



**HAL**  
open science

# Modèles du champ électromagnétique aléatoire pour le calcul du couplage sur un équipement électronique en chambre réverbérante à brassage de modes et validation expérimentale

Cécile Fiachetti

► **To cite this version:**

Cécile Fiachetti. Modèles du champ électromagnétique aléatoire pour le calcul du couplage sur un équipement électronique en chambre réverbérante à brassage de modes et validation expérimentale. Autre. Université de Limoges, 2002. Français. NNT: . tel-00391379

**HAL Id: tel-00391379**

**<https://theses.hal.science/tel-00391379>**

Submitted on 3 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université des Sciences de Limoges  
UFR des Sciences et Techniques  
IRCOM - UMR CNRS 6615

ONERA Toulouse  
Département ElectroMagnétisme et Radar  
Compatibilité et Détection Electromagnétiques

THÈSE  
*pour l'obtention du grade de*  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

*Discipline* : Électronique  
*Spécialité* : Micro-ondes

présentée par  
Cécile Fiachetti

---

MODÈLES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ALÉATOIRE POUR LE  
CALCUL DU COUPLAGE SUR UN ÉQUIPEMENT ÉLECTRONIQUE EN  
CHAMBRE RÉVERBÉRANTE À BRASSAGE DE MODES ET VALIDATION  
EXPÉRIMENTALE

---

*13 Novembre 2002*

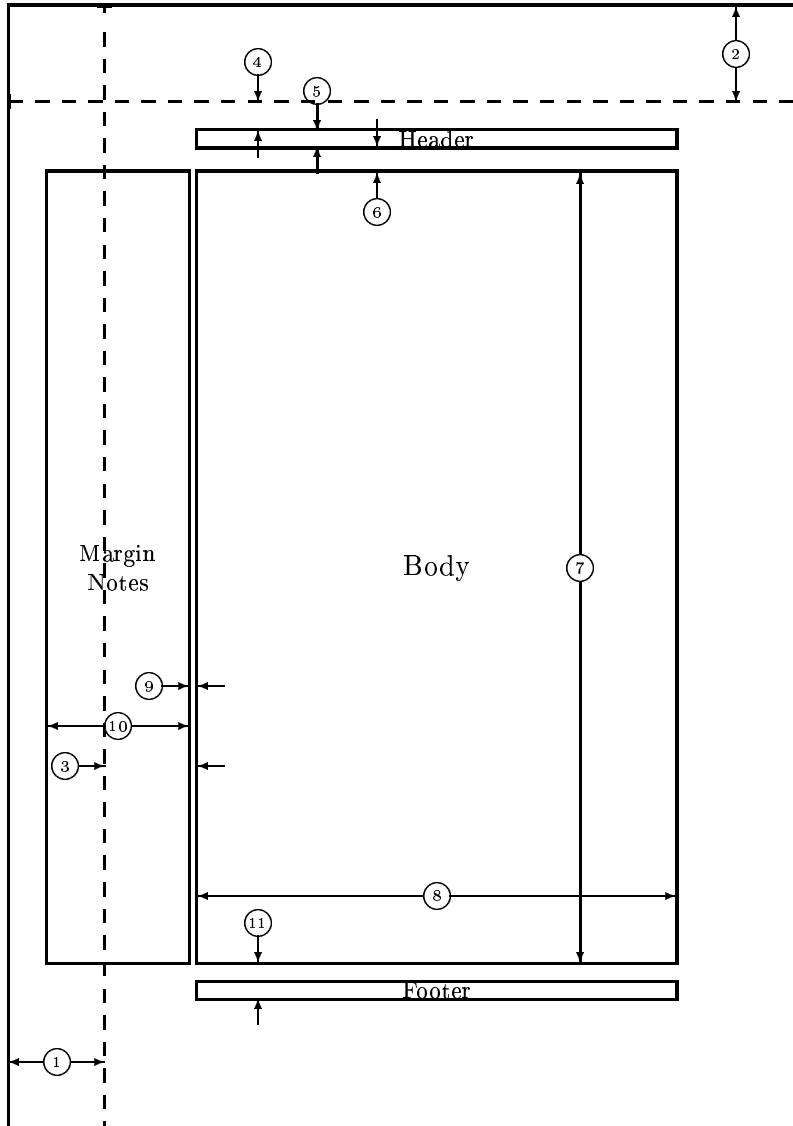
*Directeur de thèse* : Alain Reineix  
*Responsable Onera* : Bastiaan Michielsen

*Jury* : M. Canavero, Rapporteur  
M. Démoulin, Rapporteur  
M. Flourens  
M. Garault  
M. Girard

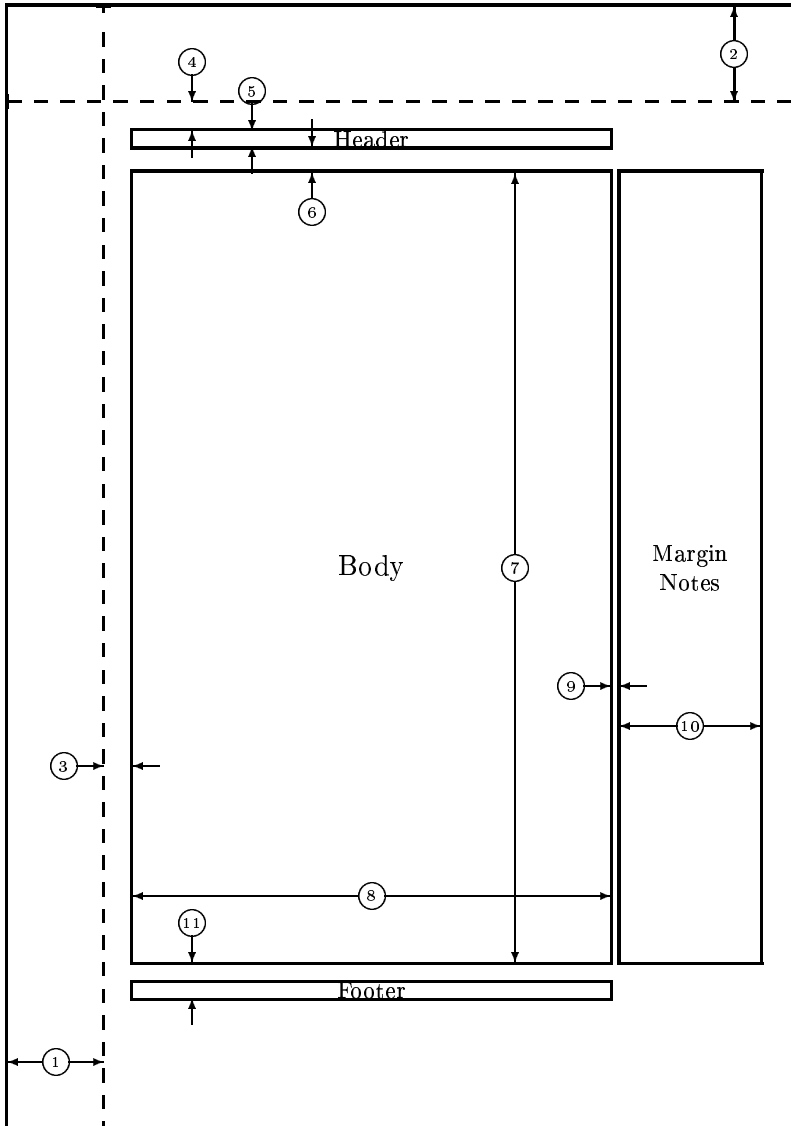


Chapitre 1

Test de mise en page



- |    |                        |    |                                  |
|----|------------------------|----|----------------------------------|
| 1  | one inch + \hoffset    | 2  | one inch + \voffset              |
| 3  | \evensidemargin = 70pt | 4  | \topmargin = 22pt                |
| 5  | \headheight = 12pt     | 6  | \headsep = 19pt                  |
| 7  | \textheight = 595pt    | 8  | \textwidth = 360pt               |
| 9  | \marginparsep = 7pt    | 10 | \marginparwidth = 106pt          |
| 11 | \footskip = 27pt       |    | \marginparpush = 5pt (not shown) |
|    | \hoffset = 0pt         |    | \voffset = 0pt                   |
|    | \paperwidth = 597pt    |    | \paperheight = 845pt             |



- |    |                       |    |                                  |
|----|-----------------------|----|----------------------------------|
| 1  | one inch + \hoffset   | 2  | one inch + \voffset              |
| 3  | \oddsidemargin = 22pt | 4  | \topmargin = 22pt                |
| 5  | \headheight = 12pt    | 6  | \headsep = 19pt                  |
| 7  | \textheight = 595pt   | 8  | \textwidth = 360pt               |
| 9  | \marginparsep = 7pt   | 10 | \marginparwidth = 106pt          |
| 11 | \footskip = 27pt      |    | \marginparpush = 5pt (not shown) |
|    | \hoffset = 0pt        |    | \voffset = 0pt                   |
|    | \paperwidth = 597pt   |    | \paperheight = 845pt             |

# Remerciements





# Citation



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Analyse du couplage en CRBM</b>	<b>19</b>
<b>1 Étude déterministe</b>	<b>25</b>
1.1 Description de la CRBM : notations et outils . . . . .	25
1.1.1 Le modèle électromagnétique . . . . .	26
1.1.2 Principe de réciprocité de Lorentz . . . . .	29
1.2 Les observables . . . . .	34
1.2.1 Paramètres $S$ et $Z$ . . . . .	34
1.2.2 Sources induites . . . . .	40
1.3 Conclusion . . . . .	46
<b>2 Étude probabiliste</b>	<b>49</b>
2.1 Étude expérimentale des statistiques des paramètres $[S]$ . . . . .	49
2.1.1 Protocole et moyens expérimentaux . . . . .	50
2.1.2 Comportement fréquentiel des paramètres $S$ . . . . .	51
2.1.3 Relation entre les paramètres $S$ . . . . .	60
2.2 Étude théorique de la variance des observables . . . . .	64
2.2.1 Variance des paramètres $S$ . . . . .	65
2.2.2 Variance de la tension de couplage . . . . .	72
2.3 Conclusion . . . . .	75
<b>II Modèles probabilistes a priori du champ dans une CRBM</b>	<b>79</b>
<b>3 Ondes planes aléatoires isotropes</b>	<b>83</b>
3.1 La CRBM idéale : le modèle de Hill . . . . .	83
3.1.1 Isotropie et homogénéité . . . . .	84
3.1.2 Énergie et puissance . . . . .	87
3.1.3 Covariance . . . . .	89
3.2 Application au calcul du couplage . . . . .	93
3.2.1 Variance de la tension induite . . . . .	93

3.2.2	Puissance moyenne disponible sur une antenne adaptée . . .	97
3.2.3	Mesure de calibration . . . . .	101
3.3	Résultats et conclusion . . . . .	104
3.3.1	Résultats . . . . .	104
3.3.2	Conclusion . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Modes guidés aléatoires pseudo-isotropes</b>	<b>107</b>
4.1	La CRBM «vraie» : le modèle des modes guidés . . . . .	107
4.1.1	Isotropie et homogénéité . . . . .	109
4.1.2	Énergie et puissance . . . . .	114
4.2	Covariance . . . . .	115
4.2.1	Allure de la covariance en basse fréquence . . . . .	116
4.2.2	Allure de la covariance à une fréquence intermédiaire . . . . .	124
4.2.3	Allure de la covariance pour une fréquence élevée . . . . .	132
4.3	Comparaison avec la mesure . . . . .	140
4.3.1	Énergie emmagasinée dans la CRBM . . . . .	140
4.3.2	Application au calcul du couplage . . . . .	141
4.3.3	Résultats . . . . .	142
4.4	Conclusion . . . . .	149
<b>III</b>	<b>Calcul numérique du champ dans une CRBM</b>	<b>153</b>
<b>5</b>	<b>Développement modal calculé par différences finies dans le domaine fréquentiel</b>	<b>155</b>
5.1	Les différences finies dans le domaine fréquentiel . . . . .	156
5.1.1	Mise en œuvre de la méthode des FDFD . . . . .	157
5.1.2	Équation de Helmholtz . . . . .	161
5.1.3	Application . . . . .	162
5.2	Calcul des amplitudes des modes guidés . . . . .	164
5.2.1	Expression des amplitudes des modes guidés . . . . .	165
5.2.2	Utilisation des FDFD et résultats . . . . .	170
5.3	Conclusion . . . . .	172
	<b>Conclusion</b>	<b>173</b>
<b>A</b>	<b>Méthodes statistiques</b>	<b>179</b>
	<b>Annexes</b>	<b>179</b>
<b>B</b>	<b>Calcul de la loi isotrope d'ordre N</b>	<b>183</b>
<b>C</b>	<b>La base orthonormale complète des modes guidés</b>	<b>187</b>

---

<b>D</b>	<b>Expression du tenseur de covariance pour le modèle de Hill</b>	<b>193</b>
----------	---	------------



# Introduction

Depuis ces 25 dernières années, l'utilisation de l'électronique se généralise dans tous les secteurs d'activités qu'ils soient grand public, industriels ou militaires. D'une part, les équipements fonctionnent à des niveaux toujours plus faibles, à des fréquences toujours plus élevées et exigent un niveau de fiabilité toujours plus sévère. D'autre part, ces équipements, par exemple dans le domaine aéronautique, doivent évoluer dans une ambiance électromagnétique de plus en plus perturbée car ils sont confrontés aux champs rayonnés par les radars, aux courants induits de coups de foudre ou encore aux autres équipements eux-mêmes cohabitant dans des soutes ou des cockpits (plus généralement, des cavités dans lesquelles les niveaux d'énergie du champ électromagnétique sont importants).

L'objectif des recherches en Compatibilité ElectroMagnétique (CEM) est de rendre le fonctionnement d'un système sensible compatible avec son environnement électromagnétique : l'équipement doit agir le moins possible sur son environnement et, réciproquement, l'environnement électromagnétique ne doit pas perturber l'équipement. Le but de ces recherches est donc de réduire les perturbations électromagnétiques ou leurs effets (les couplages électromagnétiques), ces perturbations peuvent être générées soit par une partie du système lui-même (alimentation électrique utilisant les hacheurs, par exemple) soit par des sources extérieures (radar, foudre...).

Le domaine de la CEM s'articule donc naturellement autour de 3 axes :

- la caractérisation des sources de perturbation et des champs électromagnétiques associés ;
- l'étude de tous les modes de couplages électromagnétiques possibles entre perturbateur et perturbé ;
- les simulations et tests devant à terme aboutir à l'élaboration de techniques de protection.

Déterminer la source perturbatrice n'est pas le plus évident. Dans le cockpit d'un avion par exemple, on ne connaît pas exactement le champ susceptible de perturber le comportement des systèmes électroniques. De manière générale, on ne maîtrise jamais exactement l'ambiance électromagnétique dans laquelle les équipements devront fonctionner (à savoir s'ils seront directement agressés ou non par le champ électromagnétique perturbateur). C'est pourquoi on fait appel à des tests de natures différentes (dans leur type d'agression) qui nous renseignent sur les limites de fonctionnement des systèmes. Il existe 2 grandes catégories d'essais :

- les essais en conduction pour qualifier la «propagation» de la perturbation le

- long des câbles et entre les équipements ;
- les essais en propagation libre (en chambres anéchoïdes, en général) : ces essais impulsionsnels ou harmoniques permettent de qualifier un équipement mais ne simulent pas un environnement réel.

Ces deux configurations ne prennent pas toujours bien en compte les phénomènes de couplage à l'intérieur de cavités : ces essais sont difficiles à mettre en place et contraignants sur le niveau des agressions sur les systèmes électroniques. Ceci occasionne des coûts plus importants dès lors que l'on veut avoir des champs de quelques  $\frac{kV}{m}$ . Et puis, on veut aussi tester des équipements de grande taille. Les simulations numériques deviennent alors plus laborieuses et une description systématique des phénomènes devient impossible à cause de leur temps de calcul prohibitif.

Dans ce contexte de rentabilité, les **C**hambres **R**éverbérantes à **B**rassage de **M**odes (CRBM) ont fait leur apparition peu à peu dans le monde industriel. Elles sont utilisées pour créer un environnement électromagnétique perturbateur permettant une évaluation rapide de la susceptibilité des équipements électroniques soumis à des champs forts.



## État de l'art

Les Chambres Réverbérantes à Brassage de Modes sont nées du besoin des constructeurs de valider rapidement le bon fonctionnement des systèmes électroniques devant fonctionner dans des cavités ou dans des ambiances à grande énergie électromagnétique. Or, pour l'industriel comme pour le chercheur, les besoins de fiabilité exigent de tester les propriétés suivantes :

- être **reproductible** pour assurer la validité du test,
- être **prédictif** dans la mesure où l'on pourra caractériser «sûrement» le système,
- être **exhaustif**, ce qui signifie que le test fait intervenir tous les types possibles d'agression pour ne pas «manquer» le cas le plus défavorable pour le fonctionnement du système. (Ceci est nécessaire pour les normes industrielles et gouvernementales.),
- être **réaliste**, ce qui sous entend que la répartition de puissance doit correspondre à celle communément trouvée dans l'environnement dans lequel doit «vivre» le système pour s'assurer que celui-ci soit soumis au même environnement électromagnétique que dans la réalité [36].

Dans les années 40, la première étape a été de tester le système électronique à l'intérieur de cavités métalliques très grandes devant la longueur d'onde de travail. En effet, les propriétés du métal permettent aux parois de réfléchir le champ électromagnétique et donc de confiner une grande énergie dans le volume de la cavité.

Toutefois, pour une configuration de mesure, le niveau du champ varie beaucoup d'un point à l'autre de la cavité. Ceci est dû à la structure modale du champ électromagnétique : les maximums et les minimums du champ sont en des endroits bien distincts dans la cavité. À l'époque, la reproductibilité du test semblait donc compromise puisque la mesure variait au moindre changement de position du système. Elle dépendait aussi des vibrations de la structure globale. D'autre part, la structure modale du champ n'était pas aussi riche que ce que souhaitaient les industriels : ceci compromettait l'exhaustivité du test. Compte tenu de ces impératifs, une mesure déterministe n'était plus envisageable.

L'idée de la CRBM a consisté à tirer parti de l'instabilité de la mesure dans la cavité réverbérante (mesure variant avec la position du système dans une cavité). Puisque la nature modale de la cavité fait varier énormément le champ d'un point à l'autre pour une géométrie donnée de la cavité, on a choisi de modifier les conditions du test (modification de la géométrie) pour exciter le système sous toutes les configurations possibles. Les maximums et les minimums de champs se retrouvent alors redistribués dans le volume de la cavité. Si on modifie la géométrie un nombre suffisant de fois, on peut espérer forcer le maximum d'énergie au moins une fois en tout point de la cavité.

On ne relève plus une seule mesure mais plusieurs, échantillonnées selon le nombre de géométries, et on compare alors les propriétés statistiques de l'ensemble. L'essai CRBM s'est donc révélé de nature statistique.

Puisque les différentes configurations de test ont permis plusieurs configurations modales du champ, on a alors parlé de brassage de modes. Le brevet a été déposé dès 1947 aux États-Unis mais il faut attendre 1968 pour voir paraître les premiers papiers sur cette nouvelle technique de mesure. Les premières applications américaines commencent dans les années 1970. Le NIST <sup>1</sup> commence des études systématiques à la fin des années 70 ainsi que l'Europe (en particulier, le Royaume-Uni [28] et l'Italie [21][24][20][19]).

Depuis le dépôt du brevet, les études ont surtout été consacrées à la validation de l'agression électromagnétique du test CRBM et sur le protocole idéal de mesure. En effet, si le test est devenu reproductible en introduisant l'aspect statistique, il fallait encore caractériser la nature aléatoire de ce test et surtout son exhaustivité. Ce dernier critère est fondamental puisqu'il décide si les tests en CRBM sont prédictifs.

Pour répondre à ces attentes, on attend donc que le champ de la CRBM suive les deux propriétés suivantes :

- l'**isotropie** : elle désigne le fait que toutes les directions du champ sont possibles. Par direction, on entend direction de propagation d'ondes planes équivalentes mais aussi direction de polarisation de ces ondes planes. Cette notion doit être prise au sens statistique : même si toutes les directions n'existent pas en même temps pour chaque configuration de test, elles doivent apparaître si le nombre de ces configurations est suffisant. L'isotropie assurerait l'exhaustivité du test ;
- l'**homogénéité** : c'est à dire qu'en moyenne le même niveau de champ se retrouve partout dans la CRBM. Ainsi, quelle que soit la position du système dans la CRBM, le résultat du test est identique.

Ces deux propriétés ont alors des conséquences sur le comportement statistique du champ : il est admis que ses composantes cartésiennes qui sont des variables complexes doivent suivre une loi gaussienne. Leur parties réelles et imaginaires sont de moyenne nulle et ont un écart-type  $\sigma$ . Il est également admis que les variations de ce champ doivent être indépendantes d'un point à l'autre de la cavité. Lorsque ces caractéristiques statistiques sont validées, on est alors en mesure de prédire le niveau des pics de maximum de champ et sa loi de probabilité [94].

Il restait à réaliser un tel champ statistique. Plusieurs solutions étaient possibles :

- le brassage dit **mécanique** : on introduit une structure métallique qui tourne autour d'un axe fixe : c'est ce qu'on appelle le «brasseur». Ses dimensions doivent être conséquentes : au moins de la longueur d'onde du premier mode de résonance de la chambre. Pour perturber le plus possible la structure modale du champ, il est préconisé qu'il soit dissymétrique (figure 1).

---

<sup>1</sup>National Institute of Standards and Technology

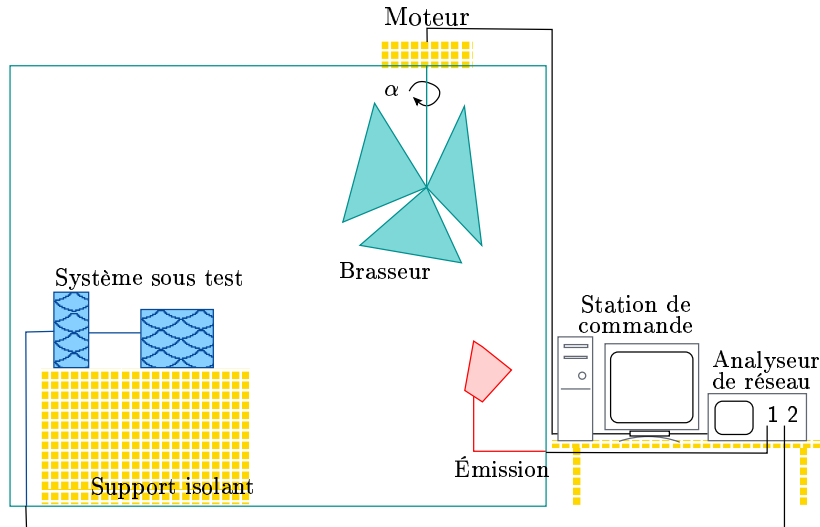


FIG. 1 – Principe du brassage mécanique

- le brassage dit **électronique** : la cavité dispose d'une excursion de fréquence contrôlée par un bruit large bande. Cette technique est plus récente parce qu'elle exploite de nouvelles possibilités technologiques [85][58].

Pour valider ces tests en CRBM, deux approches ont été suivies : d'abord expérimentale puis théorique.

Tout d'abord sont apparus des tests de qualification des CRBM. Ces tests se concentrent essentiellement sur la loi de probabilité mesurée sur le champ de la CRBM et aussi sur son facteur de qualité. Si la statistique du champ relevé dans une CRBM est comparable à la distribution souhaitée (loi de probabilité gaussienne) alors la CRBM est considérée comme réalisant un bon brassage. Un bon brassage semble effectif à partir d'une fréquence de coupure basse de la CRBM. Ses travaux concernent en fait la répétabilité du test de la CRBM. Il en a découlé une norme (par exemple la DO160) [111][100][109][82][102].

Le facteur de qualité  $Q^2$  est également déterminant pour évaluer la performance de la chambre réverbérante. C'est une donnée globale qui permet de connaître la capacité de la CRBM à retenir l'énergie autour du système sous test mais aussi son allure en fonction de la fréquence permet de qualifier la manière dont l'énergie se répartit entre tous les modes de la cavité. Pour avoir la meilleure excitation possible, il faut que les modes soient également représentés pour ne pas favoriser un mode par rapport aux autres. Le facteur de qualité  $Q$  est donc le résultat de deux compromis : avoir un maximum de champ le plus élevé possible ( $Q$  grand) et maintenir cette énergie sur une bande de fréquences la plus large possible ( $Q$  petit). Il nous donne aussi le rapport de la densité scalaire moyenne de puissance dans la CRBM sur la puissance injectée par le générateur : on peut donc connaître la puissance nécessaire

<sup>2</sup>Celui-ci est mesuré comme d'habitude, par contre il est moyenné sur le nombre d'orientations du brasseur

à injecter pour obtenir un ordre de grandeur du champ en  $V/m$  [70][92].

Les tests en CRBM ont été réalisés sur de nombreux systèmes : câbles, joints, impédance de transfert, systèmes avioniques, plus récemment des applications ont été réalisées dans le domaine automobile [5][70][43][98][75][64][7]. Des comparaisons ont été faites avec les différents tests déjà existant et en particulier les chambres anéchoïdes. En haute fréquence, dans les CRBM, les systèmes rayonnent en moyenne comme en espace libre. Les résultats moyens dans les CRBM sont équivalents à ceux trouvés dans les chambres anéchoïdes lorsqu'on mesure un grand nombre d'incidences. Dans ce cas, le résultat est obtenu bien plus rapidement dans une CRBM (de l'ordre de huit fois plus vite) [48][35][69].

Dans une CRBM contrairement aux chambres anéchoïdes, la directivité de l'antenne ou d'un capteur perd son sens et seules les pertes par insertion suffisent pour connaître la puissance couplée dans la CRBM. C'est pourquoi la question de l'apparition du pire cas subsiste : dans une CRBM, toutes les directions apparaissent-elles sur le système et en particulier la plus compromettante ?

Des tests de qualification ont été également menés dans le domaine temporel. Le temporel a été préconisé pour la mesure du facteur de qualité et a fait ressortir la difficulté de prendre en compte le temps de réponse des appareils. À partir des années 70, les tests en CRBM se scindent en deux approches [31][73] :

- le pas à pas ou **mode tuning** : plutôt utilisé pour éprouver les tests d'efficacité de blindage et de recherche du cas le plus contraignant pour le système. On fait l'acquisition pour chaque état stationnaire du champ correspondant à chaque position de brasseur. À chaque position de brasseur, il y a un balayage en fréquence. La contrepartie du balayage en fréquence peut être la mauvaise prise en compte du temps de réponse des systèmes ;
- le brassage à proprement parler ou le **mode stirring** : utilisé dans la recherche d'une méthode de test de fiabilité des équipements. Le brasseur tourne continuellement. Cette mesure apporte une autre information, la réponse temporelle du système à l'agression CRBM.

Au fil du temps, le brassage mécanique en fréquentiel s'est imposé. Même s'il n'y a toujours pas de réelle théorie pour concevoir un bon brasseur de modes, des méthodes et un certain savoir-faire existent. Les dimensions du brasseur doivent être conséquentes : au moins la longueur d'onde du premier mode de résonance de la chambre. Il doit également être dissymétrique.

Maintenant que les caractéristiques d'un bon brassage sont admises, des études sont menées pour étendre l'utilisation des CRBM en basse fréquence [104][53][42][27] : la forme du brasseur et de la cavité sont étudiées à la fois de façon numérique (essentiellement par la méthode des FDTD<sup>3</sup> [6][113][47][62][2]) et de façon expérimentale. En basse fréquence, de nombreuses études sont menées sur l'ajout de diffuseurs comme c'est le cas en acoustique [97][74]. Les diffuseurs sont des discontinuités que l'on « colle » aux parois de la cavité pour qu'elles ne soient plus lisses. Il existe même des études sur des parois de la cavité non rigides que l'on fait vibrer (ces cavités sont

---

<sup>3</sup>Finite Differences Time Domain

---

appelées VIRC pour Vibrating Intrinsic Reverberation Chamber)[81].

En parallèle des travaux expérimentaux, les études théoriques se sont développées surtout dans les années 90. Une grande part des études menées ont eu pour but de démontrer que le comportement du champ dans la CRBM est bien isotrope. Or, le champ peut être modélisé de deux manières différentes :

- un ensemble d’ondes planes (ou rayons) provenant de toutes les directions possibles. Ce modèle est adapté pour décrire l’isotropie ;
- par les modes électromagnétiques de cavité parallélépipédique.

C’est d’ailleurs par la description en modes de cavité que les études théoriques ont commencé. Elles ont d’abord décrit le facteur de qualité des cavités en général puis des CRBM. La formule de Weyl décrit le nombre de modes dans la cavité en fonction de la fréquence. On peut également citer les travaux de Dunn dans les années 80 qui font ressortir que le facteur de qualité des CRBM est conduit par les pertes dans les parois [29]. Ceci a alimenté des études expérimentales pour ajuster le facteur de qualité des CRBM en rajoutant des absorbants.

En 1993, la théorie statistique des cavités complexes aléatoires de Lehman marque le début de la modélisation des CRBM. Cette théorie reprend l’expression des modes de cavités mais introduit également la nature aléatoire du champ, en passant par sa loi de probabilité et la corrélation spatiale de ce champ. Cette approche a été reprise dans toutes les études qui ont suivies [56].

A la fin des années 90, les travaux Hill proposent de modéliser la CRBM idéale à l’aide d’un modèle d’ondes planes aléatoires isotropes. Il peut alors relier la puissance moyenne dans la CRBM à l’écart-type du champ du modèle. Il relie également cet écart-type à la puissance mesurée par un dipôle [61][55][60][54][59][57][58][56].

Très récemment (1999-2001), Luk Arnaut s’intéresse à qualifier les imperfections locales de la CRBM. Ces travaux mettent en évidence l’effet du système sur la structure du champ, surtout en basse fréquence et les corrections sur les mesures. Il caractérise la CRBM par des coefficients d’anisotropie et d’inhomogénéité [4][3].

## Plan de la thèse

Au début de la thèse, les travaux sur les CRBM posent encore deux questions fondamentales :

- les CRBM réelles proposent elles toutes les directions possibles au système ?
- si oui, dans quelles limites basses fréquences, ce comportement est il valide ?

On constate alors que les études des CRBM se limitent à la caractérisation du champ incident sur le système à tester. Le couplage du champ sur l'équipement est pourtant au cœur du problème. Cette thèse vise à ouvrir une nouvelle direction de recherche en plaçant le couplage au centre de l'étude.

En effet, pour caractériser le champ de la CRBM, la mesure n'est jamais directe : elle passe toujours par le couplage sur un capteur ou sur un système à caractériser. Or, si le couplage dépend de la structure du champ environnant, il ne nous permet pas de décrire complètement ce champ. Et rares sont les études consacrées au couplage du champ sur les systèmes testés à l'intérieur de cavité.

C'est pourquoi, dans cette thèse, on propose d'étudier et d'analyser le couplage sur les systèmes testés dans des cavités. Cette étude sera appliquée au cas des CRBM pour lesquelles le brassage est effectué de façon mécanique. Elle se limitera aux systèmes linéaires en régime harmonique.

Dans ce but, une étude théorique du couplage sera proposée dans une première partie. Aussi bien de façon déterministe que probabiliste, nous mettrons en place un outil pour évaluer le couplage dans les cavités.

Dans le chapitre 1 une démarche déterministe conduit à une représentation intégrale du couplage du champ sur le port de l'équipement. Ce couplage peut être exprimé sous la forme d'un générateur équivalent de Thévenin ou comme des perturbations des paramètres  $S$ . Le même type d'approche nous renseigne également sur la relation entre les variations du couplage et les variations électromagnétiques et/ou géométriques de l'environnement.

Ces relations constituent la base de l'étude probabiliste présentée dans le chapitre 2. Si l'orientation du brasseur dans une CRBM est considérée comme une variable aléatoire, alors le champ incident sur l'équipement devient lui-même aléatoire et les matrices  $[S]$  ou  $[Z]$  de l'équipement deviennent également aléatoires. Si ce champ caractérise une CRBM idéale alors il a été démontré qu'une nouvelle relation entre les variances de différents paramètres est vérifiée. Dans ce même chapitre 2, le couplage est également caractérisé en fonction de la covariance spatiale du champ incident. (Des travaux sur la covariance du champ d'une CRBM idéale ont d'ailleurs été publiés au cours de la thèse en 2001 [110].) Ces deux résultats constituent une contribution originale de la thèse.

C'est pourquoi, dans une seconde partie, l'étude consacrée à la modélisation du champ aléatoire de la CRBM. Cette modélisation probabiliste reprendra tout d'abord dans le chapitre 3 le modèle en ondes planes de Hill. Le défaut de ce modèle est qu'il ne représente pas un champ satisfaisant aux conditions aux limites des parois de la CRBM.

Afin d'étudier une éventuelle influence des parois, un nouveau modèle en modes guidés sera introduit dans le chapitre 4. Il établira un lien entre l'isotropie décrite par les ondes planes et les contraintes imposées par les parois de la cavité. Ces deux modèles de champ seront appliqués au couplage sur les systèmes et les résultats des simulations seront comparés aux couplages issus de l'expérimentation. Ce nouveau modèle qui répartit uniformément l'énergie dans les directions d'incidence plutôt que de seulement répartir uniformément les directions d'incidence est également une contribution originale de la thèse.

Finalement, dans une troisième partie, un calcul numérique sera présenté dans le chapitre 5. Il a pour but de consolider les hypothèses du modèle probabiliste en développement modal. Ce calcul sera associé à une méthode pour retrouver la structure modale du champ pour chaque position de brasseur. Ce calcul sera associé à une méthode pour retrouver la structure modale du champ pour chaque position de brasseur. À l'heure actuelle seulement quelques tests préliminaires ont pu être effectués et une étude ultérieure devrait apporter des résultats plus concluants.





Première partie

Analyse du couplage en CRBM



La finalité de cette partie est d'établir un modèle du couplage du champ électromagnétique sur les systèmes électroniques testés à l'intérieur des CRBM (Chambre Réverbérante à Brassage de Modes). Le couplage exprime la perturbation qu'induit un champ électromagnétique sur le système. Il existe deux protocoles de mesure :

- soit, il utilise un analyseur de réseau. Dans ce cas, au niveau de son port (accès) 1, l'analyseur envoie de l'énergie à l'intérieur de la CRBM. Il en reçoit sur son port 2 en sortie de la CRBM. De cette manière, tout ce qui se passe à l'intérieur de la cavité n'est pas «visible» et la CRBM est considérée comme un quadripôle. Le couplage est alors donné par le paramètre  $S_{21}$  ;
- soit, la tension  $V$  sur le port du système de réception est mesurée et une antenne contrôle le niveau du champ électromagnétique à l'intérieur de la CRBM. Ce type de mesure traduit plus clairement l'ambiance électromagnétique que perçoit le système.

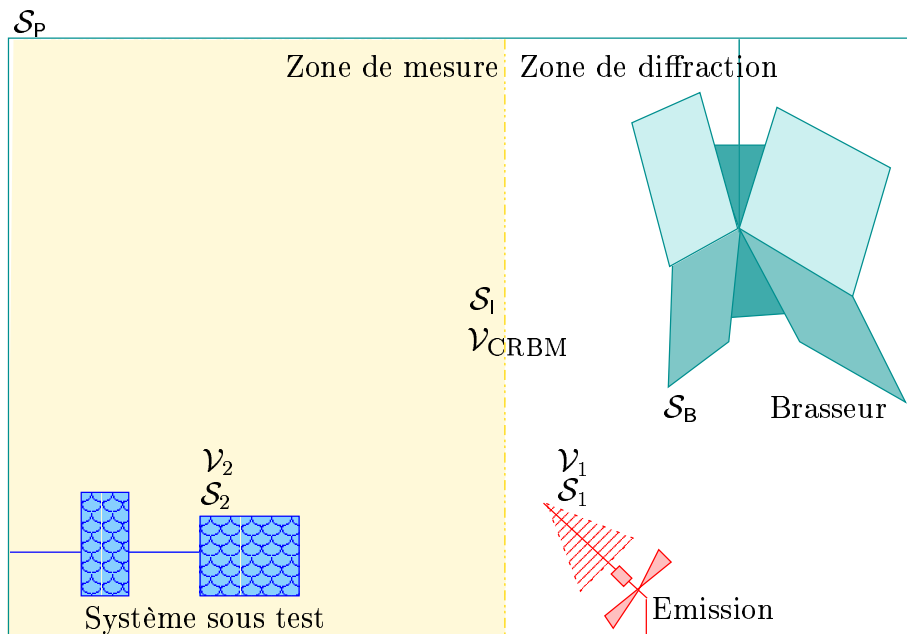


FIG. 2 – Définition des surfaces et des volumes de la CRBM

Quelle que soit la mesure effectuée, chaque élément présent dans la CRBM intervient nécessairement dans la «mécanique» du couplage. Au nombre de quatre, il convient donc de les énumérer (figure 2) :

1. les parois métalliques de la cavité génèrent la surface  $\mathcal{S}_p$  : elle confine l'énergie à l'intérieur du volume qu'elle renferme ;
2. l'antenne d'émission occupe un volume  $\mathcal{V}_1$  limité par la surface  $\mathcal{S}_1$  ;
3. le système sous test ou système en réception encombre un volume  $\mathcal{V}_2$  de frontière  $\mathcal{S}_2$  ;
4. les pales du brasseur et son axe engendrent la surface  $\mathcal{S}_B$  : elle est la seule

à varier, elle est donc responsable des modifications successives de l'allure du champ électromagnétique.

Toutes ces surfaces ainsi définies composent une surface  $\mathcal{S}$  qui borne un volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$ . Dans ce volume, on peut distinguer deux zones séparées par une interface notée  $\mathcal{S}_1$  :

- la zone de diffraction où la structure du champ n'est pas maîtrisée ;
- la zone de mesure dans laquelle la CRBM propose un grand nombre de configurations différentes du champ électromagnétique.

La CRBM a pour but de recréer un environnement électromagnétique aléatoire dont on souhaite maîtriser les propriétés au moins dans la zone de mesure. Pour y parvenir, le moyen utilisé dans le cadre de notre étude est de faire varier la géométrie en changeant l'orientation du brasseur qui sera considérée comme la variable aléatoire du problème.

Ainsi, pour mieux appréhender le caractère aléatoire de l'essai CRBM, une nouvelle représentation de la CRBM propose une géométrie quelconque. Le brasseur étant complètement métallique, les conditions aux limites qu'il impose sont les mêmes que celles des parois de la cavité. Dans ce cas, les surfaces  $\mathcal{S}_B$  et  $\mathcal{S}_P$  se confondent et définissent la surface  $\mathcal{S}_{PB}$  tel que  $\mathcal{S}_P \cup \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{PB}$ . Ainsi, le problème électromagnétique à résoudre se ramène à déterminer le couplage dans une cavité aux limites aléatoires définie dans la figure 3.

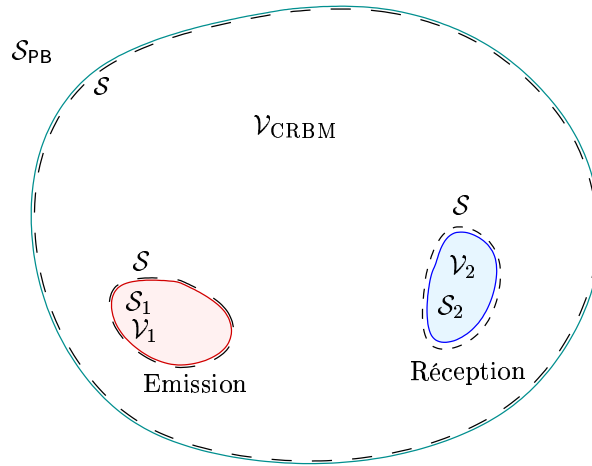


FIG. 3 – Représentation générale des éléments de la cavité

Dans le cadre de l'étude, seul le couplage en régime harmonique sera abordée et seulement pour les systèmes linéaires. Dans le chapitre 1, une étude déterministe présentera les outils à utiliser pour une géométrie donnée. Elle abordera les deux formes du couplage (paramètres  $S$  ou tension induite  $V$ ) et on en dégagera des propriétés. Ensuite, dans le chapitre 2, les deux formes du couplage seront abordées du point de vue probabiliste : les paramètres  $S$  observés dans la mesure puis l'expression de la tension induite  $V$  élaborée dans le chapitre précédent. Elle s'appuieront sur les

résultats expérimentaux. Finalement, ces deux études aboutiront à des propriétés de la CRBM et une écriture simple du couplage dans une CRBM sera proposée.



# Chapitre 1

## Étude déterministe

Écrire le couplage électromagnétique sur un système électronique implique de prendre en compte l'impact de chaque élément présent dans son environnement. Il est donc nécessaire d'apprécier précisément le rôle de chacun et surtout l'effet d'une modification de la géométrie. Dans la CRBM, cette dernière est traduite par le changement d'orientation du brasseur. Ainsi, avant de pouvoir quantifier le poids global de chaque élément sur un grand nombre de configurations différentes, une étude déterministe est présentée dans ce chapitre. Elle établit l'expression complète du couplage ainsi que son évolution après une variation de la géométrie. La première étape est de poser le problème électromagnétique, à savoir identifier les caractéristiques du milieu, les inconnues cherchées ainsi que les outils à utiliser. Ensuite, l'étude s'intéresse aux observables que sont les données mesurables : les paramètres  $S$  (ou  $Z$ ) et la tension  $V$  induite sur le port du système (ou le courant  $I$ ). Sont établies l'expression de ces observables ainsi que celle de leur variation en fonction de la géométrie. Finalement, une conclusion de ce chapitre sera proposée.

### 1.1 Description de la CRBM : notations et outils

Avant de modéliser le couplage, il faut identifier ce qui caractérise la CRBM. Pour que l'étude soit exhaustive, il faut non seulement établir le champ dans le volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$  mais aussi dans les volumes  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  (figure 1.1). Dans le cas général, les deux derniers volumes ne sont pas forcément constitués d'air. Ils peuvent contenir des volumes de diélectriques :  $\mathcal{V}_{\text{D}_1}$  et  $\mathcal{V}_{\text{D}_2}$ . Ces volumes ont alors une permittivité  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  différentes de celle de l'air.

L'étude de chacun des volumes correspondant à un élément physique de la CRBM sera dissociée. La résolution à l'intérieur des surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  se fait donc indépendamment de la résolution dans le volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$ . Dans ce cas, les équations de continuité (1.9) sont nécessaires pour passer d'un milieu à l'autre.

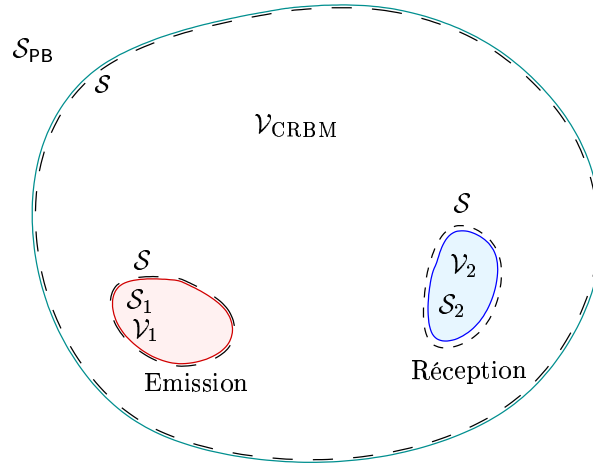


FIG. 1.1 – Représentation générale des éléments de la cavité

Cette approche fait l'objet de ce sous-chapitre. Dans une première section 1.1.1, le modèle électromagnétique correspondant est présenté. La deuxième section 1.1.2 introduit l'outil fondamental du développement théorique de l'étude : le principe de réciprocité de Lorentz.

### 1.1.1 Le modèle électromagnétique

Pour décrire le modèle électromagnétique, trois étapes sont nécessaires :

- décrire les équations de Maxwell dans le milieu concerné ;
- établir les conditions de continuité : elles permettent de passer d'un milieu à l'autre ;
- donner les conditions aux limites : elles fixent les contraintes et donc la structure du champ électromagnétique solution du problème.

#### Les équations des Maxwell

En chaque point du volume de calcul  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$ , le champ électromagnétique obéit aux équations aux dérivées partielles que sont les équations de Maxwell. Le milieu du volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$  est constitué d'air : c'est un milieu linéaire, homogène, isotrope sans pertes. Il n'y a pas non plus de faisceaux électriques ou ioniques. Dans ce cas, les équations de Maxwell dans le domaine temporel s'écrivent :

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{j} \qquad \text{div } \vec{\mathcal{D}} = \rho \qquad (1.1)$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0 \qquad (1.2)$$

où :

- $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{H}}$  décrivent les champs électrique et magnétique qui varient dans le temps et dans l'espace ;



- le vecteur  $\vec{\mathcal{D}}$  désigne le déplacement électrique, il est relié au champ électrique par :  $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon \vec{\mathcal{E}}$  où  $\varepsilon$  est la permittivité du milieu dans lequel se trouve le champ.  $\varepsilon$  est scalaire parce qu'il s'agit chaque fois d'un milieu homogène et isotrope. Dans chaque volume,  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$ ,  $\mathcal{V}_1$  ou  $\mathcal{V}_2$ , elle ne dépend ni du temps ni de l'espace. Les équations 1.1 deviennent :

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \vec{j} \qquad \text{div } \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon};$$

- le vecteur  $\vec{\mathcal{B}}$  représente l'induction magnétique, il est relié au champ  $\vec{\mathcal{H}}$  par  $\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$  où  $\mu$  est la perméabilité du milieu. Comme pour  $\varepsilon$ , elle est scalaire et ne varie pas dans le temps ni dans l'espace. Les équations 1.2 deviennent :

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{\mathcal{H}} = 0.$$

Il reste à définir les termes sources :

- $\rho$  est la densité volumique de charge. Elle est nulle quel que soit le volume considéré d'où l'équation :

$$\text{div } \vec{\mathcal{E}} = 0;$$

- $\vec{j}$  est la densité volumique de courant. Dans l'étude, puisqu'il n'y a pas de faisceaux électriques ou ioniques et que le milieu n'est pas conducteur :  $\vec{j} = \vec{0}$ .

Finalement, les équations pour lesquelles le champ est solution dans chaque volume, s'écrivent de façon générale :

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad (1.3)$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{\mathcal{H}} = 0 \qquad (1.4)$$

D'autre part, dans cette étude, seul le régime harmonique est abordé (on ne considère pas le régime transitoire). Pour cela, la notation complexe  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  est plus adaptée. Elle est définie comme suit :

$$\vec{\mathcal{E}}(r, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(r) e^{j\omega t} \} \text{ avec } \mathbf{E}(r) = E_r + jE_i$$

Dans le domaine fréquentiel, les équations deviennent alors :

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} \qquad \text{div } \mathbf{H} = 0 \qquad (1.5)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \qquad \text{div } \mathbf{E} = 0. \qquad (1.6)$$

Il est désormais possible de spécifier les caractéristiques des trois domaines  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  et  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$  :

- au niveau de l'antenne d'émission, le milieu est caractérisé a priori par une permittivité  $\varepsilon_1$  et une perméabilité  $\mu_1$ . Il suffit seulement de les remplacer dans les équations 1.5 ;

- pour la réception, le raisonnement est le même avec les caractéristiques  $\varepsilon_2$  et  $\mu_2$  ;
- dans le volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$ , le milieu est constitué d'air, ses caractéristiques sont celles du vide. Les équations s'écrivent :

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad \text{div } \mathbf{H} = 0 \qquad (1.7)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \qquad \text{div } \mathbf{E} = 0. \qquad (1.8)$$

Finalement, le milieu étudié sera celui du volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$  délimité par la surface  $\mathcal{S}_{\text{CRBM}}$ . A priori, avec le schéma de la figure 1.2, les équations de Maxwell proposent une infinité de solutions pour le volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$ . En effet, la nature des différentes surfaces composant  $\mathcal{S}_{\text{CRBM}}$  n'ont pas encore été définies. On peut distinguer les surfaces diélectriques qui imposent des conditions de continuité et les autres surfaces qui correspondent à des conditions aux limites.

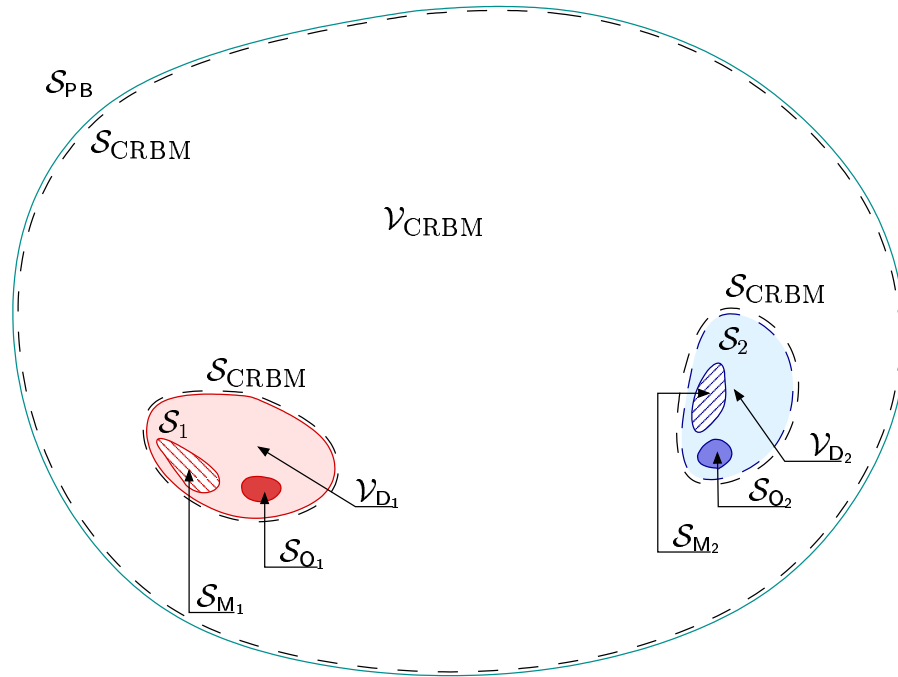


FIG. 1.2 – Conditions de continuité et aux limites pour le domaine  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$

### Conditions de continuité

A l'émission comme à la réception, il y a des surfaces diélectriques  $\mathcal{S}_{\text{D}_1}$  et  $\mathcal{S}_{\text{D}_2}$  en contact avec l'air du volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$ . En régime harmonique la continuité des composantes tangentielles est suffisante pour assurer celles des composantes normales. Les équations suivantes suffisent :

$$\vec{n} \wedge \mathbf{E}_1|_{\text{diélectrique}} = \vec{n} \wedge \mathbf{E}|_{\text{air}} \quad (1.9)$$

$$\vec{n} \wedge \mathbf{H}_1|_{\text{diélectrique}} = \vec{n} \wedge \mathbf{H}|_{\text{air}} \quad (1.10)$$

### Conditions aux limites

Pour le domaine de la CRBM, les conditions aux limites ont deux natures différentes :

- les conditions aux limites métalliques ou conditions de court-circuit électrique (cce);
- les ouvertures.

Les parois métalliques :  $\mathcal{S}_{PB}$ ,  $\mathcal{S}_{M_1}$  et  $\mathcal{S}_{M_2}$

Les parois métalliques sont en général de bons conducteurs. Ceci permet d'écrire le champ électrique tangentiel comme ceci :

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = Z_S (\vec{n} \wedge \mathbf{H})$$

où :

- $\vec{n}$  représente le vecteur unitaire normal à la surface du métal considérée.
- $Z_S$  est l'impédance de surface du métal.

Dans une première approche, l'approximation du métal parfait sera utilisée :  $Z_S \rightarrow 0$  et donc  $\mathbf{E}_{\text{tan}}$  aussi.

Les ouvertures :  $\mathcal{S}_{O_1}$  et  $\mathcal{S}_{O_2}$

Les ouvertures seront toujours très petites devant la longueur d'onde. Toutefois, selon le milieu étudié leur nature change.

à l'émission, il est facile d'appliquer localement un champ électrique tangentiel constant  $\mathbf{e}_1$ . Il représente l'excitation.

à la réception, les conditions aux limites sont soit :

- $V = 0$  et  $I$  à identifier si le port est court-circuité;
- $I = 0$  et  $V$  à identifier si le port est en circuit ouvert;
- $Z = 50\Omega$  ou  $Z = Z_L$ ,  $V$  ou  $I$  à identifier si le port est chargé par  $Z_L$  ou  $50\Omega$ .

C'est à ce niveau que se mesure la tension  $V$  ou le paramètre  $S_{21}$  de couplage (une partie des inconnues à déterminer) : ce sujet sera abordé dans le chapitre 1.2.

### 1.1.2 Principe de réciprocité de Lorentz

#### Présentation

Le principe de réciprocité de Lorentz se construit en comparant deux états du champ électromagnétique existant dans un même milieu (mais pas simultanément). Il peut être perçu comme une manipulation mathématique mais, en fait, il nous

renseigne sur le comportement «action-réaction» d'un système électronique que l'on présentera dans la sous-section 1.2.2. Il est également très utile pour l'étude de la diffraction [93][65][66][91]. En effet, il se construit comme suit :

Soient deux champs  $\{\mathbf{E}^A, \mathbf{H}^A\}$  et  $\{\mathbf{E}^B, \mathbf{H}^B\}$  donnés. La manière dont ils sont générés (c'est-à-dire quelles valeurs aux limites les engendrent) n'est pas significative pour l'instant. Ils correspondent à un état <sup>A</sup> et un état <sup>B</sup>.

Existant dans un même milieu, leurs rotationnels s'écrivent pour chacun d'entre eux :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}^A &= -j\omega\mu\mathbf{H}^A + \mathbf{m}^A & \text{rot } \mathbf{H}^A &= j\omega\varepsilon\mathbf{E}^A + \mathbf{j}^A \\ \text{rot } \mathbf{E}^B &= -j\omega\mu\mathbf{H}^B + \mathbf{m}^B & \text{rot } \mathbf{H}^B &= j\omega\varepsilon\mathbf{E}^B + \mathbf{j}^B \end{aligned}$$

où

–  $\mathbf{m}^A$  et  $\mathbf{j}^A$  sont les sources volumiques de courants électrique et magnétique du champ  $\{\mathbf{E}^A, \mathbf{H}^A\}$ .

–  $\mathbf{m}^B$  et  $\mathbf{j}^B$  sont celles du champ  $\{\mathbf{E}^B, \mathbf{H}^B\}$ .

Si  $\{\mathbf{E}^A, \mathbf{H}^A\}$  et  $\{\mathbf{E}^B, \mathbf{H}^B\}$  sont exactement identiques en un point donné, le produit vectoriel  $\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B$  va générer exactement le même vecteur que le produit  $\mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A$ . Faire la différence de ces deux produits ( $\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A$ ) amènerait à trouver le vecteur nul  $\vec{0}$ .

Toutefois, puisque tout champ électromagnétique varie dans l'espace, il est plus intéressant de calculer la variation de cette différence. On en calcule donc la divergence :  $\text{div}(\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A)$ . Cette expression peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) &= \mathbf{H}^B \cdot \text{rot } \mathbf{E}^A - \mathbf{E}^A \cdot \text{rot } \mathbf{H}^B \\ &\quad - \mathbf{H}^A \cdot \text{rot } \mathbf{E}^B + \mathbf{E}^B \cdot \text{rot } \mathbf{H}^A \end{aligned}$$

En remplaçant les rotationnels, l'égalité devient :

$$\text{div}(\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) = \mathbf{H}^B \cdot \mathbf{m}^A - \mathbf{H}^A \cdot \mathbf{m}^B + \mathbf{E}^B \cdot \mathbf{j}^A - \mathbf{E}^A \cdot \mathbf{j}^B \quad (1.11)$$

Ici, le rôle des densités de courants électriques et magnétiques ressort plus clairement et d'autant plus si elles varient d'un état à l'autre. Afin de mieux estimer la «quantité» de variation dans le milieu qui nous intéresse, il suffit d'intégrer l'équation 1.11 dans tout le volume considéré. On obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} &= \\ \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{H}^B \cdot \mathbf{m}^A - \mathbf{H}^A \cdot \mathbf{m}^B + \mathbf{j}^A \cdot \mathbf{E}^B - \mathbf{j}^B \cdot \mathbf{E}^A) d\mathcal{V} & \end{aligned} \quad (1.12)$$

D'une part, cette égalité fait ressortir le rôle que jouent les densités de courants dans le volume  $\mathcal{V}$ . D'autre part, cette surface  $\mathcal{S}$  correspond aux conditions aux limites responsables de la structure des champs  $\{\mathbf{E}^A, \mathbf{H}^A\}$  et  $\{\mathbf{E}^B, \mathbf{H}^B\}$ . Ces derniers ont une composition différente parce que si  $\mathcal{S}$  ne change pas de géométrie, sa nature peut changer de l'état <sup>A</sup> à l'état <sup>B</sup>. Le principe de réciprocité établit un moyen de quantifier le poids des conditions aux limites sur la structure du champ électromagnétique. Il est donc intéressant de l'utiliser dans le cas de la CRBM.

### Application dans le cas de la CRBM

Dans la CRBM, conformément à la section 1.1.1, il n'y a pas de sources volumiques dans le milieu :  $\mathbf{m}^B = \mathbf{m}^A = \mathbf{j}^B = \mathbf{j}^A = \vec{0}$ . Il reste alors :

$$\iint_{\mathcal{S}_{\text{CRBM}}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S}_{\text{CRBM}} = 0 \quad (1.13)$$

Or, la surface  $\mathcal{S}_{\text{CRBM}}$  se décompose en trois constituantes :

$$\mathcal{S}_{\text{CRBM}} = \mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$$

Et même,

$$\mathcal{S}_{\text{CRBM}} = \mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_{\text{M}_1} + \mathcal{S}_{\text{D}_1} + \mathcal{S}_{\text{O}_1} + \mathcal{S}_{\text{M}_2} + \mathcal{S}_{\text{D}_2} + \mathcal{S}_{\text{O}_2}$$

C'est le moment de faire intervenir les conditions aux limites.

Si les surfaces métalliques  $\mathcal{S}_{\text{PB}}$ ,  $\mathcal{S}_{\text{M}_1}$  et  $\mathcal{S}_{\text{M}_2}$  sont présentes dans l'état <sup>A</sup> et dans l'état <sup>B</sup>, les conditions aux limites sont à chaque fois des conditions d'impédance métallique. Elles s'écrivent :

$$\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \mathbf{E}^A) = -Z^A (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A)$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_{\text{M}_1} + \mathcal{S}_{\text{M}_2}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} \\ &= \iint_{\mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_{\text{M}_1} + \mathcal{S}_{\text{M}_2}} (\mathbf{E}^A \cdot (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) - \mathbf{E}^B \cdot (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A)) d\mathcal{S} \end{aligned}$$

Où  $\mathbf{E}^A = \mathbf{E}_{\text{tan}}^A + \mathbf{E}_{\text{norm}}^A$ .

Comme les vecteurs  $\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A$  et  $\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B$  sont tangentiels, il reste :

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_{\text{M}_1} + \mathcal{S}_{\text{M}_2}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} \\ &= \iint_{\mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_{\text{M}_1} + \mathcal{S}_{\text{M}_2}} ((\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot Z^A (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) - (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) \cdot Z^B (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B)) d\mathcal{S} \end{aligned}$$

Si  $Z^A = Z^B = Z_S$  alors :

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_{\text{M}_1} + \mathcal{S}_{\text{M}_2}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} \\ &= \iint_{\mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_{\text{M}_1} + \mathcal{S}_{\text{M}_2}} Z_S ((\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) - (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) \cdot (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B)) d\mathcal{S} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour les surfaces diélectriques  $\mathcal{S}_{D_1}$  et  $\mathcal{S}_{D_2}$ , il faut faire intervenir les équations de continuité. Dans le cas de notre étude, il n'y aura pas de diélectrique.

Pour l'ouverture  $\mathcal{S}_{O_1}$ , le champ est prescrit localement constant égal à  $\mathbf{e}_1$ . En effet, c'est là qu'est introduite l'énergie dans la cavité.

Enfin au niveau de l'ouverture  $\mathcal{S}_{O_2}$  se fait la mesure de couplage. L'intégrale sur son domaine dépend de la charge appliquée en aval du système.

L'objet du paragraphe suivant est d'étudier cette intégrale.

### Application sur une ouverture petite devant la longueur d'onde

Dans ce paragraphe, on veut détailler l'expression suivante :

$$\iint_{\mathcal{S}_{O_2}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S}_{O_2}$$

On étudie d'abord l'expression  $I$  suivante :

$$I = \iint_{\mathcal{S}_{O_2}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B) \cdot \vec{n} d\mathcal{S}_{O_2} \quad (1.14)$$

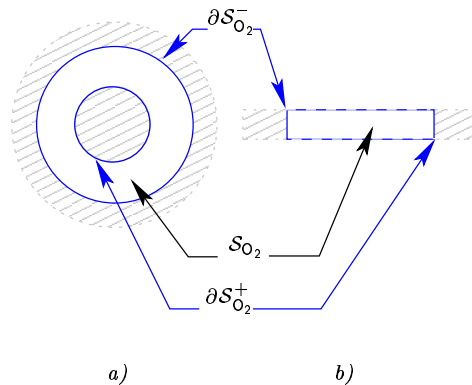


FIG. 1.3 – Géométries envisagées pour les ouvertures  
a- Port sur un câble coaxial  
b- Port entre deux pôles électroniques

L'ouverture est une partie d'air comprise dans la structure métallique et/ou diélectrique du système de réception. Dans le cas de notre étude, elle représente la connection entre le système testé et le câble reliant au système de mesure. Par conséquent, si dans le cas général, sa représentation est celle de la figure 1.2, seulement la géométrie de la figure 1.3 sera envisagée.

Puisque  $\mathcal{S}_{O_2}$  est petite devant la longueur d'onde, l'approximation quasi-statique peut être appliquée. Elle s'écrit :  $\mathbf{E} = -\vec{grad}(V)$ .

Remplacer  $\mathbf{E}$  dans l'équation 1.14 donne :

$$I = \iint_{\mathcal{S}_{O_2}} \left[ V^A \vec{n} \cdot \text{rot } \mathbf{H}^B - \vec{n} \cdot \text{rot} \left( V^A \mathbf{H}^B \right) \right] d\mathcal{S}_{O_2}$$

L'approximation quasi-statique permet aussi d'écrire :  $\text{rot } \mathbf{H}^B = \mathbf{j}$ . Puisque la densité de courant  $\mathbf{j}$  ne peut pas sortir de la surface  $\mathcal{S}_{O_2}$  en contact avec l'air (pas de métal), la composante normale est nulle sur cette surface. En conséquence, le terme  $V^A \vec{n} \cdot \text{rot } \mathbf{H}^B$  s'annule aussi :

$$I = - \iint_{\mathcal{S}_{O_2}} \vec{n} \cdot \text{rot} \left( V^A \mathbf{H}^B \right) d\mathcal{S}_{O_2}$$

Il est alors possible d'appliquer le théorème de Stokes, l'expression devient :

$$I = - \int_{\partial \mathcal{S}_{O_2}} V^A \mathbf{H}^B d\ell$$

où  $\partial \mathcal{S}_{O_2}$  désigne la périphérie de la surface  $\mathcal{S}_{O_2}$  (figure 1.3). Celle-ci est constituée de deux contours  $\partial \mathcal{S}_{O_2}^+$  et  $\partial \mathcal{S}_{O_2}^-$  sur lesquels les potentiels sont constants, ceci permet d'écrire :

$$I = -(V^{A+}) \int_{\partial \mathcal{S}_{O_2}^+} \mathbf{H}^B d\ell + (V^{A-}) \int_{\partial \mathcal{S}_{O_2}^-} \mathbf{H}^B d\ell$$

Si on applique la loi de Kirshhoff des courants, on a :

$$\begin{aligned} I &= -(V^{A+} - V^{A-}) I^B \\ &= -V^A I^B \end{aligned}$$

De même, si l'on calcule l'expression suivante,

$$I' = \iint_{\mathcal{S}_{O_2}} (\mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S}_{O_2}$$

on trouve :

$$I' = -V^B I^A$$

Finalement, l'expression suivante peut s'écrire comme suit :

$$\iint_{\mathcal{S}_{O_2}} \left( \mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A \right) \cdot \vec{n} d\mathcal{S}_{O_2} = V^B I^A - V^A I^B \quad (1.15)$$

On vient d'établir une relation entre les tensions/courants et le champ électromagnétique. Il reste à identifier les différents états  $A$  et  $B$ . Ils seront identifiés dans le chapitre 1.2.

## 1.2 Les observables

Au niveau de la réception, la détection du champ électromagnétique n'est pas directe. En effet, le milieu électromagnétique induit des courants sur toute la structure de l'objet soumise à l'agression électromagnétique. En particulier, sur les ouvertures (qui peuvent être connectées avec un environnement extérieur) apparaissent des tensions. C'est précisément sur ces ouvertures que sont recueillies ou mesurées les données observables. Par observable est donc désignée la réaction que l'on peut mesurer sur le système électronique, réaction provoquée par l'ambiance électromagnétique environnante. Pour notre étude, elle se manifeste par des tensions ou des courants sur le port du système que l'on peut relier au champ électromagnétique grâce à l'équation 1.15.

Le but de ce paragraphe est d'établir, grâce à cette équation, une méthode pour calculer, aux bornes du port de mesure considéré, le générateur équivalent de Thévenin  $V = V_{Th} + Z_{eq}I$  ou l'équivalent en paramètres  $S$  :  $S = \psi_{source} + [S]\psi$ .

Le principe de réciprocité de Lorentz sera utilisé en choisissant pour état de référence le système à l'émission. Le deuxième état sera celui de la configuration réelle c'est à dire le système en réception.

L'étude est consacrée aux deux approches du protocole de la mesure. Dans la sous-section 1.2.1, la CRBM sera considérée comme un quadripôle : il s'agit de la mesure des paramètres  $S$ . Ensuite, la tension de couplage  $V$  sur le système en réception sera l'objet de la sous-section 1.2.2. A chaque fois, dans un premier temps, une configuration géométrique de «référence» sera étudiée puis dans un second temps, l'effet d'une modification de cette configuration sera évalué.

### 1.2.1 Paramètres $S$ et $Z$

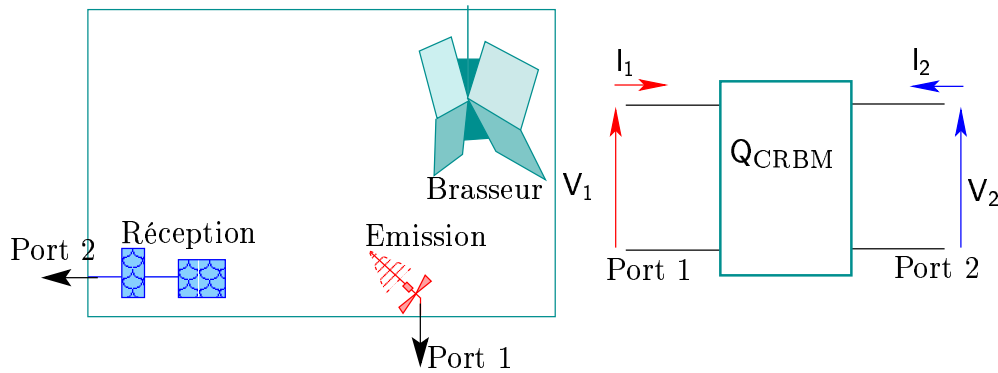


FIG. 1.4 – Les deux ports du quadripôle CRBM.

Dans cette sous-section, la CRBM est vue comme un quadripôle : ceci signifie que seuls les ports 1 à l'émission et 2 à la réception sont visibles, l'intérieur de la CRBM est une "boîte noire" (figure 1.4). L'intérêt de cette approche est de pouvoir



déterminer des propriétés globales et générales de ce type de quadripôle au travers de ses caractéristiques qui sont :

- la matrice impédance  $[Z]$  ;
- la matrice admittance  $[Y]$  ;
- la matrice de répartition  $[S]$ .

Ces trois grandeurs nous informent de façons différentes sur l'adaptation de l'émission et de la réception dans la CRBM. Dans un premier temps, chacune de ces caractéristiques sera définie. Ensuite, leurs propriétés seront établies pour une configuration donnée ainsi que leurs variations si la configuration est modifiée.

### Définitions

Les matrices  $[Z]$  et  $[Y]$  donnent directement l'adaptation propre de chaque port du quadripôle (impédance d'entrée et impédance de sortie) ainsi que leur "adaptation mutuelle". Elles s'écrivent comme suit :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

L'une ou l'autre de ces matrices sont utilisées selon que l'on raisonne en tension ou en courant. Toutefois, si le protocole de mesure utilise un analyseur de réseau, les tensions et les courants ne sont pas directement mesurés mais plutôt le rapport entre l'énergie entrante et l'énergie sortante. C'est pourquoi la matrice  $[S]$  est introduite.

Au niveau du port 1, par exemple, la tension peut s'écrire comme le résultat de la superposition d'une onde progressive et d'une onde rétrograde :

$$V_1 = A_1 + B_1$$

Ceci se note aussi :

$$V_1 = V_1^+ + V_1^-$$

De même, le courant s'écrit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1^+}{Z_c} - \frac{V_1^-}{Z_c} \\ &= I^+ + I^- \end{aligned}$$

où  $Z_c$  est l'impédance caractéristique du câble de mesure de l'analyseur de réseau.

L'idée est de normaliser  $V$  et  $I$  de la façon suivante :

$$v = \frac{V}{\sqrt{Z_c}} \quad \text{et} \quad i = I\sqrt{Z_c}$$

Cette normalisation définit des pseudo-ondes telles que :

$$v^+ = i^+ \quad \text{et} \quad v^- = -i^-$$

On peut alors identifier les pseudo-ondes suivantes :

– progressives ou rentrantes dans la CRBM :

$$a_1 = \frac{1}{2}(v_1^+ + i_1^+)$$

– rétrogrades ou sortantes de la CRBM :

$$b_1 = \frac{1}{2}(v_1^- - i_1^-)$$

Au niveau du port 2, les pseudo-ondes  $a_2$  et  $b_2$  sont définies de la même manière (le sens rentrant est toujours défini pour un courant entrant dans le quadripôle). Pour établir un lien entre le port 1 et le port 2, la matrice de répartition  $[S]$  va être utilisée.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

### La CRBM : un quadripôle réciproque

Comme dans toute étude de quadripôle, il est intéressant de comparer le comportement de la CRBM lorsqu'un générateur est placé alternativement sur le port 1 et sur le port 2. Or, cet exercice permet de définir les états d'étude de la réciprocity (figure 1.5) sans changer la nature des autres surfaces délimitant le  $\mathcal{V}_{CRBM}$  ni par conséquent celle du quadripôle CRBM. Les états de la réciprocity sont donc donnés pour :

- le port 1 à l'émission, le port 2 à la réception : état <sup>A</sup> ;
- le port 2 à l'émission, le port 1 à la réception : état <sup>B</sup> .

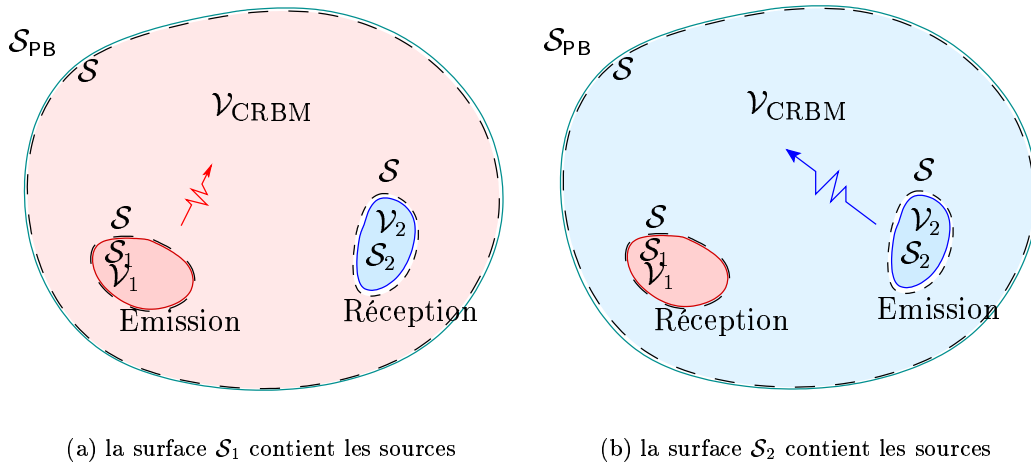


FIG. 1.5 – Les deux états de l'étude d'un quadripôle.

Or, dans la section 1.1.2, l'équation 1.13 a été établie. Elle s'écrit :

$$\iint_{S_{CRBM}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} dS_{CRBM} = 0$$

avec

$$\mathcal{S}_{\text{CRBM}} = \mathcal{S}_{\text{PB}} + \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$$

La surface  $\mathcal{S}_{\text{PB}}$  est de nature métallique dans l'état  $^{\text{A}}$  et dans l'état  $^{\text{B}}$ , l'intégrale sur son domaine s'annule. Le même raisonnement est tenu pour les parties métalliques des surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ .

L'équation précédente devient alors :

$$\iint_{\mathcal{S}_{\text{O}_1}} (\mathbf{E}^{\text{A}} \wedge \mathbf{H}^{\text{B}} - \mathbf{E}^{\text{B}} \wedge \mathbf{H}^{\text{A}}) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = - \iint_{\mathcal{S}_{\text{O}_2}} (\mathbf{E}^{\text{A}} \wedge \mathbf{H}^{\text{B}} - \mathbf{E}^{\text{B}} \wedge \mathbf{H}^{\text{A}}) \cdot \vec{n} d\mathcal{S}$$

Comme  $\mathcal{S}_{\text{O}_1}$  et  $\mathcal{S}_{\text{O}_2}$  représentent des ouvertures, on peut aussi écrire :

$$V_1^{\text{B}} I_1^{\text{A}} - V_1^{\text{A}} I_1^{\text{B}} = -(V_2^{\text{B}} I_2^{\text{A}} - V_2^{\text{A}} I_2^{\text{B}})$$

Ce qui s'écrit encore :

$$b_1^{\text{B}} a_1^{\text{A}} + b_2^{\text{B}} a_2^{\text{A}} = b_1^{\text{A}} a_1^{\text{B}} + b_2^{\text{A}} a_2^{\text{B}}$$

Si on reprend l'écriture matricielle des paramètres S, l'équation devient :

$$\begin{pmatrix} a_1^{\text{A}} \\ a_2^{\text{A}} \end{pmatrix} [\text{S}]^{\text{B}} \begin{pmatrix} a_1^{\text{B}} \\ a_2^{\text{B}} \end{pmatrix} = (a)^{\text{A}} [\text{S}]^{\text{B}} (a)^{\text{B}} = \begin{pmatrix} a_1^{\text{B}} \\ a_2^{\text{B}} \end{pmatrix} [\text{S}]^{\text{A}} \begin{pmatrix} a_1^{\text{A}} \\ a_2^{\text{A}} \end{pmatrix} = (a)^{\text{B}} [\text{S}]^{\text{A}} (a)^{\text{A}}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$[\text{S}]^{\text{A}} = [\text{S}]^{\text{B}t}$$

Comme le quadripôle CRBM ne change pas de nature entre l'état  $^{\text{A}}$  et l'état  $^{\text{B}}$ , la matrice [S] ne varie pas non plus :

$$[\text{S}]^{\text{A}} = [\text{S}]^{\text{B}t} = [\text{S}]^{\text{B}} = \begin{bmatrix} \text{S}_{11} & \text{S}_{12} \\ \text{S}_{21} & \text{S}_{22} \end{bmatrix}$$

Ceci signifie que :

$$\text{S}_{12} = \text{S}_{21} = \text{S}_t$$

où l'indice  $_t$  désigne transmission.

Cette égalité montre ici que le quadripôle CRBM est réciproque pour chaque configuration constituant un échantillon de mesure du test CRBM. Cette propriété peut se comprendre pour d'autres raisons. Tout d'abord, le milieu du volume  $\mathcal{V}_{\text{CRBM}}$  est constitué d'air, il a un comportement réciproque. Ensuite, l'antenne d'émission est un quadripôle passif réciproque. Enfin, le système que l'on étudie en réception est supposé lui aussi passif et réciproque.

### Influence d'un petit changement de géométrie

Le but de ce paragraphe est d'estimer l'effet d'une modification de la géométrie sur les paramètres  $S$ . Cette fois, les deux états de l'utilisation du principe de réciprocité doit faire intervenir une modification des conditions aux limites dans l'un des deux états. Puisque l'on veut simuler l'effet de la rotation du brasseur, les deux états vont être choisis comme dans la figure 1.6.

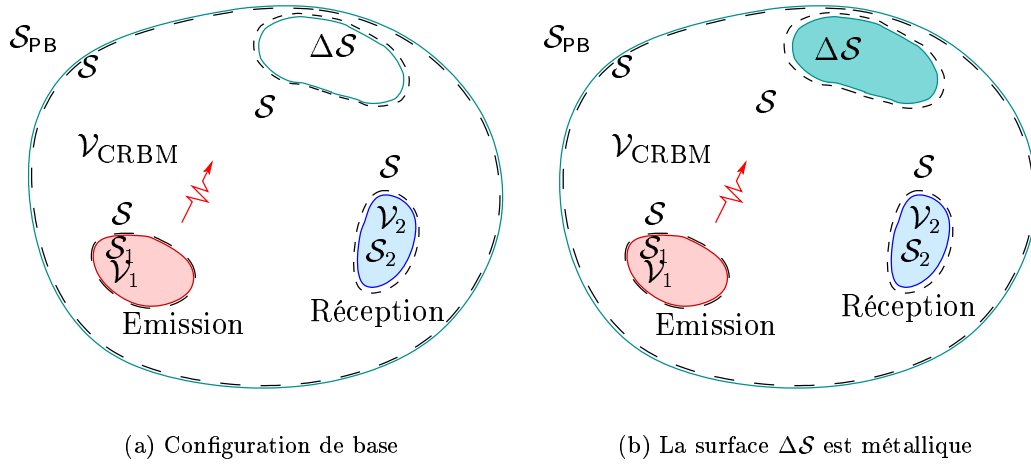


FIG. 1.6 – Les deux états de l'étude de la modification de géométrie

L'expression suivante est toujours valide :

$$\iint_S (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} dS = 0$$

avec cette fois ci :

$$S = S_{PB} + S_1 + S_2 + \Delta S$$

où  $\Delta S$  désigne la perturbation par rapport à l'état de base <sup>A</sup>.

La surface  $S_{PB}$  est de nature métallique dans l'état <sup>A</sup> et dans l'état <sup>B</sup>, l'intégrale sur son domaine s'annule. Le même raisonnement est tenu pour les parties métalliques des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

Pour la surface  $\Delta S$ , la présence de métal seulement dans l'état <sup>B</sup> permet d'écrire le champ  $\{\mathbf{E}^B, \mathbf{H}^B\}$  plus simplement :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Delta S} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_{\Delta S} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot [Z_S(\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) - \mathbf{E}^A] dS \end{aligned}$$

où :

- $\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B$  est le courant créé par l'antenne 1 sur la surface métallique  $\Delta\mathcal{S}$  dans l'état  $^B$  ;
- $\{\mathbf{E}^A, \mathbf{H}^A\}$  est le champ créé dans l'air par l'antenne 1 sur la trace de la surface  $\Delta\mathcal{S}$  dans l'état  $^A$ .

Au niveau des ouvertures, les intégrales peuvent s'écrire comme précédemment, il en résulte :

$$(a)^A [S]^B (a)^B = (a)^B [S]^A (a)^A - \iint_{\Delta\mathcal{S}} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot [Z_S(\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) - \mathbf{E}^A] d\mathcal{S}$$

Pour faire ressortir la variation des paramètres  $S$ , on a remplacé les  $b_1, b_2$ . Comme l'intérieur du quadripôle a été modifié entre les deux états, les matrices  $[S]$  sont différentes pour l'état  $^A$  et l'état  $^B$ . Toutefois, pour chaque configuration, le quadripôle reste réciproque :

$$[S]^A = \begin{bmatrix} S_{11}^A & S_t^A \\ S_t^A & S_{22}^A \end{bmatrix} \quad [S]^B = \begin{bmatrix} S_{11}^B & S_t^B \\ S_t^B & S_{22}^B \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire le résultat suivant :

$$\begin{aligned} (S_{11}^B - S_{11}^A) a_1^A a_1^B + (S_{22}^B - S_{22}^A) a_2^A a_2^B + (S_t^B - S_t^A) (a_2^A a_1^B + a_2^B a_1^A) \\ = - \iint_{\Delta\mathcal{S}} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot [Z_S(\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) - \mathbf{E}^A] d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (1.16)$$

A ce niveau, il suffit d'imposer la valeur de chaque onde entrante  $a_1$  et  $a_2$  pour isoler et déterminer la variation de chaque paramètre  $S$ . Les combinaisons sont les trois suivantes, pour déterminer :

- $\Delta S_{11}$  : il faut fixer  $a_2^A$  et  $a_2^B$  à 0 ;
- $\Delta S_{22}$  : il faut fixer  $a_1^A$  et  $a_1^B$  à 0 ;
- $\Delta S_t$  : il faut fixer soit  $a_1^A$  et  $a_2^B$  à 0, soit  $a_1^B$  et  $a_2^A$  à 0.

En supposant que les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  sont maîtrisés, la variation des différents paramètres  $S$  peut donc être quantifiée si une perturbation métallique est rajoutée à une configuration de base. En choisissant donc convenablement les états de la réciprocity, une manière générique d'écrire la variation des paramètres  $S$  est :

$$\Delta S_{ij} = - \iint_{\Delta\mathcal{S}} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot [Z_S(\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) - \mathbf{E}^A] d\mathcal{S}$$

Dans le cas de la CRBM, le brasseur est en mouvement. Ainsi, pour déterminer la variation entre deux positions de brasseur, il faudrait faire la différence entre la perturbation qu'il provoque à sa position courante et celle qu'il provoquait à sa position précédente.

Si dans l'état  $^A$ , les parois du brasseur avaient été absentes, l'équation suivante aurait été trouvée :

$$\Delta S_{ij} = - \iint_{\Delta\mathcal{S} + \mathcal{S}_{PB}} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot [Z_S(\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) - \mathbf{E}^A] d\mathcal{S}$$

avec cette fois :

$$\Delta S_{ij} = S_{ij} \text{ pour une configuration de brasseur } - S_{ij} \text{ en espace libre}$$

Cette dernière représentation est plus intéressante, car elle permet de considérer une modification importante de la géométrie. Cette approche est intéressante pour aborder le point de vue probabiliste.

### 1.2.2 Sources induites

Dans cette section, on s'intéresse de plus près au système en réception qui perçoit une ambiance électromagnétique environnante. Il s'agit là de reproduire le protocole de mesure qui consiste à relever la tension induite sur le port du système alors que le niveau du champ est contrôlé par une antenne. La finalité de cette section est donc d'établir le lien entre la tension mesurée et le champ électromagnétique. Plus particulièrement, la tension équivalente de Thévenin sera étudiée afin de déterminer une perturbation du système quelle que soit la charge qui lui sera appliquée. Une première étape consiste à étudier la réaction du système vis à vis d'un champ quelconque. La deuxième consiste à évaluer l'influence du milieu en comparant l'espace libre à l'ambiance de CRBM. Enfin, l'effet d'une variation de la géométrie sera examiné.

#### Étude du système de réception

L'étude du volume interne à la surface  $\mathcal{S}_2$  est d'abord réalisée. Le rôle de chaque partie de la surface  $\mathcal{S}_2$  va donc être plus précisément étudié. Comparons tout d'abord le système en réception avec le système en émission. Ensuite, le champ dû à l'état de transmission sera comparé au champ incident en l'absence du système.

Sur la figure 1.7, sont présentés les deux premiers états à comparer à l'aide du principe de réciprocité. Sur l'ouverture, ils correspondent à :

- état <sup>A</sup> : le système en réception est en circuit ouvert,  $I_2^A = 0$ .  $V_2^A = V_{Th}$ , c'est la tension équivalente de Thévenin que l'on cherche à déterminer ;
- état <sup>B</sup> : un générateur de courant  $I_2^B$  de  $1A$  a été inséré.

L'étude concerne ici le milieu interne au système. Celui-ci est caractérisé par la permittivité  $\varepsilon_2$  dans les 2 cas, état <sup>A</sup> et état <sup>B</sup>. Si ce milieu est sans charges volumiques, on peut écrire :

$$\iiint_{\mathcal{V}_{D_2}} \text{div} \left( \mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A \right) d\mathcal{V} = 0$$

soit

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \left( \mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A \right) d\mathcal{S} = 0$$

La surface  $\mathcal{S}_2$  est constituée des surfaces suivantes :

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{D_2} + \mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}$$

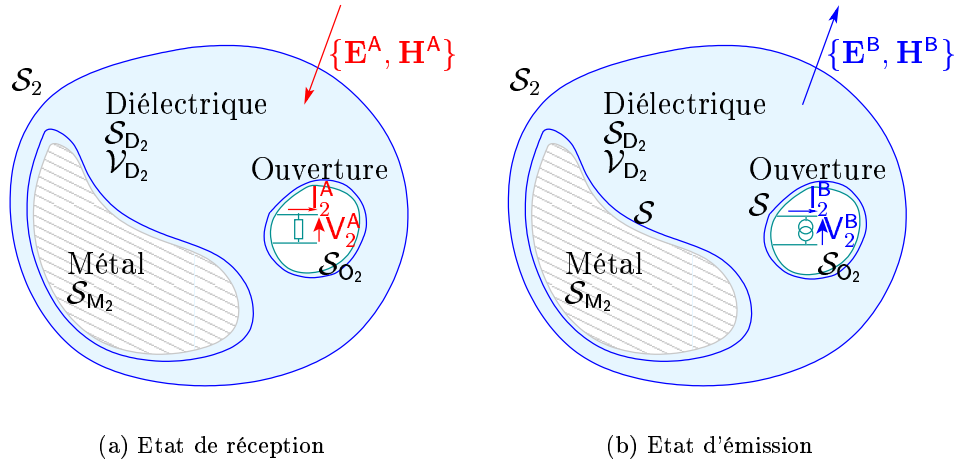


FIG. 1.7 – Les deux états utilisés pour le principe de réciprocité

La surface  $\mathcal{S}_{M_2}$  est de nature métallique à la fois dans l'état  $A$  et dans l'état  $B$ , l'intégrale sur son domaine s'annule.

Sur l'ouverture  $\mathcal{S}_{O_2}$ , l'intégrale se traduit en termes de produits croisés de tensions et de courants.

$$\iint_{\mathcal{S}_{O_2}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) d\mathcal{S} = V^B|_A - V^A|_B$$

Les tensions et les courants sont identifiés selon leur définition dans les états  $A$  et  $B$ , il reste l'équation suivante :

$$\iint_{\mathcal{S}_{D_2}} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) d\mathcal{S} = V_2^A|_2^B - V_2^B|_2^A = V_{Th}$$

Même si l'on ne connaît pas la manière dont il est généré, le champ de l'état  $A$  se décompose suivant un champ incident en absence du système et un champ diffracté par ce système :

$$\iint_{\mathcal{S}_{D_2}} (\mathbf{E}_{inc}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{inc}^A) d\mathcal{S} = V_{Th} - \iint_{\mathcal{S}_{D_2}} (\mathbf{E}_{dif}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{dif}^A) d\mathcal{S} \quad (1.17)$$

Il reste donc à expliciter les deux intégrales sur le diélectrique  $\mathcal{S}_{D_2}$ . Celle concernant le champ diffracté sera examinée plus tard car elle nécessite de connaître le milieu externe au système de réception. Considérons d'abord celle concernant le champ incident.

Pour évaluer l'effet du champ incident, on remplace l'ancien état  $A$  correspondant au système en réception par l'absence du système ou bien l'espace libre comme sur la figure 1.8.

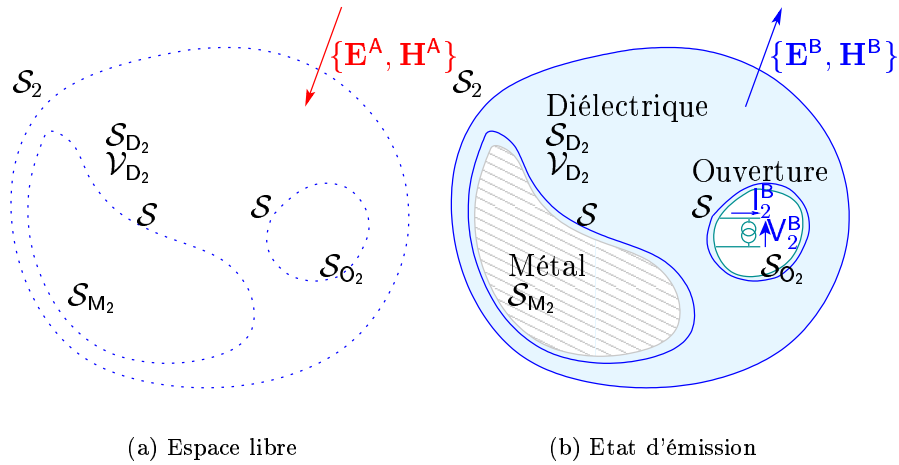


FIG. 1.8 – Diffraction

Cette fois, parce que le milieu change de propriété d'un état à l'autre, il faut tenir compte d'un terme source présent à cause de la polarisabilité du diélectrique. Ceci conduit à écrire :

$$\operatorname{div} \left( \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}^A \right) = j\omega \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot \mathbf{E}^B (\varepsilon_0 - \varepsilon_2) = -j\omega \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot \mathbf{P}^B$$

où  $\mathbf{P}^B$  désigne la polarisation électrique :

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

On peut donc écrire :

$$\iint_{S_2} \operatorname{div} \left( \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}^A \right) dS = \iiint_{V_{D_2}} -j\omega \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot \mathbf{P}^B dV$$

Comme précédemment l'intégrale se sépare selon chaque surface :

$$S_2 = S_{D_2} + S_{M_2} + S_{O_2}$$

Sur la surface  $S_{M_2}$ , le métal est considéré comme un très bon conducteur :  $\mathbf{E}_{\text{tan}}^B = \vec{n} \wedge \mathbf{E}^B = \vec{0}$ , la contribution de l'intégrale devient :

$$\iint_{S_{M_2}} \left( \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}^A \right) \vec{n} dS = \iint_{S_{M_2}} \left( \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \wedge \mathbf{H}^B \right) \cdot \vec{n} dS = - \iint_{S_{M_2}} \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot \left( \vec{n} \wedge \mathbf{H}^B \right) dS$$

où  $\vec{n}$  est la normale à la surface métallique, elle est orientée dans le sens «sortant du métal».



Sur l'ouverture  $\mathcal{S}_{O_2}$ , les deux termes de l'intégrale sont étudiés séparément. Pour le terme,  $(\mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}^A) \cdot \vec{n}$ , l'approximation BF du champ incident permet de sortir  $\mathbf{H}_{\text{inc}}^A$  de l'intégrale.

$$\iint_{\mathcal{S}_{O_2}} (\mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = \mathbf{H}_{\text{inc}}^A \cdot \iint_{\mathcal{S}_{O_2}} (\vec{n} \wedge \mathbf{E}^B) d\mathcal{S}$$

Ici le champ  $\mathbf{E}^B$  peut être considéré comme constant sur tout le contour et égal à  $E\vec{u}_e$  où  $\vec{u}_e$  indique l'orientation du champ électrique. Il reste à intégrer l'expression suivante :

$$\iint_{\mathcal{S}_{O_2}} \vec{u}_e \wedge \vec{n} d\mathcal{S}$$

où  $\vec{n}$  est la normale à la surface de l'ouverture qui suit la géométrie de la figure 1.3. Puisque  $\vec{u}_e$  ne varie pas, l'intégrale sur la normale s'annule. La contribution de l'ouverture s'écrit donc :

$$I_{\mathcal{S}_{O_2}} = \iint_{\mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) d\mathcal{S}$$

Dans le cas métallique comme sur l'ouverture on identifie  $(\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B)$  au courant  $\mathbf{J}^B$  rayonné par le système lorsqu'un générateur de courant est inséré sur son port.

Il reste :

$$\iint_{\mathcal{S}_{D_2}} (\mathbf{E}_{\text{inc}}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}^A) \vec{n} d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot \mathbf{J}^B d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{V}_{D_2}} j\omega \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot \mathbf{P}^B d\mathcal{V}$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'expression 1.17, la tension induite par le champ sur le système est établie :

$$\begin{aligned} V_{\text{Th}} = & \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{V}_D} j\omega \mathbf{E}_{\text{inc}}^A \cdot \mathbf{P}^B d\mathcal{V} \\ & - \iint_{\mathcal{S}_{D_2}} (\mathbf{E}_{\text{dif}}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}_{\text{dif}}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Le couplage traduit par la tension  $V_{\text{Th}}$  s'écrit comme le couplage du système sans diélectrique plus une contribution due à la polarisabilité du diélectrique.

Dans l'expression 1.18, le milieu externe n'a pas encore été étudié. Nous allons considérer deux cas, en espace libre et dans la CRBM.

### Étude en espace libre

En espace libre, le milieu externe au système est limité par la surface  $\mathcal{S}_2$  de l'objet et une surface à l'infini ou plutôt en champ lointain par rapport au système. Utilisant toujours le principe de réciprocité, les deux états choisis seront (figure 1.9) :

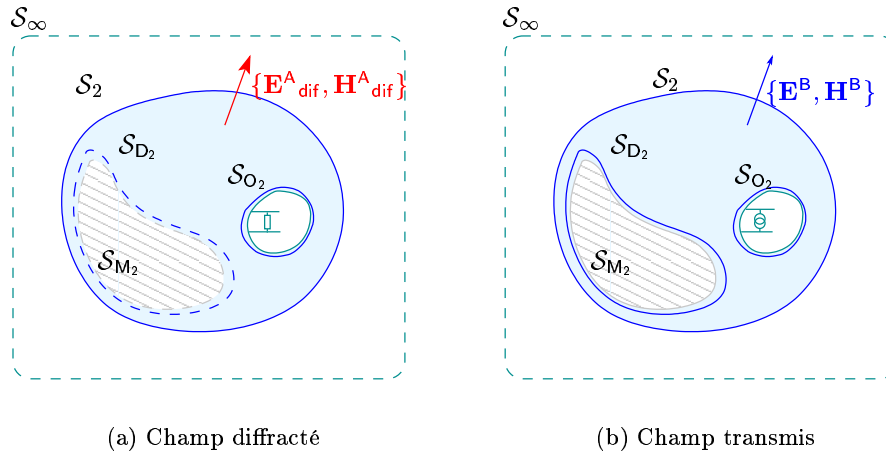


FIG. 1.9 – Étude du milieu externe au système

- l'état <sup>A</sup> définit le champ diffracté par le système en réception ;
- l'état <sup>B</sup> est défini lorsque le système est en transmission.

Les surfaces  $\mathcal{S}_\infty$  et  $\mathcal{S}_2$  délimitent un milieu équivalent à celui présenté dans la sous-section 1.1.1. Il n'y a toujours pas de sources  $\mathbf{j}$  ou  $\mathbf{m}$  à l'intérieur du volume et le milieu ne change pas de propriétés de l'état <sup>A</sup> à l'état <sup>B</sup> :

$$\iint_{\mathcal{S}_\infty + \mathcal{S}_2} (\mathbf{E}^A_{\text{dif}} \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A_{\text{dif}}) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = 0$$

Or le champ diffracté dans l'état <sup>A</sup> et le champ rayonné dans l'état <sup>B</sup> obéissent à la même condition de rayonnement. à l'infini, ils satisfont à une hypothèse de champ lointain telle que :

$$Z_0 \mathbf{H} = \vec{u} \wedge \mathbf{E}$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur de propagation du champ.

En chaque point de la surface  $\mathcal{S}_\infty$ , ce vecteur est normal tel que  $\vec{u} = \vec{n}$ .

$$\iint_{\mathcal{S}_\infty} (\mathbf{E}^A_{\text{dif}} \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A_{\text{dif}}) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}_\infty} (Z_0 \mathbf{H}^A_{\text{dif}} \cdot \mathbf{H}^B - Z_0 \mathbf{H}^B \cdot \mathbf{H}^A_{\text{dif}}) d\mathcal{S} = 0$$

On en déduit que :

$$\iint_{\mathcal{S}_2} (\mathbf{E}^A_{\text{dif}} \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A_{\text{dif}}) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = 0$$

En reportant ce résultat dans l'équation 1.18, on en déduit que la tension de couplage en espace libre s'écrit :

$$V_{\text{Th}} = \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{A}} \cdot (\vec{n} \wedge \mathbf{H}_T) d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{V}_D} j\omega \mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{A}} \cdot \mathbf{P}^{\text{B}} d\mathcal{V} \quad (1.19)$$

Valable donc pour l'espace libre, l'expression de l'équation 1.19 fait intervenir deux termes :

- la distribution du courant sur le système lorsque celui-ci rayonne en espace libre. Dans la suite de l'exposé, ce terme pourra être désigné par l'expression «courant rayonné» ;
- le champ environnant extérieur existant en l'absence du système. Ce champ sera désigné par «champ incident».

### Étude dans une CRBM

Dans ce paragraphe, l'influence des parois de la CRBM par rapport à l'espace libre sera étudiée. Ensuite, l'effet d'une variation géométrique des conditions aux limites des parois métalliques sera caractérisé.

Dans la CRBM, on procède de la même manière pour le champ diffracté qu'en espace libre. Cette fois, la surface  $\mathcal{S}_{\infty}$  est remplacée par la surface  $\mathcal{S}_{\text{PB}}$ . Dans l'état <sup>A</sup> et dans l'état <sup>B</sup>, les conditions sur cette surface sont métalliques. L'intégrale sur  $\mathcal{S}_{\text{PB}}$  s'annule et donc également pour la surface  $\mathcal{S}_{D_2}$ . Il en résulte que la tension de couplage est également donnée par :

$$V_{\text{Th}} = \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{A}} \cdot (\vec{n} \wedge \mathbf{H}_T) d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{V}_D} j\omega \mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{A}} \cdot \mathbf{P}^{\text{B}} d\mathcal{V} \quad (1.20)$$

Cette fois, l'équation 1.20 fait intervenir le courant «rayonnant» sur la structure du système en présence des parois et le champ environnant extérieur dans la CRBM en absence du système.

Pour connaître la variation de la tension pour un changement de géométrie, le raisonnement établi pour les paramètres  $\mathbf{S}$  est toujours valable. La CRBM est un quadripôle réciproque. La tension reçue par le système  $\mathcal{S}_2$  lorsque l'antenne  $\mathcal{S}_1$  émet est la même que la tension reçue par l'antenne  $\mathcal{S}_1$  lorsque le système  $\mathcal{S}_2$  émet. Il reste alors :

$$\Delta V = \iint_{\Delta \mathcal{S}} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{B}}) \cdot [\mathbf{Z}_{\mathcal{S}}(\vec{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{A}}) - \mathbf{E}^{\text{A}}] d\mathcal{S} \quad (1.21)$$

Comme pour les paramètres  $\mathbf{S}$ , pour évaluer  $\Delta V$  entre deux positions de brasseur, il faudrait faire la différence entre deux perturbations métalliques représentant le brasseur avant et après une rotation.

Si pour l'étude du milieu externe au système de réception, les parois de la CRBM sont également absentes dans l'état <sup>A</sup> (quand le système reçoit), on obtiendrait une

intégrale sur  $\mathcal{S}_{PB}$  du même type que sur le domaine  $\Delta\mathcal{S}$ . Le résultat que l'on trouve est alors celui-ci :

$$\begin{aligned} V_{Th} = & - \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}^A \cdot \mathbf{J}^B d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{V}_D} j\omega \mathbf{E}_{inc}^A \cdot \mathbf{P}^B d\mathcal{V} \\ & - \iint_{\mathcal{S}_{PB}} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot [\mathbf{E}^A - Z_S(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^B)] d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (1.22)$$

avec :

- l'état <sup>A</sup> correspondant un couplage d'antenne en espace libre ;
- l'état <sup>B</sup> correspondant au système rayonnant dans la cavité, l'approximation suivante est effectuée : la distribution de courant  $\mathbf{J}^B$  sur  $\mathcal{S}_2$  est considérée identique à l'espace libre.

On peut alors identifier les termes comme ceci :

- $\iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}^A \cdot \mathbf{J}^B d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{V}_D} j\omega \mathbf{E}_{inc}^A \cdot \mathbf{P}^B d\mathcal{V}$  correspond au couplage entre l'antenne d'émission et le système de réception lorsqu'ils sont tous les deux en espace libre ;
- $-\iint_{\mathcal{S}_{PB}} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot [\mathbf{E}^A - Z_S(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^B)] d\mathcal{S}$  est la «perturbation» du couplage «espace libre» due à la présence des parois.

Dans ce cas, l'équation 1.22 signifie :

$$\begin{aligned} V_{Th} = & \text{couplage direct de l'espace libre} \\ & + \text{action de toutes les parois métalliques de la CRBM} \end{aligned}$$

Ce résultat nous donne les indications suivantes. Si l'on place dans la CRBM l'antenne d'émission en face du système de réception, le couplage direct risque d'être important vis à vis de la rétroaction des parois et donc perturber la nature du test CRBM.

### 1.3 Conclusion

Après avoir présenté le modèle électromagnétique, le principe de réciprocité de Lorentz nécessaire à l'étude du couplage de tout champ électromagnétique sur un système électronique a été rappelé et appliqué à une configuration donnée de l'environnement réverbérant.

Tout d'abord, les observables (ou données mesurables), qu'il s'agisse de tensions ou de courants sur des ouvertures, peuvent être reliés au champ électromagnétique selon l'équation 1.15.

Ensuite, il a été démontré que l'ensemble des éléments constituant le test CRBM (antenne d'émission, système de réception, cavité réverbérante et brasseur) constituent un quadripôle réciproque : pour chaque orientation du brasseur, la matrice [S] issue de la mesure est donc symétrique.

Enfin, il a été établi que la tension du couplage sur le système électronique peut s'écrire comme la superposition de deux contributions (cf. l'équation 1.22) :

- le couplage direct espace libre entre l'émission et la réception ;
- la rétroaction des parois.

Ce résultat nous montre que si les parois vont changer de géométrie et si les deux systèmes (émission et réception) sont en regard, une partie du couplage restera inchangée. Ceci signifie d'une part que le couplage direct doit être minimisé si on veut privilégier le caractère aléatoire du test CRBM.

D'autre part, si on veut simuler de façon numérique la tension selon cette formulation, il faudrait calculer l'intégrale sur les parois métalliques pour chaque configuration du brasseur. La difficulté consiste à calculer un grand nombre de fois le courant induit sur les parois à l'intérieur d'une cavité.

C'est pourquoi la variation des paramètres  $S$  et de la tension  $V$  a été étudiée en ajoutant une perturbation métallique dans la CRBM (cf. les équation 1.16 et 1.21). Même si la surface d'intégration est plus petite, la difficulté d'un grand nombre de calculs se représente à nouveau. Les simulations numériques deviendraient laborieuses pour caractériser un comportement aléatoire.

Il est donc nécessaire d'étudier le couplage du point de vue probabiliste : c'est l'objet du chapitre 2.



## Chapitre 2

# Étude probabiliste

Dans le chapitre 1, le couplage électromagnétique dans la CRBM a été caractérisé du point de vue déterministe. Il peut être interprété comme un couplage espace libre entre l'antenne d'émission et le système à la réception sur lequel se rajoute une rétroaction de toutes les parois métalliques de l'environnement. Quand ces dernières changent de géométrie, on est aussi capable de traduire la variation du couplage qui en découle.

Le test CRBM a pour but de recréer un très grand nombre de configurations électromagnétiques différentes, en modifiant par exemple l'orientation du brasseur dans le cas du brassage mécanique. L'étude détaillée de toutes les configurations n'étant plus possible, une approche probabiliste est adoptée. L'orientation du brasseur sera alors la variable aléatoire.

La finalité de ce chapitre est de caractériser la loi de probabilité du couplage en fonction de la nature aléatoire du champ électromagnétique environnant. Pour cela l'étude partira de l'observation par l'expérience du comportement des données mesurables : c'est l'objet de la section 2.1. Cette étude sera ensuite analysée d'un point de vue plus théorique dans la section 2.2. Ceci aboutira à un modèle probabiliste de la variance des observables.

### 2.1 Étude expérimentale des statistiques des paramètres [S]

Cette section est consacrée à l'observation grâce à l'expérimentation des différents paramètres  $S$ . Point de départ de l'analyse des couplages, cette étude a pour but d'énumérer les propriétés des mesures en CRBM. Tout d'abord, dans la sous-section 2.1.1, le protocole et les moyens de mesures seront présentés. Ensuite, dans la sous-section 2.1.2, une étude selon la fréquence sera abordée. Elle s'intéressera à la loi de probabilité ainsi qu'à la variation des caractéristiques statistiques qu'ont les échantillons mesurés. Enfin, dans la sous-section 2.1.3, la comparaison des paramètres  $S$  entre eux établira une relation que l'on expliquera en étudiant un modèle multiports de la CRBM.

### 2.1.1 Protocole et moyens expérimentaux

Avant d'étudier les résultats de la mesure, on présente le protocole de mesure et les différentes CRBM et systèmes testés.

#### Protocole

Dans la chaîne de mesure habituelle (figure 2.1), un amplificateur est généralement inséré entre le port 1 de l'analyseur de réseau et l'antenne d'émission. Dans ce cas, un atténuateur est placé entre le port 2 et le système sous test afin de protéger l'analyseur. Toutefois, pour l'étude du comportement linéaire du système, la puissance n'a pas été nécessaire. Par ailleurs, pour éviter des problèmes de longueurs de câbles à ramener au plan de référence, il a parfois été envisagé de placer l'analyseur à l'intérieur de la CRBM.

Une station de travail commande à la fois le brasseur (par l'intermédiaire d'un moteur) et l'acquisition de l'analyseur de réseau. Le brasseur effectue une rotation d'angle  $\alpha$  et l'analyseur procède au balayage en fréquences : il relève les 4 paramètres  $S$ . Ces deux tâches sont répétées autant de fois que de nombre  $n$  de positions de brasseur nécessaire à la statistique.

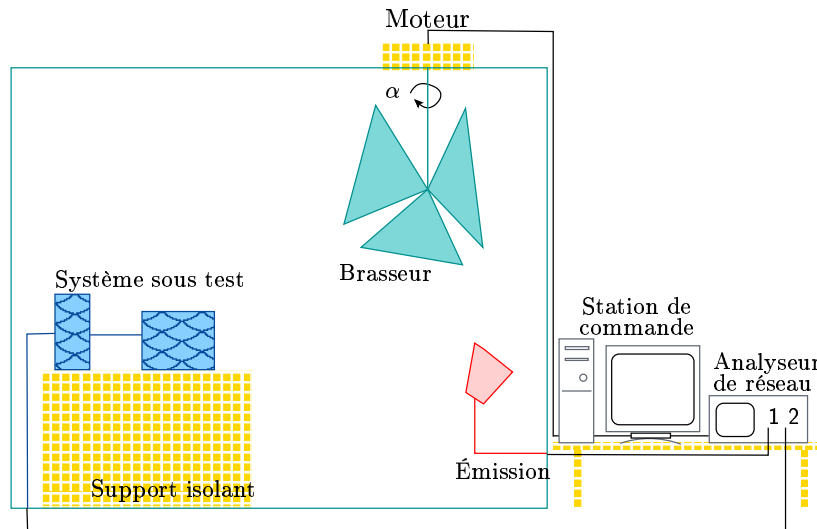


FIG. 2.1 – Acquisition

Le relevé des  $n$  paramètres  $S$  doit être interprété comme le relevé d'un échantillon de taille  $n$  d'une population régie par une loi de probabilité. Les propriétés de cet échantillon ne constituent que des estimateurs des caractéristiques vraies de la population. C'est pourquoi la méthode statistique de l'intervalle de confiance a été utilisée (annexe A). Ces intervalles de confiance apparaîtront s'ils sont suffisamment importants et significatifs pour présenter et interpréter les résultats statistiques de mesure.



## Moyens expérimentaux

On dispose de plusieurs CRBM nous permettant d'explorer un large domaine fréquentiel et d'étudier le comportement de différents systèmes plus ou moins complexes. Chaque fois, une évaluation empirique de la fréquence de coupure basse,  $f_c$ , des CRBM est donnée par :  $5 \times f_1$  où  $f_1$  est la fréquence du premier mode correspondant à la plus petite dimension de la CRBM. En dessous de cette fréquence, les propriétés statistiques de la CRBM ne sont plus considérées comme satisfaisantes.

Tout d'abord, la première CRBM est un caisson métallique de dimensions  $30 \times 40 \times 50$  cm<sup>3</sup>. La fréquence de coupure basse  $f_c$  est estimée à 2,5 GHz. Pour cette bande de fréquences, l'énergie électromagnétique est injectée grâce à un guide (intéressant pour sa très bonne adaptation dans sa bande de fonctionnement (8-12GHz)) ou un dipôle, intéressant pour ses multiples adaptations dans une large bande. Ce caisson est plutôt utilisé pour caractériser des couplages sur des câbles et des objets de petites dimensions.

Ensuite, une cavité métallique de dimensions  $2,4 \times 1,2 \times 1,2$  m<sup>3</sup> constitue un deuxième environnement de type CRBM. Sa zone de bon fonctionnement commence à environ 600MHz. Des antennes cornets ont été utilisées pour injecter l'énergie. Dans cette CRBM aux dimensions intermédiaires, les systèmes émetteurs et récepteurs sont moins limités, ce qui permet de faire une mesure très large bande (de 500MHz à 20GHz).

Enfin, la chambre réverbérante du DERA <sup>1</sup> de dimensions  $10 \times 8 \times 7$  m<sup>3</sup> a été utilisée. Sa fréquence de coupure basse  $f_c$  se situe vers 107 MHz. Les antennes utilisés sont de type log-périodiques ou cornet. Pour cette CRBM, on dispose de deux zones de résultats correspondant à deux bandes de fréquences :

- de 400MHz à 1GHz où les mesures ont été réalisées en présence de puissance importante.
- de 1GHz à 10GHz où les mesures ont été réalisées sans puissance de la même manière que pour le caisson et la CRBM intermédiaire.

Cette dernière CRBM est la plus intéressante en raison de la largeur de sa bande de fonctionnement.

Les différents systèmes utilisés sont :

- une boîte métallique ( $18,4 \times 33,0 \times 23,0$  cm<sup>3</sup>) munie d'un fil tendu de 50 cm ;
- deux boîtes métalliques ( $18,4 \times 33,0 \times 23,0$  cm<sup>3</sup>) reliées par un fil tendu de 50 cm ;
- différentes antennes selon la gamme de fréquence étudiée : une dipôle de longueur  $\ell = 4,2$  cm dans le caisson, des cornets ou antennes log-périodiques dans les autres CRBM.

### 2.1.2 Comportement fréquentiel des paramètres S

Dans cette sous-section, l'évolution des mesures en fonction de la fréquence sera observée. D'une part, l'allure de la loi de probabilité sera étudiée afin d'identifier

---

<sup>1</sup>Defence Evaluation and Research Agency / Farnborough - Angleterre

quelles seront les propriétés du modèle probabiliste que l'on cherche ainsi que ses limites. D'autre part, une fois la loi établie, l'évolution fréquentielle des paramètres caractéristiques de la loi seront étudiés. Il s'agit de la moyenne et de l'écart type. Un comportement caractéristique de la CRBM sera alors observé.

### Lois de probabilités

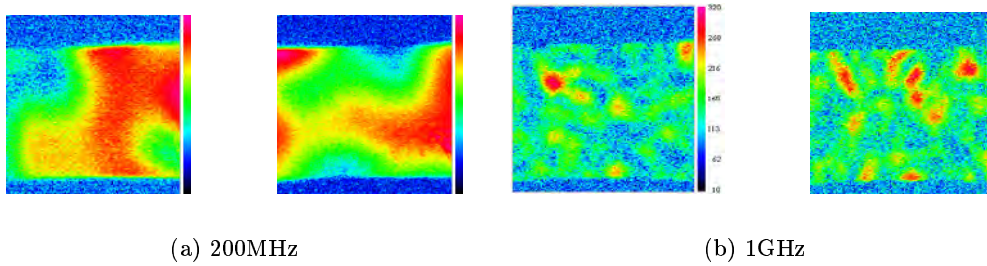


FIG. 2.2 – Allure du champ à deux fréquences pour deux configurations

La première approche a été de filmer le module du champ grâce à la méthode EMIR [84]. Cette technique de mesure utilise un écran photo-thermique qui s'échauffe lorsqu'il est exposé à un champ électromagnétique. Or, son échauffement est proportionnel au niveau du champ. L'écran est filmé par une caméra infrarouge. Les résultats de la figure 2.2 ont été obtenus sur un écran de  $1 \times 1,40m^2$  dans la CRBM du DERA pour deux positions de brasseur et pour deux fréquences. Les deux premières images du (a) sont à une fréquence relativement basse vis à vis de la CRBM (200 MHz à comparer à la fréquence de coupure de 107 MHz). Les deux suivantes dans le (b) sont bien dans la zone de fonctionnement. Ces images permettent de comparer la variation du champ en un point donné de la zone de mesure ainsi qu'en fonction de la variation en un autre point situé à une distance  $d$ .

En basse fréquence, les modes de la cavité sont bien marqués et on constate que le champ n'est pas très sensible à la variation de la position du brasseur. Les variations du champ en deux points voisins sont fortement corrélées. Plus on monte en fréquence, plus le champ devient sensible à la variation de position du brasseur et plus la variation du champ en deux points proches est décorrélée.

Pour mieux appréhender les propriétés du champ en hautes fréquences, une deuxième approche est aussi d'utiliser une antenne ou un capteur de champ. Dans ce cas, le paramètre  $S_{21}$  mesuré est proportionnel à l'amplitude du champ électromagnétique. On trace alors l'évolution de ce champ sur un tour complet du brasseur (entre  $[0; 2\pi]$ ). Sur la figure 2.3, la loi «déterministe» du champ en fonction de la position de brasseur a été mesurée dans la CRBM intermédiaire en deux endroits de la zone de mesure.

## A 5GHz dans la CRBM de l’Onera

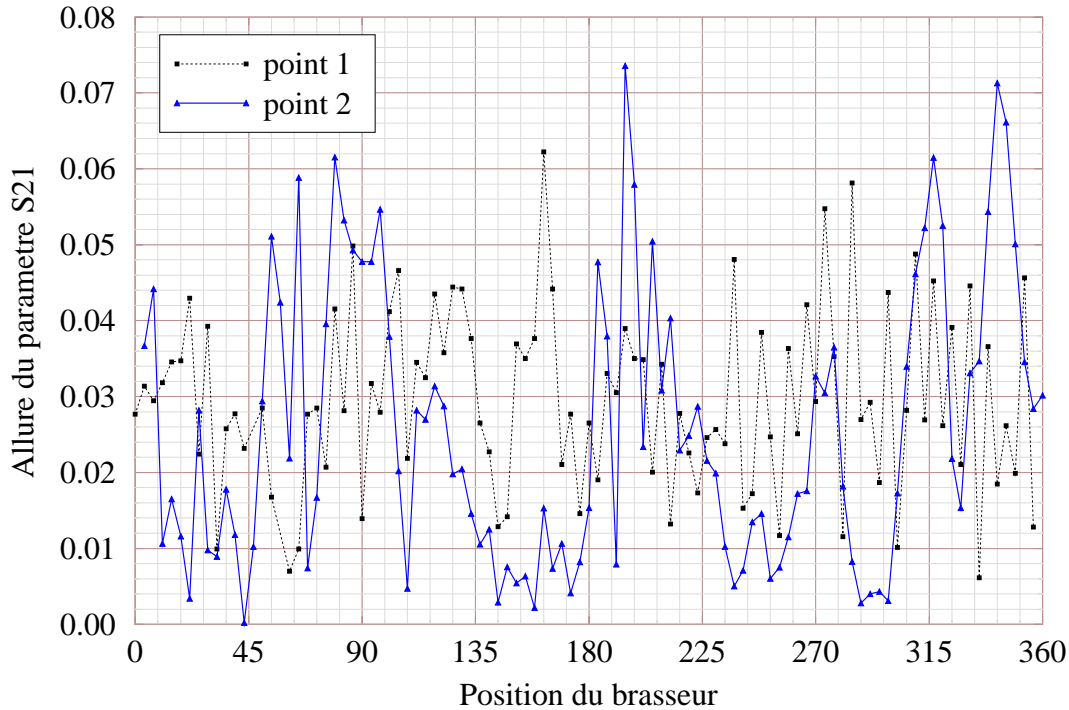


FIG. 2.3 – Évolution du champ en deux points de la CRBM

Les courbes représentées dans la figure 2.3 sont d’allures très différentes d’un point de mesure à l’autre. Toutefois, si on considère ces données d’un point de vue statistique, elles présentent toujours les mêmes caractéristiques (figure 2.4). Non seulement en un point donné, toute notion de dépendance entre les échantillons consécutifs est perdue : l’ordre des positions du brasseur n’intervient plus ; mais aussi, d’un point à l’autre, la loi statistique relevée ne change plus. On procède donc véritablement à l’essai statistique que l’on veut avoir dans la CRBM. C’est en haute fréquence que l’on peut parler de propriétés statistiques du champ.

Dans la zone de fonctionnement, la CRBM idéale doit établir un champ statistiquement homogène et isotrope. D’une part, ceci signifie que le niveau moyen de puissance du champ est le même quel que soit le point d’observation dans la zone de mesure. D’autre part, il est classiquement admis dans la littérature que chaque position de brasseur a contribué à faire apparaître de façon égale toutes les directions de propagation et de polarisation du champ. Ces deux propriétés expriment effectivement que le champ électromagnétique suit la même loi de probabilité quel que soit le point d’observation dans la zone de mesure.

Pour correspondre aux propriétés d’homogénéité et d’isotropie, les différentes composantes complexes  $\mathbf{E}_x$ ,  $\mathbf{E}_y$  et  $\mathbf{E}_z$  du champ sont supposées présenter les pro-

riétés suivantes :

- elles sont indépendantes entre elles ;
- les parties réelles et imaginaires de chaque composante sont indépendantes également et suivent toutes la même loi de probabilité, la loi Normale centrée  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

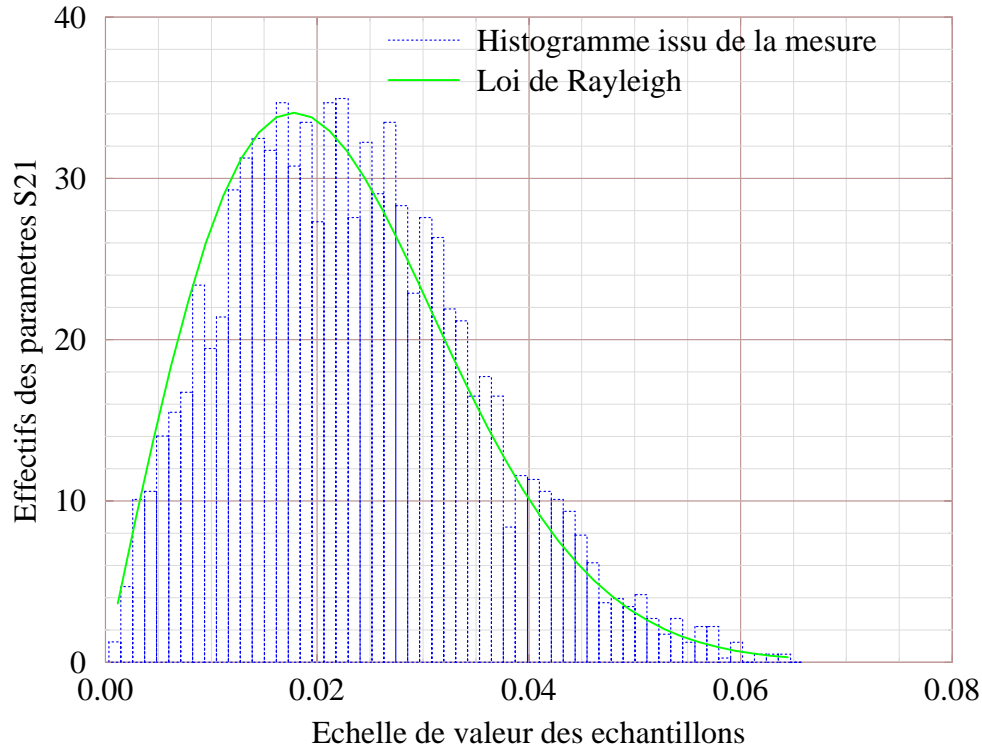


FIG. 2.4 – Densité de probabilité du champ mesuré

Pour le module de chaque composante  $\mathbf{E}_x$ ,  $\mathbf{E}_y$  ou  $\mathbf{E}_z$ , la loi correspondante est la loi de Rayleigh ou loi du  $\chi_2$  (figure 2.4, annexe A) où l'indice 2 désigne le degré de liberté de la loi : le rapport  $\tau$  entre sa moyenne et son écart-type est de 1.913. Le module du champ total correspondant aux trois composantes complexes suit la loi statistique du  $\chi_6$  ou loi de Rayleigh généralisée à l'ordre 6 (annexe A). Dans ce cas, le rapport entre la moyenne et l'écart type est de 3.400. La connaissance de ces rapports nous ont permis d'établir un autre moyen, de valider les lois, que le test du  $\chi^2$  (dont le résultat ne rejette pas l'hypothèse que ces lois décrivent effectivement le comportement statistique des données, annexe A).

Pour mieux identifier la limite de fonctionnement basse fréquence de la CRBM, l'allure de la loi statistique a été représentée pour différentes fréquences. Ceci a été fait pour le caisson réverbérant avec un dipôle de longueur  $\ell = 4, 2\text{cm}$ . Ce dernier présente

des points d'adaptation particuliers (pour les fréquences telles que  $f = \frac{4(2p+1)c_0}{\ell}$  : 1,8GHz, 5,5GHz, 9,1GHz,...). Il permet de mesurer le module d'une seule des trois composantes du champ.

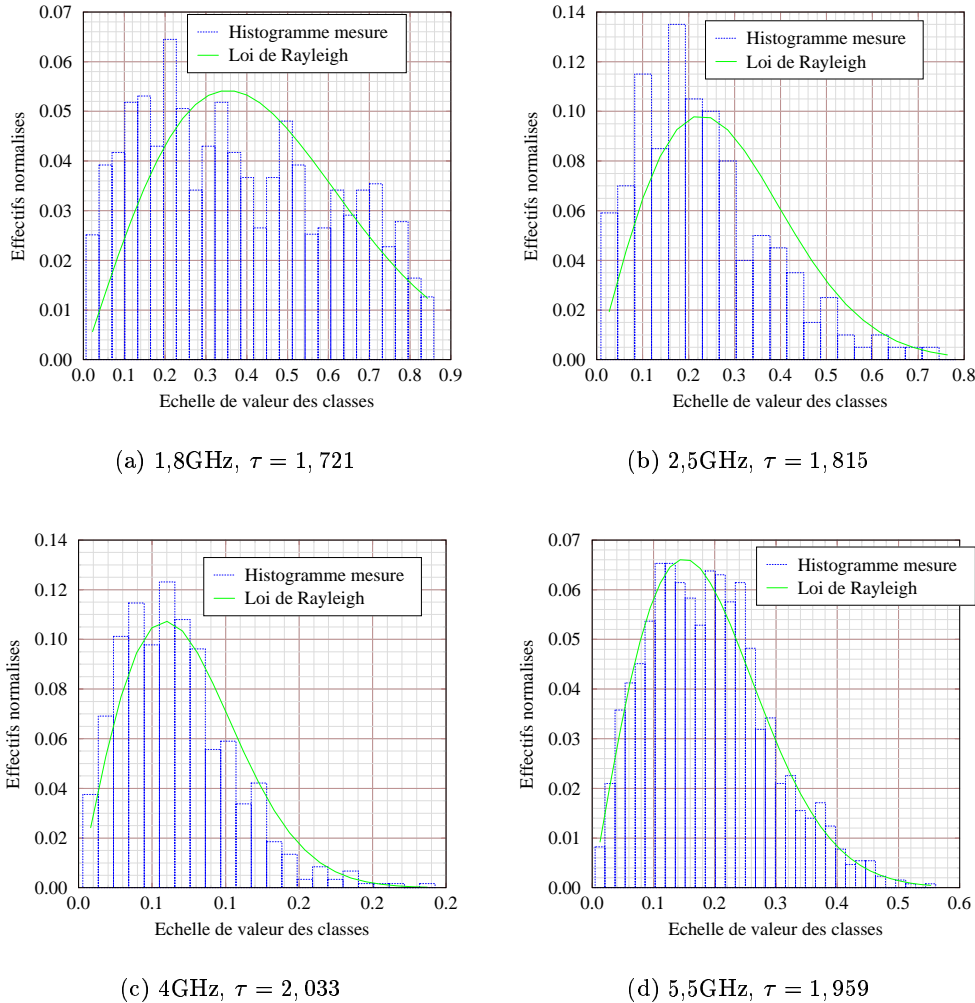
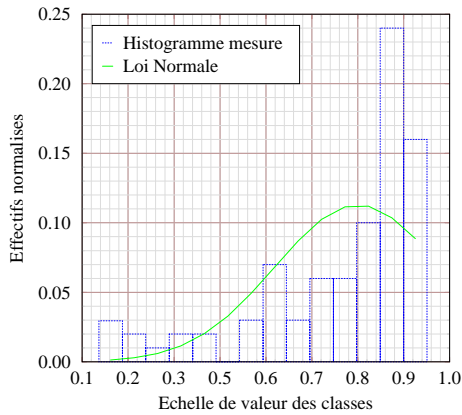


FIG. 2.5 – Validation de la loi de Rayleigh en fonction de la fréquence

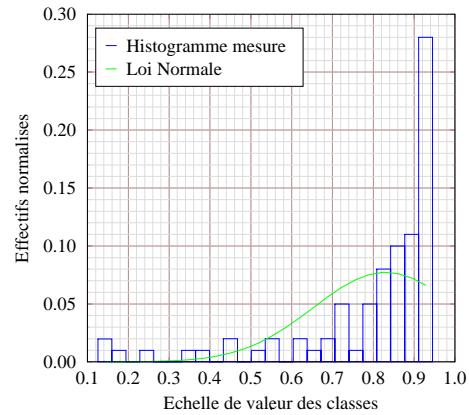
On s'attend à retrouver la loi de Rayleigh : on trace donc cette loi en tenant compte des caractéristiques statistiques de l'échantillon. Le test du  $\chi_2$  compare l'allure de cette loi avec celle de l'histogramme issu de la mesure. La loi de Rayleigh s'établit effectivement peu à peu (figure 2.5) et la loi empirique pour  $f_c$  peut être retenue.

Puisque le protocole expérimental permet aussi d'obtenir les paramètres d'adaptation  $S_{11}$  de l'antenne et  $S_{22}$  du système de réception, ces paramètres ont été observés. Les résultats obtenus dans le caisson avec le dipôle sont ceux de la figure 2.6.

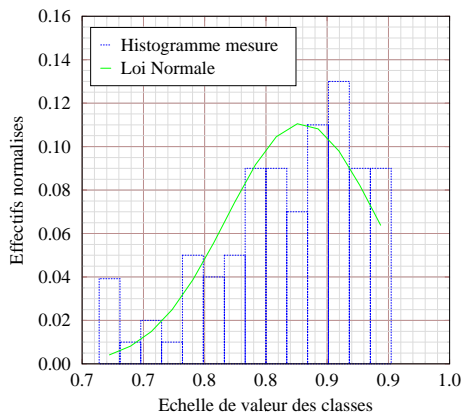
Cette étude nous permet de mieux appréhender le type de perturbation aléatoire que les parois induisent sur l'adaptation des systèmes.



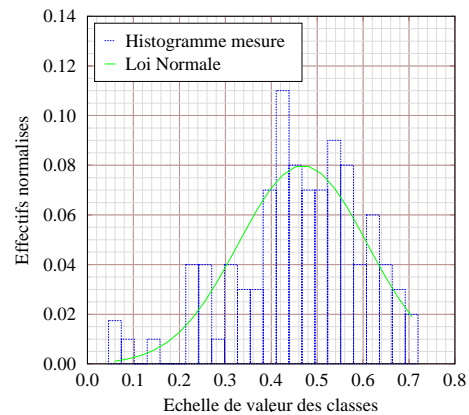
(a) 1,8GHz,  $\tau = 4, 157$



(b) 2,5GHz,  $\tau = 4, 710$



(c) 4GHz,  $\tau = 13, 517$



(d) 5,5GHz,  $\tau = 3, 3417$

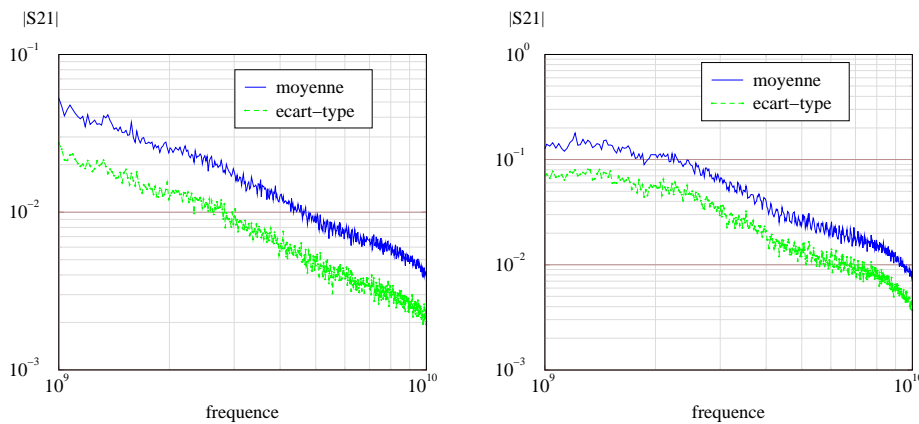
FIG. 2.6 – Densité de probabilité du paramètre  $S_{11}$

Il est intéressant de constater que la loi de probabilité des paramètres  $S_{ii}$  ne peut pas être la même que celle des paramètres  $S_{ij}$ . En effet, dans le chapitre 1, le couplage se décompose en rétroaction des parois plus un couplage espace libre que l'on peut négliger si les deux systèmes d'émission et de réception ne sont pas en regard. Les paramètres  $S_{ij}$  sont donc principalement exprimés en fonction de la rétroaction des parois.

Par contre, pour les paramètres d'adaptation  $S_{ii}$ , la moyenne est fixée par le comportement propre du système en espace libre. Elle n'est donc pas corrélée avec la variance qui, elle, traduit l'effet des parois de la cavité.

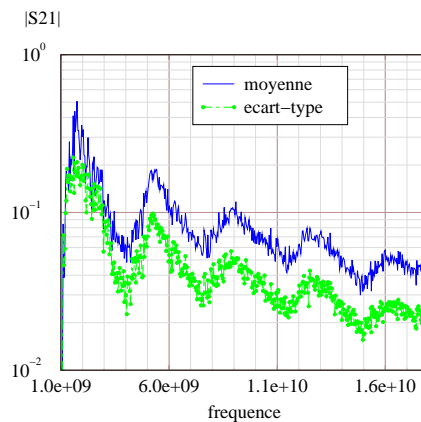
### Allures globales

Dans tous les cas (caisson, cavité intermédiaire et CRBM du DERA), une allure générale se dégage des courbes expérimentales des paramètres  $S$  : le  $S_{21}$  moyen du système de réception est « pondéré » par une variation inversement proportionnelle à la fréquence. Ce comportement caractéristique du test CRBM devient prépondérant en haute fréquence (figure 2.7).



(a) Dans la CRBM du DERA

(b) Dans la cavité intermédiaire

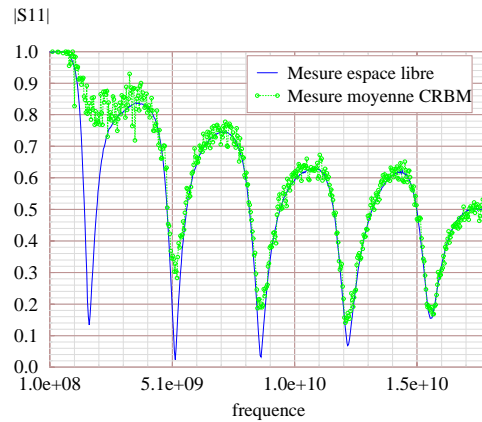


(c) Dans le caisson réverbérant

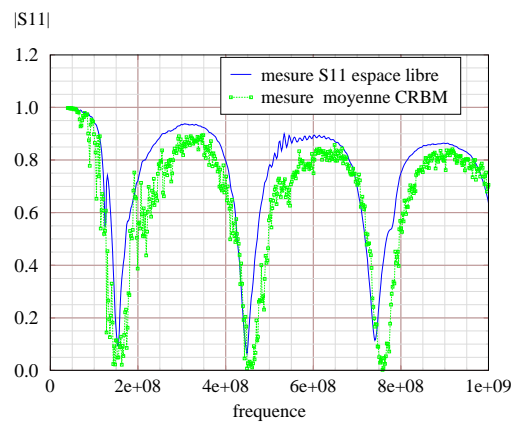
FIG. 2.7 – Allure des paramètres  $S_{21}$  moyens issus de la mesure

Il est intéressant également de regarder le comportement du paramètre  $S_{11}$  qui caractérise l'adaptation du système. Puisque ces deux caractéristiques moyenne et écart-type ne semblent pas corrélés, on les étudie séparément. Le  $S_{11}$  moyen de la mesure est comparé à celui de l'espace libre (mesuré ou simulé avec la méthode numé-

rique de l'EFIE <sup>2</sup>) : leurs allures sont très semblables dans la zone de fonctionnement de la CRBM (figure 2.8).



(a) Dans le caisson



(b) dans la CRBM du DERA

FIG. 2.8 – Allure des  $|S_{11}|$  moyens

La ressemblance entre la simulation et la mesure indique que, globalement, sur un tour de brasseur, le système rayonne comme en espace libre. L'expérimentation indique donc que la rétroaction moyenne des parois (changeantes sur un tour de brasseur) devient de plus en plus «négligeable» sur l'adaptation du système lorsque la fréquence augmente. Attention, ce résultat n'est valable qu'en moyenne sur un tour complet du brasseur et dans la partie hautes fréquences de la CRBM. En effet, si on observe position par position de brasseur, le  $S_{11}$  de la CRBM est très perturbé(cf. 2.10) autour du  $S_{11}$  de l'espace libre.

<sup>2</sup>Electric Field Integral Equation



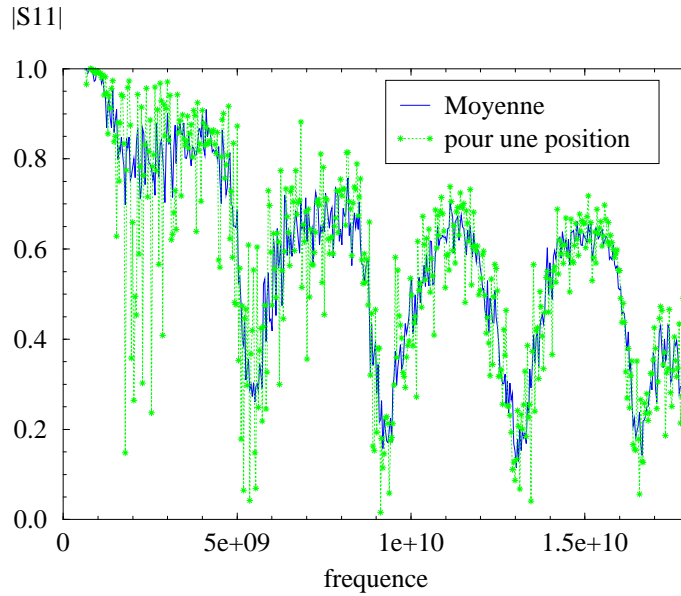


FIG. 2.9 – Paramètre  $S_{11}$  pour l'espace libre et une position de brasseur

Un autre résultat important est que plus la fréquence augmente et moins la rétroaction des parois agit sur l'adaptation du système. Ceci se traduit par l'évolution de l'écart type du  $S_{11}$ . Celui-ci est également inversement proportionnel à la fréquence comme pour les paramètres  $S_{21}$ .

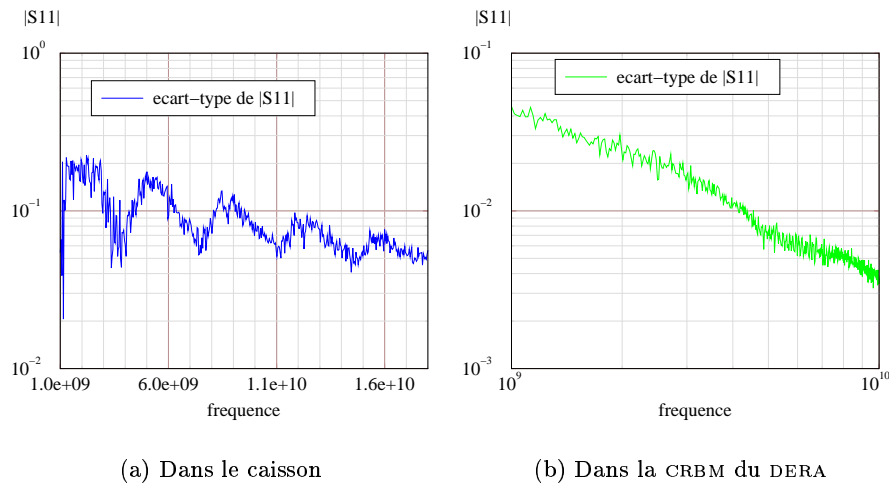


FIG. 2.10 – Écart-type du paramètre  $|S_{11}|$

Puisque ce dernier paramètre ressemble beaucoup à l'écart-type du paramètre  $S_{21}$ , l'étude de la sous-section 2.1.3 se consacre à leur comparaison.

### 2.1.3 Relation entre les paramètres S

#### Une constatation

L'écart-type du module du paramètre  $S_{11}$  nous indique qu'à partir d'une certaine fréquence, les systèmes «ne voient plus» les parois de la cavité environnante. Ils se couplent de plus en plus comme en espace libre. Par ailleurs, les écarts types des modules des  $S_{ij}$  et  $S_{ji}$  décroissent tous les deux en fonction de la fréquence. Ceci nous amène donc à comparer naturellement les caractéristiques statistiques des 4 paramètres S. Pour se faire, une première approche est d'étudier les corrélations entre ces paramètres. (figure 2.11).

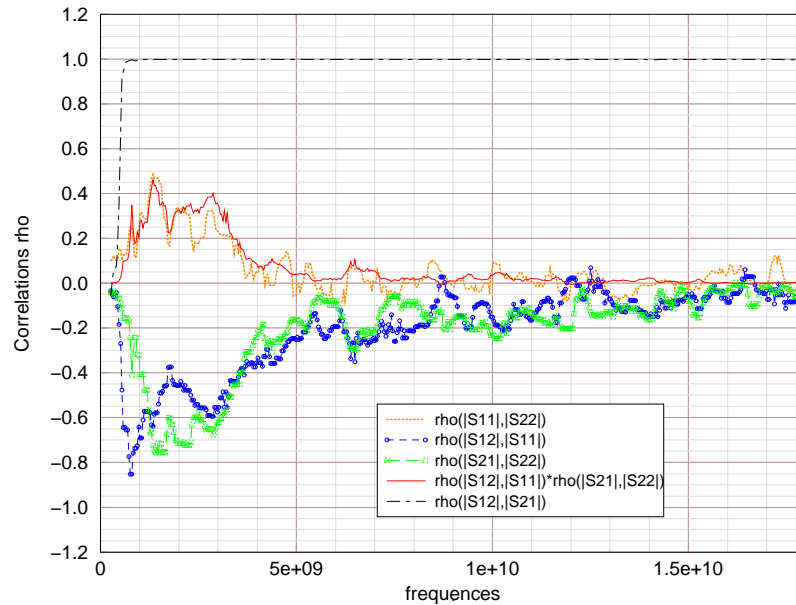


FIG. 2.11 – Comparaison des modules des 4 paramètres S

La corrélation permet de caractériser le degré de «ressemblance» entre deux variables aléatoires  $x$  et  $y$ . Elle est définie comme suit :

$$\rho(x, y) = \frac{\mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Si  $x$  et  $y$  sont indépendantes alors le numérateur de cette expression est nul<sup>3</sup>. Si  $x$  et  $y$  sont identiques, alors le numérateur et le dénominateur sont tous les deux égaux à la variance de cette variable aléatoire : la corrélation vaut 1.

Tout d'abord, la corrélation entre les paramètres  $S_{21}$  et  $S_{12}$  vaut 1 : en effet, le quadripôle CRBM est réciproque. La corrélation concernant les deux paramètres d'un même port est également observée :  $S_{11}$  et  $S_{12}$  (au niveau du port 1) sont corrélés

<sup>3</sup>Si deux variables sont indépendantes, elles sont forcément décorréliées. Par contre, si deux variables sont décorréliées, on ne peut pas conclure sur leur indépendance !

de la même manière que  $S_{22}$  et  $S_{21}$ . Les paramètres  $S_{ij}$  de couplage étant identiques, il devient naturel de s'intéresser à la corrélation entre les paramètres  $S_{11}$  et  $S_{22}$ . On constate la relation suivante :

$$\rho(|S_{11}|, |S_{22}|) = \rho(|S_{21}|, |S_{22}|) \cdot \rho(|S_{12}|, |S_{11}|)$$

Cette relation reste pour l'instant inexplicquée (elle représente probablement la conservation de l'énergie.). Si l'on compare maintenant directement les variances entre elles, on trouve (figure 2.12) :

$$\sigma_{|S_{ij}|}^2 = \frac{\sqrt{\sigma_{|S_{11}|}^2 \sigma_{|S_{22}|}^2}}{2} \quad i \neq j \text{ et } \{i, j\} \in \{1, 2\}$$

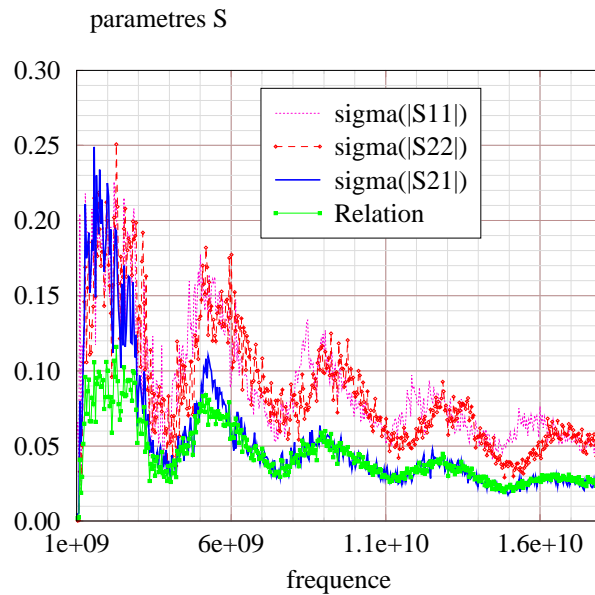


FIG. 2.12 – Comparaison des modules des paramètres S

Cette relation est également à relier au comportement énergétique de la CRBM. En effet, elle compare la variation de l'énergie (due à la variation de la position du brasseur) qui se couple ou non dans la CRBM (paramètres  $S_{ii}$ ) à celle qui se couple sur les systèmes (paramètres  $S_{ij}$ ), chaque fois par rapport à un niveau «constant» d'énergie existant dans la CRBM quelle que soit la position du brasseur.

### Explication par analogie aux systèmes multiports

Dans le chapitre 1, le couplage dans une CRBM a été établi comme la superposition :

- d'un couplage direct espace libre entre l'antenne d'émission et le système en réception et

– de la rétroaction des parois métalliques.

Il est donc intéressant de reconsidérer la CRBM vue comme un quadripôle. En effet, jusqu'à présent le rôle des parois était «fondu» dans chaque paramètre du quadripôle CRBM. A présent, afin de séparer l'effet des parois du couplage direct espace libre, un troisième port est rajouté. Il exprime donc la rétroaction de toutes les parois métalliques autour d'un quadripôle défini cette fois par l'antenne d'émission et le système en réception en espace libre. Sa nouvelle représentation est celle de la figure 2.13 sur laquelle  $Z_{PB}$  exprime les pertes dans les parois métalliques.

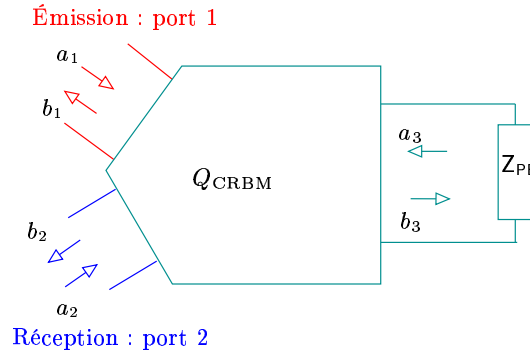


FIG. 2.13 – Nouvelle représentation de la CRBM

Cet hexapôle est caractérisé par la matrice  $[S]$  définie comme suit :

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{\circ} & S_{12}^{\circ} & S_{13} \\ S_{21}^{\circ} & S_{22}^{\circ} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Où les paramètres :

- $S_{11}^{\circ}$ ,  $S_{12}^{\circ}$ ,  $S_{21}^{\circ}$  et  $S_{22}^{\circ}$  caractérisent le quadripôle «espace libre» défini seulement par l'émission et la réception : ils sont donc déterministes ;
- $S_{13}$ ,  $S_{31}$ ,  $S_{32}$  et  $S_{23}$  exprime l'action des parois sur l'émission et la réception, ils sont de nature aléatoire ;
- $S_{33}$ , également de nature aléatoire, exprime «l'adaptation changeante»  $Z_{PB}$  de la CRBM aux parois.

La CRBM est toujours un multipôle réciproque (cf. le chapitre 1), cette matrice  $[S]$  est donc toujours symétrique :

- $S_{12}^{\circ} = S_{21}^{\circ} = S_t^{\circ}$  ;
- $S_{13} = S_{31}$  et  $S_{23} = S_{32}$ .

Au niveau du port 3, le coefficient de réflexion  $\rho_{PB}$  peut être défini comme suit :

$$\frac{a_3}{b_3} = \rho_{PB}$$

Cette relation permet de réduire la taille de la matrice [S] pour revenir de nouveau à un quadripôle. En effet, la pseudo-onde  $b_3$  s'écrit :

$$\begin{aligned} b_3 &= S_{31} \cdot a_1 + S_{32} \cdot a_2 + S_{33} \cdot a_3 \\ \rho_{PB} b_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Le terme  $a_3$  peut donc se remplacer de telle sorte que :

$$\begin{aligned} b_1 &= (S_{11}^o + S_{13} \frac{\rho_{PB}}{1 - \rho_{PB} S_{33}} S_{31}) \cdot a_1 + (S_t^o + S_{13} \frac{\rho_{PB}}{1 - \rho_{PB} S_{33}} S_{32}) \cdot a_2 \\ b_2 &= (S_t^o + S_{23} \frac{\rho_{PB}}{1 - \rho_{PB} S_{33}} S_{31}) \cdot a_1 + (S_{22}^o + S_{23} \frac{\rho_{PB}}{1 - \rho_{PB} S_{33}} S_{32}) \cdot a_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dans les équations précédentes 2.1, les paramètres mesurés dans l'expérimentation sont donc identifiés à :

$$\begin{aligned} S_{11}^{mes} &= S_{11}^o + S_{13}^2 \cdot \frac{\rho_{PB}}{1 - \rho_{PB} S_{33}} \\ S_{22}^{mes} &= S_{22}^o + S_{23}^2 \cdot \frac{\rho_{PB}}{1 - \rho_{PB} S_{33}} \\ S_t^{mes} &= S_t^o + S_{13} \cdot S_{23} \cdot \frac{\rho_{PB}}{1 - \rho_{PB} S_{33}} \end{aligned}$$

soit de façon plus générale :

$$S_{ij}^{mes} = S_{ij}^o + S_{i3} \cdot S_{j3} \cdot \frac{\rho_{PB}}{1 - S_{33} \rho_{PB}} \quad i, j \in \{1, 2\}$$

Les termes de nature aléatoire peuvent être identifiés par les fonctions  $f_k$  :

$$f_k = \frac{S_{k3} \sqrt{\rho_{PB}}}{\sqrt{1 - S_{33} \rho_{PB}}} \quad k \in \{1, 2\}$$

Ces fonctions aléatoires doivent traduire le comportement de la CRBM sur les parties réelles et imaginaires des paramètres S. Dans l'expérimentation, une CRBM idéale doit produire un champ homogène et isotrope : les parties réelles et imaginaires des composantes du champ sont indépendantes et suivent une loi normale centrée. Dans ce cas, les paramètres S mesurés ont eux aussi une partie réelle et imaginaire gaussienne. L'hypothèse que le port 3 obéit à la loi normale est donc adoptée : ceci signifie que l'on suppose que les fonctions  $f_k$  sont complexes et leurs parties réelles et imaginaires suivent une loi normale centrée  $\mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$ . Dans ce cas, les moyennes et variances des fonctions  $f_k$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_k) &= 0 & var(f_k) &= 2\sigma_k^2 \\ \mathbb{E}(f_k^2) &= 0 & var(f_k^2) &= 8\sigma_k^4 \\ \mathbb{E}(f_i f_j) &= 0 & var(f_i f_j) &= 4\sigma_i^2 \sigma_j^2 \end{aligned}$$

En identifiant ces caractéristiques, les moyennes et variances des paramètres  $S$  s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{ij}^{\text{mes}}) &= S_{ij}^{\circ} + \mathbb{E}(f_i f_j) \\ \text{var}(S_{ij}^{\text{mes}}) &= \mathbb{E}(S_{ij}^{\text{mes}2}) - \mathbb{E}(S_{ij}^{\text{mes}})^2 = \text{var}(f_i f_j)\end{aligned}$$

De façon explicite, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{11}^{\text{mes}}) &= S_{11}^{\circ} & \text{var}(S_{11}^{\text{mes}}) &= 8\sigma_1^4 \\ \mathbb{E}(S_{22}^{\text{mes}}) &= S_{22}^{\circ} & \text{var}(S_{22}^{\text{mes}}) &= 8\sigma_2^4 \\ \mathbb{E}(S_t^{\text{mes}}) &= S_t^{\circ} & \text{var}(S_t^{\text{mes}}) &= 4\sigma_1^2\sigma_2^2\end{aligned}$$

La relation observée dans la mesure apparaît :

$$\text{var}(S_t^{\text{mes}}) = \frac{\sqrt{\text{var}(S_{11}^{\text{mes}})\text{var}(S_{22}^{\text{mes}})}}{2}$$

D'autre part, afin de retrouver  $\mathbb{E}(S_t^{\text{mes}}) = 0$ , il suffit de considérer que le couplage espace libre entre les deux systèmes est négligeable puisque l'émission et la réception ne sont pas en regard. Dans ce cas, la variance du couplage sur le système (ou niveau d'énergie disponible) est égale à la moyenne géométrique des variances d'adaptation (ou niveau d'énergie couplée) dans la CRBM. Ce résultat fait donc ressortir les propriétés propres aux systèmes quand la CRBM propose un environnement électromagnétique aléatoire «idéal».

Au travers de cette explication, l'expérience indique que le comportement aléatoire de la CRBM est seulement caractérisé par ces variances. Toutefois, il a été présumé que les variables aléatoires suivent toutes une loi normale. Si ceci peut être vrai en haute fréquence (grâce à la loi des grands nombres), il est difficile ici de chiffrer la limite basse fréquence de la validité de cette explication. Ceci sera étudié de façon plus approfondi dans la suite.

## 2.2 Étude théorique de la variance des observables

Dans cette section, une étude théorique des variances des observables est proposée. Elle a pour but de retrouver le comportement aléatoire observé par l'expérimentation. Dans un premier temps, pour mieux appréhender la diffraction du champ de la CRBM par le brasseur, une matrice particulière de répartition sera abordée. De cette étude des conclusions aboutiront sur les caractéristiques d'une CRBM idéale et ses limites de fonctionnement basse fréquence. Ensuite pour se rapprocher des données accessibles dans la mesure, la variance de la tension de couplage sera étudiée.

### 2.2.1 Variance des paramètres $S$

Dans cette sous-section, afin de mieux comprendre le sens de la relation observée entre les paramètres  $S$  ainsi que l'établissement de la loi gaussienne, l'effet de la diffraction d'un brasseur idéal est représenté. Il correspondrait à l'image suivante. Si on envoie une forme d'onde vers le brasseur et que celui-ci diffracte correctement, l'énergie de cette onde va être répartie sur un ensemble de formes d'ondes différentes constituant le champ diffracté. La diffraction «idéale» doit être telle qu'au bout d'un tour de brasseur toutes les formes d'ondes sont apparues et aucune n'a été privilégiée par rapport aux autres.

Il reste à définir ce que sont ces formes d'ondes ainsi que le fait qu'aucune d'entre elles ne soit privilégiée. Les formes d'ondes correspondent aux différents modes de résonance existant pour les positions successives du brasseur. Ces modes de résonance changent d'une configuration géométrique à l'autre. C'est pourquoi il sera présenté tout d'abord une description du champ électromagnétique faisant intervenir une base fixe orthonormale de fonctions. Cette notation permettra d'introduire une matrice de répartition particulière. Ensuite, une loi de probabilité uniforme sur toutes ces formes d'ondes sera imposée. Finalement, de cette étude se dégageront les caractéristiques d'une CRBM «idéale».

### Opérateur de diffraction de la CRBM et ses vecteurs propres

On suppose maintenant que l'ambiance de la zone de mesure de la CRBM est un environnement «diffractant» par rapport à l'espace libre. Ceci veut dire que dans la zone de mesure, on va considérer des ondes engendrées par des sources rayonnant en espace libre. Ces ondes seront réfléchies par le brasseur et les parois de la CRBM en ondes «rentrantes» dans la zone de mesure.

Afin de pouvoir déterminer les propriétés de cette matrice de diffraction, on étudie la décomposition en vecteurs propres du champ solution dans la CRBM. Attention, ces vecteurs propres  $\mathbf{v}_\lambda$  changent à chaque configuration de brasseur. Leur nombre va également augmenter avec la fréquence. C'est pourquoi on utilise des fonctions de base pour décrire ces vecteurs propres. Les coefficients des fonctions de base vont changer d'une configuration du brasseur à une autre.

La théorie de la diffraction nous indique que cette diffraction peut être représentée par une matrice de  $S$  de dimension  $N$  où  $N$  est le nombre de fonctions de base utilisées pour représenter ces ondes rentrantes. Les vecteurs propres définissent alors la matrice de diffraction comme suit :

$$S = \sum_{\lambda=1}^N \mathbf{v}_\lambda s_\lambda \mathbf{v}_\lambda^t$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & \dots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & \dots & s_{2N} \\ \dots & \dots & s_{ij} & \dots & s_{iN} \\ \dots & \dots & s_{ji} & s_{jj} & s_{jN} \\ s_{N1} & \dots & \dots & \dots & s_{NN} \end{bmatrix}$$

Dans cette matrice, chaque  $s_{ij}$  est égal à :

$$\sum_{\lambda=1}^N s_{\lambda} \mathbf{v}_{\lambda i} \mathbf{v}_{\lambda j}$$

Où  $i$  et  $j$  identifient la  $i^{\text{ème}}$  ou  $j^{\text{ème}}$  direction dans l'espace vectoriel, et  $\lambda$  le  $\lambda^{\text{ème}}$  vecteur propre. Cette matrice est symétrique, ceci permet d'écrire si on normalise :

$$\langle \mathbf{v}_{\lambda} | \mathbf{v}_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu} \quad \|\mathbf{v}_{\lambda}\| = 1$$

La réponse de la CRBM à une excitation peut être étudiée. L'excitation  $a$  est une combinaison linéaire des vecteurs propres.

$$a = \sum_{\lambda=1}^N \psi_{\lambda} \mathbf{v}_{\lambda}$$

où :

$$\psi_{\lambda} = \mathbf{v}_{\lambda}^t a$$

La réponse de la CRBM à cette excitation est notée  $b$  et s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} b &= S a \\ &= \sum_{\mu=1}^N \mathbf{v}_{\mu} s_{\mu} \mathbf{v}_{\mu}^t a \\ &= \sum_{\mu=1}^N \mathbf{v}_{\mu} s_{\mu} \psi_{\mu} \end{aligned}$$

La réponse de la CRBM à l'excitation est donc elle aussi une combinaison linéaire des vecteurs propres. Cette fois les poids s'écrivent :  $s_{\mu} \psi_{\mu}$  et  $s_{\mu}$  est identifié au coefficient de réflexion qui s'applique au vecteur propre  $\mathbf{v}_{\mu}$ . Pour évaluer les  $s_{\mu}$  ou  $s_{ij}$ , il suffit d'appliquer  $N$  excitations où chacune d'entre elles est précisément un des vecteurs propres avec le poids  $\psi_{\mu} = 1$ .

De cette manière, la représentation correspondrait à l'étude d'un multipôle ou chaque entrée serait «réservée» à un seul type d'onde (figure 2.14). La matrice de répartition  $S$  évalue alors la diffraction ou la réponse de la CRBM pour chaque excitation propre.

Puisque la diffraction varie avec l'orientation du brasseur, cette matrice de diffraction, définie comme ci-dessus, dépend aussi de l'angle de rotation  $\alpha$  du brasseur. Si ce dernier joue bien son rôle, chacun des vecteurs propres devrait présenter toutes les directions possibles sur un tour de brasseur



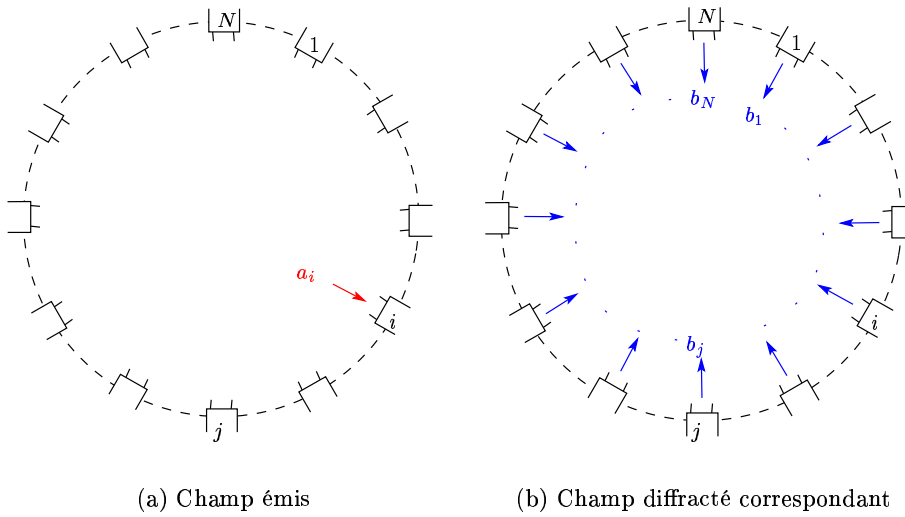


FIG. 2.14 – Définition des N ports pour la matrice de diffraction

### Une répartition uniforme des vecteurs propres

Il est maintenant question de ne plus favoriser une forme d'onde par rapport aux autres. Donner une répartition uniforme aux formes d'ondes en tenant compte du fait que leur somme est limitée à l'amplitude  $R$  du champ total est une solution. On normalise cette amplitude à 1. Ceci peut être réalisé en exigeant que chacun des vecteurs propres touche équitablement à toutes les directions possibles dans l'espace de dimension  $N$ . C'est-à-dire que l'on considère une ambiance CRBM idéale lorsque les vecteurs propres de la matrice de diffraction  $S$  sont uniformément distribués dans  $\mathcal{S}^N$  (la surface de l'hypersphère unité de dimension  $N$ ).

On supposera que ces vecteurs propres sont statistiquement indépendants et que leurs valeurs propres sont identiquement distribuées et indépendantes entre elles.

Les  $\mathbf{v}_\lambda$  sont des quantités complexes. Il est possible d'étudier séparément leur parties réelles et imaginaires en raisonnant de la même manière à chaque fois, il suffira seulement de sommer leur contribution à la fin de l'étude.

Puisque les vecteurs propres sont normalisés, la variation de chaque composante  $i$  (ou amplitudes des fonctions de base, les  $i$  variant de 1 à  $N$ ) est bornée comprise entre  $[-1; 1]$ . Pour mieux comprendre quelle est la nature de la loi de probabilité, il est intéressant de pouvoir la «visualiser» dans un cas simple à commencer par une seule ou deux dimension(s).

En une dimension, il n'y a que deux réalisations possibles : la probabilité uniforme est de  $\frac{1}{2}$  (cf. figure 2.15). En deux dimensions, il faut avoir une répartition uniforme sur le cercle. Cette fois,  $x_2$  peut prendre toutes les valeurs entre  $[-1; 1]$ . Une fois  $x_2$  fixé, le choix de  $x_1$  est le même qu'en une dimension sauf que cette fois-ci, le rayon fixé par  $x_2$  a changé pour devenir  $\sin \theta_1$ . Puisque les deux variables  $x_1$  et  $x_2$  sont indépendantes, on peut inter-changer les axes sans modifier la répartition

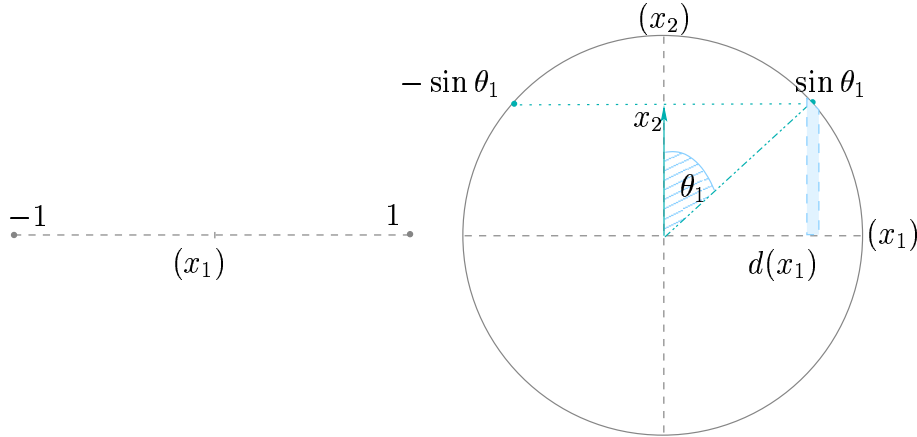


FIG. 2.15 – Construction du cercle, ou surface de la sphère de dimension 2

sur le cercle. Rajouter une dimension est revenu à modifier la surface de dimension inférieure en multipliant le rayon unité par  $\sin \theta_1$  et à comparer cette dernière surface à la surface totale du cercle.

En trois dimensions, il y a trois coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  (figure 2.16). Maintenant, la répartition doit être uniforme sur la surface de la sphère. La probabilité que la variable  $x_3$  soit dans l'intervalle  $[z; z + dz]$  est donnée par la mesure de l'anneau de rayon  $\sin \theta_2$  et de hauteur  $dz$  sur la mesure de la surface de la sphère de dimension trois. La mesure du cercle est aussi la mesure de la surface de la sphère de dimension deux.

Ainsi, en généralisant à la dimension  $N$ , la densité de probabilité de la variable  $x_N$  est égale à la probabilité que cette variable soit dans l'intervalle  $[z; z + dz]$ . Cette probabilité est définie comme ceci :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x_N}(x_N \in [z; z + dz]) \\ = \mathbb{P}((x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N) \in ([-1; 1] \times [-1; 1] \times \dots \times [-1; 1] \times [z; z + dz])) \end{aligned}$$

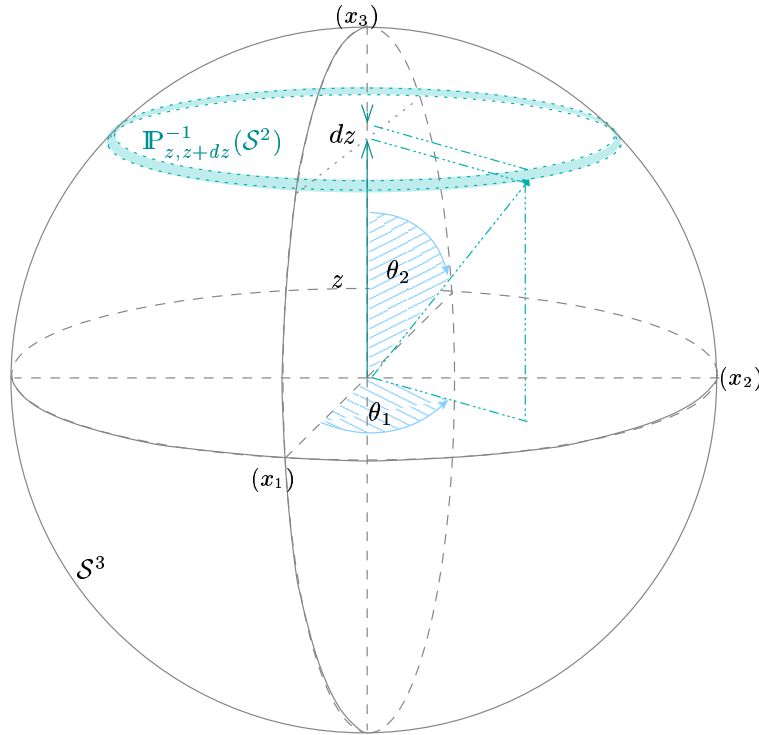
La surface  $\mathcal{S}_1^N$  de la ( $N$ )-sphère de rayon 1 est l'univers de tous les événements, on écrit donc :

$$\mathbb{P}_{x_N}(x_N \in [z; z + dz]) = \frac{1}{\mathcal{S}_1^N} \int_{[z; z + dz]} \int_{[-1; 1] \times \dots \times [-1; 1]} p_{x_1} \dots p_{x_{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} p_{x_N} dx_N$$

$(dx_N)$  est aussi égal à  $(dz)$  et à  $\sin \theta_N d\theta_N$ . D'autre part l'ensemble des points  $x_1, \dots, x_{N-1}$  sont sur la surface  $\mathcal{S}_{\sin \theta_N}^{N-1}$  de la ( $N - 1$ )-sphère de rayon  $(\sin \theta_N)$  :

$$\mathbb{P}_{x_N}(x_N \in [z; z + dz]) = \int_{[\theta_N; \theta_N + d\theta_N]} \frac{\mathcal{S}_{\sin \theta_N}^{N-1}}{\mathcal{S}_1^N} \sin \theta_N d\theta_N$$

Avec  $d\theta_N = \frac{dz}{\sin \theta_N}$ .

FIG. 2.16 – Réduction du rayon de la  $(N - 1)$ -sphère

On trouve que la densité de probabilité est donnée par :

$$p_{x_N} = \frac{\mathcal{S}^{N-1}}{\mathcal{S}_1^N \sin \theta_N}$$

Le calcul du numérateur et du dénominateur amène à l'expression suivante [13][44][1] :

$$p_{x_N} = (1 - x_N^2)^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{N}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{N}{2})}$$

Ce raisonnement est valable quelque soit l'axe que l'on choisit, il est également «invariant par rotation» grâce à la propriété de symétrie de la sphère. La loi ne change donc pas d'une variable à l'autre. Elle pourrait s'appeler «loi isotrope d'ordre  $N$ ».

Il ne s'agit pas d'une loi normale. Toutefois, puisque nous voulons vérifier les lois observées dans la mesure (plutôt pour les hautes fréquences), il est intéressant d'étudier la limite de cette expression lorsque  $N$  tend vers l'infini [1]. La loi de probabilité s'écrit alors :

$$\lim_{\frac{N-2}{2} \rightarrow \infty} p_{x_N} = \sqrt{\frac{N-2}{2\pi}} e^{-\frac{x_N^2(N-2)}{2}}$$

En identifiant  $\sigma^2 = \frac{1}{N-2}$ , la loi Normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  est retrouvée :

$$\lim_{\frac{N-2}{2} \rightarrow \infty} p_{x_N} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_N^2}{2\sigma^2}}$$

Sur la figure 2.17 la convergence de la loi vers la loi normale est vérifiée : « g »

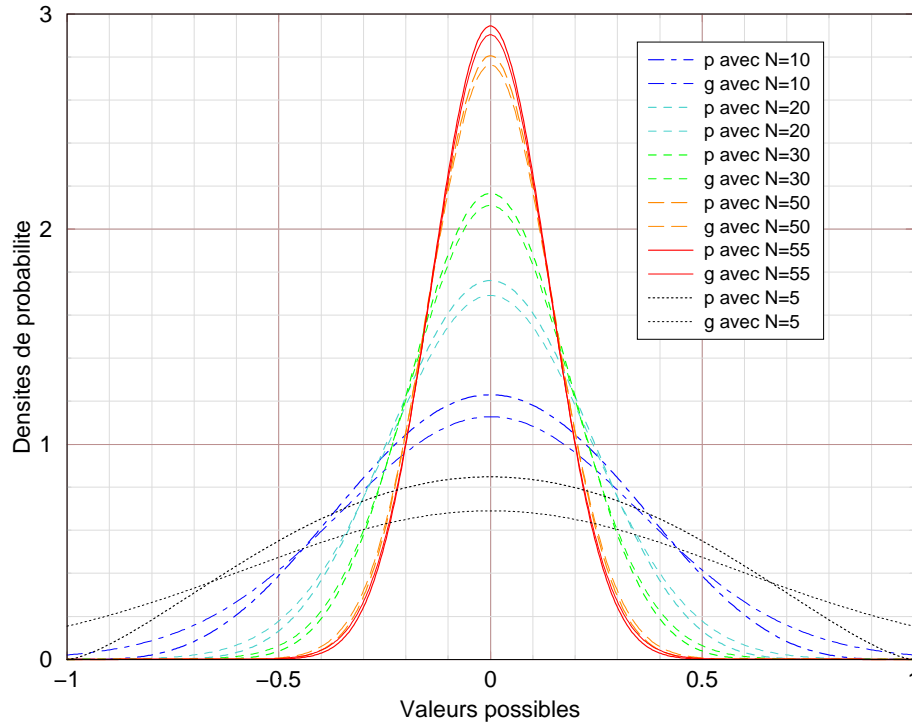


FIG. 2.17 – Convergence de la loi isotrope discrète vers la loi normale

désigne les densités de probabilités de la loi normale, « p » celles de la loi discrète. Dès  $N > 20$ , les deux courbes se rapprochent. Étant donné les erreurs de mesures supplémentaires, cela veut dire que la loi normale peut être observée relativement bas en fréquence puisque seuls 20 modes existent dans la CRBM. <sup>4</sup>

Par ailleurs, la variance  $\sigma^2$  est inversement proportionnelle au nombre de vecteurs propres définissant le champ. Elle est égale à[44] :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N+3} \quad \forall N$$

Pour une base fixe, nous venons d'établir que les poids successifs des fonctions de base suivent une loi normale centrée si le brasseur est idéal (s'il répartit uniformément l'énergie sur tous les modes de résonance).

<sup>4</sup>Attention, observer la loi normale signifie que le test du  $\chi^2$  ne la rejette pas.

### Variances des coefficients de la matrice de répartition

Il a été établi les lois de probabilité des parties réelles et imaginaires des vecteurs propres de l'opérateur de diffraction de la CRBM. Il est donc possible de calculer les variances des coefficients de la matrice de répartition  $\mathbf{S}$ . Chaque variance d'un paramètre  $s_{ij}$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} var(s_{ij}) &= \mathbb{E}(|s_{ij}|^2) = \mathbb{E}(s_{ij}\overline{s_{ij}}) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{\lambda=1}^N (s_{\lambda}\mathbf{v}_{\lambda i}\mathbf{v}_{\lambda j}) \sum_{\mu=1}^N (\overline{s_{\mu}\mathbf{v}_{\mu i}\mathbf{v}_{\mu j}})\right) \\ &= \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^N \mathbb{E}(s_{\lambda}\mathbf{v}_{\lambda i}\mathbf{v}_{\lambda j}\overline{s_{\mu}\mathbf{v}_{\mu i}\mathbf{v}_{\mu j}}) \end{aligned}$$

L'orthogonalité des vecteurs propres et l'indépendance statistique des valeurs propres permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} var(s_{ij}) &= \sum_{\lambda=1}^N \mathbb{E}(s_{\lambda}\overline{s_{\lambda}}\mathbf{v}_{\lambda i}\overline{\mathbf{v}_{\lambda i}}\mathbf{v}_{\lambda j}\overline{\mathbf{v}_{\lambda j}}) \\ &= \sum_{\lambda=1}^N var(s_{\lambda})var(\mathbf{v}_{\lambda i}\mathbf{v}_{\lambda j}) \end{aligned}$$

La notation suivante est adoptée :

$$\mathbf{v}_{\lambda i} = R_i + jI_i \quad \mathbf{v}_{\lambda j} = R_j + jI_j$$

Il faut considérer deux cas :

$$\begin{aligned} &\text{si } i = j \\ var(\mathbf{v}_{\lambda i}^2) &= \mathbb{E}(\mathbf{v}_{\lambda i}^4) \\ &= \mathbb{E}(R_i^4 + I_i^4 + 2R_i^2I_i^2) \\ &= \mathbb{E}(R_i^4) + \mathbb{E}(I_i^4) + 2\mathbb{E}(R_i^2)\mathbb{E}(I_i^2) \\ &= 3\sigma_i^4 + 3\sigma_i^4 + 2\sigma_i^2\sigma_i^2 \\ &= 8\sigma_i^4 \\ &\text{si } i \neq j \\ var(\mathbf{v}_{\lambda i}\mathbf{v}_{\lambda j}) &= \mathbb{E}((\mathbf{v}_{\lambda i}\overline{\mathbf{v}_{\lambda j}})^2) \\ &= \mathbb{E}(R_i^2R_j^2 + R_i^2I_j^2 + I_i^2R_j^2 + I_i^2I_j^2) \\ &= \mathbb{E}(R_i^2)\mathbb{E}(R_j^2) + \mathbb{E}(R_i^2)\mathbb{E}(I_j^2) + \mathbb{E}(I_i^2)\mathbb{E}(R_j^2) + \mathbb{E}(I_i^2)\mathbb{E}(I_j^2) \\ &= \sigma_i^2\sigma_j^2 + \sigma_i^2\sigma_j^2 + \sigma_i^2\sigma_j^2 + \sigma_i^2\sigma_j^2 \\ &= 4\sigma_i^2\sigma_j^2 \end{aligned}$$

Ces résultats sont vrais que l'on considère la loi normale ou, en bonne approximation, la loi isotrope discrète pour  $N > 20$ . On trouve :

$$\text{var}(s_{ij}) = \frac{\sqrt{\text{var}(s_{ii})\text{var}(s_{jj})}}{2}$$

Ce résultat nous renseigne donc sur l'effet d'une répartition de l'énergie sur toutes les directions. Les  $S_{ii}$  (paramètres diagonaux) représente l'énergie revenant vers les «ondes entrantes» et les paramètres  $S_{ij}$  est le couplage de l'énergie d'une onde entrante sur les autres modes.

Nous venons d'exprimer l'opérateur de diffraction d'une CRBM idéale sur une base fixe de fonctions de base. Chaque partie réelle et imaginaire de ces fonctions tend vers une loi gaussienne. On peut toujours projeter leur somme sur les trois axes de l'espace : les parties réelles et imaginaires des composantes cartésiennes resteront des lois normales. Leurs variances sera la somme des variances de chaque contribution.

Ainsi, si l'on en revient à la démonstration sur les propriétés des paramètres  $S$  (cf. le paragraphe 2.1.3), l'hypothèse d'avoir des fonctions  $f_{\mathbf{k}}$  de nature aléatoires et gaussiennes est justifiée. Cette propriété traduit une répartition uniforme de l'énergie sur toutes les possibilités (combinaison des solutions des équations de Maxwell) que peut prendre le champ.

### 2.2.2 Variance de la tension de couplage

Le comportement d'une CRBM idéale vient d'être établi dans la section précédente. Il en résulte que pour une excitation donnée le champ dans la zone de mesure est une superposition de fonctions avec des amplitudes toutes normales centrée de variance  $\sigma^2$ . Il est donc désormais possible de connaître celle des observables et en particulier celle de la tension sur le port du système de réception. La première sous-section met en place un modèle probabiliste de la tension : celui-ci fait intervenir la covariance spatiale du champ qui sera analysée dans une deuxième sous-section.

#### Un modèle probabiliste

Dans le chapitre 1, pour chaque position de brasseur la tension de couplage  $V_{Th}$  a été établie. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{Th} = & - \iint_{S_{M_2} + S_{O_2}} \mathbf{E}^A \cdot \mathbf{J}^B dS \\ & - \iint_{S_{PB}} (\vec{n} \wedge \mathbf{H}^A) \cdot [\mathbf{E}^B - Z_S(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^B)] dS \end{aligned}$$

La deuxième contribution à  $V_{Th}$  est à identifier avec le terme réfléchi par les parois de la CRBM et du brasseur. Si on considère une CRBM idéale, le champ réfléchi par les parois de la cavité aura les propriétés statistiques établie au paragraphe 2.2.1. Réécrivons la nouvelle tension aléatoire  $\tilde{V}_{Th}$ , en identifiant :

- le champ de l'état <sup>A</sup> comme le champ incident aléatoire ;
- le courant de l'état <sup>B</sup> comme la distribution de courant lorsque le système rayonne en espace libre.

Pour cette nouvelle approche, les variables aléatoires sont identifiées par le symbole  $\tilde{\cdot}$  :

$$\tilde{V}_{\text{Th}} = \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \tilde{\mathbf{E}}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}^{\text{ray}} d\mathcal{S}$$

Où  $\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}$  est la surface (métal + ouverture) qui définit le système de réception.

Parce que  $V_{\text{Th}}$  est liée au champ incident par une forme linéaire, la tension induite suit la même loi de probabilité que le champ. En effet, les contributions dues aux parties réelles et imaginaires des composantes du champ électromagnétique et du courant peuvent se séparer comme suit :

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{E}_x) + j\text{Im}(\mathbf{E}_x) \\ \text{Re}(\mathbf{E}_y) + j\text{Im}(\mathbf{E}_y) \\ \text{Re}(\mathbf{E}_z) + j\text{Im}(\mathbf{E}_z) \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{J}_x) + j\text{Im}(\mathbf{J}_x) \\ \text{Re}(\mathbf{J}_y) + j\text{Im}(\mathbf{J}_y) \\ \text{Re}(\mathbf{J}_z) + j\text{Im}(\mathbf{J}_z) \end{pmatrix}$$

Il est possible de séparer parties réelle et imaginaire de la tension comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Re}(V_{\text{Th}}) &= \text{Re} \left( \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}^{\text{ray}} d\mathcal{S} \right) \\ &= \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \text{Re}(\mathbf{E}^{\text{inc}}) \cdot \text{Re}(\mathbf{J}^{\text{ray}}) d\mathcal{S} - \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \text{Im}(\mathbf{E}^{\text{inc}}) \cdot \text{Im}(\mathbf{J}^{\text{ray}}) d\mathcal{S} \\ \text{Im}(V_{\text{Th}}) &= \text{Im} \left( \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}^{\text{ray}} d\mathcal{S} \right) \\ &= \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \text{Re}(\mathbf{E}^{\text{inc}}) \cdot \text{Im}(\mathbf{J}^{\text{ray}}) d\mathcal{S} + \iint_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \text{Im}(\mathbf{E}^{\text{inc}}) \cdot \text{Re}(\mathbf{J}^{\text{ray}}) d\mathcal{S} \end{aligned}$$

Dans ces expressions, le courant  $\mathbf{J}^{\text{ray}}$  est déterministe. Il se comporte comme une « constante » vis à vis du champ électromagnétique. Il ne modifie pas la loi de probabilité imposée par le champ. Or, si on considère que la loi isotrope a convergé vers la loi gaussienne, les parties réelles et imaginaires du champ sont normales. Dans ce cas, la somme de chacune de leur contribution suit également une loi normale de la manière suivante [96] :

#### THÉORÈME 1

Soit  $n$  variables aléatoires normales indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  telles que :

$$x_1 : \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \quad x_2 : \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \dots \quad x_n : \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$$

La somme de ces  $n$  variables aléatoires est aussi normale avec les caractéristiques suivantes :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n : \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

La moyenne est égale à la somme des moyennes de chaque contribution : les moyennes du champ étant nulles, la moyenne de la tension l'est aussi. La tension de couplage suit donc une loi normale centrée.

Il ne reste plus qu'un seul paramètre libre : la variance. Elle est égale à la somme de la variance de chaque contribution. Toutefois, la participation du courant ne se multiplie pas simplement avec la variance du champ. Il faut revenir à la définition :

$$\begin{aligned} var(V_{Th}) &= \mathbb{E}(V_{Th}\overline{V_{Th}}) \\ &= \mathbb{E}\left(\iint_{\mathcal{S}_{M_2}+\mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{E}^{inc}(\vec{r}_1) \cdot \mathbf{J}^{ray}(\vec{r}_1) d\mathcal{S}(\vec{r}_1) \iint_{\mathcal{S}_{M_2}+\mathcal{S}_{O_2}} \overline{\mathbf{E}^{inc}(\vec{r}_2)} \cdot \overline{\mathbf{J}^{ray}(\vec{r}_2)} d\mathcal{S}(\vec{r}_2)\right) \end{aligned}$$

Les variables  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  désignent les variables d'intégration pour deux réalisations aléatoires distinctes du champ  $\mathbf{E}^{inc}$ . Si l'ensemble  $\Omega$  est identifié comme l'ensemble de tous les évènements, la moyenne peut s'écrire comme ceci :  $\mathbb{E}() = \langle \rangle_{\Omega}$ . En utilisant cette nouvelle notation et l'indépendance de l'ensemble  $\Omega$  par rapport au domaine  $\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}$  du système, la variance s'écrit :

$$\begin{aligned} var(V_{Th}) &= \iint_{\mathcal{S}_{M_2}+\mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{J}^{ray}(\vec{r}_1) \cdot \langle \mathbf{E}^{inc}(\vec{r}_1) \iint_{\mathcal{S}_{M_2}+\mathcal{S}_{O_2}} \overline{\mathbf{E}^{inc}(\vec{r}_2)} \cdot \overline{\mathbf{J}^{ray}(\vec{r}_2)} d\mathcal{S}(\vec{r}_2) \rangle_{\Omega} d\mathcal{S}(\vec{r}_1) \\ &= \iint_{\mathcal{S}_{M_2}+\mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{J}^{ray}(\vec{r}_1) \cdot \left[ \iint_{\mathcal{S}_{M_2}+\mathcal{S}_{O_2}} \langle \mathbf{E}^{inc}(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}^{inc}(\vec{r}_2)} \rangle_{\Omega} \cdot \overline{\mathbf{J}^{ray}(\vec{r}_2)} d\mathcal{S}(\vec{r}_2) \right] d\mathcal{S}(\vec{r}_1) \end{aligned}$$

Le terme  $\langle \mathbf{E}^{inc}(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}^{inc}(\vec{r}_2)} \rangle_{\Omega}$  s'identifie comme la covariance spatiale du champ électromagnétique ou tenseur de covariance. Effectivement, il est issu du produit tensoriel entre  $\mathbf{E}$  et  $\overline{\mathbf{E}}$ . Il s'écrit comme une matrice notée  $\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ .

$$\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \\ \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \\ \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \end{bmatrix}$$

Cette notation permet de faire ressortir l'opération suivante :

$$\mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \overline{\mathbf{J}^{ray}}) = \iint_{\mathcal{S}_{M_2}+\mathcal{S}_{O_2}} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \overline{\mathbf{J}^{ray}(\vec{r}_2)} d\mathcal{S}(\vec{r}_2)$$

$\mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \overline{\mathbf{J}^{ray}})$  a été appelé opérateur de covariance appliqué au courant  $\overline{\mathbf{J}^{ray}}$ . Il retourne un vecteur «courant pondéré» par la covariance spatiale du champ

Avec ces écritures, la variance de la tension s'écrit :

$$var(V_{Th}) = \iint_{\mathcal{S}_{M_2}+\mathcal{S}_{O_2}} \mathbf{J}^{ray}(\vec{r}_1) \cdot \mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \overline{\mathbf{J}^{ray}}) d\mathcal{S}(\vec{r}_1)$$



L'intégrale sur le domaine du système de réception peut être considérée un produit scalaire, l'équation devient :

$$\text{var}(V_{\text{Th}}) = \langle \mathbf{J}^{\text{ray}} | \mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\overline{\mathbf{J}^{\text{ray}}}) \rangle_{\mathcal{S}_{M_2} + \mathcal{S}_{O_2}} \quad (2.2)$$

Dans cette expression, la valeur de  $\mathbf{J}^{\text{ray}}$  est facilement accessible puisque qu'il s'agit du courant sur le système quand celui-ci rayonne en espace libre lorsqu'on lui applique un générateur sur le port considéré.

Il suffit alors d'évaluer ce courant après lui avoir appliqué l'opérateur de covariance  $\mathcal{C}_{\mathbf{E}}$  contre lui-même.

Il reste aussi à déterminer la covariance. Si on dispose d'un modèle probabiliste du champ, il est alors possible de connaître directement la covariance spatiale. Dans ce cas, l'opérateur permet de procéder à des simulations numériques sans avoir à calculer le champ pour un grand nombre de positions de brasseurs.

### La covariance spatiale du champ $\text{cov}_{\mathbf{E}}$

Avant même de disposer d'un modèle du champ, il est possible de procéder à quelques réflexions.

Il est intéressant de noter que la matrice de covariance du champ électromagnétique s'écrit comme un produit tensoriel. Elle dissocie le comportement de chaque composante du champ électromagnétique :

- les éléments de la diagonale sont proportionnels aux «auto-corrélations» des composantes cartésiennes ;
- les termes inférieurs et supérieurs sont proportionnels à des «inter-corrélations».

Or, si le champ électromagnétique est réellement isotrope, ses composantes cartésiennes sont indépendantes entre elles. La matrice de covariances est alors diagonale. Il reste donc à décrire la covariance de chaque composante. Là encore, si le modèle est isotrope, il n'y a pas de raison pour que l'expression change d'une composante  $x$  à une composante  $y$ , que l'on compare dans une direction  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  ou  $\vec{r}_2' - \vec{r}_1'$ .

À ce stade, on peut mettre en évidence que le champ de la CRBM ne peut pas être quelconque, en tout cas proche des parois. En effet, une composante normale à une paroi ne sera pas le même qu'une composante tangentielle. Les expressions des covariances seront donc différentes d'une composante à l'autre, que l'on regarde dans une direction ou dans une autre.

La question suivante se pose : dans quelle limite l'approximation d'un champ isotrope est-elle valide dans une CRBM ?

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre le point de départ a été l'analyse statistique des résultats de l'expérimentation. Afin de dégager des propriétés générales des couplages en CRBM, des mesures ont été effectuées dans plusieurs CRBM et sur des systèmes électroniques différents. Dans le cas où le brassage est de bonne qualité (à partir d'une certaine fréquence), les propriétés suivantes sont alors ressorties :

- l'adaptation moyenne (sur un tour de brasseur) exprimée par les paramètres  $S_{ij}$  est la même qu'en espace libre ;
- la variance de tous les paramètres  $S$  ont une décroissance inversement proportionnelle à la fréquence.
- le module des paramètres  $S_{ij}$  suit la loi de Rayleigh.
- une relation particulière existe entre les paramètres  $S$  :

$$var(S_{ij}) = \frac{\sqrt{var(S_{ii})var(S_{jj})}}{2}$$

Une analyse plus théorique a permis de démontrer que cette relation existe à partir du moment où elle représente un comportement isotrope. Dans ce cas, l'isotropie signifie que l'énergie est répartie uniformément sur les vecteurs propres de la matrice de diffraction de la CRBM et que ses vecteurs propres «balayent» toutes les directions.

Ce résultat permet probablement d'établir une méthode simple pour valider un bon brassage : tant que cette relation est vérifiée, le brassage est de bonne qualité. Ceci implique que l'on peut trouver ce résultat même très bas en fréquence vis à vis des dimensions de la CRBM. C'est peut être un autre moyen d'estimer la limite de coupure basse de la CRBM.

Cette analyse a également permis de retrouver la même loi de probabilité sur le couplage que dans la mesure dans le cas des systèmes linéaires. Le seul paramètre à calculer pour effectuer une simulation est alors la variance de la tension induite. Il est apparu qu'elle dépend essentiellement de la covariance spatiale du champ incident.

# Conclusion de la première partie

Dans cette partie, le couplage électromagnétique à l'intérieur de cavité a été étudié d'abord de façon déterministe puis du point de vue probabiliste. Chaque fois, ce couplage a été élaboré sous ses deux formes : tension de couplage et paramètres  $S$ .

En premier lieu, un lien entre le champ électromagnétique environnant et la tension induite sur le système a été établi. Ce lien (cf. l'équation 1.20) est appelée intégrale de couplage, elle dépend du champ existant en absence du système et de la distribution de courant sur le système quand il rayonne en espace libre. Dans la CRBM, on peut distinguer un couplage direct entre antennes et une rétroaction des parois. Par ailleurs, la variation de ce couplage dans la CRBM par rapport à l'espace libre a été étudiée et nous a donné la base de l'étude probabiliste.

Il a été également démontré que dans une CRBM de bonne qualité, cette tension de couplage suit forcément une loi normale centrée. Le seul paramètre déterminant du couplage est alors la variance de la tension induite. Celle-ci s'écrit en fonction de la covariance spatiale du champ électromagnétique dans la CRBM (cf. l'équation 2.2).

Dans un second lieu, l'analyse des paramètres  $S$  a abouti à plusieurs résultats. La CRBM peut être considérée comme un quadripôle réciproque. Pour une bonne CRBM, les paramètres moyens d'adaptation  $S_{ij}$  sont identiques à ceux de l'espace libre.

On peut également déduire la variance des paramètres de couplages de ceux d'adaptation. Cette propriété découle d'une seule propriété statistique du champ créé dans une CRBM de bonne qualité : l'isotropie.

Par isotropie est désignée une répartition uniforme ou égale sur les fonctions de base décrivant le champ de la CRBM. Il ne s'agit pas d'une loi normale mais d'une loi dépendant du nombre de fonctions de base décrivant le champ. Lorsque ce nombre augmente, cette loi tend très rapidement vers une loi normale et vérifie les mêmes propriétés. L'avantage de cette représentation est de se rapprocher de la réalité. En effet, en basse fréquence le champ peut être décrit par un nombre réduit de modes de cavité.

Rappelons que le but de ce travail est de simuler la variance de la tension de couplage. Comme elle dépend de la covariance spatiale du champ, il s'agit maintenant de disposer d'un modèle de champ décrivant l'ambiance aléatoire d'une CRBM. C'est l'objet de la seconde partie.



Deuxième partie

Modèles probabilistes a priori du  
champ dans une CRBM



Dans la partie précédente, il a été établi que le couplage d'un champ électromagnétique aléatoire sur un système linéaire suit la même loi de probabilité que le champ. Dans le cas d'une CRBM, il sera nécessairement gaussien et de moyenne nulle. La variance de ce couplage est également complètement déterminée par la covariance spatiale du champ électromagnétique incident.

Cette partie vise à valider ce formalisme en comparant le couplage du champ électromagnétique observé dans la mesure à celui issu en simulant le comportement statistique idéal d'une CRBM.

Pour cela, il est nécessaire de modéliser la covariance spatiale du champ. Or, imposer les contraintes statistiques (homogénéité et isotropie) ne suppose rien sur les contraintes physiques imposées par la présence des parois métalliques. Afin de prendre en compte ces deux aspects, une solution est de développer l'expression du champ sur une base, ce qui permet de dissocier les aspects électromagnétiques des aspects probabilistes. Le champ s'écrira donc sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \sum_{i=0}^{i=N} A_i \mathbf{e}_i$$

où

- $\mathbf{E}$  est le champ aléatoire dans la zone de mesure ;
- $\mathbf{e}_i$  est un champ élémentaire décrit par une fonction de base : il s'agira d'une solution analytique des équations de Maxwell et satisfaisant à des conditions aux limites ;
- $N$  est le nombre de champs élémentaires contribuant à la représentation du champ ;
- $A_i$  est l'amplitude aléatoire complexe mesurant le poids de chaque champ élémentaire.

Dans le chapitre 3, le modèle se base sur le spectre intégral d'ondes planes de Hill. Bien que non réaliste (elle ne prend pas en compte les conditions aux limites qu'impose la cavité), cette formulation simule exactement le test idéal que l'on souhaiterait réaliser dans la CRBM. Son application sur le couplage introduira une mesure de calibration pour relier la puissance disponible dans la CRBM au niveau du champ simulé.

Dans le chapitre 4, une contrainte supplémentaire est ajoutée : l'effet des parois de la cavité. Les modes guidés s'imposent alors comme fonctions de base. Ce deuxième modèle introduit une dépendance entre la nature du champ aléatoire, la fréquence d'excitation et la taille de la CRBM. Puisque les modes guidés peuvent s'écrire comme huit ondes planes corrélées de façon particulière, un parallèle avec le premier modèle est établi. Enfin, les résultats de la simulation sont comparés avec ceux de la mesure.





## Chapitre 3

# Ondes planes aléatoires isotropes

Le but de cette partie est de déterminer un modèle simple de champ aléatoire pour estimer rapidement l'allure de la tension de couplage sur le système testé en chambre réverbérante à brassage de modes. Pour cela, la représentation en spectre intégral d'ondes planes de Hill a été reprise. Du point de vue statistique, elle décrit l'ambiance électromagnétique de la CRBM idéale. Ce modèle sera présenté dans la section 3.1 en s'attardant plus particulièrement sur la covariance spatiale du champ que Hill n'avait pas abordée. Ensuite dans la section 3.2, ce modèle de champ sera pris en compte dans la détermination du couplage et des comparaisons seront établies entre la mesure et la simulation. Pour cela, la mise en oeuvre pratique de la méthode sera présentée ainsi que différents résultats. De cette étude résultera une conclusion.

### 3.1 La CRBM idéale : le modèle de Hill

Dans cette sous-section, le modèle de Hill est présenté [60][55][83]. Il consiste à représenter le champ par une somme infinie d'ondes planes aléatoires dont chacune peut s'écrire comme suit, conformément à la norme que Hill a choisi :

$$\mathbf{e}(\vec{r}, \Omega) = \vec{F}(\Omega) e^{j\mathbf{k}(\Omega) \cdot \vec{r}}$$

où :

- $\vec{r}$  repère le point d'observation du champ électromagnétique ;
- $\vec{F}$  est une fonction qui décrit le comportement aléatoire de la polarisation de l'onde plane, cette fonction sera détaillée ultérieurement ;
- $\Omega$  représente la direction du vecteur de propagation de l'onde plane ;
- $\mathbf{k}$  est le vecteur de propagation de l'onde plane, il est porté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$ .

Pour chaque direction  $\Omega$ , la réalisation de la polarisation associée est aussi fixée. C'est pourquoi la fonction  $F$  est notée en fonction de  $\Omega$ . Afin de s'assurer que la polarisation est transverse au vecteur de propagation on pose :

$$\vec{F}(\Omega) = F_\theta(\Omega)\vec{u}_\theta + F_\varphi(\Omega)\vec{u}_\varphi$$

Où  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  sont des vecteurs orthogonaux dans le plan orthogonal à la direction du vecteur de propagation (figure 3.1).

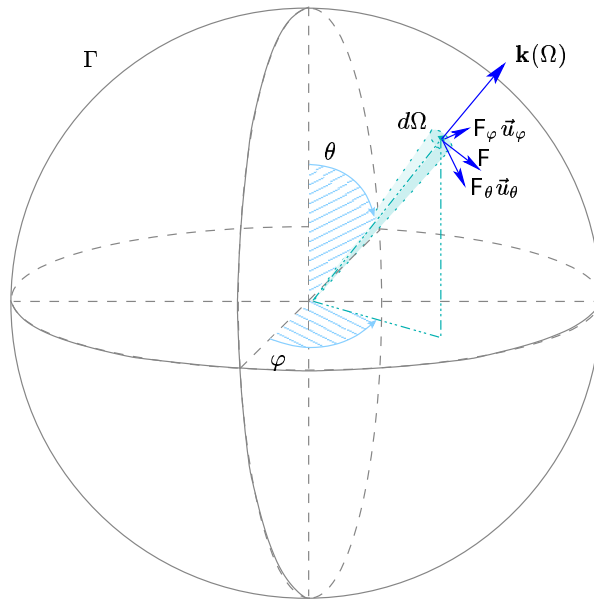


FIG. 3.1 – Représentation polaire d'une onde plane

Les ondes planes forment donc la base de fonctions supports de la description du champ.

A ce niveau, deux approches sont possibles :

- le modèle considère une seule onde plane aléatoire avec une direction de propagation uniformément distribuée sur la sphère unité ;
- le modèle considère une infinité d'ondes planes aléatoires ayant leur polarisation identiquement distribuées.

Ces deux points vue amènent au même résultat du point de vue statistique. La première approche est plus simple. Toutefois, pour se conformer au modèle de Hill, la seconde sera présentée.

Tout d'abord, il faudra mettre en place l'isotropie et l'homogénéité du champ, toutes les deux sont de nature statistique. Ensuite, une étude de la puissance et de l'énergie de ce modèle est proposée pour mieux caractériser la nature de ce champ électromagnétique. Enfin, la covariance spatiale du champ sera établie.

### 3.1.1 Isotropie et homogénéité

#### Isotropie

L'idée du modèle de Hill est de sommer un nombre infini d'ondes planes provenant de toutes les directions possibles. Dans ce cas, la somme discrète devient une intégrale et les amplitudes deviennent une fonction sur l'ensemble des directions de

propagation. Ainsi, pour une réalisation aléatoire, le champ total s'écrit donc comme la superposition intégrale d'ondes planes :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\vec{r}) &= \int_{\Omega=0}^{4\pi} \mathbf{e}(\vec{r}, \Omega) d\Omega \\ &= \int_{\Omega=0}^{4\pi} \vec{F}(\Omega) e^{j\mathbf{k}(\Omega)\cdot\vec{r}} d\Omega\end{aligned}$$

Grâce à l'intégrale, toutes (une infinité) les directions de propagation repérées par les angles solides  $d\Omega$  sont apparues. Toutefois, pour l'instant la répartition uniforme des directions de propagations sur l'angle solide de toute la sphère ( $4\pi$  stéradians) n'est pas encore assurée. En effet, la fonction  $\vec{F}(\Omega)$  n'a pas encore été détaillée. Rappelons que pour  $\vec{F}(\Omega)$ ,  $\Omega$  désigne une réalisation aléatoire. Les poids complexes  $F_\theta$  et  $F_\varphi$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}F_\theta(\Omega) &= f_{\theta_R}(\Omega) + jf_{\theta_I}(\Omega) \\ F_\varphi(\Omega) &= f_{\varphi_R}(\Omega) + jf_{\varphi_I}(\Omega)\end{aligned}$$

On impose la loi de probabilité des composantes des polarisations  $F_\theta$  et  $F_\varphi$  pour correspondre au comportement idéal que l'on attend dans la CRBM. Ceci peut être traduit si leurs parties réelles et imaginaires  $f_{\theta_R}$ ,  $f_{\theta_I}$ ,  $f_{\varphi_R}$  et  $f_{\varphi_I}$  suivent une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Afin de retrouver la loi de Rayleigh observée dans le chapitre 2, il est nécessaire que les contributions de  $f_{\theta_R}$ ,  $f_{\theta_I}$ ,  $f_{\varphi_R}$  et  $f_{\varphi_I}$  soient centrées ( $\mu = 0$ ) et soient indépendantes. Elles doivent également avoir toutes la même variance  $\sigma^2$ . La loi de probabilité que l'on impose aux parties réelles et imaginaires de la polarisation est donc une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Puisque chaque onde plane apparaît avec le même poids (donné par une variance identique  $\sigma^2$ ), l'isotropie est assurée : la distribution de probabilité des angles solides sur la sphère est bien uniforme. On pourrait écrire que la densité de probabilité des angles solides sur la sphère unité s'écrit :

$$p_\Omega(\Omega) = \frac{1}{4\pi}$$

### Homogénéité

Afin de vérifier l'homogénéité statistique du modèle, il faut étudier en tout point la moyenne et la variance du champ simulé. Tout d'abord la moyenne s'annule grâce aux propriétés des contributions des parties réelles et imaginaires de la polarisation.

En effet :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{E} \rangle &= \int_{\Omega=0}^{4\pi} \langle \vec{F}(\Omega) \rangle e^{j\mathbf{k}(\Omega) \cdot \vec{r}} d\Omega \\
&= \int_{\Omega=0}^{4\pi} (\langle F_\theta(\Omega) \rangle \vec{u}_\theta + j \langle F_\varphi(\Omega) \rangle \vec{u}_\varphi) e^{j\mathbf{k}(\Omega) \cdot \vec{r}} d\Omega \\
&= \int_{\Omega=0}^{4\pi} \{ [\langle F_{\theta_R}(\Omega) \rangle + j \langle F_{\theta_I}(\Omega) \rangle] \vec{u}_\theta + [\langle F_{\varphi_R}(\Omega) \rangle + j \langle F_{\varphi_I}(\Omega) \rangle] \vec{u}_\varphi \} e^{j\mathbf{k}(\Omega) \cdot \vec{r}} d\Omega \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

Une fois encore, cette moyenne nulle est intéressante. Elle traduit bien qu'en moyenne aucune structure d'onde plane n'est privilégiée par rapport aux autres.

Toutefois, cette moyenne nulle ne veut pas signifier que ce modèle ne porte aucune énergie. Au contraire, cette dernière est traduite par la variance du champ. En effet, la variance du champ électrique s'écrit :

$$\begin{aligned}
var(\mathbf{E}) &= \langle \mathbf{E}(\vec{r}) \overline{\mathbf{E}(\vec{r})} \rangle \\
&= \left\langle \int_{\Omega_1=0}^{4\pi} \vec{F}(\Omega_1) e^{j\mathbf{k}(\Omega_1) \cdot \vec{r}} d\Omega_1 \int_{\Omega_2=0}^{4\pi} \overline{\vec{F}(\Omega_2)} e^{-j\mathbf{k}(\Omega_2) \cdot \vec{r}} d\Omega_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \int_{\Omega_1=0}^{4\pi} \int_{\Omega_2=0}^{4\pi} \vec{F}(\Omega_1) e^{j\mathbf{k}(\Omega_1) \cdot \vec{r}} \overline{\vec{F}(\Omega_2)} e^{-j\mathbf{k}(\Omega_2) \cdot \vec{r}} d\Omega_1 d\Omega_2 \right\rangle \\
&= \int_{\Omega_1=0}^{4\pi} \int_{\Omega_2=0}^{4\pi} \langle \vec{F}(\Omega_1) \overline{\vec{F}(\Omega_2)} \rangle e^{j(\mathbf{k}(\Omega_1) - \mathbf{k}(\Omega_2)) \cdot \vec{r}} d\Omega_1 d\Omega_2
\end{aligned}$$

L'expression  $\langle \vec{F}(\Omega_1) \overline{\vec{F}(\Omega_2)} \rangle$  s'écrit :

$$\langle \vec{F}(\Omega_1) \overline{\vec{F}(\Omega_2)} \rangle = \langle (F_\theta(\Omega_1) \vec{u}_\theta + F_\varphi(\Omega_1) \vec{u}_\varphi) \overline{(F_\theta(\Omega_2) \vec{u}_\theta + F_\varphi(\Omega_2) \vec{u}_\varphi)} \rangle$$

L'indépendance des parties réelles et imaginaires est utilisée. Elle permet d'écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle f_{\theta_R}(\Omega_1) f_{\theta_I}(\Omega_2) \rangle &= \langle f_{\varphi_R}(\Omega_1) f_{\varphi_I}(\Omega_2) \rangle = \langle f_{\theta_R}(\Omega_1) f_{\varphi_R}(\Omega_2) \rangle \\
&= \langle f_{\theta_I}(\Omega_1) f_{\varphi_I}(\Omega_2) \rangle = \langle f_{\theta_R}(\Omega_1) f_{\varphi_I}(\Omega_2) \rangle \\
&= \langle f_{\theta_I}(\Omega_1) f_{\varphi_R}(\Omega_2) \rangle = 0
\end{aligned}$$

Il reste :

$$\begin{aligned}
\langle \vec{F}(\Omega_1) \overline{\vec{F}(\Omega_2)} \rangle &= \langle f_{\theta_R}(\Omega_1) f_{\theta_R}(\Omega_2) \rangle + \langle f_{\varphi_R}(\Omega_1) f_{\varphi_R}(\Omega_2) \rangle \\
&\quad + \langle f_{\theta_I}(\Omega_1) f_{\theta_I}(\Omega_2) \rangle + \langle f_{\varphi_I}(\Omega_1) f_{\varphi_I}(\Omega_2) \rangle
\end{aligned}$$

Ces quatre termes sont les variances de chaque variable. Elles sont toutes égales à  $\sigma^2\delta(\Omega_1 - \Omega_2)$ . Il en résulte :

$$\langle \vec{F}(\Omega_1) \overline{\vec{F}(\Omega_2)} \rangle = 4\sigma^2\delta(\Omega_1 - \Omega_2)$$

Finalement, la variance du champ électrique devient :

$$var(\mathbf{E}) = \int_{\Omega_1=0}^{4\pi} \int_{\Omega_2=0}^{4\pi} 4\sigma^2\delta(\Omega_1 - \Omega_2) e^{j(\mathbf{k}(\Omega_1) - \mathbf{k}(\Omega_2)) \cdot \vec{r}} d\Omega_1 d\Omega_2$$

La présence du Dirac permet d'écrire :

$$var(\mathbf{E}) = 4\sigma^2 \int_{\Omega_2=0}^{4\pi} d\Omega_2 = 16\pi\sigma^2$$

En utilisant les propriétés des ondes planes, la variance du champ magnétique est donnée immédiatement par :

$$var(\mathbf{H}) = \frac{var(\mathbf{E})}{Z_0^2} = \frac{16\pi}{Z_0^2}\sigma^2$$

La variance du champ électromagnétique ne dépend pas de la coordonnée  $\vec{r}$  du point d'observation. L'homogénéité statistique du champ est donc bien assurée. Ce modèle produit un champ aléatoire ayant les propriétés idéales du test CRBM partout dans l'espace.

### 3.1.2 Énergie et puissance

Comme le modèle utilise des ondes planes, il est intéressant de comparer la puissance transportée à l'énergie emmagasinée afin de mieux se référencer par rapport au comportement énergétique des cavités. Les ondes planes traduiront un flux régulier de puissance transportée plutôt qu'une énergie véritablement emmagasinée. C'est pourquoi l'énergie et la puissance vont être calculées.

#### Énergie

D'après le théorème de Poynting, la densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit en régime harmonique :

$$dW = dW_e + dW_m$$

Pour les ondes planes aléatoires, la moyenne de cette densité est considérée.

$$\begin{aligned} \langle dW \rangle &= \langle dW_e \rangle + \langle dW_m \rangle \\ &= \frac{1}{2}[\varepsilon_0 \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle + \mu_0 \langle |\mathbf{H}|^2 \rangle] \\ &= \frac{1}{2}[\varepsilon_0 var(\mathbf{E}) + \mu_0 var(\mathbf{H})] \\ &= \varepsilon_0 var(\mathbf{E}) = 16\pi\varepsilon_0\sigma^2 \end{aligned}$$

Cette densité d'énergie est bien proportionnelle à la variance du champ. L'énergie emmagasinée dans le volume  $\mathcal{V}$  contenue dans la sphère  $\Gamma$  de rayon  $R$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\langle W_{\text{em}} \rangle &= \iiint_{\mathcal{V}} \langle dW \rangle dV = \iiint_{\mathcal{V}} \varepsilon_0 \text{var}(\mathbf{E}) dV \\ &= \varepsilon_0 \text{var}(\mathbf{E}) \mathcal{V} \\ &= 16\pi \varepsilon_0 \sigma^2 \mathcal{V}\end{aligned}$$

Cette énergie correspond à une énergie «disponible» susceptible de se «transformer» en énergie «efficace» dans le cas où un système se couple avec le champ. Cette grandeur correspondrait à l'énergie disponible dans la cavité CRBM.

### Puissance

La puissance moyenne transportée s'écrit :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{P} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}\{\langle \mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}} \rangle\} \\ &= \frac{1}{2Z_0} \text{Re}\left\{ \left\langle \int_{\Omega_1=0}^{4\pi} \vec{\mathbf{F}}(\Omega_1) e^{j\mathbf{k}(\Omega_1) \cdot \vec{r}} d\Omega_1 \wedge \int_{\Omega_2=0}^{4\pi} \frac{\mathbf{k}(\Omega_2) \wedge \overline{\vec{\mathbf{F}}(\Omega_2)}}{\|\mathbf{k}(\Omega_2)\|} e^{-j\mathbf{k}(\Omega_2) \cdot \vec{r}} d\Omega_2 \right\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2Z_0} \text{Re}\left\{ \int_{\Omega_1=0}^{4\pi} \int_{\Omega_2=0}^{4\pi} \langle \vec{\mathbf{F}}(\Omega_1) \wedge \frac{\mathbf{k}(\Omega_2) \wedge \overline{\vec{\mathbf{F}}(\Omega_2)}}{\|\mathbf{k}(\Omega_2)\|} \rangle e^{j(\mathbf{k}(\Omega_1) - \mathbf{k}(\Omega_2)) \cdot \vec{r}} d\Omega_1 d\Omega_2 \right\}\end{aligned}$$

Le double produit vectoriel s'écrit de la manière suivante :

$$\left\langle \vec{\mathbf{F}}(\Omega_1) \wedge \frac{\mathbf{k}(\Omega_2) \wedge \overline{\vec{\mathbf{F}}(\Omega_2)}}{\|\mathbf{k}(\Omega_2)\|} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{k}(\Omega_2)}{\|\mathbf{k}(\Omega_2)\|} (\vec{\mathbf{F}}(\Omega_1) \cdot \overline{\vec{\mathbf{F}}(\Omega_2)}) \right\rangle - \left\langle \overline{\vec{\mathbf{F}}(\Omega_2)} (\vec{\mathbf{F}}(\Omega_1) \cdot \frac{\mathbf{k}(\Omega_2)}{\|\mathbf{k}(\Omega_2)\|}) \right\rangle$$

On détaille le deuxième terme avec les vecteurs  $\vec{u}_{\theta_i}$  et  $\vec{u}_{\varphi_i}$  et on remplace les moyennes des différents produits trouvés. On utilise également :

$$\frac{\mathbf{k}(\Omega_2)}{\|\mathbf{k}(\Omega_2)\|} = \vec{u}_r(\Omega_2)$$

Il reste alors,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{\mathbf{F}}(\Omega_1) \wedge \frac{\mathbf{k}(\Omega_2) \wedge \overline{\vec{\mathbf{F}}(\Omega_2)}}{\|\mathbf{k}(\Omega_2)\|} \right\rangle &= 4\sigma^2 \delta(\Omega_1 - \Omega_2) \vec{u}_r(\Omega_2) \\ &\quad - 2\sigma^2 \delta(\Omega_1 - \Omega_2) (\vec{u}_{\theta}(\Omega_1) \cdot \vec{u}_r(\Omega_2)) \vec{u}_{\theta}(\Omega_2) \\ &\quad - 2\sigma^2 \delta(\Omega_1 - \Omega_2) (\vec{u}_{\varphi}(\Omega_1) \cdot \vec{u}_r(\Omega_2)) \vec{u}_{\varphi}(\Omega_2)\end{aligned}$$

En insérant ce résultat dans l'expression du vecteur de Poynting et en intégrant selon sur  $\Omega_1$ , il reste seulement :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{P} \rangle &= \frac{4\sigma^2}{2Z_0} \text{Re}\left\{ \int_{\Omega_2=0}^{4\pi} \vec{u}_r(\Omega_2) d\Omega_2 \right\} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

La conséquence directe est que le flux moyen du vecteur de Poynting intégré sur toute surface est également nul.

$$\mathcal{F}_{\mathbf{P}} = \vec{0}$$

### 3.1.3 Covariance

Hill propose de décrire la cohérence mutuelle  $\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  du champ afin de caractériser une longueur de corrélation du champ [59][67]. Elle compare de façon globale le champ électrique en deux points de coordonnées  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ . Elle est définie par :

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \mathbf{E}(\vec{r}_1) \cdot \overline{\mathbf{E}(\vec{r}_2)} \rangle$$

Dans notre étude, la connaissance du tenseur de covariance  $\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  définie comme dans le chapitre 2 est nécessaire car elle nous renseigne sur la dépendance entre chaque composante  $\mathbf{E}_x$ ,  $\mathbf{E}_y$  et  $\mathbf{E}_z$  définies dans le repère cartésien. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \langle \mathbf{E}(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}^t(\vec{r}_2)} \rangle \quad \text{où } ^t \text{ désigne le «transposé»}. \\ &= \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \\ \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \\ \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On peut remarquer que la fonction de cohérence mutuelle est la somme des coefficients diagonaux de la matrice de covariance.

#### Définition

Réutilisons la définition du modèle de Hill :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\vec{r}_1) &= \int_{\Omega_1} (\mathbf{F}_{\theta_1} \vec{u}_{\theta_1} + \mathbf{F}_{\varphi_1} \vec{u}_{\varphi_1}) e^{j\mathbf{k}_1 \cdot \vec{r}_1} d\Omega_1 \\ \overline{\mathbf{E}^t(\vec{r}_2)} &= \int_{\Omega_2} (\overline{\mathbf{F}}_{\theta_2} \vec{u}_{\theta_2}^t + \overline{\mathbf{F}}_{\varphi_2} \vec{u}_{\varphi_2}^t) e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \vec{r}_2} d\Omega_2 \end{aligned}$$

Le tenseur de covariance s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} [ \langle \mathbf{F}_{\theta_1} \overline{\mathbf{F}}_{\theta_2} \rangle \vec{u}_{\theta_1} \vec{u}_{\theta_2}^t + \langle \mathbf{F}_{\theta_1} \overline{\mathbf{F}}_{\varphi_2} \rangle \vec{u}_{\theta_1} \vec{u}_{\varphi_2}^t + \\ &\quad \langle \mathbf{F}_{\varphi_1} \overline{\mathbf{F}}_{\theta_2} \rangle \vec{u}_{\varphi_1} \vec{u}_{\theta_2}^t + \langle \mathbf{F}_{\varphi_1} \overline{\mathbf{F}}_{\varphi_2} \rangle \vec{u}_{\varphi_1} \vec{u}_{\varphi_2}^t ] \\ &\quad \delta(\Omega_1 - \Omega_2) e^{j\mathbf{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - j\mathbf{k}_2 \cdot \vec{r}_2} d\Omega_1 d\Omega_2 \end{aligned}$$

L'indépendance des  $\mathbf{F}_{\theta}$  avec les  $\mathbf{F}_{\varphi}$  permet d'éliminer les termes croisés. En plus, les variances de  $\mathbf{F}_{\theta}$  et de  $\mathbf{F}_{\varphi}$  sont toutes les deux égales à  $2\sigma^2$ . L'expression de la

covariance devient donc :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= 2\sigma^2 \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} [\vec{u}_{\theta_1} \vec{u}_{\theta_2}^t + \vec{u}_{\varphi_1} \vec{u}_{\varphi_2}^t] \\ &\quad \delta(\Omega_1 - \Omega_2) e^{j\mathbf{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - j\mathbf{k}_2 \cdot \vec{r}_2} d\Omega_1 d\Omega_2 \end{aligned}$$

La présence de  $\delta(\Omega_1 - \Omega_2)$  permet de simplifier l'intégrale qui devient du type :

$$\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 2\sigma^2 \int_{\Omega} [\vec{u}_{\theta_1} \vec{u}_{\theta_2}^t + \vec{u}_{\varphi_1} \vec{u}_{\varphi_2}^t] e^{j\mathbf{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} d\Omega$$

Il est possible de noter les vecteurs  $\mathbf{k}$  et  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  de la manière suivante :

$$\mathbf{k} = k_0 \vec{u}_r \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La covariance est alors exprimée seulement à l'aide des vecteurs  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  qui donnent la direction de propagation et la polarisation du champ. Ils sont définis dans le repère sphérique comme suit :

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formant une base orthonormale, ils sont reliés de la manière suivante :

$$\vec{u}_\theta \vec{u}_\theta^t + \vec{u}_\varphi \vec{u}_\varphi^t = \mathbb{1} - \vec{u}_r \vec{u}_r^t$$

où  $\mathbb{1}$  est la matrice identité : Avec cette notation, la covariance du champ s'écrit donc :

$$\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 2\sigma^2 \int_{\Omega} (\mathbb{1} - \vec{u}_r \vec{u}_r^t) e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}} d\Omega$$

### Analyse de l'expression

A ce niveau, il est possible d'identifier l'égalité suivante [30] :

$$\int (\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t) e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}} d\Omega = \int (\mathbb{1} - \vec{u}_r \vec{u}_r^t) e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}} d\Omega$$

En effet, le produit scalaire de l'exponentielle s'écrit :

$$jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r} = jk_0(xu_{rx} + yu_{ry} + zu_{rz})$$

Il est possible de calculer le gradient de l'exponentielle :

$$\nabla(e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}}) = jk_0 e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}} \vec{u}_r$$



Soit :

$$\nabla^t(e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) = jk_0 e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}} \vec{u}_r^t$$

En réappliquant le gradient à cette dernière expression, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla^t(e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}})) &= \nabla(jk_0 e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}} \vec{u}_r^t) \\ &= jk_0 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(u_{rx} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) & \frac{\partial}{\partial x}(u_{ry} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) & \frac{\partial}{\partial x}(u_{rz} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(u_{rx} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) & \frac{\partial}{\partial y}(u_{ry} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) & \frac{\partial}{\partial y}(u_{rz} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(u_{rx} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) & \frac{\partial}{\partial z}(u_{ry} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) & \frac{\partial}{\partial z}(u_{rz} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}}) \end{bmatrix} \\ &= -k_0^2 e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}} \begin{bmatrix} u_{rx}^2 & u_{rx}u_{ry} & u_{rx}u_{rz} \\ u_{ry}u_{rx} & u_{ry}^2 & u_{ry}u_{rz} \\ u_{rz}u_{rx} & u_{rz}u_{ry} & u_{rz}^2 \end{bmatrix} \\ &= -k_0^2 e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}} \vec{u}_r \vec{u}_r^t \end{aligned}$$

La covariance peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= 2\sigma^2 \int_{\Omega} (\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t) e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}} d\Omega \\ &= 2\sigma^2 (\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t) \left\{ \int_{\Omega} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}} d\Omega \right\} \\ &= 2\sigma^2 (\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t) \left\{ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{jk_0\vec{u}_r \cdot \vec{r}} \sin \theta d\theta d\varphi \right\} \end{aligned}$$

La présence du produit scalaire dans l'exponentielle rend difficile l'intégration en  $\theta$  et  $\varphi$ . Il est alors possible de suivre le raisonnement suivant. En choisissant correctement les axes de référence, on peut toujours repérer la distance entre les points de coordonnées  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  selon la direction  $(Oz)$ . Cet artifice permet de simplifier l'écriture du produit scalaire  $k_0\vec{u}_r(\theta, \varphi) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  :

$$k_0\vec{u}_r \cdot \vec{r} = k_0 z \cos \theta = k_0 r \cos \theta$$

L'intérêt de cette écriture est de faire disparaître la dépendance en  $\varphi$  de l'exponentielle. Il est désormais possible d'intégrer séparément selon  $\theta$  et  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= 2\sigma^2 (\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t) \left\{ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{jk_0 r \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi \right\} \\ &= 2\sigma^2 (\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t) \left\{ 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} e^{jk_0 r \cos \theta} \sin \theta d\theta \right\} \end{aligned}$$

L'intégrale suivante est identifiée :

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta e^{jk_0 r \cos \theta} d\theta = 2\text{sinc}(k_0 r)$$

La covariance s'écrit donc :

$$\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 8\pi\sigma^2 \left( \mathbb{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t \right) \{ \text{sinc}(k_0 r) \} \quad (3.1)$$

Il est encore possible d'expliciter l'expression. Pour cela, le changement de variable suivant est proposé :  $\vec{u} = k_0 \vec{r} = k_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  soit  $u = k_0 r$ . On calcule alors les dérivées successives de ce terme conformément à l'opération  $\nabla \nabla^t$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{u}) \\ &= 8\pi\sigma^2 \left\{ \mathbb{I} \left[ \frac{\sin u}{u} + \frac{\cos u}{u^2} - \frac{\sin u}{u^3} \right] + \left[ \frac{3 \sin u}{u^5} - \frac{3 \cos u}{u^4} - \frac{\sin u}{u^3} \right] \vec{u} \vec{u}^t \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

### Une matrice diagonale

L'expression 3.2 de la covariance a été donnée pour un repère très particulier : le repère sphérique. L'axe  $z$  est toujours référencé par la direction  $\vec{u}$  imposée par les deux points que compare la covariance. Le repère cartésien est donc toujours local (figure 3.3). C'est dans ce repère particulier que la matrice de covariance est vraiment diagonale. Les composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  du champ électromagnétique peuvent être considérées comme indépendantes.

Si l'on considère un repère fixe par rapport aux différentes directions dans laquelle la covariance est observée, cette indépendance entre les composantes n'est plus vraie. On doit alors tenir compte de la contribution des termes matriciels de  $\vec{u} \vec{u}^t$  pondérés par le second terme de l'expression 3.1 de la covariance. Dans la figure 3.2 les différentes contributions ont été représentées. Il est mis en évidence que les termes «matriciels» (terme avec  $\vec{u} \vec{u}^t$ ) sont petits devant les termes «purement diagonaux» (terme avec  $\mathbb{I}$ ). La matrice peut toujours être considérée comme diagonale.

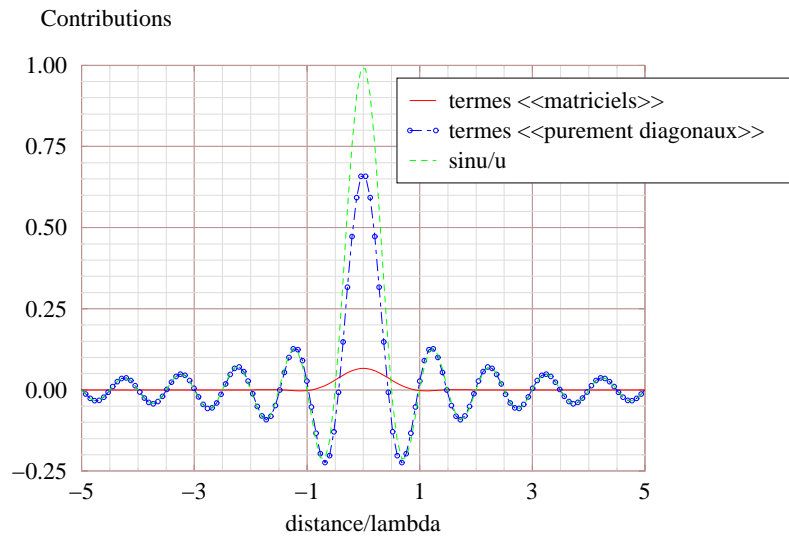


FIG. 3.2 – Les différentes contributions de la covariance

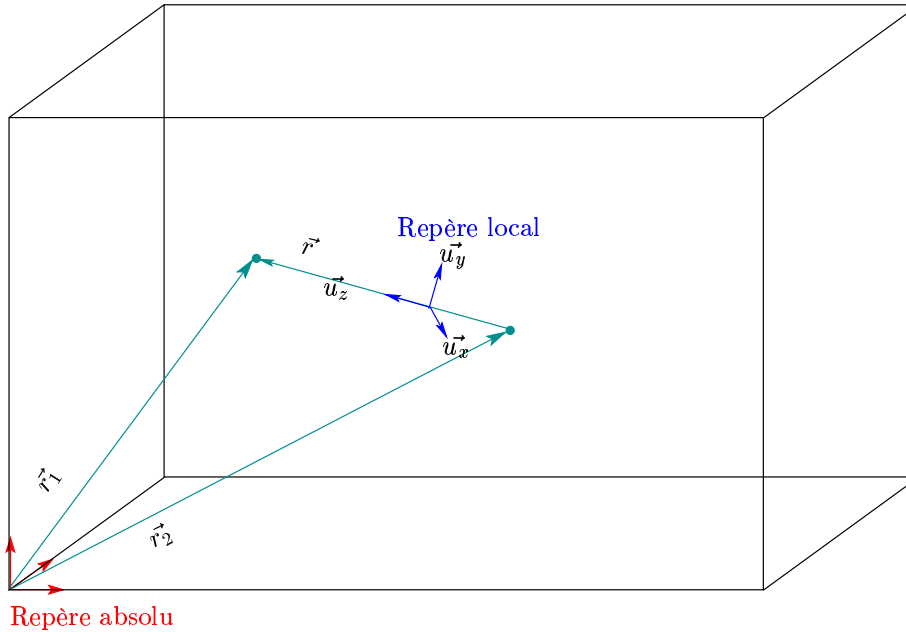


FIG. 3.3 – Différents repères

## 3.2 Application au calcul du couplage

Dans cette section, afin de pouvoir comparer à la mesure les résultats que donnent le modèle de Hill sur le couplage d'un système, la mise œuvre numérique de la méthode est présentée.

Il est tout d'abord nécessaire d'associer le modèle à l'équation de couplage. Par la suite, il faudra assurer que le niveau de champ de la simulation soit identique à celui de la configuration de mesure. Il sera établi un lien entre la puissance disponible sur le système et les caractéristiques du champ du modèle.

Ceci débouchera sur le rajout d'une mesure de calibration pour la simulation.

### 3.2.1 Variance de la tension induite

Il est proposé ici de décrire une méthode simple et rapide du calcul numérique de la variance de la tension de couplage qui tient compte des propriétés du modèle de Hill. Pour cela, l'astuce est d'exploiter la méthode des moments utilisée pour le calcul des courants en espace libre [41].

#### Courant en espace libre

L'expression de la variance de la tension de couplage fait intervenir le courant  $J^{\text{ray}}$ . Il s'agit de la densité de courant rayonnée par le système en espace libre lorsque celui-ci est alimenté par un générateur de courant appliqué au port électronique

considéré. Pour le calcul de ce courant, la méthode de l'EFIE <sup>1</sup> a été adoptée car elle permet d'avoir un maillage conforme au système à traiter.

Présentons brièvement la méthode. Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  satisfait à l'équation suivante :

$$(k_0^2 + \nabla\nabla^2)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}_{\text{source}}$$

La réponse impulsionnelle de l'opérateur différentiel  $(k_0^2 + \nabla^2)$  est donnée lorsque le second membre (ou le terme source) est égal à l'impulsion de Dirac  $\delta(r)$ . Dans l'espace libre, cette réponse impulsionnelle est la fonction de Green donnée sous la forme suivante (en conservant la convention de Hill) :

$$\mathcal{G}(r) = \frac{e^{jk_0r}}{4\pi r}$$

Grâce à cette réponse impulsionnelle, pour n'importe quelle autre source, le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  est le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle et le terme source  $-\mu_0\mathbf{J}_{\text{source}}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (-\mu_0\mathbf{J}_{\text{source}}) * \mathcal{G}(r) \\ &= -\mu_0 \int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} \mathcal{G}(r-r')\mathbf{J}_{\text{source}}(r')d\mathcal{D}\end{aligned}$$

où  $\mathcal{D}$  est le domaine sur lequel se trouve le courant source  $\mathbf{J}_{\text{source}}$ .

Le champ électrique est relié au potentiel vecteur comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0}(k_0^2 + \nabla\nabla^t)\mathbf{A} \\ &= \frac{j}{\omega\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} (k_0^2 + \nabla\nabla^t)\mathcal{G}(r-r')\mathbf{J}_{\text{source}}(r')d\mathcal{D}\end{aligned}$$

Pour établir le champ électrique  $\mathbf{E}$ , il faut donc connaître le courant  $\mathbf{J}_{\text{source}}$ . Celui-ci peut être développé sur une base de fonctions réelles  $\mathbf{j}_p$ . Les poids  $l_p$  sont des nombres complexes :

$$\mathbf{J}_{\text{source}}(r') = \sum_{p=1}^N l_p\mathbf{j}_p(r')$$

Le champ rayonné par le système peut alors s'écrire :

$$\mathbf{E}(r) = \frac{j}{\omega\epsilon_0} \sum_{p=1}^N l_p \int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} (k_0^2 + \nabla^2)\mathcal{G}(r-r')\mathbf{j}_p(r')d\mathcal{D}$$

L'opération effectuée par l'intégrale est une opération linéaire, on peut la noter comme suit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{j}_p) = \frac{j}{\omega\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} (k_0^2 + \nabla^2)\mathcal{G}(r'-r)\mathbf{j}_p(r')d\mathcal{D}$$

---

<sup>1</sup>Electric Field Integral Equation

Le courant  $\mathbf{J}_{\text{source}}$  n'est toujours pas identifié, il reste à déterminer le poids  $l_p$  de chaque fonction de base  $\mathbf{j}_p$  tel que les conditions aux limites sont satisfaites ( $\mathbf{E}_{\text{tan}} = 0$  sur les parties métalliques et  $\mathbf{E}_{\text{ouverture}} = e$  un champ donné sur l'ouverture du port électronique considéré).

Pour calculer ces poids, la méthode des moments est utilisée. Elle consiste à résoudre une équation de la forme :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(l) | \mathbf{j} \rangle_{\mathcal{D}} &= \mathbf{V} \\ \sum_{pq} l_p \mathcal{L}(\mathbf{j}_q) |_{\mathcal{D}} &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

où :

- $\mathcal{D}$  est la structure de l'objet sur lequel le courant est calculé
- $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire : l'intégrale de rayonnement en est un ;
- $l$  est le vecteur des inconnues : ici les poids  $l_p$  des fonctions de base ;
- $\mathbf{j}$  est le vecteur des fonctions test  $\mathbf{j}_q$  ;
- $\mathbf{V}$  est un vecteur connu : il s'agit du champ rayonné. Ici, sur l'objet  $\mathcal{D}$ , le champ électrique tangentiel est nul. Il est non nul seulement au niveau du port.

La méthode consiste à pondérer l'équation à résoudre par un ensemble de fonctions test. C'est à dire que l'égalité entre le membre droit et le membre gauche n'est exigée seulement qu'au travers de l'intégration sur toutes les fonctions de test de l'ensemble. Lorsque ces fonctions de test sont les mêmes que les fonctions de base décrivant le courant, il s'agit de la méthode de Galerkin.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E} | \mathbf{j}_q \rangle &= \mathbf{V}_q \\ &= \frac{j}{\omega \epsilon_0} \sum_{p=1}^N l_p \left\langle \int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} (k_0^2 + \nabla^2) \mathcal{G}(r' - r) \mathbf{j}_p(r') d\mathcal{D} \right| \mathbf{j}_q \rangle \\ &= \sum_{p=1}^N l_p \langle \mathcal{L}(\mathbf{j}_p) | \mathbf{j}_q \rangle \\ &= \sum_{p=1}^N l_p \mathbf{G}_{pq} \end{aligned}$$

où les  $\mathbf{G}_{pq} = \langle \mathcal{L}(\mathbf{j}_p) | \mathbf{j}_q \rangle$  sont les coefficients de la matrice de Galerkin. Le système matriciel à résoudre n'est plus que :

$$\mathbf{V}_q = [\mathbf{G}] l_q \quad \forall q \in 1, \dots, N$$

Le logiciel utilisant cette méthode que nous avons utilisée pour cette étude est ELSEM3D <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>code ÉLementS finis pour l'ÉlectroMagnétisme

### Covariance de la tension

Nous avons déterminé qu'avec le modèle de Hill, la covariance spatiale du champ s'écrit :

$$\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 8\pi\sigma^2(\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla^t)\{\text{sinc}(k_0r)\} \quad \text{sinc}(k_0r) = \frac{\sin(k_0r)}{k_0r}$$

Or, il est possible d'identifier  $\text{sinc}(k_0r)$  à la partie imaginaire de la fonction de Green de l'espace libre. En effet, si

$$\mathcal{G}(r) = \frac{e^{jk_0r}}{4\pi r} \text{ alors } \text{sinc}(k_0r) = \frac{4\pi}{k_0}\text{Im}(\mathcal{G}(r))$$

On peut alors écrire l'opérateur de covariance comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \bar{\mathbf{J}}) &= \int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \bar{\mathbf{J}}(\vec{r}_2) d\mathcal{D} \\ &= \frac{32\pi^2\sigma^2}{k_0^3} \int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} (\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla^t)\text{Im}(\mathcal{G}(r_1 - r_2))\bar{\mathbf{J}}(\vec{r}_2) d\mathcal{D} \end{aligned}$$

Le courant issu du calcul EFIE est toujours exprimé à l'aide des fonctions de base :

$$\mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \bar{\mathbf{J}}) = \frac{32\pi^2\sigma^2}{k_0^3} \sum_{p=1}^N \bar{l}_p \int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} (k_0^2\mathbb{1} + \nabla\nabla^t)\text{Im}(\mathcal{G}(r_1 - r_2))\mathbf{j}_p d\mathcal{D}$$

A nouveau, le terme intégral peut être identifié à l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  de la manière suivante :

$$\int_{\mathcal{D}_{\text{source}}} (k_0^2 + \nabla\nabla^t)\text{Im}(\mathcal{G}(r_1 - r_2))\mathbf{j}_p d\mathcal{D} = \omega\varepsilon_0\text{Re}(\mathcal{L}(\mathbf{j}_p))$$

Donc :

$$\mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \bar{\mathbf{J}}) = \frac{32\pi^2\sigma^2}{k_0^3} \sum_{p=1}^N \bar{l}_p \omega\varepsilon_0\text{Re}(\mathcal{L}(\mathbf{j}_p))$$

Si on calcule désormais la variance de la tension induite :

$$\begin{aligned}
 varV &= \langle \mathbf{J} | \mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{J}}) \rangle \\
 &= \frac{32\pi^2\sigma^2}{k_0^3} \omega \epsilon_0 \langle \sum_{q=1}^N |j_q| \sum_{p=1}^N \bar{l}_p \text{Re}(\mathcal{L}(j_p)) \rangle \\
 &= \frac{8\lambda^2\sigma^2}{Z_0} \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N |j_q| \bar{l}_p \langle j_q | \text{Re}(\mathcal{L}(j_p)) \rangle \\
 &= \frac{8\lambda^2\sigma^2}{Z_0} \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N |j_q| \bar{l}_p \text{Re}(\langle j_q | \mathcal{L}(j_p) \rangle) \\
 &= \frac{8\lambda^2\sigma^2}{Z_0} \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N |j_q| \bar{l}_p \text{Re}(G_{qp})
 \end{aligned}$$

où les  $G_{qp}$  sont les coefficients de la matrice de Galerkin.

Nous venons désormais d'établir une méthode simple de calcul de la variance de la tension de couplage. Le seul paramètre libre,  $\sigma^2$ , est relié à la puissance dans la mesure. C'est l'objet de l'étude ci-après.

### 3.2.2 Puissance moyenne disponible sur une antenne adaptée

Maintenant que l'on dispose d'une expression analytique du champ aléatoire et qu'il est possible de calculer facilement le couplage, il reste toutefois à fixer le niveau du champ dans la simulation : il doit être comparable à celui de la mesure. C'est pourquoi la puissance disponible que voit un système à la réception va être reliée à la variance du champ environnant. Cette étude est une généralisation de l'étude de Hill sur le dipôle [56][61].

La puissance moyenne reçue par l'antenne au niveau de son port d'entrée s'écrit (figure 3.4) :

$$\langle P_{\text{disp}} \rangle = \frac{\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle}{2(Z + \bar{Z})}$$

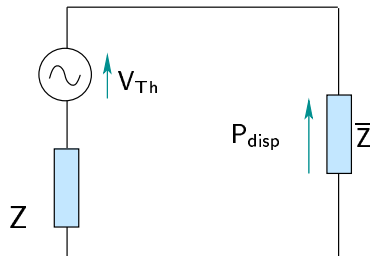


FIG. 3.4 – Adaptation en aval de l'antenne

$Z$  est l'impédance de l'antenne. L'hypothèse est faite que la charge de l'antenne est adaptée en puissance : c'est pourquoi, la charge  $\bar{Z}$  a été représentée. En plus, l'antenne peut être considérée sans pertes. La puissance disponible de l'antenne devient donc :

$$\langle P_{\text{disp}} \rangle = \frac{\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle}{4R_{\text{ray}}}$$

Où  $R_{\text{ray}} = \text{Re}(Z)$  est la résistance de rayonnement de l'antenne.

Pour déterminer complètement la puissance, il reste à déterminer :  $\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle$ . Cette variance est toujours définie comme suit :

$$\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle = \left\langle \left| \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{S} \right|^2 \right\rangle \quad (3.3)$$

$\mathbf{E}$  peut être remplacé par son expression :

$$\begin{aligned} \langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle &= \left\langle \left| \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}(\Omega) \cdot e^{j\mathbf{k}(\Omega)\vec{r}} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{S} \right|^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left| \mathbf{F}(\Omega) \cdot \int_{\mathcal{S}_2} e^{(j\mathbf{k} \cdot \vec{O}\vec{M})} \cdot \mathbf{J}(\vec{O}\vec{M}) d\mathcal{S} \right|^2 \right\rangle \end{aligned}$$

Or, le terme intégral peut être identifié au diagramme de rayonnement du système.

En effet, l'intégrale de rayonnement décrit le champ en un point  $P$  issu d'une source située sur le domaine  $\mathcal{S}_2$ . Le point courant sur le domaine est le point  $M$  repéré en fonction de l'origine  $O$  (figure 3.5).

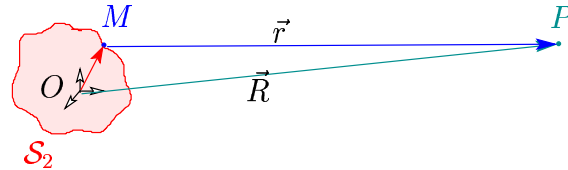


FIG. 3.5 – Définitions des différents vecteurs

Lorsque le milieu est de l'air, elle s'écrit comme suit :

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}_2} (k^2 + \nabla\nabla) \mathcal{G}(\vec{M}P) \mathbf{J}(\vec{O}\vec{M}) d\mathcal{S}$$

Avec la fonction de Green pour l'espace libre (convention française) :

$$\mathcal{G}(\vec{M}P) = \mathcal{G}(\vec{r}) = \frac{e^{-j\mathbf{k} \cdot \vec{r}}}{4\pi r}$$



Puisque l'on a constaté dans les CRBM, qu'au dessus d'une certaine fréquence, les systèmes rayonne comme en espace libre, on se place en champ lointain :  $1 \gg \frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2}$ .

L'intégrale de rayonnement devient :

$$\mathbf{E}(P) = \frac{k^2}{j\omega\epsilon_0} \int_{S_2} \{(\vec{u}_r \wedge \mathbf{J}(O\vec{M})) \wedge \vec{u}_r\} \cdot \mathcal{G}(\vec{r}) dS$$

Or,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{MP} = \vec{OP} - O\vec{M} = \vec{R} - O\vec{M} \\ r &= \vec{u}_r \cdot \vec{r} = \|\vec{OP}\| - \vec{u} \cdot O\vec{M} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} R \end{aligned}$$

D'autre part :

$$(\vec{u}_r \wedge \mathbf{J}(O\vec{M})) \wedge \vec{u}_r = \mathbf{J}(O\vec{M})$$

Ceci permet d'écrire :

$$\mathcal{G}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mathcal{G}(R) = \frac{e^{-jk\cdot\vec{R}} e^{jk\cdot O\vec{M}}}{4\pi R}$$

Soit

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{E}(P) &= j\omega\mu_0 \int_{S_2} \frac{e^{-jk\cdot\vec{R}} e^{jk\cdot O\vec{M}}}{4\pi R} \cdot \mathbf{J}(O\vec{M}) dS \\ &= j\omega\mu_0 \frac{e^{-jk\cdot\vec{R}}}{4\pi R} \int_{S_2} e^{jk\cdot O\vec{M}} \cdot \mathbf{J}(O\vec{M}) dS \\ &= j\omega\mu_0 \frac{e^{-jk\cdot\mathbf{R}}}{4\pi R} \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$  est la partie de  $\mathbf{E}(P)$  dépendante de la direction, elle est assimilable au diagramme de rayonnement (non normalisé à la valeur de  $\mathbf{E}$  dans la direction du maximum de rayonnement).

On peut donc réécrire l'équation 3.3 comme ceci :

$$\langle |V_{Th}|^2 \rangle = \left\langle \left| \mathbf{F}(\Omega) \cdot \int_{S_2} e^{jk\cdot O\vec{M}} \cdot \mathbf{J}(O\vec{M}) dS \right|^2 \right\rangle = \langle |\mathbf{F}(\Omega) \cdot \mathcal{D}(\Omega)|^2 \rangle$$

Ce produit scalaire est effectué sur l'ensemble des réalisations  $\Omega$ . Cette notation permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle |V_{Th}|^2 \rangle &= \langle |\mathbf{F}(\Omega)\mathcal{D}(\Omega) \cos(\mathbf{F}(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle |\mathbf{F}(\Omega)\mathcal{D}(\Omega)|^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle |\mathbf{F}(\Omega)\mathcal{D}(\Omega) \cos(2(\mathbf{F}(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)))|^2 \rangle \end{aligned}$$

Le terme en cos s'annule car  $\mathbf{F}(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$  sont indépendants :

$$\langle |V_{Th}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |\mathcal{D}(\Omega)|^2 \rangle \langle |\mathbf{F}(\Omega)|^2 \rangle$$

### Moyenne sur l'amplitude

On considère seulement  $\langle |\mathbf{F}(\Omega)|^2 \rangle$ . La polarisation de chaque onde plane est définie comme dans la section précédente :

$$\langle |\mathbf{F}(\Omega)|^2 \rangle = \langle \mathbf{F}_\theta(\Omega) \overline{\mathbf{F}_\theta(\Omega)} \rangle + \langle \mathbf{F}_\varphi(\Omega) \overline{\mathbf{F}_\varphi(\Omega)} \rangle = 4\sigma^2$$

Réécrivons la tension de couplage :

$$\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle = \frac{1}{2} 4\sigma^2 \langle |\mathcal{D}(\Omega)|^2 \rangle = 2\sigma^2 \langle |\mathcal{D}(\Omega)|^2 \rangle$$

### Moyenne sur la direction

La densité de probabilité sur la direction s'écrit :  $p_\Omega(\Omega) = \frac{1}{4\pi}$

$$\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle = 2\sigma^2 \int_{\Omega=0}^{4\pi} \frac{1}{4\pi} |\mathcal{D}(\Omega)|^2 d\Omega \quad (3.4)$$

Or on sait écrire la puissance totale rayonnée en fonction du «diagramme de rayonnement» d'une antenne : le terme intégral est identifié dans l'expression de la puissance rayonnée sur le courant du générateur (le courant considéré est normalisé à celui du générateur). En effet :

$$\begin{aligned} P_{\text{ray}} &= \int_{\Omega=0}^{4\pi} \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}|^2 d\Omega \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{2Z_0} \left| \frac{j\omega\mu_0}{4\pi R} \mathcal{D}(\theta, \varphi) \right|^2 R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Soit

$$P_{\text{ray}} \frac{2Z_0(4\pi)^2}{(\omega\mu_0)^2} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} |\mathcal{D}(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

On remplace l'intégrale par son expression dans la moyenne de la tension 3.4 :

$$\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{(4\pi\sigma)^2}{(\omega\mu_0)^2} 2Z_0 P_{\text{ray}}$$

Dans le calcul de réciprocité, on avait normalisé par rapport à la valeur du générateur de courant. On devrait plutôt écrire :

$$\frac{P_{\text{ray}}}{I_g^2}$$

au lieu de  $P_{\text{ray}}$ . Or  $\frac{2P_{\text{ray}}}{I_g^2}$  est la résistance de rayonnement  $R_{\text{ray}}$  de l'antenne. Il reste :

$$\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{(4\pi\sigma)^2}{(\omega\mu_0)^2} Z_0 \frac{R_{\text{ray}}}{2}$$

Remplaçons le rapport  $\frac{\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle}{4R_{\text{ray}}}$  dans l'expression de la puissance disponible :

$$\begin{aligned} \langle P_{\text{disp}} \rangle &= \frac{\langle |V_{\text{Th}}|^2 \rangle}{4R_{\text{ray}}} \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi Z_0} \sigma^2 \end{aligned}$$

Soit,

$$\sigma^2 = \frac{2\pi Z_0 \langle P_{\text{disp}} \rangle}{\lambda^2} \quad (3.5)$$

Avec cette expression on peut désormais relier facilement la puissance du champ du modèle à la propriété statistique de l'onde plane de base qui le constitue. Par la suite on souhaiterait relier cet écart type au facteur de qualité de la CRBM.

### 3.2.3 Mesure de calibration

L'écart type de toutes les ondes planes du spectre intégral est directement responsable de la puissance du champ incident de la simulation (cf. équation 3.5). La mesure de calibration (cf. 3.6) va nous donner la puissance disponible à l'intérieur de la CRBM.

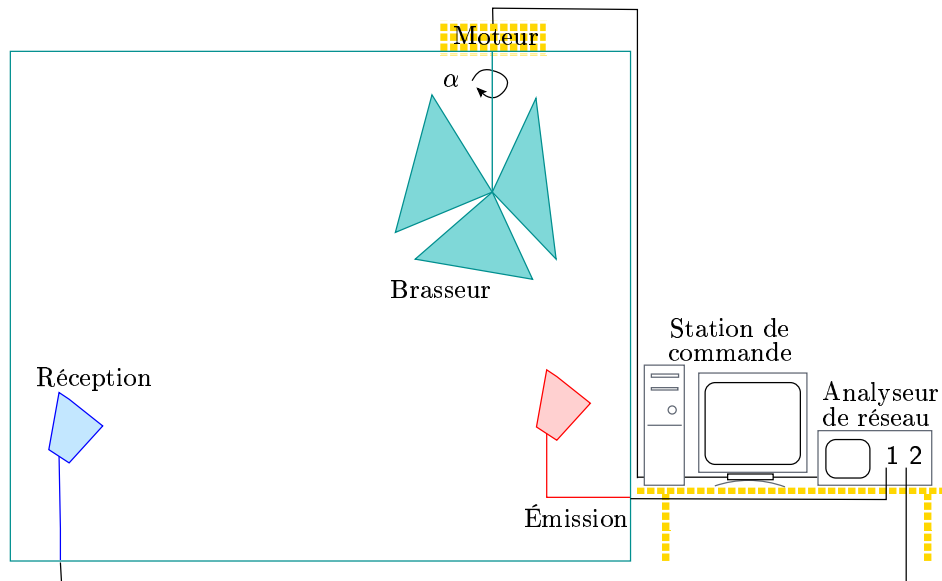


FIG. 3.6 – Calibration

Puisque le calcul (cf. le paragraphe 3.2.2) fait intervenir un système en réception adapté en puissance, l'antenne de réception pour la calibration devrait être toujours très bien adaptée.

Il faut aussi tenir compte de l'adaptation de l'antenne d'émission. Dans un premier temps, on considère que les antennes à l'émission n'introduisent pas de pertes de réflexion. Dans ce cas, il suffit de mesurer à l'analyseur de spectre la puissance en sortie du port 1 et de relever le paramètre  $S_{21}$  de couplage entre 2 antennes. On peut alors écrire :

$$\langle P_{\text{disp}} \rangle = \langle |S_{21}|^2 \cdot P_{\text{entrée}} \rangle = P_{\text{entrée}} \cdot \langle |S_{21}|^2 \rangle$$

Attention, il ne faut pas confondre cette expression avec une variance, en effet :

$$\langle |S_{21}|^2 \rangle - \langle |S_{21}| \rangle^2 = \text{var}(|S_{21}|)$$

Lorsque la désadaptation de l'antenne d'émission n'est plus négligeable, il faut en tenir compte. On écrit alors :

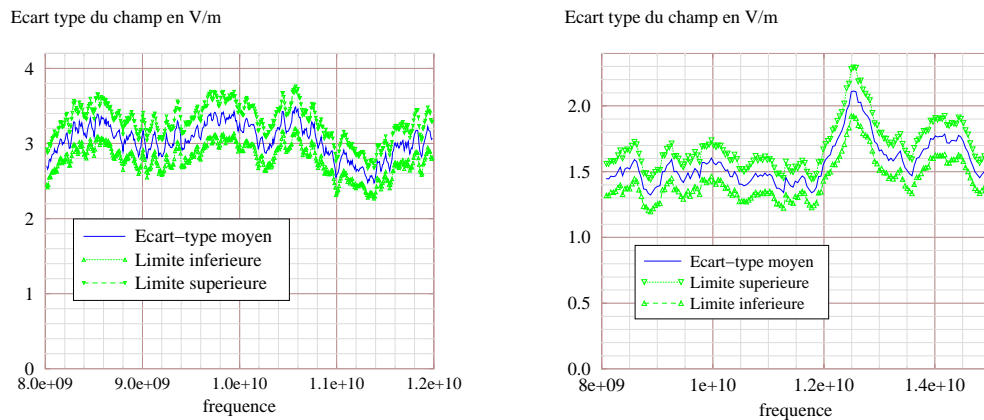
$$P_{\text{disp}} = P_{\text{entrée}} |S_{21}|^2 (1 - |S_{11}|^2)$$

soit

$$\langle P_{\text{disp}} \rangle = P_{\text{entrée}} \langle |S_{21}|^2 (1 - |S_{11}|^2) \rangle$$

Les écart-types ont donc été évalués de cette manière pour chaque CRBM disponible au cours de l'étude. Les différents résultats sont présentés ci-dessous :

### Caisson



(a) Ecart type moyen pour le caisson

(b) Ecart type évalué avec un système moins adapté sans correction

FIG. 3.7 – Écart type du champ dans le caisson et intervalles de confiance

Dans le cas du caisson, pour obtenir au niveau des ports 1 et 2 une très bonne adaptation, des guides ont été utilisés pour introduire l'énergie à l'intérieur de la cavité. Ils sont adaptés dans la bande 8 – 12 GHz. Les résultats sont présentés sur la figure 3.7(a). Dans cette bande de fréquence on remarque que l'écart type oscille autour de la valeur constante de  $3V/m$ .

Pour la calibration en dehors de cette bande de fréquence, la valeur de l'écart type risque d'être sous estimée en raison de la désadaptation des antennes (figure 3.7(b)).

#### CRBM intermédiaire

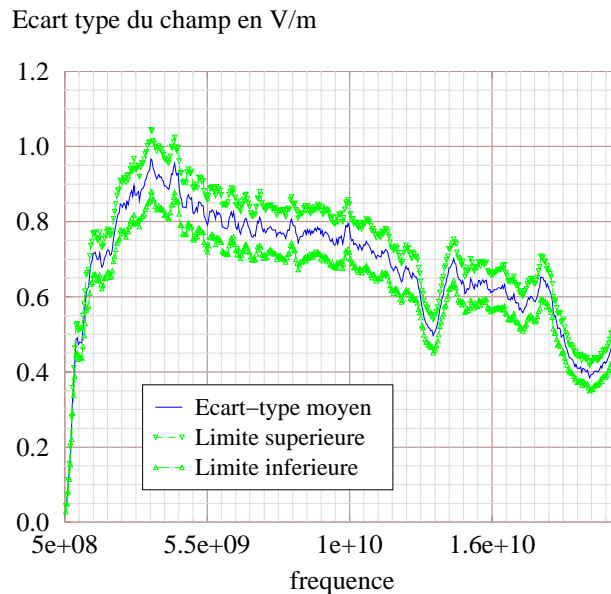


FIG. 3.8 – Écart type du champ dans la CRBM intermédiaire et son intervalle de confiance

Dans la CRBM de dimension intermédiaire, le niveau du sigma est moins important quand on utilise les mêmes configurations d'alimentation (en occurrence, l'analyseur de réseau). Cette fois les systèmes émetteurs et récepteurs sont moins limités en fréquence (cornets), ce qui permet de faire une mesure très large bande (figure 3.8). La visualisation large bande permet de mieux apprécier la zone de fonctionnement de la CRBM. Ici en dessous de 1 GHz, le niveau de champ n'est pas constant : ceci s'explique non seulement par la bande de fréquence dans laquelle le nombre de modes est encore peu important mais aussi par la bande passante des antennes utilisées.

#### CRBM du DERA

Dans la mesure du DERA, on dispose de deux résultats correspondant à deux bandes de fréquences :

- de 400MHz à 1GHz où les mesures ont été réalisées en présence de puissance importante (figure 3.9(a));
- de 1GHz à 10GHz où les mesures ont été réalisées sans puissance de la même manière que pour le caisson et la CRBM intermédiaire (figure 3.9(b)).

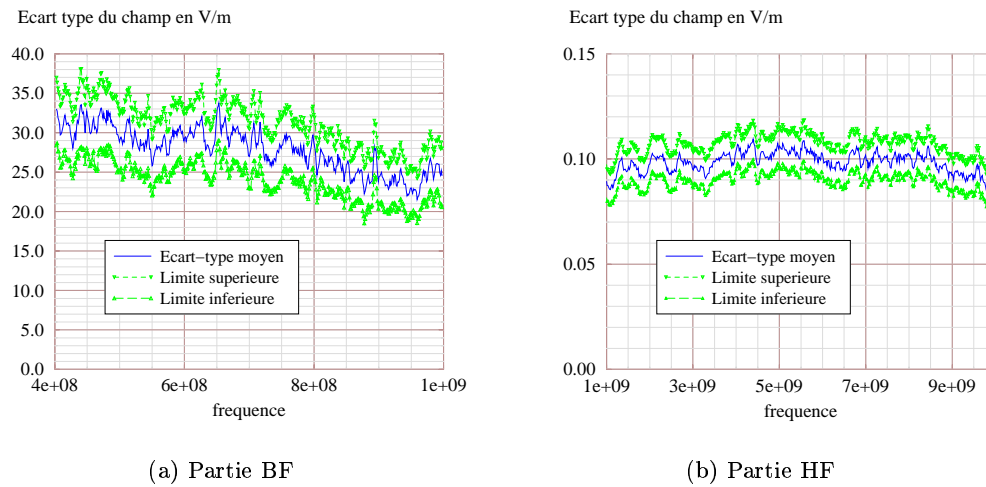


FIG. 3.9 – Écart type dans la CRBM du DERA et son intervalle de confiance

Dans la partie basse fréquence (figure 3.9(a)), l'écart type est relativement important, toutefois son allure dépend fortement de la présence de l'amplificateur.

Pour la partie haute fréquence (figure 3.9(b)), pour une puissance égale dans toute la bande, l'écart type est lui-aussi à peu près constant en fonction de la fréquence. On remarque aussi que le taux d'erreur de la mesure de cet écart type n'est pas négligeable : de l'ordre de 18 %. C'est d'ailleurs à peu près le cas pour chaque cavité traitée.

En comparant les trois écarts types des trois CRBM, on observe un résultat prévisible : à puissance d'injection égale, la densité d'énergie disponible diminue quand le volume de la CRBM augmente (voir l'expression de la densité moyenne d'énergie). Il faut ici garder en mémoire qu'il s'agit de l'écart-type de l'onde plane de base participant au champ de la simulation. Il ne nous donne pas une véritable idée du niveau de champ effectivement présent dans la CRBM. Il faudrait alors «étalonner» la mesure à l'aide d'un capteur de champ.

### 3.3 Résultats et conclusion

#### 3.3.1 Résultats

Pour l'instant, seule l'allure générale des résultats est présentée. Une analyse plus détaillée sera réalisée dans le chapitre 4. Le système utilisé pour cet exemple est celui de la figure 3.10.

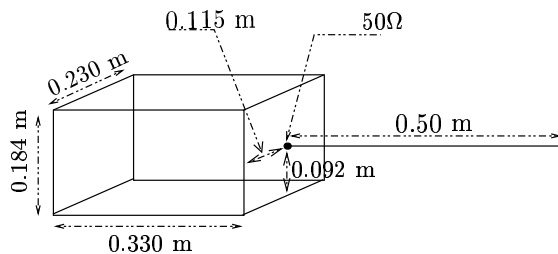


FIG. 3.10 – Géométrie du boîtier avec câble

Il s'agit d'un boîtier avec un câble. On s'intéresse à la tension induite entre le câble et le boîtier au point d'entrée du câble. C'est la tension «mode commun» qui est représentative du couplage dans beaucoup de cas de figures.

Les figures 3.11 et 3.12 compare le couplage mesuré dans deux CRBM différentes à celui du modèle après référence à la calibration.

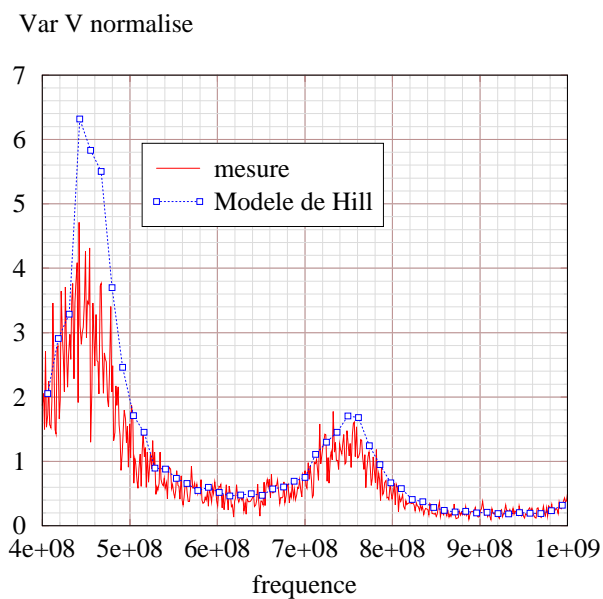


FIG. 3.11 – Comparaison dans la CRBM du DERA

La correspondance entre mesure et simulation est satisfaisante. La qualité de la simulation dépend de la qualité de la mesure de calibration. En effet sur la figure 3.11, l'écart type estimé était à peu près constant dans la bande de fréquence concernée. Au contraire sur la figure 3.12, il ne l'est pas sur la bande 500MHz-2GHz dans l'autre CRBM. Ici, le niveau était limité par l'adaptation de l'antenne d'émission responsable de l'énergie présente dans la cavité.

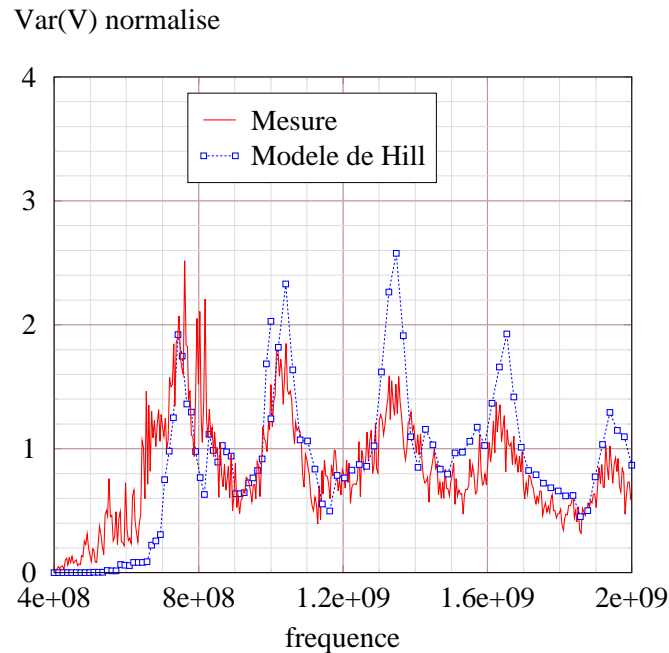


FIG. 3.12 – Comparaison du modèle de Hill à la mesure

### 3.3.2 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle de champ aléatoire de Hill a été présenté. Il propose de simuler en espace libre un champ constitué d'ondes planes aléatoires venant de toutes les directions. Il peut également être interprété comme une seule onde plane aléatoire isotrope en espace libre.

Ce modèle de champ a été associé à l'intégrale de couplage. Ainsi, une méthode directe de calcul de la variance de la tension induite a été établie. Le temps de calcul de la tension est celui du calcul de la distribution du courant en espace libre.

Enfin la puissance moyenne que reçoit une antenne adaptée, plongée dans ce champ aléatoire, a été reliée à la variance  $\sigma^2$ . Cette variance est la variance des parties réelles et imaginaires de la polarisation. Cette relation a permis d'introduire une mesure de calibration pour référencer le niveau de la simulation à celui de la mesure.

Ainsi, le modèle de Hill associé à la calibration donne une bonne correspondance avec la mesure. Chaque fois, les mesures ont eu lieu dans des CRBM et à des fréquences où le brassage de mode était de bonne qualité. Dans ces conditions, il semble donc possible de prédire le couplage dans une CRBM.

Toutefois, le modèle de Hill représente un champ en «espace libre» et il est difficile d'envisager alors les limites de fonctionnement d'une CRBM. En effet, il produit une configuration idéale du champ quelles que soient la taille de la CRBM et la bande de fréquence. Il ne nous renseigne pas d'avantage sur la zone de mesure.



## Chapitre 4

# Modes guidés aléatoires pseudo-isotropes

Dans le chapitre précédent, le couplage sur les équipements en ambiance aléatoire a été simulé grâce à un modèle simple de champ isotrope. Par contre puisque ce modèle est constitué d'ondes planes statistiquement indépendantes, celui-ci ne pouvait pas tenir compte de l'influence des parois sur les caractéristiques statistiques du champ et donc celles du couplage. Effectivement, il représentait seulement le champ idéal que l'on cherche à produire dans une CRBM.

C'est pourquoi un autre modèle de champ sera étudié dans ce chapitre : les modes guidés aléatoires. Ils vont permettre de confiner l'énergie à l'intérieur d'un volume identique à celui de la mesure et aussi de mieux percevoir quelles sont les limites du comportement idéal de la CRBM. L'intérêt d'utiliser des modes guidés pour décrire le champ dans la zone de mesure est qu'ils forment une base complète et la même à toutes les fréquences.

Il s'agit toujours d'un modèle aléatoire a priori : les hypothèses sur son comportement statistique seront fixées seulement sur les amplitudes des modes guidés.

Tout d'abord, le modèle sera mis en place. Ensuite la matrice de covariance qu'il produit sera étudiée. Enfin, les couplages qu'il donne seront comparés à ceux du modèle précédent.

### 4.1 La CRBM «vraie» : le modèle des modes guidés

À chaque fréquence, il existe dans un guide à section rectangulaire un nombre fini de modes propagatifs et un nombre infini de modes évanescents. Le nombre de modes propagatifs dépend de la fréquence de travail et de la taille du guide. En effet la fréquence de coupure basse de chaque mode est donnée par :

$$f_{c_{mn}} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2} \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2$$

Où :

- $c_0$  est la célérité dans le vide ;
- $\varepsilon_r$  est la permittivité relative du milieu du guide ;
- $L_x, L_y$  sont les dimensions de la section du guide.

Si le guide est excité en dessous de cette fréquence de coupure, le mode considéré ne se propage pas, il est évanescent.

Dans la CRBM, la section de la zone de mesure définit naturellement la section du guide qui va servir pour caractériser les modes guidés (figure 4.2).

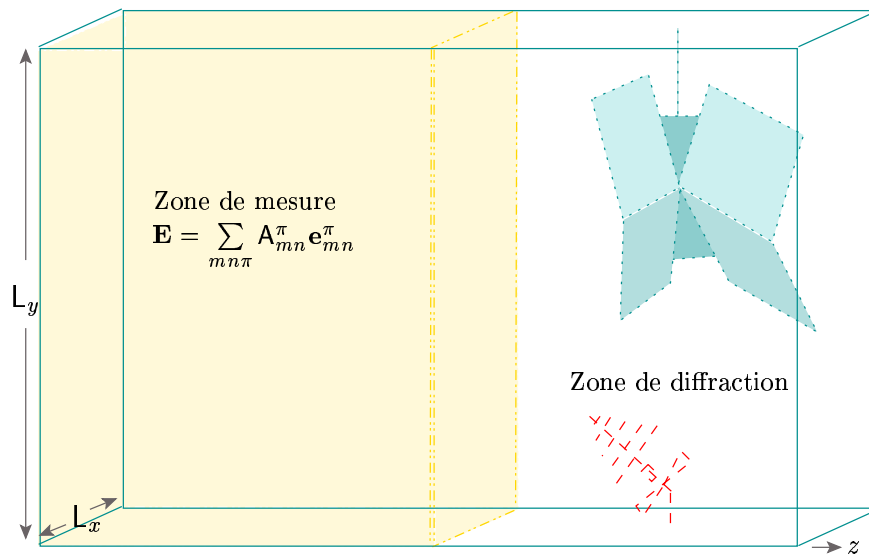


FIG. 4.1 – Définition de la section du guide équivalent

Pour décrire correctement le champ dans la zone de mesure, il faut rajouter une condition aux limites. En  $z = 0$ , les modes sont court-circuités par un plan métallique, on parlera alors de guide semi-infini. Dans ce cas, la dépendance des modes selon l'axe  $z$  s'écrit en fonction d'un sinus hyperbolique ou d'un cosinus hyperbolique selon que l'on considère l'une ou l'autre composante  $x, y$  ou  $z$  du champ  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$ . Les modes «propagatifs» ne peuvent plus l'être à cause de la présence de cette nouvelle conditions : ils deviennent stationnaires. La constante de propagation selon l'axe  $z$  s'écrit alors :

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Puisque le nombre des modes «propagatifs» est maîtrisé, le nombre de modes «stationnaires» l'est aussi et on ne considérera pas pour l'instant les modes évanescents. Leur constante de propagation est alors seulement imaginaire. En conséquence, leur dépendance selon  $z$  deviendra de type sinus ou cosinus. Dans ce cas, la différence avec les modes de cavité intervient sur la constante de propagation sur l'axe  $z$  : elle existe pour toutes les fréquences.

Dans le cas d'un guide rectangulaire semi-infini dont les parois sont parfaitement métalliques comme pour la zone de mesure de la CRBM, on distingue les modes TE et les modes TM de la manière suivante :

- TE signifie «*transverse électrique*» : dans ce cas, le champ  $\mathbf{E}$  n'a pas de composante longitudinale (selon l'axe  $z$ ) ;
- TM signifie «*transverse magnétique*» : cette fois, c'est le champ  $\mathbf{H}$  qui n'a pas de composante longitudinale.

L'expression de toutes composantes de champ des modes stationnaires se déduit des variations transversales  $e_z$  et  $h_z$  des composantes longitudinales comme suit [18][108] :

$$\begin{aligned}
 & \text{TE} \\
 \mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}} &= \frac{2k_0 Z_0 H_0}{k_c^2} \sin(\beta z) \vec{u}_z \wedge \vec{\nabla}_t(h_z) \\
 \mathbf{h}_{mn}^{\text{TE}} &= \frac{-2j\beta H_0}{k_c^2} \cos(\beta z) \vec{\nabla}_t(h_z) + 2H_0 \sin(\beta z) h_z \vec{u}_z \\
 & \text{TM} \\
 \mathbf{e}_{mn}^{\text{TM}} &= \frac{2\beta E_0}{k_c^2} \sin(\beta z) \vec{\nabla}_t(e_z) + 2E_0 \cos(\beta z) e_z \vec{u}_z \\
 \mathbf{h}_{mn}^{\text{TM}} &= \frac{-2\beta E_0}{Z_0 k_c^2} \cos(\beta z) \vec{u}_z \wedge \vec{\nabla}_t(e_z)
 \end{aligned}$$

Dans la zone de mesure, pour toute configuration du brasseur, le champ électrique total peut toujours s'écrire comme une combinaison linéaire de modes guidés :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \sum_{mn} A_{mn}^{\text{TE}} \mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}} + \sum_{mn} A_{mn}^{\text{TM}} \mathbf{e}_{mn}^{\text{TM}} \\
 &= \sum_{mn} \mathbf{E}_{mn}^{\text{TE}} + \sum_{mn} \mathbf{E}_{mn}^{\text{TM}} \\
 &= \sum_{mn\pi} A_{mn}^{\pi} \mathbf{e}_{mn}^{\pi}
 \end{aligned}$$

Où :

- $\pi$  désigne soit TE soit TM ;
- les  $A_{mn}^{\pi}$  sont les amplitudes des modes correspondant.

Si l'expression des modes guidés ne change pas pour plusieurs configurations du brasseur différentes, les amplitudes de ces modes vont varier.

Maintenant, il reste à attribuer un comportement aléatoire aux amplitudes de ce champ pour simuler l'ambiance aléatoire de la CRBM.

#### 4.1.1 Isotropie et homogénéité

##### Isotropie

Solutions analytiques des équations de Maxwell, les modes guidés propagatifs peuvent être considérés comme la superposition de huit ondes planes particulières (la figure 4.2) aux travers des termes en cos et sin de  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

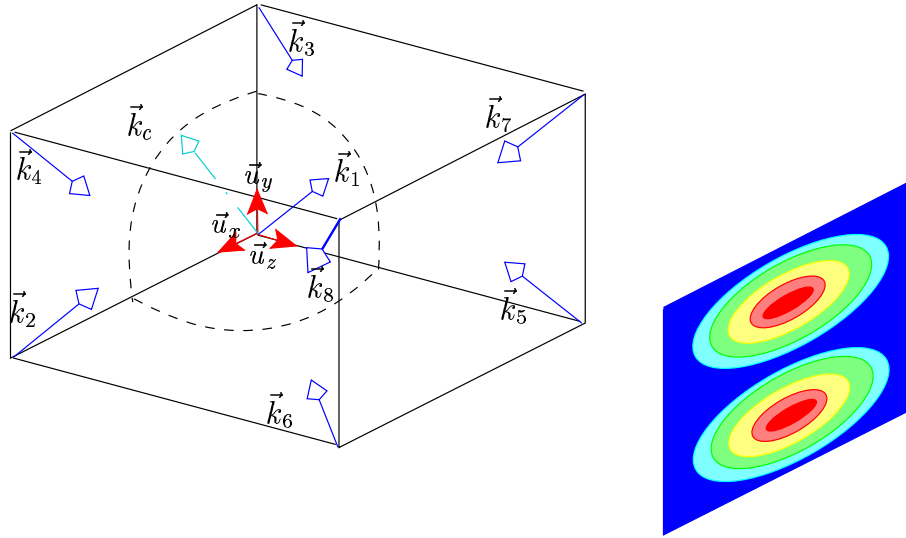


FIG. 4.2 – Exemple d'un mode guidé stationnaire défini par huit ondes planes

Chacun de ces modes correspondent à un ordre  $m$  et  $n$  et définissent huit vecteurs de propagations  $\vec{k}_i$  dépendant de  $k_c$  dans le sens transverse à l'axe de propagation. Dans le sens longitudinal leur vecteur de propagation dépend de  $\beta$ . Les constantes de propagation des ondes planes étant toujours égales à  $k_0$ , les égalités suivantes sont toujours vérifiées :

$$k_c^2 = \frac{m\pi}{L_x} + \frac{n\pi}{L_y} \quad \beta^2 + k_c^2 = k_0^2 = k_i^2$$

Les huit ondes planes constituant ces modes sont donc fortement corrélées et de la façon suivante. Leurs vecteurs de propagation s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ \beta \end{pmatrix} & \vec{k}_2 &= \begin{pmatrix} -k_x \\ k_y \\ \beta \end{pmatrix} & \vec{k}_3 &= \begin{pmatrix} k_x \\ -k_y \\ \beta \end{pmatrix} & \vec{k}_4 &= \begin{pmatrix} -k_x \\ -k_y \\ \beta \end{pmatrix} \\ \vec{k}_5 &= \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ -\beta \end{pmatrix} & \vec{k}_6 &= \begin{pmatrix} -k_x \\ k_y \\ -\beta \end{pmatrix} & \vec{k}_7 &= \begin{pmatrix} k_x \\ -k_y \\ -\beta \end{pmatrix} & \vec{k}_8 &= \begin{pmatrix} -k_x \\ -k_y \\ -\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Elles sont aussi corrélées par leur polarisation. Si on considère les coefficients multiplicatifs devant les termes de phase des modes, on peut retrouver l'expression des vecteurs  $\vec{u}_\varphi$  et  $\vec{u}_\theta$ .

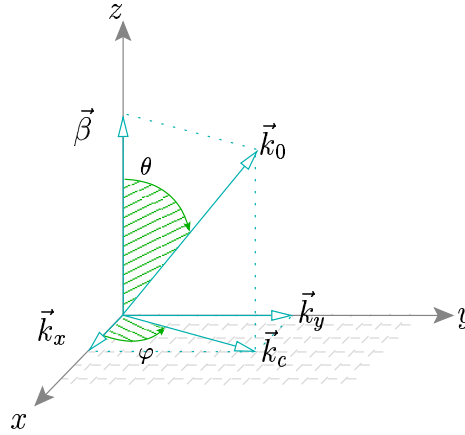


FIG. 4.3 – Définitions des angles avec les vecteurs de propagation

En effet sur la figure la figure 4.3 ont été représentés les angles et les vecteurs de propagations. On en déduit les relations suivantes :

$$\cos \varphi = \frac{k_x}{k_c} \quad \sin \theta = \frac{k_c}{k_0} \quad \sin \varphi = \frac{k_y}{k_c} \quad \cos \theta = \frac{\beta}{k_0}$$

Ainsi les termes  $\frac{\beta k_x}{k_c^2}$  et  $\frac{\beta k_y}{k_c^2}$  du champ  $\mathbf{E}^{\text{TM}}$  sont les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\vec{u}_\theta$  au facteur  $\frac{k_0}{k_c}$  près. De même, les termes  $\frac{k_y}{k_c}$  et  $-\frac{k_x}{k_c}$  du champ  $\mathbf{E}^{\text{TE}}$  sont les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\vec{u}_\varphi$ .

Les polarisations des ondes planes constituant les modes guidés sont donc données chaque fois par :

$$F_\theta = \frac{A_{mn}^{\text{TM}} k_0 E_0}{8 k_c} \quad F_\varphi = \frac{A_{mn}^{\text{TE}} k_0 Z_0 H_0}{8 k_c}$$

Le facteur 8 au dénominateur vient de la décomposition en exponentielle des sinus et cosinus. Le rapport  $\frac{k_0}{k_c}$ , correspond à un facteur  $\frac{1}{\sin \theta}$ .

Maintenant que nous avons fait le parallèle entre les ondes planes et les modes guidés, il n'est plus possible d'imposer l'isotropie au champ. En effet, les directions de propagation des différentes ondes planes sont fonction de  $k_c$  et de  $\beta$ . Or  $k_c$  est imposé à chaque fréquence par les différentes parties entières que peuvent prendre  $m$  et  $n$ . Sur la figure 4.4 il a été tracé le cercle de rayon  $k_0$ . Le vecteur  $\vec{k}_c$  est représenté en une dimension pour chaque pas  $\frac{L_x}{M}$  ou  $\frac{L_y}{N}$  ( $M$  est le maximum d'ordre selon l'axe  $x$  et  $N$  le maximum selon l'axe  $y$ ,  $M$  et  $N$  dépendent de la fréquence de travail).

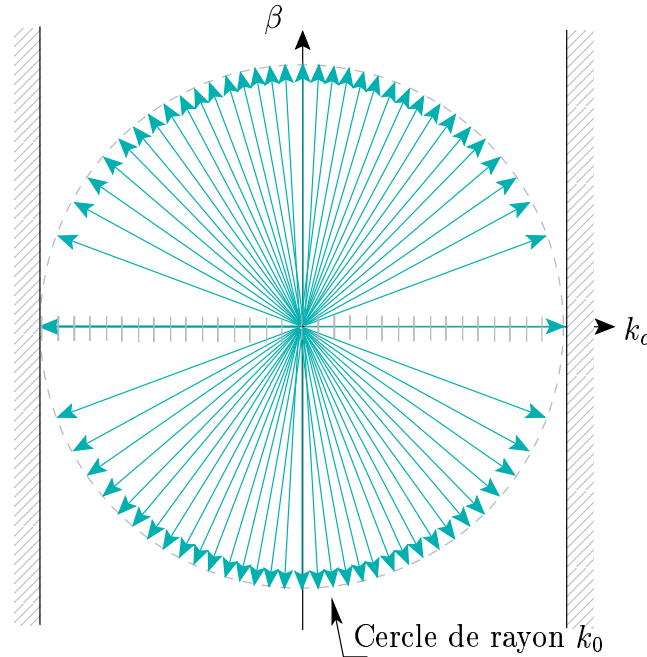


FIG. 4.4 – Vecteurs de propagation des ondes planes constituant les modes

Pour une fréquence donnée, si l'on compare la répartition des directions de propagation (figure 4.4), les directions de propagation autour de l'axe de propagation  $z$  sont plus nombreuses que celles autour des axes transversaux. Si la même énergie est transportée sur chacune de ces directions, on ne peut plus parler d'isotropie.

Ainsi, pour contrebalancer cette concentration préférentielle des directions le long de l'axe  $z$ , il est possible d'agir sur leur amplitudes  $A^{\text{TE, TM}}_{mn}$  qui sont les seuls paramètres libres de notre modèle. Pour accentuer la symétrie avec le modèle d'ondes planes isotropes et être cohérent avec le chapitre 2, il a été choisi d'adopter que ces amplitudes complexes ont leur parties réelles et imaginaires aléatoires : elles seront gaussiennes, de moyenne nulle et de variance  $V$ .

La moyenne nulle des amplitudes permet d'écrire :

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{H} \rangle = \vec{0}$$

Il reste à déterminer la valeur de la variance  $V$ . Pour le modèle isotrope, chaque onde plane avait un poids identique quelle que soit sa direction de propagation. Or les polarisations des ondes déduites des modes guidés s'écrivent :

$$F_\theta = \frac{A^{\text{TM}}_{mn} k_0 E_0}{8k_c} \quad F_\varphi = \frac{A^{\text{TE}}_{mn} k_0 Z_0 H_0}{8k_c}$$

Si les poids  $A^{\text{TE, TM}}_{mn}$  étaient constants, les amplitudes des ondes planes, ayant une direction de propagation plutôt transversale (lorsque  $k_c$  augmente), auraient une amplitude plus petite que celle des ondes planes plutôt longitudinales.

L'égalité suivante a donc été imposée :

$$\text{var}(A_{mn}^{\text{TE}} \frac{k_0 Z_0 H_0}{8k_c}) = C^2 = \text{var}(A_{mn}^{\text{TM}} \frac{k_0 E_0}{8k_c})$$

Où  $C^2$  est une constante. On obtient alors

$$\text{var}(A_{mn}^{\text{TE}}) = \frac{64k_c^2 C^2}{k_0^2 Z_0^2 H_0^2} \quad \text{var}(A_{mn}^{\text{TM}}) = \frac{64k_c^2 C^2}{k_0^2 E_0^2}$$

On peut désormais parler de pseudo-isotropie de ce modèle, car le manque de fréquence des directions transversales est compensé par une variance croissante des amplitudes lorsque la direction de propagation devient plutôt transversale.

### Homogénéité

Une CRBM est homogène si le niveau moyen d'énergie ne varie pas d'un endroit à l'autre de la cavité. Il faut donc calculer les variances du champ  $\mathbf{E}$  et du champ  $\mathbf{H}$ .

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{E}) &= \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle \\ &= \left\langle \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (\mathbf{E}_{mn}^{\text{TE}} + \mathbf{E}_{mn}^{\text{TM}}) \cdot \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N (\overline{\mathbf{E}_{pq}^{\text{TE}}} + \overline{\mathbf{E}_{pq}^{\text{TM}}}) \right\rangle \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \langle (\mathbf{E}_{mn}^{\text{TE}} + \mathbf{E}_{mn}^{\text{TM}}) \cdot (\overline{\mathbf{E}_{pq}^{\text{TE}}} + \overline{\mathbf{E}_{pq}^{\text{TM}}}) \rangle \end{aligned}$$

Les modes TE et TM étant portés par  $\vec{u}_\varphi$  et  $\vec{u}_\theta$  : ils sont toujours orthogonaux : leur produit scalaire est nul. Il reste seulement :

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{E}) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{E}_{mn}^{\text{TE}} \overline{\mathbf{E}_{mn}^{\text{TE}}} + \mathbf{E}_{mn}^{\text{TM}} \overline{\mathbf{E}_{mn}^{\text{TM}}} \rangle \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left\langle \frac{k_0^2 Z_0^2 H_0^2 A_{mn}^{\text{TE}2}}{k_c^4} \right\rangle \sin^2(\beta z) |\nabla_t(h_z)|^2 \\ &\quad + \left\langle \frac{\beta^2 E_0^2 A_{mn}^{\text{TM}2}}{k_c^4} \right\rangle \sin^2(\beta z) |\nabla_t(e_z)|^2 \\ &\quad + \langle E_0^2 A_{mn}^{\text{TM}2} \rangle \cos^2(\beta z) |e_z|^2 \end{aligned}$$

Si on tient compte de la variance des amplitudes  $A_{mn}^{\text{TE,TM}}$ , la variance du champ électrique s'écrit :

$$\text{var}(\mathbf{E}) = 64C^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \frac{\sin^2(\beta z)}{k_c^2} \left\{ |\nabla_t(h_z)|^2 + \frac{\beta^2}{k_0^2} |\nabla_t(e_z)|^2 \right\} + \frac{k_c^2}{k_0^2} \cos^2(\beta z) |e_z|^2$$

De même pour le champ  $\mathbf{H}$  on trouve :

$$\text{var}(\mathbf{H}) = \frac{64C^2}{Z_0} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \frac{\cos^2(\beta z)}{k_c^2} \{ |\nabla_t(e_z)|^2 + \frac{\beta^2}{k_0^2} |\nabla_t(h_z)|^2 \} + \frac{k_c^2}{k_0^2} \sin^2(\beta z) |h_z|^2$$

Ici, on constate que si le champ n'est pas isotrope, il n'est pas non plus homogène.

### 4.1.2 Énergie et puissance

#### Énergie

La densité moyenne d'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle dW_{em} \rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \mu_0 \langle |\mathbf{H}|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \text{var}(\mathbf{E}) + \frac{1}{2} \mu_0 \text{var}(\mathbf{H}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle dW_{em} \rangle &= 32C^2 \varepsilon_0 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sin^2(\beta z) \left\{ \frac{1}{k_c^2} |\nabla_t(h_z)|^2 + \frac{\beta^2}{k_0^2 k_c^2} |\nabla_t(e_z)|^2 + \frac{k_c^2}{k_0^2} |h_z|^2 \right\} \\ &\quad + \cos^2(\beta z) \left\{ \frac{1}{k_c^2} |\nabla_t(e_z)|^2 + \frac{\beta^2}{k_0^2 k_c^2} |\nabla_t(h_z)|^2 + \frac{k_c^2}{k_0^2} |e_z|^2 \right\} \end{aligned}$$

Il est désormais possible de calculer l'énergie emmagasinée dans le volume de la CRBM :

$$\langle W_{em} \rangle = \iiint_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \langle dW_{em} \rangle$$

On utilise alors les résultats des intégrales surfaciques calculées dans l'annexe C. Ceci amène au résultat suivant :

$$\langle W_{em} \rangle = 16C^2 \varepsilon_0 L_x L_y L_z \left\{ MN + M + N - \sum_{m=1}^M \frac{k_x^2}{k_0^2} \text{sinc}(2\beta_{m0} L_z) - \sum_{n=1}^N \frac{k_y^2}{k_0^2} \text{sinc}(2\beta_{0n} L_z) \right\}$$

Plus on monte en fréquence et plus les termes issus des sommes sont petits devant le terme  $MN + M + N$ . Le modèle tend ici à se comporter de la même manière que le modèle isotrope.

#### Puissance

La puissance moyenne du champ en un point donné est définie comme suit :

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \} \right\rangle$$

Or l'expression que l'on trouve est purement imaginaire : c'est normal, dans une cavité parfaitement métallique, il n'y a que de l'énergie emmagasinée.



## 4.2 Covariance

Pour ce modèle, il n'est pas envisageable de calculer de façon analytique l'expression de la covariance. Celle-ci va donc être estimée de façon numérique. Afin d'alléger le calcul, les analyses suivantes ont été menées.

Rappelons la définition :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \langle \mathbf{E}(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}(\vec{r}_2)} \rangle \\ &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_x(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \\ \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_y(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \\ \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_x(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_y(\vec{r}_2)} \rangle & \langle \mathbf{E}_z(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{E}_z(\vec{r}_2)} \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si on remplace le champ par son développement en modes guidés, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \langle \{ \sum_{mn} A_{mn}^{\text{TE}} \mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}}(\vec{r}_1) + A_{mn}^{\text{TM}} \mathbf{e}_{mn}^{\text{TM}}(\vec{r}_1) \} \{ \sum_{pq} \overline{A_{pq}^{\text{TE}} \mathbf{e}_{pq}^{\text{TE}}(\vec{r}_2)} + \overline{A_{pq}^{\text{TM}} \mathbf{e}_{pq}^{\text{TM}}(\vec{r}_2)} \} \rangle \\ &= \langle \{ \sum_{mn\pi} A_{mn}^{\pi} \mathbf{e}_{mn}^{\pi}(\vec{r}_1) \} \{ \sum_{pq\tau} \overline{A_{pq}^{\tau} \mathbf{e}_{pq}^{\tau}(\vec{r}_2)} \} \rangle \end{aligned}$$

Où  $\pi$  et  $\tau$  désignent les polarisations TE ou TM. Quels que soient les ordres  $mn$  et  $pq$ , les amplitudes  $A_{mn}^{\text{TE}}$  et  $A_{pq}^{\text{TM}}$  sont supposées indépendantes. Il reste seulement :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \sum_{mn\pi} \langle A_{mn}^{\pi} \overline{A_{mn}^{\pi}} \rangle \mathbf{e}_{mn}^{\pi}(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{e}_{mn}^{\pi}(\vec{r}_2)} \\ &= \sum_{mn\pi} \text{var}(A_{mn}^{\pi}) \mathbf{e}_{mn}^{\pi}(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{e}_{mn}^{\pi}(\vec{r}_2)} \end{aligned}$$

Avec cette expression de la covariance, différentes configurations ont été étudiées :

- pour une CRBM conforme à l'une de celle ayant été utilisée pour les mesures :  $L_x = 1.2$  m,  $L_y = 1.2$  m et  $L_z = 2.4$  m ;
- pour plusieurs fréquences : 400 MHz, 2 GHz et 4 GHz ;
- en différents points de références qui correspondent à un point fixe de coordonnées  $\vec{r}_1$  (au centre de la zone de mesure, dans un coin très proche des trois parois de la cavité), la covariance peut être calculée en tout point de coordonnée  $\vec{r}_2$  du guide.

Puisqu'il s'agit d'un modèle en modes guidés, le champ est calculé pour un guide semi infini. Il n'est pas possible de «situer» un brasseur. La zone de mesure que simule ce modèle est donc limitée que dans une seule direction de l'axe  $z$ . Pour la limiter dans l'autre direction, il a été choisi de limiter l'analyse à environ  $\frac{2}{3}$  de la longueur de la CRBM réelle (soit 1.44 m).

À chaque fois, les étapes à suivre seront les suivantes. Tout d'abord l'allure de la covariance pour des coupes définies en fonction du point de référence a été observée.

Si celui-ci a pour coordonnées  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  alors les trois plans de coupe seront définis par  $x = x_0$  pour le plan  $(y_0z)$ ,  $y = y_0$  pour le plan  $(x_0z)$  et  $z = z_0$  pour le plan  $(x_0y)$ .

Pour les plans  $(x_0z)$  et  $(y_0z)$ , seul l'un d'eux sera représenté car la CRBM que l'on simule a les mêmes dimensions selon  $x$  et  $y$ . La coupe  $(y_0z)$  est retenue, pour obtenir la représentation de la coupe  $(x_0z)$ . Il suffit seulement d'interchanger les indices  $x$  et  $y$ . Ensuite, les différentes contributions de la covariance seront étudiées plus quantitativement dans chaque direction  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

#### 4.2.1 Allure de la covariance en basse fréquence

A 400 MHz, la section du guide simulé a une dimension de l'ordre de 1.6 fois la longueur d'onde qui pour cette fréquence est de 75cm.

##### Dans la zone de mesure

Les figures 4.5 et 4.6 représentent le tenseur de covariance pour un point de référence au centre de la zone de mesure ( $x_0 = 60cm$ ,  $y_0 = 60cm$  et  $z_0 = 60cm$ ). Ces figures permettent d'ores et déjà de remarquer des comportements qui se retrouveront dans toutes les autres situations.

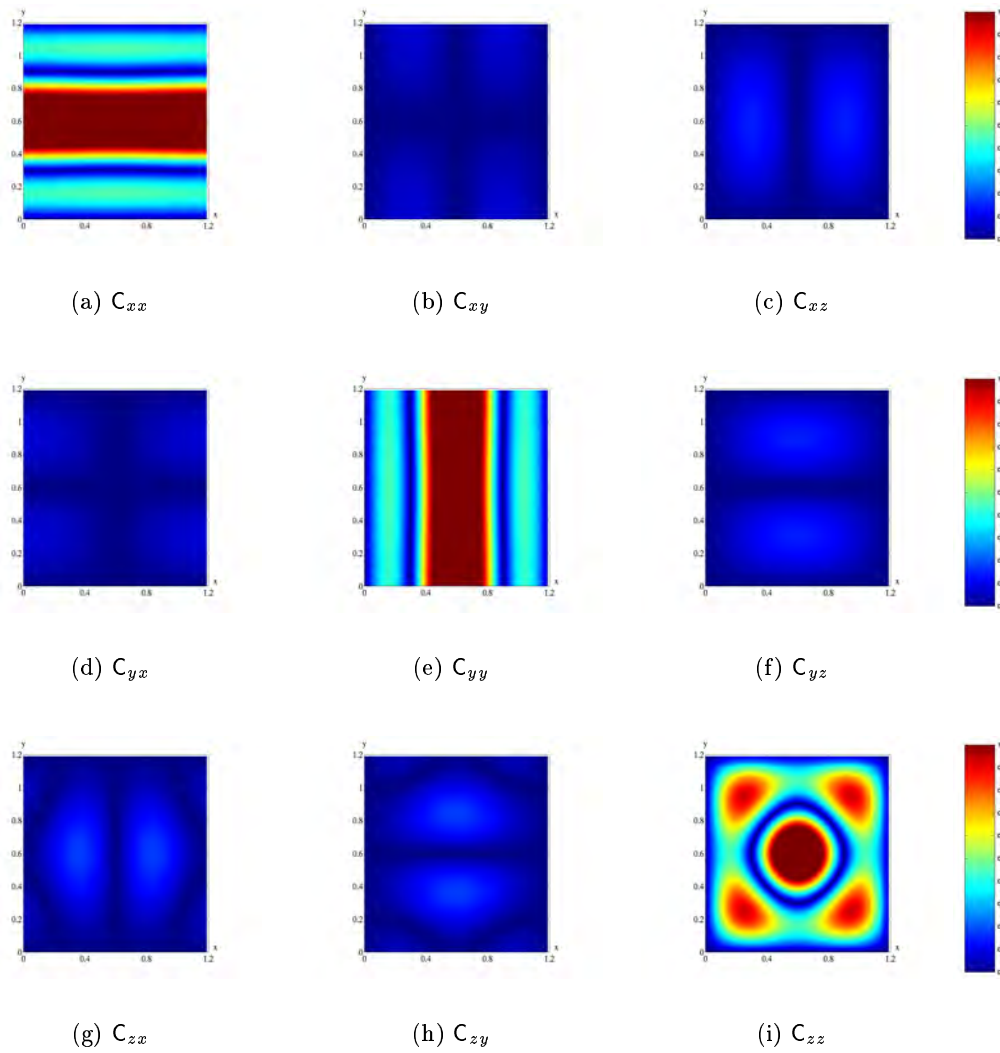
Le tenseur de covariance est «symétrique» : les  $C_{ij}$  et les  $C_{ji}$  sont identiques. Par ailleurs, lorsqu'on considère une auto-covariance  $C_{ii}$  dans un plan perpendiculaire à la composante  $i$  du champ (par exemple  $C_{zz}$  dans le plan  $(x_0y)$ ,  $C_{xx}$  dans le plan  $(y_0z)$ ), le terme  $C_{ii}$  tend à reproduire plus rapidement (en fréquence) le comportement du spectre isotrope d'ondes planes que dans les autres plans.

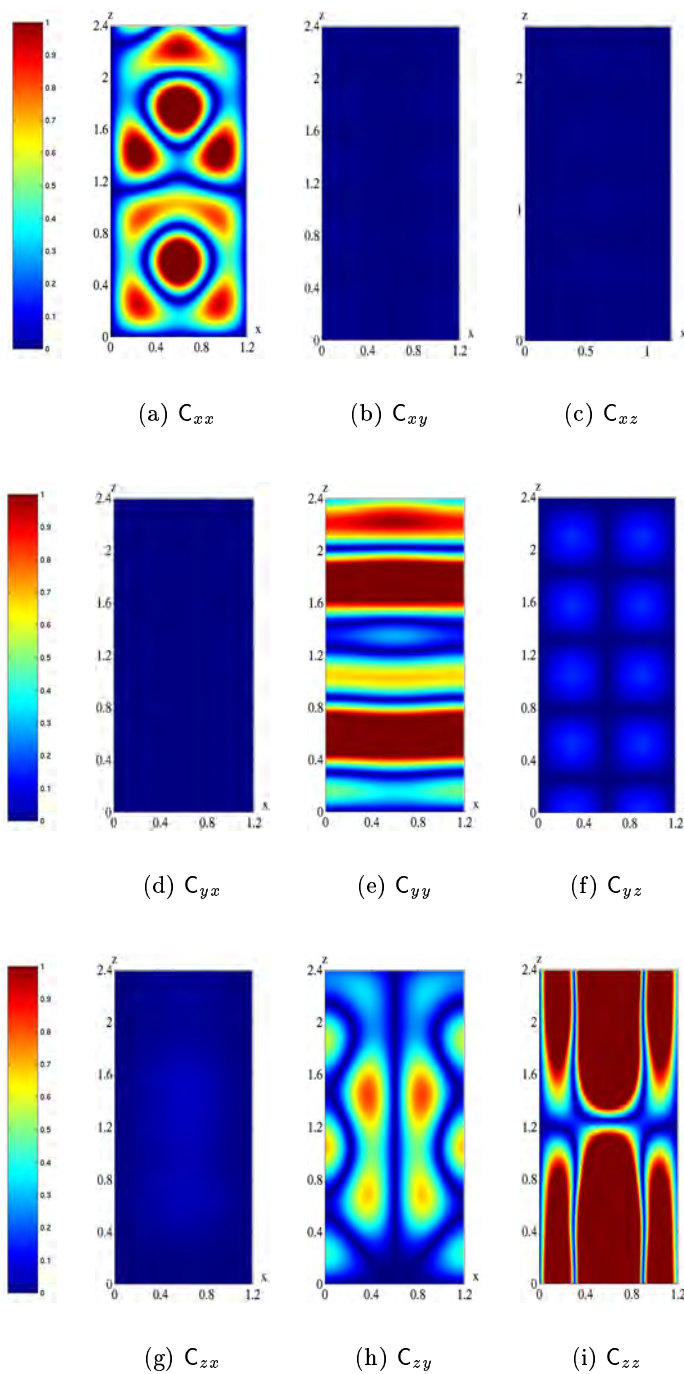
Pour mieux quantifier l'allure du tenseur de covariance dû aux modes guidés aléatoires, les résultats ont été représentés pour chaque direction  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Sur la figure 4.7, il est assez clair qu'en cet endroit de la cavité, même en basse fréquence, la covariance tend déjà vers celle du modèle isotrope. Toutefois, lorsque l'on considère la corrélation concernant une composante du champ qui est dans la direction d'observation (par exemple  $C_{xx}$  dans la direction  $x$ ), l'influence des parois est prépondérante.

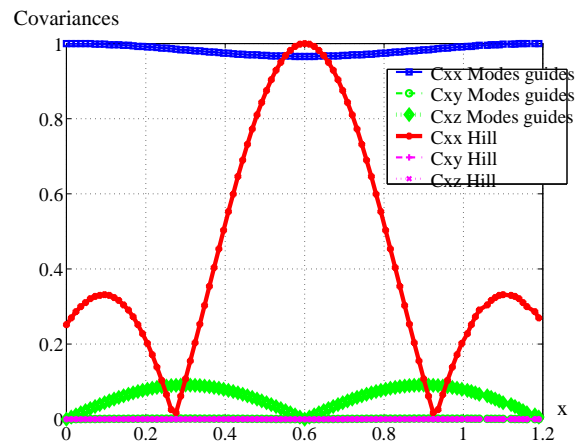
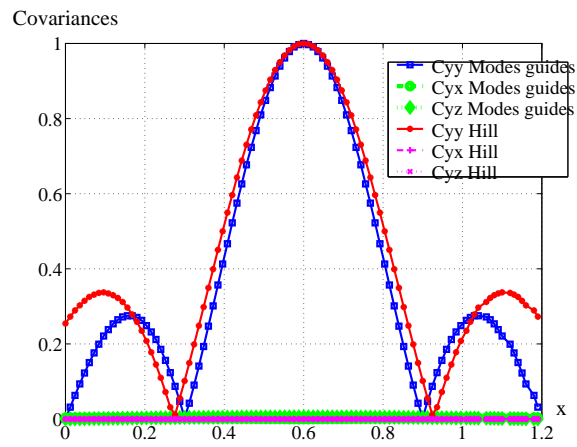
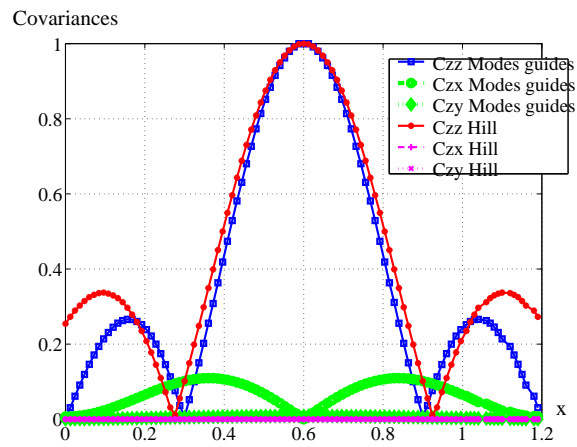
Lorsque la direction d'observation est l'axe  $y$  et non plus l'axe  $x$ , la symétrie de la CRBM fait correspondre les  $C_{xi}$  avec les  $C_{yi}$ . Les  $C_{zi}$  n'ont pas changé de comportement.

Les résultats dans la direction  $z$ , ont été observés seulement jusqu'à  $z = 1.44m$ . Au delà de cette cote, il a été considéré qu'il ne s'agit plus de la zone de mesure, la signification du modèle a donc moins d'importance. Toutefois, on peut noter que la corrélation augmente au delà de cette limite.

Sur la figure 4.8, les  $C_{xi}$  et  $C_{yi}$  sont similaires. Leur «longueur de corrélation» est légèrement inférieure à celle du modèle isotrope. Par contre, l'effet des parois sur les composantes  $C_{zi}$  se fait ressentir de manière différente par rapport aux  $C_{xi}$  dans la direction  $x$ . En effet, ici une seule paroi agit sur le champ contrairement à deux dans les directions  $x$  et  $y$ .

FIG. 4.5 – Covariances à 400 MHz dans le plan  $(x0y)$

FIG. 4.6 – Covariances à 400 MHz dans le plan  $(y_0z)$

(a)  $C_{xi}$ (b)  $C_{yi}$ (c)  $C_{zi}$ FIG. 4.7 – Covariances à 400 MHz selon l'axe  $x$

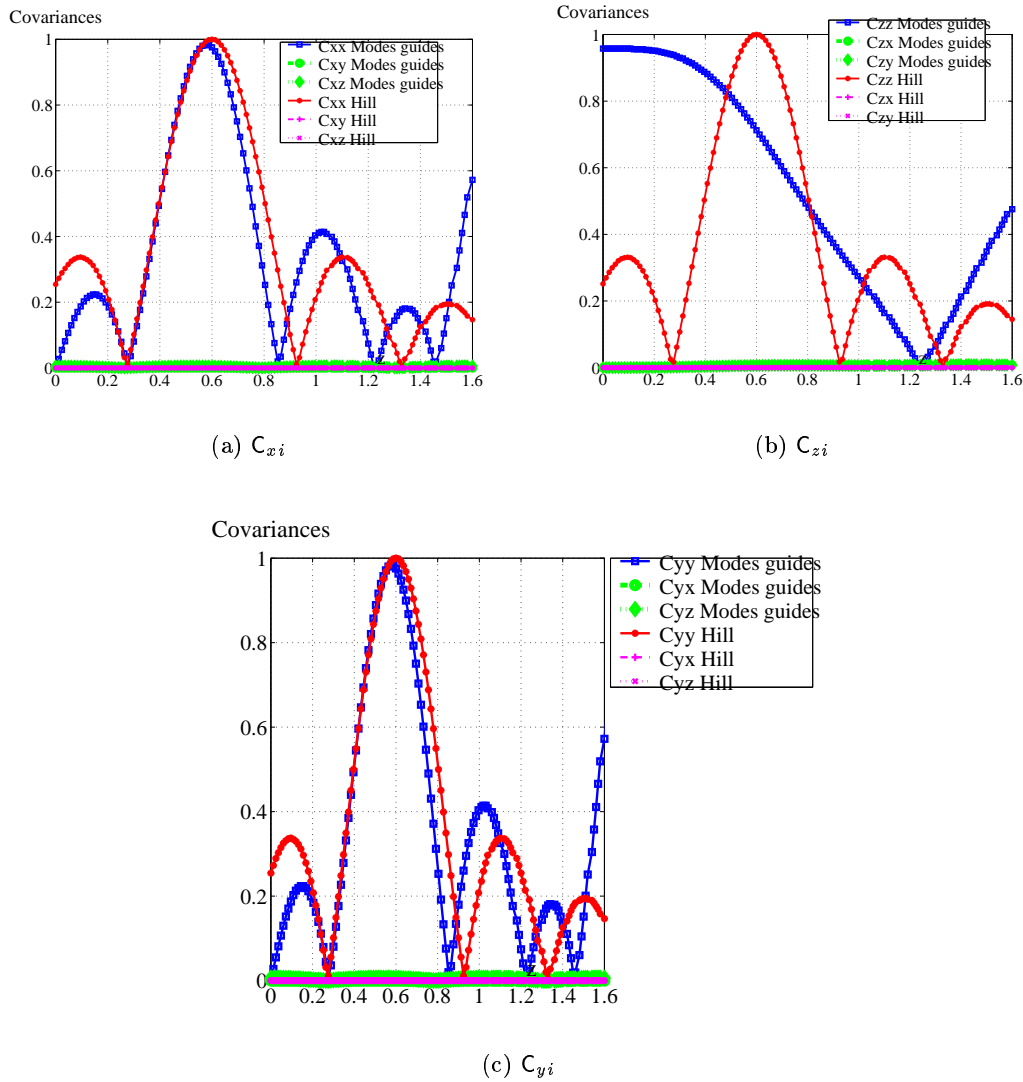
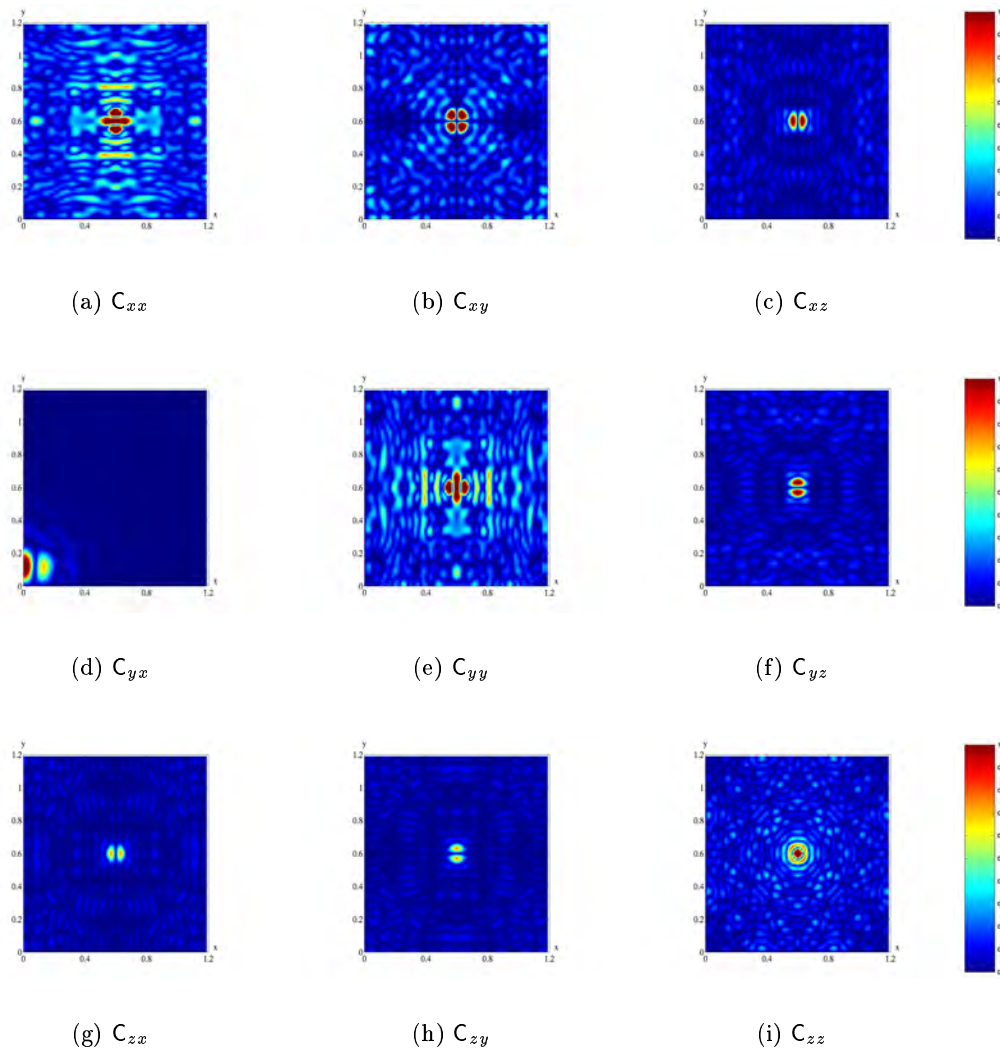


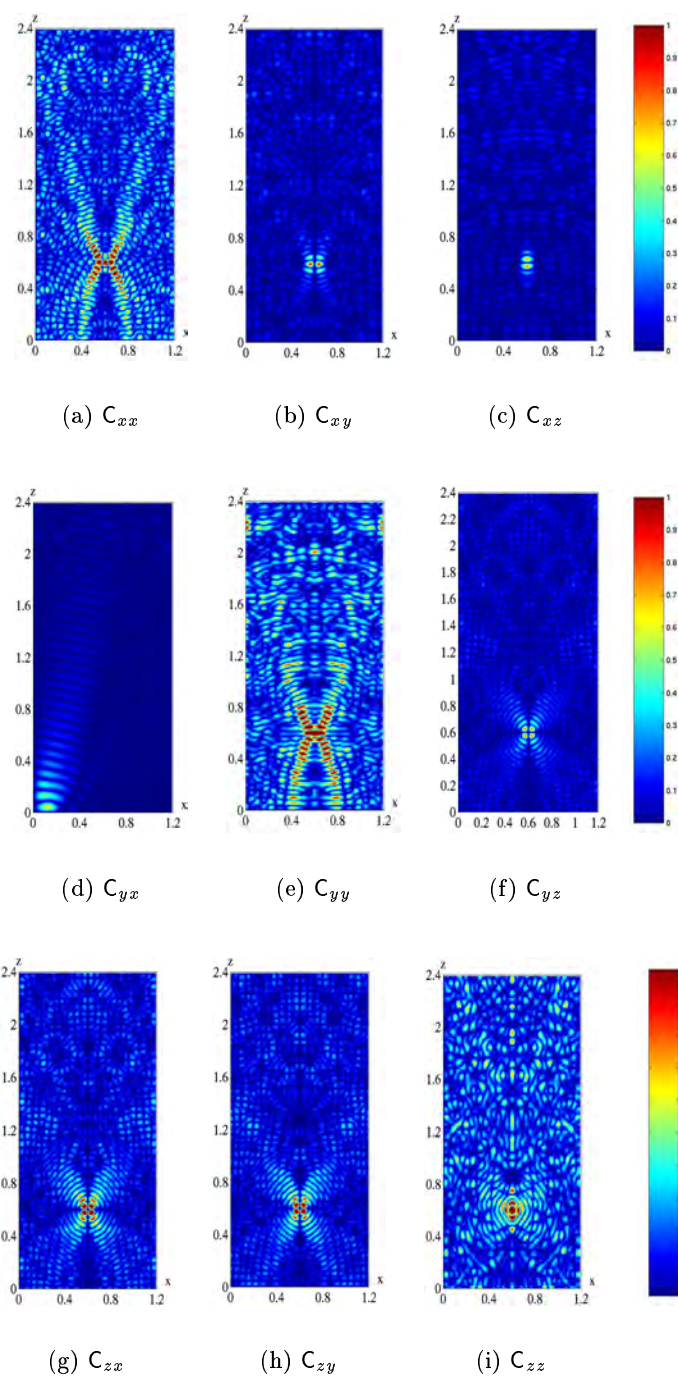
FIG. 4.8 – Covariances à 400 MHz selon l'axe  $z$

### Dans un coin de la CRBM

Examinons cette fois l'évolution de la covariance si le point de référence est proche des parois. Nous l'avons donc choisi près d'un coin de la CRBM ( $x_0 = 0.06m$ ,  $y_0 = 0.06m$  et  $z_0 = 0.06m$ ) afin d'évaluer l'effet des parois.

Sur les figures 4.9 et 4.10, la longueur de corrélation a diminué lorsqu'intervient une composante parallèle au sens d'observation. Contrairement au cas où le point de référence se trouvait au centre de la section transversale au guide, une seule des parois semble agir fortement sur l'allure de la covariance parce que cette fois, le premier «lobe» est atténué pour une longueur comparable à la longueur d'onde (75cm).

FIG. 4.9 – Covariances à 400 MHz dans le plan  $(x0y)$

FIG. 4.10 – Covariances à 400 MHz dans le plan ( $y0z$ )

Sur la figure 4.11, le maximum de corrélation du champ est atteint pour un autre point que celui de référence. Celui-ci se situe entre 30 et 40cm de la paroi. Cette



longueur correspond environ à la moitié de la longueur d'onde à cette fréquence (400MHz). Dans ce cas, les termes croisés du tenseur de covariance ont un poids très important voire prépondérant.

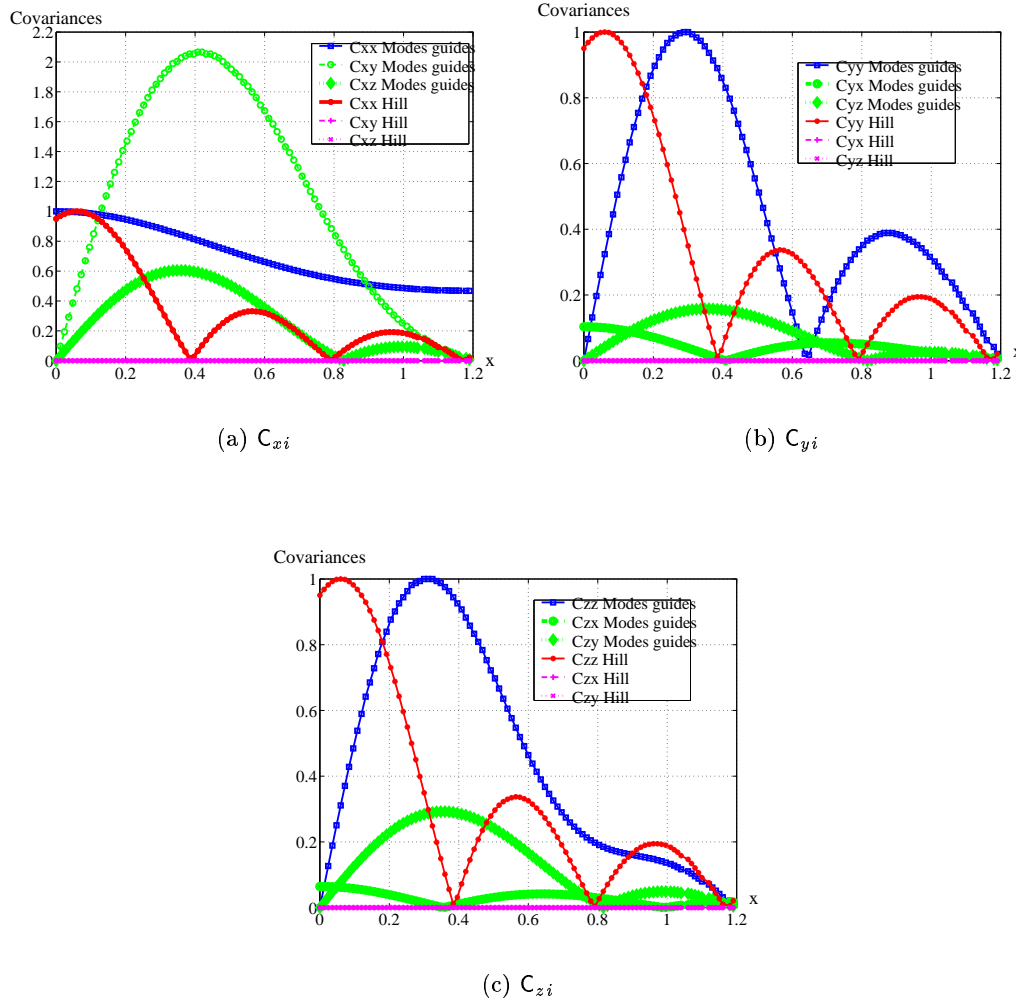
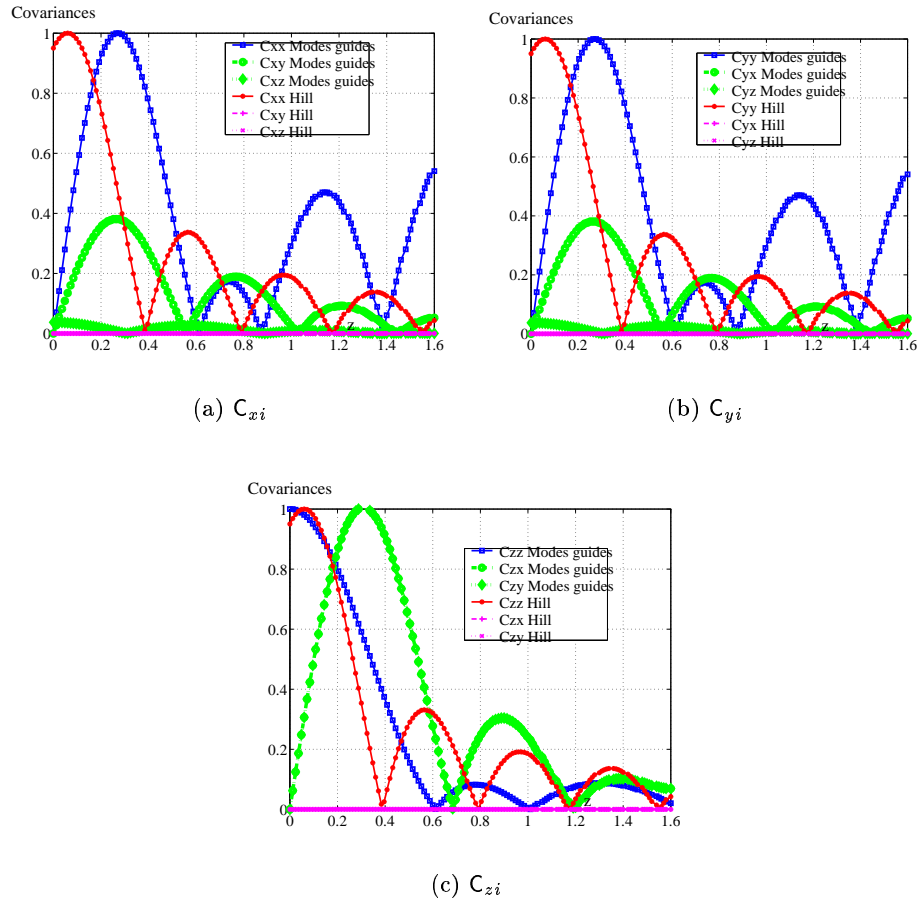


FIG. 4.11 – Covariances à 400 MHz selon l'axe  $x$

Pour la direction  $y$ , comme précédemment, l'allure de la covariance est donnée en interchangeant les  $C_{xi}$  et les  $C_{yi}$  et ces derniers donnent les mêmes résultats.

Selon l'axe  $z$  (cf. la figure 4.12), l'allure de la covariance du modèle isotrope et celle du modèle en mode guidé sont très différentes. Cette comparaison met en valeur la différence de comportement que peuvent apporter les parois surtout dans les zones basses fréquences de la CRBM.

FIG. 4.12 – Covariances à 400 MHz selon l'axe  $z$ 

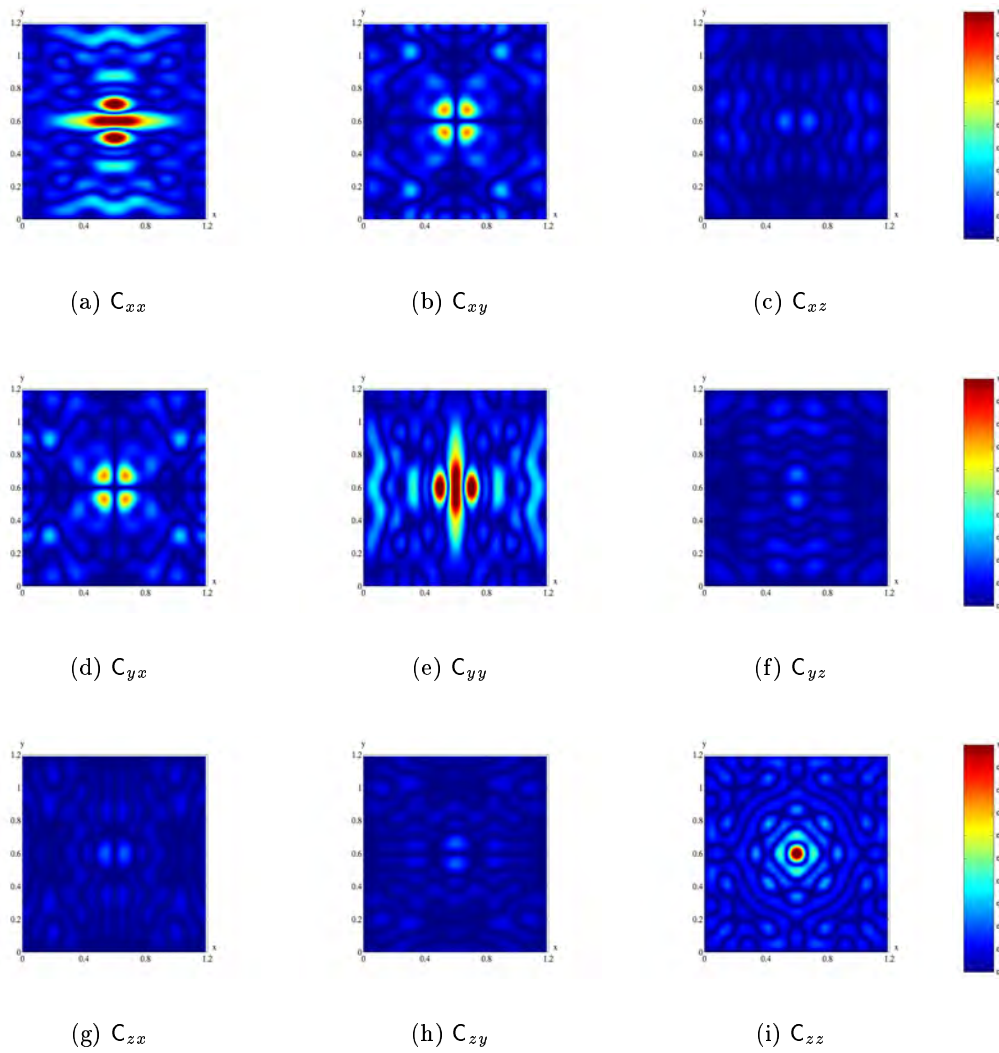
#### 4.2.2 Allure de la covariance à une fréquence intermédiaire

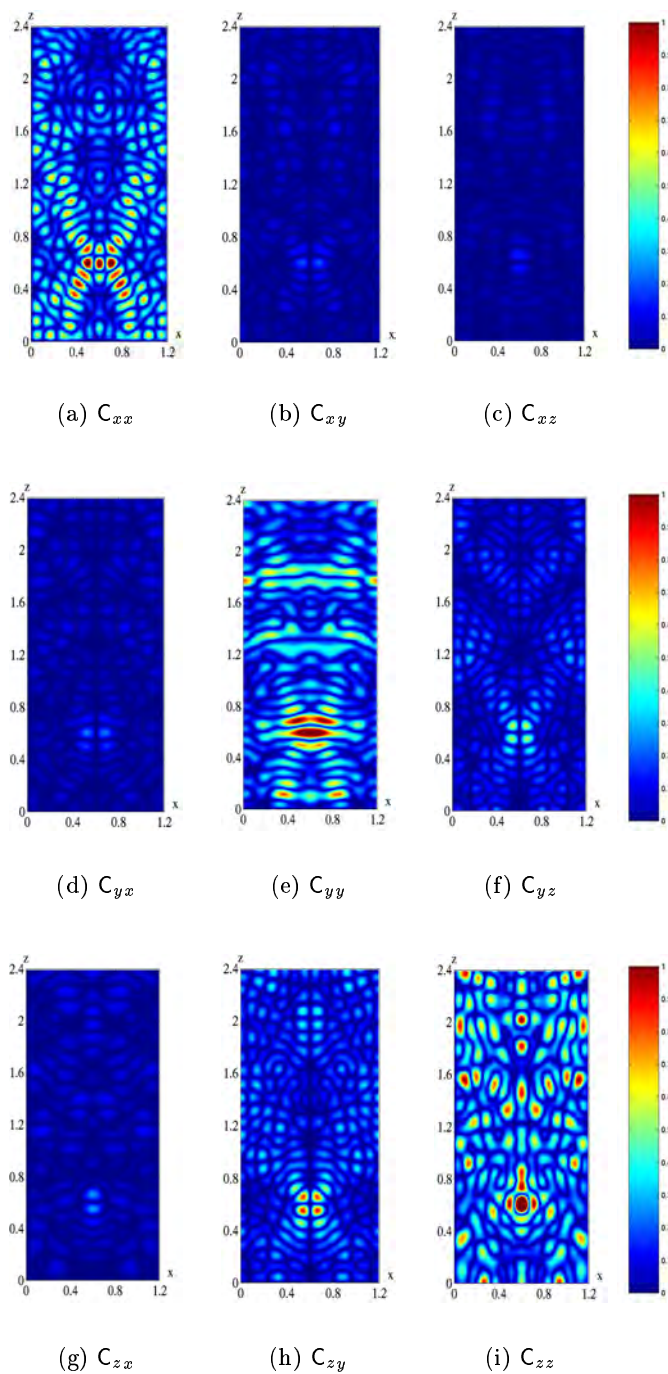
Cette fois-ci, l'étude est réalisée pour une fréquence intermédiaire : 2 GHz pour laquelle le nombre de modes est estimée à quelques centaines. La section du guide est de dimension de l'ordre de huit fois la longueur d'onde (15cm).

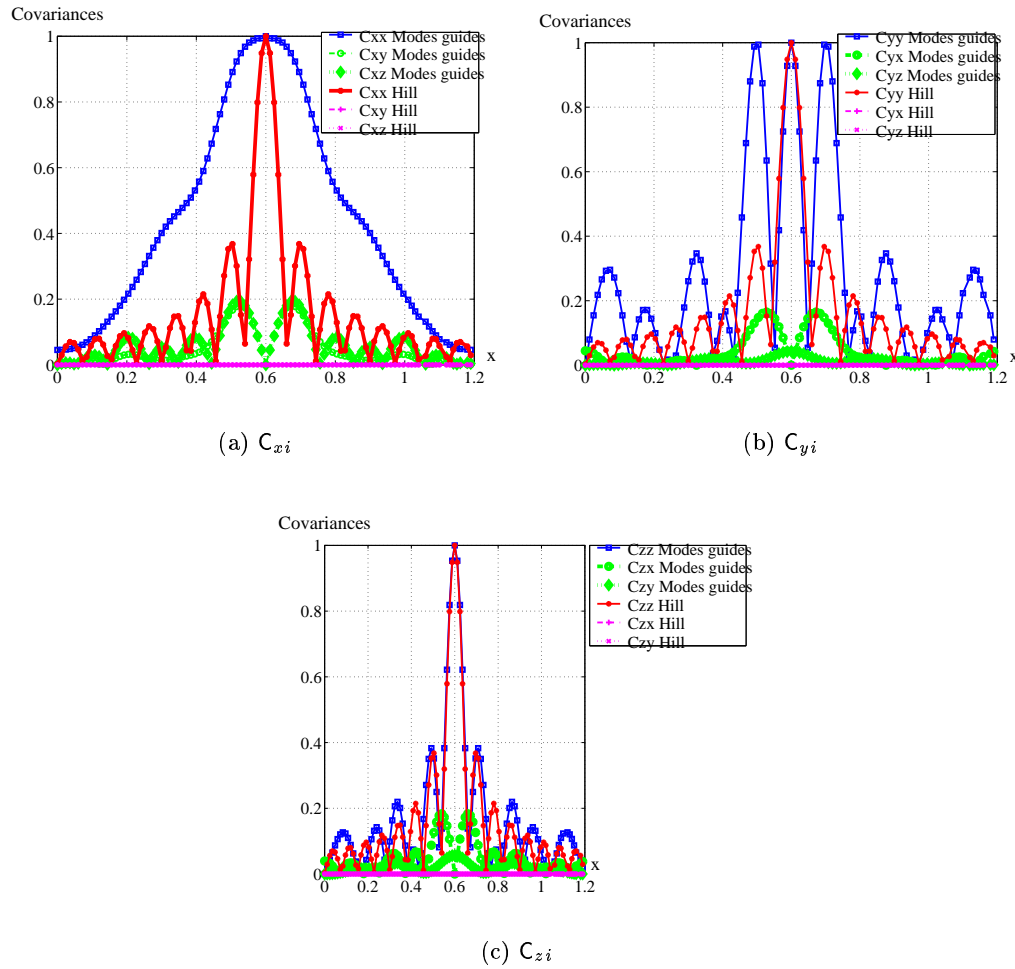
##### Dans la zone de mesure

Sur les figures 4.13 et 4.14, contrairement aux basses fréquences (figures 4.5 et 4.6), les covariances croisées  $C_{ij}$  semblent plus importantes relativement à celles de la diagonale du tenseur de covariance. Effectivement, beaucoup plus de modes contribuent à la structure du champ.

Par ailleurs, l'allure globale des termes diagonaux  $C_{ii}$  est plus proche de l'allure du modèle isotrope. Dès qu'une composante normale aux parois intervient, les termes de la covariance présentent des lobes plus importants dans la direction normale. Le rôle de parois est toujours «visible».

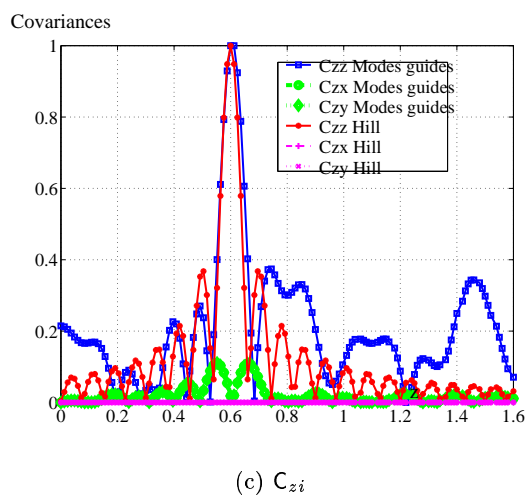
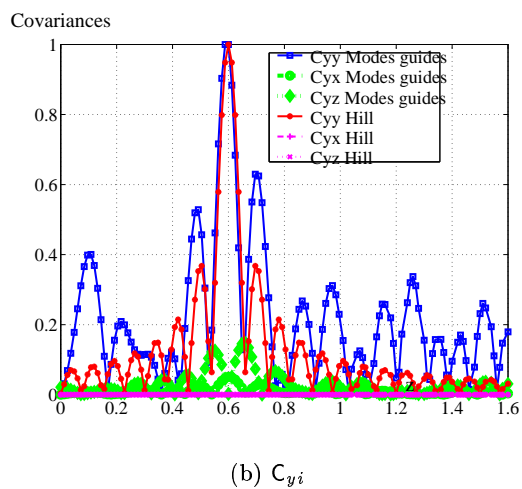
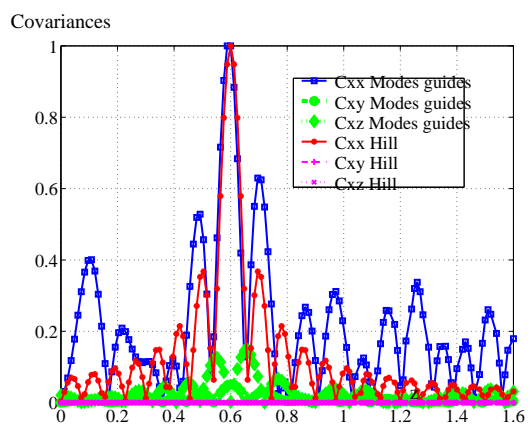
FIG. 4.13 – Covariances à 2 GHz dans le plan  $(x0y)$

FIG. 4.14 – Covariances à 2 GHz dans le plan  $(y0z)$

FIG. 4.15 – Covariances à 2 GHz selon l'axe  $x$ 

Sur la figure 4.15, seules les composantes  $C_{zi}$  ont une bonne ressemblance avec le modèle isotrope. Sur les autres composantes et en particulier celles normales aux parois, l'effet des parois est moindre qu'en basse fréquence mais toujours non négligeable.

Selon l'axe  $z$  (cf. la figure 4.16), les  $C_{xi}$  et  $C_{yi}$  sont proches du modèle isotrope, mais ce n'est pas le cas pour les  $C_{zi}$ .

FIG. 4.16 – Covariances à 2 GHz selon l'axe  $z$

### Dans un coin de la CRBM

Sur les figures 4.17 et 4.18, l'effet des parois est important seulement sur une longueur de 15 cm : celle de la longueur d'onde à 2GHz. Les lobes concentriques typiques du modèle isotrope émergent toujours sur les composantes perpendiculaires à la coupe considérée.

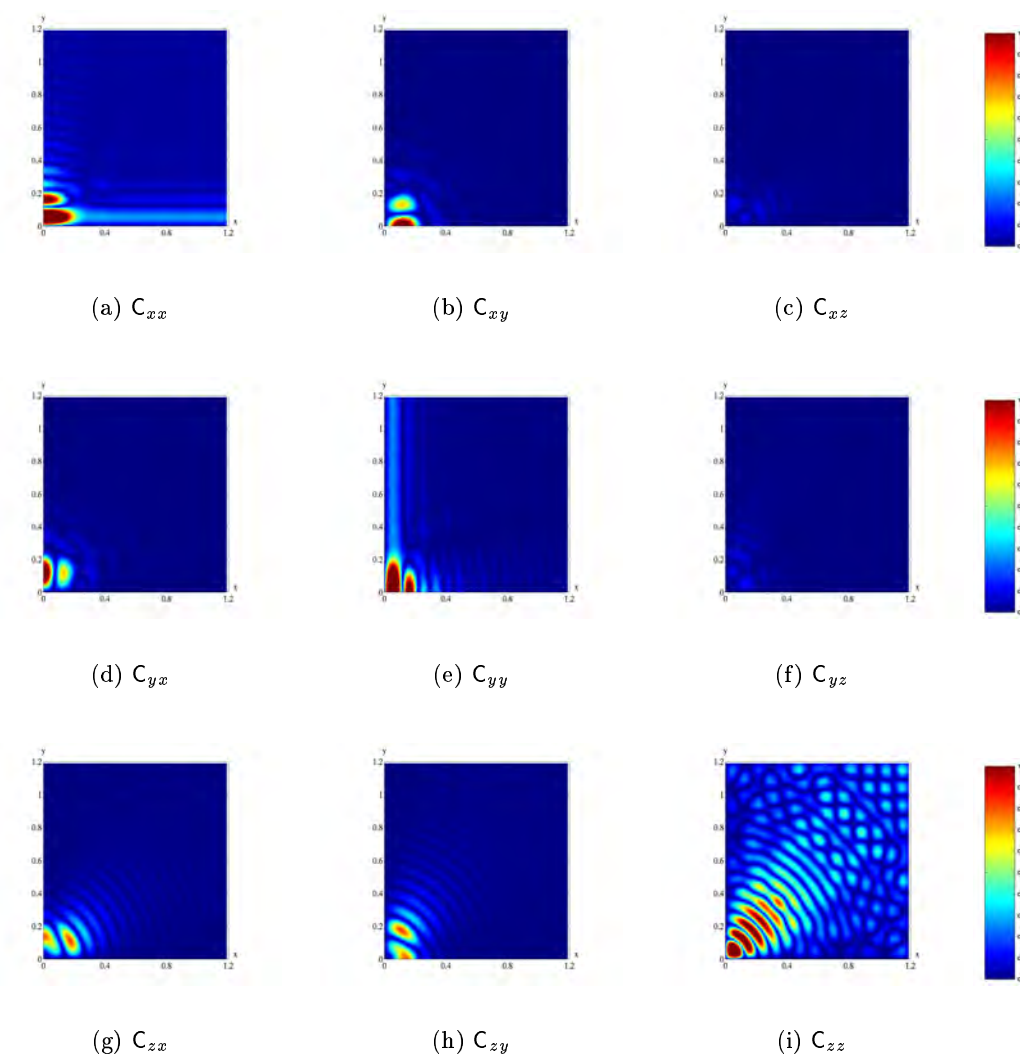
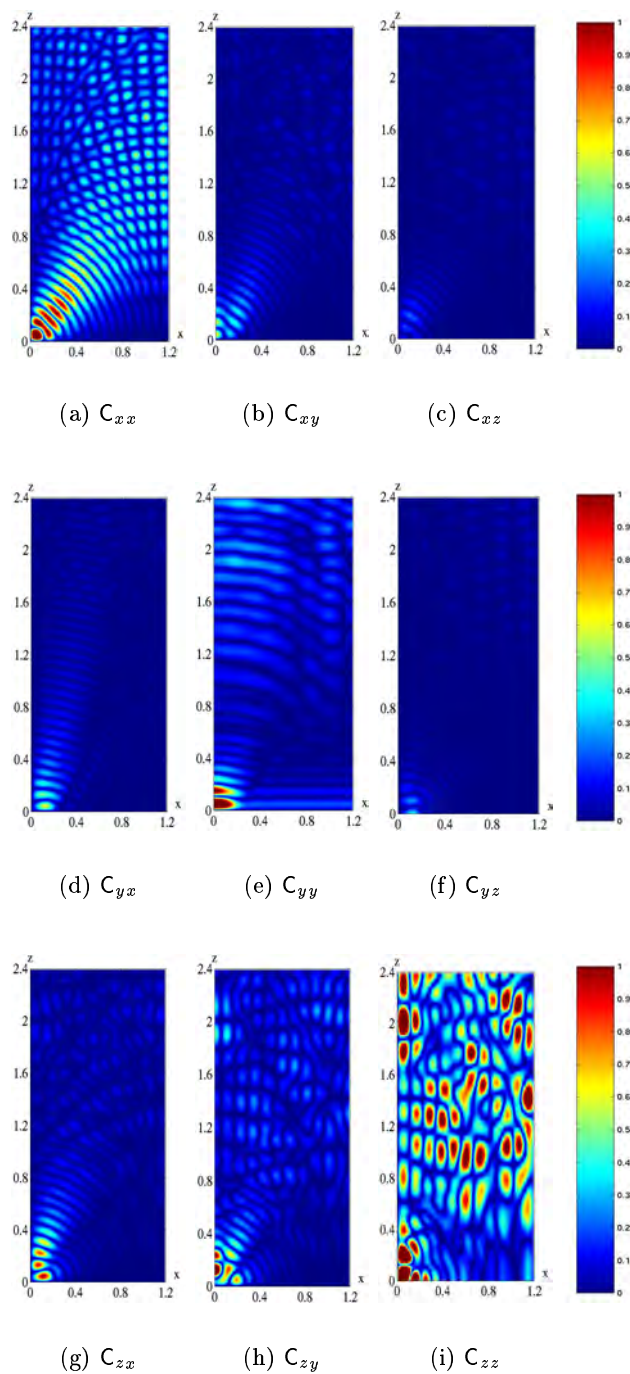
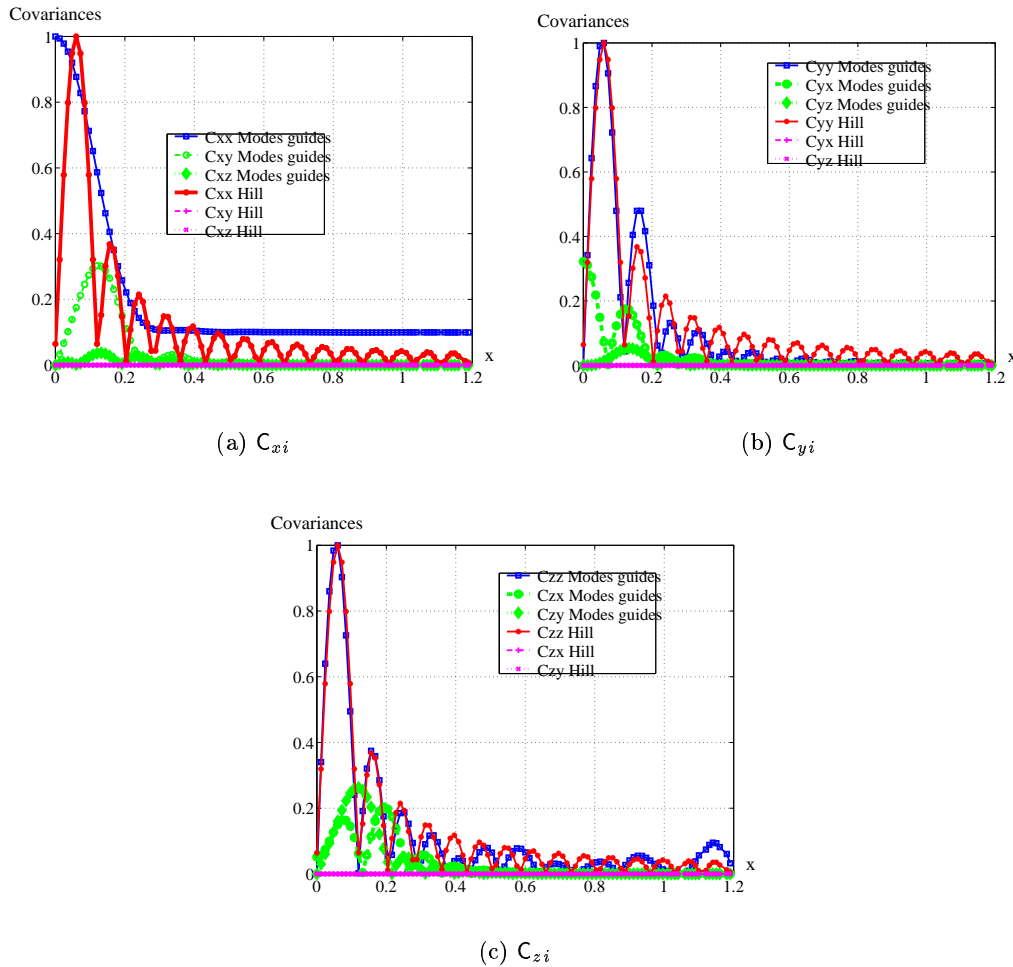


FIG. 4.17 – Covariances à 2 GHz dans le plan  $(x0y)$

FIG. 4.18 – Covariances à 2 GHz dans le plan  $(y0z)$

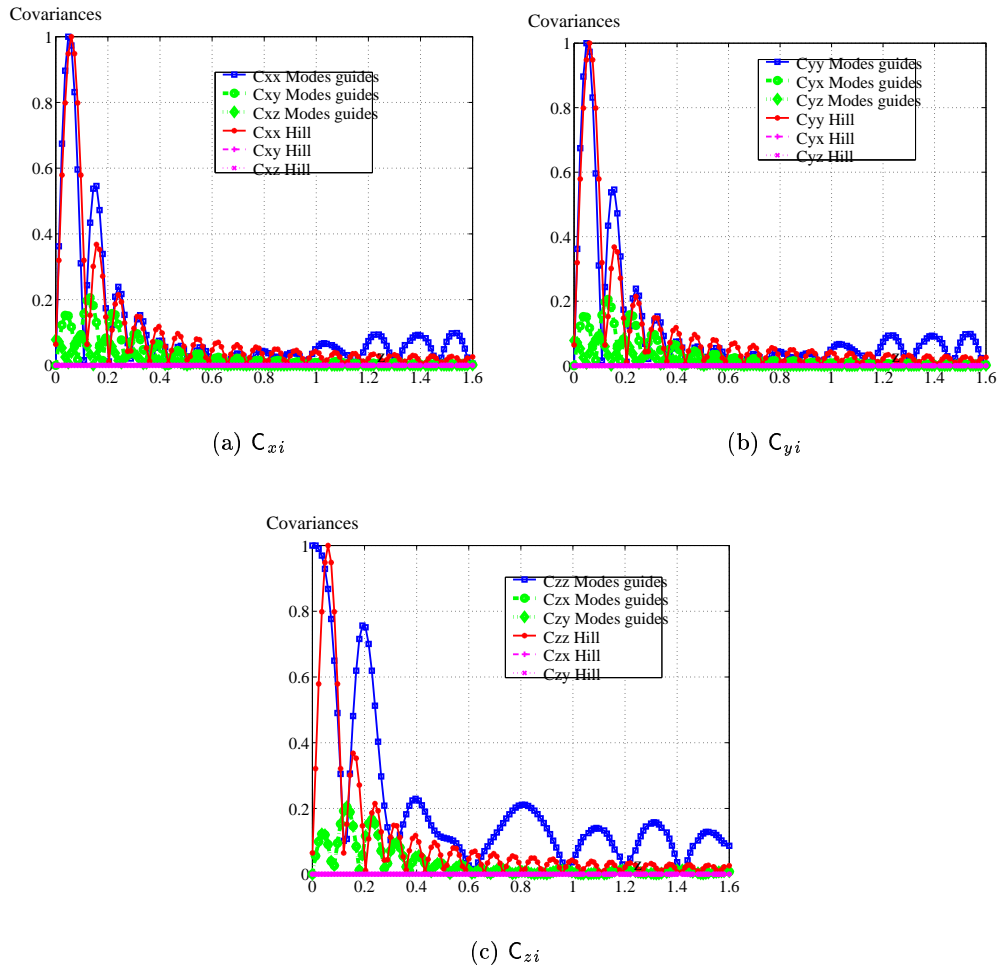


FIG. 4.19 – Covariances à 2 GHz selon l'axe  $x$ 

Sur la figure 4.19, les  $C_{zi}$  et  $C_{yi}$  ont une allure très proche du modèle isotrope avec une longueur de corrélation légèrement supérieure. Les composantes  $C_{xi}$  sont toujours fortement corrélées et ne s'annulent pas en  $x = 0$ . C'est attendu puisque la composante  $x$  est normale aux parois en  $x = 0$ .

Dans tous les cas, les corrélations croisées ont diminué mais subsistent.

Sur l'axe  $z$  (cf. la figure 4.20), les  $C_{xi}$  et  $C_{yi}$  ont cette fois une longueur de corrélation plus petite que celle du modèle isotrope. Les composantes  $C_{zi}$  présentent encore des lobes importants et plus larges que ceux que proposent le modèle isotrope.

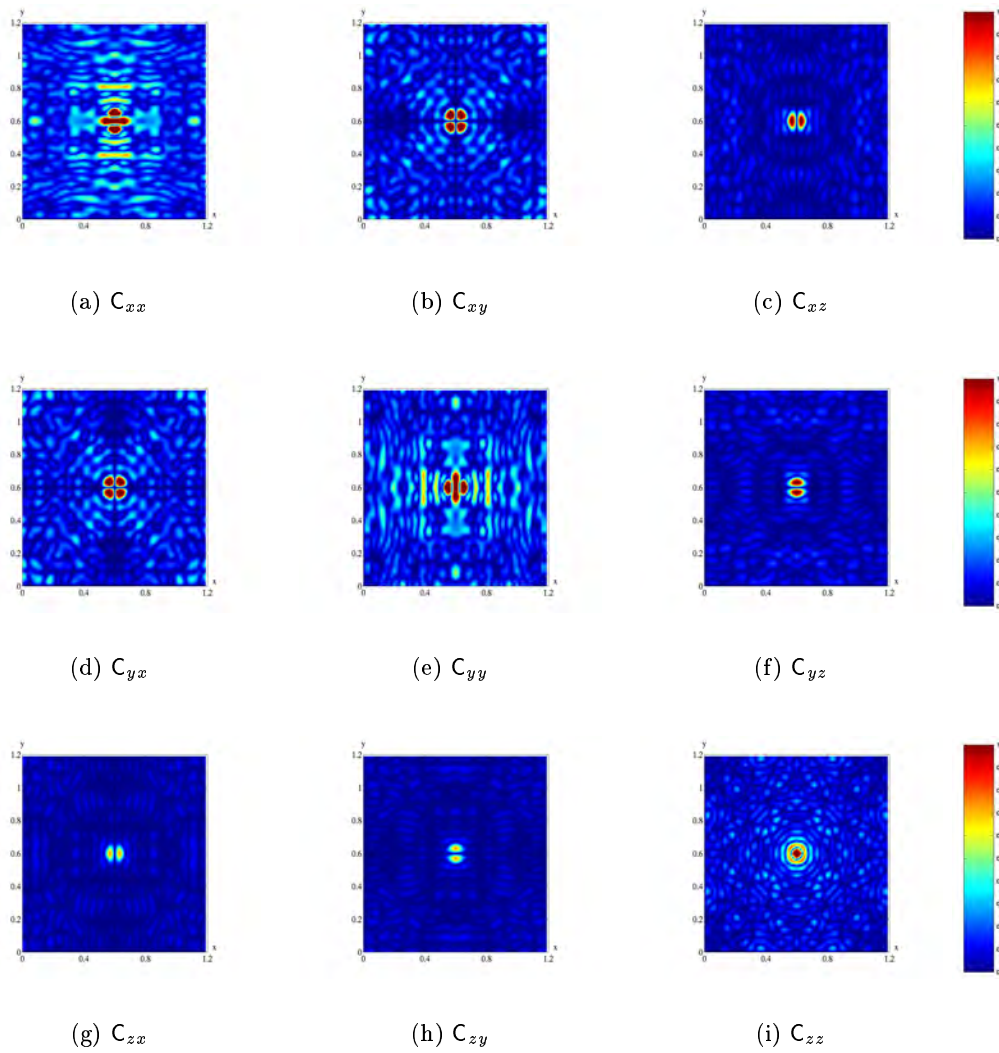
FIG. 4.20 – Covariances à 2 GHz selon l'axe  $z$ 

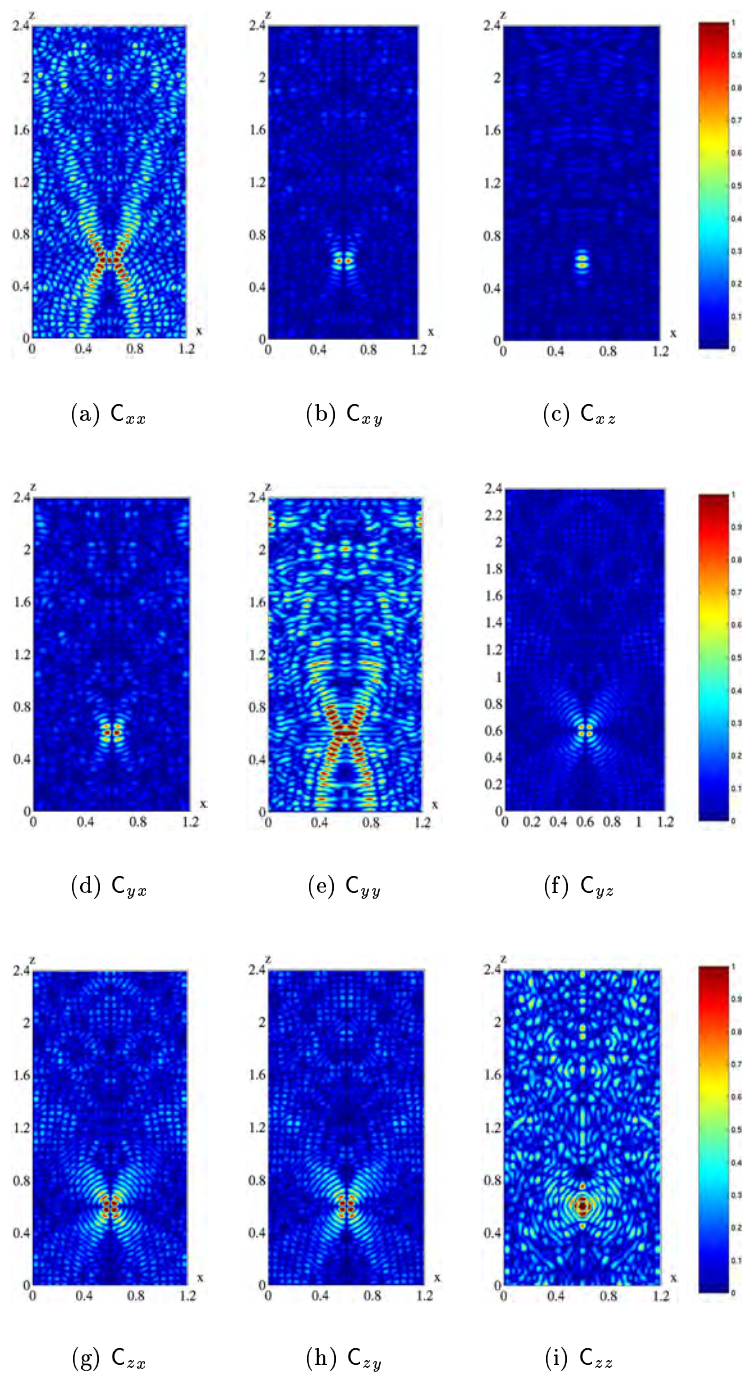
### 4.2.3 Allure de la covariance pour une fréquence élevée

Les résultats sont présentés ici pour la fréquence de  $4GHz$  où les modes sont très nombreux. Cette fois, la section à une dimension de l'ordre de  $16\lambda$  où  $\lambda = 7.5cm$  est la longueur d'onde.

#### Dans la zone de mesure

les figures 4.21 et 4.22 sont très similaires à celles obtenues à 2GHz. Il subsiste toujours l'effet des parois chaque fois qu'intervient une composante normale à la direction (par exemple  $C_{xx}$  selon l'axe  $x$ ), la covariance dans cette direction d'observation correspondante reste élevée.

FIG. 4.21 – Covariances à 4 GHz dans le plan  $(x0y)$

FIG. 4.22 – Covariances à 4 GHz dans le plan  $(y0z)$

On compare pour chaque direction (cf. les figures 4.23 et 4.24), les coupes obtenues avec les modes guidés et celles obtenues avec le modèle isotrope. Les allures sont très proches dès que la covariance fait intervenir des composantes tangentielle aux parois.

Cette similitude se limite à une longueur de  $6\lambda$  au delà de cette longueur, le niveau de la covariance semble remonter. On peut toujours lier cette remontée à la rétroaction des parois.

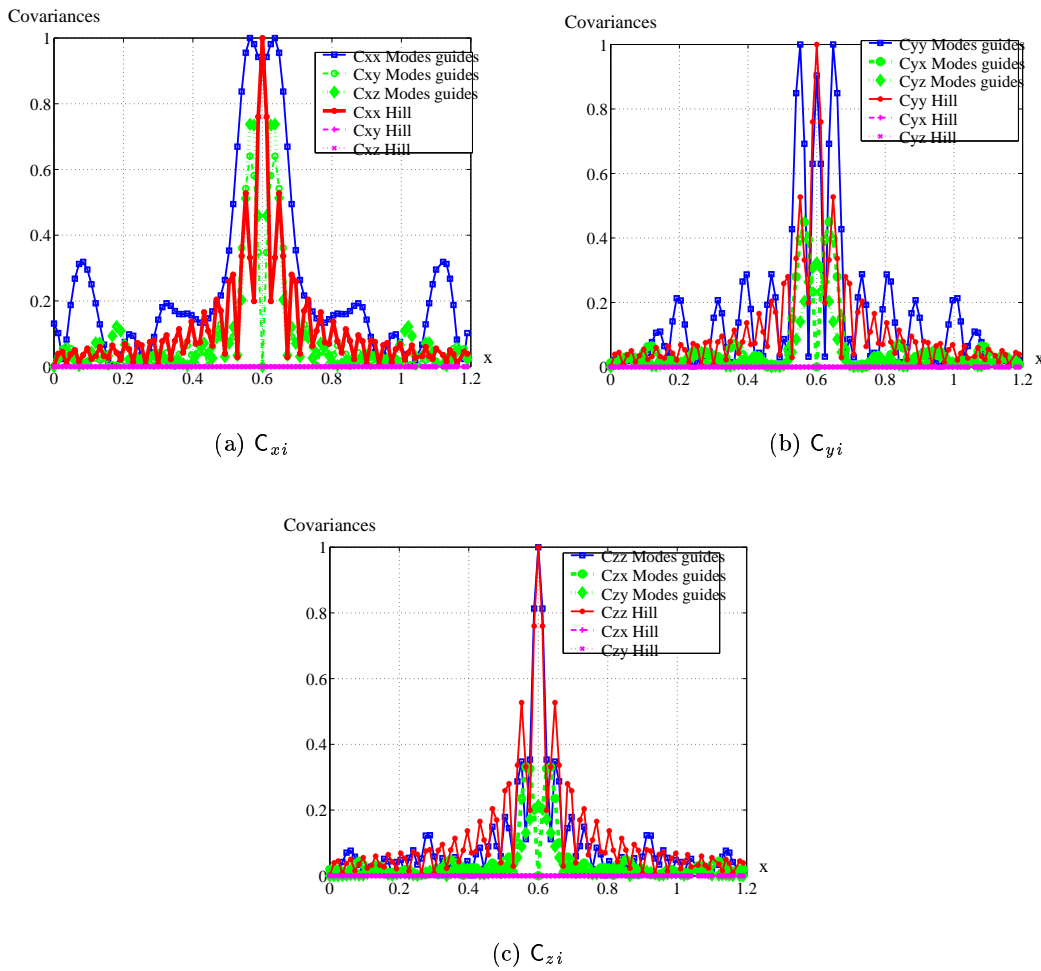
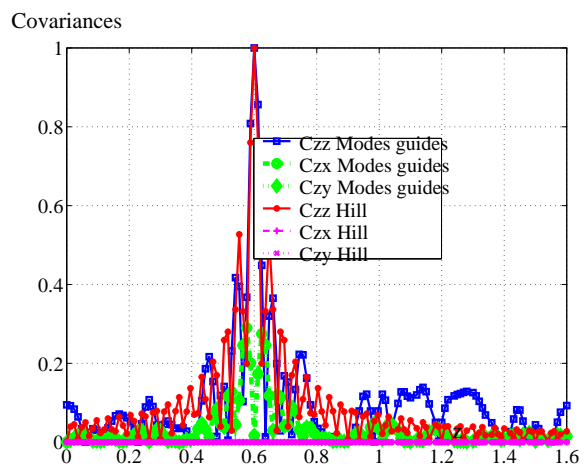
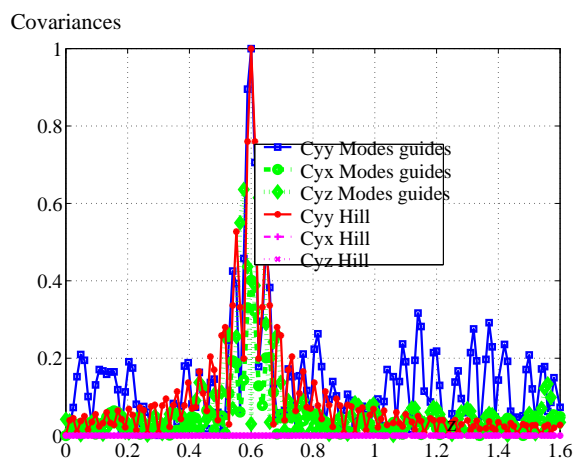
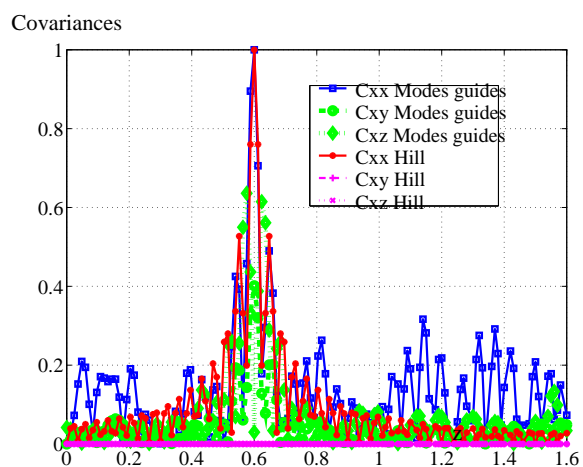
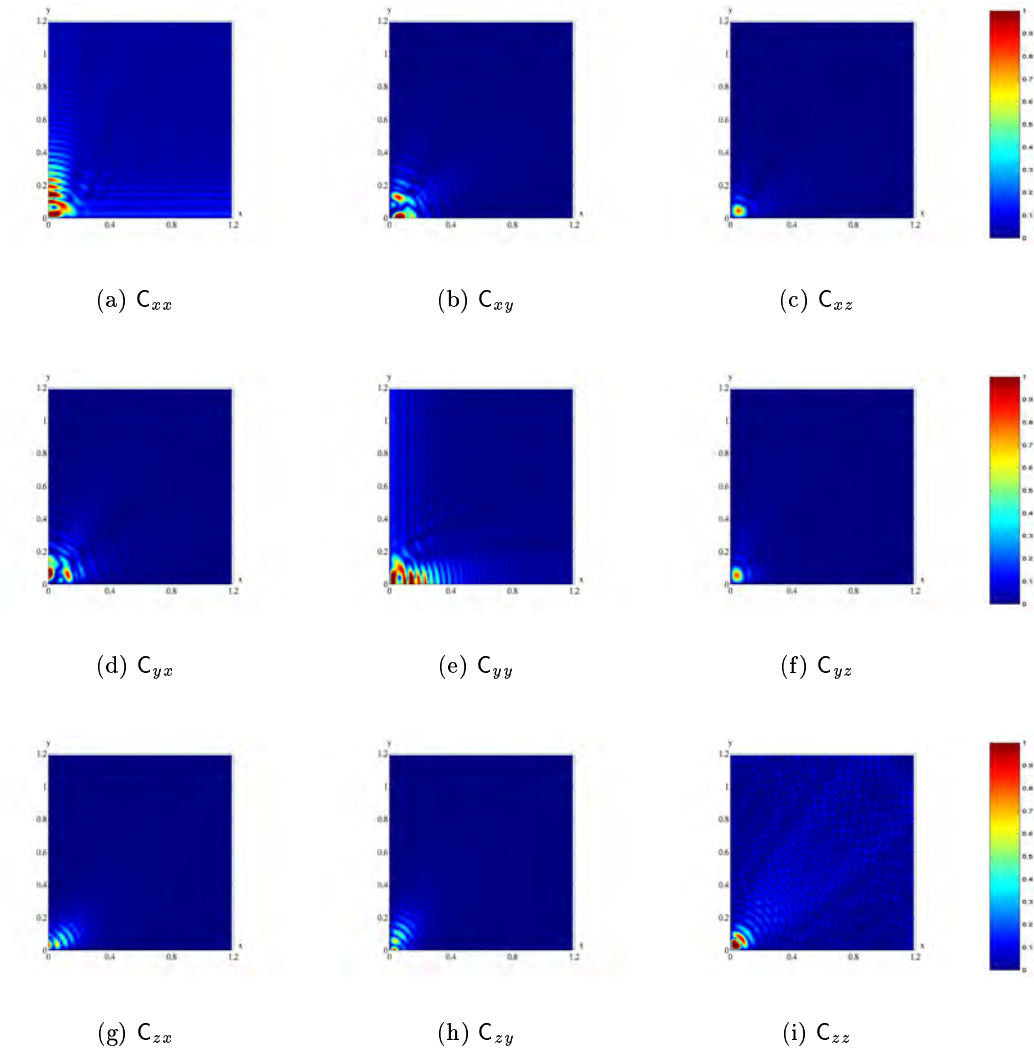


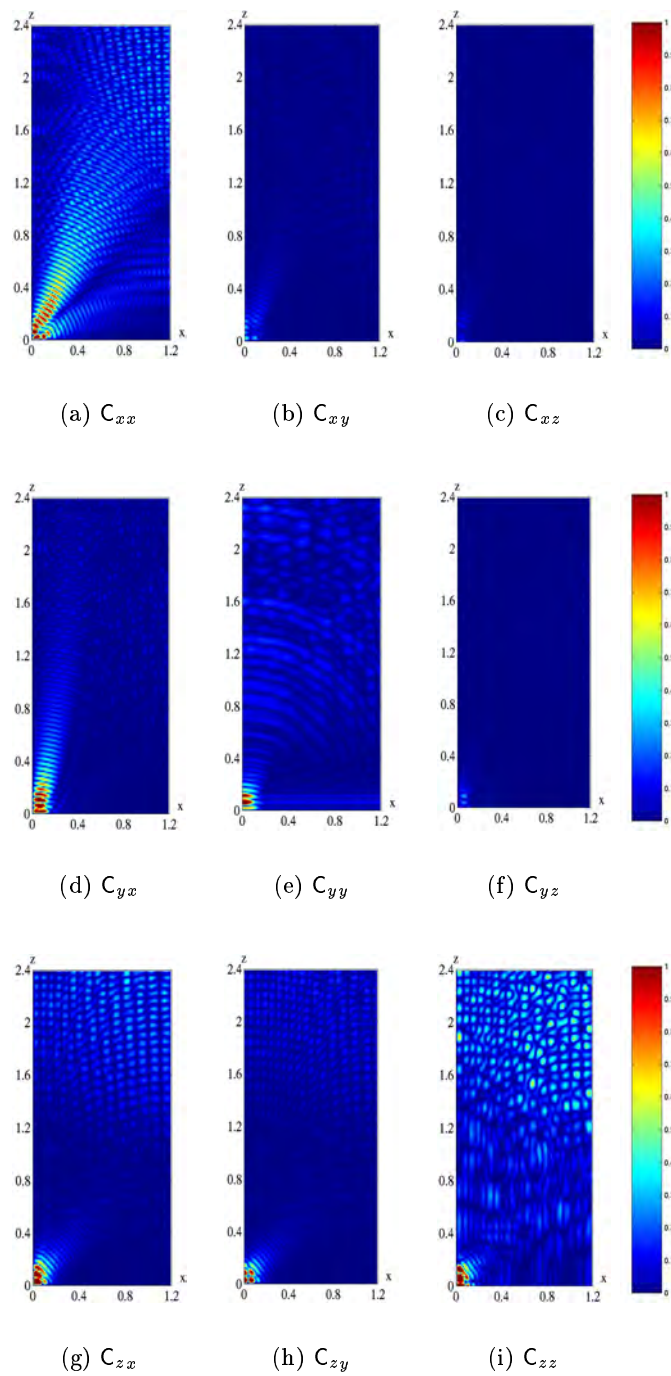
FIG. 4.23 – Covariances à 4 GHz selon l'axe  $x$

FIG. 4.24 – Covariances à 4 GHz selon l'axe  $z$

## Dans un coin de la CRBM

Si le point d'observation est au coin de la CRBM, le tenseur de covariance semble tendre vers un comportement semblable à celui du spectre isotrope d'ondes planes.

FIG. 4.25 – Covariances à 4 GHz dans le plan  $(x0y)$

FIG. 4.26 – Covariances à 4 GHz dans le plan  $(y_0z)$



Sur les figures 4.27 et 4.28 la tendance à se rapprocher de l'isotropie est confirmée. Même pour les termes de covariance qui font intervenir une composante normale aux parois proches, la différence entre le modèle des modes guidés et le modèle isotrope est peu importante.

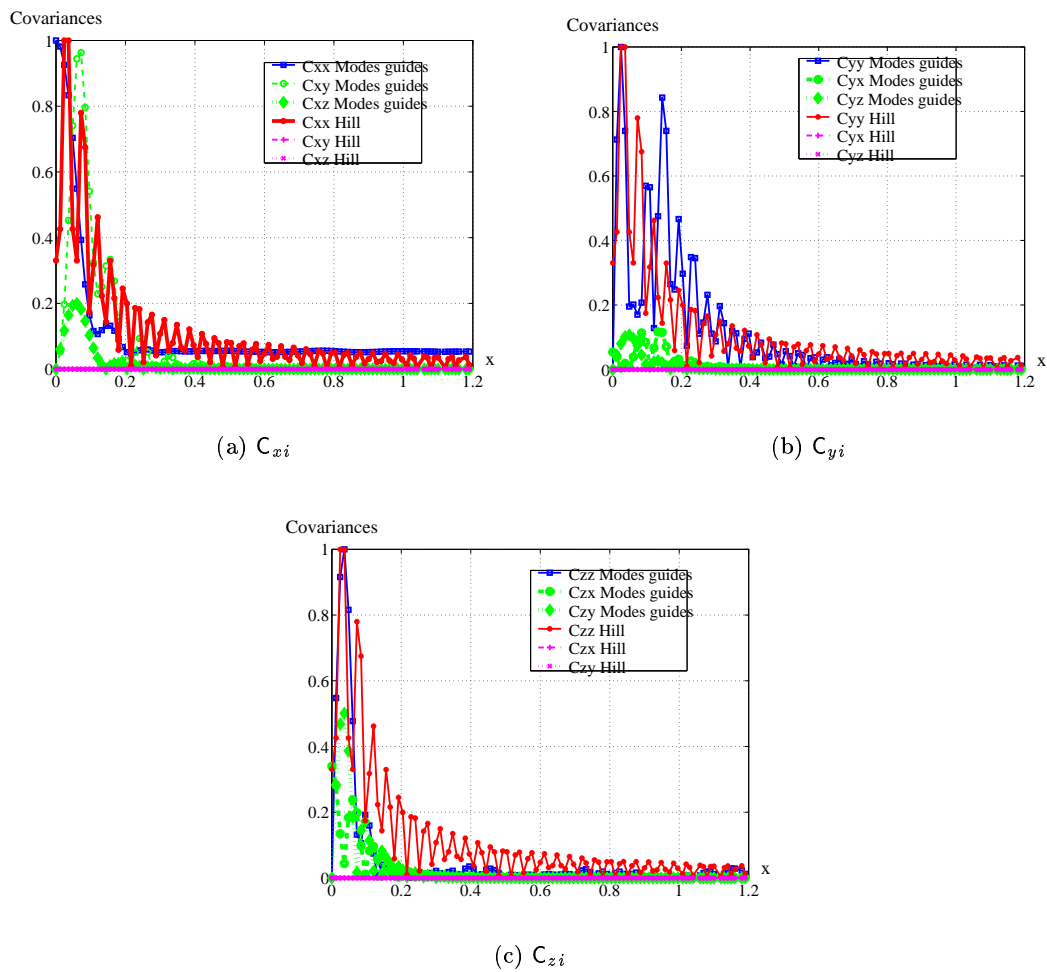
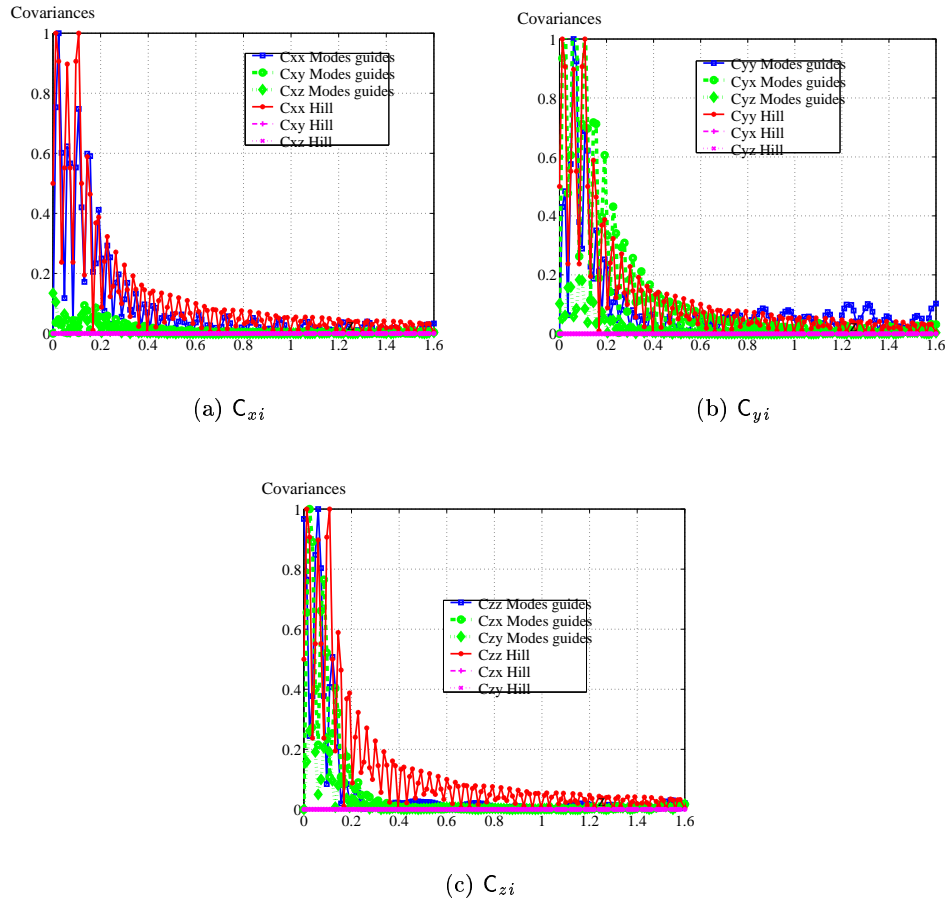


FIG. 4.27 – Covariances à 4 GHz selon l'axe  $x$

FIG. 4.28 – Covariances à 4 GHz selon l'axe  $z$ 

## Conclusion

Au travers de l'observation du tenseur de covariance en différents points et plusieurs fréquences, il est mis en évidence que l'effet des parois diminue avec la fréquence et aussi si la distance à cette paroi augmente. Ainsi on s'attend que la diffraction des parois a moins d'importance sur le couplage en haute fréquence par rapport à la taille de la CRBM mais aussi par rapport à la taille du système sous test.

## 4.3 Comparaison avec la mesure

### 4.3.1 Énergie emmagasinée dans la CRBM

Jusqu'à présent, le niveau du modèle dépend de la constante  $C$ . Il est donc possible de relier le niveau de ce modèle à celui du modèle isotrope. Pour cela, il a été choisi d'égaliser leur énergie emmagasinée dans un même volume. L'égalité suivante est

donc posée :

$$16\pi\sigma^2\varepsilon_0\mathcal{V} = 16C^2\varepsilon_0\mathcal{V}\left\{MN + M + N - \sum_{m=1}^M \frac{k_x^2}{k_0^2} \text{sinc}(2\beta_{m0}L_z) - \sum_{n=1}^N \frac{k_y^2}{k_0^2} \text{sinc}(2\beta_{0n}L_z)\right\}$$

D'où on déduit :

$$C^2 = \frac{\pi\sigma^2}{MN + M + N - \sum_{m=1}^M \frac{k_x^2}{k_0^2} \text{sinc}(2\beta_{m0}L_z) - \sum_{n=1}^N \frac{k_y^2}{k_0^2} \text{sinc}(2\beta_{0n}L_z)}$$

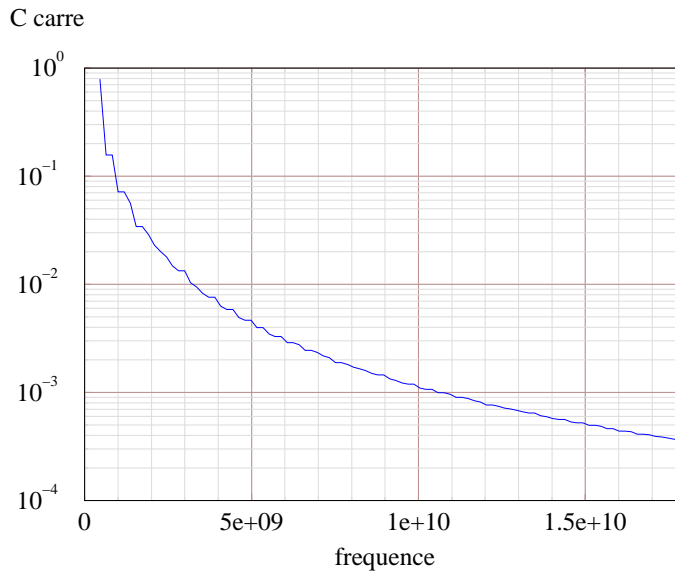


FIG. 4.29 – Variation de  $C^2$  en fonction de la fréquence

Sur la figure 4.29, la décroissance de cette constante en fonction de la fréquence est inversement proportionnelle aux nombres de modes dans la cavité. Les termes en sinc n'ont pas un poids important dès que  $M$  et  $N$  sont grands.

Le niveau est désormais le même pour chaque modèle et il rend ainsi possible la comparaison avec la mesure.

### 4.3.2 Application au calcul du couplage

Ce modèle étant complètement analytique, il est possible d'étudier l'expression de la variance du couplage. En effet, des simplifications vont permettre d'alléger le calcul numérique :

$$\begin{aligned}
var(\mathbf{V}) &= \langle \mathbf{J}^{ray} | \mathcal{C}_{\mathbf{E}}(\overline{\mathbf{J}^{ray}}) \rangle \\
&= \langle \mathbf{J}_{ray} | \{ \int_{\mathcal{S}} \sum_{mn\pi} var(A_{mn}^{\pi}) \mathbf{e}_{mn}^{\pi}(\vec{r}_1) \overline{\mathbf{e}_{mn}^{\pi}(\vec{r}_2)} \} \overline{\mathbf{J}^{ray}} d\mathcal{S} \rangle \\
&= \sum_{mn\pi} var(A_{mn}^{\pi}) \langle \mathbf{J}_{ray} | \mathbf{e}_{mn}^{\pi} \rangle \langle \overline{\mathbf{J}^{ray}} | \overline{\mathbf{e}_{mn}^{\pi}} \rangle
\end{aligned}$$

En définissant  $\mathbf{v}_{mn}^{\pi} = \langle \mathbf{J}_{ray} | \mathbf{e}_{mn}^{\pi} \rangle$  on obtient :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{mn\pi} var(A_{mn}^{\pi}) \mathbf{v}_{mn}^{\pi} \overline{\mathbf{v}_{mn}^{\pi}} \\
&= \sum_{mn\pi} var(A_{mn}^{\pi}) |\mathbf{v}_{mn}^{\pi}|^2
\end{aligned}$$

Où  $\pi$  désigne les modes soit TE soit TM. Pour chaque fréquence, pour chaque mode, le «couplage élémentaire»  $\mathbf{v}_{mn}$  est calculé et pondéré par la variance du mode correspondant. La somme de toutes ces contributions donne la variance de la tension de couplage.

### 4.3.3 Résultats

Les couplages dans des CRBM différentes ont été étudiés. Il sera tout d'abord présenté le cas du couplage d'un monopole ensuite celui d'un système électronique plus volumineux.

#### Monopôle

Dans l'expérimentation (figure 4.30), le monopôle se trouve placé sur une paroi. Ceci signifie qu'il n'a pas été possible de simuler cette configuration par la méthode présentée dans le chapitre 3 parce qu'elle ne tient pas compte de l'effet d'un plan de masse sur la covariance du champ.

La simulation a été réalisée pour deux points de références :

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.16 \\ 0.19 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 0.16 \\ 0.19 \end{pmatrix}$$

La figure 4.31 permet d'établir une première remarque. Les modes guidés sont très sensibles à la position du port du système, si celui-ci est proche d'une paroi. En particulier pour les basses fréquences (en dessous de 4 GHz), lorsque le monopole a une longueur inférieure ou équivalente à la moitié de la longueur d'onde, la simulation

sous-estime le couplage que nous donne la mesure. Il est intéressant de comprendre d'où peuvent venir ces différences.

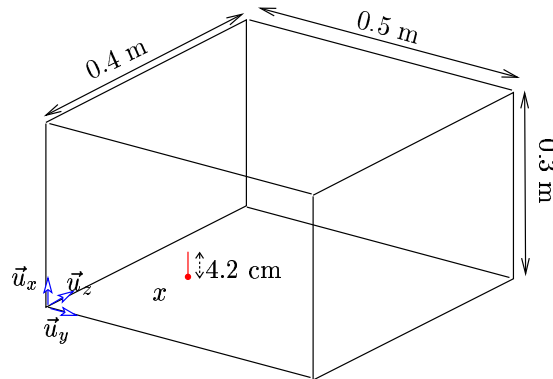


FIG. 4.30 – Configuration de la mesure

Au dessus de cette fréquence, la variance donnée par la simulation ne varie plus en fonction de la position. Le modèle de la covariance du champ semble alors reproduire les conditions de la simulation.

Var(V)

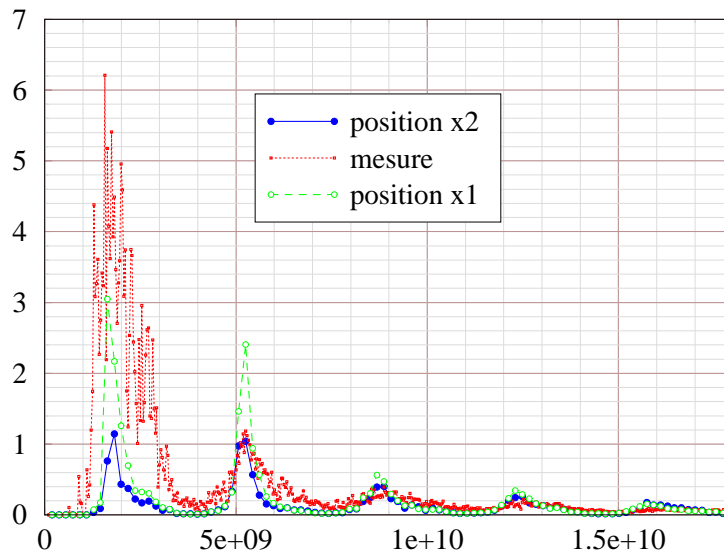


FIG. 4.31 – Comparaison des modes guidés à la mesure

La première étape est de comparer les paramètres d'adaptation  $S_{11}$  comme sur la figure 4.32. Dans la mesure, le premier pic correspond à une fréquence peu élevée où les parois ne permettent pas au dipôle de rayonner comme en espace libre. En ces points fréquentiels de cette petite CRBM, les conditions de mesures ne sont peut-être pas idéales. Les autres différences entre mesure et simulation sont dues au fait que

les imperfections du monopole n'ont pas été prises en compte :

- connectivité;
- soudure;
- support du monopole épais de 2mm décalant le port où s'effectue la mesure.

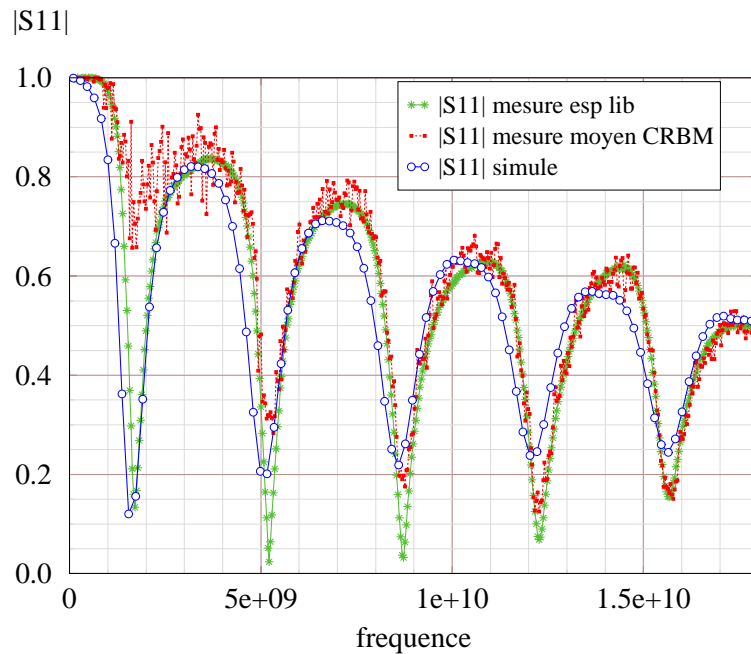


FIG. 4.32 – Adaptation du système dans la simulation et la mesure

Il est intéressant de comparer le modèle des modes guidés au modèle isotrope. Si le dipôle correspondant au monopôle sur le plan de masse est placé au centre de la «zone de mesure», les deux modèles (ondes planes isotrope et modes guidés aléatoires) donnent des résultats relativement proches. Si l'on compare ces résultats à la mesure, on peut constater un rapport de 4 entre simulation et mesure (figure 4.33 où l'on a divisé les résultats de la simulation par 4 (notés /4)).

Dans le cas du couplage numérique, la covariance du champ a été appliquée sur les deux brins du dipôle, ce qui multiplie par deux le couplage que l'on devrait trouver sur le monopôle. Puisque la variance correspond au carré du couplage, le facteur 4 est expliqué.

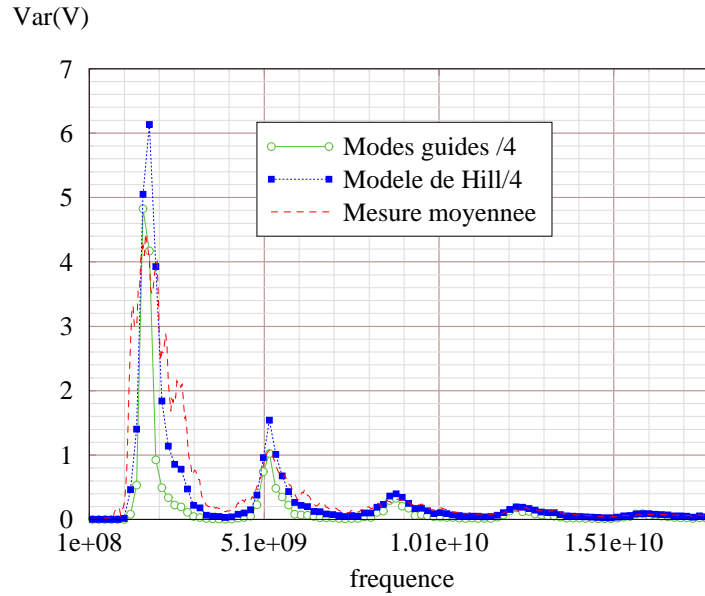


FIG. 4.33 – Comparaison des modes guidés à la mesure

Sur cette même figure 4.33, la correspondance entre la simulation et la mesure étant très satisfaisante, on peut conclure que dans cette CRBM l'ambiance électromagnétique offre une covariance à peu près identique au centre de la zone de mesure comme proche des parois si l'on tient compte dans le calcul du courant de l'effet plan de masse de la paroi. La conclusion serait que la covariance pour ce cas serait identique dans toute la zone de mesure, même proche des parois. La présence du brasseur doit faire intervenir des modes évanescents qui n'ont pas été pris en compte dans le modèle en modes guidés et qui ont une étendue non négligeable en basse fréquence.

### Boîtier filaire

La figure 4.34 rappelle la géométrie du cas étudié. La fréquence correspondant à la longueur de résonance du système total est de 360 MHz, celle correspondant au câble est de 600 MHz.

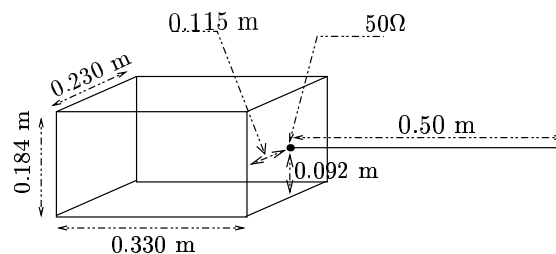


FIG. 4.34 – Géométrie du boîtier

Sur la figure 4.35, l'allure des simulations sont encore très similaires. Il semble toutefois que les modes guidés tendent à privilégier les pics de résonance vers les hautes fréquences.

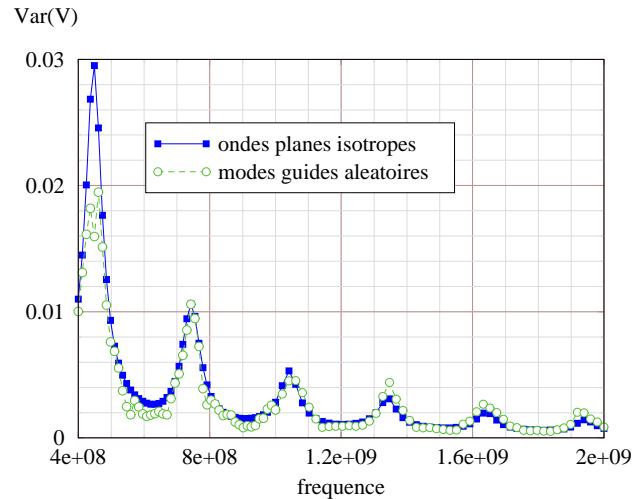


FIG. 4.35 – Comparaison des deux modèles

Une fois le niveau référencé à la mesure (cf la figure 4.36), les différences ont été accentuées. Toutefois la mesure présente des pics moins nets que dans la simulation, ceci peut s'expliquer si l'on observe les paramètres d'adaptation  $S_{11}$ .

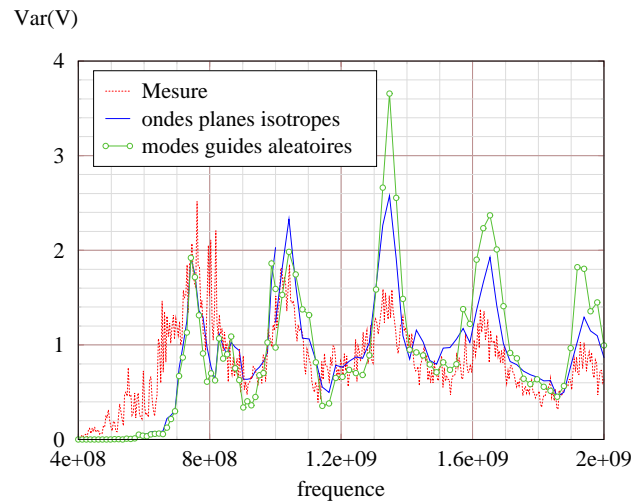
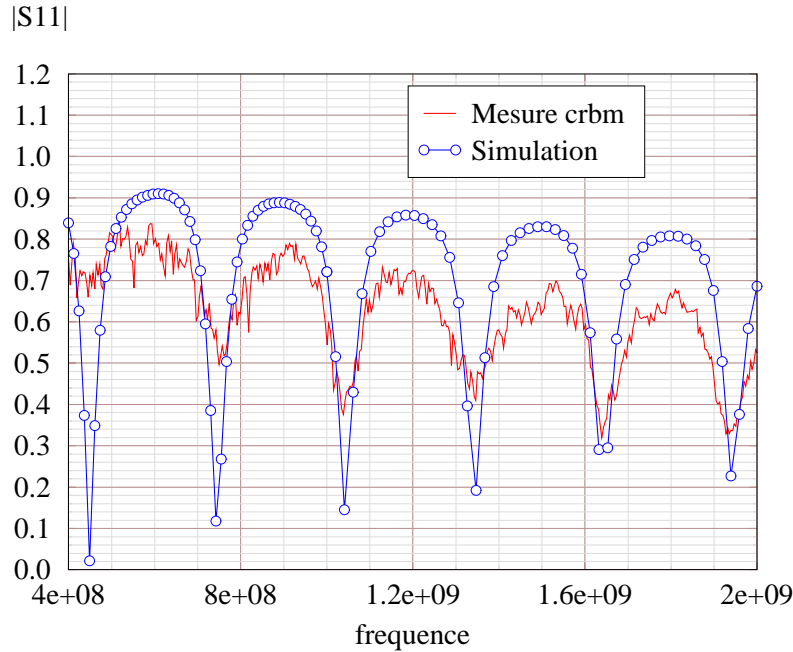


FIG. 4.36 – Mesures réalisées dans la CRBM intermédiaire

Dans ce cas, la différence entre la simulation et la mesure est principalement due à la modélisation du système (cf la figure 4.37). Le système réel présente des pertes non prises en compte dans la simulation.



FIG. 4.37 – Allure des paramètres  $S_{11}$ 

Un autres point est d'étudier la variabilité des réponses si le système change de position dans la CRBM. Voici sur la figure 4.38 les configurations étudiées :

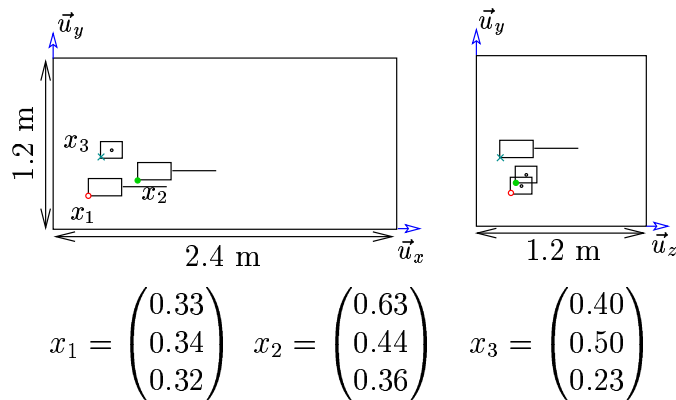


FIG. 4.38 – Configurations des mesures dans la CRBM intermédiaire

Sur la figure 4.39, il est intéressant de constater que l'allure ne varie pas énormément d'un point à l'autre. Ce point est important car si le modèle des modes guidés ne peut pas proposer un champ homogène, il produit un couplage similaire à partir du moment où le système n'est pas trop proche des parois, ce que l'on observe dans toutes les chambres réverbérantes.

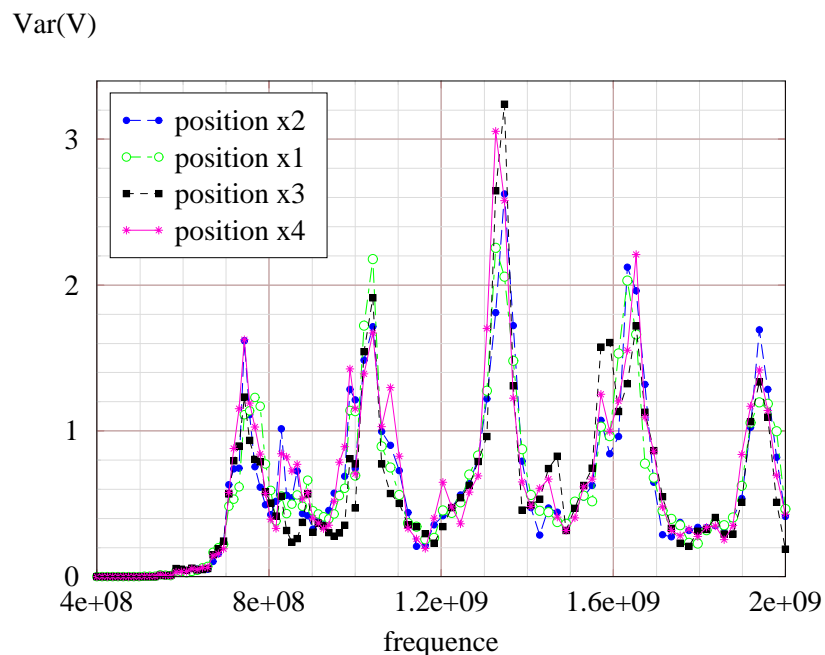


FIG. 4.39 – Simulations en différents points de la CRBM intermédiaire

Nous avons aussi étudié le couplage sur le même système. Cette fois, il s'agit de la CRBM de très grande dimension du DERA. Sur les figures 4.40 et 4.41, la correspondance entre l'adaptation des systèmes implique d'ores et déjà que le couplage simulé sera également très similaire à la mesure.

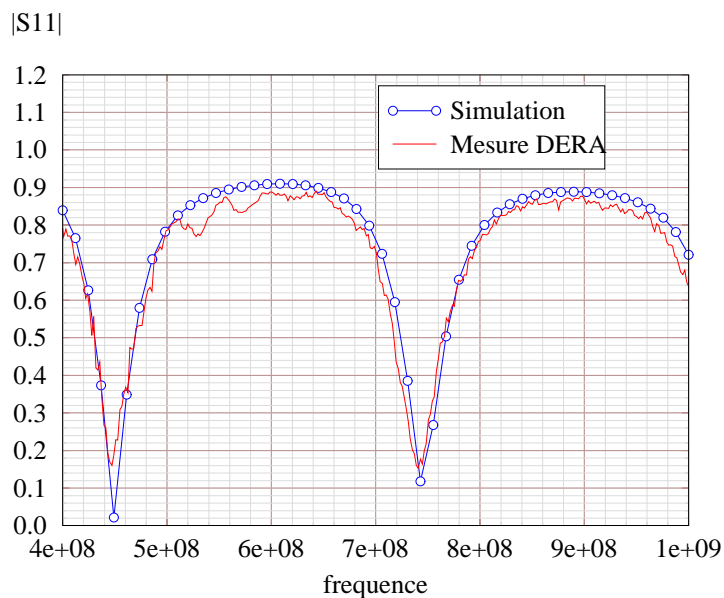


FIG. 4.40 – Adaptation du système DERA

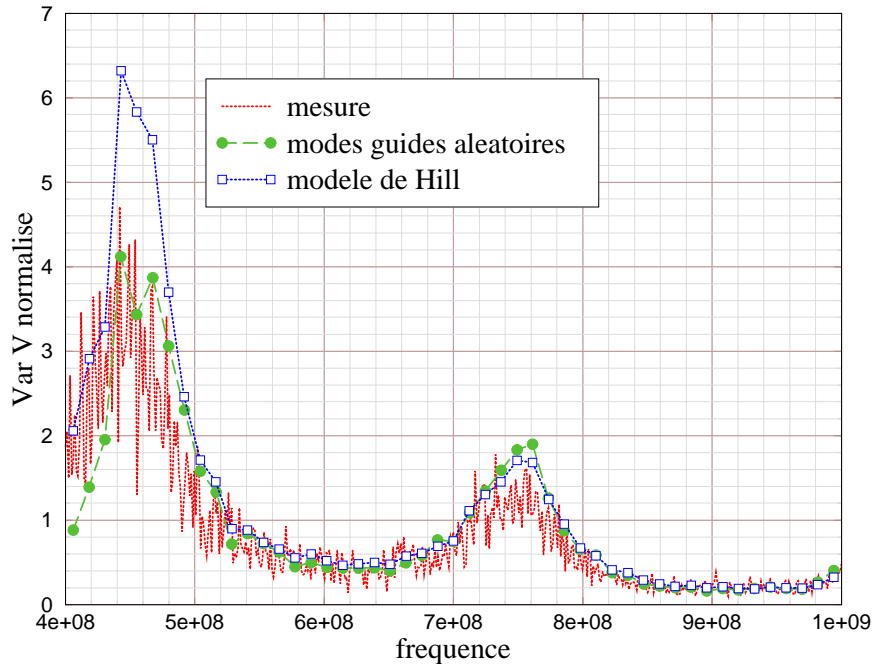


FIG. 4.41 – Comparaison mesure calcul

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle du champ basé sur les modes guidés a été présenté pour décrire l'ambiance aléatoire du champ électromagnétique dans une CRBM. Puisque ces derniers forment une base complète, ils suffisent à décrire complètement tout champ existant dans la zone de mesure. La première conséquence de ce modèle est de limiter le nombre de directions d'ondes planes pouvant exister dans une CRBM. La deuxième est de corrélérer les ondes planes qui découlent des modes guidés stationnaires.

Par ailleurs, la base des modes guidés impose des directions privilégiées dans le sens où des directions sont plus souvent représentées que d'autres. Afin d'en limiter les effets sur les couplages des systèmes, il a été proposé de donner une amplitude aux modes guidés qui compense le manque d'uniformité dans la répartition des directions. Ainsi, au travers d'un moyennage tout se passe comme si le modèle générait des ondes planes uniformément distribuées et portant toutes la même énergie : c'est pourquoi nous avons parlé de pseudo isotropie.

La première conséquence de ce modèle se retrouve sur le tenseur de covariance. Il dépend cette fois très fortement de la fréquence de travail, des dimensions de la CRBM et du point où l'on considère cette covariance. Ainsi en basse fréquence par rapport à la CRBM considérée, il n'est pas envisageable de négliger l'influence des parois sur le couplage. On a d'ailleurs pu remarquer que leur influence (due à la diffraction) diminue et se localise sur une distance comparable à la longueur d'onde

de travail. En haute fréquence, elle peut alors devenir «négligeable». Ceci explique en partie pourquoi on retrouve des paramètres moyens d'adaptation  $S_{11}$  similaires à ceux de l'espace libre.

La deuxième conséquence de cette pseudo-isotropie se retrouve sur le couplage sur les systèmes. Il a été remarqué tout d'abord que si le paramètre  $S_{11}$  issu de la simulation représente bien celui de la mesure, alors le couplage déduit par les modes guidés aléatoire est très similaire à celui de la mesure.

Ensuite, en basse fréquence par rapport à la CRBM et au système testé, les modes guidés aléatoires tendent à sous-estimer le couplage. Ceci peut s'expliquer en grande partie par l'absence des modes évanescents qui n'ont pas été pris en compte dans ce modèle.

Enfin, en haute fréquence, lorsque les modes guidés sont très nombreux, le couplage issu des modes guidés et ceux issus du modèle isotrope sont très similaires. En plus avec les modes guidés, ce couplage ne dépend plus de la position du système dans la «zone de mesure». Ceci nous renseigne peut être davantage sur l'ambiance électromagnétique existant dans les CRBM.

# Conclusion de la deuxième partie

Dans cette partie, deux modèles de champs aléatoires ont été présentés pour simuler l'ambiance électromagnétique d'une CRBM. Tous deux sont des modèles à priori puisque l'on a fixé les hypothèses uniquement pour reproduire le comportement du champ que l'on s'attend à obtenir dans une chambre réverbérante idéale.

Le premier est le modèle de Hill. Simulant un champ aléatoire dans l'espace libre, il autorise l'isotropie de l'onde plane aléatoire. Les résultats qu'il donne sont en bonne concordance avec la mesure quand il s'agit de couplage dans la zone de mesure et à des fréquences pas trop basses. Modèle de l'espace libre, il ne permet pas de mieux appréhender dans quelles limites, il peut représenter le champ d'une CRBM.

Le second modèle simule un champ aléatoire à l'intérieur d'un guide semi-infini. Construit sur la base complète des modes guidés (court-circuités), il n'a été considéré que les modes propagatifs (court-circuités). Ce modèle met en évidence le rôle des parois en corrélant les ondes planes huit par huit. Ce modèle ne permet donc plus l'isotropie souhaitée pour l'ambiance réverbérante. Par contre, il compense le déséquilibre de répartition des directions en agissant sur les amplitudes des modes. Globalement, l'énergie semble répartie de la même manière sur toutes les directions : ce modèle a été qualifié de pseudo-isotrope.

En basse fréquence, le couplage qu'il produit est parfois sous-estimé par rapport au couplage mesuré. Ceci semble dû à l'absence des modes évanescents qui pourraient jouer un rôle important en basse fréquence. Plus haut en fréquence, le couplage issu des modes guidés ne dépend plus de la position du système dans la cavité et donne des résultats similaires à ceux du modèle isotrope.

Il est également envisageable de retrouver la répartition énergétique des modes guidés en simulant de façon rigoureuse le champ existant dans une CRBM. C'est l'objet de la troisième partie.



Troisième partie

Calcul numérique du champ dans  
une CRBM





## Chapitre 5

# Développement modal calculé par différences finies dans le domaine fréquentiel

Dans la partie II précédente, la variance du couplage a été calculée pour deux modèles de champ électromagnétique aléatoire. Ces deux modèles ont des propriétés physiques différentes. L'un défini en espace libre est développé sur des ondes planes, l'autre défini pour un guide semi-infini (configuration qui se rapproche de la zone de mesure de la CRBM réelle) utilise les modes guidés.

Si le premier modèle simule un champ homogène isotrope d'une CRBM idéale, le second n'autorise plus l'isotropie. Pour ce dernier modèle, répartir l'énergie équitablement sur toutes les directions de propagation a conduit à imposer un comportement aléatoire particulier aux amplitudes  $A_{mn}^{\text{TE, TM}}$  des modes guidés : leur variance augmente avec l'ordre  $mn$  des modes.

Or ces deux modèles différents donnent des couplages sur systèmes similaires. Le but de cette partie est donc de calculer rigoureusement le champ dans la CRBM pour plusieurs configurations de brasseur. Il sera alors possible de déduire les propriétés statistiques des amplitudes  $A_{mn}^{\text{TE, TM}}$  pour un développement du champ en modes guidés.

Le problème à résoudre est toujours celui présenté dans le chapitre 1. La principale difficulté est due aux conditions aux limites : les parois du brasseur et de la cavité sont de très bons conducteurs. La seconde difficulté vient des dimensions de la cavité qui sont de l'ordre de quelques dizaines de longueurs d'ondes. Le nombre d'inconnues est donc considérablement élevé.

La question maintenant est de choisir une méthode numérique pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine que définit la CRBM. Peuvent être proposées :

- l'EFIE : Electric Field Integral Equation ;
- les FDTD : Finite Differences Time Domain ;
- les FEM : Finite Element Method ;
- les FDFD : Finite Difference Frequency Domain.

La méthode de l'EFIE classique est inenvisageable à cause du nombre considérable d'inconnues. Pour en réduire le nombre, il est possible de prendre en compte les conditions aux limites en changeant la fonction de Green (développement en modes). Cette fois, le calcul serait encore long puisque chaque coefficient de la matrice de Galerkin nécessiterait un nombre important d'évaluations du développement en modes.

Avec la méthode des différences finies dans le domaine temporel, la difficulté vient du bon facteur de qualité de la CRBM : le temps de calcul serait très long avant de pouvoir passer du domaine temporel au domaine fréquentiel.

La méthode des éléments finis est intéressante car elle autorise la conformité du maillage du brasseur. Toutefois, son implémentation aurait été plus difficile et ce n'est pas le but de ces travaux d'implémenter une méthode numérique.

Enfin, il reste la méthode des différences finies dans le domaine fréquentiel. Facile à mettre en œuvre, elle se pose directement du point de vue fréquentiel et la discrétisation de l'espace s'adapte bien à une cavité parallélépipédique. Cette méthode sera donc retenue même si sa pénalité est de conduire à un maillage du brasseur non conforme.

Dans cette partie, on va donc d'abord présenter la méthode de résolution des équations de Maxwell avec des conditions aux limites métalliques par la méthode des FDFD. Ensuite son application aux CRBM nous permettra d'obtenir les propriétés des amplitudes des modes guidés. Il sera alors possible de conclure sur les modèles a priori.

## 5.1 Les différences finies dans le domaine fréquentiel

Cette section a pour but d'explicitier le principe de la méthode de calcul numérique que l'on a choisie. Utiliser une méthode numérique signifie que les équations régissant le problème vont être résolues par une discrétisation finie des opérateurs et des fonctions qui apparaissent dans les équations. Dans notre étude, les équations qui interviennent sont des équations aux dérivées partielles. Leurs solutions changent selon les conditions aux limites qui dépendent de propriétés physiques et géométriques : dans le cas de la CRBM, les conditions aux limites seront fixées par les parois métalliques.

Plus précisément, le problème à résoudre est donnée par la figure 5.1. Il s'agit de calculer le champ dans la CRBM pour chaque position du brasseur. On présentera une formulation qui rendra le courant sur le brasseur également accessible.

Dans un premier temps le principe des différences finies en fréquentiel (FDFD) sera présenté dans son application aux équations de Maxwell. L'algorithme du calcul sera alors établi. Dans un second temps, les différences finies seront appliquées à la résolution de l'équation d'Helmholtz.

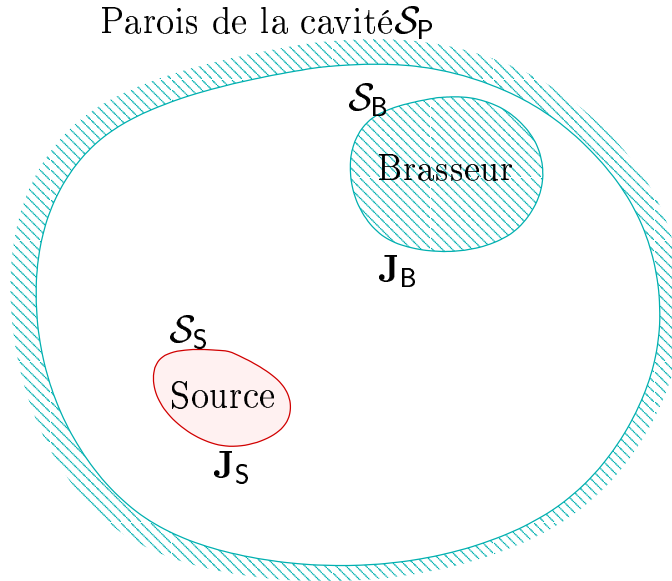


FIG. 5.1 – Définition des conditions aux limites

### 5.1.1 Mise en œuvre de la méthode des FDFD

Le champ électromagnétique que nous cherchons à calculer est forcément solution des équations de Maxwell à l'intérieur du domaine de calcul. Il faut également coupler à ces équations les conditions aux limites. Le système d'équations à résoudre est donné par :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Équations de Maxwell} & \begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{Source}} \\
 \text{rot } \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\
 \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\
 \text{div } \mathbf{H} &= 0
 \end{aligned} \\
 \text{Conditions aux limites} & \mathbf{E}_{\text{tan}}|_{\mathcal{S}_P+\mathcal{S}_B} = \mathbf{Z}_S\mathbf{J}_{\mathcal{S}_P+\mathcal{S}_B}
 \end{array}$$

On peut résumer toutes les équations de Maxwell sous la notation  $\mathbf{M}$ . Le système à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}}\right) &= \mathbf{J}_{\text{Source}} \\
 \mathbf{E}_{\text{tan}}|_{\mathcal{S}_P+\mathcal{S}_B} &= \mathbf{Z}_S\mathbf{J}_{\mathcal{S}_P+\mathcal{S}_B}
 \end{aligned}$$

Afin de résoudre ce système d'équations par la méthode des FDFD, il faut tout d'abord discrétiser l'espace et les opérateurs. Par la suite, une méthode de résolution de problèmes matriciels devra être utilisée. Enfin, les résultats de cette méthode seront considérés.

### Discrétisation

#### Opérateur de Maxwell

Les différences finies dans le domaine fréquentiel consistent à ne discrétiser que la dépendance spatiale des fonctions. Ceci signifie que chaque direction  $\eta$  (qui désigne alternativement les directions  $x$ ,  $y$  ou  $z$ ) est discrétisée selon des pas  $\Delta_\eta$ . Les champs sont alors échantillonnés en des points particuliers qui définissent une grille  $\mathbf{E}$  et une grille  $\mathbf{H}$ . Ces deux grilles sont parallélépipédiques, ce qui est adapté pour décrire des cavités rectangulaires.

Puisque l'espace est discrétisé, les opérateurs différentiels le sont aussi. Seul le premier ordre du développement de Taylor est utilisé. Si l'on décompose le  $rot \mathbf{H}$  autour d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$ , on obtient :

$$rot \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_y} [H_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - H_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)] - \frac{1}{\Delta_z} [H_y(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - H_y(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})] \\ \frac{1}{\Delta_z} [H_x(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - H_x(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})] - \frac{1}{\Delta_x} [H_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - H_z(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)] \\ \frac{1}{\Delta_x} [H_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - H_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)] - \frac{1}{\Delta_y} [H_x(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - H_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)] \end{pmatrix}$$

De même pour le  $rot \mathbf{E}$  autour d'un point de coordonnées  $(x', y', z')$ , on obtient :

$$rot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_y} [E_z(x', y' + \frac{\Delta y}{2}, z') - E_z(x', y' - \frac{\Delta y}{2}, z')] - \frac{1}{\Delta_z} [E_y(x', y', z' + \frac{\Delta z}{2}) - E_y(x', y', z' - \frac{\Delta z}{2})] \\ \frac{1}{\Delta_z} [E_x(x', y', z' + \frac{\Delta z}{2}) - E_x(x', y', z' - \frac{\Delta z}{2})] - \frac{1}{\Delta_x} [E_z(x' + \frac{\Delta x}{2}, y', z') - E_z(x' - \frac{\Delta x}{2}, y', z')] \\ \frac{1}{\Delta_x} [E_y(x' + \frac{\Delta x}{2}, y', z') - E_y(x' - \frac{\Delta x}{2}, y', z')] - \frac{1}{\Delta_y} [E_x(x', y' + \frac{\Delta y}{2}, z') - E_x(x', y' - \frac{\Delta y}{2}, z')] \end{pmatrix}$$

Puisque les équations de Maxwell couplent les inconnues  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , les grilles des points  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont décalées. En effet, si l'on considère pour une composante les rotationnels des équations des Maxwell discrétisées, le schéma de la figure 5.2 est obtenue.

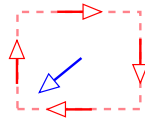


FIG. 5.2 – Résultat (au centre) du rotationnel discret

Par ailleurs, il faut positionner correctement les grilles par rapport au domaine de calcul. Le choix de la figure 5.3 a été retenu parce qu'il permet de faire coïncider des composantes tangentielles du champ électrique avec des conditions aux limites métalliques.

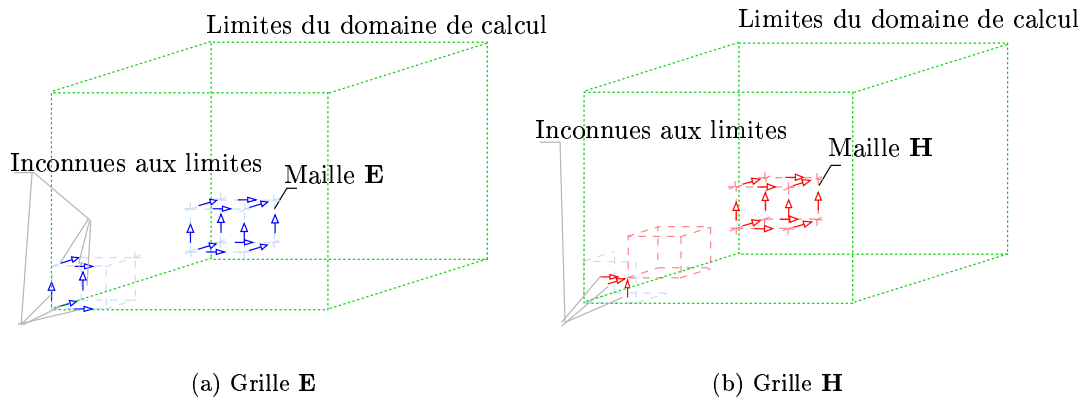
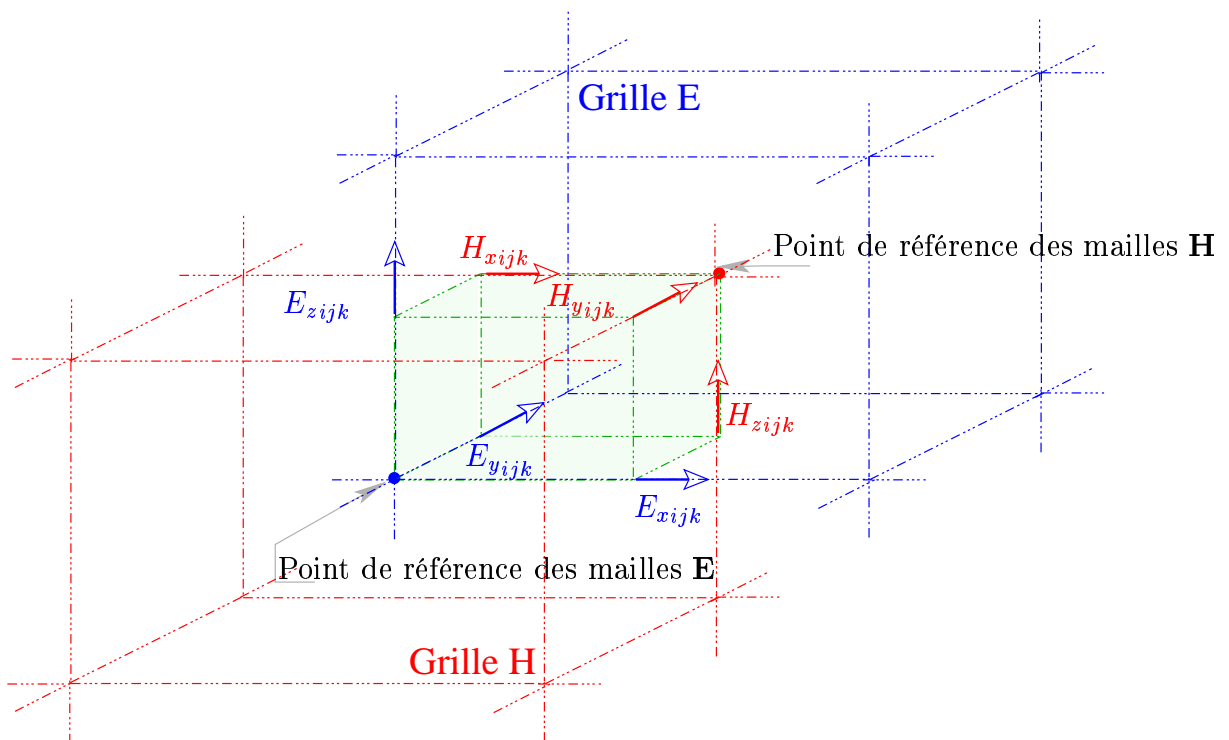


FIG. 5.3 – Discretisation de l'espace

Les mailles **E** et **H** ont les mêmes dimensions et sont décalées d'une demi-maille comme sur la figure 5.4.

FIG. 5.4 – Pour relier les champs **E** et **H**.

Avec cette numérotation, les équations de Maxwell deviennent alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta_y}(\mathbf{H}_{zijk} - \mathbf{H}_{zi(j-1)k}) - \frac{1}{\Delta_z}(\mathbf{H}_{yijk} - \mathbf{H}_{yij(k-1)}) - j\omega\varepsilon\mathbf{E}_{xijk} &= \mathbf{J}_{xijk}|_S \\
 \frac{1}{\Delta_z}(\mathbf{H}_{xijk} - \mathbf{H}_{xij(k-1)}) - \frac{1}{\Delta_x}(\mathbf{H}_{zijk} - \mathbf{H}_{z(i-1)jk}) - j\omega\varepsilon\mathbf{E}_{yijk} &= \mathbf{J}_{yijk}|_S \\
 \frac{1}{\Delta_x}(\mathbf{H}_{yijk} - \mathbf{H}_{y(i-1)jk}) - \frac{1}{\Delta_y}(\mathbf{H}_{xijk} - \mathbf{H}_{xi(j-1)k}) - j\omega\varepsilon\mathbf{E}_{zijk} &= \mathbf{J}_{zijk}|_S \\
 \frac{-1}{\Delta_y}(\mathbf{E}_{zijk} - \mathbf{E}_{zi(j+1)k}) + \frac{1}{\Delta_z}(\mathbf{E}_{yijk} - \mathbf{E}_{yij(k+1)}) + j\omega\mu\mathbf{H}_{xijk} &= 0 \\
 \frac{-1}{\Delta_z}(\mathbf{E}_{xijk} - \mathbf{E}_{xij(k+1)}) + \frac{1}{\Delta_x}(\mathbf{E}_{zijk} - \mathbf{E}_{z(i+1)jk}) + j\omega\mu\mathbf{H}_{yijk} &= 0 \\
 \frac{-1}{\Delta_x}(\mathbf{E}_{yijk} - \mathbf{E}_{y(i+1)jk}) + \frac{1}{\Delta_y}(\mathbf{E}_{xijk} - \mathbf{E}_{xi(j+1)k}) + j\omega\mu\mathbf{H}_{zijk} &= 0
 \end{aligned}$$

Tenir compte des propriétés du métal

Maintenant que l'opérateur de Maxwell a été discrétisé, il faut discrétiser les conditions aux limites :

$$\mathbf{E}_{\tan}|_{S_{PB}} = Z_S \mathbf{J}_{PB}$$

La grille du champ  $\mathbf{E}$  coïncide avec les limites du domaine de calcul. Ainsi, le champ électrique est tangentiel aux limites (figure 5.3). Afin de pouvoir comparer avec le modèle des modes guidés aléatoires, le métal sera considéré comme parfait. Dans ce cas, aux limites, toutes les composantes tangentielles du champ  $\mathbf{E}$  vont être forcées à la valeur nulle :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{xijk} = 0 \quad \forall \quad \{j = 0, k = 0, j = N_y, k = N_z\} \\
 \mathbf{E}_{yijk} = 0 \quad \forall \quad \{i = 0, k = 0, i = N_x, k = N_z\} \\
 \mathbf{E}_{zijk} = 0 \quad \forall \quad \{i = 0, j = 0, i = N_x, j = N_y\}
 \end{aligned}$$

Dans le contexte informatique, tenir compte des parois métalliques du brasseur à l'intérieur du volume de calcul revient à rectifier le calcul en rajoutant le courant induit sur les pales et à corriger le champ électrique tangentiel local. Pour relier les courants  $\mathbf{J}_B$  du brasseur aux champs électriques tangentiels locaux  $\mathbf{E}_{\tan B}$ , la condition aux limites métallique est appliquée. Elle définit une matrice de passage des courants vers le champ :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{E}} : \mathbf{E}_{\eta_{ijk}} = Z_S \mathbf{J}_{\eta_{ijk}} \quad \forall \quad \{(i, j, k, \eta) : \vec{r}_{ijk\eta} \in S_B\}$$

où

- $\eta$  désigne une composante  $x$ ,  $y$  ou  $z$  ;
- et  $\vec{r}_{ijk\eta}$  les coordonnées de la composante  $\mathbf{E}_{\eta_{ijk}}$ .

En ce qui concerne le champ  $\mathbf{H}$ , la grille est telle que toutes les inconnues sont internes. Les composantes normales aux parois (aux limites du domaine de calcul) doivent s'annuler, elles ne sont pas calculées.

Le brasseur sera considéré comme une plaque infiniment mince. Il sera donc représenté par un courant superficiel défini par une discontinuité du champ  $\mathbf{H}$  :

$$[\vec{n} \wedge \mathbf{H}]_{-}^{+}|_{\mathcal{S}_B} = \mathbf{J}_B$$

Pour représenter cette relation entre le courant  $\mathbf{J}_B$  induit sur les parois du brasseur et le champ  $\mathbf{H}$  local, on l'inscrit comme un courant local dans les équations de Maxwell :

$$P_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{J}} : \text{rot}_\eta \mathbf{H}_{ijk} - j\omega \varepsilon \mathbf{E}_{\eta_{ijk}} - \mathbf{J}_{\eta_{ijk}} = 0 \quad \forall \quad \{(i, j, k, \eta) \setminus \vec{r}_{ijk\eta} \in \mathcal{S}_B\}$$

Système discret complet

Le système matriciel complet à résoudre est défini comme suit :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P_{\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{E}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbb{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{internes} \\ \mathbf{H}_{internes} \\ \mathbf{J}_B \\ \mathbf{E}_{limites} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on nomme la matrice  $[\mathbf{A}]$ , le vecteur des inconnues  $(x)$  et le second membre  $(y)$ , le système à résoudre est du type :

$$[\mathbf{A}](x) = (y)$$

### 5.1.2 Équation de Helmholtz

L'équation de Helmholtz est obtenue lorsqu'on réapplique l'opération *rot* sur les équations de Maxwell faisant déjà intervenir cet opération. On trouve ainsi la même équation pour le champ  $\mathbf{E}$  que pour le champ  $\mathbf{H}$ .

Dans notre étude on peut travailler seulement sur le champ  $\mathbf{E}$  parce qu'il lui est appliquée toutes les conditions aux limites. A tout moment, il sera possible de déduire le champ  $\mathbf{H}$  en appliquant l'équation suivante :

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot } \mathbf{E}$$

Détaillons l'établissement de l'équation de Helmholtz à partir des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{E} &= -j\omega\mu \text{rot } \mathbf{H} \\ \text{rot rot } \mathbf{E} &= -j\omega\mu \{j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_B\} \\ \{\text{rot rot} - k_0^2\} \mathbf{E} &= -j\omega\mu(\mathbf{J}_S + \mathbf{J}_B) \end{aligned}$$

Le membre gauche de cette dernière équation sera appelé l'opérateur de Helmholtz que l'on résumera sous la notation  $\mathbf{H}$ .

Attention, en principe l'équation de Helmholtz est défini après simplification de l'opération  $rot\ rot$ . En effet, il peut se développer et se simplifier sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} rot\ rot &= \vec{grad}\ div - \Delta & \vec{grad}\ div &= 0 \text{ grâce aux propriétés de } \mathbf{E} \\ &= -\Delta \end{aligned}$$

Dans notre cas, les équations n'ont pas encore été résolues, et la divergence nulle du champ  $\mathbf{E}$  n'est pas encore garantie. Au contraire, conserver l'opération complète  $rot\ rot$  permet de garantir cette égalité. En effet, dans toutes la zone de calcul où il n'y a pas de sources, ni de conditions aux limites, le raisonnement suivant peut être suivi :

$$\begin{aligned} \{rot\ rot - k_0^2\}\mathbf{E} &= 0 \\ div(\{rot\ rot - k_0^2\}\mathbf{E}) &= 0 \\ k_0^2\ div(\mathbf{E}) &= div(rot\ rot\ \mathbf{E}) & \text{or } div\ rot\ \vec{A} &= 0 \quad \forall \vec{A} \\ k_0^2\ div(\mathbf{E}) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, notre opérateur  $\mathbf{H}$  garanti les propriétés du champ électromagnétique. Les conditions aux limites sont identiques à celles énoncées précédemment. Donc, le nouveau système à résoudre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{H}] & [\mathbf{P}_{\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{E}}] & 0 \\ [\mathbf{P}_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{J}}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{internes} \\ \mathbf{J}_B \\ \mathbf{E}_{limites} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 5.1.3 Application

Dans cette sous-section, la résolution de l'équation de Helmholtz est présentée. Tout d'abord, l'algorithme que l'on a utilisé est introduit puis les résultats seront exposés.

#### Méthode itérative

La méthode utilisée pour résoudre le système matriciel est une méthode itérative. Il s'agit d'une méthode du type bi-gradient conjugué [103]. Son principe est de minimiser un résidu. Pour une itération donnée, le second membre est déterminé lorsque le vecteur solution trouvé à l'itération précédente est injecté dans l'opérateur. La différence entre ce second membre et le vrai second membre donne le résidu.

La méthode du bi-gradient conjugué cherche à minimiser le résidu dans des directions privilégiées. Ces directions sont déduites d'un calcul de gradient.

Le calcul s'arrête si l'erreur obtenue est inférieure à l'erreur exigée ou si le nombre maximal d'itérations est dépassé.



Pour cette méthode de résolution, il faut exactement fournir l'algorithme suivant :

$$(y) \leftarrow \beta(y) + \alpha[A](x)$$

Où :

- $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients complexes ;
- $(y)$  et  $(x)$  des vecteurs fournis par l'algorithme du bi-gradient.

Il est évident que l'opérateur  $A$  n'est pas stocké en mémoire et l'on calcule  $[A](x)$  en utilisant sa structure creuse.

### Application

Pour cette simulation, un dipôle a joué le rôle de la source dans la CRBM ( $1.2 \times 1.2 \times 2.4 \text{ m}^3$ ). Pour être inséré dans le maillage et pour le faire coïncider à des arêtes  $\mathbf{E}$ , il a été légèrement décalé : en rouge, il s'agit du dipôle prescrit, en vert de l'interpolé. Toutefois son emplacement n'est pas modifié de façon sensible.

Le brasseur a été simplifié au maximum par une simple pale mince qui a pour dimensions  $0.6 \times 0.75 \text{ m}^2$ . Sur les figures 5.5, la discrétisation de la pale (grille jaune) et son insertion dans le maillage l'a également légèrement déformée, elle est rendue infiniment mince. Ceci, n'est pas gênant tant que la pale est parallèle à l'une des directions. Quand on la fera tourner, elle sera représentée en «marches d'escalier». Plus le maillage sera fin et mieux sera décrit la pale.

Pour les calculs, deux fréquences sont examinées : 30 MHz et 400 MHz. La grille des champs  $\mathbf{E}$  a été définie comme suit : 16 mailles dans les directions  $x$  et  $y$  et 32 dans la direction  $z$ , ceci correspond à un maillage en  $\frac{\lambda}{10}$  pour la fréquence de 400 MHz. En termes de modes guidés, pour la première fréquence, le champ dans la cavité n'est dû qu'à des modes évanescents, alors que pour la deuxième fréquence, il y a quelques modes propagatifs.

Sur la figure 5.6, le courant sur la pale de brasseur est visualisé pour ces deux fréquences. En basse fréquence (30 MHz), le courant sur la pale suit bien la structure du champ rayonné par le dipôle. À 400 MHz, il apparaît la structure de modes, à la fois sur le champ et sur la plaque.

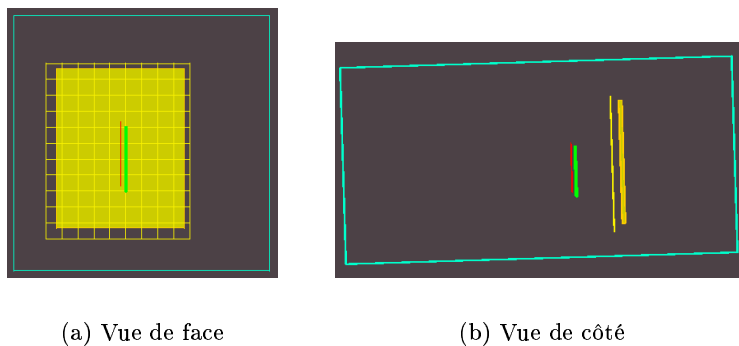


FIG. 5.5 – Configuration du calcul

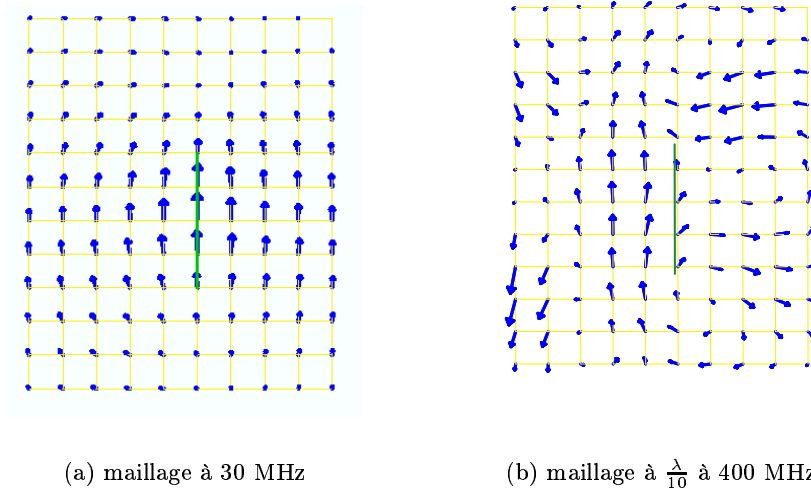


FIG. 5.6 – Allure du courant sur la plaque (dans le plan de la feuille) pour des maillages différents

## 5.2 Calcul des amplitudes des modes guidés

Le but de ce paragraphe est de relier le calcul exact au modèle des modes guidés aléatoires. Une méthode va être proposée pour déduire le développement du champ en modes guidés à partir de la connaissance du champ exact ou du courant sur le brasseur.

Pour cette étude, il faudra alors identifier la zone de mesure dans laquelle le développement du champ sur la base des modes guidés sera valable. Dans ce cas, la zone où se trouvent l'antenne et le brasseur s'identifie naturellement à une zone de diffraction (figure 5.7).

Nous allons donc égaler le champ développé sur les modes guidés avec le champ exact sur une section du guide que l'on a appelée  $\mathcal{S}_1$  pour «interface».

Les modes guidés choisis pour décrire le champ de la zone de mesure sont stationnaires selon l'axe  $z$ . Le champ électrique s'écrit pour chaque mode  $mn$  :

$$\mathbf{e}_{mn}^{\text{TM}} = \frac{2\beta E_0}{k_c^2} \sin(\beta z) \vec{\nabla}_t(e_z) + 2E_0 \cos(\beta z) e_z \vec{u}_z$$

$$\mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}} = \frac{2k_0 Z_0 H_0}{k_c^2} \sin(\beta z) \vec{u}_z \wedge \vec{\nabla}_t(h_z)$$

où :

- $\vec{u}_z$  est la direction de propagation du mode ;
- $e_z$  et  $h_z$  donnent les variations transversales du champ.

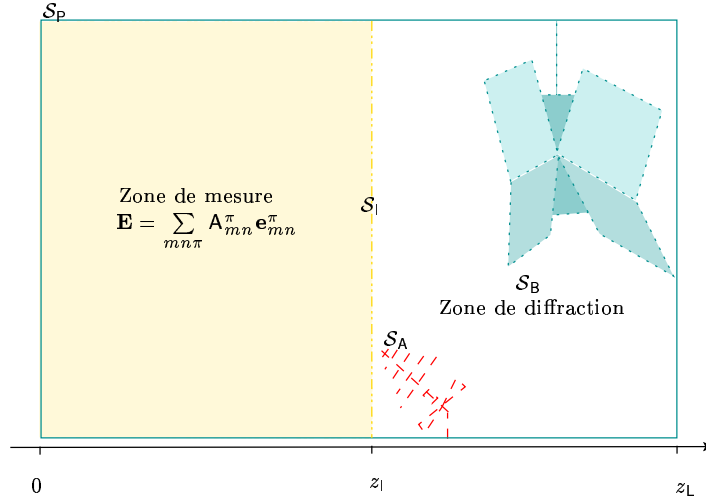


FIG. 5.7 – Configuration à modéliser

Le principal intérêt de ces modes est de former une base orthogonale dans un espace muni du produit scalaire défini comme suit :

$$\langle \mathbf{e}_{mn}^\pi | \mathbf{h}_{pq}^\tau \rangle = \int_S (\mathbf{e}_{mn}^\pi \wedge \mathbf{h}_{pq}^\tau) \cdot \vec{n} dS = N_{mn}^\pi \delta_{m-p} \delta_{n-q}$$

où :

- $S$  est la section du guide ;
- $mn$  et  $pq$  identifient les ordres des modes ;
- $\pi$  et  $\tau$  identifient les polarisations soit TE soit TM.
- $N_{mn}^\pi$  est la norme du produit scalaire.

Le produit scalaire est nul dès que les ordres  $mn$  et  $pq$  sont différents. Quand ils sont identiques, la norme prend les valeurs suivante :

$$N_{mn}^{\text{TE}} = \frac{-jk_0 \beta Z_0 H_0^2}{k_c^2} L_x L_y \sin(2\beta z) \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } (m \neq 0, n = 0) \text{ ou } (m = 0, n \neq 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_{mn}^{\text{TM}} = \frac{-jk_0 \beta E_0^2}{2Z_0 k_c^2} L_x L_y \sin(2\beta z) \begin{cases} 1 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous allons utiliser cette propriété pour calculer les amplitudes des modes modes à partir du champ exact. Une fois cette méthode établie, nous l'appliquerons pour plusieurs configurations de brasseur. Nous pourrons alors déduire les propriétés statistiques des modes guidés.

### 5.2.1 Expression des amplitudes des modes guidés

Pour comparer le champ total à un mode en particulier, le principe de réciprocité va une fois de plus nous être utile. Puisque le champ est connu (du moins sa structure)

dans la zone de mesure, il est également connu sur la surface  $\mathcal{S}_1$ , interface avec la zone de diffraction.

Nous allons travailler dans cette dernière zone de la CRBM. La configuration de référence sera donc donnée en absence de l'antenne et du brasseur. La deuxième est l'état vrai du champ dans la CRBM.

Dans l'état <sup>A</sup> (figure 5.8(a)), un champ solution des équations de Maxwell peut être un mode guidé mais cette fois-ci court-circuité en  $z_L = L_z$ . Le champ électrique  $\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi$  correspondant s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{\text{TM}} = \frac{-2\beta\mathbf{E}_0}{k_c^2} \sin(\beta(L_z - z)) \vec{\nabla}_t(e_z) - 2\mathbf{E}_0 \cos(\beta(L_z - z)) e_z \vec{u}_z$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{\text{TE}} = \frac{2k_0 Z_0 H_0}{k_c^2} \sin(\beta(L_z - z)) \vec{u}_z \wedge \vec{\nabla}_t(h_z)$$

Dans cette écriture,  $e_z$  et  $h_z$  (solutions des équations d'Helmholtz) décrivent les évolutions transversales des champs, leurs expressions sont identiques quel que soit le sens de propagation du mode, ce sont donc les mêmes que pour les modes court-circuités en  $z = 0$ . Il faut aussi rajouter, que, dans cette expression, le vecteur  $\vec{u}_z$  a été choisi dans le même sens que pour les modes guidés court-circuités en  $z = 0$ .

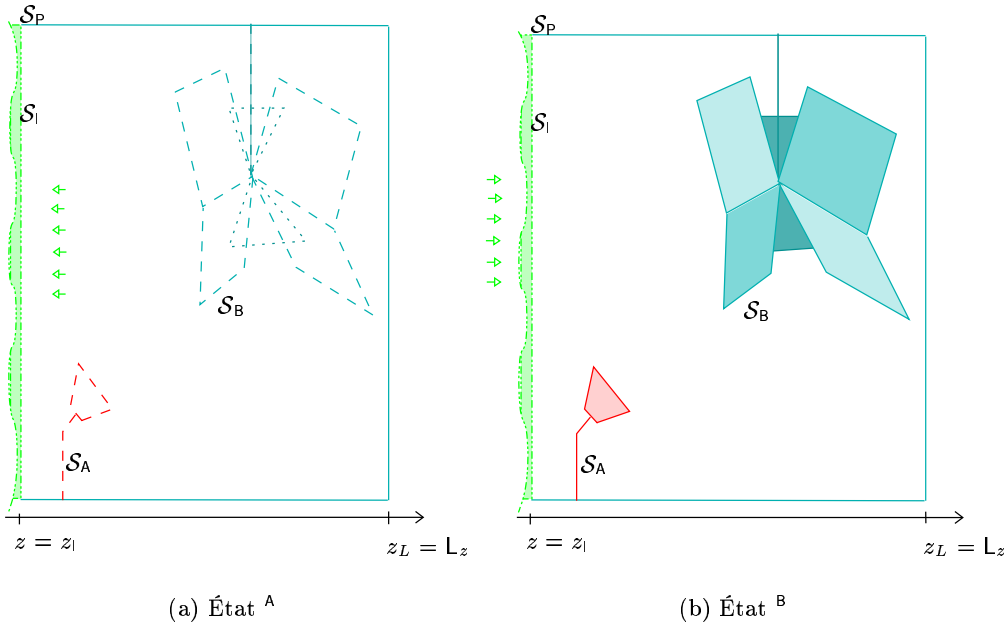


FIG. 5.8 – Les deux états de la réciprocité

Dans l'état <sup>B</sup> (figure 5.8(b)), c'est la configuration réelle : le champ existant dans la CRBM en présence du brasseur et de l'antenne émettrice. Le champ se développe

alors sur la base des modes guidés court-circuités en  $z = 0$ . Sur la surface  $\mathcal{S}_I$  il s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^B &= \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \mathbf{e}_{pq}^\tau \\ \mathbf{H}^B &= \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \mathbf{h}_{pq}^\tau\end{aligned}$$

Puisque le domaine que nous étudions est sans source, nous pouvons écrire :

$$\int_{\mathcal{S}_P + \mathcal{S}_B + \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_I} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = 0$$

Il reste maintenant à vérifier si des modes propagatifs dans des sens différents sont orthogonaux et il reste aussi le détail des intégrales sur chacune des surfaces.

### Des modes orthogonaux

Les modes court-circuités en  $L_z$  jouent le rôle ici de fonctions «test». Ils vont nous servir à «sélectionner» un mode pour ne retenir que son amplitude. Il faut donc vérifier si le comportement de ces fonctions dans le produit scalaire de la base des modes court-circuités en  $0$  est cohérent.

La première étape est de calculer ce nouveau produit scalaire pour des ordres  $mn$  et  $pq$  différents. Or, les modes court-circuités en  $z_L = L_z$  ont la même variation transversale que les modes court-circuités en  $z = 0$ . Et le produit scalaire de cette base consiste à intégrer sur la section transversale. Ainsi, on trouve que ces nouveaux produits sont nuls pour des ordres différents.

Considérons maintenant, pour le même ordre, les produits croisés du type  $\langle \mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}} | \tilde{\mathbf{h}}_{pq}^{\text{TM}} \rangle$ . Nous avons constaté dans le chapitre 4 que les modes modes TE étaient portés par des vecteur  $\vec{u}_\varphi$  et les modes TM par des vecteur  $\vec{u}_\theta$ . Ceci reste vrai pour les modes court-circuités en  $z_L = L_z$ . En effet, si leur sens de propagation a changé, ce n'est pas le cas pour leur direction. Les vecteurs  $\vec{u}_\varphi$  et  $\vec{u}_\theta$  associés ont eu aussi gardés la même direction pour des sens différents. Nous avons toujours orthogonalité des modes «croisés» (TE/TM)(figure 5.9).

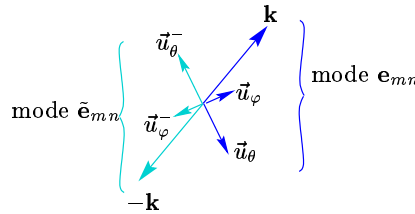


FIG. 5.9 – Orthogonalité des modes

Il reste maintenant quatre intégrales à évaluer :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{\text{TE}} | \mathbf{h}_{mn}^{\text{TE}} \rangle & \quad \langle \mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}} | \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^{\text{TE}} \rangle \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{\text{TM}} | \mathbf{h}_{mn}^{\text{TM}} \rangle & \quad \langle \mathbf{e}_{mn}^{\text{TM}} | \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^{\text{TM}} \rangle\end{aligned}$$

Nous avons vu l'expression des normes  $N^{\text{TE}}$  et  $N^{\text{TM}}$  du produit scalaire. Le calcul des produits restants amène aux mêmes étapes que pour le calcul des normes. La seule différence vient de l'expression de la dépendance en  $z$  qui change d'un terme à l'autre du produit scalaire. Après calculs, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{\text{TE}} | \mathbf{h}_{pq}^{\text{TE}} \rangle &= \frac{jk_0\beta Z_0 H_0^2}{k_c^2} L_x L_y [\sin(\beta L_z) - \sin(2\beta z - \beta L_z)] K_{mn}^{\text{TE}} \\ \langle \mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}} | \tilde{\mathbf{h}}_{pq}^{\text{TE}} \rangle &= \frac{-jk_0\beta Z_0 H_0^2}{k_c^2} L_x L_y [\sin(\beta L_z) + \sin(2\beta z - \beta L_z)] K_{mn}^{\text{TE}} \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{\text{TM}} | \mathbf{h}_{pq}^{\text{TM}} \rangle &= \frac{jk_0\beta E_0^2}{2Z_0 k_c^2} L_x L_y [\sin(\beta L_z) - \sin(2\beta z - \beta L_z)] K_{mn}^{\text{TM}} \\ \langle \mathbf{e}_{mn}^{\text{TM}} | \tilde{\mathbf{h}}_{pq}^{\text{TM}} \rangle &= \frac{-jk_0\beta E_0^2}{2Z_0 k_c^2} L_x L_y [\sin(\beta L_z) + \sin(2\beta z - \beta L_z)] K_{mn}^{\text{TM}} \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned} K_{mn}^{\text{TE}} &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0, \\ 1 & \text{si } (m \neq 0, n = 0) \text{ ou } (m = 0, n \neq 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ K_{mn}^{\text{TM}} &= \begin{cases} 1 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons dégagé les propriétés de ces produits scalaires, nous pouvons passer à l'étude de chaque surface.

### Rôle des surfaces

La surface  $\mathcal{S}_p$  est présente dans l'état <sup>A</sup> et l'état <sup>B</sup>. Les conditions aux limites métalliques sont appliquées chaque fois. Cette intégrale s'annule.

$$\int_{\mathcal{S}_p} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = 0$$

Sur la surface  $\mathcal{S}_1$ , nous utilisons l'orthogonalité des modes.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_1} (\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi \wedge \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \mathbf{h}_{pq}^\tau - \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \mathbf{e}_{pq}^\tau \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^\pi) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} &= \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \int_{\mathcal{S}_1} (\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi \wedge \mathbf{h}_{pq}^\tau - \mathbf{e}_{pq}^\tau \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^\pi) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} \\ &= A_{mn}^\pi \int_{\mathcal{S}_1} (\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi \wedge \mathbf{h}_{mn}^\pi - \mathbf{e}_{mn}^\pi \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^\pi) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} \\ &= A_{mn}^\pi \langle \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi | \mathbf{h}_{mn}^\pi \rangle - \langle \mathbf{e}_{mn}^\pi | \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^\pi \rangle \end{aligned}$$

Ici on peut distinguer les cas TE et TM : on se réfère aux résultats du paragraphe

précédent et on trouve :

$$\int_{S_1} (\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{\text{TE}} \wedge \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \mathbf{h}_{pq}^\tau - \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \mathbf{e}_{pq}^\tau \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^{\text{TE}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} dS = A_{mn}^{\text{TE}} \mathbf{K}_{mn}^{\text{TE}} \frac{2jk_0\beta Z_0 H_0^2}{k_c^2} L_x L_y \sin(\beta L_z)$$

$$\int_{S_1} (\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{\text{TM}} \wedge \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \mathbf{h}_{pq}^\tau - \sum_{pq\tau} A_{pq}^\tau \mathbf{e}_{pq}^\tau \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^{\text{TM}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} dS = A_{mn}^{\text{TM}} \mathbf{K}_{mn}^{\text{TM}} \frac{jk_0\beta E_0^2}{2Z_0 k_c^2} L_x L_y \sin(\beta L_z)$$

Ce résultat est intéressant puisqu'il ne dépend pas de la coordonnée  $z_1$  tant que les conditions émises sont satisfaites.

Sur les surfaces métalliques  $S_A$  et  $S_B$  présentes dans l'état  $B$ , nous pouvons écrire que  $\mathbf{E}^B = \mathbf{E}_{norm}^B + Z_S(\tilde{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}^B)$ . Ceci permet de déduire les écritures suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{S_B+S_A} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \tilde{\mathbf{n}} dS &= \int_{S_B+S_A} (\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^\pi) \cdot \tilde{\mathbf{n}} dS \\ &= \int_{S_B+S_A} -(\tilde{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi + (\tilde{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot Z_S(\tilde{\mathbf{n}} \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^\pi) dS \\ &= \int_{S_B+S_A} (\tilde{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot (Z_S(\tilde{\mathbf{n}} \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^\pi) - \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi) dS \end{aligned}$$

En supposant que le métal de ces surfaces est parfait ( $Z_S \rightarrow 0$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{S_B+S_A} (\mathbf{E}^A \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \mathbf{H}^A) \cdot \tilde{\mathbf{n}} dS &= - \int_{S_B+S_A} (\tilde{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}^B) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi dS \\ &= - \int_{S_B+S_A} \mathbf{J}^B \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi dS \end{aligned}$$

### Expression des amplitudes

En regroupant les expressions des intégrales que l'on vient d'analyser, nous obtenons l'expression des amplitudes des modes court-circuités en  $z = 0$ , qui décrivent le champ de la zone de mesure :

$$A_{mn}^{\text{TE}} = \frac{k_c^2 \mathbf{K}_{mn}^{\text{TE}'}}{2jk_0\beta Z_0 H_0^2 L_x L_y \sin(\beta L_z)} \left\{ \int_{S_B} \mathbf{J}^B \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi dS + \int_{S_A} \mathbf{J}^B \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi dS \right\}$$

$$A_{mn}^{\text{TM}} = \frac{2Z_0 k_c^2 \mathbf{K}_{mn}^{\text{TM}'}}{jk_0\beta E_0^2 L_x L_y \sin(\beta L_z)} \left\{ \int_{S_B} \mathbf{J}^B \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi dS + \int_{S_A} \mathbf{J}^B \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\pi dS \right\}$$

Où :

$$\mathbf{K}_{mn}^{\text{TE}'} = \begin{cases} 2 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0, \\ 1 & \text{si } (m \neq 0, n = 0) \text{ ou } (m = 0, n \neq 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{mn}^{\text{TM}'} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ces expressions,  $\mathbf{J}^B$  est le courant sur les surfaces  $\mathcal{S}_B$  et  $\mathcal{S}_A$  pour l'état vrai.

Sur l'antenne, comme celle-ci fonctionne en émission, sa distribution de courant n'est pas perturbée par la présence des parois parce qu'il s'agit d'un dipôle.

Sur le brasseur, il reste à connaître le courant sur le brasseur. C'est ici que l'on va utiliser la méthode des différences finies exposées plus haut.

**Remarque**

Si l'on considère n'importe quelle section de la zone de mesure, on peut toujours raisonner comme sur la surface  $\mathcal{S}_1$ . Dans ce cas on a :

$$A_{mn}^{TE} = \frac{k_c^2 K_{mn}^{TE'}}{2jk_0\beta Z_0 H_0^2 L_x L_y \sin(\beta L_z)} \int_{\mathcal{S}_1} (\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{TE} \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^{TE}) \cdot \vec{n} d\mathcal{S}$$

$$A_{mn}^{TM} = \frac{2Z_0 k_c^2 K_{mn}^{TM'}}{jk_0\beta E_0^2 L_x L_y \sin(\beta L_z)} \int_{\mathcal{S}_1} (\tilde{\mathbf{e}}_{mn}^{TM} \wedge \mathbf{H}^B - \mathbf{E}^B \wedge \tilde{\mathbf{h}}_{mn}^{TM}) \cdot \vec{n} d\mathcal{S}$$

Dans ce cas, tout le second membre est connu, puisque l'on peut avoir accès au champ  $\mathbf{E}$  grâce aux différences finies.

**5.2.2 Utilisation des FDFD et résultats**

Pour l'instant, les calculs ne sont que des premières estimations avant des calculs plus précis et systématiques. Par manque de temps, peu de configurations ont été calculées. Le cas simulé est celui-ci : on conserve la simple pale pour simuler le brasseur et on calcule le champ pour la fréquence de 2 GHz. Faire tourner la pale avec un schéma différences finies revient à la déformer. Les différentes configurations simulées à 2 GHz sont présentées sur la figure 5.10. Pour cette fréquence, la maille a une longueur de  $\frac{\lambda}{5}$ .

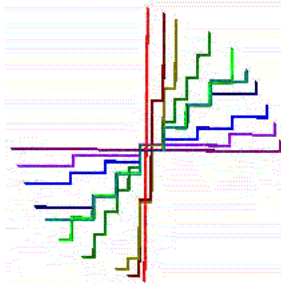


FIG. 5.10 – Différentes orientations de la pale pour le calcul

Ce nombre de configurations est loin d'être suffisant pour faire une estimation correcte du comportement statistique. Toutefois, il nous donne une première idée des résultats du calcul.

Si l'amplitude de chaque mode est considérée pour chaque orientation de la pale, elle est systématiquement plus importante pour les modes d'ordres élevés.



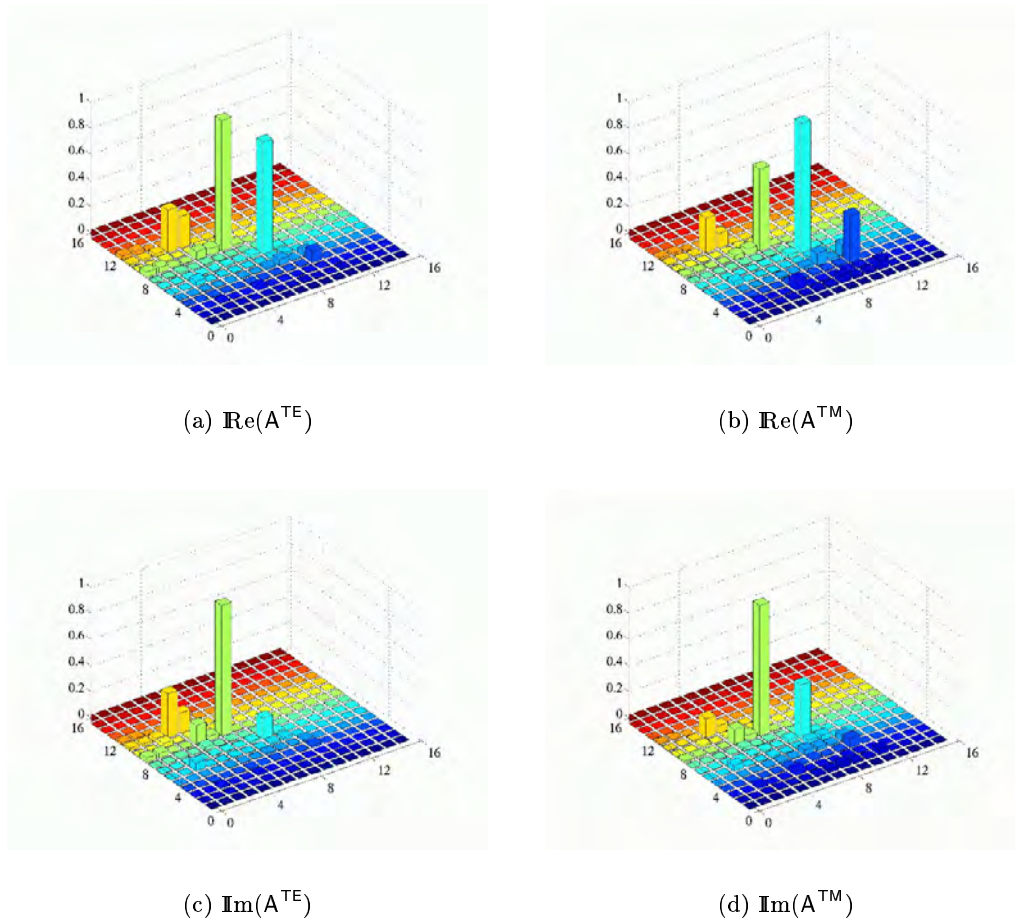
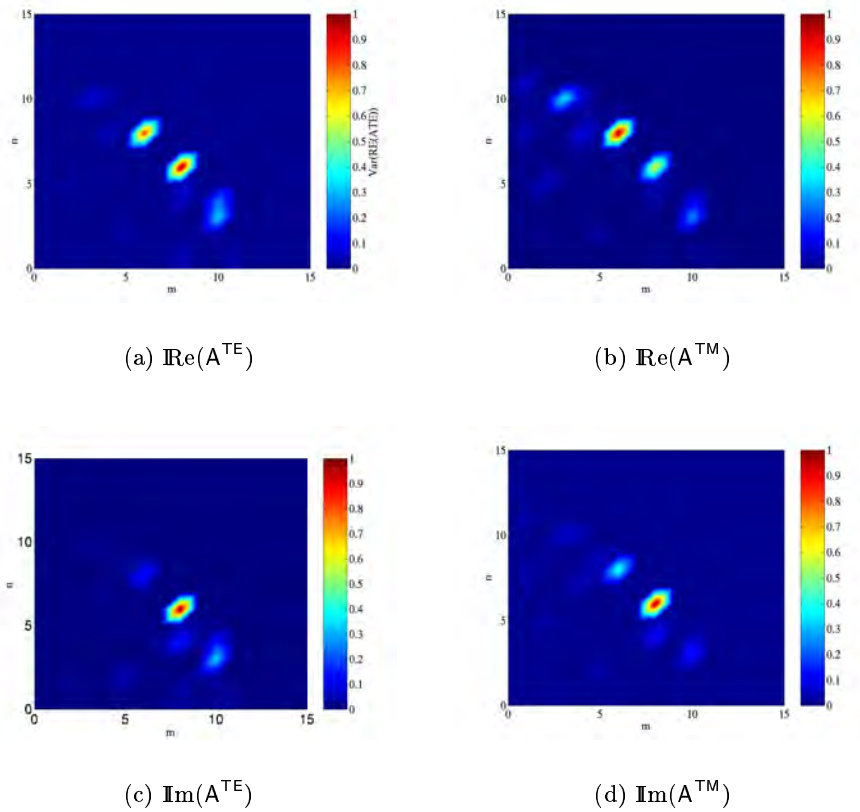


FIG. 5.11 – Variances des composantes des amplitudes  $A^{\pi}_{mn}$

Si on calcule la variance des parties réelles et imaginaires de ces premières amplitudes calculées, la tendance est la même.

Sur la figure 5.11, ces variances sont représentées en fonction des ordres  $m$  et  $n$  qui varient chacun entre 0 et 16. Si l'on considère ces figures avec une vue de «dessus» (figure 5.12), les amplitudes les plus importantes décrivent un cercle, ce cercle correspond au cercle pour lequel  $k_c = k_0$ . À l'intérieur de ce cercle, les amplitudes ont un amplitude décroissante lorsqu'on se rapproche du centre. À l'extérieur, toutes les valeurs sont nulles, c'est le domaine des modes évanescents que l'on n'a pas pris en compte dans ce modèle.

FIG. 5.12 – Variances des composantes des amplitudes  $A^{\pi}_{mn}$ 

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la méthode des différences finies et sa mise en œuvre.

Nous avons également établi une méthode simple pour calculer de façon rigoureuse les amplitudes des modes guidés décrivant le champ dans la zone de mesure. Elle pourra prendre en compte à terme un brasseur plus réaliste que celui que nous avons simulé.

Les premiers calculs semblent confirmer les hypothèses sous-jacentes au modèle a priori des modes guidés aléatoires (chapitre 4) : pour chaque orientation de la pale, les amplitudes des modes d'ordre élevés (pour lesquels  $k_c$  est très proche de  $k_0$ ), les amplitudes sont bien plus importantes que celles des autres modes.

Toutefois, il faudrait faire des simulations de façon plus systématique et avec un maillage plus fin d'obtenir des résultats plus concluants. Il serait également souhaitable de calculer ces amplitudes pour des fréquences plus élevées.

# Conclusion

Le but de ces travaux de thèse a été d'analyser le couplage du champ électromagnétique des chambres réverbérantes à brassage de modes (CRBM) sur les systèmes électroniques. L'étude s'est concentrée sur les systèmes linéaires en régime harmonique et testés avec le brassage mécanique en mode «tuning».

La première étape a été de modéliser le couplage déterministe des systèmes sous ses deux formes : le générateur équivalent de Thévenin  $V_{Th}$  et les perturbations des paramètres  $S$  induites par une onde incidente et /ou un changement de l'environnement. À cette fin, le principe de réciprocité a été utilisé pour établir une représentation intégrale du couplage. Celle-ci dépend du champ existant en absence du système et de la distribution de courant lorsque le système rayonne en espace libre quand on lui a inséré un générateur de courant sur le port que l'on considère.

Le couplage a également été étudié en présence des parois de la CRBM et du brasseur. Dans ce cas, le couplage distingue un couplage direct entre antennes et la rétroaction des parois (y compris le brasseur). Ceci a permis de justifier le protocole de mesure habituellement utilisé. Si l'on veut privilégier l'ambiance aléatoire de la CRBM due aux différentes configurations du brasseur, l'antenne de réception et le système sous test ne doivent pas être en regard.

La deuxième étape a été d'étudier le couplage dans un milieu aléatoire. Ce couplage entre l'antenne d'émission et le système sous test dépend des propriétés de diffraction du milieu. L'opérateur de diffraction de la CRBM a alors été introduit. Cet opérateur décrit comment l'énergie que l'on envoie dans le milieu de la CRBM est réfléchi dans la zone de mesure. Si pour chacune de ces configurations le champ de la zone de mesure varie, il a été choisi de le développer sur une base fixe et orthonormale d'ordre  $N$ . Alors on peut caractériser l'opérateur de diffraction à travers ses vecteurs propres (ou modes de résonance de la cavité) exprimés dans cette base. Si le milieu représente une CRBM idéale, on a pu démontrer que les coefficients des fonctions de base suivent une loi «isotrope d'ordre  $N$ ». Ceci veut dire que la somme de ces vecteurs de base est un vecteur uniformément répartie sur la sphère unité (pour une énergie unitaire). Cette loi converge rapidement vers la loi normale, et permet de démontrer que si le brassage est de bonne qualité alors l'énergie sera équirépartie sur toutes les directions et les variances des coefficients de la matrice de diffraction sont liés.

L'étude probabiliste a aussi permis d'établir que si l'on considère la CRBM comme un quadripôle constitué de l'antenne d'émission et du système de réception à l'intérieur de la CRBM. La même loi de probabilité que celle du champ se retrouve sur les

ports d'entrée de ce quadripôle. La même relation entre les coefficients de la matrice de diffraction se retrouve sur la matrice  $[S]$  de ce quadripôle. On peut alors proposer qu'une méthode pour qualifier une bonne chambre réverbérante est de vérifier cette relation dans la mesure.

Dans un second lieu, l'analyse des paramètres  $S$  a abouti à plusieurs résultats. La CRBM peut être considérée comme un quadripôle réciproque. Si la CRBM propose un bon brassage, les paramètres moyens d'adaptation  $S_{ji}$  sont identiques à ceux de l'espace libre.

Puisque dans une CRBM de bonne qualité, les paramètres de couplage suivent la même loi de probabilité que celle de la matrice de diffraction, alors le seul paramètre à déterminer n'est plus que la variance de ce couplage. Il a alors fallu modéliser cette covariance du champ dans la CRBM afin d'obtenir le couplage.

La première possibilité a été de reprendre le modèle de Hill d'ondes planes isotropes. La covariance spatiale de ce modèle est quasiment une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont identiques. Ce modèle a été généralisé en reliant la puissance moyenne reçue par un système quelconque (plutôt que seulement le dipôle traité par Hill) à la variance du champ. Ceci a ajouté une mesure de calibration au protocole de mesure. Finalement, si ce modèle représente bien le comportement isotrope d'une CRBM idéale, il ne tient pas compte des effets des parois de la cavité. Il ne nous donne pas d'idée des limites basses fréquences de l'utilisation des CRBM.

Par conséquent, un second modèle a été introduit : on a choisi de représenter le champ dans la zone de mesure de la CRBM sur la base orthonormale complète des modes guidés. Seulement les modes propagatifs ont été pris en compte. Ce modèle revient à simuler un champ aléatoire à l'intérieur d'un guide semi-infini. Il est alors établi que le champ peut être représenté par des ondes planes corrélées huit par huit, ce qui met en évidence le rôle des parois. Avec ce modèle, simuler une énergie équirépartie sur toutes les directions consiste à imposer une amplitude plus importante sur les modes d'ordre élevé parce qu'ils correspondent à des directions moins nombreuses. Ainsi on parle d'un champ aléatoire pseudo-isotrope ou modes guidés aléatoires. Plus haut en fréquence, le couplage issu des modes guidés ne dépend plus de la position du système dans la cavité et donne des résultats similaires à ceux du modèle isotrope : les résultats sont peu différents de la mesure. Toutefois, en basse fréquence, le couplage qu'il produit est sous-estimé par rapport au couplage mesuré. Ceci semble dû à l'absence des modes évanescents qui pourraient jouer un rôle important en basse fréquence en rapport avec la taille du système testé.

C'est pourquoi la troisième partie a proposé de retrouver la répartition énergétique des modes guidés en simulant de façon «rigoureuse» le champ existant dans une CRBM. Nous avons alors étudié la méthode des différences finies et leur mise en œuvre aux travers des équations de Maxwell et l'équation de Helmholtz qui a été utilisée dans la suite.

Une méthode simple pour retrouver de façon rigoureuse les amplitudes des modes guidés décrivant le champ de la zone de mesure a également été présentée. À terme, elle pourra prendre en compte un brasseur plus réaliste que celui que nous avons simulé pour l'instant.

Les premiers calculs nous donnent les résultats suivants : pour chaque orientation de la pale, les amplitudes des modes d'ordre élevés (pour lesquels  $k_c$  est très proche de  $k_0$ ), les amplitudes sont bien plus importantes que celles des autres modes. Ce comportement semble conforter l'hypothèse que nous avons adopté dans le modèle des modes guidés aléatoires.

## Perspectives

Si ces travaux de thèse nous ont permis de mieux appréhender l'isotropie du champ de la CRBM, il reste à approfondir les différentes directions dans lesquelles ces travaux ont été entrepris.

Tout d'abord, il est envisageable de procéder à des essais et des simulations plus systématiques, notamment avec des systèmes proches des parois, mais également pour des systèmes plus complexes.

Ensuite, le calcul rigoureux doit être prolongé avec un maillage plus fin afin d'avoir une meilleure précision. Il serait également souhaitable de calculer les amplitudes des modes pour des fréquences plus élevées et traiter des brasseurs de géométries plus complexes.

Il serait également souhaitable de prendre en compte dans le calcul rigoureux des pertes dans les parois car celles-ci jouent un rôle non négligeable.

Enfin, une fois la question de l'isotropie éclaircie pour des CRBM réalistes, il serait alors possible de passer à l'étude des systèmes non linéaires.



# Annexes





# Annexe A

## Méthodes statistiques

### Test du $\chi^2$

Le test du  $\chi^2$  est utilisé pour infirmer ou confirmer des hypothèses du type suivant : «*La population que j'étudie suit bien la loi de probabilité que je propose.*».

Si la population que l'on veut tester suit effectivement la loi de probabilité que l'on propose, alors l'échantillon que l'on prélève de cette population va également tendre à suivre cette loi. Mais comme l'effectif de l'échantillon n'est pas complet, les niveaux de ses classes vont se répartir indépendamment et de façon gaussienne autour de la loi de probabilité que l'on propose.

Dans ce cas, il faut s'intéresser aux écarts entre les niveaux des classes de l'échantillon et ceux de la loi de probabilité proposée. On divise ces écarts à la valeur théorique.

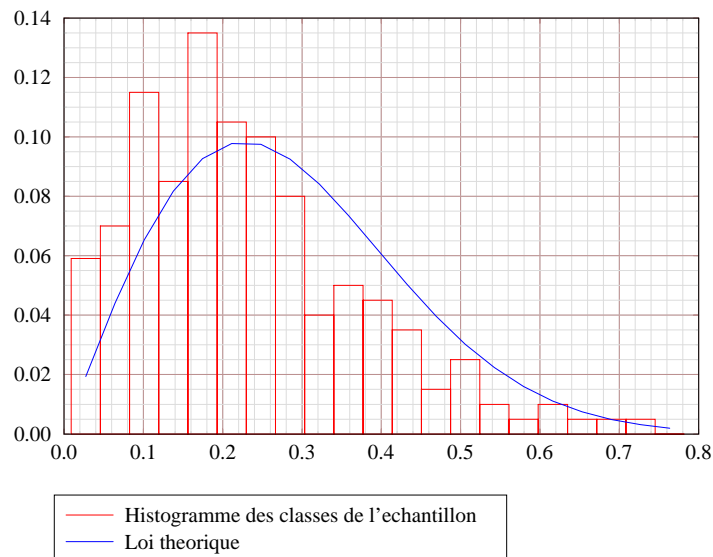


FIG. A.1 – Principe du test du  $\chi^2$

Ceux-ci s'écrivent :

$$e_i = \frac{O_i - T_i}{T_i}$$

Où :

- $O_i$  sont les niveaux observés des classes de l'échantillon ;
- $T_i$  les niveaux théoriques de la loi de probabilité correspondant aux classes.

La soustraction revient à centrer les variables aléatoires  $O_i - T_i$  sur 0. La division normalise tous les niveaux par rapport à 1.

Si ces écarts  $e_i$  sont indépendants et gaussiens, alors la somme  $\chi_c^2$  de leur contribution suit une loi du  $\chi_N^2$  d'ordre  $N$  où  $N$  est le nombre de classes de l'échantillon.

Dans le cas où l'échantillon suit une loi très proche de celle de la loi du  $\chi_N^2$  supposée, la valeur de  $\chi_c^2$  doit se trouver dans une zone «très probable» de cette loi. La moyenne de cette loi du  $\chi_N^2$  est  $N$  et son écart type  $2N$ .

Pour savoir si cette valeur  $\chi_c^2$  est probable, on détermine alors un risque  $\alpha$ . Si la valeur  $\chi_c^2$  trouvée est supérieure à celle correspondant au risque  $\alpha$  alors, la loi choisie pour représenter la loi de l'échantillon de population n'est pas bonne.

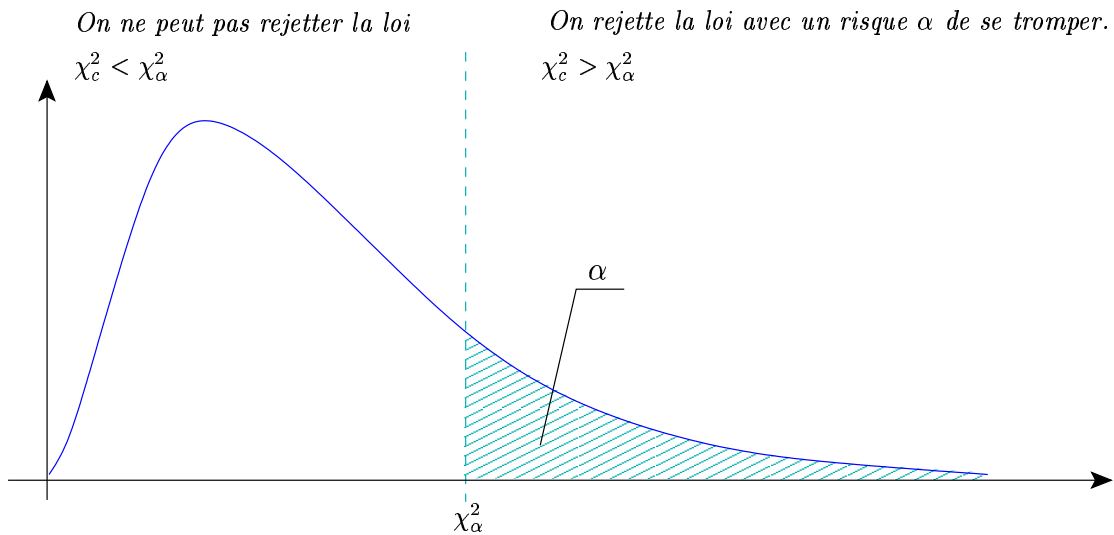


FIG. A.2 -  $\chi_c^2$  observé et risque  $\alpha$

## Intervalles de confiance

L'intervalle de confiance nous donne la marge d'erreur avec laquelle on estime la moyenne ou l'écart type d'une population. En effet, ces estimations sont toujours effectuées à partir d'échantillons aux effectifs limités. Estimer la marge d'erreur revient d'une part à donner un intervalle dans lequel la moyenne de la population se trouve et d'autre part à donner la «confiance» de cet intervalle qui indique la probabilité que la moyenne se trouve dans cet intervalle.

## Encadrement d'une moyenne

Si on dispose d'un échantillon d'effectif  $N$  alors on peut estimer sa moyenne  $\bar{X}$  et son écart type  $S$ . Il est alors démontré que la variable  $t$  définie ci-après suit une loi de Student de degré de liberté  $N - 1$  :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}}$$

Où  $\mu$  est la moyenne «vraie» de la population.

Si on veut par exemple, donner l'intervalle de confiance à 90% de la moyenne, on peut alors accéder aux valeurs  $t_{inf}$  et  $t_{sup}$  telles que :

$$\mathbb{P}_{S_{N-1}}(t < t_{inf}) = 0,05 \quad \mathbb{P}_{S_{N-1}}(t > t_{sup}) = 0,05$$

On alors accès à l'encadrement suivant :

$$t_{inf} < t < t_{sup} \text{ avec } t \text{ dans cet intervalle dans } 90\% \text{ des cas}$$

On peut en déduire l'encadrement de la moyenne de la population :

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{N}}t_{sup} < \mu < \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{N}}t_{inf}$$

## Encadrement d'un écart type

Le raisonnement est le même que pour la moyenne sauf que cette fois-ci, on introduit une variable  $s$  qui suit une loi du  $\chi^2_{N-1}$  où est toujours le nombre de classes de l'échantillon :

$$s = \frac{(N-1)S^2}{\sigma^2}$$

Où  $\sigma$  est l'écart type «vrai» de la population.

On peut toujours accéder aux valeurs des variables  $s_{inf}$  et  $s_{sup}$  telles que :

$$\mathbb{P}_{\chi^2_{N-1}}(s < s_{inf}) = 0,05 \quad \mathbb{P}_{\chi^2_{N-1}}(s > s_{sup}) = 0,05$$

Comme pour la moyenne, on trouve alors l'intervalle :

$$s_{inf} < s < s_{sup} \text{ avec } s \text{ dans cet intervalle dans } 90\% \text{ des cas}$$

L'intervalle de confiance de l'écart-type s'écrit alors :

$$S\sqrt{\frac{N-1}{s_{sup}}} < \sigma < S\sqrt{\frac{N-1}{s_{inf}}}$$



## Annexe B

# Calcul de la loi isotrope d'ordre N

### Définition de la densité de probabilité

La densité de probabilité  $p_{x_N}$  des amplitudes des fonctions de base représentant la diffraction idéale d'une CRBM a été définie comme le rapport des deux surfaces suivantes :

$$p_{x_N} = \frac{\mathcal{S}_{\sin \theta_N}^{N-1}}{\mathcal{S}_1^N}$$

Où :

- $\mathcal{S}_{\sin \theta_N}^{N-1}$  est la surface de l'hypersphère de dimension  $N - 1$  et de rayon  $\sin \theta_N$  ;
- $\mathcal{S}_1^N$  est la surface de l'hypersphère de dimension  $N$  et de rayon 1.

Il est donc nécessaire de déterminer quelles sont les expressions de ces surfaces pour en déduire celle de la densité de probabilité.

### Calcul des surfaces des hypersphères de dimensions N

La surface d'une sphère, quelle que soit sa dimension, est la dérivée du volume de cette sphère. Or l'expression de ces volumes est donnée par (Référence + expression).

On est donc en mesure d'écrire la surface  $\mathcal{S}^N$  de la N-sphère de rayon 1 :

$$\begin{cases} \text{si } N \text{ pair, } N = 2p & \mathcal{S}^N = \frac{2^{p+1} \pi^p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)} = \frac{2\sqrt{2\pi}^N}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (N-1)} \\ \text{si } N \text{ impair, } N = 2p + 1 & \mathcal{S}^N = \frac{2\pi^{p+1}}{p!} = \frac{2\sqrt{\pi}^{N+1}}{(\frac{N-1}{2})!} \end{cases}$$

La  $(N - 1)$ -sphère de rayon  $\sin \theta_N$  a pour surface :

$$\begin{cases} \text{si } N - 1 \text{ pair, } N - 1 = 2p & \mathcal{S}^{N-1} = (\sin \theta_N)^{N-2} \frac{2\sqrt{2\pi}^{N-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (N-2)} \\ \text{si } N - 1 \text{ impair, } N - 1 = 2p - 1 & \mathcal{S}^{N-1} = (\sin \theta_N)^{N-2} \frac{2\sqrt{\pi}^N}{(\frac{N-2}{2})!} \end{cases}$$

### Expression de la densité de probabilité

La densité de probabilité de la coordonnée  $x_N$  est obtenue en remplaçant numérateur et dénominateur par leurs expressions :

$$\begin{cases} \text{si } N \text{ pair} & p_{x_N} = (\sin \theta_N)^{N-2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (N-1)}{\sqrt{2}^N \left(\frac{N-2}{2}\right)!} \\ \text{si } N \text{ impair} & p_{x_N} = (\sin \theta_N)^{N-2} \frac{2^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{N-1}{2}\right)!}{\pi(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (N-2))} \end{cases}$$

Remplacer N pair par  $2p$  et N impair par  $2p + 1$  donne :

$$\begin{cases} \text{si } N = 2p & p_{x_N} = (\sin \theta_N)^{2p-2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)}{2^p (p-1)!} \\ \text{si } N = 2p + 1 & p_{x_N} = (\sin \theta_N)^{2p-1} \frac{2^p (p)!}{\pi(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1))} \end{cases}$$

Or, la coordonnée  $x_N$  est identifiée par  $\cos \theta_N$ , on remplace donc  $\sin \theta_N$  par  $\sqrt{1 - \cos^2 \theta_N}$  et :

$$\begin{cases} \text{si } N = 2p & p_{x_N} = \sqrt{1 - x_N^2}^{2p-2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)}{2^p (p-1)!} \\ \text{si } N = 2p + 1 & p_{x_N} = \sqrt{1 - x_N^2}^{2p-1} \frac{2^p (p)!}{\pi(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1))} \end{cases}$$

La fonction  $\Gamma$  peut être introduite. En effet, elle est définie par :  $\Gamma(p + 1) = p!$  .

$$\begin{cases} \text{si } N = 2p & p_{x_N} = \sqrt{1 - x_N^2}^{2p-2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)}{2^p \Gamma(p)} \\ \text{si } N = 2p + 1 & p_{x_N} = \sqrt{1 - x_N^2}^{2p-1} \frac{2^p \Gamma(p+1)}{\pi(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1))} \end{cases}$$

D'autre part, avec la référence [1] :

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p - 1) = \frac{2^p \Gamma(p + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{cases} \text{si } N = 2p & p_{x_N} = \sqrt{1 - x_N^2}^{2p-2} \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(p)} \\ \text{si } N = 2p + 1 & p_{x_N} = \sqrt{1 - x_N^2}^{2p-1} \frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(p + \frac{1}{2})} \end{cases}$$

En réintroduisant N au lieu de  $p$ , la même équation est trouvée que N soit pair ou impair :

$$p_{x_N} = (1 - x_N^2)^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{N}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{N}{2})}$$

## Convergence vers la loi normale

Il est intéressant d'étudier la limite de cette expression lorsque  $N$  tend vers l'infini. Pour cela, nous utiliserons deux résultats :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = e^z \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = n^{a-b}$$

Pour la première expression, il faut remplacer  $z$  par  $-x_N^2 \frac{N-2}{2}$  et  $m$  par  $\frac{N-2}{2}$ . Pour la deuxième,  $n$  par  $\frac{N-2}{2}$ ,  $a$  par  $\frac{3}{2}$  et  $b$  par 1.

Ces deux expressions deviennent alors :

$$\lim_{\frac{N-2}{2} \rightarrow \infty} \left(1 - x_N^2\right)^{\frac{N-2}{2}} = e^{-\frac{x_N^2(N-2)}{2}} \quad \lim_{\frac{N-2}{2} \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N-2}{2} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-2}{2} + 1\right)} = \sqrt{\frac{N-2}{2}}$$

La limite de la densité de probabilité s'écrit alors :

$$\lim_{\frac{N-2}{2} \rightarrow \infty} p_{x_N} = \sqrt{\frac{N-2}{2\pi}} e^{-\frac{x_N^2(N-2)}{2}}$$

En identifiant  $\sigma^2 = \frac{1}{N-2}$ , la loi Normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  est retrouvée :

$$\lim_{\frac{N-2}{2} \rightarrow \infty} p_{x_N} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_N^2}{2\sigma^2}}$$





## Annexe C

# La base orthonormale complète des modes guidés

### Expression des modes guidés

Les modes guidés sont des solutions des équations de Maxwell satisfaisant à des conditions aux limites sur la section transversale du guide.

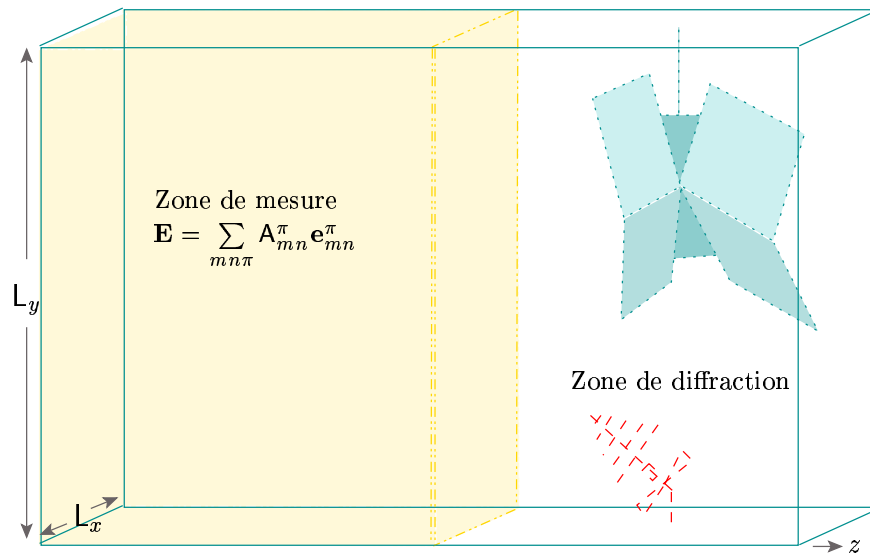


FIG. C.1 – Définition de la section du guide équivalent

Si l'axe de propagation est l'axe  $z$ , on distingue les modes TE pour lesquels la composante longitudinale  $\mathbf{e}_z = 0$  et les modes TM pour lesquels la composante longitudinale  $\mathbf{h}_z = 0$ . Les composantes transversales du champ sont alors données en fonction de la seule composante longitudinale  $\mathbf{h}_{z_{mn}}$  pour les modes TE et  $\mathbf{e}_{z_{mn}}$  pour

les modes TM :

$$\begin{array}{cc}
 & \text{TE} & \text{TM} \\
 \mathbf{e}_{t_{mn}} = \frac{jk_0 Z_0}{k_c^2} (\vec{u}_z \wedge \vec{\text{grad}}_t(h_{z_{mn}})) & & \mathbf{h}_{t_{mn}} = \frac{jk_0}{k_c^2 Z_0} (\vec{u}_z \wedge \vec{\text{grad}}_t(e_{z_{mn}})) \\
 \mathbf{h}_{t_{mn}} = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial z} \vec{\text{grad}}_t(h_{z_{mn}}) & & \mathbf{e}_{t_{mn}} = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial z} \vec{\text{grad}}_t(e_{z_{mn}})
 \end{array}$$

Où :

- $m$  est l'ordre du mode selon l'axe  $x$  ;
- $n$  est l'ordre du mode selon l'axe  $y$  ;
- $h_{z_{mn}}$  et  $e_{z_{mn}}$  décrivent la variation transversale des champs  $\mathbf{h}_{z_{mn}}$  et  $\mathbf{e}_{z_{mn}}$ .

Ces variations transversales s'écrivent :

$$h_{z_{mn}} = \cos(k_x x) \cos(k_y y) \quad e_{z_{mn}} = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad k_x = \frac{m\pi}{L_x} \quad k_y = \frac{n\pi}{L_y}$$

Si  $\gamma$  est la constante de propagation le long de l'axe  $z$  telle que  $\gamma = \alpha + j\beta$ , alors pour les modes évanescents :  $\beta = 0$  et pour les modes propagatifs  $\alpha = 0$ . Avec la définition de la figure C.1, tous les modes sont court-circuités en  $z = 0$ , les modes deviennent stationnaires. Ils s'écrivent alors de la manière suivante :

- Cas des modes TM

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{mn}^{\text{TM}} &= E_0 \begin{pmatrix} \frac{\gamma k_x}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sinh(-\gamma z) \\ \frac{\gamma k_y}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sinh(-\gamma z) \\ \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cosh(-\gamma z) \end{pmatrix} \\
 \mathbf{h}_{mn}^{\text{TM}} &= \frac{-jk_0 E_0}{Z_0 k_c^2} \cosh(-\gamma z) \begin{pmatrix} -k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- Cas des modes TE

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_{mn}^{\text{TE}} &= jH_0 \begin{pmatrix} \frac{\gamma k_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cosh(\gamma z) \\ \frac{\gamma k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cosh(\gamma z) \\ \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sinh(\gamma z) \end{pmatrix} \\
 \mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}} &= \frac{k_0 Z_0 H_0}{k_c^2} \begin{pmatrix} k_y \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sinh(\gamma z) \\ -k_x \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sinh(\gamma z) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

À chaque fréquence, il existe une infinité de modes évanescents et un nombre fini de modes propagatifs. Pour les modes évanescents, dans la mesure où nous n'avons pas fixé de critère pour limiter leur nombre, nous n'en avons pas tenu compte. Par contre, les modes propagatifs existent en nombre fini  $N$  qui augmente avec la fréquence de travail. À chaque fréquence, on peut définir  $M$  et  $N$  qui donnent le maximum d'ordres  $m$  et  $n$ . Les modes propagatifs court-circuités ou modes stationnaires s'écrivent alors :

– Cas des modes TM

$$\mathbf{e}_{mn}^{\text{TM}} = E_0 \begin{pmatrix} \frac{\beta k_x}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\beta z) \\ \frac{\beta k_y}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\beta z) \\ \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\beta z) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{mn}^{\text{TM}} = \frac{-jk_0 E_0}{Z_0 k_c^2} \cos(\beta z) \begin{pmatrix} -k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\beta z) \\ k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\beta z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

– Cas des modes TE

$$\mathbf{h}_{mn}^{\text{TE}} = jH_0 \begin{pmatrix} \frac{\beta k_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\beta z) \\ \frac{\beta k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\beta z) \\ \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\beta z) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{mn}^{\text{TE}} = \frac{k_0 Z_0 H_0}{k_c^2} \begin{pmatrix} k_y \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\beta z) \\ -k_x \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\beta z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces modes sont les fonctions de base servant à décrire le champ total dans la zone de mesure où il s'écrit :

$$\mathbf{E} = \sum_{m=0}^{m=M} \sum_{n=0}^{n=N} \sum_{\pi=\text{TE, TM}} A_{mn}^{\pi} \mathbf{e}_{mn}^{\pi} \quad \mathbf{H} = \sum_{m=0}^{m=M} \sum_{n=0}^{n=N} \sum_{\pi=\text{TE, TM}} A_{mn}^{\pi} \mathbf{h}_{mn}^{\pi}$$

Où les  $A_{mn}^{\text{TE, TM}}$  sont les amplitudes des modes. Pour chaque configuration de brasseur, le champ de la zone de mesure varie, mais pas l'expression des fonctions de base. Ce sont les amplitudes  $A_{mn}^{\text{TE, TM}}$  qui varient.

## Propriétés de la base des modes guidés

### Produit vectoriel de la base

La base des modes guidés est munie du produit scalaire défini comme suit :

$$\langle \mathbf{u}_{mn}^{\pi} | \mathbf{v}_{pq}^{\tau} \rangle = \int_{x=0}^{x=L_x} \int_{y=0}^{y=L_y} (\mathbf{u}_{mn}^{\pi} \wedge \mathbf{v}_{pq}^{\tau}) \cdot \vec{n} dx dy$$

Où :

- $\mathbf{u}_{mn}^{\pi}$  et  $\mathbf{v}_{pq}^{\tau}$  sont des modes de la base ;
- $\pi$  et  $\tau$  désignent la polarisation TE ou TM ;
- $\vec{n}$  est la normale à la section du guide, elle est orientée vers les  $z$  positifs :  $\vec{n} = \vec{u}_z$ .

### Base orthogonale

Avec la définition, si  $\vec{u}$  désignent les champ électriques, et les  $\vec{v}$  les champ magnétiques, on peut retrouver les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}_{mn}^\pi | \vec{v}_{pq}^\tau \rangle &= -\langle \vec{v}_{pq}^\tau | \vec{u}_{mn}^\pi \rangle \\ \langle \vec{u}_{mn}^\pi | \vec{u}_{pq}^\tau \rangle &= 0 \quad \forall \{m, n, p, q\} \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \pi, \tau \\ \langle \vec{v}_{mn}^\pi | \vec{v}_{pq}^\tau \rangle &= 0 \quad \forall \{m, n, p, q\} \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \pi, \tau \\ \langle \vec{v}_{mn}^\pi | \vec{u}_{pq}^\tau \rangle &= 0 \text{ dès que : } \tau \neq \pi \\ \langle \vec{v}_{mn}^\pi | \vec{u}_{pq}^\pi \rangle &\neq 0 \text{ dès que : } m = p \text{ et } n = q\end{aligned}$$

Ces propriétés montrent que cette base est orthogonale.

### Normalisation des modes

Finalement, il reste :

$$\begin{aligned}\langle \vec{e}_{mn}^{\text{TE}} | \vec{h}_{mn}^{\text{TE}} \rangle &= N_{mn}^{\text{TE}} \\ \langle \vec{e}_{mn}^{\text{TM}} | \vec{h}_{mn}^{\text{TM}} \rangle &= N_{mn}^{\text{TM}}\end{aligned}$$

Si on veut normaliser ces modes, il faut diviser chaque composante TE d'ordre  $mn$  par  $\sqrt{N_{mn}^{\text{TE}}}$  et chaque composante TM d'ordre  $pq$  par  $\sqrt{N_{mn}^{\text{TM}}}$ .

### Calcul de l'énergie emmagasinée dans la CRBM

Le calcul de l'énergie emmagasinée dans la CRBM fait appel aux calculs intégraux suivants :

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} |\nabla_t(e_z)|^2 dx dy &= \begin{cases} \frac{L_x L_y}{4} k_c^2 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} |\nabla_t(h_z)|^2 dx dy &= \begin{cases} \frac{L_x L_y}{4} k_c^2 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ \frac{L_x L_y}{2} k_y^2 & \text{si } m = 0 \text{ et } n \neq 0 \\ \frac{L_x L_y}{2} k_x^2 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} |e_z|^2 dx dy &= \begin{cases} \frac{L_x L_y}{4} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} |h_z|^2 dx dy &= \begin{cases} \frac{L_x L_y}{4} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ \frac{L_x L_y}{2} & \text{si } m = 0 \text{ et } n \neq 0 \\ \frac{L_x L_y}{2} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n = 0 \\ L_x L_y & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

En utilisant ces résultats, l'énergie emmagasinée s'écrit :

$$\begin{aligned}
\langle W_{em} \rangle &= 8C^2 \varepsilon_0 L_x L_y \int_{z=0}^{L_z} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{\beta^2}{k_0^2} + \frac{k_c^2}{k_0^2}\right) dz \\
&+ 16C^2 \varepsilon_0 L_x L_y \int_{z=0}^{L_z} \sum_{m=1}^M \sin^2(\beta_{m0} z) \left(1 + \frac{k_x^2}{k_0^2}\right) + \cos^2(\beta_{m0} z) \frac{\beta_{m0}^2}{k_0^2} dz \\
&+ 16C^2 \varepsilon_0 L_x L_y \int_{z=0}^{L_z} \sum_{n=1}^N \sin^2(\beta_{0n} z) \left(1 + \frac{k_y^2}{k_0^2}\right) + \cos^2(\beta_{0n} z) \frac{\beta_{0n}^2}{k_0^2} dz
\end{aligned}$$

Or, l'égalité suivante permet de simplifier l'expression :

$$\frac{\beta^2}{k_0^2} + \frac{k_c^2}{k_0^2} = 1$$

L'expression de l'énergie emmagasinée devient :

$$\begin{aligned}
\langle W_{em} \rangle &= 16C^2 \varepsilon_0 L_x L_y \left\{ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_{z=0}^{L_z} dz + \sum_{m=1}^M \int_{z=0}^{L_z} \left(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} \cos(2\beta_{m0} z)\right) dz \right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^N \sin^2(\beta_{0n} z) \int_{z=0}^{L_z} \left(1 - \frac{k_y^2}{k_0^2} \cos(2\beta_{0n} z)\right) dz \right\}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\langle W_{em} \rangle = 16C^2 \varepsilon_0 L_x L_y L_z \left\{ MN + M + N - \sum_{m=1}^M \frac{k_x^2}{k_0^2} \text{sinc}(2\beta_{m0} L_z) - \sum_{n=1}^N \frac{k_y^2}{k_0^2} \text{sinc}(2\beta_{0n} L_z) \right\}$$



## Annexe D

# Expression du tenseur de covariance pour le modèle de Hill

La définition de la covariance du modèle de Hill s'écrit :

$$\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 8\pi\sigma^2 \left( \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t \right) \text{sinc}(k_0 \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|)$$

Pour obtenir l'expression analytique de cette covariance, il faut donc appliquer l'opération  $\nabla \nabla^t$  au terme  $\text{sinc}(k_0 \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|)$ . Le changement de variable suivant est alors proposé :

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r} \quad k_0 \vec{r} = \vec{u}$$

L'expression de la covariance devient :

$$\text{cov}_{\mathbf{E}}(\vec{u}) = 8\pi\sigma^2 \left( \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla^t \right) \text{sinc}(u)$$

## Dérivations successives

### Dérivée première

La première étape est d'appliquer seulement  $\nabla^t$ . Il faut pour cela connaître le résultat suivant :

$$\left( \frac{\sin u}{u} \right)' = u' \left( \frac{\cos u}{u} - \frac{\sin u}{u^2} \right)$$

Or,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k_0 \frac{u_x}{u} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = k_0 \frac{u_y}{u} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = k_0 \frac{u_z}{u}$$

Ceci permet de déduire :

$$\nabla^t \left( \frac{\sin u}{u} \right) = \left( \frac{\cos u}{u} - \frac{\sin u}{u^2} \right) \nabla^t(u) = k_0 \left( \frac{\cos u}{u^2} - \frac{\sin u}{u^3} \right) \vec{u}^t$$

### Dérivée seconde

La deuxième étape est d'appliquer  $\nabla$  au résultat précédent :

$$\begin{aligned}\nabla \nabla^t \left( \frac{\sin u}{u} \right) &= \nabla \left\{ k_0 \left( \frac{\cos u}{u^2} - \frac{\sin u}{u^3} \right) \vec{u}^t \right\} \\ &= \mathbb{1} k_0^2 \left( \frac{\cos u}{u^2} - \frac{\sin u}{u^3} \right) + k_0 \nabla \left( \frac{\cos u}{u^2} - \frac{\sin u}{u^3} \right) \vec{u}^t\end{aligned}$$

Il faut encore dériver le deuxième terme, ce qui revient à calculer  $\left( \frac{\cos u}{u^2} \right)'$  et  $\left( \frac{\sin u}{u^3} \right)'$  :

$$\left( \frac{\cos u}{u^2} \right)'$$

$$\begin{aligned}\left( \frac{\cos u}{u^2} \right)' &= \frac{-u' \sin u}{u^2} - \frac{2u' \cos u}{u^3} \\ &= -u' \left( \frac{\sin u}{u^2} + \frac{2 \cos u}{u^3} \right) \\ \nabla \left( \frac{\cos u}{u^2} \right) &= -k_0 \frac{\vec{u}}{u} \left( \frac{\sin u}{u^2} + \frac{2 \cos u}{u^3} \right) \\ &= -k_0 \left( \frac{\sin u}{u^3} + \frac{2 \cos u}{u^4} \right) \vec{u}\end{aligned}$$

$$\left( \frac{\sin u}{u^3} \right)'$$

$$\begin{aligned}\left( \frac{\sin u}{u^3} \right)' &= \frac{-u' \cos u}{u^3} - \frac{3u' \sin u}{u^4} \\ &= u' \left( \frac{\cos u}{u^3} - \frac{3 \sin u}{u^4} \right) \\ -\nabla \left( \frac{\sin u}{u^3} \right) &= -k_0 \frac{\vec{u}}{u} \left( \frac{\cos u}{u^3} - \frac{3 \sin u}{u^4} \right) \\ &= k_0 \left( \frac{3 \sin u}{u^5} - \frac{\cos u}{u^4} \right) \vec{u}\end{aligned}$$

Le deuxième terme de la covariance s'écrit donc :

$$k_0 \nabla \left( \frac{\cos u}{u^2} - \frac{\sin u}{u^3} \right) \vec{u}^t = k_0^2 \left[ \frac{3 \sin u}{u^5} - \frac{3 \cos u}{u^4} - \frac{\sin u}{u^3} \right] \vec{u} \vec{u}^t$$

### Expression

Finalement, l'expression analytique de la covariance du modèle de Hill s'écrit :

$$\text{cov}_{\mathbf{E}}(u) = 8\pi\sigma^2 \left\{ \mathbb{1} \left[ \frac{\sin(u)}{u} + \frac{\cos u}{u^2} - \frac{\sin u}{u^3} \right] + \left[ \frac{3 \sin u}{u^5} - \frac{3 \cos u}{u^4} - \frac{\sin u}{u^3} \right] \vec{u} \vec{u}^t \right\}$$



# Bibliographie



# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical functions with Formulas Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards, 1972.
- [2] B. Archambeault and K. Chamberlin. Modeling and measurements of an alternative construction technique to reduce shielded room resonance effects. In *IEEE Symposium*, 1994.
- [3] L.R. Arnaut and P.D. West. Effect of antenna aperture, eut and stirrer step size on measurements in mode-stirred reverberation chambers. In *IEEE Symposium Washington*, pages 29 – 31, August 2000.
- [4] Luk. R. Arnaut. Effect of local stir and spatial averaging on measurement and testing in mode-tuned and mode-stirred reverberation chambers. *IEEE EMC*, 43(3) :305 – 325, August 2001.
- [5] M. Bäckström and O. Lundén. Transmission cross section of apertures measured by use of nested mode-stirred chambers. Technical report, FOA, 1996.
- [6] L. Bai, L. Wang, B. Wang, and J. Song. Effect of the paddle configurations on the uniformity of the reverberation chamber. In *IEEE Symposium Washington*, August 2000.
- [7] GDM. Barber. The use of mode stirred chambers for characterising the shielding effectiveness of rf gaskets and materials. Technical report, DERA, UK EMC Journal, 1999.
- [8] A. Barka, P. Soudais, and D. Volpert. Scattering from 3d cavities with a plug and play numerical scheme combining ie, pde and modal techniques. *IEEE Antennas and Propagations*, 48 :704 – 712, May 2000.
- [9] C. Baum. Sem representation of signal at internal ports of complex electronic systems. In *International Symposium on EMC, Magdeburg, Germany*, pages 9 – 14, October 1999.
- [10] C.E. Baum. How to think about electromagnetic pulse. In *Fulmen Meeting*, 1974.
- [11] C.E. Baum. Comparative system response to resonant and unipolar waveforms. *International Symposium on EMC, Magdeburg, Germany*, pages 389 – 392, 1999.

- [12] P. Besnier. Analyse modale d' une chambre réverbérante à brassage de modes à l'aide d' une simulation numérique de la propagation du champ électromagnétique basée sur la méthode tlm. In *IEEE Symposium*. Université des Sciences de Lille, 1998.
- [13] A. Brouty. Calcul du volume de l'hypersphère dans  $r^n$ . Internet, 1996.
- [14] C. Bunting, K. Moeller, C. Reddy, and S. Scarce. A two-dimensional finite-element analysis of reverberations chambers. *IEEE EMC*, 41(4) :280 – 289, November 1999.
- [15] L. Cappetta, M. Feo, V. Fiumara, V. Pierro, and I. Pinto. Electromagnetic chaos in mode-stirred reverberation enclosures. *IEEE EMC*, 40(3) :185 – 192, August 1998.
- [16] CEG. Analogie entre le concept de la thermodynamique statistique quantique et l'ambiance électromagnétique dans un cavité de grande dimension par rapport à la longueur d'onde incidente, 2000.
- [17] A. Ciccolella and F. Canavera. Stochastic prediction if wire coupling interference. In *IEEE Symposium*, 1995.
- [18] Balamis Constantine. *Advanced Engeneering Electromagnetics*. 1989.
- [19] P. Corona, G. Ferrara, and M. Migliaccio. Statistical electromagnetic field in reverberating chambers. In *IEEE Symposium*, 1994.
- [20] P. Corona, G. Ferrara, and M. Migliaccio. Reverberating chambers as sources of stochastic electromagnetic fields. *IEEE EMC*, 38(3) :348 – 356, August 1996.
- [21] P. Corona, G. Ferrara, and M. Migliaccio. Reverberating chamber electromagnetic field in presence of an unstirred component. *IEEE EMC*, 42(2) :111 – 115, February 2000.
- [22] P. Corona, G. Ferrera, and M. Migliaccio. A spectral appraoch for the determination of the reverberation chamber quality factor. *IEEE Antennas and Propagations*, 40 :145 – 153, May 1998.
- [23] P. Corona, G. Latmiral, and E. Paolini. Performance and analysis of a reverberating enclosure with variable geometry. *IEEE EMC*, 22(1) :2 – 5, February 1980.
- [24] P. Corona, G. Latmiral, E. Paolini, and L. Piccioli. Use of a reverberating enclosure for measurements of radiated power in the microwave range. *IEEE EMC*, 2(18) :54– 59, May 1976.
- [25] G. Crawford. Characterization of geometric and exponential distributions, August 1965.
- [26] M.L. Crawford and G.H. Koepke. *Design, evalation and use of reverberation chamber for performing electromagnetic susceptibility/vulnerability measurements*. NBS, technical note 1092 edition, April 1986.
- [27] B. Demoulin, D. Warin, L. Kone, and P. Degauque. Measurement of transfert impedance above 500mhz using the reverberating chamber method. In *Symposium*, 1994.

- [28] DERA. Construction of mode stirred chamber. sur INTERNET, 1996 - 1999. Internet.
- [29] J.M. Dunn. Local, high-frequency analysis of the fields in a mode-stirred chamber. *IEEE EMC*, 32(1) :53 – 57, February 1990.
- [30] G. Ekwardt, U. Dörr, U. Kuhl, and H.J. Stöckman. Correlation of electromagnetic field in chaotic cavities. *Europhysics Letters*, 1999.
- [31] J.J. Ely, T.X. Nguyen, and S.A. Scearce. The influence of modulated signal risetime in flight electronics radiated immunity testing with a msc. Technical report, NASA, January 2000.
- [32] C. Fiachetti, B. Michielsen, F. Issac, and A. Reineix. Etude d'un modèle de champ aléatoire pour la modélisation du couplage sur un équipement électronique dans une chambre réverbérante. In *Congrès CEM 2000*, Mars 2000.
- [33] C. Fiachetti, F. Issac, B. Michielsen, and A. Reineix. Modelling field to equipment coupling in mode stirred chambers. In *IEEE Symposium Montreal*, pages 762–767, August 2001.
- [34] G. Franceschetti. Fundamentals of steady-state and transient electromagnetic fields in shielding enclosures. *IEEE EMC*, 21(4) :335 – 348, November 1979.
- [35] G. Freyer and M. Bäckström. Comparison of anechoic and reverberation chamber coupling data as a function of directivity pattern. In *IEEE Symposium Washington*, pages 615 – 620, August 2000.
- [36] G. Freyer and M. Hatfield. Aircraft test applications of reverberation chambers. In *IEEE Symposium*, pages 491 – 496. NSWC, 1994.
- [37] G. Freyer and M. Hatfield. An introduction to reverberation chambers for radiated emission/immunity testing. In *Internet*. NSWC, 1998.
- [38] G.J. Freyer. Measured statistical characteristics of the electromagnetic environment in reverberation chambers. In *Symposium*, 1994.
- [39] G.J. Freyer, T.H. Lehman, J.M. Ladbury, G.H. Koepke, and M.O. Hatfield. Verification of field applied to an eut in reverberation chamber using statistical theory. In *IEEE Symposium*, pages 34 – 38, 1998.
- [40] T. George. Compte-rendu des tests de calcul de rayons dans une cavité fermée contenant un brasseur de modes. document préliminaire, aout 1999.
- [41] V. Gobin. *Diffraction par des ouvertures et par des objets tridimensionnels. Application à la mesure des impédance de surface des matériaux bons conducteurs*. PhD thesis, Supelec, 1989.
- [42] E.A. Godfrey. Effect of corrugated walls on the field uniformity of reverberation chambers at low frequencies. *IEEE Symposium*, 1999.
- [43] E.A. Godfrey and J.T. Kousky. Measuring the shielding effectiveness of coaxial cables using a reverberation chamber. In *IEEE Symposium Washington*, pages 627 – 631, August 2000.

- [44] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series and products corrected and enlarged edition*. 1980.
- [45] D.M. Grimes and C.A. Grimes. Poyntng's theorem, reactive energy, and radiated power. In *IEEE Symposium*, 1994.
- [46] D.M. Grimes and C.A. Grimes. The complex poynting theorem, reactive power, radiated q, and limitations on electrically small antennas. In *IEEE Symposium*, pages 97 – 101, 1995.
- [47] P. Harms, R. Mittra, and J. Nadolny. Simulating measurements for cable radiation study. *IEEE EMC*, 38(1) :25 – 30, February 1996.
- [48] T.E. Harrington. Total radiated power based oats equivalent emissions testing in reverberation chambers and gtem cells. In *IEEE Symposium Washington*, pages 23 – 28, August 2000.
- [49] K. Hatakeyama, H. Togawa, T. Kawamura, and Y. Sato. Experimental study on direction dependency of reflexion coefficient of microwave electromagnetic anechoic chamber. *IEEE EMC*, 34(4) :397 – 403, November 1992.
- [50] M. Hatfield. A calibration procedure for reverberation chambers. In *IEEE Symposium Washington*, pages 621 – 626, August 2000.
- [51] M. Hatfield, J. Bean, G. Freyer, and D. Johnson. Repeatability of mode-stirred chamber measurements. In *IEEE Symposium*, 1994.
- [52] M.O. Hatfield. Rtca updates reverberation chamber procedures in rtca do-160d. *Joint E3 Bulletin*, 6, September 2000.
- [53] M.O. Hatfield, M.B. Slocum, and E.A. Godfrey. Investigations to extend the lower frequency limit of reverberation chambers. In *IEEE Symposium*, 1998.
- [54] D. Hill. A reflexion coefficient derivation for the q of a reverberation chamber. *IEEE EMC*, 38(4) :591 – 592, November 1996.
- [55] D. Hill. Electromagnetic theory of reverberation chambers. Technical report, NIST Technical Report Note 1506, 1998.
- [56] D. Hill, M. Crawford, M. Kanda, and D. Wu. Aperture coupling to a coaxial air line : Theory and experiment. *IEEE EMC*, 35(1) :69 – 74, February 1993.
- [57] D. Hill, A. Ondrejka, and M. Crawford. Aperture excitation of electrically large, lossy cavities. *IEEE EMC*, 36(3) :169 – 178, August 1994.
- [58] D.A. Hill. Electronic mode stirring for reverberation chambers. *IEEE EMC*, 36(4) :294 – 299, November 1994.
- [59] D.A. Hill. Spatial correlation function for fields in a reverberation chamber. *IEEE EMC*, 37(1) :138 – 138, February 1995.
- [60] D.A. Hill. Plane wave integral representation for field in reverberation chambers. *IEEE EMC*, 40(3) :209 – 217, August 1998.
- [61] D.A. Hill. Linear dipole response in a reverberation chamber. *IEEE EMC*, 41(4) :365 – 368, November 1999.

- [62] M. Höijer, A.M. Andersson, O. Lundèn, and M. Bäckström. Numerical simulations as a tool for optimizing the geometrical design of reverberation chambers. In *IEEE Symposium Washington*, pages 1 – 6, August 2000.
- [63] R. Holland and R.H. St. John. Statistical em fiels modes in an externally illuminated, overmoded cavity. *IEEE EMC*, 43 :56 – 66, February 2001.
- [64] R. Holland and R. St.John. Statistical response of em-driven cables inside an overmoded enclosure. *IEEE EMC*, 40(4) :311 – 324, November 1998.
- [65] A.T. De Hoop. The n-port recieving antenna and its equivalent electrical network, 1975.
- [66] A.T. De Hoop and G. De Jong. Power reciprocity in antenna theory. *IEE Proceeding*, 121(10) :1051 – 1056, October 1974.
- [67] A. Ishimaru. *Wave Propagation and scatering in random Media I,II*. 1978.
- [68] R. St. John and R. Holland. How to think about electromagnetic interaction : a statistical approach. Interaction Notes, July 2000.
- [69] D.M. Johnson and M.O. Hatfield. Shielding effectiveness measurements of a shielded window : Comparative results obtained using modes-stirred and anechoic chambers. In *IEEE Symposium*, 1994.
- [70] D.M. Johnson and M.O. Hatfield. Mode-stirred chamber shielding effectiveness testing of a multioconductor cable assembly. *IEEE EMC*, 1995.
- [71] I. Kohlberg and R. Gardner. Interpreting electronic system response to unwanted electromagnetic signals using non parametric statistics. In *International Symposium on EMC, Magdeburg, Germany*, pages 37 – 42, October 1999.
- [72] J.G. Kostas and Bill Boverie. Statistical model for a mode-stirred chamber. *IEEE EMC*, 33(4) :366 – 370, November 1991.
- [73] H. Krauthäuser and J. Nitsch. Characterisation of mode-stirred chamber in time domain. *International Symposium on EMC, Magdeburg, Germany*, pages 389 – 392, 1999.
- [74] W. Kürner, M. Petirsch, and A.Schwab. Optimization of a mode stirred chamber by using diffusers. In *International Symposium on EMC, Magdeburg, Germany*, pages 393 – 398, October 1999.
- [75] W. Kürner and A. Schwab. Parameters and results of se measurements performed in mode-stirred chambers. In *IEEE Symposium Washington*, pages 611 – 614, August 2000.
- [76] J.M. Ladbury and K. Goldsmith. Reverberation chamber verification procedures or how to check if your chamber ain't broke and suggestions on how to fix it if it is. In *IEEE Symposium Washington*, pages 17 – 22, August 2000.
- [77] J.M. Ladbury and G.H. Koepke. Reverberation chamber relationships : Corrections and improvements or three wrongs can (almost) make a right. *Internet*, 1999.

- [78] J.M. Ladbury, G.H. Koepke, and D.G. Camell. Improvements in the cw-evaluation of mode-stirred chambers. In *IEEE Symposium*, 1997.
- [79] K.S.H. Lee and F.C. Yang. Trends and bounds in rf coupling to a wire inside a slotted cavity. *IEEE EMC*, 3(34) :154– 160, August 1992.
- [80] F. Leferink. High field strength in a large volume : the intrinsic reverberation chamber. *IEEE Symposium, Denver*, 1998.
- [81] F. Leferink, J.C. Boudenot, and W. Van Etten. Experimental results obtained in the vibrating intrinsic reverberation chamber. In *IEEE Symposium Washington*, pages 639 – 644, August 2000.
- [82] F. Leferink and B. Puylaert. Accurate shielding effectiveness measurements using a reverberation room. In *IEEE Symposium*. Hollandse Signaalapparaten, 1990.
- [83] T.H. Lehman. A statistical theory of electromagnetic fields in complex cavities. Interaction Notes, May 1993.
- [84] P. Levesque, J. Grando, F. Issac, M. Nacitas, and D. Balageas. Mesures des champs 'electromagn'etiques par thermographie infrarouge. Technical report, Onera, 1997.
- [85] T. A. Loughry. Frequency stirring : an alternative approach to mechanical mode-stirring for the conduct of electromagnetic susceptibility testing, 1991.
- [86] T.A. Loughry and S.H. Gurbaxani. Shielding effectiveness measurements using mode-stirred chambers : An evaluation of the nested chamber approach. *IEEE EMC*, 30(3) :229 – 238, Aout 1988.
- [87] O. Lundén and M. Bäckström. Stirrer efficiency in foa reverberation chambers. evaluation of correlation coefficients and chi-squared tests. In *IEEE Symposium Washington*, pages 11 – 16, August 2000.
- [88] K. Mádson, D. Andersson, M. Lisak, and V. Semenov. Tail erosion of hpm pulses. *International Workshop on Strong Microwaves in Plasmas*, August 1996.
- [89] C. McDonald-Bradley, P. Jennings, R. Ball, P. Lever, and R. Baker. A statistical approach for computational electromagnetics, 1999. Internet.
- [90] H.A. Mèndez. Shielding theory of enclosures with apertures. *IEEE EMC*, 20(2) :296–305, May 1978.
- [91] B.L. Michielsen. A new approach to electromagnetic shielding. Technical report, Philips, 1989.
- [92] A.K. Mitra and T.F. Trost. Power transfert characteristics of a microwave reverberation chamber. *IEEE EMC*, 38(2) :197 – 200, May 1996.
- [93] G.D. Monteath. *Applications of the Electromagnetic Reciprocity Principle*. 1973.
- [94] NSWC, editor. *Reverberation Chamber Theory/Experiment Short Course*. NSSC, 1998.



- [95] J. Perini and L. Cohen. An alternative way to stir the fields in a mode stirred chamber. In *IEEE Symposium Washington*, pages 633 – 637, August 2000.
- [96] W.R. Pestman. *Mathematical Statistics*. 1998.
- [97] M. Petirsch and A.J.Schwab. Investigation of the field uniformity of a mode stirred chamber using diffusors based on acoustic theory. *IEEE EMC*, 41(4) :446 – 451, November 1999.
- [98] M. Petirsch, I. Sottriffer, and A. Schwab. Mode-stirred chamber as test facility for electromagnetic susceptibility measurements. *IEEE EMC*, 2000.
- [99] S. Pignari and D. Bellan. Statistical characterization of multiconductor transmission lines illuminated by a random plane wave field. In *IEEE Symposium Washington*, pages 11 – 16, August 2000.
- [100] J.P. Quine and A.J. Pesta. Stepped-frequency methodology for obtaining faster data rates in reverberation chambers operated without a mechanical mode stirrer. In *IEEE Symposium*, 1995.
- [101] R.E. Richardson. Mode-stirred chamber calibration factor, relaxation time, and scaling laws. *IEEE EMC*, 34(4) :573 – 580, December 1985.
- [102] RTCA. Status of do160d, 1999. Internet.
- [103] Gerard L.G. Sleijpen and Diederik R. Fokkema. Bicgstab(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 1 :11 – 32, September 1993.
- [104] C.R. Suriano, G.A. Thiele, and J.R. Suriano. Low frequency behavior of a reverberation chamber with monopole antenna. In *IEEE Symposium Washington*, pages 645 – 650, August 2000.
- [105] A. Taflove and K. Umashankar. A hybrid moment method/finite time domain approach to electromagnetic coupling and aperture penetration into complex geometries. *IEEE Antennas and Propagations*, 30 :617 – 627, July 1982.
- [106] D. Thomas and J. Branner. A new technique for optimizing mode-stirred chamber efficiency. In *IEEE Symposium*. University of California, 1995.
- [107] T. Trost, A. Mitra, and A. Alvarado. Characterisation of a small microwave reverberation chamber. *International Symposium*, 1994.
- [108] Vassalo. *Théorie des guides d'ondes électromagnétiques I, II*. 1985.
- [109] D. Warin, L. Kone, B. Demoulin, and P. Degauque. Etude du comportement de l'efficacité de blindage de vecteurs de test a petite ouverture experimentes dans une chambre réverbérante. In *7ème colloque international de la CEM*, pages 153 – 157, 1992.
- [110] L.K. Warne and K.S.H. Lee. Some remarks on antenna response in reverberation chamber. *IEEE EMC*, 43 :239 – 240, May 2001.
- [111] H.A. Wolfsperger, D. Jordan, and A.J. Schwab. Automatic fields distribution measurement inside of enclosures. In *IEEE Symposium Washington*, pages 237 – 240, August 2000.

- [112] R. Zacharias, C. Wang, and T. Lehman. Applying statistical electromagnetic theory to mode-stirred chamber measurements. In *Internet*. NSWC, 1994.
- [113] D. Zhang and J. Song. Impact of stirrers position on the properties of a reverberation chamber with two stirrers. In *IEEE Symposium Washington*, pages 7 – 10, August 2000.

MODÈLES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ALÉATOIRE POUR LE CALCUL DU COUPLAGE SUR UN  
ÉQUIPEMENT ÉLECTRONIQUE EN CHAMBRE RÉVERBÉRANTE À BRASSAGE DE MODES ET VALIDATION  
EXPÉRIMENTALE

*Résumé :* Cette thèse a pour but d'analyser le couplage électromagnétique sur les systèmes électroniques linéaires testés en chambre réverbérante à brassage de modes (CRBM). L'étude se limite au régime harmonique dans le cas du brassage mécanique pas à pas. Dans un environnement aléatoire comme la CRBM, le couplage entre l'antenne d'émission et le système testé dépend des propriétés de diffraction du milieu. Si le champ aléatoire de la zone de mesure est développé sur une base fixe de fonctions, une matrice de diffraction est introduite. Elle caractérise le champ aléatoire réfléchi avec le champ émis en espace libre. Dans le cas d'un brassage idéal, il a été démontré que les amplitudes des fonctions de base suivent une loi de probabilité que nous avons calculée. Les variations de la matrice de diffraction satisfont alors une relation particulière qui se retrouve sur les paramètres  $S$  mesurés. Une méthode simple de qualification des CRBM peut être proposée. Il a été également démontré que le couplage est alors complètement déterminé par sa variance qui s'écrit à l'aide de la covariance spatiale du champ. Deux modèles de champ ont été proposés pour décrire cette covariance. Tout d'abord le modèle de Hill a été généralisé dans son application à tous les systèmes linéaires. Ensuite un modèle en modes guidés a été proposé pour tenir compte de l'effet des parois sur le couplage. Ce modèle corrèle les ondes planes huit par huit et répartit l'énergie de façon isotrope et non plus des directions d'ondes planes : c'est un modèle «pseudo-isotrope» qui relie le nombre d'ondes planes avec la fréquence. Son application au couplage donne des résultats similaires à ceux de la mesure. Un calcul rigoureux a également été proposé pour retrouver le développement modal du champ de la zone de mesure. Les premiers résultats semblent confirmer les hypothèses du modèle pseudo-isotrope.

*Abstract :* This thesis analyses electromagnetic coupling with electronic linear systems tested in Mode Tuned Reverberation Chambers (MTC). In a reverberating environment like MTC, the coupling between the emitting antenna and the tested system depends heavily on the diffraction properties of the surroundings. If the field in the measurement zone is expanded on a fixed basis of functions, a random diffraction matrix can be introduced. It translates the emitted field in a random reflected field. For an ideal MTC, we have shown that the expansion amplitudes follow a special probability law which we have derived explicitly. It is also shown that the variances of the coefficients of the diffraction matrix satisfy a specific relation which also holds the fluctuations of the measured  $S$ -parameters. Consequently, a fast qualification method can be proposed for MTC. It is also proved that under ideal conditions, the coupling is entirely determined by its variance. It depends on the spatial covariance of the incident field. Two field models are proposed to express this covariance. At first, the isotropic random plane wave model presented by Hill is generalized to arbitrary linear systems. Secondly, a waveguide mode model is proposed to take into account the walls of the MTC. This model makes the plane waves correlated eight by eight and forces the energy distribution to be isotropic but not the plane wave directions : it is a "pseudo-isotropic" model which allows the number of plane waves to grow with the frequency. Its application to the coupling gives results similar to the measured ones. A rigorous computation is also proposed in order to retrieve the waveguide mode expansion. Some first results seem to confirm the hypothesis underlying the pseudo-isotropic model.