Strates surdéterminées dans les familles de polynômes à une variable de degré 5 et 6

Hayssam Ezzaldine

UNIVERSITÉ DE NICE–SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'UNIVERSITÉ de Nice–Sophia Antipolis

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée et soutenue par

Ezzaldine Hayssam

Strates surdéterminées dans les familles de polynômes à une variable de degré 5 et 6

Thèse dirigée par **Kostov Vladimir**

Soutenue le 30 Juin 2009

Jury :

Mme. Coste-Roy Marie-Françoise	Professeur à l'Université de Rennes-1	Rapporteur
M. Kharlamov Vyatcheslav	Professeur à l'Université de Strasbourg-1	Rapporteur
M. Itenberg Ilya	Professeur à l'Université de Strasbourg-1	Examinateur
M. Kostov Vladimir	Maître de conférences à l'Université de Nice	Directeur
M. Elkadi Mohamed	Maître de conférences à l'Université de Nice	Examinateur

À ma mère
À mon père
À mes soeurs
À ma famille
À mes amis

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Vladimir KOSTOV pour son encadrement, ses qualités tant scientifiques qu'humaines. Ce travail doit beaucoup à sa disponibilité permanente, sa rigueur scientifique et sa patience. J'ai apprécié chez monsier Kostov la qualité d'un grand chercheur plein d'optimisme.

J'adresse également mes remerciements à monsieur Mohamed ELKADI pour sa disponibilité et ses aides tout au long de ces trois années.

Mes remerciements les plus respectueux vont aux Professeurs Coste-Roy Marie-Françoise et Kharlamov Vyatcheslav qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail et Itenberg Ilya d'être membre du Jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens également à remercier Salissou Moutari et Moncef mahjoub, pour leur aide. Qu'ils reçoivent içi les marques de mon amitié la plus sincère.

Je tiens à adresser toute ma gratitude à l'ensemble des membres et personnels du Laboratoire J.-A.Dieudonné.

Je remercie aussi la Faculté des Sciences 3 de l'Université Libanaise de laquelle j'ai obtenu ma maîtrise en mathématiques pures en 2005.

Je remercie, particulièrement, mes frères et amis Mouhamad,Osman (3ichne ma3 ba3ed bi nafess al manzil 3 snin wa5ilal hal midi ken osman al ka2id wa l2a5 wa sadik 2ili ken deyir chou2oun al manzil min ta2ta2 la salamou alaykom min doun aya miniyi, hanzoul ken ne2ib al ka2id + a5 + sadi2, waleken ken de2iman 2iywage3 rass al cha3eb yali houwi hon ane (3alatoul 2oum jali ya hayssem, fahon ni5tilif 3ala al jali , bihal hali 2iyhil al michikli al ka2id osman wayigli al jalyet ma3 al 3ilim houyi ken tabe5 al tab5a, wilwa2it 2ili yrouh fi osman ken hanzoul 2iy5alina bala 2ikil, basse 2ilhamdolilah ken fi mata3im) Abou bachir=Sarrage (2it3arafit 3leh bil 2issim awal wa minhidek al wa2et wa ana wyeh 3alatoul, nidross sawa, 2inkazir sawa, sarrage houwi bi nissbi la2ili a5i wa a3az, winchalla ariban lah nifrahlou bi walad, ma3 takdiri wa kemil 2ihtirami li3a2ilatihi al karimi) Hamad (2inssen moukefih yastahik kol2ihtiram wa takdir, hamad sadi2 youfta5ar bi sado2tou), kaddour(che5 al chabeb wal awedem wa sadik 3aziz 3ala aleb al chabeb kilon,wa habib albou wa nour 3aynou tounsiyet), Maher(2ibin 5ali wa sadi2 3aziz wa 5al al libneniyi bi france kilon,2il5al albou kbir ktir) Mazen(al hakim ma3ayle2i wa2it yidross fih, la daragi 3imil dareb mratab bi chadi al mir) , Samer(abou zayd) Houssam el rifaii(notre ingenieur, yali hayhandisli bayti bi balech) , Rayan,Randi Abou rami (chabeb 2adayt ma3on ahla wa2it 3ind m3alimna abou rami), Houssam Yehya (2adayt sini ma3ou wa ma3 hanzoul kenit min ahla snin, Houssam ada 2iyemou yihsoub 2idech badou masari layitgawez, wabasse 2igit al riz2a toret alihsebet kile min doun maykoun ma3ou masari), Bilal (che5 al awedim yali fadlou 3layna kbir, adda 4 snin bilel kil sabet wa ahad 2iykazirne, ladaragi maba2 fih mahal mana rayhin 3leh bil côte d'azur), Abou charif(Mifti Nice wa dawahiha 3ind 5ourougi min France, wa abou charif se3adna ktir 5ilal 2ikamitna bi nice), Abou taher(konsolna bi monaco wa habib alibna), chadi al mir (ahla 3alam), ali asamad(ka2idna wa habib alibna), Taleb Dbou2 (yali al riyada 3amtihrob minou, be3tino ahlou 3a france layi3mil riyada!) Mohamed zakaria (sadi2i bil day3a w bil madrassi,2idayna 2iyem hilwi ma3 ba3idne wa 2ariban hanifrah bi 3irsou 2inche2allah), abou zouher(a5 wa sadik adayna wa2itna bi lebnen sawa ma3 sarrage, abou zouher mabrouk wisama zar2a, wa ala yse3ed abou zaher wa 2im zaher 3lek), abdenasser(ahla chab bil 2irni wa akkar, 2ilyawm 2ili

bchoufou bikoun 3id 3indi (allahouma 2ig3al kol ayemina a3yed, al abed a3az sadi2 wa a5 3indi), jihad et salem (abou omar alla yse3ed omar, halewet al gibin 3ind ahla sadi2 bi day3a), Mostafa rageb(ahla chab wa sadi2 wisama zar2a) Mahmoud mihyidin(Ra2em al awadem byitla3 3ala chechi la wahdou), Khaled walmoudir(yalli 3alam al chabeb lihla2a). hasan fahs(ahla docteur bi nice) Rabi3 Greg wa mouhamed darwich (ahla chabeb), Abdelkader rafei et ahmad zakaria (ahla chabeb bi al korne), Mahmoud youssef et sa femme rana rafei, Yakzan et sa femme. Mes amis syriens Soleman(chriki wa che5 al chabeb abou hala), Ansar (abou cham wa ni3me al chabeb 2i3mila memoire sawe), (abou omar Sami,tahya falastine), Ahed (ya 3ayni mala 3ahed hadiss wala harag,chrik chriki, karta3 min al barid bi lyon 2is2alou taleb lech),mouhamad (alla yse3dou 3ala 3ahed) et d'autres nationalités Sidi amin, Anwar, Nadia(oum youssef), Christina(oum chou ya hamad), Ba Elimane(tahiyeti), juli(alla yse3dik 3ala randi), Michel Raibaut, Thang, Dang,Pierre Abrigatu, Frederico.... mes chers amis, désolé si j'ai oublié des noms ! vous êtes tous dans mon cœur.

J'ai sûrement oublié de citer certains d'entre vous qui m'ont grandement aidé au cœurs de mes années d'études, mais au fond de mon coeur je vous remercie chaleureusement.

Je dédie cette thèse à ma chère mère, mon paradis et ma joie, ma raison de vivre et la source de mes inspirations ; à mon père, ma fierté, ma force et ma gloire ; à mes six sœurs, mon honneur et ma dignité ; à mon gendre et mon neuveu Mouhamed et ma future femme oum Mouhamed.

Table des matières

Table des figures

Liste des abréviations

PH	Polynôme hyperbolique
FTPH	Fonction de type polynôme hyperbolique
VM	Vecteur multiplicité
VC	Vecteur configuration

Chapitre 1

Introduction

1.1 Polynômes hyperboliques

Nous considérons des polynômes réels et en particulier des polynômes *hyperboliques* (resp. *strictement hyperboliques*), c.-à-d. dont toutes les racines sont réelles (resp. réelles et distinctes). Définissons le *domaine d'hyperbolicité* de la famille de polynômes

$$P(x,a) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_i, x \in \mathbb{R},$$

comme l'ensemble $\{a \in \mathbb{R}^n \mid P \text{ est hyperbolique}\}$.

Dans les articles [3], [7], [12] et [24]–[26] les auteurs s'intéressent à la stratification définie par le vecteur multiplicité de ce domaine et on prouve dans [12] que sous des hypothèses convenables, ce domaine possède la propriété de Whitney (la distance curviligne d'être équivalente à la distance euclidienne). Dans ces articles le vecteur multiplicité (VM) d'un polynôme hyperbolique (PH) est un vecteur dont les composantes sont les multiplicités des racines du PH données dans l'ordre *décroissant* (dans cette thèse on a choisi l'ordre *croissant*).

Dans les travaux de Kostov [12] et Meguerditchian [26], on prouve la contractibilité des fibres non-vides des projections dans l'espace des paramètres qui consistent à ignorer toujours le dernier coefficient. Dans ses travaux [24]–[26] Meguerditchian prouve la concavité locale du bord du domaine d'hyperbolicité.

Dans cette thèse, nous considérons la *configuration* (ou *arrangement*) des racines d'un PH et de toutes ses dérivées non-constantes (voir la définition 2.1). Dans l'article [2], Anderson prouve que si le degré du polynôme est égal à 4, alors tous les arrangements compatibles avec le théorème de Rolle ne sont pas réalisables par les racines d'un polynôme hyperbolique de degré 4 et de ses dérivées, même pas tous les arrangements *non-dégénérés*, c.-à-d. sans égalités entre les racines ; nous disons "entre les racines" au lieu de "entre les racines du polynôme ou/et de ses dérivées".

Dans les articles [20]–[23] on considère la généralisation naturelle d'un PH de degré n (dite *fonction de type polynôme hyperbolique* (FTPH), ou *fonction convexe à l'ordre* n, voir

[11]), c.-à-d. une fonction lisse, ayant n zéros réels comptés avec leur multiplicité, et dont la $n$ième dérivée ne s'annule pas. Dans [20] on présente des exemples d'arrangements non-dégénérés qui sont compatibles avec le théorème de Rolle mais qui ne sont pas réalisables par des FTPH.

Dans [21]–[23] on considère tous les arrangements non-dégénérés de dégré 5. On y donne aussi la réponse exhaustive à la question quels arrangements non-dégénérés de degré 5 sont réalisables par des FTPH. On y précise quels arrangements non-dégénérés sont réalisables par des polynômes hyperboliques ou par leurs perturbations.

En degré 4, tous les arrangements (dégénérés ou pas) compatibles avec le théorème de Rolle sont réalisables par des FTPH (voir [19]), tandis que 2 arrangements non-dégénérés sur 12 ne se réalisent pas par des PH. Ces 2 arrangements sont considérés par Anderson (voir [2]).

En degré 5, seulement 236 sur 286 arrangements non-dégénérés sont réalisables par des FTPH et parmi les 236 il y a 24 arrangements réalisables par des perturbations de PH et 116 arrangements non-dégénérés réalisables par des PH. Ces derniers sont étudiés en détail dans [16]. Sur les 50 arrangements non-réalisables 46 sont décrits dans l'article [20] et les 4 restants dans [21].

On considère dans l'article [28] le problème : Pour $n = 3$, pour quels nombres $x_1 < x_2 < x_3$, $f_1 < f_2$ et s_1, existe-t-il une FTPH Q (appelée *pseudopolynôme* par les auteurs) telle que ses racines sont égales à x_1, x_2, x_3, celles de $Q^{(1)}$ et $Q^{(2)}$ sont égales respectivement à f_1, f_2 et s_1 ? Les auteurs donnent des conditions nécessaires et suffisantes sous la forme d'inégalités linéaires et quadratiques.

Dans les articles [8]–[10] on considère le problème quelles valeurs peuvent prendre les rapports $(f_j - x_{j+1})/(x_j - x_{j+1})$ où x_j sont les racines d'un PH et f_j sont les racines de sa dérivée.

Une des raisons pour l'impossibilité de réaliser tous les arrangements par des PH est la présence de *strates surdétérminées* dans la famille générale de polynômes à une variable de degré 4 ou plus. L'étude des strates surdétérminées dans la famille générale des PH de degré 4 et 5 a été commencée par Kostov, voir [16]. Dans l'article [18] on considère des exemples de telles strates en cas de polynômes complexes.

L'objectif de cette thèse est l'étude des strates surdétérminées dans la famille générale des PH de degré 6, en achevant au préalable l'étude de ces strates en degré 5.

1.2 Plan de la thèse

Dans le chapitre 2, nous considérons les arrangements (configurations) des racines des PH de degré 4 et de leurs dérivées.

Dans le paragraphe 2.1 nous introduisons la définition et notation détaillées d'arrangement des racines d'un PH et de ses dérivées. Nous présentons dans le paragraphe 2.2 le domaine d'hyperbolicité de la famille de polynômes $P = x^4 - x^2 + ax + b, \quad x, a, b \in \mathbf{R}$.

Les notions de *strate surdéterminée*, *strate surdéterminée (non)-triviale, paire*, *impaire* ou *ancienne* sont introduites dans le paragraphe 2.3. Un exemple important de strates surdéterminées non-triviales est fourni par les *polynômes de Gegenbauer*, voir le paragraphe 2.4. Les strates surdéterminées en degré 4 sont étudiées dans le paragraphe 2.5. Dans le paragraphe 2.6 nous formulons les nouveaux résultats concernant les strates surdéterminées dans les familles de PH de degrés 5 et 6. Nous donnons aussi un plan de la preuve de ces théorèmes, voir les théorèmes 2.2 et 2.3 , c.-à-d. un plan des chapitres 4 et 5.

Dans le chapitre 3, nous considérons en détail les strates surdéterminées paires et anciennes de degré 6. Ce chapitre est basé sur l'article [6]. Dans le paragraphe 3.1 on considère 4 familles (dont deux subdivisées en deux sous-familles) de strates paires et on présente sur la figure 3.1 le schéma d'intersection de ces sous-familles. Dans le paragraphe 3.2 on définit deux familles de strates anciennes à un paramètre. Ces $4 + 2 = 6$ familles contiennent toutes les strates surdéterminées non-triviales de degré 6.

Dans le chapitre 4, nous présentons l'outil de base dans cette recherche, c.-à-d. la notion de *kème matrices de Sylvester* (voir le paragraphe 4.1). L'étude des strates surdéterminées est basée sur l'étude d'idéaux engendrés par des *résultants* et *sous-résultants* (c.-à-d. des déterminants de $k$ème matrices de Sylvester) dans l'espace des paramètres de la famille (2.1.1). Dans le paragraphe 4.3 nous décrivons un algorithme permettant de trouver toutes les strates surdéterminées de degré 5 (resp. 6) avec au moins 4 (resp. 5) égalités entre les racines du polynôme et de ses dérivées.

Dans le chapitre 5, nous discutons l'(in)dépendance algébrique de deux, trois ou quatre égalités entre les racines d'un PH et de ses dérivées. Puis, en utilisant MAPLE, nous obtenons la liste complète des strates surdéterminées non-triviales de degrés 5 et 6.

Chapitre 2

Strates surdéterminées

2.1 Arrangements de racines de polynômes hyperboliques et de leurs dérivées

Considérons la famille de polynômes

$$P(x,a) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, x, a_i \in \mathbb{R}.$$

Un polynôme de cette famille est appelé (*strictement*) *hyperbolique* si toutes ses racines sont réelles (réelles et distinctes). Il est clair que si P est (stictement) hyperbolique, ses dérivées $P^{(1)}$,..., $P^{(n-1)}$ le sont aussi. Des exemples de PH sont ceux de toutes les familles orthogonales connues (par exemple, les polynômes de Legendre, Laguerre, Hermite, Tchebychev). Si les coefficients d'un polynôme dépendent de paramètres, on appelle l'ensemble des valeurs des paramètres pour lesquelles le polynôme a seulement des racines réelles son *domaine d'hyperbolicité* (noté Π^*). Le changement $x \mapsto x - a_1/n$ permet de réduire l'étude de Π^* au cas $a_1 = 0$.

Lemme 2.1 *Dans le cas $a_1 = 0$ le polynôme P est hyperbolique seulement si $a_2 \leq 0$. Si $a_1 = a_2 = 0$, alors P est hyperbolique seulement pour $a_2 = \cdots = a_n = 0$.*

En effet, toutes les dérivées de P doivent être hyperboliques, en particulier $P^{(n-2)} = (n!/2)\, x^{n-2} + (n-2)!a_2$, donc $a_2 \leq 0$. Soit $a_1 = a_2 = 0$. Comme $P^{(n-3)} = (n!/6)\, x^{n-3} + (n-3)!a_3$ doit être hyperbolique, on a $a_3 = 0$ etc. □

Après un deuxième changement $x = \sqrt{a_2}x$, on ramène l'étude de Π^* au cas $a_1 = 0, a_2 = -1$. Posons $\Pi = \Pi^* \cap \{a_1 = 0, a_2 = -1\}$. On désigne par $D(i,j)$ les ensembles discriminants $\big\{(a_3,\ldots,a_n) \in \Pi \mid Res(P^{(i)}, P^{(j)}) = 0\big\}$ (où $Res(P^{(i)}, P^{(j)})$ désigne le résultant entre $P^{(i)}$ et $P^{(j)}$). C'est pourquoi on considère désormais la famille de polynômes

$$P(x,a) = x^n - x^{n-2} + \cdots + a_n, x, a_i \in \mathbb{R} \tag{2.1.1}$$

Notation 2.1 Désignons par $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ les racines d'un PH de degré n et de la même façon par f_j, s_j, t_j, F_j et l_j les racines de sa première, deuxième, troisième, quatrième et cinquième dérivées. Nos exemples concernent des polynômes de degré ≤ 6 et la notation l_j est choisie pour correspondre à la première lettre de "last" (c.-à-d. "dernière" ;f, s, t, F sont les premières lettres de "first", "second", "third", " fourth", cette notation a été utilisée dans l'article [16]). Si nécessaire nous utilisons aussi la notation $x_j^{(i)}$ pour la i-ème racine de la j-ème dérivée d'un PH où $x_1^{(j)} \leq \cdots \leq x_{n-j}^{(j)}$.

Définition 2.1 *Le vecteur multiplicité* d'un PH donné est le vecteur dont les composantes sont les multiplicités des racines du PH données dans l'ordre croissant. *L'arrangement (ou configuration)* des racines d'un PH et de ses dérivées est défini quand toutes ces racines sont écrites en ligne avec le signe $<$ ou $=$ entre chaques deux racines consécutives. Un arrangement est dit *non-dégénéré* s'il n'y a aucune égalité entre n'importe quelles deux des racines, c.-à-d. aucune égalité de la forme $x_i^{(j)} = x_q^{(r)}$ pour n'importe quels indices i, j, q, r.

Définition 2.2 Une autre façon de définir un arrangement est de donner le *vecteur configuration (VC)* correspondant, c.-à-d. un vecteur sur lequel les positions des racines des PH et de sa première,..., cinquième dérivées sont indiquées par $0, f, s, t, F$ et l (à comparer avec la notation 2.1) et les racines confondues sont mises entre crochets. Si nécessaire nous indiquons sous le VC quelles sont les racines confondues conformément à la notation 2.1.

Exemple 2.1 Considérons le polynôme $U := x^3(x+1)^2(x-2) = x^6 - 3x^4 - 2x^3$. Son VM est égal à (2, 3, 1). Un calcul simple montre que $t_1 < -\frac{2}{3} < f_2 < -\frac{1}{\sqrt{5}} = F_1 < s_2 < t_2 < 0 = l_1$. Par conséquent, ses racines et les racines de ses dérivées définissent l'arrangement suivant : $x_1 = f_1 = x_2 < s_1 < t_1 < f_2 < F_1 < s_2 < t_2 < x_3 = f_3 = x_4 = s_3 = f_4 = x_5 = l_1 < F_2 < t_3 < s_4 < f_5 < x_6$. Le VC se présente comme suit :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} ([0f0] & s & t & f & F & s & t & [0f0sf0l] & F & t & s & f & 0) \\ x_1f_1x_2 & s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & s_2 & t_2 & x_3f_3x_4s_3f_4x_5l_1 & F_2 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6 \end{array}$$

Le théorème de Rolle classique implique que les racines de P et de ses dérivées vérifient les inégalités suivantes :

$$\forall i < j, \quad x_k^{(i)} \leq x_k^{(j)} \leq x_{k+j-i}^{(i)} \tag{2.1.2}$$

On a aussi la condition évidente :

$$((x_k^{(i)} = x_k^{(i+1)}) \text{ ou } (x_{k+1}^{(i)} = x_k^{(i+1)})) \Rightarrow (x_k^{(i)} = x_k^{(i+1)} = x_{k+1}^{(i)}) \tag{2.1.3}$$

Dans les articles [15]–[17], on a traité la question quels arrangements de $n(n+1)/2$ nombres réels $x_j^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n-k$, satisfaisant les conditions (2.1.2) et (2.1.3) (appelés *a priori* *admissibles*) peuvent être réalisés par les racines de PH de degré n et de leurs dérivées. On y a montré que pour $n \geq 4$ pas tous les arrangements a priori admissibles (et même pas tous les non-dégénérés) ne peuvent être réalisés par des PH.

Remarque 2.1 Un résultat de R.M. Thrall (voir [27]) dit que pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire il y a exactement $\binom{n+1}{2}!\frac{1!2!\cdots(n-1)!}{1!3!\cdots(2n-1)!}$ arrangements non-dégénérés possibles des racines $x_j^{(i)}$ qui sont compatibles avec (2.1.2).

Remarque 2.2 Pour $n = 1$, 2 ou 3 les conditions (2.1.2) et (2.1.3) sont nécessaires et suffisantes pour un arrangement d'être réalisé par les racines d'un PH et de ses dérivées.

Pour $n = 2$ il y a deux arrangements a priori admissibles : $(0, f, 0)$ (non-dégénéré) et $([0f0])$ (dégénéré).

Pour $n = 3$ il y a deux arrangements non-dégénérés a priori admissibles : $(0, f, s, 0, f, 0)$ et $(0, f, 0, s, f, 0)$.

Les quatre arrangements sont réalisables par des PH de degré respectivement 2 et 3 (et tout arrangement dégénéré a priori admissible pour $n = 3$ aussi).

2.2 Les arrangements pour $n = 4$.

Considérons la famille de polynômes moniques $P = x^4 - x^2 + ax + b, \quad x, a, b \in \mathbf{R}$. Le domaine d'hyperbolicité Π de P est l'intérieur du triangle curviligne DEA ainsi que son bord (voir la figure 2.1). Les positions relatives des racines de P, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ et $P^{(3)}$, sont indiquées sur la figure par des VC.

Les ensembles discriminants sont :

$$D(0,1) : 4b(4b-1)^2 + a^2 - 27a^4/4 - 36a^2b = 0 \qquad D(0,2) : \pm a/\sqrt{6} + b = 5/36$$
$$D(1,2) : a = \pm 4/3\sqrt{6} \qquad D(0,3) : b = 0$$
$$D(1,3) : a = 0 \qquad D(2,3) = \emptyset$$

L'ensemble $D(0,1)$ admet deux branches qui s'intersectent au point A et deux points de rebroussement D et E qui appartiennent à $D(1,2)$. De même l'ensemble $D(0,2)$ admet le point B comme point d'intersection, les points B et A appartiennent à $D(1,3)$. La ligne $D(0,3)$ est la tangente à $D(0,1)$ à C où $\{C, A\} = D(0,1) \cap D(1,3)$.

Il y a 10 domaines ouverts dans Π définis par les 10 configurations non-dégénérées indiquées à côté de la figure. L'absence des deux configurations

$$(0, f, 0, s, t, f, 0, s, f, 0) \text{ et } (0, f, s, 0, f, t, s, 0, f, 0)$$

est liée au fait que $D(1,3)$ passe par le point d'intersection des deux lignes formant $D(0,2)$.

Pour $n = 4$ il y a 12 arrangements a priori admissibles non-dégénérés (voir la remarque 2.1) dont seulement 10 sont réalisables par des PH. Ils correspondent aux 10 domaines ouverts de Π, voir [2], [16], [17], [15] ; voir aussi la figure 2.1. L'impossibilité de réaliser les 2 autres est étroitement liée à la présence de strates surdéterminées.

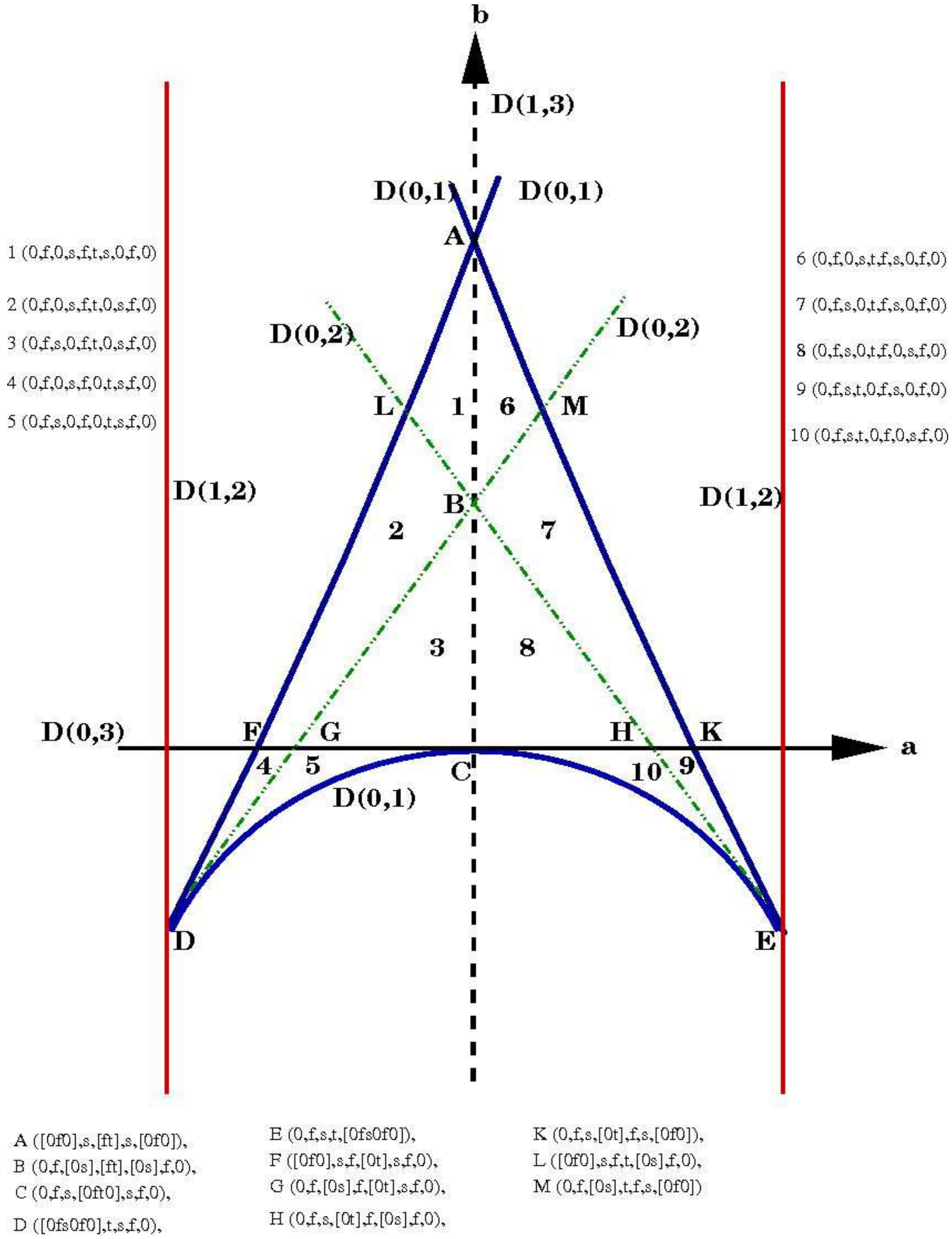

FIG. 2.1 – Le cas $n = 4$

Voici les VC correspondant aux arcs ouverts du bord du domaine d'hyperbolicité :

AM $(0, f, 0, s, t, f, s, [0f0])$	LA $([0f0], s, f, t, s, 0, f, 0)$
MK $(0, f, s, 0, t, f, s, [0f0])$	FL $([0f0], s, f, t, 0, s, f, 0)$
KE $(0, f, s, t, 0, f, s, [0f0])$	DF $([0f0], s, f, 0, t, s, f, 0)$
EC $(0, f, s, t, [0f0], s, f, 0])$	CD $(0, f, s, [0f0], t, s, f, 0)$

Voici les VC correspondant aux segments ouverts :

$LB\ (0, f, 0, s, f, t, [s0], f, 0)$	$MB\ (0, f, [s0], t, f, s, 0, f, 0)$
$BH\ (0, f, s, 0, t, f, [s0], f, 0)$	$BG\ (0, f, [s0], f, t, 0, s, f, 0)$
$HE\ (0, f, s, t, 0, f, [s0], f, 0)$	$GD\ (0, f, [s0], f, 0, t, s, f, 0)$
$FG\ (0, f, 0, s, f, [0t], s, f, 0)$	$CH\ (0, f, s, [0t], f, 0, s, f, 0)$
$GC\ (0, f, s, 0, f, [0t], s, f, 0)$	$HK\ (0, f, s, [0t], f, s, 0, f, 0)$
$CB\ (0, f, s, 0, [tf], 0, s, f, 0)$	$BA\ (0, f, 0, s, [tf], s, 0, f, 0)$

On se rappelle que pour $n = 5$ seulement 116 sur 286 arrangements non-dégénérés a priori admissibles sont réalisables par des PH, voir [16]. Il est intuitivement clair que pour n plus grand cette proportion doit tomber encore plus parce qu'un PH a seulement n coefficients tandis que le nombre de racines du polynôme et de toutes ses dérivées est égal à $n(n+1)/2$. Donc si on veut réaliser tout arrangement a priori admissible (ou au moins les non-dégénérés) il faudrait essayer de le faire au moyen d'une classe de fonctions lisses plus large que celle des PH.

2.3 Définition et exemples de strates surdéterminées

Notation 2.2 Désignons par $\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{R}}$) l'espace de tous les polynômes de degré n à coefficients complexes (resp. réels) et à coefficient dominant 1. On désigne par $\mathcal{PP}_n^{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{PP}_n^{\mathbb{R}}$) le produit cartésien $\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{C}} \times \cdots \times \mathrm{Pol}_1^{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{R}} \times \cdots \times \mathrm{Pol}_1^{\mathbb{R}}$). Ses points sont des n-uplets de polynômes $(P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1)$ de degrés correspondants. Quand les résultats s'appliquent également aux cas réel et complexe l'indice supérieur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sera omi. Dans le cas réel on s'intéresse surtout à la situation où le polynôme (et, donc, ses dérivées non-constantes aussi) est *hyperbolique* (c. à d. à racines réelles).

On peut stratifier cet espace selon la présence ou pas de racines multiples et de leurs multiplicités, et la présence éventuelle de racines en commun entre les P_i. On peut considérer les strates ainsi définies comme des *partitions coloriées* des $n(n+1)/2$ points (pas forcément distincts) de $\mathbb{C}$ (resp. de $\mathbb{R}$) qui sont les racines de ces polynômes partagés en groupes de points de couleurs différentes et de cardinalités respectivement $n, n-1, \ldots, 1$.

Il existe un plongement naturel $\pi : \mathrm{Pol}_n \hookrightarrow \mathcal{PP}_n$. L'image par π d'un polynôme P de degré n est le n-uplet de polynômes $(P, P^{(1)}/n, P^{(2)}/n(n-1), \ldots, P^{(n-1)}/n!)$. Si λ est une partition coloriée de $n(n+1)/2$ points coloriés, on désigne par $St_\lambda \subset \mathcal{PP}_n$ la strate correspondante et par $\pi(St_\lambda) = St_\lambda \cap \pi(\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{C}})$ son intersection (éventuellement vide) avec l'espace plongé de polynômes $\pi(\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{C}})$. On peut observer que $\dim St_\lambda$ est le nombre de parties dans λ.

Définition 2.3 La strate St_λ est *surdéterminée* si la codimension de St_λ dans $\mathcal{PP}_n$ est plus grande que la codimension de $\pi(St_\lambda)$ dans $\pi(\mathrm{Pol}_n)$. On suppose ici que $\pi(St_\lambda) \neq \emptyset$. Nous désignons par ϱ la différence entre ces deux codimensions.

Exemple 2.2 Si P a une racine double $x_1 = x_2$, pour définir la strate correspondante dans $\mathcal{PP}_n$ ceci exige de donner les égalités

$$x_1 = x_2 \ \text{ et } \ x_1 = f_1$$

tandis que dans $\pi(\mathrm{Pol}_n)$ la première égalité est suffisante, elle implique la deuxième. Donc les codimensions mentionnés ci-dessus dans la définition sont égales respectivement à 2 et 1. D'une maniere génerale, on peut montrer que chaque fois que le polynôme P a une racine multiple, cela définit une strate surdéterminée St_λ.

Définition 2.4 Une strate surdéterminée est *ancienne* si le plongement $\pi : \mathrm{Pol}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{PP}_{n-1}$ définit une strate surdéterminée dans $\mathcal{PP}_{n-1}$. ("Ancienne" est utilisé dans le sens "déjà connue", c.-à-d. déjà connue pour $n-1$.) Une strate surdéterminée est *impaire* (resp. *paire*) si elle est définie par un polynôme impair (resp. pair). Ce sont les strates définies par les polynômes de Gegenbauer, voir le paragraphe 2.4.

Définition 2.5 Une strate surdéterminée est dite *non-triviale* si la quantité ϱ n'est pas seulement une conséquence de la présence de racines multiples de P et de ses dérivées.

Exemple 2.3 Le polynôme $(x-1)^3(x+1)^3$ a des racines multiples, mais il définit une strate non-triviale car 0 est une racine commune de toutes ses dérivées d'ordres impaires.

L'étude des strates surdéterminées dans les familles de polynômes de degré jusqu'à 5 a été commencée dans l'article [16]. Toutes ses strates sont liées ou à la présence de racines multiples, ou elles sont définies par des polynômes pairs ou impairs, ou on les obtient en intégrant des polynômes de degré inférieur (dans ce dernier cas on parle de strates anciennes).

Exemple 2.4 ([*17*]) Pour n pair (resp. n impair) le polynôme $P_e = (x^2 - 2/n)^{n/2}$ (resp. $P_o = x(x^2 - 2/(n-1))^{(n-1)/2)}$) définit une strate surdéterminée (les indices e et o signifient "even" et "odd").
En effet, on a

$$P_e^{(2)} = (n(n-1)x^2 - 2)(x^2 - 2/n)^{n/2-2} \quad , \quad P_e^{(n-2)} = (n!/2)(x^2 - 2/n(n-1)),$$

par conséquent, $P_e^{(n-2)}$ divise $P_e^{(2)}$. D'autre part, le polynôme P_e est complètement déterminé par les conditions que son VM est égal à $[n/2, n/2]$ et ses trois premiers coefficients sont 1, 0 et -1 ; ces conditions n'impliquent pas formellement que $P_e^{(n-2)}$ divise $P_e^{(2)}$. Il est aussi vrai que $P_e^{(n-1)} = n!x$ divise toutes les dérivées de P_e d'ordres impaires.

Pour P_o, on a

$$P_o^{(1)} = (nx^2 - 2/(n-1))(x^2 - 2/(n-1))^{(n-3)/2} \quad , \quad P_o^{(n-2)} = (n!/2)(x^2 - 2/n(n-1)),$$

par conséquent, $P_o^{(n-2)}$ divise $P_o^{(1)}$. Toutefois, P_o est complètement déterminé par les conditions que son VM vaut $[(n-1)/2,(n-1)/2]$, que P_o est divisible par $P_o^{(n-1)} = n!x$ et que les trois premiers coefficients de P_o sont 1, 0 et -1 ; ces conditions n'impliquent pas les racines de $P_o^{(n-2)}$ ou $P_o^{(1)}$.

Remarquons que, si n est impair, alors à une constante près et par un changement affine de la variable x, on aura $P_e = \int_0^x P_o(t)\,dt$, où P_e est défini pour $n+1$.

Remarque 2.3 Par définition, le polynôme $(n/2)^{n/2}((n/2)!/n!)(P_e)^{(n/2)}(x\sqrt{2/n})$ est le polynôme de Legendre de degré $n/2$.

Proposition 2.1 ([16]) *Pour tout n pair et pour $0 < s < n/2$ le polynôme $P_e^{(n/2+s)}$ divise le polynôme $P_e^{(n/2-s)}$.*

Preuve :

Le polynôme $P_e^{(n/2)}(x\sqrt{2/n})$ (désigné par y) vérifie l'équation différentielle

$$(x^2-1)y^{(2)} + 2xy^{(1)} - n(n+1)y = 0 \tag{2.3.1}$$

(rappelons que $(n/2)^{n/2}((n/2)!/n!)y$ est un polynôme de Legendre). Pour $k = 1,\ldots,n/2$), on désigne par $y^{(-k)}$ la primitive de $y^{(-k+1)}$ divisible par $(x^2-1)^k$. D'après l'equation (2.3.1), on a

$$((x^2-1)y^{'})^{'} = n(n+1)y,$$

par conséquent, $(x^2-1)y^{(1)} = n(n+1)y^{(-1)}$ et on a que $y^{(1)}$ divise $y^{(-1)}$. Cela signifie que $P_e^{(n/2+1)}$ divise $P_e^{(n/2-1)}$.

Supposons que, pour $i \leq s$ on a $(x^2-1)^i y^{(i)} = \alpha_i y^{(-i)}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$. On dérive l'équation (2.3.1) s fois pour obtenir l'égalité

$$(x^2-1)y^{(s+2)} + (2s+2)y^{(s+1)} - (n(n+1) - s(s+1))y^{(s)} = 0,$$

c.-à-d.

$$((x^2-1)^{s+1}y^{(s+1)})^{(1)} = (x^2-1)^s\beta_s y^{(s)}$$

où $\beta_s = (n(n+1) - s(s+1))$. Par conséquent, $((x^2-1)^{s+1}y^{(s+1)})^{(1)} = \alpha_s\beta_s y^{(-s)}$. En intégrant les deux côtés, on obtient $(x^2-1)^{s+1}y^{(s+1)} = \alpha_s\beta_s y^{(-s-1)}$. Cela signifie que $P_e^{(n/2+s+1)}$ divise $P_e^{(n/2-s-1)}$. $\square$

2.4 Le polynôme de Gegenbauer

Définition 2.6 Le polynôme de Gegenbauer G_n est défini comme l'unique polynôme

$$x^n - x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_n \tag{2.4.1}$$

divisible par sa dérivée seconde (pour $n \geq 3$, un tel polynôme existe et il est unique). On peut prouver qu'il est strictement hyperbolique, et qu'il est pair ou impair suivant n. La définition générale du polynôme de Gegenbauer $C_n^{\lambda}(x)$ dépend d'un paramètre λ. Dans cette thèse, nous considérons seulement le cas $\lambda = -1/2$.

Remarque 2.4 [1] Les polynômes de Gegenbauer ou *polynômes ultrasphériques* sont une classe de polynômes orthogonaux. Ils sont nommés ainsi en l'honneur de Leopold Gegenbauer ($1849 - 1903$). Ils sont obtenus à partir de la série hypergéométrique dans les cas où la série est en fait finie :

$$C_n^{(\lambda)}(z) = \frac{2\lambda(2\lambda-1)(2\lambda-2)\ldots(2\lambda-n+1)}{n!}\,{}_2F_1(-n, 2\lambda+n; \lambda+1/2; 1-z/2)$$

Les polynômes de Gegenbauer apparaissent quand on résoud l'équation différentielle de Gegenbauer :

$$(1-x^2)\ddot{y} - (2x+3)x\dot{y} + \alpha y = 0.$$

Ils sont orthogonaux par rapport à la fonction de pondération $\omega(z) = (1-z^2)^{\lambda-1/2}$.

Par définition, le polynôme de Gegenbauer $G_4 = x^4 - x^2 + \frac{5}{36}$ admet deux racines en commun avec $G_4^{(2)}$, elles sont égales à $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, et $G_4^{(1)}$ admet 0 comme une racine commune avec $G_4^{(3)}$. Ceci définit trois égalités entre toutes les 10 racines de $G_4, G_4^{(1)}, G_4^{(2)}$ et $G_4^{(3)}$. De ces égalités aucune n'est un corollaire algébrique formel des deux autres, mais quand on impose deux de ces égalités comme des conditions, ils définissent un polynôme unique pour lequel il se trouve que la troisième égalité tient aussi.

D'autre part, pour un polynôme monique hyperbolique de degré 4 non réduit à x^4 il faudrait s'attendre à ce que le nombre total de telles égalités ne soit pas supérieur à 2. En effet, via un changement de l'axe des abscisses et une multiplication par une constante différente de zéro on se ramène à un polynôme de la forme $P = x^4 - x^2 + ax + b$, c.-à-d. dont le coefficient de x^3 est nul. Le polynôme P est hyperbolique et le coefficient de x^2 est non nul (application de la règle de Descartes), alors ce dernier coefficient ne peut pas être positif puisque $P^{(2)}$ doit être hyperbolique. Un deuxième changement $x = \sqrt{a_2}x$ amène au cas où le coefficient de x^2 est égal à (-1). On s'attend à ce qu'il soit possible de faire varier les deux paramètres a et b, de façon à obtenir exactement deux égalités formellement indépendantes, comme égalités algébriques parmi les 10 racines de P, P', P'', P'''. Par exemple, les égalités, $a = b$, $b = c$ et $c = d$ sont formellement indépendantes tandis que $a = b$, $b = c$ et $a = c$ ne le sont pas.

Un autre type d'exemples d'égalités formellement dépendantes est obtenu quand le polynôme P a une racine multiple. Pour le cas d'une racine double, l'égalité entre les deux racines de P et le fait que la racine de $P^{(1)}$ est entre elles implique que toutes les trois racines sont confondues.

De la même façon on montre que pour $n \geq 4$ il y a au moins $n-2+[(n-2)/2]$ égalités entre les racines du polynôme Gegenbauer et de ses dérivées ($n-2$ égalités entre les racines de G_n et $G_n^{(2)}$; 0 est une racine commune pour toutes les $[(n+1)/2]$ dérivées qui sont des polynômes impairs). D'autre part il y a $n-2$ coefficients a_j dans la forme (2.4.1), (voir la définition 2.6), qui jouent le rôle de paramètres libres, donc on peut contrôler $n-2$ égalités entre les racines de $G_n, \ldots, G_n^{(n-1)}$. Dans le cas de G_n le nombre de ces égalités est dépassé par $[(n-2)/2]$.

Dans ce qui suit nous disons qu'un PH admet k égalités si k est le nombre exact d'égalités formellement indépendantes entre les racines du PH et de toutes ses dérivées non-constantes.

Remarque 2.5 Pour n'importe quel $n \geq 4$ le polynôme de Gegenbauer définit une strate surdéterminée de dimension 0 dans la famille $P|_{a_1=0,a_2=-1}$, puisqu'il est complètement défini par la condition d'être divisible par sa deuxième dérivée et on obtient la condition supplémentaire que $P^{(n-1)} = n!x$ divise toutes ses dérivées qui sont des polynômes impairs. La quantité ϱ est égale à $[(n-2)/2]$).

Remarque 2.6 Désignons par Q le polynôme P_e défini pour $n \in 2\mathbb{N}^*$. La proposition 2.1 implique que via un changement de la variable x et une multiplication par une constante non-nulle le polynôme de Gegenbauer de degré $n/2+1$ devient égal à $Q^{(n/2-1)}$ puisque $Q^{(n/2+1)} = (Q^{(n/2-1)})''$ divise $Q^{(n/2-1)}$.

Exemple 2.5 Pour $n = 3$ (resp. $n = 4,\ n = 5$) le polynôme de Gegenbauer est égal à $x^3 - x$ (resp. $x^4 - x^2 + 5/36 = (x^2-1/6)(x^2-5/6),\ x^5 - x^3 + 21x/100 = x(x^2-3/10)(x^2 - 7/10)$).

2.5 Les strates surdéterminées pour $n = 4$.

Théorème 2.1 *Il n'y a aucune strate surdéterminée non-triviale pour $n < 4$. Pour $n = 4$ les points A et B (voir la figure 2.1) définissent les seules strates surdéterminées non-triviales, et tous les points (sauf le point A) sur le bord du domaine d'hyperbolicité appartiennent à des strates surdéterminées triviales.*

Preuve :

Pour $n < 4$

Pour $n = 2$, il y a un seul arrangement avec au moins une égalité entre les racines, c'est l'arrangement $[0f0]$ qui définit une strate surdéterminée triviale par définition.

Pour $n = 3$, il y a quatre arrangements avec au moins une égalité entre les racines, ce sont les arrangements $(0, f, [0s], f, 0)$, $([0f0], s, f, 0])$, $(0, f, s, [0f0])$, $([0f0sf0])$. Le premier arrangement ne définit pas une strate surdéterminée car $codim_{\mathcal{PP}_3} St_\lambda = codim_{\pi(\mathrm{Pol}_3)} \pi(St_\lambda)$ et les trois derniers définissent des strates surdéterminées triviales par définition.

Pour $n = 4$

Pour le point B on a $codim_{\mathcal{P}\mathcal{P}_4} St_\lambda = 3 > codim_{\pi(\mathrm{Pol}_4)} \pi(St_\lambda) = 2$, donc le point B définit une strate surdétermiée.

Pour le point A on a $codim_{\mathcal{P}\mathcal{P}_4} St_\lambda = 5 > codim_{\pi(\mathrm{Pol}_4)} \pi(St_\lambda) = 2$, donc le point A définit une strate surdétermiée.

La strate A est non-triviale car l'égalité $f_2 = t_1$ n'est pas un corollaire algébrique formelle des deux égalités $x_1 = x_2$ et $x_3 = x_4$, c.-à-d. on ne peut pas détruire l'égalité $f_2 = t_1$ sans détruire l'une de deux égalités $x_1 = x_2$ ou $x_3 = x_4$. Remarquons que si pour un PH on a $x_1 = x_2$ et $x_3 = x_4$, alors on a aussi $f_2 = t_1$.

Le point M définit une strate surdéterminée triviale car on peut détruire l'égalité $x_3 = x_4$ sans détruire l'égalité $x_2 = s_1$, en faisant le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_2)$, $\varepsilon \lesssim 0$. Par symétrie on montre que le point L définit une strate surdéterminée triviale.

Le point K définit une strate surdéterminée triviale car on peut détruire l'égalité $x_2 = t_1$ sans détruire l'égalité $x_3 = x_4$, en faisant le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_2)$, $\varepsilon \lesssim 0$. Par symétrie on montre que le point F définit une strate surdéterminée triviale.

Le point C définit une strate surdéterminée triviale car on peut détruire l'égalité $x_2 = x_3$ sans détruire l'égalité $f_2 = t_1$, en faisant le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon$, $\varepsilon \gtrsim 0$.

Les arcs ouverts $AM, MK, KE, EC, CD, DF, FL, LA$ et les points E et D définissent des strates surdéterminées triviales car la quantité ϱ est dûe seulement à la présence de racines multiples de P et de ses dérivées.

Il reste un seul cas à traiter, c'est le cas où l'arrangement est de la forme $([0f0sf0f0])$ qui définit une strate surdéterminée triviale par définition.

2.6 Les résultats pour $n = 5$ et $n = 6$

Dans cette thèse nous reprouvons d'abord un résultat pour n=5 (obtenu dans l'article [16]) en y apportant quelques précisions :

Théorème 2.2 *Il y a exactement trois strates surdéterminées non-triviales en degré 5. Nous donnons les VC correspondants et la liste de polynômes qui les réalisent :*

$$\Sigma \ : \ (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ [0t]\ ,\ f\ ,\ [0sF]\ ,\ f\ ,\ [t0]\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \qquad x^5 - x^3 + \frac{9}{100}x$$

$$\Phi \ : \ (\ 0\ ,\ f\ ,\ [0s]\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ [0sF]\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ [s0]\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \qquad x^5 - x^3 + \frac{21}{100}x$$

$$F \ : \ (\ [0f0]\ ,\ s\ ,\ [ft]\ ,\ [0sF]\ ,\ [tf]\ ,\ s\ ,\ [0f0]\ ) \qquad x^5 - x^3 + \frac{1}{4}x$$

(la strate Φ est définie par le polynôme de Gegenbauer de degré 5). Toutes les trois strates sont impaires. La strate F est la seule ancienne des trois.

Remarque 2.7 Dans l'article [16] il n'est pas précisé que les strates Σ, Φ, F sont les seules non-triviales parmi les strates surdéterminées.

Théorème 2.3 *Toutes les strates surdéterminées non-triviales de degré 6 sont paires ou anciennes. Les strates paires appartiennent à quatre familles à un paramètre (dont deux sont subdivisées en deux sous-familles). Ces familles sont décrites dans le chapitre 3 (voir le paragraphe 3.1). Les strates anciennes sont décrites dans le paragraphe 3.2. Elles forment deux familles à un paramètre.*

La preuve des deux théorèmes ci-dessus et la description des strates surdéterminées occupent les trois chapitres suivants. La preuve utilise programmation en MAPLE.

Dans le chapitre 3 nous décrivons les familles de strates paires et anciennes pour $n = 6$. La preuve que ce sont les seules strates surdéterminées non-triviales pour $n = 6$ est donnée dans les chapitres 4 et 5.

Dans le chapitre 4 nous exprimons l'existence d'égalités entre les racines d'un polynôme à une variable et celles de ses dérivées comme égalités à zéro de certains résultants ou sous-résultants définis par les coefficients du polynôme (voir le paragraphe 4.1).

Un PH de degré 5 (resp. de degré 6) ayant 4 égalités ou plus (resp. 5 égalités ou plus) entre ses racines et celles de ses dérivées définit une strate surdéterminée (voir la définition 2.3).

En effet, l'espace des paramètres (c.-à-d. les coefficients dans la forme (2.1.1)) est de dimension 3 (resp. 4), c.-à-d. plus petite que le nombre d'égalités entre les racines. Cette observation est la raison d'appliquer la méthode des (sous)-résultants pour obtenir la liste de toutes les strates surdéterminées non-triviales de degré 5 ou 6 ayant respectivement plus de 3 ou de 4 égalités, voir le paragraphe 4.3. Dans le cas de degré 5 on obtient les trois strates impaires mentionnées dans le théorème 2.2. Dans le cas de degré 6 on obtient 19 strates paires mentionnées à propos de la figure 3.1. (Cette figure ressemble à un schéma de lignes de métro avec des stations. Les 19 strates sont toutes les "stations" sauf la "station" U, voir la figure).

Pour $n = 6$ on obtient pour la première fois des strates surdéterminées non-triviales avec un nombre d'égalités qui n'est pas plus grand que la dimension de l'espace des paramètres (voir la proposition 3.1). C'est le cas de tous les intervalles entre les "stations de metro" sauf sur la ligne D2, voir la figure 3.1. Il est clair que pour $n \geq 8$ pair il y a des strates paires avec un nombre d'égalités plus petit que le nombre de paramètres ; par exemple, des strates avec deux racines non-nulles symétriques communes pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^{(2)}$ et avec 0 comme racine de $\mathcal{P}^{(1)}$, $\mathcal{P}^{(3)}$, ..., $\mathcal{P}^{(n-1)}$, voir partie 2) de la proposition 3.1.

C'est pourquoi on considère dans le chapitre 5 la notion d'égalités (entre racines) *algébriquement (in)dépendantes*. L'existence d'une égalité (A_1) entre les racines implique une égalité de la forme $\Delta_1 = 0$ où Δ_1 est un résultant défini par les coefficients du polynôme (voir le paragraphe 4.1). L'égalité $\Delta_1 = 0$ définit une hypersurface algébrique réelle dans l'espace des paramètres. La présence d'une deuxième égalité (A_2) entre les racines entraîne une deuxième égalité $\Delta_2 = 0$ où Δ_2 est un (sous)-résultant. Il résulte du lemme 5.7 que les deux égalités (A_1) et (A_2) sont algébriquement indépendantes au sens que toutes les composantes de l'intersection des deux hypersurfaces $\Delta_1 = 0$ et $\Delta_2 = 0$ sont de codimension 2 dans l'espace des paramètres. (Nous évitons des couples d'égalités de la forme $x_i^{(0)} = x_{i+1}^{(0)}$, $x_i^{(0)} = x_i^{(1)}$.)

Remarque 2.8 La variété algébrique réelle V définie par le système de deux équations $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ peut être réductible. Pour $n = 4$, c'est le cas de l'intersection $D(1,3) \cap D(0,1)$ qui consiste en deux points, A et C, définissant deux arrangements différents (voir la figure 2.1 dans le paragraphe 2.1).

Supposons qu'il y a une troisième égalité (A_3) entre les racines. Deux cas sont possibles :

1) chacune des intersections de l'hypersurface $\Delta_3 = 0$ avec les composantes de la variété algébrique réelle V définie par le système $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, est de codimension ≥ 1 dans la composante respective de V.

2) l'hypersurface $\Delta_3 = 0$ contient une des composantes de V (désignée par ζ).

Un exemple où le deuxième cas se réalise est donné dans le chapitre 4 (voir le paragraphe 4.1, exemple 4.2). Dans le deuxième cas chaque point de la composante ζ appartient à une strate surdéterminée.

Supposons que $n = 5$. Si le premièr cas a lieu, l'algèbre $\mathcal{O}/J(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ (où $J(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ est l'idéal engendré par les polynômes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ des variables a, b, c) est de dimension finie. Si c'est le deuxième cas qui se présente, cette algèbre est de dimension infinie (il y a une infinité de fonctions holomorphes définies sur la composante ζ). C'est pourquoi pour répondre à la question lequel des deux cas se présente il suffit de touver une base de Gröbner de l'idéal $J(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ et de vérifier si cette base contient ou pas trois éléments dont les monômes de tête sont sur les trois axes a, b, c. Le premier cas a lieu exactement si un tel triplet d'éléments de la base de Gröbner existe. La recherche d'une base de Gröbner se fait à l'aide d'un programme en MAPLE, voir le paragraphe 5.6. Dans ce paragraphe on décrit le procédé de la même façon pour $n = 5$ et pour $n = 6$ (voir les lignes qui suivent pour le cas $n = 6$).

Le seul cas où pour $n = 5$ on obtient trois égalités algébriquement dépendantes est celui où $\mathcal{P}^{(4)}$ divise $\mathcal{P}^{(2)}$ et $\mathcal{P}^{(3)}$ divise $\mathcal{P}^{(1)}$. Le seul PH qui lui correspond est $x(x^2 - 1/2)^2$.

Si $n = 6$, on prouve d'abord qu'il y a plusieurs cas dans lesquels la variété algébrique réelle définie dans $Oabcd$ par trois égalités entre racines, est de dimension ≤ 1, voir la proposition 5.1 et les lemmes 5.8, 5.9, 5.10 et 5.11 utilisés dans sa preuve. Le seul cas dans lequel cette dimension est ≥ 2 est le cas décrit plus haut, pour $n = 5$, mais en décalant de 1 l'ordre de dérivation, c.-à-d. $\mathcal{P}^{(5)}$ divise $\mathcal{P}^{(3)}$ et $\mathcal{P}^{(4)}$ divise $\mathcal{P}^{(2)}$. C'est le seul cas où les trois égalités sont algébriquement dépendantes. Le seul PH qui lui correspond est $(x^2 - 1/3)^3$ qui définit une strate paire déjà mentionnée dans le chapitre 3.

Considérons quatre égalités entre racines pour $n = 6$. Elles sont algébriquement dépendantes si et seulement s'il s'agit d'une des strates paires ou anciennes, voir le paragraphe 5.8. La preuve de ce fait est basée sur un calcul effectué en MAPLE. Notamment, on trouve une base de Gröbner de l'idéal engendré par les quatre résultants ou sous-résultants qui correspondent à ces égalités, puis on regarde si sur chacun des axes a, b, c, d, il y a un monôme de tête d'un élément de la base. S'il y en a un, alors, les quatre égalités sont algébriquement indépendantes et ne définissent pas une strate surdéterminée.

Dans les cas où il n'y a pas de monômes de tête sur tous les quatre axes on appilque un des lemmes 5.4 ou 5.5 du paragraphe 5.1 ou on diminue le nombre de variables pour prouver qu'il ne s'agit pas d'une strate surdétérminée, voir le paragraphe 5.8.

Chapitre 3

Strates surdéterminées paires et anciennes de degré 6

Dans ce qui suit et pour $n = 6$ nous considérons souvent la famille (2.4.1) (voir aussi la notation 2.1) que nous présentons sous la forme

$$P = x^6 - x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{3.0.1}$$

Proposition 3.1 *1) Tout triplet d'égalités $f_3 = t_2$, $t_2 = l_1 (= 0)$, $x_{i_1}^{j_1} = x_{i_2}^{j_2}$, $j_1 < j_2$ où les racines $x_{i_1}^{j_1}$, $x_{i_2}^{j_2}$ ne sont pas parmi f_3, t_2, l_1, implique qu'un tel polynôme appartient à une strate surdéterminée paire dans la famille (3.0.1).*

2) Plus généralement, un polynôme de degré n de la famille (2.4.1) vérifiant les égalités $(0 =) x_1^{n-1} = x_2^{n-3} = \cdots = x_{[(n-1)/2]+1}^{n-1-2[(n-1)/2]}$, $x_{i_1}^{j_1} = x_{i_2}^{j_2}$, où les racines $x_{i_1}^{j_1}$, $x_{i_2}^{j_2}$ ne sont pas parmi x_1^{n-1}, x_3^{n-3}, $\cdots$, $x_{[(n-1)/2]+1}^{n-1-2[(n-1)/2]}$, définit une strate surdéterminée paire ou impaire.

3) Un polynôme hyperbolique (PH) de degré n qui a au moins $n-1$ égalités formellement indépendantes $x_{i_1}^{j_1} = x_{i_2}^{j_2}$ définit une strate surdéterminée.

Preuve :

La troisième propriété de la proposition précedente résulte directement de la définition 2.3. Pour prouver la première propriété, on remarque que les deux premières égalités impliquent que $a = c = 0$. La troisième égalité implique le système $P^{(j_1)}(x_{i_1}^{j_1}) = 0 = P^{(j_2)}(x_{i_2}^{j_2})$. Comme P est pair, alors ce système est équivalent à $P^{(j_1)}(-x_{i_1}^{j_1}) = 0 = P^{(j_2)}(-x_{i_2}^{j_2})$, où $-x_{i_k}^{j_k} = x_{n+1-j_k-i_k}^{j_k}$, $k = 1, 2$. Cela signifie que les trois égalités impliquent la quatrième $x_{n+1-j_1-i_1}^{j_1} = x_{n+1-j_2-i_2}^{j_2}$, qui est formellement indépendante des autres. D'après la définition 2.3, le polynôme définit une strate surdéterminée. La deuxième propriété se démontre en suivant un même raisonnement. □

L'objectif de ce chapitre est l'étude des strates surdéterminées paires et anciennes de la famille (3.0.1) définies par les PHs. Pour les degrés 4 et 5 une telle étude a été faite dans les articles [16, 17]. Dans la littérature, on ne trouve pas d'autres sortes de strates surdéterminées définies par des PH de degré 6. Ce qui nous ramène à étudier ce cas et à admettre la possibilité que pour tout n et pour les PH qui ne définissant ni des strates surdétérminées anciennes ni des strates surdétérminées triviales, sont tous pairs ou impairs. En cas de polynômes complexes cette propriété n'est pas vraie, voir [19].

Il y a deux raisons pour s'intéresser à l'étude des strates surdéterminées paires et anciennes dans le cas $n = 6$. La première est qu'il existe des strates non-triviales définies par des polynômes ayant 4 (c.-à-d. moins de $n - 1 = 5$) égalités, voir partie 3 de la proposition 3.1. Ces polynômes sont liés à la première propriété de la proposition. Il n'existe aucun exemple dans le cas $n = 4$ ou 5 d'une strate surdéterminée avec moins de $n-1$ égalités. La deuxième raison est qu'on peut trouver des familles de strates anciennes non-triviales contenant des polynômes avec des différents nombres d'égalités pour des différentes constantes d'intégration. Ce qui n'est pas vrai pour $n = 4$ ou 5 (la raison de ne pas être vrai n'est pas le manque de paramètres, mais il y a des raisons arithmétiques, voir la remarque 3.4).

3.1 Familles de strates surdéterminées paires

3.1.1 Les six sous-familles

Dans ce paragraphe nous considérons quatre familles de strates surdéterminées paires. Inspiré par la première partie de la proposition 3.1, nous définissons les strates paires par les nombres entiers j_1 et j_2. Nous supposons que $0 \leq j_1 \leq j_2 - 2$, $j_2 \leq 4$. Nous n'étudions pas systématiquement des strates anciennes dans ce paragraphe (elles seront traitées dans le paragraphe 3.2). Nous supposons que $j_1 = 0$, les quatre valeurs possibles de j_2 pour lesquelles $P^{(5)}$ divise $P^{(3)}$ sont $4, 3, 2$ et 1. Nous ajoutons aux trois égalités $f_3 = t_2$, $t_2 = l_1(= 0)$, $x_{i_1}^{j_1} = x_{i_2}^{j_2}$ (qui définissent la famille) l'égalité $x_{n+1-j_1-i_1}^{j_1} = x_{n+1-j_2-i_2}^{j_2}$ provenant d'elles, voir la preuve de la proposition 3.1. Nous caractérisons les familles comme suit :

Famille A) : $P^{(4)}$ divise P et $P^{(5)}$ divise $P^{(3)}$;

Famille B) : $P^{(3)}/x$ divise P et $P^{(5)}$ divise $P^{(3)}$;

Famille C) : $P^{(2)}$ et P admettent deux ou quatre racines en commun et $P^{(5)}$ divise $P^{(3)}$.

Famille D) : P admet une racine multiple.

Le paramétrage de chaque famille est décrit dans l'une des quatre sous-paragraphes qui suivent. Deux de ces familles, C) et D), sont divisées en deux sous-familles. Désormais nous parlons des six *sous-familles* A), B), $C1$), $C2$), $D1$) et $D2$).

Il y a des polynômes appartenant à deux ou trois sous-familles en même temps. Pour mieux comprendre les intersections entre les sous-familles nous illustrons ces ensembles par la figure 3.1. Les sous-familles sont indiquées par des lignes de styles différents (comme les lignes du métro sur son schéma). Les "stations" sont les arrangements avec plus d'égalités entre les racines du polynôme et/ou de ses dérivées que pour les valeurs avoisinantes des paramètres.

Les "stations" sont nommées par des lettres ; dans la description de chaque sous-famille nous expliquons comment l'arrangement des racines dépend du paramètre et nous indiquons par les mêmes lettres l'arrangement correspondant à la "station". Ainsi, par exemple le premier arrangement dans la famille A) (indiqué par la lettre Θ) correspond à la "station" indiqué par Θ sur la figure. La famille A) est présentée par un "dash-dot-dot-dotted line", le troisième arrangement de cette famille est présenté par la "station" nommée H, le second arrangement de la famille est "la ligne A) du métro entre les stations Θ et H ", etc.

Sur les 20 "stations", trois appartiennent à une seule ligne (ce sont ζ, ξ et η indiquées par des cercles), 16 appartiennent à deux lignes et une (notée U) appartient à trois lignes à la fois. Notons qu'un arrangement (c.-à-d. "une station") qui appartient à deux (ou trois) sous-familles est en général obtenu pour des différentes valeurs des paramètres dans la définition de la première et la deuxième (troisième) sous-famille.

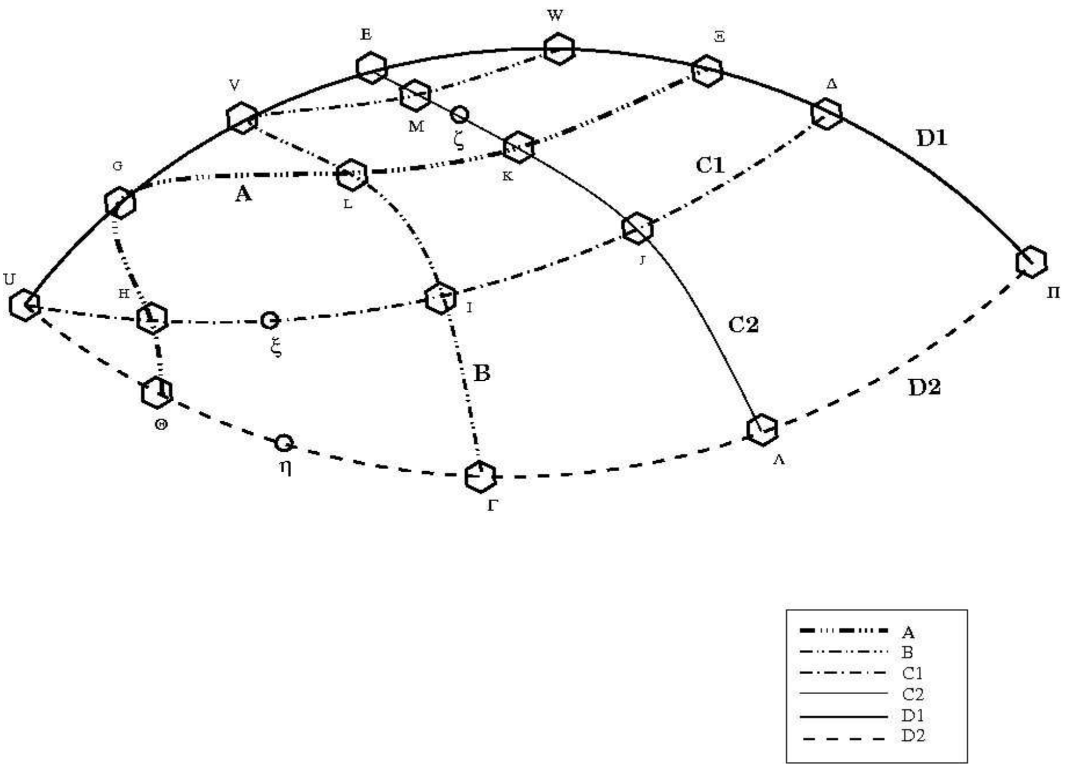

FIG. 3.1 – Les 6 sous familles de strates paires

Remarque 3.1 1) Dans la description des sous-familles, nous donnons avec l'arrangement des polynômes des strates de la famille, les valeurs approximatives des paramètres correspondant aux "stations" et aussi les lettres par lesquelles les "stations" sont indiquées sur la figure 3.1.

2) Pour $j_1 = 1$, $j_2 = 3$ et pour $j_1 = 1$, $j_2 = 4$, on peut obtenir de la même façon deux lignes du métro décrites dans les parties D) et E) du paragraphe 3.2. Il s'agit de strates anciennes. Ces lignes ne sont pas presentées sur la figure 3.1, mais il est facile d'imaginer comment elles passent (la première par les "stations" V, ζ et Ξ, la deuxième par G, ξ et η). Pour $j_1 = 2$, $j_3 = 4$ on obtient seulement une "station" (notée, E), pas une ligne, (voir parties B) et C) du paragraphe 3.2).

Remarque 3.2 Considérons le polynôme $Y := (x^2 - 1)^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Alors $Y^{(k+s)}$ divise $Y^{(k-s)}$ pour s$=1, 2, \ldots, k-1$ (voir la proposition 2.1). La strate Ξ (voir dans le théorème 3.1 la description de la famille A)) est définie par un polynôme jouant le rôle de $Y^{(2)}$ pour $k = 4$. La strate E (voir le théorème 3.3) est définie par un autre polynôme jouant le rôle de Y pour $k = 3$. Ces strates ont plus d'égalités que les autres "stations".

3.1.2 La famille A)

Dans ce sous-paragraphe nous considérons la famille A).

Proposition 3.2 *Lorsque $P^{(4)}$ divise P et $P^{(5)}$ divise $P^{(3)}$, alors $P^{(5)}$ divise $P^{(1)}$ aussi. Par conséquent, les polynômes de la famille définissent des strates surdéterminées.*

Preuve :

Nous considérons les polynômes présentés sous la forme (3.0.1). Les racines de $P^{(4)}$ sont égales à $\pm 1/\sqrt{15}$ et la condition que $P^{(4)}$ divise P implique les égalités $1/15^3 - 1/15^2 \pm a/15\sqrt{15} + b/15 \pm c/\sqrt{15} + d = 0$. Elles sont équivalentes à

$$\frac{1}{15^3} - \frac{1}{15^2} + \frac{b}{15} + d = 0 \quad , \quad a + 15c = 0 \quad .$$

La condition que $P^{(5)}$ divise $P^{(3)}$ implique $a = 0$, et par suite, $c = 0$. La dernière égalité signifie que 0 est racine de $P^{(1)}$ aussi. Les conditions que $P^{(4)}$ divise P et que $P^{(5)}$ divise $P^{(3)}$ sont équivalentes aux trois égalités suivantes : $x_j = F_1$, $x_{6-j} = F_2$, $l_1 = t_2$. L'égalité $l_1 = f_3$ (résultant de $c = 0$) est formellement indépendante des autres. Cette égalité est vérifiée par chaque polynôme de la famille, et donc tous les polynômes de la famille appartiennent à des strates surdéterminées.

On peut considérer b comme un paramètre réel, donc la famille peut être présentée sous la forme

$$P_b \ : \ x^6 - x^4 + bx^2 - b/15 + 14/3375 = (x^2 - 1/15)(x^4 - 14x^2/15 + b - 14/225) \qquad \square$$

Remarque 3.3 Il ne serait pas correct de dire que les polynômes de la famille définissent seulement une strate surdéterminée parce que l'arrangement des racines dépend de la valeur du paramètre b. Dans ce paragraphe nous décrivons cet arrangement comme une fonction de la valeur de b.

Lemme 3.1 *Le polynôme P_b est hyperbolique si et seulement si $b \in [14/225, 7/25]$.*

Preuve :

Deux des racines de P_b sont des racines de $P_b^{(4)}$ aussi. Ces sont $\pm 1/\sqrt{15}$. Les autres quatre racines sont $\pm\sqrt{105 \pm 45\sqrt{7-25b}}/15$. Toutes ces racines sont réels si et seulement si on a $7 - 25b \geq 0$ et $105 \geq 45\sqrt{7-25b}$. Ce qui prouve que $b \in [14/225, 7/25]$. $\square$

Théorème 3.1 *Le VC du polynôme P_b dépend de la manière suivante du paramètre b :*

pour $b = \dfrac{14}{225} = 0.062222\ldots$, Θ

$$(0 , f , s , t , [0F] , f , s , [0ftl0] , s , f , [0F] , t , s , f , 0)$$
$$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1 \quad x_2\, F_1 \quad f_2 \quad s_2 \quad x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4 \quad s_3 \quad f_4 \quad x_5\, F_2 \quad t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$$

pour $b \in \left(\dfrac{14}{225}, \dfrac{25}{147} - \dfrac{8\sqrt{78}}{735}\right)$

$$(0 , f , s , t , [0F] , f , s , 0 , [ftl] , 0 , s , f , [0F] , t , s , f , 0)$$
$$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1 \quad x_2\, F_1 \quad f_2 \quad s_2 \quad x_3 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad x_4 \quad s_3 \quad f_4 \quad x_5\, F_2 \quad t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$$

pour $b = \dfrac{25}{147} - \dfrac{8\sqrt{78}}{735} = 0.073945\ldots$, H

$$(0 , f , s , t , [0F] , f , [s0] , [ftl] , [0s] , f , [0F] , t , s , f , 0)$$
$$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1 \quad x_2\, F_1 \quad f_2 \quad s_2\, x_3 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad x_4\, s_3 \quad f_4 \quad x_5\, F_2 \quad t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$$

pour $b \in \left(\dfrac{25}{147} - \dfrac{8\sqrt{78}}{735}, \dfrac{3}{25}\right)$

$$(0 , f , s , t , [0F] , f , 0 , s , [ftl] , s , 0 , f , [0F] , t , s , f , 0)$$
$$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1 \quad x_2\, F_1 \quad f_2 \quad x_3 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad x_4 \quad f_4 \quad x_5\, F_2 \quad t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$$

pour $b = \dfrac{3}{25} = 0.12000\ldots$, G

$$(0 , f , s , t , [0Ff0] , s , [ftl] , s , [0fF0] , t , s , f , 0)$$
$$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1 \quad x_2\, F_1\, f_2\, x_3 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad x_4\, f_4\, x_5\, F_2 \quad t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$$

pour $b \in \left(\dfrac{3}{25}, \dfrac{47}{225}\right)$

$$(0 , f , s , t , 0 , f , [0F] , s , [ftl] , s , [0F] , f , 0 , t , s , f , 0)$$
$$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1 \quad x_2 \quad f_2 \quad x_3\, F_1 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad x_4\, F_2 \quad f_4 \quad x_5 \quad t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$$

pour $b = \dfrac{47}{225} = 0.20889\ldots$, L

$$(0 , f , s , [t0] , f , [0F] , s , [ftl] , s , [0F] , f , [0t] , s , f , 0)$$
$$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1\, x_2 \quad f_2 \quad x_3\, F_1 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad x_4\, F_2 \quad f_4 \quad x_5\, t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$$

pour $b \in \left(\dfrac{47}{225}, \dfrac{25}{147} + \dfrac{8\sqrt{78}}{735}\right)$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ 0\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ [0F]\ ,\ s\ ,\ [ftl]\ ,\ s\ ,\ [0F]\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ 0\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad s_1\quad x_2\quad t_1\quad f_2\quad x_3\,F_1\quad s_2\quad f_3\,t_2\,l_1\quad s_3\quad x_4\,F_2\quad f_4\quad t_3\quad x_5\quad s_4\quad f_5\quad x_6$$

pour $b = \dfrac{25}{147} + \dfrac{8\sqrt{78}}{735} = 0.26620\ldots,\qquad K$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ [s0]\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ [0F]\ ,\ s\ ,\ [ftl]\ ,\ s\ ,\ [0F]\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ [0s]\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad s_1\,x_2\quad t_1\quad f_2\quad x_3\,F_1\quad s_2\quad f_3\,t_2\,l_1\quad s_3\quad x_4\,F_2\quad f_4\quad t_3\quad x_5\,s_4\quad f_5\quad x_6$$

pour $b \in \left(\dfrac{25}{147} + \dfrac{8\sqrt{78}}{735}, \dfrac{7}{25}\right)$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ 0\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ [0F]\ ,\ s\ ,\ [ftl]\ ,\ s\ ,\ [0F]\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ 0\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad x_2\quad s_1\quad t_1\quad f_2\quad x_3\,F_1\quad s_2\quad f_3\,t_2\,l_1\quad s_3\quad x_4\,F_2\quad f_4\quad t_3\quad s_4\quad x_5\quad f_5\quad x_6$$

pour $b = \dfrac{7}{25} = 0.28000\ldots,\qquad \Xi$

$$(\ [0f0]\ ,\ s\ ,\ [tf]\ ,\ [0F]\ ,\ s\ ,\ [ftl]\ ,\ s\ ,\ [0F]\ ,\ [ft]\ ,\ s\ ,\ [0f0]\ )$$
$$x_1\,f_1\,x_2\quad s_1\quad t_1\,f_2\quad x_3\,F_1\quad s_2\quad f_3\,t_2\,l_1\quad s_3\quad x_4\,F_2\quad f_4\,t_3\quad s_4\quad x_5\,f_5\,x_6$$

Preuve :

On peut vérifier directement que lorsque $b \in [14/225, 7/25]$ le suivant est vrai :
A) pour et seulement pour la valeur $b = 14/225$, le polynôme P_b admet une racine double en 0 ;
B) pour et seulement pour la valeur $b = (25/147) \pm (8\sqrt{78}/735)$ on a $Res(P_b, P_b^{(2)}) = 0$;
C) pour et seulement pour les valeurs $b = 3/25$ et $b = 7/25$ le polynôme P_b admet une racine double différente de zéro ;
D) pour et seulement pour la valeur $b = 47/225$ on a $Res(P_b, P_b^{(3)}) = 0$.

Les conditions que $P^{(4)}$ divise P et que $P^{(5)}$ divise $P^{(3)}$ et la proposition 3.2 sont vérifiées pour toutes les valeurs de $b \in [14/225, 7/25]$. Par conséquent, pour les valeurs de $b \geq 14/225$ une bifurcation de la racine de P_b se produit à 0 et le deuxième arrangement de la liste est valide. Pour $b \in (14/225, (25/147) - (8\sqrt{78}/735))$ aucune confluence de (n'importe quelles) racines n'est possible ; ceci résulte de $A) - D)$.

Pour $b = (25/147) - (8\sqrt{78}/735)$ la seule confluence possible est celle entre s_2 et x_3 et par parité celle entre s_3 et x_4.

Pour $b = 3/25$ il faut avoir $x_2 = x_3$ et $x_4 = x_5$. En effet, l'absence d'une racine de P_b en 0 implique que l'on a ou bien $x_1 = x_2$, $x_5 = x_6$ ou $x_2 = x_3$, $x_4 = x_5$ ou les deux. La première possibilité n'est pas réalisable parce qu'elle impliquerait $x_1 = t_1$, c.-à-d. le polynôme pair P_b devrait avoir une racine différente de zéro de multiplicité ≥ 4. Comme il n'y a aucune confluence pour $b \in ((25/147) - (8\sqrt{78}/735), 3/25)$, sur cet intervalle il faut avoir $x_3 < s_2$ et $s_3 < x_4$. Cela justifie le quatrième arrangement de la liste.

Pour $b \geq 3/25$, les racines doubles $x_2 = x_3$ et $x_4 = x_5$ ont donné naissance chacune à deux racines simples et pour $b = 47/225$ il faut avoir les égalités $t_1 = x_2$ et $t_3 = x_5$. En effet, il est impossible d'avoir $t_1 = x_1$ et $t_3 = x_6$, voir ci-dessus, et comme P_b n'a aucune racine en 0, la racine t_2 n'est égale à aucune des racines de P_b.

Pour $b = (25/147)+(8\sqrt{78}/735)$ on a $x_2 = s_1$ et $x_5 = s_4$. En effet, c'est une conséquence directe du fait que pour cette valeur de b on n'a pas $x_3 = s_2 = F_1$, $x_4 = s_3 = F_2$.

L'avant dernier arrangement sur la liste résulte (par raisonnement de continuité) du dernier et de l'avant avant dernier. $\square$

3.1.3 La famille B)

Les conditions que les polynômes de la famille B) sont pairs et ont $t_{1,3} = \pm 1/\sqrt{5}$ comme racines impliquent que la famille peut être présentée sous la forme suivante :

$$R_b \ : \ x^6 - x^4 + bx^2 - \frac{b}{5} + \frac{4}{125} = \left(x^2 - \frac{1}{5}\right)\left(x^4 - \frac{4x^2}{5} + b - \frac{4}{25}\right) .$$

Lemme 3.2 *Le polynôme R_b est hyperbolique si et seulement si $b \in [4/25, 8/25]$.*

Preuve :

Les racines de R_b qui sont différentes de $\pm 1/\sqrt{5}$ sont égales à $\pm\sqrt{10 \pm 5\sqrt{8-25b}}/5$. Elles sont toutes réelles lorsque les deux inégalités suivantes sont vérifiées : $8 - 25b \geq 0$, $10 - 5\sqrt{8-25b} \geq 0$ $\square$.

Théorème 3.2 *Le VC du polynôme R_b dépend de la manière suivante du paramètre b :*

pour $b = \dfrac{4}{25} = 0.16000\ldots$, Γ

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (\ 0 \ , & f \ , & s \ , & [t0] \ , & f \ , & F \ , & s \ , & [0ftl0] \ , & s \ , & F \ , & f \ , & [0t] \ , & s \ , \ f \ , \ 0 \ ) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1\, x_2 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & x_5\, t_3 & s_4 \ \ f_5 \ \ x_6 \end{array}$$

pour $b \in \left(\dfrac{4}{25}, \dfrac{123 - 3\sqrt{113}}{490}\right)$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} (\ 0 \ , & f \ , & s \ , & [t0] \ , & f \ , & F \ , & s \ , & 0 \ , & [ftl] \ , & 0 \ , & s \ , & F \ , & f \ , & [0t] \ , & s \ , & f \ , \ 0 \ ) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1\, x_2 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3 & f_3\, t_2\, l_1 & x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & x_5\, t_3 & s_4 & f_5 \ \ x_6 \end{array}$$

pour $b = \dfrac{123 - 3\sqrt{113}}{490} = 0.18594\ldots$, I

$$\begin{array}{cccccccccccccc} (\ 0 \ , & f \ , & s \ , & [t0] \ , & f \ , & F \ , & [s0] \ , & [ftl] \ , & [0s] \ , & F \ , & f \ , & [0t] \ , & s \ , & f \ , \ 0 \ ) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1\, x_2 & f_2 & F_1 & s_2\, x_3 & f_3\, t_2\, l_1 & x_4\, s_3 & F_2 & f_4 & x_5\, t_3 & s_4 & f_5 \ \ x_6 \end{array}$$

pour $b \in \left(\frac{123 - 3\sqrt{113}}{490}, \frac{47}{225} \right)$

$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ [t0] \ , \ f \ , \ F \ , \ 0 \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ 0 \ , \ F \ , \ f \ , \ [0t] \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$

$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1\, x_2 \quad f_2 \quad F_1 \quad x_3 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad x_4 \quad F_2 \quad f_4 \quad x_5\, t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $b = \frac{47}{225} = 0.20889\ldots, \quad L$

$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ [t0] \ , \ f \ , \ [F0] \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ [0F] \ , \ f \ , \ [0t] \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$

$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1\, x_2 \quad f_2 \quad F_1\, x_3 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad x_4\, F_2 \quad f_4 \quad x_5\, t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $b \in \left(\frac{47}{225}, \frac{7}{25} \right)$

$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ [t0] \ , \ f \ , \ 0 \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ 0 \ , \ f \ , \ [0t] \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$

$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1\, x_2 \quad f_2 \quad x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4 \quad f_4 \quad x_5\, t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $b = \frac{7}{25} = 0.28000\ldots, \quad V$

$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ [0ft0] \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ [0ft0] \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$

$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad x_2\, f_2\, t_1\, x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4\, f_4\, t_3\, x_5 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $b \in \left(\frac{7}{25}, \frac{123 + 3\sqrt{113}}{490} \right)$

$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ 0 \ , \ f \ , \ [t0] \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ [0t] \ , \ f \ , \ 0 \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$

$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad x_2 \quad f_2 \quad t_1\, x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4\, t_3 \quad f_4 \quad x_5 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $b = \frac{123 + 3\sqrt{113}}{490} = 0.31610\ldots, \quad M$

$(\ 0 \ , \ f \ , \ [s0] \ , \ f \ , \ [t0] \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ [0t] \ , \ f \ , \ [0s] \ , \ f \ , \ 0 \ )$

$x_1 \quad f_1 \quad s_1\, x_2 \quad f_2 \quad t_1\, x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4\, t_3 \quad f_4 \quad x_5\, s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $b \in \left(\frac{123 + 3\sqrt{113}}{490}, \frac{8}{25} \right)$

$(\ 0 \ , \ f \ , \ 0 \ , \ s \ , \ f \ , \ [t0] \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ [0t] \ , \ f \ , \ s \ , \ 0 \ , \ f \ , \ 0 \ )$

$x_1 \quad f_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad f_2 \quad t_1\, x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4\, t_3 \quad f_4 \quad s_4 \quad x_5 \quad f_5 \quad x_6$

pour $b = \frac{8}{25} = 0.32000\ldots, \quad W$

$(\ [0f0] \ , \ s \ , \ f \ , \ [t0] \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ [0t] \ , \ f \ , \ s \ , \ [0f0] \ )$

$x_1\, f_1\, x_2 \quad s_1 \quad f_2 \quad t_1\, x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3\, t_2\, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4\, t_3 \quad f_4 \quad s_4 \quad x_5\, f_5\, x_6$

Preuve :

1^0. On vérifie directement que les racines $t_{1,3} = \pm 1/\sqrt{5}$ de $R_b^{(3)}$ sont exactement des racines de $R_b^{(1)}$ si $b = 7/25$. Pour $b < 7/25$ on a $R_b^{(1)}(1/\sqrt{5}) = (1/\sqrt{5})(-14/25 + 2b) < 0$, ce qui implique $t_1 < f_2$ et $t_3 > f_4$. De la même façon on a $R_b^{(1)}(1/\sqrt{5}) > 0$, $t_1 > f_2$ et $t_3 < f_4$ pour $b > 7/25$.
2^0. Les racines $F_{1,2} = \pm 1/\sqrt{15}$ de $R_b^{(4)}$ sont aussi des racines de R_b si $b = 47/225$. C'est le seul polynôme appartenant en même temps à la famille A) et à la famille B). Pour $b > 47/225$) on a $R_b(1/\sqrt{15}) > 0$ (resp. $R_b(1/\sqrt{15}) < 0$).
3^0. On peut avoir $R_b^{(1)}(\pm 1/\sqrt{15}) = 0$ seulement pour $b = 3/25 \notin [4/25, 8/25]$. C'est ainsi que, dans la famille B) les racines de $R_b^{(4)}$ ne sont jamais les racines de $R_b^{(1)}$.
4^0. On peut avoir $R_b^{(2)}(\pm 1/\sqrt{15}) = 0$ si $b = 1/3 > 8/25$. C'est ainsi que, dans la famille B) on a $R_b^{(2)}(\pm 1/\sqrt{15}) < 0$ pour toutes les valeurs de b (il suffit de vérifier l'inégalité pour $b = 4/15$, car $R_b^{(2)}(\pm 1/\sqrt{15})$ est une fonction affine de b).
5^0. En utilisant 3^0 et 4^0, on conclut que dans la famille B) on a toujours $f_2 < F_1 < s_2$ et $s_3 < F_2 < f_4$. Par conséquent, on a $x_2 < f_2 < F_1$ et $F_2 < f_4 < x_5$, et donc pour $b = 47/225$ (voir 2^0) on a $F_1 = x_3$ et $F_2 = x_4$. Pour $b < 47/225$ (resp. pour $b > 47/225$) on a $F_1 < x_3$, $F_2 > x_4$ (resp. $F_1 > x_3$, $F_2 < x_4$).
6^0. Pour comprendre pourquoi les valeurs de b sont des racines communes de R_b et $R_b^{(2)}$ il faut résoudre le système suivant :

$$x^6 - x^4 + bx^2 - \frac{b}{5} + \frac{4}{125} = 0 \quad , \quad 30x^4 - 12x^2 + 2b = 0$$

dont les solutions sont $x^2 = 1/\sqrt{5}$, $b = 3/5 \notin [4/25, 8/25]$ et $x^2 = (13 \pm \sqrt{113})/70$, $b = b_\pm = (123 \pm 3\sqrt{113})/490$. Pour $b = b_-$ on a $R_b^{(1)}(\sqrt{(13 - \sqrt{113})/70}) > 0$, d'où l'on a $x_3 = s_2$ et $x_4 = s_3$. Pour $b = b_+$ on a $R_b^{(1)}(\sqrt{(13 + \sqrt{113})/70}) < 0$, d'où $x_2 = s_1$ et $x_5 = s_4$.
7^0. Pour résumer la preuve du théorème nous écrivons dans une chaîne les valeurs du paramètre b pour lesquelles l'arrangement des racines change et au-dessous nous indiquons les parties de la preuve du théorème (ou lemme 3.2) où le changement de l'arrangement est décrit :

$4/25$	b_-	$47/225$	$7/25$	b_+	$8/25$
lemme 3.2	6^0	2^0 , 5^0	1^0	6^0	lemme 3.2

□

3.1.4 La famille C)

Pour définir la famille C) par une formule on utilise les conditions que P et $P^{(2)}$ ont une racine commune, notée τ :

$$\tau^6 - \tau^4 + b\tau^2 + d = 0 \quad , \quad 30\tau^4 - 12\tau^2 + 2b = 0 \tag{3.1.1}$$

Posons $v := \tau^2$. D'après les égalités (3.1.1) on constate que $b = 6v - 15v^2$, $d = -5v^2 + 14v^3$, et donc on peut définir la famille C) par la formule

$$S_v := x^6 - x^4 + (6v - 15v^2)x^2 - 5v^2 + 14v^3 = (x^2 - v)(x^4 + (v-1)x^2 + 5v - 14v^2) \ \ , \ \ v \geq 0 \ .$$

Lemme 3.3 *Le polynôme S_v est hyperbolique si et seulement si $v \in J$ où $J = [0, 1/19] \cup [1/3, 5/14]$.*

Preuve :

Les racines du polynôme $x^4 + (v-1)x^2 + 5v - 14v^2$ sont $\pm\sqrt{(1 - v \pm \sqrt{57v^2 - 22v + 1})/2}$. Toutes ces quatre racines sont réelles lorsque, pour $v \geq 0$, les deux inégalités suivants sont vraies :

$$57v^2 - 22v + 1 \geq 0 \ \ , \ \ 1 - v - \sqrt{57v^2 - 22v + 1} \geq 0 \ .$$

Les deux dernières inégalités avec $v \geq 0$ sont équivalentes à $v \in [0, 1/19] \cup [1/3, 5/14]$. □

Dans ce qui suit on parlera de la sous-famille $C1$) et de la sous-famille $C2$) qui signifient la famille C), définie respectivement pour $v \in [0, 1/19]$ et $v \in [1/3, 5/14]$.

Théorème 3.3 *Le VC du polynôme S_v dépend de la manière suivante du paramètre v :*

pour $v \in \left[0, \dfrac{1}{19}\right]$ (sous-famille C1))

pour $v = 0$, U

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} (\, 0 \, , & f \, , & s \, , & t \, , & F \, , & \multicolumn{10}{c}{[0fst0fsl0f0] \, ,} & F \, , & t \, , & s \, , & f \, , & 0 \,) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & F_1 & x_2 & f_2 & s_2 & t_2 & x_3 & f_3 & s_3 & l_1 & x_4 & f_4 & x_5 & F_2 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v \in \left(0, \dfrac{19}{105} - \dfrac{2\sqrt{78}}{105}\right)$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} (\, 0 \, , & f \, , & s \, , & t \, , & F \, , & 0 \, , & f \, , & [0s] \, , & [ftl] \, , & [s0] \, , & f \, , & 0 \, , & F \, , & t \, , & s \, , & f \, , & 0 \,) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & F_1 & x_2 & f_2 & x_3 \, s_2 & f_3 \, t_2 \, l_1 & s_3 \, x_4 & f_4 & x_5 & F_2 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v = \dfrac{19}{105} - \dfrac{2\sqrt{78}}{105} = 0.01272\ldots$, H

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (\, 0 \, , & f \, , & s \, , & t \, , & [F0] \, , & f \, , & [0s] \, , & [ftl] \, , & [s0] \, , & f \, , & [0F] \, , & t \, , & s \, , & f \, , & 0 \,) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & F_1 \, x_2 & f_2 & x_3 \, s_2 & f_3 \, t_2 \, l_1 & s_3 \, x_4 & f_4 & x_5 \, F_2 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v \in \left(\dfrac{19}{105} - \dfrac{2\sqrt{78}}{105}, \dfrac{1}{5} - \dfrac{2\sqrt{5}}{25}\right)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (\, 0 \, , & f \, , & s \, , & t \, , & 0 \, , & F \, , & f \, , & [0s] \, , & [ftl] \, , & [s0] \, , & f \, , & F \, , & 0 \, , & t \, , & s \, , & f \, , & 0 \,) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & x_2 & F_1 & f_2 & x_3 \, s_2 & f_3 \, t_2 \, l_1 & s_3 \, x_4 & f_4 & F_2 & x_5 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v = \frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{25} = 0.02111\ldots, \quad \xi$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ 0\ ,\ [Ff]\ ,\ [0s]\ ,\ [ftl]\ ,\ [s0]\ ,\ [fF]\ ,\ 0\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad s_1\quad t_1\quad x_2\quad F_1\, f_2\quad x_3\, s_2\quad f_3\, t_2\, l_1\quad s_3\, x_4\quad f_4\, F_2\quad x_5\quad t_3\quad s_4\quad f_5\quad x_6$$

pour $v \in \left(\frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{25}, \frac{13}{70} - \frac{\sqrt{113}}{70}\right)$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ 0\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ [0s]\ ,\ [ftl]\ ,\ [s0]\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ 0\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad s_1\quad t_1\quad x_2\quad f_2\quad F_1\quad x_3\, s_2\quad f_3\, t_2\, l_1\quad s_3\, x_4\quad F_2\quad f_4\quad x_5\quad t_3\quad s_4\quad f_5\quad x_6$$

pour $v = \frac{13}{70} - \frac{\sqrt{113}}{70} = 0.03385\ldots, \quad I$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ [t0]\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ [0s]\ ,\ [ftl]\ ,\ [s0]\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ [0t]\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad s_1\quad t_1\, x_2\quad f_2\quad F_1\quad x_3\, s_2\quad f_3\, t_2\, l_1\quad s_3\, x_4\quad F_2\quad f_4\quad x_5\, t_3\quad s_4\quad f_5\quad x_6$$

pour $v \in \left(\frac{13}{70} - \frac{\sqrt{113}}{70}, \frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{7}}{35}\right)$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ 0\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ [0s]\ ,\ [ftl]\ ,\ [s0]\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ 0\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad s_1\quad x_2\quad t_1\quad f_2\quad F_1\quad x_3\, s_2\quad f_3\, t_2\, l_1\quad s_3\, x_4\quad F_2\quad f_4\quad t_3\quad x_5\quad s_4\quad f_5\quad x_6$$

pour $v = \frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{7}}{35} = 0.04881\ldots, \quad J$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ [s0]\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ [0s]\ ,\ [ftl]\ ,\ [s0]\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ [0s]\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad s_1\, x_2\quad t_1\quad f_2\quad F_1\quad x_3\, s_2\quad f_3\, t_2\, l_1\quad s_3\, x_4\quad F_2\quad f_4\quad t_3\quad x_5\, s_4\quad f_5\quad x_6$$

pour $v \in \left(\frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{7}}{35}, \frac{1}{19}\right)$

$$(\ 0\ ,\ f\ ,\ 0\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ [0s]\ ,\ [ftl]\ ,\ [s0]\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ 0\ ,\ f\ ,\ 0\ )$$
$$x_1\quad f_1\quad x_2\quad s_1\quad t_1\quad f_2\quad F_1\quad x_3\, s_2\quad f_3\, t_2\, l_1\quad s_3\, x_4\quad F_2\quad f_4\quad t_3\quad s_4\quad x_5\quad f_5\quad x_6$$

pour $v = \frac{1}{19} = 0.052632\ldots, \quad \Delta$

$$(\ [0f0]\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ [0s]\ ,\ [ftl]\ ,\ [s0]\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ [0f0]\ )$$
$$x_1\, f_1\, x_2\quad s_1\quad t_1\quad f_2\quad F_1\quad x_3\, s_2\quad f_3\, t_2\, l_1\quad s_3\, x_4\quad F_2\quad f_4\quad t_3\quad s_4\quad x_5\, f_5\, x_6$$

pour $v \in \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{14}\right]$ (sous-famille C2))

pour $v = \frac{1}{3} = 0.3333\ldots, \quad E$

$$(\ [0fs0f0]\ ,\ t\ ,\ [Fs]\ ,\ [ftl]\ ,\ [sF]\ ,\ t\ ,\ [0fs0f0]\ )$$
$$x_1\, f_1\, s_1\, x_2\, f_2\, x_3\quad t_1\quad F_1\, s_2\quad f_3\, t_2\, l_1\quad s_3\, F_2\quad t_3\quad x_4\, f_4\, s_4\, x_5\, f_5\, x_6$$

pour $v \in \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{70} + \frac{\sqrt{113}}{70}\right)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (0 , & f , & [0s] , & f , & 0 , & t , & F , & s , & [ftl] , & s , & F , & t , & 0 , & f , & [s0] , & f , & 0) \\ x_1 & f_1 & x_2\, s_1 & f_2 & x_3 & t_1 & F_1 & s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3 & F_2 & t_3 & x_4 & f_4 & s_4\, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v = \frac{13}{70} + \frac{\sqrt{113}}{70} = 0.33757\dots, \quad M$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (0 , & f , & [0s] , & f , & [0t] , & F , & s , & [ftl] , & s , & F , & [t0] , & f , & [s0] , & f , & 0) \\ x_1 & f_1 & x_2\, s_1 & f_2 & x_3\, t_1 & F_1 & s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3 & F_2 & t_3\, x_4 & f_4 & s_4\, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v \in \left(\frac{13}{70} + \frac{\sqrt{113}}{70}, \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{30}}{75}\right)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (0 , & f , & [0s] , & f , & t , & 0 , & F , & s , & [ftl] , & s , & F , & 0 , & t , & f , & [s0] , & f , & 0) \\ x_1 & f_1 & x_2\, s_1 & f_2 & t_1 & x_3 & F_1 & s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3 & F_2 & x_4 & t_3 & f_4 & s_4\, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v = \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{30}}{75} = 0.34606\dots, \quad \zeta$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (0 , & f , & [0s] , & [ft] , & 0 , & F , & s , & [ftl] , & s , & F , & 0 , & [tf] , & [s0] , & f , & 0) \\ x_1 & f_1 & x_2\, s_1 & f_2\, t_1 & x_3 & F_1 & s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3 & F_2 & x_4 & t_3\, f_4 & s_4\, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v \in \left(\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{30}}{75}, \frac{19}{105} + \frac{2\sqrt{78}}{105}\right)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (0 , & f , & [0s] , & t , & f , & 0 , & F , & s , & [ftl] , & s , & F , & 0 , & f , & t , & [s0] , & f , & 0) \\ x_1 & f_1 & x_2\, s_1 & t_1 & f_2 & x_3 & F_1 & s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3 & F_2 & x_4 & f_4 & t_3 & s_4\, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v = \frac{19}{105} + \frac{2\sqrt{78}}{105} = 0.34918\dots, \quad K$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (0 , & f , & [0s] , & t , & f , & [0F] , & s , & [ftl] , & s , & [F0] , & f , & t , & [s0] , & f , & 0) \\ x_1 & f_1 & x_2\, s_1 & t_1 & f_2 & x_3\, F_1 & s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3 & F_2\, x_4 & f_4 & t_3 & s_4\, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v \in \left(\frac{19}{105} + \frac{2\sqrt{78}}{105}, \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{7}}{35}\right)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (0 , & f , & [0s] , & t , & f , & F , & 0 , & s , & [ftl] , & s , & 0 , & F , & f , & t , & [s0] , & f , & 0) \\ x_1 & f_1 & x_2\, s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & x_3 & s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3 & x_4 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4\, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v = \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{7}}{35} = 0.35119\dots, \quad J = G_6$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (0 , & f , & [0s] , & t , & f , & F , & [0s] , & [ftl] , & [s0] , & F , & f , & t , & [s0] , & f , & 0) \\ x_1 & f_1 & x_2\, s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & x_3\, s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3\, x_4 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4\, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v \in \left(\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{7}}{35}, \frac{5}{14}\right)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (\ 0 \ , & f \ , & [0s] \ , & t \ , & f \ , & F \ , & s \ , & 0 \ , & [ftl] \ , & 0 \ , & s \ , & F \ , & f \ , & t \ , & [s0] \ , & f \ , & 0 \ ) \\ x_1 & f_1 & x_2 \, s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3 & f_3 \, t_2 \, l_1 & x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4 \, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $v = \frac{5}{14} = 0.35714\ldots, \quad \Lambda$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (\ 0 \ , & f \ , & [0s] \ , & t \ , & f \ , & F \ , & s \ , & [0ftl0] \ , & s \ , & F \ , & f \ , & t \ , & [s0] \ , & f \ , & 0 \ ) \\ x_1 & f_1 & x_2 \, s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3 \, f_3 \, t_2 \, l_1 \, x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4 \, x_5 & f_5 & x_6 \end{array}$$

Preuve :

1^0. Le théorème signifie que l'arrangement des racines est constant sur certains intervalles ouverts et les changements se produisent à leurs extrémités (le premier intervalle ouvert sera $(0, 19/105 - 2\sqrt{78}/105)$).

On vérifie directement le fait que :
a) les racines $t_{1,3} = \pm 1/\sqrt{5}$ de $S_v^{(3)}$

a1) sont des racines de S_v exactement lorsque $v = 1/5 \notin J$ ou lorsque $v = (13 + \sqrt{113})/70 \in (1/3, 5/14)$ ou $v = (13 - \sqrt{113})/70 \in (0, 1/19)$;

a2) sont des racines de $S_v^{(1)}$ exactement lorsque $v = 1/5 - 2\sqrt{30}/75 \notin J$ ou $v = 1/5 + 2\sqrt{30}/75 \in (1/3, 5/14)$;
b) les racines $F_{1,2} = \pm 1/\sqrt{15}$ de $S_v^{(4)}$

b1) sont des racines de S_v exactement lorsque $v = 1/15 \notin J$ ou $v = 19/105 + 2\sqrt{78}/105 \in (1/3, 5/14)$ ou $v = 19/105 - 2\sqrt{78}/105 \in (0, 1/19)$;

b2) sont des racines de $S_v^{(1)}$ exactement lorsque $v = 1/5 - 2\sqrt{5}/25 \in (0, 1/19)$ ou $v = 1/5 + 2\sqrt{5}/25 > 5/14$;

b3) sont des racines de $S_v^{(2)}$ exactement lorsque $v = 1/3$ ou $v = 1/15 \notin J$.

Les arrangements des racines pour $v = 0$, $v = 1/19$, $v = 1/3$ et $v = 5/14$ sont ceux indiqués dans le théorème. (Par exemple, pour vérifier que $F_1 = -1/\sqrt{15}$ est entre f_2 et f_3 pour $v = 5/14$ il faut montrer que $S_{5/14}^{(1)}(F_1) < 0$.)

2^0. Pour $v > 0$ et proche de 0 les racines s_1 et s_4 de $S_v^{(2)}$ ne peuvent pas être égales aux racines de S_v. Donc on a $s_2 = x_3$ et $s_3 = x_4$. (Il est impossible d'avoir $s_2 = x_2$ parce que ceci impliquerait $s_2 = f_2$. D'où $x_2 = f_2 = x_3 = s_2 = f_3$, et par symétrie, $f_3 = s_3 = x_4 = f_4 = x_5$, qui est vrai seulement pour $v = 0$.)
3^0. Pour $v = 0$ (resp. $v = 1/19$) on a $F_1 < x_2$, $F_2 > x_5$ (resp. $F_1 > x_2$, $F_2 < x_5$). Il y a seulement une valeur de $v \in (0, 1/19)$ où $F_1 = x_2$ et $F_2 = x_5$ (notamment, $v = 19/105 - 2\sqrt{78}/105$, voir b1)). C'est la seule valeur de v de l'intervalle $[0, 1/19]$ pour laquelle les racines $F_{1,2}$ sont des racines de S_v. Ceci justifie les positions relatives de $F_{1,2}$ et des racines x_j de S_v pour $v \in [0, 1/19]$. (Nous utilisons le fait que les racines des polynômes $S_v^{(k)}$, $0 \leq k \leq 4$, dépendent continument de v.)
4^0. De la même façon on justifie les positions relatives de $F_{1,2}$ et des racines f_i de $S_v^{(1)}$

(voir b2)) et celui de $t_{1,3}$ et x_ν (voir a1)) pour $v \in [0, 1/19]$. Les positions relatives de $t_{1,3}$ et x_ν et celles de $t_{1,3}$ et f_i ne changent pas pour $v \in [0, 1/19]$. Ceci justifie les sept premiers arrangements de la liste donnée dans le théorème. Il justifie aussi le huitième arrangement pour $v \geq (13 - \sqrt{113})/70$, et le dixième pour $v \leq 1/19$.
5^0. Pour $v \in [0, 1/19]$, il existe une seule valeur de v (à savoir, $1/5 - 2\sqrt{7}/35$) pour laquelle on a $x_2 = s_1$, $x_3 = s_2$, $x_4 = s_3$ et $x_5 = s_4$. Ceci résulte de l'unicité du polynôme de Gegenbauer (voir la définition 2.6) – le coefficient $6v - 15v^2$ de x^2 dans S_v est une fonction monotone de $v \in [0, 1/19]$, donc la famille S_v contient le polynôme de Gegenbauer pour une seule valeur de v. Ceci justifie les autres arrangements pour $v \in [0, 1/19]$.
6^0. Pour $v \in [1/3, 5/14]$ un raisonnement similaire justifie tous les arrangements. $\square$

3.1.5 La famille D)

Quand $P = x^6 - x^4 + bx^2 + d$ admet une racine multiple w, alors les conditions $P(w) = P'(w) = 0$ impliquent que l'on a $b = -3w^4 + 2w^2$, $d = 2w^6 - w^4$ ou $w = 0$, $d = 0$. Dans le premier cas on parlera de la sous-famille D1), dans le deuxième cas de la sous-famille D2). Posons $r := w^2$, $r \geq 0$. La sous-famille D1) peut être paramétrisée comme suit :

$$T_r = x^6 - x^4 + (-3r^2 + 2r)x^2 + 2r^3 - r^2 \ .$$

Lemme 3.4 *Pour $r \geq 0$, le polynôme T_r est hyperbolique si et seulement si $r \in [0, 1/2]$.*

Preuve :

On a $T_r = (x^2 - r)^2(x^2 + 2r - 1)$ et le facteur $x^2 + 2r - 1$ est hyperbolique si et seulement si $r \in [0, 1/2]$. $\square$

Théorème 3.4 *Le VC du polynôme T_r de la sous-famille D1) dépend de la manière suivante du paramètre r :*

pour $r = 0$, $\quad U$

$$\begin{array}{cccccccccc} (\ 0 \ , & f \ , & s \ , & t \ , & F \ , & [0fst0fsl0f0] \ , & F \ , & t \ , & s \ , & f \ , \ 0 \ ) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & F_1 & x_2\ f_2\ s_2\ t_2\ x_3\ f_3\ s_3\ l_1\ x_4\ f_4\ x_5 & F_2 & t_3 & s_4 & f_5 \quad x_6 \end{array}$$

pour $r \in \left(0, \dfrac{1}{15}\right)$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} (\ 0 \ , & f \ , & s \ , & t \ , & F \ , & [0f0] \ , & s \ , & [ftl] \ , & s \ , & [0f0] \ , & F \ , & t \ , & s \ , & f \ , \ 0 \ ) \\ x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & F_1 & x_2\ f_2\ x_3 & s_2 & f_3\ t_2\ l_1 & s_3 & x_4\ f_4\ x_5 & F_2 & t_3 & s_4 & f_5 \quad x_6 \end{array}$$

pour $r = \dfrac{1}{15} = 0,06666\ldots$, $\quad G$

$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ t \ , \ [0Ff0] \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ [0fF0] \ , \ t \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$
$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1 \quad x_2 \, F_1 \, f_2 \, x_3 \quad s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \quad x_4 \, f_4 \, F_2 \, x_5 \quad t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $r \in \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{5}\right)$
$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ t \ , \ [0f0] \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ [0f0] \ , \ t \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$
$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad t_1 \quad x_2 \, f_2 \, x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4 \, f_4 \, x_5 \quad t_3 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $r = \frac{1}{5} = 0,20000\ldots, \quad V$
$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ [0tf0] \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ [0ft0] \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$
$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad x_2 \, t_1 \, f_2 \, x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4 \, f_4 \, t_3 \, x_5 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $r \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$
$(\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ [0f0] \ , \ t \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ t \ , \ [0f0] \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ )$
$x_1 \quad f_1 \quad s_1 \quad x_2 \, f_2 \, x_3 \quad t_1 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad t_3 \quad x_4 \, f_4 \, x_5 \quad s_4 \quad f_5 \quad x_6$

pour $r = \frac{1}{3} = 0,33333\ldots, \quad E$
$(\ [0f0sf0] \ , \ t \ , \ [Fs] \ , \ [ftl] \ , \ [sF] \ , \ t \ , \ [0fs0f0] \ )$
$x_1 \, f_1 \, x_2 \, s_1 \, f_2 \, x_3 \quad t_1 \quad F_1 \, s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \, F_2 \quad t_3 \quad x_4 \, f_4 \, s_4 \, x_5 \, f_5 \, x_6$

pour $r = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$
$(\ [0f0] \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ , \ t \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ t \ , \ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ [0f0] \ )$
$x_1 \, f_1 \, x_2 \quad s_1 \quad f_2 \quad x_3 \quad t_1 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad t_3 \quad x_4 \quad f_4 \quad s_4 \quad x_5 \, f_5 \, x_6$

pour $r = \frac{2}{5} = 0,40000\ldots, \quad W$
$(\ [0f0] \ , \ s \ , \ f \ , \ [0t] \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ [t0] \ , \ f \ , \ s \ , \ [0f0] \ )$
$x_1 \, f_1 \, x_2 \quad s_1 \quad f_2 \quad x_3 \, t_1 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad t_3 \, x_4 \quad f_4 \quad s_4 \quad x_5 \, f_5 \, x_6$

pour $r \in \left(\frac{2}{5}, \frac{7}{15}\right)$
$(\ [0f0] \ , \ s \ , \ f \ , \ t \ , \ 0 \ , \ F \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ F \ , \ 0 \ , \ t \ , \ f \ , \ s \ , \ [0f0] \ )$
$x_1 \, f_1 \, x_2 \quad s_1 \quad f_2 \quad t_1 \quad x_3 \quad F_1 \quad s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \quad x_4 \quad t_3 \quad f_4 \quad s_4 \quad x_5 \, f_5 \, x_6$

pour $r = \frac{7}{15} = 0,466666\ldots, \quad \Xi$
$(\ [0f0] \ , \ s \ , \ [ft] \ , \ [0F] \ , \ s \ , \ [ftl] \ , \ s \ , \ [F0] \ , \ [tf] \ , \ s \ , \ [0f0] \ )$
$x_1 \, f_1 \, x_2 \quad s_1 \quad f_2 \, t_1 \quad x_3 \, F_1 \quad s_2 \quad f_3 \, t_2 \, l_1 \quad s_3 \quad F_2 \, x_4 \quad t_3 \, f_4 \quad s_4 \quad x_5 \, f_5 \, x_6$

pour $r \in \left(\dfrac{7}{15}, \dfrac{9}{19}\right)$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} ([0f0] , & s , & t , & f , & F , & 0 , & s , & [ftl] , & s , & 0 , & F , & f , & t , & s , & [0f0]) \\ x_1\, f_1\, x_2 & s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & x_3 & s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3 & x_4 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4 & x_5\, f_5\, x_6 \end{array}$$

pour $r = \dfrac{9}{19} = 0,47368\ldots$, Δ

$$\begin{array}{cccccccccccccc} ([0f0] , & s , & t , & f , & F , & [0s] , & [ftl] , & [s0] , & F , & f , & t , & s , & [0f0]) \\ x_1\, f_1\, x_2 & s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & x_3\, s_2 & f_3\, t_2\, l_1 & s_3\, x_4 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4 & x_5\, f_5\, x_6 \end{array}$$

pour $r \in \left(\dfrac{9}{19}, \dfrac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} ([0f0] , & s , & t , & f , & F , & s , & 0 , & [ftl] , & 0 , & s , & F , & f , & t , & s , & [0f0]) \\ x_1\, f_1\, x_2 & s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3 & f_3\, t_2\, l_1 & x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4 & x_5\, f_5\, x_6 \end{array}$$

pour $r = \dfrac{1}{2} = 0,50000\ldots$, Π

$$\begin{array}{cccccccccccccc} ([0f0] , & s , & t , & f , & F , & s , & [0ftl0] , & s , & F , & f , & t , & s , & [0f0]) \\ x_1\, f_1\, x_2 & s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4 & x_5\, f_5\, x_6 \end{array}$$

Preuve :

1^0. L'arrangement est évident pour $r = 0$. Pour $r = 1/3$ et $r = 1/2$ il doit être vérifié directement. (Par exemple pour $r = 1/2$, il suffit de vérifier que $T^{(1)}_{1/2}(F_1) < 0$ et $T^{(2)}_{1/2}(F_1) < 0$, $F_1 = -1/\sqrt{15}$).
2^0. Les racines $\pm\sqrt{r}$ de T_r sont des racines de $T_r^{(4)}$, $T_r^{(3)}$, $T_r^{(2)}$ respectivement pour et seulement pour $r = 1/15$, $1/5$ et $1/3$. Pour $r \in [0, 1/3) \cup (1/3, 1/2]$ (resp. pour $r = 1/3$) on a $T_r^{(2)}(F_1) < 0$ (resp. $T_r^{(2)}(F_1) = 0$). Ceci justifie tous les arrangements pour $r \in [0, 1/3]$.
3^0. Si $r > 0$, alors les racines de $x^2 + 2r - 1$ sont des racines de $T_r^{(2)}$, $T_r^{(3)}$ et $T_r^{(4)}$ respectivement pour et seulement pour $r = 1/3$, $2/5$ et $7/15$. Les racines $t_{1,3} = \pm 1/\sqrt{5}$ de $T_r^{(3)}$ sont des racines de $T_r^{(1)}$ seulement pour $r = 1/5$ et $r = 7/15$. C'est seulement pour $r = 1/3$ et $r = 9/19$ que $x^2 + 2r - 1$ et $T_r^{(2)}$ ont une racine en commun. Ceci justifie tous les arrangements pour $r \in [1/3, 1/4]$. $\square$

La sous-famille D2) peut être paramétrée par le polynôme $U_b := x^6 - x^4 + bx^2$ ayant une racine double en 0.

Proposition 3.3 *Le polynôme U_b est hyperbolique si et seulement si $b \in [0, 1/4]$.*

Preuve :

Les racines de U_b/x^2 sont égales à $\pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 4b}}$ et la condition que toutes les racines doivent être réelles est équivalente aux deux inégalités $1 - 4b \geq 0$ et $1 - \sqrt{1 - 4b} \geq 0$, c.-à-d. à $b \in [0, 1/4]$. $\square$

Théorème 3.5 *Le VC du polynôme U_b de la sous-famille D2) dépend de la manière suivante du paramètre b :*

pour $b = 0$, $\quad U$

$$\begin{array}{l} (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ F\ ,\ [0fst0fsl0f0]\ ,\ F\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \\ \quad x_1\ \ f_1\ \ s_1\ \ t_1\ \ F_1\ \ x_2\, f_2\, s_2\, t_2\, x_3\, f_3\, s_3\, l_1\, x_4\, f_4\, x_5\ \ F_2\ \ t_3\ \ s_4\ \ f_5\ \ x_6 \end{array}$$

pour $b \in \left(0, \dfrac{14}{225}\right)$

$$\begin{array}{l} (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ F\ ,\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ [0ftl0]\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ,\ F\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \\ \quad x_1\ \ f_1\ \ s_1\ \ t_1\ \ F_1\ \ x_2\ \ f_2\ \ s_2\ \ x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4\ \ s_3\ \ f_4\ \ x_5\ \ F_2\ \ t_3\ \ s_4\ \ f_5\ \ x_6 \end{array}$$

pour $b = \dfrac{14}{225} = 0,062222\ldots$, $\quad \Theta$

$$\begin{array}{l} (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ [F0]\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ [0ftl0]\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ [0F]\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \\ \quad x_1\ \ f_1\ \ s_1\ \ t_1\ \ F_1\, x_2\ \ f_2\ \ s_2\ \ x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4\ \ s_3\ \ f_4\ \ x_5\, F_2\ \ t_3\ \ s_4\ \ f_5\ \ x_6 \end{array}$$

pour $b \in \left(\dfrac{14}{225}, \dfrac{3}{25}\right)$

$$\begin{array}{l} (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ 0\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ [0ftl0]\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ 0\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \\ \quad x_1\ \ f_1\ \ s_1\ \ t_1\ \ x_2\ \ F_1\ \ f_2\ \ s_2\ \ x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4\ \ s_3\ \ f_4\ \ F_2\ \ x_5\ \ t_3\ \ s_4\ \ f_5\ \ x_6 \end{array}$$

pour $b = \dfrac{3}{25} = 0,12000\ldots$, $\quad \eta$

$$\begin{array}{l} (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ 0\ ,\ [Ff]\ ,\ s\ ,\ [0ftl0]\ ,\ s\ ,\ [fF]\ ,\ 0\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \\ \quad x_1\ \ f_1\ \ s_1\ \ t_1\ \ x_2\ \ F_1\, f_2\ \ s_2\ \ x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4\ \ s_3\ \ f_4\, F_2\ \ x_5\ \ t_3\ \ s_4\ \ f_5\ \ x_6 \end{array}$$

pour $b \in \left(\dfrac{3}{25}, \dfrac{4}{25}\right)$

$$\begin{array}{l} (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ 0\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ s\ ,\ [0ftl0]\ ,\ s\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ 0\ ,\ t\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \\ \quad x_1\ \ f_1\ \ s_1\ \ t_1\ \ x_2\ \ f_2\ \ F_1\ \ s_2\ \ x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4\ \ s_3\ \ F_2\ \ f_4\ \ x_5\ \ t_3\ \ s_4\ \ f_5\ \ x_6 \end{array}$$

pour $b = \dfrac{4}{25} = 0,16000\ldots$, $\quad \Gamma$

$$\begin{array}{l} (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ [t0]\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ s\ ,\ [0ftl0]\ ,\ s\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ [0t]\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \\ \quad x_1\ \ f_1\ \ s_1\ \ t_1\, x_2\ \ f_2\ \ F_1\ \ s_2\ \ x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4\ \ s_3\ \ F_2\ \ f_4\ \ x_5\, t_3\ \ s_4\ \ f_5\ \ x_6 \end{array}$$

pour $b \in \left(\dfrac{4}{25}, \dfrac{45}{196}\right)$

$$\begin{array}{l} (\ 0\ ,\ f\ ,\ s\ ,\ 0\ ,\ t\ ,\ f\ ,\ F\ ,\ s\ ,\ [0ftl0]\ ,\ s\ ,\ F\ ,\ f\ ,\ t\ ,\ 0\ ,\ s\ ,\ f\ ,\ 0\ ) \\ \quad x_1\ \ f_1\ \ s_1\ \ x_2\ \ t_1\ \ f_2\ \ F_1\ \ s_2\ \ x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4\ \ s_3\ \ F_2\ \ f_4\ \ t_3\ \ x_5\ \ s_4\ \ f_5\ \ x_6 \end{array}$$

pour $b = \dfrac{45}{196} = 0,22958\ldots\,, \quad \Lambda$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (\; 0 \;, & f \;, & [s0] \;, & t \;, & f \;, & F \;, & s \;, & [0ftl0] \;, & s \;, & F \;, & f \;, & t \;, & [0s] \;, & f \;, & 0 \;) \\ x_1 & f_1 & s_1\, x_2 & t_1 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & t_3 & x_5\, s_4 & f_5 & x_6 \end{array}$$

pour $b \in \left(\dfrac{45}{196}, \dfrac{1}{4} \right)$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} (\; 0 \;, & f \;, & 0 \;, & s \;, & t \;, & f \;, & F \;, & s \;, & [0ftl0] \;, & s \;, & F \;, & f \;, & t \;, & s \;, & 0 \;, & f \;, \; 0 \;) \\ x_1 & f_1 & x_2 & s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4 & x_5 & f_5 \;\; x_6 \end{array}$$

pour $b = \dfrac{1}{4} = 0,25000\ldots\,, \quad \Pi$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (\; [0f0] \;, & s \;, & t \;, & f \;, & F \;, & s \;, & [0ftl0] \;, & s \;, & F \;, & f \;, & t \;, & s \;, & [0f0] \;) \\ x_1\, f_1\, x_2 & s_1 & t_1 & f_2 & F_1 & s_2 & x_3\, f_3\, t_2\, l_1\, x_4 & s_3 & F_2 & f_4 & t_3 & s_4 & x_5\, f_5\, x_6 \end{array}$$

Preuve :

1^0. Les arrangements pour $b = 0$ et $b = 1/4$ sont ceux pour $r = 0$ et $r = 1/2$ de la sous-famille D1).
2^0. Les racines $t_{1,3} = \pm 1/\sqrt{5}$ de U_b''' ne sont jamais des racines de U_b'. En effet, le contraire implique que $b = 7/25 \notin [0, 1/4]$. Les racines $F_{1,2} = \pm 1/\sqrt{15}$ de $U_b^{(4)}$ sont des racines de U_b' seulement pour $b = 3/25$. Pour $b = 0$ (d'où, pour $b \in [0, 3/25)$ aussi) on a $F_1 < f_2$ et $F_2 > f_4$, pour $b = 1/4$ (d'où, pour $b \in (3/25, 1/4]$ aussi) on a $F_1 > f_2$ et $F_2 < f_4$.
3^0. Pour $b \in [0, 1/4]$ il y a une valeur simple de b pour laquelle les racines x_2, x_5 de U_b sont aussi des racines de U_b'' (resp. U_b''', resp. de $U_b^{(4)}$), cette valeur est 45/196 (resp. 4/25, resp. 14/225). Ceci doit être vérifié directement. Le théorème se déduit maintenant à partir des arrangements pour $b = 0$ et $b = 1/4$ et à partir de l'ordre des nombres $0 < 14/225 < 3/25 < 4/25 < 45/196 < 1/4$. $\square$

3.2 Strates anciennes

On peut obtenir des strates surdéterminées dans la famille de PH de degré 6 en intégrant une ou plusieurs fois des polynômes hyperboliques de degré plus bas. Pour simplifier les expressions, nous disons "intégrer une strate" dans le sens "intégrer un PH définissant cette strate".

Il y a deux strates surdéterminées non-triviales de degré 4. Nous désignons l'arrangement correspondant par une lettre et nous donnons des exemples de PH qui réalisent ces strates :

$$A \ : \quad (\ [0f0] \ , \ s \ , \ [ft] \ , \ s \ , \ [0f0] \ ) \qquad x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$B \ : \ (\ 0 \ , \ f \ , \ [0s] \ , \ [ft] \ , \ [s0] \ , \ f \ , \ 0 \ ) \qquad x^4 - x^2 + \frac{5}{36}$$

(la strate B est définie par le polynôme de Gegenbauer de degré 4).

Il y a trois strates surdéterminées non-triviales de degré 5 :

$$\Sigma \ : \ (\ 0 \ , \ f \ , \ s \ , \ [0t] \ , \ f \ , \ [0sF] \ , \ f \ , \ [t0] \ , \ s \ , \ f \ , \ 0 \ ) \qquad x^5 - x^3 + \frac{9}{100}x$$

$$\Phi \ : \ (\ 0 \ , \ f \ , \ [0s] \ , \ t \ , \ f \ , \ [0sF] \ , \ f \ , \ t \ , \ [s0] \ , \ f \ , \ 0 \ ) \qquad x^5 - x^3 + \frac{21}{100}x$$

$$F \ : \quad (\ [0f0] \ , \ s \ , \ [ft] \ , \ [0sF] \ , \ [tf] \ , \ s \ , \ [0f0] \ ) \qquad x^5 - x^3 + \frac{1}{4}x$$

(la strate Φ est définie par le polynôme de Gegenbauer de degré 5).

A) En intégrant (une fois, pas deux fois) la strate A, on ne peut pas obtenir un PH parce qu'on a $(x^2 - 1/2)^2 \geq 0$ avec égalité seulement pour $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

B) En intégrant (une fois) la strate B, on obtient la strate F. Ceci découle de l'arrangement défini par les deux strates. Le polynôme $F := x^5 - x^3 + x/4$ (réalisant la strate F) est obtenu par la mutliplication par une constante différente de zéro d'une primitive du polynôme $(x^2 - 1/2)^2$ (réalisant la strate B). Toute telle primitive est de la forme $F + c$, mais seulement pour $c = 0$ on obtient un PH. En effet, pour $c = 0$ on a un zéro double en $-1/\sqrt{2}$ (un maximum local) et en $1/\sqrt{2}$ (un minimum local), d'où, en choisissant d'autres valeurs de c, on obtient un polynôme qui n'est pas hyperbolique.

C) En intégrant la strate F on obtient la strate E, voir la description de la sous-famille $D1$) dans le théorème 2.11. Cette dernière est définie par le polynôme $S(M_2) := (x^2 - 1/3)^3$ ayant des racines triples pour $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Toute autre primitive est de la forme $S(M_2)+c$, et seulement pour $c = 0$ on obtient un PH. Par conséquent, E est la seule strate ancienne de degré 6 obtenue en intégrant deux fois la strate B. C'est aussi la seule strate ancienne de degré 6 obtenue en intégrant une fois la strate F.

D) En intégrant la strate Φ on obtient (selon la constante d'intégration) une des strates suivantes réalisables par la famille de polynômes $x^6 - x^4 + \dfrac{7}{25}x^2 + \nu$. Nous considérons les arrangements suivants :

pour $\nu = \nu_0 = -0.02400$, $\quad V$

$$\begin{array}{ccccccccccc} (\ 0 \ , & f \ , & s \ , & [0tf0] \ , & F \ , & s \ , & [ftl] \ , & s \ , & F \ , & [0ft0] \ , & s \ , \ f \ , \ 0 \ ) \\ x_1 & f_1 & s_1 & x_2 \ t_1 \ f_2 \ x_3 & F_1 & s_2 & f_3 \ t_2 \ l_1 & s_3 & F_2 & x_4 \ f_4 \ t_3 \ x_5 & s_4 \quad f_5 \quad x_6 \end{array}$$

pour $\nu \in (\nu_0, \nu_1)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(\,0\,, & f\,, & s\,, & 0\,, & [ft]\,, & 0\,, & F\,, & s\,, & [ftl]\,, & s\,, & F\,, & 0\,, & [tf]\,, & 0\,, & s\,, & f\,, & 0\,) \\
x_1 & f_1 & s_1 & x_2 & f_2\,t_1 & x_3 & F_1 & s_2 & f_3\,t_2\,l_1 & s_3 & F_2 & x_4 & f_4\,t_3 & x_5 & s_4 & f_5 & x_6
\end{array}$$

pour $\nu = \nu_1 = -0.018582, \qquad \zeta$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
(\,0\,, & f\,, & [0s]\,, & [ft]\,, & 0\,, & F\,, & s\,, & [ftl]\,, & s\,, & F\,, & 0\,, & [tf]\,, & [s0]\,, & f\,, & 0\,) \\
x_1 & f_1 & x_2\,s_1 & f_2\,t_1 & x_3 & F_1 & s_2 & f_3\,t_2\,l_1 & s_3 & F_2 & x_4 & t_3\,f_4 & s_4\,x_5 & f_5 & x_6
\end{array}$$

pour $\nu \in (\nu_1, \nu_2)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(\,0\,, & f\,, & 0\,, & s\,, & [ft]\,, & 0\,, & F\,, & s\,, & [ftl]\,, & s\,, & F\,, & 0\,, & [tf]\,, & s\,, & 0\,, & f\,, & 0\,) \\
x_1 & f_1 & x_2 & s_1 & f_2\,t_1 & x_3 & F_1 & s_2 & f_3\,t_2\,l_1 & s_3 & F_2 & x_4 & t_3\,f_4 & s_4 & x_5 & f_5 & x_6
\end{array}$$

pour $\nu = \nu_2 = -0.014518, \qquad \Xi$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(\,[0f0]\,, & s\,, & [ft]\,, & [0F]\,, & s\,, & [ftl]\,, & s\,, & [F0]\,, & [tf]\,, & s\,, & [0f0]\,) \\
x_1\,f_1\,x_2 & s_1 & f_2\,t_1 & x_3\,F_1 & s_2 & f_3\,t_2\,l_1 & s_3 & F_2\,x_4 & t_3\,f_4 & s_4 & x_5\,f_5\,x_6
\end{array}$$

E) En intégrant la strate Σ on obtient (selon la constante d'intégration) une des strates réalisables par la famille de polynômes $x^6 - x^4 + \dfrac{3}{25}x^2 + \lambda$. Nous considérons les arrangements suivants :

$$\lambda_0 = -\frac{13}{3375}, \quad \lambda_1 = -\frac{(5-2\sqrt{5})^3}{15625} + \frac{(5-2\sqrt{5})^2}{625} - \frac{3}{125} + \frac{6\sqrt{5}}{625}, \quad \lambda_2 = 0$$

pour $\lambda = \lambda_0 = -0.003851, \quad G$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(\,0\,, & f\,, & s\,, & t\,, & [0fF0]\,, & s\,, & [ftl]\,, & s\,, & [0Ff0]\,, & t\,, & s\,, & f\,, & 0\,) \\
x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & x_2\,f_2\,F_1\,x_3 & s_2 & f_3\,t_2\,l_1 & s_3 & x_4\,F_2\,f_4\,x_5 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6
\end{array}$$

pour $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(\,0\,, & f\,, & s\,, & t\,, & 0\,, & [fF]\,, & 0\,, & s\,, & [ftl]\,, & s\,, & 0\,, & [Ff]\,, & 0\,, & t\,, & s\,, & f\,, & 0\,) \\
x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & x_2 & f_2\,F_1 & x_3 & s_2 & f_3\,t_2\,l_1 & s_3 & x_4 & F_2\,f_4 & x_5 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6
\end{array}$$

pour $\lambda = \lambda_1 = -0.002097, \quad \xi$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
(\,0\,, & f\,, & s\,, & t\,, & 0\,, & [Ff]\,, & [0s]\,, & [ftl]\,, & [s0]\,, & [fF]\,, & 0\,, & t\,, & s\,, & f\,, & 0\,) \\
x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & x_2 & F_1\,f_2 & x_3\,s_2 & f_3\,t_2\,l_1 & s_3\,x_4 & f_4\,F_2 & x_5 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6
\end{array}$$

pour $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(\,0\,, & f\,, & s\,, & t\,, & 0\,, & [fF]\,, & s\,, & 0\,, & [ftl]\,, & 0\,, & s\,, & [Ff]\,, & 0\,, & t\,, & s\,, & f\,, & 0\,) \\
x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & x_2 & f_2\,F_1 & s_2 & x_3 & f_3\,t_2\,l_1 & x_4 & s_3 & F_2\,f_4 & x_5 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6
\end{array}$$

pour $\lambda = \lambda_2 = 0, \qquad \eta$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
(\,0\,, & f\,, & s\,, & t\,, & 0\,, & [Ff]\,, & s\,, & [0ftl0]\,, & s\,, & [fF]\,, & 0\,, & t\,, & s\,, & f\,, & 0\,) \\
x_1 & f_1 & s_1 & t_1 & x_2 & F_1\,f_2 & s_2 & x_3\,f_3\,t_2\,l_1\,x_4 & s_3 & f_4\,F_2 & x_5 & t_3 & s_4 & f_5 & x_6
\end{array}$$

F) On ne peut pas obtenir une strate ancienne de degré 6 en intégrant une strate de degré 5 avec un VM $(1,2,2)$. En effet, une racine multiple de la dérivée d'un PH est une racine multiple du polynôme lui-même. Donc le VM correspondant au polynôme de degré 6 devrait être $(3,3)$ qui après la dérivation donne le VM $(2,1,2)$, et pas $(1,2,2)$. Un raisonnement semblable permet d'exclure les VMs $(2,2,1)$, $(2,3)$ et $(3,2)$. Le VM $(2,1,2)$ donne par intégration le VM $(3,3)$ qui est défini par un PH pair (via un changement affine de la variable x). Par conséquent, sa dérivée doit être un PH impair, c.-à-d. un seul PH de degré 5 donne par intégration une strate surdéterminée ancienne de degré 6.

Remarque 3.4 La situation avec les strates B et F, voir B), semble être contraire à l'intuition – on s'attendrait à ce que les deux valeurs critiques d'une primitive de G_4 soient différentes et qu'il y ait un intervalle de valeurs de la constante d'intégration pour lequel cette primitive est un PH. (C'est le cas de la strate Φ, voir D), ou de Σ, voir E)). Il n'existe aucune valeur pour laquelle cette primitive est hyperbolique. Pourtant, les strates surdéterminées surviennent dans des situations quand les racines d'un PH et de ses dérivées satisfont certaines équations algébriques, et donc un raisonnement intuitif applicable à une situation générique concernant les polynômes réels n'est pas toujours applicable ici. C'est la raison pour laquelle les familles de strates anciennes comme celles décrites dans D) et E) apparaissent pour la première fois en degré 6 et ne sont pas présentes en degré 5.

Exemple 3.1 La strate U (voir le premier VC dans la formulation de théorème 3.4) est en même temps paire et ancienne. Elle est obtenue par intégration du PH impair $x^3(x^2-1)$ de degré 5 suivie d'un changement linéaire de la variable x et d'une multiplication par une constante différente de zéro. La quantité ϱ pour cette strate est égale à 6 – pour définir le point correspondant dans $\pi(St_\lambda)$ on a besoin seulement des trois égalités $x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ et de l'égalité $l_1 = x_2$, tandis que pour définir le point correspondant de $\mathcal{PP}_n^{\mathbf{R}}$, on a besoin des dix égalités $x_2 = f_2 = s_2 = t_2 = x_3 = f_3 = s_3 = l_1 = x_4 = f_4 = x_5$. Cette strate est triviale – toutes les égalités entre des racines résultent de la présence d'une racine quadruple en 0 et de l'égalité $l_1 = x_2$. L'égalité $l_1 = x_2$ est indépendante des égalités $x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, et donc l'exédent ϱ des égalités est dû seulement à la racine multiple en 0.

Chapitre 4

Matrice de Sylvester

4.1 Définition de la $k$ème matrice de Sylvester

Soient P et Q deux polynômes non nuls à une variable, de degrés respectifs p et q. Soit $P := \sum_{j=0}^{p} a_j x^j$, $Q := \sum_{j=0}^{q} b_j x^j$.

Définition 4.1 La première matrice de Sylvester $S_1(P, Q)$ associée à P et Q est la matrice carrée $(p+q) \times (p+q)$ définie ainsi :
1) La première ligne est formée des coefficients de P, suivis de 0 :
$(a_p, a_{p-1}, \ldots, a_0, 0, \ldots, 0)$;
2) Les q premières lignes de $S_1(P, Q)$ sont dites lignes de P, les p dernières lignes sont dites lignes de Q.
3) chacune des lignes de P à partir de la deuxième est obtenue à partir de la précédente en la déplaçant par des permutations circulaires vers la droite. Ainsi la deuxième ligne de P vaut : $(0, a_p, a_{p-1}, \ldots, a_0, 0, \ldots, 0)$;
4) la $(q+1)$ème ligne (c'est-à-dire la première ligne de Q) est formée des coefficients de Q, suivis de 0 :
$(b_q, b_{q-1}, \ldots, b_0, 0, \ldots, 0)$;
5) chacune des lignes de Q à partir de la deuxième est obtenue à partir de la précédente en la déplaçant par des permutations circulaires vers la droite.

Exemple 4.1 Pour $p = 4$, $q = 3$ la matrice $S_1(P,Q)$ obtenue est :

$$S_1(P,Q) \;=\; \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Définition 4.2 Pour $k = 2, \ldots, \min(p,q)$ on définit la $k$ème matrice de Sylvester $S_k(P,Q)$ comme celle obtenue de $S_{k-1}(P,Q)$ en enlevant la dernière ligne de P et la dernière ligne de Q et les deux dernières colonnes. Soit $\Delta_k(P,Q) = \det(S_k(P,Q))$. Pour $k = 1$ c'est le résultant de P et Q (désigné par $Res(P,Q)$).

Ainsi $S_k(P,Q)$ est de taille $(p+q+2-2k) \times (p+q+2-2k)$. Pour $p = 4$, $q = 3$ on a

$$S_2(P,Q) \;=\; \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \end{pmatrix} \quad , \quad S_3(P,Q) \;=\; \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & b_3 & b_2 \end{pmatrix} .$$

Théorème 4.1 *Les polynômes P et Q ont exactement m racines en commun comptées avec multiplicité si et seulement si $\Delta_1(P,Q) = \cdots = \Delta_m(P,Q) = 0 \neq \Delta_{m+1}(P,Q)$.*

Le théorème est équivalent à la Proposition 4.24 dans [4].

L'exemple suivant montre comment les résultants et les sous-résultants interviennent dans l'étude des strates surdéterminées.

Exemple 4.2 Pour $n = 5$ les deux égalités $\Delta_1(P^{(1)},P^{(3)}) = \Delta_2(P^{(1)},P^{(3)}) = 0$ $(**)$ signifient qu'il y a deux racines communes pour $P^{(1)}$ et $P^{(3)}$. Ces deux égalités sont de la forme
$\Delta_1(P^{(1)},P^{(3)}) := 810000 - 6480000b - 5184000a^2 + 12960000b^2 = 0$,
$\Delta_2(P^{(1)},P^{(3)}) := -432000a = 0$
el la deuxième implique l'égalité $\Delta_1(P^{(2)},P^{(4)}) := -34560000a = 0$. Ce qui signifie que la présence de deux racines communes pour $P^{(1)}$ et $P^{(3)}$ implique la présence d'une racine commune pour $P^{(2)}$ et $P^{(4)}$. Les égalités

$$\Delta_1(P^{(1)},P^{(3)}) = \Delta_2(P^{(1)},P^{(3)}) = \Delta_1(P^{(2)},P^{(4)}) = 0$$

sont vérifiées pour le polynôme $x^5 - x^3 + x/4$ définissant la strate surdéterminée non-triviale F, voir le théorème 2.2 dans le paragraphe 2.6. Observons que c'est le seul PH pour lequel les égalités $(**)$ ont lieu (tous les polynômes $x^5 - x^3 + x/4 + c$, $c \in \mathbf{R}^*$, pour lesquels les égalités $(**)$ sont vérifiées, sont non-hyperboliques).

4.2 Notation

On présente la notation utilisée dans la programmation des algorithmes dans la première et dans la troisième colonnes de la table ci-dessous.

La deuxième et la quatrième colonnes correspondent à la notation utilisée dans le texte. Ainsi Sigma[i] désigne la matrice $S_1(P, P^{(i)})$ $(i = 1, \ldots, 5)$, tandis que sigma[i] désigne $\Delta_1(P, P^{(i)}) = \det(S_1(P, P^{(i)}))$ etc...

La table montre les valeurs de l'indice i correspondant au cas de polynômes de degré 6. En cas de polynômes de degré 5 il faut supprimer les dernières valeurs de l'indice i dans les trois premières lignes, (c.-à-d. les valeurs 5, 4 et 3), ainsi que Kappa[2], Sigma3[2], Sigma2[3], Sigma1[4], Delta2[2], Delta1[3] et Lambda1[2].

Sigma[i]	$S_1(P, P^{(i)})$	sigma[i]	$\Delta_1(P, P^{(i)})$
	$i = 1, \ldots, 5$		
Delta[i]	$S_1(P^{(1)}, P^{(i+1)})$	delta[i]	$\Delta_1(P^{(1)}, P^{(i+1)})$
	$i = 2, 3, 4$		
Lambda[i]	$S_1(P^{(2)}, P^{(i+2)})$	lambda[i]	$\Delta_1(P^{(2)}, P^{(i+2)})$
	$i = 2, 3$		
Kappa[2]	$S_1(P^{(3)}, P^{(5)})$	kappa[i]	$\Delta_1(P^{(3)}, P^{(5)})$
Sigma1[1]	$S_2(P, P^{(1)})$	sigma1[1]	$\Delta_2(P, P^{(1)})$
Sigma2[1]	$S_3(P, P^{(1)})$	sigma2[1]	$\Delta_3(P, P^{(1)})$
Sigma1[2]	$S_2(P, P^{(2)})$	sigma1[2]	$\Delta_2(P, P^{(2)})$
Sigma2[2]	$S_3(P, P^{(2)})$	sigma2[2]	$\Delta_3(P, P^{(2)})$
Sigma3[2]	$S_4(P, P^{(2)})$	sigma3[2]	$\Delta_4(P, P^{(2)})$
Sigma1[3]	$S_2(P, P^{(3)})$	sigma1[3]	$\Delta_2(P, P^{(3)})$
Sigma2[3]	$S_3(P, P^{(3)})$	sigma2[3]	$\Delta_3(P, P^{(3)})$
Sigma1[4]	$S_2(P, P^{(4)})$	sigma1[4]	$\Delta_2(P, P^{(4)})$
Delta1[2]	$S_2(P^{(1)}, P^{(3)})$	delta1[2]	$\Delta_2(P^{(1)}, P^{(3)})$
Delta2[2]	$S_3(P^{(1)}, P^{(3)})$	delta2[2]	$\Delta_3(P^{(1)}, P^{(3)})$
Delta1[3]	$S_2(P^{(1)}, P^{(4)})$	delta1[3]	$\Delta_2(P^{(1)}, P^{(4)})$
Lambda1[2]	$S_2(P^{(2)}, P^{(4)})$	lambda1[2]	$\Delta_2(P^{(2)}, P^{(4)})$

4.3 Strates surdéterminées de degré 5 (resp. 6) avec au moins 4 (resp. au moins 5) égalités entre les racines

Dans l'étude des strates surdéterminées on utilise les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.2 *Tout idéal $\mathcal{I} \neq 0$ admet (pour un ordre total des monômes donné) une unique base de Gröbner réduite.*

Pour la preuve de ce théorème, voir la proposition 6 dans [5]. C'est cette base de Gröbner réduite qui est calculée par les systèmes de calcul formel Maple.

Théorème 4.3 *Soit*

$$(S)\begin{cases} p_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \quad\vdots \\ p_q(x_1,\ldots,x_n)=0 \end{cases}$$

un système d'équations polynomiales et soit $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par $p_1,\ldots,p_q$ et G une base de Gröbner de cet idéal. Alors le système (S) a des solutions si et seulement si 1 $\notin G$.

Dans ce paragraphe nous considérons simultanément les cas de polynômes de degré 5 et 6.

On cherche des PH P pour lesquels il y a au moins quatre (resp. cinq) égalités indépendantes entre les racines de P, $P^{(1)}$, ..., $P^{(4)}$ (resp. P, $P^{(1)}$, ..., $P^{(5)}$). Nous illustrons notre méthode par un exemple. Les résultats sont présentés sous la forme d'une conclusion à la fin du paragraphe.

Supposons qu'on cherche un polynôme P de degré 6 tel que P et $P^{(2)}$ ont au moins deux racines communes (comptées avec la multiplicité), de même pour $P^{(1)}$ et $P^{(3)}$. On suppose aussi que P et $P^{(4)}$ ont au moins une racine en commun. Par le théorème 4.1, le système d'équations polynômiales suivant doit avoir une solution réelle (les variables inconnues sont les quatre coefficients a_j de la forme (2.4.1), voir la définition 2.6) :

$$\Delta_1(P,P^{(2)})=\Delta_2(P,P^{(2)})=\Delta_1(P^{(1)},P^{(3)})=\Delta_2(P^{(1)},P^{(3)})=\Delta_1(P,P^{(4)})=0 \quad (4.3.1)$$

Désignons par $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par $\Delta_1(P,P^{(2)})$, $\Delta_2(P,P^{(2)})$, $\Delta_1(P^{(1)},P^{(3)})$, $\Delta_2(P^{(1)},P^{(3)})$ et $\Delta_1(P,P^{(4)})$ dans l'espace des polynômes des quatre variables a_0, a_1, a_2, a_3, qu'on désigne par d, c, b, a. c.-à-d. nous considérons le polynôme $P := x^6 - x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On trouve une base de Gröbner de $\mathcal{I}$. Si le monôme 1 appartient à cette base, le système (4.3.1) n'a aucune solution (voir le théorème 4.3). Sinon, on résoud le système d'équations défini par les éléments de la base de Gröbner, c.-à-d. on trouve les quadruplets (d,c,b,a) qui sont les solutions. Dans ce cas on calcule les polynômes $P^{(j)}$, $j=0,\ldots,5$ qu'ils définissent, on trouve les racines de ces polynômes et on compte le nombre d'égalités entre ces racines. Si ce nombre est supérieur ou égal à 5, on à trouvé alors une strate surdéterminée. Donc on doit chercher n'importe quel polynôme de degré 6 ayant au moins

5 égalités indépendantes formées par les racines de $P^{(j)}$, $j = 0, \dots, 5$. Pour les polynômes de degré 5 on procède de la même façon.

Dans ce qui suit nous appelons les parties de algorithme par $A, B, \dots, J$. Dans la description du programme nous utilisons la notation $A5, B5, \dots, J5$, resp. $A6, B6, \dots, J6$, pour distinguer les cas de polynômes de degré 5 et 6.

On se rappelle que dans la partie $A6$ la notation utilisée dans l'algorithme a été introduite dans le paragraphe 4.2. Alors on donnera par la suite la liste de tous les cas possibles où on a plus de 5 égalitées possibles. Les cas sont définis par le système (4.3.1). Le seul cas quand on doit s'occuper de $S_4(.,.)$ correspond au polynôme de Gegenbauer G_6 qui est pair et on ne le considère pas dans l'algorithme car on en a parlé dans le paragraphe 4.2.

Dans la partie B on trouve la base de Gröbner de l'idéal $\mathcal{I}$. Désormais c'est la base qui remplace les générateurs de l'idéal $\mathcal{I}$ et qui définit le système à résoudre. Si la base de Gröbner contient le monôme 1, ceci veut dire que l'équivalent du système (4.3.1) n'a aucune solution et donc on s'intéresse pas à un tel cas. On exclut également les cas où l'idéal $\mathcal{I}$ contient que les éléments a et c ; dans des telles situations le polynôme de degré 5 est impaire, le polynôme de degré 6 est pair et il faut voir le chapitre 3.

La commande **Groebner[Solve]** (voir la partie C) donne les bases de Gröbner réduites pour l'ordre **lexicographique**. Si la nouvelle base contient que les éléments a et c, donc de tels cas sont à exclure comme dans la partie B.

Dans la partie D, on applique la commande "**solve**" aux systèmes définis par les bases de Gröbner simplifiées qui n'ont pas été exclus dans la partie C. Dans certains cas, **Maple** ne donne pas la réponse directement, mais produit plutôt un système d'équations algébriques plus simples dont les racines sont les valeurs de a, b, c (resp. a, b, c, d). Ces systèmes sont résolus par la commande **evalf (allvalues (.))**.

Dans la partie E on trouve séparément les valeurs de chacune des variables a, b, c (resp. a, b, c, d). Pour chacune d'entre elles on trouve, en général, plusieurs valeurs possibles. On présente dans la partie F toutes les combinaisons possibles de ces valeurs, en excluant les triplets (resp. les quadruplets) qui se répètent.

Dans la partie G on trouve les racines des polynômes P définies par les triplets (resp. les quadruplets) restants. On exclut des polynômes ayant des zéros complexes, c.-à-d. on exclut les polynômes non hyperboliques.

Dans la partie H les dérivées de ces polynômes restant P sont calculées, alors que les racines du quadruplet (resp. quintuplet) de polynômes $P^{(j)}$, $j = 0, \dots, 5$ sont trouvées.

Dans la partie I, le nombre d'égalités entre ces racines est trouvé.

Dans le cas où on a un nombre d'égalités ≥ 4 (resp. ≥ 5), les polynômes et le nombre d'égalités sont présentés dans la partie J.

Conclusion :

Pour $n = 5$ il y a exactement 3 strates surdéterminées avec au moins quatre égalités entre les racines. Elles sont toutes impaires, aucune n'est triviale et une seule est ancienne, notamment, F, voir le théorème 2.2.

Pour $n = 6$ il y a exactement 19 strates surdéterminées avec au moins cinq égalités entre les racines. Elles sont toutes paires, aucune n'est triviale et 7 d'entre elles sont anciennes. Les 19 strates sont d'écrites dans le paragraphe 3.1 et les 7 strates anciennes dans le paragraphe 3.2. Il s'agit des "stations" de métro autres que U, voir la figure 2.1.

Partie A5

```
 with(linalg):
with(Groebner):
f[0]:=x^5-x^3+a*x^2+b*x+c:
for i from 1 to 4 do f[i]:=diff(f[i-1],x) end do:
> for i from 1 to 4 do alpha[i-1]:=sylvester(f[0],f[i],x)
   end do:
> for i from 4 to 5 do alpha[i]:=sylvester(f[1],f[i-1],x)
   end do:
> alpha[6]:=sylvester(f[2],f[4],x):
> beta[0]:=submatrix(alpha[0],[1,2,3,5,6,7,8],1..7):
> beta[1]:=submatrix(alpha[1],[1,2,4,5,6,7],1..6):
> Gamma[0]:=submatrix(beta[0],[1,2,4,5,6],1..5):
> Gamma[1]:=submatrix(beta[1],[1,3,4,5],1..4):
> beta[2]:=submatrix(alpha[2],[1,3,4,5,6],1..5):
> beta[4]:=submatrix(alpha[4],[1,3,4,5],1..4):
> kappa[0]:=det(Gamma[0]):
> kappa[1]:=det(Gamma[1]):
> for k from 0 to 6 do sigma[k]:=det(alpha[k]):od:
> for k from 0 to 2 do lambda[k]:=det(beta[k]):od:
> lambda[4]:=det(beta[4]):
> A[1]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],delta[2]]:
> A[2]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],delta[3]]:
> A[3]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],lambda[2]]:
> A[4]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2],delta1[2]]:
> A[5]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],delta[2]]:
> A[6]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2],delta[3]]:
> A[7]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[3],sigma[3]]:
> A[8]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],delta[2]]:
> A[9]:=[sigma[2],sigma1[2],lambda[2],delta[2]]:
> A[10]:=[sigma[2],sigma1[2],lambda[2],sigma[3]]:
> A[11]:=[sigma[2],sigma[3],lambda[2],delta[2]]:
> A[12]:=[sigma[2],sigma1[3],lambda[2],sigma[3]]:
> A[13]:=[sigma[2],delta[2],lambda[2],delta1[2]]:
> A[14]:=[sigma[2],sigma1[3],sigma[5],sigma[3]]:
> A[15]:=[sigma[1],sigma[2],delta[3],sigma[4]]:
> A[16]:=[sigma[2],delta1[2],sigma[4],delta[2]]:
> A[17]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],delta[2]]:
> A[18]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[1],delta[2]]:
> A[19]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[1],delta[3]]:
> A[20]:=[sigma[2],delta1[2],sigma[1],delta[2]]:
```

```
> A[21]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[1],delta[2]]:
> A[22]:=[sigma[2],sigma[4],sigma[1],delta[2]]:
> A[23]:=[sigma[2],delta[3],sigma[1],delta[2]]:
> A[24]:=[sigma[2],delta[3],sigma[1],sigma[3]]:
> A[25]:=[sigma[2],lambda[2],sigma[1],delta[2]]:
> A[26]:=[sigma[2],lambda[2],sigma[1],sigma[3]]:
> A[27]:=[delta1[2],sigma1[1],sigma[1],delta[2]]:
> A[28]:=[sigma[3],sigma1[1],sigma[1],delta[3]]:
> A[29]:=[sigma[3],sigma1[1],sigma[1],lambda[2]]:
> A[30]:=[sigma[2],sigma1[1],sigma[1],sigma[3]]:
> A[31]:=[sigma[2],sigma1[1],sigma[1],delta[3]]:
> A[32]:=[sigma[2],sigma1[1],sigma[1],lambda[2]]:
> A[33]:=[sigma[3],sigma1[1],sigma[1],delta[2]]:
> A[34]:=[delta[2],sigma1[1],sigma[1],sigma[4]]:
> A[35]:=[delta[2],sigma1[1],sigma[1],delta[3]]:
> A[36]:=[delta[2],sigma1[1],sigma[1],lambda[2]]:
> A[37]:=[sigma[3],sigma1[1],sigma[1],delta[3]]:
> A[38]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],delta[2]]:
> A[39]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],delta[3]]:
> A[40]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],lambda[2]]:
```

Partie B5

```
> for i from 1 to 40 do B[i]:=Basis(A[i],plex(a,b,c)):end do
  :
> for i from 1 to 40 do C[i]:=Groebner[Solve](A[i],[a,b,c]):
  end do:
> Resultat:=0:
>  Un:=0:
> for i from 1 to 40 do
> if (nops(B[i])=1) then
>   if (B[i][1]=1) then
>      Un:=1;
>   fi;
> fi;
> if (Un=0) then
>     Resultat:=Resultat, i;
> fi;
> Un:=0:
> od:
> Resultat:=[Resultat]:
> Resultat:=Resultat[2..nops(Resultat)]:
```

Partie C5

```
CI:=[seq(0, i=1..nops(Resultat))]:
> for i from 1 to nops(Resultat) do
> CI[i]:=C[Resultat[i]]
> od:
> evalm(CI):
> Valeur:=0:
> for i from 1 to nops(Resultat) do
> for j from 1 to nops(CI[i]) do
>    Valeur:=Valeur,CI[i][j][1];
> od:
> od:
> Valeur:=[Valeur]:
> Valeur:=Valeur[2..nops(Valeur)]:
```

Partie D5

```
Valeur1:=0:for i from 1 to nops(Valeur) do
> Valeur1:=Valeur1,solve(Valeur[i],[a,b,c]);
> od:
> Valeur1:=[Valeur1]:
> Valeur1:=Valeur1[2..nops(Valeur1)]:
> Valeur2:=0:
> for i from 1 to nops(Valeur1) do
> for j from 1 to nops(Valeur1[i][1]) do
> for k from 1 to 3 do
> Valeur2:=Valeur2,[allvalues(Valeur1[i][1][k])];
> od;
> od;
> od;
> Valeur2:=[Valeur2]:
> Valeur2:=Valeur2[2..nops(Valeur2)]:
```

Partie E5

```
Valeur3:=0:
for i from 1 by 3 to nops(Valeur2) do
>    Va:=Valeur2[i];
>    Vb:=Valeur2[i+1];
>    Vc:=Valeur2[i+2];
>  Valeur3:=Valeur3, Va[1];
>  Valeur3:=Valeur3, Vb[1];
>  Valeur3:=Valeur3, Vc[1];
```

```
> Taille:=max(nops(Va), nops(Vc));
> if Taille>nops(Vb) then
>   Valeur3:=Valeur3, Va[nops(Va)];
>   Valeur3:=Valeur3, Vb[nops(Vb)];
>   Valeur3:=Valeur3, Vc[nops(Vc)];
> fi
> od:
> Valeur3:=[Valeur3]:
> Valeur3:=Valeur3[2..nops(Valeur3)]:
Valeur4:=0:for i from 1 to nops(Valeur3) do
>     vartemp:=solve(Valeur3[i]);
>   Valeur4:=Valeur4, vartemp;
> od:
> Valeur4:=[Valeur4[2..nops([Valeur4])]]:
> Mat:=evalm(Matrix(1..nops(Valeur4)/3,1..3,shape=zero)):
> k:=1:
> for i from 1 to nops(Valeur4)/3 do
>   for j from 1 to 3 do
>     Mat[i,j]:= Valeur4[k];
>     k:=k+1;
>   od;
> od;
```

Partie F5

```
Nombre:=0:for i from 1 to nops(Valeur4)/3 do
>   k:=0;
>   for j from i to nops(Valeur4)/3 do
>       li:=convert(row(Mat,i), Vector); lj:=convert(row(Mat,
   j), Vector);
>       if equal(li, lj) then
>           k:=k+1;
>       fi;
>   od;
>     Nombre:=Nombre, k;
> od:
> Nombre:=[Nombre[2..nops([Nombre])]]:
> Valeur8:=0:
> for i from 1 to nops(Nombre) do
>   if (Nombre[i]=1) then
>     Valeur8:=Valeur8+1;
>   fi;
> od;
```

```
> Matsimp:=Matrix(Valeur8,3):
> evalm(Matsimp):
k:=1:for i from 1 to nops(Nombre) do
>   if (Nombre[i]=1) then
>     for j from 1 to 3 do
>        Matsimp[k,j]:=Mat[i,j]:
>     od;
>
>       k:=k+1;
>    fi;
> od:
> evalm(Matsimp):
```

Partie G5

```
 > f[0]:=(x,a1, b1, c1)->x^5-x^3+a1*x^2+b1*x+c1:
pol:=Matrix(rowdim(Matsimp),1):for i from 1 to rowdim(
    Matsimp) do
>   a1:=Matsimp[i,1]:
>   b1:=Matsimp[i,2]:
>   c1:=Matsimp[i,3]:
>   pol[i,1]:=f[0](x,a1,b1,c1);
> od:
> evalm(pol):
> Valeur9:=0:
> for i from 1 to (rowdim(pol)) do
>    Valeur9:=Valeur9,evalf(solve(pol[i,1]));
> od:
> Valeur9:=[Valeur9]:
> Valeur9:=Valeur9[2..nops(Valeur9)]:
> Mat1:=evalm(Matrix(1..nops(Valeur9)/5,1..5,shape=zero)):
> k:=1:
> for i from 1 to nops(Valeur9)/5 do
>    for j from 1 to 5 do
>      Mat1[i,j]:= Valeur9[k];
>      k:=k+1;
>    od;
> od:
> evalm(Mat1):
> IndLignReal:=0:
> for i from 1 to rowdim(Mat1) do
>   k:=0; j:=1;
>   while (j<=5) and (k=0) do
```

```
>     if (Im(Mat1[i,j])<>0) then
>          k:=1;
>     fi;
>     j:=j+1;
>   end:
>      if (k=0) then
>         IndLignReal:=IndLignReal,i;
>      fi;
> od:
> IndLignReal:=[IndLignReal[2..nops([IndLignReal])]]:
> Mat3:=evalm(Matrix(1..nops(IndLignReal),1..5,shape=zero)):
> for i from 1 to rowdim(Mat3) do
>   for j from 1 to 5 do
>      Mat3[i,j]:=Mat2[IndLignReal[i],j];
>   od;
> od:
```

Partie H5

```
pol0:=evalm(Matrix(1..nops(IndLignReal),1..1,shape=zero)):
> for i from 1 to rowdim(pol0) do
>   for j from 1 to 1 do
>      pol0[i,j]:=pol[IndLignReal[i],j];
>   od;
> od:
> evalm(pol0):
> pol1:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol0),1..1,shape=zero)):
> for i from 1 to rowdim(pol0) do
>    for j from 1 to 1 do
>       pol1[i,j]:=diff(pol0[i,j],x) ;
>    od;
> od;
> evalm(pol1):
> pol2:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol1),1..1,shape=zero)):
> for i from 1 to rowdim(pol1) do
>    for j from 1 to 1 do
>       pol2[i,j]:=diff(pol1[i,j],x) ;
>    od;
> od;
> evalm(pol2):
> pol3:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol2),1..1,shape=zero)):
> for i from 1 to rowdim(pol2) do
>    for j from 1 to 1 do
```

```
>       pol3[i,j]:=diff(pol2[i,j],x) ;
>    od;
> od;
> evalm(pol3):
> pol4:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol3),1..1,shape=zero)):
> for i from 1 to rowdim(pol3) do
>    for j from 1 to 1 do
>       pol4[i,j]:=diff(pol3[i,j],x) ;
>    od;
> od;
> Matpol:=concat(pol0, pol1, pol2, pol3, pol4):
> evalm(Matpol):
```

Partie I5

```
 Mat55:=Matrix(5,5, symbol=g):MatPegal:=Matrix(rowdim(Matpol
    ),2):
> for l from 1 to rowdim(Matpol) do
> for j from 1 to 5 do
>     Temp:=Matpol[l,j];
>     solut:=[solve(Temp)]:
>         for k from 1 to nops(solut) do
>        Mat55[j, k]:=solut[k];
>     od:
>  od:
> Vect55:=Matrix(1,15):
> k:=1:
> for i from 1 to 5 do
>   for j from 1 to (5-i+1) do
>     Vect55[1,k]:=Mat55[i,j];
>     k:=k+1;
>   od;
> od:
>
> for i from 1 to 5 do
>   for j from i+1 to 5 do
>     if (Vect55[1, i]=Vect55[1, j]) then
>             Vect55[1,j]:=g;
>     fi
>   od
> od:
> for i from 6 to 9 do
>   for j from i+1 to 9 do
```

```
>     if (Vect55[1, i]=Vect55[1, j]) then
>         Vect55[1,j]:=g;
>     fi;
> od
>
> od:
> for i from 10 to 12 do
>   for j from i+1 to 12 do
>     if (Vect55[1, i]=Vect55[1, j]) then
>         Vect55[1,j]:=g;
>     fi
>   od
> od:
> for i from 14 to 15 do
>   for j from i+1 to 15 do
>     if (Vect55[1, i]=Vect55[1, j]) then
>           Vect55[1,j]:=g;
>    fi
>   od
> od:
> Vectsimp:=0:
> for i from 1 to 15 do
>   if (Vect55[1,i]<>g) then
>      Vectsimp:=Vectsimp, Vect55[1,i];
>   fi
> od:
> Vectsimp:=Vectsimp[2..nops([Vectsimp])]:
> Vectsimp1:=evalm(convert([Vectsimp], Matrix)):
> Vectind:=evalm(Matrix(1,15)):
> for i from 1 to coldim(Vectsimp1) do
>    j:=i+1; arret:=0;
>  while (j<=coldim(Vectsimp1)) and (arret=0) do
>      if (Vectsimp1[1,i]=Vectsimp1[1,j]) then
>           Vectind[1,i]:=1;
>           arret:=1;
>      fi;
>      j:=j+1;
>   end;
> od:
> Egalite:=0:
> for i from 1 to coldim(Vectsimp1) do
>    Egalite:=Egalite+Vectind[1, i];
```

```
> od:
> Egalite:
> MatPegal[1,1]:=Matpol[1,1];
> MatPegal[1,2]:=Egalite;
> od:
> evalm(MatPegal):
> IndMatP:=0:
> for i from 1 to rowdim(Matpol) do
>    if MatPegal[i,2]>=4 then
>      IndMatP:=IndMatP,i;
>    fi;
> od:
```

Partie J5

```
 IndMatP:=IndMatP[2..nops([IndMatP])]:MatPegal4:=Matrix(nops
    ([IndMatP]),2):
> for i from 1 to nops([IndMatP]) do
>    MatPegal4[i,1]:=MatPegal[IndMatP[i], 1];
>    MatPegal4[i,2]:=MatPegal[IndMatP[i], 2];
> od:
> Strat_Surdetermine:=evalm(MatPegal4);
                              [ x^{5} - x^{3} +21/100x 4]
Strat_Surdetermine :=         [   x^{5} - x^{3} +9/100x 4]
                              [   x^{5} - x^{3} +1/4x 6]
```

Partie A6

```
with(linalg):
with(Groebner):

> f[0]:=x^6-x^4+a*x^3+b*x^2+c*x+d:
> for i from 1 to 5 do f[i]:=diff(f[i-1],x) end do:
> with(linalg):
> for i from 1 to 5 do Sigma[i]:=sylvester(f[0],f[i],x) end
    do:
> for i from 2 to 4 do Delta[i]:=sylvester(f[1],f[i+1],x)
    end do:
> for i from 2 to 3 do Lambda[i]:=sylvester(f[2],f[i+2],x)
    end do:
> Kappa[2]:=sylvester(f[3],f[5],x):
> Sigma1[1]:=submatrix(Sigma[1],[1,2,3,4,6,7,8,9,10],1..9):
> Sigma2[1]:=submatrix(Sigma1[1],[1,2,3,5,6,7,8],1..7):
> Sigma1[2]:=submatrix(Sigma[2],[1,2,3,5,6,7,8,9],1..8):
```

```
> Sigma2[2]:=submatrix(Sigma1[2],[1,2,4,5,6,7],1..6):
> Sigma3[2]:=submatrix(Sigma2[2],[1,3,4,5],1..4):
> Sigma1[3]:=submatrix(Sigma[3],[1,2,4,5,6,7,8],1..7):
> Sigma2[3]:=submatrix(Sigma1[3],[1,3,4,5,6],1..5):
> Sigma1[4]:=submatrix(Sigma[4],[1,3,4,5,6,7],1..6):
> Delta1[2]:=submatrix(Delta[2],[1,2,4,5,6,7],1..6):
> Delta2[2]:=submatrix(Delta1[2],[1,3,4,5],1..4):
> Delta1[3]:=submatrix(Delta[3],[1,3,4,5,6],1..5):
> Lambda1[2]:=submatrix(Lambda[2],[1,3,4,5],1..4):
> for k from 1 to 5 do sigma[k]:=det(Sigma[k]):od:
> for k from 2 to 4 do delta[k]:=det(Delta[k]):od:
> for k from 2 to 3 do lambda[k]:=det(Lambda[k]):od:
> kappa[2]:=det(Kappa[2]):sigma1[1]:=det(Sigma1[1]):sigma2
  [1]:=det(Sigma2[1]):
> sigma1[2]:=det(Sigma1[2]):sigma2[2]:=det(Sigma2[2]):sigma3
  [2]:=det(Sigma3[2]):
> sigma1[3]:=det(Sigma1[3]):sigma2[3]:=det(Sigma2[3]):
> sigma1[4]:=det(Sigma1[4]):
> delta1[2]:=det(Delta1[2]):delta2[2]:=det(Delta2[2]):delta1
  [3]:=det(Delta1[3]):lambda1[2]:=det(Lambda1[2]):
> kappa[5]:=det(Gamma[5]):
A[1]:=[sigma[2],sigma1[2], sigma2[2],sigma[4],delta[4]]:
A[2]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],delta[4],lambda[2]]:
A[3]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2] ,delta[3],delta[4]]:
```

Partie B6

```
for i from 1 to 357 do
 B[i]:=Basis(A[i],tdeg(a,b,c,d))
od:
Resultat:=0:
trouva=0:trouvc:=0:Even:=0: Un:=0:
for i from 1 to 357 do
   for j from 1 to nops(B[i]) do
     if (B[i][j]=a) then
         trouva:=1;
     fi;
   od;
  for j from 1 to nops(B[i]) do
    if (B[i][j]=c) then
         trouvc:=1;
    fi;
  od;
```

```
  if (trouva=1) and (trouvc=1) then
     Even:=1;
  fi;
  if (nops(B[i])=1) then
    if (B[i][1]=1) then
       Un:=1;
    fi;
  fi;
  if (Un=0) and (Even=0) then
     Resultat:=Resultat, i;
  fi;
  trouva:=0: trouvc:=0:Un:=0: Even:=0:
od:
Resultat:=[Resultat]:
Resultat:=Resultat[2..nops(Resultat)]:
```

Partie C6

```
for i from 1 to 357 do
   C[i]:=Groebner[Solve](B[i],[a,b,c,d])
od:
CI:=[seq(0, i=1..nops(Resultat))]:
for i from 1 to nops(Resultat) do
   CI[i]:=C[Resultat[i]]
od:
evalm(CI):
Valeur:=0:
for i from 1 to nops(Resultat) do
  for j from 1 to nops(CI[i]) do
    Valeur:=Valeur,CI[i][j][1];
  od:
od:
Valeur:=[Valeur]:
Valeur:=Valeur[2..nops(Valeur)]:
nops(Valeur):
ResultatVal:=0:
trouva=0:trouvc:=0:Even:=0:
for i from 1 to nops(Valeur) do
  for j from 1 to nops(Valeur[i]) do
    if (Valeur[i][j]=a) then
       trouva:=1;
    fi;
  od;
```

```
  for j from 1 to nops(Valeur[i]) do
    if (Valeur[i][j]=c) then
      trouvc:=1;
    fi;
  od;
  if (trouva=1) and (trouvc=1) then
    Even:=1;
  fi;
  if  (Even=0) then
    ResultatVal:=ResultatVal, i;
  fi;
  trouva:=0: trouvc:=0: Even:=0:
od:
ResultatVal:=[ResultatVal]:
ResultatVal:=ResultatVal[2..nops(ResultatVal)]:
ValeurEven:=[seq(0, i=1..nops(ResultatVal))]:
for i from 1 to nops(ResultatVal) do
  ValeurEven[i]:=Valeur[ResultatVal[i]]
od:
```

Partie D6

```
for i from 1 to nops(ValeurEven) do
  solve(ValeurEven[i],[a,b,c,d]);
od:
Valeur2:=0:
for i from 1 to nops(ValeurEven) do
  Valeur2:=Valeur2,solve(ValeurEven[i],[a,b,c,d]);
od:
Valeur2:=[Valeur2]:
Valeur2:=Valeur2[2..nops(Valeur2)]:
Valeur3:=0:
for i from 1 to nops(Valeur2) do
  for j from 1 to nops(Valeur2[i][1]) do
    for k from 1 to 4 do
      Valeur3:=Valeur3,[evalf(allvalues(Valeur2[i][1][k]))];
    od;
  od;
od;
Valeur3:=[Valeur3]:
Valeur3:=Valeur3[2..nops(Valeur3)]:
```

Partie E6

```
Valeur5:=0:
for i from 1 by 4 to (nops(Valeur3)-3) do
  Va:=Valeur3[i];
  Vb:=Valeur3[i+1];
  Vc:=Valeur3[i+2];
  Vd:=Valeur3[i+3];
  Ta:=nops(Va); Tb:=nops(Vb);Tc:=nops(Vc);Td:=nops(Vd);
  if (Ta>Tc) then
     ml:=Ta/Tc;
     Vcdup:=0;
     for j from 1 to nops(Vc) do
        for k from 1 to ml do
           Vcdup:=Vcdup, Vc[j];
        od;
     od;
     Vcdup:=[Vcdup[2..nops([Vcdup])]];
     Vc:=Vcdup;
  fi;
  if (Tc>Ta) then
      ml:=Tc/Ta;
      Vadup:=0;
      for j from 1 to nops(Va) do
         for k from 1 to ml do
            Vadup:=Vadup, Va[j];
         od;
       od;
      Vadup:=[Vadup[2..nops([Vadup])]];
      Va:=Vadup;
  fi;
```

Partie E6 (suite)

```
  Tmax:=max(Ta, Tc);
  mlb:=Tmax/Tb;
  Vbdup:=0;
  for j from 1 to nops(Vb) do
     for k from 1 to mlb do
       Vbdup:=Vbdup, Vb[j];
     od;
   od;
   Vbdup:=[Vbdup[2..nops([Vbdup])]];
```

```
   Vb:=Vbdup;
   mld:=Tmax/Td;
   Vddup:=0;
   for j from 1 to nops(Vd) do
      for k from 1 to mld do
         Vddup:=Vddup, Vd[j];
      od;
   od;
   Vddup:=[Vddup[2..nops([Vddup])]];
   Vd:=Vddup;
   for j from 1 to Tmax do
      Valeur5:=Valeur5,solve(Va[j]);
      Valeur5:=Valeur5,solve(Vb[j]);
      Valeur5:=Valeur5,solve(Vc[j]);
      Valeur5:=Valeur5,solve(Vd[j]);
   od;
od:
Valeur5:=[Valeur5[2..nops([Valeur5])]]:
Mat:=Matrix(nops(Valeur5)/4, 4):
k:=1;
for i from 1 to nops(Valeur5)/4 do
   for j from 1 to 4 do
      Mat[i,j]:= Valeur5[k];
      k:=k+1;
   od;
od;
```

Partie F6

```
Nombre:=0:
for i from 1 to nops(Valeur5)/4 do
  k:=0;
  for j from i to nops(Valeur5)/4 do
     li:=convert(row(Mat,i), Vector); lj:=convert(row(Mat,j)
         , Vector);
     if equal(li, lj) then
          k:=k+1;
     fi;
  od;
  Nombre:=Nombre, k;
od:
Nombre:=[Nombre[2..nops([Nombre])]]:
Valeur7:=0:
```

```
for i from 1 to nops(Nombre) do
  if (Nombre[i]=1) then
     Valeur7:=Valeur7+1;
  fi
od:
Matsimp:=Matrix(Valeur7,4):
k:=1:
for i from 1 to nops(Nombre) do
  if (Nombre[i]=1) then
    for j from 1 to 4 do
       Matsimp[k,j]:=Mat[i,j]:
    od;
      k:=k+1;
   fi;
od:
```

Partie G6

```
f[0]:=(x, a1, b1, c1, d1)->x^6-x^4+a1*x^3+b1*x^2+c1*x+d1:
pol:=Matrix(rowdim(Matsimp),1):
for i from 1 to rowdim(Matsimp) do
   a1:=Matsimp[i,1]:
   b1:=Matsimp[i,2]:
   c1:=Matsimp[i,3]:
   d1:=Matsimp[i,4]:
   pol[i,1]:=f[0](x,a1,b1,c1,d1);
od:
Valeur9:=0:
for i from 1 to (rowdim(pol)) do
    Valeur9:=Valeur9,solve(pol[i,1]);
od:
Valeur9:=[Valeur9]:
Valeur9:=Valeur9[2..nops(Valeur9)]:
Mat1:=evalm(Matrix(1..nops(Valeur9)/6,1..6,shape=zero)):
k:=1:
for i from 1 to nops(Valeur9)/6 do
  for j from 1 to 6 do
     Mat1[i,j]:= Valeur9[k];
     k:=k+1;
  od;
od:
IndLignReal:=0:
for i from 1 to rowdim(Mat1) do
```

```
  k:=0; j:=1;
  while (j<=6) and (k=0) do
     if (Im(Mat1[i,j])<>0) then
       k:=1;
     fi;
     j:=j+1;
  end:
  if (k=0) then
     IndLignReal:=IndLignReal,i;
  fi;
od:
IndLignReal:=[IndLignReal[2..nops([IndLignReal])]]:
Mat2:=evalm(Matrix(1..nops(IndLignReal),1..6,shape=zero)):
for i from 1 to rowdim(Mat2) do
  for j from 1 to 6 do
    Mat2[i,j]:=Mat1[IndLignReal[i],j];
  od;
od:
```

Partie H6

```
pol0:=evalm(Matrix(1..nops(IndLignReal),1..1,shape=zero)):
for i from 1 to rowdim(pol0) do
  for j from 1 to 1 do
    pol0[i,j]:=pol[IndLignReal[i],j];
  od;
od:
evalm(pol0):
rowdim(pol0):
pol1:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol0),1..1,shape=zero)):
for i from 1 to rowdim(pol0) do
  for j from 1 to 1 do
     pol1[i,j]:=diff(pol0[i,j],x) ;
  od;
od;
evalm(pol1):
pol2:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol1),1..1,shape=zero)):
for i from 1 to rowdim(pol1) do
   for j from 1 to 1 do
      pol2[i,j]:=diff(pol1[i,j],x) ;
   od;
od;
evalm(pol2):
```

```
pol3:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol2),1..1,shape=zero)):
for i from 1 to rowdim(pol2) do
  for j from 1 to 1 do
     pol3[i,j]:=diff(pol2[i,j],x) ;
  od;
od;
evalm(pol3):
pol4:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol3),1..1,shape=zero)):
for i from 1 to rowdim(pol3) do
  for j from 1 to 1 do
     pol4[i,j]:=diff(pol3[i,j],x) ;
  od;
od;
evalm(pol4):
pol5:=evalm(Matrix(1..rowdim(pol4),1..1,shape=zero)):
for i from 1 to rowdim(pol4) do
   for j from 1 to 1 do
      pol5[i,j]:=diff(pol4[i,j],x) ;
   od;
od;
evalm(pol5):
Matpol:=concat(pol0, pol1, pol2, pol3, pol4, pol5):
evalm(Matpol):
```

Partie I6

```
Mat66:=Matrix(6,6, symbol=g):MatPegal:=Matrix(rowdim(Matpol)
    ,2):
for l from 1 to rowdim(Matpol) do
  for j from 1 to 6 do
    Temp:=Matpol[l,j];
    solut:=[solve(Temp)]:
    for k from 1 to nops(solut) do
       Mat66[j, k]:=evalf(solut[k],2);
    od:
  od:
  Vect66:=Matrix(1,21):
  k:=1:
  for i from 1 to 6 do
     for j from 1 to (6-i+1) do
        Vect66[1,k]:=Mat66[i,j];
        k:=k+1;
     od;
```

```
od:
for i from 1 to 6 do
  for j from i+1 to 6 do
     if (Vect66[1, i]=Vect66[1, j]) then
        Vect66[1,j]:=g;
     fi
  od
od:
for i from 7 to 11 do
  for j from i+1 to 11 do
    if (Vect66[1, i]=Vect66[1, j]) then
        Vect66[1,j]:=g;
    fi;
  od
od:
for i from 12 to 15 do
  for j from i+1 to 15 do
    if (Vect66[1, i]=Vect66[1, j]) then
       Vect66[1,j]:=g;
    fi
  od
od:
for i from 16 to 18 do
   for j from i+1 to 18 do
     if (Vect66[1, i]=Vect66[1, j]) then
        Vect66[1,j]:=g;
     fi
   od
od:
for i from 19 to 20 do
  for j from i+1 to 20 do
    if (Vect66[1, i]=Vect66[1, j]) then
        Vect66[1,j]:=g;
    fi
  od
od:
Vectsimp:=0:
for i from 1 to 21 do
   if (Vect66[1,i]<>g) then
      Vectsimp:=Vectsimp, Vect66[1,i];
   fi
od:
```

```
  Vectsimp:=Vectsimp[2..nops([Vectsimp])]:
  Vectsimp1:=evalm(convert([Vectsimp], Matrix)):
  Vectind:=evalm(Matrix(1,21)):
  for i from 1 to coldim(Vectsimp1) do
    j:=i+1; arret:=0;
    while (j<=coldim(Vectsimp1)) and (arret=0) do
      if (Vectsimp1[1,i]=Vectsimp1[1,j]) then
        Vectind[1,i]:=1;
        arret:=1;
      fi;
      j:=j+1;
    end;
  od:
  Egalite:=0:
  for i from 1 to coldim(Vectsimp1) do
     Egalite:=Egalite+Vectind[1, i];
  od:
  Egalite:
  MatPegal[1,1]:=Matpol[1,1];
  MatPegal[1,2]:=Egalite;
od:
evalm(MatPegal):
IndMatP:=0:
for i from 1 to rowdim(Matpol) do
   if MatPegal[i,2]>=5 then
       IndMatP:=IndMatP,i;
   fi; od:
```

Partie J6

```
if (nops([IndMatP])=1) then
    print("No Overdetermined Strata")
else
   IndMatP:=IndMatP[2..nops([IndMatP])];
   MatPegal5:=Matrix(nops([IndMatP]),2):
   for i from 1 to nops([IndMatP]) do
      MatPegal5[i,1]:=MatPegal[IndMatP[i], 1];
      MatPegal5[i,2]:=MatPegal[IndMatP[i], 2];
   od:
  Strata_Overdetermined:=evalm(MatPegal5):
fi;
```

Chapitre 5

Égalités algébriquement dépendantes où indépendantes

5.1 Quelques résultats connus

Dans ce paragraphe nous citons quelques résultats de l'article [14] que nous utilisons dans ce chapitre. Nous les complétons par les lemmes 5.4 et 5.5.

Considérons un polynôme Q hyperbolique monique de degré n dont les racines distinctes sont $y_1 < \cdots < y_s$, de multiplicités $m_1, \ldots, m_s$. Considérons les racines x_j^k de $Q^{(k)}$ comme des fonctions de $y_1, \ldots, y_s$. (Les racines y_i peuvent varier, mais leurs multiplicités ne changent pas.) Il est bien connu que ces fonctions sont lisses. (Dans le cas particulier $k < m_i$ une de ces racines coïncide avec y_i.)

Lemme 5.1 *Pour i fixé on a* $0 \leq \dfrac{\partial(x_j^k)}{\partial(y_i)} \leq \dfrac{n-k}{n}$ *et* $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial(x_j^k)}{\partial(y_i)} = \frac{n-k}{n}$.

Le lemme coïncide avec le corollaire 22 de [14].

Considérons le cas particulier où les racines du polynôme Q sont simples. On les désigne par $x_1, \ldots, x_n$.

Lemme 5.2 *Supposons qu'il y a s égalités entre racines de la forme $x_j^{k_j} = x_i$ $(*)$ où $x_j^{k_j}$ est une racine de $Q^{(k_j)}$ et les indices i sont tous différents. Alors, les égalités $(*)$ définissent s hypersurfaces dans l'espace des coefficients du polynôme Q dont l'intersection est transversale.*

Le lemme coïncide avec la proposition 11 de [14].

Lemme 5.3 *Pour j et k fixés on a* $\displaystyle\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_j^k}{\partial y_i} = 1$.

En effet, supposons que toutes les racines y_i sont des fonctions d'un paramètre t. Posons $\frac{dx_j^k}{dt} := \dot{x}_j^k$, $\frac{dy_i}{dt} := \dot{y}_i$. Donc $\dot{x}_j^{k_j} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_j^k}{\partial y_i}\dot{y}_i$. Si $\dot{y}_i = 1$ (c.-à-d. toutes les racines y_i se déplacent avec vitesse 1 à droite), on a évidemment $\dot{x}_j^{k_j} = 1$. □

Considérons dans $Oa_0 \dots a_{n-1}$ la sous-variété algébrique réelle $\mathcal{V}$ définie par les conditions

$$x_j^{k_j} = y_{i_\nu}\ ,\quad \nu = 1, \dots, l,\ l \leq s-2 \tag{5.1.1}$$

où les indices ν sont tous différents. (On suppose ici que les multiplicités des racines réelles du PH sont fixées et que de plus les égalités (5.1.1) ont lieu. Pour définir l'adhérence topologique $\bar{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ il faut admettre des égalités de la forme $y_i = y_{i+1}$.)

Lemme 5.4 *Dans ces conditions, la variété $\mathcal{V}$ est connexe et lisse. Son adhérence topologique est aussi connexe.*

Preuve :

La matrice jacobienne du système d'équations (5.1.1) a une domination diagonale. Ceci résulte des lemmes 5.3 et 5.1 et du fait qu'au moins deux des racines y_{i_ν} (la plus petite et la plus grande) ne participent pas dans le système (5.1.1). Donc, on peut considérer *globalement* les fonctions φ_i comme des coordonnées dans l'espace $Oy_1 \dots y_s$ où $\varphi_i := y_i - x_j^{k_j}$ si l'indice i est rencontré dans le système (5.1.1) et $\varphi_i = y_i$ sinon. Ainsi la variété $\mathcal{V}$ (et $\overline{\mathcal{V}}$ aussi) est définie par le système $\varphi_{i_\nu} = 0, \nu = 1, \dots, l$, et le lemme en suit. □

Considérons la variété algébrique réelle (présumée non-vide) définie dans $Oa_0 \dots a_{n-1}$ par trois égalités de la forme

$$x_{i_1}^{k_1} = x_{i_2}^{k_2}\ ,\ x_{i_3}^{k_3} = x_{i_4}^{k_4}\ ,\ x_{i_5}^{k_5} = x_{i_6}^{k_6}\ ,\ k_1 < k_2\ ,\ k_3 < k_4\ ,\ k_5 < k_6\ ,\ k_1 < k_3 \leq k_5$$

et toutes les racines sont simples.

Lemme 5.5 *Cette variété est connexe et lisse. Son adhérence topologique et algébrique est connexe aussi.*

Preuve :

Donnons la preuve pour $k_1 = 0$, pour $k_1 > 0$ elle est analogue. La variété $\mathcal{U}$ définie dans $Oa_0 \dots a_{n-1}$ par les deux dernières égalités, est lisse et connexe ; son adhérence $\overline{\mathcal{U}}$ est connexe. En effet, dans le cas $k_3 = k_5$ ceci résulte des inégalités de lemme 5.1 et du lemme 5.4. Si $k_3 < k_5$, considérons dans $Oa_0 \dots a_{n-k_3-1}$ la variété $\mathcal{W}$ définie par la dernière égalité. Elle est lisse et connexe (ceci résulte des inégalités du lemme 5.1 et du théorème de la fonction implicite, en considérant les racines de $\mathcal{P}^{(k_6)}$ comme des fonctions de celles de $\mathcal{P}^{(k_5)}$). Son adhérence topologique est connexe. La deuxième égalité permet donc de définir $x_{i_3}^{k_3}$ comme fonction lisse définie sur $\mathcal{W}$ (on utilise encore une fois lemme 5.1 et le théorème de la fonction implicite) et qui se prolonge en fonction continue sur $\overline{\mathcal{W}}$. Donc de la même façon, la racine $x_{i_1}^{k_1}$ est définie par la première égalité comme fonction lisse sur la variété $\mathcal{U}$ et continue sur $\overline{\mathcal{U}}$. □

5.2 Le cas d'une égalité

Considérons la famille de polynômes de degré 5 ou 6 de la forme :

$$\mathcal{P} = x^5 - x^3 + ax^2 + bx + c \ \text{ ou } \ \mathcal{P} = x^6 - x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad a, b, c, d \in \mathbf{R} .$$

Rappelons que dans l'espace des paramètres (c.-à-d. $Oabc$ ou $Oabcd$) l'ensemble des points où une égalité entre les racines de $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \mathcal{P}^{(3)}, \mathcal{P}^{(4)}, \mathcal{P}^{(5)}$ a lieu, est une hypersurface algébrique $\Delta_1 = 0$ où Δ_1 est un résultant, voir le paragraphe 4.1. (La dérivée $\mathcal{P}^{(5)}$ est pertinente seulement dans le cas de polynômes de degré 6). Dans ce qui suit nous disons que cette hypersurface *correspond* à l'égalité en question.

Lemme 5.6 *Supposons que soit le polynôme hyperbolique $\mathcal{P}$ a une seule racine double (les autres étant simples), soit qu'il a toutes ses racines simples et qu'il y a une égalité entre les racines. Alors, la condition $\Delta_1 = 0$ qui exprime cette égalité (Δ_1 étant un résultant) définit localement une hypersurface lisse dans l'espace $Oabc$ ou $Oabcd$.*

Preuve :

Si l'égalité est entre deux racines de $\mathcal{P}$ (c.-à-d. $\mathcal{P}$ a une racine double), alors, la condition $\Delta_1 = 0$ définit localement une strate lisse du bord du domaine d'hyperbolicité de la famille $\mathcal{P}$, voir [24] .

Supposons que l'égalité soit celle entre deux racines simples de $P^{(\alpha)}$ et $P^{(\beta)}$, $\alpha < \beta$. Nous donnons la preuve pour le cas de degré 6 avec $\alpha = 0$, pour les autres cas elle est analogue. Alors, on peut écrire $\mathcal{P}(x^0_{i_1}) = \mathcal{P}^{(\beta)}(x^\beta_{i_2}) = 0$. La racine $x^0_{i_1}$ dépend du coefficient d et on a $\dfrac{\partial x^0_{i_1}}{\partial d} \neq 0$ tandis que $x^{(\beta)}_{i_2}$ n'en dépend pas. Donc, l'égalité $x^0_{i_1} - x^\beta_{i_2} = 0$ définit localement une hypersurface lisse dans $Oabcd$ (d'après le théorème de la fonction implicite le coefficient d est exprimé de l'égalité $x^0_{i_1} - x^\beta_{i_2} = 0$ comme fonction lisse de a, b, c). $\square$

5.3 Le cas de deux égalités

Supposons que les égalités suivantes ont lieu $x^\alpha_{i_1} = x^\beta_{i_2}, x^\gamma_{i_3} = x^\delta_{i_4}$, c.-à-d.

$$\mathcal{P}^{(\alpha)}(\zeta) = \mathcal{P}^{(\beta)}(\zeta) = 0 \tag{5.3.1}$$

$$\mathcal{P}^{(\gamma)}(\eta) = \mathcal{P}^{(\delta)}(\eta) = 0 \tag{5.3.2}$$

où $\zeta = x^\alpha_{i_1} = x^\beta_{i_2}, \eta = x^\gamma_{i_3} = x^\delta_{i_4}$, $\alpha \leqslant \gamma$, $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$.

Remarque 5.1 Dans l'espace des paramètres l'ensemble A des points où les deux égalités $x^\alpha_{i_1} = x^\beta_{i_2}$ et $x^\gamma_{i_3} = x^\delta_{i_4}$ ont lieu à la fois, est défini soit par un couple de résultants soit par un résultant et un sous-résultant, voir le paragraphe 4.1. Mais ce couple peut définir une variété dont l'ensemble A soit seulement une des composantes, voir la remarque 2.8.

On se rappelle que la notion d'égalités algébriquement (in)dépendantes a été introduite dans le paragraphe 2.6 avant la remarque 2.8.

Lemme 5.7 *Supposons qu'il y a deux égalités entre les racines des polynômes* $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \mathcal{P}^{(3)}, \mathcal{P}^{(4)}, \mathcal{P}^{(5)}$. *Supposons que soit* $\mathcal{P}$ *a toutes ses racines simples, soit qu'il a une seule racine double (les autres étant simples) et que l'une des deux égalités exprime sa présence, soit qu'il a exactement deux racines doubles ou exactement une racine triple et que les deux égalités expriment la présence de ces racines multiples. Alors, les deux égalités sont algébriquement indépendantes. Dans l'espace des paramètres l'ensemble sur lequel les deux égalités ont lieu est localement une variété algébrique réelle de codimension 2.*

Remarque 5.2 Dans la preuve du lemme on a $\varepsilon \in (\mathbf{R}, 0)$ et il est sous-entendu que si $\mathcal{P}$ a une racine double, alors le signe du paramètre ε est choisi de sorte que $\mathcal{P}$ soit hyperbolique.

Preuve du lemme 5.7 :
1er cas : $\mathcal{P}$ n'a pas de racines multiples.

1. Si $\alpha = \gamma$, le lemme résulte du lemme 5.2 de paragraphe 5.1. Ce dernier lemme implique que les deux hypersurfaces correspondant aux égalités (5.3.1) et (5.3.2) s'intersectent transversalement. Ce qui implique le lemme 5.7.
2. Supposons que $\alpha < \gamma$. Nous traitons seulement le cas de polynômes de degré 6 avec $\alpha = 0$, dans les autres cas la preuve est analogue. Les racines $x_{i_2}^{\beta}$, $x_{i_3}^{\gamma}$ et $x_{i_4}^{\delta}$ sont des fonctions lisses des paramètre a, b, c. L'égalité $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\delta}$ définit une variété lisse de codimension 1 dans l'espace $Oabc$ (voir 5.6). L'égalité $\mathcal{P}(x_{i_2}^{\beta}) = 0$ permet d'exprimer d comme fonction lisse sur cette variété. D'où le lemme.
   Ce raisonnement s'applique aussi au cas particulier où les racines $x_{i_2}^{\beta}$ et $x_{i_3}^{\gamma}$ sont confondues et on a $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\beta} = x_{i_4}^{\delta}$. S'il s'agit de polynômes de degré 5, dans ce cas on a forcément $\alpha = 0, \beta = 2, \delta = 4$. En cas de polynômes de degré 6 on peut avoir $(\alpha, \beta, \delta) = (0, 2, 4), \quad (0, 3, 5), \quad (0, 2, 5) \quad \text{ou} \quad (1, 3, 5)$.

2ème cas : $\mathcal{P}$ a des racines multiples.
Considérons le cas où $\mathcal{P}$ a une racine double et trois racines simples, c'est-à-dire on a $\alpha = \beta$ et les deux égalités sont de la forme $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\alpha}$ et $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\delta}$. On assume d'abord que $x_{i_2}^{\alpha} \neq x_{i_3}^{\gamma}$.

1. Si $0 = \alpha = \gamma$, on fait le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_{i_3}^{\gamma})$. Il détruit seulement l'égalité $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\alpha}$ car $\delta \geq 2$. Au moins un des deux changements $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_{i_1}^{0})^k$, $k = 2$ ou 3, détruit seulement l'égalité $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\delta}$. Donc, localement les deux hypersurfaces correspondant aux deux égalités $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\beta}$ et $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\delta}$ s'intersectent

transversalement et le lemme en résulte. Transversalement car les polynômes $x - x_{i_3}^{\delta}$ et $(x - x_{i_1}^0)^k$ sont différents.

2. Si $0 = \alpha < \gamma$, le raisonnement est comme celui de partie 2 du premier cas.
3. Supposons maintenant qu'on a $0 = \alpha = \beta = \gamma < \delta$ et que les deux égalités sont de la forme $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\alpha} = x_{i_4}^{\delta}$, c'est-à-dire les racines $x_{i_2}^{\beta}$ et $x_{i_3}^{\gamma}$ sont confondues. Dans ce cas le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_{i_2}^{\alpha})$ détruit seulement l'égalité $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\alpha}$, tandis que le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_{i_2}^{\alpha})^{\delta}$ détruit seulement l'égalité $x_{i_2}^{\alpha} = x_{i_4}^{\delta}$.

Remarque 5.3 Dans le cas $0 = \alpha = \beta = \gamma < \delta$ il y a en réalité trois égalités : $x_{i_1}^0 = x_{i_2}^0 = x_{i_3}^1 = x_{i_4}^{\delta}$. Si on choisit de considérer au lieu des égalités $x_{i_1}^0 = x_{i_2}^0 = x_{i_4}^{\delta}$ (qui définissent le même fait, que $\mathcal{P}$ a une racine double) les égalités $x_{i_1}^0 = x_{i_3}^1 = x_{i_4}^{\delta}$, le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon$ détruira seulement la première et le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_{i_4}^{\delta})^{\delta}$ seulement la deuxième des égalités.

Considérons le cas où $\mathcal{P}$ admet deux racines doubles, c.-à-d. on a $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ et les deux égalités sont de la forme $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\alpha}$ et $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\gamma}$.

Dans ce cas on a $0 = \alpha = \gamma$ et on fait le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_{i_1}^{\alpha})^2$. Il détruit seulement l'égalité $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\gamma}$. Le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_{i_3}^{\gamma})$ détruit seulement l'égalité $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\alpha}$.

Considérons le cas où $\mathcal{P}$ a une racine triple et deux ou trois racines distinctes c'est-à-dire on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$, et les deux égalités sont de la forme $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\alpha} = x_{i_3}^{\alpha}$.

Dans ce cas la condition que $\mathcal{P}$ soit de la forme $x^5 - x^3 + \cdots$ ou $x^6 - x^4 + \cdots$ permet d'exprimer ses racines distinctes comme fonctions d'un ou de deux paramètres. Ce qui implique le lemme. $\square$

Remarque 5.4 Dans le cas où $\mathcal{P}$ a une racine triple (supposons que ceci est $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0$) on peut écrire à la place de ces trois égalités $x_1^0 = x_1^1 = x_1^2$ pour décrire le même fait, notamment, que $\mathcal{P}$ a une racine triple. (Dans le cas de racine triple il y a en réalité cinq égalités dont nous choisissons deux : $x_1^0 = x_1^1 = x_2^0 = x_2^1 = x_1^2 = x_3^0$). Si on écrit $x_1^0 = x_1^1 = x_1^2$, la deuxième et seulement la deuxième de ces égalités peut être détruite par le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x_1^2)^2$. On ne peut pas détruire la première sans détruire la deuxième ou sans que $\mathcal{P}$ cesse d'être hyperbolique. Pour éviter ce type de problème en cas de racines multiples nous considérons des égalités seulement entre racines du polynôme (c'est-à-dire, $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0$ et pas $x_1^0 = x_1^1 = x_1^2$).

5.4 Le cas $n = 5$

Dans ce paragraphe nous répondons à la question quand pour $n = 5$ trois égalités entre racines peuvent être algébriquement dépendantes. La réponse est donnée à l'aide d'un programme en MAPLE, voir le paragraphe 5.6. Pour un triplet de résultants ou/et de sous-résultants donné $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ le programme calcule la base de Gröbner de l'idéal engendré par Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Si cette base contient trois éléments dont les monômes de tête sont de la forme a^k,b^l,c^m, $k, l, m \in \mathbf{N}^*$, alors, la variété algébrique définie par le système d'égalités $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ est de dimension 0 dans $Oabc$, c.-à-d. consiste en un nombre fini de points. Donc, les trois égalités sont algébriquement indépendantes et elles ne définissent pas une strate surdéterminée non-triviale.

Il y a seulement trois cas dans lesquels on ne trouve pas un tel triplet a^k,b^l, c^m de monôme de tête :

1) $(\delta(2),\ \delta1(2),\ \lambda(2))$ $(\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 1, \delta = 3, p = 2, q = 4)$
2) $(\sigma(1),\ \sigma1(1),\ \sigma(2))$ $(\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 1, p = 1, q = 2)$
3) $(\sigma(1),\ \sigma(3),\ \delta(2))$ $(\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 3, p = 1, q = 3)$

Ce sont les cas [24], [26], [40] de l'algorithme, voir le paragraphe 5.6.

En cas 1) le seul PH est de la forme $x(x^2 - 1/2)^2$. Il définit une strate surdéterminée non-triviale, la strate F, voir le paragraphe 3.2.

Le cas 2) n'est possible que si le PH a un VM de la forme (3,2) ou (2,3), ou s'il est impair et de la forme $x(x^2 - 1/2)^2$ (qui définit la strate F).

En effet, la condition qu'il a deux racines multiples permet de le présenter (après un changement affine de la variable x) sous la forme $(x^2 - 1/2)^2(x + b)$. La condition qu'une de ses racines est racine de sa deuxième dérivée implique que $b = 0$ ou $b = -1$. Si son VM est (3,2) ou (2,3), il définit une strate surdéterminée triviale. En effet, il suffit de considérer le polynôme $H := x^3(x - 1)^2 = x^5 - 2x^4 + x^3$ et d'observer qu'il n'y a aucune égalité entre ses racines et celles de $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, $H^{(4)}$ hormis la présence des racines multiples 0 et 1.

En cas 3), si $x^0_{i_1} \neq x^0_{i_3}$, le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon[(x - x^1_{i_5})^2 - (x^0_{i_3} - x^1_{i_5})^2]$ détruit seulement l'égalité $x^0_{i_1} = x^1_{i_2}$ et préserve les égalités $x^0_{i_3} = x^3_{i_4}$ et $x^1_{i_5} = x^3_{i_6}$.

Si $x^0_{i_1} = x^0_{i_3}$, le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon[(x - x^0_{i_1})^2]$ détruit seulement l'égalité $x^1_{i_5} = x^3_{i_6}$ en préservant les deux autres.

5.5 Le cas de trois égalités

Proposition 5.1 *1) Pour $n = 6$ les polynômes hyperboliques dont les VM sont* $(6), (5, 1)$, $(1, 5), (4, 2)$ *et* $(2, 4)$ *définissent des strates surdéterminées triviales.*
2) Dans tous les autres cas de quatre égalités entre racines (ou plus) sauf celui du VM (3,3) on peut choisir parmi ces égalités trois qui correspondent à un des cas décrits dans un des lemmes 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 ci-bas.
3) Le VM (3,3) correspond à la strate paire E, voir la figure 3.1 de chapitre 3.

La preuve de cette proposition se trouve à la fin de ce paragraphe. Elle utilise les lemmes 5.8, 5.9, 5.10, 5.11. Un de ces lemmes (lemme 5.9) repose sur un algorithme appliqué en MAPLE et décrit dans le paragraphe 5.7.

Notation 5.1 Nous supposons qu'il y a trois égalités entre racines : $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\beta}$, $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\delta}$, $x_{i_5}^{p} = x_{i_6}^{q}$. Nous désignons les racines confondues $x_{i_1}^{\alpha}$, $x_{i_2}^{\beta}$ (resp. $x_{i_3}^{\gamma}$, $x_{i_4}^{\delta}$, resp. $x_{i_5}^{p}$, $x_{i_6}^{q}$) aussi par ζ (resp. par η, resp. par θ). On présume que $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, $p < q$.

Lemme 5.8 *Considérons le cas de polynômes de degré 6. Supposons qu'il y a trois égalités entre les racines des polynômes $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \mathcal{P}^{(3)}, \mathcal{P}^{(4)}, \mathcal{P}^{(5)}$. Alors, dans les cas suivants ces trois égalités sont algébriquement indépendantes et définissent localement une variété algébrique réelle de codimension 3 (c.-à-d. de dimension 1) dans l'espace Oabcd :*
a) $\alpha = \gamma = p$, *les racines* ζ, η *et* θ *sont simples.*
b) $\alpha < \gamma \leq p$ *les racines* ζ, η *et* θ *sont simples.*
c) Le polynôme $\mathcal{P}$ *a exactement trois racines distinctes (dont les multiplicités à permutation près valent (2,2,2), (3,2,1) ou (4,1,1)).*
d) $0 = \alpha < \gamma \leq p$, ζ *est racine double de* $\mathcal{P}$ *(c.-à-d.* $\beta = 1$*).*
e) $0 = \alpha = \gamma = p$, ζ *et* η *sont racines doubles de* $\mathcal{P}$*.*
f) $0 = \alpha = \gamma = p$, $\zeta = \eta$ *est racine triple de* $\mathcal{P}$, θ *peut être confondue ou pas avec* ζ*.*
g) $0 = \alpha = \gamma = p$, ζ *est racine double de* $\mathcal{P}$, η *et* θ *sont racines simples.*
h) $0 = \alpha = \gamma, p \geq 2$, *la racine* θ *est simple, et soit chacune des racines* ζ *et* η *est simple ou double, soit* $\zeta = \eta$ *est une racine triple.*

Preuve :

a) Il résulte du lemme 5.2 du paragraphe 5.1 que les trois égalités définissent localement trois hypersurfaces dans $Oabcd$ dont l'intersection (dans leur ensemble, pas seulement deux à deux) est transversale. Ce qui implique le lemme.

b) Supposons que $\alpha = 0$ (pour $\alpha > 0$ la preuve est analogue). La racine $x_{i_1}^{\alpha}$ dépend de d et on a $\dfrac{\partial x_{i_1}^{\alpha}}{\partial d} \neq 0$, tandis que les racines $x_{i_2}^{\beta}, x_{i_3}^{\gamma}, x_{i_4}^{\delta}, x_{i_5}^{p}$ et $x_{i_6}^{q}$ n'en dépendent pas. Donc, la condition $x_{i_1}^{\alpha} = x_{i_2}^{\beta}$ définit le paramètre d comme une fonction lisse sur la variété définie dans $Oabcd$ par les conditions $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\delta}$ et $x_{i_5}^{p} = x_{i_6}^{q}$. (On applique le théorème de la fonction implicite.) D'où le lemme.

c) Le polynôme $\mathcal{P}$ est de degré 6. Localement on peut choisir ses racines comme des paramètres. La condition que $\mathcal{P}$ soit de la forme $x^6 - x^4 + \cdots$ implique que les trois racines sont des fonctions lisses d'un paramètre. (On fait le changement $x \longmapsto x - a/6$ pour avoir un polynôme de la forme $x^6 + a_2x^4 + \cdots$, $a_2 < 0$, puis le changement $x \longmapsto \sqrt{\mid a_2 \mid}x$ suivi d'une division du polynôme par $\mid a_2 \mid^3$.) Ce qui implique le lemme.

d) La condition $\mathcal{P}(x_{i_2}^{\beta}) = 0$ permet d'exprimer le paramètre d comme fonction lisse des paramètres a, b, c car $x_{i_2}^{\beta}$ en est une autre fonction lisse. D'autre part, les égalités $x_{i_3}^{\gamma} = x_{i_4}^{\delta}$

et $x^p_{i_5} = x^q_{i_6}$ définissent une variété algébrique réelle lisse dans $Oabc$. Donc, $x^\beta_{i_2}$ est une fonction lisse sur cette variété. D'où le lemme.

e) On applique le lemme 5.1. Le polynôme $\mathcal{P}$ a des racines doubles $x^0_{i_1}$ et $x^0_{i_3}$ qui jouent les rôles de y_{j_1}, y_{j_2} du lemme, les deux racines simples jouent les rôles de y_{j_3}, y_{j_4} où (j_1, j_2, j_3, j_4) est une permutation des indices $(1, 2, 3, 4)$. Considérons l'égalité $x^0_{i_5} = x^q_{i_6}$. Rappelons que la racine $x^q_{i_6}$ est une fonction lisse de y_1, y_2, y_3, y_4. D'après le lemme 5.1, on a $\dfrac{\partial(x^q_{i_6})}{\partial(x^0_{i_5})} < 1$. Donc, on peut appliquer le théorème de la fonction implicite et conclure qu'on peut exprimer la racine $x^0_{i_5}$ de l'égalité $x^0_{i_5} = x^q_{i_6}$ comme fonction lisse des trois autres racines distinctes du polynôme. Ainsi les coefficients du polynôme appartiennent à une variété algébrique réelle lisse de dimension 3. En imposant la condition que le polynôme soit de la forme $x^6 - x^4 + \cdots$ on obtient un polynôme dont les coefficients appartiennent à une variété algébrique réelle lisse de dimension 1 (voir la preuve du cas c)).

f) On applique le lemme 5.1 où les multiplicités des racines y_1, y_2, y_3, y_4 (à permutation près) valent $(3, 1, 1, 1)$. Le raisonnement est analogue à celui de la preuve du cas e) – l'égalité $x^0_{i_5} = x^q_{i_6}$ et le théorème de la fonction implicite permettent d'exprimer $x^0_{i_5}$ comme fonction lisse des trois autres racines distinctes de $\mathcal{P}$ etc.

g) Considérons le système de deux équations $x^0_{i_3} = x^\nu_{i_4}$, $x^0_{i_5} = x^q_{i_6}$ (A) où $x^\nu_{i_4}$, $x^q_{i_6}$ sont des fonctions lisses des racines distinctes de $\mathcal{P}$. Le lemme 5.1 permet de conclure que la matrice jacobienne de système (A) (c.-à-d. la matrice $\begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial(x^\nu_{i_4})}{\partial(x^0_{i_3})} & -\frac{\partial(x^\nu_{i_4})}{\partial(x^0_{i_5})} \\ -\frac{\partial(x^q_{i_6})}{\partial(x^0_{i_3})} & 1 - \frac{\partial(x^q_{i_6})}{\partial(x^0_{i_5})} \end{pmatrix}$) a une domination diagonale. Donc, on peut exprimer $x^\nu_{i_4}$, $x^q_{i_6}$ comme fonctions lisses des autres trois racines distinctes de $\mathcal{P}$. En imposant la condition que $\mathcal{P}$ soit de la forme $x^6 - x^4 + \cdots$ on obtient que les coefficients de $\mathcal{P}$ appartiennent à une variété algébrique réelle lisse de dimension 1 (voir la preuve du cas c)).

h) Les deux conditions $x^0_{i_3} = x^\delta_{i_4}$ et $x^0_{i_5} = x^q_{i_6}$ définissent une variété algébrique réelle lisse W de dimension 2 dans l'espace $Oabcd$, voir le lemme 5.7. En ajoutant la condition $x^0_{i_1} = x^\beta_{i_2}$, on définit une sous-variété $W_1 \subset W$ de codimension 1.

En effet, si les racines ζ et η sont simples, le changement de variable $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x^0_{i_3})$, $\varepsilon \in (\mathbf{R}, 0)$, $\varepsilon \neq 0$, détruit l'égalité $x^0_{i_1} = x^\beta_{i_2}$ et ne détruit pas les égalités $x^0_{i_3} = x^\delta_{i_4}$ et $x^p_{i_5} = x^q_{i_6}$. Le même raisonnement est valable en cas où ζ est racine double et η racine simple. Les cas ζ-simple, η-double est complètement analogue.

Si ζ et η sont des racines doubles ou si $\zeta = \eta$ est une racine triple, la strate du domaine d'hyperbolicité définie par le VM avec deux racines doubles ou avec une racine triple admet des équations de la forme $d = d(a, b)$, $c = (a, b)$, voir le théorème 1.8 de [12]. La condition $x^p_{i_5} = x^q_{i_6}$ définit une sous-variété lisse de Oab de codimension 1, voir le lemme 5.6. Ainsi les fonctions $(a, b), d(a, b)$ sont définies sur cette variété et les trois égalités entre les racines de $\mathcal{P}, \ldots, \mathcal{P}^{(5)}$ définissent une variété algébrique réelle de dimension 1 dans $Oabcd$. $\square$

Considérons les polynômes de degré 6 strictement hyperboliques.

Lemme 5.9 *1) Les égalités* $x_{i_1}^0 = x_{i_2}^\beta$*,* $x_{i_3}^0 = x_{i_4}^\delta$*,* $x_{i_5}^1 = x_{i_6}^q$ *avec* $\beta \geq 2$*,* $\delta \geq 2$ *sont algébriquement indépendantes et définissent une variété algébrique réelle dans Oabcd de dimension* ≤ 1 *sauf peut-être dans le cas* $\beta = 3$*,* $\delta = 5$*,* $q = 3$*.*
2) Dans le cas $\beta = 1$ *(ou* $\delta = 1$ *qui lui est analogue) ces trois égalités sont algébriquement independantes et définissent une variété algébrique réelle dans Oabcd de dimension* ≤ 1 *sauf peut-être dans les cas i), ii), iii) du lemme 5.11.*

Remarque 5.5 L'énoncé de partie 2) du lemme est vrai aussi dans le cas où le polynôme a une racine triple.

Preuve du lemme 5.9 :

Il y a 23 cas possibles de triplets d'égalités comme dans la partie 1) du lemme. Dans chacun des cas considérons la base de Gröbner de l'idéal engendré par les polynômes $\Delta_1(P^{(0)}, P^{(\beta)})$, $\Delta_1(P^{(0)}, P^{(\delta)})$, $\Delta_1(P^{(1)}, P^{(q)})$ ou $\Delta_1(P^{(0)}, P^{(\beta)})$, $\Delta_2(P^{(0)}, P^{(\beta)})$, $\Delta_1(P^{(1)}, P^{(q)})$ si non. Dans tous les cas sauf pour $\beta = 3$, $\Delta = 5$, $q = 3$ la base de Gröbner contient des éléments avec des monômes de tête sur trois des quatre axes a, b, c, d. Ceci signifie que la variété définie par ces trois polynômes dans $Oabcd$ est de dimension ≤ 1.

Le programme qui calcule la base de Gröbner et les monômes de tête est décrit dans le paragraphe 5.6. Dans le programme on considére en même temps le cas $\beta \geq 2$, $\delta \geq 2$ et le cas $\beta = 1$ ou $\delta = 1$ (les deux cas correspondent aux deux parties du lemme). Dans le deuxième cas il y a 14 cas possibles de triplets d'égalités comme dans la partie 2) du lemme. Le programme affiche les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner. Les cas où parmi ces monômes il n'y a pas un triplet de monômes de la forme (a^k, b^l, c^m), (a^k, b^l, d^m), (a^k, c^l, d^m) , (b^k, c^l, d^m), $k, l, m \in \mathbf{N}^*$, sont considérés dans les lemmes 5.10 et 5.11. Ce sont les cas 20, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34 , 37 du programme du pararaphe 5.6. □

Lemme 5.10 *Les égalités* $x_{i_1}^0 = x_{i_2}^3$*,* $x_{i_3}^0 = x_{i_4}^5$*,* $x_{i_5}^1 = x_{i_6}^3$ *(c'est le cas 20 du programme du paragraphe 5.7) sont algébriquement independantes. Elles définissent une variété algébrique réelle dans Oabcd de dimension 1.*

Preuve :

Les égalités $x_{i_3}^0 = x_{i_4}^5$ et $x_{i_5}^1 = x_{i_6}^3$ définissent dans $Oabcd$ une variété algébrique réelle lisse U de dimension 2, voir le lemme 5.7. Montrons qu'en ajoutant l'égalité $x_{i_1}^0 = x_{i_2}^3$ on obtient une sous-variété lisse $U_1 \subset U$ de codimension 1.

En effet, faisons le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon[(x - x_{i_5}^1)^2 - (x_{i_3}^0 - x_{i_5}^1)^2]$. Ce changement détruit seulement l'égalité $x_{i_1}^0 = x_{i_2}^3$ car il ne change pas les racines $x_{i_2}^3$, $x_{i_3}^0$, $x_{i_4}^5$, $x_{i_5}^1$ et $x_{i_6}^3$. □

Lemme 5.11 *Dans chacun des cas avec $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = p = 1$*

i) $\delta = 2$, $q = 5$

ii) $(\delta, q) = (3,3)$ *ou* $(3,5)$ *ou* $(4,3)$ *ou* $(4,5)$ *ou* $(5,3)$ *ou* $(5,4)$

iii) $\delta = 1$, $q = 5$

les trois égalités sont algébriquement indépendantes.

Remarque 5.6 Le lemme concerne les cas 26 (partie *i*)), 27, 29, 31, 32, 33, 34 (partie *ii*) et 37 (partie *iii*) du programme du paragraphe 5.6.

Preuve du lemme 5.11 :

i) Si $x^0_{i_1} \neq x^1_{i_5}$, effectuons le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon Q$ où Q est un polynôme de degré 4 ayant une racine double en $x^1_{i_5}$ et une racine simple en $x^0_{i_3}$ et tel que $Q^{(2)}(x^0_{i_3}) = 0$. Le changement détruit seulement l'égalité $x^0_{i_1} = x^1_{i_2}$ et ne détruit pas $x^0_{i_3} = x^2_{i_4}$ et $x^1_{i_5} = x^5_{i_6}$. Un tel polynôme Q existe – par exemple, pour le polynôme $Q := x^2(x-1)(x-2/3)$ on a $Q^{(2)}(2/3) = 0$.

Si $x^0_{i_1} = x^1_{i_5}$, le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon[(x - x^0_{i_1})^2(x - x^0_{i_3})]$ détruit l'égalité $x^0_{i_3} = x^2_{i_4}$ en préservant les égalités $x^0_{i_1} = x^1_{i_2}$ et $x^1_{i_5} = x^5_{i_6}$.

ii) Si $x^0_{i_1} \neq x^1_{i_5}$, le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon[(x - x^1_{i_5})^2 - (x^0_{i_3} - x^1_{i_5})^2]$ détruit l'égalité $x^0_{i_1} = x^1_{i_2}$ en préservant $x^0_{i_3} = x^\delta_{i_4}$ et $x^1_{i_5} = x^q_{i_6}$.

Si $x^0_{i_1} = x^1_{i_5}$, le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon(x - x^0_{i_1})^2$ détruit seulement l'égalité $x^1_{i_5} = x^q_{i_6}$ et préserve les deux autres.

iii) Si $x^0_{i_1} \neq x^1_{i_5}$ et $x^0_{i_3} \neq x^1_{i_5}$, le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon[(x - x^0_{i_3})^2(x - b)]$ détruit seulement l'égalité $x^0_{i_1} = x^1_{i_2}$ si on choisit b de sorte que le polynôme $(x - x^0_{i_3})^2(x - b)$ ait un point critique pour $x = x^1_{i_5}$. Il faut donc poser $b = (3x^1_{i_5} - x^0_{i_5}/2)$.

Si $x^0_{i_1} = x^1_{i_5}$ (le cas $x^0_{i_3} = x^1_{i_5}$ est complètement analogue) le changement $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P} + \varepsilon[(x - x^0_{i_3})^2(x - x^0_{i_1})]$ détruit seulement l'égalité $x^0_{i_1} = x^1_{i_2}$. $\square$

Preuve de la proposition 5.1 :

1) Les polynômes correspondant aux VM de la partie 1) de la proposition n'ont pas d'autres égalités entre racines que celles qui découlent de la présence de racines multiples, donc, ils définissent des strates surdéterminées triviales.

Pour s'en apercevoir il suffit de considérer les polynômes $x^5(x-1)$ et $x^4(x-1)^2$ et de calculer leurs racines et celles de leurs dérivées.

2) Si le VM est à permutation près égal à $(2,2,2)$, $(3,2,1)$ ou $(4,1,1)$, la proposition résulte de la partie *c*) du lemme 5.8.

S'il est (à permutation près) de la forme $(3,1,1,1)$, la proposition résulte de la parties *f*) et *h*) du lemme 5.8 et des partie 2) du lemme 5.9, voir aussi la remarque 5.5.

S'il est (à permutation près) de la forme $(2,2,1,1)$, la proposition résulte de la parties *e*) et *h*) du lemme 5.8 et des partie *iii*) du lemme 5.11.

S'il est (à permutation près) de la forme $(2,1,1,1,1)$, la proposition découle des parties *d*) et *g*) du lemme 5.8 et du lemme 5.11.

S'il est (1,1,1,1,1,1), la proposition est un corollaire de la parties a), b) et h) du lemme 5.8, de la partie 1) du lemme 5.9 et du lemme 5.10. □

5.6 L'algorithme pour $n = 5$, en cas de trois égalités entre racines

Dans la partie A on définit des matrices de Sylvester. On utilise la notation introduite dans le paragraphe 4.2. Dans la partie B on donne la liste de tous les cas possibles de trois égalités entre racines et on trouve pour chaque cas la base de Gröbner de l'idéal engendré par les trois (sous)-résultants.

Dans la partie C on calcule les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner. On utilise la commande **LeadingMonomial** et on extrait tous les monômes de la forme a^k, b^l ou c^m, $k, l, m \in \mathbf{N}^*$. On affiche tous les cas sauf ceux où il manque parmi les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner au moins un monôme de la forme a^k, b^l, c^m.

Partie A

```
>f[0]:=x^5-x^3+a*x^2+b*x+c:
>for i from 1 to 5 do f[i]:=diff(f[i-1],x)end do:
>with(linalg):
for i from 1 to 4 do Sigma[i]:=sylvester(f[0],f[i],x)end do:
>for i from 2 to 3 do Delta[i]:=sylvester(f[1],f[i+1],x) end
    do:
> Lambda[2]:=sylvester(f[2],f[4],x):
> Sigma1[1]:=submatrix(Sigma[1],[1,2,3,5,6,7,8],1..7):
> Sigma2[1]:=submatrix(Sigma1[1],[1,2,4,5,6],1..5):
> Sigma3[1]:=submatrix(Sigma2[1],[1,3,4],1..3):
> Sigma1[2]:=submatrix(Sigma[2],[1,2,4,5,6,7],1..6):
> Sigma2[2]:=submatrix(Sigma1[2],[1,3,4,5],1..4):
> Sigma1[3]:=submatrix(Sigma[3],[1,3,4,5,6],1..5):
> Delta1[2]:=submatrix(Delta[2],[1,3,4,5],1..4):
> for k from 1 to 4 do sigma[k]:=det(Sigma[k]):od:
> for k from 2 to 3 do delta[k]:=det(Delta[k]):od:
> lambda[2]:=det(Lambda[2]):
> sigma1[1]:=det(Sigma1[1]):
> sigma2[1]:=det(Sigma2[1]):
> sigma3[1]:=det(Sigma3[1]):
> sigma1[2]:=det(Sigma1[2]):
> sigma2[2]:=det(Sigma2[2]):
> sigma1[3]:=det(Sigma1[3]):
> delta1[2]:=det(Delta1[2]):
```

Partie B

```
> with(Groebner):
> A[1]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2]]:
> A[2]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3]]:
> A[3]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4]]:
> A[4]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2]]:
> A[5]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[3]]:
> A[6]:=[sigma[2],sigma1[2],lambda[2]]:
> A[7]:=[sigma[2],sigma[3],sigma1[3]]:
> A[8]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4]]:
> A[9]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2]]:
> A[10]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3]]:
> A[11]:=[sigma[2],sigma[3],lambda[2]]:
> A[12]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2]]:
> A[13]:=[sigma1[2],sigma[4],lambda[2]]:
> A[14]:=[sigma[2],delta[2],delta[3]]:
> A[15]:=[sigma[2],delta[2],delta1[2]]:
> A[16]:=[sigma[2],delta[2],lambda[2]]:
> A[17]:=[sigma[2],delta[3],lambda[2]]:
> A[18]:=[sigma[3],sigma[4],delta[2]]:
> A[19]:=[sigma[3],sigma[4],lambda[2]]:
> A[20]:=[sigma[3],delta[2],delta[3]]:
> A[21]:=[sigma[3],delta[2],lambda[2]]:
> A[22]:=[sigma[4],delta[2],lambda[2]]:
> A[23]:=[sigma[4],delta[2],delta1[2]]:
> A[24]:=[delta[2],delta1[2],lambda[2]]:
> A[25]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1]]:
> A[26]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2]]:
> A[27]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3]]:
> A[28]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4]]:
> A[29]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[2]]:
> A[30]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[3]]:
> A[31]:=[sigma[1],sigma1[1],lambda[2]]:
> A[32]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2]]:
> A[33]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3]]:
> A[34]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4]]:
> A[35]:=[sigma[1],sigma[2],delta[2]]:
> A[36]:=[sigma[1],sigma[2],delta[3]]:
> A[37]:=[sigma[1],sigma[2],lambda[2]]:
> A[38]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3]]:
> A[39]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4]]:
```

```
> A[40]:=[sigma[1],sigma[3],delta[2]]:
> A[41]:=[sigma[1],sigma[3],delta[3]]:
> A[42]:=[sigma[1],sigma[3],lambda[2]]:
> A[43]:=[sigma[1],sigma[4],delta[2]]:
> A[44]:=[sigma[1],sigma[4],lambda[2]]:
> A[45]:=[sigma[1],delta[2],delta1[2]]:
> A[46]:=[sigma[1],delta[2],delta[3]]:
> A[47]:=[sigma[1],delta[2],lambda[2]]:
for i from 1 to 47 do B[i]:=Basis(A[i],tdeg(a,b,c)):end do:
```

Partie C

```
> mon\^{o}me:=proc(B)
> L:=[]:for i from 1 to nops(B) do L:=[op(L),LeadingMonomial (B[i],tdeg(a,b,c))] od; return L;
> end proc;
> for i from 1 to 47 do mon\^{o}me(B[i]); od:
> pure:=proc(C)
> if (divide (C,a)=true) and (divide (C,b)=false) and ( divide (C,c)=false) then return C else
> if (divide (C,a)=false) and (divide (C,b)=true) and ( divide (C,c)=false) then return C else
> if (divide (C,a)=false) and(divide (C,b)=false) and(divide (C,c)=true) then return C else
> if (divide (C,a)=false) and(divide (C,b)=false) and(divide (C,c)=false) then return C else fi fi fi fi
> end proc:
> affiche:=proc(B)
> L:=[]:for i from 1 to nops(B) do L:=[op(L),pure (B[i])] od ;
> end proc;
> i:=1: while (i<48) do if (nops(affiche(mon\^{o}me(B[i]))) =2) then l[i]:=affiche(mon\^{o}me(B[i])); i:=i+1; else i :=i+1 fi; od;
> i:=1: while (i<48) do if (nops(affiche(mon\^{o}me(B[i]))) =1) then l[i]:=affiche(mon\^{o}me(B[i])); i:=i+1; else i :=i+1 fi; od;
> for i from 1 to 48 do if(type(l[i],list)=true) then print ([i,l[i]]) fi od;
  [24, [a^{2}, b ]]
  [26, [a^{4}, b^{5}]]
  [40, [b^{2} , a^{2} ]]
```

5.7 L'algorithme pour $n = 6$, en cas de trois égalités entre racines

Dans la partie A on définit des matrices de Sylvester. On utilise la notation introduite dans le paragraphe 4.2. Dans la partie B on donne la liste de tous les cas possibles de trois égalités entre racines et on trouve pour chaque cas la base de Gröbner de l'idéal engendré par les trois (sous)-résultants.

Dans la partie C on calcule les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner. On utilise la commande **LeadingMonomial** et on extrait tous les monômes de la forme a^k, b^l, c^m ou d^q, $k, l, m, q \in \mathbf{N}^*$. On affiche tous les cas sauf ceux où il manque parmi les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner au moins deux monômes de la forme a^k, b^l, c^m, d^q .

Partie A

```
with(linalg):
with(Groebner):
> f[0]:=x^6-x^4+a*x^3+b*x^2+c*x+d:
> for i from 1 to 5 do f[i]:=diff(f[i-1],x) end do:
> with(linalg):
> for i from 1 to 5 do Sigma[i]:=sylvester(f[0],f[i],x) end
   do:
> for i from 2 to 4 do Delta[i]:=sylvester(f[1],f[i+1],x)
   end do:
> for i from 2 to 3 do Lambda[i]:=sylvester(f[2],f[i+2],x)
   end do:
> Kappa[2]:=sylvester(f[3],f[5],x):
> Sigma1[1]:=submatrix(Sigma[1],[1,2,3,4,6,7,8,9,10],1..9):
> Sigma2[1]:=submatrix(Sigma1[1],[1,2,3,5,6,7,8],1..7):
> Sigma1[2]:=submatrix(Sigma[2],[1,2,3,5,6,7,8,9],1..8):
> Sigma2[2]:=submatrix(Sigma1[2],[1,2,4,5,6,7],1..6):
> Sigma3[2]:=submatrix(Sigma2[2],[1,3,4,5],1..4):
> Sigma1[3]:=submatrix(Sigma[3],[1,2,4,5,6,7,8],1..7):
> Sigma2[3]:=submatrix(Sigma1[3],[1,3,4,5,6],1..5):
> Sigma1[4]:=submatrix(Sigma[4],[1,3,4,5,6,7],1..6):
> Delta1[2]:=submatrix(Delta[2],[1,2,4,5,6,7],1..6):
> Delta2[2]:=submatrix(Delta1[2],[1,3,4,5],1..4):
> Delta1[3]:=submatrix(Delta[3],[1,3,4,5,6],1..5):
> Lambda1[2]:=submatrix(Lambda[2],[1,3,4,5],1..4):
> for k from 1 to 5 do sigma[k]:=det(Sigma[k]):od:
> for k from 2 to 4 do delta[k]:=det(Delta[k]):od:
> for k from 2 to 3 do lambda[k]:=det(Lambda[k]):od:
```

```
> kappa[2]:=det(Kappa[2]):sigma1[1]:=det(Sigma1[1]):sigma2
  [1]:=det(Sigma2[1]):
> sigma1[2]:=det(Sigma1[2]):sigma2[2]:=det(Sigma2[2]):sigma3
  [2]:=det(Sigma3[2]):
> sigma1[3]:=det(Sigma1[3]):sigma2[3]:=det(Sigma2[3]):
> sigma1[4]:=det(Sigma1[4]):
> delta1[2]:=det(Delta1[2]):delta2[2]:=det(Delta2[2]):delta1
  [3]:=det(Delta1[3]):lambda1[2]:=det(Lambda1[2]):
>
```

Partie B

```
> A[1]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2]]:
> A[2]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[3]]:
> A[3]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[4]]:
> A[4]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[2]]:
> A[5]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[3]]:
> A[6]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[4]]:
> A[7]:=[sigma[4],sigma1[4],delta[2]]:
> A[8]:=[sigma[4],sigma1[4],delta[4]]:
> A[9]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2]]:
> A[10]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3]]:
> A[11]:=[sigma[2],sigma[3],delta[4]]:
> A[12]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2]]:
> A[13]:=[sigma[2],sigma[4],delta[3]]:
> A[14]:=[sigma[2],sigma[4],delta[4]]:
> A[15]:=[sigma[3],sigma[4],delta[2]]:
> A[16]:=[sigma[3],sigma[4],delta[3]]:
> A[17]:=[sigma[3],sigma[4],delta[4]]:
> A[18]:=[sigma[2],sigma[5],delta[2]]:
> A[19]:=[sigma[2],sigma[5],delta[3]]:
> A[20]:=[sigma[3],sigma[5],delta[2]]:
> A[21]:=[sigma[3],sigma[5],delta[3]]:
> A[22]:=[sigma[4],sigma[5],delta[2]]:
> A[23]:=[sigma[4],sigma[5],delta[3]]:
> A[24]:=[sigma[1],sigma[2],delta[2]]:
> A[25]:=[sigma[1],sigma[2],delta[3]]:
> A[26]:=[sigma[1],sigma[2],delta[4]]:
> A[27]:=[sigma[1],sigma[3],delta[2]]:
> A[28]:=[sigma[1],sigma[3],delta[3]]:
> A[29]:=[sigma[1],sigma[3],delta[4]]:
> A[30]:=[sigma[1],sigma[4],delta[2]]:
> A[31]:=[sigma[1],sigma[4],delta[3]]:
```

```
> A[32]:=[sigma[1],sigma[4],delta[4]]:
> A[33]:=[sigma[1],sigma[5],delta[2]]:
> A[34]:=[sigma[1],sigma[5],delta[3]]:
> A[35]:=[sigma[1],sigma[5],delta[4]]:
> A[36]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[2]]:
> A[37]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[3]]:
> A[38]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[4]]:
for i from 1 to 38 doB[i]:=Basis(A[i],tdeg(a,b,c,d)):end do:
```

Partie C

```
boucle:=proc(B)L:=[]:for i from 1 to nops(B) do L:=[op(L),
   LeadingMonomial(B[i],tdeg(a,b,c,d))] od:
> return L:
> end proc:
> pure:=proc(C)
> if (divide (C,a)=true) and (divide (C,b)=false) and (
   divide (C,c)=false) and (divide (C,d)=false) then return
    C else
> if (divide (C,a)=false) and (divide (C,b)=true) and (
   divide (C,c)=false) and (divide (C,d)=false) then return
    C else
> if (divide (C,a)=false) and(divide (C,b)=false) and(divide
    (C,c)=true) and (divide (C,d)=false) then return C else
> if (divide (C,a)=false) and(divide (C,b)=false) and(divide
    (C,c)=false) and(divide (C,d)=true) then return C else
   fi fi fi fi
> end proc:
> affiche:=proc(B)
> L:=[]:for i from 1 to nops(B) do L:=[op(L),pure (B[i])]od:
> end proc:
> i:=1: while (i<39) do if (nops(affiche(monome(B[i])))=2)
   then l[i]:=affiche(monome(B[i])); i:=i+1; else i:=i+1 fi
   ; od;
> i:=1: while (i<39) do if (nops(affiche(monome(B[i])))=1)
   then l[i]:=affiche(monome(B[i])); i:=i+1; else i:=i+1 fi
   ; od;
> for i from 1 to 38 do if(type(l[i],list)=true) then print
   ([i,l[i]]) fi od;
[20, [d, a^{5}]], [26, [c]], [27, [a^{5}]],[29, [c, a^{6}]]
[31, [b^{2} , a^{2}]], [32, [c, a^{2}]], [33, [d, a^{5}]]
[34, [d, a^{2}]],[35, [d, c]],[38, [c]]
```

5.8 L'algorithme pour $n = 6$, en cas de quatre égalités entre racines

Nous considérons l'idéal engendré par quatre polynômes des variables a, b, c, d qui sont des résultants et/ou des sous-résultants. Si la base de Gröbner de cet idéal contient quatre éléments dont les monômes de tête sont de la forme a^k, b^l, c^m, d^q, $k, l, m, q \in \mathbf{N}^*$, alors, la variété définie comme lieu des zéros communs des quatre polynômes est de dimension 0, c.-à-d. consiste en un nombre fini de points. Par conséquent, les quatre polynômes (qui correspondent à quatre égalités entre racines) ne définissent pas une strate surdéterminée.

Le programme qui donne les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner se trouve dans le sous-paragraphe 5.8.1.

Il convient donc de considérer (dans la recherche de strates surdéterminées) seulement les cas dans lesquels un tel quadruplet de monômes de tête n'éxiste pas. L'ensemble de ces cas est la réunion de trois listes disjointes de cas, liste A, liste B et liste C.

Il faut d'abord exclure les cas où il s'agit d'une strate paire (c.-à-d. avec $a = c = 0$) ou d'une strate ancienne. Ces strates ont déjà été considérées dans le chapitre 3. On appelle leur liste "liste C".

Remarque 5.7 Le fait d'opérer avec des (sous)-résultants et pas avec les égalités entre racines apporte l'inconvénient suivant – la variété algébrique réelle définie par quatre (sous)-résultants peut consister en des composantes de dimension différente.

Exemple 5.1 Pour $n = 6$ les conditions

$$\Delta_1(P, P^{(2)}) = 0 \ \ , \ \ \Delta_2(P, P^{(2)}) = 0 \ \ , \ \ \Delta_1(P, P^{(3)}) = 0 \ \ , \ \ \Delta_1(P^{(1)}, P^{(3)}) = 0$$

définissent une variété $\mathcal{V}_0$ qui contient tous les polynômes ayant une racine quadruple. Cette variété est de dimension 1 dans $Oabcd$. En même temps, on s'attend à la présence de polynômes strictement hyperboliques pour lesquels les quatre conditions définissent des points isolés dans $Oabcd$. C'est à cause de la variété $\mathcal{V}_0$ que dans le cas 14 (voir l'algorithme 5.8) on ne trouve pas quatre mais seulement trois monômes de tête de la forme a^5, b^6, c^7 chez les éléments de la base de Gröbner de l'idéal
$J(\Delta_1(P, P^{(2)}),\ \Delta_2(P, P^{(2)})\ \Delta_1(P, P^{(3)})\ \Delta_1(P^{(1)}, P^{(3)}))$.

Définissons la liste B. Il y a des cas dans lesquels deux ou trois des racines suivantes participent à deux ou trois égalités entre racines : 0 (la seule racine de $\mathcal{P}^{(5)}$) et $\pm 1/\sqrt{15}$ (les racines de $\mathcal{P}^{(3)}$). Le fait que ces nombres connus sont racines aussi de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^{(1)}$, $\mathcal{P}^{(2)}$ ou $\mathcal{P}^{(3)}$ permet d'obtenir deux ou trois conditions affines sur les nombres a, b, c, d.

Exemple 5.2 Si $1/\sqrt{15}$ est racine de $\mathcal{P}$, ceci done la condition affine

$$1/15^3 - 1/15^2 + a/15^{3/2} + b/15 + c/15^{1/2} + d = 0.$$

A ces cas il s'ajoute ceux où 0 est racine de $\mathcal{P}^{(3)}$ (par conséquent, les autres racines de $\mathcal{P}^{(3)}$ sont $\pm 1/\sqrt{5}$,) et une des deux autres racines de $\mathcal{P}^{(3)}$ participe à une autre égalité entre racines. Ce qui donne une autre condition affine. Les deux ou trois conditions affines permettent de réduire le nombre de variables de deux ou de trois et de considérer deux ou un au lieu de quatre (sous)-résultants. Dans tous les cas concernés la base de Gröbner de l'idéal engendré par ces deux (sous)-résultants contient deux (ou un) éléments avec des monômes de tête sur les deux axes (ou sur l'axe) qui reste(nt). Ce sont les cas (on appelle leur liste "liste B")

$$25, 31, 38, 56, 62, 63, 83, 84, 89, 94, 97, 99, 100, 101, 106, 111, 116,$$
$$122, 124, 148, 160, 169, 189, 191, 222, 224, 230, 240, 258, 267, 273, 291,$$
$$296, 302, 303, 304, 305, 315, 348, 350, 356, 363, 366.$$

Pour chacun des cas de la liste B un programme de MAPLE trouve les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner. En cas 224 il y a deux égalités affines entre les coefficients du polynôme, en cas 100 il y en a trois.

Les programmes correspondant à ces deux cas sont donnés dans les sous-paragraphes 5.8.2 et 5.8.3. Les programmes sont fait pour traiter un seul cas, pas tous les cas de la liste B.

Dans le reste des cas, où on ne trouve pas quatre monômes a^k, b^l, c^m, d^q et qui ne sont pas sur les listes C ou B (on appelle leur liste "liste A"), on peut choisir trois égalités sur quatre qui correspondent aux conditions du lemme 5.4 ou à celles du lemme 5.5. Notamment, pour appliquer le lemme 5.4 il faut qu'il y ait trois égalités (parmi les quatre) de la forme

$$x_{i_1}^0 = x_{i_2}^\beta \;,\;\; x_{i_3}^0 = x_{i_4}^\delta \;,\;\; x_{i_5}^0 = x_{i_6}^q,\ \beta > 0,\ \delta > 0,\ q > 0,$$

pour appliquer le lemme 5.5 il faut qu'il y ait trois égalités

$$x_{i_1}^0 = x_{i_2}^\beta \;,\;\; x_{i_3}^\gamma = x_{i_4}^\delta \;,\;\; x_{i_5}^p = x_{i_6}^q,\ \beta > 0,\ 0 < \gamma < \delta,\ 0 < p < q,\ \gamma \leq p.$$

Nous donnons ici la liste A subdivisée en deux listes. Les cas de la première (resp. de la deuxième) liste sont ceux auxquels on peut appliquer le lemme 5.4, (resp. le lemme 5.5). Ces deux listes comprennent tous les cas de la liste A.

Le lemme 5.4 est applicable aux cas suivants (liste A1) :

$$14, 159, 203, 206, 214, 248, 250, 251, 257, 263, 326, 327, 328, 329,$$
$$330, 331, 332, 333, 334, 335, 339, 375, 376, 378.$$

Le lemme 5.5 est applicable aux cas suivants (liste A2) :

$$35, 170, 171, 268, 269, 270, 271, 272, 360.$$

Pour un cas de la liste A1 ou A2 on considère la forme normale du quatrième des (sous)-résultants p.r. à l'idéal engendré par les trois (sous)-résultants correspondant aux trois égalités qui vérifient les conditions respectivement du lemme 5.4 ou 5.5. Si cette forme normale n'est pas le polynôme nul, le quatrième (sous)-résultant définit une hyper-surface dont l'intersection avec l'adhérence de la variété (connexe, de dimension 1, et dont l'adhérence est connexe) définie par les trois autres (sous)-résultants, est de codimension 1, c.-à-d. consiste en des points isolés.

Le programme qui pour le 14 cas de la liste A1 trouve la forme normale du quatrième (sous)-résultant p.r. à l'idéal engendré par les trois autres se trouve dans le sous-paragraphe 5.8.4. Les programmes concernant les autres cas des listes A1 et A2 lui sont analogues.

Remarque 5.8 Dans le traitement des cas des listes B, A1 et A2 on a préféré écrire un programme pour chaque cas individuellement car il faut choisir parmi les quatre égalités les deux ou une qui restent (en cas de la liste B) ou les trois qui correspondent aux conditions du lemme 5.4 (en cas de la liste A1) ou du lemme 5.5 (en cas de la liste A2).

5.8.1 Le programme appliqué à tous les cas

Dans la partie A on définit de matrice de Sylvester. On utilise la notation introduite dans le paragraphe 4.2. Dans la partie B on donne la liste de tous les cas possibles de quatre égalités entre racines et on trouve pour chaque cas la base de Gröbner de l'idéal engendré par les quatre (sous)-résultants.

Dans la partie C on calcule les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner. On utilise la commande **LeadingMonomial** et on extrait tous les monômes de la forme a^k, b^l, c^m ou d^q, $k, l, m, q \in \mathbf{N}^*$. On affiche tous les cas sauf ceux où il manque parmi les monômes de tête des éléments de la base de Gröbner au moins un monôme de la forme a^k, b^l, c^m, d^q .

Partie A

```
f[0]:=x^6-x^4+a*x^3+b*x^2+c*x+d:for i from 1 to 5 do f[i]:=
   diff(f[i-1],x) end do:
> with(linalg):with(Groebner):
> for i from 1 to 5 do Sigma[i]:=sylvester(f[0],f[i],x) end
   do:
> for i from 2 to 4 do Delta[i]:=sylvester(f[1],f[i+1],x)
   end do:
> for i from 2 to 3 do Lambda[i]:=sylvester(f[2],f[i+2],x)
   end do:
> Kappa[2]:=sylvester(f[3],f[5],x):
> Sigma1[1]:=submatrix(Sigma[1],[1,2,3,4,6,7,8,9,10],1..9):
> Sigma2[1]:=submatrix(Sigma1[1],[1,2,3,5,6,7,8],1..7):
> Sigma1[2]:=submatrix(Sigma[2],[1,2,3,5,6,7,8,9],1..8):
> Sigma2[2]:=submatrix(Sigma1[2],[1,2,4,5,6,7],1..6):
> Sigma3[2]:=submatrix(Sigma2[2],[1,3,4,5],1..4):
> Sigma1[3]:=submatrix(Sigma[3],[1,2,4,5,6,7,8],1..7):
```

```
> Sigma2[3]:=submatrix(Sigma1[3],[1,3,4,5,6],1..5):
> Sigma1[4]:=submatrix(Sigma[4],[1,3,4,5,6,7],1..6):
> Delta1[2]:=submatrix(Delta[2],[1,2,4,5,6,7],1..6):
> Delta2[2]:=submatrix(Delta1[2],[1,3,4,5],1..4):
> Delta1[3]:=submatrix(Delta[3],[1,3,4,5,6],1..5):
> Lambda1[2]:=submatrix(Lambda[2],[1,3,4,5],1..4):
> for k from 1 to 5 do sigma[k]:=det(Sigma[k]):od:
> for k from 2 to 4 do delta[k]:=det(Delta[k]):od:
> for k from 2 to 3 do lambda[k]:=det(Lambda[k]):od:
> kappa[2]:=det(Kappa[2]):sigma1[1]:=det(Sigma1[1]):sigma2
  [1]:=det(Sigma2[1]):
> sigma1[2]:=det(Sigma1[2]):sigma2[2]:=det(Sigma2[2]):sigma3
  [2]:=det(Sigma3[2]):
> sigma1[3]:=det(Sigma1[3]):sigma2[3]:=det(Sigma2[3]):
> sigma1[4]:=det(Sigma1[4]):
> delta1[2]:=det(Delta1[2]):delta2[2]:=det(Delta2[2]):delta1
  [3]:=det(Delta1[3]):lambda1[2]:=det(Lambda1[2]):
```

Partie B

```
> A[1]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],sigma3[2]]:
> A[2]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],sigma[3]]:
> A[3]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],sigma[4]]:
> A[4]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],sigma[5]]:
> A[5]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],delta[2]]:
> A[6]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],delta[3]]:
> A[7]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],delta[4]]:
> A[8]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],lambda[2]]:
> A[9]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],lambda[3]]:
> A[10]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma2[2],kappa[2]]:
> A[11]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],sigma[4]]:
> A[12]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],sigma1[3]]:
> A[13]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],sigma[5]]:
> A[14]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],delta[2]]:
> A[15]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],delta[3]]:
> A[16]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],delta[4]]:
> A[17]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],lambda[2]]:
> A[18]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],lambda[3]]:
> A[19]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3],kappa[2]]:
> A[20]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],sigma[5]]:
> A[21]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],sigma1[4]]:
> A[22]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],delta[2]]:
> A[23]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],delta[3]]:
```

```
> A[24]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],delta[4]]:
> A[25]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],lambda[2]]:
> A[26]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],lambda[3]]:
> A[27]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[4],kappa[2]]:
> A[28]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[5],delta[2]]:
> A[29]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[5],delta[3]]:
> A[30]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[5],lambda[2]]:
> A[31]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[5],lambda[3]]:
> A[32]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[5],kappa[2]]:
> A[33]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2],delta1[2]]:
> A[34]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2],delta[3]]:
> A[35]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2],delta[4]]:
> A[36]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2],lambda[2]]:
> A[37]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2],lambda[3]]:
> A[38]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[2],kappa[2]]:
> A[39]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[3],delta1[3]]:
> A[40]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[3],delta[4]]:
> A[41]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[3],lambda[2]]:
> A[42]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[3],lambda[3]]:
> A[43]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[3],kappa[2]]:
> A[44]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[4],delta1[4]]:
> A[45]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[4],lambda[2]]:
> A[46]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[4],lambda[3]]:
> A[47]:=[sigma[2],sigma1[2],delta[4],kappa[2]]:
> A[48]:=[sigma[2],sigma1[2],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[49]:=[sigma[2],sigma1[2],lambda[2],lambda[3]]:
> A[50]:=[sigma[2],sigma1[2],lambda[2],kappa[2]]:
> A[51]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],sigma1[3]]:
> A[52]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],sigma[5]]:
> A[53]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],delta[2]]:
> A[54]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],delta[3]]:
> A[55]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],delta[4]]:
> A[56]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],lambda[2]]:
> A[57]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],lambda[3]]:
> A[58]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],kappa[2]]:
> A[59]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],delta[2]]:
> A[60]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],delta[3]]:
> A[61]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],lambda[2]]:
> A[62]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],lambda[3]]:
> A[63]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],kappa[2]]:
> A[64]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],delta1[2]]:
> A[65]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],delta[3]]:
```

```
> A[66]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],delta[4]]:
> A[67]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],lambda[2]]:
> A[68]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],lambda[3]]:
> A[69]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],kappa[2]]:
> A[70]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],delta1[3]]:
> A[71]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],delta[4]]:
> A[72]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],lambda[2]]:
> A[73]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],lambda[3]]:
> A[74]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],kappa[2]]:
> A[75]:=[sigma[2],sigma[3],delta[4],lambda[2]]:
> A[76]:=[sigma[2],sigma[3],delta[4],kappa[2]]:
> A[77]:=[sigma[2],sigma[3],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[78]:=[sigma[2],sigma[3],lambda[2],lambda[3]]:
> A[79]:=[sigma[2],sigma[3],lambda[2],kappa[2]]:
> A[51]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],sigma1[3]]:
> A[52]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],sigma[5]]:
> A[53]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],delta[2]]:
> A[54]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],delta[3]]:
> A[55]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],delta[4]]:
> A[56]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],lambda[2]]:
> A[57]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],lambda[3]]:
> A[58]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[4],kappa[2]]:
> A[59]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],delta[2]]:
> A[60]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],delta[3]]:
> A[61]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],lambda[2]]:
> A[62]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],lambda[3]]:
> A[63]:=[sigma[2],sigma[3],sigma[5],kappa[2]]:
> A[64]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],delta1[2]]:
> A[65]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],delta[3]]:
> A[66]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],delta[4]]:
> A[67]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],lambda[2]]:
> A[68]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],lambda[3]]:
> A[69]:=[sigma[2],sigma[3],delta[2],kappa[2]]:
> A[70]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],delta1[3]]:
> A[71]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],delta[4]]:
> A[72]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],lambda[2]]:
> A[73]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],lambda[3]]:
> A[74]:=[sigma[2],sigma[3],delta[3],kappa[2]]:
> A[75]:=[sigma[2],sigma[3],delta[4],lambda[2]]:
> A[76]:=[sigma[2],sigma[3],delta[4],kappa[2]]:
> A[77]:=[sigma[2],sigma[3],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[78]:=[sigma[2],sigma[3],lambda[2],lambda[3]]:
```

```
> A[79]:=[sigma[2],sigma[3],lambda[2],kappa[2]]:
> A[80]:=[sigma[2],sigma[4],sigma[5],sigma1[4]]:
> A[81]:=[sigma[2],sigma[4],sigma[5],delta[2]]:
> A[82]:=[sigma[2],sigma[4],sigma[5],delta[3]]:
> A[83]:=[sigma[2],sigma[4],sigma[5],lambda[2]]:
> A[84]:=[sigma[2],sigma[4],sigma[5],lambda[3]]:
> A[85]:=[sigma[2],sigma[4],sigma[5],kappa[2]]:
> A[86]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2],delta1[2]]:
> A[87]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2],delta[3]]:
> A[88]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2],delta[4]]:
> A[89]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2],lambda[2]]:
> A[90]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2],lambda[3]]:
> A[91]:=[sigma[2],sigma[4],delta[2],kappa[2]]:
> A[92]:=[sigma[2],sigma[4],delta[3],delta1[3]]:
> A[93]:=[sigma[2],sigma[4],delta[3],delta[4]]:
> A[94]:=[sigma[2],sigma[4],delta[3],lambda[2]]:
> A[95]:=[sigma[2],sigma[4],delta[3],lambda[3]]:
> A[96]:=[sigma[2],sigma[4],delta[3],kappa[2]]:
> A[97]:=[sigma[2],sigma[4],delta[4],lambda[2]]:
> A[98]:=[sigma[2],sigma[4],delta[4],kappa[2]]:
> A[99]:=[sigma[2],sigma[4],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[100]:=[sigma[2],sigma[4],lambda[2],lambda[3]]:
> A[101]:=[sigma[2],sigma[4],lambda[2],kappa[2]]:
> A[102]:=[sigma[2],sigma[5],delta[2],delta1[2]]:
> A[103]:=[sigma[2],sigma[5],delta[2],delta[3]]:
> A[104]:=[sigma[2],sigma[5],delta[2],delta[4]]:
> A[105]:=[sigma[2],sigma[5],delta[2],lambda[2]]:
> A[106]:=[sigma[2],sigma[5],delta[2],lambda[3]]:
> A[107]:=[sigma[2],sigma[5],delta[2],kappa[2]]:
> A[108]:=[sigma[2],sigma[5],delta[3],delta1[3]]:
> A[109]:=[sigma[2],sigma[5],delta[3],delta[4]]:
> A[110]:=[sigma[2],sigma[5],delta[3],lambda[2]]:
> A[111]:=[sigma[2],sigma[5],delta[3],lambda[3]]:
> A[112]:=[sigma[2],sigma[5],delta[3],kappa[2]]:
> A[113]:=[sigma[2],sigma[5],delta[4],lambda[2]]:
> A[114]:=[sigma[2],sigma[5],delta[4],kappa[2]]:
> A[115]:=[sigma[2],sigma[5],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[116]:=[sigma[2],sigma[5],lambda[2],lambda[3]]:
> A[117]:=[sigma[2],sigma[5],lambda[2],kappa[2]]:
> A[118]:=[sigma[3],sigma[4],sigma[5],delta[2]]:
> A[119]:=[sigma[3],sigma[4],sigma[5],delta[3]]:
> A[120]:=[sigma[3],sigma[4],sigma[5],lambda[2]]:
```

```
> A[121]:=[sigma[3],sigma[4],sigma[5],lambda[3]]:
> A[122]:=[sigma[3],sigma[4],sigma[5],kappa[2]]:
> A[123]:=[sigma[3],sigma[4],delta[2],delta1[2]]:
> A[124]:=[sigma[3],sigma[4],delta[2],delta[3]]:
> A[125]:=[sigma[3],sigma[4],delta[2],delta[4]]:
> A[126]:=[sigma[3],sigma[4],delta[2],lambda[2]]:
> A[127]:=[sigma[3],sigma[4],delta[2],lambda[3]]:
> A[128]:=[sigma[3],sigma[4],delta[2],kappa[2]]:
> A[129]:=[sigma[3],sigma[4],delta[3],delta1[3]]:
> A[130]:=[sigma[3],sigma[4],delta[3],delta[4]]:
> A[131]:=[sigma[3],sigma[4],delta[3],lambda[2]]:
> A[132]:=[sigma[3],sigma[4],delta[3],lambda[3]]:
> A[133]:=[sigma[3],sigma[4],delta[3],kappa[2]]:
> A[134]:=[sigma[3],sigma[4],delta[4],lambda[2]]:
> A[135]:=[sigma[3],sigma[4],delta[4],kappa[2]]:
> A[136]:=[sigma[3],sigma[4],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[137]:=[sigma[3],sigma[4],lambda[2],lambda[3]]:
> A[138]:=[sigma[3],sigma[4],lambda[2],kappa[2]]:
> A[139]:=[sigma[3],sigma[5],delta[2],delta1[2]]:
> A[140]:=[sigma[3],sigma[5],delta[2],delta[3]]:
> A[141]:=[sigma[3],sigma[5],delta[2],lambda[2]]:
> A[142]:=[sigma[3],sigma[5],delta[2],lambda[3]]:
> A[143]:=[sigma[3],sigma[5],delta[2],kappa[2]]:
> A[144]:=[sigma[3],sigma[5],delta[3],delta1[3]]:
> A[145]:=[sigma[3],sigma[5],delta[3],lambda[2]]:
> A[146]:=[sigma[3],sigma[5],delta[3],lambda[3]]:
> A[147]:=[sigma[3],sigma[5],delta[3],kappa[2]]:
> A[148]:=[sigma[3],sigma[5],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[149]:=[sigma[3],sigma[5],lambda[2],lambda[3]]:
> A[150]:=[sigma[3],sigma[5],lambda[2],kappa[2]]:
> A[151]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma2[3],sigma[4]]:
> A[152]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma2[3],sigma[5]]:
> A[153]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma2[3],delta[3]]:
> A[154]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma2[3],delta[4]]:
> A[155]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma2[3],lambda[2]]:
> A[156]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma2[3],lambda[3]]:
> A[157]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma2[3],kappa[2]]:
> A[158]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[4],sigma[5]]:
> A[159]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[4],delta[2]]:
> A[160]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[4],delta[3]]:
> A[161]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[4],delta[4]]:
> A[162]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[4],lambda[2]]:
```

```
> A[163]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[4],lambda[3]]:
> A[164]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[4],kappa[2]]:
> A[165]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[5],delta[2]]:
> A[166]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[5],delta[3]]:
> A[167]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[5],lambda[2]]:
> A[168]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[5],lambda[3]]:
> A[169]:=[sigma[3],sigma1[3],sigma[5],kappa[2]]:
> A[170]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[2],delta[3]]:
> A[171]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[2],delta[4]]:
> A[172]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[2],lambda[2]]:
> A[173]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[2],lambda[3]]:
> A[174]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[2],kappa[2]]:
> A[175]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[3],delta1[3]]:
> A[176]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[3],delta[4]]:
> A[177]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[3],lambda[2]]:
> A[178]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[3],lambda[3]]:
> A[179]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[3],kappa[2]]:
> A[180]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[4],lambda[2]]:
> A[181]:=[sigma[3],sigma1[3],delta[4],kappa[2]]:
> A[182]:=[sigma[3],sigma1[3],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[183]:=[sigma[3],sigma1[3],lambda[2],lambda[3]]:
> A[184]:=[sigma[3],sigma1[3],lambda[2],kappa[2]]:
> A[185]:=[sigma[4],sigma1[4],sigma[5],delta[2]]:
> A[186]:=[sigma[4],sigma1[4],sigma[5],lambda[3]]:
> A[187]:=[sigma[4],sigma1[4],sigma[5],kappa[2]]:
> A[188]:=[sigma[4],sigma1[4],delta[2],delta1[2]]:
> A[189]:=[sigma[4],sigma1[4],delta[2],delta[4]]:
> A[190]:=[sigma[4],sigma1[4],delta[2],lambda[3]]:
> A[191]:=[sigma[4],sigma1[4],delta[2],kappa[2]]:
> A[192]:=[sigma[4],sigma[5],delta[2],delta1[2]]:
> A[193]:=[sigma[4],sigma[5],delta[2],delta[3]]:
> A[194]:=[sigma[4],sigma[5],delta[2],lambda[2]]:
> A[195]:=[sigma[4],sigma[5],delta[2],lambda[3]]:
> A[196]:=[sigma[4],sigma[5],delta[2],kappa[2]]:
> A[197]:=[sigma[4],sigma[5],delta[3],lambda[2]]:
> A[198]:=[sigma[4],sigma[5],delta[3],lambda[3]]:
> A[199]:=[sigma[4],sigma[5],delta[3],kappa[2]]:
> A[200]:=[sigma[4],sigma[5],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[201]:=[sigma[4],sigma[5],lambda[2],lambda[3]]:
> A[202]:=[sigma[4],sigma[5],lambda[2],kappa[2]]:
> A[203]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],sigma[3]]:
> A[204]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],sigma[4]]:
```

```
> A[205]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],sigma[5]]:
> A[206]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],delta[2]]:
> A[207]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],delta[3]]:
> A[208]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],lambda[2]]:
> A[209]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],lambda[3]]:
> A[210]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],kappa[2]]:
> A[211]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],sigma1[3]]:
> A[212]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],sigma[4]]:
> A[213]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],sigma[5]]:
> A[214]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],delta[2]]:
> A[215]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],delta[3]]:
> A[216]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],delta[4]]:
> A[217]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],lambda[2]]:
> A[218]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],lambda[3]]:
> A[219]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3],kappa[2]]:
> A[220]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4],sigma[5]]:
> A[221]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4],delta[2]]:
> A[222]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4],delta[3]]:
> A[223]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4],delta[4]]:
> A[224]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4],lambda[2]]:
> A[225]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4],lambda[3]]:
> A[226]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4],kappa[2]]:
> A[227]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[5],delta[2]]:
> A[228]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[5],delta[3]]:
> A[229]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[5],lambda[2]]:
> A[230]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[5],lambda[3]]:
> A[231]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[5],kappa[2]]:
> A[232]:=[sigma[1],sigma[2],delta[2],delta1[2]]:
> A[233]:=[sigma[1],sigma[2],delta[2],delta[3]]:
> A[234]:=[sigma[1],sigma[2],delta[2],delta[4]]:
> A[235]:=[sigma[1],sigma[2],delta[2],lambda[2]]:
> A[236]:=[sigma[1],sigma[2],delta[2],lambda[3]]:
> A[237]:=[sigma[1],sigma[2],delta[2],kappa[2]]:
> A[238]:=[sigma[1],sigma[2],delta[3],delta1[3]]:
> A[239]:=[sigma[1],sigma[2],delta[3],delta[4]]:
> A[240]:=[sigma[1],sigma[2],delta[3],lambda[2]]:
> A[241]:=[sigma[1],sigma[2],delta[3],lambda[3]]:
> A[242]:=[sigma[1],sigma[2],delta[3],kappa[2]]:
> A[243]:=[sigma[1],sigma[2],delta[4],lambda[2]]:
> A[244]:=[sigma[1],sigma[2],delta[4],kappa[2]]:
> A[245]:=[sigma[1],sigma[2],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[246]:=[sigma[1],sigma[2],lambda[2],lambda[3]]:
```

```
> A[247]:=[sigma[1],sigma[2],lambda[2],kappa[2]]:
> A[248]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3],sigma[4]]:
> A[249]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3],sigma[5]]:
> A[250]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3],delta[2]]:
> A[251]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3],delta[3]]:
> A[252]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3],lambda[2]]:
> A[253]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3],lambda[3]]:
> A[254]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3],kappa[2]]:
> A[255]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4],sigma1[4]]:
> A[256]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4],sigma[5]]:
> A[257]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4],delta[2]]:
> A[258]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4],delta[3]]:
> A[259]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4],delta[4]]:
> A[260]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4],lambda[2]]:
> A[261]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4],lambda[3]]:
> A[262]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[4],kappa[2]]:
> A[263]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[5],delta[2]]:
> A[264]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[5],delta[3]]:
> A[265]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[5],lambda[2]]:
> A[266]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[5],lambda[3]]:
> A[267]:=[sigma[1],sigma[3],sigma[5],kappa[2]]:
> A[268]:=[sigma[1],sigma[3],delta[2],delta1[2]]:
> A[269]:=[sigma[1],sigma[3],delta[2],delta[3]]:
> A[270]:=[sigma[1],sigma[3],delta[2],delta[4]]:
> A[271]:=[sigma[1],sigma[3],delta[2],lambda[2]]:
> A[272]:=[sigma[1],sigma[3],delta[2],lambda[3]]:
> A[273]:=[sigma[1],sigma[3],delta[2],kappa[2]]:
> A[274]:=[sigma[1],sigma[3],delta[3],delta1[3]]:
> A[275]:=[sigma[1],sigma[3],delta[3],delta[4]]:
> A[276]:=[sigma[1],sigma[3],delta[3],lambda[2]]:
> A[277]:=[sigma[1],sigma[3],delta[3],lambda[3]]:
> A[278]:=[sigma[1],sigma[3],delta[3],kappa[2]]:
> A[279]:=[sigma[1],sigma[3],delta[4],lambda[2]]:
> A[280]:=[sigma[1],sigma[3],delta[4],kappa[2]]:
> A[281]:=[sigma[1],sigma[3],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[282]:=[sigma[1],sigma[3],lambda[2],lambda[3]]:
> A[283]:=[sigma[1],sigma[3],lambda[2],kappa[2]]:
> A[284]:=[sigma[1],sigma[4],sigma1[4],sigma[5]]:
> A[285]:=[sigma[1],sigma[4],sigma1[4],delta[2]]:
> A[287]:=[sigma[1],sigma[4],sigma1[4],lambda[2]]:
> A[288]:=[sigma[1],sigma[4],sigma1[4],lambda[3]]:
> A[289]:=[sigma[1],sigma[4],sigma1[4],kappa[2]]:
```

```
> A[290]:=[sigma[1],sigma[4],sigma[5],delta[2]]:
> A[291]:=[sigma[1],sigma[4],sigma[5],delta[3]]:
> A[292]:=[sigma[1],sigma[4],sigma[5],lambda[2]]:
> A[293]:=[sigma[1],sigma[4],sigma[5],lambda[3]]:
> A[294]:=[sigma[1],sigma[4],sigma[5],kappa[2]]:
> A[295]:=[sigma[1],sigma[4],delta[2],delta1[2]]:
> A[296]:=[sigma[1],sigma[4],delta[2],delta[3]]:
> A[297]:=[sigma[1],sigma[4],delta[2],delta[4]]:
> A[298]:=[sigma[1],sigma[4],delta[2],lambda[2]]:
> A[299]:=[sigma[1],sigma[4],delta[2],lambda[3]]:
> A[300]:=[sigma[1],sigma[4],delta[2],kappa[2]]:
> A[302]:=[sigma[1],sigma[4],delta[3],delta[4]]:
> A[303]:=[sigma[1],sigma[4],delta[3],lambda[2]]:
> A[304]:=[sigma[1],sigma[4],delta[3],lambda[3]]:
> A[305]:=[sigma[1],sigma[4],delta[3],kappa[2]]:
> A[306]:=[sigma[1],sigma[4],delta[4],lambda[2]]:
> A[307]:=[sigma[1],sigma[4],delta[4],kappa[2]]:
> A[308]:=[sigma[1],sigma[4],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[309]:=[sigma[1],sigma[4],lambda[2],lambda[3]]:
> A[310]:=[sigma[1],sigma[4],lambda[2],kappa[2]]:
> A[311]:=[sigma[1],sigma[5],delta[2],delta1[2]]:
> A[312]:=[sigma[1],sigma[5],delta[2],delta[3]]:
> A[313]:=[sigma[1],sigma[5],delta[2],lambda[2]]:
> A[314]:=[sigma[1],sigma[5],delta[2],lambda[3]]:
> A[315]:=[sigma[1],sigma[5],delta[2],kappa[2]]:
> A[316]:=[sigma[1],sigma[5],delta[3],delta1[3]]:
> A[318]:=[sigma[1],sigma[5],delta[3],lambda[2]]:
> A[319]:=[sigma[1],sigma[5],delta[3],lambda[3]]:
> A[320]:=[sigma[1],sigma[5],delta[3],kappa[2]]:
> A[323]:=[sigma[1],sigma[5],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[324]:=[sigma[1],sigma[5],lambda[2],lambda[3]]:
> A[325]:=[sigma[1],sigma[5],lambda[2],kappa[2]]:
> A[326]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],sigma1[2]]:
> A[327]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],sigma[3]]:
> A[328]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],sigma[4]]:
> A[329]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],sigma[5]]:
> A[330]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],delta[2]]:
> A[331]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],delta[3]]:
> A[332]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],delta[4]]:
> A[333]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],lambda[2]]:
> A[334]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],lambda[3]]:
> A[335]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[2],kappa[2]]:
```

```
> A[336]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],sigma1[3]]:
> A[337]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],sigma[4]]:
> A[338]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],sigma[5]]:
> A[339]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],delta[2]]:
> A[340]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],delta[3]]:
> A[341]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],delta[4]]:
> A[342]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],lambda[2]]:
> A[343]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],lambda[3]]:
> A[344]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[3],kappa[2]]:
> A[345]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4],sigma1[4]]:
> A[346]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4],sigma[5]]:
> A[347]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4],delta[2]]:
> A[348]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4],delta[3]]:
> A[349]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4],delta[4]]:
> A[350]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4],lambda[2]]:
> A[351]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4],lambda[3]]:
> A[352]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[4],kappa[2]]:
> A[353]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[5],delta[2]]:
> A[354]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[5],delta[3]]:
> A[355]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[5],lambda[2]]:
> A[356]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[5],lambda[3]]:
> A[357]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma[5],kappa[2]]:
> A[358]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[2],delta1[2]]:
> A[359]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[2],delta[3]]:
> A[360]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[2],delta[4]]:
> A[361]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[2],lambda[2]]:
> A[362]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[2],lambda[3]]:
> A[363]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[2],kappa[2]]:
> A[364]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[3],delta1[3]]:
> A[365]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[3],delta[4]]:
> A[366]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[3],lambda[2]]:
> A[367]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[3],lambda[3]]:
> A[368]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[3],kappa[2]]:
> A[369]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[4],lambda[2]]:
> A[370]:=[sigma[1],sigma1[1],delta[4],kappa[2]]:
> A[371]:=[sigma[1],sigma1[1],lambda[2],lambda1[2]]:
> A[372]:=[sigma[1],sigma1[1],lambda[2],lambda[3]]:
> A[373]:=[sigma[1],sigma1[1],lambda[2],kappa[2]]:
> A[374]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],sigma3[1]]:
> A[375]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],sigma[2]]:
> A[376]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],sigma[3]]:
> A[377]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],sigma[4]]:
```

```
> A[378]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],delta[2]]:
> A[379]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],delta[3]]:
> A[380]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],lambda[2]]:
> A[381]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],lambda[3]]:
> A[382]:=[sigma[1],sigma1[1],sigma2[1],kappa[2]]:
> A[383]:=[sigma[1],sigma[2],sigma1[2],delta[4]]:
> A[384]:=[sigma[1],sigma[3],sigma1[3],delta[4]]:
for i from 1 to 384 doB[i]:=Basis(A[i],tdeg(a,b,c,d)):enddo:
```

Partie C

```
 boucle:=proc(B)L:=[]:for i from 1 to nops(B) do L:=[op(L),
    LeadingMonomial(B[i],tdeg(a,b,c,d))] od:
> return L:
> end proc:
> for i from 1 to 384 do monome(B[i]); od:
> pure:=proc(C)
> if (divide (C,a)=true) and (divide (C,b)=false) and (
   divide (C,c)=false) and (divide (C,d)=false) then return
    C else
> if (divide (C,a)=false) and (divide (C,b)=true) and (
   divide (C,c)=false) and (divide (C,d)=false) then return
    C else
> if (divide (C,a)=false) and(divide (C,b)=false) and(divide
    (C,c)=true) and (divide (C,d)=false) then return C else
> if (divide (C,a)=false) and(divide (C,b)=false) and(divide
    (C,c)=false) and(divide (C,d)=true) then return C else
   fi fi fi fi
> end proc:
> affiche:=proc(B)
> L:=[]:for i from 1 to nops(B) do L:=[op(L),pure(B[i])] od:
> end proc:
i:=1: while (i<385) do if (nops(affiche(boucle(B[i])))=3)
then l[i]:=affiche(boucle(B[i])); i:=i+1; else i:=i+1 fi;od;
> i:=1: while (i<385) do if (nops(affiche(monome(B[i])))=2)
   then l[i]:=affiche(monome(B[i])); i:=i+1; else i:=i+1 fi
   ; od;
> i:=1: while (i<385) do if (nops(affiche(monome(B[i])))=1)
   then l[i]:=affiche(monome(B[i])); i:=i+1; else i:=i+1 fi
   ; od;
> for i from 1 to 384 do if(type(l[i],list)=true) then print
   ([i,l[i]]) fi od;
```

5.8.2 Le programme appliqué aux cas de la liste B avec deux égalités affines entre les coefficients

On se rappelle que ce programme concerne le cas 224 du sous-paragraphe 5.8.1.

```
> f[0]:=x^6-x^4+a*x^3+(1/3+1/5*a*15^(1/2))*x^2+c*x
  -61/3375-4/225*a*15^(1/2)-1/15*c*15^(1/2):
> for i from 1 to 5 do f[i]:=diff(f[i-1],x) end do:
> with(linalg):with(Groebner):
> Sigma[1]:=sylvester(f[0],f[1],x):Sigma[2]:=sylvester(f[0],
  f[2],x):
> Sigma[4]:=sylvester(f[0],f[4],x):Lambda[2]:=sylvester(f
  [2],f[4],x):
> sigma[1]:=det(Sigma[1]):sigma[2]:=det(Sigma[2]):
> sigma[4]:=det(Sigma[4]):lambda[2]:=det(Lambda[2]):
> A[224]:=[sigma[1],sigma[2],sigma[4],lambda[2]]:
> B[224]:=Basis(A[224],tdeg(a,c)):
> LeadingMonomial(B[224],tdeg(a,c)); [a^7, c^2*a^6, c^6*a^3,
   c^5*a^4, c^4*a^5, c^10, c^9*a, c^8*a^2]
```

5.8.3 Le programme appliqué aux cas de la liste B avec trois égalités affines entre les coefficients

On se rappelle que ce programme concerne le cas 100 du sous-paragraphe 5.8.1.

```
> f[0]:=x^6-x^4+1/9*15^(1/2)*x^3+c*x
  +14/3375+1/225*1/9*15^(1/2)*15^(1/2)+1/15*c*15^(1/2):
> for i from 1 to 5 do f[i]:=diff(f[i-1],x) end do:
> with(linalg):with(Groebner):
> Sigma[2]:=sylvester(f[0],f[2],x):Sigma[4]:=sylvester(f[0],
  f[4],x):
> Lambda[2]:=sylvester(f[2],f[4],x):Lambda[3]:=sylvester(f
  [2],f[5],x):
> sigma[2]:=det(Sigma[2]):sigma[4]:=det(Sigma[4]):
> lambda[2]:=det(Lambda[2]): lambda[3]:=det(Lambda[3]):
> A[100]:=[sigma[2],sigma[4],lambda[2],lambda[3]]:
> B[100]:=Basis(A[100],tdeg(c)):
> LeadingMonomial(B[100],tdeg(c)); [c^4]
```

5.8.4 Le programme appliqué aux cas de la liste A

On rappelle que ce programme concerne le cas 14 du sous-paragraphe 5.8.1.

```
f[0]:=x^6-x^4+a*x^3+b*x^2+c*x+d:
> for i from 1 to 5 do f[i]:=diff(f[i-1],x) end do:
> with(linalg):with(Groebner):
> Sigma[2]:=sylvester(f[0],f[2],x):Sigma[3]:=sylvester(f[0],
   f[3],x):
> Sigma1[2]:=submatrix(Sigma[2],[1,2,3,5,6,7,8,9],1..8):
> Delta[2]:=sylvester(f[1],f[3],x):
> sigma[2]:=det(Sigma[2]):sigma1[2]:=det(Sigma1[2]):
> sigma[3]:=det(Sigma[3]):delta[2]:=det(Delta[2]):
> A[14]:=[sigma[2],sigma1[2],sigma[3]]:
> B[14]:=Basis(A[14],tdeg(a,b,c,d)):
> C[14]:=NormalForm(delta[2],B[14],tdeg(a,b,c,d));

C[14] := 183179232c + 9180151200cba^{2} + 91589616ba +
    3443737680da - 9565938000dba + 714089520cb

+395308512b^{2}a + 22897404a^{3} + 28697814000d + 400585500
    ca^{2} + 131639904b^{3}a - 15305500800 d^{3}

+ 22462312500 ac^{2} - 5390031600 c^{2}b - 2546212320 b^{3}
    a - 111602610000cdb + 47829690000ad^{2} + 34903912500c
    ^{3}
```

Références bibliographiques

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, eds. (1965), "Chapter 22", Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover, ISBN 0-486-61272-4 .

[2] B. Anderson, Polynomial root dragging. Amer. Math. Monthly **100** (1993), 864-866.

[3] V. I. Arnol'd, Hyperbolic polynomials and Vandermonde mappings. Funct. Anal. Appl. **20**, 2 (1986),52-53.

[4] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy, Algorithms in real algebraic geometry. Second edition. Algorithms and Computation in Mathematics, 10. Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+662 pp. ISBN: 978-3-540-33098-1; 3-540-33098-4

[5] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. Ideals, Varieties, and Algorithms. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1996. second edition.

[6] H. Ezzaldine, V. P. Kostov, Even and old overdetermined strata for degree 6 hyperbolic polynomials. Serdica Math. J.**34** (2008),1001-1028.

[7] A. B. Givental, Moments of random variables and the equivariant Morse lemma. Russian Math. Surveys **42**, 2 (1987), 275-276 (transl. from Uspekhi Mat. Nauk **42**, 2 (254 (1987,221-222).

[8] A. Horwitz, On the ratio vectors of polynomials, J. Math. Anal. Appl. 205 (1997) 568-576.

[9] A. Horwitz, Ratio vectors of fourth degree polynomials, J. Math. Anal. Appl., 313(2006), 132-141.

[10] A. Horwitz, Complex ratio vectors of cubic polynomials, IJPAM, 33, (2006).

[11] S. Karlin, Total positivity, vol. 1 Stanford University Press, Stanford, California 1968.

[12] V. P. Kostov, On the geometric properties of Vandermonde's mapping and on the problem of moments. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 112, 3-4 (1989), 203-211.

[13] V. P. Kostov, On the hyperbolicity domain of the polynomial $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a^n$. Serdica Math. J. **25**, 1 (1999), 47-70.

[14] V. P. Kostov, On arrangements of the roots of a hyperbolic polynomial and of one of its derivatives,*arXiv:math/0211132.*, (2002).

[15] V. P. Kostov and B. Z. Shapiro, On arrangements of roots for a real hyperbolic polynomial and its derivatives, Bull. Sci. Math. **126**, 1 (January 2002),45-60.

[16] V. P. Kostov, "Discriminant sets of families of hyperbolic polynomials of degree 4 and 5", *Serdica Math. J.* **28** 2 (2002), 117-152.

[17] V. P. Kostov, Root configurations of hyperbolic polynomials of degree 3, 4 and 5. Funct. Anal. Appl. **36**, 4 (2002), 311-314 (translation from Russian: Funkcional. Anal. i Prilozhen. **36**, 4 (2002),71-74).

[18] V. P. Kostov, Overdetermined strata in general families of polynomials. Serdica Math. J. **29** (2003), 377-386

[19] V. P. Kostov, On root arrangements of polynomial-like functions and their derivatives. Serdica Math. J. **31** (2005), 201-216.

[20] V. P. Kostov, On polynomial-like functions. Bull. Sci. Math. **129** (2005), 775-781.

[21] V. P. Kostov, Root arrangements of hyperbolic polynomial-like functions. Revista Matematica Complutense, **19** 1 (2006), 197-225.

[22] V. P. Kostov, On root arrangements for hyperbolic polynomial-like functions and their derivatives. Bull. Sci. Math. **131** (2007), 477-492.

[23] V. P. Kostov, On hyperbolic polynomial-like functions and their derivatives. Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A **137** (2007) 819-845.

[24] I. Meguerditchian, Géométrie du discriminant réel et des polynômes hyperboliques. thèse de doctorat, Univ. de Rennes I, soutenue le 24.01.1991.

[25] I. Meguerditchian, Géométrie locale des polynômes hyperboliques. (French) [Local geometry of hyperbolic polynomials] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** 11 (1991), 849-852.

[26] I. Meguerditchian, A theorem on the escape from the space of hyperbolic polynomials. Math. Z. **211** (1992),449-460.

[27] R. M. Thrall, A combinatorial problem, Michigan Math. J. **1** (1952), pp. 81-88.

[28] B. Shapiro, M. Shapiro, arXiv:math/0302215v2 [math.CA] 8 Dec 2005

Strates surdéterminées dans les familles de polynômes à une variable de degré 5 et 6

Hayssam EZZALDINE

Résumé : On fait dans cette thèse l'étude complète des strates surdéterminées dans les familles de polynômes à une variable de degré 5 et 6. On s'intéresse surtout aux polynômes hyperboliques, c.-à-d. à des racines réelles. Désignons par $\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{R}}$ l'espace de tous les polynômes de degré n à coefficients réels et à coefficient dominant 1. On désigne par $\mathcal{PP}_n^{\mathbb{R}}$ le produit cartésien $\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{R}} \times \mathrm{Pol}_{n-1}^{\mathbb{R}} \times \cdots \times \mathrm{Pol}_1^{\mathbb{R}}$. Une strate est définie par l'arrangement des racines d'un polynôme hyperbolique et par celles de ses dérivées. On dit qu'une strate St_λ est surdéterminée si $codim_{\mathcal{PP}_n} St_\lambda > codim_{\pi(\mathrm{Pol}_n)} \pi(St_\lambda)$ où
$\pi : \mathrm{Pol}_n \hookrightarrow \mathcal{PP}_n$, $\pi : P \longmapsto (P, P^{(1)}/n, P^{(2)}/n(n-1), \ldots, P^{(n-1)}/n!)$. On suppose ici que $\pi(St_\lambda) \neq \emptyset$. Dans l'étude on utilise les méthodes de l'algèbre commutative (résultants et sous-résultants, matrices de Sylvester, bases de Gröbner).

Abstract : This thesis contains the complete study of overdetermined strata in families of polynomials of degree 5 and 6. We are interested above all in hyperbolic polynomials (i.e. with all roots real). Denote by $\mathrm{Pol}_n^{\mathbb{R}}$ for the space of all monic polynomials of degree n with real coefficients. Set $\mathcal{PP}_n^{\mathbb{R}} := \mathrm{Pol}_n^{\mathbb{R}} \times \mathrm{Pol}_{n-1}^{\mathbb{R}} \times \cdots \times \mathrm{Pol}_1^{\mathbb{R}}$. A stratum is defined by the arrangement of the roots of a hyperbolic polynomial and of its derivatives. A stratum St_λ is overdetermined if $codim_{\mathcal{PP}_n} St_\lambda > codim_{\pi(\mathrm{Pol}_n)} \pi(St_\lambda)$ where
$\pi : \mathrm{Pol}_n \hookrightarrow \mathcal{PP}_n$, $\pi : P \longmapsto (P, P^{(1)}/n, P^{(2)}/n(n-1), \ldots, P^{(n-1)}/n!)$. We assume that $\pi(St_\lambda) \neq \emptyset$. In the study we use methods of commutative algebra (resultants and subresultants, Sylvester matrices, Gröbner bases).

Mots-clés : polynôme hyperbolique, polynôme de Gegenbauer, strate surdéterminée (paire, impaire et ancienne).

Key words : hyperbolic polynomial, Gegenbauer polynomial, overdetermined stratum (even, odd, old).