

Utilisation de méthodes variationnelles en traitement d'image

Jean-François Aujol

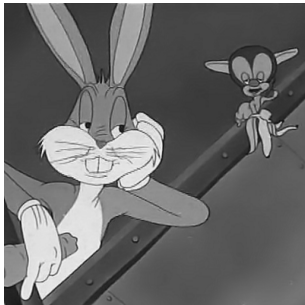
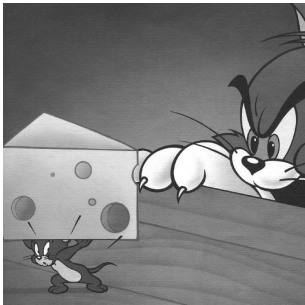
CMLA, ENS Cachan, CNRS, Universud
Jean-Francois.Aujol@cmla.ens-cachan.fr

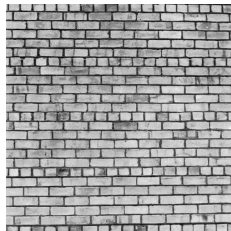
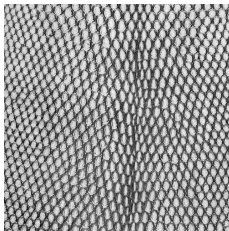
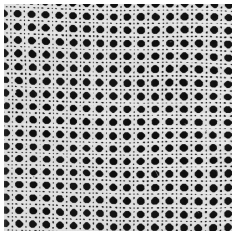
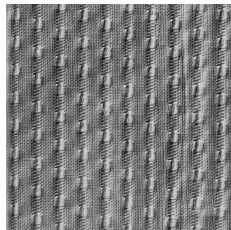
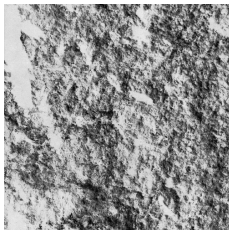
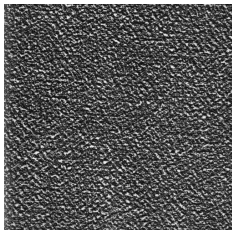
Habilitation à diriger des recherches

Mercredi 27 mai 2009

- 11/2005- Chargé de Recherche CNRS au CMLA.
- 03/2005-10/2005 Postdoc à l'ENST Paris (hôte : Henri Maître).
- 09/2004-02/2005 Postoc à UCLA (hôte : Tony Chan).
- 2001-2004 Thèse en mathématiques appliquées à l'Université de Nice-Sophia-Antipolis (directeurs : Gilles Aubert et Laure Blanc-Féraud).
- 2000-2001 Agrégation de Mathématiques.
- 1999-2000 Master MVA (ENS Cachan).

- Modélisation mathématique des images, et en particulier des textures.
- 3 grandes approches pour décrire les textures :
 - Modélisation fréquentielle d'une texture (notamment pour les textures quasi-périodiques)
 - Modélisation géométrique d'une texture, à l'aide de son motif de base (texton).
 - Modélisation d'une texture à l'aide de la distribution empirique de l'ensemble de ses voisinages ("patches") : méthode de *copier-coller* (purement algorithmique au départ). Cas particulier des approches par modélisation markovienne.





- On dispose d'une mesure f .
Objectif : reconstruire une image u définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ élément de E espace de Banach.
On cherche u comme solution d'un problème de minimisation de la forme :

$$\inf_{u \in E} \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

Calcul de u avec l'équation d'Euler-Lagrange associée.

- Exemple typique de fonctionnelle en restauration d'image :

$$\inf_u (\|f - u\|^2 + L(u))$$

avec L opérateur de régularisation, e.g. $L(u) = \|\nabla u\|^2$, ou $L(u) = \int_{\Omega} |Du|$.

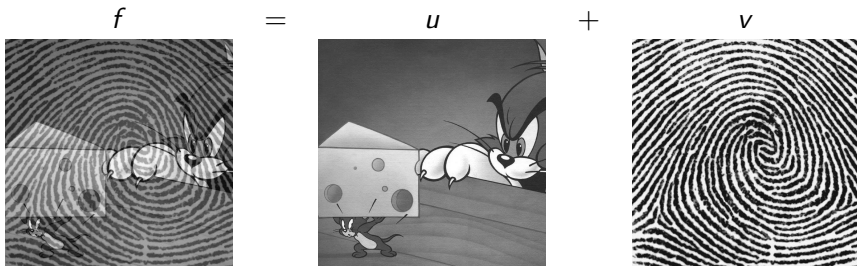
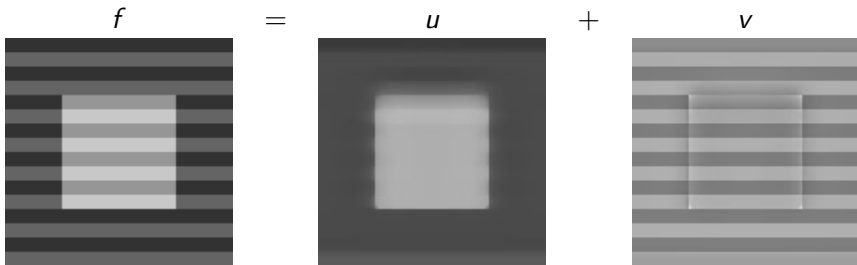
$$\inf_{u \in E} \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

- Mise au point de nouvelles méthodes par l'introduction de fonctionnelles F spécifiques en adéquation avec des tâches de traitement d'image.
- Etude théorique et expérimentale de ces fonctionnelles, et comportement qualitatif des solutions.
- Mise au point d'algorithmes numériques itératifs pour résoudre les problèmes d'optimisation associés.

- 1 Décomposition additive d'image (modélisation fréquentielle des textures)
- 2 Echelle spatiale et modélisation géométrique des textures
- 3 Inpainting par copier-coller (modélisation d'une texture à l'aide de la distribution empirique de ses voisinages)
- 4 Applications en imagerie satellitaire

- 1 Décomposition additive d'image (modélisation fréquentielle des textures)
- 2 Echelle spatiale et modélisation géométrique des textures
- 3 Inpainting par copier-coller (modélisation d'une texture à l'aide de la distribution empirique de ses voisinages)
- 4 Applications en imagerie satellitaire

Décomposition d'image



On note $J(u) = \int_{\Omega} |Du|$.

Modèle ROF : (f donnée, u image reconstruite)

$$\inf_{u \in BV} \left(J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_2^2 \right)$$

En posant $v = f - u$, le problème se réécrit :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times L^2 / f = u+v} \left(J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|v\|_2^2 \right)$$

Mais la norme L^2 ne mesure pas les oscillations.

Exemple : $\Omega = (0, 2\pi)$, et $f_n(x) = \cos(nx)$.

Plus n est grand, plus f_n oscille.

$$\|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \pi.$$

\implies Idée : prendre une autre norme qui tende vers 0 plus f_n oscille.

Y. Meyer (2001) a proposé le modèle suivant :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times G / f = u+v} (J(u) + \alpha \|v\|_{\text{Texture}})$$

Idée : Texture = élément fortement oscillant.

Espace des textures \implies dual d'un espace de Sobolev, comme par exemple l'espace suivant :

Définition : G est l'espace de Banach des éléments v tels que $v = \text{div}(g)$ avec g_1 et g_2 dans L^∞ .

$$\|v\|_G = \inf \left\{ \|g\|_\infty / v = \text{div}(g), g = (g_1, g_2), g_1 \text{ et } g_2 \in L^\infty, |g(x)| = \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2}(x) \right\}$$

Exemple : $\Omega = (0, 2\pi)$, et $f_n(x) = \cos(nx) = \left(\frac{1}{n} \sin(nx)\right)'$.

Alors $\|f_n\|_G \leq \frac{1}{n}$.

$$\inf_{(u \times v) \in BV \times T / f = u + v} (J(u) + \lambda \|v\|_T)$$

- Choix de la norme de texture T
[Aujol-Chambolle 05], [Aujol-Gilboa-Chan-Osher 06],
[Maurel-Aujol-Peyré 09]
- Calcul automatique du paramètre de régularisation λ
[Aujol-Gilboa 06], [Aujol-Gilboa-Chan-Osher 06]
- Algorithmes numériques
[Aujol et al 05], [Aujol-Gilboa 06], [Aujol 08],
[Duval-Aujol-Vese 08]
- Applications (cas couleur, classification, inpainting, ...)
[Aujol-Kang 06], [Aujol-Chan 06], [Duval-Aujol-Vese 08],
[Maurel-Aujol-Peyré 09]

$$\inf_u \left(J(u) + \frac{\lambda}{2} \|f - u\|_{\mathcal{H}}^2 \right)$$

avec

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, Kg \rangle_{L^2}$$

où K est un opérateur linéaire symétrique.

- ① Si $K = Id$, alors $\mathcal{H} = L^2 \implies$ modèle ROF
- ② Si $K = -\Delta^{-1}$, alors $\mathcal{H} = H^{-1} \implies$ modèle OSV

$$\inf_u \left(J(u) + \frac{\lambda}{2} \|f - u\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \quad (1)$$

Il est possible d'adapter l'algorithme de projection d'A. Chambolle à cette fonctionnelle :

Algorithme (point fixe) :

$$p^0 = 0 \quad \text{et} \quad p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau(\nabla(K^{-1}\text{div}(p^n) - \lambda f))_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla(K^{-1}\text{div}(p^n) - \lambda f))_{i,j}|}$$

Théorème : [Aujol-Gilboa 06]

Si $\tau \leq \frac{1}{\|\nabla K^{-1}\|_{L^2}}$, alors $f - \frac{1}{\lambda} K^{-1} \text{div } p^n \rightarrow \hat{u}$ quand $n \rightarrow \infty$, où \hat{u} est la solution du problème (1).

Algorithme (gradient projeté) :

$$p^0 = 0 \text{ et } p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau(\nabla(K^{-1}\text{div}(p^n) - \lambda f))_{i,j}}{\max\left\{1, p_{i,j}^n + \tau|(\nabla(K^{-1}\text{div}(p^n) - \lambda f))_{i,j}|\right\}}$$

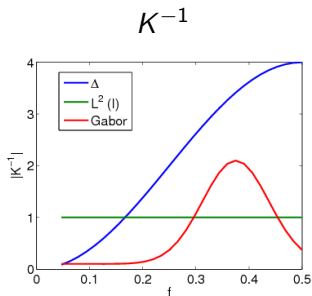
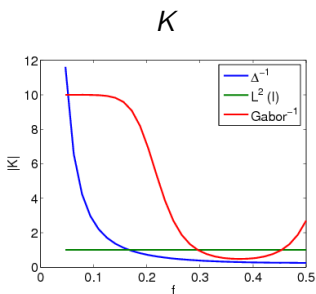
Théorème : [Aujol 08], [Duval-Aujol-Vese 08]

Si $\tau \leq \frac{2}{\|\nabla K^{-1}\|_{L^2}}$, alors $f - \frac{1}{\lambda} K^{-1} \text{div } p^n \rightarrow \hat{u}$ solution du problème précédent.

Remarques :

- Cas particulier des algorithmes de Forward-Backward proximal splitting [Combettes-Wajs 05].
- On peut utiliser des algorithmes plus rapides, mais aussi plus compliqués à mettre en oeuvre pour calculer cette projection (en utilisant les schémas de **Nesterov**) ([Weiss et al 06], [Aujol 08]).

$$\inf_u \left(J(u) + \frac{\lambda}{2} \|f - u\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \quad \text{avec} \quad \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, Kg \rangle_{L^2}$$



Le noyau K et son inverse K^{-1} pour les modèles OSV, ROF, et TV-Gabor (modèle TV-Hilbert avec K^{-1} filtre de Gabor).

f



TV-Gabor, u



v



TV- L^2 , u



v



Collaboration avec Pierre Maurel (CMLA) et Gabriel Peyré (Ceremade) dans le cadre de l'ANR Natimages.

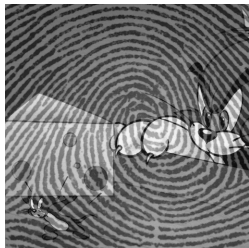
Hypothèse : *textures localement parallèles*.

⇒ construction d'une norme adaptée à ce type de textures.

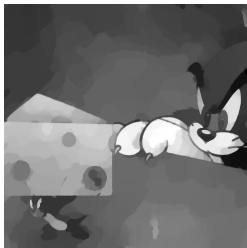
⇒ Estimation locale de la fréquence et de la direction (transformée de Fourier sur une fenêtre locale).

⇒ La base discrète de Fourier (utilisée précédemment) est remplacée par une base de Fourier locale.

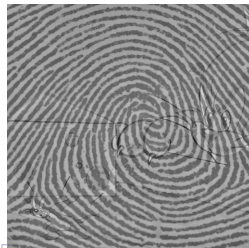
f



u



v



- 1 Décomposition additive d'image (modélisation fréquentielle des textures)
- 2 Echelle spatiale et modélisation géométrique des textures
- 3 Inpainting par copier-coller (modélisation d'une texture à l'aide de la distribution empirique de ses voisinages)
- 4 Applications en imagerie satellitaire

- $BV(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ pour $N = 2$.

On peut étendre la variation totale $|Du|$ comme une fonction convexe sci J définie sur $L^2(\Omega)$ par :

$$J(u) = \begin{cases} |Du|(\Omega) & \text{si } u \in BV(\Omega) \\ +\infty & \text{si } u \in L^2(\Omega) \setminus BV(\Omega) \end{cases}$$

- **Définition (sous-différentielle)** : $v \in \partial J(u)$ ssi pour tout $w \in L^2(\Omega)$, on a $J(u + w) \geq J(u) + \langle v, w \rangle_{L^2(\Omega)}$.
- **Définition** : Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ borné de périmètre fini. E est **calibrable** ssi il existe une constante $\lambda_E \in \mathbb{R}$ telle que $\lambda_E \mathbf{1}_E \in \partial J(\mathbf{1}_E)$.
On a nécessairement $\lambda_E = \frac{\text{Per } E}{|E|}$.
- **Remarque** : Si E convexe $C^{1,1}$, alors E calibrable ssi la courbure de E est plus petite que $\frac{\text{Per } E}{|E|}$.

Modèle de Rudin-Osher-Fatemi :

$$\inf_u \left(J(u) + \frac{1}{2t} \|f - u\|_{L^2}^2 \right)$$

Flot de la variation totale :

$$\begin{cases} u(., 0) = f \\ \frac{\partial u}{\partial t} \in -\partial J(u) \end{cases}$$

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ évoluant à vitesse constante selon le flot de la variation totale vérifie nécessairement $\lambda_E \mathbf{1}_E \in \partial J(\mathbf{1}_E)$; i.e. E est calibrable.

[Alter-Caselles 05,07], [Bellettini et al 02,05] [Caselles et al 08]
Soit $f = \mathbf{1}_E$, avec E convexe et calibrable. Alors les solutions
obtenues avec les deux modèles précédents sont identiques et
données par :

$$u(x, t) = \max \left(\left(1 - t \frac{\text{Per } E}{|E|} \right), 0 \right) \mathbf{1}_E$$

La vitesse d'évolution de E est donc $-\frac{\text{Per } E}{|E|}$.

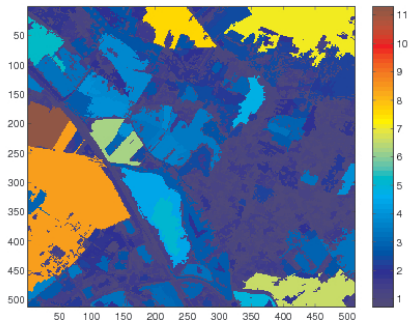
Si on définit l'échelle d'un élément E par : $\text{échelle}(E) = \frac{|E|}{\text{Per } E}$, la
vitesse absolue de E est inversement proportionnelle à son échelle.
 \implies propriété utilisée dans [Strong-Aujol-Chan 06], puis
[Luo-Aujol-Gousseau 09] pour calculer l'échelle des éléments dans
les images.



(a)

(a) Image de Toulouse, SPOT5 (5m)©CNES ;

(b) Carte d'échelle correspondante.



(b)

Etude dans le cadre de la thèse de Vincent Duval, co-encadrement avec Yann Gousseau (Telecom ParisTech).

$$\inf_{u \in BV(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} |Du| + \lambda \|f - u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

- Proposé en traitement d'image dans [Nikolova 04], dans le cadre de la restauration d'image dégradée par du bruit impulsionnel.
- Apparaît comme un très bon modèle de décomposition d'image [Darbon-Sigelle 06], [Aujol-Gilboa-Chan-Osher 06], [Yin-Goldfarb-Osher 07].
- **Remarque** : si $\Omega = (0, 2\pi)$, et $f_n(x) = \cos(nx)$, alors $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} = 4$ si $n \geq 1$.

$$\inf_{u \in BV(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} |Du| + \lambda \|f - u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \quad (1)$$

Etant donnée $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on considère la famille de problèmes :

$$\inf_{U \subset \mathbb{R}^2} \text{Per } U + \lambda |U \Delta F_\mu| \quad (2)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $F_\mu = \{x, f(x) > \mu\}$.

Théorème (Equivalence géométrique) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Il y a équivalence entre :

- (i) u est solution de (1)
- (ii) Les ensembles de niveaux U_μ de u sont presque tous solutions de (2).

\implies *TVL1 = filtre morphologique* (cf [Darbon-Sigelle 06] pour TVL1 discret)

Problème géométrique pour la donnée F :

$$\inf_U E_G(U) := \text{Per } U + \lambda |U \Delta F| \quad (1)$$

Proposition :

- Soit $F \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble calibrable. Alors F vérifie la propriété de seuil, i.e. :
 - F est l'unique solution de (1) pour $\lambda > \lambda_F$
 - \emptyset et F sont solutions de (1) pour $\lambda = \lambda_F$.
 - \emptyset est l'unique solution de (1) pour $\lambda < \lambda_F$
- Réciproquement, si F convexe vérifie la propriété de seuil, alors F est calibrable, et $\lambda_F = \frac{\text{Per } F}{|F|}$.

Différence qualitative entre TVL2 et TVL1

Soit $f = \mathbf{1}_C$, avec C ensemble convexe calibrable, et $\lambda_C = \frac{\text{Per } C}{|C|}$.



$$\inf_u \left(\int |Du| + \frac{1}{2t} \|f - u\|_{L^2}^2 \right)$$

\Rightarrow

$$u(x, t) = \begin{cases} (1 - t\lambda_C)\mathbf{1}_C & \text{si } 0 < t \leq 1/\lambda_C \\ 0 & \text{si } t \geq 1/\lambda_C \end{cases}$$

(cf aussi [Meyer 01], [Chan-Esedoglu 05])



$$\inf_u \left(\int |Du| + \frac{1}{2t} \|f - u\|_{L^1} \right)$$

\Rightarrow

$$u(x, t) = \begin{cases} \mathbf{1}_C & \text{si } 0 < t < 1/(2\lambda_C) \\ r\mathbf{1}_C & \text{si } t = 1/(2\lambda_C) \text{ avec } r \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } t > 1/(2\lambda_C) \end{cases}$$

Définition : Erodée et ouverture de rayon $r > 0$ de C :

$$C_r := C \ominus B(0, r) := \{x \in C, B(x, r) \subset C\}$$

$$C^r := C_r \oplus B(0, r) = \bigcup_{B(x, r) \in C} B(x, r)$$

Théorème : Soit C un ensemble borné convexe. Il existe $\lambda^* > 0$ tel que $|C_{1/\lambda^*}| = \frac{\pi}{\lambda^{*2}}$, $\frac{\text{Per } C^{1/\lambda^*}}{|C^{1/\lambda^*}|} = \lambda^*$, et :

- Pour $\lambda > \lambda^*$, l'ensemble $C^{1/\lambda}$ est l'unique solution du problème géométrique (avec $F = C$).
- Pour $\lambda = \lambda^*$, l'ensemble des solutions du problème géométrique est exactement $\{C^{1/\lambda^*}, \emptyset\}$.
De plus, C^{1/λ^*} est l'ensemble de **Cheeger** de C , i.e. C^{1/λ^*} solution du problème $\min_{K \subset C} \frac{\text{Per } K}{|K|}$.
- Pour $\lambda < \lambda^*$ l'unique solution du problème géométrique est \emptyset .

$$\inf_U E_G(U) := \text{Per } U + \lambda |U \Delta F| \quad (1)$$

Corollaire : Soit C un ensemble borné convexe, et $\lambda > 0$. Soit $C^{1/\lambda}$ l'ouverture de C de rayon $\frac{1}{\lambda}$. Alors :

- Si $\frac{\text{Per } C^{1/\lambda}}{|C^{1/\lambda}|} > \lambda$, la solution de (1) est $C^{1/\lambda}$.
- Si $\frac{\text{Per } C^{1/\lambda}}{|C^{1/\lambda}|} < \lambda$, la solution de (1) est \emptyset .
- Si $\frac{\text{Per } C^{1/\lambda}}{|C^{1/\lambda}|} = \lambda$, $C^{1/\lambda}$ et \emptyset sont solutions de (1).

\implies TVL1 agit essentiellement comme une **granulométrie** (qui détruit les petits détails et les grandes courbures), renforcée par un seuillage sur le rapport périmètre/aire.

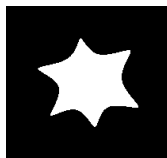
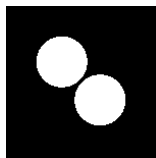
Partie géométrique u : objets de granulométrie grossière.

Partie texture v : objets de granulométrie fine.

\implies Critère géométrique \neq critère fréquentiel (oscillations) des modèles d'Y. Meyer.

- Algorithme rapide implémenté avec la Fast Level Set Transform de P. Monasse (utilisation de *Megawave*).
- On voudrait traiter les parties convexes avec des ouvertures, et les parties concaves avec des fermetures.
 - ⇒ candidat naturel comme opérateur : ouverture puis fermeture, ou l'inverse.
 - ⇒ utilisation d'un filtre séquentiellement alterné.
- Les temps de calcul sont comparables à ceux l'algorithme [Darbon-Sigelle 06] par graph-cut (~ 1 seconde pour une image 512×512).
- Avantage : choix de l'élément structurant (algorithme isotrope).

Images originales



Boule "carrée"



Boule "ronde"



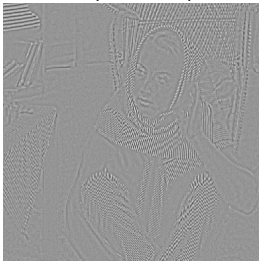
$u (TV - G)$



$u (TV - L^1)$



$v (TV - G)$



$v (TV - L^1)$



- 1 Décomposition additive d'image (modélisation fréquentielle des textures)
- 2 Echelle spatiale et modélisation géométrique des textures
- 3 Inpainting par copier-coller (modélisation d'une texture à l'aide de la distribution empirique de ses voisinages)
- 4 Applications en imagerie satellitaire

Collaboration avec Saïd Ladjal (Telecom ParisTech) et Simon Masnou (Paris 6) dans le cadre de l'*ANR Freedom*.

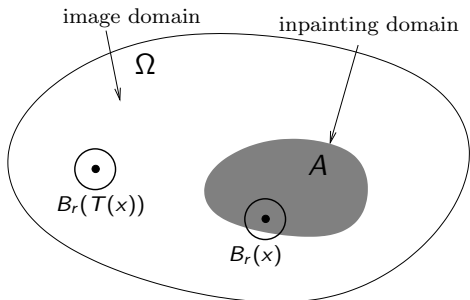
- L'inpainting consiste à retrouver une partie manquante de l'image (vieille photographie, retouche d'image, ...).
- Méthodes copier-coller, proposées initialement dans [Efros-Leung 99].

Hypothèse sous-jacente de ces méthodes \implies localité et stationnarité à une certaine échelle d'une texture.

Méthodes purement algorithmiques à l'origine.



Une image avec plusieurs parties manquantes, et la reconstruction avec une méthode de type copier coller.



But : trouver une application T qui prend les patches de A , les translate et les tourne dans $\Omega \setminus A$.

\implies problème de transport

\implies peut être vu comme un problème variationnel

- 1 Proposer une interprétation variationnelle générale dans le domaine continu.
- 2 Expliquer d'un point de vue variationnel, la capacité de ces méthodes à reconstruire la géométrie, et caractériser le type de géométrie reconstruite.

T est une roto-translation par morceaux de A dans $\Omega \setminus A$:

$$T(x) = \sum_{i \in I} R_i(x - c_i) \mathbf{1}_{A_i}$$

où $\{A_i\}_{i \in I}$ partition de A , R_i matrice de rotation, et c_i vecteur de translation.

- u_0 n'est connue qu'en dehors de A .
- Une fois T donnée, u_0 définie sur A par $u_0(x) = u_0(T(x))$ pour tout $x \in A$.
- Pour favoriser la similarité locale, si $x + y$ proche de x , on veut $T(x + y)$ proche de $T(x)$, i.e. :

$$T(x + y) \approx T(x) + \nabla T(x) y$$

- Pour mesurer la distance entre un patch $B_r(x)$ et son image $B_r(T(x))$, on propose le critère :

$$\int_A \int_{B_r(0)} |u_0(T(x + y)) - u_0(T(x) + \nabla T(x) y)|^2 dy dx$$

- Il faut empêcher T d'être une translation globale pour éviter les minimiseurs triviaux.
On rajoute la connaissance de la donnée dans une bande autour de A (et pas seulement à la frontière ∂A).

(**Modèle I**)

$$\mathcal{E}_1(T) = \int_{x \in A+B_r} \int_{y \in B_r} |u_0(T(x+y)) - u_0(T(x) + \nabla T(x) y)|^2 dy dx$$

avec les contraintes

- u_0 donnée sur $\Omega \setminus A$;
- $T(A + B_r) \subset \Omega \setminus (A + B_r)$;
- $T = \text{Id}$ sur $\Omega \setminus (A + B_r)$;

On montre que \mathcal{E}_1 peut être minimisée dans la classe des roto-translations de Ω dans lui-même.

L'image reconstruite est alors :

$$u(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \in A \\ u_0(T(x)) & \text{si } x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

Idée : rajouter des contraintes sur la géométrie reconstruite (afin d'éviter les effets de blocs).

- \implies Fonction interpolatrice u , sous la contrainte que u coïncide avec u_0 à l'extérieur de A .
- \implies nouveau critère :

$$\tilde{\mathcal{E}}_2(u, T) = \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx$$

- contrainte géométrique : pénalisation des variations locales de u dès qu'elle sont plus importantes que celles de u_0 .

Si $u_0, u \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, on définit le critère :

(**Modèle II**)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(u, T) = & \frac{1}{r^N} \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx \\ & + \frac{1}{r^{N-1}} \int_{A+B_r} \left(|Du|(B_r(x)) - |Du_0|(B_r(T(x))) \right)^+ dx \end{aligned}$$

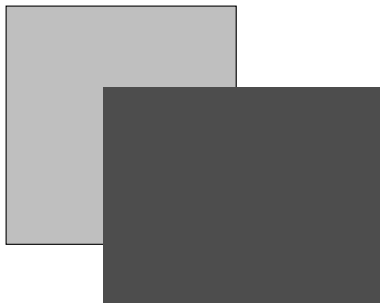
On peut montrer l'existence d'une solution (u, T) (u dans BV et T roto-translation par morceaux).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(u, u^g, T) &= \frac{1}{r^N} \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx \\ &\quad + \frac{1}{r^{N-1}} \int_{A+B_r} \left(|Du^g|(B_r(x)) - |Du_0^g|(B_r(T(x))) \right)^+ dx \end{aligned}$$

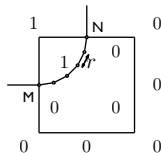
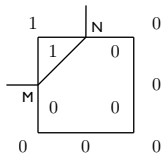
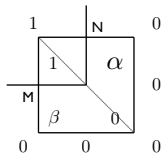
avec u_0^g partie géométrique de u_0 , et u^g partie géométrique de u contrainte par u_0 , i.e. :

$$\begin{aligned} u_0^g &= \operatorname{argmin}_{v^g \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)} |Dv^g|(\Omega) + \|u_0 - v^g\|_{L^1(\Omega)} \\ u^g &= \operatorname{argmin}_{\substack{v^g \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \\ v^g = u_0^g \text{ sur } \Omega \setminus A}} |Dv^g|(\Omega) + \|u - v^g\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

On montre l'existence d'une solution (u, u^g, T) , avec u dans BV , u^g sa partie géométrique contrainte par u_0 , et T roto-translation par morceaux.



Trois candidats



	Modèle I	Modèle II
Continuation rectangulaire	0.76	1.53
Continuation "plus court chemin"	0.65	1.22
Continuation polygonale	0.62	1.14



Problème : trouver des algorithmes numériques pour minimiser les énergies précédentes ...

- 1 Décomposition additive d'image (modélisation fréquentielle des textures)
- 2 Echelle spatiale et modélisation géométrique des textures
- 3 Inpainting par copier-coller (modélisation d'une texture à l'aide de la distribution empirique de ses voisinages)
- 4 Applications en imagerie satellitaire

Objectif : comparer des images à résolutions différentes.

1 Echelle caractéristique invariante par changement de résolution

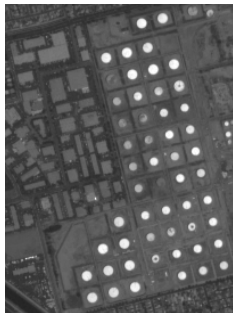
Utilisation de l'espace multi-échelle linéaire, et de la variation totale.

[Luo-Aujol-Gousseau-Ladjal-Maître 07]

2 Classification d'images à différentes résolutions.

Utilisation de primitives ondelettes (dérivées d'une Gaussienne).

[Luo-Aujol-Gousseau-Ladjal 08]



Restauration d'image dans le cas d'un échantillonnage irrégulier.

[Facciolo-Almansa-Aujol-Caselles 09]



Image perturbée



Image restaurée

Bruit multiplicatif dès qu'on considère des systèmes d'imagerie active : image laser, microscope laser, images RSO, ...

Modélisation : $f = uv$

⇒ Le bruit ne peut plus être supposé gaussien.

⇒ Fonctionnelle non convexe :

$$\inf_{\{u \in BV(\Omega), u > 0\}} J(u) + \lambda \int_{\Omega} \left(\log u + \frac{f}{u} \right)$$

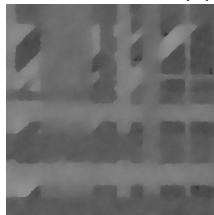
Image non bruitée



Image bruitée (f)



Image restaurée (u)



Questions ?

Pour plus de détails :

<http://www.cmla.ens-cachan.fr/~aujol/>