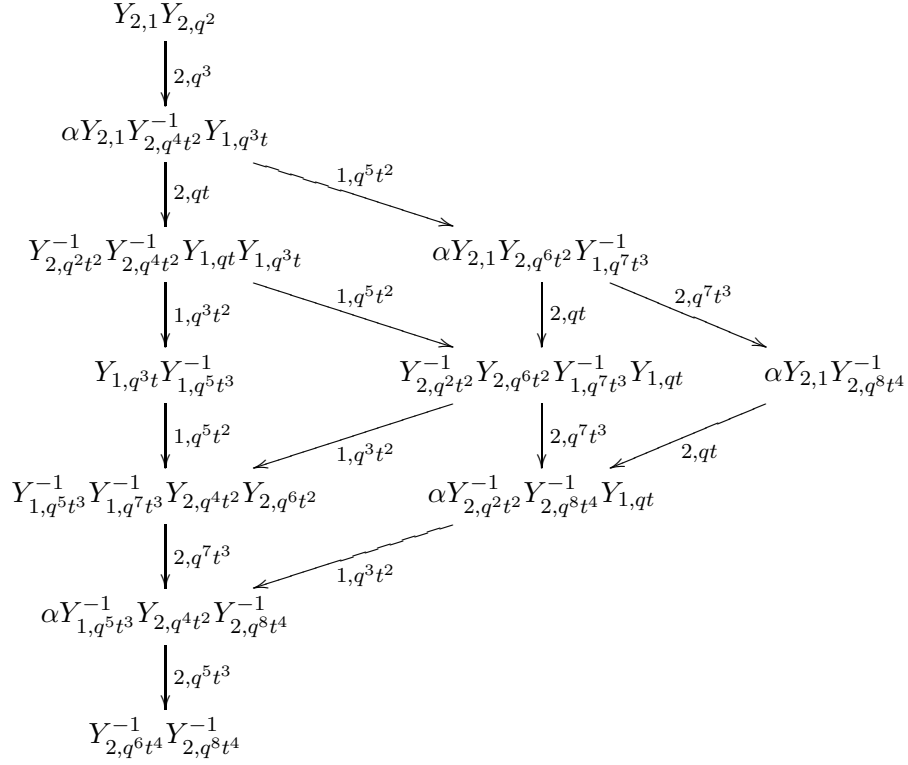
# $(q, t)$ -caractères d'interpolation

Module KR de  $\mathcal{U}_q(B_2^{(1)})$  de dimension 11.



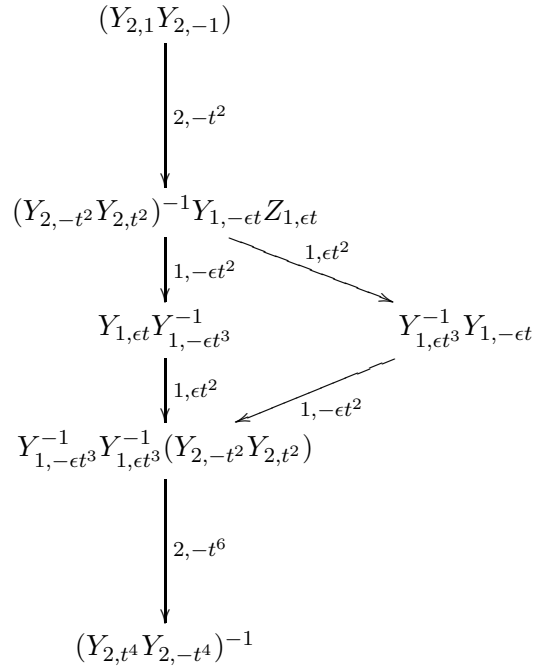
# $(q, t)$ -caractères d'interpolation

Module KR de  $\mathcal{U}_q(B_2^{(1)})$  de dimension 11.



# $(q, t)$ -caractères d'interpolation

Représentation fondamentale de dimension 6 de  $\mathcal{U}_t(A_3^{(2)})$ .



## Algèbres cluster

$$0 \geq d \geq n \geq 0.$$

$B \in \mathcal{M}_{d-n}(\mathbb{Z})$  antisymétrique.

$\mathcal{A}(B)$  sous-algèbre de  $\mathcal{F} = \mathbb{C}(y_1, \dots, y_n)$  générée par les variables cluster définies inductivement par mutations.

Graine initiale :  $((y_1, \dots, y_n), B)$ .

Autres graines :  $((z_1, \dots, z_n), D)$  où  $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{F}$  et  $D \in \mathcal{M}_{d-n}(\mathbb{Z})$  est antisymétrique.

Mutation pour  $k \in [1, d - n]$  :

$$((z'_1, \dots, z'_n), D') = \mu_k((z_1, \dots, z_n), D)$$

avec

$$z'_k = \frac{\prod_{D_{i,k} > 0} z_i^{D_{i,k}} + \prod_{D_{i,k} < 0} z_i^{-D_{i,k}}}{z_k}$$

$$D'_{i,j} = \begin{cases} -D_{i,j} & \text{si } k \in \{i, j\}, \\ D_{i,j} + \frac{|D_{i,k}|D_{k,j} + D_{i,k}|D_{k,j}|}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variables cluster : les  $z_i$  de tous les  $((z_1, \dots, z_n), B)$ .



## Catégorification monoïdale - Exemple

Type  $A_3$ .

12 représentations simples premières dans  $\mathcal{C}_1$  :

Représentations fondamentales :  $L(Y_{1,1})$ ,  $L(Y_{2,q^3})$ ,  $L(Y_{3,1})$ ,  
 $L(Y_{1,q^2})$ ,  $L(Y_{2,q})$ ,  $L(Y_{3,q^2})$ ,

Modules KR :  $L(Y_{1,1}Y_{1,q^2})$ ,  $L(Y_{2,q}Y_{2,q^3})$ ,  $L(Y_{3,1}Y_{3,q^2})$ ,

Affinisations minimales :  $L(Y_{1,1}Y_{2,q^3})$ ,  $L(Y_{2,q^3}Y_{3,1})$ ,

Autre représentation :  $L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}Y_{3,1})$ .

Relations d'échange :

$$L(Y_{1,1}) \otimes L(Y_{1,q^2}) = L(Y_{1,1}Y_{1,q^2}) + L(Y_{2,q}),$$

$$L(Y_{2,q}) \otimes L(Y_{2,q^3}) = L(Y_{2,q}Y_{2,q^3}) + L(Y_{1,q}) \otimes L(Y_{3,q}),$$

$$L(Y_{1,1}) \otimes L(Y_{2,q^3}Y_{3,1}) = L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}Y_{3,1}) + L(Y_{3,1}Y_{3,q^2}),$$

$$L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}Y_{3,1}) \otimes L(Y_{2,q})$$

$$= L(Y_{2,q}Y_{2,q^3}) \otimes L(Y_{1,1})L(Y_{3,1}) + L(Y_{1,1}Y_{1,q^2}) \otimes L(Y_{3,1}Y_{3,q^2}),$$

$$L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}Y_{3,1}) \otimes L(Y_{2,q^3})$$

$$= L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}) \otimes L(Y_{3,1}Y_{2,q^3}) + L(Y_{2,q}Y_{2,q^3}),$$

$$L(Y_{2,q^3}Y_{3,1}) \otimes L(Y_{3,q^2})$$

$$= L(Y_{3,1}Y_{3,q^2}) \otimes L(Y_{2,q^3}) + L(Y_{2,q}Y_{2,q^3}).$$

Les deux premières :  $T$ -systèmes.

# Conclusion