



HAL
open science

MODÉLISATION DE LA PROPAGATION D'ONDES ÉLASTIQUES ANTIPLANES DANS DES MILIEUX MULTIFISSURÉS

Mihai Caleap

► **To cite this version:**

Mihai Caleap. MODÉLISATION DE LA PROPAGATION D'ONDES ÉLASTIQUES ANTIPLANES DANS DES MILIEUX MULTIFISSURÉS. Acoustique [physics.class-ph]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2009. Français. NNT: . tel-00380479

HAL Id: tel-00380479

<https://theses.hal.science/tel-00380479>

Submitted on 30 Apr 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3778



THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

Par **Mihai CALEAP**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **MÉCANIQUE ET INGÉNIERIE**

**MODÉLISATION DE LA PROPAGATION D'ONDES ÉLASTIQUES ANTIPLANES
DANS DES MILIEUX MULTIFISSURÉS**

Directeur de Thèse : M. C. ARISTÉGUI, Université Bordeaux 1

Soutenue le : 12 mars 2009

Après avis de :

M^{me} F. LUPPÉ, Professeur, Université du Havre
M. A. LHÉMERY, Expert Senior en Contrôle Non-Destructif (HDR), CEA

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

M. Y. LE PETITCORPS, Professeur, Université Bordeaux 1
M. Y. C. ANGEL, Professeur, Université Claude Bernard
M. C. ARISTÉGUI, Maître de Conférences (HDR), Université Bordeaux 1
M. S. BASTE, Professeur, Université Bordeaux 1
M. J.-M. CONOIR, Directeur de Recherche CNRS, Université Pierre et Marie Curie
M. A. LHÉMERY, Expert Senior en CND (HDR), CEA
M^{me} F. LUPPÉ, Professeur, Université du Havre

Président
Examineurs

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés au Laboratoire de Mécanique Physique (UMR CNRS 5469) de l'Université Bordeaux 1. Je tiens à exprimer ma gratitude à Messieurs Didier Desjardins et Marc Deschamps de m'avoir accueilli au sein de leurs laboratoire.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Madame Francine Luppé, Professeur de l'Université du Havre, ainsi qu'à Monsieur Alain Lhémy, Expert Senior en Contrôle Non-Destructif au Commissariat d'Énergie Atomique, pour avoir accepté le rôle de rapporteur pour mon mémoire. Leur lecture attentive, les remarques et les conseils qu'ils ont exprimés ont été très constructifs et ont guidé la finalisation de ces travaux.

Mes sincères remerciements à Monsieur Yann Le Petitcorps, Professeur de l'Université Bordeaux 1, pour avoir présidé le jury de soutenance : qu'il soit convaincu de ma gratitude.

Je tiens à exprimer mes très respectueux remerciements à Monsieur Jean-Marc Conoir, Directeur de Recherche au CNRS, non seulement pour sa participation au jury de thèse mais aussi pour avoir mis entre mes mains ce projet de recherche lors de mon séjour Erasmus à l'Université du Havre. Francine et Jean-Marc m'ont initié aux aspects physiques des mathématiques appliquées et à la diffusion multiple, qu'ils sachent combien je leur en suis reconnaissant et combien j'ai apprécié nos échanges scientifiques.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Stéphane Baste, Professeur de l'Université Bordeaux 1, de m'avoir offert, au sein de son équipe (Endommagement), l'opportunité de découvrir, en toute liberté, le métier de chercheur et ses multiples facettes.

Cette thèse prend toute sa complexité scientifique grâce à Monsieur Yves Angel, Professeur de l'Université Claude Bernard, qui a participé à la mise en route du projet. Je le remercie vivement pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour les échanges fructueux que nous avons eus.

Je remercie très vivement Monsieur Christophe Aristégui, Maître de Conférences à l'Université Bordeaux 1, pour avoir dirigé mes travaux de thèse. Il a été à la fois le directeur et l'encadrant de ma thèse ainsi que mon coach scientifique. Les directions de recherche que nous avons explorées ensemble furent, selon mon opinion, très passionnantes. Je suis sensible à l'aide qu'il m'a constamment prodiguée au cours de ces travaux ainsi qu'à l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ce projet. Je souhaite également le remercier pour ses encouragements, sa bienveillance et sa pédagogie *stricto sensu*. « Ce n'est pas génial » Christophe ?!

Je tiens aussi à remercier Olivier Poncelet pour toutes nos discussions interactives scientifiques, politiques, religieuses ou d'autres et Alexander Shuvalov, pour sa générosité, sa sagesse et son amour du « mot juste » ainsi que son soutien moral quand j'étais en déficit d'idées. Merci (спасибо) !

Je voudrais exprimer ma gratitude à tous mes camarades de thèse : Stas – mon compagnon de piscine qui a complété et validé les modèles développés dans ce manuscrit, Mahmoud et Mhamad – les compatriotes du Moyen Orient qui m'ont ouvert les frontières de la pensée envers les « guerres civiles », Slah - le « couz » - qui m'a fait « douter » de l'existence du Créateur et avec qui on a faillit rater tous les bus, trains, avions à travers nos déplacements scientifiques, Jérôme – pour avoir adopté mon chat, Claudiu – pour son amitié et avec qui j'avais de discussions très longues et très constructives, pas toujours scientifiques. Merci également à toutes les personnes qui ont rendu les années passées au Laboratoire de Mécanique Physique les plus agréables possibles et tout particulièrement : Nikolay, Weina, Anis, Guillaume, Mathieu P., Damien, François, Ludo, Thomas, Mathieu D., Hugues, Bénédicte, Marion, Jérémy, Youssef, Yannick, Jean-Philippe, Michel, Éric, Clément, Cathy, Sandrine, Béatrice et Claude. Je suis également reconnaissant à tous mes amis locaux qui ont égayés mon séjour à Bordeaux, en particulier Julie, Traian, Marilena, Nikita et Amelia.

Bien qu'un océan, des mers ou des pays me séparent de mes parents, ma famille et mes amis un peu partout dans le monde, soyez assurés que vous êtes très proches dans mon cœur !

À mes parents

Table des Matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
I. THÉORIE MODALE DE LA DIFFUSION MULTIPLE D'UNE ONDE ANTIPLANE PAR DES CAVITÉS CYLINDRIQUES À SECTION QUELCONQUE.....	7
I.1 NOTATIONS ET RAPPELS THÉORIQUES SUR LA PROPAGATION DES ONDES ÉLASTIQUES EN MILIEU SOLIDE HOMOGÈNE.....	7
I.2 CONDITIONS DE CONTINUITÉ	9
I.3 FONCTIONS D'ONDE CYLINDRIQUES	10
I.3.1 <i>Théorie modale de la diffusion en milieu élastique</i>	12
I.3.2 <i>Diffusion simple par un cylindre à section quelconque</i>	14
I.3.3 <i>Diffusion multiple par un nombre fini de cylindres à section quelconque</i>	16
I.4 FONCTIONS D'ONDE ELLIPTIQUES	21
I.4.1 <i>Coordonnées du cylindre elliptique</i>	22
I.4.2 <i>Fonctions de Mathieu angulaires et radiales</i>	23
I.4.3 <i>Diffusion simple par un cylindre à section elliptique</i>	24
I.5 DIFFUSION EN CHAMP LOINTAIN : AMPLITUDE DE DIFFUSION	26
I.6 APPROXIMATION BASSE FRÉQUENCE	27
I.7 RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS	28
I.8 CONCLUSION	32
II. DIFFUSION SIMPLE PAR UNE FISSURE VISQUEUSE ANTIPLANE.....	35
II.1 FORMULATION DU PROBLÈME ET CONDITIONS LIMITES.....	35
II.2 CHAMP DE DÉPLACEMENT DIFFUSÉ : TRANSFORMÉE DE FOURIER SPATIALE	38
II.2.1 <i>Densité de dislocation</i>	39
II.2.2 <i>Équation intégrale singulière</i>	39
II.3 CHAMP DE DÉPLACEMENT DIFFUSÉ : REPRÉSENTATION DE GREEN	41
II.4 AMPLITUDE DE DIFFUSION EN CHAMP LOINTAIN	42
II.5 LIMITES ANALYTIQUES	43
II.5.1 <i>Approximation basse fréquence</i>	45
II.5.2 <i>Approximation haute fréquence</i>	48
II.6 RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION	50
II.6.1 <i>Diffusion en champ proche</i>	50
II.6.2 <i>Diffusion en champ lointain</i>	53

II.7	CONCLUSION	57
III.	DIFFUSION MULTIPLE PAR UNE DISTRIBUTION UNIFORME ET ALÉATOIRE DE DIFFUSEURS LINÉIQUES : MODÉLISATION	61
III.1	DÉFINITION DE LA DISTRIBUTION.....	62
III.1.1	<i>Couche de diffuseurs</i>	<i>63</i>
III.1.2	<i>Distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs.....</i>	<i>64</i>
III.1.3	<i>Approche probabiliste de la diffusion multiple.....</i>	<i>66</i>
III.2	SYSTÈME D'ONDES COHÉRENTES EN PRÉSENCE	67
III.2.1	<i>Champ moyen total.....</i>	<i>68</i>
III.2.2	<i>Champ moyen diffusé</i>	<i>70</i>
III.2.3	<i>Champ moyen d'excitation</i>	<i>71</i>
III.3	HYPOTHÈSE GLOBALE DE FERMETURE.....	72
III.4	NOMBRE D'ONDE EFFECTIF	74
III.5	ONDES COHÉRENTES À L'INTÉRIEUR ET À L'EXTÉRIEUR DE LA COUCHE.....	76
III.6	CONTINUITÉ DES CHAMPS COHÉRENTS AUX INTERFACES D'UNE COUCHE DE DIFFUSEURS	78
III.6.1	<i>Dérivées spatiales du champ de déplacement cohérent</i>	<i>79</i>
III.6.2	<i>Identification des quantités continues aux interfaces</i>	<i>80</i>
III.6.3	<i>Bilan d'énergie des ondes cohérentes interagissant avec une couche de diffuseurs</i>	<i>82</i>
III.7	CONCLUSION	82
IV.	DIFFUSION MULTIPLE PAR UNE DISTRIBUTION ALÉATOIRE DE DIFFUSEURS LINÉIQUES : APPLICATIONS	87
IV.1	DISTRIBUTION UNIFORME ET ALÉATOIRE DE FISSURES.....	87
IV.1.1	<i>Résultats numériques et discussion</i>	<i>89</i>
IV.1.2	<i>Limites analytiques.....</i>	<i>97</i>
IV.2	DISTRIBUTION UNIFORME ET ALÉATOIRE DE FISSURES PLATES DE TAILLE FINIE : COMPARAISON	101
IV.2.1	<i>Modèles de diffusion multiple disponibles : présentation</i>	<i>101</i>
IV.2.2	<i>Étude comparative en considérant les diffuseurs linéiques ou de taille réelle.....</i>	<i>103</i>
IV.3	MODÈLE DE FISSURES ALÉATOIREMENT ORIENTÉES	105
IV.3.1	<i>Propriétés acoustiques et mécaniques dynamiques.....</i>	<i>106</i>
IV.3.2	<i>Approximations basse fréquence.....</i>	<i>109</i>
IV.3.3	<i>Approximations haute fréquence.....</i>	<i>110</i>
IV.3.4	<i>Comparaison avec la formulation de Linton et Martin modifiée</i>	<i>110</i>
IV.4	DISTRIBUTION SPATIALE NON-UNIFORME DE DIFFUSEURS	112

IV.4.1	<i>Méthode de la matrice de transfert</i>	113
IV.4.2	<i>Application à une distribution spatiale non-uniforme de fissures</i>	115
IV.5	ONDES DE LOVE DANS UNE DISTRIBUTION <i>SUPERFICIELLE</i> DE CAVITÉS	122
IV.5.1	<i>Formulation et rappels théoriques</i>	123
IV.5.2	<i>Spectres de dispersion et d'atténuation</i>	124
IV.5.3	<i>Discussion</i>	126
IV.6	MODÉLISATION DE LA PROPAGATION D'ONDES COHÉRENTES PAR DES TENSEURS EFFECTIFS APPROPRIÉS : FAISABILITÉ.....	129
IV.6.1	<i>Onde cohérente homogène</i>	130
IV.6.2	<i>Onde cohérente hétérogène</i>	132
IV.7	CONCLUSION	134
V.	ANALYSE DE LA DIFFUSION MULTIPLE PAR UNE DISTRIBUTION UNIFORME ET ALÉATOIRE DE FISSURES VISQUEUSES DE TAILLE RÉELLE : APPLICATION À LA GÉOPHYSIQUE	139
V.1	MODÈLE DE DIFFUSION MULTIPLE DANS LA CROÛTE TERRESTRE	140
V.1.1	<i>Détermination de l'onde cohérente : champ moyen total</i>	140
V.1.2	<i>Champ moyen diffusé</i>	142
V.1.3	<i>Équation de dispersion satisfaite par le nombre d'onde effectif K</i>	143
V.1.4	<i>Formulation explicite du nombre d'onde effectif K</i>	144
V.1.5	<i>Atténuation et dispersion des ondes sismiques</i>	146
V.1.6	<i>Limites analytiques</i>	146
V.2	INFLUENCE DES PROPRIÉTÉS DE LA DISTRIBUTION SUR L'ATTÉNUATION ET LA DISPERSION DES ONDES SISMQUES	151
V.2.1	<i>Effet de la viscosité du fluide</i>	152
V.2.2	<i>Effet de l'orientation des fissures</i>	152
V.2.3	<i>Effet de la taille de fissures</i>	154
V.3	ESTIMATION DE LA TAILLE DE FISSURES DANS LA CROÛTE TERRESTRE.....	156
V.4	CONCLUSION	157
	CONCLUSION GÉNÉRALE	159
	RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	161
	ANNEXE A1 SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ EN COORDONNÉES ELLIPTIQUES	167
	ANNEXE A2 FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES GÉNÉRALISÉES	175
	ANNEXE A3 INTÉGRALE SINGULIÈRE	179

ANNEXE A4	RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE SINGULIÈRE	185
ANNEXE A5	MÉTHODE D'INTÉGRALE DE FRONTIÈRE ET FONCTION DE GREEN EN MILIEUX ISOTROPE.....	191
ANNEXE A6	DIFFUSION D'UNE ONDE ANTIPLANE PAR UNE FIBRE ÉLASTIQUE ELLIPTIQUE	197
ANNEXE A7	ATTÉNUATION HAUTE FRÉQUENCE DES ONDES COHÉRENTES DANS UN SOLIDE MULTIFISSURÉ.....	205

Introduction générale

L'étude des interactions entre les ondes ultrasonores et les milieux de propagation est d'un intérêt majeur pour la caractérisation et le contrôle non-destructifs de structures ou matériaux. Ces deux domaines d'investigation regroupent des techniques expérimentales et numériques dans le but d'acquérir sans dommage des informations sur le milieu inspecté à partir de l'analyse de champs ultrasonores. Ils nécessitent ce faisant la résolution de *problèmes inverses*. Avant d'élaborer une technique d'évaluation originale, il est nécessaire de formaliser préalablement la réponse acoustique du système étudié (et connu) soumis à une perturbation mécanique donnée. Cette étape communément appelée *problème direct*, comporte invariablement la simulation d'expériences (simulation du problème direct), qui autorise, à moindre frais, une étude de sensibilité des paramètres du modèle aux données ultrasonores synthétisées. Une fois la stratégie expérimentale ainsi définie, la prise en compte des données ultrasonores dans la construction du problème inverse fait l'objet d'une réflexion importante dans un souci d'améliorer la faisabilité des moyens d'investigation.

Différentes techniques non-destructives ont été développées afin de détecter, suivre et/ou caractériser la dégradation plus au moins progressive d'un matériau, induite par l'apparition et le développement de fissures (endommagement). Citons par exemple l'analyse de l'émission acoustique ou encore la mesure des variations sous charge des composantes du tenseur d'élasticité (Baste 2001). Dans ce contexte, nous nous intéressons à la description de la propagation d'ondes mécaniques dans une matrice élastique isotrope multifissurée (problème direct).

La propagation d'ondes élastiques en milieu hétérogène est une problématique complexe qui passe par une représentation stochastique du milieu (Foldy 1945) et la détermination des échelles caractéristiques du problème. On modélise un milieu hétérogène comme une réalisation d'un milieu aléatoire. Les évolutions des paramètres physiques du milieu en fonction de l'espace sont alors décrites par des processus aléatoires. La propagation d'une onde dans un tel milieu est gouvernée par une équation aux dérivées partielles à coefficients aléatoires. Cette approche stochastique peut être justifiée *a priori* par les arguments suivants :

- en certaines circonstances, on ne dispose que de données partielles sur le milieu dans lequel les ondes se propagent. Dans ce cas, l'approche stochastique vise à modéliser le manque d'information. La modélisation stochastique prend en compte les données disponibles (moyennes, spectres, ...), et complète ces données en utilisant une description statistique.

- en d'autres circonstances, on pourrait disposer d'une description complète du milieu mais celle-ci serait si compliquée et ferait intervenir tellement d'échelles différentes qu'il serait impossible de résoudre le problème complet de manière analytique ou numérique. La modélisation d'un tel milieu comme une réalisation d'un milieu aléatoire simplifie l'analyse par l'application de théorèmes limites pour des équations à coefficients aléatoires.

Enfin, l'approche stochastique peut se justifier *a posteriori* par la pertinence des résultats qu'elle permet d'obtenir. En particulier, nous verrons qu'on peut exhiber des quantités *cohérentes* (moyennes), dont le comportement est statistiquement stable dans le sens où il dépend seulement de la statistique du milieu, et ne tient pas compte de la réalisation particulière du milieu.

Lorsque les distances de propagation sont supposées être de l'ordre du libre parcours moyen élastique (distance parcourue par l'onde cohérente avant que son amplitude ait été divisée par e), représentatif de la distance entre deux interactions, les ondes interagissent fortement entre elles et leur énergie est distribuée dans tout l'espace. Ces événements de diffusion étant nombreux, nous parlons alors de diffusion multiple. La nature récursive des interactions multiples entre diffuseurs nécessite l'introduction d'un ordre de troncature, *via* la définition d'une hypothèse de fermeture. Que la démarche suivie considère un formalisme modal ou un formalisme de Green, on montre que la structure de ces ondes cohérentes est plane après avoir présupposé ou non sa forme. Le champ cohérent (amplitude et nombre d'onde K) est alors identifié. Finalement, selon que la géométrie du diffuseur est réduite à une singularité géométrique ou considérée finie, une formulation explicite ou implicite de K est obtenue.

L'objectif de cette étude est de modéliser la propagation des ondes cohérentes antiplanes (ou Transverses Horizontales) dans une distribution aléatoire et uniforme de fissures d'ouverture, d'orientation et de taille variables. Il s'agit de décrire d'un point de vue macroscopique, les propriétés acoustiques et mécaniques de tels milieux : nombre d'onde, impédance acoustique, masse volumique et module de rigidité.

Ce manuscrit est subdivisé en cinq chapitres. Les deux premiers présentent un état de l'art sur la diffusion simple d'ondes planes TH par une fissure ouverte ou fermée, sollicitée sous incidence oblique. La propagation d'ondes cohérentes TH dans un solide contenant une couche de diffuseurs linéiques anisotropes uniformément et aléatoirement distribués est étudiée dans un troisième chapitre. Le modèle de diffusion multiple développé conduit à établir les expressions des propriétés effectives acoustiques et mécaniques de milieux multifissurés, à partir des caractéristiques de diffusion d'un seul objet. La flexibilité de cette description est illustrée au

quatrième chapitre à travers différentes applications.¹ Une ouverture vers la géophysique est proposée au dernier chapitre. Nous considérons alors une distribution de fissures visqueuses de tailles variables. Par rapport au troisième chapitre, l'hypothèse de fermeture est différente et la géométrie des fissures est directement prise en compte. Les principaux résultats sont rassemblés dans une conclusion générale.

¹ Les prédictions issues de cette thèse ont été confrontées avec succès à des résultats obtenus par un code de calcul temporel de type différences finies (Golkin 2009). Ces confrontations peuvent être trouvées dans la thèse citée ci-dessus.

CHAPITRE I

Théorie modale de la diffusion multiple d'une onde antiplane par des cavités cylindriques à section quelconque

RÉSUMÉ – Ce chapitre vise à mettre en place certains éléments utiles à une confrontation ultérieure de résultats d'études numériques relatives à la diffusion multiple dans des milieux solides présentant une distribution déterministe de cavités cylindriques à section quelconque. Après avoir rappelé les solutions élémentaires de l'équation d'onde en coordonnées cylindriques et elliptiques ainsi que la théorie modale de la diffusion multiple, nous établissons la structure des solutions du problème canonique associé aux géométries cylindriques et elliptiques. À partir de ces résultats, nous calculons les amplitudes de diffusion et les fonctions de forme de cavités elliptiques en champ lointain.

I. Théorie modale de la diffusion multiple d'une onde anti-plane par des cavités cylindriques à section quelconque

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la description de la propagation d'une onde élastique antiplane (onde plane Transversale Horizontale) dans un milieu solide présentant un nombre fini de cavités cylindriques à section quelconque (milieu biphasique). L'étude de la diffusion d'une onde élastique plane TH par un unique obstacle cylindrique à section quelconque est alors menée. La théorie modale de la diffusion acoustique en milieu élastique est ainsi appliquée à la diffusion par des cavités cylindriques à section quelconque (Varadan *et al.* 1978, Weaver & Pao 1979, Léon *et al.* 2004, Caleap & Aristégui 2007). Nous nous concentrons dans ce chapitre à la théorie modale dans deux systèmes de coordonnées : cylindrique et cylindrique elliptique. La première permet de développer les solutions du problème en fonctions d'onde cylindriques (utilisant les fonctions de Bessel et de Hankel (Abramowitz & Stegun 1970)), tandis que la deuxième, plus appropriée aux cylindres à section elliptique, considère les fonctions d'onde elliptiques (utilisant les fonctions de Mathieu angulaires et radiales (Meixner & Schäfer 1954)). Le cas particulier d'une cavité cylindrique à section elliptique est traité à l'aide de ces deux descriptions.

Dans la suite, nous poserons les équations de base régissant les phénomènes acoustiques mis en jeu. L'acoustique étant définie comme la dynamique des petites perturbations d'un solide élastique (ou d'un fluide compressible), il convient dans un premier temps d'effectuer un rappel de mécanique des milieux continus afin d'établir le système d'équations à résoudre.

I.1 Notations et rappels théoriques sur la propagation des ondes élastiques en milieu solide homogène

Ce paragraphe, tout en rappelant brièvement des résultats théoriques connus, permet de poser les notations utilisées par la suite.

Un milieu continu élastique isotrope infini repéré par un système d'axes orthonormés $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est considéré. Un ébranlement le traversant entraîne le déplacement des particules qui le composent autour de leur position d'équilibre. Le déplacement U_i de chaque point du solide de coordonnées $P(y_1, y_2, y_3)$ dans la direction du vecteur \vec{e}_i , varie en fonction du temps t :

$$U_i = U_i(P, t), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t. \quad (\text{I.1})$$

Dans le cas où aucune source excitatrice ne s'exerce sur le solide, l'expression de l'équation du mouvement résultant de la relation fondamentale de la dynamique est donnée par :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j}, \quad (\text{I.2})$$

où ρ_0 est la masse volumique du solide et σ_{ij} représente les composantes du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$. Dans l'hypothèse des petites déformations, le comportement interne d'un solide élastique est décrit par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (\text{I.3})$$

qui relie le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ à celui des déformations $\bar{\varepsilon}$ par l'intermédiaire du tenseur des rigidités élastiques du solide \bar{C} dont les composantes sont notées C_{ijkl} . Les composantes ε_{kl} du tenseur des déformations sont définies par :

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial y_l} + \frac{\partial U_l}{\partial y_k} \right). \quad (\text{I.4})$$

Dans ces équations, la convention de sommation d'Einstein pour la répétition des indices est utilisée avec $i, j, k, l = (1, 2, 3)$. Le solide étant isotrope, la loi de comportement (I.3) s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = \lambda_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}, \quad (\text{I.5})$$

où λ_0 et μ_0 représentent les coefficients de Lamé (qui ont la dimension d'une contrainte), et δ_{ij} le symbole de Kronecker tel que $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ sinon. Le champ de déplacement \vec{U} peut être considéré comme la somme d'un champ de traction-compression \vec{U}_L à rotationnel nul et d'un champ de cisaillement-distorsion \vec{U}_T à divergence nulle. L'équation du mouvement (I.2) devient alors :

$$\Delta \vec{U}_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} \frac{\partial^2 \vec{U}_\alpha}{\partial t^2}, \quad \alpha = L, T, \quad (\text{I.6})$$

où l'opérateur Δ est le Laplacien et c_α est la célérité de phase de l'onde de type α . Les célérités c_α sont liées aux coefficients de Lamé par les relations :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}. \quad (\text{I.7})$$

Nous ne nous intéressons dans ce manuscrit qu'à la propagation d'ondes planes TH harmoniques, $\alpha = T$. La dépendance temporelle est de la forme $\exp(-i\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde plane TH unitaire, caractérisée par son nombre d'onde $k_T = \omega / c_T$, de sorte que :

$$\vec{U}_T = \text{Re}(\vec{u}_T e^{-i\omega t}), \quad (\text{I.8})$$

où \vec{u}_T définit la partie spatiale de \vec{U}_T , Re désigne la partie réelle d'une quantité à valeurs complexes et i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Rappelons que l'on passe du domaine temporel (régime transitoire) au domaine fréquentiel (régime harmonique) et *vice versa*, à l'aide de la transformée de Fourier :

$$\vec{U}_T(P, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}_T(P, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{I.9})$$

$$\vec{u}_T(P, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_T(P, t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{I.10})$$

Par conséquent, le vecteur \vec{u} satisfait l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \vec{u}_T(P, \omega) + k_T^2 \vec{u}_T(P, \omega) = \vec{0}, \quad P \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{I.11})$$

Cette équation est la reformulation de l'équation du mouvement (I.6) dans le domaine fréquentiel. Nous supposons que le nombre d'onde k_T est à valeurs réelles et positives. En présence d'une source excitatrice (par exemple une perturbation harmonique de la forme $\vec{f}(P) e^{-i\omega t}$), cette source apparaît dans le membre de droite de l'équation de Helmholtz (I.11).

I.2 Conditions de continuité

En général, les milieux ne sont homogènes que sur des proportions limitées de l'espace. Par ailleurs, nous avons souvent affaire à des milieux confinés présentant des obstacles à la propagation.

Lorsqu'une onde élastique rencontre un obstacle, elle est alors diffusée ou diffractée dans toutes les directions à partir de l'obstacle (le phénomène lui-même sera désigné sous le terme de diffusion ou diffraction). Par abus de langage, les termes « diffusion » et « diffraction » vont être utilisés dans ce manuscrit comme des synonymes. Le premier terme convient à nommer les ondes diffusées par un obstacle (avec une signification implicite à haute fréquence), tandis que le second terme se réfère aux ondes qui aplanissent les discontinuités du champ géométrique (qui sont plus fortes à basse fréquence). L'obstacle se définit comme une région solide ou non, dont les propriétés acoustiques, masse volumique et/ou module de rigidité, diffèrent de celles du milieu solide.

Pour un problème typique de diffusion, nous avons un champ incident \vec{u}^{inc} . Nous écrivons alors le champ total comme :

$$\vec{u}(P) = \vec{u}^{\text{inc}}(P) + \vec{u}^{\text{dif}}(P), \quad P \in D_e, \quad (\text{I.12})$$

où D_e est un domaine extérieur infini occupé par le solide et \vec{u}^{dif} est le champ diffusé (inconnu). Nous considérons que le domaine D_e est borné par une frontière ∂D assez régulière : par exemple, ∂D est composée de portions de courbes (dans \mathbb{R}^2) indéfiniment différentiables (surfaces planes, cylindriques, etc.) ; \vec{n} désigne la normale sortante à ∂D (définie partout sauf aux discontinuités).

Une interface (frontière) décrite par une condition aux limites de type Neumann est telle que :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \vec{u}^{\text{dif}}}{\partial \vec{n}} = -\frac{\partial \vec{u}^{\text{inc}}}{\partial \vec{n}}, \quad P \in \partial D, \quad (\text{I.13})$$

où la dérivée normale $\partial / \partial \vec{n}$ sur la frontière ∂D est définie par le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}$.

Une frontière parfaitement rigide est décrite par une condition aux limites de type Dirichlet :

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{u}^{\text{dif}} = -\vec{u}^{\text{inc}}, \quad P \in \partial D. \quad (\text{I.14})$$

On montre alors que l'Éq. (I.6) (ou l'Éq. (I.11)) couplée à l'une ou l'autre des conditions aux limites (I.13) ou (I.14), possède une solution et une seule. Les démonstrations se trouvent par exemple, dans les ouvrages de Morse & Feshback (1946) et Colton & Kress (1983).

Nous ne nous intéresserons dans ce manuscrit qu'aux problèmes de diffusion dont les interfaces (frontières) sont décrites par la condition de Neumann. Dans la suite, nous utiliserons les fonctions de Bessel (Hankel) afin de définir les « fonctions d'onde cylindriques ». Avec ces fonctions, proprement choisies afin de satisfaire la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld, nous serons en mesure de trouver la solution de la diffusion par une ou plusieurs cavités cylindriques à section quelconque.

I.3 Fonctions d'onde cylindriques

L'objectif est de décrire la diffusion acoustique d'une onde plane TH par une cavité cylindrique infinie à section quelconque. Nous supposerons que la direction de propagation de l'onde incidente est perpendiculaire à l'axe de la cavité y_2 de sorte que le problème reste bi-dimensionnel, Figure I.1. Les composantes spatiales du champ de déplacement sont alors telles que :

$$u_2 = u(\vec{y}) \quad \text{avec} \quad u_1 = u_3 = 0, \quad (\text{I.15})$$

$$\left[J_n(k_T r) + i Y_n(k_T r) \right] e^{\pm i n \theta} \equiv H_n^{(1)}(k_T r) e^{\pm i n \theta}, \quad (\text{I.19})$$

puisque la *fonction de Hankel de première espèce* $H_n^{(1)}$ satisfait la condition de rayonnement à l'infini décrivant la propagation d'une onde cylindrique s'éloignant de l'obstacle.² Il est utile pour la suite d'introduire les notations suivantes :

$$\psi_n(r, \theta) = H_n^{(1)}(k_T r) e^{i n \theta} \text{ et } \widehat{\psi}_n(r, \theta) = J_n(k_T r) e^{i n \theta}.$$

Soit $\vec{r} = r \hat{r}$ le vecteur position d'un point $P(\vec{y})$ par rapport à l'origine O (Figure I.1), avec $\hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta)$ son vecteur directeur unitaire. Les fonctions ψ_n et $\widehat{\psi}_n$ définissent respectivement les *fonctions d'onde cylindriques sortantes* et *rentrantes*. La fonction ψ_n est singulière en $r = 0$, tandis que $\widehat{\psi}_n$ est régulière en $r = 0$; seule la première satisfait la condition de Sommerfeld (I.18). Observons que les fonctions ψ_n et $\widehat{\psi}_n$ vérifient les identités :³

$$\widehat{\psi}_n(\vec{r}) = (-1)^n \widehat{\psi}_n(-\vec{r}) = (-1)^n \widehat{\psi}_{-n}^*(\vec{r}) \quad (\text{I.20})$$

$$\text{et :} \quad \psi_n(\vec{r}) = (-1)^n \psi_n(-\vec{r}), \quad (\text{I.21})$$

où le symbole « * » désigne le conjugué d'une quantité à valeurs complexes.

I.3.1 Théorie modale de la diffusion en milieu élastique

Dans ce paragraphe, nous rappelons les expressions analytiques des champs de déplacement intervenant dans le processus de diffusion.

Considérons une onde plane TH incidente sur l'obstacle. L'onde se propage dans le plan (y_1, y_3) selon un angle θ_0 avec l'axe y_1 , Figure I.1. Son vecteur polarisation est parallèle à l'axe du cylindre y_2 . En prenant l'origine des phases en $|\vec{r}| = 0$ et en omettant la dépendance temporelle $\exp(-i\omega t)$, le champ de déplacement incident au point d'observation $P(\vec{r})$ (à l'extérieur du cylindre) s'écrit :

$$u_2^{\text{inc}}(\vec{r}) = u_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = u_0 e^{i k_T (y_1 \cos \theta_0 + y_3 \sin \theta_0)} = u_0 e^{i k_T r \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (\text{I.22})$$

² Ce résultat est lié au choix de la dépendance temporelle $\exp(-i\omega t)$. Si nous nous rapportons aux développements asymptotiques des fonctions de Bessel pour $r \rightarrow +\infty$, nous constatons que la fonction $H_n^{(1)}(k_T r)$ conduit à une bonne description du champ diffusé. En effet, nous avons :

$$H_n^{(1)}(k_T r) e^{-i\omega t} \simeq (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi k_T r}} e^{i(k_T r - \omega t)} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Le terme $\exp(i(k_T r - \omega t)) / \sqrt{k_T r}$ décrit bien une onde qui s'éloigne de l'obstacle avec le temps.

³ Nous utiliserons comme notation $z(\vec{r})$, pour toute fonction z qui dépend de r et θ .

où u_0 est l'amplitude de l'onde. Nous cherchons à exprimer l'onde plane (I.22) sous la forme d'une série modale :

$$e^{ik_T(y_1 \cos \theta_0 + y_3 \sin \theta_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \widehat{\psi}_n(\vec{r}). \quad (\text{I.23})$$

La formule intégrale (Abramowitz & Stegun 1970) :

$$\widehat{\psi}_n(\vec{r}) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_T(y_1 \cos \theta_0 + y_3 \sin \theta_0)} e^{in\theta_0} d\theta_0, \quad (\text{I.24})$$

montre que les fonctions d'onde convergentes régulières s'expriment comme des superpositions d'ondes planes. Multiplions l'Éq. (I.23) par $\exp(im\theta_0)$ puis intégrons l'expression résultante par rapport à θ_0 entre $-\pi$ et π . En utilisant l'orthogonalité des fonctions exponentielles et l'expression (I.24), nous obtenons :

$$A_n = i^n e^{-in\theta_0}. \quad (\text{I.25})$$

La décomposition (I.23) (dont les amplitudes modales vérifient l'Éq. (I.25)) complétée du facteur $\exp(-i\omega t)$ représente le développement d'une onde plane en fonction d'« ondes cylindriques ». Le champ de déplacement d'une onde TH convergente est donc donné par :

$$u_2^{\text{inc}}(\vec{r}) = u_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \widehat{\psi}_n(\vec{r}). \quad (\text{I.26})$$

Le champ de déplacement diffusé satisfait l'équation de Helmholtz scalaire et s'exprime de façon similaire, sous la forme :

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{r}) = u_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \psi_n(\vec{r}). \quad (\text{I.27})$$

Le champ de déplacement total (I.12) dans le milieu solide résulte de la superposition du champ diffusé u_2^{dif} et du champ initial u_2^{inc} :

$$u^{\text{tot}}(\vec{r}) = u_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n \widehat{\psi}_n(\vec{r}) + C_n \psi_n(\vec{r}) \right], \quad (\text{I.28})$$

où C_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, représentent les coefficients de diffusion inconnus. Pour les déterminer, il suffit d'écrire les équations de continuité à l'interface du cylindre $r = r(\theta)$. La condition de surface libre d'une cavité se traduit par :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{0} \Big|_{r=r(\theta)}. \quad (\text{I.29})$$

Pour une cavité cylindrique dont la section transversale est circulaire, de rayon a ($r(\theta) = a$), l'Éq. (I.29) se réduit à :

$$\frac{\partial u^{\text{tot}}}{\partial r} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (\text{I.30})$$

En raison de l'orthogonalité des fonctions exponentielles, l'application de la condition (I.30) à l'Éq. (I.28) conduit à :

$$C_n \left[nH_n^{(1)}(k_T a) - k_T a H_{n+1}^{(1)}(k_T a) \right] + A_n \left[nJ_n(k_T a) - k_T a J_{n+1}(k_T a) \right] = 0, \quad (\text{I.31})$$

$\forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Cette équation s'écrit aussi sous la forme :

$$C_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} T_{np} A_p, \quad (\text{I.32})$$

où :

$$T_{np} = - \frac{nJ_n(k_T a) - k_T a J_{n+1}(k_T a)}{nH_n^{(1)}(k_T a) - k_T a H_{n+1}^{(1)}(k_T a)} \delta_{np}, \quad (\text{I.33})$$

La *matrice de transition* \mathbf{T} de composantes T_{np} relie linéairement les amplitudes modales du champ d'incident $\{A_n\}$ à celles du champ diffusé $\{C_n\}$. \mathbf{T} dépend seulement de la géométrie de l'obstacle et du nombre d'onde k_T . Elle est indépendante du champ incident. Une fois les coefficients de diffusion connus, le déplacement diffusé et les contraintes associées peuvent être facilement calculés.

I.3.2 Diffusion simple par un cylindre à section quelconque

La méthode de résolution des problèmes de diffusion par un cylindre dont la section transversale est variable est similaire à celle adaptée aux cylindres à section circulaire. Cependant, les calculs sont plus lourds et peu de résultats sont disponibles dans la littérature. Ici nous souhaitons utiliser un arrangement général approprié aux cylindres arbitraires dont les frontières sont lisses.

Considérons un cylindre dont la section quelconque est définie par un rayon variable tel que :

$$r(\theta) = \tilde{a} \rho(\theta), \quad (\text{I.34})$$

où \tilde{a} et $\rho(\theta)$ caractérisent respectivement la taille et la forme de la cavité. De plus, $\rho(\theta)$ est continue et au moins une fois différentiable. Ainsi, la normale extérieure à cette frontière est telle que (Parnell & Abrahams 2006) :

$$\vec{n} = (n_r, n_\theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}} (\rho(\theta) \sin \theta + \rho'(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \cos \theta - \rho'(\theta) \sin \theta), \quad (\text{I.35})$$

où $\rho'(\theta) = d\rho / d\theta$ et

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}} \left(\rho(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (\text{I.36})$$

sur la frontière. Les déplacements incident et diffusé sont donnés respectivement par les Éqs. (I.26) et (I.27). Pour déterminer les coefficients de diffusion inconnus C_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), il faut écrire les équations de continuité à l'interface du cylindre. La condition de surface libre est donnée par l'Éq. (I.29), soit :

$$\sigma_{rz} \mathbf{n}_r + \sigma_{\theta z} \mathbf{n}_\theta = 0, \text{ avec } \vec{z} \parallel \vec{y}_2, \quad (\text{I.37})$$

ou encore :

$$\mu_0 \frac{\partial u_2}{\partial r} \mathbf{n}_r + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \mathbf{n}_\theta = 0, \quad (\text{I.38})$$

pour $r = r(\theta)$, avec μ_0 le module de rigidité du milieu.

Pour la suite, il est utile d'introduire les notations suivantes :

$$\begin{aligned} x = k_T \tilde{a} \rho(\theta), \quad \mathbf{b}_n^{\text{dif}} = n H_n^{(1)}(x), \quad \mathbf{a}_n^{\text{dif}}(x) = x \mathbf{b}_n^{\text{dif}}(x) - x^2 H_{n+1}^{(1)}(x), \\ \mathbf{b}_n^{\text{inc}}(x) = n J_n(x), \quad \mathbf{a}_n^{\text{inc}}(x) = x \mathbf{b}_n^{\text{inc}}(x) - x^2 J_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

Les coefficients $\mathbf{a}_n^{\text{dif}}$ et $\mathbf{b}_n^{\text{dif}}$ sont relatifs à l'onde diffusée et proportionnels à $H_n^{(1)}$. Les coefficients $\mathbf{a}_n^{\text{inc}}$ et $\mathbf{b}_n^{\text{inc}}$ sont relatifs à l'onde incidente et proportionnels à $J_n = \text{Re} H_n^{(1)}$. Compte tenu des notations (I.39), la condition (I.38) avec le champ (I.28) conduit à écrire :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(\mathbf{a}_n^{\text{dif}} \mathbf{n}_r + i \mathbf{b}_n^{\text{dif}} \mathbf{n}_\theta \right) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left(\mathbf{a}_n^{\text{inc}} \mathbf{n}_r + i \mathbf{b}_n^{\text{inc}} \mathbf{n}_\theta \right) e^{in\theta} = 0. \quad (\text{I.40})$$

Pour un cylindre à section circulaire, les fonctions \mathbf{a}_n^ζ et \mathbf{b}_n^ζ ne dépendent pas de l'angle d'observation θ et l'Éq. (I.40) se réduit au système d'équations linéaire (I.31) ($\zeta = \text{inc}, \text{dif}$). Dans ce cas de figure, les modes de vibration ne sont pas couplés. Néanmoins, lorsque les fonctions \mathbf{a}_n^ζ et \mathbf{b}_n^ζ sont des fonctions angulaires de période 2π , un couplage modal apparaît. Pour résoudre le système (I.40), écrivons-le sous la forme de séries de Fourier. La fonction angulaire $g_n^\zeta = \mathbf{a}_n^\zeta \mathbf{n}_r + i \mathbf{b}_n^\zeta \mathbf{n}_\theta$ est alors définie par la série :

$$g_n^\zeta(\theta) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} g_{n,q}^\zeta e^{iq\theta}, \quad (\text{I.41})$$

avec :

$$g_{n,q}^\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_n^\zeta(\theta) e^{-iq\theta} d\theta, \quad (\zeta = \text{inc}, \text{dif}). \quad (\text{I.42})$$

Compte tenu de l'Éq. (I.41), le système (I.40) devient :

$$\sum_{p,n} g_{n,p-n}^{\text{dif}} C_n e^{ip\theta} = - \sum_{p,n} g_{n,p-n}^{\text{inc}} A_n e^{ip\theta}. \quad (\text{I.43})$$

En injectant l'Éq. (I.32) dans l'Éq. (I.43), nous obtenons :

$$\sum_{p,n} g_{n,p-n}^{\text{dif}} T_{np} A_p e^{ip\theta} = - \sum_{p,n} g_{n,p-n}^{\text{inc}} A_n e^{ip\theta}. \quad (\text{I.44})$$

Définissons les matrices carrées Q^ζ ($\zeta = \text{inc}, \text{dif}$) dont les éléments sont tels que :

$$Q_{pn}^{\text{dif}} = g_{n,p-n}^{\text{dif}} A_p e^{ip\theta} \quad \text{et} \quad Q_{pn}^{\text{inc}} = -g_{n,p-n}^{\text{inc}} A_n e^{ip\theta}. \quad (\text{I.45})$$

Avec ces notations, le système (I.44) s'écrit sous la forme matricielle :

$$Q^{\text{dif}} \mathbf{T} = Q^{\text{inc}}, \quad (\text{I.46})$$

où la matrice de transition inconnue \mathbf{T} a la même dimension que Q^ζ . Ainsi, le calcul de la matrice \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = Q^{\text{dif}^{-1}} Q^{\text{inc}}, \quad (\text{I.47})$$

autorise alors celui des amplitudes modales $\{C_n\}$.

I.3.3 Diffusion multiple par un nombre fini de cylindres à section quelconque

I.3.3.1 Champ diffusé par deux cavités cylindriques à section circulaire

Considérons maintenant une cible constituée de deux cylindres parallèles à section circulaire D_j , $j = 1, 2$. La géométrie du problème et les notations utilisées sont exposées sur la Figure I.2. Soit O l'origine du système cartésien (y_1, y_3) , de sorte qu'un point d'observation P est localisé par le vecteur $\vec{r} = (y_1, y_3)$. Le cercle D_j est de rayon a^j et son centre O_j est localisé par $\vec{r} = \vec{b}_j$. Nous définissons les systèmes de coordonnées polaires (r_j, θ_j) centrées sur O_j , de sorte que $\vec{r} = \vec{r}_j + \vec{b}_j$ avec $\vec{r}_j = r_j(\cos \theta_j, \sin \theta_j)$, le vecteur $\vec{b} = b(\cos \beta, \sin \beta)$ reliant les centres des cylindres.

Supposons que la cible soit excitée par une onde plane incidente TH dont le déplacement est donné par (Éq. (I.26)) :

$$u_2^{\text{inc}}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^j \hat{\psi}_n(\vec{r}_j), \quad j = 1 \text{ ou } 2, \quad (\text{I.48})$$

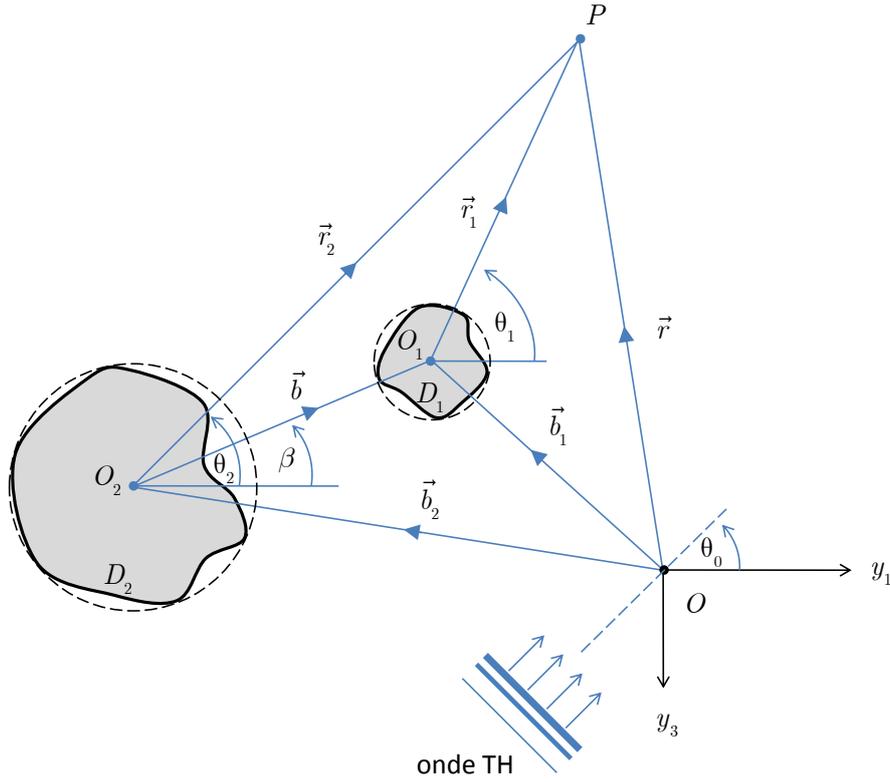


Figure I.2 : Notations utiles à la description de la diffusion d'une onde plane TH par deux cylindres à section quelconque.

où les coefficients A_n^j sont donnés par :

$$A_n^j = u_0 i^n e^{-in\theta_0} e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{b}_j}. \quad (\text{I.49})$$

En généralisant l'Éq. (I.27), nous exprimons le champ de déplacement diffusé par chaque cylindre,

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^j \psi_n(\vec{r}_j), \quad j = 1 \text{ ou } 2. \quad (\text{I.50})$$

Il est clair que u_2^{dif} est une solution de l'équation de Helmholtz pour tout choix raisonnable des coefficients de diffusion C_n^j . Le champ défini par l'Éq. (I.50) ne représente pas seulement la diffusion de l'onde plane incidente. En effet, le champ d'excitation agissant par exemple sur le cylindre D_1 est constitué de la somme de l'onde plane incidente et des ondes diffusées par le cylindre D_2 , *i. e.* :

$$u_2^{\text{ex}}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^1 \hat{\psi}_n(\vec{r}_1) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^2 \psi_n(\vec{r}_2). \quad (\text{I.51})$$

Nous allons déterminer les coefficients de diffusion en appliquant les conditions aux limites sur chaque cylindre.

Considérons le cylindre D_1 . Afin d'appliquer les conditions aux limites sur sa frontière $r_1 = a^l$, nous devons exprimer chaque terme de l'Éq. (I.51) en fonction de θ_1 , *i. e.* nous devons exprimer $\psi_n(\vec{r}_2)$ en fonction de \vec{r}_1 . Comme dans le voisinage de O_1 , $\psi_n(\vec{r}_2)$ est une solution régulière de l'équation de Helmholtz, cette dernière peut être développée en fonction de $\psi_m(\vec{r}_1)$. Soit $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{b}$ où $\vec{b} = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$ est le vecteur position de O_1 par rapport à O_2 . Le théorème d'addition de Graff (Watson 1966, Abramowitz & Stegun 1970) conduit alors à :

$$\psi_n(\vec{r}_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{nm}(\vec{b}) \widehat{\psi}_m(\vec{r}_1) \quad \text{pour } r_1 < b = |\vec{b}|,^4 \quad (\text{I.52})$$

où l'opérateur de Graff $G(\vec{b})$ est connu explicitement. Ses éléments sont données par :

$$G_{nm}(\vec{b}) = \psi_{n-m}(\vec{b}) = H_{n-m}^{(1)}(k_T b) e^{i(n-m)\beta}. \quad (\text{I.53})$$

La lecture de la relation (I.52) montre que les ondes diffusées par le cylindre D_2 sont exprimées en tant qu'ondes incidentes sur le cylindre D_1 . La condition $r_1 < b$ est bien respectée car, pour calculer les coefficients de diffusion du cylindre D_1 , il suffit d'écrire le champ de déplacement diffusé par ce dernier en $r_1 = a^l$, avec $a^l < b$. Imposer $a^l < b$ revient à dire qu'on n'autorise pas les deux cylindres à s'interpénétrer.

En revenant à l'Éq. (I.50), nous utilisons le théorème d'addition (I.52) combiné à l'Éq. (I.48), afin d'établir l'expression suivante du champ total :

$$\begin{aligned} u_2^{\text{tot}}(\vec{r}) &= u_2^{\text{ex}}(\vec{r}) + u_2^{\text{dif}}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n^l \widehat{\psi}_n(\vec{r}_1) + C_n^l \psi_n(\vec{r}_1) \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{nm}(\vec{b}) \widehat{\psi}_m(\vec{r}_1) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n^l \widehat{\psi}_n(\vec{r}_1) + C_n^l \psi_n(\vec{r}_1) + \widehat{\psi}_n(\vec{r}_1) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^2 G_{mn}(\vec{b}) \right], \end{aligned} \quad (\text{I.54})$$

pour $r_1 < b$. Si nous considérons que D_1 est une cavité, la condition limite (I.30) évaluée en $r_1 = a^l$ et la propriété d'orthogonalité des fonctions $\{\exp(in\theta_1)\}$, nous conduisent à l'égalité suivante, pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$C_n^l \left[n H_n^{(1)}(k_T a^l) - k_T a^l H_{n+1}^{(1)}(k_T a^l) \right] = \left\{ A_n^l + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^2 G_{nm}(\vec{b}) \right\} \left[k_T a^l J_{n+1}(k_T a^l) - n J_n(k_T a^l) \right]. \quad (\text{I.55})$$

Si nous considérons que le cylindre D_2 est aussi une cavité, un raisonnement similaire nous mène, pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, à :

⁴ L'inégalité vient du fait que le membre de droite de l'Éq. (I.52) est singulier pour $\vec{r}_1 = -\vec{b}$.

$$C_n^2 \left[nH_n^{(1)}(k_T a^2) - k_T a^2 H_{n+1}^{(1)}(k_T a^2) \right] = \left\{ A_n^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^1 G_{mn}(\vec{b}) \right\} \left[k_T a^2 J_{n+1}(k_T a^2) - nJ_n(k_T a^2) \right]. \quad (\text{I.56})$$

Les coefficients de diffusion C_n^1 et C_n^2 , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sont alors solutions du système d'équations linéaires infini constitué à partir des Éqs. (I.55) et (I.56).

1.3.3.2 Champ diffusé par N cavités cylindriques à section circulaire

La méthode décrite dans le paragraphe précédent peut être facilement généralisée au problème de diffusion par N cylindres parallèles à section circulaire D_j , de rayon a^j et centre O_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Comme précédemment, les systèmes de coordonnées polaires (r_j, θ_j) sont définis par rapport aux origines O_j , Figure I.2.

Le champ de déplacement diffusé par l'ensemble de N cylindres est exprimé comme une série infinie de fonctions d'onde cylindriques divergentes, associée à chaque cylindre :

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^j \psi_n(\vec{r}_j), \quad (\text{I.57})$$

où les coefficients de diffusion C_n^j sont inconnus. En utilisant le théorème d'addition (I.52), nous trouvons que le champ de déplacement total au voisinage de D_l est donné par :

$$u_2^{\text{tot}}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n^l \hat{\psi}_n(\vec{r}_l) + C_n^l \psi_n(\vec{r}_l) + \hat{\psi}_n(\vec{r}_l) \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq l}}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^j G_{mn}(\vec{b}_{lj}) \right], \quad (\text{I.58})$$

où $\vec{b}_{lj} = \overrightarrow{O_j O_l}$ et $r_l < b_l$ avec :

$$b_l = \min_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq l}} |\vec{b}_{lj}|. \quad (\text{I.59})$$

Si nous appliquons la condition de surface libre sur chaque cylindre ($r_l = a^l$), nous obtenons :

$$C_n^l \left[nH_n^{(1)}(k_T a^l) - k_T a^l H_{n+1}^{(1)}(k_T a^l) \right] = \left\{ A_n^l + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq l}}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^j G_{mn}(\vec{b}_{lj}) \right\} \left[k_T a^l J_{n+1}(k_T a^l) - nJ_n(k_T a^l) \right], \quad (\text{I.60})$$

pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ et $l = 1, 2, \dots, N$. Ceci est un système algébrique d'équations pour les coefficients C_n^l . Il se réduit aux Éqs. (I.55) et (I.56) quand $N = 2$, et à l'Éq. (I.31) quand $N = 1$. Si le système (I.60) peut être résolu, sa solution (les coefficients de diffusion) conduit

à une solution exacte (aucune approximation n'a été faite) pour la diffusion multiple par une distribution déterministe de N cylindres.

Des systèmes similaires au système (I.60) peuvent être établis pour des cylindres rigides, des inclusions cylindriques ou encore des diffuseurs de nature différente. La méthode n'est pas limitée aux cylindres à sections transversales circulaires, comme nous le montrerons dans la section suivante.

1.3.3.3 Champ diffusé par N cavités cylindriques à section quelconque

Considérons N cylindres parallèles à section quelconque D_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Dans le repère propre à chaque cavité, nous définissons le système de coordonnées polaires (r_j, θ_j) . La frontière dudit obstacle est telle que :

$$r_j = a^j \rho_j(\theta_j), \quad (\text{I.61})$$

où a^j et $\rho_j(\theta_j)$ caractérisent la taille et la forme de la cavité. Nous choisissons ρ_j une fonction continue et au moins une fois différentiable.

Si nous appliquons la condition de surface libre (I.38) sur la frontière de chaque cylindre, Éq. (I.61), nous obtenons pour $l = 1, 2, \dots, N$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^l g_n^{\text{dif}}(\theta_l) e^{in\theta_l} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n^l + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq l}}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^j G_{mn}(\vec{b}_{lj}) \right\} g_n^{\text{inc}}(\theta_l) e^{in\theta_l} = 0, \quad (\text{I.62})$$

où $g_n^\zeta(\theta_j) = a_n^\zeta(\theta_j) \mathbf{n}_{r_j} + i b_n^\zeta(\theta_j) \mathbf{n}_{\theta_j}$ ($\zeta = \text{inc}, \text{dif}$), et $\vec{\mathbf{n}}_j = (\mathbf{n}_{r_j}, \mathbf{n}_{\theta_j})$ est la normale extérieure à D_j définie par l'Éq. (I.35). Les fonctions angulaires 2π -périodiques a_n^ζ et b_n^ζ sont données parmi les relations (I.39). Malheureusement, les fonctions $\{g_n^\zeta(\theta_j) e^{in\theta_l}\}$ ne sont pas orthogonales pour des exposants ζ différents. Par conséquent, les constantes d'intégration ne peuvent être déterminées de façon explicite. Pour résoudre le système (I.62), nous procédons comme dans le paragraphe I.3.2, et écrivons les fonctions g_n^ζ sous la forme de séries de Fourier, Éq. (I.41). Nous obtenons finalement le système suivant pour $l = 1, 2, \dots, N$:

$$\sum_{p,n} C_n^l g_{n,p-n}^{\text{dif}}(\theta_l) e^{ip\theta_l} + \sum_{p,n} \left\{ A_n^l + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq l}}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^j G_{mn}(\vec{b}_{lj}) \right\} g_{n,p-n}^{\text{inc}}(\theta_l) e^{ip\theta_l} = 0, \quad (\text{I.63})$$

où $g_{n,p-n}^\zeta$ désigne les coefficients de Fourier donnés par l'Éq. (I.42).

Ceci est un système algébrique d'équations satisfait par les coefficients inconnus C_n^l . Il se réduit à l'Éq. (I.43) quand $N = 1$. Pour un nombre donné de cavités, les séries dans le système (I.60) convergent plus au moins rapidement selon la fréquence, la forme des cavités et la distance les séparant.

1.3.3.4 Calcul du champ total

Le calcul du champ de déplacement total à partir des systèmes d'équations (I.60) ou (I.63) est possible en principe, lorsque la géométrie du milieu est totalement connue (déterministe).

En présence d'une distribution uniforme et aléatoire (Chapitre III), nous nous contenterons d'une approximation du champ total, qui en général, pour une application pratique, est suffisante. Nous nous concentrerons alors sur les théories d'homogénéisation qui permettent de définir un milieu effectif homogène. Elles s'appuient sur des hypothèses liées à la densité de diffuseurs, quantifiées en terme de tailles de diffuseurs, distance entre les diffuseurs et longueur d'onde incidente. Si la densité (nombre de diffuseurs par unité de surface) est faible, on peut admettre que chaque diffuseur est soumis à une onde d'excitation identique à l'onde incidente et que cette onde n'est diffusée qu'une fois par chaque diffuseur. Dans ce cas nous parlons de diffusion simple. Lorsque la densité augmente, un diffuseur particulier reçoit une onde qui a été auparavant diffusée par d'autres diffuseurs comme nous l'avons décrit précédemment et nous parlerons dans ce cas de diffusion multiple. Mais dans cette catégorie nous pouvons encore distinguer deux niveaux selon que la densité est moyenne ou très forte. Dans le premier cas nous parlerons de diffusion multiple et d'approximation diffuse dans le second cas.

I.4 Fonctions d'onde elliptiques

Dans cette section nous présentons la solution générale de l'équation de Helmholtz scalaire en coordonnées elliptiques. Les fonctions d'onde se composent maintenant des fonctions de Mathieu et non plus des fonctions de Bessel. Nous utilisons alors les fonctions d'onde elliptiques pour le cas d'un cylindre à section elliptique.

I.4.1 Coordonnées du cylindre elliptique

Soit $(y_1, y_3) = (\pm a, 0)$ les foyers d'une ellipse. Introduisons les variables réelles ξ et η , définies par l'équation complexe :

$$y_1 + iy_3 = a \cosh(\xi + i\eta), \quad (\text{I.64})$$

soit :

$$y_1 = a \cosh \xi \cos \eta \text{ et } y_3 = a \sinh \xi \sin \eta, \quad (\text{I.65})$$

où a désigne la demi-distance focale. Si nous prenons $\xi \geq 0$ et $-\pi < \eta \leq \pi$, à chaque point (y_1, y_3) du plan correspond un seul couple (ξ, η) , les *coordonnées cylindriques elliptiques*, Figure I.3. La coordonnée ξ est la variable de type « radial » et η est la variable « angulaire ». Elles sont reliées aux coordonnées polaires (r, θ) et cartésiennes (y_1, y_3) par :

$$r^2 = y_1^2 + y_3^2 = \frac{a^2}{2} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \text{ et } \tan \theta = \frac{y_3}{y_1} = \tanh \xi \tan \eta. \quad (\text{I.66})$$

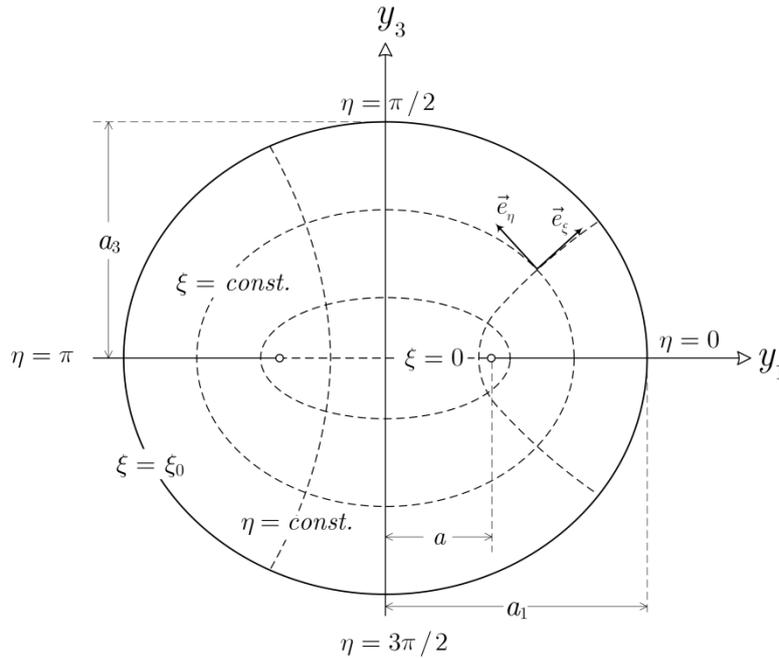


Figure I.3 : Système de coordonnées elliptiques.

Quand $\xi \rightarrow \infty$, nous avons $\sinh \xi \rightarrow \cosh \xi$ et :

$$r \simeq a \cosh \xi \simeq \frac{a}{2} e^\xi \text{ et } \theta \simeq \eta, \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (\text{I.67})$$

Il est important d'observer que les ellipses de la Figure I.3 se réduisent à des cercles lorsque $\xi \rightarrow \infty$ et $a \rightarrow 0$.

I.4.2 Fonctions de Mathieu angulaires et radiales

La résolution de l'équation de Helmholtz par la méthode de séparation des variables, en fonction de η et ξ , conduit à l'équation de Mathieu (A1.8) et à l'équation de Mathieu modifiée (A1.9) (voir l'Annexe A1). La dépendance angulaire du déplacement u_2 est décrite par les fonctions de Mathieu $e_{\sigma n}$, satisfaisant l'Éq. (A1.8), alors que la dépendance radiale s'exprime à partir d'une combinaison linéaire de fonctions de Mathieu modifiées $M_{\sigma n}^{(j)}$, satisfaisant l'Éq. (A1.9), $j = 1, 2$. L'indice σ prenant les valeurs c (paire) et s (impaire), nous avons :

$$u_2(\xi, \eta) = \sum_{\sigma=c,s} e_{\sigma n}(\eta, q) \left\{ \begin{array}{l} M_{\sigma n}^{(1)}(\xi, q) \\ M_{\sigma n}^{(2)}(\xi, q) \end{array} \right\}, \quad (\text{I.68})$$

où q est un paramètre adimensionnel relié au nombre d'onde k_T par :

$$q = \frac{1}{4} k_T^2 a^2, \quad (\text{I.69})$$

et les fonctions $e_{\sigma n}$, $M_{\sigma n}^{(1)}$ et $M_{\sigma n}^{(2)}$ sont à valeurs réelles. Les fonctions angulaires $e_{\sigma n}$ sont normées par :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_{\tau m}(\eta, q) e_{\sigma n}(\eta, q) d\eta = \pi \delta_{mn} \delta_{\tau\sigma} \quad (\text{I.70})$$

et satisfont :

$$e_{\sigma n}(\eta + \pi, q) = (-1)^n e_{\sigma n}(\eta, q). \quad (\text{I.71})$$

Les fonctions $M_{\sigma n}^{(j)}$ définies pour $j = 3$ et $j = 4$ sont telles que :

$$M_{\sigma n}^{(j)}(\xi, q) = M_{\sigma n}^{(1)}(\xi, q) \pm i M_{\sigma n}^{(2)}(\xi, q).$$

Elles sont analogues aux fonctions de Hankel de première et seconde espèce. Les fonctions $M_{\sigma n}^{(3)}$ sont choisies de façon à assurer la condition de rayonnement de Sommerfeld, Éq. (I.18).

Définissons maintenant les fonctions d'onde elliptiques sortante et régulière, respectivement, par :

$$\psi_{\sigma n}(\xi, \eta, q) = M_{\sigma n}^{(3)}(\xi, q) e_{\sigma n}(\eta, q), \quad (\text{I.72})$$

$$\widehat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q) = M_{\sigma n}^{(1)}(\xi, q) e_{\sigma n}(\eta, q). \quad (\text{I.73})$$

Observons que les deux fonctions ψ_{sn} et $\partial \psi_{cn} / \partial \xi$ sont discontinues sur la ligne interfocale $\xi = 0$ (Morse & Rubenstein 1938) et que $\widehat{\psi}_{\sigma n}$ est à valeurs réelles.

Dans la suite, nous montrons comment exprimer à l'aide des fonctions de Mathieu, les solutions de la diffusion d'une onde TH par une cavité cylindrique à section elliptique.

I.4.3 Diffusion simple par un cylindre à section elliptique

Le champ de déplacement de l'onde TH incidente s'écrit au point d'observation $P(\vec{y})$ (à l'extérieur du cylindre), Figure I.4 :

$$u_2^{\text{inc}}(\vec{y}) = u_0 e^{ik_T(y_1 \cos \theta_0 + y_3 \sin \theta_0)} = u_0 e^{ik_T aw}, \quad (\text{I.74})$$

où :

$$w = \cosh \xi \cos \eta \cos \theta_0 + \sinh \xi \sin \eta \sin \theta_0. \quad (\text{I.75})$$

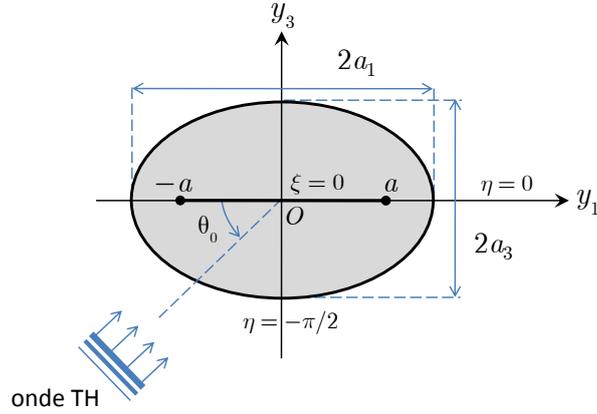


Figure I.4 : Notations utiles à la description de la diffusion d'une onde plane TH par un cylindre à section elliptique.

Nous allons maintenant décomposer l'onde plane (I.74) en fonctions d'onde elliptiques :

$$e^{2i\sqrt{q}w} = e^{ik_T aw} = \sum_{\sigma=c,s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^\sigma \hat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q). \quad (\text{I.76})$$

Soit la formule intégrale suivante (Abramowitz & Stegun 1970) :

$$\hat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2i\sqrt{q}w} e_{\sigma n}(\theta_0, q) d\theta_0 = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_T(y_1 \cos \theta_0 + y_3 \sin \theta_0)} e_{\sigma n}(\theta_0, q) d\theta_0. \quad (\text{I.77})$$

Multiplions l'Éq. (I.76) par $e_{\sigma n}(\theta_0, q)$ puis intégrons l'expression résultante par rapport à θ_0 entre $-\pi$ et π . En utilisant la relation d'orthogonalité (I.70) et l'expression (I.77), nous obtenons alors :

$$e^{ik_T aw} = 2 \sum_{\sigma,n} i^n \hat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q) e_{\sigma n}(\theta_0, q), \quad (\text{I.78})$$

où la notation suivante a été introduite :

$$\sum_{\sigma,n} = \sum_{\sigma=c,s} \sum_{n=0}^{\infty}.$$

Le développement (I.78) pondéré par le facteur $\exp(-i\omega t)$ représente la décomposition d'une onde plane en fonctions d'onde elliptiques. Nous avons alors pour le champ de déplacement incident :

$$u_2^{\text{inc}}(\xi, \eta) = 2u_0 \sum_{\sigma, n} i^n \widehat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q) e_{\sigma n}(\theta_0, q). \quad (\text{I.79})$$

Au champ incident (I.79) s'ajoute le champ diffusé u_2^{dif} qui satisfait l'équation de Helmholtz :

$$u_2^{\text{dif}}(\xi, \eta) = 2u_0 \sum_{\sigma, n} i^n C_n^\sigma \psi_{\sigma n}(\xi, \eta, q) e_{\sigma n}(\theta_0, q), \quad (\text{I.80})$$

où C_n^σ représente les coefficients de diffusion à déterminer à partir des conditions limites aux parois des obstacles. Le champ de déplacement total à l'extérieur du cylindre est tel que :

$$u_2 = u_2^{\text{inc}} + u_2^{\text{dif}}, \quad u_\xi = u_\eta = 0,$$

ou, plus précisément :

$$u_2(\xi, \eta) = 2u_0 \sum_{\sigma, n} i^n \left[\widehat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q) + C_n^\sigma \psi_{\sigma n}(\xi, \eta, q) \right] e_{\sigma n}(\theta_0, q). \quad (\text{I.81})$$

Les composantes non-nulles du tenseur des contraintes sont définies par :

$$\sigma_{\xi z} = \frac{\mu_0}{a j_0} \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \quad \sigma_{\eta z} = \frac{\mu_0}{a j_0} \frac{\partial u_2}{\partial \eta}, \quad \text{avec } \vec{z} \parallel \vec{y}_2, \quad (\text{I.82})$$

où j_0 est le Jacobien en coordonnées elliptiques donné par :

$$j_0^2 = \cosh^2 \xi - \cos^2 \eta = \frac{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}{2}. \quad (\text{I.83})$$

Déterminons les coefficients C_n pour une cavité cylindrique elliptique. Dans ce cas, la condition de surface libre sur la paroi de la cavité ($\xi = \xi_0$) se traduit par :

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = 0,$$

qui, à l'aide de l'Éq. (I.81), conduit à :

$$C_n^\sigma = - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} M_{\sigma n}^{(1)}(\xi, q) / \frac{\partial}{\partial \xi} M_{\sigma n}^{(3)}(\xi, q) \right]_{\xi=\xi_0}, \quad \sigma = \text{c, s.} \quad (\text{I.84})$$

Quand $\xi_0 = 0$, la cavité cylindrique à section elliptique se réduit à une fissure de longueur $2a$. Dans ce cas :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} M_{cn}^{(1)}(\xi, q) \right|_{\xi=0} = 0 \quad (\text{I.85})$$

et la relation (I.84) devient :

$$C_n^{rs} = - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} M_{sn}^{(1)}(\xi, q) / \frac{\partial}{\partial \xi} M_{sn}^{(3)}(\xi, q) \right]_{\xi=0}. \quad (\text{I.86})$$

I.5 Diffusion en champ lointain : amplitude de diffusion

Les résultats obtenus précédemment nous permettent de calculer le champ de déplacement diffusé et les champs de contrainte associés partout dans le solide. Nous allons définir dans la suite des quantités physiques relatives à la diffusion en champ lointain : les amplitudes de diffusion et les fonctions de forme.

Pour un point d'observation loin du cylindre, *i. e.* $\xi \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$), le développement asymptotique des fonctions de Mathieu modifiées (Hankel) pour les grands arguments nous donne (Abramowitz & Stegun 1970) :

$$M_{sn}^{(3)}(\xi, q) \left(\simeq H_n^{(1)}(k_T r) \right) \simeq (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi k_T r}} e^{i \left(k_T r - \frac{\pi}{4} \right)}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (\text{I.87})$$

avec r donné par l'Éq. (I.67). Ainsi, le déplacement de l'onde diffusée s'écrit comme le produit d'une fonction radiale $H_n^{(1)}$ qui dépend de r , et d'une fonction de forme angulaire f :

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{r}; \hat{k}) \simeq u_0 \sqrt{\frac{2\pi}{k_T r}} e^{i \left(k_T r - \frac{\pi}{4} \right)} f(\hat{r}, \hat{k}). \quad (\text{I.88})$$

L'amplitude de diffusion en champ lointain, notée $f(\hat{r}, \hat{k}) \equiv f(\theta, \theta_0)$, est caractéristique de la diffusion d'une onde plane TH se propageant selon $\hat{k} = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, évaluée selon la direction d'observation $\hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Cette fonction f dépend *a priori* de la fréquence. Observons que la définition (I.88) du champ diffusé loin du cylindre est valable pour tout champ d'excitation agissant sur des cylindres à section quelconque, et pour n'importe quel nombre de cylindres.

Pour une cavité cylindrique à section circulaire, la matrice de transition T , Éq. (I.33), est diagonale et l'amplitude de diffusion $f(\hat{r}, \hat{k})$ est définie par :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{1}{i\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{nn} A_n e^{in\theta}. \quad (\text{I.89})$$

Cette relation prend la forme générale suivante pour une section quelconque :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{1}{i\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^n T_{np} A_p e^{in\theta}. \quad (\text{I.90})$$

Nous pouvons inverser la formule (I.90). En utilisant la propriété (I.25), nous obtenons :

$$T_{np} = \frac{i^{n+1}(-i)^p}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, \theta_0) e^{-in\theta} e^{ip\theta_0} d\theta d\theta_0. \quad (\text{I.91})$$

En coordonnées elliptiques, la fonction de diffusion en champ lointain est définie par :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{2}{i\pi} \sum_{\sigma, n} C_n^\sigma e_{\sigma n}(\theta, q) e_{\sigma n}(\theta_0, q). \quad (\text{I.92})$$

La fonction de forme en champ lointain, notée f_∞ , est définie en normalisant le module du déplacement u_2^{dif} par celui de l'onde incidente u_2^{inc} , soit :

$$f_\infty(\vec{r}; \hat{k}) = \sqrt{\frac{2\pi}{k_T r}} |f(\hat{r}, \hat{k})|. \quad (\text{I.93})$$

Le nom de fonction de forme provient du fait qu'elle dépend de la géométrie du cylindre. Elle est sans unité et représente les variations d'amplitude des ondes diffusées en fonction des angles d'incidence et d'observation. Elle dépend du rapport entre la taille du cylindre et la longueur d'onde considérée.

Nous introduisons la taille caractéristique \tilde{a} telle que :

$$\tilde{a} = a_1 \text{ ou } a \quad (\text{I.94})$$

pour respectivement des sections transversales elliptiques ou des segments, et définissons f_∞ par :

$$f_\infty(\tilde{\omega}, \theta; \theta_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\omega}}} |f(\theta, \theta_0)|, \quad (\text{I.95})$$

où $\tilde{\omega} = k_T \tilde{a}$ représente la *fréquence réduite*.

I.6 Approximation basse fréquence

Dans la limite des basses fréquences, la taille caractéristique de la cavité \tilde{a} est négligeable devant la longueur d'onde de l'onde incidente λ_T ($\lambda_T \gg \tilde{a}$ ou encore $\tilde{\omega} \ll 1$). Calculons alors les développements asymptotiques des coefficients de diffusion (I.84). En utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Mathieu donnés par Burke & Twersky (1964), les coefficients de diffusion d'une cavité cylindrique à section elliptique se réduisent à :

$$C_0^e(\tilde{\omega}) = -i \left(\frac{\pi\tau}{8} + \frac{\pi\tau^2}{16} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right) \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2\tau^2}{32} \tilde{\omega}^4 (1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})), \quad (\text{I.96})$$

$$C_1^c(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi\tau}{8}(1+\tau) - \frac{\pi\tau^2}{32}(1+\tau)^2 \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right] \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2\tau^2}{64}(1+\tau)^2 \tilde{\omega}^4 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega}) \right), \quad (\text{I.97})$$

$$C_1^s(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi}{8}(1+\tau) - \frac{\pi}{32}(1+\tau)^2 \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right] \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2}{64}(1+\tau)^2 \tilde{\omega}^4 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega}) \right), \quad (\text{I.98})$$

et :

$$C_j^\sigma(\tilde{\omega}) = iO(\tilde{\omega}^4) + O(\tilde{\omega}^6 \ln \tilde{\omega}), \quad j \geq 2, \quad \sigma = c, s. \quad (\text{I.99})$$

Ici nous avons noté $\tau (\geq 0)$, le rapport des longueurs des axes de l'ellipse, *i. e.* $\tau = \frac{a_3}{a_1} \leq 1$. Ce coefficient définit l'aspect géométrique de l'ellipse. L'amplitude de diffusion en champ lointain s'écrit alors :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{2}{i\pi} \left(C_0^c + C_1^c \cos \theta \cos \theta_0 + C_1^s \sin \theta \sin \theta_0 \right). \quad (\text{I.100})$$

L'expression (I.100) coïncide avec les résultats donnés par Burke & Twersky (1964), Varadan & Varadan (1979) ou encore Datta & Sabina (1986).

Dans le cas spécial d'une fissure de taille $2a$ ($\tau = 0$), il apparaît que le coefficient dominant est $C_1^s(\tilde{\omega})$. L'expression (I.98) se réduit à :

$$C_1^s(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{32} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right] \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2}{64} \tilde{\omega}^4 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega}) \right) \quad (\text{I.101})$$

et l'amplitude de diffusion s'écrit :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{2}{i\pi} C_1^s \sin \theta \sin \theta_0. \quad (\text{I.102})$$

Remarquons qu'une fissure ne diffuse pas de façon isotrope : le coefficient C_0^c représentatif d'un rayonnement indépendant de la direction d'observation est nul.

I.7 Résultats numériques et discussions

Nous présentons ici des résultats numériques correspondant aux fonctions de forme et amplitudes de diffusion en champ lointain, pour une cavité cylindrique à section elliptique. La fonction $\rho(\theta)$ décrivant la forme de la section transversale de la cavité s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho^2(\theta) = \frac{a_3^2}{a_1^2 \cos^2 \theta + a_3^2 \sin^2 \theta}, \quad (\text{I.103})$$

où a_1 et a_3 sont les deux demi-axes de la section transversale, et θ l'angle d'observation, Figure I.4.

Les systèmes linéaires (I.47) à inverser sont infinis. Nous tronquons les séries en prenant un nombre fini de $(2N + 1)$ termes. L'ordre de troncature a été fixé selon un critère déduit d'un critère précédemment établi pour des cylindres à section circulaire (Gespa 1987). Plus la section elliptique devient plate, plus le nombre de termes dans la série modale (I.90) augmente ; la normale extérieure tourne rapidement autour des extrémités marquées de l'ellipse plate. Dans ce cas, il est plus difficile de contrôler les calculs.

Nous comparons dans un premier temps les fonctions de forme vers l'avant et vers l'arrière, calculées avec les fonctions d'onde cylindriques et elliptiques pour différentes valeurs de $\tau = \frac{a_3}{a_1}$, Figure I.5. Notons que la fonction de forme vers l'avant est définie comme l'amplitude angulaire du déplacement diffusé en champ lointain dans la direction de propagation de l'onde incidente ($\theta = \theta_0$), tandis que la fonction de forme vers l'arrière est comprise comme l'amplitude angulaire du déplacement diffusé en champ lointain dans la direction de propagation opposée au vecteur d'onde incident ($\theta = \pi + \theta_0$). Les symboles circulaires représentent les résultats obtenus avec les fonctions d'onde cylindriques et les lignes continues ceux obtenus avec les fonctions d'onde elliptiques. La concordance entre les deux méthodes est parfaite. Cela valide la théorie modale appliquée aux cavités à section quelconque et permet d'envisager le problème de diffusion par plusieurs cavités à section quelconque, discuté dans le paragraphe I.3.3.3. Notons néanmoins que, lorsque τ tend vers 0 et $\tilde{\omega} \geq 8$, la méthode utilisant les fonctions d'onde cylindriques nécessite plus de termes dans la série (I.47) afin d'en assurer la convergence. Ceci est le désavantage majeur de cette méthode face à celle faisant intervenir les fonctions d'onde elliptiques, qui est naturellement mieux adaptée à cette géométrie de cavité.

Pour deux valeurs de l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, le module de l'amplitude de diffusion $|f(\theta, \theta_0)|$ est tracé en fonction de l'angle d'observation θ sur les Figures I.6 et I.7, pour deux valeurs de τ .

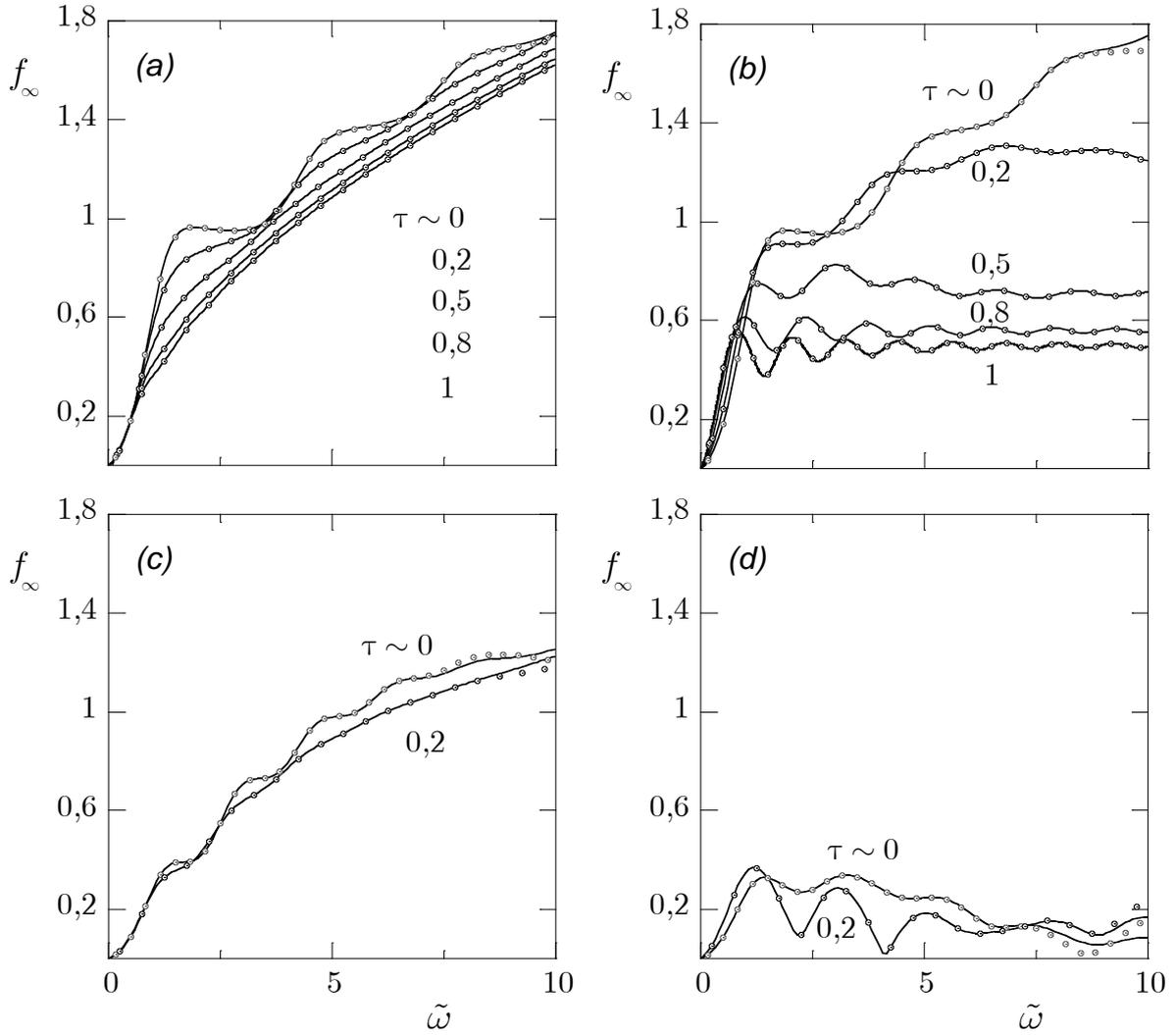


Figure I.5 : Fonctions de forme en champ lointain versus la fréquence réduite. a) et c) Diffusion vers l'avant (b et d) et vers l'arrière (a et c). a) et b) Incidence normale ($\theta_0 = \pi / 2$) ; c) et d) incidence oblique ($\theta_0 = \pi / 4$). Les cercles représentent les résultats obtenus avec les fonctions d'onde cylindriques et les lignes continues ceux obtenus avec les fonctions d'onde elliptiques.

À incidence normale, $|f(\theta, \pi / 2)|$ est symétrique par rapport à $\theta = \frac{\pi}{2}$. La valeur maximale de $|f(\theta, \pi / 2)|$ est à $\theta = \frac{\pi}{2}$ (i. e. la direction vers l'avant) quelle que soit la valeur de $\tilde{\omega}$. Cependant, le maximum de $|f(\theta, \pi / 2)|$ est plus faible pour $\tau = 0,6$ que pour $\tau = 0,2$. Le nombre de lobes augmente avec la fréquence.

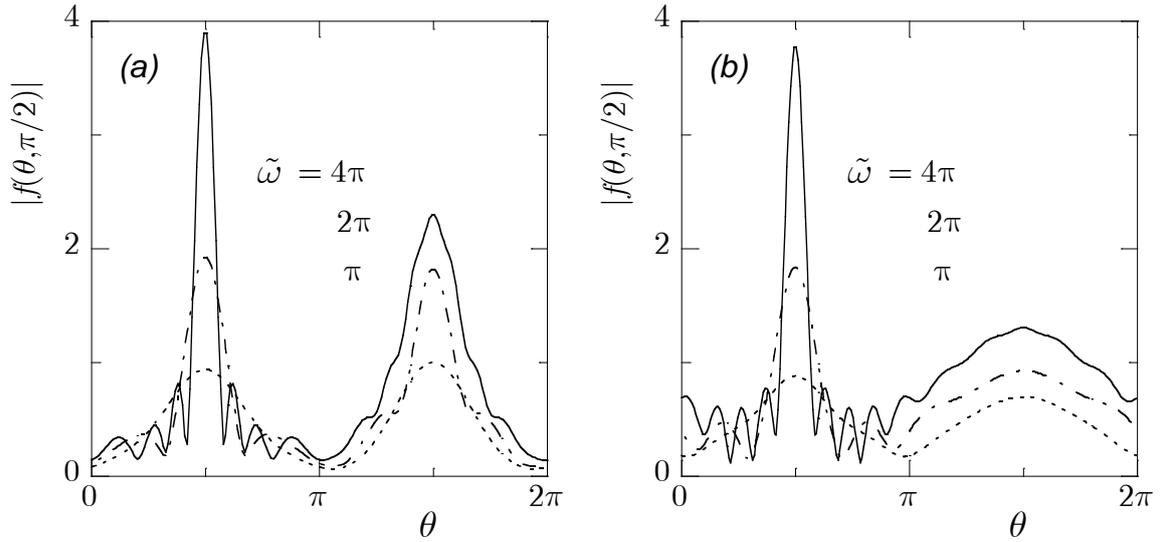


Figure I.6 : Amplitudes de diffusion en champ lointain versus l'angle d'observation pour différentes valeurs de $\tilde{\omega}$ et pour une incidence normale ($\theta_0 = \pi / 2$).

a) $\tau = 0,2$; b) $\tau = 0,6$.

À incidence oblique ($\theta_0 = \frac{\pi}{4}$), les valeurs maximales de $|f(\theta, \pi / 4)|$ dépendent de $\tilde{\omega}$. Au fur et à mesure que la fréquence augmente, l'angle associé à la valeur maximale de $|f(\theta, \pi / 4)|$, se déplace vers celui lié à la direction vers l'avant ($\theta = \frac{\pi}{4}$). Cependant, pour une fréquence $\tilde{\omega}$ donnée, ce maximum est inférieur pour l'incidence oblique ($\theta_0 = \frac{\pi}{4}$) que pour l'incidence normale ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$).

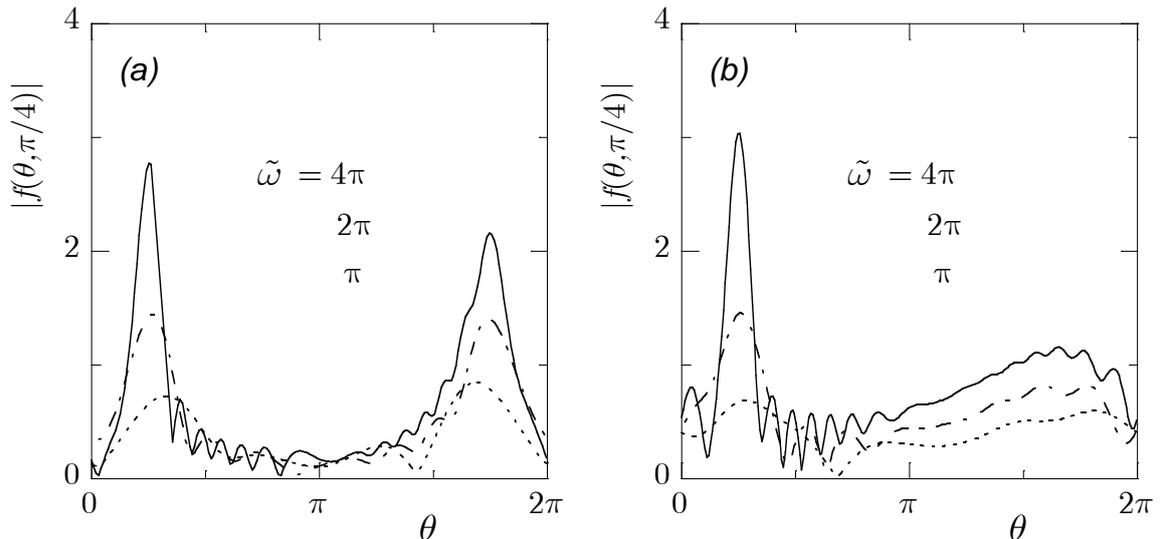


Figure I.7 : Amplitudes de diffusion en champ lointain versus l'angle d'observation pour différentes valeurs de $\tilde{\omega}$ et pour une incidence oblique ($\theta_0 = \pi / 4$).

a) $\tau = 0,2$; b) $\tau = 0,6$.

I.8 Conclusion

Ce chapitre visait à décrire la propagation d'une onde plane TH dans un milieu solide présentant un nombre fini de cavités cylindriques à section quelconque. Avant d'attaquer le problème de diffusion par plusieurs cavités, la théorie modale de la diffusion d'une onde plane TH par une seule cavité cylindrique à section quelconque a été rappelée pour un angle d'incidence θ_0 quelconque. Nous avons développé les solutions du problème en fonctions d'onde cylindriques (utilisant les fonctions de Bessel et de Hankel), puis adapté la théorie modale développée pour un nombre fini de cavités cylindriques à section circulaire au cas de cavités cylindriques à section quelconque.

Par ailleurs, nous avons également résolu le problème de diffusion simple sous incidence oblique θ_0 , à l'aide des fonctions d'onde elliptiques (utilisant les fonctions de Mathieu angulaire et radiale), description plus appropriée aux cylindres à *section elliptique*. Nous établissons alors l'amplitude de diffusion en champ lointain $f(\theta, \theta_0)$, Éq. (I.92), qui se réduit à basse fréquence à l'expression (I.100).

Le prochain chapitre est consacré à l'étude de la diffusion anisotrope d'une onde plane TH par une fissure plate ($\tau = 0$) de taille $2a$ saturée d'un fluide Newtonien. La fissure est alors représentée par une ligne de discontinuités, constituée par la juxtaposition de singularités linéiques diffusantes.

CHAPITRE II

Diffusion simple par une fissure visqueuse antiplane

RÉSUMÉ – Dans ce chapitre, nous étudions la diffusion anisotrope d'une onde plane TH, sollicitant sous incidence une fissure bidimensionnelle de taille finie contenant un fluide Newtonien. À partir de l'équation d'ondes et compte tenu des conditions aux limites du problème, nous avons développé une équation intégrale singulière de type Cauchy similaire à celle généralement établie pour les fissures dont les lèvres sont libres de contraintes. La forme particulière de cette équation intégrale se prête à la mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique adaptée à la détermination du saut de déplacement à travers la fissure, en fonction d'une densité de dislocation répartie sur la surface de la fissure. Connaissant cette densité, nous calculons la réponse spatio-fréquentielle de la fissure en tout point de l'espace. En particulier, nous établissons l'expression analytique de l'amplitude de diffusion en champ lointain de la fissure seule et déterminons ses approximations à basse et haute fréquences.

II. Diffusion simple par une fissure visqueuse antiplane

Le problème de diffusion par une fissure étant assez ancien, la littérature associée n'en est que plus vaste. Par exemple, Loeber & Sih (1968) ont développé une méthode intégrale pour obtenir les contraintes dynamiques autour d'une fissure de taille finie. Ils ont ramené le problème de diffusion à l'évaluation numérique d'un système d'équations intégrales couplées. Leurs résultats sont valides seulement à basse fréquence. Le cas de la diffusion d'ondes élastiques par des fissures semi-infinies a par exemple été étudié par Mow & Pao (1971). Une synthèse d'études sur la propagation d'ondes élastiques dans des milieux contenant des fissures est faite par Kraut (1976) et, dans le cadre de la théorie asymptotique de rayons, dans Achenbach *et al.* (1982). Angel (1988) a montré que le problème de diffusion des ondes planes TH par des fissures dont les lèvres sont libres de contraintes se réduisait à la résolution d'une équation intégrale singulière de type Cauchy en employant des techniques de transformations intégrales. D'autres équations intégrales singulières ont été obtenues par Angel & Achenbach (1984, 1985a, 1985b) et Angel (1986). Ces équations présentent l'intérêt de se prêter à la mise en œuvre de méthodes de résolution numérique de type Gaussien (Carnahan *et al.* 1969).

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la diffusion d'une onde plane TH sollicitant sous incidence θ_0 une fissure de taille finie, représentée par une ligne de discontinuités. Afin d'anticiper l'application présentée au Chapitre V, la fissure est supposée contenir un fluide visqueux. Observons que lorsque la viscosité est négligeable, le problème se réduit à celui d'une fissure dont les lèvres sont libres de contraintes, diffuseur qui peut également être décrit par une ellipse de rapport de forme $\tau = 0$ (Chapitre I). La méthodologie suivie dans ce qui suit est analogue à celle développée par Angel (1988) pour le cas d'une fissure dont les lèvres sont libres de contraintes et sollicitée à incidence normale.

Dans ce contexte, le champ diffusé par la fissure est déterminé en tout point de l'espace. Son évaluation en champ proche nous conduit par exemple à déterminer le facteur d'intensité de contraintes dynamiques, qui régit le champ de contraintes au voisinage des pointes d'une fissure. Finalement, ses propriétés en champ lointain nous permettent de calculer l'amplitude de diffusion associée.

II.1 Formulation du problème et conditions limites

Considérons un solide élastique, isotrope, homogène et infini, contenant une fissure plate d'épaisseur moyenne δ et de longueur $2a$, Figure II.1. La cavité de la fissure est remplie d'un fluide Newtonien de viscosité dynamique η_0 . La fissure est centrée sur l'origine O du sys-

tème (y_1, y_3) et est infinie dans la direction perpendiculaire y_2 . Son ouverture $\delta(y_3)$ est plus petite que sa demi-longueur a . Une onde plane TH incidente, polarisée dans la direction y_2 , se propage dans le plan (y_1, y_3) selon une direction faisant un angle θ_0 avec la normale à la fissure.⁵ Le déplacement causé par l'onde incidente en tout point \vec{y} est donné par :

$$u_2^{\text{inc}}(\vec{y}) = u_0 e^{ik_T(y_1 \sin \theta_0 + y_3 \cos \theta_0)}, \quad (\text{II.1})$$

où u_0 et $k_T = \omega / c_T$ représentent respectivement l'amplitude de l'onde et son nombre d'onde. D'après la loi de Hooke (I.5), la contrainte σ_{23}^{inc} associée est donnée par :

$$\sigma_{23}^{\text{inc}}(\vec{y}) = ik_T u_0 \mu_0 \cos \theta_0 e^{ik_T(y_1 \sin \theta_0 + y_3 \cos \theta_0)}, \quad (\text{II.2})$$

où μ_0 est le module de rigidité du solide. Puisque il y a une invariance en translation dans la direction y_2 , le problème de diffusion résultant est naturellement bidimensionnel.

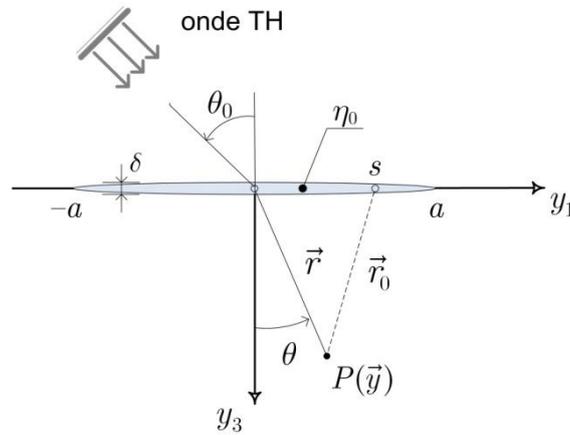


Figure II.1 : Onde plane TH incidente sur une fissure plate saturée d'un fluide de viscosité dynamique η_0 .

Quand la fissure interfère avec l'onde incidente, des ondes diffusées sont générées. Ces ondes produisent un déplacement diffusé « antiplan » u_2^{dif} , solution de l'équation de Helmholtz scalaire :

$$\frac{\partial^2 u_2^{\text{dif}}(\vec{y})}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{\text{dif}}(\vec{y})}{\partial y_3^2} + k_T^2 u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) = 0. \quad (\text{II.3})$$

Le champ de déplacement diffusé u_2^{dif} , jusqu'ici inconnu, doit être déterminé. Notons que le déplacement diffusé est *antisymétrique* par rapport au plan (y_1, y_2) et la discontinuité à travers les lèvres de la fissure est donnée par (Achenbach *et al.* 1982) :

$$2u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) = u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) - u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^-). \quad (\text{II.4})$$

⁵ Notons que par rapport au Chapitre I, l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta$ est désormais mesuré par rapport à l'axe y_3 . Pour les différencier, il est maintenant en italique.

Nous pouvons donc limiter notre attention au demi-espace $y_3 > 0$.

Nous établissons maintenant les conditions aux limites satisfaites par le champ diffusé u_2^{dif} . Ce champ étant antisymétrique, satisfait (sur l'axe y_1 en dehors de la fissure) la relation :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) = 0, \quad |y_1| > a. \quad (\text{II.5})$$

La continuité du vecteur contrainte s'exerçant sur les lèvres de la fissure, définies par les coordonnées suivantes :

$$|y_3| = \frac{\delta}{2} \text{ et } |y_1| < a, \quad (\text{II.6})$$

entraîne celle de la composante σ_{23} (Martin 1990) :

$$\sigma_{23}^{\text{dif}}(y_1, 0^+) + \sigma_{23}^{\text{inc}}(y_1, 0^+) = \langle \sigma_{23}^0 \rangle(y_1), \quad |y_1| < a. \quad (\text{II.7})$$

$\langle \sigma_{23}^0 \rangle$ représente la moyenne de la contrainte dans le fluide à travers l'épaisseur δ de la fissure, alors que le membre de gauche de l'Éq. (II.7) représente la contrainte régnant dans le solide adjacent, qui, d'après la loi de Hooke (I.5), satisfait l'égalité :

$$\sigma_{23}^{\text{inc}} + \sigma_{23}^{\text{dif}} = \mu_0 \frac{\partial u_2^{\text{inc}}}{\partial y_3} + \mu_0 \frac{\partial u_2^{\text{dif}}}{\partial y_3}. \quad (\text{II.8})$$

La contrainte moyenne $\langle \sigma_{23}^0 \rangle$ dans le fluide contenu dans la fissure est établie à partir de la loi de comportement du fluide Newtonien :

$$\sigma_{23}^0(\vec{y}) = \eta_0 \frac{\partial \dot{u}_2(\vec{y})}{\partial y_3}, \quad (\text{II.9})$$

où le point supérieur désigne la dérivée par rapport au temps. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{23}^0 \rangle(y_1) &= \frac{\eta_0}{\delta} \left[\dot{u}_2^0\left(y_1, \frac{\delta}{2}\right) - \dot{u}_2^0\left(y_1, -\frac{\delta}{2}\right) \right], \\ &= \frac{\eta_0}{\delta} \left[\dot{u}_2^{\text{tot}}(y_1, 0^+) - \dot{u}_2^{\text{tot}}(y_1, 0^-) \right], \quad (\delta \rightarrow 0), \\ &= \frac{\eta_0}{\delta} \left[\dot{u}_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) - \dot{u}_2^{\text{dif}}(y_1, 0^-) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

En utilisant l'antisymétrie (II.4), l'Éq. (II.10) devient pour une dépendance temporelle de la forme $\exp(-i\omega t)$:

$$\langle \sigma_{23}^0 \rangle(y_1) = 2 \frac{\eta_0 \omega}{i\delta} u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+). \quad (\text{II.11})$$

En substituant les Éqs. (II.2) et (II.11) dans la condition limite (II.7), nous obtenons (Kawahara & Yamashita 1992) :

$$\frac{\partial u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+)}{\partial y_3} + 2ik_T \sigma u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) = -ik_T u_0 \cos \theta_0 e^{ik_T y_1 \sin \theta_0}, \quad |y_1| < a, \quad (\text{II.12})$$

où le facteur sans dimension :

$$\sigma = \frac{\eta_0 c_T}{\delta \mu_0}, \quad (\text{II.13})$$

caractérise les effets de viscosité induits par le fluide. Nous allons maintenant résoudre l'Éq. (II.12) afin de déterminer le déplacement des lèvres de la fissure.

II.2 Champ de déplacement diffusé : transformée de Fourier spatiale

Définissons la transformée de Fourier spatiale (par rapport à la variable y_1) directe et inverse de u_2^{dif} :

$$\tilde{u}_2^{\text{dif}}(\xi, y_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) e^{i\xi y_1} dy_1, \quad (\text{II.14})$$

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_2^{\text{dif}}(\xi, y_3) e^{-i\xi y_1} d\xi. \quad (\text{II.15})$$

Après avoir appliqué la transformée (II.14) à l'Éq. (II.3) et défini la fonction β telle que :

$$\beta(\xi) = \begin{cases} (\xi^2 - k_T^2)^{1/2}, & \xi^2 \geq k_T^2, \\ -i(k_T^2 - \xi^2)^{1/2}, & \xi^2 < k_T^2, \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

l'équation de Helmholtz (II.3) devient une équation différentielle ordinaire de variable y_3 :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_2^{\text{dif}}}{\partial y_3^2}(\xi, y_3) - \beta^2(\xi) \tilde{u}_2^{\text{dif}}(\xi, y_3) = 0. \quad (\text{II.17})$$

Une solution bornée dans la région $y_3 > 0$ et satisfaisant la condition de Sommerfeld (I.18), s'écrit :

$$\tilde{u}_2^{\text{dif}}(\xi, y_3) = C(\xi) e^{-\beta y_3}, \quad (\text{II.18})$$

où la fonction C est donnée par l'Éq. (II.14) sous la forme :

$$C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) e^{i\xi y_1} dy_1. \quad (\text{II.19})$$

II.2.1 Densité de dislocation

Nous pouvons maintenant substituer l'Éq. (II.19) dans l'Éq. (II.18) et appliquer la transformée inverse (II.15). Le résultat est :

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \int_0^\infty u_2^{\text{dif}}(v, 0^+) \cos(\xi(v - y_1)) e^{-\beta(\xi)y_3} d\xi dv. \quad (\text{II.20})$$

L'équation (II.20) montre qu'il est possible d'évaluer $u_2^{\text{dif}}(\vec{y})$ quel que soit $y_3 > 0$, si $u_2^{\text{dif}}(v, 0^+)$ est connu pour $|v| < a$. Afin de déterminer $u_2^{\text{dif}}(v, 0^+)$, nous introduisons une fonction b telle que :

$$u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+) = \int_{y_1}^a b(v) dv, \quad |y_1| < a, \quad (\text{II.21})$$

et qui satisfait la *condition de fermeture* suivante :

$$\int_{-a}^a b(v) dv = 0. \quad (\text{II.22})$$

La définition de b est compatible avec la condition (II.5). La fonction b peut être interprétée comme une *densité de dislocation à travers les lèvres de la fissure*. Par conséquent, pour chaque fonction b intégrable sur l'intervalle $[-a, a]$, le déplacement $u_2^{\text{dif}}(v, 0^+)$ est continu sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$. La densité de dislocation b dépend *a priori* de la fréquence, de l'angle d'incidence et de la viscosité.

En utilisant la définition (II.21), la quantité C prend la forme suivante :

$$C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{i\xi y_1} \int_{y_1}^a b(v) dv dy_1, \quad (\text{II.23})$$

qui, après un changement d'ordres d'intégration et l'utilisation de l'Éq. (II.22), devient :

$$C(\xi) = \frac{-i}{\xi\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a b(v) e^{i\xi v} dv. \quad (\text{II.24})$$

Cette relation couplée à la définition de la densité de dislocation (II.21) est maintenant utilisée afin de réécrire la condition limite (II.12) en fonction de la densité de dislocation b .

II.2.2 Équation intégrale singulière

La dérivée partielle de l'Éq. (II.15), après y avoir substitué l'Éq. (II.18), conduit à :

$$\frac{\partial u_2^{\text{dif}}(y_1, 0^+)}{\partial y_3} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\xi) C(\xi) e^{-i\xi y_1} d\xi. \quad (\text{II.25})$$

À l'aide des Éqs. (II.21), (II.22), (II.24) et (II.25), la condition limite (II.12) devient :

$$\begin{aligned} \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a \frac{\beta(\xi)}{\xi} b(v) e^{i\xi(v-y_1)} dv d\xi - 2ik_T \sigma \int_{y_1}^a b(v) dv = \\ ik_T u_0 \cos \theta_0 e^{ik_T y_1 \sin \theta_0}, \quad |y_1| < a. \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Si nous introduisons la fonction de Heaviside \mathbf{H} (Annexe A2) dans la définition (II.21) et utilisons l'Éq. (II.22), nous établissons :

$$\int_{y_1}^a b(v) dv = \int_{-a}^a \mathbf{H}(v - y_1) b(v) dv. \quad (\text{II.27})$$

À partir des résultats obtenus par Angel (1988), l'intégrale double dans le membre de gauche de l'Éq. (II.26) se réduit à l'intégrale singulière suivante (voir l'Annexe A3) :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a b(v) \left[\frac{1}{v - y_1} + S(v - y_1) \right] dv. \quad (\text{II.28})$$

Cette intégrale est définie au sens des valeurs principales de Cauchy si $|y_1| < a$, et la fonction S est donnée par :

$$S(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\beta(\xi)}{\xi} - 1 \right) \sin(\xi x) d\xi. \quad (\text{II.29})$$

Les équations (II.27) à (II.29) conduisent alors à l'égalité :

$$\int_{-a}^a b(v) \left[\frac{1}{v - y_1} + S(v - y_1) + \mathfrak{S}(v - y_1) \right] dv = g(y_1), \quad (\text{II.30})$$

où \mathfrak{S} et g sont telles que :

$$\mathfrak{S}(x) = -2i\pi k_T \sigma \mathbf{H}(x), \quad (\text{II.31})$$

$$g(x) = i\pi u_0 k_T \cos \theta_0 e^{ik_T x \sin \theta_0}. \quad (\text{II.32})$$

L'équation (II.30) est fondamentale. La fonction \mathfrak{S} est liée à la viscosité et à l'épaisseur de la fissure, par l'intermédiaire de σ ; g est liée à l'onde incidente et S fait intervenir la propagation de l'onde diffusée avec un nombre d'onde selon la direction parallèle à la fissure égal à k_T . La longueur $2a$ de la fissure apparaît dans les bornes de l'intégrale de l'Éq. (II.30). L'équation (II.30) est une équation intégrale singulière de type Cauchy pour l'inconnue b . Puisque les fonctions S , \mathfrak{S} et g sont à valeurs complexes, la densité de dislocation b l'est aussi. L'équation intégrale (II.30) ne peut pas être résolue analytiquement, mais il est possible de la résoudre numériquement en utilisant, par exemple, une formule d'intégration de type Gauss – Tchebychev (Erdogan & Gupta 1972) ; résolution qui est discuté en détail dans l'Annexe A4 (pour la forme adimensionnelle de l'Éq. (II.30)). À incidence normale ($\theta_0 = 0$) et pour un coefficient de viscosité nul ($\sigma = 0$), l'équation intégrale (II.30) est équivalente à celle établie par Angel (1988).

Une fois la densité de dislocation b connue, le champ de déplacement diffusé et le champ de contrainte associé peuvent être calculés partout dans le solide. En substituant les Éqs. (II.21) et (II.22) dans l'Éq. (II.20), le champ de déplacement diffusé dans la région $y_3 > 0$ s'écrit :

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \int_0^\infty b(v) \frac{e^{-\beta(\xi)y_3}}{\xi} \sin(\xi(v - y_1)) d\xi dv. \quad (\text{II.33})$$

II.3 Champ de déplacement diffusé : représentation de Green

Dans cette section, le champ de déplacement diffusé par la fissure est décrit par la superposition des champs rayonnés par un ensemble de sources linéiques réparties sur ses lèvres (confondues). Il s'agit alors de retrouver les Éqs. (II.20) et (II.33)

Désignons par $G(\vec{y}; \vec{y}')$ le rayonnement en demi-espace (fonction de Green), d'une source linéique, antiplane, unitaire, isotrope placée au point $\vec{y}' = (y'_1, y'_3)$ et notée $\delta(\vec{y}; \vec{y}')$. $G(\vec{y}; \vec{y}')$ vérifie les équations suivantes :

$$(\Delta_y + k_T^2)G(\vec{y}; \vec{y}') = -\delta(\vec{y}; \vec{y}'), \quad y_3 > 0, \quad (\text{II.34})$$

$$G(\vec{y}; \vec{y}') = 0, \quad |y_1| \geq a, \quad y_3 = 0, \quad (\text{II.35})$$

où δ est la fonction de Dirac (Annexe A2) et Δ_y indique que les dérivations se font par rapport aux coordonnées du point \vec{y} . On montre que si la dépendance par rapport au temps est $\exp(-i\omega t)$, une solution particulière de l'Éq. (II.34), choisie de façon à satisfaire la condition aux limites (II.35) et la condition de Sommerfeld, est donnée par (voir l'Annexe A5) :

$$G(\vec{y}; \vec{y}') = \frac{i}{4} \left[H_0^{(1)}(k_T |\vec{y} - \vec{y}'|) - H_0^{(1)}(k_T |\vec{y} - \vec{\bar{y}}'|) \right], \quad (\text{II.36})$$

où $\vec{\bar{y}}' = (y'_1, -y'_3)$ est l'image du point \vec{y}' dans l'espace de \vec{y} par rapport à l'axe y_1 .

Cherchons maintenant à donner une représentation intégrale du champ de déplacement diffusé $u_2^{\text{dif}}(\vec{y})$. Nous pouvons montrer que $u_2^{\text{dif}}(\vec{y})$ s'exprime à l'aide de la représentation de Green (en tenant compte de la réciprocité de cette dernière, voir l'Annexe A5) sous la forme :

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) = \int_{-a}^a u_2^{\text{dif}}(\vec{y}') \frac{\partial G(\vec{y}'; \vec{y})}{\partial y_3} dy'_1, \quad y'_3 = 0^+, \quad y_3 > 0. \quad (\text{II.37})$$

En utilisant l'Éq. (II.36) et le résultat $\frac{d}{dz} H_0^{(1)}(z) = -H_1^{(1)}(z)$ dans l'Éq. (II.37), nous obtenons :

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{y}) = \frac{i}{2} k_T y_3 \int_{-a}^a \frac{u_2^{\text{dif}}(v, 0^+)}{r_0} H_1^{(1)}(k_T r_0) dv, \quad (\text{II.38})$$

où r_0 est défini par :

$$r_0^2 = (y_1 - v)^2 + y_3^2. \quad (\text{II.39})$$

À partir de la représentation intégrale suivante (Abramowitz & Stegun 1970) :

$$H_0^{(1)}(k_T r_0) = \frac{2}{i\pi} \int_0^\infty \cos(\xi(v - y_1)) \frac{e^{-\beta(\xi)y_3}}{\beta(\xi)} d\xi, \quad y_3 > 0, \quad (\text{II.40})$$

nous montrons facilement, que le déplacement diffusé (II.38) se réduit aux expressions (II.20) et (II.33). Par ailleurs, la relation (II.38) sera utilisée dans la section suivante, pour établir l'expression du champ diffusé en champ lointain.

II.4 Amplitude de diffusion en champ lointain

Soit (r, θ) les coordonnées polaires d'un point P dans le demi-espace ($y_3 > 0$), comme tracé sur la Figure II.1. La distance r et l'angle θ sont définis par $r^2 = y_1^2 + y_3^2$ et $\cos \theta = y_3 / r$. Ainsi, pour $r \gg v$, la distance (II.39) s'écrit :

$$r_0 \simeq r \left(1 - \frac{v}{r} \sin \theta \right) + O(r^{-1}) \quad (\text{II.41})$$

Nous avons pour $r \gg a$:

$$H_1^{(1)}(k_T r_0) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_T r}} e^{i(k_T r - k_T v \sin \theta - \frac{3\pi}{4})} \simeq H_1^{(1)}(k_T r) e^{-ik_T v \sin \theta}. \quad (\text{II.42})$$

À l'aide des Éqs. (II.41) et (II.42), le déplacement diffusé (II.38) prend la forme :

$$u_2^{\text{dif}}(\vec{r}) = \frac{i}{2} k_T \cos \theta H_1^{(1)}(k_T r) \int_{-a}^a u_2^{\text{dif}}(v, 0^+) e^{-ik_T v \sin \theta} dv, \quad (r \gg a, 0 \leq \theta < 2\pi). \quad (\text{II.43})$$

En champ lointain, le champ de déplacement diffusé (II.43) peut donc être regardé comme le produit de la fonction radiale $H_1^{(1)}$, qui dépend de $k_T r$, et d'une fonction de l'angle d'observation θ , qui dépend *a priori* de l'angle d'incidence θ_0 et de la fréquence. Observons que le déplacement $u_2^{\text{dif}}(v, 0^+)$ est une fonction paire de v , pour une incidence nulle. Ainsi, d'après l'Éq. (II.43), nous avons $u_2^{\text{dif}}(r, \theta) = u_2^{\text{dif}}(r, -\theta)$ pour $\theta_0 = 0$.

En substituant les Éqs. (II.21) et (II.42) dans l'Éq. (II.43), puis en échangeant les ordres d'intégration et en utilisant l'Éq. (II.22) dans l'expression résultante, nous trouvons que le déplacement diffusé en champ lointain (II.43) s'écrit sous la forme équivalente (I.88), où l'*amplitude de diffusion en champ lointain* $f(\theta, \theta_0)$ est définie par :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{k_T}{2i\pi} \cos \theta B(\theta, \theta_0), \quad (\text{II.44})$$

avec :

$$B(\theta, \theta_0) = \frac{i}{u_0 k_T \sin \theta} \int_{-a}^a b(v) e^{-ik_T v \sin \theta} dv. \quad (\text{II.45})$$

La fonction b étant impaire, Éq. (II.22), il découle des Éqs. (II.44) et (II.45) que $f(\pi - \theta, \theta_0) = -f(\theta, \theta_0)$. Dans le voisinage de $\theta = 0$ ou π , en utilisant des développements en séries de Taylor de la condition (II.22) et de la fonction exponentielle de l'Éq. (II.45), nous trouvons que :

$$f(0, \theta_0) = -f(\pi, \theta_0) = \frac{k_T}{2i\pi} B(\theta_0), \quad (\text{II.46})$$

avec :

$$B(\theta_0) = \frac{1}{u_0} \int_{-a}^a vb(v) dv. \quad (\text{II.47})$$

À incidence normale ($\theta_0 = 0$) et en absence de fluide visqueux ($\sigma = 0$), les expressions (II.44) et (II.46) se réduisent à celles données par Caleap *et al.* (2007a).

II.5 Limites analytiques

Dans cette section, nous établissons les expressions limites de l'amplitude de diffusion $f(\theta, \theta_0)$ dans les cas de basse et haute fréquences ($\tilde{\omega} = k_T a \ll 1, \gg 1$). Avant de résoudre l'équation intégrale singulière (II.30) dans ces cas particuliers, réécrivons-la sous forme adimensionnelle. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes :

$$y = y_1 / a, \quad \zeta = \xi / k_T, \quad \tilde{b}(v) = ab(va) / u_0. \quad (\text{II.48})$$

En substituant les paramètres précédents dans les fonctions β , S , \S et g , définies respectivement par les Éqs. (II.16), (II.29), (II.31) et (II.32), nous obtenons les relations adimensionnelles suivantes :

$$\tilde{S}(x) \equiv aS(ax) = \tilde{\omega} \int_0^\infty \left(\frac{\tilde{\beta}(\zeta)}{\zeta} - 1 \right) \sin(\tilde{\omega}\zeta x) d\zeta, \quad (\text{II.49})$$

$$\tilde{\S}(x) \equiv a\S(ax) = -2i\pi\tilde{\omega}\sigma\mathbf{H}(x), \quad (\text{II.50})$$

$$\tilde{g}(x) \equiv ag(ax) / u_0 = i\pi\tilde{\omega} \cos \theta_0 e^{i\tilde{\omega}x \sin \theta_0}. \quad (\text{II.51})$$

La fonction $\tilde{\beta}$ dans l'Éq. (II.49) est donnée par :

$$\tilde{\beta}(\zeta) = \begin{cases} \sqrt{\zeta^2 - 1}, & |\zeta| > 1, \\ -i\sqrt{1 - \zeta^2}, & |\zeta| < 1. \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

À l'aide des relations précédentes, l'équation intégrale (II.30) et la condition de fermeture (II.22) nous conduisent à :

$$\int_{-1}^1 \tilde{b}(v) \left[\frac{1}{v-y} + \tilde{S}(v-y) + \tilde{\mathfrak{F}}(v-y) \right] dv = \tilde{g}(y), \quad |y| < 1, \quad (\text{II.53})$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{b}(v) dv = 0. \quad (\text{II.54})$$

Dans un premier temps, nous allons calculer l'intégrale (II.49) analytiquement. En substituant la fonction $\tilde{\beta}$ donnée par l'Éq. (II.52) dans l'Éq. (II.49) et en utilisant la relation :

$$\frac{\tilde{\beta}(\zeta)}{\zeta} - 1 = -\frac{1}{\zeta(\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta)}, \quad \zeta > 1, \quad (\text{II.55})$$

nous obtenons après une intégration par parties :

$$\tilde{S}(x) = -i\tilde{\omega} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \sin(\tilde{\omega}\zeta x) d\zeta - \int_1^\infty \frac{1 - \cos(\tilde{\omega}\zeta x)}{\zeta^2 x \sqrt{\zeta^2 - 1}} d\zeta. \quad (\text{II.56})$$

En utilisant les tableaux des intégrales tabulées dans Gradshteyn & Ryzhik (1994), nous obtenons après quelques manipulations algébriques les résultats suivants pour les deux intégrales de l'Éq. (II.56) :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \sin(\zeta x) d\zeta = \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{J_1(v)}{v} dv, \quad \forall x > 0, \quad (\text{II.57})$$

$$\int_1^\infty \frac{1 - \cos(\zeta x)}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1}} d\zeta = -\frac{\pi}{2} \int_0^x Y_0(v)(x-v) dv, \quad \forall x > 0. \quad (\text{II.58})$$

Rappelons maintenant les identités suivantes (Abramowitz & Stegun 1970) :

$$\int_0^x v Y_0(v) dv = \frac{2}{\pi} + x Y_1(x),$$

$$\frac{J_1(v)}{v} = J_0(v) - J_1'(v), \quad v Y_0(v) = v Y_1'(v) + Y_1(v),$$

$$\int_0^x J_0(v) dv = \frac{2}{\pi} x [H_0(x) J_1(x) - J_0(x) H_1(x)] + x J_1(x), \quad \forall x > 0,$$

$$\int_0^x Y_0(v) dv = \frac{2}{\pi} x [H_0(x) Y_1(x) - Y_0(x) H_1(x)] + x Y_1(x), \quad \forall x > 0,$$

où H_0 et H_1 sont respectivement les *fonctions de Struve* d'ordre zéro et un. Ainsi, en utilisant les relations ci-dessus et la définition de la fonction de Hankel de première espèce, $H_n^{(1)}(v) = J_n(v) + i Y_n(v)$, l'Éq. (II.56) devient :

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) = i\tilde{\omega}^2 \frac{\pi^2}{4} x \left[H_0^{(1)}(\tilde{\omega}|x) H_1(\tilde{\omega}|x) - H_1^{(1)}(\tilde{\omega}|x) H_0(\tilde{\omega}|x) \right] \\ + i\tilde{\omega} \frac{\pi}{2} \left[\text{sgn}(x) H_1^{(1)}(\tilde{\omega}|x) - \tilde{\omega} x H_0^{(1)}(\tilde{\omega}|x) \right] - \frac{1}{x},\end{aligned}\quad (\text{II.59})$$

où sgn est la fonction signe (Annexe A2). Cette forme adimensionnelle de l'Éq. (II.49) va être utile à la résolution de l'équation intégrale (II.53) pour des basses/hautes fréquences, à partir des développements asymptotiques des fonctions de Hankel et de Struve pour de petits/grands arguments. Notons que l'expression (II.59) « annihile » la singularité en $1/x$ de l'équation intégrale (II.53).

II.5.1 Approximation basse fréquence

Plaçons-nous dans le cas où $\tilde{\omega} \ll 1$, *i. e.* à basse fréquence. Les développements asymptotiques des fonctions de Hankel et de Struve pour de petites valeurs des arguments peuvent être approximés par les relations :

$$H_0^{(1)}(z) = \left(1 + O(z^2)\right) + i \left[\frac{2}{\pi} (\ln z + O(1)) \right], \quad (\text{II.60})$$

$$H_1^{(1)}(z) = \frac{z}{2} \left(1 + O(z^2)\right) + i \left[\frac{z}{\pi} (\ln z + O(1)) - \frac{2}{\pi z} \right], \quad (\text{II.61})$$

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi} z \left(1 + O(z^2)\right), \quad H_1(z) = \frac{2}{3\pi} z^2 \left(1 + O(z^2)\right). \quad (\text{II.62})$$

Ainsi, en substituant les relations (II.60)-(II.62) dans l'Éq. (II.59), la fonction \tilde{S} devient :

$$\tilde{S}(x) = \frac{1}{2} x \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) - i \frac{\pi}{4} x \tilde{\omega}^2 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right). \quad (\text{II.63})$$

Par souci de clarté, nous allons étudier successivement les cas des fissures où les lèvres sont libres de contraintes (surface libre) ou en contact avec un fluide Newtonien visqueux.

II.5.1.1 Fissure à surfaces libres

Dans ce cas $\sigma = 0$ et l'équation à résoudre (II.53), après y avoir substitué l'Éq. (II.63) et utilisé la condition (II.54), devient :

$$\int_{-1}^1 \frac{\tilde{b}(v)}{v-y} dv = \tilde{g}(y) - B_0 \left[\frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) - i \frac{\pi}{4} \tilde{\omega}^2 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right) \right], \quad |y| < 1, \quad (\text{II.64})$$

où la quantité B_0 est définie à l'aide de l'Éq. (II.47) par $aB_0 = B(\theta_0)$ soit :

$$B_0 = \int_{-1}^1 v \tilde{b}(v) dv. \quad (\text{II.65})$$

Finalement, le développement limité de l'Éq. (II.51) est donné par :

$$\tilde{g}(x) = i\pi\tilde{\omega} \cos \theta_0 \left(\left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right) + i\tilde{\omega}x \sin \theta_0 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right) \right). \quad (\text{II.66})$$

En substituant l'Éq. (II.66) dans l'Éq. (II.64), nous obtenons :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{b}(v)}{v-y} dv = g_0 - y\tilde{\omega}^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right), \quad |y| < 1, \quad (\text{II.67})$$

avec :

$$g_0 = i\tilde{\omega} \cos \theta_0 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right) - \frac{B_0}{\pi} \left[\frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) - i \frac{\pi}{4} \tilde{\omega}^2 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right) \right]. \quad (\text{II.68})$$

Une solution $b(y)$ de l'Éq. (II.67), non-bornée en $y = \pm 1$, est construite en considérant la quantité g_0 (et par conséquent B_0 , Éq. (II.65)) comme une constante et en appliquant la méthode décrite par Muskhelishvili (1953). Nous obtenons ainsi (Muskhelishvili 1953, Mikhlin 1964, Polyanin & Manzhirov 1998) :

$$\tilde{b}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} g_0 - \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \tilde{\omega}^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right), \quad |y| < 1. \quad (\text{II.69})$$

En insérant la solution (II.69) dans l'intégrale B_0 donnée par l'Éq. (II.65), nous obtenons :

$$B_0 = \frac{\pi}{2} g_0, \quad (\tilde{\omega} \rightarrow 0), \quad (\text{II.70})$$

soit, en utilisant l'Éq. (II.68) :

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{4i\pi\tilde{\omega} \cos \theta_0 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right)}{8 + 2\tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) - i\pi\tilde{\omega}^2 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right)} \\ &\simeq i \left(1 - \frac{1}{4} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right) \tilde{\omega} \frac{\pi}{2} \cos \theta_0 - \tilde{\omega}^3 \frac{\pi^2}{16} \cos \theta_0 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2)\right). \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

Considérons maintenant l'intégrale $B(\theta, \theta_0)$, Éq. (II.45), apparaissant explicitement dans la définition de l'amplitude de diffusion (II.44). Nous définissons la quantité adimensionnelle B_θ par $aB_\theta = B(\theta, \theta_0)$, soit :

$$B_\theta = \frac{i}{\tilde{\omega} \sin \theta} \int_{-1}^1 \tilde{b}(v) e^{-i\tilde{\omega}v \sin \theta} dv, \quad (\theta \neq 0, \pi, 2\pi, \dots). \quad (\text{II.72})$$

Autour des valeurs singulières $\theta = 0, \pi, 2\pi, \dots$, B_θ se réduit à B_0 donnée par l'Éq. (II.65). Nous développons en séries de Taylor la fonction exponentielle dans l'Éq. (II.72) pour des fréquences $\tilde{\omega}$ petites et supposons que les intégrales du type $v^n \tilde{b}(v)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ont le même ordre en $\tilde{\omega}$ que B_0 . Il s'en suit alors que :

$$B_\theta = B_0 \left(1 + \sin^2 \theta O(\tilde{\omega}^2) + i \sin \theta O(\tilde{\omega}) \right), \quad (\text{II.73})$$

avec B_0 donnée par l'Éq. (II.71). En substituant l'Éq. (II.73) dans l'expression de l'amplitude de diffusion (II.44), nous obtenons :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{2}{i\pi} T_{11} \cos \theta \cos \theta_0, \quad (\sigma = 0, \tilde{\omega} \rightarrow 0), \quad (\text{II.74})$$

où le coefficient de diffusion T_{11} est donné par :

$$T_{11}(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{32} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right] \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2}{64} \tilde{\omega}^4 (1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})). \quad (\text{II.75})$$

L'amplitude de diffusion (II.74) est en accord parfait avec celle calculée en considérant la fissure comme un cas particulier d'une ellipse d'ouverture nulle, Éq. (I.102).⁶ Elle coïncide également avec celle présentée par Varadan & Varadan (1979) et Weaver & Pao (1979).

II.5.1.2 Fissure contenant un fluide visqueux

Observons que la fonction $\tilde{\S}$ dans l'Éq. (II.50) est linéaire en σ et $\tilde{\omega}$. Ainsi, pour $\tilde{\omega} \rightarrow 0$, nous pouvons écrire :

$$\int_{-1}^1 \tilde{b}(v) \tilde{\S}(v-y) dv = \sigma \tilde{\omega} O(I(\tilde{\omega}, y)), \quad (\text{II.76})$$

où I est l'intégrale donnée par :

$$I(\tilde{\omega}, y) = \int_{-1}^1 \tilde{b}(v) \mathbf{H}(v-y) dv = \int_y^1 \tilde{b}(v) dv. \quad (\text{II.77})$$

En supposant que les intégrales B_0 et I , Éqs. (II.65) et (II.77), sont de même ordre en $\tilde{\omega}$, il s'en suit que :

$$\int_{-1}^1 \tilde{b}(v) \tilde{\S}(v-y) dv = \sigma B_0 O(\tilde{\omega}). \quad (\text{II.78})$$

En utilisant les Éqs. (II.63) et (II.66), (II.78) dans l'équation intégrale (II.53) et en suivant la même démarche que pour la fissure à surfaces libres, nous obtenons :

$$B_\theta = B_0 \left(1 + \sin^2 \theta O(\tilde{\omega}^2) + i \sin \theta O(\tilde{\omega}) \right), \quad (\text{II.79})$$

où :

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{2i\pi\tilde{\omega} \cos \theta_0 (1 + O(\tilde{\omega}^2))}{4 + \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) + 2i\sigma O(\tilde{\omega})} \\ &\simeq i \left[1 - \frac{1}{4} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right] \tilde{\omega} \frac{\pi}{2} \cos \theta_0 + \sigma \cos \theta_0 O(\tilde{\omega}^2). \end{aligned} \quad (\text{II.80})$$

⁶ Rappelons que par rapport au Chapitre I, les angles $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ sont mesurés par rapport à l'axe y_3 .

En substituant l'Éq. (II.79) dans l'expression de l'amplitude de diffusion (II.44), nous obtenons :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{2}{i\pi} T_{11} \cos \theta \cos \theta_0, \quad (\sigma \geq 0, \tilde{\omega} \rightarrow 0), \quad (\text{II.81})$$

où le coefficient de diffusion T_{11} est donné par :

$$T_{11}(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{32} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + \sigma^2 O(1)) \right] \tilde{\omega}^2 + \sigma O(\tilde{\omega}^3). \quad (\text{II.82})$$

Remarquons qu'à basse fréquence ($\tilde{\omega} \rightarrow 0$) seulement la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion est affectée par la viscosité σ du fluide.

II.5.1.3 Réduction d'une fibre elliptique

L'approximation basse fréquence de la diffusion d'une onde TH par une fibre elliptique d'ouverture $\tau = \frac{a_3}{a_1}$ et de module de rigidité μ_1 est étudiée dans l'Annexe A6. Les cas de cavité vide ou saturée d'un fluide visqueux de viscosité dynamique η_0 sont traités en fixant respectivement $\mu_1 = 0$ et $\mu_1 = -i\omega\eta_0$. Enfin, en développant en séries de Taylor autour de $\delta (= a_3 = \tau a_1) = 0$ avec $a_1 \rightarrow a$, l'Éq. (A6.35) se réduit aux Éqs. (II.74) et (II.75) lorsque $\eta_0 = 0$, et conduit à :

$$T_{11}(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{32} \tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega} - \frac{\pi}{8} \sigma^2 \tilde{\omega}^2 \right] \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi}{8} \left(\sigma + \frac{\pi}{8} \tilde{\omega} \right) \tilde{\omega}^3, \quad (\text{II.83})$$

quel que soit σ , expression conforme à l'Éq. (II.82).

II.5.2 Approximation haute fréquence

Plaçons-nous dans le cas où $\tilde{\omega} \gg 1$, *i. e.* à haute fréquence. Les fonctions de Hankel et de Struve pour de grandes valeurs d'arguments peuvent être approximées par les relations suivantes (Abramowitz & Stegun 1970, Gradshteyn & Ryzhik 1994) :

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi z} - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z + \frac{\pi}{4} \right) + O(z^{-3/2}), \quad (\text{II.84})$$

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left(z + \frac{\pi}{4} \right) + O(z^{-3/2}), \quad (\text{II.85})$$

$$H_0^{(1)}(z) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i \left(z + \frac{\pi}{4} \right)} + O(z^{-3/2}), \quad H_1^{(1)}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i \left(z + \frac{\pi}{4} \right)} + O(z^{-3/2}). \quad (\text{II.86})$$

Ainsi, en substituant les relations (II.60)-(II.62) dans l'Éq. (II.59), la fonction \tilde{S} devient :

$$\tilde{S}(x) = -\frac{1}{x} - i\frac{\pi}{2}\text{sgn}(x)\tilde{\omega} + O(\tilde{\omega}^{-1/2}). \quad (\text{II.87})$$

Dans ce qui suit nous allons étudier successivement les cas des incidences normale ($\theta_0 = 0$) et oblique.

II.5.2.1 Incidence normale

Dans le cas de l'incidence normale, la fonction \tilde{g} définie par l'Éq. (II.51) est une constante et l'équation intégrale (II.53) prend la forme suivante :

$$\int_{-1}^1 \tilde{b}(v)S(v-y;\sigma)dv = i\pi\tilde{\omega}, \quad |y| < 1, \quad (\text{II.88})$$

où :

$$S(x;\sigma) = \frac{1}{x} + \tilde{S}(x) + \tilde{\mathfrak{S}}(x) = -i\tilde{\omega}\frac{\pi}{2}[\text{sgn}(x) + 4\sigma\mathbf{H}(x)]. \quad (\text{II.89})$$

En substituant l'Éq. (II.89) dans l'Éq. (II.88), nous trouvons :

$$\int_{-1}^1 \tilde{b}(v)\text{sgn}(v-y)dv = -\frac{2}{1+2\sigma}, \quad |y| < 1. \quad (\text{II.90})$$

À l'aide de la condition (II.54), l'Éq. (II.90) devient :

$$\int_{-1}^y \tilde{b}(v)dv = \frac{1}{1+2\sigma}, \quad |y| < 1. \quad (\text{II.91})$$

Puisque \tilde{b} doit satisfaire la condition de fermeture (II.54), une solution de l'Éq. (II.91) s'écrit :

$$\tilde{b}(y) = \frac{2}{1+2\sigma}[\delta(1+y) - \delta(1-y)], \quad (\theta_0 = 0). \quad (\text{II.92})$$

En substituant l'Éq. (II.92) dans les expressions (II.65) et (II.72), nous obtenons :

$$B_\theta = -\frac{2\sin(\tilde{\omega}\sin\theta)}{(1+2\sigma)\tilde{\omega}\sin\theta}, \quad (\text{II.93})$$

$$B_0 = -\frac{2}{1+2\sigma}. \quad (\text{II.94})$$

La limite haute fréquence de l'amplitude de diffusion en champ lointain s'obtient en substituant respectivement les Éqs. (II.93) et (II.94) dans les relations (II.44) et (II.46). Pour une incidence normale ($\theta_0 = 0$), nous en déduisons alors que :

$$f(\theta, 0) = \frac{\tilde{\omega}}{2i\pi}\cos\theta B_\theta = i\frac{\sin(\tilde{\omega}\sin\theta)}{(1+2\sigma)\pi}\cot\theta, \quad (\tilde{\omega} \rightarrow \infty), \quad (\text{II.95})$$

$$f(0,0) = -f(\pi,0) = \frac{\tilde{\omega}}{2i\pi} B_0 = i \frac{\tilde{\omega}}{(1+2\sigma)\pi}, \quad (\tilde{\omega} \rightarrow \infty). \quad (\text{II.96})$$

Observons que les amplitudes de diffusion (II.95) et (II.96) sont des imaginaires purs.

II.5.2.2 Incidence oblique

Un procédé similaire à celui décrit dans le cas de l'incidence normale nous conduit à l'équation :

$$\int_{-1}^y \tilde{b}(v) dv = \frac{\cos \theta_0}{1+2\sigma} e^{i\tilde{\omega}y \sin \theta_0}, \quad |y| < 1, \quad (\text{II.97})$$

dont le membre de droite dépend de y . L'identification de \tilde{b} , solution de cette équation, s'avère être alors plus compliquée et ne sera pas traitée ici. Par contre, une approximation haute fréquence de la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion vers l'avant peut être obtenue à partir de résultats de l'Annexe A7. Ainsi, en comparant l'Éq. (A7.2) à l'Éq. (A7.18), nous déduisons que :

$$\text{Im } f(\theta_0, \theta_0) = \frac{\tilde{\omega} \cos^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + 2\sigma)\pi}, \quad (\tilde{\omega} \rightarrow \infty). \quad (\text{II.98})$$

II.6 Résultats numériques et discussion

Les résultats obtenus précédemment nous permettent de calculer le champ de déplacement diffusé et les champs de contrainte associés partout dans le solide. Nous allons évaluer numériquement dans la suite des quantités physiques relatives à la diffusion en champs proche et lointain.

II.6.1 Diffusion en champ proche

II.6.1.1 Déplacement le long de la fissure

La Figure II.2 montre le module du déplacement total $|u_2^{\text{tot}}(y, 0^\pm)|$ sur les lèvres de la fissure, ($y = y_1/a \in [-1, 1]$) en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$. Nous allons identifier la lèvre de la fissure qui est exposée à l'onde incidente comme la « lèvre avant » ($y_3 < 0$), Figures II.2b et d ; l'autre lèvre est référencée comme « lèvre arrière » ($y_3 > 0$), Figures II.2a et c. Pour l'incidence normale ($\theta_0 = 0$), le diagramme espace-fréquence ($y-\tilde{\omega}$) montre la symétrie, par rapport à la direction de sollicitation, des déplacements u_2^{tot} de part et d'autre de la

fissure, Figures II.2a et b. Avec l'augmentation de la fréquence le nombre de crêtes augmente en suivant approximativement un ordre de nombre entier de π . Ces crêtes montrent de petites fluctuations dues au piégeage de l'énergie par la fissure. À incidence oblique ($\theta_0 = \frac{\pi}{4}$), la symétrie est perdue. L'interaction entre les modes vibratoires latéraux induit des changements progressifs dans l'alignement spectral des crêtes le long du profil des fréquences.

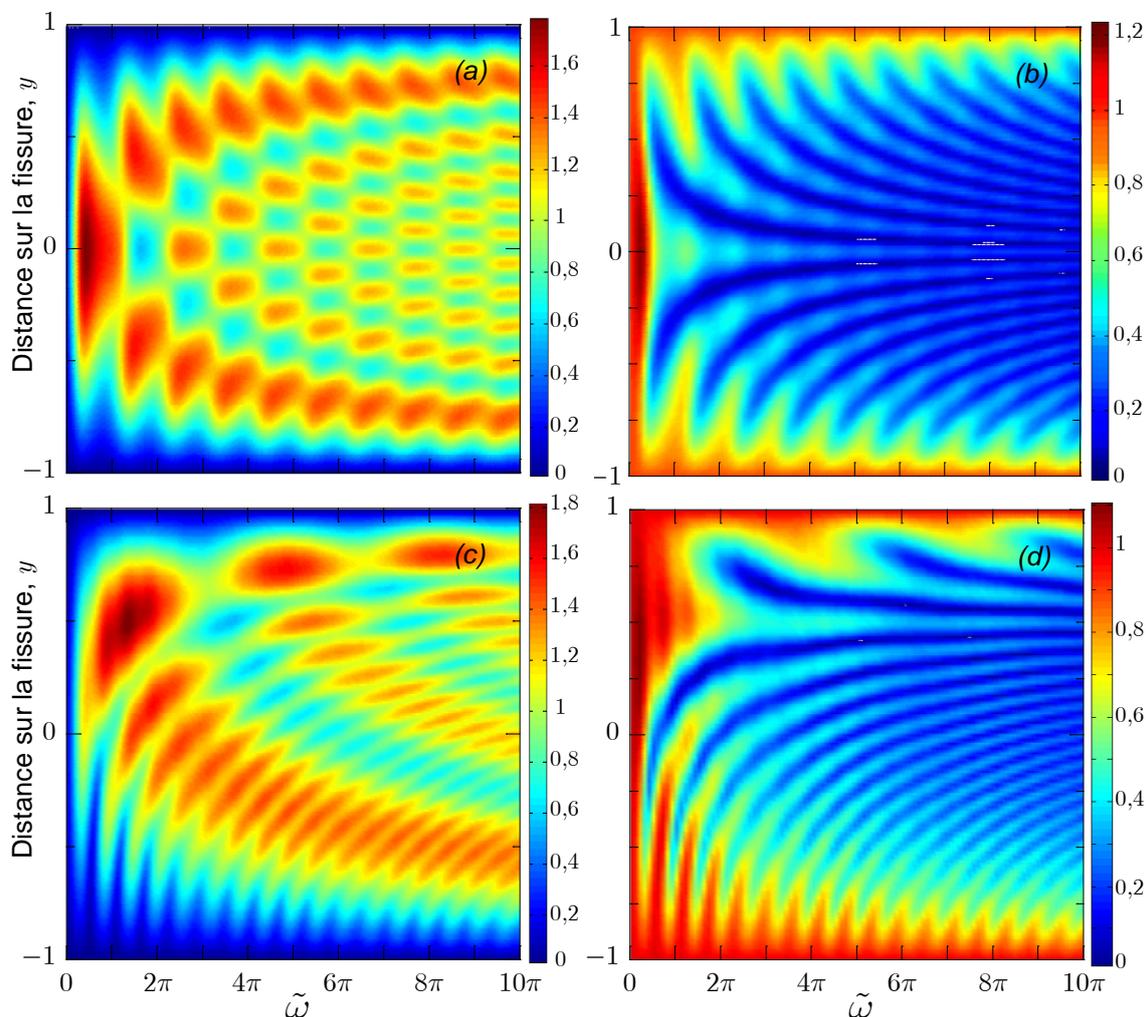


Figure II.2 : Déplacement total le long des lèvres avant (a et c) et arrière (b et d) de la fissure, pour une sollicitation sous incidence normale (a et b) ou oblique (c et d).

II.6.1.2 Facteur d'intensité de contraintes dynamiques

La compréhension des mécanismes de rupture des matériaux nécessite des études approfondies des phénomènes d'amorçage et de propagation de fissures, qui, en général, prennent naissance dans les zones de fortes concentrations de contraintes.

En mécanique de la rupture linéaire, la ruine du matériau est atteinte, lors du dépassement des facteurs d'intensité de contraintes critiques pour une sollicitation quasi-statique. Or une fissure est non seulement un diffuseur d'ondes, mais également un concentrateur de contraintes.

Le champ de contrainte environnant présente des singularités de type racine carré aux pointes de la fissure (Sih 1973). Nous évaluons dans la suite le facteur d'intensité de contraintes dynamiques à ces deux extrémités K_{III}^{\pm} à partir du déplacement diffusé par la fissure (Loeber & Sih 1968) :

$$K_{III}^{\pm} = \mu_0 \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \lim_{y_1' \rightarrow \pm a} \frac{1}{\sqrt{a \mp y_1'}} u_2^{\text{dif}}(y_1', 0^{\pm}), \quad (\text{II.99})$$

où « \pm » désigne les pointes de la fissure $y_1' = \pm a$. Introduisons le facteur d'intensité de contraintes normalisé \tilde{K}_{III}^{\pm} :

$$\tilde{K}_{III}^{\pm} = \left| \frac{K_{III}^{\pm}}{K_{III}^0} \right|, \quad (\text{II.100})$$

où K_{III}^0 est le facteur d'intensité de contraintes statique pour une fissure de taille $2a$ contenue dans un solide infini soumis à un contrainte $\sigma_{23}^0 = ik_T u_0 \mu_0$ à l'infini, *i. e.*,

$$K_{III}^0 = \sigma_{23}^0 \sqrt{\pi a}. \quad (\text{II.101})$$

La Figure II.3 montre les facteurs d'intensité de contraintes \tilde{K}_{III}^{\pm} en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour quatre valeurs de l'angle d'incidence θ_0 . À incidence normale ($\theta_0 = 0$), au fait de la symétrie par rapport à l'axe y_3 , les deux pointes de la fissure possèdent le même facteur d'intensité ($\tilde{K}_{III}^+ = \tilde{K}_{III}^-$). Les facteurs d'intensité dynamiques partent de leurs valeurs statiques à $\tilde{\omega} = 0$, puis augmentent avec $\tilde{\omega}$, atteignent leur maximum approximativement à $\tilde{\omega} = 0,95$ et enfin diminuent en oscillant. La valeur maximale de chaque facteur d'intensité de contraintes dynamique est environ 28% plus grande que la valeur statique correspondante. Ceci implique qu'une fissure sous un chargement dynamique est généralement plus dangereuse que sous un chargement statique de même amplitude. Le comportement global de \tilde{K}_{III}^{\pm} pour une incidence oblique est semblable à celui pour l'incidence normale. La valeur maximale des facteurs d'intensité de contraintes diminue avec l'augmentation de θ_0 . L'oscillation du facteur d'intensité \tilde{K}_{III}^+ à la pointe droite de la fissure est généralement plus faible que celle de \tilde{K}_{III}^- à la pointe gauche de la fissure. Dans la gamme de fréquences considérée, \tilde{K}_{III}^+ est plus grand que \tilde{K}_{III}^- , ce qui indique que la pointe droite de la fissure est susceptible de se propager en premier, si le facteur d'intensité de contraintes critique est atteint. À incidence latérale ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$), l'onde incidente engendre des contraintes nulles sur les lèvres de la fissure, et les facteurs d'intensité correspondants s'annulent. Notons ici que les facteurs d'intensité de contraintes pour une incidence normale ($\theta_0 = 0$) sont conformes aux résultats obtenus par Loeber & Sih (1968), Mal (1970) et Ohyoshi (1973).

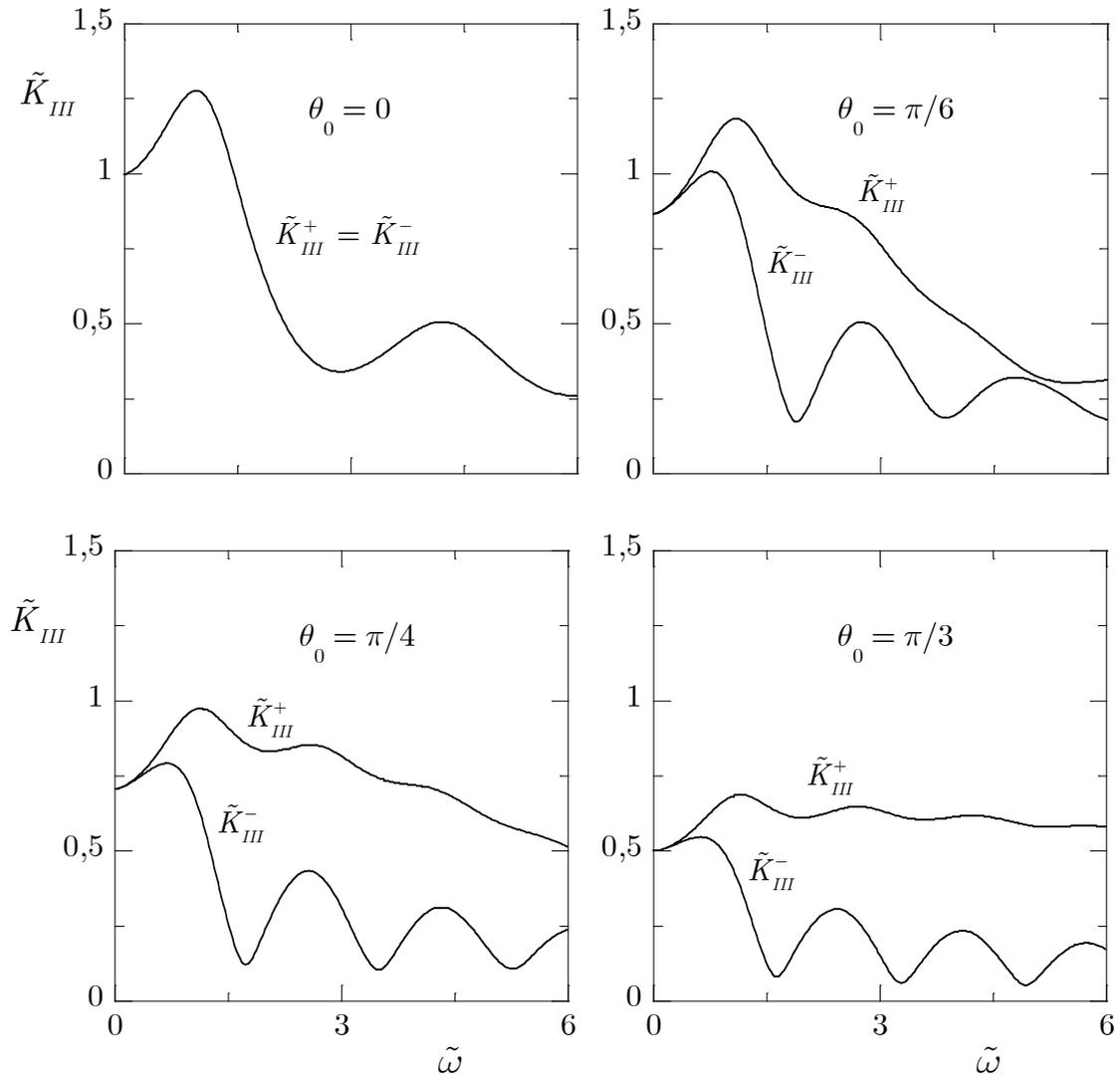


Figure II.3 : Facteur d'intensité de contraintes dynamiques \tilde{K}_{III}^{\pm} en pointes de fissure, sollicitée sous différents angles d'incidence (θ_0).

II.6.2 Diffusion en champ lointain

II.6.2.1 Fonctions de forme

La fonction de forme en champ lointain $f_{\infty}(\tilde{\omega}, \theta; \theta_0)$, Éq. (I.95), calculée avec la relation (II.44), est tracée sur les Figures II.4 à II.6 en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour différentes valeurs d'angle d'incidence θ_0 et de viscosité σ . Les Figures II.4a et b présentent respectivement les spectres de diffusion vers l'avant et vers l'arrière pour une fissure ($\sigma = 0$). Les symboles triangulaires représentent les valeurs numériques de la fonction de forme d'une fissure vue comme une cavité elliptique d'ouverture négligeable contenant du vide. La méthode basée sur l'utilisation des fonctions d'onde elliptiques est présentée au Chapitre I. La concordance entre les résultats obtenus par les deux méthodes est parfaite. La Figure II.4a

montre que la fonction de forme vers l'avant augmente avec $\tilde{\omega}$ tout en oscillant, mais diminue lorsque l'angle d'incidence θ_0 augmente. Pour une incidence normale ($\theta_0 = 0$), la fonction de forme vers l'arrière est identique à la fonction de forme vers l'avant, comme le prévoit l'Éq. (II.46). Nous observons que dans la gamme de basses fréquences ($\tilde{\omega} \lesssim 1$), les fonctions de forme vers l'avant et vers l'arrière ont les mêmes valeurs, puis lorsque la fréquence augmente, la fonction de forme vers l'avant est généralement plus grande que la fonction de forme vers l'arrière correspondante.

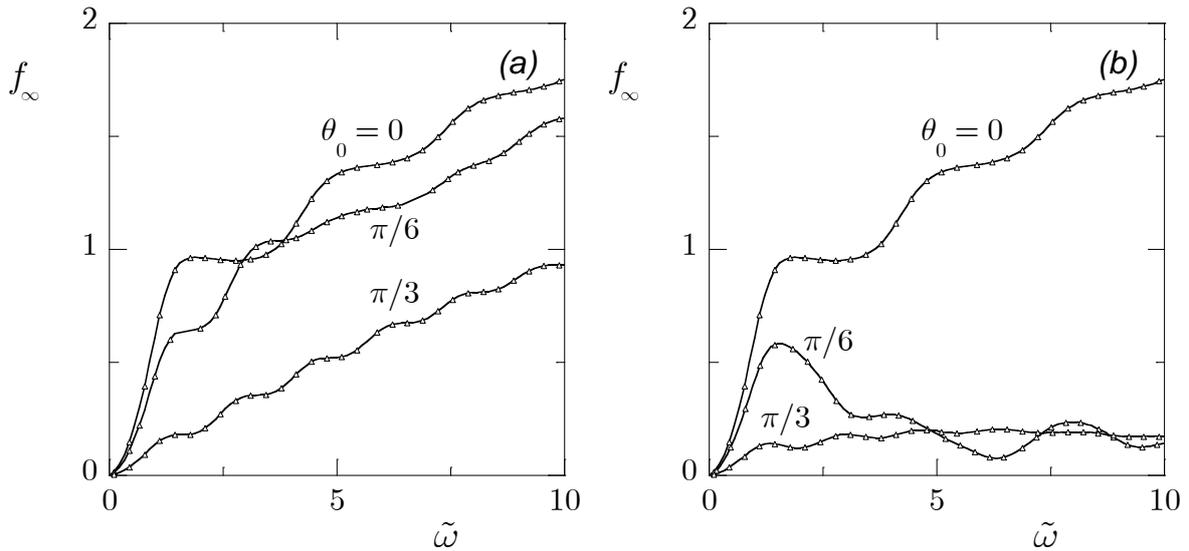


Figure II.4 : Fonctions de forme en champ lointain versus la fréquence réduite pour différentes valeurs de θ_0 . Diffusion vers l'avant a) et vers l'arrière b). Comparaison aux résultats obtenus avec les fonctions d'onde elliptiques (désignées par des triangles).

Les lèvres de la fissure sont libres de contraintes ($\sigma = 0$).

L'effet de la viscosité sur la fonction de forme en champ lointain est montré sur les Figures II.5 et II.6, pour des incidences normale et oblique ($\theta_0 = 0, \frac{\pi}{4}$). Les courbes présentent des oscillations dont le nombre croît avec l'angle d'incidence. En effet, elles sont liées à la *longueur active* de la fissure ℓ_a (projection de la fissure sur le front d'onde incident) et à la diffraction par les pointes de la fissure. Si la fréquence ou la viscosité augmente, ces oscillations sont atténuées. Pour une incidence normale ($\theta_0 = 0$), la fonction de forme vers l'arrière est identique à la fonction de forme vers l'avant, quelle que soit la valeur de la viscosité. De plus, quel que soit θ_0 , plus la viscosité augmente, plus la fonction de forme diminue. En effet, lorsque la viscosité croît, nous nous attendons à ce que les lèvres de la fissure tendent à se solidariser.

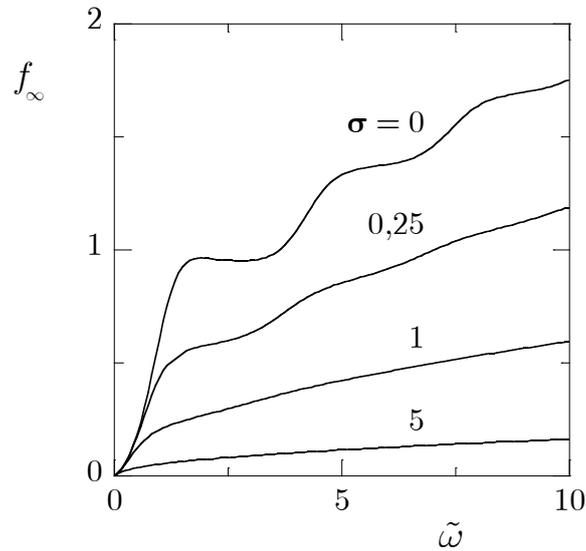


Figure II.5 : Fonctions de forme en champ lointain vers l'arrière (confondues à celles vers l'avant) versus la fréquence réduite pour une incidence normale ($\theta_0 = 0$) et différentes valeurs de viscosité σ .

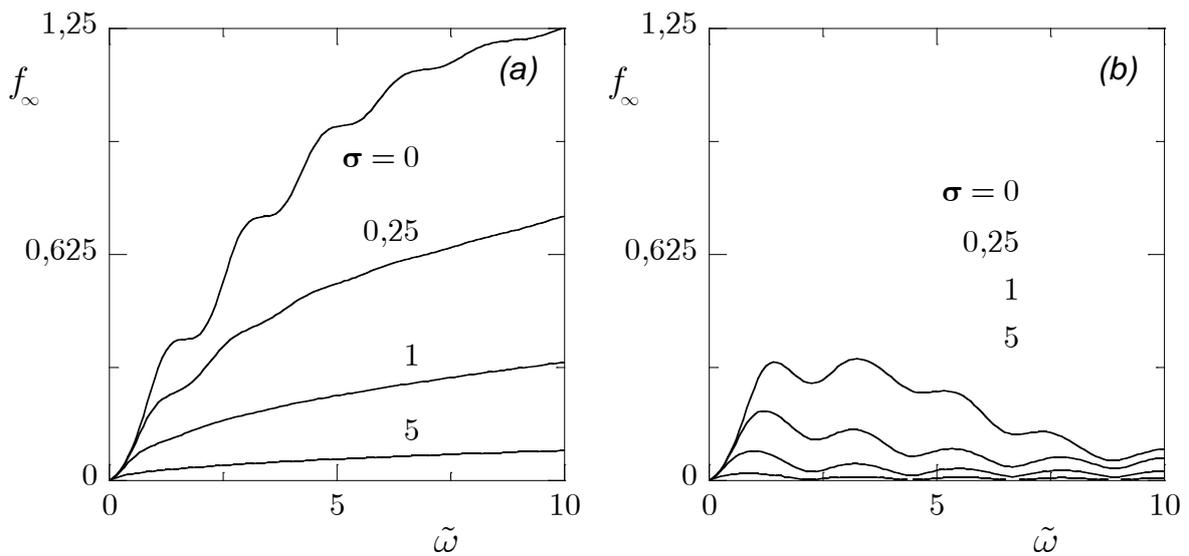


Figure II.6 : Fonctions de forme en champ lointain versus la fréquence réduite pour une incidence oblique ($\theta_0 = \frac{\pi}{4}$) et différentes valeurs de viscosité σ . Diffusion vers l'avant a) et vers l'arrière b).

II.6.2.2 Amplitudes de diffusion

La dépendance du déplacement diffusé en champ lointain en fonction de l'angle d'observation est montrée sur les Figures II.7 et II.8 à travers l'amplitude de diffusion $f(\theta, \theta_0)$ calculée avec l'Éq. (II.44).

Pour deux valeurs de l'angle d'incidence ($\theta_0 = 0, -\frac{\pi}{4}$), le module $|f(\theta, \theta_0)|$ de l'amplitude de diffusion est calculé en fonction de l'angle d'observation θ (Figures II.7a et b). Les lèvres de la fissure sont libres de contraintes ($\sigma = 0$). À incidence normale, $|f(\theta, 0)|$ est symétrique par rapport à $\theta = 0$. Comme attendu, la Figure II.7a montre que le module $|f(\theta, 0)|$ est nul sur la ligne de la fissure ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$) et prend les mêmes valeurs de chaque côté de la fissure ($y_3 > 0$ ou $y_3 < 0$). La valeur maximale de $|f(\theta, 0)|$ est atteinte pour $\theta = 0$, quelle que soit la valeur de la fréquence $\tilde{\omega}$.

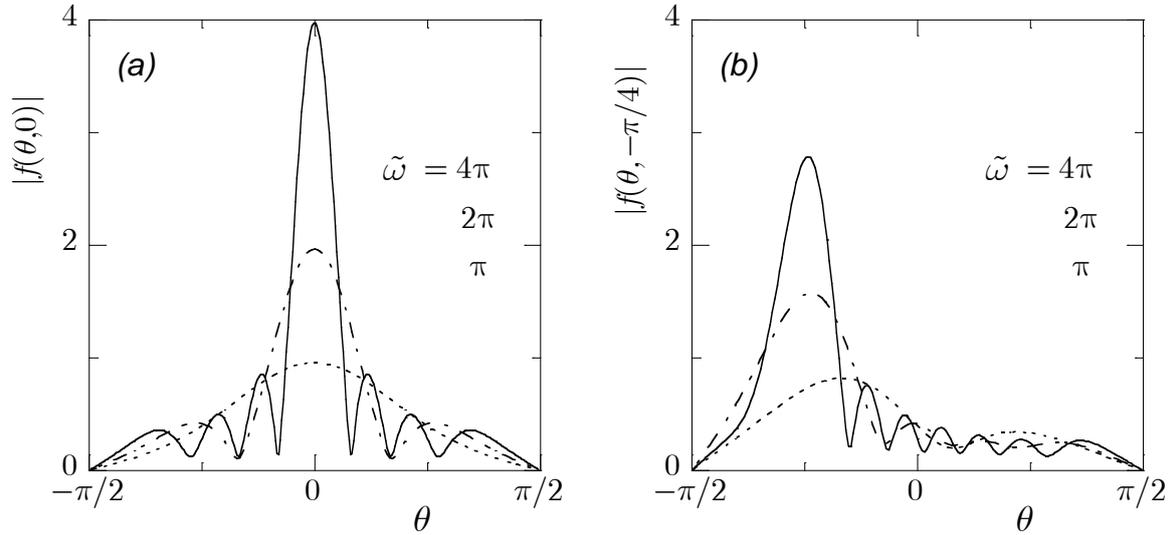


Figure II.7 : Amplitudes de diffusion en champ lointain versus l'angle d'observation pour $\sigma = 0$ et différentes valeurs de $\tilde{\omega}$. Incidences a) normale ($\theta_0 = 0$), b) oblique ($\theta_0 = -\pi/4$).

À incidence oblique ($\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$), les positions des maxima de $|f(\theta, -\pi/4)|$ dépendent de $\tilde{\omega}$. Au fur et à mesure que la fréquence augmente, l'angle associé à la valeur maximale de $|f(\theta, -\pi/4)|$ se déplace vers celui lié à la direction vers l'avant ($\theta = -\frac{\pi}{4}$). Cependant, pour une fréquence $\tilde{\omega}$ donnée, ce maximum est inférieur pour l'incidence oblique ($\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$) que pour l'incidence normale ($\theta_0 = 0$). Notons que $|f(\theta, \theta_0)|$ est symétrique par rapport à l'axe y_1 ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$), $\forall \theta_0$, propriété qui n'est pas vérifiée par les cavités elliptiques étudiées au Chapitre I.

L'effet de la viscosité sur l'amplitude de diffusion est montré sur la Figure II.8. Nous avons gardé la configuration présentée dans la Figure II.7 et avons pris en compte la viscosité du fluide ($\sigma = 0,25$). Les courbes ont la même allure que celles tracées sur la Figure II.7 ($\sigma = 0$). Seules leurs amplitudes diminuent.

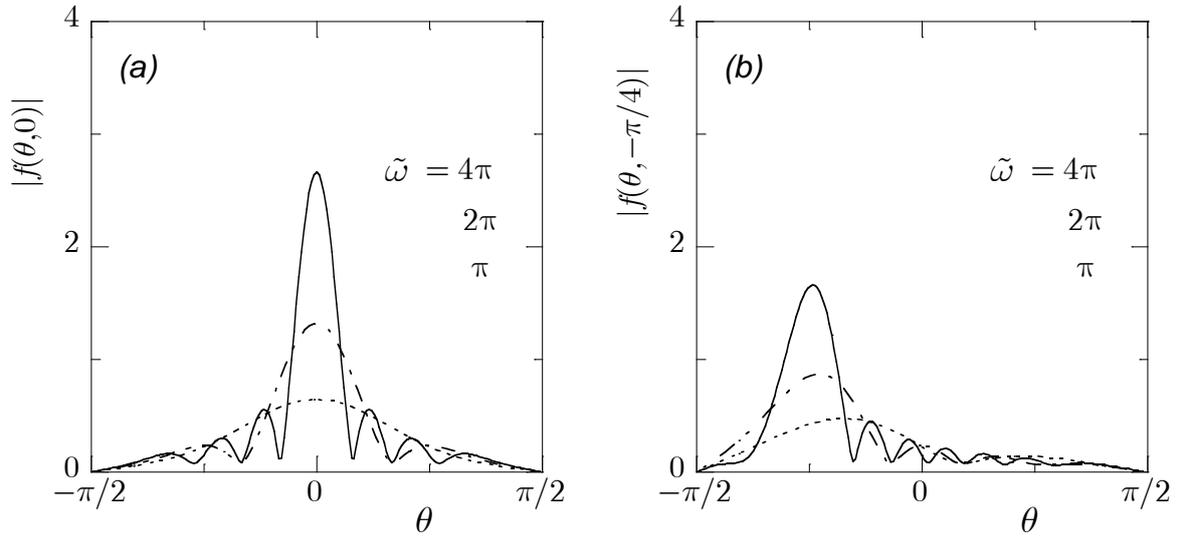


Figure II.8 : Amplitudes de diffusion en champ lointain versus l'angle d'observation pour $\sigma = 0,25$ et différentes valeurs de $\tilde{\omega}$. Incidences a) normale ($\theta_0 = 0$). b) oblique ($\theta_0 = -\pi / 4$).

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la diffusion anisotrope d'une onde plane TH par une fissure plate de taille finie saturée d'un fluide Newtonien. La fissure sollicitée sous l'incidence θ_0 , est représentée par une ligne de discontinuités à travers laquelle le déplacement diffusé est discontinu. Afin de régulariser le déplacement à travers les lèvres de la fissure, une densité de dislocation b définie sur les lèvres de la fissure est introduite. Nous avons alors obtenu une équation intégrale singulière de type Cauchy satisfaite par cette densité de dislocation, équation similaire à celle généralement établie pour les fissures dont les lèvres sont libres de contraintes. Connaissant cette densité sur les lèvres de la fissure, la réponse spatio-fréquentielle de la fissure est calculée en tout point de l'espace. Les facteurs d'intensité de contraintes dynamiques sont alors évalués aux pointes de la fissure. Par ailleurs, l'expression analytique de l'amplitude de diffusion en champ lointain de la fissure seule $f(\theta, \theta_0)$, Éq. (II.44), est établie et ses approximations à basse et haute fréquences déterminées, Éqs. (II.74) et (II.81), (II.95) et (II.98). Enfin, nous avons vérifié que les prédictions obtenues pour la fissure plate non-visqueuse ($\sigma = 0$), correspondent à celles propres au cas limite d'une cavité elliptique vide d'ouverture nulle ($\tau = 0$, Chapitre I), ainsi qu'à celles calculées à partir de la solution de Sommerfeld (fissure semi-infini) par Sánchez-Sesma & Iturrarán-Viveros (2001).

Le prochain chapitre traite de la propagation d'ondes cohérentes TH dans une distribution uniforme et aléatoire de *diffuseurs linéiques* anisotropes. En affectant *a posteriori* à ces objets

des propriétés acoustiques appropriées, ils représentent alors des *objets réels*, comme par exemple des fissures.

CHAPITRE III

Diffusion multiple par une distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs linéiques : modélisation

RÉSUMÉ – La propagation d’ondes cohérentes TH dans un solide contenant une couche de diffuseurs linéiques anisotropes uniformément et aléatoirement distribués est étudiée. Les amplitudes des champs de déplacement des ondes cohérentes se propageant normalement aux interfaces de ladite couche sont évaluées à l’intérieur et à l’extérieur de la couche. Les effets de diffusion multiple sont pris en considération dans le contexte d’une approximation de second ordre via la proposition d’une Hypothèse Globale de Fermeture. Nous déterminons ensuite les conditions pour lesquelles la continuité aux interfaces de la contrainte cohérente de cisaillement est vérifiée. Enfin, nous établissons le bilan d’énergie cohérente de part et d’autre de la couche.

III. Diffusion multiple par une distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs linéiques : modélisation

La modélisation de la propagation d'ondes élastiques en milieux aléatoires repose sur une moyenne spatiale des champs acoustiques (Foldy 1945), qui définit alors les ondes cohérentes. La nature récursive des interactions multiples entre diffuseurs nécessite l'introduction d'un ordre de troncature, *via* la définition d'une hypothèse de fermeture. Les distances de propagation sont supposées être de l'ordre du libre parcours moyen élastique, représentatif de la distance entre deux interactions. Que la démarche suivie considère un formalisme modal (Waterman & Truell 1961, Varadan *et al.* 1978, Yang & Mal 1994) ou un formalisme de Green (Twersky 1962, Mok 1969, Kanaun & Levin 2005), on montre que la structure de ces ondes cohérentes est plane après avoir présupposé (Urlick & Ament 1949, Waterman & Truell 1961, Linton & Martin 2005) ou non (Twersky 1962, Javanaud & Thomas 1988, Angel & Aristégui 2005) sa forme. On identifie alors le champ cohérent (amplitude et nombre d'onde) (Waterman & Truell 1961, Twersky 1962, Angel & Aristégui 2005), ou encore le seul nombre d'onde équivalent ou effectif K (Foldy 1945, Yang & Mal 1994, Linton & Martin 2005). Finalement, selon que la géométrie du diffuseur est réduite à une singularité géométrique ou considérée finie, une formulation explicite (Foldy 1945, Urlick & Ament 1949, Waterman & Truell 1961, Twersky 1962, Angel & Aristégui 2005, Linton & Martin 2005) ou implicite (Mok 1969, Yang & Mal 1994, Le Bas *et al.* 2005) de K est obtenue.

L'existence d'ondes planes cohérentes dans un milieu hétérogène a été montrée, que la région hétérogène soit infinie (Foldy 1945, Varadan *et al.* 1978, Yang & Mal 1994), semi-infinie (Waterman & Truell 1961, Linton & Martin 2005) ou encore bornée (couche) (Urlick & Ament 1949, Javanaud & Thomas 1988, Angel & Aristégui 2005, Le Bas *et al.* 2005). Ainsi, les milieux hétérogènes se comportent, du point de vue de la propagation des ondes cohérentes, comme des milieux homogènes équivalents.

Le champ de déplacement cohérent étant naturellement continu, la présence d'interfaces soulève la question du saut ou de la continuité des quantités physiques, comme l'énergie cohérente et le vecteur contrainte. L'intensité moyenne incohérente du champ réfléchi (Bose 1996) ou encore la perte du flux moyen d'énergie cohérente à travers la couche (Twersky 1962) ont par exemple été étudiées. La continuité *supposée* du vecteur contrainte ou du déplacement normal a permis de définir analytiquement (Twersky 1962, Mok 1969, Aristégui & Angel 2007b) ou numériquement (Fikioris & Waterman 1964, Le Bas *et al.* 2005) les propriétés mécaniques effectives (masse volumique ρ et module de rigidité M) du milieu hétérogène. Soulignons que dans le cas quasi-statique, les expressions de ces propriétés mécaniques ont pu

être établies à partir de la seule expression du nombre d'onde K (Waterman & Truell 1961, Fikioris & Waterman 1964).

Le chapitre actuel s'applique au cas d'une onde plane TH se propageant dans un solide élastique linéaire isotrope, contenant une couche de diffuseurs linéiques (Caleap *et al.* 2006, Angel *et al.* 2008). Notre approche analytique suit celle de Foldy-Twersky et de Waterman-Truell (Ishimaru 1997). En particulier, leur hypothèse de fermeture concernant le champ diffusé par un diffuseur fixe en présence de tous les autres diffuseurs (QCA, Lax (1951)), couplée à l'existence supposée d'une onde plane cohérente, s'avère équivalente à la notre labélisée « Hypothèse Globale de Fermeture » dans la section III.3. En effet, nous obtenons une expression pour le nombre d'onde effectif dans la couche K , identique à celle établie par Waterman & Truell (1961) pour un demi-espace contenant des diffuseurs. Notre travail est néanmoins une prolongation du leur dans la mesure où nous déterminons également les coefficients de réflexion et de transmission ainsi que les amplitudes des ondes planes cohérentes (progressive et rétrograde) présentes dans la couche. L'analyse de ces propriétés nous conduit *a posteriori* à définir les deux interfaces « non-physiques » : les quantités qui, comme le déplacement, se conservent aux interfaces sont identifiées. Nous établissons ensuite les conditions pour lesquelles la continuité de la contrainte de cisaillement aux interfaces est vérifiée. Enfin, nous établissons le bilan d'énergie de part et de l'autre de la couche.

La méthodologie suivie dans ce chapitre est analogue à celle développée par Angel & Aristégui (2005) pour une population de diffuseurs linéiques anisotropes immergés. Tous les diffuseurs appartiennent à une zone définie par deux plans parallèles au front d'onde incident. Le vecteur d'onde incident est perpendiculaire aux axes des diffuseurs et les déplacements particuliers sont parallèles à ces axes, Figure III.1. Dans cette configuration, les déplacements sont solutions de l'équation de Helmholtz scalaire, de sorte que les ondes sont scalaires.

III.1 Définition de la distribution

De façon générale, un milieu hétérogène est un mélange de plusieurs constituants de propriétés physiques différentes. Deux sortes de milieux peuvent être distingués : un milieu homogène appelé matrice et un nombre infini d'inclusions réparties de façon uniforme et aléatoire dans la matrice (ces inclusions seront aussi distinguées par le terme de diffuseur définissant une région diffusante).

III.1.1 Couche de diffuseurs

Nous considérons une onde incidente plane harmonique TH qui éclaire une région diffusante constituée de diffuseurs identiques.⁷ Les diffuseurs sont à symétrie cylindrique et leurs sections transversales sont constantes dans le plan (y_3, y_1) de la Figure III.1. Les sections transversales sont supposées symétriques par rapport aux directions parallèles à l'axe y_3 . Les centres des diffuseurs sont distribués uniformément et aléatoirement dans une couche d'épaisseur $2h$ définie par :

$$\mathcal{D}_\infty^h = \left\{ \vec{y} = (y_3, y_1) \in \mathbb{R}^2 : |y_3| < h, |y_1| < \infty \right\}. \quad (\text{III.1})$$

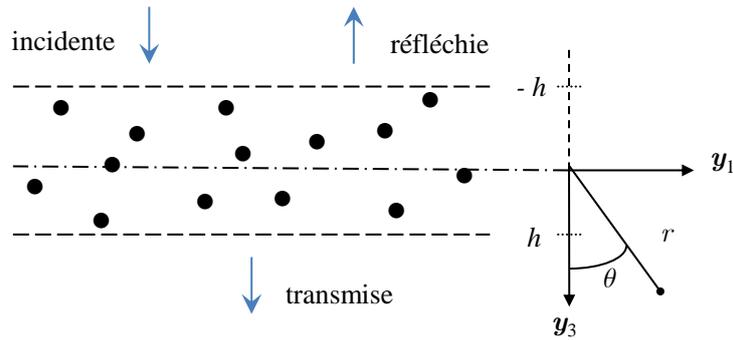


Figure III.1 : Système d'ondes planes cohérentes TH en présence d'une distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs dans un solide élastique linéaire isotrope infini. Les déplacements des particules sont parallèles à la direction y_2 .

Le mouvement des particules est parallèle à la direction y_2 , u_2 désignant le déplacement mesuré à partir de la configuration d'équilibre. Les composantes du tenseur des contraintes à l'extérieur des diffuseurs sont données par :

$$\sigma_{21} = \mu_0 \frac{\partial u_2}{\partial y_1}, \quad \sigma_{23} = \mu_0 \frac{\partial u_2}{\partial y_3}, \quad (\text{III.2})$$

où $\mu_0 = \rho_0 c_T^2$ est le module de rigidité de la matrice. Nous désignons par ρ_0 la masse volumique et par c_T la célérité de phase des ondes transverses dans la matrice.

Nous considérons la dépendance temporelle de la forme $\exp(-i\omega t)$, mais par souci de clarté, ce terme multiplicatif temporel sera omis par la suite dans les expressions de déplacement et de contrainte associée.

⁷ Les diffuseurs peuvent être des fibres, des cavités cylindriques à section elliptique ou encore des fissures.

III.1.2 Distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs

Les positions des centres de diffuseurs dans \mathcal{O}_∞^h sont connues seulement dans un sens probabiliste, et la probabilité qu'un diffuseur soit localisé en un point donné dans \mathcal{O}_∞^h est indépendante du point particulier choisi. Il s'en suit que le nombre n_0 de diffuseurs par unité de surface dans \mathcal{O}_∞^h est constant. Nous construisons un rectangle borné \mathcal{O}_N^h qui contient N diffuseurs tel que, dans la limite où N tend vers l'infini, \mathcal{O}_N^h s'approche de \mathcal{O}_∞^h :

$$\mathcal{O}_N^h = \left\{ \vec{y} = (y_3, y_1) \in \mathbb{R}^2 : |y_3| < h, |y_1| < \frac{N}{4n_0h} \right\}. \quad (\text{III.3})$$

Soit \vec{r}_ξ le vecteur position du diffuseur ξ centré en O_ξ dans le plan (y_3, y_1) . Alors, le champ de déplacement total u_2 en chaque point \vec{y} extérieur à un diffuseur dépend de la configuration Λ^N constituée des N centres de diffuseurs, et est donné par :

$$u_2(\vec{y} | \Lambda^N) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + \sum_{\xi=1}^N u_2^{\text{dif}}(\vec{y}; \vec{r}_\xi | \Lambda^N), \quad (\text{III.4})$$

$$\Lambda^N = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N), \quad (\text{III.5})$$

où :

$$u_2^{\text{inc}}(y_3) = u_0 e^{ik_r y_3} \quad (\text{III.6})$$

est le déplacement produit par l'onde incidente d'amplitude u_0 et $u_2^{\text{dif}}(\vec{y}; \vec{r}_\xi | \Lambda^N)$ est le déplacement diffusé par le diffuseur centré en O_ξ . La somme du déplacement produit par l'onde incidente et de ceux diffusés par les diffuseurs autres que celui fixé en O_ξ est appelée déplacement d'excitation, et est donnée par :

$$u_2^{\text{ex}}(\vec{y}; \vec{r}_\xi | \Lambda^N) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + \sum_{\substack{\zeta=1, \\ \zeta \neq \xi}}^N u_2^{\text{dif}}(\vec{y}; \vec{r}_\zeta | \Lambda^N), \quad (\text{III.7})$$

soit, en fonction du déplacement total (III.4) :

$$u_2^{\text{ex}}(\vec{y}; \vec{r}_\xi | \Lambda^N) = u_2(\vec{y} | \Lambda^N) - u_2^{\text{dif}}(\vec{y}; \vec{r}_\xi | \Lambda^N). \quad (\text{III.8})$$

Les positions de diffuseurs étant distribuées uniformément et aléatoirement dans \mathcal{O}_∞^h , la configuration Λ^N intervenant dans la définition des champs de déplacement est associée à une densité de probabilité de présence p . Pour un nombre de diffuseurs par unité de surface donné n_0 , nous parlerons alors d'un ensemble de configurations possibles de diffuseurs. La fonction $p : \Omega^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :

$$\int_{\Omega^{2N}} p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N = 1, \quad (\text{III.9})$$

$$\int_{\Omega^{2N}} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_\xi, \dots, \vec{r}_\xi, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N = \int_{\Omega^{2N}} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_\xi, \dots, \vec{r}_\xi, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N, \quad (\text{III.10})$$

$$\int_{\Omega^{2N}} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\xi-1}, \vec{\rho}, \vec{r}_{\xi+1}, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_{\xi-1} d\vec{r}_{\xi+1} \dots d\vec{r}_N = \frac{n_0}{N}, \quad \forall \vec{\rho} \in \mathcal{C}_N^h, \quad (\text{III.11})$$

où Ω^{2N} est le produit cartésien de $2N$ ensembles \mathcal{C}_∞^h . L'intégrale (III.9) est la définition formelle d'une densité de probabilité normalisée, l'Éq. (III.10) traduit le fait que les diffuseurs sont *indiscernables* et l'Éq. (III.11) découle de l'uniformité de la distribution de diffuseurs. La position ξ occupée par $\vec{\rho}$ dans le membre de gauche de l'Éq. (III.11) peut être choisie arbitrairement puisque les diffuseurs sont *interchangeables* et l'ordre d'intégration est arbitraire.

En utilisant la densité de probabilité p , la *moyenne* d'une grandeur physique V sur l'ensemble des configurations Λ^N est définie comme :

$$\langle V \rangle_N(\vec{y}) = \int_{\Omega^{2N}} V(\vec{y}; \vec{r}_\xi | \Lambda^N) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N, \quad (\text{III.12})$$

où l'indice N indique que N diffuseurs ont été considérés. En utilisant cette définition, les propriétés suivantes pour la moyenne sont obtenues :

$$\langle V + W \rangle_N(\vec{y}) = \langle V \rangle_N(\vec{y}) + \langle W \rangle_N(\vec{y}), \quad (\text{III.13})$$

$$\langle cV \rangle_N(\vec{y}) = c \langle V \rangle_N(\vec{y}), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.14})$$

$$\langle d \rangle_N(\vec{y}) = d(\vec{y}), \quad \forall d, \quad (\text{III.15})$$

où d est une fonction indépendante de la configuration de diffuseurs. En utilisant les propriétés (III.10) et (III.11), l'Éq. (III.12) conduit à :

$$\langle V \rangle_N(\vec{y}) = \frac{n_0}{N} \int_{\mathcal{C}_N^h} \langle V \rangle_{N-1}(\vec{y}; \vec{\xi}) d\vec{\xi}, \quad (\text{III.16})$$

où la fonction $\langle V \rangle_{N-1}(\vec{y}; \vec{\xi})$ est une *moyenne partielle* quand le diffuseur est tenu fixe en $\vec{\xi}$, et est définie par :

$$\langle V \rangle_{N-1}(\vec{y}; \vec{\xi}) = \frac{N}{n_0} \int_{\Omega^{2N-2}} \langle V \rangle(\vec{y}; \vec{\xi} | \Lambda^N) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\xi-1}, \vec{\xi}, \vec{r}_{\xi+1}, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_{\xi-1} d\vec{r}_{\xi+1} \dots d\vec{r}_N. \quad (\text{III.17})$$

La valeur moyenne $\langle V \rangle$ est une quantité qui ne dépend pas de la configuration accessible de diffuseurs. D'un point de vue expérimental (Tourin 1999, Tournat 2000, Eude 2004, Robert 2004), la mesure de cette moyenne se traduit par l'utilisation de capteurs de zone active grande par rapport aux dimensions géométriques de la configuration. Une alternative, lorsque les diffuseurs sont en mouvement, consiste à moyennner (sur le temps) les signaux reçus (Vander Meulen 2000).

III.1.3 Approche probabiliste de la diffusion multiple

En utilisant les résultats du paragraphe précédent, les valeurs moyennes des champs de déplacement diffusé et d'excitation sont :

$$\langle u_2^{\text{dif}} \rangle_N(\vec{y}) = \frac{n_0}{N} \int_{\mathcal{O}_\infty^h} \langle u_2^{\text{dif}} \rangle_{N-1}(\vec{y}; \vec{\xi}) d\vec{\xi}, \quad (\text{III.18})$$

$$\langle u_2^{\text{ex}} \rangle_N(\vec{y}) = \frac{n_0}{N} \int_{\mathcal{O}_\infty^h} \langle u_2^{\text{ex}} \rangle_{N-1}(\vec{y}; \vec{\xi}) d\vec{\xi}. \quad (\text{III.19})$$

Puisque la moyenne de l'onde incidente satisfait la propriété (III.15), la moyenne du champ de déplacement total (III.4) est donnée par (Ishimaru 1997) :

$$\langle u_2 \rangle_N(\vec{y}) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + \frac{n_0}{N} \sum_{\xi=1}^N \int_{\mathcal{O}_N^h} \langle u_2^{\text{dif}} \rangle_{N-1}(\vec{y}; \vec{r}_\xi) d\vec{r}_\xi, \quad (\text{III.20})$$

où l'intégrale sur \mathcal{O}_N^h a les mêmes valeurs pour tout \vec{r}_ξ . Ainsi le dernier terme de l'Éq. (III.20) représente la somme de N intégrales identiques. La moyenne du déplacement total devient :

$$\langle u_2 \rangle_N(\vec{y}) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + n_0 \int_{\mathcal{O}_\infty^h} \langle u_2^{\text{dif}} \rangle_{N-1}(\vec{y}; \vec{\xi}) d\vec{\xi}. \quad (\text{III.21})$$

Nous prenons maintenant la limite des équations ci-dessus quand N tend vers l'infini, en gardant la densité de diffuseurs par unité de surface n_0 constante. Puisque le rectangle borné \mathcal{O}_N^h se confond à \mathcal{O}_∞^h , nous définissons la moyenne des déplacements diffusé et total dans la couche \mathcal{O}_∞^h comme :

$$\langle u_2^{\text{dif}} \rangle_\infty(\vec{y}; \vec{\xi}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle u_2^{\text{dif}} \rangle_{N-1}(\vec{y}; \vec{\xi}), \quad (\text{III.22})$$

$$\langle u_2 \rangle_\infty(y_3) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle u_2 \rangle_N(\vec{y}). \quad (\text{III.23})$$

Nous supposons que les limites (III.22) et (III.23) sont atteintes uniformément par rapport à $\vec{\xi}$ dans chaque rectangle borné contenu dans \mathcal{O}_∞^h .⁸

La couche infinie \mathcal{O}_∞^h de la Figure III.1 contient une distribution uniforme de diffuseurs et est éclairée par l'onde plane (III.6). Ainsi, toutes les grandeurs physiques moyennes $\langle V \rangle$ relatives au système $\vec{y} = (y_3, y_1)$ ont la même invariance en translation selon la direction y_1 , que l'onde incidente. Il s'en suit que :

⁸ On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[a, b]$, converge uniformément vers la fonction f sur $A \subset [a, b]$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in A, \text{ si } n \geq N$ alors $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Ainsi, nous énonçons le théorème suivant : supposons que (f) est une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$ et que (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f intégrable sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

$$\langle V \rangle_\infty (y_3, y_1 + q; \vec{\xi} + q\vec{e}_1) = \langle V \rangle_\infty (\vec{y}; \vec{\xi}), \quad \forall q \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.24})$$

où $\vec{\xi} = (\xi_3, \xi_1)$ sont les coordonnées du centre d'un diffuseur et \vec{e}_1 est le vecteur unitaire dans la direction y_1 . Puisque l'Éq. (III.24) est valide pour tout q , nous pouvons conclure que dans le cas particulier où $q = -y_1$:

$$\langle V \rangle_\infty (\vec{y}; \vec{\xi}) = \langle V \rangle_\infty (y_3, 0; \xi_3, \xi_1 - y_1). \quad (\text{III.25})$$

À partir des Éqs. (III.21), (III.23) et (III.25), il apparaît que la limite de l'intégrale de l'Éq. (III.21) lorsque $N \rightarrow \infty$ est indépendante de la coordonnée y_1 . La convergence uniforme vers la limite de l'Éq. (III.22) nous permet de commuter les opérations de limite et d'intégration dans l'intégrale de l'Éq. (III.21). Ainsi, nous obtenons :

$$\langle u_2 \rangle_\infty (y_3) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + n_0 \int_{\mathcal{D}_\infty^h} \langle u_2^{\text{dif}} \rangle_\infty (y_3, 0; \vec{\zeta}) d\vec{\zeta}. \quad (\text{III.26})$$

L'intégrale de l'Éq. (III.26) est établie après un changement de variables selon la direction ζ_1 et en appliquant la propriété (III.25). Par souci de concision, nous adoptons dans la suite la notation suivante :

$$\langle u_2^s \rangle = \langle u_2^s \rangle_\infty. \quad (\text{III.27})$$

III.2 Système d'ondes cohérentes en présence

Les propriétés de diffusion d'un seul diffuseur sont décrites par un ensemble de coefficients C_n . Le champ de déplacement diffusé u_2^{dif} dans le solide s'écrit (voir Éq. (I.26)) :

$$u_2^{\text{dif}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n A_n C_n H_n^{(1)}(k_T r) \cos(n\theta). \quad (\text{III.28})$$

Les coefficients A_n caractérisent le déplacement de l'onde d'excitation agissant sur le diffuseur. Dans l'Éq. (III.28), les variables (r, θ) sont les coordonnées cylindriques définies dans le repère centré sur le diffuseur, Figure III.2. Soit $\vec{\xi}$ la position du centre de ce diffuseur dans le système de coordonnées de la Figure III.1. La distance r est définie par $r^2 = (y_3 - \xi_3)^2 + (y_1 - \xi_1)^2$. L'angle θ est tel que $\cos \theta = (y_3 - \xi_3)/r$. Quant à l'onde incidente (III.6),

$$u_2^{\text{inc}}(r, \theta) = u_0 e^{ik_T \xi_3} e^{ik_T r \cos \theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n A_n J_n(k_T r) \cos(n\theta), \quad (\text{III.29})$$

les coefficients A_n sont donnés par :

$$A_n = u_0 i^n e^{ik_T \xi_3}. \quad (\text{III.30})$$

Les décompositions modales (III.28) et (III.29) montrent que le n^{e} mode d'amplitude A_n est diffusé loin de l'origine locale $r = 0$ avec l'amplitude $A_n C_n$. Le coefficient sans dimension

C_n agit comme un facteur d'amplification. De plus, chaque mode diffusé a une singularité de type $\ln r$ ($n = 0$) ou r^{-n} ($n \geq 1$) quand r tend vers zéro. Observons que l'origine $r = 0$ est à l'intérieur du diffuseur et le champ diffusé est défini en dehors du diffuseur. Ainsi, il n'y a pas de singularité dans la région où l'Éq. (III.28) est applicable. Les coefficients C_n dépendent de la fréquence et des propriétés des deux phases en présence.

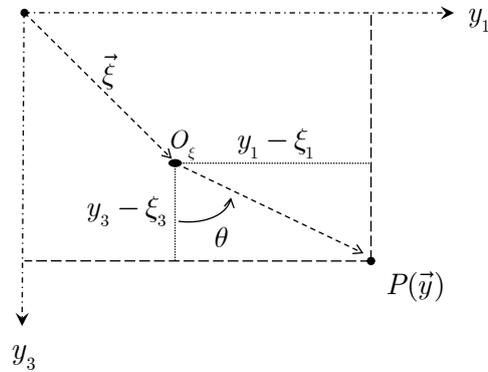


Figure III.2 : Coordonnées d'un diffuseur en $\vec{\xi}$ dans le système d'axes de la Figure III.1.

Dans ce qui suit, nous réduisons la géométrie du diffuseur à une ligne. À cette ligne, nous associons le déplacement diffusé (III.28), dont les coefficients C_n seront représentatifs des propriétés de diffusion d'un diffuseur de taille réelle dans le milieu adjacent. Avec cette simplification géométrique, la singularité de l'Éq. (III.28) pour $r = 0$, n'est plus située à l'intérieur du diffuseur.

III.2.1 Champ moyen total

Le déplacement total de l'onde cohérente, c'est-à-dire de l'onde qui résiste à la moyenne sur le désordre, s'écrit :

$$\langle u_2 \rangle (y_3) = u_2^{\text{inc}} (y_3) + n_0 \int_{-h}^h \int_{-\infty}^{\infty} \langle u_2^{\text{dif}} \rangle (y_3, y_1; \xi_3, \xi_1) d\xi_3 d\xi_1. \quad (\text{III.31})$$

Le second terme dans le membre de droite de l'Éq. (III.31) représente la contribution globale de diffuseurs susceptibles d'occuper toutes les positions possibles (ξ_3, ξ_1) dans la couche d'épaisseur $2h$. Le terme $\langle u_2^{\text{dif}} \rangle (y_3, y_1; \xi_3, \xi_1)$ est un déplacement moyen correspondant à l'onde diffusée par la ligne en (ξ_3, ξ_1) . La moyenne sur le désordre est prise sur toutes les configurations dont un diffuseur linéique est en (ξ_3, ξ_1) . C'est donc une moyenne partielle. L'onde d'excitation sur un diffuseur fixe est produite par les processus de diffusion de tout ordre (simple, double, triple,...) présentes à l'intérieur de la couche (Ishimaru 1997). En gardant le diffuseur fixe en $\vec{\xi}$ puis en faisant la moyenne des déplacements correspondant à ces processus de diffusion, nous définissons le déplacement d'excitation moyen $\langle u_2^{\text{ex}} \rangle$ agissant

sur le diffuseur en question. En supposant que ce déplacement est une solution *bornée* de l'équation de Helmholtz bidimensionnelle dans le solide avec le nombre d'onde k_T , nous trouvons que l'expression la plus générale de $\langle u_2^{\text{ex}} \rangle$ est :

$$\langle u_2^{\text{ex}} \rangle(y_3, y_1; \xi_3, \xi_1) = u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n E_n(\xi_3) J_n(k_T |\vec{y} - \vec{\xi}|) \cos(n\theta). \quad (\text{III.32})$$

Les coefficients E_n de l'Éq. (III.32) dépendent seulement de ξ_3 , à cause de l'invariance en translation dans la direction y_1 .

Par analogie avec les expressions (III.28) et (III.29) relatives à la diffusion simple par un diffuseur, nous déduisons de l'Éq. (III.32) que le déplacement diffusé moyen s'écrit alors :

$$\langle u_2^{\text{dif}} \rangle(y_3, y_1; \xi_3, \xi_1) = u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n C_n E_n(\xi_3) H_n^{(1)}(k_T |\vec{y} - \vec{\xi}|) \cos(n\theta). \quad (\text{III.33})$$

Sans perdre en généralité, nous pouvons choisir $y_1 = 0$ dans l'Éq. (III.33). Nous rappelons que la singularité de la fonction $H_n^{(1)}$ de l'Éq. (III.33) autour de $\vec{y} = \vec{\xi}$ n'est pas intégrable sur le domaine bidimensionnel ($|\xi_1| < \infty$, $|\xi_3| \leq h$) lorsque \vec{y} est à l'intérieur de ce domaine et $n \geq 1$. Ainsi, l'intégrale double de l'Éq. (III.31), dans laquelle est substitué le champ (III.33), est alors évaluée comme dans Waterman & Truell (1961). En particulier, un intervalle infinitésimal $|y_3 - \xi_3| < \varepsilon$ est pris en compte dans le domaine d'intégration, avant d'en prendre la limite lorsque ε tend vers zéro. Nous trouvons que le déplacement cohérent dans le solide a la forme suivante :

$$\langle u_2 \rangle(y_3) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + n_0 u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n C_n \int_{-h}^h E_n(\xi_3) \varphi_n(y_3 - \xi_3) d\xi_3. \quad (\text{III.34})$$

Les quantités φ_n dans le membre de droite de l'Éq. (III.34) sont définies par :

$$\varphi_n(y_3 - \xi_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(1)}(k_T |\vec{y} - \vec{\xi}|) \cos(n\theta) d\xi_1. \quad (\text{III.35})$$

L'intégrale (III.35) est évaluée analytiquement sur l'axe des nombres réels, par récurrence (induction mathématique), ce qui conduit au résultat (Urlick & Ament 1949, Aguiar & Angel 2000) :

$$\varphi_{2n}(y_3 - \xi_3) = (-1)^n \frac{2}{k_T} e^{ik_T |\xi_3 - y_3|}, \quad (\text{III.36})$$

$$\varphi_{2n+1}(y_3 - \xi_3) = i(-1)^n \frac{2}{k_T} \text{sgn}(\xi_3 - y_3) e^{ik_T |\xi_3 - y_3|}, \quad (\text{III.37})$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$. À partir des Éqs. (III.34) à (III.37), le déplacement cohérent dans le solide est donné par :

$$\langle u_2 \rangle(y_3) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + in_0 u_0 \int_{-h}^h \sigma_1(\xi) \text{sgn}(\xi - y_3) e^{ik_T|\xi - y_3|} d\xi + n_0 u_0 \int_{-h}^h \sigma_2(\xi) e^{ik_T|\xi - y_3|} d\xi, \quad \forall y_3, \quad (\text{III.38})$$

où les fonctions $\sigma_1(\xi)$ et $\sigma_2(\xi)$ sont telles que :

$$\sigma_1(\xi) = \frac{4}{k_T} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j C_{2j+1} E_{2j+1}(\xi), \quad (\text{III.39})$$

$$\sigma_2(\xi) = \frac{2}{k_T} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \varepsilon_{2j} C_{2j} E_{2j}(\xi). \quad (\text{III.40})$$

Les deux intégrales dans le membre de droite de l'Éq. (III.38) représentent la contribution de tous les processus de diffusion à l'intérieur de la couche. En l'absence de diffuseur, cette contribution disparaît et seule l'onde incidente se propage dans le solide.

À l'intérieur de la couche, où $|y_3| < h$, le déplacement cohérent (III.38) s'écrit comme la somme de termes pondérés par les facteurs $\exp(ik_T y_3)$ et $\exp(-ik_T y_3)$. Ces deux termes ont des « amplitudes » qui dépendent de y_3 . Il reste maintenant à déterminer les fonctions inconnues $E_n(\xi)$.

III.2.2 Champ moyen diffusé

Pour $|y_3| < h$, chacune des deux intégrales de l'Éq. (III.38) s'écrit comme une somme de deux intégrales sur les intervalles $[-h, y_3]$ et $[y_3, h]$. Nous introduisons alors ζ_3 la coordonnée selon la direction y_3 d'un point fixe arbitraire $\vec{\zeta}$ de la couche, telle que $y_3 - \xi = y_3 - \zeta_3 + \zeta_3 - \xi$, Figure III.3. Ensuite, sur chaque intervalle d'intégration, nous employons la décomposition suivante :

$$e^{ik_T(y_3 - \zeta_3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_T |\vec{y} - \vec{\zeta}|) \cos(n\gamma), \quad (\text{III.41})$$

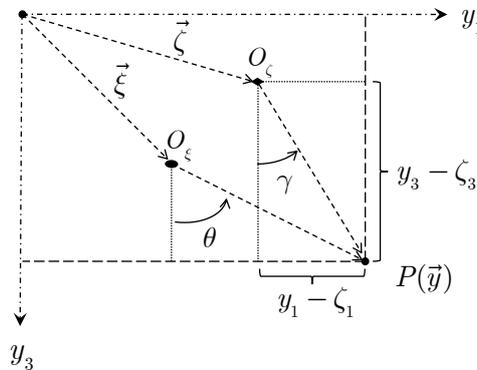


Figure III.3 : Coordonnées de deux diffuseurs en $\vec{\xi}$ et $\vec{\zeta}$ dans le système d'axes de la Figure III.1.

où l'angle γ est défini par $\cos \gamma = (y_3 - \zeta_3) / |\vec{y} - \vec{\zeta}|$. Après quelques manipulations algébriques, nous trouvons que l'Éq. (III.38) prend la forme équivalente suivante, lorsque $|y_3| < h$:

$$\langle u_2 \rangle (y_3) = u_2^{\text{inc}} (y_3) + n_0 u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n G_n (y_3, \zeta_3) J_n (k_T |\vec{y} - \vec{\zeta}|) \cos (n\gamma), \quad (\text{III.42})$$

où le terme G_n s'écrit comme la somme d'un terme qui dépend seulement de ζ_3 et d'un autre qui dépend de ζ_3 et y_3 . Ainsi, nous avons :

$$G_n (y_3, \zeta_3) = F_n (\zeta_3) + D_n (y_3, \zeta_3), \quad (\text{III.43})$$

pour $|y_3| < h$ et $|\zeta_3| < h$. Pour des valeurs paires et impaires de l'indice, nous trouvons les relations suivantes :

$$F_{2n} (\zeta_3) = (-1)^n F_0 (\zeta_3), \quad F_{2n+1} (\zeta_3) = (-1)^n F_1 (\zeta_3), \quad (\text{III.44})$$

$$D_{2n} (y_3, \zeta_3) = (-1)^n D_0 (y_3, \zeta_3), \quad D_{2n+1} (y_3, \zeta_3) = (-1)^n D_1 (y_3, \zeta_3), \quad (\text{III.45})$$

avec :

$$F_0 (\zeta_3) = i \int_{-h}^h \sigma_1 (\xi) \text{sgn} (\xi - \zeta_3) e^{ik_T |\xi - \zeta_3|} d\xi + \int_{-h}^h \sigma_2 (\xi) e^{ik_T |\xi - \zeta_3|} d\xi, \quad (\text{III.46})$$

$$F_1 (\zeta_3) = \int_{-h}^h \sigma_1 (\xi) e^{ik_T |\xi - \zeta_3|} d\xi - i \int_{-h}^h \sigma_2 (\xi) \text{sgn} (\xi - \zeta_3) e^{ik_T |\xi - \zeta_3|} d\xi, \quad (\text{III.47})$$

$$D_0 (y_3, \zeta_3) = -2i \int_{\zeta_3}^{y_3} \sigma_1 (\xi) \cos (k_T (\xi - \zeta_3)) d\xi - 2i \int_{\zeta_3}^{y_3} \sigma_2 (\xi) \sin (k_T (\xi - \zeta_3)) d\xi, \quad (\text{III.48})$$

et
$$D_1 (y_3, \zeta_3) = -2i \int_{\zeta_3}^{y_3} \sigma_1 (\xi) \sin (k_T (\xi - \zeta_3)) d\xi + 2i \int_{\zeta_3}^{y_3} \sigma_2 (\xi) \cos (k_T (\xi - \zeta_3)) d\xi. \quad (\text{III.49})$$

D'après l'Éq. (III.43), la série de l'Éq. (III.42) peut se décomposer en deux séries. Celle comportant les coefficients F_n est une solution de l'équation de Helmholtz avec le nombre d'onde k_T . L'autre dépendant des coefficients D_n et par là-même de y_3 , ne l'est pas.

Observons que le développement (III.42) du champ total cohérent est également valable dans les régions amont et aval de la couche, $y_3 > h$ et $y_3 < -h$. Dans ces intervalles, les coefficients G_n sont indépendants de y_3 . Des expressions analytiques peuvent être obtenues aisément à partir des Éqs. (III.38) et (III.41).

III.2.3 Champ moyen d'excitation

Le champ d'excitation agissant sur un diffuseur fixé en $\vec{\zeta}$ résulte de la somme du champ incident et des champs diffusés par tous les diffuseurs excepté celui se trouvant en $\vec{\zeta}$,

Éq. (III.7). En moyennant sur le désordre et en gardant le diffuseur en $\vec{\zeta}$ fixe, nous trouvons que :

$$\langle u_2^{\text{ex}} \rangle (y_3, y_1; \zeta_3, \zeta_1) = u_2^{\text{inc}} (y_3) + n_0 \int_{-h}^h \int_{-\infty}^{\infty} \langle u_2^{\text{dif}} \rangle (y_3, y_1; \xi_3, \xi_1; \zeta_3, \zeta_1) d\xi_3 d\xi_1. \quad (\text{III.50})$$

Le point où le champ est évalué est (y_3, y_1) . La fonction à intégrer représente le déplacement moyen diffusé par la ligne localisée en (ξ_3, ξ_1) lorsqu'un diffuseur linéique se trouve en (ζ_3, ζ_1) (diffuseur fixé). L'intégrale de ce déplacement sur toutes les positions (ξ_3, ξ_1) susceptibles d'être occupées par un diffuseur dans la couche, représente la contribution totale de toutes les ondes diffusées sachant que la ligne en (ζ_3, ζ_1) est fixe. Le déplacement d'excitation moyen (III.50) est également défini par l'Éq. (III.32), où (ξ_3, ξ_1) doit être remplacé par (ζ_3, ζ_1) .

Les déplacements $\langle u_2^{\text{ex}} \rangle$ et u_2^{inc} sont des solutions de l'équation de Helmholtz avec le nombre d'onde k_T , où les dérivées spatiales sont prises par rapport aux coordonnées \vec{y} . Il suit que l'intégrale de l'Éq. (III.50) est également solution de l'équation de Helmholtz. Ainsi, nous écrivons l'Éq. (III.50) sous la forme équivalente :

$$\langle u_2^{\text{ex}} \rangle (y_3, y_1; \zeta_3, \zeta_1) = u_2^{\text{inc}} (y_3) + n_0 u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n M_n (\zeta_3) J_n (k_T |\vec{y} - \vec{\zeta}|) \cos(n\gamma). \quad (\text{III.51})$$

Les coefficients M_n dépendent seulement de ζ_3 , à cause de l'invariance en translation du problème dans la direction y_1 . Dans l'Éq. (III.51), nous développons u_2^{inc} à l'aide de la décomposition en séries (III.41) et le déplacement d'excitation moyen $\langle u_2^{\text{ex}} \rangle$ sous la forme (III.32), où (ξ, θ) est remplacé par $(\vec{\zeta}, \gamma)$. Tous les termes de l'Éq. (III.51) sont maintenant exprimés sur la base des fonctions $J_n (k_T |\vec{y} - \vec{\zeta}|) \cos(n\gamma)$. Égalisant les coefficients de chaque côté de l'Éq. (III.51), nous trouvons que :

$$E_n (\zeta_3) = i^n e^{ik_T \zeta_3} + n_0 M_n (\zeta_3). \quad (\text{III.52})$$

Les quantités $E_n (\zeta_3)$ représentent le déplacement d'excitation moyen agissant sur un diffuseur fixé en $\vec{\zeta}$ (obtenu par une moyenne sur le désordre induit par tous les autres diffuseurs). Les quantités $n_0 M_n (\zeta_3)$ représentent le déplacement diffusé global, où le déplacement diffusé par un diffuseur en $\vec{\xi}$ est moyenné sur le désordre induit par tous les autres diffuseurs excepté ceux en $\vec{\zeta}$ et $\vec{\xi}$, et où toutes les positions $\vec{\xi}$ dans la couche sont prises en considération lors de l'intégration de l'Éq. (III.50). À ce stade, ni E_n ni M_n ne sont connus.

III.3 Hypothèse Globale de Fermeture

L'équation (III.50) exprime le déplacement d'excitation moyen agissant sur un diffuseur fixé en $\vec{\zeta}$ à partir du déplacement diffusé moyen évalué avec deux diffuseurs fixés en $\vec{\xi}$ et $\vec{\zeta}$. De

même, nous pourrions écrire une équation pour le déplacement d'excitation moyen correspondant à deux diffuseurs fixés en $\vec{\zeta}$ et \vec{v} à partir du déplacement diffusé moyen avec trois diffuseurs fixés en $\vec{\xi}$, $\vec{\zeta}$ et \vec{v} . En répétant ce processus, nous pouvons construire une séquence d'équations telles qu'un diffuseur supplémentaire est fixé à chaque étape. Éventuellement, tous les diffuseurs sont fixes. Cette approche nous permettrait en principe de déterminer les quantités E_n exactement. Elle est malheureusement trop compliquée et ne peut être mise en pratique (Waterman & Truell 1961).

Comme alternative à l'approche décrite ci-dessus, nous proposons une *hypothèse de fermeture* qui nous permettra de déterminer les quantités E_n . L'hypothèse la plus simple correspond à la situation de la *diffusion simple*, où les diffuseurs sont suffisamment éloignés les uns des autres de sorte que leurs interactions peuvent être négligées. Dans ce cas-ci, on suppose que le déplacement d'excitation moyen agissant sur chaque diffuseur est égal au déplacement incident. Les coefficients E_n correspondant à la diffusion simple sont obtenus explicitement à partir de l'Éq. (III.52) en réduisant le deuxième terme du membre de droite à zéro. En substituant les expressions de E_n ainsi obtenues dans l'Éq. (III.38), nous trouvons le déplacement moyen total correspondant dans le solide.

Notons que dans le cas d'un réseau de diffuseurs ordonnés (un cristal), fixer un diffuseur suffit, car cela revient à tous les fixer. Le problème de l'onde cohérente peut alors être résolu sans approximation. Lax (1951) a adapté cette propriété aux milieux aléatoires en introduisant l'« approximation quasi-cristalline » (QCA).

Quand les interactions entre les diffuseurs ne peuvent pas être négligées, nous devons tenir compte des effets de *diffusion multiple*. Ces effets sont représentés par les quantités M_n de l'Éq. (III.52). Les coefficients M_n peuvent être regardés comme une représentation de l'intégrale de l'Éq. (III.50). De même, les coefficients G_n de l'Éq. (III.42) peuvent être vus comme une représentation de l'intégrale de l'Éq. (III.31).

En comparant l'intégrale de l'Éq. (III.31) à celle de l'Éq. (III.50), nous rappelons que la première *n'est pas* une solution de l'équation de Helmholtz avec le nombre d'onde k_T dans l'intervalle $|y_3| < h$, contrairement à la seconde qui l'est pour tout y_3 . Les deux intégrales représentent le même déplacement diffusé global moyenné sur le désordre, excepté que dans l'Éq. (III.50) l'un des diffuseurs est fixé en $\vec{\zeta}$ tandis que dans l'Éq. (III.31) aucun diffuseur ne l'est.

En raison de la discussion précédente, nous supposons que M_n est égal à la partie de G_n qui est une solution de l'équation de Helmholtz. Ainsi, en se rapportant à l'Éq. (III.43), nous écrivons :

$$M_n(\zeta_3) = F_n(\zeta_3), \quad (\text{III.53})$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$. La partie de G_n qui est omise dans l'Éq. (III.53) est D_n , qui, d'après les Éqs. (III.45), (III.48) et (III.49), tend vers zéro quand y_3 tend vers ζ_3 . L'équation (III.53) est notre *Hypothèse Globale de Fermeture*.

En substituant l'Éq. (III.53) dans l'Éq. (III.52) et en utilisant l'Éq. (III.44), nous obtenons :

$$E_{2n}(\zeta_3) = (-1)^n E_0(\zeta_3) \text{ et } E_{2n+1}(\zeta_3) = (-1)^n E_1(\zeta_3), \quad (\text{III.54})$$

avec :

$$E_0(\zeta_3) = e^{ik_T \zeta_3} + n_0 F_0(\zeta_3) \quad (\text{III.55})$$

et

$$E_1(\zeta_3) = i e^{ik_T \zeta_3} + n_0 F_1(\zeta_3). \quad (\text{III.56})$$

L'équation (III.54) nous permet alors d'écrire les fonctions $\sigma_1(\xi)$ et $\sigma_2(\xi)$ des Éqs. (III.39) et (III.40) sous la forme :

$$\sigma_1(\xi) = \sigma_1 E_1(\xi) \text{ et } \sigma_2(\xi) = \sigma_2 E_0(\xi), \quad (\text{III.57})$$

avec :

$$\sigma_1 = \frac{4}{k_T} \sum_{j=0}^{+\infty} C_{2j+1}, \quad \sigma_2 = \frac{2}{k_T} \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_{2j} C_{2j}. \quad (\text{III.58})$$

En substituant l'Éq. (III.57) dans les Éqs. (III.46) et (III.47), nous pouvons écrire F_0 et F_1 en fonction de E_0 et E_1 . Les équations (III.55) et (III.56) représentent alors un système de deux équations couplées pour les fonctions E_0 et E_1 .

III.4 Nombre d'onde effectif

Pour simplifier les notations, nous remplaçons la variable ζ_3 par x . Lorsque $|x| < h$, le système d'équations pour E_0 et E_1 est de la forme :

$$E_0(x) = e^{ik_T x} + i n_0 \sigma_1 \int_{-h}^h E_1(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - x) e^{ik_T |\xi - x|} d\xi + n_0 \sigma_2 \int_{-h}^h E_0(\xi) e^{ik_T |\xi - x|} d\xi, \quad (\text{III.59})$$

$$E_1(x) = i e^{ik_T x} + n_0 \sigma_1 \int_{-h}^h E_1(\xi) e^{ik_T |\xi - x|} d\xi - i n_0 \sigma_2 \int_{-h}^h E_0(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - x) e^{ik_T |\xi - x|} d\xi. \quad (\text{III.60})$$

En gardant la variable x dans l'intervalle $[-h, h]$, nous dérivons les Éqs. (III.59) et (III.60) deux fois par rapport à x , à l'aide des propriétés suivantes :

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sgn}(x) = 2\delta(x) \text{ et } \frac{d}{dx} e^{|x|} = \operatorname{sgn}(x) e^{|x|}. \quad (\text{III.61})$$

Ainsi, nous trouvons que :

$$\frac{d^2}{dx^2} E_0(x) = -K^2 E_0(x) \text{ et } \frac{d^2}{dx^2} E_1(x) = -K^2 E_1(x), \quad (\text{III.62})$$

où le coefficient K indépendant de x , est donné par :

$$K^2 = (k_T - 2in_0\sigma_1)(k_T - 2in_0\sigma_2). \quad (\text{III.63})$$

Les solutions générales des équations différentielles ordinaires de second ordre (III.62) sont :

$$E_0(x) = V_0 e^{iKx} + W_0 e^{-iKx}, \quad (\text{III.64})$$

$$E_1(x) = V_1 e^{iKx} + W_1 e^{-iKx}, \quad (\text{III.65})$$

où les coefficients V_0 , W_0 , V_1 et W_1 sont indépendants de x .

Nous déduisons maintenant des Éqs. (III.38), (III.57), (III.59) et (III.64) que le déplacement total moyen dans l'intervalle $|y_3| < h$ est donné par :

$$\langle u_2 \rangle(y_3) = u_0 E_0(y_3) = u_0 A_+ e^{iKy_3} + u_0 A_- e^{-iKy_3}, \quad (\text{III.66})$$

où $A_+ = V_0$ et $A_- = W_0$. L'équation (III.66) montre que $\langle u_2 \rangle(y_3)$ est solution de l'équation de Helmholtz dans un « milieu continu », *milieu homogène équivalent* à la couche de diffuseurs. Le système d'ondes cohérentes siégeant dans la couche est constitué d'une superposition d'ondes planes TH progressive et rétrograde d'amplitudes respectives $u_0 A_+$ et $u_0 A_-$. Les deux ondes sont gouvernées par le *nombre d'onde effectif* K . En général, le nombre d'onde K est à valeurs complexes et dépend de la fréquence. Les deux ondes à l'intérieur de la couche sont alors dispersives et s'atténuent lors de la propagation. Il est usuel d'écrire le nombre d'onde effectif K en fonction de l'amplitude de diffusion d'un seul objet soumis à la onde incidente (III.6) (Waterman & Truell 1961). Cette amplitude est donnée pour un diffuseur centré en $\vec{\xi} = \vec{0}$ par (voir Éq. (I.89)) :⁹

$$f(\theta) = \frac{1}{i\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n C_n \cos(n\theta). \quad (\text{III.67})$$

Nous pouvons voir sur la Figure III.1 que, relativement à la onde incidente, la direction vers l'avant correspond à $\theta = 0$ et la direction vers l'arrière à $\theta = \pi$. Il s'en suit que $f(0)$ et $f(\pi)$ sont respectivement des mesures dans les directions vers l'avant et vers l'arrière, du déplacement diffusé par un diffuseur seul. Nous déduisons des Éqs. (III.58) et (III.67) que :

$$\sigma_1 = \frac{i\pi}{k_T} (f(0) - f(\pi)) \text{ et } \sigma_2 = \frac{i\pi}{k_T} (f(0) + f(\pi)). \quad (\text{III.68})$$

⁹ Notons que par rapport aux deux premiers chapitres, la notation contractée $f(\theta) \equiv f(\theta, \theta_0 = 0)$ a été introduite.

Les équations (III.68) montrent que les facteurs σ_1 et σ_2 dépendent des amplitudes de diffusion en champ lointain d'un diffuseur seul dans les directions avant et arrière. En substituant les Éqs. (III.68) dans l'Éq. (III.63) et réarrangeant les termes, nous trouvons la formule déjà établie par Waterman & Truell (1961) dans le cadre d'un demi-espace « diffusant » :

$$K^2 = k_T^2 \left(1 + n_0 \frac{2\pi}{k_T^2} f(0) \right)^2 - k_T^2 \left(n_0 \frac{2\pi}{k_T^2} f(\pi) \right)^2. \quad (\text{III.69})$$

Généralement, nous avons $\text{Im}(K^2) > 0$. Nous définissons alors K comme la racine complexe de K^2 se situant dans le premier quadrant du plan complexe. Par conséquent, les parties réelle et imaginaire de K sont positives. Ainsi, le nombre d'onde effectif K à valeurs complexes s'écrit sous la forme :

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega), \quad (c > 0, \alpha > 0), \quad (\text{III.70})$$

où c est la *célérité de phase* et α l'*atténuation spatiale* de l'onde cohérente.

III.5 Ondes cohérentes à l'intérieur et à l'extérieur de la couche

En amont et en aval de la couche, le champ de déplacement cohérent moyen est évalué en choisissant $y_3 < -h$ ou $h < y_3$ dans l'Éq. (III.38). Nous obtenons alors :

$$\langle u_2 \rangle(y_3) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + u_0 R e^{-ik_T y_3}, \quad y_3 < -h, \quad (\text{III.71})$$

$$\langle u_2 \rangle(y_3) = u_0 T e^{ik_T y_3}, \quad h < y_3, \quad (\text{III.72})$$

où les coefficients de réflexion et transmission sont tels que :

$$R = n_0 \int_{-h}^h (\sigma_2(\xi) + i\sigma_1(\xi)) e^{ik_T \xi} d\xi, \quad (\text{III.73})$$

$$T = 1 + n_0 \int_{-h}^h (\sigma_2(\xi) - i\sigma_1(\xi)) e^{-ik_T \xi} d\xi. \quad (\text{III.74})$$

Les deux coefficients R et T représentent respectivement des moyennes sur le désordre des amplitudes des ondes cohérentes rétrodiffusée et transmise par la couche diffusante. Les équations (III.71) et (III.72) montrent que l'onde cohérente réfléchi est une onde plane de nombre d'onde k_T et d'amplitude $u_0 R$ et que l'onde cohérente transmise est une onde plane de nombre d'onde k_T et d'amplitude $u_0 T$. Les coefficients R et T dépendent *a priori* de la fréquence, du nombre de diffuseurs par unité de surface n_0 , des propriétés de la matrice et des diffuseurs (masse volumique, célérité des ondes transverses, taille) et de l'épaisseur de la couche $2h$. Un autre paramètre aurait pu être l'angle d'incidence, mais dans ce travail nous nous concentrons sur l'incidence normale.

Nous déterminons maintenant les coefficients V_0 , W_0 , V_1 et W_1 en substituant les Éqs. (III.64) et (III.65) dans les Éqs. (III.59) et (III.60). Les calculs ne sont pas détaillés ici. Ensuite, nous substituons ces coefficients, ainsi que les Éqs. (III.57), (III.64) et (III.65) dans les Éqs. (III.73) et (III.74). En intégrant les fonctions exponentielles, nous obtenons les expressions suivantes des coefficients de réflexion et de transmission :

$$R = \frac{Q e^{-2ik_T h}}{1 - Q^2 e^{4iKh}} \left(1 - e^{4iKh}\right), \quad (\text{III.75})$$

$$T = \frac{1 - Q^2}{1 - Q^2 e^{4iKh}} e^{2i(K-k_T)h}, \quad (\text{III.76})$$

où :

$$Q = \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta} \quad (\text{III.77})$$

et

$$\Theta = \frac{k_T - 2in_0\sigma_2}{K} = \frac{K}{k_T - 2in_0\sigma_1}. \quad (\text{III.78})$$

À l'intérieur de la couche ($|y_3| < h$), les amplitudes respectives $u_0 A_+$ et $u_0 A_-$ des ondes progressive et rétrograde sont données par :

$$V_0 = A_+ = \frac{1 + Q}{1 - Q^2 e^{4iKh}} e^{i(K-k)h}, \quad (\text{III.79})$$

$$W_0 = A_- = -\frac{Q(1 + Q)}{1 - Q^2 e^{4iKh}} e^{i(3K-k)h} = -QA_+ e^{2iKh}. \quad (\text{III.80})$$

Le facteur Q dans les Éqs. (III.75), (III.76), (III.79) et (III.80) est défini par les Éqs. (III.77) et (III.78), ainsi que par les Éqs. (III.58) ou (III.68).

Examinons maintenant les amplitudes A_{\pm} des Éqs. (III.79) et (III.80). En utilisant l'Éq. (III.80), nous trouvons que le rapport des modules de ces quantités est donné par :

$$\left| \frac{A_-}{A_+} \right| = |Q| e^{-2\alpha h}, \quad (\text{III.81})$$

où Q est défini par l'Éq. (III.77) et α est donné par l'Éq. (III.70). L'équation (III.81) montre que, pour k_T et n_0 donnés, le rapport $|A_- / A_+|$ tend vers zéro lorsque l'épaisseur h tend vers l'infini. Ce résultat, couplé à l'Éq. (III.66), montre que pour de grandes épaisseurs de la couche, l'onde plane progressive domine l'onde plane rétrograde.

Pour des valeurs fixes de k_T et de petites valeurs de l'épaisseur de la couche, nous déduisons des Éqs. (III.75) à (III.78) que :

$$R = i \frac{K(\Theta^2 - 1)}{\Theta} h (1 + O(h)) \text{ et } T = 1 - R, \quad (h \rightarrow 0). \quad (\text{III.82})$$

L'équation (III.82) montre que le coefficient de réflexion est proportionnel à h pour de petites épaisseurs de la couche.

Par ailleurs, lorsque l'épaisseur de la couche tend vers l'infini, l'Éq. (III.75) se réduit à :

$$R = Q, \quad (h \rightarrow \infty). \quad (\text{III.83})$$

Les formules (III.75), (III.76), (III.79) et (III.80) pour respectivement les ondes cohérentes réfléchie, transmise, progressive et rétrograde, s'appliquent également à une plaque élastique homogène. En effet, il suffit de remplacer la couche de diffuseurs par une plaque élastique homogène d'épaisseur $2h$ et de masse volumique ρ_1 . Dans cette plaque, soit $k_1 = \omega / c_1$ le nombre d'onde où c_1 est la célérité de phase des ondes transverses. Alors, nous trouvons, en appliquant les conditions de continuité aux interfaces du vecteur contrainte et du déplacement tangentiel, que les amplitudes des quatre ondes produites par l'onde incidente (III.6) sont encore données par les expressions (III.75), (III.76), (III.79) et (III.80), où K est remplacé par k_1 et Q par :

$$Q = \frac{\rho_0 c_T - \rho_1 c_1}{\rho_0 c_T + \rho_1 c_1}, \quad (\text{III.84})$$

rapport d'impédances acoustiques. Ceci montre que le système d'ondes en présence de la couche de diffuseurs est formellement identique à celui en présence d'une plaque élastique homogène. Le nombre d'onde effectif K est remplacé par k_1 ; le facteur Q donné par les Éqs. (III.77) et (III.78) est remplacé désormais par l'Éq. (III.84).

Finalement, la similitude entre les formulations de champs régnant à l'intérieur et à l'extérieur de la plaque élastique homogène et de la couche de diffuseurs, montre que ladite couche se comporte comme une plaque homogène dissipative (le nombre d'onde (III.69) étant à valeurs complexes). Ceci met ainsi en évidence la notion d'interfaces d'un milieu biphase, du point de vue de l'onde cohérente.

III.6 Continuité des champs cohérents aux interfaces d'une couche de diffuseurs

Nous étudions ici les quantités physiques qui se conservent lors du passage d'une onde cohérente dans une couche de diffuseurs. Le champ de déplacement cohérent étant intrinsèquement continu, l'analyse de ses propriétés souligne l'existence d'interfaces « non-physiques ». Nous établissons alors les quantités physiques qui se conservent à travers ces interfaces. Finalement, le bilan d'énergie est établi pour le système d'ondes cohérentes en présence.

Avant de commencer l'analyse, rappelons que l'équation qui gouverne le déplacement cohérent dans la région $|y_3| < h$ est donnée par l'Éq. (III.66). Soulignons que cette même équation peut s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$\langle u_2 \rangle(y_3) = u_0 \left\{ e^{ik_T y_3} + in_0 \sigma_1 \int_{-h}^h E_1(y) \operatorname{sgn}(y - y_3) e^{ik_T |y - y_3|} dy + n_0 \sigma_2 \int_{-h}^h E_0(y) e^{ik_T |y - y_3|} dy \right\}, \quad (\text{III.85})$$

où les fonctions E_0 et E_1 satisfont le système d'équations couplées (III.59) et (III.60).

Le champ de déplacement cohérent étant continu, les coefficients de réflexion et transmission R et T , Éqs. (III.75) et (III.76), sont ainsi réécrits à l'aide des relations (III.57), (III.59), (III.60), (III.73) et (III.74), sous la forme suivante :

$$\begin{cases} R = in_0 \sigma_1 \int_{-h}^h E_1(y_3) e^{ik_T y_3} dy_3 + n_0 \sigma_2 \int_{-h}^h E_0(y_3) e^{ik_T y_3} dy_3, \\ T = 1 - in_0 \sigma_1 \int_{-h}^h E_1(y_3) e^{-ik_T y_3} dy_3 + n_0 \sigma_2 \int_{-h}^h E_0(y_3) e^{-ik_T y_3} dy_3. \end{cases} \quad (\text{III.86})$$

III.6.1 Dérivées spatiales du champ de déplacement cohérent

Nous étudions dans un premier temps la dérivée spatiale du champ de déplacement (III.85) en tout point de la couche ($|y_3| < h$). Soient $-h^+$ et h^- les abscisses des interfaces accessibles depuis l'intérieur de la couche. Introduisant les relations (III.86) dans la dérivation du champ (III.85), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(-h^+) = iu_0 k_T (e^{-ik_T h} - R e^{ik_T h}) - 2iu_0 n_0 \sigma_1 E_1(-h^+), \\ \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(h^-) = iu_0 k_T T e^{ik_T h} - 2iu_0 n_0 \sigma_1 E_1(h^-). \end{cases} \quad (\text{III.87})$$

La prise en compte du système (III.86) dans l'écriture des quantités (III.59) et (III.60), donne :

$$E_1(-h^+) = i(e^{-ik_T h} - R e^{ik_T h}) \quad \text{et} \quad E_1(h^-) = i T e^{ik_T h}. \quad (\text{III.88})$$

Finalement, à l'aide des expressions (III.77), (III.78) et (III.88), le système (III.87) devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(-h^+) = iu_0 (k_T - 2in_0 \sigma_1) (e^{-ik_T h} - R e^{ik_T h}) = iu_0 \frac{K}{\Theta} (e^{-ik_T h} - R e^{ik_T h}), \\ \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(h^-) = iu_0 (k_T - 2in_0 \sigma_1) T e^{ik_T h} = iu_0 \frac{K}{\Theta} T e^{ik_T h}. \end{cases} \quad (\text{III.89})$$

Les dérivées spatiales du champ de déplacement (III.85) sont maintenant établies à partir du système suivant :

$$\begin{cases} \langle u_2 \rangle(y_3) = u_0 \left(e^{ik_T y_3} + R e^{-ik_T y_3} \right), & y_3 < -h, \\ \langle u_2 \rangle(y_3) = u_0 T e^{ik_T y_3}, & y_3 > h. \end{cases} \quad (\text{III.90})$$

Dénommant $-h^-$ et h^+ , les abscisses des interfaces de la couche accessibles depuis la matrice ($|y_3| > h$), nous obtenons immédiatement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(-h^-) = i u_0 k_T \left(e^{-ik_T h} - R e^{ik_T h} \right), \\ \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(h^+) = i u_0 k_T T e^{ik_T h}. \end{cases} \quad (\text{III.91})$$

La confrontation des systèmes (III.89) et (III.91) conduit alors aux *conditions de passage* suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\Theta}{K} \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(-h^+) = \frac{1}{k_T} \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(-h^-), \\ \frac{1}{k_T} \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(h^+) = \frac{\Theta}{K} \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(h^-). \end{cases} \quad (\text{III.92})$$

Dans le cas de diffuseurs diffusant de façon isotrope (Foldy 1945), nous avons $|C_0| \gg |C_n|$, $\forall n = 1, 2, \dots$ et donc $f(0) = f(\pi)$ ou encore $\sigma_1 = 0$, ce qui implique :

$$\Theta = \frac{K}{k_T}. \quad (\text{III.93})$$

Nous observons alors que la dérivée spatiale du champ de déplacement est continue aux interfaces « fictives » $y_3 = \pm h$, nommément (Aristégui & Angel 2002) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(-h^-) = \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(-h^+), \\ \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(h^+) = \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(h^-). \end{cases} \quad (\text{III.94})$$

III.6.2 Identification des quantités continues aux interfaces

Le milieu extérieur à la couche est un solide élastique linéaire isotrope. Sa loi de comportement relie le champ de déplacement de l'onde cohérente à la contrainte tangentielle :

$$\langle \sigma_{23} \rangle(y_3) = \mu_0 \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(y_3), \quad \forall |y_3| > h, \quad (\text{III.95})$$

le module de rigidité de la matrice s'écrivant sous la forme équivalente $\mu_0 = z_0 \omega / k_T$, où $z_0 = \rho_0 c_T$ est impédance acoustique.

Introduisons maintenant le *module de rigidité effectif* M du solide dissipatif équivalent à la couche de diffuseurs :

$$\langle \sigma_{23} \rangle(y_3) = M \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle(y_3), \quad \forall |y_3| < h, \quad (\text{III.96})$$

reliant la seule composante non-nulle du tenseur des contraintes cohérentes au champ de déplacement cohérent. Ce module s'exprime simplement :

$$M = \frac{Z\omega}{K} \quad (\text{III.97})$$

en fonction de l'*impédance acoustique du solide équivalent* :

$$Z = \frac{\rho\omega}{K}, \quad (\text{III.98})$$

ρ désignant sa *masse volumique effective*.

Ainsi, en introduisant les inégalités (III.95)-(III.98) dans les conditions de passage (III.92), nous obtenons :

$$\begin{cases} \Theta \langle \sigma_{23} \rangle(-h^+) = \frac{Z}{z_0} \langle \sigma_{23} \rangle(-h^-), \\ \frac{Z}{z_0} \langle \sigma_{23} \rangle(h^+) = \Theta \langle \sigma_{23} \rangle(h^-). \end{cases} \quad (\text{III.99})$$

Ce système nous permet alors de discuter de la validité de la condition de continuité de la contrainte tangentielle aux interfaces « non-physiques » de la couche. Celle-ci sera satisfaite si :

$$\Theta = \frac{Z}{z_0}, \quad (\text{III.100})$$

c'est-à-dire si Θ , Éq. (III.78), représente le rapport des impédances du solide homogène équivalent et de la matrice. Ce résultat est naturellement en accord avec celui déduit de la similitude déjà évoquée entre les champs siégeant à l'intérieur et à l'extérieur d'une plaque homogène ou d'une couche de diffuseurs. Cette remarque conduit à définir ladite couche par ses *propriétés mécaniques effectives*, *i. e.* sa *masse volumique effective* et son *module de rigidité effectif* (Aristégui & Angel 2007b) :¹⁰

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{2\pi n_0}{k_T^2} (f(0) + f(\pi)) \right), \quad (\text{III.101})$$

¹⁰ des expressions analogues, appropriées au cas d'une onde longitudinale, ont été proposées à partir d'une analyse basse fréquence (mais sans justification rigoureuse) par Poujol-Pfefer (1994), avant d'être établies par Aristégui & Angel (2007a).

$$M = \mu_0 \left(1 + \frac{2\pi n_0}{k_T^2} (f(0) - f(\pi)) \right)^{-1}. \quad (\text{III.102})$$

Dans le cas de diffuseurs diffusant de façon isotrope, nous obtenons :

$$M = \mu_0. \quad (\text{III.103})$$

III.6.3 Bilan d'énergie des ondes cohérentes interagissant avec une couche de diffuseurs

Le champ de déplacement à l'intérieur de la couche, Éq. (III.85), satisfaisant l'équation de Helmholtz, la conservation de l'intensité acoustique moyenne de l'onde cohérente dans la couche de diffuseurs se traduit par l'égalité suivante (Aristégui & Angel 2002) :

$$\text{Re} \left(i \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle (h^-) \langle u_2 \rangle^* (h) \right) - \text{Re} \left(i \frac{d}{dy_3} \langle u_2 \rangle (-h^+) \langle u_2 \rangle^* (-h) \right) = \text{Im} (K^2) \int_{-h}^h |\langle u_2 \rangle (y_3)|^2 dy_3. \quad (\text{III.104})$$

La prise en compte dans l'Éq. (III.104) des conditions de passage (III.92) mène au *bilan d'énergie* suivant (Caleap *et al.* 2007b) :

$$|u_0 T|^2 + |u_0 R|^2 - |u_0|^2 = - \frac{\text{Im} (K^2)}{\text{Re} \left(\frac{K}{\Theta} \right)} \int_{-h}^h |u_0 A_+ e^{iKy_3} + u_0 A_- e^{-iKy_3}|^2 dy_3, \quad (\text{III.105})$$

expression conforme dans le cas de diffuseurs diffusant de façon isotrope, à l'Éq. (88) de Aristégui & Angel (2002). L'hypothèse de propagation impliquant $\text{Im} (K^2) > 0$, la quantité $\text{Re} (K / \Theta)$ doit être strictement positive. Ainsi, nous devons nécessairement avoir :

$$\text{Re} (f(\pi) - f(0)) < \frac{k_T^2}{2n_0\pi}. \quad (\text{III.106})$$

III.7 Conclusion

Nous avons résolu analytiquement le problème de la diffusion multiple d'une onde plane harmonique TH par une couche d'épaisseur finie contenant une distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs linéiques anisotropes (incidence normale). Les diffuseurs sont identiques. En suivant les approches de Twersky-Foldy et de Waterman-Truell, nous avons déterminé le nombre d'onde effectif K , Éq. (III.69), et les amplitudes des quatre ondes cohérentes TH à l'intérieur et à l'extérieur de la région diffusante. Ces amplitudes sont respectivement données dans les Éqs. (III.75), (III.76), (III.79) et (III.80). Nous constatons qu'elles sont déterminées pour un solide donné, une distribution de diffuseurs donnée et une fréquence donnée lorsque

l'amplitude rétrodiffusée $f(\pi)$ et l'amplitude de diffusion vers l'avant $f(0)$ d'un diffuseur seul sont connues.

Les amplitudes des ondes à l'intérieur et à l'extérieur de la couche ont été obtenues sans imposer de conditions de continuité aux « frontières » de la couche, limites difficiles à définir puisque la matrice solide occupe tout l'espace. Dans ce contexte, nous avons identifié les propriétés des champs cohérents que se conservent lors du passage (à incidence normale) de l'onde cohérente TH dans la couche. La continuité intrinsèque du champ de déplacement cohérent a permis de définir, du point de vue de l'onde cohérente, la notion d'interface entre le milieu continu et la couche d'hétérogénéités, la couche se comportant comme un solide dissipatif équivalent.

Les conditions de passage aux deux interfaces, satisfaites par la dérivée spatiale du champ de déplacement cohérent, ont été établies. La notion de continuité de la contrainte cohérente tangente aux interfaces a pu alors être introduite, en identifiant la quantité Θ , Éqs. (III.78) et (III.93), comme le rapport de l'impédance acoustique effective de la couche homogène équivalente à celle de la matrice solide. Ceci nous a alors conduit à définir la masse volumique effective ρ , Éq. (III.101), et le module de rigidité effectif M , Éq. (III.108), de ladite couche.

Bien que notre hypothèse de fermeture soit différente de celle de Waterman & Truell (1961), nous avons établi la même expression du nombre d'onde effectif K . Néanmoins, Linton & Martin (2005) clament que cette formulation est fautive et doit être désormais remplacée par la leur, Éq. (IV.26). Nous verrons dans le chapitre suivant, que, pour les cas traités, les deux approches sont équivalentes et que notre description, *via* les propriétés mécaniques effectives ρ et M , ouvre un large domaine d'application.

CHAPITRE IV

Diffusion multiple par une distribution aléatoire de diffuseurs linéiques : applications

RÉSUMÉ – La flexibilité du modèle de diffusion multiple développé au Chapitre III nous permet de considérer le cas d'un milieu endommagé contenant une population uniforme et aléatoire de fissures ouvertes ou plates, parallèles ou aléatoirement orientées, en affectant aux diffuseurs linéiques (via une amplitude de diffusion en champ lointain appropriée, $f(\theta, \theta_0)$) les propriétés de diffusion d'une cavité elliptique ou d'une ligne de discontinuités, fixe ou aléatoirement orientée (Chapitres I et II). Les propriétés acoustiques de l'onde cohérente TH se propageant dans ledit milieu, comme les propriétés mécaniques effectives du milieu homogène équivalent (masse volumique et module de rigidité) sont déterminées. Les approximations basse et haute fréquences des quantités cohérentes d'intérêt sont établies.

Une première partie porte sur la réponse cohérente d'une couche endommagée à faces parallèles, sollicitée à incidence normale. Les prédictions des propriétés acoustiques sont confrontées à d'autres estimations issues de travaux antérieurs. Dans une dernière partie, nous montrons l'intérêt des propriétés mécaniques effectives en traitant les cas d'une distribution non-uniforme de fissures et d'une onde de surface en présence d'une couche endommagée sur un substrat sain. Finalement, l'opportunité d'utiliser les propriétés mécaniques effectives est discutée.

IV. Diffusion multiple par une distribution aléatoire de diffuseurs linéiques : applications

La flexibilité du modèle de diffusion multiple développé au chapitre précédent, nous permet d'aborder plusieurs applications.

Une onde incidente TH interagit à incidence normale avec une distribution uniforme et aléatoire de fissures, occupant une zone définie par deux plans parallèles (couche). Les fissures identiques sont soit parallèles au front d'onde cohérent soit aléatoirement orientées. Pour ce type d'hétérogénéité, les variations de l'atténuation effective, de la célérité de phase effective, des coefficients de réflexion et de transmission, de la masse volumique effective et du module de rigidité effectif, sont représentées en fonction de la fréquence et de la concentration de fissure. Ces résultats sont comparés à ceux de travaux antérieurs qui « suggèrent » par exemple que la formulation de Waterman et Truell, Éq. (III.69), est erronée (Linton & Martin 2005) ou encore, représentent les fissures comme des objets de taille réelle et non plus comme des diffuseurs linéiques (Angel & Bolshakov 1997, Angel & Koba 1997).

L'intérêt de la formulation des propriétés mécaniques effectives (III.101) et (III.102) (masse volumique et module de rigidité) est ensuite illustré par deux applications, avant d'être discuté. La densité de fissures de la couche endommagée précédente est dans un premier temps supposée non-uniforme. À l'aide de la méthode du milieu effectif développée, le milieu hétérogène est décrit comme un « empilement » de couches homogènes équivalentes. La propagation dans chaque couche est régie par l'impédance acoustique effective et le nombre d'onde effectif déjà identifiés. Sur cette base, les coefficients de réflexion et de transmission sont calculés à l'aide de la méthode de la matrice de transfert (Nayfeh 1995). La couche endommagée initiale (densité de fissures uniforme) repose dans un second temps sur un substrat sain. Les fissures représentées par des cavités cylindriques vides sont localisées près de la surface libre du demi-espace ainsi défini. Nous nous intéressons alors à la célérité de phase et à l'atténuation des ondes cohérentes TH de surface. L'effet de la dispersion intrinsèque due à la diffusion multiple est superposé à celui associé au piégeage des ondes en surface. Ainsi, les résultats obtenus diffèrent sensiblement du cas standard des ondes de Love (Rose 1999). Des estimations analytiques simples permettent une évaluation directe de la concentration de diffuseurs à partir des spectres de dispersion (célérité de phase) et d'atténuation.

IV.1 Distribution uniforme et aléatoire de fissures

Le but de cette section est de prédire la propagation de l'onde cohérente TH dans une couche d'épaisseur $2h$ contenant une distribution uniforme et aléatoire de fissures ouvertes ou plates

identiques, dont les lèvres sont libres de contraintes.

Une *fissure ouverte* est traitée comme une cavité elliptique vide de distance focale $2a$, de grand axe $2a_1$, de petit axe $2a_3$ et par suite d'ouverture $\tau = a_3 / a_1 \leq 1$, Figure I.3. La diffusion par une cavité elliptique a été étudiée en détail dans le Chapitre I. En particulier, l'amplitude de diffusion en champ lointain $f(\theta, \theta_0)$ a été établie quelles que soient les directions d'observation θ et d'incidence θ_0 , Éq. (I.92).

Une *fissure plate* peut être traitée comme une *ligne de discontinuités* de taille $2a$ à travers laquelle la composante antiplane du champ de déplacement diffusé est discontinue. Ce problème de diffusion a été étudié dans le Chapitre II où l'amplitude de diffusion en champ lointain correspondante a été obtenue, Éq. (II.44). Nous avons en particulier montré que, lorsque les lèvres sont libres de contraintes, il se réduit au cas limite de la cavité elliptique pour $\tau = 0$. Ainsi, en présence de fissures plates (sous-entendu $\tau = 0$), l'amplitude de diffusion $f(\theta, \theta_0)$ est calculée avec des fonctions d'onde elliptiques, Éq. (I.92).

La *densité surfacique* de fissures ouvertes (plates) est représentée par $\varepsilon = n_0 a_1^2$ ($\varepsilon = n_0 a^2$). La fréquence réduite est définie par $\tilde{\omega} = k_T \tilde{a}$, où $\tilde{a} = a_1$ (a) si $\tau > 0$ ($= 0$ ou 1). Toutes les fissures sont parallèles ou perpendiculaires au front d'onde incident, Figure IV.1.¹¹ Définissons alors la *longueur active* d'une fissure ℓ_a comme sa projection sur le front d'onde en question, puis le rapport d'*inactivité* $\tau_i = \frac{a_\perp}{\ell_a}$ entre la projection de la fissure sur le vecteur d'onde incident et la longueur ℓ_a . Notons que $\tau_i = 1$ correspond à une fissure circulaire. Lorsque le grand axe des cavités elliptiques est parallèle au front d'onde incident, nous avons $\tau_i = \tau \leq 1$. Dans le cas contraire, le petit axe est parallèle au front d'onde incident, $\tau_i = \frac{1}{\tau} > 1$, et τ et $\tilde{\omega}$ doivent être remplacés respectivement par $\frac{1}{\tau}$ et $\tilde{\omega}\tau$ dans les Éqs. (I.96)-(I.100). La propagation de l'onde cohérente dans un tel arrangement de fissures est prédite à l'aide de la formule (III.69) du nombre d'onde effectif K .

Rappelons que les amplitudes de diffusion vers l'avant et vers l'arrière d'une fissure plate sollicitée sous incidence normale ($\theta_0 = 0$, $\tau_i = 0$) sont égales et opposées, $f(0) = -f(\pi)$ ¹² (Éq. (II.46)). Dans ce cas, le nombre d'onde (III.69) se réduit à la formulation de Foldy (1945), et les Éqs. (III.101) et (III.102) à :

$$\rho = \rho_0, \quad \forall \tilde{\omega}, \quad (\text{IV.1})$$

¹¹ Dans ce chapitre, les angles sont mesurés par rapport à la direction y_1 et donc représentés en italique. Attention au changement de variable angulaire ($\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$) nécessaire pour établir les approximations basse fréquence à partir des Éqs. (I.100) et (I.102).

¹² ou encore sous forme étendue, $f(0, 0) = -f(\pi, 0)$.

$$M = \mu_0 \left(1 + \frac{4\pi n_0}{k_T^2} f(0) \right)^{-1} = \mu_0 \left(1 - \frac{4\pi n_0}{k_T^2} f(\pi) \right)^{-1}, \quad \forall \tilde{\omega}. \quad (\text{IV.2})$$

De même, la quantité Θ de l'Éq. (III.78) et la relation (III.77) deviennent :

$$\Theta = \frac{k_T}{K}, \quad (\text{IV.3})$$

$$Q = \frac{K - k_T}{K + k_T}. \quad (\text{IV.4})$$

Observons que lorsque $\tau_i \rightarrow \infty$, les fissures plates, parallèles à la direction y_3 , sont invisibles pour l'onde incidente. Le solide fissuré se comporte comme la matrice seule ($\alpha = 0$, $c = c_T$, $\rho = \rho_0$, $M = \mu_0$).

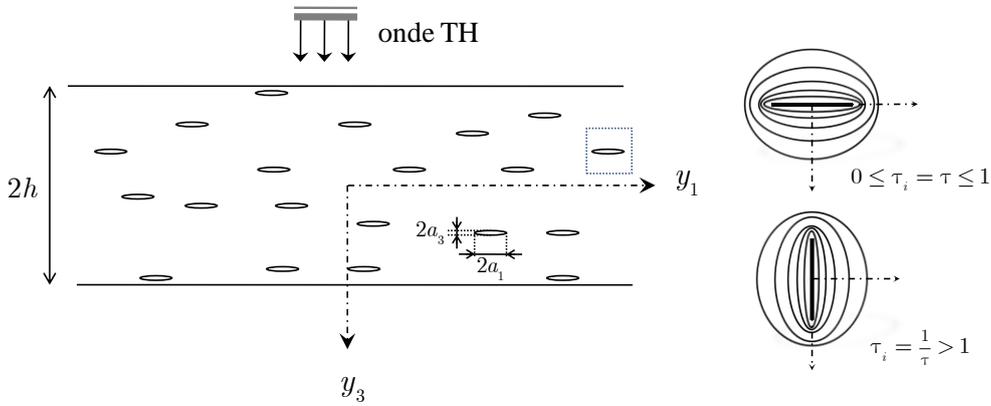


Figure IV.1 : Distribution uniforme et aléatoire de fissures alignées.

IV.1.1 Résultats numériques et discussion

Nous présentons des résultats numériques correspondant aux *propriétés acoustiques* (atténuation, célérité de phase, réflexion et transmission) et *mécaniques* (masse volumique et module de rigidité) *effectives* de la *couche homogène équivalente* à la couche multifissurée de la Figure IV.1, pour des distributions de fissures alignées.

IV.1.1.1 Propriétés acoustiques

Courbes d'atténuation et de célérité de phase

L'atténuation et la célérité de phase de l'onde cohérente se propageant dans une distribution de fissures alignées sont présentées sur la Figure IV.2 en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour plusieurs valeurs d'ouverture de fissure τ . La densité de fissures est $\varepsilon = 0,03$.

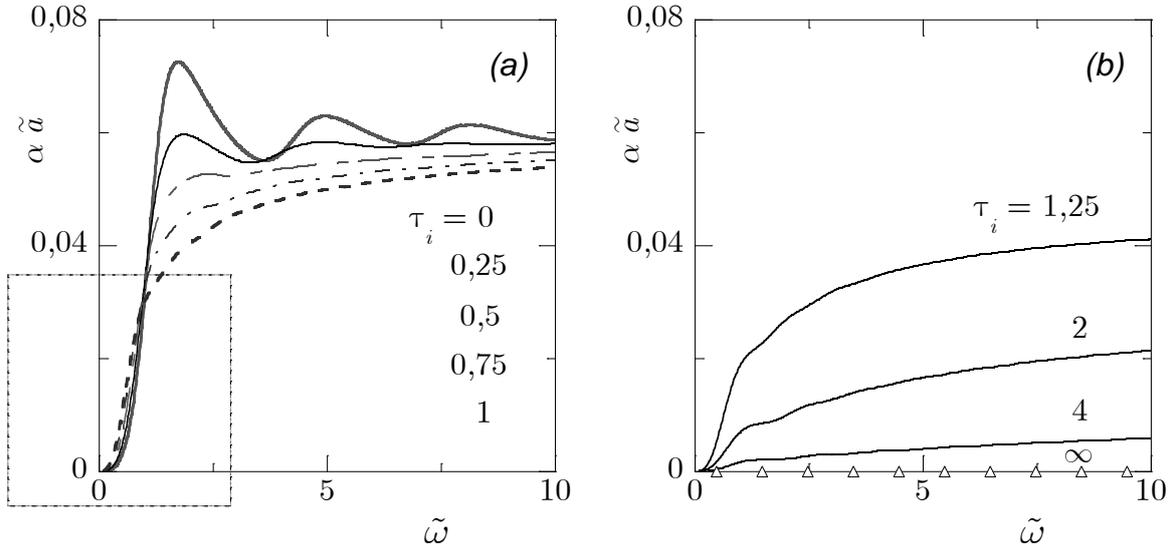


Figure IV.2 : Atténuation versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures parallèles et pour une densité $\varepsilon = 0,03$. Effet de l'ouverture des fissures. a) $0 \leq \tau_i (= \tau) \leq 1$ (un agrandissement de la partie encadrée est présenté Figure IV.3) ; b) $\tau_i (= 1 / \tau) > 1$.

À haute fréquence, la Figure IV.2 montre que l'atténuation pour des fissures plates ($\tau_i = 0$) oscille autour d'une valeur constante. À partir de considérations énergétiques, on montre que cette limite est égale à la section efficace de diffusion σ_d (voir la définition (A7.1) dans l'Annexe A7) multipliée par $n_0 / 2$ (Éq. (A7.5)). Or, comme indiquée par Ishimaru (1997), nous avons alors $\sigma_d(\infty) = 2\ell_a$. Par conséquent, la limite haute fréquence (ou limite géométrique $\alpha(\infty)$) de l'atténuation est donnée par $\alpha(\infty) = n_0\ell_a$. Pour des fissures ouvertes d'ouverture τ , nous trouvons que la limite $\alpha(\infty)$ vaut respectivement $2n_0a_1$ et $2n_0a_3$, lorsque $\tau_i \leq 1$ et $\tau_i > 1$. Ainsi, quand $\tau_i \gg 1$, la diffusion devient faible et l'atténuation tend vers zéro. Nous observons également que, à haute fréquence ($\tilde{\omega} \gtrsim 1$), l'atténuation $\alpha \tilde{a}$ est maximale lorsque l'onde incidente éclaire des fissures plates ($\tau_i = 0$). Ces fissures étant plates, leur capacité à réfléchir l'onde incidente est maximale. Ainsi, plus la *longueur active* des fissures ℓ_a est grande (Figure IV.2b), plus l'atténuation augmente. Lorsque cette longueur est fixe (Figure IV.2a), plus le volume des cavités est petit, plus l'atténuation augmente à cause des effets de diffraction aux pointes des fissures. Néanmoins, à basse fréquence ($\tilde{\omega} \lesssim 1$), pour une *longueur active* fixe, l'atténuation pour des fissures plates ($\tau_i = 0$) est plus petite que celle pour les fissures ouvertes, Figure IV.3, car le volume des cavités gouverne alors les mécanismes d'absorption. Ce comportement est conforme aux résultats obtenus par Yomogida & Benites (2002). La pente des courbes d'atténuation est faible au voisinage de l'origine ($\tilde{\omega} = 0$), comme prévu par l'expressions (IV.5) d'ordre $O(\tilde{\omega}^3)$.

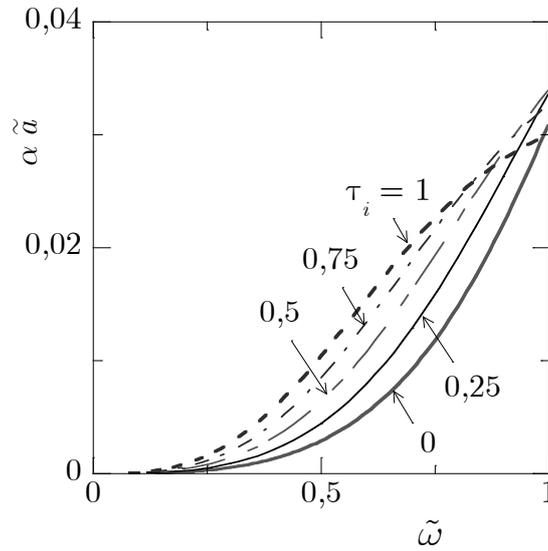


Figure IV.3 : Agrandissement de la Figure IV.2a. À basse fréquence ($\tilde{\omega} \lesssim 1$), une fissure ouverte est plus atténuante qu'une fissure plate.

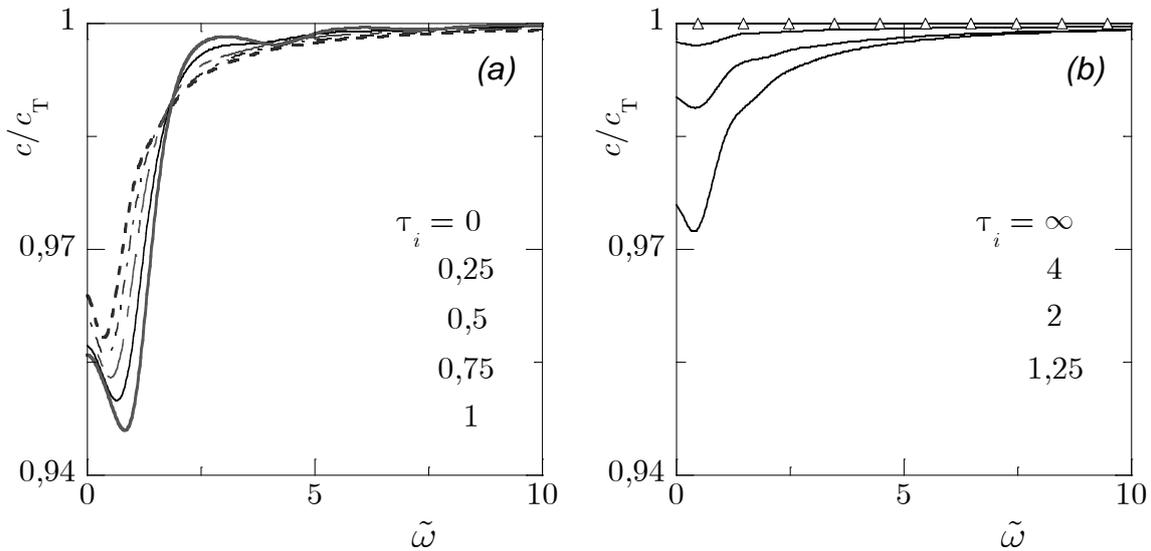


Figure IV.4 : Célérité de phase versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures parallèles et pour une densité $\varepsilon = 0,03$. Effet de l'ouverture des fissures.

La Figure IV.4 montre que la célérité de phase effective approche par valeurs inférieures la limite géométrique $c(\infty) = c_T$, Éq. (IV.23), lorsque $\tilde{\omega} > 10$. S'écartant de leurs limites statiques, les courbes de c/c_T diminuent avec l'augmentation de $\tilde{\omega}$, puis après avoir atteint un minimum augmentent avec $\tilde{\omega}$. À basse fréquence, la réduction de célérité c/c_T due à la présence des fissures est maximale quand $\tau_i = 0$ et est nulle lorsque τ_i tend vers l'infini. Ainsi, plus la *longueur active* des fissures est grande (Figure IV.4b), plus la célérité de phase diminue, et lorsque cette longueur est fixe, la célérité diminue avec le volume des cavités (Figure IV.4a).

La Figure IV.5 montre l'atténuation $\alpha \tilde{a}$ et la célérité de phase c/c_T pour trois valeurs de densité $\varepsilon = 0,01, 0,03$ et $0,05$. Les traits continus (en pointillé) correspondent à $\tau_i = 0$ ($\tau_i = 1$). L'atténuation (célérité de phase) augmente (diminue), à fréquence donnée, avec la densité ε .

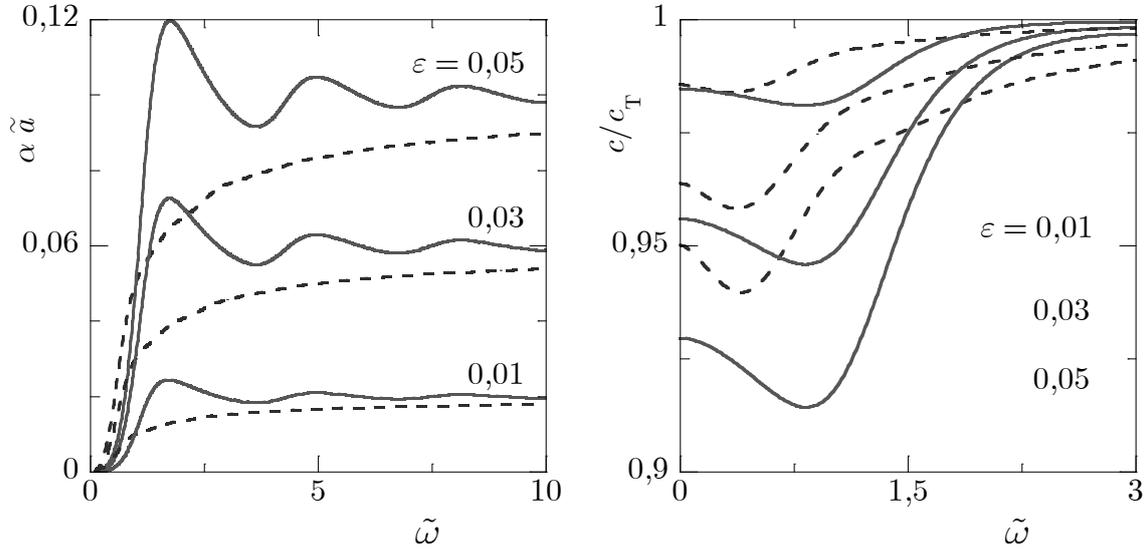


Figure IV.5 : Atténuation et célérité de phase versus la fréquence réduite pour des fissures parallèles et trois valeurs de densité ε . Trait continu : $\tau_i = 0$; trait en pointillé : $\tau_i = 1$.

Réponses en réflexion et transmission

Les modules des coefficients de réflexion et de transmission (III.75) et (III.76) sont représentés sur les Figures IV.6 à IV.8 en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour la couche multifissurée de la Figure IV.1. Le grand axe des cavités elliptiques est parallèle au front d'onde incident ($\tau_i = \tau \leq 1$).

Les Figures IV.6 et IV.7 montrent les effets de la densité de fissure ($\varepsilon = 0,01, 0,03, 0,05$) et de l'épaisseur de couche ($\tilde{h} = \frac{h}{a} = 3, 30$), avec $\tau = 0,5$. Nous observons que les valeurs de $|R|$ et $|T|$ approchent respectivement zéro et un, lorsque $\tilde{\omega}$ tend vers zéro. À une fréquence donnée, la réflexion augmente avec la densité ε . Les courbes de réflexion affichent des variations cycliques. Le nombre de cycles augmente sensiblement avec l'épaisseur \tilde{h} de la couche. Les minima successifs des courbes de réflexion se produisent lorsqu'il y a un nombre entier de demi-longueurs d'onde effectives $\frac{\Lambda}{2}$ (avec $\Lambda = \frac{2\pi}{\text{Re}K}$) dans l'épaisseur de la couche $2h$. Ceci nous indique que des interférences destructives se produisent à ces longueurs d'onde entre les interfaces « fictives » de la couche. Les courbes de transmission montrent que $|T|$ diminue lorsque la densité ε et l'épaisseur \tilde{h} augmentent. Lorsque la fréquence devient grande ($\tilde{\omega} \gtrsim 1$), les valeurs de $|T|$ oscillent autour de la limite géométrique $\exp(-2\alpha(\infty)h)$.

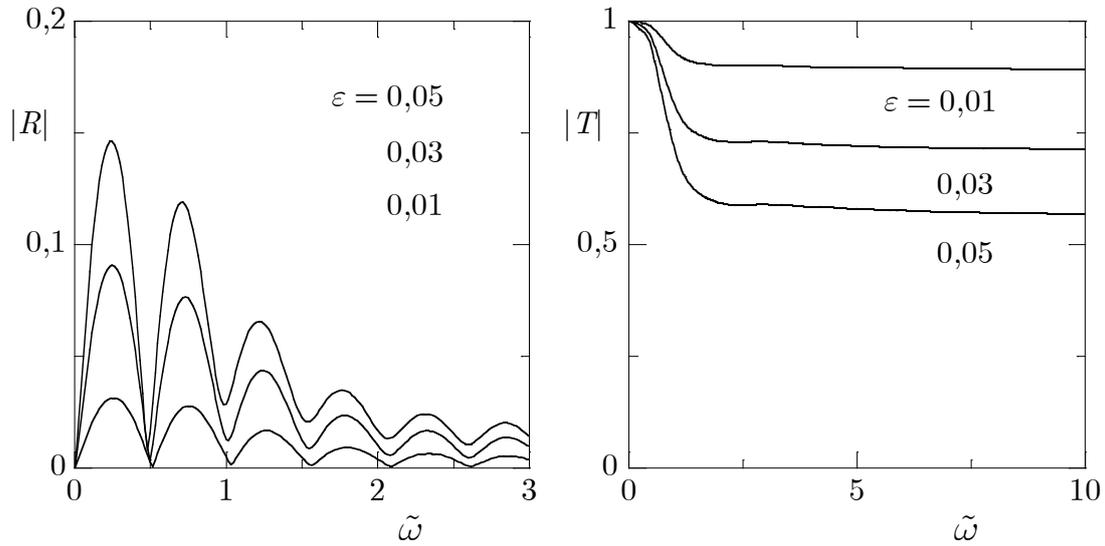


Figure IV.6 : Réflexion et transmission versus la fréquence réduite pour trois valeurs de densité de fissure et une épaisseur $\tilde{h} = 3$. Les fissures sont parallèles et $\tau_i = \tau = 0,5$.

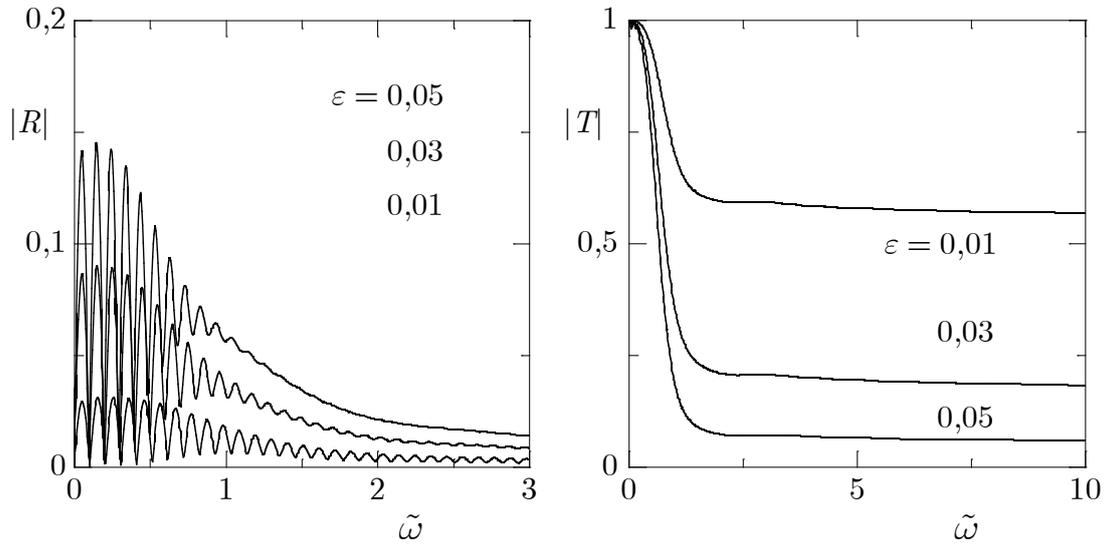


Figure IV.7 : Réflexion et transmission versus la fréquence réduite pour trois valeurs de densité de fissure et pour épaisseur $\tilde{h} = 30$. Les fissures sont parallèles et $\tau_i = \tau = 0,5$.

L'effet de l'ouverture des fissures (de densité $\varepsilon = 0,03$) sur les modules de R et T est illustrée par la Figure IV.8, pour une épaisseur de couche $\tilde{h} = 3$. La longueur active des fissures est constante ($\tau_i \leq 1$). Ainsi, lorsque τ croît, le volume de chaque fissure croît. Néanmoins, la réflexion augmente à basse fréquence lorsque les fissures tendent à se fermer (τ diminue) : leur aptitude à réfléchir l'onde incidente devient maximale.

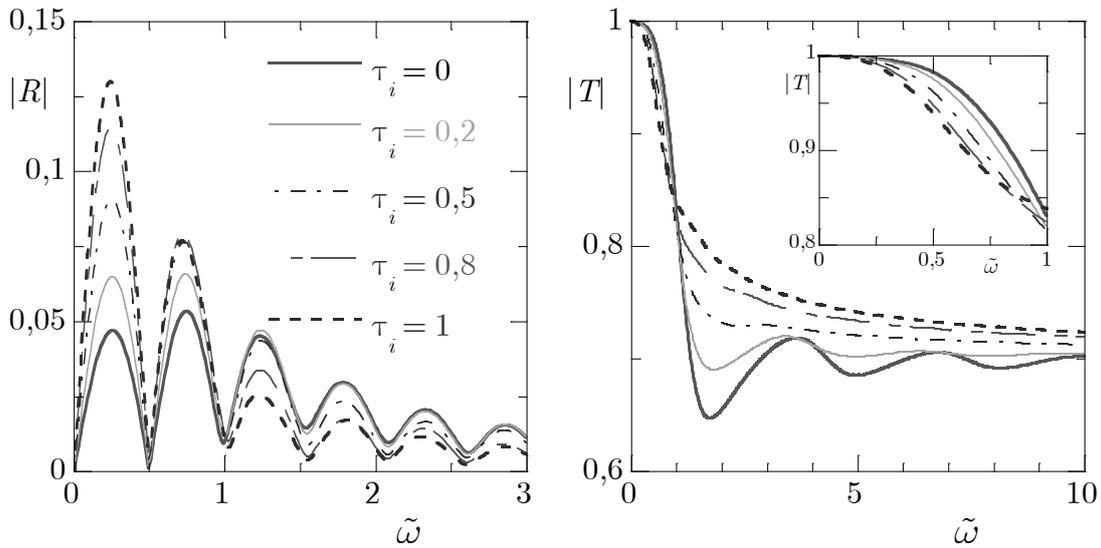


Figure IV.8 : Réflexion et transmission versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures parallèles, d'épaisseur $\tilde{h} = 3$ et de densité $\varepsilon = 0,03$.
Effet de l'ouverture des fissures $\tau (= \tau_i)$.

IV.1.1.2 Propriétés mécaniques dynamiques

Courbes de masse volumique effective

La masse volumique effective de la couche homogène équivalente à celle de la Figure IV.1, Éq. (III.101), est présentée sur la Figure IV.9 en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour plusieurs valeurs d'ouverture de fissure τ , avec $\varepsilon = 0,03$.

La partie imaginaire de ρ / ρ_0 prend des valeurs plus petites que la partie réelle, qui est proche de un. Nous observons que les courbes de ρ / ρ_0 présentent des variations cycliques avec des minima et des maxima qui dépendent de τ_i , lorsque $0 < \tau_i \leq 1$. Les maxima de ρ / ρ_0 se décalent vers les hautes fréquences lorsque τ décroît de 1 à 0. Par contre, lorsque $\tau_i > 1$, leur position, comme celle des minima, ne dépend plus de τ . Observons que les valeurs basse fréquence de ρ / ρ_0 correspondant à une ouverture τ donnée concordent parfaitement avec les valeurs correspondantes lorsque τ est remplacé par $1 / \tau$. Pour une ouverture τ donnée, $\text{Re}(\rho / \rho_0)$ oscille et, à certaines fréquences, prend des valeurs supérieures à 1. À ces fréquences, la couche contenant des fissures d'ouverture τ semble être plus lourde que la matrice (la couche sans fissure). Ce résultat inattendu, déjà observé pour des inclusions cylindriques (Aristégui & Angel 2007b), suggère que les cavités des fissures se comportent comme si elles étaient remplies d'un solide de masse volumique plus grande que ρ_0 . Nous avons vérifié numériquement que, à haute fréquence, $\text{Re}(\rho / \rho_0)$ tend vers 1 et $\text{Im}(\rho / \rho_0)$ vers 0. Ainsi, dans cette limite, la masse volumique effective est celle de la matrice.

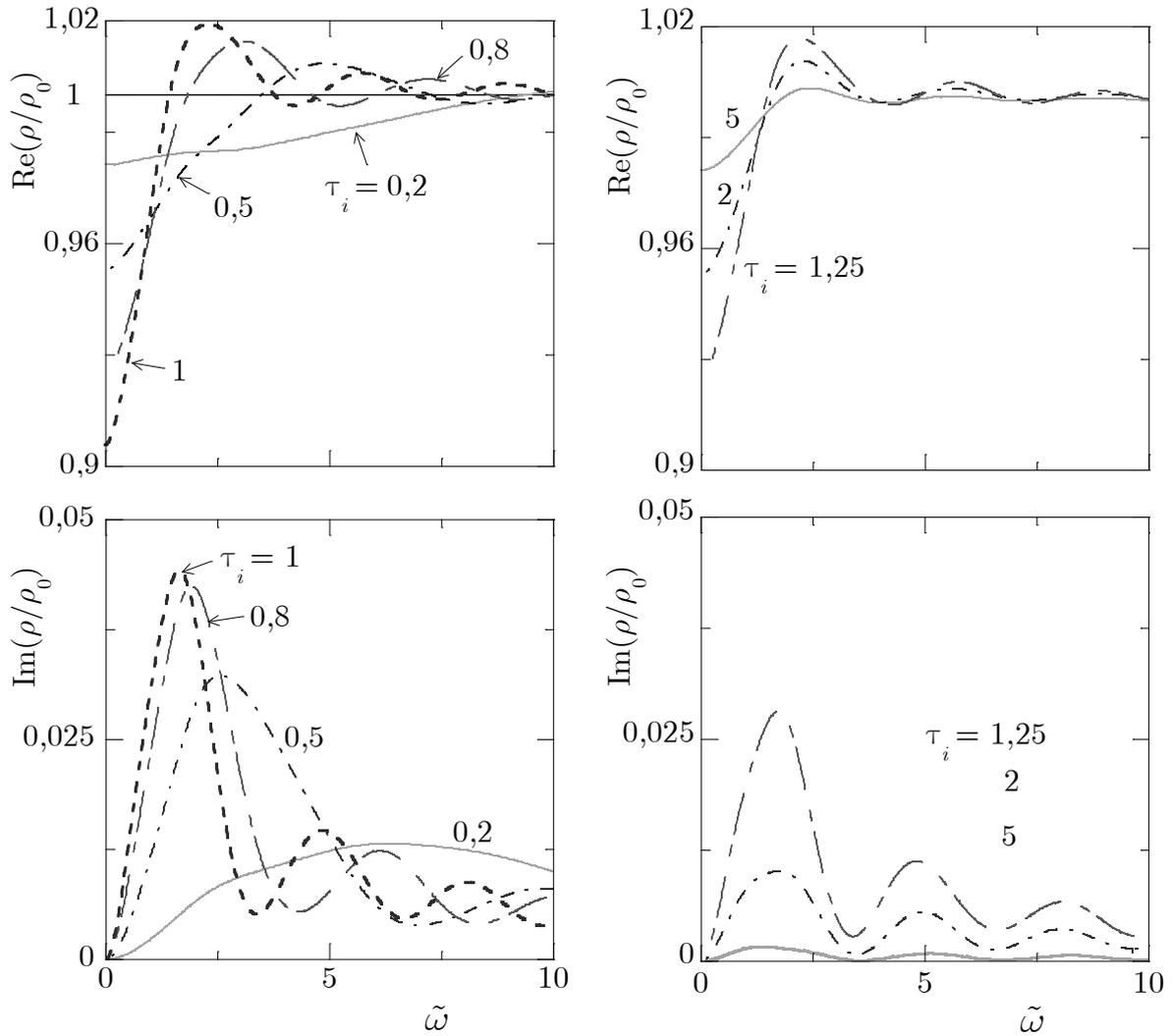


Figure IV.9 : Masse volumique effective ρ versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures parallèles de densité $\varepsilon = 0,03$. Effet de l'ouverture des fissures τ .

À gauche : $0 < \tau_i (= \tau) \leq 1$; à droite : $\tau_i (= 1/\tau) > 1$.

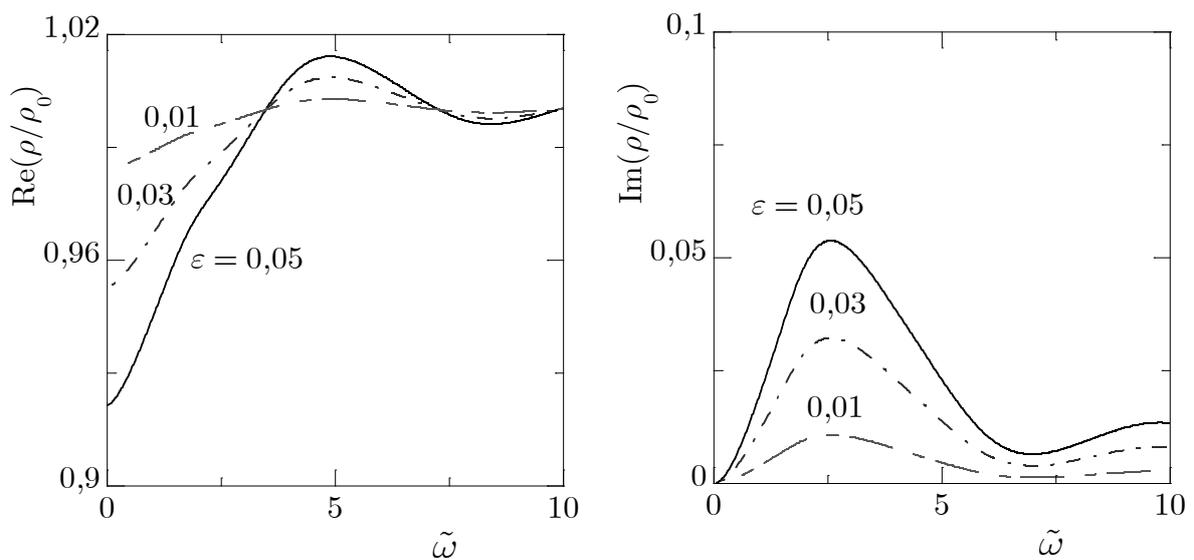


Figure IV.10 : Masse volumique effective ρ versus la fréquence réduite pour des fissures parallèles et trois valeurs de densité ε , avec $\tau_i (= \tau) = 0,5$.

La Figure IV.10 montre l'effet de la densité de fissures ($\varepsilon = 0,01, 0,03, 0,05$) sur le calcul de la masse volumique effective, pour $\tau_i = 0,5$. Quand ε augmente, $\text{Im}(\rho / \rho_0)$ augmente quelle que soit la valeur de la fréquence et $\text{Re}(\rho / \rho_0)$ diminue dans la gamme $0 < \tilde{\omega} < 3,5$. Au-delà, $\text{Re}(\rho / \rho_0)$ oscille et, comme précédemment, peut prendre des valeurs supérieures à 1. Notons que les fréquences réduites pour lesquelles $\text{Re}(\rho / \rho_0) = 1$ sont indépendantes de la valeur de ε choisie.

Courbes de rigidité effective

Le module de rigidité effectif de la couche homogène équivalente à celle de la Figure IV.1, Éq. (III.102), est présenté sur la Figure IV.11 en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour plusieurs valeurs d'ouverture de fissure τ , avec $\varepsilon = 0,03$.

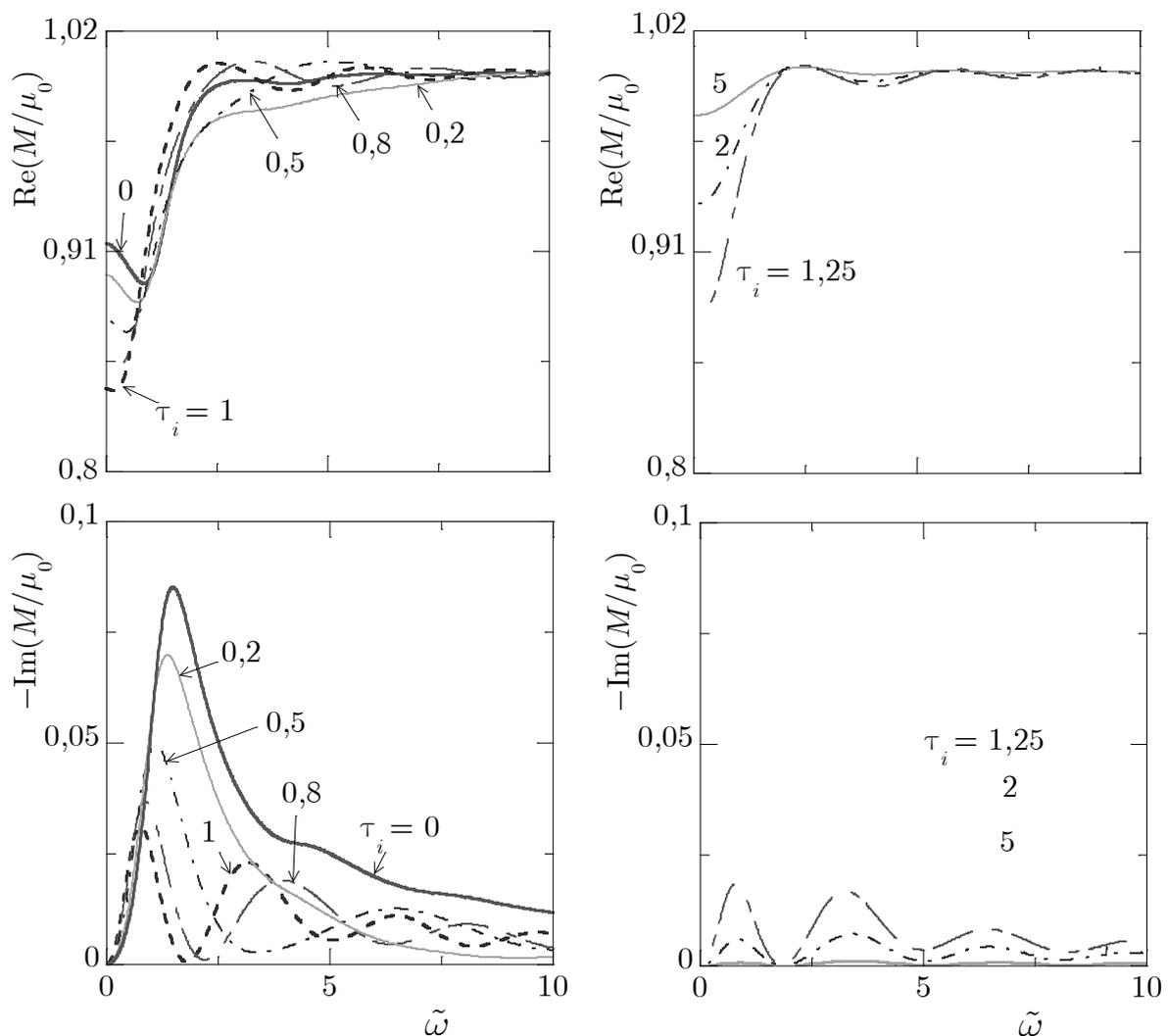


Figure IV.11 : Module de rigidité effectif M versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures parallèles de densité $\varepsilon = 0,03$. Effet de l'ouverture des fissures τ .
À gauche : $0 < \tau_i (= \tau) \leq 1$; à droite : $\tau_i (= 1/\tau) > 1$.

La partie imaginaire de M / μ_0 prend des valeurs plus petites que la partie réelle, qui est proche de un. Nous observons que les courbes de M / μ_0 présentent des variations cycliques avec des minima et des maxima qui dépendent de τ_i , lorsque $0 < \tau_i \leq 1$. Par contre, lorsque $\tau_i > 1$, leur position, comme celle de minima, ne dépend plus de τ . Observons que les valeurs basse fréquence de M / μ_0 correspondant à un τ donné, sont différentes des valeurs correspondantes lorsque τ est remplacé par $1 / \tau$, comme le prédit la formule (IV.9). Pour une ouverture τ donnée, $\text{Re}(M / \mu_0)$ oscille et prend, à certaines fréquences, des valeurs qui sont plus grandes que 1. À ces fréquences, la matrice multifissurée « est » plus rigide que la matrice seule. Ce résultat suggère que les cavités des fissures se comportent comme si elles étaient remplies d'un solide de rigidité plus grande que μ_0 . Nous avons vérifié que ce comportement atypique disparaissait pour des fissures plates ($\tau_i = 0$). Nous avons observé numériquement pour des valeurs élevées de la fréquence ($\tilde{\omega} > 10$) que $\text{Re}(M / \mu_0)$ s'approche de 1 et $\text{Im}(M / \mu_0)$ de 0. Ainsi, dans cette limite, le module de rigidité effectif est celui de la matrice.

La Figure IV.12 montre l'effet de la densité de fissures ($\varepsilon = 0,01, 0,03, 0,05$) sur le calcul du module de rigidité effectif, avec $\tau_i = 0,5$. Les commentaires des courbes sont similaires à ceux de la Figure IV.10.

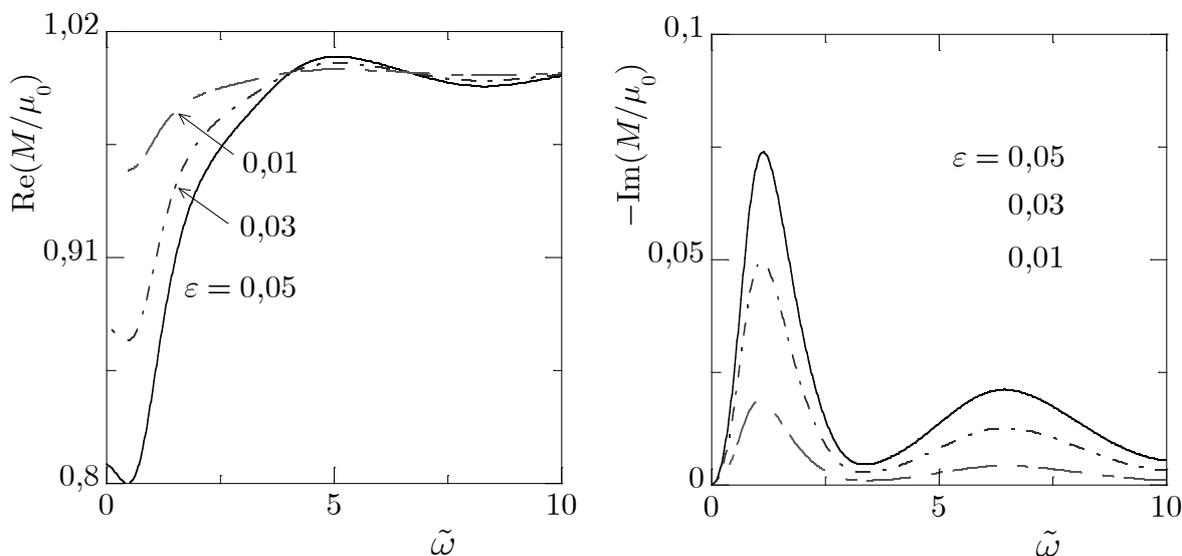


Figure IV.12 : Module de rigidité effectif M versus la fréquence réduite pour des fissures parallèles et trois valeurs de densité ε , avec $\tau_i (= \tau) = 0,5$.

IV.1.2 Limites analytiques

Nous établissons les limites basse et/ou haute fréquences des quantités physiques présentées dans la section précédente, caractérisant la couche multifissurée des points de vue acoustique et mécanique.

IV.1.2.1 Approximations basse fréquence

Plaçons-nous dans le cas où la taille caractéristique \tilde{a} de la fissure est négligeable devant la longueur d'onde de l'onde incidente λ_T , ou encore $\tilde{\omega} = k_T \tilde{a} \ll 1$, *i. e.* à basse fréquence.¹³

L'atténuation et la célérité de phase des ondes cohérentes siégeant à l'intérieur de la couche multifissurée sont calculées en utilisant la relation (III.70). Lorsque les fissures sont ouvertes et $\tilde{\omega}$ tend vers zéro, nous obtenons pour l'atténuation et la célérité de phase les expressions suivantes :

$$\alpha \tilde{a} = \pi \phi \frac{1 + 2\tau + 3\tau^2 - \phi\tau(1 - \tau^2)}{16\sqrt{1 + \phi - \tau(1 + \tau)}\phi^2} \tilde{\omega}^3 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})\right), \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{c}{c_T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi - \tau(1 + \tau)}\phi^2} \left(1 + \phi \frac{1 + 2\tau + 3\tau^2 - \phi\tau(1 - \tau^2)}{8(1 + \phi - \tau(1 + \tau))\phi^2} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1))\right), \quad (\text{IV.6})$$

où $\phi = \pi\varepsilon (= \pi n_0 \tilde{a}^2)$ et $0 \leq \tau_i (= \tau) \leq 1$. Pour des fissures plates parallèles au vecteur d'onde incident ($\tau_i (= 1/\tau) \rightarrow \infty$), nous trouvons que $\alpha = 0$ et $c = c_T$.

Définissons les modules de rigidité effectifs à valeurs complexes C_{44} et C_{66} de la couche, tels que :

$$C_{44} \equiv M(0 \leq \tau_i \leq 1), \quad C_{66} \equiv M(\tau_i > 1), \quad (\text{IV.7})$$

où M est calculé à partir de l'Éq. (III.102). La masse volumique effective est déterminée à l'aide de l'Éq. (III.101). Lorsque $\tilde{\omega}$ tend vers zéro, nous trouvons :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left((1 - \phi\tau) - \frac{\phi\tau^2}{2} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right) + i \frac{\pi\phi\tau^2}{4} \tilde{\omega}^2 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})\right), \quad (\text{IV.8})$$

$$\frac{C_{44}}{\mu_0} = \frac{1}{\phi(\tau + 1) + 1} \left(1 + \frac{\phi(\tau + 1)^2}{4(\phi(\tau + 1) + 1)} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(\tilde{\omega}^2)) \right) - i \frac{\pi\phi(\tau + 1)^2}{8(\phi(\tau + 1) + 1)^2} \tilde{\omega}^2 \left(1 + O(\ln \tilde{\omega})\right), \quad (\text{IV.9})$$

avec $0 \leq \tau_i (= \tau) \leq 1$. L'équation (IV.8) montre que dans la limite statique ($\tilde{\omega} = 0$) la masse volumique effective satisfait la loi des mélanges. Observons que les limites statiques de ρ et C_{44} dépendent de l'ouverture τ . Notons que pour des fissures plates parallèles au front

¹³ Rappelons que $\tilde{a} = a_1$ pour une ellipse de demi-grand axe a_1 et $\tilde{a} = a$ pour le cas où l'ellipse se réduit à un segment de longueur $2a$.

d'onde incident ($\tau_i (= \tau) = 0$), la masse volumique de la couche effective est égale à la masse volumique de la matrice ($\rho = \rho_0$).

Lorsque $\tau_i (= 1 / \tau) > 1$, les limites basse fréquence de $\alpha \tilde{a}$, c / c_T et ρ / ρ_0 sont respectivement données par les Éqs. (IV.5), (IV.6) et (IV.8), en remplaçant a_1 par a_3 , τ par $1 / \tau$ et $\tilde{\omega}$ par $\tilde{\omega}\tau$. Dans ce cas de figure, nous avons également :

$$C_{66} = C_{44} \text{ (avec } \tau \mapsto 1 / \tau \text{ et } \tilde{\omega} \mapsto \tilde{\omega}\tau \text{ dans l'Éq. (IV.9)).} \quad (\text{IV.10})$$

Pour des fissures plates parallèles au vecteur d'onde incident ($\tau_i \rightarrow \infty$), nous avons :

$$C_{66} = \mu_0. \quad (\text{IV.11})$$

Résultats basse fréquence disponibles dans la littérature

Datta (1975) a étudié la propagation d'ondes planes TH dans des matériaux composites renforcés par des fibres elliptiques identiques et parallèles au front d'onde incident. En particulier, il remplace les fibres par des cavités elliptiques et reporte dans ses relations (24), les approximations suivantes pour la masse volumique effective ρ et les modules de rigidité effectifs C_{44} et C_{66} :

$$\rho = \rho_0 (1 - \phi), \quad (\text{IV.12})$$

$$C_{44} = \mu_0 (1 - \Delta\mu_1 \phi), \quad (\text{IV.13})$$

$$C_{66} = \mu_0 (1 - \Delta\mu_2 \phi), \quad (\text{IV.14})$$

où $\Delta\mu_1$ et $\Delta\mu_2$ sont donnés dans son équation (26) sous la forme :

$$\Delta\mu_1 = \frac{e^{\xi_0}}{\cosh \xi_0}, \quad \Delta\mu_2 = \frac{e^{\xi_0}}{\sinh \xi_0}.$$

En utilisant la relation $\tanh \xi_0 = \tau (= \frac{a_3}{a_1})$ dans les équations précédentes, nous trouvons que $\Delta\mu_1 = 1 + 1 / \tau$ et $\Delta\mu_2 = 1 + \tau$, puis en remplaçant ces dernières expressions dans les Éqs. (IV.13) et (IV.14), nous trouvons :

$$\frac{C_{44}}{\mu_0} = 1 - \phi (1 + \tau), \quad (\text{IV.15})$$

$$\frac{C_{66}}{\mu_0} = 1 - \frac{1}{\tau} (1 + \tau) \phi. \quad (\text{IV.16})$$

Par ailleurs, dans ses relations (27), Datta (1975) obtient pour une distribution de fissures plates parallèles ($\tau_i = 0$), avec nos notations :

$$C_{44} = \mu_0 (1 - \phi), \quad (\text{IV.17})$$

et remarque que si l'onde incidente se propage selon une direction parallèle aux lèvres des fissures (*i. e.* $\tau_i \rightarrow \infty$), alors le milieu se comporte comme s'il n'y avait pas de fissure, *i. e.* $C_{66} = \mu_0$.

Varadan *et al.* (1978) établissent une relation de dispersion basse fréquence pour un matériau composite contenant une distribution uniforme et aléatoire de fibres elliptiques alignées (de module de rigidité μ_1). Supposant que la masse volumique effective ρ satisfait la loi des mélanges, ils obtiennent de l'équation de dispersion, le module de rigidité effectif C_{44} du milieu composite, tel que :

$$C_{44} = \frac{(1 + \tau)(\mu_1 - \mu_0)\phi + 2(\tau\mu_1 + \mu_0)}{(1 + \tau)(\mu_0 - \mu_1)\phi + 2(\tau\mu_1 + \mu_0)}. \quad (\text{IV.18})$$

Dans le cadre des théories d'Eshelby et Mori-Tanaka, Zhao & Weng (1990) obtiennent les expressions statiques des neuf constantes d'élasticité effectives d'un matériau composite orthotrope renforcé par des fibres elliptiques alignées (de module de rigidité μ_1). Leurs équations (16) et (17) s'écrivent respectivement, en utilisant nos notations :

$$\frac{C_{44}}{\mu_0} = 1 - \frac{\phi(1 + \tau)(\mu_1 - \mu_0)}{(\mu_0 - \mu_1)\tau\phi + \tau\mu_1 + \mu_0}, \quad (\text{IV.19})$$

$$\frac{C_{66}}{\mu_0} = 1 - \frac{\phi(1 + \tau)(\mu_0 - \mu_1)}{(\mu_0 - \mu_1)\phi + \mu_1 + \tau\mu_0}. \quad (\text{IV.20})$$

Zhang & Gross (1998) donnent dans leur relation (E.19) une expression du module de rigidité effectif C_{44} d'un solide contenant des fissures plates alignées ($\tau_i = 0$), obtenue par une méthode auto-cohérente, sous la forme :

$$C_{44} = \frac{\mu_0}{4} \left(\sqrt{\phi^2 + 4} - \phi \right)^2. \quad (\text{IV.21})$$

Dans le même contexte, Murai (2007) obtient une expression statique pour le module de rigidité effectif C_{44} d'un solide contenant des fissures plates alignées ($\tau_i = 0$). Avec nos notations, elle s'écrit :

$$C_{44} = \mu_0 \left(1 - \frac{\phi}{2} \right)^2. \quad (\text{IV.22})$$

Que les fissures soient ouvertes ou plates, il apparaît qu'en présence d'une faible densité de fissures ($\phi \ll 1$), la limite générale que nous avons établie, Éq. (IV.9), est identique jusqu'aux ordres $O(\tilde{\omega}^2)$ et $O(\phi^2)$, aux expressions (IV.13)-(IV.21) disponibles dans la littérature (où le cas échéant, $\mu_1 = 0$).

IV.1.2.2 *Approximations haute fréquence*

Dans la limite haute fréquence ($\tilde{\omega} \gg 1$), les prédictions numériques de la section IV.1.1 montrent que :

$$\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} c = c_T, \quad (\forall \tau, \forall \varepsilon); \quad \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} \alpha = 2n_0 \tilde{a}, \quad (0 \leq \tau_i (= \tau) \leq 1, \forall \varepsilon), \quad (\text{IV.23})$$

$$\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} \alpha = 2n_0 a_3, \quad (\forall \tau_i \left(= \frac{1}{\tau} \right) > 1, \forall \varepsilon). \quad (\text{IV.24})$$

Observons que le cas de la fissure plate ($\tau_i = 0$) est traité analytiquement dans l'Annexe A7. L'équation (A7.19), avec $\sigma = \theta_0 = 0$ est conforme à l'expression (IV.23)₂.

IV.1.2.3 *Amplitudes des ondes cohérentes*

Nous avons vérifié, en utilisant les limites basse fréquence de l'atténuation et de la célérité de phase présentées précédemment, que dans la limite statique, le coefficient de réflexion (III.75) tend vers zéro et le coefficient de transmission (III.76) vers un.

Afin d'obtenir les limites haute fréquence de R et T , il suffit de substituer l'Éq. (III.70) dans les Éqs. (III.75) et (III.76) par son approximation déduite des limites (IV.23), (IV.24) ou (IV.43), selon les cas. Lorsque les fissures sont alignées et $\tilde{\omega}$ tend vers l'infini, nous trouvons que :

$$\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} |R| = 0, \quad \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} |T| = e^{-2\alpha(\infty)h} \quad (\forall \tau, \forall \varepsilon). \quad (\text{IV.25})$$

IV.2 **Distribution uniforme et aléatoire de fissures plates de taille finie : comparaison**

La modélisation établie au Chapitre III pour le nombre d'onde effectif K , Éq. (III.69), est maintenant confrontée à des formulations disponibles dans la littérature. Dans un premier temps, nous présentons les approches développées par Kikuchi (1981a), Angel & Koba (1997) et Linton & Martin (2005) qui conduisent à des expressions simples et explicites de K , représentatif des mécanismes de diffusion multiple. Nous les comparons ensuite à notre formulation (III.69).

IV.2.1 **Modèles de diffusion multiple disponibles : présentation**

Dans des travaux récents, Linton & Martin (2005) ont établi une formule pour le nombre d'onde effectif d'une onde cohérente scalaire se propageant dans une distribution uniforme et

aléatoire de diffuseurs cylindriques identiques, réduits ultérieurement à des diffuseurs linéiques. Les cylindres étant contenus dans un demi-espace, ces auteurs ont fait en sorte de considérer l'onde cohérente dans une région éloignée de l'interface. Une enveloppe cylindrique de rayon b , similaire à la « hole-correction » (Fikioris & Waterman 1964), est associée à chaque cylindre afin d'éviter des interpénétrations possibles entre objets, rendant dès lors l'approche adaptée aux fortes concentrations de cylindres. En tronquant les mécanismes de diffusion multiple avec l'« approximation quasi-cristalline » (Lax 1951), ils obtiennent un système infini d'équations algébriques linéaires à partir duquel le nombre d'onde effectif est déterminé. Dans le cas où la densité de diffuseurs est faible et où les cylindres sont réduits à des lignes ($b \rightarrow 0$), ils établissent une expression approchée du nombre d'onde effectif, qui, avec nos notations, peut être reproduite sous la forme suivante :

$$K^2 = k_T^2 + n_0 4\pi f(0) - n_0^2 \frac{8\pi}{k_T^2} \int_0^\pi \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d}{d\theta} f^2(\theta) d\theta. \quad (\text{IV.26})$$

Une alternative à la réduction des diffuseurs à des lignes aux propriétés de diffusion appropriées, réside dans la prise en compte de la géométrie réelle des diffuseurs. Par exemple, Kikuchi (1981a) puis Angel & Koba (1997) ont traité le cas d'une onde cohérente scalaire se propageant dans une distribution uniforme et aléatoire de fissures plates identiques et perpendiculaires au vecteur d'onde effectif. Lorsque la distribution occupe tout l'espace, le traitement adopté par Kikuchi est rudimentaire. Il utilise l'idée du « formalisme d'onde moyenne » présenté plus en détail dans le Chapitre V, et l'approximation introduite par Foldy (1945) (qui stipule l'égalité du champ d'excitation moyen agissant sur une fissure fixe et du champ cohérent). Sa formule pour le nombre d'onde effectif, qui est donnée entre ses équations (14) et (15), est reproduite en utilisant nos notations sous la forme :

$$K^2 = k_T^2 \left(1 - \frac{in_0 \tilde{B}}{K} \right)^{-1}, \quad (\text{IV.27})$$

où $-\tilde{B}/2a$ est le déplacement moyen sur les lèvres d'une fissure seule sollicitée par l'onde plane cohérente de nombre d'onde K .

Angel & Koba (1997) ont traité le cas des ondes cohérentes rétrograde et progressive siégeant dans une distribution localisée dans une couche similaire à celle de la Figure IV.1. La condition de fermeture choisie suit aussi celle proposée par Foldy (1945). Leur formule (équation (48)) pour le nombre d'onde effectif est reproduite avec nos notations sous la forme (Caleap *et al.* 2007a) :

$$K^2 = k_T^2 \left(1 - \frac{in_0 B(0)}{k_T} \right)^{-1}, \quad (\text{IV.28})$$

où la fonction à valeurs complexes $B(0)$ est celle de l'Éq. (II.47) (avec $\theta_0 = 0$). Observons que B est lié à la fonction \tilde{B} de l'Éq. (IV.27) par :

$$\frac{k_T \tilde{B}}{K} = B(0). \quad (\text{IV.29})$$

Les expressions (IV.27) et (IV.28) sont donc identiques. Nous pouvons encore exprimer la formule (IV.28) à l'aide de l'amplitude de diffusion f en champ lointain d'une fissure aux surfaces libres sollicitée sous incidence normale par une onde plane TH. Ainsi, d'après l'Éq. (II.46) (avec $\theta_0 = 0$) nous obtenons (Caleap *et al.* 2007a) :

$$K^2 = k_T^2 \left(1 - n_0 \frac{4\pi}{k_T^2} f(0) \right)^{-1}. \quad (\text{IV.30})$$

Nous avons par ailleurs réécrit les amplitudes des ondes cohérentes à l'extérieur et à l'intérieur de la couche, reportées par Angel & Koba (1997) dans leurs Éqs. (50)-(52), (57) et (58) sous les formes (III.75) à (III.80) où Θ est maintenant défini par l'Éq. (IV.3), avec le nombre d'onde K donné dans l'Éq. (IV.30). Finalement, en suivant la démarche d'Aristégui & Angel (2007b), nous déduisons des résultats d'Angel et Koba la masse volumique effective et le module de rigidité effectif (Aristégui *et al.* 2009a) :

$$\rho = \rho_0, \quad (\text{IV.31})$$

$$M = \mu_0 \left(1 - n_0 \frac{4\pi}{k_T^2} f(0) \right), \quad (\text{IV.32})$$

de la couche multifissurée, vue homogène par l'onde cohérente. En présence d'une faible densité de fissures, nous observons que les Éqs. (III.69) (avec $f(0) = -f(\pi)$) et (IV.30), et (IV.2) et (IV.32) sont identiques deux à deux à l'ordre $O(n_0^2)$. Ainsi l'approche présentée au Chapitre III et celle développée par Angel & Koba (1997) sont équivalentes dans la limite évoquée.

IV.2.2 Étude comparative en considérant les diffuseurs linéiques ou de taille réelle

L'atténuation αa et la célérité de phase c/c_T de l'onde cohérente TH se propageant dans une distribution de fissures plates alignées ($\tau_i (= \tau) = 0$), Figure IV.1, sont calculées à partir de la formulation (III.69) et de celles établies par Linton & Martin (2005) et Angel & Koba (1997) (ou Kikuchi (1981a)), respectivement Éqs. (IV.26) et (IV.30).

La Figure IV.13 montre αa et c/c_T en fonction de la fréquence réduite, pour deux valeurs de densité de fissures $\varepsilon = 0,01, 0,03$. Nous trouvons une très bonne concordance entre ces

formulations pour une faible densité de fissures ($\varepsilon = 0,01$). Des différences apparaissent lorsque la densité de fissures augmente ($\varepsilon = 0,03$). Les valeurs d'atténuation prédites avec les formulations basées sur les diffuseurs linéiques, Éqs. (III.69) et (IV.26), sont semblables entre elles, mais diffèrent de celle basée sur les diffuseurs de taille réelle, Éq. (IV.30). Cette similitude disparaît pour les célérités de phase. Les résultats obtenus par la méthode de Linton et Martin sont en effet plus proches de ceux obtenus par celle d'Angel et Koba.

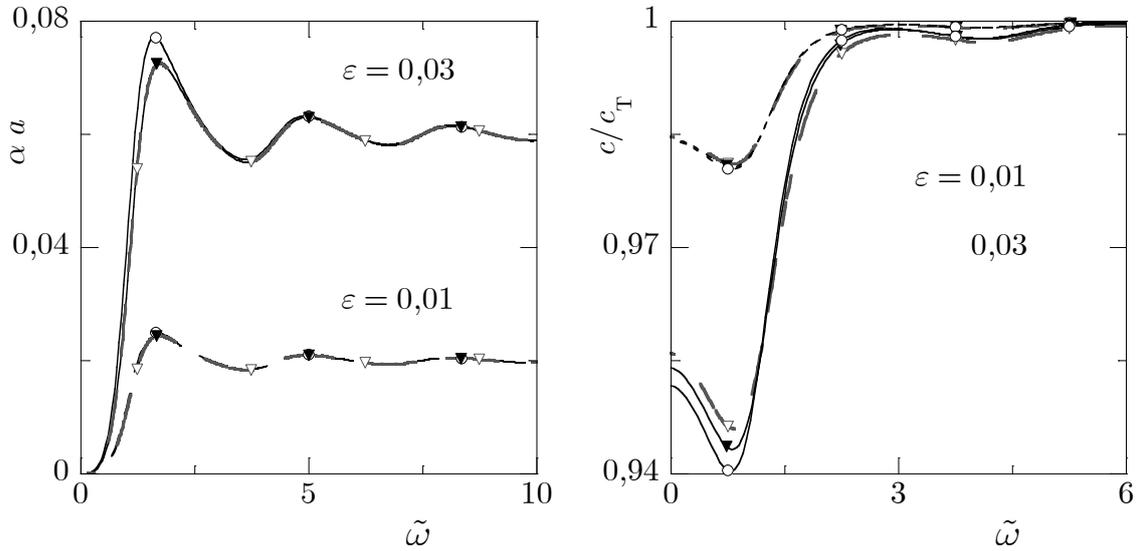


Figure IV.13 : Atténuation et célérité de phase effectives versus la fréquence réduite pour dans une couche contenant des fissures plates ($\tau_i (= \tau) = 0$) de densité $\varepsilon = 0,01$ (trait en pointillé) et $0,03$ (trait continu). Comparaison entre les formulations (III.69) ($\nabla\nabla\nabla$), (IV.26) (\blacktriangleright) et (IV.30) ($\circ\circ\circ$).

Nous établissons maintenant à partir de l'Éq. (IV.26), les limites basse fréquence de l'atténuation et de la célérité de phase effectives en présence de distributions de fissures alignées. Pour des cavités elliptiques telles que $0 \leq \tau_i (= \tau) \leq 1$, nous obtenons :

$$\alpha \tilde{a} = \pi \phi \frac{(1 + 2\tau + 3\tau^2)(1 + \phi) + 2\phi\tau^3}{8\sqrt{4(1 + \phi) + 2(1 - \tau^2)\phi^2}} \tilde{\omega}^3 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})\right), \quad (\text{IV.33})$$

$$\frac{c}{c_T} = \frac{2}{\sqrt{4(1 + \phi) + 2(1 - \tau^2)\phi^2}} \left(1 + \phi \frac{(1 + 2\tau + 3\tau^2)(1 + \phi) + 2\phi\tau^3}{4(2(1 + \phi) + (1 - \tau^2)\phi^2)} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1))\right). \quad (\text{IV.34})$$

Lorsque $\tau_i (= 1/\tau) > 1$, les limites basse fréquence de $\alpha \tilde{a}$ et c/c_T sont toujours données par les Éqs. (IV.33) et (IV.34) en remplaçant τ et $\tilde{\omega}$ par $1/\tau$ et $\tilde{\omega}\tau$, respectivement. Pour

Observons que pour une faible densité de fissures ($\phi \ll 1$), les approximations basse fréquence (IV.33) et (IV.34) sont identiques à l'ordre $O(\phi^2)$ à celles données respectivement

par les Éqs. (IV.5) et (IV.6). Comme attendu, dans la limite des faibles densités de fissures, les limites basse fréquence de αa et c/c_T pour une distribution de fissures plates ($\tau_i = 0$) représentées par des diffuseurs linéiques, Éqs. (IV.5), (IV.6), (IV.33) et (IV.34), sont en accord avec celles obtenues pour des fissures plates de taille finie, Éq. (84) dans Angel & Koba (1997).

IV.3 Modèle de fissures aléatoirement orientées

Considérons maintenant un solide contenant une distribution uniforme et aléatoire de fissures (plates ou ouvertes) aléatoirement orientées, Figure IV.14. Ainsi l'onde cohérente dans la direction y_3 est indépendante de l'angle d'orientation des diffuseurs.

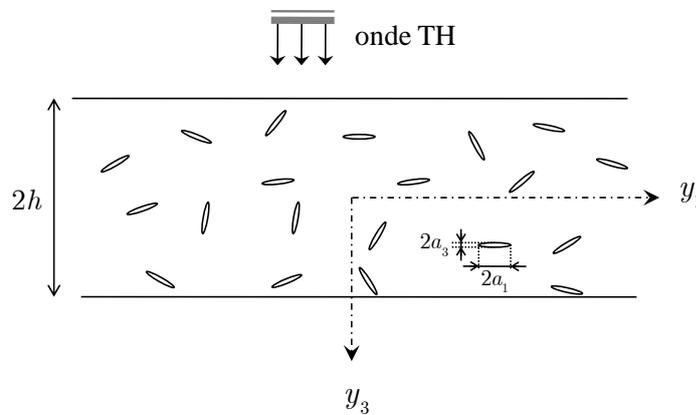


Figure IV.14 : Distribution uniforme et aléatoire de fissures aléatoirement orientées.

Le concept d'*orientation aléatoire* est inclus dans le modèle (III.69), considérant des diffuseurs linéiques, en définissant une *amplitude de diffusion moyenne* $\langle f(\theta) \rangle$ appropriée. Dans ce cadre, la réponse en champ lointain selon la direction θ , d'un diffuseur sollicité par une onde plane selon la direction θ_0 , doit être indépendante de l'inclinaison dudit diffuseur. Pour un angle d'incidence donné θ_0 , il est naturel de tenir compte des propriétés de diffusion dans la direction θ pour toutes inclinaisons possibles du diffuseur. L'ensemble de ces contributions dans la direction θ est considéré de manière équivalente en évaluant les réponses du diffuseur fixe sollicité selon toutes les directions possibles ($0 \leq \theta_0 < 2\pi$). Ainsi, les fonctions $f(\theta, \theta_0)$ sont remplacées par (Kachanov 1992, Zhang & Gross 1998) :

$$\langle f(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_0 + \theta, \theta_0) d\theta_0. \quad (\text{IV.35})$$

Le nombre d'onde effectif K , adapté à la distribution de diffuseurs aléatoirement orientés, est alors défini par :

$$K^2 = k_T^2 \left(1 + n_0 \frac{2\pi}{k_T^2} \langle f(0) \rangle \right)^2 - k_T^2 \left(n_0 \frac{2\pi}{k_T^2} \langle f(\pi) \rangle \right)^2, \quad (\text{IV.36})$$

où les *amplitudes de diffusion moyennes vers l'avant* $\langle f(0) \rangle$ et *vers l'arrière* $\langle f(\pi) \rangle$ d'un diffuseur seul sont calculées avec l'Éq. (IV.35). De manière similaire, la masse volumique effective et le module de rigidité effectif de la couche homogène équivalente (isotrope), sont définies par :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{2\pi n_0}{k_T^2} (\langle f(0) \rangle + \langle f(\pi) \rangle) \right), \quad (\text{IV.37})$$

$$M = \mu_0 \left(1 + \frac{2\pi n_0}{k_T^2} (\langle f(0) \rangle - \langle f(\pi) \rangle) \right)^{-1}. \quad (\text{IV.38})$$

IV.3.1 Propriétés acoustiques et mécaniques dynamiques

Quelques résultats numériques correspondant aux *propriétés acoustiques et mécaniques* de la *couche homogène équivalente* à la couche multifissurée sont analysés.

L'atténuation et la célérité de phase de l'onde cohérente se propageant dans une distribution de fissures aléatoirement orientées (Figure IV.14) sont présentées sur la Figure IV.15 en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour plusieurs valeurs d'ouverture de fissure τ . La densité de fissure est $\varepsilon = 0,03$.

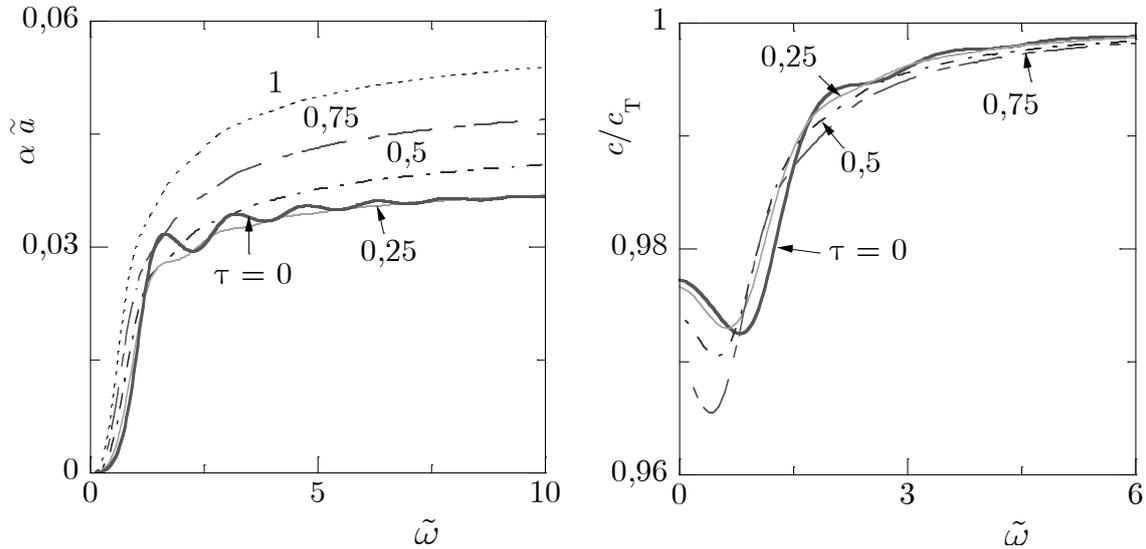


Figure IV.15 : Atténuation et célérité de phase effectives versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures aléatoirement orientées de densité $\varepsilon = 0,03$.

Effet de l'ouverture des fissures τ .

La Figure IV.15 montre que l'atténuation pour les fissures ouvertes ($\tau > 0$) augmente avec l'ouverture des fissures τ , la courbe associée aux cavités de section circulaire ($\tau = 1$) constituant la limite supérieure. Ainsi, l'atténuation croît avec le volume des fissures. Dans le cas des fissures plates ($\tau = 0$), cette observation reste valide seulement dans les domaines des basses et hautes fréquences. En dehors de ces régions, le coefficient d'atténuation oscille. Lorsque $\tilde{\omega}$ augmente, l'amplitude des oscillations diminue et αa approche la limite géométrique $4\varepsilon/\pi$ ¹⁴, qui est naturellement la plus basse limite *haute fréquence*. En comparant les courbes d'atténuation de la Figure IV.15 à celles de la Figure IV.2a, nous observons sur tout le domaine de fréquences que lorsque les fissures plates sont aléatoirement orientées, l'atténuation est plus faible que lorsque les fissures plates sont alignées. Ceci est physiquement raisonnable puisque toutes les fissures plates parallèles au front d'onde incident sont des obstacles actifs à la propagation d'ondes, alors que dans le cas *aléatoirement orientée*, l'inclinaison des fissures induit une diminution de leur aptitude à s'opposer à l'onde incidente. Des explications similaires s'appliquent aux fissures ouvertes.

À basse fréquence, la célérité de phase c/c_T présentée dans la Figure IV.15 diminue, quand le volume des cavités augmente. À haute fréquence, toutes les courbes tendent par valeurs inférieures vers la limite géométrique 1.

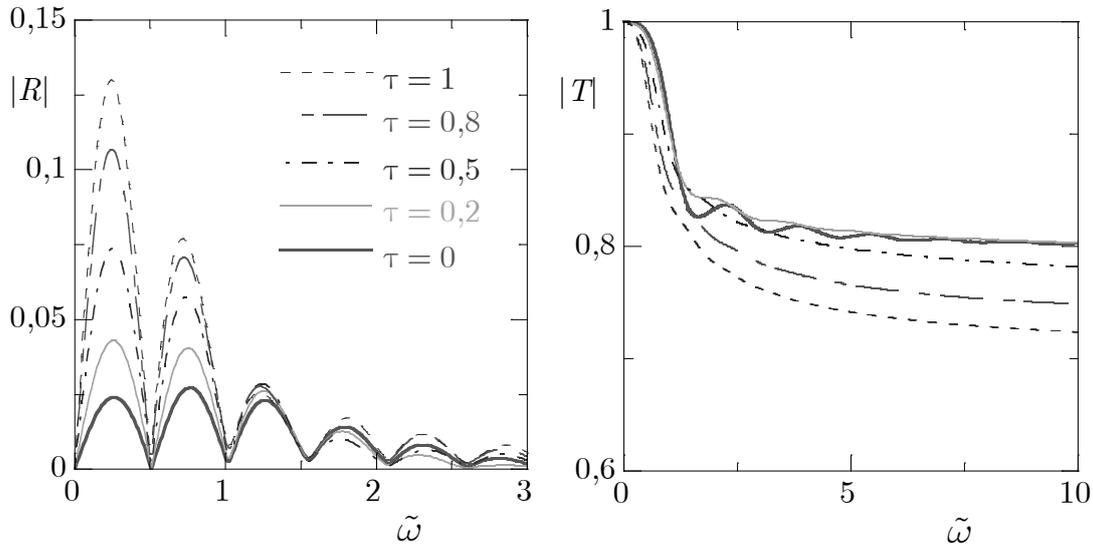


Figure IV.16 : Réflexion et transmission versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures aléatoirement orientées d'épaisseur $\tilde{h} = 3$ et de densité $\varepsilon = 0,03$.
Effet de l'ouverture des fissures τ .

Lorsque les fissures sont aléatoirement orientées, la Figure IV.16 montre l'effet de l'ouverture des fissures τ sur les modules de R et T , calculés à l'aide des expressions (III.75)-(III.77), où $\Theta = \frac{k_T}{K} \frac{\rho}{\rho_0}$ avec K et ρ définis aux Éqs. (IV.36) et (IV.37). Qualitativement, les courbes

¹⁴ $\alpha(\infty) \simeq n_0 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ell_a d\theta \right) = n_0 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2a \sin \theta d\theta$.

de $|R|$ et $|T|$ ont les mêmes tendances que celles de la Figure IV.8, où les fissures sont alignées. Comme attendu, à basse fréquence, les fissures ouvertes sont plus actives (réfléchissantes) que les plates. À haute fréquence, le comportement du coefficient de réflexion devient compliqué. Observons de manière générale que, les courbes de $|R|$ et $|T|$ associées à $\tau = 1$, se comportent respectivement comme des limites supérieure et inférieure aux autres courbes.

La Figure IV.17 présente la masse volumique effective de la couche homogène équivalente à celle de la Figure IV.14, en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour plusieurs valeurs d'ouverture de fissure τ . Les fissures sont aléatoirement orientées et leur densité est $\varepsilon = 0,03$. Le comportement général de ρ / ρ_0 est qualitativement similaire à celui de la Figure IV.9. Toutefois, il est intéressant de noter pour les fissures plates ($\tau = 0$), que contrairement au cas des fissures alignées, la masse volumique effective ρ est différente de ρ_0 et est à valeurs complexes. Nous avons $\text{Re}(\rho / \rho_0) \geq 1$ ($\forall \tilde{\omega}$) car $\langle f(0) \rangle \neq -\langle f(\pi) \rangle$. Observons que les valeurs basse fréquence ($\tilde{\omega} \ll 1$) sont identiques à celles de la Figure IV.9, quelle que soit l'ouverture τ . Dans cette gamme de fréquences, nous constatons que la pente des courbes correspondant à $\tau = 0$ est presque nulle.

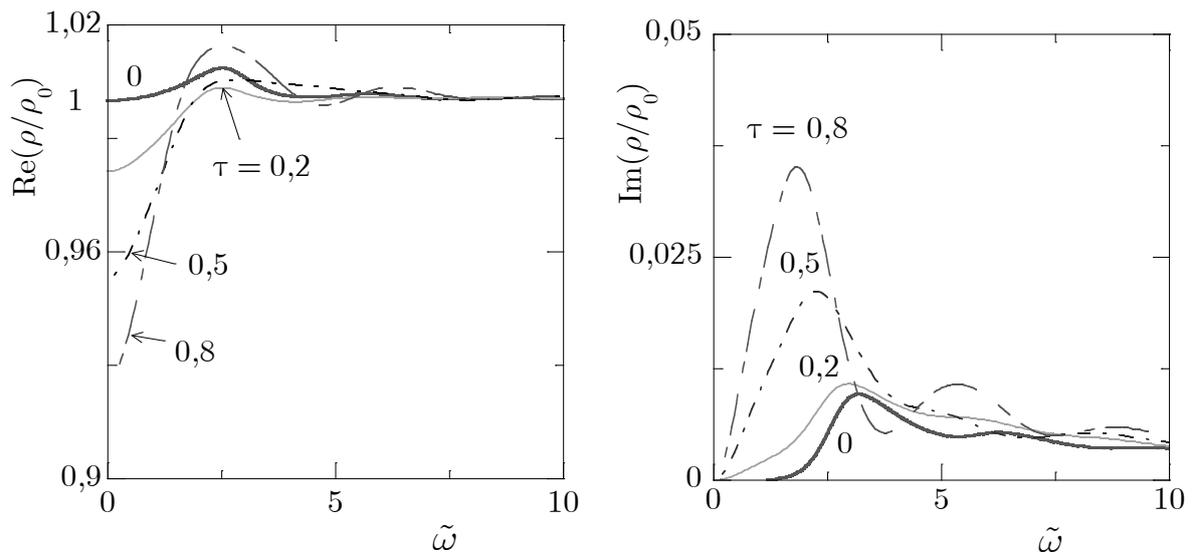


Figure IV.17 : Masse volumique effective ρ versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures aléatoirement orientées de densité $\varepsilon = 0,03$. Effet de l'ouverture des fissures τ .

La Figure IV.18 montre le module de rigidité effectif de la couche homogène équivalente de la Figure IV.14, en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega}$, pour plusieurs valeurs d'ouverture de fissure τ . Les fissures son aléatoirement orientées et leur densité est $\varepsilon = 0,03$. Le comportement général de M / μ_0 est qualitativement similaire à celui de la Figure IV.9. En comparant les courbes de la Figure IV.18 à celles de la Figure IV.11, nous observons sur tout le domaine de fréquences que, lorsque les fissures sont aléatoirement orientées, la dissipation induite par $\text{Im} M$ est plus faible que celle relative aux fissures alignées.

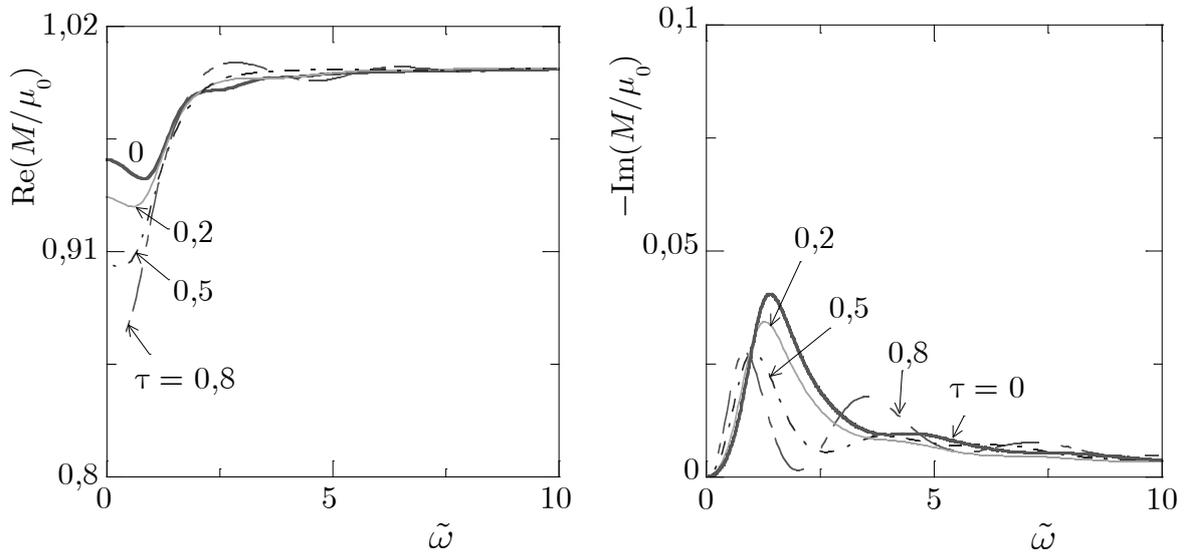


Figure IV.18 : Module de rigidité effectif M versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures aléatoirement orientées de densité $\varepsilon = 0,03$.
Effet de l'ouverture des fissures τ .

IV.3.2 Approximations basse fréquence

Nous présentons les approximations basse fréquence de l'atténuation et de la célérité de phase effectives, obtenues à partir de l'Éq. (IV.36) et des estimations (I.100) et (I.102). Lorsque les fissures d'ouverture τ sont aléatoirement orientées, nous trouvons que :

$$\alpha \tilde{a} = \pi \phi \frac{(1 + 2\tau + 6\tau^2 + 2\tau^3 + \tau^4) - \phi\tau(1 - 2\tau^2 + \tau^4)}{16\sqrt{2(1 - \phi\tau)(2 + \phi(1 + \tau)^2)}} \tilde{\omega}^3 (1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})), \quad (\text{IV.39})$$

$$\frac{c}{c_T} = \frac{2}{\sqrt{2(1 - \phi\tau)(2 + \phi(1 + \tau)^2)}} \left(1 + \phi \frac{(1 + 2\tau + 6\tau^2 + 2\tau^3 + \tau^4) - \phi\tau(1 - 2\tau^2 + \tau^4)}{8(1 - \phi\tau)(2 + \phi(1 + \tau)^2)} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right). \quad (\text{IV.40})$$

Les limites basse fréquence de la masse volumique effective et du module de rigidité effectif M ($= C_{44} = C_{66}$) sont obtenues respectivement avec les relations (IV.37) et (IV.38) et les approximations (I.100) et (I.102). Nous trouvons qu'à basse fréquence, la masse volumique effective de la couche effective est encore donnée par l'Éq. (IV.8) et :

$$\frac{M}{\mu_0} = \frac{2}{\phi(\tau+1)^2 + 2} \left(1 + \frac{\phi(1+\tau^2)(\tau+1)^2}{4(\phi(\tau+1)^2 + 2)} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(\tilde{\omega}^2)) \right) - i \frac{\pi\phi(1+\tau^2)(\tau+1)^2}{4(\phi(\tau+1)^2 + 2)^2} \tilde{\omega}^2 (1 + O(\ln \tilde{\omega})). \quad (\text{IV.41})$$

Il apparaît ainsi que la masse volumique effective de la couche multifissurée ne dépend pas de l'orientation de diffuseurs. Notons que Zhao & Weng (1990) ont reporté dans leur équation (50) le module de rigidité d'un matériau composite bidimensionnel renforcé par des fibres elliptiques (de module de rigidité μ_1) orientées de façon aléatoire, sous la forme :

$$\frac{M}{\mu_0} = \frac{2\tau(1-\phi)\mu_0^2 - \mu_1\mu_0 \left((\phi-2)\tau^2 - 2\phi\tau - 2 + \phi \right) + (\phi + 2\tau + \phi\tau^2)\mu_1^2}{2\tau(1-\phi)\mu_1^2 - \mu_1\mu_0 \left((\phi-2)\tau^2 - 2\phi\tau - 2 + \phi \right) + (\phi + 2\tau + \phi\tau^2)\mu_0^2}. \quad (\text{IV.42})$$

Pour une concentration diluée de cavités elliptiques vides ($\phi \ll 1$), après avoir posé $\mu_1 = 0$, les formules (IV.41) et (IV.42) sont identiques jusqu'aux ordres $O(\phi^2)$ et $O(\tilde{\omega}^2)$.

IV.3.3 Approximations haute fréquence

Dans la limite haute fréquence ($\tilde{\omega} \gg 1$), les prédictions numériques de la section IV.3.1 montrent que :

$$\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} c = c_T, \quad (\forall \tau, \forall \varepsilon); \quad \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} \alpha a = \frac{4\varepsilon}{\pi}, \quad (\forall \varepsilon), \quad (\text{IV.43})$$

$$\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} |R| = 0, \quad \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} |T| = e^{-8\varepsilon\tilde{h}/\pi}, \quad (\forall \tau, \forall \varepsilon). \quad (\text{IV.44})$$

IV.3.4 Comparaison avec la formulation de Linton et Martin modifiée

Usant de la flexibilité des descriptions considérant les diffuseurs linéiques (auxquels sont affectées les propriétés de diffuseur de taille finie appropriées), l'approche de Linton & Martin (2005) est étendue aux solides contenant des diffuseurs aléatoirement orientés, comme nous avons fait précédemment pour l'expression (IV.36). Nous posons :

$$K^2 = k_T^2 + n_0 4\pi \langle f(0) \rangle - n_0^2 \frac{8\pi}{k_T^2} \int_0^\pi \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d}{d\theta} \langle f(\theta) \rangle^2 d\theta, \quad (\text{IV.45})$$

où l'amplitude de diffusion moyenne $\langle f \rangle$ est donnée par l'Éq. (IV.35).

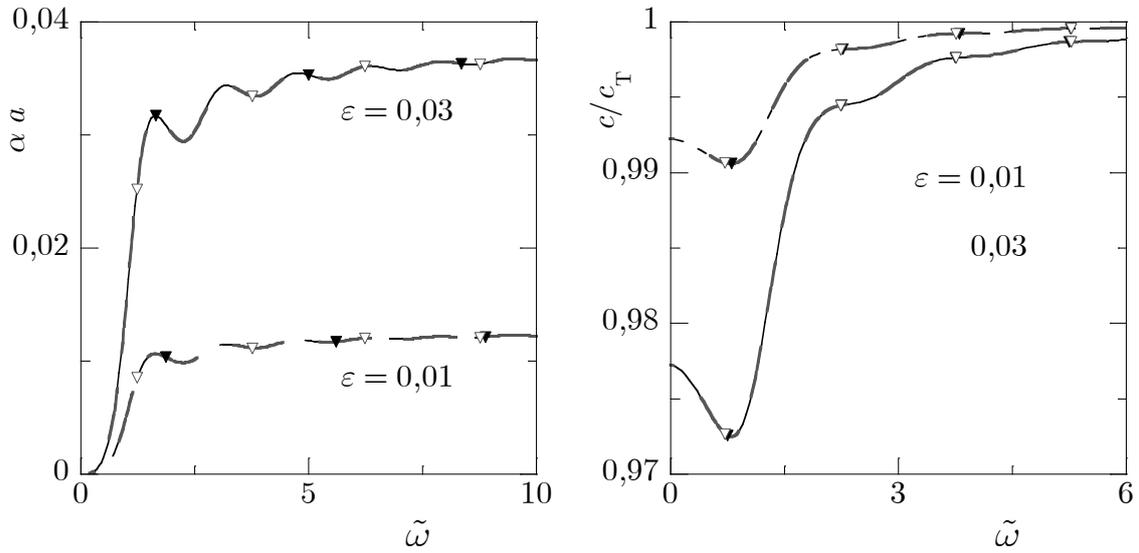


Figure IV.19 : Atténuation et célérité de phase effectives versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures plates aléatoirement orientées ($\tau = 0$) et deux valeurs de densité $\varepsilon = 0,01$ (trait en pointillé) et $0,03$ (trait continu). Comparaison entre les formulations (IV.36) ($\nabla\nabla\nabla$) et (IV.45) (\blacktriangleright).

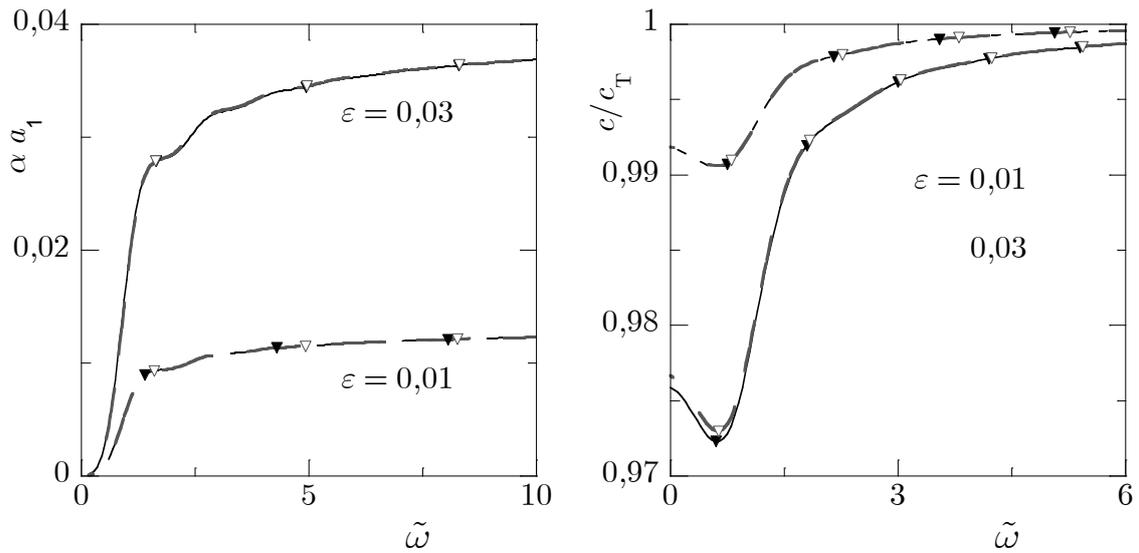


Figure IV.20 : Atténuation et célérité de phase effectives versus la fréquence réduite pour une distribution de fissures ouvertes aléatoirement orientées ($\tau = 0,25$) et deux valeurs de densité $\varepsilon = 0,01$ (trait en pointillé) et $0,03$ (trait continu). Comparaison entre les formulations (IV.36) ($\nabla\nabla\nabla$) et (IV.45) (\blacktriangleright).

Les propriétés de l'onde cohérente TH se propageant dans la couche contenant des fissures aléatoirement orientées, sont déterminées en utilisant les formulations (IV.36) et (IV.45) pour deux valeurs de densité de fissure $\varepsilon = 0,01, 0,03$. Des résultats numériques pour l'atténuation et la célérité de phase sont présentés sur les Figures IV.19 et IV.20 en fonction de la fréquence réduite, pour respectivement des fissures plates ($\tau = 0$) et ouvertes

($\tau = 0,25$). La comparaison des deux formulations est excellente. Une petite différence dans la célérité de phase apparaît seulement à basse fréquence pour les fissures ouvertes lorsque ε augmente (Figure IV.20).

Nous établissons maintenant les limites basse fréquence de l'atténuation et de la célérité de phase effectives déterminées à partir de la formulation (IV.45) et des approximations (I.100) et (I.102). Pour une distribution de fissures d'ouverture τ aléatoirement orientées, la formule (IV.45) conduit à :

$$\alpha \tilde{a} = \pi \phi \frac{(1 + 2\tau + 6\tau^2 + 2\tau^3 + \tau^4) + 2\phi(1 + 2\tau + 3\tau^2 + 2\tau^3)}{16\sqrt{2(2 + \phi(1 + \tau^2) + \phi^2(1 - \tau^2))}} \tilde{\omega}^3 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})\right), \quad (\text{IV.46})$$

$$\frac{c}{c_T} = \frac{2}{\sqrt{2(2 + \phi(1 + \tau^2) + \phi^2(1 - \tau^2))}} \left(1 + \phi \frac{(1 + 2\tau + 6\tau^2 + 2\tau^3 + \tau^4) + 2\phi(1 + 2\tau + 3\tau^2 + 2\tau^3)}{8(2 + \phi(1 + \tau^2) + \phi^2(1 - \tau^2))} \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1))\right). \quad (\text{IV.47})$$

Les résultats présentés dans les Figures IV.19 et IV.20, montrent que les approximations basse fréquence de l'atténuation et de la célérité de phase obtenues à partir des formulations (IV.36) et (IV.45) pour des fissures plates ou ouvertes (Éqs. (IV.39) et (IV.40) ; (IV.46) et (IV.47)), sont similaires dans la limite des faibles densités de fissures ($\phi \ll 1$).

IV.4 Distribution spatiale non-uniforme de diffuseurs

Les résultats de diffusion multiple concernent habituellement des distributions uniformes de diffuseurs. Notons néanmoins des travaux récents sur des cylindres immergées dont la concentration varie dans une couche (Conoir *et al.* 2009). Ils utilisent l'approximation WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin), qui est valide à haute fréquence et pour un pas de discrétisation du profil de concentration très fin (Brekhovskikh & Godin 1992). Dans cette section, nous évaluons la propagation des ondes cohérentes TH dans une distribution non-uniforme de fissures plates ou ouvertes parallèles au front d'onde incident. La variation spatiale de la distribution est prise en considération par l'intermédiaire de la méthode du milieu effectif. Cette méthode consiste à remplacer un milieu hétérogène (Aristégui & Angel 2007b, Caleap *et al.* 2007b) par un empilement de couches homogènes équivalentes (Aristégui *et al.* 2008, Aristégui *et al.* 2009a). La propagation dans chaque couche est régie par l'impédance acoustique effective et le nombre d'onde effectif, qui sont établis dans les sections précédentes. Sauf mention contraire, les fissures sont représentées par des diffuseurs linéiques. Sur cette base,

les coefficients de réflexion et de transmission dus aux diffuseurs distribués non-uniformément sont calculés à l'aide de la méthode de la matrice de transfert (Nayfeh 1995). L'effet des profils de distribution est également étudié.

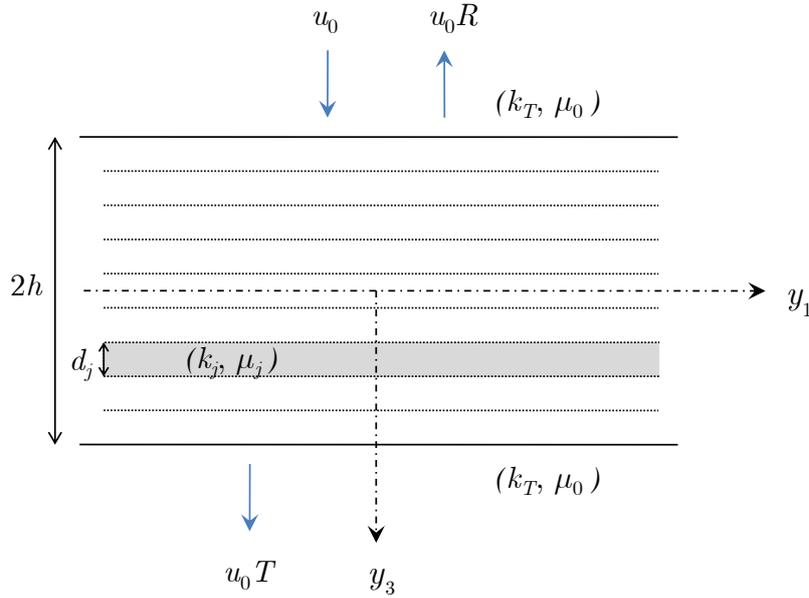


Figure IV.21 : Représentation schématique d'un milieu multicouche ($2h = \sum_j d_j$).

IV.4.1 Méthode de la matrice de transfert

Considérons un milieu multicouche d'épaisseur $2h$, inclus dans la matrice définie au Chapitre III, Figure IV.21. Chacune des p couches parallèles est caractérisée par un nombre d'onde k_j , une rigidité μ_j et une épaisseur constante $d_j = 2h / p$. Nous supposons que les dimensions latérales des couches sont infinies. L'empilement de couches est soumis à une onde plane TH incidente de vecteur d'onde normal aux interfaces. Les ondes transmises sont évaluées à la sortie de la dernière couche. La matrice est considérée sous forme de substrats semi-infinis liés des deux côtés du milieu multicouche. Introduisons le vecteur d'état \mathcal{W} ,

$$\mathcal{W}(y_3) = \begin{bmatrix} u_2(y_3) \\ \sigma_{32}(y_3) \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.48})$$

constitué du déplacement antiplan u_2 et de la composante du tenseur des contraintes σ_{32} . Les vecteurs d'état aux deux interfaces ξ_j et ξ_{j+1} de la j^{e} couche sont reliés comme suit :

$$\mathcal{W}(\xi_{j+1}) = m_j(\omega, k_j, \mu_j, d_j) \mathcal{W}(\xi_j), \quad (\text{IV.49})$$

où :

$$m_j(\omega, k_j, \mu_j, d_j) = \begin{pmatrix} \cos k_j d_j & k_j^{-1} \mu_j^{-1} \sin k_j d_j \\ -k_j \mu_j \sin k_j d_j & \cos k_j d_j \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.50})$$

En invoquant la continuité du vecteur d'état (IV.48) aux interfaces entre les couches, les vecteurs d'état aux deux extrémités du milieu multicouche, $y_3 = -h$ et $y_3 = h$, sont reliés comme suit :

$$\mathcal{W}(h) = \mathcal{M}(\omega)\mathcal{W}(-h), \quad (\text{IV.51})$$

où :

$$\mathcal{M}(\omega) = \prod_{j=p}^1 m_j(\omega, k_j, \mu_j, d_j) \equiv \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.52})$$

est la *matrice de transfert* à travers les p couches.

Nous considérons maintenant les systèmes d'ondes en dehors du milieu multicouche. L'onde incidente d'amplitude u_0 et nombre d'onde k_T , est réfléchiée et transmise par l'empilement de p couches (amplitudes respectives $u_0 R$ et $u_0 T$). Les vecteurs d'état $\mathcal{W}(-h)$ et $\mathcal{W}(h)$ s'écrivent :

$$\mathcal{W}(h) = u_0 \begin{bmatrix} T e^{ik_T h} \\ ik_T \mu_0 T e^{ik_T h} \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{W}(-h) = u_0 \begin{bmatrix} e^{-ik_T h} + R e^{ik_T h} \\ ik_T \mu_0 (e^{-ik_T h} - R e^{ik_T h}) \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.53})$$

Ainsi, les amplitudes inconnues R et T sont évaluées à partir du système de deux équations établi en combinant les Éqs. (IV.51) et (IV.53). Nous trouvons que :

$$R = \frac{k_T^2 \mu_0^2 m_2 + ik_T \mu_0 (m_4 - m_1) + m_3}{k_T^2 \mu_0^2 m_2 + ik_T \mu_0 (m_4 + m_1) - m_3} e^{-2ik_T h}, \quad (\text{IV.54})$$

$$T = \frac{2ik_T \mu_0 (m_1 m_4 - m_2 m_3)}{k_T^2 \mu_0^2 m_2 + ik_T \mu_0 (m_4 + m_1) - m_3} e^{-2ik_T h}. \quad (\text{IV.55})$$

La méthode de la matrice de transfert décrite ci-dessus est maintenant appliquée aux couches endommagées soumises à la diffusion multiple entre fissures. Les lèvres des fissures plates ou le grand axe des cavités elliptiques sont parallèles aux interfaces entre les couches. Chaque couche multifissurée est remplacée par la couche homogène équivalente associée. Le milieu environnant est la matrice saine. Le comportement dynamique de chaque couche endommagée, contenant n_j fissures par unité de surface, est régi par le nombre d'onde effectif $K_j(n_j)$ et la rigidité effective $M_j(n_j)$, $j = 1, 2, \dots, p$, Éqs. (III.69) et (III.102). Les réponses en réflexion et transmission de l'empilement de couches endommagées sont alors évaluées à partir des Éqs. (IV.52), (IV.54) et (IV.55), dans lesquelles les paramètres k_j et μ_j sont remplacés par $K_j(n_j)$ et $M_j(n_j)$. La matrice (IV.52) devient :

$$\mathcal{M}(\omega, n(y_3)) = \prod_{j=p}^1 m_j(\omega, K_j(n_j), M_j(n_j), d_j), \quad (\text{IV.56})$$

où $n(y_3)$ signifie la fonction spatiale de densité de fissures selon la profondeur du multicouche.

IV.4.2 Application à une distribution spatiale non-uniforme de fissures

La densité non-uniforme $n(y_3)$ de fissures parallèles identiques de taille $2a$ est introduite en remplaçant le milieu multifissuré par un empilement de couches homogènes équivalentes, chacune avec une densité constante n_j . Des résultats numériques sont obtenus pour la densité de fissures suivante :

$$n(y_3) = \frac{e^{-\left(\frac{y_3}{\sigma}\right)^2} - e^{-\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2}}, \text{ pour } |y_3| \leq h, \quad (\text{IV.57})$$

avec $2h = 30,3 \text{ mm}$ et $a = 1 \text{ mm}$, Figure IV.22. Observons que $n(-h) = n(h) = 0$. La valeur maximale $n(0)$ et l'écart type σ de la distribution gaussienne (IV.57) sont respectivement fixées à $30\,000 \text{ fissures/m}^2$ et 5 mm . La matrice est en aluminium ($c_T = 3,13 \text{ m/ms}$ et $\rho_0 = 2,7 \text{ g/cm}^3$).

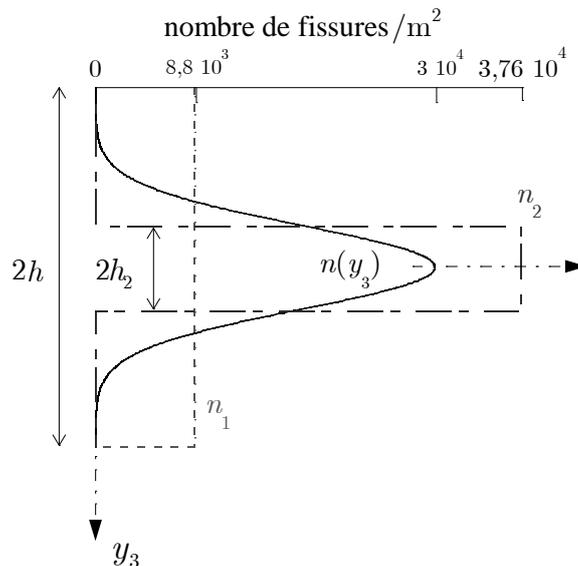


Figure IV.22 : Profils de distribution de fissures. $n(y_3)$ est donnée par l'Éq. (IV.57), tandis que $n_1(y_3)$ et $n_2(y_3)$ satisfont l'Éq. (IV.59).

IV.4.2.1 Effet de la discrétisation

La distribution non-uniforme de fissures est traitée comme un empilement de p couches d'épaisseur $d_j = d = 2h / p$. Les modules des coefficients de réflexion et de transmission sont tracés sur la Figure IV.23 en fonction de la fréquence ν et de la fréquence réduite

$\tilde{\omega} = k_T a$, pour plusieurs valeurs de p . Les échelles des abscisses et des ordonnées sont logarithmiques.

Quand le nombre de couches augmente, les valeurs de densité de fissure de la première et la dernière couche diminuent et s'approche de zéro. Par conséquent, la différence entre l'impédance acoustique de la matrice et celle de la 1^e (ou p^e) couche tend vers zéro. Alors que le calcul du coefficient de transmission est indépendant du nombre de couches, quelques artefacts apparaissent sur les courbes de $|R|$ pour des fréquences $\nu^{(q)}$ correspondants aux résonances d'une seule couche. Elles peuvent être approchées à partir de la longueur d'onde λ_T de l'onde incidente, comme suit :

$$d_j \approx q \frac{\lambda_T}{2} \Leftrightarrow \nu^{(q)} \approx q \frac{p c_T}{4h} \Leftrightarrow \tilde{\omega}^{(q)} \approx q \frac{p \pi a}{2h}, \quad (\text{IV.58})$$

où $q = 1, 2, \dots$. Quand le nombre de couches augmente, les fréquences de résonance augmentent et, en conséquence, *sortent* des figures. Dans ce qui suit, p est choisi égal à 101.

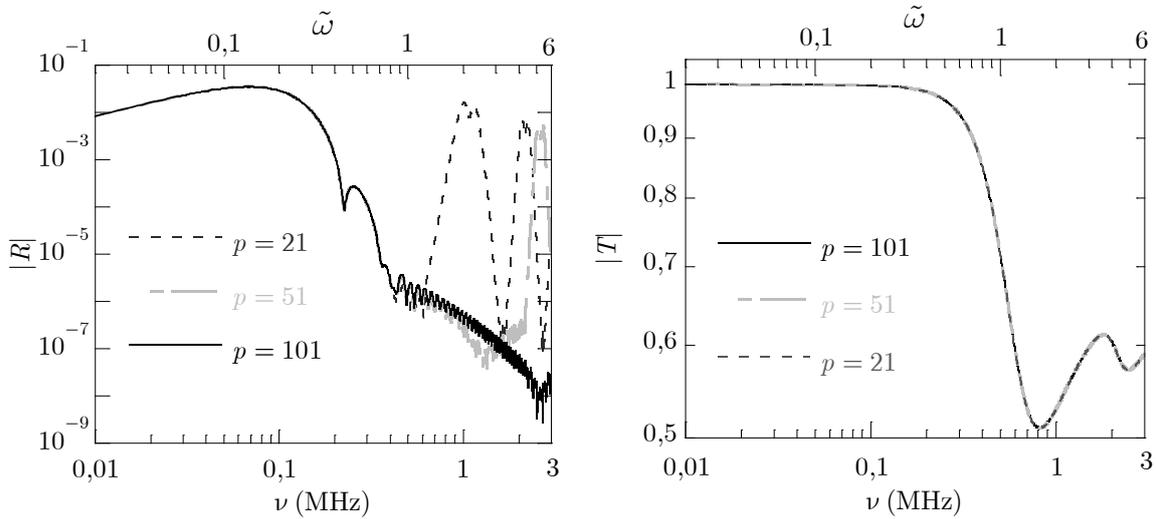


Figure IV.23 : Module des coefficients de réflexion et de transmission pour le profil gaussien de densité de fissure (IV.57). Le nombre de couches est $p = 21, 51, 101$.

IV.4.2.2 Différents profils de densité de fissure

Dans cette section, nous introduisons deux densités de fissures constantes, $n_1(y_3) = n_1$ et $n_2(y_3) = n_2$, telles que le nombre de fissures dans l'intervalle $[-h, h]$ est le même que celui du profil gaussien (IV.57), Figure IV.22. Ainsi, leurs valeurs moyennes sont toutes identiques, *i. e.* :

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h n(y_3) dy_3 = n_1 = n_2 \frac{h_2}{h}. \quad (\text{IV.59})$$

Alors que les épaisseurs des profils $n(y_3)$ et n_1 sont les mêmes ($2h = 2h_1$), celle du profil n_2 est choisie telle que $2h_2 = \sqrt{2}\sigma$. Cette valeur correspond à la distance entre les abscisses y_3 , où la variation du profil gaussien $n(y_3)$ est la plus grande.

Les coefficients de réflexion et de transmission calculés pour chacune de ces densités de fissures sont présentés sur la Figure IV.24.

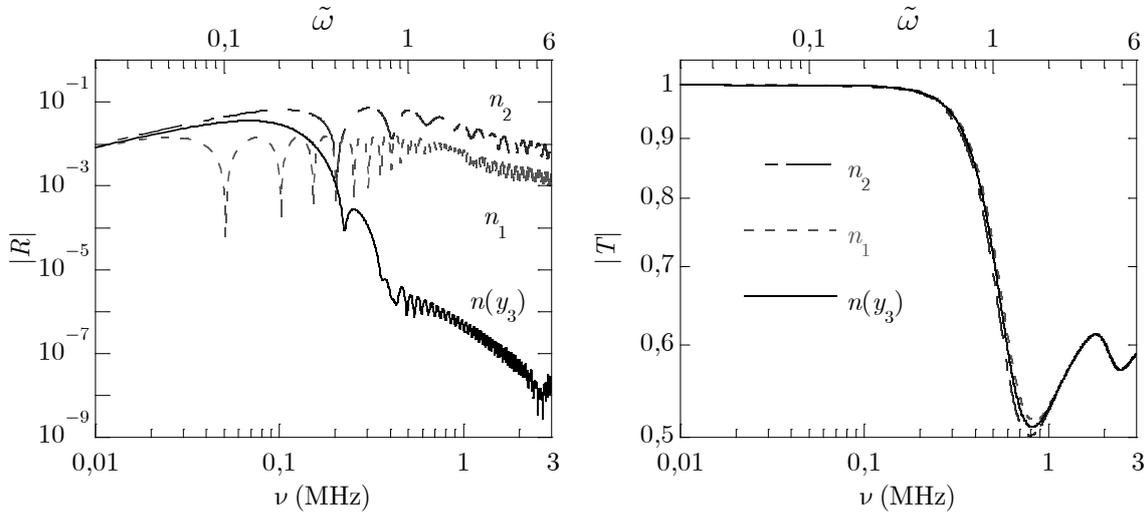


Figure IV.24 : Module des coefficients de réflexion et de transmission pour les trois profils de densité de fissure de la Figure III.5.

Les coefficients de réflexion calculés pour chacun des profils coïncident seulement à très basses fréquences, quand le positionnement des fissures n'affecte pas la réponse. À fréquence nulle, la valeur de $|R|$ vaut zéro. Lorsque la fréquence augmente, les valeurs de $|R|$ ont des variations cycliques, qui sont induites par des phénomènes d'interférence à l'intérieur de la région fissurée considérée. Comme vu dans le paragraphe précédent, les fréquences de coupe périodiques, associées aux profils constants n_1 et n_2 , correspondent aux résonances de l'onde cohérente dans les couches respectives. À ces fréquences, il y a un nombre entier de demi-longueur d'onde cohérente ($\Lambda = \frac{2\pi}{\text{Re}K}$, avec K défini par l'Éq. (III.69)) dans les couches d'épaisseurs $2h_1$ et $2h_2$. Le comportement de $|R|$ pour le profil variable $n(y_3)$ ressemble qualitativement à ceux associés aux deux profils constants n_1 et n_2 : les variations cycliques de $n(y_3)$ suivent celle de n_2 dans la gamme des basses fréquences ($\nu < 0,4$, les deux premiers cycles) et celle de n_1 dans les hautes fréquences ($\nu \geq 0,4$). Observons que le profil gaussien se comporte alors comme un filtre passe-bas. L'apparition de cette fréquence de coupe ν_c pourrait définir la valeur de la longueur d'onde effective d'une onde cohérente se propageant dans la distribution non-uniforme vue dès lors *uniforme* par cette onde « effective ».

Contrairement au coefficient de réflexion, $|T|$ est peu sensible aux profils. À fréquence nulle, la valeur de $|T|$ vaut un, et lorsque la fréquence augmente, les valeurs de $|T|$ oscillent autour d'une même limite.

D'après l'Éq. (A7.19) de l'Annexe A7 (avec $\theta_0 = 0$ et $\sigma = 0$), la limite haute fréquence de l'atténuation $\alpha(\infty)$ d'une onde cohérente se propageant dans les distributions uniformes de fissures plates de densités n_1 et n_2 vaut respectivement $\alpha_1(\infty) = 2n_1a$ et $\alpha_2(\infty) = 2n_2a$. Définissons la *densité de fissures effective* $\langle n \rangle$ de la distribution non-uniforme $n(y_3)$ appréhendée dès lors comme une distribution uniforme effective. Par analogie avec ce qui précède, nous avons :

$$\alpha(\infty) = 2\langle n \rangle a. \quad (\text{IV.60})$$

La limite haute fréquence de la transmission par une distribution uniforme de fissures plates, Éq. (IV.25)₂, montre alors que la densité effective $\langle n \rangle$ peut être évaluée à partir de cette valeur ($|T| \rightarrow \exp(-4\langle n \rangle ah)$, $\tilde{\omega} \rightarrow +\infty$). Pour les deux profils constants, nous avons naturellement $\langle n \rangle = n_1$ et $\langle n \rangle = n_2$. Observant que les coefficients $|T|$ relatifs aux trois profils tendent vers la même limite, la relation (IV.59) nous permet d'identifier pour le profil gaussien :

$$\langle n \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h n(y_3) dy_3. \quad (\text{IV.61})$$

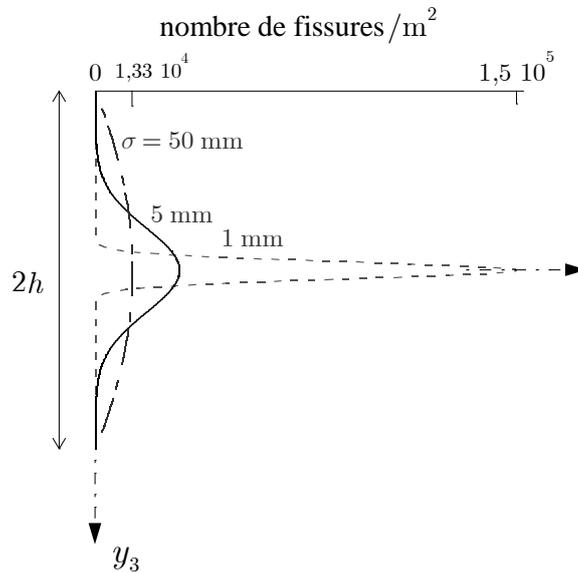


Figure IV.25 : Profils de distribution de fissures (IV.57) pour trois valeurs d'écart type σ . Le nombre de fissures de chaque profil est le même.

La sensibilité des réponses en réflexion et transmission à la forme du profil est maintenant étudiée en considérant trois distributions gaussiennes de même valeur moyenne (même nombre de fissures). Elles se différencient par des écarts types σ et des valeurs maximales

différentes, Figure IV.25. Les réponses de ces profils sont présentées sur la Figure IV.26. Les coefficients de réflexion et de transmission sont peu sensibles à la forme du profil, respectivement à basse fréquence et sur toute la gamme fréquentielle. Des prédictions complémentaires ont confirmé que ces coefficients sont avant tout sensibles au nombre de fissures interagissant avec l'onde cohérente.

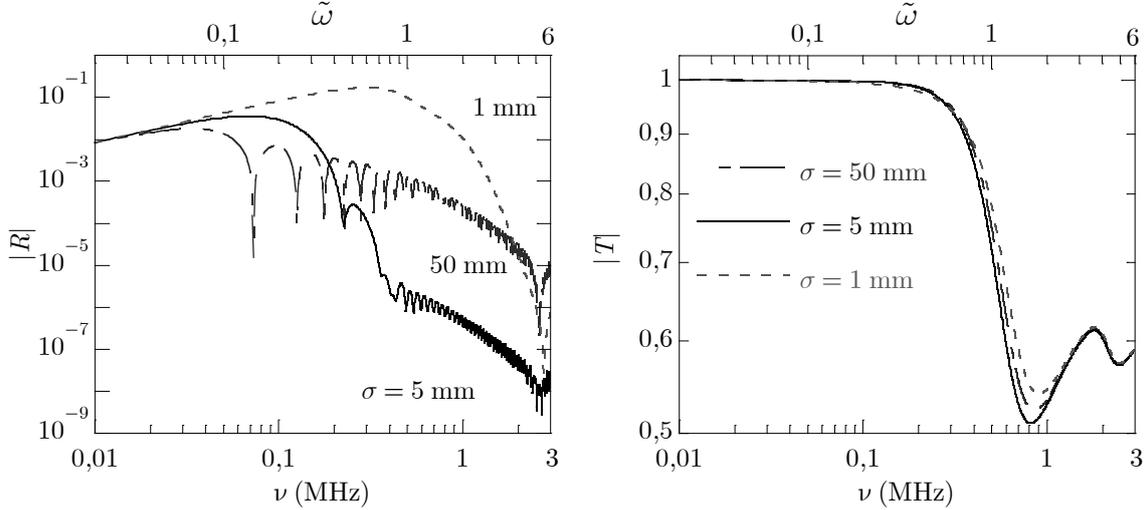


Figure IV.26 : Module des coefficients de réflexion et de transmission pour les trois profils de densité de fissure de la Figure IV.25.

IV.4.2.3 Décomposition en ondes partielles

Les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre les j^{e} et $(j+1)^{\text{e}}$ couches sont donnés par :

$$R_{j,j+1} = \frac{z_j - z_{j+1}}{z_j + z_{j+1}} \text{ et } T_{j,j+1} = \frac{2z_j}{z_j + z_{j+1}}, \quad (\text{IV.62})$$

où z_j désigne l'impédance acoustique de la j^{e} couche, Figure IV.27. Dans le cas de couches multifissurées, z_j dépend de la densité de fissure n_j et est évaluée à partir de l'Éq. (III.98). Les réponses en réflexion et transmission du milieu multifissuré peuvent être évaluées à l'aide des coefficients (IV.62) en élaborant un schéma itératif simple (voir *e. g.*, Huang (1993)). Dans ce contexte, nous nous intéressons en particulier aux ondes se propageant sur les $(j-1)^{\text{e}}$ premières couches, puis réfléchies ou transmises par la j^{e} interface (Figure IV.27) :

$$\begin{cases} r_1 = R_{0,1}, & t_1 = T_{0,1}, \\ r_j = R_{j-1,j} \prod_{q=1}^{j-1} T_{q-1,q} T_{q,q-1} e^{2iK_q(n_q)d_q}, & t_j = T_{0,1} \prod_{q=1}^{j-1} T_{q,q+1} e^{iK_q(n_q)d_q}, \quad 2 \leq j \leq p+1, \end{cases} \quad (\text{IV.63})$$

avec $R_{p,p+1} = R_{p,0}$ et $T_{p,p+1} = T_{p,0}$. L'indice 0 est affecté aux propriétés de la matrice.

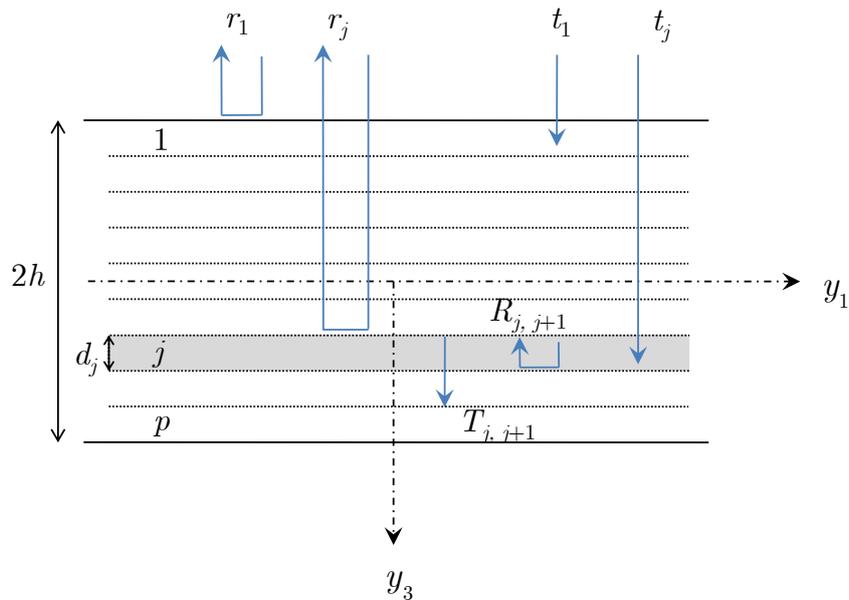


Figure IV.27 : Décomposition en ondes partielles. Échanges entre les j^e et $(j+1)^e$ couches : $R_{j,j+1}, T_{j,j+1}$. Réflexion spéculaire par la j^e interface : r_j . Transmission directe à travers j interfaces : t_j .

La Figure IV.28 présente une comparaison entre le coefficient de réflexion R du milieu multicouche et la somme des réflexions spéculaires (IV.63) par les $p+1$ interfaces. La bonne concordance entre ces prédictions s'explique par l'absence de réverbération à l'intérieur de chaque couche, directement liée au grand nombre de couches induisant un faible contraste entre deux couches successives. Cet effet justifie également le bon accord entre le coefficient $|T|$ et la quantité :

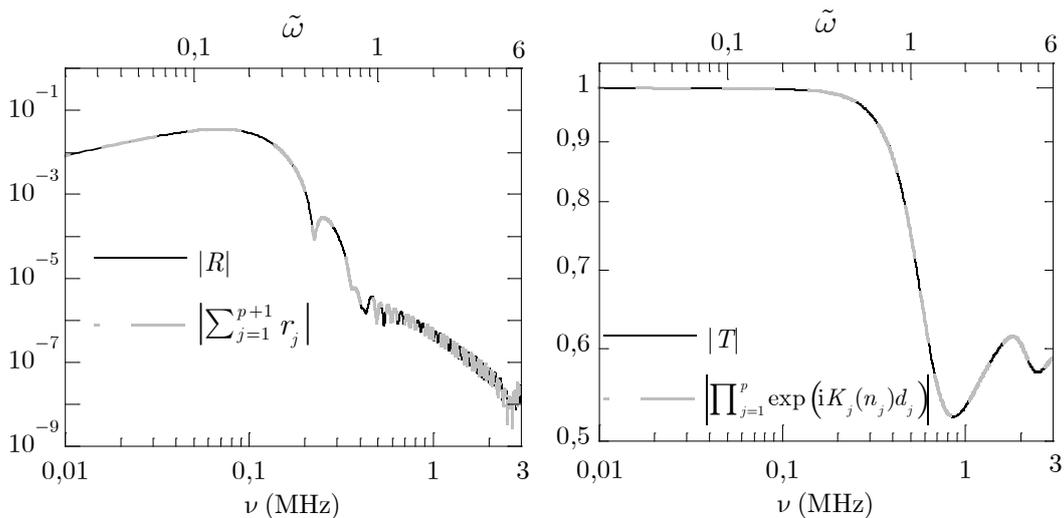


Figure IV.28 : Module des coefficients de réflexion et de transmission pour le profil de densité de fissure (IV.57). Approximation obtenue en négligeant les réverbérations à l'intérieur de chaque couche.

$$\left| \prod_{j=1}^p e^{iK_j(n_j)d_j} \right|, \quad (\text{IV.64})$$

traduisant la propagation à travers chaque couche sans considérer les interfaces, Figure IV.28.

IV.4.2.4 Fissures plates de taille réelle

Dans cette section, la taille réelle des fissures plates est directement prise en compte dans la modélisation des phénomènes de diffusion multiple *via* l'approche d'Angel & Koba (1997) (voir la section IV.2). Les densités non-uniformes de fissures sont traitées par la méthode de la matrice de transfert comme ci-dessus. Cependant, le comportement dynamique de chaque couche endommagée, contenant n_j fissures par unité de surface est maintenant gouverné par le nombre d'onde effectif $K(n_j)$ et le module de rigidité effectif $M(n_j)$ donnés par les Éqs. (IV.30) et (IV.32). Finalement, les coefficients de réflexion et de transmission sont confrontés sur la Figure IV.29 à ceux calculés en considérant des diffuseurs linéiques, Éqs. (III.69) et (III.102). Le profil de densité de fissures est choisi gaussien, Éq. (IV.57), avec $n(0) = 50\,000$ fissures /m² et $\sigma = 5$ mm.

Les courbes des deux modèles ont les mêmes allures, aussi bien en réflexion qu'en transmission. Des prédictions complémentaires ont montré que les écarts diminuent naturellement avec la valeur de $n(0)$. Les seules différences qui subsistent sont localisées dans la zone de coupure du coefficient $|R|$.

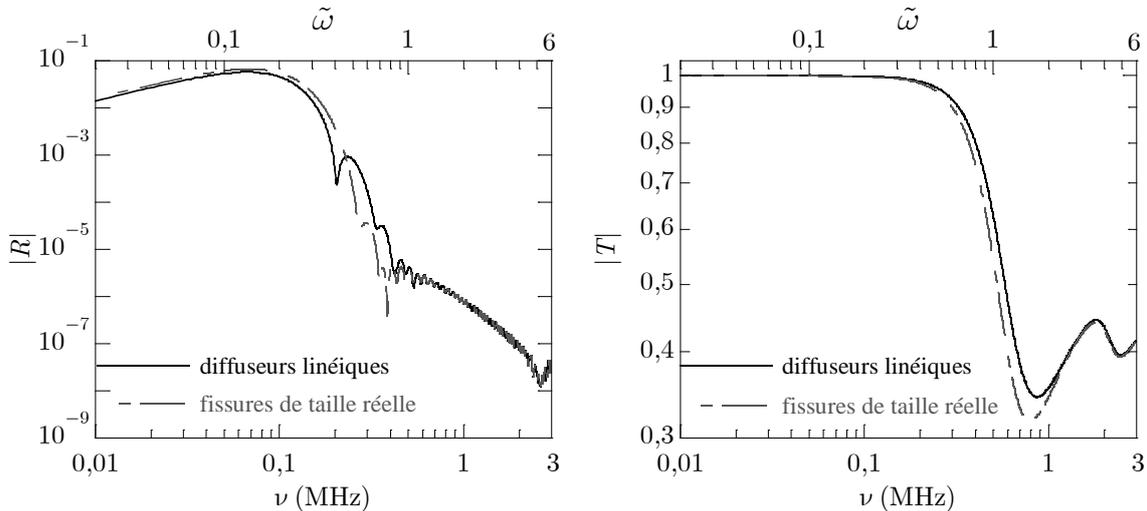


Figure IV.29 : Module des coefficients de réflexion et de transmission pour le profil de densité de fissures (IV.57). La valeur maximale de la distribution est telle que $n(0) = 50\,000$ fissures /m² et $\sigma = 5$ mm. Comparaison en considérant des diffuseurs linéiques et de taille réelle.

IV.4.2.5 Effet de l'ouverture des fissures

Nous étudions ici l'effet de l'ouverture des fissures sur les coefficients de réflexion et de transmission par une distribution non-uniforme de fissures ouvertes de demi-grand axe $a_1 = 1 \text{ mm}$ et dont l'ouverture $\tau = \frac{a_3}{a_1}$ prend les valeurs $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ et 1 . Des résultats numériques sont obtenus pour le profil gaussien de densité de fissures (IV.57), avec $n(0) = 30\,000$ fissures / m^2 et $\sigma = 5 \text{ mm}$.

La Figure IV.30 présente les modules des coefficients de réflexion et de transmission de la distribution de fissures définie précédemment, en fonction de la fréquence. Le comportement de $|R|$ et $|T|$, en fonction de l'ouverture τ , est le même que celui observé dans la section IV.1 pour une distribution uniforme de fissures ouvertes. À basse fréquence ($\tilde{\omega} \lesssim 1$), les fissures ouvertes réfléchissent plus que les fissures plates, l'effet du volume des fissures étant prépondérant. À haute fréquence ($\tilde{\omega} \gtrsim 1$), la situation est inversée : les fissures plates, parallèles au front d'onde cohérent, ont plus de capacités à réfléchir l'onde plane incidente.

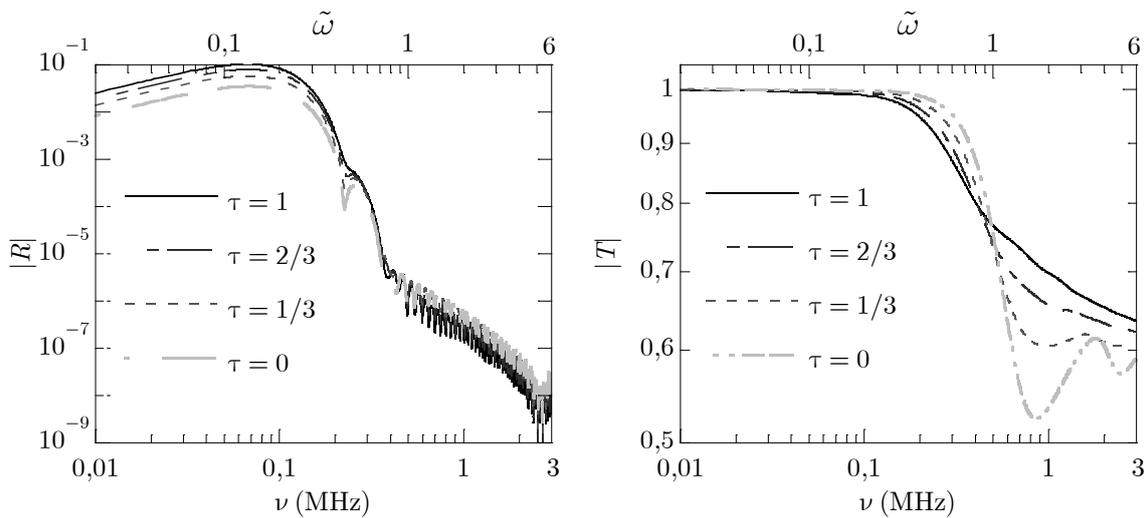


Figure IV.30 : Module des coefficients de réflexion et de transmission pour le profil de densité de fissure (IV.57) et pour plusieurs valeurs d'ouverture τ . La valeur maximale de la distribution (IV.57) est telle que $n(0) = 30\,000$ fissures / m^2 et $\sigma = 5 \text{ mm}$.

IV.5 Ondes de Love dans une distribution superficielle de cavités

Dans cette section, nous évaluons les propriétés des ondes cohérentes TH se propageant dans un demi-espace contenant des cavités cylindriques (à section circulaire) localisées près de la surface libre (Poncelet *et al.* 2008, Aristégui *et al.* 2009b), Figure IV.31. La présence de cavités réduit la célérité de phase effective et crée ainsi un guide d'ondes de surface. L'effet de la dispersion intrinsèque due à la diffusion multiple se superpose à celui associé au piégeage d'ondes en surface. L'analogie évidente avec les ondes de Love suggère d'utiliser l'approche

d'homogénéisation dynamique développée dans le Chapitre III : le milieu contenant les cavités est considéré comme un milieu homogène équivalent, dont les paramètres effectifs à valeurs complexes ne dépendent pas de l'espace mais de la fréquence. En se basant sur cette approche, nous calculons les spectres de dispersion (célérité de phase) et d'atténuation des ondes cohérentes TH dans un demi-espace donné et examinons leurs propriétés spécifiques, différentes de celles apparaissant en présence d'une couche visqueuse (Kielczyński 1997) ou poreuse (Ke *et al.* 2005, 2006) surmontant un substrat. Nous établissons en particulier des estimations analytiques basse fréquence qui permettraient une évaluation directe de la concentration de diffuseurs à partir des données de dispersion.

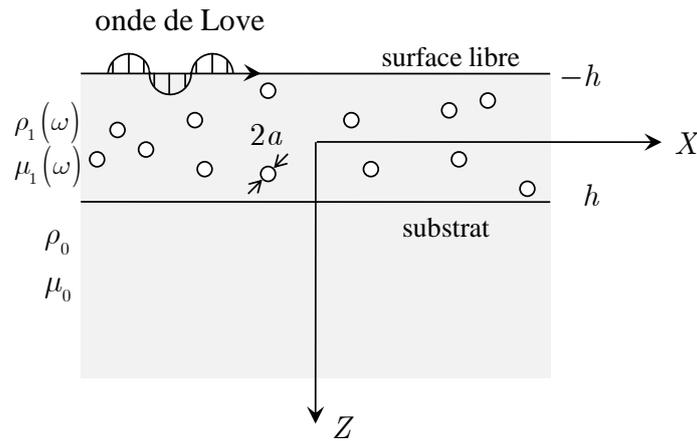


Figure IV.31 : Géométrie du problème et définition des paramètres matériels.

IV.5.1 Formulation et rappels théoriques

Supposons que des cavités cylindriques de rayon a , parallèles, sont distribuées uniformément et aléatoirement sous la surface libre d'un demi-espace élastique linéaire isotrope jusqu'à la profondeur $2h$ ($\gg a$), Figure IV.31. Par souci de clarté, les axes (y_1, y_2, y_3) sont notées dans cette section (x, y, z) . La concentration ϕ de cavité dans la couche d'épaisseur $2h$ est supposée faible. Du point de vue de la propagation des ondes cohérentes TH (dans le plan orthogonal aux axes des cavités), le milieu est vu comme une couche dissipative homogène, équivalente à la matrice contenant des cavités, surmontant un substrat constitué de la matrice seule. Observons que, dans les deux régions ainsi définies, le plan de propagation est macroscopiquement isotrope. Désignons la masse volumique et le module de rigidité de la matrice par ρ_0 et μ_0 . La masse volumique effective ρ_1 et le module de rigidité effectif μ_1 de la couche dépendent de la concentration ϕ et de la fréquence réduite :

$$\tilde{\omega} = \omega s_T a, \quad (\text{IV.65})$$

où $s_T = \sqrt{\rho_0 / \mu_0}$ est la lenteur de phase des ondes de volume TH dans la matrice. D'après les Éqs. (III.101), (III.102), (IV.8) et (IV.9), cette dépendance peut s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$\rho_1(\tilde{\omega}) = \rho_0(1 - \phi)[1 + \phi r(\tilde{\omega})], \quad \mu_1(\tilde{\omega}) = \frac{\mu_0}{1 + 2\phi}[1 + \phi m(\tilde{\omega})], \quad (\text{IV.66})$$

où $r(\tilde{\omega})$ et $m(\tilde{\omega})$ sont des fonctions à valeurs complexes qui, en $\tilde{\omega} = 0$, tendent vers zéro avec leur dérivée première. Les paramètres de la couche et du substrat (matrice) diffèrent naturellement avec la concentration de diffuseurs ϕ . En combinant les relations (IV.66), la lenteur à valeurs complexes des ondes de volume TH dans la couche $s_1(\tilde{\omega}) = \sqrt{\rho_1(\tilde{\omega}) / \mu_1(\tilde{\omega})}$ est donnée par :

$$s_1(\tilde{\omega}) = s_T \sqrt{(1 - \phi)(1 + 2\phi) \frac{1 + \phi r(\tilde{\omega})}{1 + \phi m(\tilde{\omega})}}. \quad (\text{IV.67})$$

À basse fréquence ($\tilde{\omega} \ll 1$), la célérité de phase $c_1(\tilde{\omega}) = \text{Re}[s_1^{-1}(\tilde{\omega})]$ et l'atténuation $\alpha_1(\omega) = \omega \text{Im} s_1(\tilde{\omega})$ des ondes de volume TH dans la couche sont approximées comme suit (voir Éqs. (IV.5) et (IV.6) avec $\tau = 1$) :

$$c_1(\tilde{\omega}) = c_T \frac{1}{\sqrt{(1 - \phi)(1 + 2\phi)}} \left\{ 1 + \frac{3\phi}{4(1 - \phi)(1 + 2\phi)} \tilde{\omega}^2 [\ln \tilde{\omega} + O(1)] \right\}, \quad (\text{IV.68})$$

$$\alpha_1(\omega) = \frac{3\pi\phi}{8a\sqrt{(1 - \phi)(1 + 2\phi)}} \tilde{\omega}^3 [1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})], \quad (\text{IV.69})$$

où $c_T = s_T^{-1}$. Par ailleurs, nous avons établi les comportements asymptotiques haute fréquence des propriétés mécaniques effectives de la couche :

$$\rho_1(\tilde{\omega}) = \rho_0 \left(1 + i \frac{2\phi}{\pi\tilde{\omega}} \right), \quad \mu_1(\tilde{\omega}) = \mu_0 \left(1 + i \frac{2\phi}{\pi\tilde{\omega}} \right)^{-1}, \quad (\text{IV.70})$$

et montré que la célérité de phase $c_1(\tilde{\omega})$ tend vers celle de la matrice et l'atténuation $\alpha_1(\tilde{\omega})$ vers la limite $\frac{2\phi}{\pi a}$.

IV.5.2 Spectres de dispersion et d'atténuation

Les ondes guidées sont cherchées sous la forme :

$$u_y(x, z) = U(z) e^{i\omega s_x x}, \quad (\text{IV.71})$$

où la pulsation ω est à valeurs réelles. Les indices x , y et z sont affectés aux composantes des vecteurs selon les directions associées. En tenant compte de la condition de contrainte-

libre sur la surface du haut ($z = -h$) et de la continuité à l'interface entre les deux milieux ($z = h$), nous obtenons l'équation de dispersion suivante pour s_x^2 (Aki & Richards 1980) :

$$i\sqrt{s_1^2(\omega) - s_x^2} \tan\left(2\omega h\sqrt{s_1^2(\omega) - s_x^2}\right) = \frac{\mu_0 s_{Tz}}{\mu_1(\omega)}. \quad (\text{IV.72})$$

Contrairement au cas standard des ondes de Love (Aki & Richards 1980, Rose 1999), les paramètres de la couche s_1 et μ_1 sont dispersifs et à valeurs complexes. Par conséquent, les solutions s_x de l'Éq. (IV.72) sont généralement à valeurs complexes. L'équation (IV.72) admet différentes familles de solutions liées aux deux feuillet de Riemann définis par $s_{Tz} = \sqrt{s_T^2 - s_x^2}$. Nous ne nous intéressons qu'aux courbes de dispersion et d'atténuation $s_x^{(n)}(\omega)$, $n = 0, 1, \dots$, qui décrivent des ondes décroissantes dans la profondeur du substrat. En imposant la condition d'inégalité :

$$\text{Im } s_{Tz}^{(n)} = \text{Im} \sqrt{s_T^2 - s_x^{(n)2}} \geq 0, \quad (\text{IV.73})$$

nous observons que les solutions trouvées satisfont l'inégalité $\text{Im } s_x^{(n)} \geq 0$ (pour $\text{Re } s_x^{(n)} > 0$ et les axes X, Z définis comme dans la Figure IV.31), *i. e.* qu'elles diminuent également le long de la direction de propagation à cause de l'atténuation de la couche.

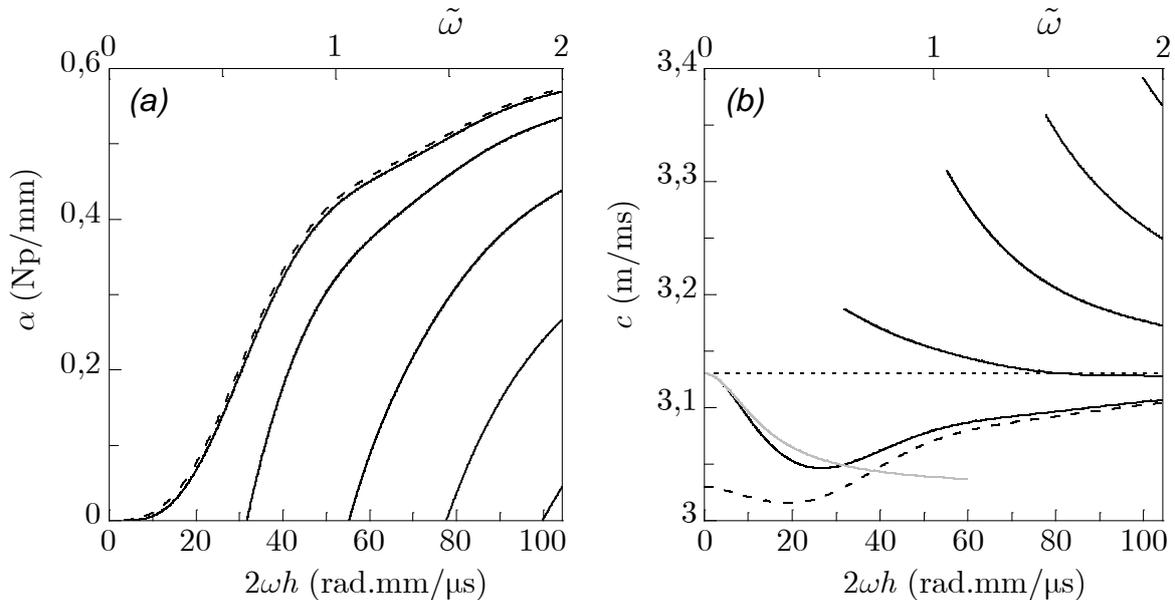


Figure IV.32 : Courbes d'atténuation (a) et de célérité de phase (b) pour les ondes cohérentes de surface, guidées par la distribution de cavités proche de la surface libre. Les branches d'atténuation $\alpha^{(n)}$ et de célérité $c^{(n)}$ sont représentées en trait continu. L'atténuation α_1 et la célérité c_1 des ondes de volume cohérentes dans la couche effective sont reportées en lignes pointillées, Éq. (IV.67). La valeur de la célérité c_T dans le substrat est illustrée par la ligne en pointillé horizontale. La courbe en gris est une approximation de la branche fondamentale, calculée à partir de l'Éq. (IV.72) dans laquelle les propriétés effectives de la couche sont fixées à leur valeur quasi-statique (IV.66).

La Figure IV.32 montre les courbes d'atténuation et de dispersion calculées pour une population de cavités de rayon $a = 0,06 \text{ mm}$ et de concentration $\phi = 8\%$, distribuée dans une couche d'épaisseur $2h = 1 \text{ mm}$ ($\rho_0 = 2,7 \text{ g/cm}^3$, $\mu_0 = 26,45 \text{ GPa}$). Les résultats sont présentés en terme d'atténuation et de célérité de phase :

$$\alpha^{(n)} = \omega \text{Im} s_x^{(n)}, \quad c^{(n)} = \text{Re} \left(1 / s_x^{(n)} \right), \quad (\text{IV.74})$$

et en fonction de $\tilde{\omega} = k_T a$ et de $2\omega h$. La Figure IV.33 présente la composante verticale k_{Tz} du vecteur d'onde dans le substrat. Sa partie imaginaire $\text{Im} k_{Tz}$ régit la décroissance d'amplitude $\exp(-\text{Im} k_{Tz} z)$ dans la profondeur du substrat.

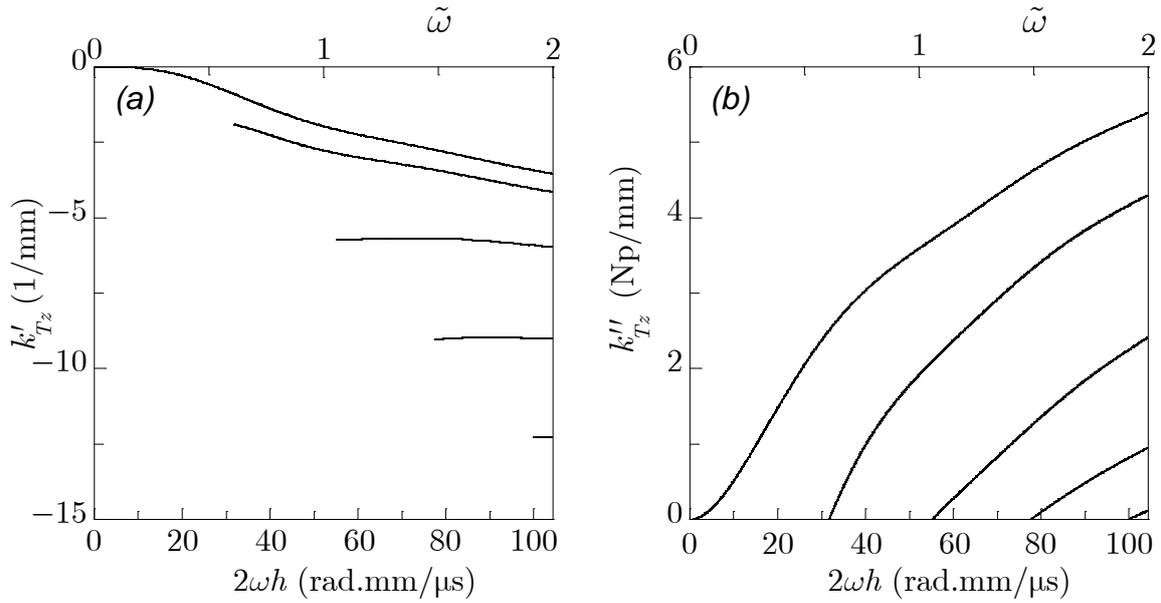


Figure IV.33 : Composante verticale k_{Tz} du vecteur d'onde dans le substrat pour les courbes d'atténuation et de dispersion de type Love présentées dans la Figure IV.32 : parties réelle (a) et imaginaire (b).

IV.5.3 Discussion

IV.5.3.1 Branche fondamentale

Notons que la dispersion liée au « guidage d'ondes » régie par la quantité $2\omega s_T h$ est $2h/a$ fois plus forte que celle due à la fréquence réduite $\tilde{\omega}$. Pour $2h/a \gg 1$ donné, la courbe fondamentale de la célérité de phase $c^{(0)}(\omega)$ peut être approximativement définie pour de petites valeurs de $\tilde{\omega}$ en remplaçant dans l'Éq. (IV.72) les paramètres effectifs $s_1^2(\omega)$ et $\mu_1(\omega)$ par leurs valeurs statiques $s_1^2(0) = s_T^2(1 - \phi)(1 + 2\phi)$ et $\mu_1(0) = \mu_0 / (1 + 2\phi)$, suivant les Éqs. (IV.66) et (IV.67) (voir la courbe grise dans la Figure IV.32). Par ailleurs, en définissant le domaine des basses fréquences par $(2\omega h s_T)^2 \ll 1$, nous obtenons l'estimation suivante :

$$c^{(0)}(\omega) \approx c_T \left[1 - 2(\omega h s_2)^2 \frac{\phi^2 (1 - 2\phi)^2}{(1 + 2\phi)^2} \right]. \quad (\text{IV.75})$$

Nous observons sur la Figure IV.32 que la branche fondamentale $c^{(0)}(\omega)$ est supérieure à la célérité de phase des ondes de volume cohérentes dans la couche $c_1(\omega)$. Ceci est habituel. Néanmoins, l'évolution particulière de $c_1(\omega)$ (minimum pour $\tilde{\omega} = e^{-1/2}$ de la fonction $\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega}$) explique le comportement non-monotone de $c^{(0)}(\omega)$. Lorsque $2h/a \gg 1$, l'atténuation $\alpha^{(0)}(\omega)$ correspondant à la branche fondamentale est proche de l'atténuation $\alpha_1(\omega)$ des ondes de volume cohérentes dans la couche, tout en restant inférieure. Pour $\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega} \ll 1$, $\alpha_1(\omega)$ est approximée à l'aide de l'Éq. (IV.69), de sorte que :

$$\alpha^{(0)}(\omega) \lesssim \alpha_1(\omega) \approx \frac{3\pi\phi\tilde{\omega}^3}{8a\sqrt{(1-\phi)(1+2\phi)}}. \quad (\text{IV.76})$$

Les approximations basse fréquence (IV.75) et (IV.76) sont tracées sur la Figure IV.34.

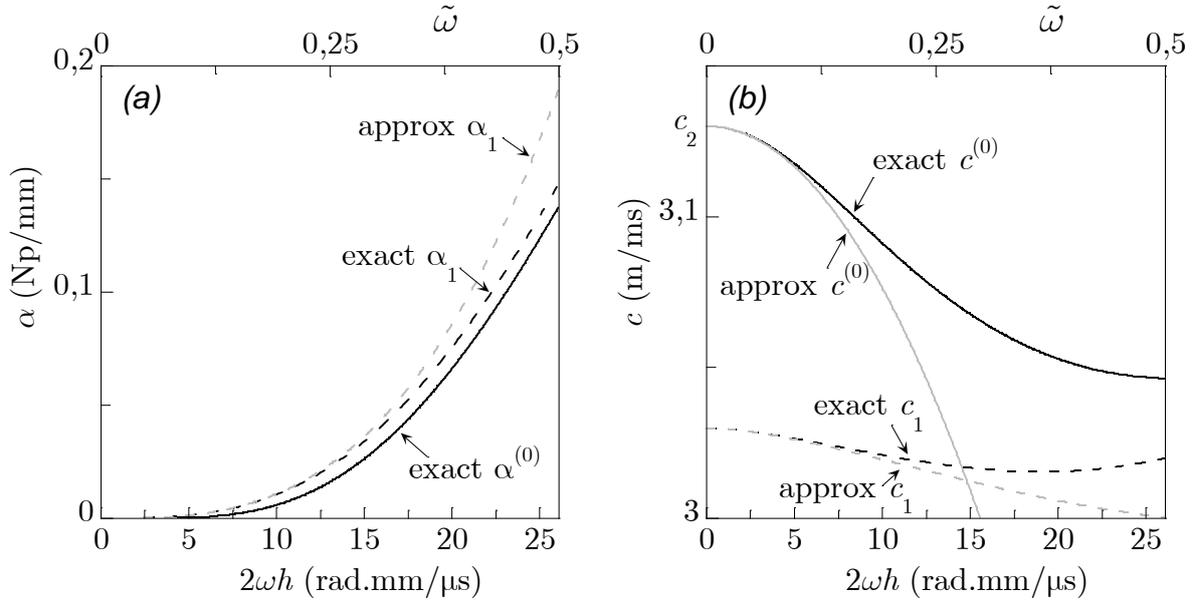


Figure IV.34 : Courbes d'atténuation (a) et de célérité (b) exactes et approchées de la branche fondamentale de la Figure IV.32 et des ondes de volume cohérentes dans la couche (α_1 et c_1).

IV.5.3.2 Branches non-fondamentales

L'atténuation induite par la présence de cavités entraîne un comportement inhabituel des points de coupure des courbes de dispersion pour $n > 0$. Désignons la fréquence et la célérité en ces points par $\omega_c^{(n)}$ et $c_c^{(n)} \equiv c^{(n)}(\omega_c^{(n)})$. En l'absence d'absorption, tous les points de coupure se trouvent sur la ligne constante c_T correspondant à la propagation dans le substrat dans

la direction $k_{Tz} = 0$ (Rose 1999). Cette caractéristique disparaît avec la présence d'atténuation dans la couche.

Les courbes de dispersion de type Love satisfont les conditions $\text{Im } s_{Tz}^{(n)} \geq 0$ et $\text{Im } s_x^{(n)} \geq 0$. Pour un substrat purement élastique (avec s_T à valeurs réelles), $\text{Im } s_x^{(n)}$ et $\text{Im } s_{Tz}^{(n)}$ tendent vers zéro simultanément. Ainsi les points de coupure $(\omega_c^{(n)}, c_c^{(n)})$ se produisent lorsque :

$$\text{Im } s_x^{(n)} = 0 \Leftrightarrow \text{Im } s_{Tz}^{(n)} = 0, \quad (\text{IV.77})$$

i. e. lorsque la partie imaginaire du vecteur lenteur de phase dans le substrat tend vers zéro. Les composantes $\text{Re } s_x^{(n)} = 1/c_c^{(n)}$ et $\text{Re } s_{Tz}^{(n)} = -\sqrt{s_T^2 - s_x^{(n)2}}$ sont positives, ce qui implique que $c_c^{(n)} > c_T$. C'est pourquoi les points de coupure (IV.77) se trouvent au-dessus de la célérité du substrat c_T . Au delà de ces points, les courbes de dispersion de la Figure IV.32 sont prolongées par des courbes de solutions non-physiques telle que $\text{Im } s_x^{(n)} < 0$ et $\text{Im } s_{Tz}^{(n)} < 0$, décrivant des ondes croissantes dans la profondeur et le long de la direction de propagation.

La Figure IV.32 montre que la célérité de coupure $c_c^{(n)}$ augmente pour les premières branches. Nous observons également que toutes les courbes d'atténuation $\alpha^{(n)}(\omega)$ avec $n > 0$, partent de zéro aux fréquences de coupure successives $\omega_c^{(n)}$ puis augmentent d'une manière similaire avec l'accroissement de $\tilde{\omega}$. Aux valeurs de la fréquence et de la célérité de coupure $\omega_c^{(n)}$ et $c_c^{(n)}$, la partie imaginaire de l'Éq. (IV.72) est nulle. Ces quantités $(\omega_c^{(n)}$ et $c_c^{(n)})$ peuvent alors être approximativement reliées aux paramètres de la couche et du substrat comme suit :

$$\omega_c^{(n)} h \sqrt{\left[\text{Re } s_1(\omega_c^{(n)})\right]^2 - \frac{1}{c_c^{(n)2}}} \approx \frac{\pi n}{2}, \quad (\text{IV.78})$$

et :

$$\frac{\pi n}{2\omega_c^{(n)} h} \tanh \left[\frac{4\omega_c^{(n)} h^2}{\pi n} \alpha_1(\omega_c^{(n)}) \text{Re } s_1(\omega_c^{(n)}) \right] \approx \frac{\mu_0}{\text{Re } \mu_1(\omega_c^{(n)})} \sqrt{s_T^2 - \frac{1}{c_c^{(n)2}}}. \quad (\text{IV.79})$$

La célérité de coupure $c_c^{(n)}$ augmente dans un premier temps (Figure IV.32), puis diminue très lentement avec l'indice n . Ainsi les coupures d'ordre élevé apparaissent à une célérité presque constante $c_c^{(n)} \approx c_c^{(\infty)}$, satisfaisant l'Éq. (IV.78) avec s_T remplaçant $s_1(\omega)$; et à un pas fréquentiel à peu près équidistant :

$$\omega_c^{(n+1)} - \omega_c^{(n)} \approx \frac{\pi}{2h \sqrt{s_T^2 - \frac{1}{c_c^{(\infty)2}}}}, \quad \frac{\omega_c^{(n+1)}}{\omega_c^{(n)}} \approx \frac{n+1}{n}. \quad (\text{IV.80})$$

L'équation (IV.79) est quasi-équivalente à l'Éq. (IV.78) pour les coupures d'ordre élevé, lorsque $\mu_1(\omega)$ approche μ_0 et la fonction tangente hyperbolique de l'Éq. (IV.79) vaut un. Dans

ce contexte de faible sensibilité de la fonction \tanh , l'inversion de l'Éq. (IV.79) en vue de la détermination de $\omega_c^{(n)}$ n'est appropriée qu'à basse fréquence.

IV.6 Modélisation de la propagation d'ondes cohérentes par des tenseurs effectifs appropriés : faisabilité

Soit une onde cohérente TH se propageant dans un solide élastique linéaire, isotrope contenant des fissures plates, identiques (de taille $2a$), parallèles et de densité n_0 . Le comportement macroscopique de la matrice endommagée est anisotrope. Nous superposons au solide le système d'axes (y_1, y_2, y_3) tel que les lèvres des fissures sont parallèles à y_1 , les fissures étant elles-mêmes parallèles à y_2 . Les vecteurs d'onde en présence sont perpendiculaires à la direction y_2 .

Supposons que les propriétés homogènes équivalentes de ce solide (du point de vue de l'onde cohérente) soient identiques à celles de la couche contenant la même distribution de fissures plates, couche étudiée au chapitre précédent. Les résultats (III.101) et (III.102) de la section III.6 pour les valeurs extrêmes du rapport d'inactivité ($\tau_i (= \tau) = 0$ et $\tau_i (= 1/\tau) \rightarrow \infty$ avec respectivement¹⁵ $f(0,0) = -f(\pi,0)$ et $f(\pi/2, \pi/2) = f(3\pi/2, \pi/2) = 0$ où l'amplitude de diffusion $f(\theta, \theta_0)$ est donnée par l'Éq. (II.44) ou (II.46)), nous conduisent à définir les modules de rigidité effectifs à valeurs complexes $C_{44} (\equiv M(\tau_i = 0))$ et $C_{66} (\equiv M(\tau_i \rightarrow \infty))$, tels que :

$$C_{44} = \mu_0 \left(1 + n_0 \frac{4\pi}{k_T^2} f(0) \right)^{-1}, \quad (\text{IV.81})$$

$$C_{66} = \mu_0, \quad (\text{IV.82})$$

où $f(0) \equiv f(0,0)$ et $k_T = \omega/c_T$, c_T représentant la célérité de phase des ondes transverses dans la matrice. Par ailleurs, la relation (III.101) montre que la masse volumique effective ρ associée aux propagations cohérentes selon les directions y_1 et y_3 est constante et égale à la masse volumique de la matrice ρ_0 . Nous en déduisons alors que, $\forall \vec{n} \in (y_3, y_1)$, $\rho(\vec{n}) = \rho_0$; la nature même des fissures plates ne modifiant pas l'inertie dynamique apparente du milieu homogène équivalent.

Observons que dans le cas où les fissures ne seraient plus représentées par des diffuseurs linéiques, mais par des fissures de taille réelle (Angel & Koba 1997), seule l'expression du module de rigidité effectif C_{44} change. La relation (IV.32) conduit à :

¹⁵ ou encore sous forme contractée $f(0) = -f(\pi)$ pour $\tau_i = 0$ et $f(0) = f(\pi) = 0$ pour $\tau_i \rightarrow \infty$.

$$C_{44} = \mu_0 \left(1 - n_0 \frac{4\pi}{k_T^2} f(0) \right). \quad (\text{IV.83})$$

Dans la suite, nous vérifions si les propriétés effectives tensorielles de la matrice multifissurée ainsi définies, sont appropriées à la description de la propagation dans ladite matrice de l'onde cohérente de vecteur d'onde $\vec{K} = \omega \vec{S}$, \vec{S} désignant le vecteur *lentueur de phase effectif*. La matrice endommagée étant macroscopiquement homogène, les composantes de \vec{S} ($= S_1 \vec{y}_1 + S_3 \vec{y}_3$) satisfont l'équation de dispersion suivante :

$$C_{66} S_1^2 + C_{44} S_3^2 - \rho_0 = 0. \quad (\text{IV.84})$$

Observons que les quantités $S_1 = S_1' + iS_1''$ et $S_3 = S_3' + iS_3''$ sont susceptibles d'être à valeurs complexes.

IV.6.1 Onde cohérente homogène

Soit une onde plane cohérente homogène TH de nombre d'onde $\vec{K} = K \hat{n}$, le vecteur unitaire \hat{n} appartenant au plan (y_3, y_1) et faisant un angle θ avec la direction y_3 . L'équation de dispersion (IV.84) autorise l'évaluation de la lentueur de phase S dans la direction \hat{n} ($\vec{S} = S \hat{n} = (S' + iS'') \hat{n}$):

$$S = \sqrt{\frac{\rho_0}{C_{66} \sin^2 \theta + C_{44} \cos^2 \theta}}. \quad (\text{IV.85})$$

Selon les cas envisagés, le module effectif C_{44} est donné par la relation (IV.81) ou (IV.83).

Une alternative à l'approche présentée, consiste à évaluer l'atténuation de l'onde cohérente $\alpha (= \omega S'')$ à partir de la section efficace de diffusion σ_d d'une seule fissure. Cette méthode, considérant les diffuseurs indépendants les uns des autres et par suite adaptée aux faibles concentrations de diffuseurs, conduit à (Annexe A7) :

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} n_0 \sigma_d = \frac{2\pi n_0}{k_T} \text{Im} f(\theta, \theta), \quad (\text{IV.86})$$

où la fonction angulaire f est donnée Éq. (II.52). La célérité de phase effective $c (= 1/S')$ est alors calculée à partir de l'atténuation effective α à l'aide des relations de Kramers-Kronig (Angel & Achenbach 1991) :

$$c(\omega) = c(\infty) \left(1 + \frac{2c(\infty)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \right)^{-1}, \quad (\text{IV.87})$$

où $c(\infty)$ est la valeur de la célérité effective dans la limite géométrique ($c(\infty) = c_T$). Une procédure pour calculer numériquement l'expression (IV.87) peut être trouvée dans Angel & Achenbach (1991).

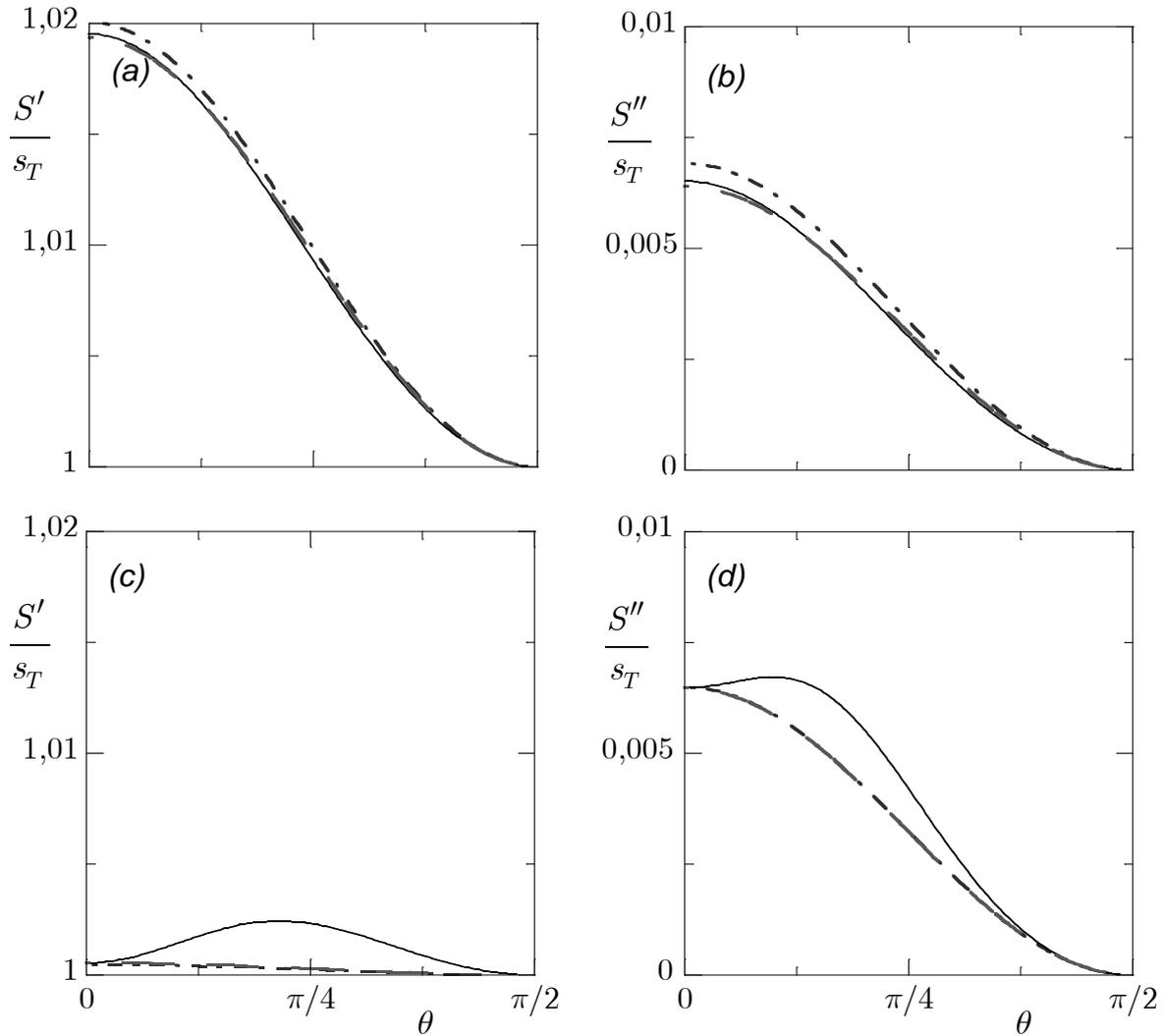


Figure IV.35 : Parties réelle et imaginaire des lenteurs de phase $\vec{S} = (S' + iS'')\hat{n}$ de l'onde cohérente homogène se propageant dans une distribution de fissures plates parallèles ($\varepsilon = 0,01$), selon une direction faisant un angle θ avec la normale aux fissures. Comparaison des résultats obtenus par la formulation (IV.85) (—), les diffuseurs étant linéiques ou de taille réelle (---), Éq. (IV.81) ou (IV.83), et par le système d'équations (IV.86) et (IV.87) (- —). a) et b) : $\tilde{\omega} = 0,8$; c) et d) : $\tilde{\omega} = 3$.

Les parties réelle et imaginaire des lenteurs de phase sont maintenant évaluées en fonction de l'angle de propagation θ à partir de l'approche énergétique, Éqs. (IV.86) et (IV.87), et de la description « milieu homogène équivalent », Éq. (IV.85), les diffuseurs étant linéiques ou de taille réelle, Éq. (IV.81) ou (IV.83). Négligeant les interactions entre diffuseurs, nous considérons une faible densité de fissures $\varepsilon (= n_0 a^2) = 0,01$. Les résultats sont représentés sur la Figure IV.35 pour différentes valeurs de fréquences réduites ($\tilde{\omega} = 0,8, 3$). Les prédictions obtenues selon la direction y_3 ($\theta = 0$) correspondent à celles reportées sur la Figure IV.5, aux fréquences d'intérêt. Lorsque la propagation coïncide avec la direction y_1 ($\theta = \pi/2$), les fissures sont parallèles au front d'onde et n'interagissent donc pas : quelle que soit la formulation, nous avons alors $S = s_T$, avec $s_T = 1/c_T$. Cette bonne concordance entre les prédic-

tions reste acceptable pour la seule partie réelle S' de la lenteur S , quel que soit l'angle de propagation θ et pour $\tilde{\omega} = 0,8$ et 3 . L'équation (IV.85) permet d'estimer les prédictions issues des Éqs. (IV.86) et (IV.87), $S = \frac{1}{c} + i \frac{\alpha}{\omega}$, avec des erreurs inférieures à 1% pour S' et 25% pour S'' .

Ces résultats sont conformes à ceux obtenus par Eriksson *et al.* (1995) qui, dans le cas d'ondes cohérentes homogènes TH en présence de distributions de fissures sous forme de disque (« penny-shaped »), ont montré que la description « milieu homogène équivalent » était valable jusqu'à $\tilde{\omega} = 10$. La méthodologie suivie est néanmoins à prendre avec réserve : la formulation de référence utilisée pour décrire la propagation selon une direction définie par un angle d'inclinaison θ ne considère plus les Éqs. (IV.86) et (IV.87), mais le nombre d'onde établi par Foldy, qui n'est adapté qu'aux diffuseurs linéiques diffusant de manière isotrope (Foldy 1945, Aristégui & Angel 2002). Soulignons que l'analyse menée ne concernant que des fissures d'épaisseur négligeable, la notion de masse volumique effective n'a pas été abordée dans ces travaux.

IV.6.2 Onde cohérente hétérogène

La matrice endommagée occupe la couche présentée sur la Figure IV.1, qui est maintenant sollicitée sous incidence par une onde plane TH (angle d'incidence θ_0). La taille réelle des fissures est directement prise en compte dans la modélisation. Soit $\vec{s} = s_T \cos \theta_0 \vec{y}_3 + s_T \sin \theta_0 \vec{y}_1$ le vecteur lenteur de phase incident. La conservation des composantes selon l'interface des vecteurs lenteurs en présence (lois de Snell-Descartes) et l'équation de dispersion (IV.84) autorisent l'évaluation des composantes du vecteur lenteur effectif \vec{S} de la couche :

$$S_1 = s_T \sin \theta_0 \text{ et } S_3 = \sqrt{\frac{\rho_0 - C_{66} (s_T \sin \theta_0)^2}{C_{44}}}, \quad (\text{IV.88})$$

où le module effectif C_{44} est donné par la relation (IV.83). La validité des expressions (IV.88) est maintenant étudiée à partir de résultats disponibles dans la littérature.

Le cas étudié dans cette section a été traité dans le contexte de la diffusion multiple par Angel & Bolshakov (1997) qui ont étendu des travaux antérieurs (Angel & Koba 1997) au cas de l'incidence oblique. Ils établissent en particulier une expression du nombre d'onde effectif dans la couche, que nous avons réécrit sous une forme plus conventionnelle en faisant intervenir la fonction de diffusion en champ lointain d'une seule fissure, Éq. (II.44). Nous trouvons que :

$$\vec{K} = \xi \vec{y}_3 + k_T \sin \theta_0 \vec{y}_1, \quad (\text{IV.89})$$

avec :

$$\xi^2 = \frac{k_T^2 \cos^2 \theta_0}{1 - \frac{4\pi n_0}{k_T^2 \cos^2 \theta_0} f(\theta_0, \theta_0)}. \quad (\text{IV.90})$$

Observons que dans le cas de l'incidence normale ($\theta_0 = 0$), le vecteur d'onde effectif (IV.89) se réduit bien à l'expression (IV.30). D'après les Éqs. (IV.89) et (IV.90), la composante selon la normale à l'interface du vecteur lenteur effectif s'écrit sous la forme :

$$S_3 = \omega s_T^2 \cos^2 \theta_0 \sqrt{\frac{1}{\omega^2 s_T^2 \cos^2 \theta_0 - 4\pi n_0 f(\theta_0, \theta_0)}}. \quad (\text{IV.91})$$

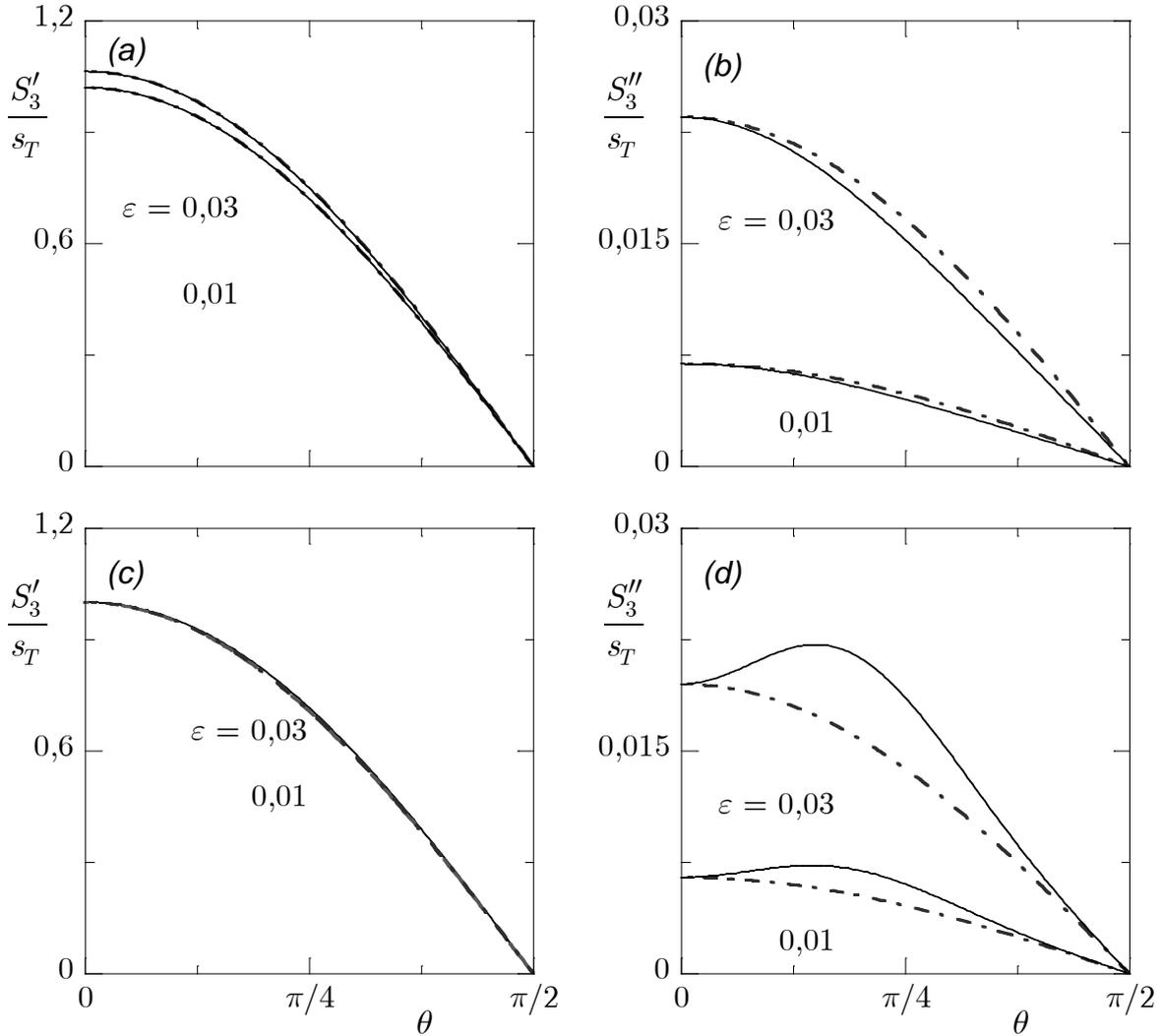


Figure IV.36 : Parties réelle et imaginaire de la composante $S_3 = S_3' + iS_3''$ de la lenteur de phase de l'onde cohérente se propageant dans une couche de fissures plates de densité $\varepsilon = 0,01, 0,03$. L'angle d'incidence θ_0 varie. Comparaison des résultats obtenus par les formulation (IV.88) (----) et (IV.91) (—). a) et b) $\tilde{\omega} = 0,8$; c) et d) $\tilde{\omega} = 3$.

La comparaison des valeurs de la composante S_3 calculées en fonction de l'angle d'incidence θ_0 à l'aide des expressions (IV.88) et (IV.91) pour différentes valeurs de fréquences réduites $\tilde{\omega} = 0,8, 3$, Figure IV.36, constitue un élément de discussion sur la pertinence de modéliser

la propagation d'une onde cohérente hétérogène à partir de modules de rigidité effectifs. Les deux formulations ne sont plus limitées aux faibles densités de fissures ($\varepsilon = 0,01, 0,03$) et coïncident exactement pour les incidences normale ($\theta_0 = 0$) et rasante ($\theta_0 = \pi/2$). L'approximation de la partie réelle de la composante S_3 , Éq. (IV.91), par l'Éq. (IV.88) est très satisfaisante pour $\tilde{\omega} = 0,8$ et 3 , alors que nous observons une dégradation de l'estimation de la partie imaginaire S_3'' lorsque $\theta_0 \neq 0, \pi/2$. L'erreur commise augmente avec la densité ε et avec la fréquence $\tilde{\omega}$. Lorsque $\varepsilon = 0,03$, elle est inférieure à 15% et 30%, pour respectivement $\tilde{\omega} = 0,8$ et 3 .

Enfin, à partir de l'analyse des résultats obtenus par Angel & Bolshakov (1997), nous avons établi que, pour décrire exactement la propagation de l'onde hétérogène par l'équation de dispersion (IV.84), le module de rigidité C_{44} devait également dépendre de l'angle d'incidence θ_0 :

$$C_{44} = \mu_0 \left(1 - \frac{4\pi n_0}{k_T^2 \cos \theta_0} f(\theta_0, \theta_0) \right), \quad (\text{IV.92})$$

et par suite du vecteur d'onde cohérent \vec{K} . Soulignons que les expressions (IV.83) et (IV.92) coïncident naturellement lorsque $\theta_0 = 0$.

IV.7 Conclusion

Nous avons illustré dans ce chapitre les potentialités de la modélisation établie au Chapitre III, à travers différentes applications.

La faisabilité du modèle de diffusion multiple développé au Chapitre III a permis de traiter le cas de distribution uniforme et aléatoire de fissures ouvertes ou fermées, ainsi que de proposer un moyen de considérer les diffuseurs orientés aléatoirement. Les prédictions obtenues pour le nombre d'onde effectif K sont semblables à celles issues de la formulation de Linton & Martin (2005), réputée de l'avis même des auteurs « exacte ». Par ailleurs, la confrontation avec une description traitant les fissures comme des diffuseurs de taille réelle montre que la représentation sous forme de diffuseur linéique anisotrope est acceptable.

Des problèmes courants impliquant des milieux hétérogènes (multicouche, onde de Love, anisotropie, réfraction à une interface) ont été revisités en y intégrant les propriétés mécaniques effectives restituant le comportement des milieux multifissurés. Ainsi, l'empilement de couches endommagées à densité de fissure différente, nous a permis de représenter une densité non-uniforme de fissures parallèles. À l'aide de la méthode de la matrice de transfert, nous avons par exemple montré que les valeurs haute fréquence du coefficient de transmission permettent d'accéder à la valeur moyenne de la densité de fissure de la couche non-uniforme,

Éq. (IV.61). Parallèlement, l'étude des propriétés des ondes cohérentes TH de surface en présence d'une couche endommagée (par des cavités cylindriques) surmontant un substrat sain, a montré les effets liés aux mécanismes de diffusion multiple. Par exemple, contrairement aux propriétés des ondes de Love, les courbes de dispersion de célérité de phase ne sont plus confinées entre les célérités de phase de la couche et du substrat, Figure IV.32b. Finalement, un milieu homogène équivalent à symétrie orthotrope, constitué de fissures plates parallèles est considéré. Les modules de rigidité régissant la propagation des ondes cohérentes TH sont identifiés pour des fissures parallèles et perpendiculaires au front d'onde de l'onde cohérente. Nous étudions alors la faculté de l'équation de dispersion des ondes planes cohérentes TH, Éq. (IV.84), à prédire la propagation desdites ondes dans un espace libre ($\forall \vec{K}$) ou semi-infini (présence d'une interface). Cette équation semble appropriée à la modélisation de la propagation des ondes cohérentes TH homogène et hétérogène (bonne approximation de la partie réelle du vecteur d'onde \vec{K}).

CHAPITRE V

Analyse de la diffusion multiple par une distribution uniforme et aléatoire de fissures visqueuses de taille réelle : application à la géophysique

RÉSUMÉ – Dans ce chapitre, nous étudions l'effet d'une distribution homogène de fissures visqueuses sur l'atténuation et la dispersion des ondes sismiques. Les fissures sont soit alignées, soit aléatoirement orientées. Leur taille obéit à une distribution de type loi de puissance déduite d'observations sismologiques. Les lèvres des fissures sont supposées soit être libres de contraintes, soit subir un frottement visqueux. Des calculs numériques pour l'atténuation et la dispersion montrent que la variation de la taille de fissures affecte de manière différente l'onde cohérente. La diffusion par la distribution de fissures s'avère diminuer au fur et à mesure que la viscosité augmente.

V. Analyse de la diffusion multiple par une distribution uniforme et aléatoire de fissures visqueuses de taille réelle : application à la géophysique

Les hétérogénéités présentes dans la croûte terrestre, telles que les fissures et les fractures (dans les zones de faille) dont les épaisseurs sont négligeables devant les autres dimensions (Crampin & Lovell 1991), sont susceptibles d'affecter la propagation des ondes sismiques : elles sont alors atténuées et une dispersion apparaît. L'analyse de tels phénomènes par une maîtrise de leur modélisation doit fournir des informations utiles sur la structure de la croûte et prévenir par exemple les séismes causées par la coalescence brutale de fissures existantes (Yamashita & Knopoff 1989). La surveillance des évolutions de distributions de fissures constitue un indicateur d'alerte potentiel.

La présence dans la croûte de gouges de faille (composite rocheux comportant un fluide) explique la prise en compte d'un fluide visqueux saturant l'espace libre de fissures. La viscosité ainsi introduite se justifie par la réponse viscoélastique *aux ondes sismiques*, de roches sous pression de confinement élevée. Observons que dans ces conditions extrêmes, les fissures contenant un fluide visqueux (Kawahara & Yamashita 1992, Murai *et al.* 1995) sont invisibles aux ondes, contrairement à celles dont les lèvres sont libres de contraintes. Des études numériques ont été menées pour simuler des formes d'onde temporelles en présence de fortes densités de fissures, situation rencontrée proche des épencentres de séisme (Kawahara & Yamashita 1992, Murai *et al.* 1995, Yomogida & Benites 2002, Murai 2007). Ces méthodes basées sur la résolution d'équations intégrales de frontière sont onéreuses en temps de calcul. Une alternative consiste à utiliser le formalisme d'onde moyenne développée dans Kikuchi (1981b, 1981a) et Yamashita (1990), qui conduit à modéliser le nombre d'onde effectif des ondes sismiques, ondes cohérentes car moyennées sur une population de fissures. Dans ce contexte, leurs densité est supposée faible (Kawahara & Yamashita 1992, Murai *et al.* 1995).

Dans ce chapitre, nous modélisons le nombre d'onde effectif K d'une onde cohérente TH se propageant dans une distribution uniforme et aléatoire de fissures visqueuses plates (*cf.* Chapitre II), dont les tailles satisfont des distributions de fissures propres à la croûte terrestre (Yamashita & Knopoff 1987, 1989, Yamashita 1990, Caleap & Aristégui 2008). À la différence de la modélisation du Chapitre III, chaque fissure est de taille réelle et est supposée être sollicitée par l'onde cohérente (hypothèse de fermeture de type Foldy). Nous établissons une équation transcendante satisfaite par le nombre d'onde effectif K , appropriée aux cas de fissures aléatoirement orientées ou mutuellement parallèles mais inclinées par rapport au front d'onde cohérent. La spécificité de ce chapitre réside dans le traitement simultané de la viscosité, de l'inclinaison et de la répartition de tailles de fissures. Une particularité concerne la

résolution analytique de l'équation transcendantale dans le cas de fissures parallèles au front d'onde cohérent.

V.1 Modèle de diffusion multiple dans la croûte terrestre

Considérons un grand nombre N de fissures uniformément et aléatoirement distribuées. Leur taille $2a$ suit une distribution de tailles en loi de puissance :

$$p_a(a) = Ca^{-\gamma}, \quad a_{\min} \leq a \leq a_{\max}, \quad (\text{V.1})$$

où a_{\min} et a_{\max} sont les limites inférieure et supérieure de la distribution a , l'exposant de la loi γ est une constante positive et C est une constante de proportionnalité donnée par (Yamashita & Knopoff 1987) :

$$C = \begin{cases} (1 - \gamma) / (a_{\max}^{1-\gamma} - a_{\min}^{1-\gamma}), & \gamma \neq 1, \\ \ln^{-1}(a_{\max} / a_{\min}), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

Lorsque les fissures sont toutes de même taille ($a_{\min} = a_{\max} = a$), la densité de probabilité $p_a(a)$ n'est plus définie par l'Éq. (V.1), mais satisfait la relation suivante :

$$\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} p_a(x) \varphi(x) dx = \varphi(a), \quad \forall \varphi. \quad (\text{V.3})$$

Nous supposons que la cavité de chaque fissure plate d'épaisseur moyenne δ est saturée d'un fluide newtonien de viscosité dynamique η_0 . L'épaisseur moyenne des fissures, négligeable devant leur taille, affecte néanmoins la force du frottement visqueux agissant sur les lèvres de la fissure.

Les fissures sont soit alignées soit aléatoirement orientées. Leur orientation est décrite par une densité de probabilité p_θ . Pour les fissures alignées, nous prenons $p_\theta(\theta) = \delta(\theta - \theta')$, où θ' désigne l'angle entre le front d'onde de l'onde plane incidente et le plan des fissures. En raison de l'homogénéité de la distribution angulaire des fissures, la densité de probabilité pour une orientation aléatoire de fissures devient $p_\theta(\theta) = 1 / \pi$.

V.1.1 Détermination de l'onde cohérente : champ moyen total

Nous rappelons que lorsqu'une onde plane décrite par le déplacement u_2^{inc} , éclaire une région contenant N fissures centrées en $\vec{\xi}, \vec{\zeta}, \vec{v}, \dots$, des phénomènes de diffusion multiple apparaissent, comme nous l'avons déjà expliqué dans le Chapitre III, et chaque fissure est soumise à un champ d'excitation u_2^{ex} , composé du champ incident u_2^{inc} et des champs diffusés u_2^{dif} par chacune des autres fissures. Le champ total u_2 , au point d'observation \vec{y} , résulte alors de la

superposition du champ incident et des champs diffusés par chaque fissure centrées en $\vec{\xi}$, $\vec{\zeta}$, \vec{v} , ... Il paraît d'autant plus délicat de chercher à déduire une forme explicite du champ total que les fissures sont aléatoirement distribuées. Une solution consiste à moyenner ce champ sur les différentes configurations géométriques possibles de fissures (Foldy 1945, Chapitre III). En effet, la propriété stochastique de chaque fissure est régie par la *position* du centre de la fissure, sa *taille* et son *orientation*. En outre, nous supposons que cette propriété est statistiquement indépendante de celle des autres fissures. Dans ce contexte, le champ de déplacement total de l'onde plane TH qui résiste à la moyenne sur le désordre, s'écrit (Éq. (III.31)) :

$$\langle u_2 \rangle(y_3) = u_2^{\text{inc}}(y_3) + n_0 \int \langle u_2^{\text{dif}} \rangle(\vec{y}; \vec{\xi}) p_\theta(\theta) p_a(a) d\vec{\xi} d\theta da, \quad (\text{V.4})$$

où n_0 est le nombre de fissures par unité de surface. Le terme $\langle u_2^{\text{dif}} \rangle(\vec{y}; \vec{\xi})$ est le déplacement moyen correspondant à l'onde diffusée par la fissure en $\vec{\xi}$, inclinée d'un angle θ et de taille $2a$. La moyenne sur le désordre est prise sur toutes les configurations possibles des $(N - 1)$ autres fissures.

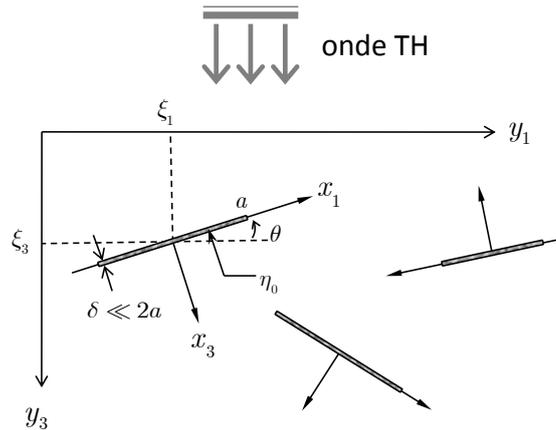


Figure V.1 : Systèmes de coordonnées global (y_3, y_1) et local (x_3, x_1) . Chaque fissure est saturée d'un fluide de viscosité dynamique η_0 .

Comme proposé dans le « formalisme d'onde moyenne » utilisé par Sato (1979), Kikuchi (1981a, 1981b), Yamashita (1990) et d'autres, nous cherchons le champ de déplacement cohérent $\langle u_2 \rangle$ sous la forme :

$$\langle u_2 \rangle(y_3) = e^{iKy_3}, \text{ sachant que } u_2^{\text{inc}}(y_3) = e^{ik_T y_3}, \quad (\text{V.5})$$

où K est le nombre d'onde effectif, $k_T = \omega / c_T$ et c_T est la célérité de phase des ondes transverses dans la matrice. Nous supposons que le front d'onde de l'onde plane cohérente TH est parallèle à l'axe y_1 , Figure V.1. Notons que nous ne nous intéressons dans ce chapitre qu'à la détermination du nombre d'onde effectif K . Dans la suite, nous représentons sous une

forme explicite le champ moyen diffusé $\langle u_2^{\text{dif}} \rangle(\vec{y}; \vec{\xi})$ pour une fissure plate soumise au champ d'excitation $\langle u_2^{\text{ex}} \rangle(\vec{y}; \vec{\xi})$.

V.1.2 Champ moyen diffusé

Nous définissons le système de coordonnées (x_3, x_1) lié au centre de la fissure, localisée en $\vec{\xi} = (\xi_3, \xi_1)$ dans le système de coordonnées (y_3, y_1) (voir Figure V.1). L'axe x_1 coïncide avec le plan de la fissure. L'angle entre les axes x_1 et y_1 est désigné par θ .

En suivant la démarche du Chapitre II, les conditions sur la lèvres supérieure de la fissure située en $\vec{\xi}$ ($x_3^+ = 0$), satisfaites par le champ moyen diffusé $\langle u_2^{\text{dif}} \rangle$ et le champ moyen d'excitation $\langle u_2^{\text{ex}} \rangle$ agissant sur ladite fissure, nous conduisent au système (voir Éq. (II.12)) :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \langle u_2^{\text{dif}} \rangle(x_3, x_1; \vec{\xi}) + 2ik_T \sigma \langle u_2^{\text{dif}} \rangle(x_3, x_1; \vec{\xi}) = -\frac{\partial}{\partial x_3} \langle u_2^{\text{ex}} \rangle(x_3, x_1; \vec{\xi}), \quad |x_1| < a, \quad x_3 = 0^+. \quad (\text{V.6})$$

$$\langle u_2^{\text{dif}} \rangle(0^+, x_1; \vec{\xi}) = 0, \quad |x_1| \geq a, \quad (\text{V.7})$$

où le paramètre σ est donné par l'Éq. (II.13). Comme le déplacement moyen diffusé est antisymétrique par rapport à la variable x_3 (voir section II.1), nous introduisons une fonction densité de dislocation b_∞ telle que :

$$\langle u_2^{\text{dif}} \rangle(0^+, x_1; \vec{\xi}) = \int_{x_1}^a b_\infty(v; \vec{\xi}) dv, \quad |x_1| < a, \quad (\text{V.8})$$

$$\int_{-a}^a b_\infty(v; \vec{\xi}) dv = 0. \quad (\text{V.9})$$

Le champ moyen diffusé est alors exprimé en tout point \vec{x} ($x_3 > 0$) en fonction de b_∞ sous la forme (voir Éq. (II.33)) :

$$\langle u_2^{\text{dif}} \rangle(\vec{x}; \vec{\xi}) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \int_0^\infty b_\infty(v, \vec{\xi}) \frac{e^{-\beta x_3}}{\zeta} \sin(\xi(v - x_1)) d\zeta dv, \quad (\text{V.10})$$

avec :

$$\beta^2 = k_T^2 - \zeta^2, \quad \text{Im} \beta \leq 0, \quad \text{Re} \beta \geq 0. \quad (\text{V.11})$$

La densité de dislocation b_∞ est inconnue, mais peut être déterminée en évoquant les conditions de continuité sur la fissure en $\vec{\xi}$, Éqs. (V.8) et (V.9). Ce système est résolu à l'aide de l'hypothèse de fermeture proposée par Foldy (1945), hypothèse largement utilisée par la suite pour tronquer le phénomène récursif de diffusion multiple (Kikuchi 1981a, Kawahara & Yamashita 1992, Angel & Koba 1997, Aguiar & Angel 2000). Ainsi, nous remplaçons la

moyenne de configurations du champ agissant sur la fissure fixée en $\vec{\xi}$ par le champ moyen total qui existerait à la position $\vec{\xi}$ si la fissure n'existait pas :

$$\langle u_2^{\text{ex}} \rangle(\vec{x}; \vec{\xi}) \simeq \langle u_2 \rangle(y_3) = \langle u_2 \rangle(\vec{x}; \xi_3) = e^{iK(x_1 \sin \theta + x_3 \cos \theta + \xi_3)}. \quad (\text{V.12})$$

Cela revient à dire que les fissures sont en grand nombre et que leur densité est faible.

En substituant les Éqs. (V.8) et (V.12) dans l'Éq. (V.6) et en suivant la méthodologie de la section II.2, nous obtenons l'équation intégrale suivante satisfaite par la densité b_∞ (voir Éq. (II.30)) :

$$\int_{-a}^a b_\infty(v; \xi_3) \left[\frac{1}{v - x_1} + S(v - x_1) + \mathfrak{S}(v - x_1) \right] dv = i\pi K \cos \theta e^{iK(x_1 \sin \theta + \xi_3)}, \quad (\text{V.13})$$

où les définitions de S et \mathfrak{S} sont données dans les Éqs. (II.29) et (II.31). En comparant les Éqs. (II.30) et (V.13), nous observons que les membres de droite, représentant la sollicitation, diffèrent. Les membres de gauche, quant à eux, décrivent la diffusion dans la matrice adjacente avec un nombre d'onde k_T . Dans le cas présent, la fissure est soumise à l'onde cohérente de nombre d'onde K (voir Éq. (V.12)). À partir de l'inconnue b_∞ , nous définissons une fonction b qui dépend seulement de la variable x_1 , de sorte que :

$$b_\infty(v; \xi_3) = b(v) e^{iK\xi_3}. \quad (\text{V.14})$$

En substituant l'Éq. (V.14) dans l'Éq. (V.10), nous obtenons :

$$\langle u_2^{\text{dif}} \rangle(\vec{x}; \xi_3) = \frac{e^{iK\xi_3}}{\pi} \int_{-a}^a \int_0^\infty b(v) \frac{e^{-\beta x_3}}{\zeta} \sin(\xi(v - x_1)) d\zeta dv, \quad (\text{V.15})$$

où b satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\int_{-a}^a b(v) \left[\frac{1}{v - x_1} + S(v - x_1) + \mathfrak{S}(v - x_1) \right] dv = i\pi K \cos \theta e^{iKx_1 \sin \theta}. \quad (\text{V.16})$$

Observons que la fonction b ainsi déterminée, dépend des nombres d'onde k_T et K .

V.1.3 Équation de dispersion satisfaite par le nombre d'onde effectif K

En appliquant l'opérateur $(\Delta_x + k_T^2)$ aux deux membres de l'Éq. (V.15), puis en combinant l'expression résultante avec les Éqs. (V.4) et (V.5), et en utilisant les égalités $d\vec{\xi} = dx_1 dx_3$ et $\xi_3 = y_3 - x_1 \sin \theta - x_3 \cos \theta$, nous établissons l'équation transcendante suivante, satisfaite par le nombre d'onde effectif K (Yamashita 1990) :

$$k_T^2 - K^2 = 2in_0 K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta p_\theta(\theta) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} p_a(a) B(\theta, a) da d\theta, \quad (\text{V.17})$$

où la fonction :

$$B(\theta, a) = \frac{i}{K \sin \theta} \int_{-a}^a b(v) e^{-iKv \sin \theta} dv, \quad (\text{V.18})$$

est définie à l'aide de b , solution de l'équation intégrale singulière (V.16) et satisfaisant la condition :

$$\int_{-a}^a b(v) dv = 0. \quad (\text{V.19})$$

La détermination du nombre d'onde effectif K à partir de l'équation transcendante (V.17) est nécessairement numérique, excepté dans la limite des haute et basse fréquences ou encore dans le cas particulier traité dans la section suivante.

V.1.4 Formulation explicite du nombre d'onde effectif K

Dans cette section, nous considérons le cas particulier de fissures parallèles au front d'onde cohérent. La densité de probabilité angulaire est telle que :

$$p_\theta(\theta) = \delta(\theta). \quad (\text{V.20})$$

L'équation transcendante (V.17) est maintenant résolue analytiquement, conduisant à l'expression analytique du nombre d'onde effectif K .

En substituant l'Éq. (V.20) dans l'Éq. (V.17), puis en utilisant les propriétés de la fonction Dirac δ et la condition (V.19), nous obtenons l'équation suivante pour le nombre d'onde effectif :

$$k_T^2 - K^2 = i n_0 K \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} p_a(a) B_0(a) da, \quad (\text{V.21})$$

où la quantité $B_0(a)$ est donnée par :

$$B_0(a) \equiv B(0, a) = \int_{-a}^a v b(v) dv. \quad (\text{V.22})$$

D'après l'Éq. (V.16), la densité de dislocation b (présente dans l'Éq. (V.22)) satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\int_{-a}^a b(v) \left[\frac{1}{v - x_1} + S(v - x_1) + \mathfrak{S}(v - x_1) \right] dv = i\pi K. \quad (\text{V.23})$$

Nous observons alors que le rapport $b(v) / K$ dépend de k_T (et non pas de K). Ainsi, nous définissons une fonction \tilde{b} qui ne dépend que de k_T , de sorte que :

$$k_T b(v) = K \tilde{b}(v). \quad (\text{V.24})$$

Avec cette nouvelle variable, l'Éq. (V.22) devient :

$$B_0(a) = \frac{K}{k_T} \int_{-a}^a v \tilde{b}(v) dv, \quad (\text{V.25})$$

et les Éqs. (V.19) et (V.23) se réduisent aux égalités :

$$\int_{-a}^a \tilde{b}(v) \left[\frac{1}{v - x_1} + S(v - x_1) + \mathfrak{S}(v - x_1) \right] dv = i\pi k_T, \quad (\text{V.26})$$

$$\int_{-a}^a \tilde{b}(v) dv = 0, \quad (\text{V.27})$$

satisfaites par l'inconnue \tilde{b} . Remarquons que l'Éq. (V.26) est identique à l'équation intégrale (II.36). Nous déduisons des résultats du Chapitre II, que la quantité $B_0(a)$ définie par l'Éq. (V.22) est liée à l'amplitude de diffusion vers l'avant $f_a(0)$ ($\equiv f_a(0,0)$) ou vers l'arrière $f_a(\pi)$ ($\equiv f_a(\pi,0) = -f_a(0,0)$) d'une seule fissure visqueuse de taille $2a$, Éq. (II.46), par la relation :

$$B_0(a) = \frac{2i\pi K}{k_T^2} f_a(0). \quad (\text{V.28})$$

Substituant cette équation dans l'Éq. (V.21), nous obtenons la formulation explicite suivante du nombre d'onde effectif :

$$K^2 = k_T^2 \left(1 - n_0 \frac{4\pi}{k_T^2} \bar{f}(0) \right)^{-1}, \quad (\text{V.29})$$

où $\bar{f}(0)$ est l'amplitude de diffusion moyenne vers l'avant, définie par :

$$\bar{f}(0) = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} p_a(a) f_a(0) da. \quad (\text{V.30})$$

Observons dans l'Éq. (V.29) que $\text{Im } K^2$ et $\text{Im } \bar{f}(0)$ ont le même signe. Nous avons vérifié que $\text{Im } f_a(0)$ est positive pour toutes les valeurs testées de k_T , a et σ (voir les résultats numériques du Chapitre II). Il s'en suit que K^2 appartient au plan complexe supérieur. En calculant à partir de l'Éq. (V.29), la racine complexe de K^2 qui se trouve dans le premier quadrant du plan complexe, nous trouvons que :

$$\text{Re } K = \frac{\vartheta k_T^2}{\sqrt{2} |k_T^2 - 4\pi n_0 \bar{f}(0)|}, \quad (\text{V.31})$$

$$\text{Im } K = \frac{4\pi n_0 \text{Im } \bar{f}(0) k_T^2}{\sqrt{2} \vartheta |k_T^2 - 4\pi n_0 \bar{f}(0)|}, \quad (\text{V.32})$$

où la quantité à valeurs réelles ϑ est définie par :

$$\vartheta = \left(\text{Re} \left(k_T^2 - 4\pi n_0 \bar{f}(0) \right) + \left| k_T^2 - 4\pi n_0 \bar{f}(0) \right| \right)^{1/2}. \quad (\text{V.33})$$

Les expressions (V.31) et (V.32) montrent que le nombre d'onde effectif dépend explicitement de l'amplitude de diffusion $f_a(0)$, via l'amplitude moyenne (V.30). Ainsi, il suffit de connaître la diffusion vers l'avant ou vers l'arrière en champ lointain, d'une onde TH par une fissure seule de taille $2a$ (puisque $f_a(0) = -f_a(\pi)$), pour pouvoir décrire le comportement moyen d'une distribution de fissures dont la taille satisfait une densité de probabilité donnée.

Notons que l'équation (V.29) est un nouveau résultat. Néanmoins, dans le cas où les fissures sont de même taille et où les lèvres sont libres de contraintes, le nombre d'onde effectif (V.29) est formellement identique à celui obtenu par Angel & Koba (1997) et Kikuchi (1981a), Éq. (IV.30). Ainsi, une approche plus intuitive aurait été de considérer le nombre d'onde (IV.30) d'Angel et Koba et d'y remplacer l'amplitude de diffusion $f(0)$ par la moyenne $\bar{f}(0)$ donnée par l'Éq. (V.30). Cette démarche nous aurait également conduit aux expressions des amplitudes des ondes cohérentes en présence d'une couche de fissures de taille différente.

V.1.5 Atténuation et dispersion des ondes sismiques

Le coefficient d'atténuation Q^{-1} et la célérité de phase c de l'onde plane cohérente TH sont définis par (Aki & Richards 1980) :

$$Q^{-1} = 2 \frac{\text{Im } K}{\text{Re } K} \quad \text{et} \quad \frac{c}{c_T} = \frac{k_T}{\text{Re } K}. \quad (\text{V.34})$$

Avec $B(\theta, a)$ donné par l'Éq. (V.18) et $\tilde{b}(v)$ solution de l'équation intégrale singulière (V.26), les racines K de l'équation transcendantale résultante (V.17) peuvent être obtenues en utilisant la méthode de Müller (1956). Cette méthode est basée sur un algorithme de recherche de zéros d'une fonction, semblable à celui de la méthode de la sécante, mais qui utilise une approximation quadratique d'une partie de la fonction au lieu d'une approximation linéaire. Ceci offre une convergence plus rapide. Une particularité de cette méthode est que le candidat issu de la recherche peut devenir à valeurs complexes ; ceci est adapté à notre problème. Pour une bonne convergence, l'algorithme de recherche est initialisé avec les approximations basse fréquence établies dans la section V.1.6. Par ailleurs, l'équation intégrale singulière (V.26) est résolue comme dans le Chapitre II, en utilisant une formule d'intégration de type Gauss-Tchebychev.

V.1.6 Limites analytiques

Les limites basse et haute fréquences de la célérité de phase c et de l'atténuation spatiale α de l'onde cohérente sont obtenues dans cette section. La validité des expressions établies est

vérifiée numériquement en superposant les prédictions associées, aux résultats présentés dans la section V.2, Figures V.2 à V.5.

Pour les fissures dont la taille obéit à la distribution (V.1), nous définissons la fréquence réduite $\tilde{\omega}_m = k_T a_{\max}$ et la densité de fissures $\varepsilon_m = n_0 a_{\max}^2$. Dans le cas d'une distribution de fissures identiques ($a_{\min} = a_{\max} = a$), nous avons $\tilde{\omega}_m = \tilde{\omega} = k_T a$ et $\varepsilon_m = \varepsilon = n_0 a^2$.

V.1.6.1 Approximation basse fréquence

Il est facile de montrer, en suivant la démarche de la section II.4.1, que quand $\tilde{\omega}$ tend vers zéro, la quantité $B(\theta, a)$ donnée par l'Éq. (V.18) est approximée par :

$$B(\theta, a) = \tilde{B} \left(1 + \sin^2 \theta O(\tilde{\omega}^2) + i \sin \theta O(\tilde{\omega}) \right), \quad \tilde{\omega} \rightarrow 0, \quad (\text{V.35})$$

où $|\tilde{K}| = |Ka| \ll 1$ et :

$$\tilde{B} \simeq \frac{4i\pi\tilde{K} \cos \theta \left(1 + O(\tilde{\omega}^2) \right)}{8 + 2\tilde{\omega}^2 \left(\ln \tilde{\omega} + O(1) \right) - i\pi\tilde{\omega}^2 \left(1 + O(\tilde{\omega}^2) \right)}, \quad \text{pour } \sigma = 0 ; \quad (\text{V.36})$$

$$\tilde{B} \simeq \frac{2i\pi\tilde{K} \cos \theta \left(1 + O(\tilde{\omega}^2) \right)}{4 + \tilde{\omega}^2 \left(\ln \tilde{\omega} + O(1) \right) + 2i\pi\sigma O(\tilde{\omega})}, \quad \text{pour } \sigma \geq 0. \quad (\text{V.37})$$

En substituant l'Éq. (V.35) dans l'équation de dispersion (V.17), nous obtenons après un réarrangement :

$$\tilde{K}^2 = \tilde{\omega}^2 \left(1 - \varepsilon \frac{4\pi}{\tilde{\omega}^2} \langle f(0) \rangle \right)^{-1}, \quad \tilde{\omega} \rightarrow 0, \quad (\text{V.38})$$

avec :

$$\langle f(0) \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_\theta(\theta) \bar{f}(\theta, \theta) d\theta \quad (\text{V.39})$$

et

$$a_{\max} \bar{f}(\theta, \theta_0) = \int_\tau^1 p_a(\varsigma) f_\varsigma(\theta, \theta_0) d\varsigma. \quad (\text{V.40})$$

Dans l'intégrale (V.40), $f_a(\theta, \theta_0)$ désigne l'amplitude de diffusion en champ lointain d'une fissure de taille $2a$, qui est donnée par les Éqs. (II.74) et (II.81) pour respectivement $\sigma = 0$ et $\sigma \geq 0$. Pour simplifier les écritures, nous avons introduit les notations :

$$\tau = \frac{a_{\min}}{a_{\max}} \quad \text{et} \quad \varsigma = \frac{a}{a_{\max}}. \quad (\text{V.41})$$

Fissures identiques de taille $2a$

Pour une configuration de fissures alignées de taille identique, nous trouvons :

cas 1 : si $\pi\varepsilon < \cos^{-2} \theta'$

$$\frac{c}{c_T} = \sqrt{1 - \pi\varepsilon \cos^2 \theta'} + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega}), \quad (\sigma \geq 0), \quad (\text{V.42})$$

$$\alpha a = \frac{\pi^2 \varepsilon \cos^2 \theta' \tilde{\omega}^3}{16(1 - \pi\varepsilon \cos^2 \theta')^{3/2}} + O(\tilde{\omega}^4), \quad (\sigma = 0), \quad (\text{V.43})$$

$$\alpha a = \frac{\sigma \varepsilon \cos^2 \theta'}{(1 - \pi\varepsilon \cos^2 \theta')^{3/2}} O(\tilde{\omega}^2), \quad (\sigma \neq 0); \quad (\text{V.44})$$

cas 2 : si $\pi\varepsilon > \cos^{-2} \theta'$

$$\frac{c}{c_T} = \frac{16(\pi\varepsilon \cos^2 \theta' - 1)^{3/2}}{\pi^2 \varepsilon \tilde{\omega}^2 \cos^2 \theta'} + O(\ln \tilde{\omega}), \quad (\sigma = 0), \quad (\text{V.45})$$

$$\frac{c}{c_T} = \frac{(\pi\varepsilon \cos^2 \theta' - 1)^{3/2}}{\sigma \varepsilon \cos^2 \theta'} O(\tilde{\omega}^{-1}), \quad (\sigma \neq 0), \quad (\text{V.46})$$

$$\alpha a = \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\pi\varepsilon \cos^2 \theta' - 1}} + O(\tilde{\omega}^3 \ln \tilde{\omega}), \quad (\sigma \geq 0). \quad (\text{V.47})$$

Lorsque les fissures sont aléatoirement orientées, nous obtenons :

cas 1 : si $\pi\varepsilon < 2$

$$\frac{c}{c_T} = \sqrt{\frac{2 - \pi\varepsilon}{2}} + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega}), \quad (\sigma \geq 0), \quad (\text{V.48})$$

$$\alpha a = \left(\frac{2}{2 - \pi\varepsilon}\right)^{3/2} \frac{\pi^2 \varepsilon}{32} \tilde{\omega}^3 + O(\tilde{\omega}^4), \quad (\sigma = 0), \quad (\text{V.49})$$

$$\alpha a = \left(\frac{2}{2 - \pi\varepsilon}\right)^{3/2} \sigma \varepsilon O(\tilde{\omega}^2), \quad (\sigma \neq 0); \quad (\text{V.50})$$

cas 2 : si $\pi\varepsilon > 2$

$$\frac{c}{c_T} = \left(\frac{\pi\varepsilon - 2}{2}\right)^{3/2} \frac{32}{\pi^2 \varepsilon \tilde{\omega}^2} + O(\ln \tilde{\omega}), \quad (\sigma = 0), \quad (\text{V.51})$$

$$\frac{c}{c_T} = \frac{1}{\sigma \varepsilon} \left(\frac{\pi\varepsilon - 2}{2}\right)^{3/2} O(\tilde{\omega}^{-1}), \quad (\sigma \neq 0), \quad (\text{V.52})$$

$$\alpha a = \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon - 2}} \tilde{\omega} + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega}), \quad (\sigma \geq 0). \quad (\text{V.53})$$

Pour $\pi\varepsilon > \cos^{-2} \theta'$ et $\pi\varepsilon > 2$, les Éqs. (V.45) et (V.51) montrent que la célérité de phase effective c tend vers l'infini lorsque la fréquence approche zéro. Ainsi, les résultats de ce modèle sont physiquement acceptables pour des valeurs de densité de fissure ε inférieures à $\cos^{-2} \theta' / \pi$ et $2 / \pi$, lorsque les fissures sont respectivement alignées ou aléatoirement orientées. Une conclusion semblable a été faite par Angel & Koba (1997) pour des fissures identiques à surfaces libres ($\sigma = 0$) et parallèles au front d'onde incident ($\theta' = 0$). Par ailleurs, les limites (V.42), (V.43), (V.45) et (V.46) avaient déjà été établies par Angel & Koba (1997) dans leurs équations (83) et (84). Observons que les limites (V.42) et (V.48) sont naturellement indépendantes de la viscosité σ . Remarquons que Ohno *et al.* (2001) ont établi la limite statique de la célérité de phase c des ondes cohérentes TH se propageant dans une distribution de fissures inclinées, sous la forme (voir aussi l'Éq. (6) de Murai (2007)) :

$$\frac{c}{c_T} = 1 - \frac{\pi\varepsilon}{2} \cos \theta', \quad (\text{V.54})$$

qui est naturellement l'approximation à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ de notre formule (V.42).

Fissures dont les tailles obéissent à la distribution en loi de puissance (V.1)

L'analyse précédente peut être réitérée pour le cas de tailles de fissures satisfaisant la distribution (V.1). Pour des raisons de concision, nous présentons dans la suite seulement les termes dominants en ε_m . Pour des fissures alignées, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_T} &= 1 + \frac{\pi}{4} \frac{1 - \tau^2}{\ln \tau} \cos^2 \theta' \varepsilon_m, & (\gamma = 1) \\ &= 1 + \pi \frac{\tau^2 \ln \tau}{1 - \tau^2} \cos^2 \theta' \varepsilon_m, & (\gamma = 3), \quad (\sigma \geq 0), \\ &= 1 - \frac{\pi}{2} \frac{1 - \gamma}{3 - \gamma} \frac{1 - \tau^{3-\gamma}}{1 - \tau^{1-\gamma}} \cos^2 \theta' \varepsilon_m, & (\gamma \neq 1, 3) \end{aligned} \quad (\text{V.55})$$

$$\begin{aligned} \alpha a_{\max} &= \frac{\tau^4 - 1}{\ln \tau} \frac{\pi^2 \tilde{\omega}_m^3}{64} \cos^2 \theta' \varepsilon_m, & (\gamma = 1) \\ &= \frac{\tau^4 \ln \tau}{\tau^4 - 1} \frac{\pi^2 \tilde{\omega}_m^3}{16} \cos^2 \theta' \varepsilon_m, & (\gamma = 5), \quad (\sigma = 0), \\ &= \frac{\tau^{2\gamma} - \tau^{5+\gamma} - \tau^{1+\gamma} + \tau^6}{\tau - \tau^\gamma} \frac{\gamma - 1}{\gamma - 5} \frac{\pi^2 \tilde{\omega}_m^3}{16} \cos^2 \theta' \varepsilon_m, & (\gamma \neq 1, 5) \end{aligned} \quad (\text{V.56})$$

$$\begin{aligned} \alpha a_{\max} &= \frac{\tau^3 - 1}{\ln \tau} \sigma \cos^2 \theta' \varepsilon_m O(\tilde{\omega}_m^2), & (\gamma = 1) \\ &= \frac{\tau^3 \ln \tau}{\tau^3 - 1} \sigma \cos^2 \theta' \varepsilon_m O(\tilde{\omega}_m^2), & (\gamma = 4), \quad (\sigma \neq 0). \\ &= \frac{\tau^{2\gamma} - \tau^{4+\gamma} - \tau^{1+\gamma} + \tau^5}{\tau - \tau^\gamma} \frac{\gamma - 1}{\gamma - 4} \sigma \cos^2 \theta' \varepsilon_m O(\tilde{\omega}_m^2), & (\gamma \neq 1, 4) \end{aligned} \quad (\text{V.57})$$

Pour des fissures aléatoirement orientées, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{c}{c_T} &= 1 + \frac{\pi}{8} \frac{1 - \tau^2}{\ln \tau} \varepsilon_m, & (\gamma = 1) \\
&= 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\tau^2 \ln \tau}{1 - \tau^2} \varepsilon_m, & (\gamma = 3) \text{ , } (\sigma \geq 0), \\
&= 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1 - \gamma}{3 - \gamma} \frac{1 - \tau^{3-\gamma}}{1 - \tau^{1-\gamma}} \varepsilon_m, & (\gamma \neq 1, 3)
\end{aligned} \tag{V.58}$$

$$\begin{aligned}
\alpha a_{\max} &= \frac{\tau^4 - 1}{\ln \tau} \frac{\pi^2 \tilde{\omega}_m^3}{128} \varepsilon_m, & (\gamma = 1) \\
&= \frac{\tau^4 \ln \tau}{\tau^4 - 1} \frac{\pi^2 \tilde{\omega}_m^3}{8} \varepsilon_m, & (\gamma = 5) \text{ , } (\sigma = 0), \\
&= \frac{\tau^{2\gamma} - \tau^{5+\gamma} - \tau^{1+\gamma} + \tau^6}{\tau - \tau^\gamma} \frac{\gamma - 1}{\gamma - 5} \frac{\pi^2 \tilde{\omega}_m^3}{32} \varepsilon_m, & (\gamma \neq 1, 5)
\end{aligned} \tag{V.59}$$

$$\begin{aligned}
\alpha a_{\max} &= \frac{\tau^3 - 1}{\ln \tau} \sigma \varepsilon_m O(\tilde{\omega}_m^2), & (\gamma = 1) \\
&= \frac{\tau^3 \ln \tau}{\tau^3 - 1} \sigma \varepsilon_m O(\tilde{\omega}_m^2), & (\gamma = 4) \text{ , } (\sigma \neq 0). \\
&= \frac{\tau^{2\gamma} - \tau^{4+\gamma} - \tau^{1+\gamma} + \tau^5}{\tau - \tau^\gamma} \frac{\gamma - 1}{\gamma - 4} \sigma \varepsilon_m O(\tilde{\omega}_m^2), & (\gamma \neq 1, 4)
\end{aligned} \tag{V.60}$$

Nous comparons maintenant nos expressions à la limite statique de la célérité de phase effective ($\tilde{\omega}_m = 0$) obtenues par Yamashita (1990). Sa formulation est similaire à la notre, mais ses résultats ont été obtenus dans le cas de faibles densités de fissures. Les limites (V.55) et (V.58) sont identiques à celles données dans les Éqs. (B2.2) et (C1.2) de Yamashita (1990). Soulignons néanmoins la présence d'une erreur typographique dans ses relations (C1.2) pour $\gamma = 3$.

V.1.6.2 Approximation haute fréquence

Dans cette limite, quelle que soit la configuration géométrique de fissures choisie, nous avons $c(\infty) = c_T$. Pour des fissures identiques alignées (de taille $2a$), nous trouvons d'après l'Éq. (A7.19) (Annexe A7) :

$$\alpha a \simeq \frac{2\varepsilon \cos^2 \theta'}{\cos \theta' + 2\sigma} \equiv q_{\parallel}(\varepsilon), \tag{V.61}$$

tandis que pour des fissures aléatoirement orientées,

$$\alpha a \simeq \frac{4\varepsilon}{\pi(1 + 2\sigma)} \equiv q_{\langle \rangle}(\varepsilon). \tag{V.62}$$

Lorsque la taille de fissures satisfait la distribution en loi de puissance (V.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\alpha a_{\max} &\simeq q_*(\varepsilon_m) \frac{\tau - 1}{\ln \tau}, & (\gamma = 1) \\
&\simeq q_*(\varepsilon_m) \frac{\tau \ln \tau}{\tau - 1}, & (\gamma = 2) \\
&\simeq q_*(\varepsilon_m) \frac{1 - \gamma}{2 - \gamma} \frac{1 - \tau^{2-\gamma}}{1 - \tau^{1-\gamma}}, & (\gamma \neq 1, 2)
\end{aligned} \tag{V.63}$$

où les fonctions $q_* \equiv q_{\parallel}$ et $q_* \equiv q_{\setminus}$ sont définies par les Éqs. (V.61) et (V.62) pour respectivement des fissures alignées ou aléatoirement orientées.

V.2 Influence des propriétés de la distribution sur l'atténuation et la dispersion des ondes sismiques

L'influence, sur l'atténuation et la célérité de phase des ondes sismiques, des propriétés de la distribution de fissures telles que : le frottement visqueux σ agissant sur les lèvres des fissures, l'exposant γ de la loi de puissance (V.1) et le rapport τ des limites inférieure a_{\min} et supérieure a_{\max} de la distribution de tailles, est étudiée numériquement dans ce paragraphe. Nous supposons d'après des observations sismologiques (Yamashita & Knopoff 1987, 1989) que le paramètre γ varie dans l'intervalle $1 \leq \gamma \leq 3$.

Les fissures sont soit alignées soit aléatoirement orientées. Lorsque les fissures sont parallèles au front d'onde de l'onde cohérente ($\theta' = 0$), le nombre d'onde effectif K est calculé en utilisant la formule explicite (V.29). L'atténuation et la célérité de phase des ondes sismiques sont alors obtenues en utilisant les relations (V.31) à (V.34), une fois l'amplitude de diffusion vers l'avant $f_a(0)$ évaluée comme décrit dans le Chapitre II. De manière générale, lorsque $\theta' \neq 0$ nous résolvons l'équation transcendante (V.17) à l'aide de l'algorithme de Müller (1956), afin de déterminer l'atténuation et la célérité de phase. Les résultats numériques de cette section sont obtenues, quelle que soit la configuration géométrique choisie, en quatre itérations maximum pour une erreur inférieure à 10^{-15} . Les courbes en pointillé présentées sur les Figures V.2 à V.5 sont calculées à partir des limites basse et haute fréquences établies dans la section précédente. À haute fréquence, nous observons que le coefficient d'atténuation Q^{-1} et la célérité c oscillent respectivement autour d'une valeur constante et de la célérité de phase c_T . L'amplitude de ces oscillations, liées en général aux phénomènes de diffraction par les pointes des fissures, diminue avec la fréquence. Notons que, quelle que soit la fréquence, la célérité est naturellement inférieure à c_T .

V.2.1 Effet de la viscosité du fluide

Nous considérons ici que toutes les fissures sont identiques et parallèles au front d'onde de l'onde plane cohérente TH ($\theta' = 0$). La Figure V.2 montre l'effet du coefficient de frottement visqueux σ sur l'atténuation Q^{-1} et la célérité c de l'onde sismique dans une distribution de fissures de taille $2a$ et de densité $\varepsilon = 0,05$. Les symboles circulaires de la Figure V.2 représentent les valeurs maximales de Q^{-1} et $(1 - c / c_T)$ apparaissant à la fréquence réduite $\tilde{\omega}^{pic}$ ($\forall \sigma$).

Lorsque σ augmente, la valeur maximale de $Q^{-1}(\tilde{\omega}^{pic}, \sigma)$ et la fréquence de pic $\tilde{\omega}^{pic}$ diminuent de façon monotone. Le comportement de $(1 - c / c_T)$ en fonction du coefficient σ est similaire. À basse fréquence, l'atténuation augmente naturellement avec σ , alors qu'à haute fréquence, plus la viscosité augmente, plus les lèvres des fissures tendent à se solidariser, entraînant dès lors une diminution de l'atténuation et une augmentation de la célérité. Les phénomènes de diffraction par les pointes des fissures diminuent avec la viscosité des cavités. Ainsi, les oscillations haute fréquence de Q^{-1} et $(1 - c / c_T)$ s'atténuent.

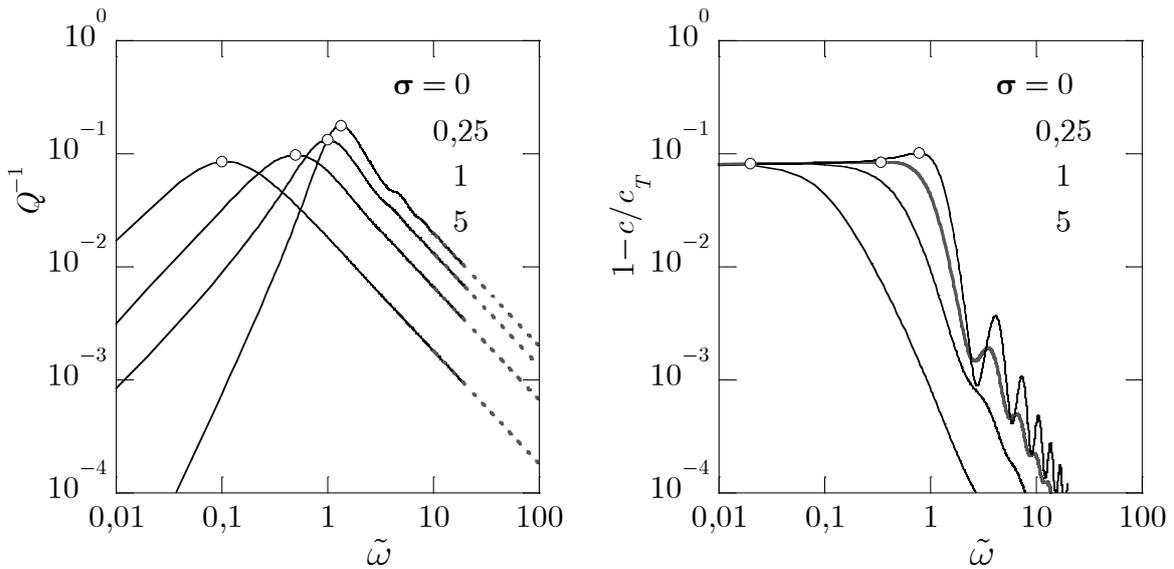


Figure V.2 : Effet du coefficient visqueux σ sur le coefficient d'atténuation Q^{-1} et la célérité de phase c . Les symboles circulaires représentent les maxima des courbes. ($\theta' = 0$ et $\varepsilon = 0,05$)

V.2.2 Effet de l'orientation des fissures

Toutes les fissures sont identiques et soit parallèles (et orientées d'un angle θ' , Figure V.1), soit aléatoirement orientées. Leurs lèvres sont libres de contraintes ($\sigma = 0$).

La Figure V.3 illustre l'effet de l'orientation des fissures sur Q^{-1} et $(1 - c / c_T)$. La fréquence $\tilde{\omega}^{pic}$ à laquelle Q^{-1} atteint sa valeur maximale est peu sensible à l'angle d'inclinaison θ' . Les résultats correspondant au cas de fissures aléatoirement orientées apparaissent naturellement comme valeurs moyennes sur l'angle θ' . Observons qu'à basse fréquence, Q^{-1} et c pour les fissures aléatoirement orientées, sont quasi-identiques aux valeurs correspondantes de Q^{-1} et c pour le cas de fissures inclinées à 45° . Ces résultats impliquent que selon l'angle d'inclinaison θ' , l'hypothèse d'une orientation aléatoire de fissures peut éventuellement sous-estimer ou surestimer l'atténuation induite par des fissures en réalité alignées. Quelle que soit la fréquence, le coefficient d'atténuation augmente lorsque l'angle θ' diminue. Ceci s'explique parce que la *longueur active* de chaque fissure ℓ_a est plus grande lorsque θ' est petit et entrave d'autant plus la propagation de l'onde sismique. Par exemple, il est géométriquement compréhensible que l'atténuation relative aux fissures parallèles au front d'onde cohérent ($\theta' = 0$) soit plus grande que l'atténuation induite par les fissures aléatoirement orientées, puisque dans le premier cas toutes les fissures sont des obstacles à la propagation de l'onde tandis que dans le second cas certaines fissures sont inactives. Ce même raisonnement explique qu'à basse fréquence, la célérité augmente avec l'angle θ' . Au fur et à mesure que la fréquence croît, Q^{-1} approche les limites géométriques du paragraphe précédent et la fréquence des oscillations augmente avec l'angle d'inclinaison θ' (la longueur active ℓ_a diminuant).

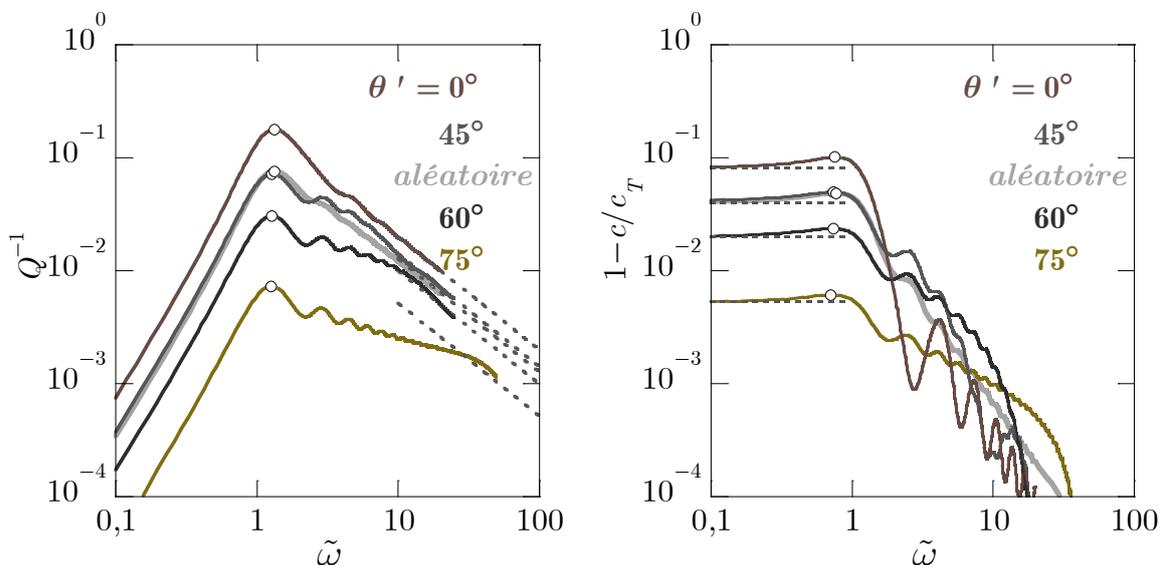


Figure V.3 : Effet de l'orientation des fissures sur le coefficient d'atténuation Q^{-1} et la célérité de phase c . Les lignes en pointillé indiquent les limites basse ou haute fréquence établies dans la section V.1.6. Les symboles circulaires représentent les maxima des courbes.

($\varepsilon = 0,05$)

V.2.3 Effet de la taille de fissures

Les effets des paramètres γ et τ de la distribution de tailles (V.1) sur Q^{-1} et c sont maintenant étudiés à partir des Figures V.4 à V.6, la force de frottement étant négligée ($\sigma = 0$).

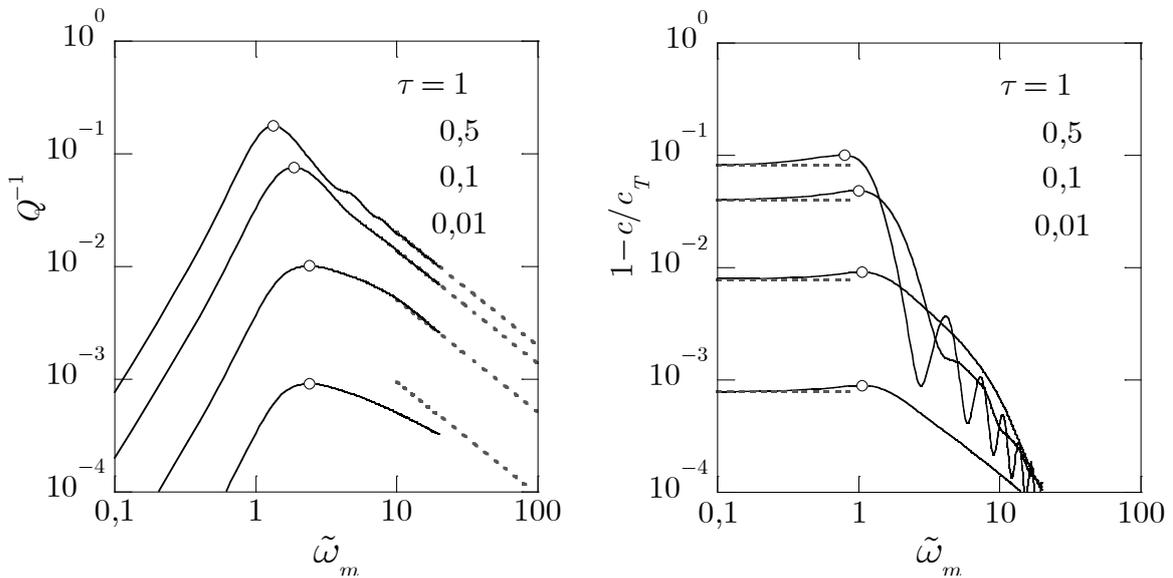


Figure V.4 : Effet du paramètre τ sur le coefficient d'atténuation Q^{-1} et la célérité de phase c . Les lignes en pointillé indiquent les limites basse ou haute fréquence établies dans la section V.1.6. Les symboles circulaires représentent les maxima des courbes.

($\gamma = 2$, $\theta' = 0$, $\sigma = 0$ et $\varepsilon_m = 0,05$)

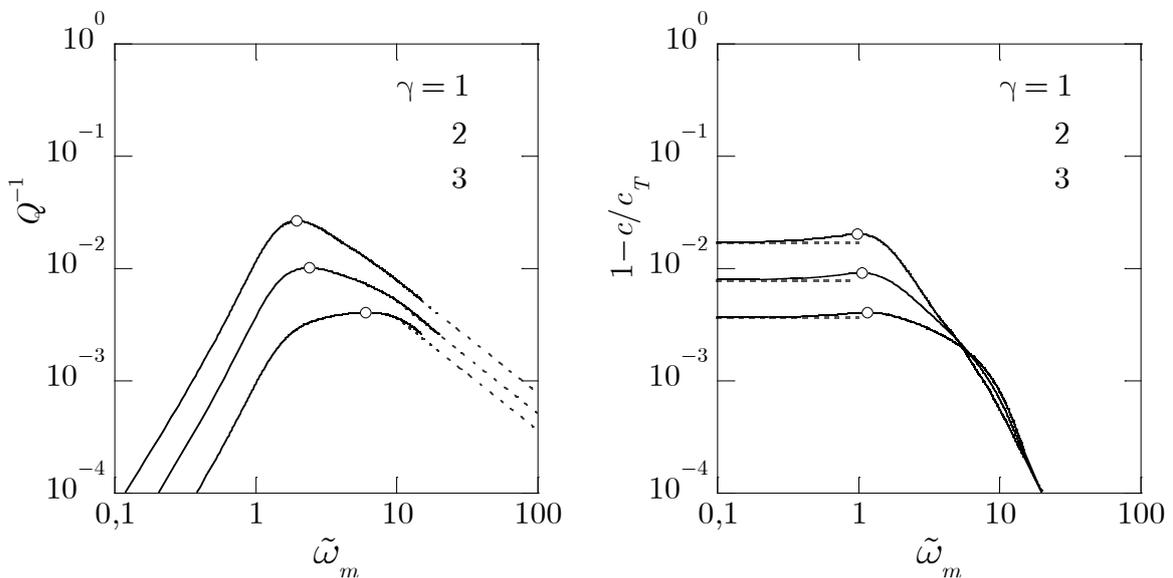


Figure V.5 : Effet du paramètre γ sur le coefficient d'atténuation Q^{-1} et la célérité de phase c . Les lignes en pointillé indiquent les limites basse ou haute fréquence établies dans la section V.1.6. Les symboles circulaires représentent les maxima des courbes.

($\tau = 0,1$, $\theta' = 0$, $\sigma = 0$ et $\varepsilon_m = 0,05$)

Les Figures V.4 et V.5 montrent que l'atténuation Q^{-1} (la célérité de phase c à basse fréquence) est plus grande (petite) pour de grandes (petites) valeurs de γ ou de petites (grandes)

valeurs de τ . Ceci se produit parce que la proportion de fissures de grande taille augmente lorsque γ diminue ou τ croît, pour une valeur donnée de a_{\max} . Ainsi, les grandes fissures contribueront plus à l'atténuation, car offrant plus de résistance à la propagation de l'onde cohérente TH et entraînant dès lors une réduction de la célérité à basse fréquence. À une fréquence donnée, les fissures sont d'autant plus candidates aux phénomènes de diffraction par leurs pointes, qu'elles sont de grande taille. Le nombre de fissures de grande taille diminuant avec le paramètre τ , les oscillations haute fréquence des courbes de Q^{-1} et $(1 - c / c_T)$ s'estompent lorsque τ diminue.

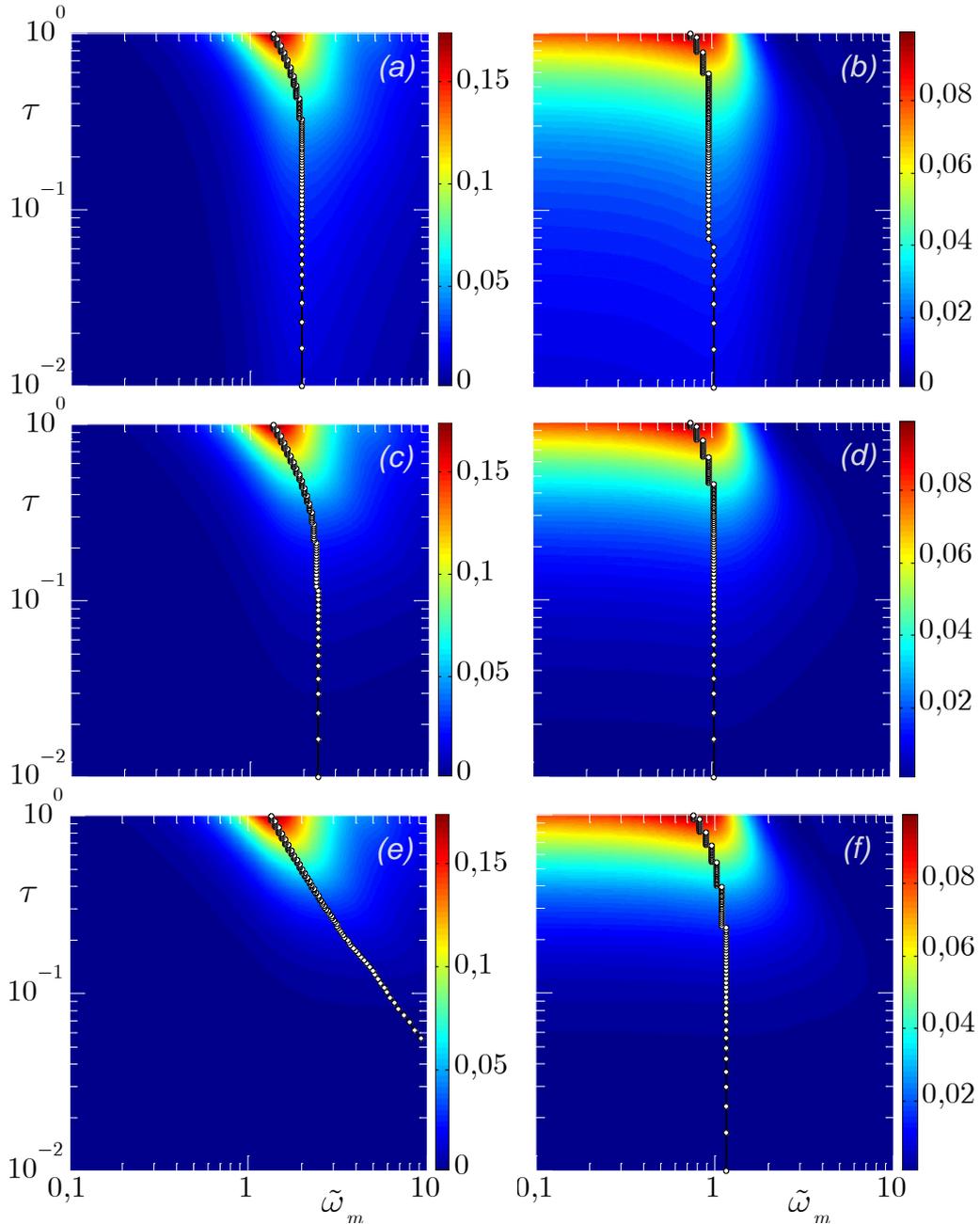


Figure V.6 : Effet des paramètres de la distribution de tailles (V.1) sur la fréquence de pic $\tilde{\omega}_m^{pic}$ (symboles circulaires) pour laquelle Q^{-1} (à gauche) et $(1 - c / c_T)$ (à droite) sont maximales. Les fissures sont parallèles ($\theta' = 0$) et leur densité est $\varepsilon_m = 0,05$. (a-b) $\gamma = 1$; (c-d) $\gamma = 2$; (e-f) $\gamma = 3$, avec $\tau = a_{\min} / a_{\max}$.

L'effet des paramètres γ et τ sur les fréquences $\tilde{\omega}_m^{pic} = k_T^{pic} a_{max}$ auxquelles Q^{-1} et $(1 - c / c_T)$ atteignent leur valeur maximale est illustré dans la Figure V.6.

Les figures (a-c-e) montrent que $\tilde{\omega}_m^{pic}$ est peu sensible à τ lorsque $\gamma = 1$ et $\gamma = 2$, mais en dépend fortement quand $\gamma = 3$. En d'autres mots, le nombre d'onde k_T^{pic} dépend de a_{max} lorsque $\gamma = 1$ et $\gamma = 2$, et de a_{min} et a_{max} lorsque $\gamma = 3$. Cette observation suggère que la sensibilité de k_T^{pic} à la taille minimale augmente avec γ , et par suite avec la proportion de fissures de petite taille. Les figures (b-d-f) montrent que les valeurs maximales des courbes $(1 - c / c_T)(\tilde{\omega}_m)$ sont peu sensibles au paramètre τ et par suite à la taille minimale a_{min} de fissures. Ce comportement est observé pour les trois valeurs de γ . La sensibilité ainsi observée des maxima de $Q^{-1}(\tilde{\omega}_m)$ et $(1 - c / c_T)(\tilde{\omega}_m)$ à la taille maximale de fissures a_{max} , suggère la possibilité d'en estimer la valeur à partir d'observations sismologiques.

V.3 Estimation de la taille de fissures dans la croûte terrestre

De nombreux travaux ont porté sur l'étude de la dépendance fréquentielle du coefficient d'atténuation Q^{-1} des ondes sismiques planes TH présentes dans la croûte terrestre (Aki 1980, 1981). L'accumulation des mesures suggère que le facteur Q^{-1} des ondes sismiques planes TH est maximum autour de 0,5 Hz (Sato 1984, Matsunami 1988). Cette observation est utilisée dans la suite afin d'estimer l'étendue de la distribution de tailles de fissures à partir des prédictions issues du modèle établi dans ce chapitre, section V.1.

Comme montré sur les Figures V.6a et c, la fréquence réduite $\tilde{\omega}_m^{pic} = k_T^{pic} a_{max}$, comprise entre 1,4 et 2,4, est quasi-indépendante du paramètre τ pour $\gamma = 1$ ou $\gamma = 2$. Des simulations complémentaires ont confirmé que, pour de faibles densités ($\varepsilon_m \ll 1$), $\tilde{\omega}_m^{pic} \simeq (1,4 \sim 2,4)$ quelle que soit l'orientation des fissures. En combinant cette relation avec l'observation sismologique précitée ($\nu^{pic} = 0,5$ Hz), alors nous avons $a_{max} = c_T (0,4 \sim 0,8)$. Supposant que la célérité de phase transverse dans la croûte terrestre est $c_T = 4$ km / s, la limite supérieure de la taille de fissures $2a_{max}$ est telle que $a_{max} \simeq (1,6 \sim 3,2)$ km. La valeur de $\tilde{\omega}_m^{pic}$ dépend fortement de τ lorsque $\gamma = 3$ comme nous le constatons sur la Figure V.6e. Nous pouvons néanmoins estimer les deux limites a_{min} et a_{max} à l'aide de la valeur de $\tilde{\omega}_m^{pic}$ relevée sur la Figure V.6e, pour une étendue τ donnée. En suivant la démarche présentée pour $\gamma = 1, 2$, la valeur de a_{max} est identifiée. La limite inférieure a_{min} est alors déterminée à partir de τ ($a_{min} = \tau a_{max}$). Ces valeurs sont reportées dans le Tableau V.1, où la valeur estimée de a_{max} est plus grande lorsque $\gamma = 3$ que lorsque $\gamma = 1$ ou $\gamma = 2$. Finalement, la bonne connaissance du paramètre γ est nécessaire afin d'estimer a_{max} avec une confiance acceptable.

τ	a_{\min} (km)	a_{\max} (km)
0,01	$> 0,4$	$> 40,7$
0,1	0,8	8
0,5	1,3	2,5

Tableau V.1 : Estimation de a_{\min} et a_{\max} pour $\gamma = 3$.

V.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la diffusion multiple d'une onde cohérente TH par une distribution uniforme et aléatoire de fissures visqueuses plates, dont les tailles satisfont des distributions propres à la croûte terrestre, Éq. (V.1). Contrairement à la modélisation du Chapitre III, chaque fissure est de taille réelle et est supposée être sollicitée par l'onde cohérente (hypothèse de fermeture de type Foldy). L'équation transcendante (V.17) satisfaite par le nombre d'onde effectif K des ondes sismiques se propageant dans la croûte terrestre a été établie, puis appliquée aux cas de fissures aléatoirement orientées ou mutuellement parallèles mais inclinées par rapport au front d'onde cohérent. La spécificité de ce chapitre réside dans le traitement simultané de la viscosité, de l'inclinaison et de la répartition de tailles de fissures. Une particularité a concerné la résolution analytique de l'équation transcendante dans le cas de fissures parallèles au front d'onde cohérent, Éq. (V.29).

Une étude paramétrique sur le comportement du coefficient d'atténuation et de la célérité de phase effectives a montré : – l'effet de la longueur active de chaque fissure (section géométrique) ; – la faisabilité d'estimer les caractéristiques de la distribution de tailles de fissures ; – l'effet du frottement visqueux sur les lèvres des fissures ; – l'amortissement des oscillations haute fréquence lorsque la force du frottement visqueux augmente ; – la tendance de cette force à solidariser les lèvres des fissures.

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés dans ce manuscrit à la modélisation de la propagation d'ondes cohérentes Transverses Horizontales (TH) dans des milieux multifissurés.

Nous avons résolu analytiquement le problème de la diffusion multiple d'une onde plane TH par une couche d'épaisseur finie contenant une distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs linéiques anisotropes (incidence normale). Les diffuseurs sont identiques. Nous avons déterminé les propriétés acoustiques (nombre d'onde K et impédance acoustique Z) et mécaniques (masse volumique ρ et module de rigidité M) effectives de ladite couche. Nous constatons qu'elles sont déterminées pour un solide donné, une distribution de diffuseurs donnée et une fréquence donnée lorsque l'amplitude rétrodiffusée $f(\pi)$ et l'amplitude de diffusion vers l'avant $f(0)$ d'un diffuseur seul sont connues. La flexibilité de la méthode a permis de traiter le cas de distributions uniformes et aléatoires de fissures ouvertes ou fermées, ainsi que de proposer un moyen de considérer les diffuseurs orientés aléatoirement. Ainsi, nous avons étudié l'influence de l'ouverture et de l'orientation de fissures sur les propriétés acoustiques et mécaniques effectives de ladite couche. Une conclusion de cette étude est que les fissures ouvertes sont plus atténuantes que les fissures plates lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente est plus grande ou comparable à la taille de fissures. Dans les régimes basse et haute fréquences, les paramètres effectifs semblent être gouvernés par la section géométrique d'une fissure. Notons qu'une étude complémentaire basée sur une méthode énergétique (Caleap *et al.* 2009) a mis en évidence l'effet de l'inclinaison des fissures sur l'atténuation et la célérité de phase de l'onde cohérente.

Nous avons comparé notre formulation du nombre d'onde effectif à celle établie par Linton & Martin (2005). Ces deux formulations donnent des résultats similaires. La théorie d'Angel & Koba (1998) donne également des résultats proches mais, comme elle est la seule à prendre en compte la taille réelle des fissures, elle se différencie des deux autres pour des densités de fissures élevées.

Nous avons montré l'intérêt des propriétés mécaniques effectives (ρ et M) en traitant les cas d'une distribution non-uniforme de fissures et d'une onde de surface en présence d'une couche endommagée (à symétrie isotrope) sur un substrat sain. À l'aide de la méthode de la matrice de transfert, nous avons par exemple montré que les valeurs haute fréquence du coefficient de transmission permettent d'accéder à la valeur moyenne de la densité de fissure de la couche non-uniforme. Parallèlement, l'étude des propriétés des ondes cohérentes TH de surface a montré que les courbes de dispersion de célérité de phase ne sont plus confinées entre les célérités de phase de la couche et du substrat, contrairement aux propriétés des ondes de Love. Finalement, nous avons étudié la faculté de l'équation de dispersion des ondes planes

cohérentes TH à prédire la propagation desdites ondes dans un espace libre ou semi-infini (présence d'une interface). Cette équation semble appropriée à la modélisation basse fréquence de la propagation des ondes cohérentes TH homogène et hétérogène.

Une ouverture vers la géophysique a été proposée. Nous avons alors considéré une distribution de fissures visqueuses plates dont les tailles satisfont des distributions propres à la croûte terrestre. L'expression du nombre d'onde effectif dans cette partie est implicite, et la modélisation est basée sur l'approximation de Foldy. Néanmoins, lorsque les fissures sont parallèles au front d'onde cohérent, une formulation explicite est obtenue. Une étude paramétrique sur le comportement du coefficient d'atténuation et de la célérité de phase effectives a montré en outre que lorsque la proportion de fissures de grande taille augmente, l'atténuation augmente et entraîne dès lors une réduction de la célérité à basse fréquence. La diffusion par la distribution de fissures s'avère diminuer au fur et à mesure que la viscosité augmente.

Les prédictions dynamiques issues de cette thèse demandent à être confrontées d'un point de vue quantitatif à des résultats obtenus par d'autres méthodes. Un outil numérique de simulation de la propagation temporelle dans des milieux hétérogènes a été développé lors d'une thèse parallèle (Golkin 2009). La comparaison de nos prédictions dynamiques à des résultats obtenus par ce code temporel de type différences finies a été un succès pour des densités de fissures élevées ($\varepsilon \simeq 0.08$). Malheureusement, nous n'avons pas été en mesure de reporter ces confrontations. Elles peuvent être trouvées dans la thèse citée ci-dessus.

Pour ce qui concerne les perspectives de l'étude, les théories de diffusion multiple de ce travail peuvent être réitérées afin d'investiguer la propagation d'ondes planes vectorielles (Longitudinales et Transverses Verticales) dans un solide élastique contenant une distribution de fissures alignées ou aléatoirement orientées. Les calculs seront plus lourds que dans le cas scalaire (TH).

Dès lors que les caractéristiques de la matrice sont connues, les résultats de la diffusion multiple en milieux multifissurés obtenus dans ce travail peuvent être utilisés afin de remonter à des informations concernant la distribution de fissures comme par exemple la taille ou la densité de fissures. Dans ce sens, nous nous attendons à ce que des estimations fiables puissent être obtenues en confrontant ces résultats analytiques à des mesures expérimentales. De plus, les approximations basse/haute fréquences établies dans ce manuscrit peuvent être facilement implémentées dans des codes de calcul numérique.

Références bibliographiques

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A., 1970. *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York.
- ACHENBACH, J. D., GAUTESSEN, A. K. & MCMACKEN, H., 1982. *Ray methods for waves in elastic solids*, Pitman, Boston.
- AGUIAR, A. R. & ANGEL, Y. C., 2000. Antiplane coherent scattering from a slab containing a random distribution of cavities, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 456, 2883-2909.
- AKI, K., 1980. Scattering and attenuation of shear waves in the lithosphere, *J. Geophys. Res.*, 85, 6496-6504.
- AKI, K., 1981. Scattering and attenuation of high-frequency body waves (1-25 Hz) in the lithosphere, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 26, 241-243.
- AKI, K. & RICHARDS, P. G., 1980. *Quantitative seismology*, W. H. Freeman and Company, San Francisco.
- ANGEL, Y. C., 1986. Scattering of Love waves by a surface-breaking crack, *J. Appl. Mech.*, 53, 587-592.
- ANGEL, Y. C., 1988. On the reduction of elastodynamic crack problems to singular integral equations, *Int. J. Eng. Sci.*, 26, 757-764.
- ANGEL, Y. C. & ACHENBACH, J. D., 1984. Reflection and transmission of obliquely incident Rayleigh waves by a surface-breaking crack, *J. Acoust. Soc. Am.*, 75, 313-319.
- ANGEL, Y. C. & ACHENBACH, J. D., 1985a. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks, *J. Appl. Mech.*, 52, 33-41.
- ANGEL, Y. C. & ACHENBACH, J. D., 1985b. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks: oblique incidence, *Wave Motion*, 7, 375-397.
- ANGEL, Y. C. & ACHENBACH, J. D., 1991. Determination of the effective wave velocity of SH-waves in a cracked solid using the Kramers-Kronig relations, *J. Acoust. Soc. Am.*, 90, 2757-2762.
- ANGEL, Y. C. & ARISTÉGUI, C., 2005. Analysis of sound propagation in a fluid through a screen of scatterers, *J. Acoust. Soc. Am.*, 118, 72-82.
- ANGEL, Y. C. & BOLSHAKOV, A., 1997. Oblique coherent waves inside and outside a randomly cracked elastic solid, *J. Acoust. Soc. Am.*, 102, 3290-3299.
- ANGEL, Y. C., CALEAP, M. & ARISTÉGUI, C., 2009. Sound propagation in a solid through a screen of cylindrical scatterers, arXiv:0903.5191v1.
- ANGEL, Y. C. & KOBAYASHI, Y. K., 1997. Complex-valued wavenumber, reflection and transmission in an elastic solid containing a cracked slab region, *Int. J. Solids Struct.*, 35, 573-592.
- ARISTÉGUI, C. & ANGEL, Y. C., 2002. New results for isotropic point scatterers: Foldy revisited, *Wave Motion*, 36, 383-399.
- ARISTÉGUI, C. & ANGEL, Y. C., 2007a. Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering, *Wave Motion*, 44, 153-164.
- ARISTÉGUI, C. & ANGEL, Y. C., 2007b. Effective material properties for shear-horizontal acoustic waves in fiber composites, *Phys. Rev. E*, 75, 056607.
- ARISTÉGUI, C., CALEAP, M., PONCELET, O., GOLKIN, S. & SHUVALOV, A. L., 2008. Coherent elastic wave propagation through non-uniform spatial distributions of cracks, in *Acoustics'08*, pp. 5963-5967, Paris, France, ISBN 978-2-9521105-4-9 (CD).
- ARISTÉGUI, C., CALEAP, M., PONCELET, O., SHUVALOV, A. L. & ANGEL, Y. C., 2009a. Coherent wave propagation in solids containing spatially varying distribution of finite-size cracks, in *Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media*, 128, pp. 423-435, eds. Léger, A. & Deschamps, M., Springer Proceedings in Physics.
- ARISTÉGUI, C., SHUVALOV, A. L., PONCELET, O. & CALEAP, M., 2009b. Trapping of shear acoustic waves by a near-surface distribution of cavities, *J. Acoust. Soc. Am.*, 125, 628-631.
- BASTE, S., 2001. Inelastic behaviour of ceramic-matrix composites, *Comp. Sci. Technol.*, 61, 2285-2297.
- BOSE, S. K., 1996. Ultrasonic plane SH wave reflection from a uni-directional fibrous composite slab, *J. Sound Vibrat.*, 193, 1069-1078.
- BREKHOVSKIKH, L. M. & GODIN, O. A., 1992. *Acoustics of Layered Media. V. II. Point Sources and Bounded Beams*, Springer-Verlag, Berlin.
- BURKE, J. E. & TWERSKY, V., 1964. On scattering of waves by an elliptic cylinder and by a semielliptic protuberance on a ground plane, *J. Opt. Soc. Am.*, 54, 732-744.

- CALEAP, M. & ARISTÉGUI, C., 2007. Reexamining scattering of SH waves by cracks or elliptical cavities, in *International Congress on Ultrasonics*, Vienne, Autriche, doi:10.3728/ICUltrasonics.2007.Vienna.1707-caleap.
- CALEAP, M. & ARISTÉGUI, C., 2008. Scattering of seismic waves by a fracture zone containing randomly distributed frictional cracks, in *Acoustics'08*, pp. 5975-5980, Paris, France, ISBN 978-2-9521105-4-9 (CD).
- CALEAP, M., ARISTÉGUI, C. & ANGEL, Y. C., 2006. Comparing two approaches for multiple scattering: line-like or actual size scatterers, in *4^e Journées du GDR CNRS 2501*, pp. 254-262, INRIA (Le Chesnay, France), Giens, France, ISBN 2-7261-1282-x.
- CALEAP, M., ARISTÉGUI, C. & ANGEL, Y. C., 2007a. Further results for antiplane scattering by a thin strip, *J. Acoust. Soc. Am.*, 122, 1876-1879.
- CALEAP, M., ARISTÉGUI, C. & ANGEL, Y. C., 2007b. Replacing a slab containing random cracks or cavities by an effective solid using SH waves, in *International Congress on Ultrasonics*, Vienne, Autriche, doi:10.3728/ICUltrasonics.2007.Vienna.1681-caleap.
- CALEAP, M., ARISTÉGUI, C. & ANGEL, Y. C., 2009. Effect of crack opening and orientation on dispersion and attenuation of antiplane coherent wave, *Geophys. J. Int.*, à paraître.
- CARNAHAN, B., LUTHER, H. A. & WILKES, J. O., 1969. *Applied numerical methods*, Wiley, New York.
- COLTON, D. & KRESS, R., 1983. *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley, New York.
- COLTON, D. & KRESS, R., 1992. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer-Verlag, New York.
- CONOIR, J.-M., ROBERT, S., MOUHTADI, A. E. & LUPPÉ, F., 2009. The WKB method applied to the reflection-transmission by a depth-varying random distribution of cylinders in a fluid slab-like region, in *Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media*, 128, pp. 1-13, eds. Léger, A. & Deschamps, M., Springer Proceedings in Physics.
- CRAMPIN, S. & LOVELL, H., 1991. A decade of shear-wave splitting in the earth's crust: what does it mean? what use can we make of it? and what should we do next?, *Geophys. J. Int.*, 107, 387-407.
- DATTA, S. K., 1975. Propagation of SH-waves through a fiber-reinforced composite-elliptic cylindrical fibers, *J. Appl. Mech.*, 165-170.
- DATTA, S. K. & SABINA, F. J., 1986. Matched asymptotic expansions applied to diffraction of elastic waves. in *Low and High Frequency Asymptotics*, pp. 71-264, eds. Varadan, V. K. & Varadan, V. V. Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland.
- ERDOGAN, F. & GUPTA, G. D., 1972. On the numerical solutions of singular integral equations, *Quart. Appl. Math.*, 30, 525-534.
- ERIKSSON, A. S., BOSTRÖM, A. & DATTA, S. K., 1995. Ultrasonic wave propagation through a cracked solid, *Wave Motion*, 22, 297-310.
- EUDE, M., 2004. Étude expérimentale de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu atténuant en présence d'hétérogénéités, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard – Lyon 1 (n°07 – 2004).
- FIKIORIS, J. G. & WATERMAN, P. C., 1964. Multiple scattering of waves. II. "Hole corrections" in the scalar case, *J. Math. Phys.*, 5, 1413-1420.
- FOLDY, L. L., 1945. The multiple scattering of waves, *Phys. Rev.*, 67, 107-119.
- GESPA, N., 1987. *La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple*, CEDOCAR, Paris.
- GOLKIN, S. V., 2009. Analysis of acoustic phenomena in inhomogeneous solids basing on numerical simulations: SH-wave propagation in periodic structures and multiple scattering by randomly distributed objects, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1.
- GOODMAN, J. W., 1996. *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York.
- GRADSHTEYN, I. S. & RYZHIK, I. M., 1994. *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic, New-York.
- HILDEBRAND, F. B., 1956. *Introduction to numerical analysis*, McGraw-Hill, New York.
- HUANG, X. Y. & HECKL, M. A., 1993. Transmission and dissipation of sound waves in tube boundles, *Acoustica*, 78, 191-200.
- ISHIMARU, A., 1997. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, IEEE Press, Piscataway, NJ.
- JAVANAUD, C. & THOMAS, A., 1988. Multiple scattering using the Foldy-Twersky integral equation, *Ultrasonics*, 26, 341-343.
- KACHANOV, M., 1992. Effective properties of cracked solids: critical review of some basic concepts, *Appl. Mech. Rev.*, 45, 304-335.

- KANAUN, S. K. & LEVIN, V. M., 2005. Propagation of shear elastic waves in composites with a random set of spherical inclusions (effective field approach), *Int. J. Solids Struct.*, 42, 3971-3997.
- KAWAHARA, J. & YAMASHITA, T., 1992. Scattering of elastic waves by a fracture zone containing randomly distributed cracks, *Pure Appl. Geophys.*, 139, 121-144.
- KE, L.-L., WANG, Y.-S. & ZHANG, Z.-M., 2005. Propagation of Love waves in an inhomogeneous fluid saturated porous layered half-space with properties varying exponentially, *J. Engrg. Mech.*, 131, 1322-1328.
- KE, L.-L., WANG, Y.-S. & ZHANG, Z.-M., 2006. Love waves in an inhomogeneous fluid saturated porous layered half-space with linearly varying properties, *Soil Dynam. Earthquake Eng.*, 26, 574-581.
- KIELCZYŃSKI, P., 1997. Attenuation of love waves in low-loss media, *J. Appl. Phys.*, 82, 5932-5937.
- KIKUCHI, M., 1981a. Dispersion and attenuation of elastic waves due to multiple scattering from cracks, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 27, 100-105.
- KIKUCHI, M., 1981b. Dispersion and attenuation of elastic waves due to multiple scattering from inclusions, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25, 159-162.
- KRAUT, E., 1976. Review of theories of scattering of elastic waves by cracks, *IEEE. Trans. S. U.*, 3, 162-167.
- LAX, M., 1951. Multiple scattering of waves, *Rev. Mod. Phys.*, 23, 287-310.
- LE BAS, P.-Y., LUPPÉ, F. & CONOIR, J.-M., 2005. Reflection and transmission by randomly spaced elastic cylinders in a fluid slab-like region, *J. Acoust. Soc. Am.*, 117, 1088-1097.
- LÉON, F., CHATI, F. & CONOIR, J.-M., 2004. Modal theory applied to the acoustic scattering by elastic cylinders of arbitrary cross section, *J. Acoust. Soc. Am.*, 116, 686-692.
- LINTON, C. M. & MARTIN, P. A., 2005. Multiple scattering by random configurations of circular cylinders: Second-order corrections for the effective wavenumber, *J. Acoust. Soc. Am.*, 117, 3413-3423.
- LOEBER, J. F. & SIH, G. C., 1968. Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack, *J. Acoust. Soc. Am.*, 44, 90-98.
- MAL, A. K., 1970. Interaction of elastic waves with a Griffith crack, *Int. J. Eng. Sci.*, 8, 763-776.
- MARTIN, P. A., 1990. Thin interface layers: adhesives, approximations and analysis. in *Elastic Waves and Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, pp. 217-222, eds. Datta, S. K., Achenbach, J. D. & Rajapakse, Y. S. Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland.
- MATSUNAMI, K., 1988. Laboratory measurements of elastic wave attenuation by scattering due to random heterogeneities, *Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ.*, 38, 1-16.
- MEIXNER, J. & SCHÄFKE, F. W., 1954. *Mathieusche funktionen und sphäroidfunktionen*, Springer-Verlag, Berlin.
- MIKHLIN, S. G., 1964. *Integral equations*, Macmillan, New York.
- MOK, C. H., 1969. Effective dynamic properties of a fiber-reinforced material and the propagation of sinusoidal waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, 46, 631-638.
- MORSE, P. M. & FESHBACK, H., 1946. *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, New York.
- MORSE, P. M. & RUBENSTEIN, P. J., 1938. The diffraction of waves by ribbons and by slits, *Phys. Rev.*, 54, 895-898.
- MOW, C. C. & PAO, Y.-H., 1971. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. in *US Air Force Project Rand*.
- MÜLLER, D. E., 1956. A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 10, 208-215.
- MURAI, Y., 2007. Scattering attenuation, dispersion and reflection of SH waves in two-dimensional elastic media with densely distributed cracks, *Geophys. J. Int.*, 168, 211-223.
- MURAI, Y., KAWAHARA, J. & YAMASHITA, T., 1995. Multiple scattering of SH waves in 2-D elastic media with distributed cracks, *Geophys. J. Int.*, 122, 925-937.
- MUSKHELISHVILI, N. I., 1953. *Singular integral equations*, Noordhoff, Groningen.
- NAYFEH, A. H., 1995. *Wave propagation in layered anisotropic media with applications to composites*, Elsevier Science, Amsterdam.
- OHNO, T., KAWAHARA, J. & YOMOGIDA, K., 2001. Attenuation and dispersion of SH waves due to scattering by 2-D cavities, *Abstracts Jpn. Earth Planet. Sci. Joint Meet.*, Sr-P002.

- OHYOSHI, T., 1973. Effect of orthotropy on singular stresses produced near a crack tip by incident SH-waves, *Z. Angew. Math. Mech.*, 53, 409-411.
- PARNELL, W. J. & ABRAHAMS, I. D., 2006. Dynamic homogenization in fiber reinforced media. Quasi-static limit for SH waves, *Wave Motion*, 43, 474-498.
- POLYANIN, A. D. & MANZHIROV, A. V., 1998. *Handbook of integral equations*, CRC Press, Boca Raton-Florida.
- PONCELET, O., GOLKIN, S. V., ARISTÉGUI, C., CALEAP, M. & SHUVALOV, A. L., 2008. SH surface wave in multi-cracked solids, in *Acoustics'08*, pp. 5907-5910, Paris, France, ISBN 978-2-9521105-4-9 (CD).
- POUJOL-PFEFFER, M.-F., 1994. Étude de la propagation acoustique dans un milieu inhomogène, application à la caractérisation des fonds marins, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II (n°2079461).
- ROBERT, S., 2004. Propagation d'ondes cohérentes et résonances dans des milieux élastiques présentant des inclusions cylindriques périodiquement ou aléatoirement distribuées, Thèse de Doctorat, Université du Havre (n°00143062).
- ROSE, J. L., 1999. *Ultrasonic Waves in Solid Media* Cambridge University Press, Cambridge.
- ROTHER, T., KAHNERT, M., DOICU, A. & WAUER, J., 2002. Surface Green's function of the Helmholtz equation in spherical coordinates, *Progress In Electromagnetics Research*, 38, 47-95.
- SÁNCHEZ-SESMA, F. J. & ITURRARÁN-VIVEROS, U., 2001. Scattering and diffraction of SH waves by a finite crack: an analytical solution, *Geophys. J. Int.*, 145, 749-758.
- SATO, H., 1979. Wave propagation in one-dimensional inhomogeneous elastic media, *J. Phys. Earth.*, 27, 455-466.
- SATO, H., 1984. Scattering and attenuation of seismic waves in the lithosphere - single scattering theory in a randomly inhomogeneous medium, *Rep. Nat. Res. Cent. Disas. Prev.*, 33.
- SIH, G. C., 1973. *Mechanics of Fracture I. Methods of analysis and solutions of cracks*, Noordhoff, Leyden.
- SORNETTE, D., 1989. Acoustic waves in random media. I. Weak disorder regime, *Acustica*, 67, 199-215.
- TOURIN, A., 1999. Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores, Université Paris VII (n°99 PA07 7238).
- TOURNAT, V., 2000. La diffusion multiple des ondes ultrasonores. Étude du milieu effectif, DEA, Université du Maine.
- TWERSKY, V., 1962. On scattering of waves by random distributions. I. Free-space scatterer formalism, *J. Math. Phys.*, 3, 700-715.
- URICK, R. J. & AMENT, W. S., 1949. The propagation of sound in composite media, *J. Acoust. Soc. Am.*, 21, 115-119.
- VANDER MEULEN, F., 2000. Application des théories de diffusion multiple à la caractérisation ultrasonore de milieux biphases, Université François Rabelais de Tours (n°00 TOUR 4030).
- VARADAN, V. K., VARADAN, V. V. & PAO, Y.-H., 1978. Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. I. SH waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, 63, 1310-1319.
- VARADAN, V. V. & VARADAN, V. K., 1979. Low-frequency expansions for acoustic wave scattering using Waterman's *T*-matrix method, *J. Acoust. Soc. Am.*, 66, 586-589.
- WATERMAN, P. C. & TRUPELL, R., 1961. Multiple scattering of waves, *J. Math. Phys.*, 2, 512-537.
- WATSON, G. N., 1966. *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.
- WEAVER, R. L. & PAO, Y.-H., 1979. Application of the transition matrix to a ribbon-shaped scatterer, *J. Acoust. Soc. Am.*, 66, 1199-1206.
- WHITTAKER, E. T. & WATSON, G. N., 1965. *A course of modern analysis*, Cambridge University Press.
- YAMASHITA, T., 1990. Attenuation and dispersion of SH waves due to scattering by randomly distributed cracks, *Pure Appl. Geophys.*, 132, 545-568.
- YAMASHITA, T. & KNOPOFF, L., 1987. Models of aftershocks occurrence, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 91, 13-26.
- YAMASHITA, T. & KNOPOFF, L., 1989. A model of foreshock occurrence, *Geophys. J.*, 96, 389-399.

- YANG, R.-B. & MAL, A. K., 1994. Multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite, *J. Mech. Phys. Solids*, 42, 1945-1968.
- YOMOGIDA, K. & BENITES, R., 2002. Scattering of seismic waves by cracks with the boundary integral method, *Pure Appl. Geophys.*, 159, 1771-1789.
- ZHANG, C. & GROSS, D., 1998. *On wave propagation in elastic solids with cracks*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.
- ZHAO, Y. H. & WENG, G. J., 1990. Effective elastic moduli of ribbon-reinforced composites, *J. Appl. Mech.*, 57, 158-167.

Annexe A1

Solutions de l'équation de Helmholtz en coordonnées elliptiques

Dans cette annexe, nous exprimons les solutions de l'équation de Helmholtz en coordonnées elliptiques. Ensuite, nous les représentons graphiquement afin d'observer les influences de l'argument et de l'ordre sur leur comportement.

A1.1 Solutions de l'équation de Helmholtz en coordonnées elliptiques

Soit l'équation d'onde scalaire analogue à l'Éq. (I.6). En cherchant une solution sous la forme $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})T(t)$, et en la substituant dans cette équation, nous obtenons :

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + k^2 c^2 \right] T(t) = 0, \quad (\text{A1.1})$$

$$\left[\Delta + k^2 \right] U(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A1.2})$$

où $-k^2$ est la constante de séparation. L'équation (A1.1) est une *équation harmonique*, dont les solutions sont $T(t) = \exp(\pm i\omega t)$ où $\omega = kc$, et l'Éq. (A1.2) est l'équation de Helmholtz tridimensionnelle. Pour des systèmes à symétrie de révolution, l'opérateur Laplacien est de la forme $\Delta = \Delta_T + \partial^2 / \partial z^2$. Ainsi, en choisissant une solution spatiale de la forme $U(\mathbf{r}) = u(\vec{r})Z(z)$, l'Éq. (A1.2) nous conduit à :

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2 \right] Z(z) = 0, \quad (\text{A1.3})$$

$$\left[\Delta_T + k_T^2 \right] u(\vec{r}) = 0, \quad (\text{A1.4})$$

où k_z est la constante de séparation et $k_T^2 = k^2 - k_z^2$. Les solutions de l'Éq. (A1.3) sont $Z(z) = \exp(\pm i k_z z)$. À l'aide des coordonnées elliptiques introduites dans la section I.4, résolvons l'équation de Helmholtz bidimensionnelle (A1.4). Rappelons que les facteurs d'échelle du système de coordonnées elliptiques (ξ, η) sont donnés par :

$$h_\xi = h_\eta = a j_0, \quad h_z = 1, \quad (\text{A1.5})$$

où j_0 est le Jacobien en coordonnées elliptiques donné par l'Éq. (I.83) et $2a$ la distance focale de l'ellipse, Figure I.3.

En substituant les facteurs (A1.5) dans le Laplacien transverse :

$$\Delta_T = \frac{1}{h_\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h_\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (\text{A1.6})$$

et en prenant $\vec{r} = (\xi, \eta)$, nous obtenons l'équation de Helmholtz en coordonnées elliptiques :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (k_T a)^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) \right] u(\xi, \eta) = 0. \quad (\text{A1.7})$$

En cherchant une solution sous la forme $u(\xi, \eta) = R(\xi)\Theta(\eta)$, nous obtenons deux équations différentielles ordinaires :

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta) \right] \Theta(\eta) = 0, \quad (\text{A1.8})$$

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - (\lambda - 2q \cosh 2\xi) \right] R(\xi) = 0, \quad (\text{A1.9})$$

où λ est une constante de séparation et q est un paramètre adimensionnel relié à la constante k_T par :

$$q = \frac{k_T^2 a^2}{4}. \quad (\text{A1.10})$$

Les équations (A1.8) et (A1.9) sont connues sous le nom d'*équation de Mathieu* et d'*équation de Mathieu modifiée*. Les considérations physiques habituelles sont telles que l'équation (A1.8) a des solutions π – ou 2π – périodiques. Les valeurs de λ qui satisfont cette condition sont connues sous le nom de *valeurs caractéristiques* (ou valeurs propres). Il y a une infinité de valeurs réelles telles que $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$ qui satisfont l'Éq. (A1.8). Lorsque les solutions $\Theta(\eta)$ sont *paires*, les valeurs caractéristiques λ_n sont désignées par $a_n(q)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, tandis que les solutions *impaires* sont désignées par $b_n(q)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Les valeurs caractéristiques jouent un rôle important puisque elles définissent la stabilité des solutions. Une solution π – ou 2π – périodique est dite *neutre*, mais peut être considérée comme un cas particulier de solution stable : elle tend vers zéro ou reste bornée lorsque $\eta \rightarrow \infty$. Les solutions $\Theta(\eta)$ associées à $a_n(q)$ sont notées $ce_n(\eta, q)$, alors que celles associées à $b_n(q)$ sont notées $se_n(\eta, q)$ (Abramowitz & Stegun 1970). Pour chaque constante $a_n(q)$ et $b_n(q)$, il existe deux solutions indépendantes de l'Éq. (A1.9) ; celles associées à ce_n sont notées $Mc_n^{(j)}(\xi, q)$ avec $j = 1, 2$, tandis que celles associées à se_n sont notées $Ms_n^{(j)}(\xi, q)$ avec $j = 1, 2$. Les fonctions définies pour $j = 1$ sont régulières quel que soit ξ .

Les notations pour les fonctions de Mathieu étant variées et lourdes, nous définissons $e_{\sigma n}(\eta, q)$, ($\sigma = c, s$) comme suit (Burke & Twersky 1964) :

$$e_{cn}(\eta, q) = ce_n(\eta, q) \text{ et } e_{sn}(\eta, q) = se_n(\eta, q). \quad (\text{A1.11})$$

Ainsi, nous avons :

$$\Theta(\eta) = e_{cn}(\eta, q) \text{ ou } e_{sn}(\eta, q). \quad (\text{A1.12})$$

De manière similaire, nous définissons $M_{\sigma n}^{(j)}(\xi, q)$ par :

$$M_{cn}^{(j)}(\xi, q) = Mc_n^{(j)}(\xi, q) \text{ et } M_{sn}^{(j)}(\xi, q) = Ms_n^{(j)}(\xi, q), \quad j = 1, 2, \quad (\text{A1.13})$$

de sorte qu'une combinaison linéaire des fonctions $M_{\sigma n}^{(1)}(\xi, q)$ et $M_{\sigma n}^{(2)}(\xi, q)$ ($\sigma = c, s$) décrit la fonction radiale $R(\xi)$:

$$R(\xi) = \begin{cases} M_{cn}^{(1)}(\xi, q) \\ M_{cn}^{(2)}(\xi, q) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} M_{sn}^{(1)}(\xi, q) \\ M_{sn}^{(2)}(\xi, q) \end{cases}. \quad (\text{A1.14})$$

A1.2 Comportements des fonctions de Mathieu classiques et modifiées

Les valeurs caractéristiques $a_n(q)$ et $b_n(q)$ sont représentées sur la Figure A1.1.

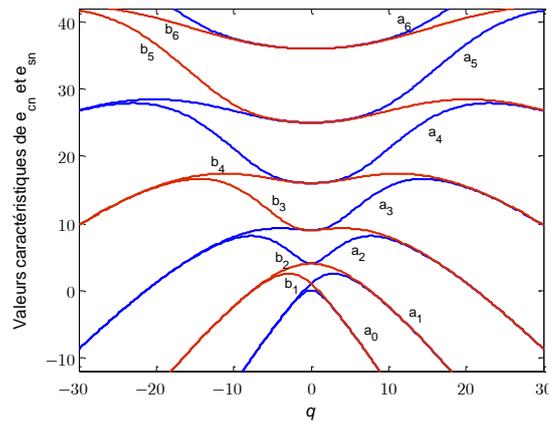


Figure A1.1 : Valeurs caractéristiques $a_n(q)$ et $b_n(q)$ des fonctions de Mathieu $e_{cn}(\eta, q)$ et $e_{sn}(\eta, q)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Nous représentons sur les figures suivantes les fonctions de Mathieu $e_{\sigma n}(\eta, q)$ et les fonctions de Mathieu modifiées $M_{\sigma n}^{(j)}(\eta, q)$, $j = 1, 2$, paires $\sigma = c$ et impaires $\sigma = s$. Les effets du paramètre q et de l'ordre n sont illustrés.

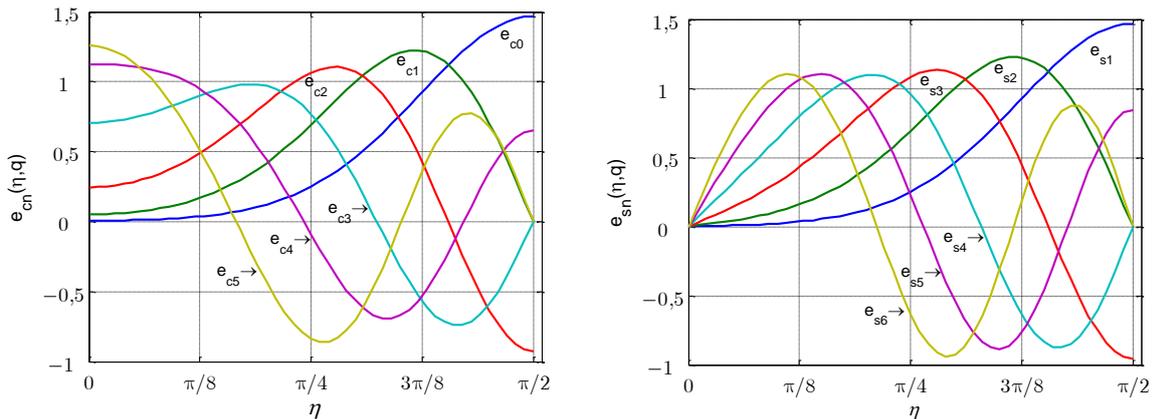


Figure A1.2 : Fonctions de Mathieu $e_{cn}(\eta, q)$ et $e_{sn}(\eta, q)$ pour $q = 10$.

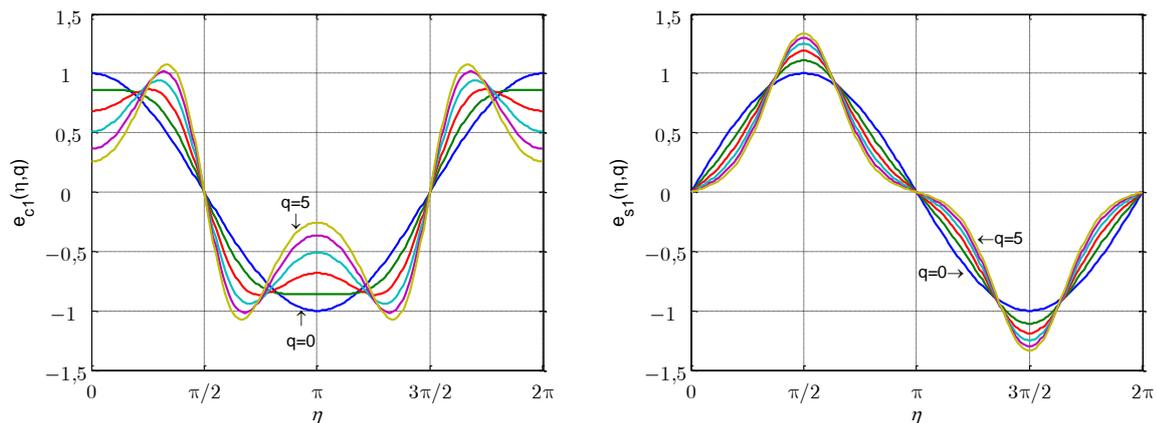


Figure A1.3 : Fonctions de Mathieu $e_{c1}(\eta, q)$ et $e_{s1}(\eta, q)$ pour $q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

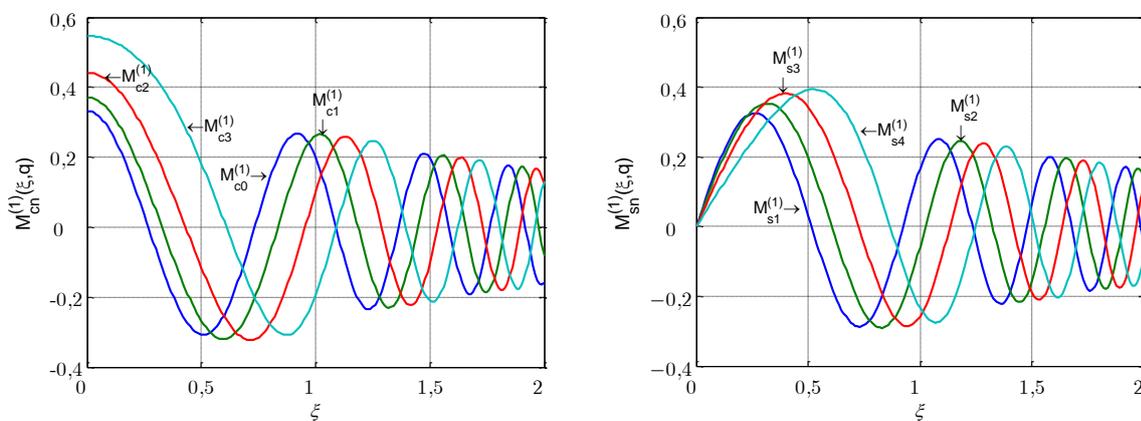


Figure A1.4 : Fonctions de Mathieu modifiées $M_{cn}^{(1)}(\xi, q)$ et $M_{sn}^{(1)}(\xi, q)$ pour $q = 10$.

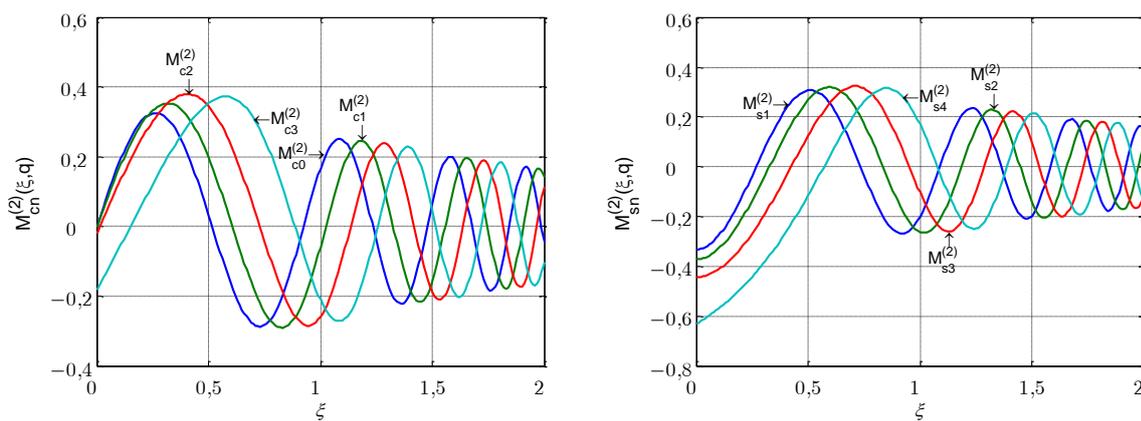


Figure A1.5 : Fonctions de Mathieu modifiées $M_{cn}^{(2)}(\xi, q)$ et $M_{sn}^{(2)}(\xi, q)$ pour $q = 10$.

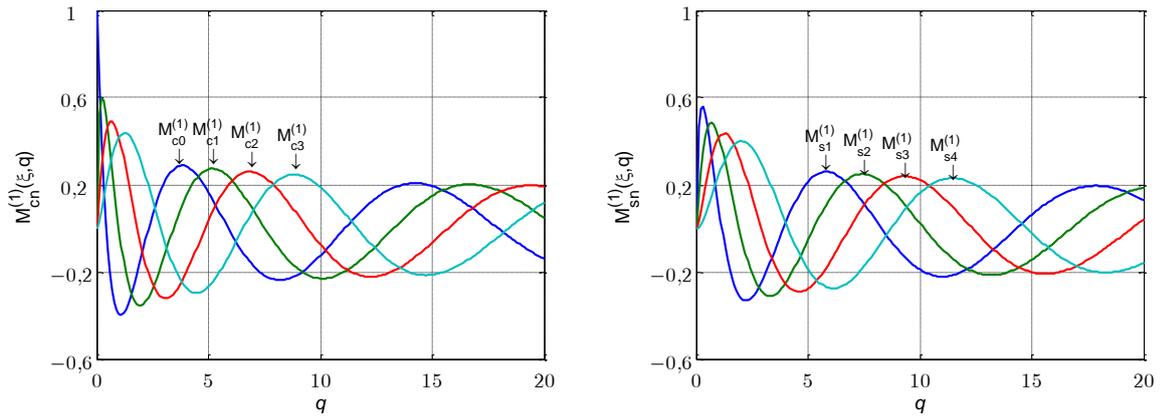


Figure A1.6 : Fonctions de Mathieu modifiées $M_{cn}^{(1)}(\xi, q)$ et $M_{sn}^{(1)}(\xi, q)$ pour $\xi = 1,317$.

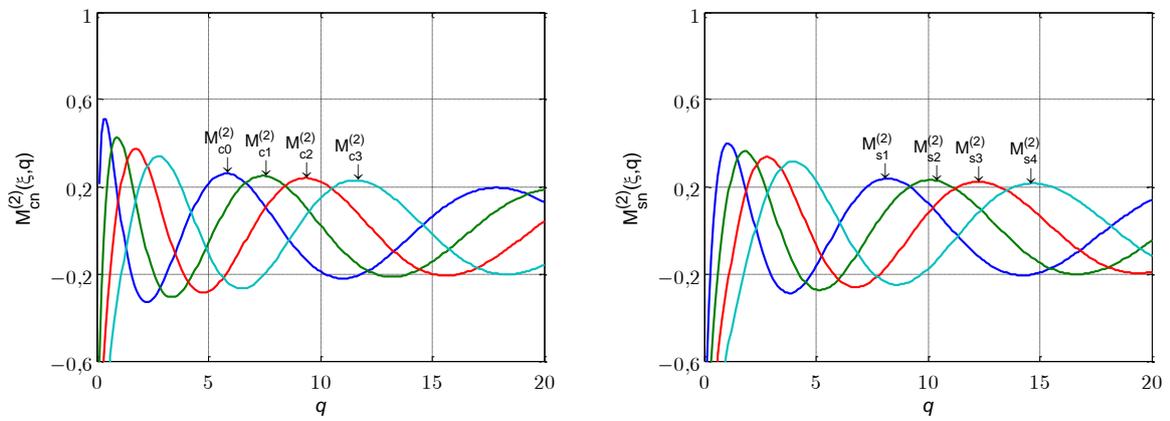


Figure A1.7 : Fonctions de Mathieu modifiées $M_{cn}^{(2)}(\xi, q)$ et $M_{sn}^{(2)}(\xi, q)$ pour $\xi = 1,317$.

Annexe A2

Fonctions élémentaires généralisées

Dans cette annexe, nous rappelons quelques fonctions élémentaires telles que la fonction de Dirac, la fonction de Heaviside, la fonction signe, etc.

A2.1 Fonction d'essai

Une fonction ϕ est une fonction d'essai (ou test) si elle a les propriétés suivantes :

- $\phi(x)$ et tous ses dérivées existent et sont continues en tout point $x \in \mathbb{R}$;
- les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx$ et toutes ses dérivées existent et sont finies.

A2.2 Fonction de Dirac en coordonnées cylindriques

Dans l'espace réel \mathbb{R}^2 , la fonction de Dirac δ se définit comme :

$$\delta(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_3), \quad (\text{A2.1})$$

avec :
$$\delta(\vec{x}) = 0 \text{ pour } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ et } \int \delta(\vec{x})\phi(\vec{x})d^2\vec{x} = \phi(\vec{0}), \quad (\text{A2.2})$$

pour toute fonction d'essai ϕ , où l'expression $\int g(\vec{x})d^2\vec{x}$ signifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_3) dx_1 dx_3,$$

à moins qu'autrement mentionné.

En coordonnées cylindriques (avec $r^2 = x_1^2 + x_3^2$), comme $\delta(\vec{x})$ dépend seulement de $r = |\vec{x}|$ nous posons $\delta(\vec{x})|_{r=|\vec{x}|} = \hat{\delta}(r)$ de sorte que, d'après l'Éq. (A2.2), $\hat{\delta}(r) = 0$ pour $r > 0$. Sachant que :

$$\int \delta(\vec{x})d^2\vec{x} = 1, \quad (\text{A2.3})$$

il s'en suit que :

$$\int \delta(\vec{x})d^2\vec{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{x})dx_1 dx_3 = \int_0^{+\infty} \hat{\delta}(r)r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} \hat{\delta}(r)r dr = 1, \quad (\text{A2.4})$$

i. e. :
$$2\pi \int_0^{+\infty} \hat{\delta}(r)r dr = 1.$$

Or la fonction de Dirac en coordonnées cylindriques est telle que :

$$\int_0^{+\infty} \delta(r)dr = 1.$$

Ainsi, nous avons :

$$\delta(\vec{x})|_{|\vec{x}|=r} = \hat{\delta}(r) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}. \quad (\text{A2.5})$$

A2.3 Fonction de Heaviside

La fonction (unité) de Heaviside \mathbf{H} peut être définie par une des relations suivantes :

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(x)\phi(x)dx = \int_0^{+\infty} \phi(x)dx. \quad (\text{A2.6})$$

pour toute fonction d'essai ϕ . Nous avons :

$$\mathbf{H}(x) = \int_{-\infty}^x \delta(y)dy. \quad (\text{A2.7})$$

A2.4 Fonction signe

La fonction signe sgn peut être définie de la façon suivante :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(x) = \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(-x). \quad (\text{A2.8})$$

Pour toute fonction d'essai ϕ , nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(x)\phi(x)dx = \int_0^{+\infty} \phi(x)dx - \int_{-\infty}^0 \phi(x)dx. \quad (\text{A2.9})$$

On peut montrer que :

$$\text{sgn}(x) = \frac{d|x|}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \text{sgn}(x) = 2\delta(x). \quad (\text{A2.10})$$

A2.5 Fonctions généralisées et dérivées

Nous allons utiliser dans la suite des fonctions généralisées utiles à la résolution d'équations différentielles inhomogènes. Dans les manipulations algébriques à venir, nous aurons besoin de la dérivée $G'(x)$ d'une fonction G , définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\phi'(x)dx, \quad (\text{A2.11})$$

pour toute fonction d'essai ϕ . Cette expression résulte d'une intégration par parties (puisque les fonctions d'essai s'annulent à $\pm\infty$). Le membre de droite est connu puisque $G(x)$ est définie et, si ϕ est une fonction d'essai, alors ϕ' l'est aussi. Dans ce sens, nous avons :

$$\mathbf{H}'(x) = \delta(x), \quad (\text{A2.12})$$

puisque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(x)\phi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \phi'(x)dx = -\phi(x)\Big|_0^{+\infty} = \phi(0).$$

Annexe A3

Intégrale singulière

Dans cette annexe, nous démontrons l'équation (II.28).

A3.1 Valeur principale d'une intégrale

La définition habituelle, traitant une intégrale comme la limite d'une somme, convient seulement pour des fonctions bornées. Pour l'intégration d'une fonction non-bornée, nous introduisons la notion d'intégrale impropre, dont la signification est maintenant définie. Supposons qu'une fonction ϕ , définie sur l'intervalle $|y| \leq a$, n'est pas bornée au voisinage d'un point y_1 de cet intervalle, mais est intégrable sur chacun des intervalles $-a \leq y \leq y_1 - \varepsilon'$ et $y_1 + \varepsilon'' \leq y \leq a$, de sorte que ε' et ε'' sont positifs. Formons la somme :

$$\int_{-a}^{y_1 - \varepsilon'} \phi(y) dy + \int_{y_1 + \varepsilon''}^a \phi(y) dy. \quad (\text{A3.1})$$

Si cette somme a une limite lorsque ε' et ε'' tendent vers zéro indépendamment l'un de l'autre, alors cette limite est appelée l'*intégrale impropre* de la fonction ayant les valeurs $\phi(y)$:

$$\int_{-a}^a \phi(y) dy = \lim_{\substack{\varepsilon' \rightarrow 0 \\ \varepsilon'' \rightarrow 0}} \left[\int_{-a}^{y_1 - \varepsilon'} \phi(y) dy + \int_{y_1 + \varepsilon''}^a \phi(y) dy \right]. \quad (\text{A3.2})$$

Il est possible que la somme (A3.1) n'ait aucune limite lorsque ε' et ε'' tendent vers zéro indépendamment l'un de l'autre, mais qu'une limite existe lorsque ε' et ε'' ne sont plus indépendants. Traitons l'exemple de la fonction ϕ qui prend les valeurs $\phi(y) = (y - y_1)^{-1}$ pour $|y| \leq a$. Nous avons :

$$\int_{-a}^{y_1 - \varepsilon'} \frac{1}{y - y_1} dy + \int_{y_1 + \varepsilon''}^a \frac{1}{y - y_1} dy = \ln \frac{a - y_1}{y_1 + a} + \ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}. \quad (\text{A3.3})$$

Quand ε' et ε'' tendent vers zéro, la quantité (A3.3) n'a pas de limite. Par contre, si ε' et ε'' sont reliés ($\varepsilon' = \lambda \varepsilon''$, où λ est une constante positive), alors la somme (A3.3) a pour limite :

$$\ln \frac{a - y_1}{y_1 + a} + \ln \lambda.$$

En particulier, si $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$, elle devient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-a}^{y_1 - \varepsilon} \frac{1}{y - y_1} dy + \int_{y_1 + \varepsilon}^a \frac{1}{y - y_1} dy \right] = \ln \frac{a - y_1}{y_1 + a}. \quad (\text{A3.4})$$

Nous introduisons maintenant la définition suivante. Supposons que la fonction ϕ soit définie sur l'intervalle $|y| \leq a$, et soit intégrable sur chacun des intervalles $-a \leq y \leq y_1 - \varepsilon$ et $y_1 + \varepsilon \leq y \leq a$, avec ε nombre positif. La *valeur principale de l'intégrale* de la fonction ϕ dans l'intervalle $|y| \leq a$ est le nom donné à la limite (si elle existe) définie par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-a}^{y_1 - \varepsilon} \frac{1}{y - y_1} dy + \int_{y_1 + \varepsilon}^a \frac{1}{y - y_1} dy \right]. \quad (\text{A3.5})$$

Nous parlerons dans ce manuscrit d'*intégrale singulière* au lieu de « valeur principale d'une intégrale ». Nous désignons la valeur principale d'une intégrale par le même symbole que celui employé pour l'intégrale ordinaire (définie au sens de Riemann). Lorsque l'intégrale au sens classique n'a pas de signification, sa valeur principale est sous-entendue. Ainsi, d'après l'Éq. (A3.4), l'intégrale singulière :

$$\int_{-a}^a \frac{1}{y - y_1} dy = \ln \frac{a - y_1}{y_1 + a}, \quad |y_1| \leq a, \quad (\text{A3.6})$$

existe.

Rappelons la *condition de Lipchitz* avec l'exposant α ($\text{Lip } \alpha$) : $\exists M$ et α , deux constantes ($0 < \alpha \leq 1$), telles que $\forall (y', y'') / y', y'' \in [-a, a]$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$|\phi(y') - \phi(y'')| < M |y' - y''|^\alpha. \quad (\text{A3.7})$$

Démontrons le théorème suivant. Si $\phi(y) \in \text{Lip } \alpha$, l'intégrale singulière est telle que :

$$\int_{-a}^a \frac{\phi(y)}{y - y_1} dy < \infty, \quad \forall |y_1| \leq a. \quad (\text{A3.8})$$

L'intégrale ci-dessus peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{-a}^a \frac{\phi(y) - \phi(y_1)}{y - y_1} dy + \phi(y_1) \int_{-a}^a \frac{1}{y - y_1} dy. \quad (\text{A3.9})$$

Dans la première intégrale, la fonction à intégrer satisfait l'inégalité (A3.7), soit :

$$\left| \frac{\phi(y) - \phi(y_1)}{y - y_1} \right| < M |y - y_1|^{\alpha-1}.$$

Cette intégrale existe en tant qu'intégrale impropre pour $\alpha < 1$ et comme intégrale définie au sens de Riemann pour $\alpha = 1$ [‡]. La seconde intégrale existe en vertu de la relation (A3.6). Finalement, l'inégalité (A3.8) est vérifiée.

Les résultats de ce paragraphe seront utiles dans ce qui suit.

[‡] $\alpha = 1$ traduit le fait que la dérivée de la fonction ϕ est bornée sur l'intervalle $|y| \leq a$ (formule des accroissements finis de Lagrange).

A3.2 Réduction à une intégrale singulière

Rappelons le *lemme de Riemann-Lebesgue*. Supposons que l'intégrale $\int_a^b \phi(v) \cos(Xv) dv$ existe et (si c'est une intégrale impropre) soit absolument convergente. Alors, nous avons (Whittaker & Watson 1965) :

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_a^b \phi(v) \begin{pmatrix} \cos(Xv) \\ \sin(Xv) \end{pmatrix} dv = O(1). \quad (\text{A3.10})$$

Considérons maintenant l'intégrale double dans le membre de gauche de l'Éq. (II.26). Puisque $\beta(\xi)/\xi$ est une fonction impaire, cette intégrale s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \frac{\beta(\xi)}{\xi} b(v) \sin(\xi(v - y_1)) dv d\xi, \quad |y_1| < a. \quad (\text{A3.11})$$

Lorsque ξ tend vers l'infini, le rapport $\beta(\xi)/\xi$ approche un (voir Éq. (II.55)). Ainsi, nous écrivons l'intégrale (A3.11) sous la forme :

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_{-a}^a \left(\frac{\beta(\xi)}{\xi} - 1 \right) b(v) \sin(\xi(v - y_1)) dv d\xi + \int_0^\infty \int_{-a}^a b(v) \sin(\xi(v - y_1)) dv d\xi \right], \quad |y_1| < a. \quad (\text{A3.12})$$

Les ordres d'intégration de la première intégrale sont commutés parce que l'intégrand diminue comme ξ^{-2} lorsque $\xi \rightarrow \infty$, alors que dans la seconde, cette commutation est seulement valable sur un intervalle borné. Ainsi, nous écrivons l'intégrale (A3.12) sous la forme :

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_{-a}^a b(v) S(v - y_1) dv - I_\infty(y_1) \right], \quad |y_1| < a, \quad (\text{A3.13})$$

où la fonction S est donnée par l'Éq. (II.29) et

$$I_\infty(y_1) = \lim_{X \rightarrow \infty} I(X) = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \int_{-a}^a b(v) \sin(\xi(v - y_1)) dv d\xi. \quad (\text{A3.14})$$

En commutant les ordres d'intégration dans l'intégrale $I(X)$ de l'Éq. (A3.14), nous obtenons après intégration :

$$I(X) = \int_{-a}^a \frac{b(v)}{v - y_1} dv - \int_{-a}^a \frac{b(v)}{v - y_1} \cos(X(v - y_1)) dv. \quad (\text{A3.15})$$

En tenant compte des Éqs. (A3.8) et (A3.9), l'Éq. (A3.15) devient :

$$I(X) = \int_{-a}^a \frac{b(v) - b(y_1)}{v - y_1} \left(1 - \cos(X(v - y_1)) \right) dv + b(y_1) \int_{-a}^a \frac{1}{v - y_1} \left(1 - \cos(X(v - y_1)) \right) dv. \quad (\text{A3.16})$$

À l'aide du lemme (A3.10) et de la relation (A3.6), nous évaluons la limite de $I(X)$ lorsque X tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}\lim_{X \rightarrow \infty} I(X) &= \int_{-a}^a \frac{b(v) - b(y_1)}{v - y_1} dv + b(y_1) \ln \frac{a - y_1}{y_1 + a} \\ &= \int_{-a}^a \frac{b(v)}{v - y_1} dv + b(y_1) \ln \frac{a - y_1}{y_1 + a} - b(y_1) \ln \frac{a - y_1}{y_1 + a}.\end{aligned}\tag{A3.17}$$

Finalement, nous avons montré que :

$$I_\infty(y_1) = \int_{-a}^a \frac{b(v)}{v - y_1} dv.\tag{A3.18}$$

Il est clair que l'intégration dans le membre de droite est faite au sens des valeurs principales si $|y_1| < a$. Notons que l'expression $\frac{dv}{v - y_1}$ est appelé *noyau de Cauchy*. Ainsi, l'intégrale correspondante est appelée *intégrale de type Cauchy*. Le dernier résultat, combiné à l'Éq. (A3.13), conduit à démontrer l'Éq. (II.28).

Annexe A4

Résolution numérique d'une équation intégrale singulière

Dans cette annexe, nous présentons la méthode de résolution numérique de l'équation intégrale singulière de type Cauchy (II.30) (écrite sous la forme adimensionnelle (II.53)), dont l'inconnue est la densité de dislocation à travers les lèvres d'une fissure visqueuse antiplane.

A4.1 Méthodologie

La densité de dislocation $\tilde{b}(v)$ vérifiant l'équation intégrale singulière (II.53) et la restriction (II.54), possède une singularité de type *racine carré* en $v = \pm 1$. Ceci peut être démontré en analysant la partie dominante de l'Éq. (II.53) à l'aide des méthodes développées par Muskhelishvili (1953). Comme également mentionné par Erdogan & Gupta (1972), le comportement de $\tilde{b}(v)$ autour de $v = \pm 1$ peut être décrit par le facteur $(1+v)^{-1/2+\zeta'}(1-v)^{1/2+\zeta''}$, où $\zeta', \zeta'' = 0, \pm 1$.

Or le déplacement u_2 est continu aux pointes de la fissure, mais la composante σ_{23} du vecteur contrainte a une singularité de type *racine carré* en ces points (Sih 1973). Cette considération implique que $\zeta' = 0$ et $\zeta'' = -1$. Ainsi, afin de régulariser l'intégrale (II.53), nous décomposons la densité de dislocation $\tilde{b}(v)$ en deux parties : une fonction ψ (bornée et continue sur tout l'intervalle) appelée *partie régulière* de la densité de dislocation qui est inconnue, et une fonction w qui a le même comportement singulier que \tilde{b} et est de la forme :

$$w(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (\text{A4.1})$$

tel que :

$$\tilde{b}(v) = w(v)\psi(v). \quad (\text{A4.2})$$

Cette nouvelle forme de $\tilde{b}(v)$ est substituée dans l'Éq. (II.53). Les méthodes numériques disponibles pour résoudre l'équation intégrale singulière de type Cauchy (II.53) considèrent un ensemble de $(N-1)$ *points de collocation* y_k le long de la fissure ($k = 1, 2, \dots, N-1$), où l'équation doit être satisfaite. Les inconnues sont les valeurs nodales $\psi(v_i)$ de la fonction ψ pour un ensemble de N *points nodaux* (ou d'intégration) v_i , pris le long de la fissure ($i = 1, 2, \dots, N$). À chacun de ces points, différents des points de collocation, est affecté un *poids* H_i . L'intégrale singulière de type Cauchy de l'Éq. (II.53) est alors réduite à une somme algébrique sur les points nodaux. Ainsi, l'Éq. (II.53) est équivalente à un système d'équations, dont chaque équation est associée à un point de collocation, comme suit :

$$\sum_{i=1}^N H_i \frac{\psi(v_i)}{v_i - y_k} + \sum_{i=1}^N H_i \psi(v_i) \left[\tilde{S}(v_i - y_k) + \tilde{\mathfrak{S}}(v_i - y_k) \right] = \tilde{g}(y_k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (\text{A4.3})$$

où les poids H_i sont fonction des points nodaux v_i .

Il existe plusieurs façons d'évaluer les intégrales singulières de type Cauchy (Polyanin & Manzhirov 1998). La méthode la plus utilisée est la *quadrature de Gauss-Tchebychev* (Hildebrand 1956, Abramowitz & Stegun 1970) employée par Erdogan & Gupta (1972), dans laquelle les fonctions poids H_i de l'Éq. (A4.3) sont toutes égales et données par (Hildebrand 1956) :

$$H_i = \frac{\pi}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A4.4})$$

Les points v_i et y_k sont également fonctions de leur indice ou position (Hildebrand 1956) :

$$v_i = \cos \frac{\pi(2i-1)}{2N}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A4.5})$$

et

$$y_k = \cos \frac{\pi k}{N}, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (\text{A4.6})$$

Par ailleurs, la condition de fermeture (II.54) se réduit également à une équation algébrique pour l'inconnue $\psi(v_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) de la forme :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\pi}{N} \psi(v_i) = 0. \quad (\text{A4.7})$$

Nous avons maintenant un système de N équations algébriques linéaires à N inconnues qui peut par exemple être résolu numériquement en utilisant l'algorithme d'*élimination de Gauss-Jordan* (Carnahan *et al.* 1969).

A4.2 Discrétisation de l'équation intégrale singulière

Dans cette section, nous établissons l'Éq. (A4.3). On montre que si la densité $\tilde{b}(v)$ possède des singularités intégrables aux pointes de la fissure $v = \pm 1$, la fonction w donnée par l'Éq. (A4.1), correspond à la fonction poids des *polynômes de Tchebychev de première espèce* $\tau_i(v)$. Ces polynômes forment une famille de polynômes orthogonaux par rapport à cette fonction poids et constituent une base pour l'ensemble des fonctions continues. Ainsi, la partie régulière ψ de la densité de dislocation s'écrit comme une combinaison linéaire des polynômes $\tau_i(v)$:

$$\psi(v) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \tau_i(v). \quad (\text{A4.8})$$

Afin d'approximer l'intégrale singulière de type Cauchy de l'Éq. (II.53), nous aurons besoin des relations suivantes (Erdogan & Gupta 1972) :

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathcal{T}_i(v)}{(v-y)\sqrt{1-v^2}} dv = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \pi \mathcal{U}_{i-1}(y), & i > 0, \end{cases} \quad (\text{A4.9})$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{T}_j(v_i)}{N(v_i - y_k)} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \pi \mathcal{U}_{i-1}(y_k), & i > 0, \end{cases} \quad (\text{A4.10})$$

où $\mathcal{U}_i(v)$ sont les *polynômes de Tchebychev de seconde espèce*. L'équation (A4.10) est valable seulement pour les suites de points (v_i) et (y_k) avec $i = 1, 2, \dots, N$ et $k = 1, 2, \dots, N-1$ tels que $\mathcal{T}_N(v_i) = 0$ et $\mathcal{U}_{N-1}(y_k) = 0$. Ces ensembles (v_i) et (y_k) correspondent respectivement aux racines des polynômes de Tchebychev d'ordre N et $N-1$, et sont définis par les relations (A4.5) et (A4.6)

En utilisant l'expression de régularisation (A4.2) et en tronquant la série infinie (A4.8) à l'ordre N , nous trouvons que :

$$I(y) = \int_{-1}^1 \frac{\tilde{b}(v)}{v-y} dv \simeq \sum_{i=0}^N A_i \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{T}_i(v)}{(v-y)\sqrt{1-v^2}} dv, \quad |y| < 1. \quad (\text{A4.11})$$

À l'aide de l'Éq. (A4.9), l'équation précédente se réduit à :

$$I(y) \simeq \sum_{i=1}^N \pi A_i \mathcal{U}_{i-1}(y), \quad |y| < 1. \quad (\text{A4.12})$$

En évaluant l'Éq. (A4.12) aux points y_k pour $k = 1, 2, \dots, N-1$ tout en tenant compte des relations (A4.8) et (A4.10), nous trouvons que :

$$I(y_k) \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\psi(v_i)}{v_i - y_k}, \quad (\text{A4.13})$$

qui est une approximation de l'intégrale $I(y)$.

Le même procédé peut être utilisé afin d'écrire la partie dominante du membre de gauche de l'équation intégrale (II.53). Le résultat obtenu est alors présenté dans l'Éq. (A4.3).

Annexe A5

Méthode d'intégrale de frontière et Fonction de Green en milieu isotrope

Le problème posé est le suivant : quelle est la réponse dynamique d'un espace solide purement élastique à une source linéique localisée et harmonique ? C'est à travers le calcul de la fonction de Green bidimensionnelle de l'élastodynamique qu'on y accède. Nous établissons ensuite des équations intégrales de frontière permettant de résoudre les problèmes liés à l'équation de Helmholtz.

A5.1 Fonction de Green pour l'équation de Helmholtz bidimensionnelle

L'équation de Helmholtz joue un rôle important en mathématique physique. La fonction de Green G de l'équation d'onde dans un milieu isotrope ayant une célérité de phase c constante, satisfait :

$$\Delta G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)}{\partial t^2} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (\text{A5.1})$$

La fonction de Green dépend de la position relative $\vec{r} - \vec{r}_0$ et du temps relatif $t - t_0$. Néanmoins, sans perdre en généralité, nous prenons la source à l'origine ($r_0 = 0$) agissant à l'instant $t_0 = 0$. Il suit de considérations de symétrie, que la fonction de Green dépend seulement de la distance relative $|\vec{r} - \vec{r}_0| = r$. La relation (A5.1) devient :

$$\Delta G(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(r, t)}{\partial t^2} = \delta(\vec{r}) \delta(t). \quad (\text{A5.2})$$

Si nous appliquons la transformée de Fourier (I.10) à l'Éq. (A5.2), nous montrons que la fonction de Green satisfait (dans le domaine fréquentiel) l'équation suivante :

$$\Delta G(r, \omega) + k^2 G(r, \omega) = \delta(\vec{r}), \quad (\text{A5.3})$$

où $k = \omega/c$ représente le nombre d'onde. Cette équation est appelée l'équation de Helmholtz avec terme source, qui est la reformulation de l'équation d'onde (A5.2) dans le domaine fréquentiel.

En coordonnées cylindriques (r, θ) , nous nous attendons à ce que G soit axisymétrique, puisque le Laplacien Δ (où les dérivées sont prises seulement par rapport à r) et $\delta(\vec{r})$ le sont. Ainsi, nous recherchons une fonction G qui satisfait (compte tenu de l'Éq. (A2.2)) :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG(r, \omega)}{dr} \right) + k^2 G(r, \omega) = 0, \quad r > 0, \quad (\text{A5.4})$$

soit :

$$r^2 G'' + r G' + k^2 r^2 G = 0. \quad (\text{A5.5})$$

L'équation (A5.5) est une équation différentielle du second ordre. Elle doit être complétée par deux conditions limites. Une première spécifie que la source est localisée en un point, ici à l'origine ($r_0 = 0$) (Rother *et al.* 2002) :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \partial D_r \frac{\partial G}{\partial r} = 1, \quad (\text{A5.6})$$

où ∂D_r est la frontière d'un disque D_r de rayon r . La seconde condition traduit le fait que les ondes générées par la source doivent s'éloigner de la source (condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld) (Colton & Kress 1992) :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} G(r, \omega) - ikG(r, \omega) \right] = 0. \quad (\text{A5.7})$$

Une solution générale de l'Éq. (A5.5) est de la forme* ($n = 0$) :

$$G(r, \omega) = AZ_0^{(1)}(kr) + BZ_0^{(2)}(kr), \quad (\text{A5.8})$$

où A et B sont des constantes arbitraires, et $Z_0^{(1)}(kr)$ et $Z_0^{(2)}(kr)$ sont deux fonctions de Bessel indépendantes. La fonction G devant nécessairement respecter la condition de Sommerfeld (A5.7), nous en déduisons que G a pour expression :

$$G(r, \omega) = AH_0^{(1)}(kr). \quad (\text{A5.9})$$

La constante arbitraire A est alors déterminée à partir de la condition à la source (A5.6). À l'aide des résultats suivants :

$$\frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr) = k \frac{\partial}{\partial(kr)} H_0^{(1)}(kr), \quad (\text{A5.10})$$

$$H_0^{(1)}(z) = \left(1 + O(z^2) \right) + i \left[\frac{2}{\pi} (\ln z + O(1)) \right], \quad z \rightarrow 0, \quad (\text{A5.11})$$

nous trouvons que :

$$A = -\frac{i}{4}. \quad (\text{A5.12})$$

Ainsi la fonction de Green pour l'équation de Helmholtz bidimensionnelle est donnée par :

$$G(r, \omega) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr). \quad (\text{A5.13})$$

* L'équation de Bessel s'écrit (Abramowitz & Stegun 1970) :

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = 0$$

et a pour solution les fonctions de Bessel cylindriques notées $Z_n(z)$ dans ce paragraphe. L'équation de Bessel étant une équation différentielle de second ordre, elle possède deux solutions indépendantes qui seront notées ici $Z_n^{(1)}(z)$ et $Z_n^{(2)}(z)$. $Z_n(z)$ peut être soit la fonction de Bessel $J_n(z)$, soit la fonction de Neumann $N_n(z)$, soit une combinaison linéaire de ces deux fonctions, *i. e.* la fonction de Hankel de première espèce $H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iN_n(z)$ ou de seconde espèce $H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iN_n(z)$.

A5.2 Méthode d'intégrale de frontière : représentation de Kirchhoff-Helmholtz

Au paragraphe précédent, nous avons donné une représentation explicite de la *solution élémentaire* de l'équation de Helmholtz avec terme source (fonction de Green en espace infini), satisfaisant le principe de conservation de l'énergie (condition de Sommerfeld). L'objet du présent paragraphe est de donner une représentation générale de la solution des problèmes où les frontières sont présentes : le champ total résulte de la superposition du champ incident (champ créé par les sources en espace infini) et du champ rayonné par des sources fictives localisées sur la frontière du domaine de propagation (champ diffusé). Ces sources fictives sont telles que le champ total satisfait les conditions aux limites.

Soit D un domaine de \mathbb{R}^2 , limité par une frontière régulière ∂D , de normale extérieure unitaire \vec{n} ; D peut être un domaine borné (problème intérieur) ou non (problème extérieur). Soit f la distribution représentant les sources d'énergie. Le champ total $\phi(\vec{y})$ vérifie l'équation :

$$\left(\Delta_y + k^2\right)\phi(\vec{y}) = f(\vec{y}), \vec{y} \in D, \quad (\text{A5.14})$$

où :

$$\Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}.$$

Si le domaine D est non-borné, nous imposons la condition de Sommerfeld. On montre que si la distribution $f(\vec{y})$ est à support compact (*i. e.* si la source est localisée dans un domaine borné de l'espace), la solution $\phi(\vec{y})$ (si elle existe) est indéfiniment dérivable à l'extérieur du domaine occupé par la source.

Supposons que $\phi(\vec{y})$ soit continue et à dérivées premières continues jusque sur ∂D . Le domaine D est borné. Soit G une solution élémentaire de l'équation de Helmholtz

$$\left(\Delta_y + k^2\right)G(\vec{x};\vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \vec{x}, \vec{y} \in D. \quad (\text{A5.15})$$

Nous cherchons la solution $\phi(\vec{x})$. Il y a une infinité de solutions G dont les formes spécifiques sont obtenues lorsque nous imposons les conditions de continuité à la frontière ∂D . Notons que dans tous les problèmes de ce manuscrit, la fonction de Green est symétrique, *i. e.* $G(\vec{x};\vec{y}) = G(\vec{y};\vec{x})$.

Multiplions l'Éq. (A5.15) par $G(\vec{x};\vec{y})$ et l'Éq. (A5.14) par $\phi(\vec{y})$. La différence des expressions ainsi obtenues nous conduit à :

$$G(\vec{x}; \vec{y}) \Delta_y \phi(\vec{y}) - \phi(\vec{y}) \Delta_y G(\vec{x}; \vec{y}) = G(\vec{x}; \vec{y}) f(\vec{y}) - \phi(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A5.16})$$

En intégrant la relation (A5.16) par rapport à \vec{y} sur D , nous avons :

$$\int_D \left(G(\vec{x}; \vec{y}) \Delta_y \phi(\vec{y}) - \phi(\vec{y}) \Delta_y G(\vec{x}; \vec{y}) \right) d^2 \vec{y} = \int_D G(\vec{x}; \vec{y}) f(\vec{y}) d^2 \vec{y} - \int_D \phi(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) d^2 \vec{y}. \quad (\text{A5.17})$$

En utilisant le théorème de Green, nous trouvons :

$$\int_D \left(G(\vec{x}; \vec{y}) \Delta_y \phi(\vec{y}) - \phi(\vec{y}) \Delta_y G(\vec{x}; \vec{y}) \right) d^2 \vec{y} = \int_{\partial D} \left(G(\vec{x}; \vec{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \phi(\vec{y}) - \phi(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G(\vec{x}; \vec{y}) \right) d\vec{y}. \quad (\text{A5.18})$$

Enfin les propriétés de la fonction Dirac nous conduisent à :

$$\phi(\vec{x}) = \int_D G(\vec{x}; \vec{y}) f(\vec{y}) d^2 \vec{y} + \int_{\partial D} \left(\phi(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G(\vec{x}; \vec{y}) - G(\vec{x}; \vec{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \phi(\vec{y}) \right) d\vec{y}, \quad (\text{A5.19})$$

où $\partial / \partial \mathbf{n}_y$ désigne la dérivée par rapport à la composante y du vecteur normal à ∂D , *i. e.*

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y} = (\nabla_y G) \cdot \mathbf{n}_y.$$

La relation (A5.19) s'appelle la *représentation de Kirchhoff-Helmholtz* ou *représentation de Green*. Elle donne la valeur de $\phi(\vec{x})$ à l'intérieur de la région D en fonction d'une distribution de sources $f(\vec{y}) \in D$ et des valeurs ϕ et $\partial \phi / \partial \mathbf{n}_y$ sur la frontière ∂D . L'égalité (A5.19) est vraie pour toutes les fonctions $G(\vec{x}; \vec{y})$ qui satisfont l'Éq. (A5.15). Nous choisissons une fonction de Green de l'espace libre qui nous conduit à une équation intégrale à résoudre numériquement. C'est l'essence même des méthodes d'intégrale de frontière. Notons que l'équation intégrale est unidimensionnelle tandis que le problème original est bidimensionnel. Cette réduction de dimension explique l'utilisation fréquente des méthodes d'intégrale de frontière.

Annexe A6

Diffusion d'une onde antiplane par une fibre élastique elliptique

Dans cette annexe, la diffusion d'une onde plane TH par une fibre cylindrique à section elliptique est décrite à l'aide de la théorie modale. Les solutions générales de l'équation de Helmholtz à l'extérieur et à l'intérieur de la fibre sont calculées à l'aide des fonctions d'onde elliptiques (utilisant les fonctions de Mathieu angulaires et radiales). La limite basse fréquence de l'amplitude de diffusion de la fibre elliptique (de module de rigidité μ_1) est établie. Les cas de cavité vide ou saturée d'un fluide visqueux de viscosité dynamique η_0 sont traités en fixant respectivement $\mu_1 = 0$ et $\mu_1 = -i\omega\eta_0$.

A6.1 Diffusion simple par une fibre elliptique

Considérons une onde plane TH incidente sur une fibre cylindrique à section elliptique. L'onde se propage dans le plan (y_1, y_3) selon un angle θ_0 avec l'axe y_1 .⁺ Son champ de déplacement est donné par l'Éq. (I.74), soit :

$$u_2^{\text{inc}}(\xi, \eta, q_0) = 2u_0 \sum_{\sigma, n} A_n^\sigma \widehat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q_0), \quad (\text{A6.1})$$

avec $A_n^\sigma = i^n e_{\sigma n}(\theta_0, q_0)$ et $2\sqrt{q_0} = k_T a$. Le champ de déplacement diffusé u_2^{dif} , similaire à l'Éq. (I.80), s'écrit :

$$u_2^{\text{dif}}(\xi, \eta, q_0) = 2u_0 \sum_{\sigma, n} C_n^\sigma \psi_{\sigma n}(\xi, \eta, q_0), \quad (\text{A6.2})$$

où C_n^σ représente les coefficients de diffusion inconnus. Les fonctions d'onde elliptiques sortante $\psi_{\sigma n}$ et régulière $\widehat{\psi}_{\sigma n}$ sont définies par les Éqs. (I.72) et (I.73). Le champ de déplacement total à l'extérieur du cylindre est tel que :

$$u_2^{\text{tot}}(\xi, \eta, q_0) = 2u_0 \sum_{\sigma, n} \left[A_n^\sigma \widehat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q_0) + C_n^\sigma \psi_{\sigma n}(\xi, \eta, q_0) \right], \quad u_\xi = u_\eta = 0. \quad (\text{A6.3})$$

Puisque le diffuseur est une inclusion élastique de module de rigidité μ_1 et de masse volumique ρ_1 , le champ de déplacement réfracté à l'intérieur du cylindre ($\xi < \xi_0$), $u_2^{\text{réf}}$, solution de l'équation de Helmholtz, s'écrit :

$$u_2^{\text{réf}}(\xi, \eta, q_1) = 2u_0 \sum_{\sigma, n} D_n^\sigma \widehat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta, q_1), \quad (\text{A6.4})$$

où $2\sqrt{q_1} = k_1 a = \omega a / c_1$ et $c_1^2 = \mu_1 / \rho_1$. Les coefficients inconnus C_n^σ et D_n^σ sont déterminés à partir des conditions de continuité à la surface du cylindre. Ces conditions traduisent la continuité du champ de déplacement et de la contrainte associée, en $\xi = \xi_0$:

$$u_2^{\text{tot}} \Big|_{\xi=\xi_0} = u_2^{\text{réf}} \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (\text{A6.5})$$

et

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial \xi} u_2^{\text{tot}} \Big|_{\xi=\xi_0} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial \xi} u_2^{\text{réf}} \Big|_{\xi=\xi_0}. \quad (\text{A6.6})$$

⁺ Dans cette annexe nous reprenons les notations du Chapitre I pour les variables angulaires ($\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$).

Les conditions (A6.5) et (A6.6) autorisent l'identification des coefficients C_n^σ et D_n^σ . Cependant, la résolution de ce problème n'est pas immédiate : les fonctions de Mathieu angulaires $e_{\sigma n}(\eta, q_0)$ et $e_{\sigma n}(\eta, q_1)$ ne sont pas orthogonales entre elles lorsque $q_1 \neq q_0$.

En substituant les représentations (A6.3) et (A6.4) dans les conditions limites (A6.5) et (A6.6), nous obtenons deux relations de la forme suivante :

$$\sum_{\sigma, n} X_{\sigma n} e_{\sigma n}(\eta, q_0) = \sum_{\sigma, n} Y_{\sigma n} e_{\sigma n}(\eta, q_1). \quad (\text{A6.7})$$

Comme les fonctions de Mathieu $e_{\sigma n}$ sont orthogonales pour q_0 ou q_1 donné et quel que soit $-\pi \leq \eta \leq \pi$, il suit de l'Éq. (A6.7) que chaque expression $Y_{\sigma n}$ (D_n^σ) peut être représentée de façon explicite en fonction des quantités $X_{\sigma m}$ (C_m^σ) et *vice versa*. Dans ces représentations, n et m ont la même parité. En particulier, nous avons :

$$D_n^\sigma M_{\sigma n}^{(1)}(\xi_0, q_1) = \sum_{\sigma, m} N_{mn}^\sigma \left[A_m^\sigma M_{\sigma m}^{(1)}(\xi_0, q_0) + C_m^\sigma M_{\sigma m}^{(3)}(\xi_0, q_0) \right], \quad (\text{A6.8})$$

$$M D_n^\sigma M_{\sigma n}^{(1)'}(\xi_0, q_1) = \sum_{\sigma, m} N_{mn}^\sigma \left[A_m^\sigma M_{\sigma m}^{(1)'}(\xi_0, q_0) + C_m^\sigma M_{\sigma m}^{(3)'}(\xi_0, q_0) \right], \quad (\text{A6.9})$$

où $M = \mu_1 / \mu_0$ et $M_{\sigma m}^{(1)'}(\xi_0, q) = [(\partial / \partial \xi) M_{\sigma m}^{(1)}(\xi, q)]_{\xi=\xi_0}$, etc. Le terme N_{mn}^σ est donné par :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_{\sigma m}(\eta, q_0) e_{\sigma n}(\eta, q_1) d\eta = \begin{cases} 0, & (m+n)/2 \notin \mathbb{N}, \\ N_{mn}^\sigma, & (m+n)/2 \in \mathbb{N}, \\ \pi \delta_{mn}, & q_0 = q_1. \end{cases} \quad (\text{A6.10})$$

Un système infini d'équations satisfaites par les coefficients C_m^σ est obtenu en combinant les expressions (A6.8) et (A6.9). Le système résultant s'exprime sous une forme compacte à l'aide des définitions suivantes :

$$h_{mn}^\sigma(\xi_0, q_0, q_1) = j_{mn}^\sigma(\xi_0, q_0, q_1) + i y_{mn}^\sigma(\xi_0, q_0, q_1), \quad (\text{A6.11})$$

$$j_{mn}^\sigma(\xi_0, q_0, q_1) = M_{\sigma m}^{(1)'}(\xi_0, q_0) M_{\sigma n}^{(1)}(\xi_0, q_1) - M M_{\sigma n}^{(1)'}(\xi_0, q_1) M_{\sigma m}^{(1)}(\xi_0, q_0), \quad (\text{A6.12})$$

$$y_{mn}^\sigma(\xi_0, q_0, q_1) = M_{\sigma m}^{(2)'}(\xi_0, q_0) M_{\sigma n}^{(1)}(\xi_0, q_1) - M M_{\sigma n}^{(1)'}(\xi_0, q_1) M_{\sigma m}^{(2)}(\xi_0, q_0). \quad (\text{A6.13})$$

Nous avons alors :

$$\sum_{\sigma, m} N_{mn}^\sigma h_{mn}^\sigma C_m^\sigma = U_n^\sigma, \quad (\text{A6.14})$$

où :

$$U_n^\sigma = -\sum_{\sigma,m} N_{mn}^\sigma j_{mn}^\sigma A_m^\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A6.15})$$

La relation (A6.14) représente quatre systèmes d'équations découplés, un pour chaque amplitude C_{2m}^c , C_{2m+1}^c , C_{2m}^s et C_{2m+1}^s . Substituons les coefficients C_m^σ dans l'Éq. (A6.14) par leurs expressions en fonction de $e_{\sigma m}(\theta_0, q_0)$. Guidés par l'expression de U_n^σ , nous cherchons ces inconnues sous la forme suivante :

$$C_m^\sigma = \sum_{p=0}^{+\infty} T_{mp}^\sigma A_p^\sigma, \quad (\text{A6.16})$$

où m et p ont la même parité. En introduisant l'Éq. (A6.16) dans le système (A6.14) et en utilisant l'orthogonalité des fonctions de Mathieu angulaires (I.70), nous obtenons le système d'équations suivant pour les coefficients T_{mp}^σ :

$$\sum_{\sigma,m} N_{mn}^\sigma h_{mn}^\sigma T_{mp}^\sigma = -N_{pn}^\sigma j_{pn}^\sigma, \quad (\text{A6.17})$$

quel que soit $p = 0, 1, 2, \dots$ et $n = 0, 1, 2, \dots$. Ainsi, le système (A6.17) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$T^\sigma = -\text{Re}(Q^\sigma)(Q^\sigma)^{-1}, \quad (\text{A6.18})$$

où la matrice de transition inconnue T^σ (d'éléments $\{T_{mp}^\sigma\}$) a la même dimension que la matrice carrée Q^σ (d'éléments $\{N_{mn}^\sigma h_{mn}^\sigma\}$). C'est la réciproque de l'amplitude de diffusion, *i. e.* $f(\theta, \theta_0) = f(\theta_0 + \pi, \theta + \pi)$, qui implique la symétrie $T_{mp}^\sigma = T_{pm}^\sigma$ (voir Éqs. (I.90) et (I.91)), qui nous a permis d'écrire la relation (A6.18).

Rappelons les développements en séries de Fourier des fonctions $e_{\sigma n}(\eta, q_0)$. Dépendant de la parité $\sigma = c, s$, ces fonctions s'expriment comme :

$$e_{\sigma n}(\eta, q_0) = \sum_{r=0}^{+\infty} A_{\sigma r}^{(n)}(q_0) \vartheta(r, \eta), \quad (\text{A6.19})$$

avec :

$$\vartheta(r, \eta) = \begin{cases} \cos r\eta, & \sigma = c, \\ \sin r\eta, & \sigma = s, \end{cases}$$

et où $A_{\sigma r}^{(n)}$ représentent les coefficients caractéristiques associés aux valeurs propres $\lambda \in \{a_n, b_n\}$ (voir l'Annexe A1). En se rapportant à la représentation (A6.19), les coefficients N_{mn}^σ se réduisent à :

$$N_{mn}^\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r,p} A_{\sigma r}^{(n)}(q_0) A_{\sigma p}^{(m)}(q_1) \vartheta_r(\eta) \vartheta_p(\eta) d\eta = \pi \sum_{r,p} A_{\sigma r}^{(n)}(q_0) A_{\sigma p}^{(m)}(q_1) \delta_{rp},$$

ou encore à :

$$N_{mn}^\sigma = \begin{cases} \pi \sum_{r,p} A_{\sigma r}^{(n)}(q_0) A_{\sigma p}^{(m)}(q_1) = \begin{cases} \pi \sum_p A_{\sigma p}^{(n)}(q_0) A_{\sigma p}^{(n)}(q_1), & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} & r = p, \\ 0, & r \neq p \text{ et / où } m \neq n. \end{cases}$$

Nous obtenons alors :

$$N_{mn}^\sigma = \pi \sum_{p=0}^{\infty} A_{\sigma p}^{(n)}(q_0) A_{\sigma p}^{(n)}(q_1) = N_{mn}^\sigma \equiv N_n^\sigma. \quad (\text{A6.20})$$

En annulant dans les conditions (A6.5) et (A6.6), les coefficients en facteur des fonctions $\cos r\eta$ et de $\sin r\eta$, nous établissons deux équations pour les inconnues C_n^σ et D_n^σ . Elles s'écrivent pour $r = 0, 1, 2, \dots$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{rn}^\sigma(q_0) C_n^\sigma + b_{rn}^\sigma(q_1) D_n^\sigma) = U_r^\sigma(q_0), \quad (\text{A6.21})$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{rn}^{\sigma'}(q_0) C_n^\sigma + M b_{rn}^{\sigma'}(q_1) D_n^\sigma) = V_r^\sigma(q_0), \quad (\text{A6.22})$$

$$\text{où : } a_{rn}^\sigma(q_0) = M_{\sigma n}^{(3)}(\xi_0, q_0) A_{\sigma r}^{(n)}(q_0), \quad b_{rn}^\sigma(q_1) = -M_{\sigma n}^{(1)}(\xi_0, q_1) A_{\sigma r}^{(n)}(q_1), \quad (\text{A6.23})$$

$$a_{rn}^{\sigma'}(q_0) = M_{\sigma n}^{(3)'}(\xi_0, q_0) A_{\sigma r}^{(n)}(q_0), \quad b_{rn}^{\sigma'}(q_1) = -M_{\sigma n}^{(1)'}(\xi_0, q_1) A_{\sigma r}^{(n)}(q_1). \quad (\text{A6.24})$$

Les fonctions U_r^σ et V_r^σ sont définies par :

$$U_r^\sigma(q_0) = -\sum_{n=0}^{+\infty} i^n e_{\sigma n}(\theta_0, q_0) M_{\sigma n}^{(1)}(\xi_0, q_0) A_{\sigma r}^{(n)}(q_0), \quad (\text{A6.25})$$

$$V_r^\sigma(q_0) = -\sum_{n=0}^{+\infty} i^n e_{\sigma n}(\theta_0, q_0) M_{\sigma n}^{(1)'}(\xi_0, q_0) A_{\sigma r}^{(n)}(q_0). \quad (\text{A6.26})$$

Considérons les matrices carrées :

$$A = \{a_{rn}^\sigma(q_0)\}, \quad A' = \{a_{rn}^{\sigma'}(q_0)\}, \quad B = \{b_{rn}^\sigma(q_1)\}, \quad B' = \{b_{rn}^{\sigma'}(q_1)\}, \quad (\text{A6.27})$$

et les vecteurs :

$$C = \{C_n^\sigma\}, \quad D = \{D_n^\sigma\}, \quad U = \{U_r^\sigma\}, \quad V = \{V_r^\sigma\}. \quad (\text{A6.28})$$

Avec ces notations, les systèmes (A6.21) et (A6.22) s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}. \quad (\text{A6.29})$$

Ainsi, le calcul de la matrice C :

$$C = (B'A - BA')^{-1} (B'U - BV), \quad (\text{A6.30})$$

autorise alors celui des coefficients $\{C_n^\sigma\}$, amplitudes modales du déplacement diffusé par la fibre elliptique.

A6.2 Approximation basse fréquence de l'amplitude de diffusion

Dans la limite des basses fréquences, la taille caractéristique \tilde{a} de la fibre (Éq. (I.94)) est négligeable devant la longueur d'onde de l'onde incidente λ_T , $\lambda_T \gg \tilde{a}$. Calculons alors les développements asymptotiques des coefficients de diffusion C_n^σ . En substituant les développements asymptotiques des fonctions de Mathieu donnés par Burke & Twersky (1964) dans le système (A6.30), nous obtenons après quelques manipulations algébriques, longues mais directes, les expressions suivantes des coefficients de diffusion d'une fibre elliptique :

$$C_0^c(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi\tau}{8} (R - 1) - \frac{\pi\tau^2}{16} (1 - R^2)^2 \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right] \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2\tau^2}{32} (1 - R)^2 \tilde{\omega}^4 (1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})), \quad (\text{A6.31})$$

$$C_1^c(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi\tau}{8} \frac{1 - M}{1 + \tau M} (1 + \tau) - \frac{\pi\tau^2}{32} \left(\frac{1 - M}{1 + \tau M} \right)^2 (1 + \tau)^2 \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right] \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2\tau^2}{64} \left(\frac{1 - M}{1 + \tau M} \right)^2 (1 + \tau)^2 \tilde{\omega}^4 (1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})), \quad (\text{A6.32})$$

$$C_1^s(\tilde{\omega}) = i \left[\frac{\pi\tau}{8} \frac{1 - M}{\tau + M} (1 + \tau) - \frac{\pi\tau^2}{32} \left(\frac{1 - M}{\tau + M} \right)^2 (1 + \tau)^2 \tilde{\omega}^2 (\ln \tilde{\omega} + O(1)) \right] \tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2\tau^2}{64} \left(\frac{1 - M}{\tau + M} \right)^2 (1 + \tau)^2 \tilde{\omega}^4 (1 + O(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega})), \quad (\text{A6.33})$$

et :
$$C_j^\sigma(\tilde{\omega}) = iO(\tilde{\omega}^4) + O(\tilde{\omega}^6 \ln \tilde{\omega}), \quad j \geq 2, \quad \sigma = c, s. \quad (\text{A6.34})$$

Ici, nous avons utilisé les notations suivantes :

$$R = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad M = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \quad \tau = \frac{a_3}{a_1} (= \text{atanh } \xi_0) \quad \text{et} \quad \tilde{\omega} = k_T \tilde{a}.$$

L'amplitude de diffusion en champ lointain (I.92) s'écrit alors :

$$f(\theta, \theta_0) = \frac{2}{i\pi} (C_0^c + C_1^s \sin \theta \sin \theta_0 + C_1^c \cos \theta \cos \theta_0). \quad (\text{A6.35})$$

Notons que le cas de cavité vide est traité en fixant $R = M = 0$ dans les Éqs. (A6.31) à (A6.34). Les expressions ainsi obtenues sont identiques aux Éqs. (I.96) à (I.99) du Chapitre I.

Annexe A7

Atténuation haute fréquence des ondes cohérentes dans un solide multifissuré

Dans cette annexe, une méthode est présentée pour calculer les limites haute fréquence de l'atténuation effective de l'onde cohérente TH se propageant dans un milieu multifissuré.

A7.1 Considérations énergétiques

Lorsque l'onde incidente rencontre une fissure, il se produit un phénomène élémentaire de diffusion. L'onde diffusée rayonne de l'énergie dans toutes les directions et cette énergie est soustraite à l'énergie de l'onde incidente. Cette dernière en est d'autant atténuée. Pour quantifier la puissance diffusée élémentaire, nous avons coutume d'introduire la notion de *section efficace de diffusion* σ_d (scattering cross section) qui est le rapport de la puissance moyenne diffusée sur une période $\langle \mathcal{S}^{\text{dif}} \rangle$ à la puissance moyenne incidente par unité de surface $\langle \mathcal{S}^{\text{inc}} \rangle$

$$\sigma_d = \frac{\langle \mathcal{S}^{\text{dif}} \rangle}{\langle \mathcal{S}^{\text{inc}} \rangle}. \quad (\text{A7.1})$$

Elle a la dimension d'une surface. En particulier, la section efficace de diffusion σ_d et l'amplitude de diffusion vers l'avant $f(\theta_0, \theta_0)$ d'une seule fissure sont reliées par :

$$\sigma_d = \frac{4\pi}{k_T} \text{Im} f(\theta_0, \theta_0), \quad (\text{A7.2})$$

où θ_0 est l'angle d'incidence (défini par rapport à la normale à la fissure). Ce théorème de conservation est le « théorème optique » dont on trouve dans la littérature de nombreuses démonstrations (Waterman & Truell 1961, Goodman 1996) : pour un milieu sans absorption intrinsèque, la perte d'énergie est reliée à la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion en champ lointain f dans la direction de propagation de l'onde incidente.

Lorsque les fissures sont suffisamment éloignées les unes des autres, *i. e.* dans le cas où le nombre de fissures n_0 par unité de surface est faible, ou encore lorsque la longueur d'onde est petite devant les tailles de fissures, nous pouvons considérer qu'il n'y a pas d'interaction entre les ondes diffusées (pas d'interférence et pas de phénomène de multidiffusion). Nous pouvons alors additionner les sections efficaces de diffusion (voir *e. g.* Waterman & Truell (1961)). Cette additivité des sections efficaces permet alors de faire l'approximation dite de *diffusion simple* (ou diffusion multiple du premier ordre) (Ishimaru 1997). Dans cette approximation, on considère que l'onde directe n'est plus l'onde incidente mais une onde atténuée par les phénomènes élémentaires de diffusion sur le chemin déjà parcouru.

Plus précisément, soit une onde directe de puissance moyenne $\langle \mathcal{S} \rangle$ par unité de surface. Dans l'élément de surface $dy_1 dy_3$, le nombre de fissures est $n_0 dy_1 dy_3$. Par définition des sections efficaces de diffusion et du principe de leur additivité, la puissance moyenne perdue $-\langle d\mathcal{S} \rangle$ par l'onde directe sur un trajet dy_3 vérifie (Sornette 1989) :

$$-\langle d\mathcal{S} \rangle dy_1 = n_0 \sigma_d \langle \mathcal{S} \rangle dy_1 dy_3, \quad (\text{A7.3})$$

qui nous conduit par intégration à :

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{S}^{\text{inc}} \rangle e^{-2\alpha y_3}, \quad (\text{A7.4})$$

où l'atténuation du champ de déplacement $u_2(y_3) = u_0 e^{-\alpha y_3} e^{ik_T y_3}$ vaut :

$$\alpha = \frac{1}{2} n_0 \sigma_d. \quad (\text{A7.5})$$

A7.2 Couche mince visqueuse

À haute fréquence, la longueur d'onde de l'onde incidente λ_T est beaucoup plus petite que la taille $2a$ d'une fissure, *i. e.* $\lambda_T \ll a$. Ainsi, la fissure peut être traitée comme infinie dans la direction x_1 , Figure A7.1. Dans cette approximation, la fissure peut être remplacée par une couche fluide visqueuse très mince. Ainsi, les composantes du déplacement sont obtenues en résolvant le problème simple de la propagation d'onde en présence d'une couche mince de fluide visqueux placée entre deux solides élastiques.

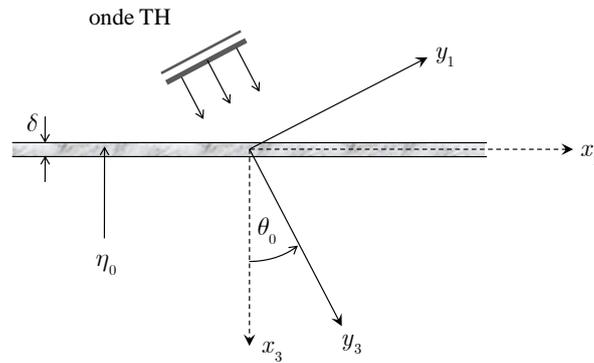


Figure A7.1 : Géométrie d'une fissure (d'épaisseur moyenne δ) saturée d'un fluide de viscosité dynamique η_0 .

Considérons une couche élastique, homogène et isotrope, d'épaisseur δ et située entre deux demi-espaces. La masse volumique de la couche est notée ρ' , la célérité de phase transverse c' et le module de rigidité $\mu' = \rho' c'^2$. Pour une onde TH incidente de la forme :

$$u_2^{\text{inc}} = u_0 e^{ik_T y_3} = u_0 e^{ik_T(x_3 \cos \theta_0 + x_1 \sin \theta_0)}, \quad (\text{A7.6})$$

où θ_0 désigne l'angle d'incidence, le champ de déplacement dans les deux demi-espaces s'écrit :

$$u_2(x_1, x_3) = u_0 e^{ik_T(x_3 \cos \theta_0 + x_1 \sin \theta_0)} + u_0 R e^{-ik_T(x_3 \cos \theta_0 - x_1 \sin \theta_0)}, \quad x_3 < -\frac{\delta}{2}, \quad (\text{A7.7})$$

$$u_2(x_1, x_3) = u_0 T e^{ik_T(x_3 \cos \theta_0 + x_1 \sin \theta_0)}, \quad x_3 > \frac{\delta}{2}. \quad (\text{A7.8})$$

Soient $z = \rho_0 c_T = k_T \mu_0 / \omega$ et $z' = \rho' c' = k' \mu' / \omega$ les impédances des demi-espaces et de la couche. En imposant les conditions de continuité du déplacement et du vecteur contrainte aux interfaces $x_3 = \pm \frac{\delta}{2}$, nous obtenons :

$$R = \frac{-i(Z^2 - Z'^2) \sin(k'\delta) Z'^{-1}}{2Z \cos(k'\delta) - i(Z^2 + Z'^2) \sin(k'\delta) Z'^{-1}}, \quad (\text{A7.9})$$

$$T = \frac{2Z}{2Z \cos(k'\delta) - i(Z^2 + Z'^2) \sin(k'\delta) Z'^{-1}}, \quad (\text{A7.10})$$

où $Z = z \cos \theta_0$ et $Z' = z' \cos \theta'$, qui peuvent également prendre les formes équivalentes (III.75) et (III.76).

Lorsque l'épaisseur de la couche δ est négligeable, nous avons $\omega\delta \ll 1$. En considérant la couche mince comparée à la longueur d'onde ($\delta \ll \lambda_T$) et d'impédance négligeable devant celle des demi-espaces ($|z'| \ll |z|$), nous obtenons :

$$\cos(k'\delta) \simeq 1 + c'^{-2} O(\omega^2 \delta^2) \text{ et } \frac{\sin(k'\delta)}{Z'} = \frac{\omega\delta}{\mu'} \{1 + c'^{-2} O(\omega^2 \delta^2)\}. \quad (\text{A7.11})$$

Supposant $\left| \frac{Z'}{Z} \right| = v \ll 1$, les Éqs. (A7.9) et (A7.10) se réduisent alors à :

$$R \simeq \frac{-iZ\omega\delta\mu'^{-1}}{2 - iZ\omega\delta\mu'^{-1}} + O(v^2) + O(\omega^2 \delta^2) \text{ et } T \simeq 1 - R. \quad (\text{A7.12})$$

Dans le cas d'une couche liquide de viscosité dynamique η_0 , nous avons $\mu' = -i\omega\eta_0$. Ainsi, l'Éq. (A7.12) devient :

$$R \simeq \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_0 + 2\sigma} \text{ et } T \simeq 1 - R, \quad (\text{A7.13})$$

où le paramètre adimensionnel σ représente la force du frottement visqueux définie par l'Éq. (II.13). Finalement, le saut du déplacement à travers les interfaces en $x_3 = \pm \frac{\delta}{2}$ peut être obtenu lorsque $\omega\delta \ll 1$, à partir des Éqs. (A7.7), (A7.8) et (A7.13)₂ :

$$\Delta u_2(x_1) = u_2(x_1, 0^+) - u_2(x_1, 0^-) = -2u_0 \text{Re}^{ik_T x_1 \sin \theta_0}. \quad (\text{A7.14})$$

Par ailleurs, la puissance moyenne sur une période des ondes planes TH diffusées par une fissure de taille $2a$ est définie par (Achenbach *et al.* 1982) :

$$\langle \mathcal{P}^{\text{dif}} \rangle = -\frac{1}{2} \mu_0 \omega k_T u_0 \cos \theta_0 \text{Re} \left(\int_{-a}^a \Delta u_2(v) e^{-ik_T v \sin \theta_0} dv \right). \quad (\text{A7.15})$$

En substituant l'Éq. (A7.14) dans l'Éq. (A7.15), nous obtenons :

$$\langle \mathcal{P}^{\text{dif}} \rangle = 2k_T a \omega \mu_0 u_0^2 \cos \theta_0 \text{Re}(R). \quad (\text{A7.16})$$

Pour une onde plane incidente de la forme (A7.6), la puissance moyenne par unité de surface peut être évaluée comme :

$$\langle \mathcal{S}^{\text{inc}} \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 \omega k_T u_0^2. \quad (\text{A7.17})$$

Ainsi, dans la limite des hautes fréquences, la section efficace de diffusion d'une fissure visqueuse est obtenue à partir des Éqs. (A7.1), (A7.13), (A7.16) et (A7.17) sous la forme :

$$\sigma_d = 4a \cos \theta_0 \operatorname{Re}(R) = \frac{4a \cos^2 \theta_0}{\cos \theta_0 + 2\sigma}. \quad (\text{A7.18})$$

En substituant l'Éq. (A7.18) dans l'Éq. (A7.5), nous déterminons la valeur haute fréquence de l'atténuation :

$$\alpha = \frac{2n_0 a \cos^2 \theta_0}{\cos \theta_0 + 2\sigma}, \quad \left(|\theta_0| \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{A7.19})$$

Pour une incidence normale ($\theta_0 = 0$) et une viscosité nulle ($\sigma = 0$), ce résultat est conforme aux limites analytiques de Caleap *et al.* (2009).

Modélisation de la propagation d'ondes élastiques antiplanes dans des milieux multifissurés

Résumé

L'objectif de ce travail est de modéliser la propagation des ondes cohérentes antiplanes dans une distribution aléatoire et uniforme de fissures fermées ou ouvertes, parallèles ou aléatoirement orientées. Elles contiennent un fluide visqueux ou leurs lèvres sont libres de contraintes. Les mécanismes de diffusion multiple entre fissures sont pris en compte. Une première étude porte sur la réponse d'une couche endommagée à faces parallèles, sollicitée à incidence normale. Les champs de déplacement cohérent siégeant dans les trois régions de l'espace sont déterminés. Par suite, la masse volumique et la rigidité effectives de la couche, vue homogène par l'onde cohérente, sont définies. Les cas d'une distribution de fissures à concentration variable et d'une onde de surface (de type Love) en présence d'une couche endommagée sur un substrat sain sont alors traités. Une dernière application concerne les populations de fissures visqueuses à tailles variables présentes dans la croûte terrestre.

Mots clés : Diffusion par une fissure ; Propagation d'ondes élastiques ; Diffusion multiple ; Milieu effectif ; Onde cohérente