



UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS VI
COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE, CENTRE DE SACLAY

Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides. Application aux écoulements diphasiques.

Thomas GALIÉ

Soutenance de thèse - mardi 31 mars 2009

Annalisa AMBROSO
Christophe CHALONS
Frédéric COQUEL
Yvon MADAY

Encadrante CEA
Encadrant universitaire
Encadrant universitaire
Directeur de thèse

Sommaire

- 1 Introduction générale
- 2 Couplage interfacial de modèles en dynamique des gaz
- 3 Couplage interfacial avec terme source mesure
- 4 Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions
- 5 Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift-flux
- 6 Conclusion et perspectives

Sommaire

- 1 Introduction générale
- 2 Couplage interfacial de modèles en dynamique des gaz
- 3 Couplage interfacial avec terme source mesure
- 4 Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions
- 5 Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift-flux
- 6 Conclusion et perspectives

Introduction générale

Contexte : projet NEPTUNE

- CEA, EDF, Areva-NP, IRSN
- Etablir une plateforme de calcul pour simuler la thermohydraulique dans un réacteur nucléaire à eau sous pression

Constat : différents codes de calculs pour différentes échelles

- **CFD** : Neptune_CFD (3D libre)
- **Composant** : FLICA, THYC (3D poreux)
- **Système** : CATHARE (0D-1D libre/poreux)

Points communs : *écoulements diphasiques, méthodes volumes finis*

Validés et qualifiés : les codes fonctionnent en « *boîtes noires* »

Besoin : coupler les codes en espace

- Un code pour une région de l'espace
- Maillages conformes d'un domaine à l'autre (calcul de flux)
- **Modélisations différentes : couplage interfacial de modèles**

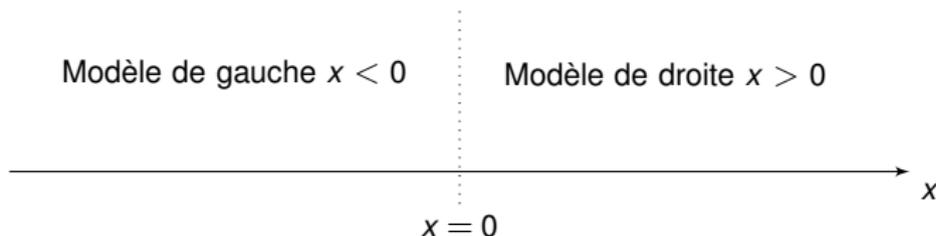
Introduction générale

Collaboration CEA Saclay - Laboratoire Jacques-Louis Lions

- Groupe de travail hebdomadaire au LJLL :

*A. Ambroso, B. Boutin, C. Chalons, F. Coquel, T. Galié,
E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, J. Segré, N. Seguin*

- Etude du couplage interfacial de modèles pour les écoulements diphasiques
- Approche unidimensionnelle (invariance des équations par rotation)
- Interface fixe et mince en $x = 0$



- Mise au point de **conditions de couplage** en $x = 0$
- Construction de **méthodes numériques** consistantes

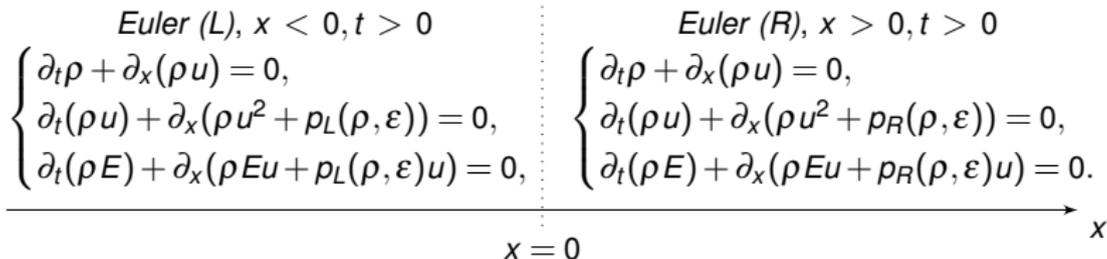
Sommaire

- 1 Introduction générale
- 2 Couplage interfacial de modèles en dynamique des gaz**
- 3 Couplage interfacial avec terme source mesure
- 4 Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions
- 5 Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift-flux
- 6 Conclusion et perspectives

Couplage de modèles en dynamique des gaz

Problème de couplage

$$\begin{array}{c}
 \text{Euler (L), } x < 0, t > 0 \\
 \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p_L(\rho, \varepsilon)) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho Eu + p_L(\rho, \varepsilon)u) = 0, \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{Euler (R), } x > 0, t > 0 \\
 \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p_R(\rho, \varepsilon)) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho Eu + p_R(\rho, \varepsilon)u) = 0. \end{array} \right.
 \end{array}$$



- $\rho > 0$: densité
- $u \in \mathbb{R}$: vitesse
- $\rho E = \rho u^2/2 + \rho \varepsilon > 0$: énergie totale et ε énergie interne
- $p_\alpha \equiv p_\alpha(\rho, \varepsilon)$, $\alpha = L, R$: pression à gauche et à droite
- Notation contractée

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x < 0, t > 0,$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x > 0, t > 0,$$

où $\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho E)$ et $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}) = (\rho u, \rho u^2 + p_\alpha, \rho Eu + p_\alpha u)$, $\alpha = L, R$

Couplage de modèles en dynamique des gaz

Conditions de couplage

Approche globalement conservative : couplage par flux

Le problème est réécrit sous la forme d'un seul et unique problème global :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \begin{cases} \mathbf{f}_L(\mathbf{u}), & x < 0, \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{u}), & x > 0. \end{cases}$$

- Conservation des grandeurs : $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)) = \mathbf{0}, t > 0$
- Non continuité des variables d'états

Approche non conservative : couplage par état

On impose, via deux conditions de bords du type *Dirichlet*,

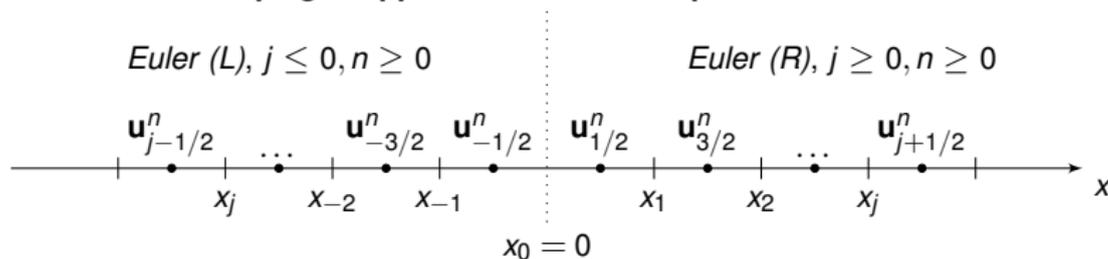
$$\mathbf{v}(0^-, t) = \mathbf{v}(0^+, t),$$

où \mathbf{v} est un jeu de variables donné

- Continuité des variables
- Non conservation : $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) \neq \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)), t > 0$
- Exemples : $\mathbf{v} := (\rho, u, p)$, $\mathbf{v} := (\rho, u, h)$ où $h = \varepsilon + p/\rho$ est l'enthalpie

Couplage de modèles en dynamique des gaz

Problème de couplage : approximation numérique



- Pas de temps Δt , pas d'espace Δx
- Cellules $C_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}[$, $j \in \mathbb{Z}$ et temps discrets $t^n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$
- Solution constante par morceaux $\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n) = \mathbf{u}_{j+1/2}^n$, pour $x \in C_{j+1/2}$
- **Formulation volumes finis**

$$\mathbf{u}_{j-1/2}^{n+1} = \mathbf{u}_{j-1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}_L)_j^n - (\mathbf{g}_L)_{j-1}^n), \quad \text{pour } j \leq 0,$$

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{u}_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}_R)_{j+1}^n - (\mathbf{g}_R)_j^n), \quad \text{pour } j \geq 0.$$

- On cherche à calculer

$$(\mathbf{g}_L)_0^n := \mathbf{g}_L(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \mathbf{u}_{1/2}^n)$$

$$(\mathbf{g}_R)_0^n := \mathbf{g}_R(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \mathbf{u}_{1/2}^n)$$

Couplage de modèles en dynamique des gaz

Conditions de couplage : approximation numérique

Couplage par flux : approche par relaxation

On résout le problème de Riemann à l'interface de couplage pour un sur-modèle hors-équilibre thermodynamique :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}, x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Schéma de Godunov

$$(\mathbf{g}_L)_0^n := \mathbf{F} \left(\mathcal{W} \left(0^-; \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{+1/2}^n \right) \right) = (\mathbf{g}_R)_0^n := \mathbf{F} \left(\mathcal{W} \left(0^+; \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{+1/2}^n \right) \right)$$

Couplage par état : approche double-flux

Les flux numériques sont donnés par les formules suivantes :

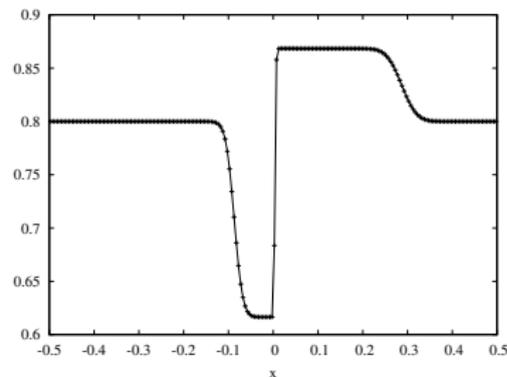
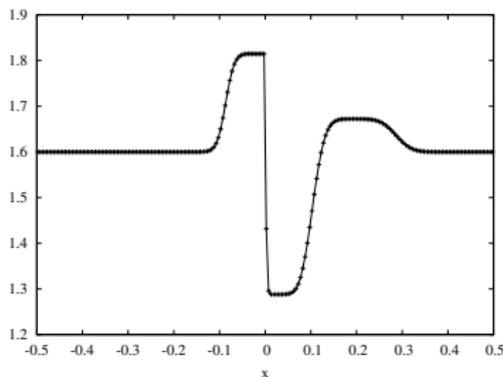
$$(\mathbf{g}_L)_0^n := \mathbf{g}_L(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \bar{\mathbf{u}}_{+1/2}^n),$$

$$(\mathbf{g}_R)_0^n := \mathbf{g}_R(\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n, \mathbf{u}_{+1/2}^n),$$

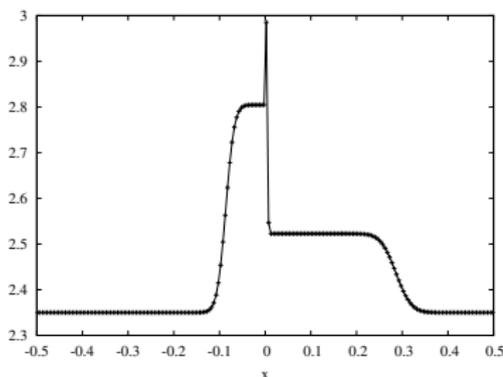
où $(\bar{\mathbf{u}})_{+1/2}^n$ et $(\bar{\mathbf{u}})_{-1/2}^n$ sont deux états fictifs reconstruits selon le jeu de variables à transmettre à l'interface de couplage.

Couplage de modèles en dynamique des gaz

Profil uniforme en pression : *couplage par flux*

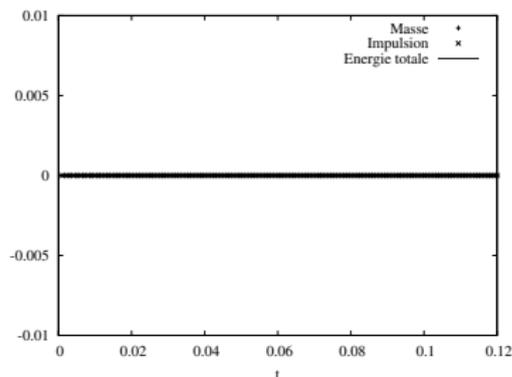


Densité



Pression

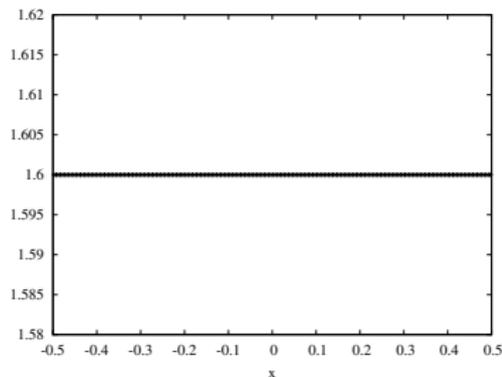
Vitesse



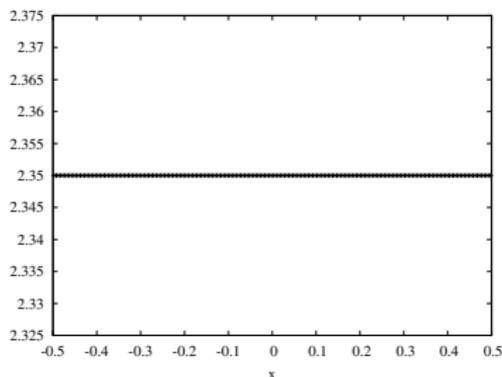
Pertes de conservation

Couplage de modèles en dynamique des gaz

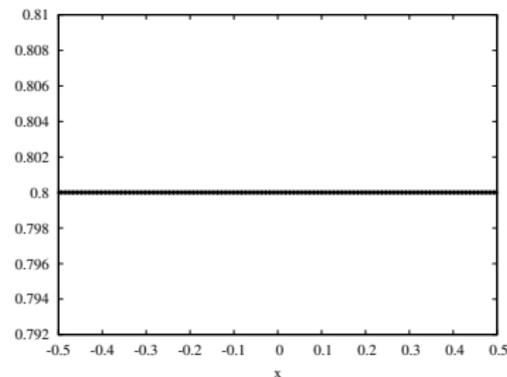
Profil uniforme en pression : *couplage par état en pression*



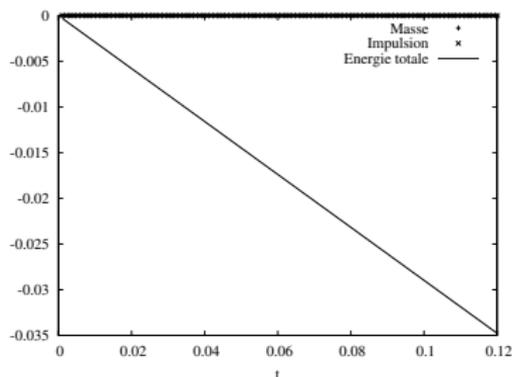
Densité



Pression



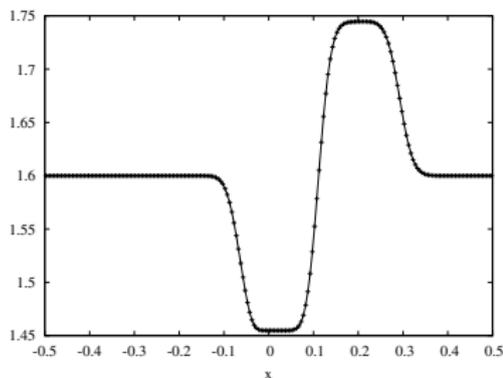
Vitesse



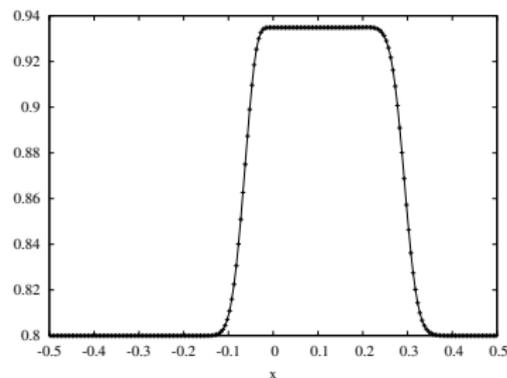
Pertes de conservation

Couplage de modèles en dynamique des gaz

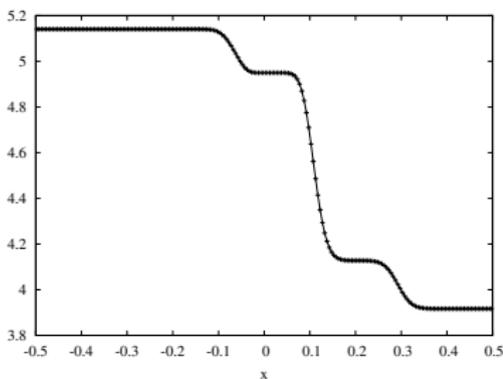
Profil uniforme en pression : *couplage par état en enthalpie*



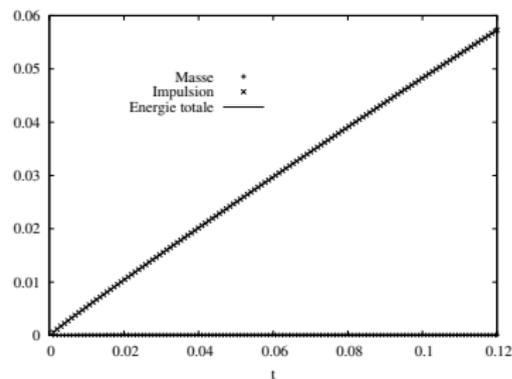
Densité



Vitesse



Enthalpie



Pertes de conservation

Sommaire

- 1 Introduction générale
- 2 Couplage interfacial de modèles en dynamique des gaz
- 3 Couplage interfacial avec terme source mesure**
- 4 Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions
- 5 Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift-flux
- 6 Conclusion et perspectives

Couplage interfacial avec terme source mesure

- Couplage de modèles en dynamique des gaz pour un écoulement isentropique :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x < 0, t > 0,$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x > 0, t > 0,$$

avec

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_\alpha(\tau) \end{pmatrix}, \quad \alpha = L, R \text{ et } \tau = 1/\rho.$$

- Condition de transmission par ajout d'un **terme source mesure** :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

avec $\mathcal{M}(t) = (0, \mathcal{M}_{\rho u}(t))$

- Avantage* : contrôle des pertes de conservation
- Difficulté* : prise en compte du terme source mesure :

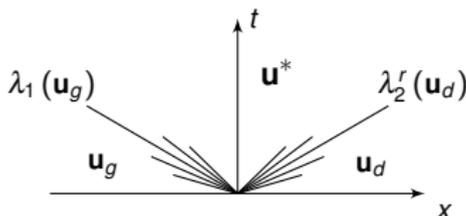
$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)) = \mathcal{M}(t), \quad t > 0$$

Approche par relaxation - hors couplage -

Système d'Euler isentropique

Strictement hyperbolique de valeurs propres : $\lambda_1 = u - c$ (VNL) et $\lambda_2 = u + c$ (VNL) où $c = \tau \sqrt{-p'(\tau)}$ est la vitesse du son dans le fluide.

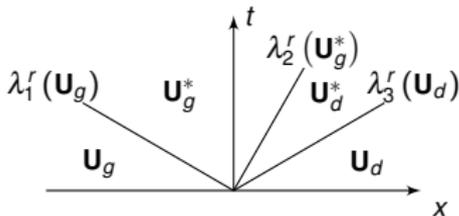
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\tau)) = 0 \end{cases}$$



Approche par relaxation

Strictement hyperbolique de valeurs propres : $\lambda_1^r = u - a\tau$ (LD), $\lambda_2^r = u$ (LD) et $\lambda_3^r = u + a\tau$ (LD). La variable π est la **pression de relaxation**.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \pi) + \partial_x(\rho \pi u + a^2 \pi) = \lambda \rho (\rho(\tau) - \pi) \end{cases}$$



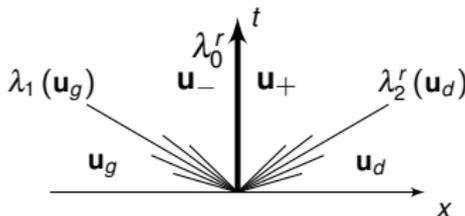
- $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \pi = \rho(\tau)$ ssi $a^2 > \max_{\tau} [-p'(\tau)]$

Approche par relaxation - couplage -

Système d'Euler isentropique

La masse de Dirac conduit à l'ajout d'une onde stationnaire, en $x = 0$, qui s'apparente à une **onde LD** : $\lambda_0 = 0$. On utilise les relations de **Rankine-Hugoniot**.

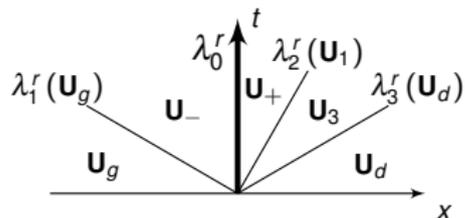
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\tau, x)) = \mathcal{M}_{\rho u}(t) \delta_{x=0}. \end{cases}$$



Approche par relaxation

Valeurs propres : $\lambda_0^r = 0$ (LD), $\lambda_1^r = u - a\tau$ (LD), $\lambda_2^r = u$ (LD) et $\lambda_3^r = u + a\tau$ (LD). Le terme source $\mathcal{M}_{\rho\pi}$ est un degré de liberté supplémentaire.

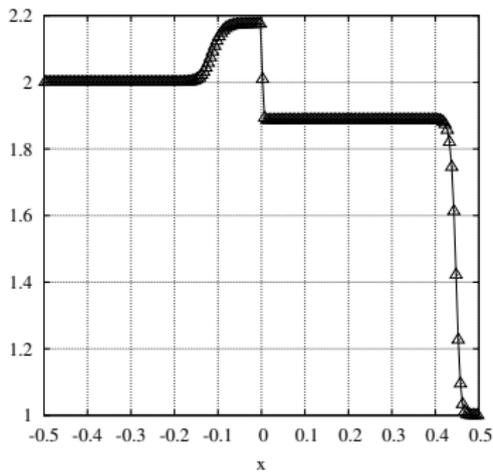
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = \mathcal{M}_{\rho u}(t) \delta_{x=0}, \\ \partial_t(\rho \pi) + \partial_x(\rho \pi u + a^2 \pi) = \mathcal{M}_{\rho \pi}(t) \delta_{x=0}. \end{cases}$$



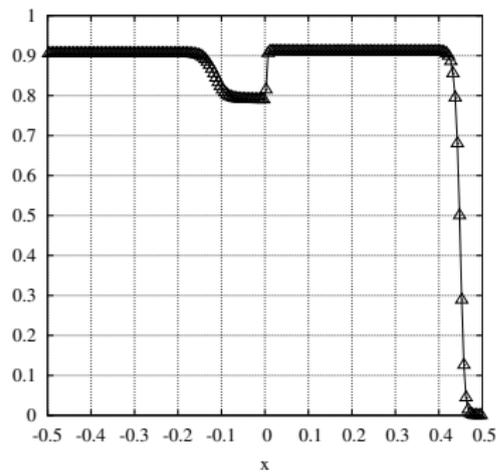
- Le terme source mesure est restaurer au niveau discret de manière **exacte**.

Résultats numériques

Couplage conservatif : 2-choc pur avec $(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho \pi}) = (0, 0)$



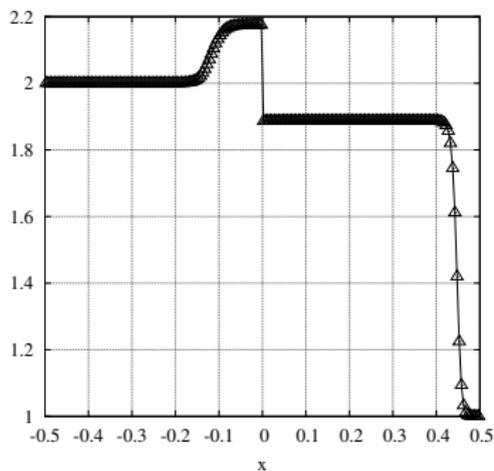
Densité



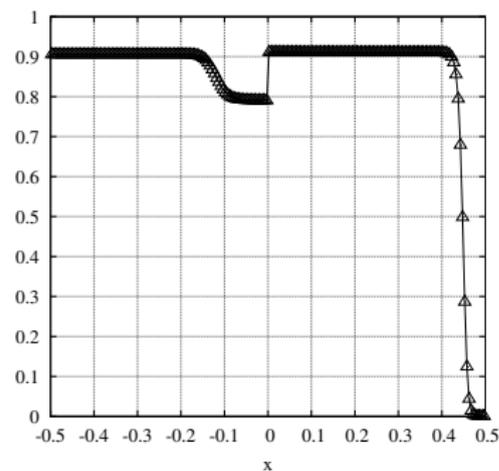
Vitesse

Résultats numériques

Couplage conservatif : 2-choc pur avec $(\mathcal{M}_{\rho U}, \mathcal{M}_{\rho \pi}) = (0, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$



Densité



Vitesse

Sommaire

- 1 Introduction générale
- 2 Couplage interfacial de modèles en dynamique des gaz
- 3 Couplage interfacial avec terme source mesure
- 4 Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions**
- 5 Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift-flux
- 6 Conclusion et perspectives

Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions

- On considère, **hors couplage**, le modèle bifluide à deux vitesses et deux pressions *isentropique par phase* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_1 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_1 \partial_x \alpha_1 = 0, \end{array} \right. \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

- $\alpha_k \in (0, 1), \rho_k > 0, u_k \in \mathbb{R}$: fraction, densité et vitesse de la phase k
- $p_k \equiv p_k(\rho_k) > 0$: pression de la phase k
- Condition de saturation : $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$
- Présence de termes non conservatif : **couplage entre les phases**
- Notation contractée

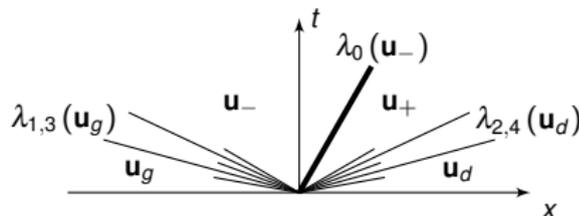
$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Etude du problème de Riemann

Structure de la solution du problème de Riemann

- Valeurs propres : $\lambda_0 = u_2(LD)$, $\lambda_1 = u_1 - c_1(VNL)$, $\lambda_2 = u_1 + c_1(VNL)$, $\lambda_3 = u_2 - c_2(VNL)$, $\lambda_4 = u_2 + c_2(VNL)$ avec $c_k = \sqrt{p'(\rho_k)}$
- Le système est hyperbolique dès que $u_1 \pm c_1 \neq u_2$
- Soit $\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d$ deux états constants. Le PR s'écrit, pour $x \in \mathbb{R}, t > 0$,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_g, & x < 0, \\ \mathbf{u}_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$



Difficultés

- Beaucoup de champs **VNL** (Ondes de chocs/détentes)
- Termes non conservatifs
- Possibilité de **résonance** (hors du régime d'étude)

Approche par relaxation

- La loi de pression de la phase $k = 1, 2$, suit la loi d'évolution suivante :

$$\alpha_k \rho_k \partial_t p_k - \rho_k^2 p'_k u_2 \partial_x \alpha_k + \alpha_k \rho_k u_k \partial_x p_k + \rho_k^2 p'_k \partial_x \alpha_k u_k = 0$$

- On remplace le terme de pression par la pression de relaxation π_k , $k = 1, 2$:

$$\alpha_k \rho_k \partial_t \pi_k - a_k^2 u_2 \partial_x \alpha_k + \alpha_k \rho_k u_k \partial_x \pi_k + a_k^2 \partial_x \alpha_k u_k = \lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k)$$

- On propose le système de relaxation suivant, pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) - \pi_1 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 \pi_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1) - a_1^2 u_2 \partial_x \alpha_1 = \lambda \alpha_1 \rho_1 (p_1 - \pi_1), \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2) + \pi_1 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 \pi_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 \pi_2 u_2 + a_2^2 \alpha_2 u_2) + a_2^2 u_2 \partial_x \alpha_1 = \lambda \alpha_2 \rho_2 (p_2 - \pi_2), \end{array} \right.$$

- $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \pi_k = p_k$ ssi $a_k > \max_{\rho_k} [\rho_k c_k(\rho_k)]$, $k = 1, 2$
- Notation contractée

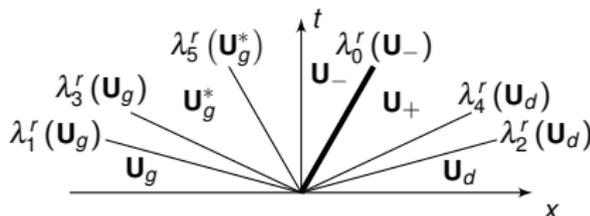
$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Approche par relaxation - Problème de Riemann

Structure de la solution du problème de Riemann

- Valeurs propres : $\lambda_0 = u_2(LD)$, $\lambda_1^r = u_1 - a_1 \tau_1(LD)$, $\lambda_2^r = u_1 + a_1 \tau_1(LD)$, $\lambda_3^r = u_2 - a_2 \tau_2(LD)$, $\lambda_4^r = u_2 + a_2 \tau_2(LD)$ et $\lambda_5^r = u_1(LD)$
- Le système est hyperbolique dès que $u_1 \pm a_1 \tau_1 \neq u_2$
- Soit $\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d$ deux états constants. Le PR pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

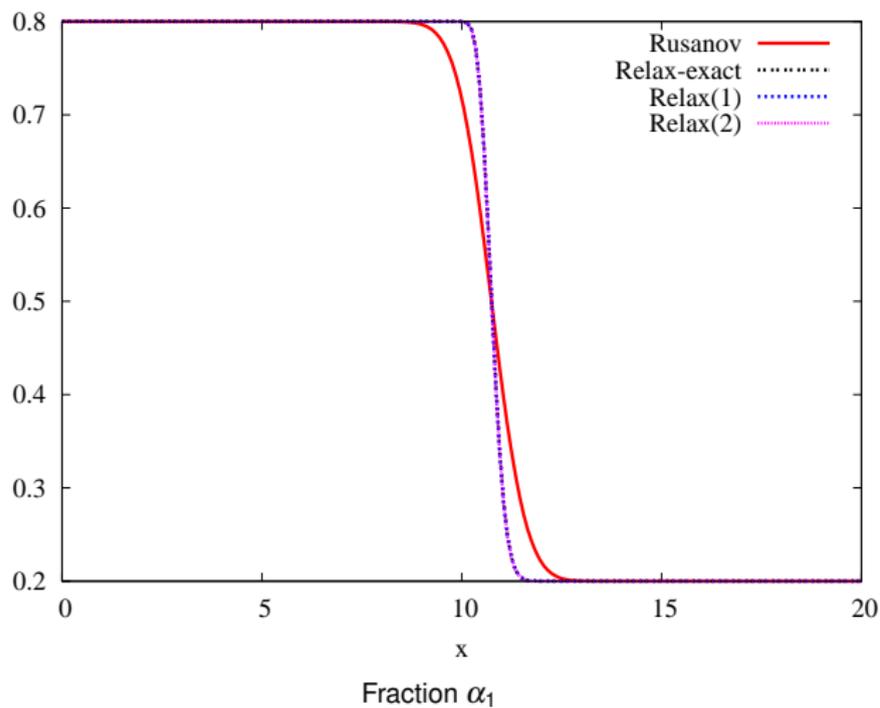


Résolution

- **Résolution itérative** : coûteuse et compliquée
- **Estimation des termes non conservatifs** : deux méthodes proposées

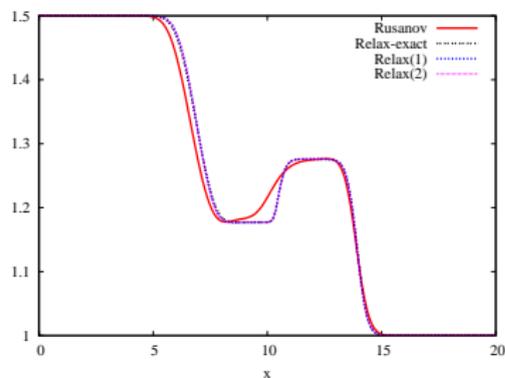
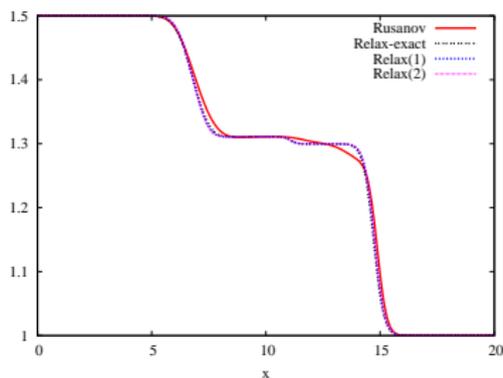
Résultats numériques

Tube à choc



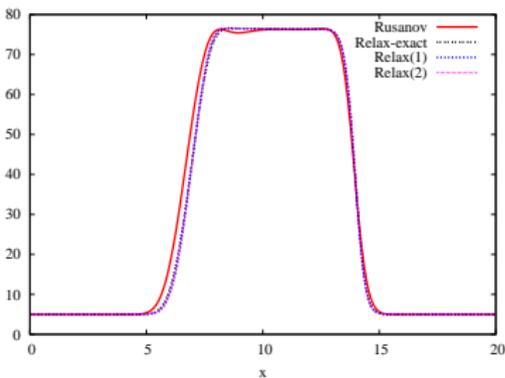
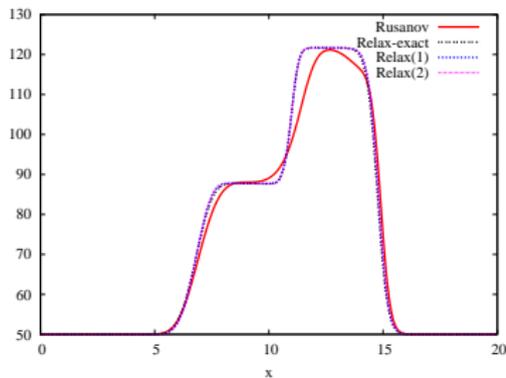
Résultats numériques

Tube à choc



Pression p_1

Pression p_2

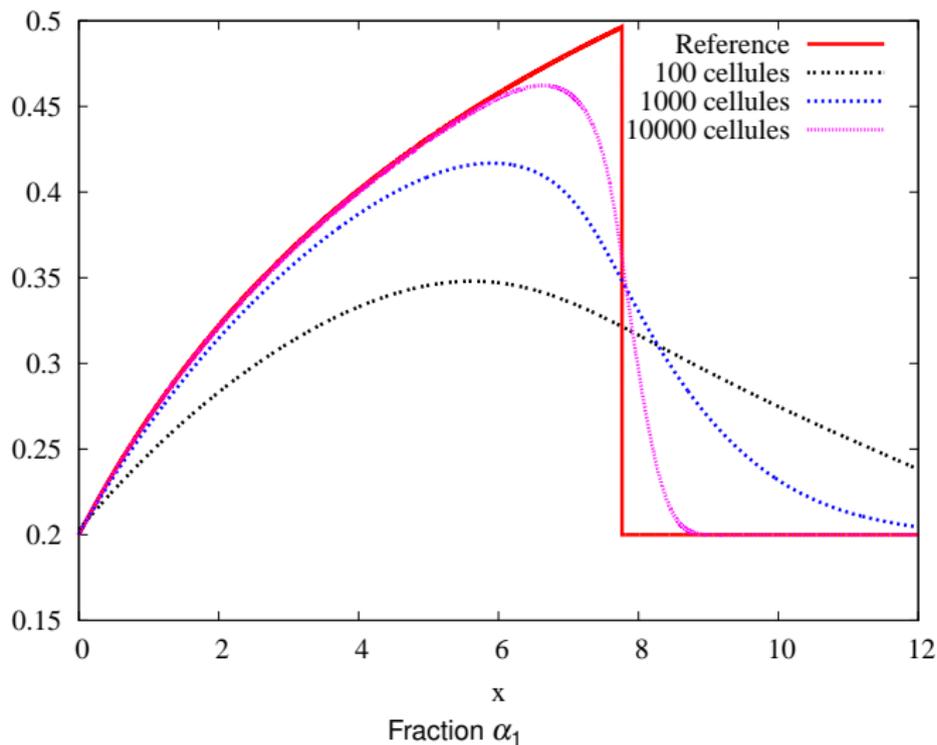


Vitesse u_1

Vitesse u_2

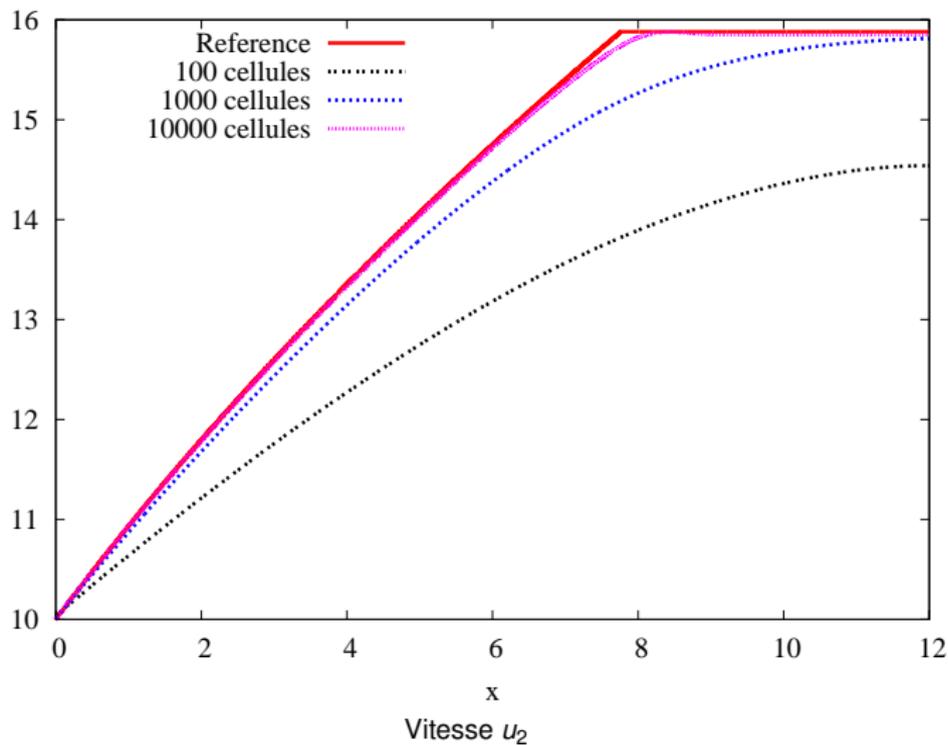
Résultats numériques

Robinet de Ransom



Résultats numériques

Robinet de Ransom



Sommaire

- 1 Introduction générale
- 2 Couplage interfacial de modèles en dynamique des gaz
- 3 Couplage interfacial avec terme source mesure
- 4 Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions
- 5 Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift-flux**
- 6 Conclusion et perspectives

Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift-flux

- **Modèle bifluide à deux pressions avec termes sources** : $x < 0, t > 0$,

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = \frac{\theta(\mathbf{u})}{\varepsilon^2} (\rho_1 - \rho_2), \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_1 \partial_x \alpha_1 = \alpha_1 \rho_1 f_1(\mathbf{u}) + \frac{\lambda(\mathbf{u})}{\varepsilon^2} |u_2 - u_1| (u_2 - u_1), \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_1 \partial_x \alpha_1 = \alpha_2 \rho_2 f_2(\mathbf{u}) - \frac{\lambda(\mathbf{u})}{\varepsilon^2} |u_2 - u_1| (u_2 - u_1). \end{cases}$$

- **Modèle de drift-flux** : $x > 0, t > 0$,

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{p} + \partial_x (\tilde{p} \tilde{u}) = 0, \\ \partial_t (\tilde{p} \tilde{Y}) + \partial_x (\tilde{p} \tilde{u} \tilde{Y} + \tilde{p} \tilde{Y} (1 - \tilde{Y}) \tilde{u}_r) = 0, \\ \partial_t (\tilde{p} \tilde{u}) + \partial_x (\tilde{p} \tilde{u}^2 + \tilde{p} + \tilde{p} \tilde{Y} (1 - \tilde{Y}) \tilde{u}_r^2) = \tilde{p} (1 - \tilde{Y}) \tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{p} \tilde{Y} \tilde{f}_2(\tilde{\mathbf{u}}). \end{cases}$$

La loi de pression $\tilde{p} \equiv \tilde{p}(\tilde{\rho})$ est donnée par la résolution du sous-système :

$$\begin{cases} \tilde{p} = \tilde{p}_1 (\tilde{\rho} (1 - \tilde{Y}) / (1 - \tilde{\alpha})), \\ \tilde{p}_1 (\tilde{\rho} (1 - \tilde{Y}) / (1 - \tilde{\alpha})) = \tilde{p}_2 (\tilde{\rho} \tilde{Y} / \tilde{\alpha}), \quad (\tilde{p}, \tilde{\alpha}) \in (0, +\infty) \times (0, 1) \end{cases}$$

Le système est fermé par la loi de drift $\tilde{u}_r = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{u}})$.

Dérivation du modèle de drift-flux

Théorème

Supposons que nous soyons dans le régime $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Alors les solutions du modèle bifluide à deux pressions vérifient, à $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ près, le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho u Y + \rho Y(1-Y)u_r) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p + \rho Y(1-Y)u_r^2) = \rho(1-Y)f_1(\mathbf{v}) + \rho Y f_2(\mathbf{v}), \end{cases}$$

avec $|u_r| u_r = \varepsilon^2 \frac{\rho Y(1-Y)}{\lambda(\mathbf{v})} \left(f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v}) + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) (\rho(1-Y)f_1(\mathbf{v}) + \rho Y f_2(\mathbf{v})) \right)$ et

$$\begin{cases} p = p_1(\rho(1-Y)/(1-\alpha_2)), \\ p_1(\rho(1-Y)/(1-\alpha_2)) = p_2(\rho Y/\alpha_2). \end{cases}$$

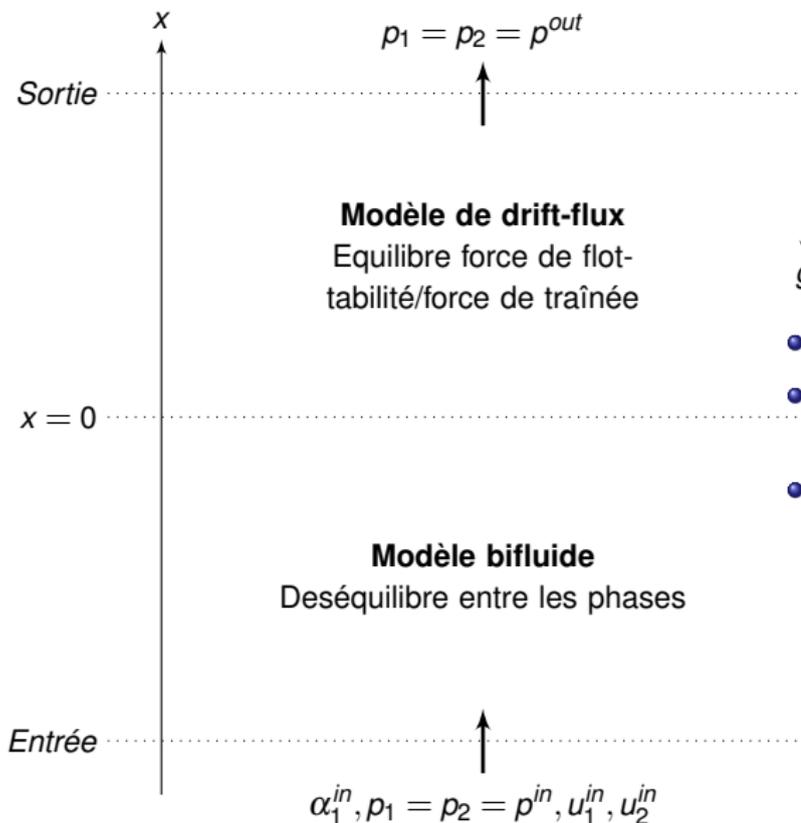
Principe

- Ecriture du modèle bifluide en variables de mélange

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2, & \rho u &= \alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2, & \rho Y &= \alpha_2 \rho_2, \\ u_r &= u_2 - u_1, & p &= \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, & p_r &= p_2 - p_1, \end{aligned}$$

- **Chapman-Enskog** sur u_r et p_r et passage en **coordonnées Lagrangiennes**

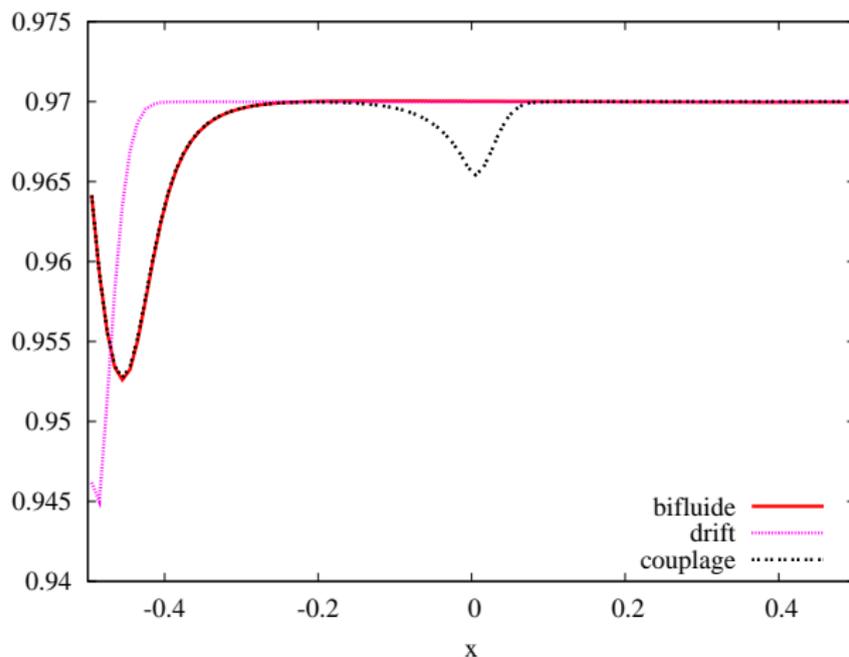
Colonne à bulles



- Technique du modèle père
- Décentrement des termes de relaxation en vitesses
- On applique différents ε

Résultats numériques

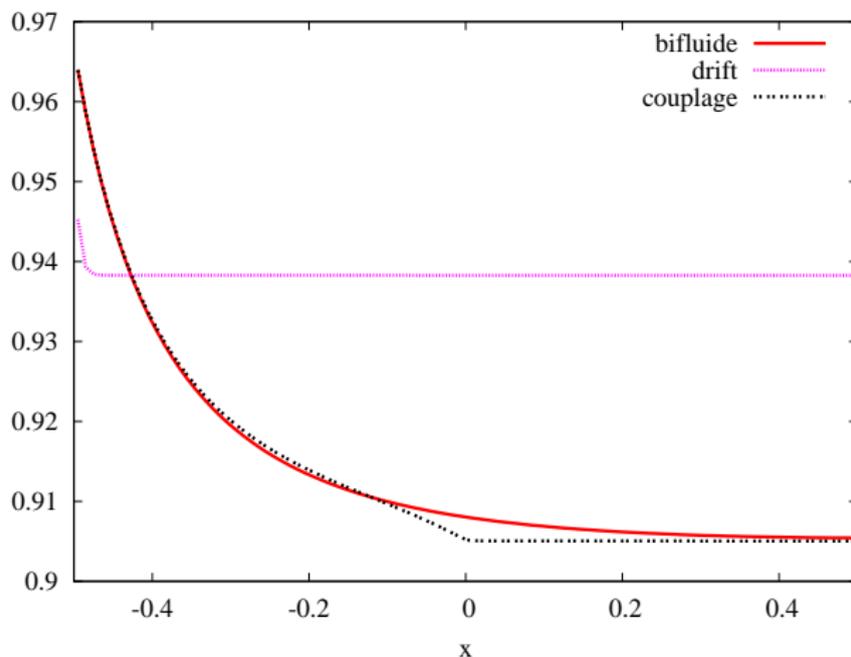
Colonne à bulles avec $\varepsilon^2 = 10^{-1}$



Fraction α_1 à $T = 5 \times 10^{-3}$ s

Résultats numériques

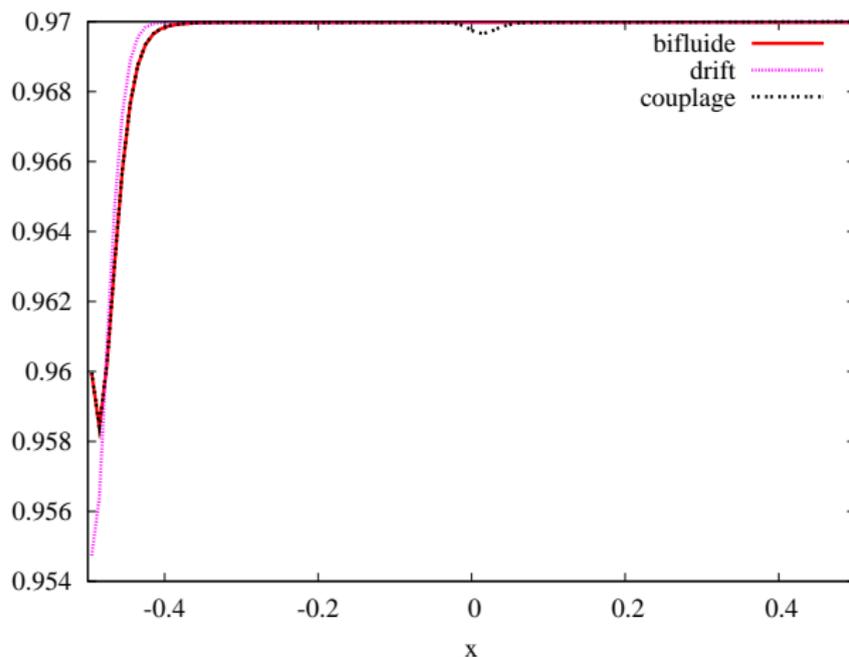
Colonne à bulles avec $\varepsilon^2 = 10^{-1}$



Fraction α_1 à $T = T_{sta}$

Résultats numériques

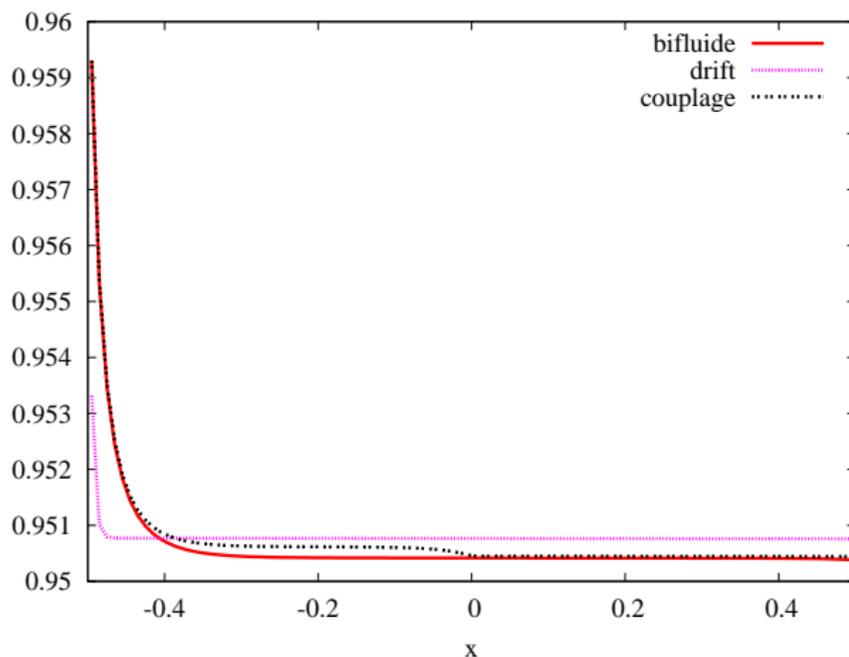
Colonne à bulles avec $\varepsilon^2 = 10^{-3}$



Fraction α_1 à $T = 5 \times 10^{-3}$ s

Résultats numériques

Colonne à bulles avec $\varepsilon^2 = 10^{-3}$



Fraction α_1 à $T = T_{sta}$

Bibliographie

Couplage interfacial de modèles

- A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, N. Seguin, *The Coupling of Homogeneous Models for Two-Phase Flows*, Int. J. Finite Volumes, 4 (1), 1–39, 2007.
- J.-M. Hérard, O. Hurisse, *Couplage interfacial d'un modèle homogène et d'un modèle bifluide*, H-I81-2006-04691-FR, EDF-DRD, 2006.

Approche par relaxation

- A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, N. Seguin, *A Relaxation Method for the Coupling of Systems of Conservation Laws*, Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications, Springer Berlin Heidelberg, 947–954, 2008.
- C. Chalons, F. Coquel, *Navier-Stokes Equations with Several Independent Pressure Laws and Explicit Predictor-Corrector Schemes*, Numer. Math., 101 (3), 451–478, 2005.

Modèle bifluide à deux pressions

- T. Gallouët, J.-M. Hérard, N. Seguin, *Numerical Modeling of Two-Phase Using the Two-Fluid Two-Pressure Approach*, M3AS, 14 (5), 663–700, 2004.
- D.W. Schwendeman, C. W. Wahle, A. K. Kapila, *The Riemann Problem and a High-Resolution Godunov Method for a Model of Compressible Two-Phase Flow*, J. Comput. Phys., 212, 490–526, 2006.

Sommaire

- 1 Introduction générale
- 2 Couplage interfacial de modèles en dynamique des gaz
- 3 Couplage interfacial avec terme source mesure
- 4 Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions
- 5 Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift-flux
- 6 Conclusion et perspectives**

Conclusion et perspectives

Travaux et avancées

- Mise en évidence des avantages et inconvénients de la condition de *couplage par flux* et des différentes conditions de *couplage par état*
- Contrôle des pertes de conservation par l'ajout d'un *terme source mesure* restauré numériquement de manière exacte par l'approche par relaxation
- Développement d'un schéma par *relaxation* pour le modèle bifluide
- Dérivation formelle du modèle de drift-flux à partir du modèle bifluide et réalisation du couplage bifluide/drift

Perspectives et applications

- Terme source mesure : couplage milieu libre/milieu poreux
- Extension de l'approche par relaxation au modèle avec énergie
- Développement dans un cadre industriel d'un coupleur
Exemple : couplage interfacial CATHARE-FLICA

Couplage de modèles d'écoulements diphasiques

Problème de couplage

HEM, $x < 0, t > 0$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p_E) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p_E u) = 0, \end{cases}$$

HRM, $x > 0, t > 0$

$$\begin{cases} \partial_t m_1 + \partial_x(m_1 u) = \lambda(m_1^*(\rho) - m_1), \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p_R) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p_R u) = 0. \end{cases}$$

$x = 0$

x

- z : taux de présence de la phase 1 et $m_1 = z\rho_1$ masse partielle de la phase 1
- $\rho_k, u_k, \varepsilon_k$: densité, vitesse et énergie interne de la phase $k = 1, 2$, avec $u_1 = u_2$
- Variables de mélange

$$\begin{cases} \rho = z\rho_1 + (1-z)\rho_2, \\ \rho \varepsilon = z\rho_1 \varepsilon_1 + (1-z)\rho_2 \varepsilon_2, \\ \rho = z\rho_1(\rho_1, \varepsilon_1) + (1-z)\rho_2(\rho_2, \varepsilon_2). \end{cases}$$

- **HEM** : Homogeneous Equilibrium Model, $p_E \equiv p_E(\rho, \varepsilon)$
- **HRM** : Homogeneous Relaxation Model, $p_R \equiv p_R(\rho, \varepsilon, m_1)$ avec $p_R(\rho, \varepsilon, m_1^*) \equiv p_E(\rho, \varepsilon)$ où m_1^* est la masse partielle de la phase 1 à saturation

Couplage de modèles d'écoulements diphasiques

Conditions de couplage

Approche globalement conservative : **couplage par flux**

Modèle père pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$:

$$\begin{cases} \partial_t m_1 + \partial_x(m_1 u) = \mu(x)(m_1^*(\rho) - m_1), \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E + p)u = 0, \end{cases} \quad \text{où } \rho = \rho^R(\rho, \varepsilon, m_1),$$

avec

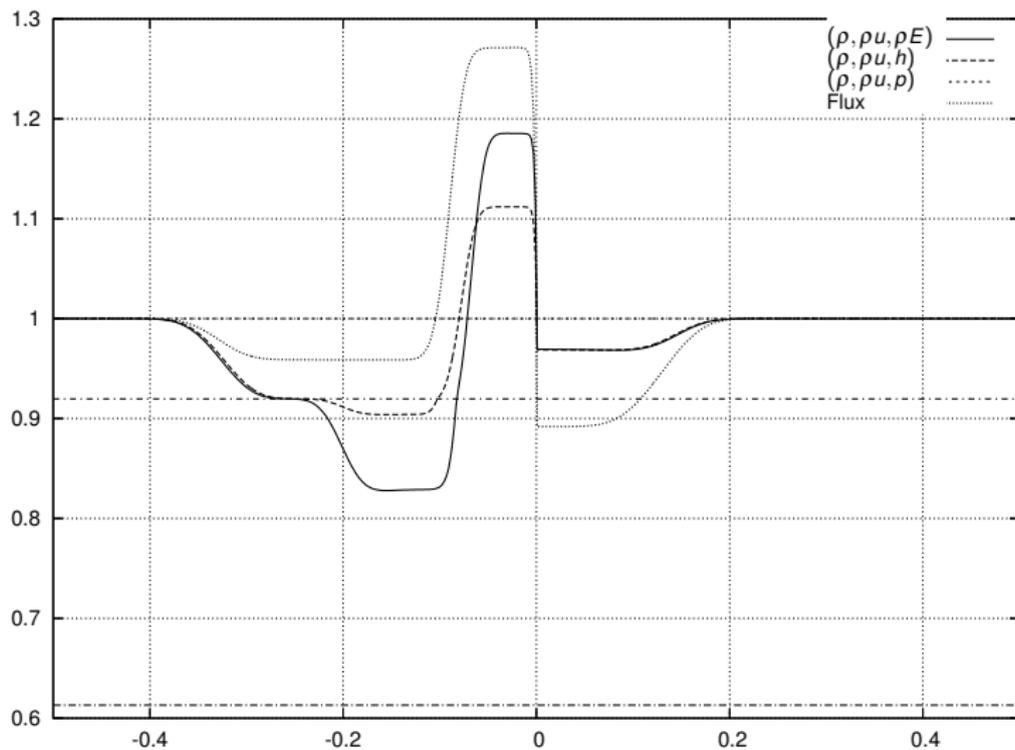
$$\mu(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0, \\ \lambda & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Approche non conservative : **couplage par état**

- en $x = 0$, le modèle HEM est complété par une condition de bord de type Dirichlet donnée par les trois dernières composantes de $\mathbf{u}^R(0^+, t)$;
- en $x = 0$, le modèle HRM est complété par une condition de bord de type Dirichlet donnée par le vecteur $(m_1^*(\rho(0^-, t)), \mathbf{u}^E(0^-, t))$.

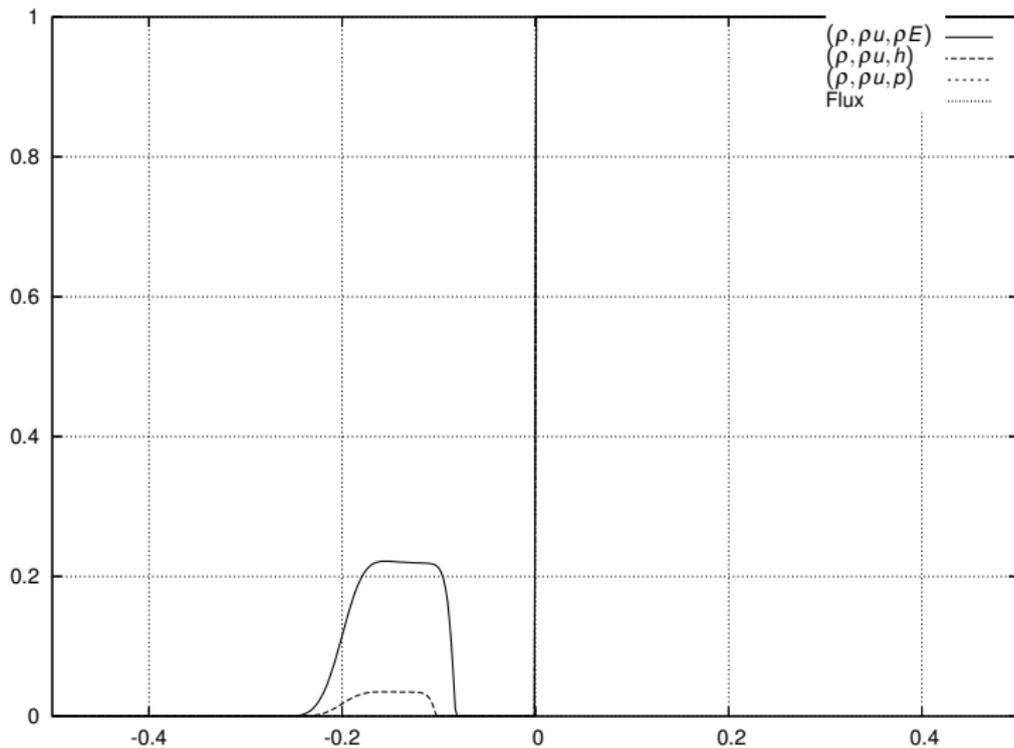
Couplage de modèles d'écoulements diphasiques

Profil uniforme en pression : *densité*



Couplage de modèles d'écoulements diphasiques

Profil uniforme en pression : *fraction de vapeur*



Couplage interfacial avec terme source mesure

Calcul d'un terme source optimal

- Soit la fonctionnelle convexe

$$\mathcal{J} : \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathcal{D}_{adm} \mapsto \mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}) \in \mathbb{R}.$$

- On résout à chaque itération en temps le *Problème d'Optimisation sous Contraintes* suivant :

Trouver un terme source optimal $\mathcal{M}_{\rho u}^o \in \mathcal{D}_{adm}$ tel que

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}^o) \leq \mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}), \forall \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathcal{D}_{adm}$$

- Exemple : **contrainte de perte de conservation maximale** via $\mathcal{M}_{\rho u}^{tol}$

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}) = \kappa \left(|\mathcal{M}_{\rho u}| - \mathcal{M}_{\rho u}^{tol} \right)_+^2 + \left(\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho u}^T \right)^2, \quad \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathcal{D}_{adm},$$

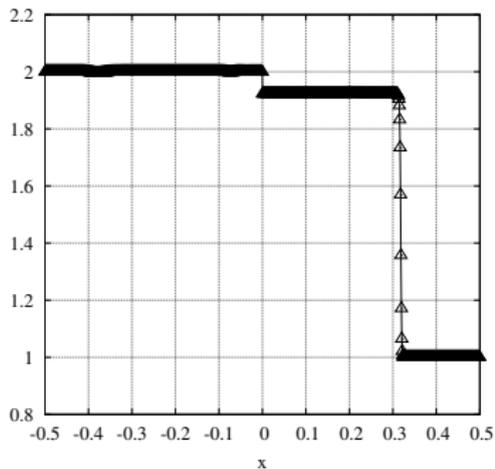
où on a noté

$$a_+ = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

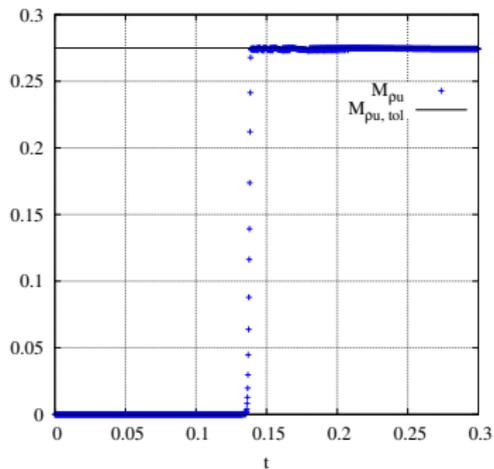
- Paramètre $\kappa \gg 1$ donné et fixé
- $\mathcal{M}_{\rho u}^T$: poids correspondant à condition de couplage par état en (ρ, u)

Couplage interfacial avec terme source mesure

Cas du 2-choc pur avec $\mathcal{M}_{\rho u}^{tol} = 0.275$



Densité



Terme source

Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift

Technique du modèle père (\equiv modèle bifluide à deux pressions)

- **Première étape**

La solution discrète du modèle père $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$ coïncide avec la solution du modèle bifluide pour $j < 0$ et avec le relèvement de la solution de drift :

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^n = \mathcal{R}\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^n, \quad j > 0.$$

- **Deuxième étape**

$\mathbf{u}_{j+1/2}^n, j \in \mathbb{Z} \rightarrow$ Méthode avec décentrement des termes sources \rightarrow Relaxation partielle des pressions \rightarrow Prise en compte de la gravité $\rightarrow \mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1-}, j \in \mathbb{Z}$

- **Troisième étape**

Solutions discrètes des deux modèles au temps t^{n+1} données par

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1-}, \quad j < 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{\alpha}_1)_{j+1/2}^{n+1-} = (\alpha_1)_{j+1/2}^{n+1-}, \\ (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\rho}_1)_{j+1/2}^{n+1-} = (\alpha_1 \rho_1)_{j+1/2}^{n+1-}, \\ (\tilde{\alpha}_2 \tilde{\rho}_2)_{j+1/2}^{n+1-} = (\alpha_2 \rho_2)_{j+1/2}^{n+1-}, \\ (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1)_{j+1/2}^{n+1-} + (\tilde{\alpha}_2 \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2)_{j+1/2}^{n+1-} = (\alpha_1 \rho_1 u_1)_{j+1/2}^{n+1-} + (\alpha_2 \rho_2 u_2)_{j+1/2}^{n+1-}, \\ (\tilde{u}_r)_{j+1/2}^n = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1-}), \end{array} \right. \quad j > 0.$$

Couplage interfacial d'un modèle bifluide avec un modèle de drift

Méthode avec décentrement des termes sources

- Soit la variable χ définie de la manière suivante :

$$\partial_x \chi = \frac{\lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1| (u_1 - u_2)}{\alpha_1 \rho_1 (u_1 - u_2)} = \frac{\lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1|}{\alpha_1 \rho_1}$$

et assujétie à l'équation de transport : $\partial_t \chi + u_2 \partial_x \chi = 0$

- On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_1 \partial_x \alpha_1 + \frac{m}{\varepsilon^2} \partial_x \chi = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_1 \partial_x \alpha_1 - \frac{m}{\varepsilon^2} \partial_x \chi = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 \chi) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 \chi u_2) = 0. \end{cases}$$

- $m = \alpha_1 \rho_1 (u_1 - u_2)$: débit de masse relatif et invariant de Riemann pour l'onde de couplage de vitesse u_2 (champ LD)
- Résolution du système *via* l'approche par **relaxation**