www.cnrs.fr

Laboratoire MECANIQUE PHYSIQUE
Université Bordeaux 1 - CNRS

Modélisation de la propagation d'ondes élastiques antiplanes dans des milieux multifissurés

Mihai CALEAP

Directeur de thèse : Christophe Aristégui

Contexte local

✓ Acoustique Ultrasonore - Endommagement (LMP)

- **propagation d'ondes élastiques en milieux hétérogènes**

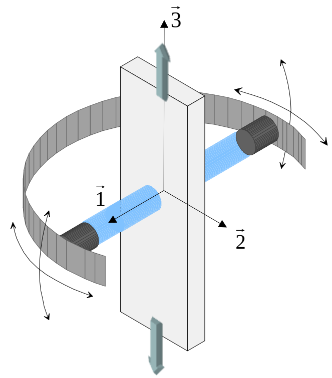
  Sollicitations dynamiques : longitudinale, transverse

  Hétérogénéités : singularités géométriques 2D/3D

- **mesure des variations sous charge des** $C_{ij}(\omega)$

$$\text{confrontation} \left\{ \begin{array}{ll} C_{ij}(\omega) & \text{identifiés (à partir de mesures)} \\ C_{ij} & \underline{\text{prédits}} \text{ en fonction de la } \textit{fissuration} \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ état de l'endommagement (densité de fissures, orientation)



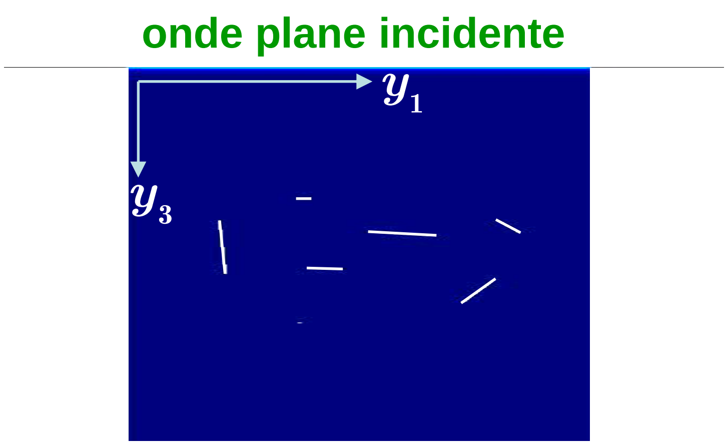
➡ **vers l' établissement d'un modèle dynamique prédisant les** $C_{ij}(\omega)$ **d'un milieu microfissuré**

✓ modèle(s) développé(s) dans l'étude actuelle :

cisaillement antiplan, isotrope, fissures

Problématique de l'étude : diffusion multiple

✓ illustration



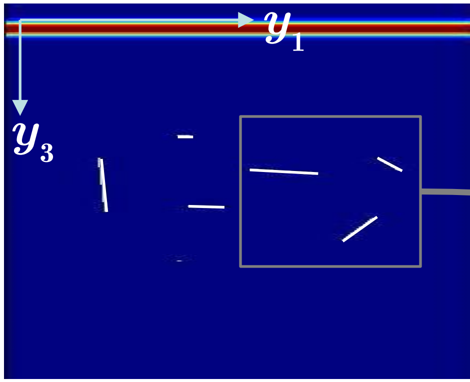
✓ cadre d'étude

- distribution aléatoire et uniforme de fissures
- fissures :
  - plates ou ouvertes
  - alignées ou aléatoirement orientées
  - vides ou ~~saturées d'un fluide visqueux~~
  - tailles variables

Diffusion multiple : modélisation

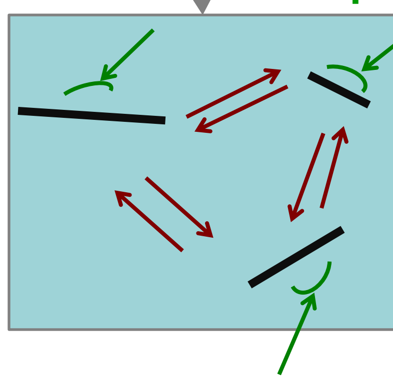
✓ illustration

onde plane incidente



✓ cadre d'étude

- distribution aléatoire et uniforme de fissures
- fissures :
  - plates ou ouvertes
  - alignées ou aléatoirement orientées
  - vides ou ~~saturées d'un fluide visqueux~~
  - tailles variables



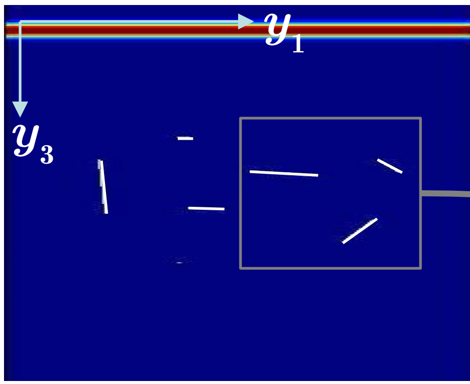
✓ description déterministe

$$\mathbf{u}^{\mathrm{Tot}}(\mathrm{M}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathrm{M}) + \sum_{\mathrm{k}=1}^{n} \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}}(\mathrm{M}; \mathrm{P}_{\mathrm{k}})$$

Diffusion multiple : modélisation

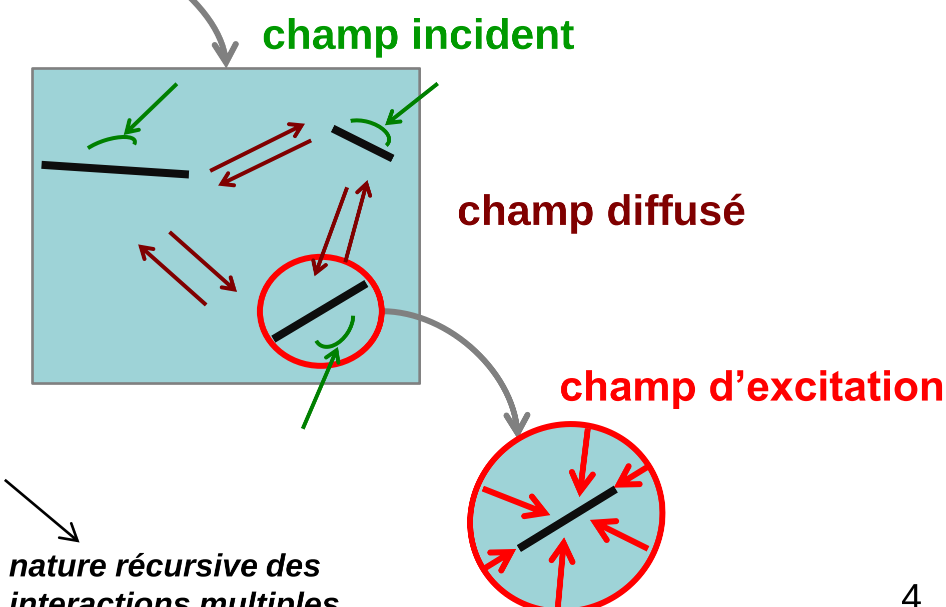
✓ illustration

onde plane incidente



✓ cadre d'étude

- distribution aléatoire et uniforme de fissures
- fissures :
    - plates ou ouvertes
    - alignées ou aléatoirement orientées
    - vides ou ~~saturées d'un fluide visqueux~~
    - tailles variables



✓ description déterministe

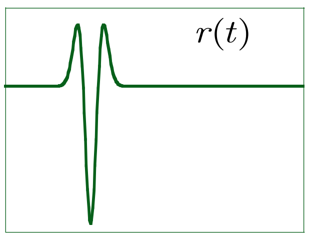
$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathbf{u}^{\text{Tot}}(\mathrm{M}) = \mathbf{u}^{\text{Inc}}(\mathrm{M}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}^{\text{Dif}}(\mathrm{M}; \mathrm{P}_k) \\[2ex]
\mathbf{u}^{\text{Dif}}(\mathrm{M}; \mathrm{P}_k) = \mathrm{T}\left(\mathrm{P}_k\right) \mathbf{u}^{\text{Ex}}(\mathrm{M}; \mathrm{P}_k) \\[2ex]
\mathbf{u}^{\text{Ex}}(\mathrm{M}; \mathrm{P}_k) = \mathbf{u}^{\text{Inc}}(\mathrm{M}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \mathbf{u}^{\text{Dif}}(\mathrm{M}; \mathrm{P}_j)
\end{array}
\right.
$$

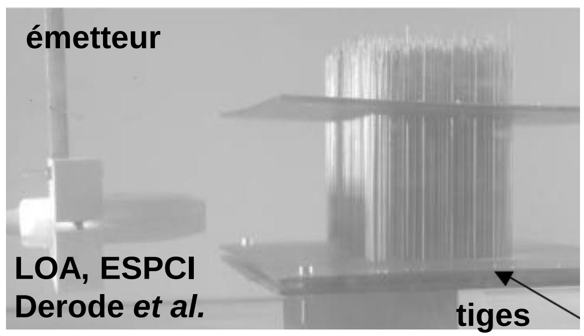
nature récursive des interactions multiples

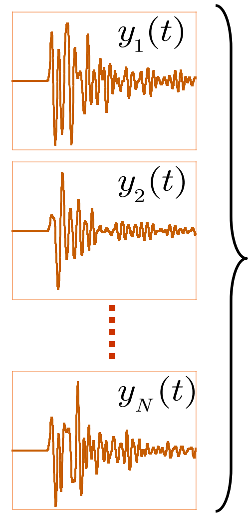
Diffusion multiple : modélisation

✓ **description probabiliste** → ***onde cohérente***

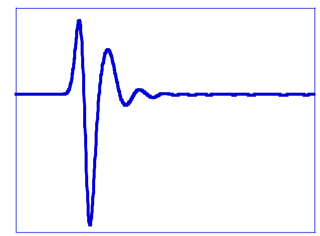
- **illustration expérimentale :** **moyenne sur les configurations**







$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i(t)$



résiste au désordre

Diffusion multiple : modélisation

✓ **description probabiliste** ⟶ ***onde cohérente***

➢ **déterminer analytiquement le « champ de déplacement cohérent »**

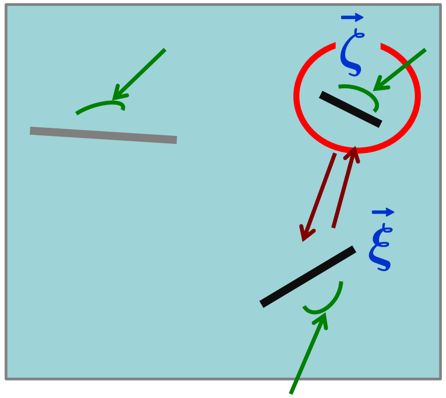
▪ **modélisation**

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Tot}} \right\rangle(\mathrm{M}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathrm{M}) + n_0 \int_V \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\mathrm{M}; \vec{\zeta})\, \mathrm{d}\vec{\zeta}$$

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\mathrm{M}; \vec{\zeta}) = \mathrm{T}\left(\vec{\zeta}\right) \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \right\rangle(\mathrm{M}; \vec{\zeta})$$

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \right\rangle(\mathrm{M}; \vec{\zeta}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathrm{M}) + n_0 \int_V \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\mathrm{M}; \vec{\xi}, \vec{\zeta})\, \mathrm{d}\vec{\xi}$$

▪ **illustration**



n_0 **: nombre de diffuseurs (fissures) par unité de surface**

Diffusion multiple : modélisation

✓ **description probabiliste** ⟶ ***onde cohérente***

➢ **déterminer analytiquement le « champ de déplacement cohérent »**

▪ **modélisation**

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Tot}} \right\rangle(\mathbf{M}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathbf{M}) + n_0 \int_V \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta})\, \mathrm{d}\vec{\zeta}$$

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta}) = \mathrm{T}\left(\vec{\zeta}\right) \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \right\rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta})$$

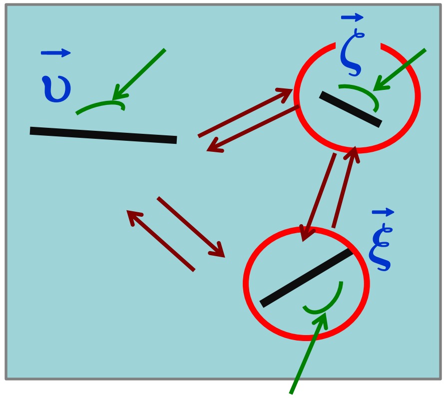
$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \right\rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathbf{M}) + n_0 \int_V \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\mathbf{M};\vec{\xi},\vec{\zeta})\, \mathrm{d}\vec{\xi}$$

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \right\rangle(\mathbf{M};\vec{\xi},\vec{\zeta}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathbf{M}) + n_0 \int_V \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\mathbf{M};\vec{\xi},\vec{\zeta},\vec{\upsilon})\, \mathrm{d}\vec{\upsilon}$$

$\vdots$

expressions lourdes à manipuler !

▪ **illustration**



n_0 **: nombre de diffuseurs (fissures) par unité de surface**

Diffusion multiple : modélisation

✓ **description probabiliste** ⟶ ***onde cohérente***

➢ **déterminer analytiquement le « champ de déplacement cohérent »**

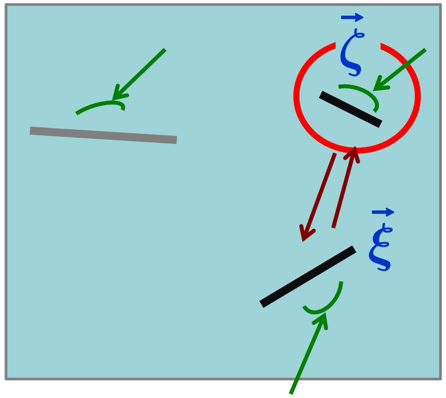
▪ **modélisation**

$$\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Tot}} \rangle(\mathbf{M}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathbf{M}) + n_0 \int_V \langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta})\, d\vec{\zeta}$$

$$\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta}) = \mathrm{T}\left(\vec{\zeta}\right) \langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta})$$

$$\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathbf{M}) + n_0 \int_V \langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \rangle(\mathbf{M};\vec{\xi},\vec{\zeta})\, d\vec{\xi}$$

▪ **illustration**



▪ **hypothèses de fermeture (troncature du phénomène récursif)**

➢ **différents choix**

$$\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta}) \approx \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\mathbf{M}) \longrightarrow \text{diffusion simple}$$

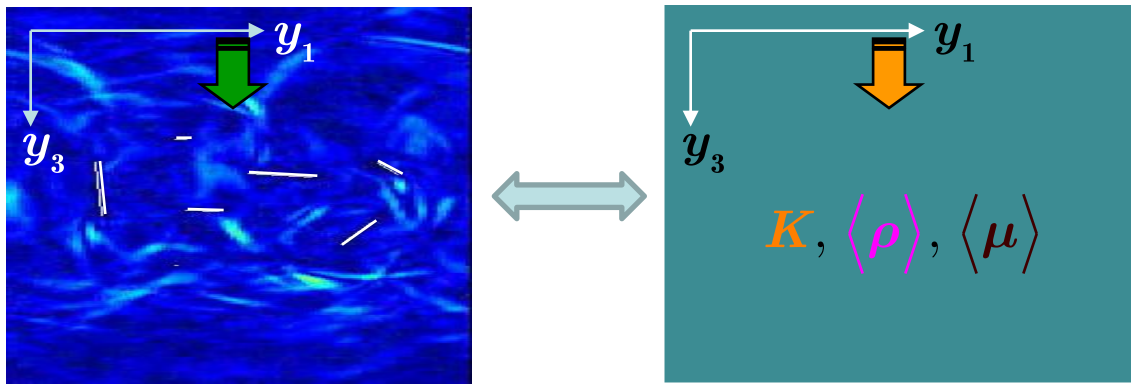
$$\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \rangle(\mathbf{M};\vec{\zeta}) \approx \langle \mathbf{u}^{\mathrm{Tot}} \rangle(\mathbf{M})$$

⋮

Diffusion multiple : modélisation

✓ description probabiliste ⟶ *milieu effectif*

milieu inhomogène initial | **milieu homogène équivalent**



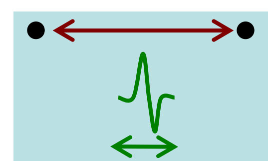
- **nombre d'onde effectif :** $\vec{K} = \left(\dfrac{\omega}{c} + \mathrm{i}\alpha\right)\vec{y}_3$
- **masse volumique effective :** $\langle\rho\rangle$
- **module de rigidité effectif :** $\langle\mu\rangle$ → **lamé**

du milieu homogène équivalent qui supporte la propagation de l'onde cohérente

⟹ **dépendent de la *diffusion simple* par *un diffuseur isolé***

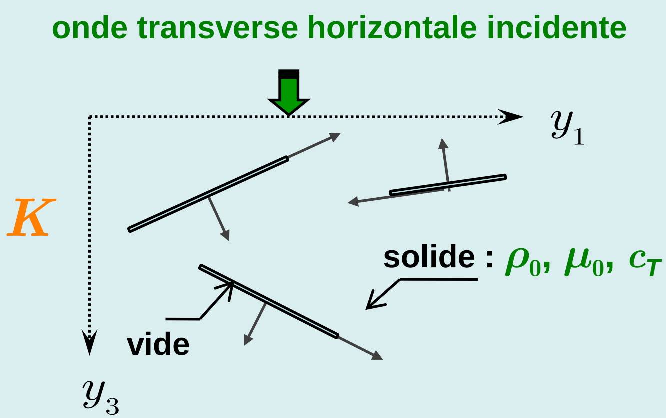
- **régime propagatif**

(libre parcours moyen élastique > longueur d'onde incidente)



Sommaire

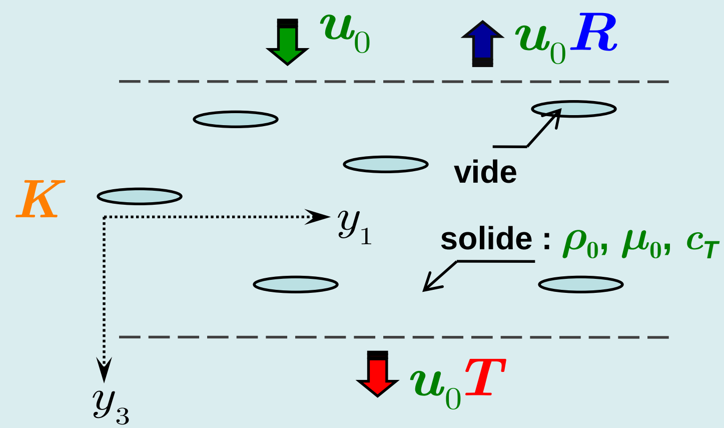
Partie A



- fissures plates vides
- milieu infini
- existence *a priori*
- résout l'équation sur $\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Tot}} \rangle$

- *fissures inclinées*

Partie B

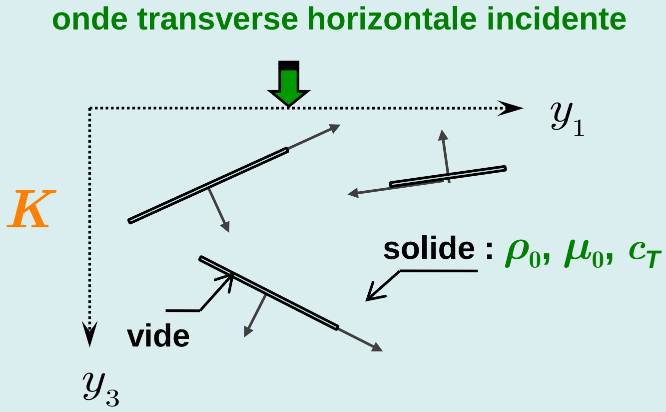


- fissures ouvertes vides
- milieu borné (couche)
- existence *a posteriori*
- résout l'équation sur $\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \rangle$

- $\langle \rho \rangle$, $\langle \mu \rangle$

Sommaire

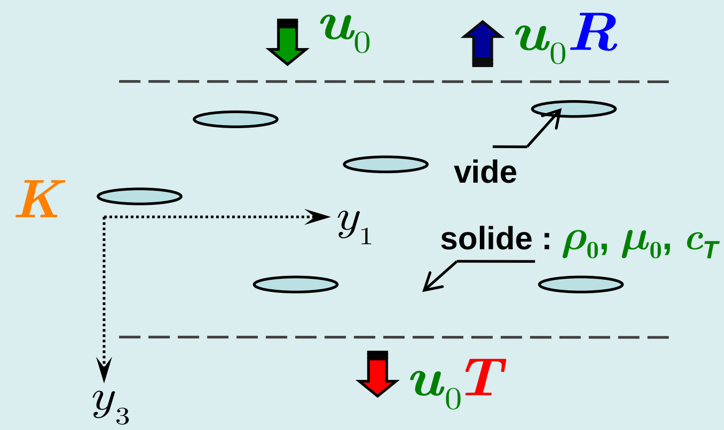
Partie A



- ○ fissures plates vides
- ○ milieu infini
- ○ existence *a priori*
- ○ résout l'équation sur $\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Tot}} \rangle$

- ○ *fissures inclinées*

Partie B



- ○ fissures ouvertes vides
- ○ milieu borné (couche)
- ○ existence *a posteriori*
- ○ résout l'équation sur $\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \rangle$

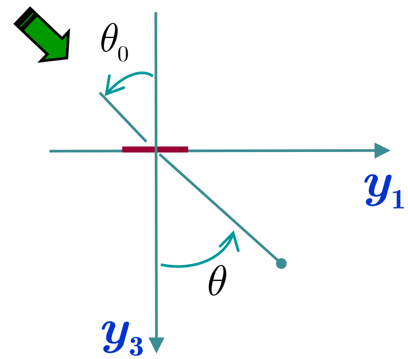
- ○ $\langle \rho \rangle, \langle \mu \rangle$

Même structure $\begin{cases} \text{diffusion simple} \\ \text{diffusion multiple (aléatoire)} \end{cases}$

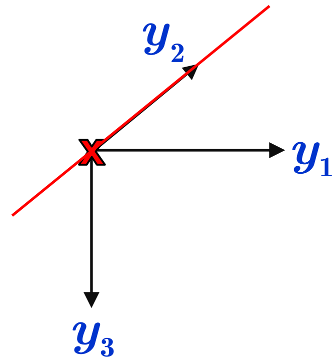
Partie A

I. Diffusion simple par une fissure plate

1. Représentation de Green
2. Densité de dislocation
3. Équation intégrale singulière
4. Amplitude de diffusion

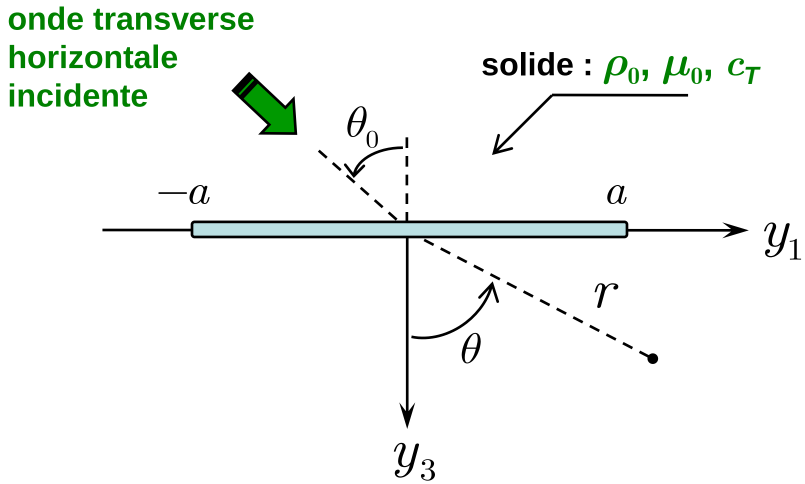


II. Diffusion multiple par une distribution aléatoire de fissures plates



•fissure plate = juxtaposition continue de sources linéiques isotropes
•sollicitation sous incidence

I.1 Représentation de Green



- ✓problème 2D
- ✓longueur $2a$
- ✓ligne de discontinuités

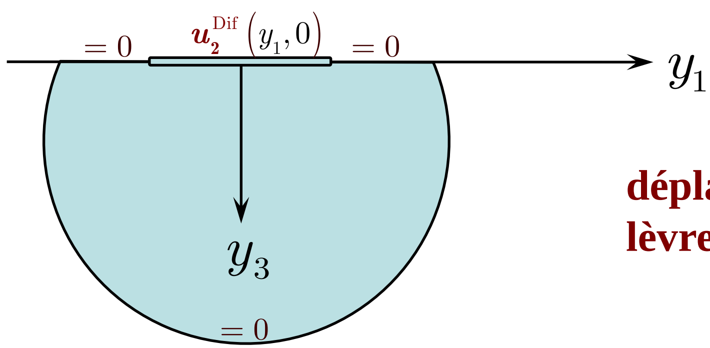
Champ de déplacement diffusé $\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}(y_1, y_3)$:

✓**discontinu** ✓**antisymétrique / y_3**

$$\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}(y_1, y_3) = -\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}(y_1, -y_3)$$

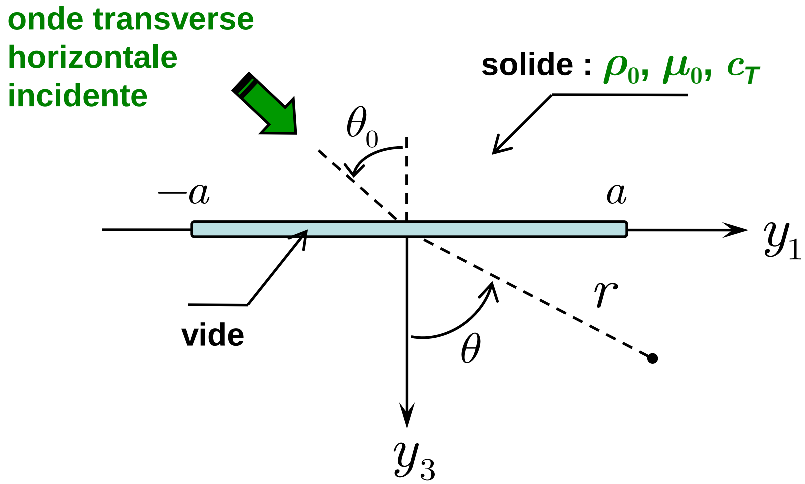
✓**Représentation de Green (à partir des données sur le contour)**

$$\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}(y_1, y_3) = \mathrm{sgn}(y_3)\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{k}_T y_3 \int_{-a}^{a} \frac{\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}(y_1, 0)}{r_0} H_1^{(1)}(\boldsymbol{k}_T r_0)\,\mathrm{d}s, \qquad r_0^2 = (y_1 - s)^2 + y_3^2$$



déplacement sur les lèvres de la fissure : $\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}(y_1, 0)$

I.2 Densité de dislocation



- ✓problème 2D
- ✓longueur $2a$
- ✓ligne de discontinuités

Champ de déplacement diffusé $\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}(y_1, y_3)$:

✓discontinu ✓antisymétrique / y_3

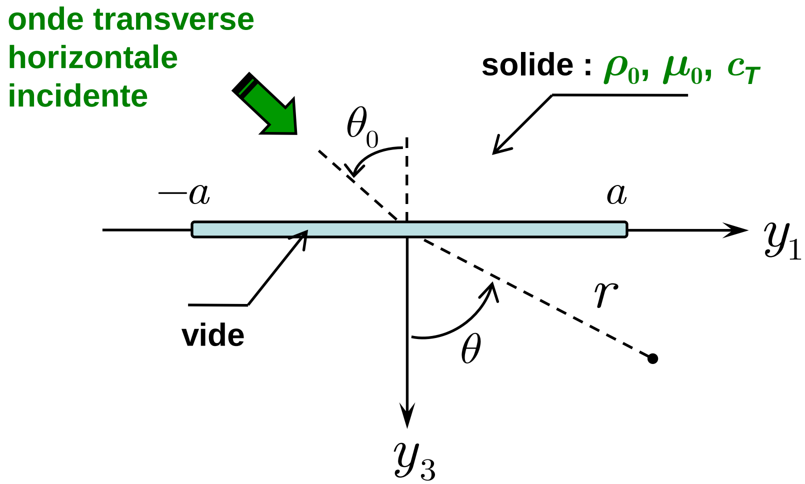
Déplacement sur les lèvres de la fissure :

$$\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}(y_1, 0; \boldsymbol{b}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{y_1}^{a} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}v, & |y_1| < a \\ 0, & |y_1| \geq a \end{cases}$$

densité de dislocation à travers les lèvres de la fissure

Fissure à surfaces libres : $\boldsymbol{\sigma}_{23}^{\mathrm{Dif}}(y_1, 0) = -\boldsymbol{\sigma}_{23}^{\mathrm{Inc}}(y_1, 0) \qquad |y_1| < a$

I.3 Équation intégrale singulière



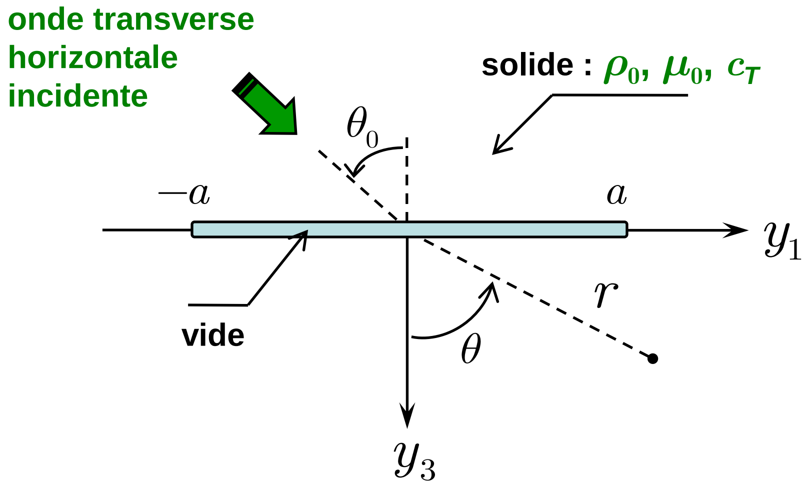
- ✓problème 2D
- ✓longueur 2a
- ✓ligne de discontinuités

Champ de déplacement diffusé $\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}\left(y_1, y_3\right)$:

✓discontinu ✓antisymétrique / y_3

$$\textbf{TF} \;/\; y_1 \left[\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}\right] \quad\Rightarrow\quad \textbf{ÉDO} + \left\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{23}}^{\mathrm{Dif}}\left(y_1, 0\right) = -\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{23}}^{\mathrm{Inc}}\left(y_1, 0\right),\ \left|y_1\right| < a\right\} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{b}\ ?$$

I.3 Équation intégrale singulière



- ✓problème 2D
- ✓longueur 2a
- ✓ligne de discontinuités

Champ de déplacement diffusé $\boldsymbol{u}_2^{\text{Dif}}\left(y_1, y_3\right)$:

✓discontinu ✓antisymétrique / y_3

$$\textbf{TF} \;/\; y_1 \left[\boldsymbol{u}_2^{\text{Dif}}\right] \quad \Rightarrow \quad \textbf{ÉDO} \;+\; \left\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{23}}^{\text{Dif}}\left(y_1, 0\right) = -\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{23}}^{\text{Inc}}\left(y_1, 0\right),\ \left|y_1\right| < a\right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b}\ ?$$

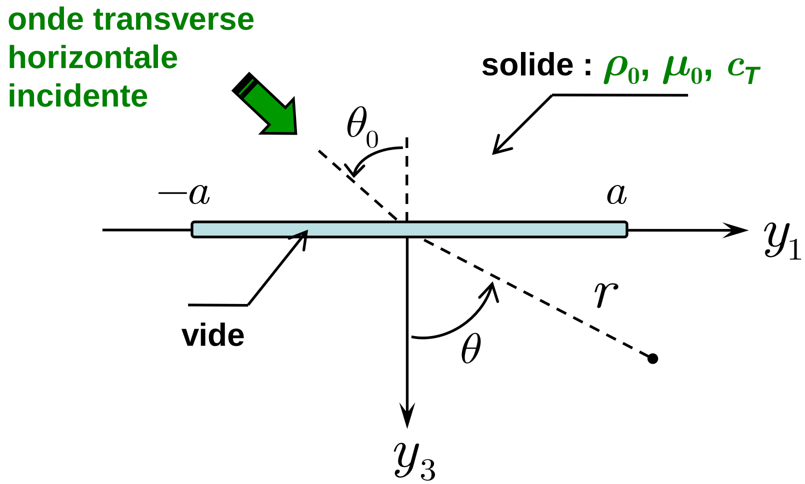
Équation intégrale singulière :

$$\int_{-a}^{a} \boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{v}\right)\left[\frac{1}{v - y_1} + S\left(\boldsymbol{k}_T, v - y_1\right)\right]\mathrm{d}v = \frac{\pi}{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}_0}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{23}}^{\text{Inc}}\left(y_1, 0\right), \quad \left|y_1\right| < a$$

$\in \mathbb{C}$

réponse **sollicitation**

I.4 Amplitude de diffusion



- ✓problème 2D
- ✓longueur $2a$
- ✓ligne de discontinuités

Champ de déplacement diffusé $u_2^{\mathrm{Dif}}\left(y_1, y_3\right)$:

✓discontinu ✓antisymétrique / y_3

✓**Champ de déplacement diffusé : représentation de Green**

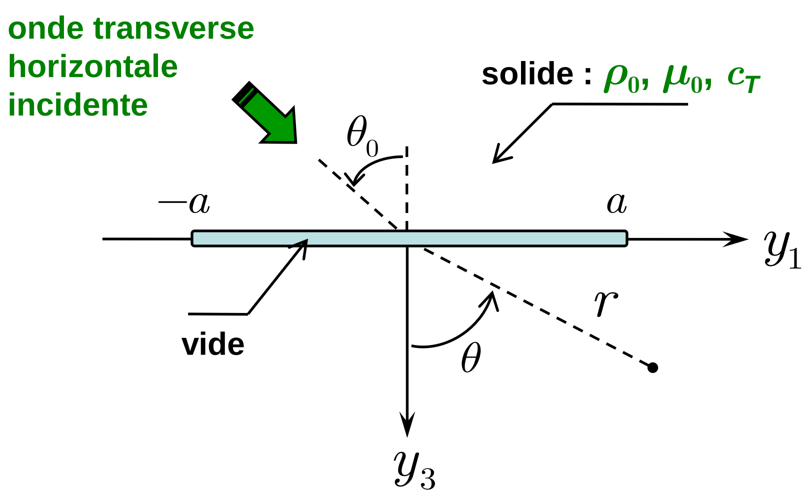
$$\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}\left(y_1, y_3\right) = \operatorname{sgn}\left(y_3\right) \frac{\mathrm{i}}{2} \boldsymbol{k}_T y_3 \int_{-a}^{a} \frac{\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}\left(y_1, 0; \boldsymbol{b}\right)}{r_0} H_1^{(1)}\left(\boldsymbol{k}_T r_0\right) \mathrm{d}s, \quad r_0^2 = \left(y_1 - s\right)^2 + y_3^2$$

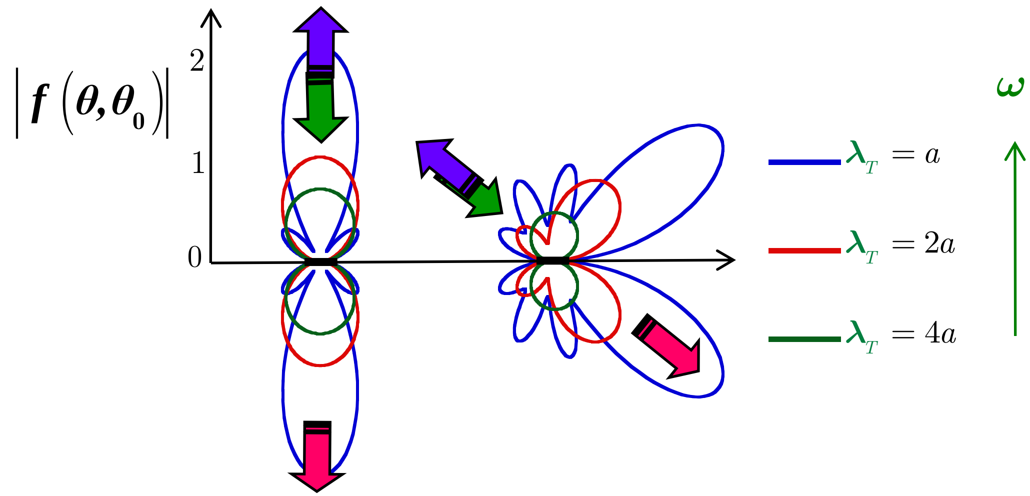
✓**Diffusion en champ lointain :** $\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}}\left(r, \theta, \theta_0\right) = u_0 \sqrt{\dfrac{2\pi}{\boldsymbol{k}_T r}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}_T r + \frac{\pi}{4}\right)} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0\right)$

✓**Amplitude de diffusion :** $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0\right) = \dfrac{\cot\theta}{2\pi u_0} \displaystyle\int_{-a}^{a} \boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{v}, \theta_0\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \boldsymbol{k}_T v \sin\theta}\, \mathrm{d}v$

utilisée dans la modélisation de diffusion multiple

I.4 Amplitude de diffusion





✓**Amplitude de diffusion :** $f\left(\theta,\theta_0\right)$

diffusion vers l'avant : $\theta = \theta_0$

diffusion vers l'arrière : $\theta = \theta_0 + \pi$

- **diffusion anisotrope** $\forall\omega$
- **symétrie du plan de fissure**
- $\omega \nearrow$ **plus directif, n de lobes augmente**

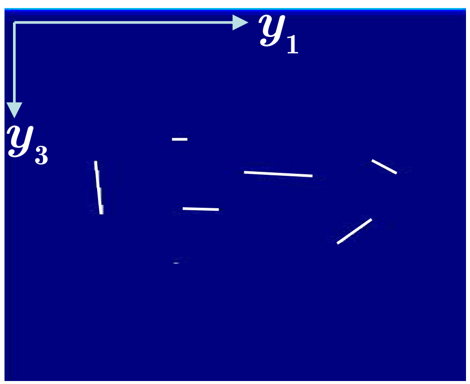
[Caleap, Aristégui & Angel, J. Acoust. Soc. Am. (2007)]

Partie A

I. Diffusion simple par une fissure plate

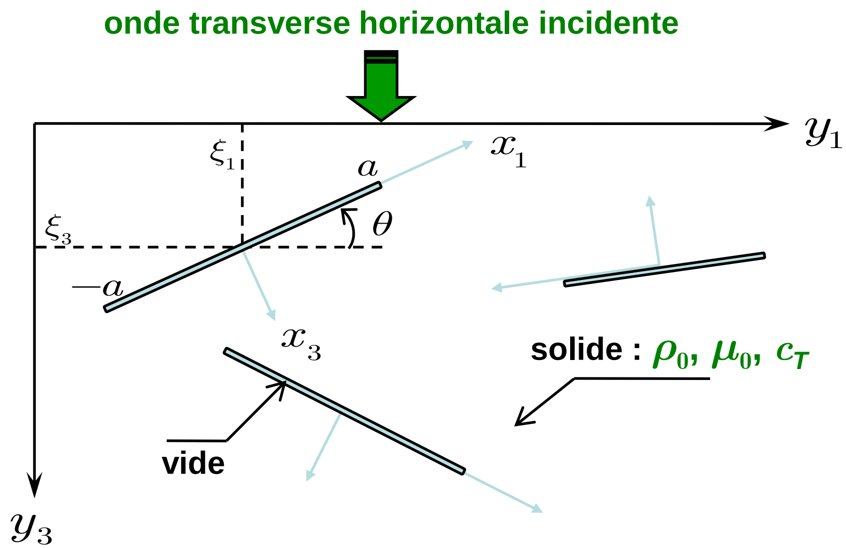
II. Diffusion multiple par une distribution uniforme et aléatoire de fissures plates

1. Détermination de l'onde cohérente
2. Hypothèse de fermeture
3. Champ moyen diffusé
4. Équation de dispersion pour *K*
5. Formulation explicite pour *K*
6. Atténuation et dispersion



Objectif : *recherche d'un milieu effectif équivalent au solide multifissuré*

II.1 Détermination de l'onde cohérente



- ✓aléatoire et uniforme
- ✓distribution de tailles décrite par $\boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{a})$
- ✓orientation de fissures décrite par $\boldsymbol{p}_\theta(\theta)$
- ✓ $\boldsymbol{n}_0$: nombre de fissures par unité de surface

✓Détermination de l'onde cohérente : champ moyen total

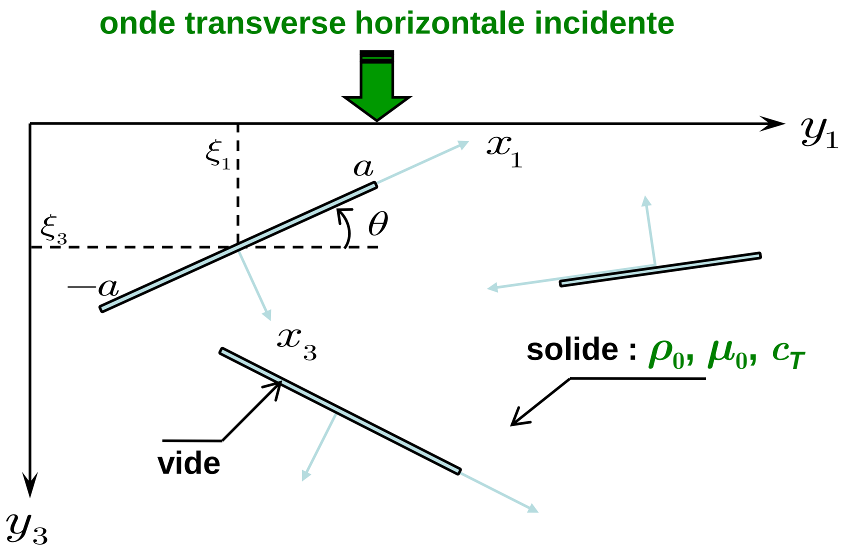
à évaluer

$$\left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Tot}} \right\rangle (y_3) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_T y_3} + \boldsymbol{n}_0 \int \left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}} \right\rangle \left(\vec{y}; \vec{\boldsymbol{\xi}}\right) \boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{p}_\theta(\theta)\, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\xi}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

Cherchons l'onde cohérente sous la forme $\left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Tot}} \right\rangle (y_3) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K} y_3}$, **où *K* est le *nombre d'onde effectif***

à déterminer

II.2 Hypothèse de fermeture



- ✓aléatoire et uniforme
- ✓distribution de tailles décrite par $p_a(a)$
- ✓orientation de fissures décrite par $p_\theta(\theta)$
- ✓ n_0 : nombre de fissures par unité de surface

$$\left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}} \right\rangle \left(\vec{y}; \vec{\boldsymbol{\xi}} \right) = ?$$

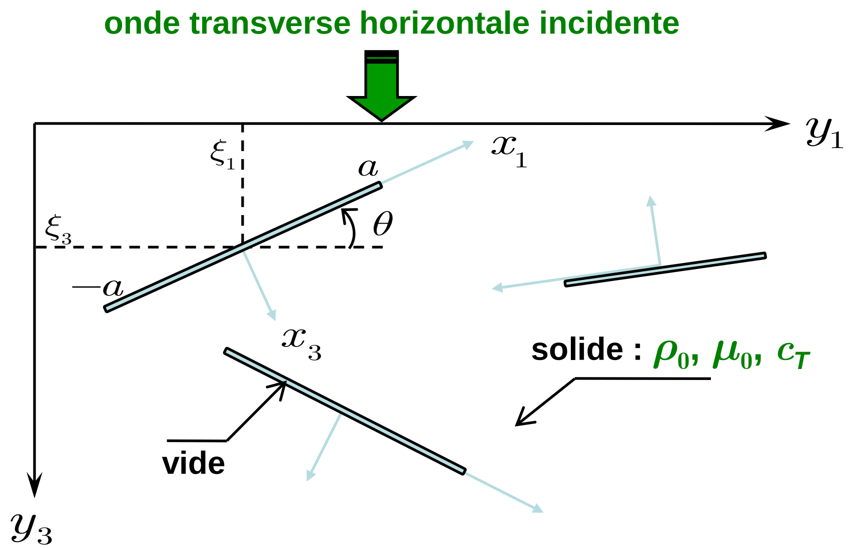
✓Conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_3} \left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}} \right\rangle \left(\vec{x}; \vec{\boldsymbol{\xi}} \right) = -\dfrac{\partial}{\partial x_3} \left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Ex}} \right\rangle \left(\vec{x}; \vec{\boldsymbol{\xi}} \right), \left| x_1 \right| < a \\ \left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}} \right\rangle \left(\vec{x}; \vec{\boldsymbol{\xi}} \right) = 0, \left| x_1 \right| \geq a \end{array} \right., \text{ en } x_3 = 0$$

✓Hypothèse de fermeture (Foldy 1945)

$$\left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Ex}} \right\rangle \left(\vec{x}; \boldsymbol{\xi}_3 \right) \simeq \left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Tot}} \right\rangle \left(\vec{x}; \boldsymbol{\xi}_3 \right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}(x_1 \sin\theta + x_3 \cos\theta + \boldsymbol{\xi}_3)}$$

II.3 Champ moyen diffusé



- ✓aléatoire et uniforme
- ✓distribution de tailles décrite par $p_a(a)$
- ✓orientation de fissures décrite par $p_\theta(\theta)$
- ✓ n_0 : nombre de fissures par unité de surface

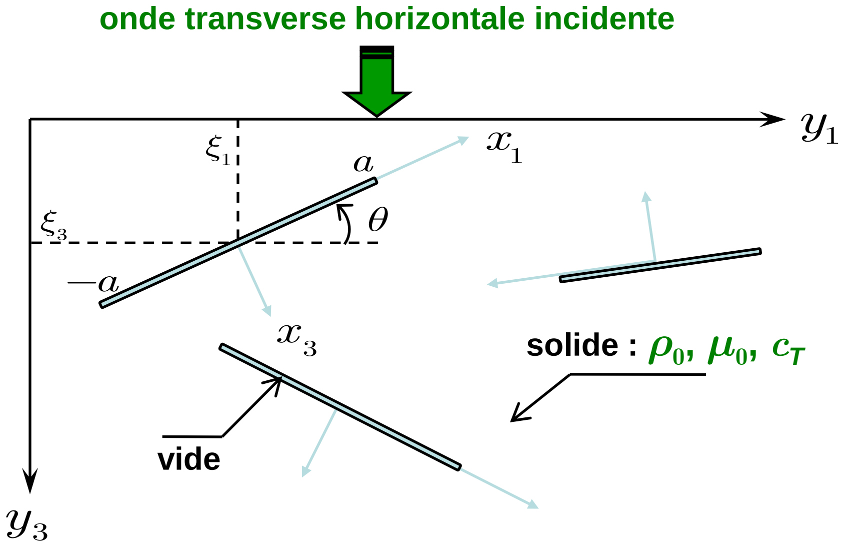
✓Champ moyen diffusé : représentation de Green

$$\left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}} \right\rangle \left(\vec{x}; \boldsymbol{\xi}_3\right) = \operatorname{sgn}\left(x_3\right) \frac{K}{2} \cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}K\xi_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-a}^{a} \left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}} \right\rangle \left(x_1, 0; \boldsymbol{b}_\infty\right) H_0^{(1)}\left(\boldsymbol{k}_T r_0\right) \mathrm{d}s, \quad r_0^2 = \left(x_1 - s\right)^2 + x_3^2$$

Déplacement moyen sur les lèvres de la fissure :

$$\left\langle \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{Dif}} \right\rangle \left(x_1, 0; \boldsymbol{b}_\infty\right) \equiv \int_{x_1}^{a} \boldsymbol{b}_\infty\left(\boldsymbol{v}\right) \mathrm{d}v, \quad \left|x_1\right| < a$$

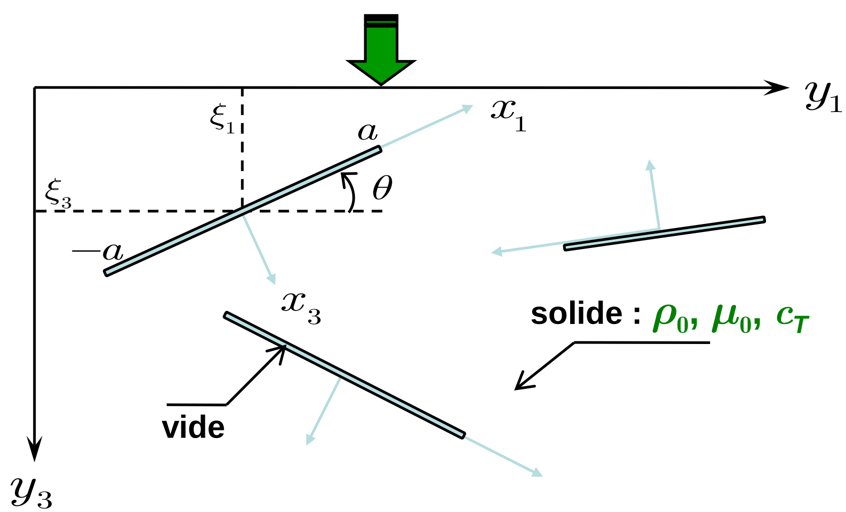
II.4 Équation de dispersion pour K



- ✓aléatoire et uniforme
- ✓distribution de tailles décrite par $p_a(a)$
- ✓orientation de fissures décrite par $p_\theta(\theta)$
- ✓ n_0 : nombre de fissures par unité de surface

$$\left[\boldsymbol{\Delta}_x + k_T^2\right]\left\langle u_2^{\mathrm{Dif}}\right\rangle \Rightarrow \quad \textbf{ÉDO} + \begin{cases}\text{conditions aux limites}\\ \text{hypothèse de fermeture}\end{cases} \Rightarrow \quad K\ ?$$

II.4 Équation de dispersion pour K

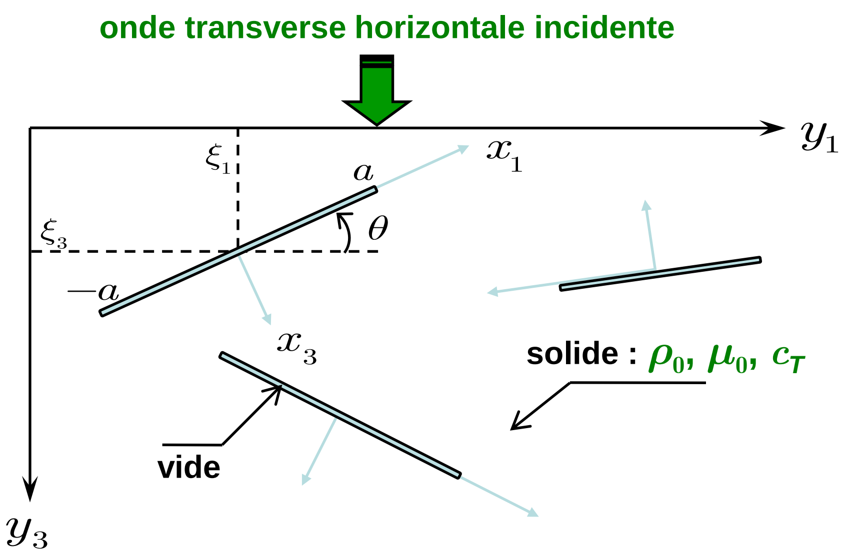


- ✓aléatoire et uniforme
- ✓distribution de tailles décrite par $p_a(a)$
- ✓orientation de fissures décrite par $p_\theta(\theta)$
- ✓ n_0 : nombre de fissures par unité de surface

$$\left[\boldsymbol{\Delta}_x + k_T^2\right]\left\langle u_2^{\mathrm{Dif}}\right\rangle \Rightarrow \quad \textbf{ÉDO} + \begin{cases}\text{conditions aux limites}\\ \text{hypothèse de fermeture}\end{cases} \Rightarrow \quad K\ ?$$

Équation transcendantale : $k_T^2 - K^2 = -2n_0 \int_0^\pi \cot\theta\, p_\theta(\theta) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} p_a(a) \int_{-a}^{a} b_\infty(v)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kv\sin\theta}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}\theta \Rightarrow b_\infty\ ?$

II.4 Équation de dispersion pour K



- ✓aléatoire et uniforme
- ✓distribution de tailles décrite par $p_a(a)$
- ✓orientation de fissures décrite par $p_\theta(\theta)$
- ✓ n_0 : nombre de fissures par unité de surface

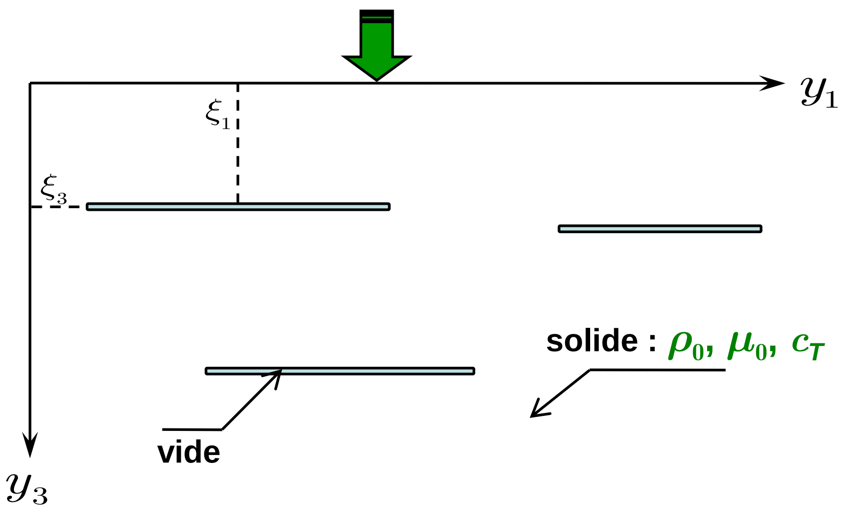
$$\left[\boldsymbol{\Delta}_x + k_T^2\right]\left\langle u_2^{\mathrm{Dif}}\right\rangle \Rightarrow \quad \text{ÉDO} + \begin{cases} \text{conditions aux limites} \\ \text{hypothèse de fermeture} \end{cases} \Rightarrow \quad K\ ?$$

Équation transcendantale : $$k_T^2 - K^2 = -2n_0\int_0^\pi \cot\theta\, p_\theta(\theta)\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} p_a(a)\int_{-a}^{a} b_\infty(v)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kv\sin\theta}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\theta \Rightarrow b_\infty\ ?$$

Équation intégrale singulière : $$\int_{-a}^{a} b_\infty(v)\left[\frac{1}{v-x_1} + S(v-x_1)\right]\mathrm{d}v = \mathrm{i}\pi K\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx_1\sin\theta}, \quad |x_1| < a$$

la fissure n'est plus soumise à l'onde incidente
mais directement à l'onde cohérente

II.5 Formulation explicite pour K



- ✓ distribution de tailles décrite par $p_a(a)$
- ✓ **fissures parallèles au front d'onde cohérent :**

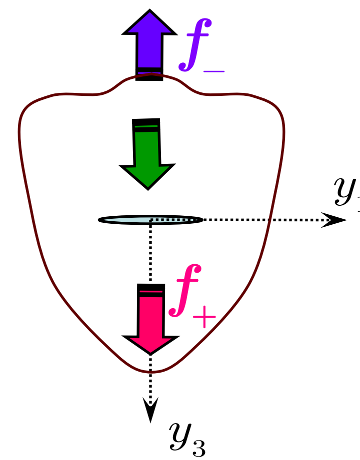
$$\boldsymbol{p}_\theta(\boldsymbol{\theta}) = \delta(\boldsymbol{\theta})$$

- ✓ n_0 : nombre de fissures par unité de surface

➢ **Nous avons montré que :** $$K^2 = 1\Big/\left(k_T^2 - 4\pi n_0 \left\langle f(0) \right\rangle\right)$$

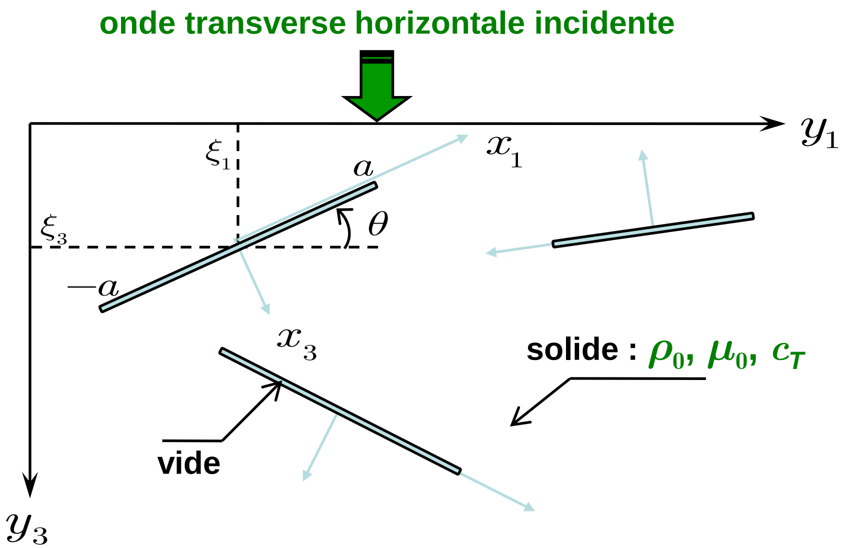
➢ **Amplitude de diffusion *moyenne* vers l'avant pour une fissure seule**

$$\left\langle \boldsymbol{f}(0) \right\rangle = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{f}_+^{(\boldsymbol{a})} \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$



Test : **fissures de tailles identiques** $\left(a_{\min} = a_{\max} = a\right) \Longrightarrow$ [Angel & Koba, Int. J. Solids Structures (1998)]

II.5 Atténuation et dispersion



- ✓aléatoire et uniforme
- ✓distribution de tailles décrite par $p_a(a)$
- ✓orientation de fissures décrite par $p_\theta(\theta)$
- ✓ n_0 : nombre de fissures par unité de surface

➢Nombre d'onde effectif K

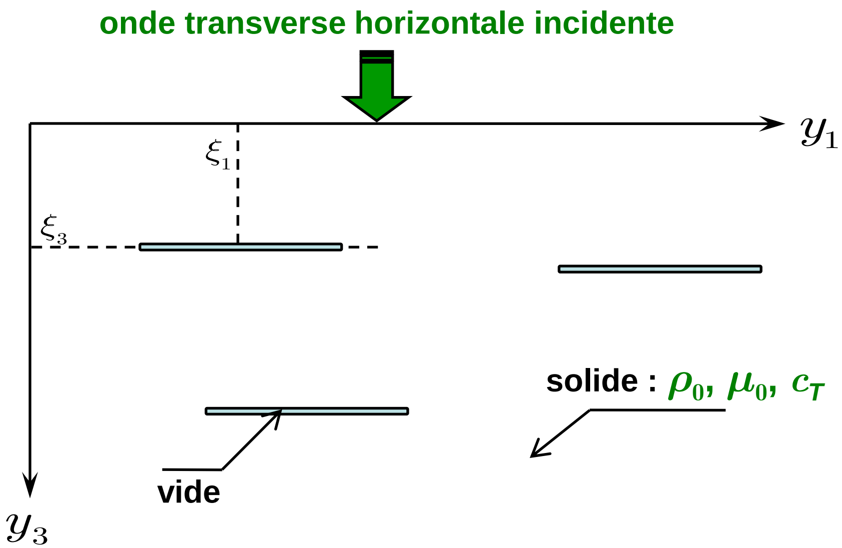
✓coefficient d'atténuation

$$Q^{-1}(\omega) = 2\frac{\operatorname{Im} K(\omega)}{\operatorname{Re} K(\omega)}$$

✓célérité de phase

$$\frac{c(\omega)}{c_T} = \frac{k_T^2}{\operatorname{Re} K(\omega)}$$

Effet de la densité de fissures



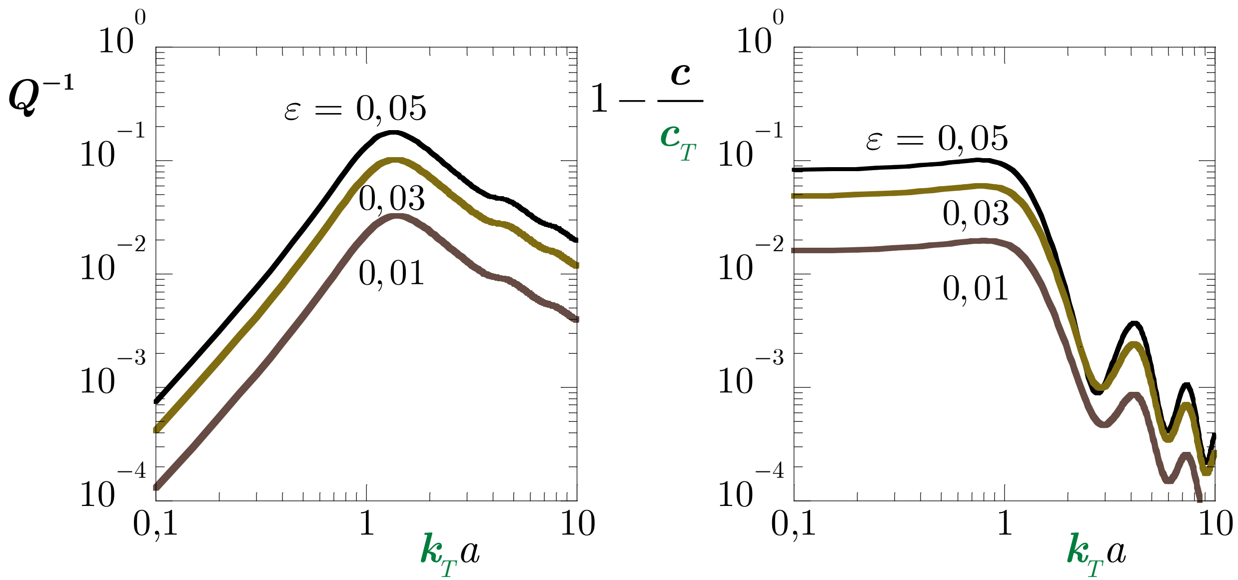
- ✓ **fissures identiques :**

$$a_{\min} = a_{\max} = a$$

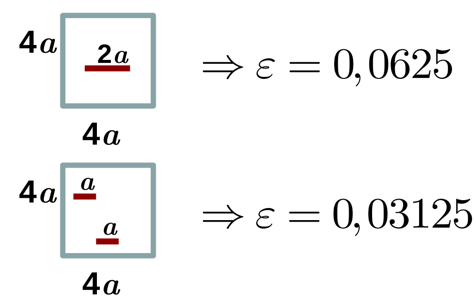
- ✓ **fissures parallèles au front d'onde cohérent :**

$$p_\theta(\theta) = \delta(\theta)$$

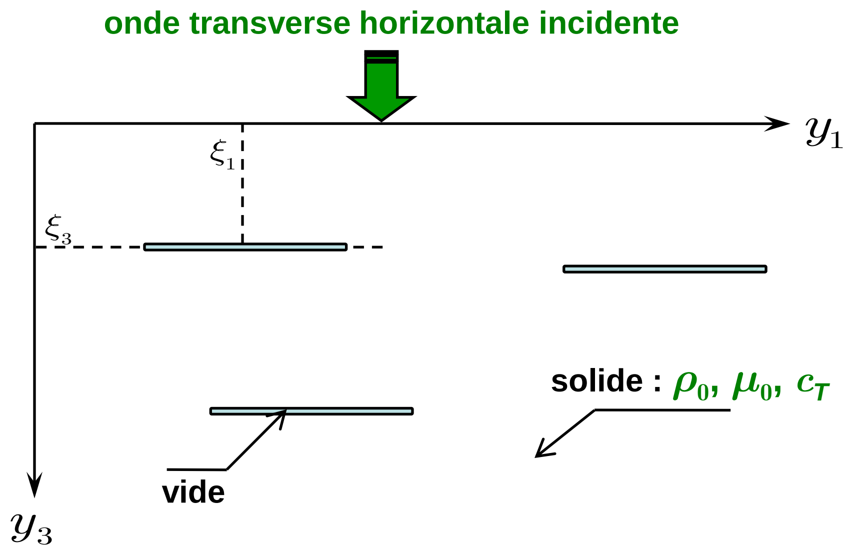
- ✓ $\varepsilon = n_0 a^2$ **densité de fissures**



illustrations à l'échelle



Effet de la densité de fissures



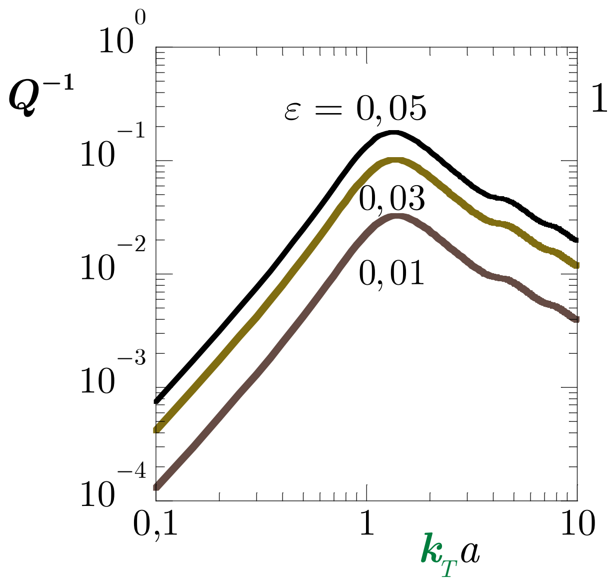
- ✓ **fissures identiques :**

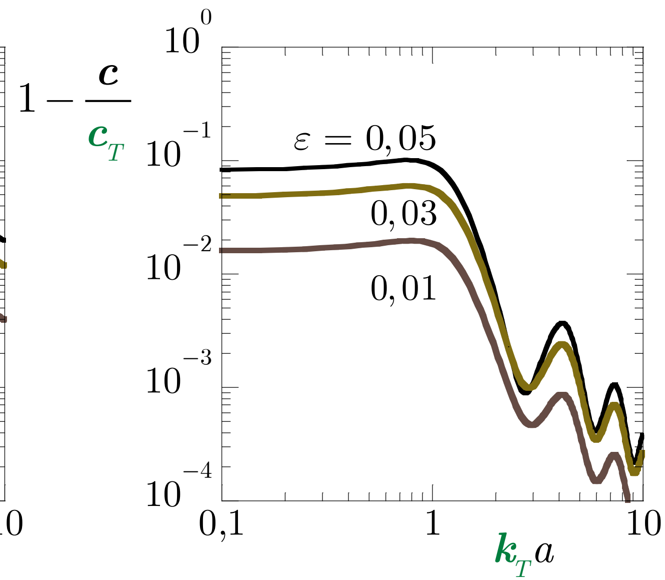
$$a_{\min} = a_{\max} = a$$

- ✓ **fissures parallèles au front d'onde cohérent :**

$$p_\theta(\theta) = \delta(\theta)$$

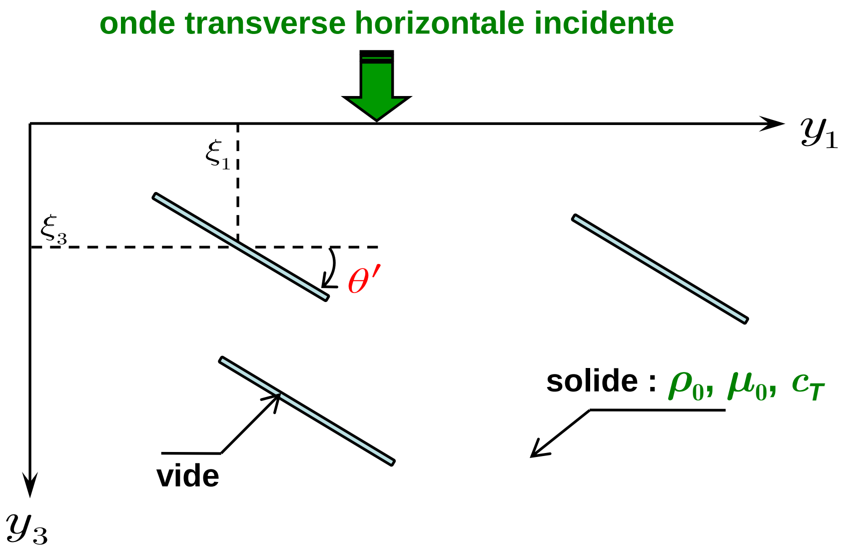
- ✓ $\varepsilon = n_0 a^2$ **densité de fissures**





lorsque la densité augmente :
- **l'atténuation augmente**
- **la célérité diminue**

Effet de l'orientation de fissures



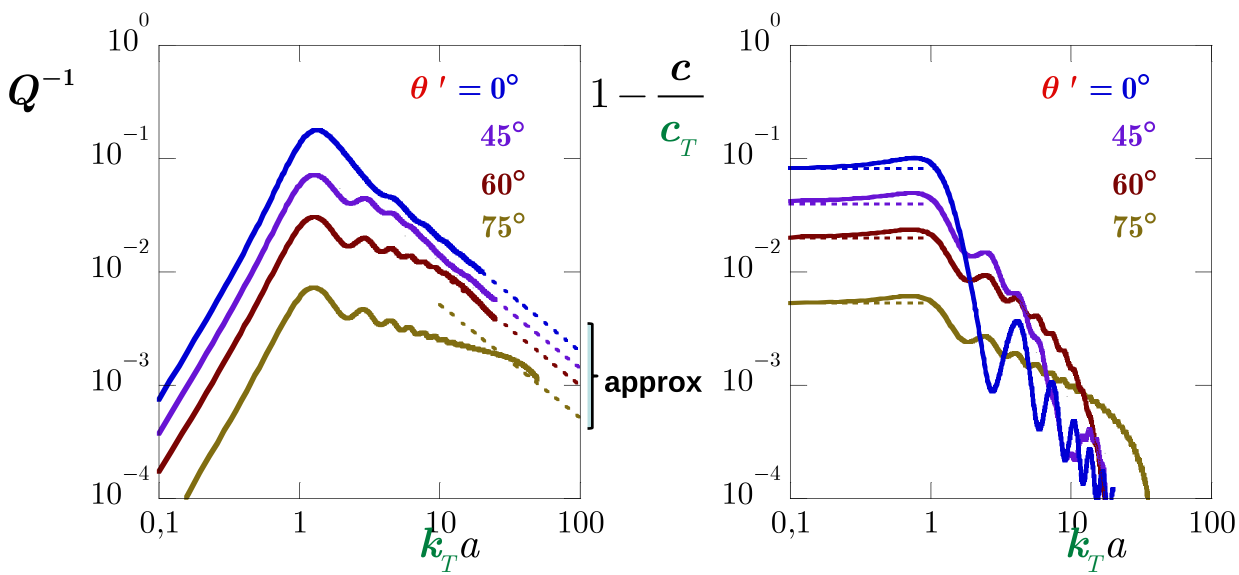
- ✓ **fissures identiques :**

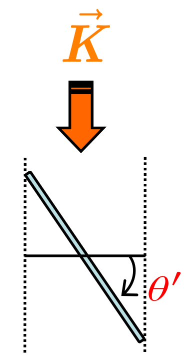
$$a_{\min} = a_{\max} = a$$

- ✓ **fissures inclinées :**

$$p_\theta(\theta) = \delta(\theta - \theta')$$

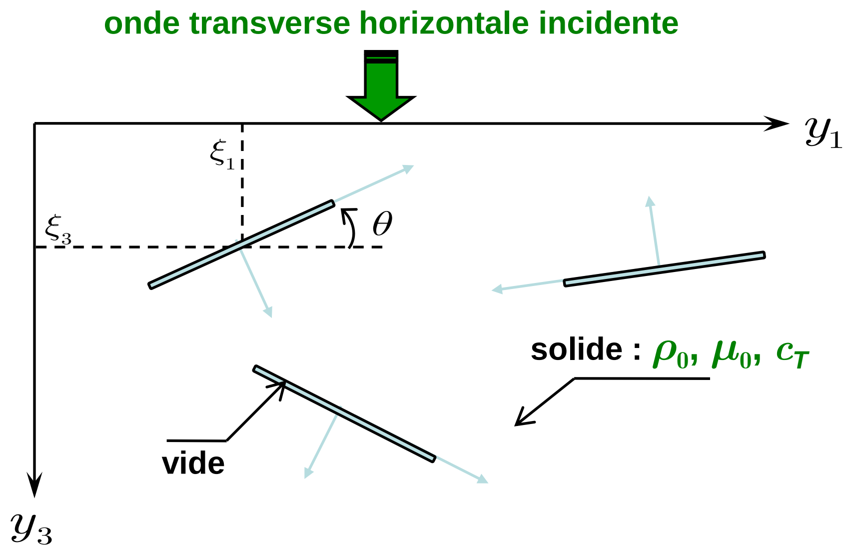
- ✓ $\varepsilon = 0{,}05$





gouvernés par
la **longueur active**

Effet de l'orientation de fissures



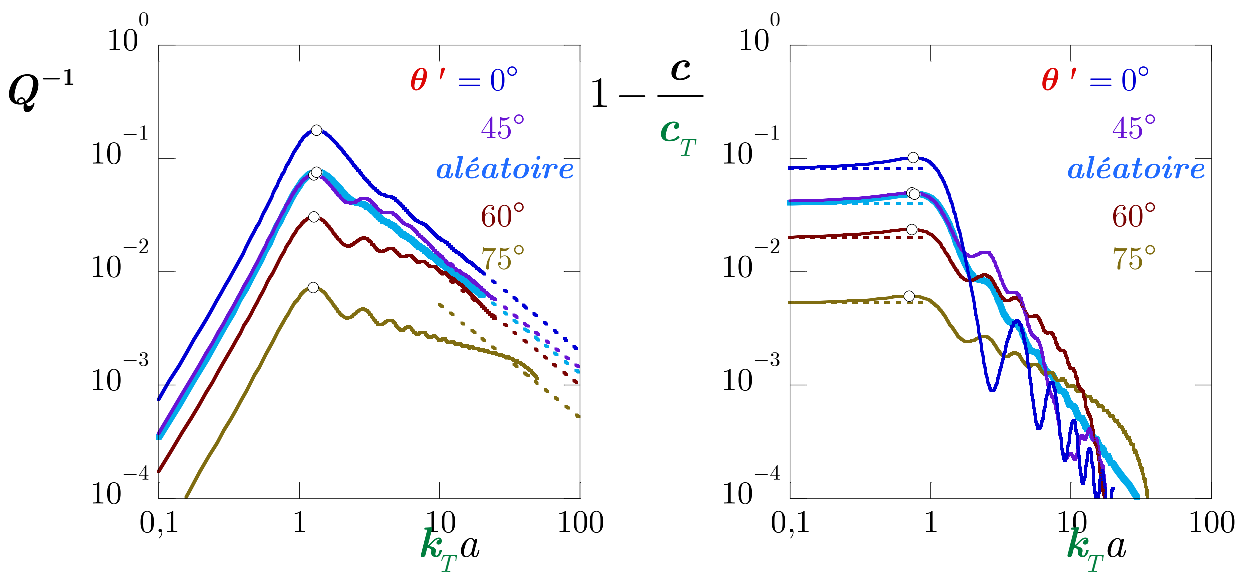
- ✓ fissures identiques :

$$a_{min} = a_{max} = a$$

- ✓ fissures aléatoirement orientées :

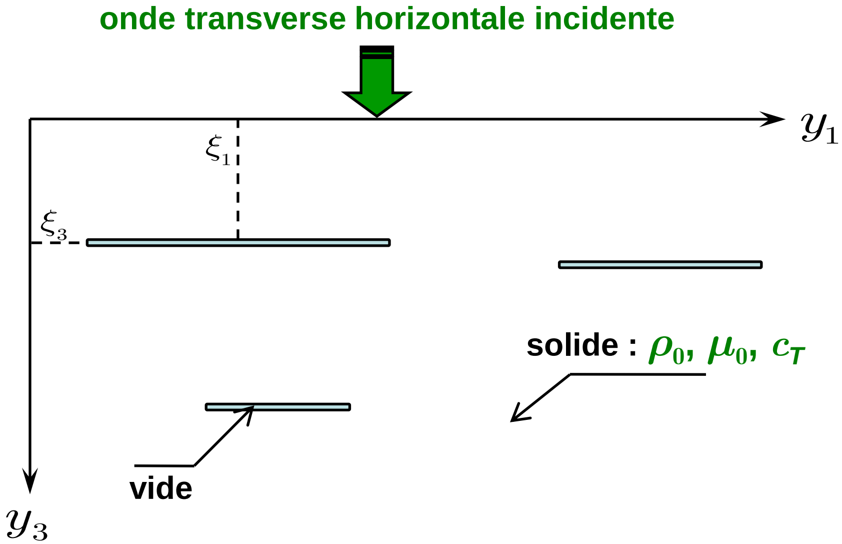
$$p_\theta(\theta) = 1/\pi$$

- ✓ $\varepsilon = 0{,}05$



à basse fréquence :
$(aleatoire) \approx 45°$

Effet de la taille de fissures



- ✓ **distribution de tailles en loi de puissance :**

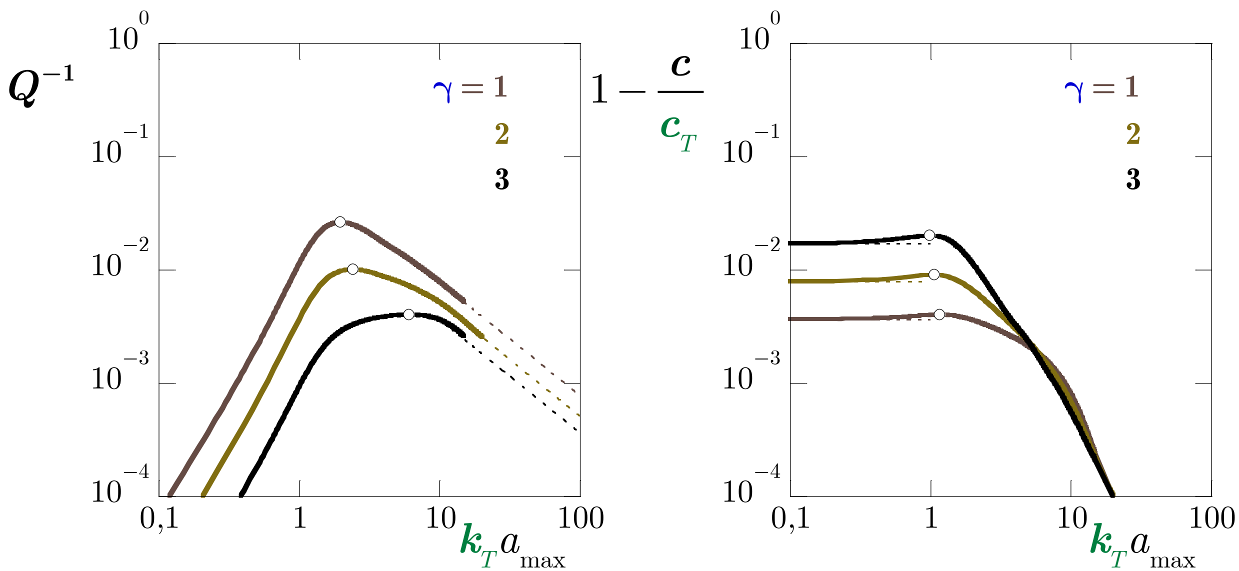
$$p_a\left(a\right) \simeq a^{-\gamma},\ \ a_{\min} \leq a \leq a_{\max},\ \ 1 \leq \gamma \leq 3$$

- ✓ **fissures parallèles au front d'onde cohérent :**

$$p_\theta\left(\theta\right) = \delta\left(\theta\right)$$

- ✓ $\varepsilon = n_0 a_{\max}^2 = 0,05; \qquad 10 \times a_{\min} = a_{\max}$

la proportion de fissures de grande taille augmente lorsque γ diminue pour $a_{\max}$ fixé



lorsque proportion de fissures de grande taille augmente :

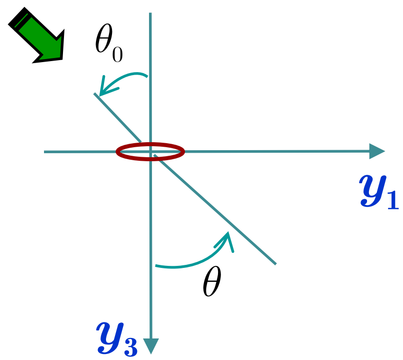
- **l'atténuation augmente**
- **la célérité diminue**

Partie B

III. Diffusion simple par une fissure ouverte

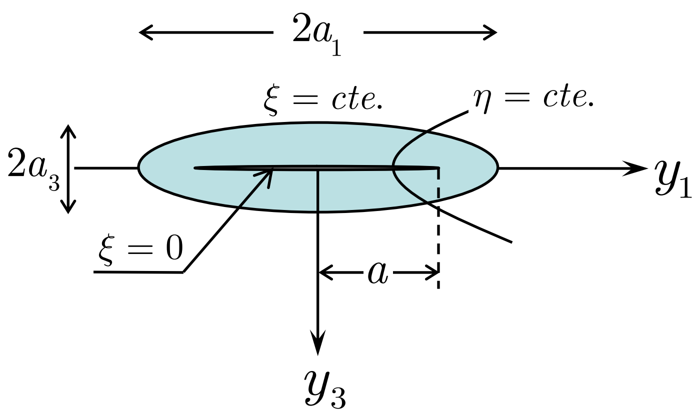
1. **Formulation**
2. **Champs en présence**
3. **Amplitude de diffusion**

IV. Analyse de la diffusion multiple par une distribution aléatoire de diffuseurs linéiques



- **fissure ouverte = cylindre elliptique vide**
- **sollicitation sous incidence**

III.1 Formulation



✓ **(ξ, η) – coordonnées elliptiques cylindriques**

✓ $\pm a$ **– foyers de l'ellipse de frontière :**

$$\xi_0 = \operatorname{atanh} \boldsymbol{\tau}$$

✓ **ouverture de l'ellipse** $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{a_3}{a_1}$

si $\boldsymbol{\tau} \to 0$ l'ellipse se réduit à un segment de taille $2a$

si $\boldsymbol{\tau} \to 1$ l'ellipse se réduit à un cercle de rayon a_1

✓ **Fonctions d'onde elliptiques :**

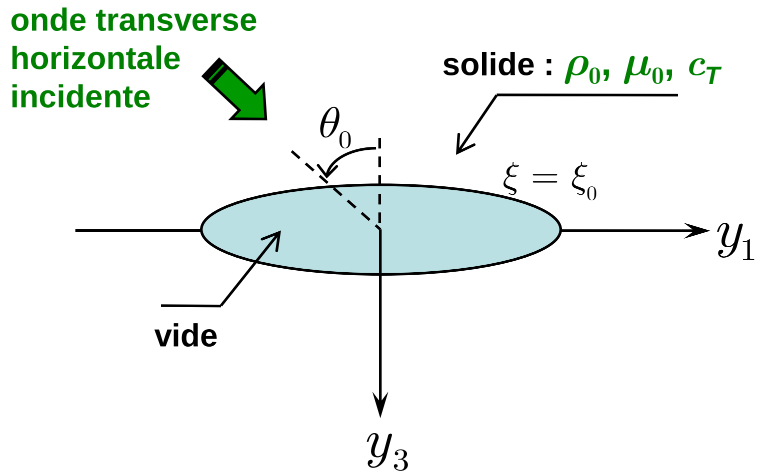
- régulières $\widehat{\psi}_{\sigma n}(\xi, \eta) = J_{\sigma n}(\xi)\, e_{\sigma n}(\eta)$
- divergentes $\psi_{\sigma n}(\xi, \eta) = H_{\sigma n}(\xi)\, e_{\sigma n}(\eta)$

$\sigma = pair,\ impair$

$n = 0,1,2,\ldots$

Fonctions de Mathieu *radiales* et *angulaires*

III.2 Champs en présence



- ✓**ellipse de frontière :** $\xi_0 = \operatorname{atanh} \tau$
- ✓**ouverture de l'ellipse :** $\tau = \dfrac{a_3}{a_1}$

✓**Déplacement incident :**

coefficients connus

$$\boldsymbol{u}_2^{\text{Inc}}(\xi,\eta) = \sum_{\sigma} \sum_{n=0}^{+\infty} A_{\sigma n}(\theta_0)\, \widehat{\psi}_{\sigma n}(\xi,\eta)$$

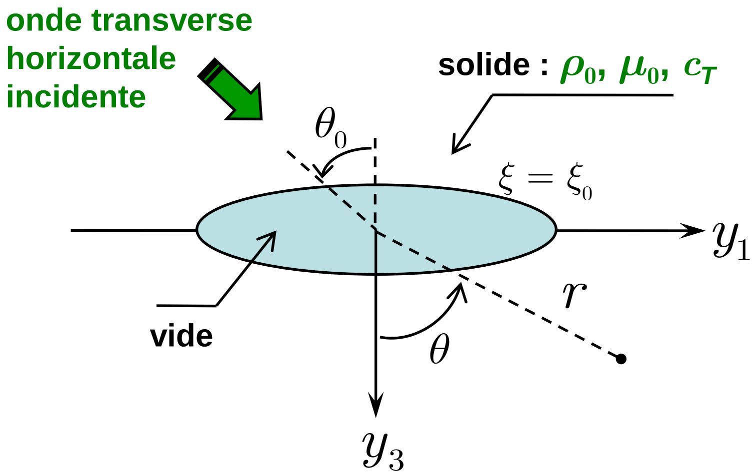
✓**Déplacement diffusé :**

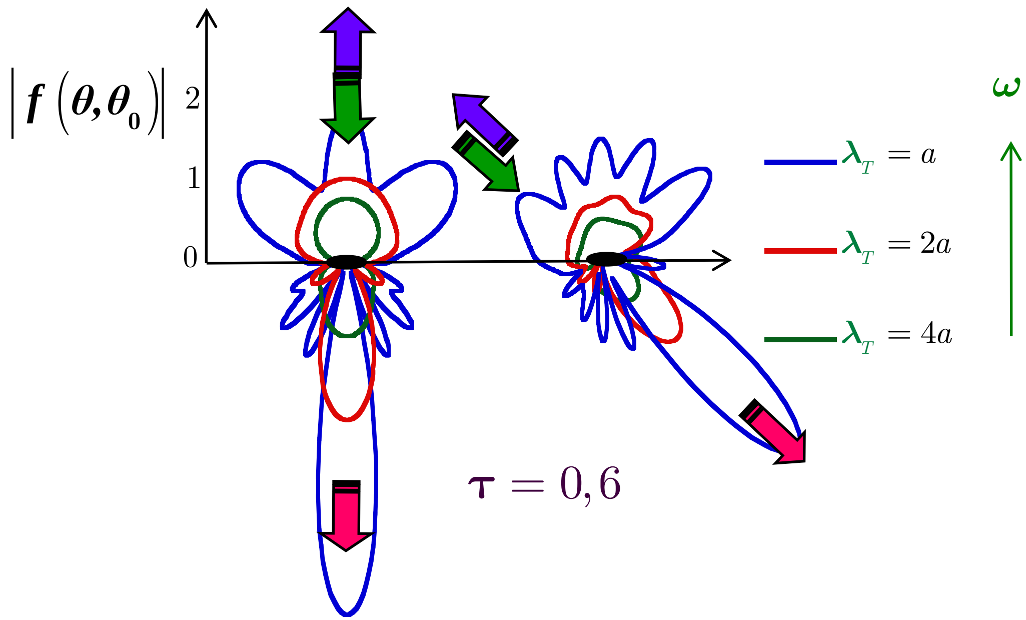
coefficients de diffusion (à déterminer)

$$\boldsymbol{u}_2^{\text{Dif}}(\xi,\eta) = \sum_{\sigma} \sum_{n=0}^{+\infty} A_{\sigma n}(\theta_0)\, \boldsymbol{C}_{\sigma n}\, \psi_{\sigma n}(\xi,\eta)$$

✓**Condition de surface libre :** $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_2^{\text{Dif}}}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_2^{\text{Inc}}}{\partial \xi},\ \xi = \xi_0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{C}_{\sigma n} = -\left.\dfrac{J'_{\sigma n}(\xi)}{H'_{\sigma n}(\xi)}\right|_{\xi = \operatorname{atanh}\tau}$

III.3 Amplitude de diffusion





➢**En champ lointain** $\xi \to \infty, \quad 2r \simeq a\,\mathrm{e}^{\xi}, \quad \theta \simeq \eta$

✓**Amplitude de diffusion** $f(\theta,\theta_0) = \dfrac{2}{\mathrm{i}\pi}\sum_{\sigma}\sum_{n=0}^{+\infty} C_{\sigma n}(\tau)\, e_{\sigma n}(\theta_0)\, e_{\sigma n}(\theta)$

diffusion vers l'avant : $\theta = \theta_0$

diffusion vers l'arrière : $\theta = \theta_0 + \pi$

- ➢ $\tau \to 0$ **= idem partie A**
- ➢ **symétrie du plan de fissure**
- ➢ $\omega \nearrow$ **plus directif**

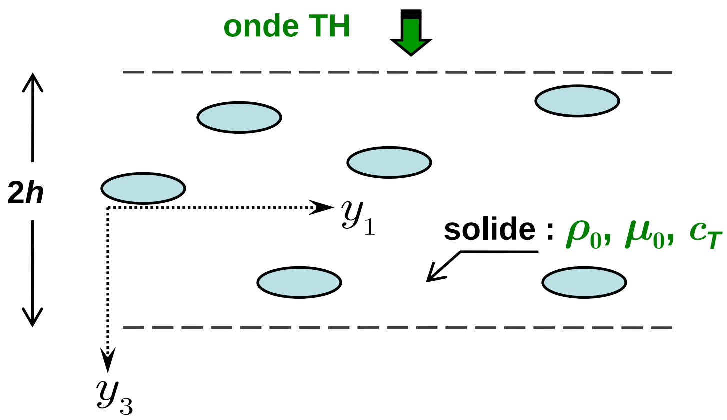
Partie B

III. Diffusion simple par une fissure ouverte

IV. Analyse de la diffusion multiple par une distribution aléatoire de diffuseurs linéiques

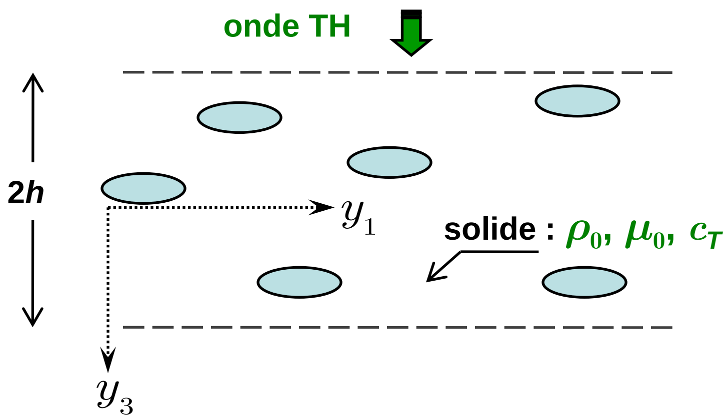
1. Modélisation :
   - Propriétés acoustiques/mécaniques du milieu effectif
2. Applications :
   - Distribution uniforme de fissures
   - Distribution non-uniforme de fissures
   - Distribution superficielle de fissures
   - Tenseurs effectifs appropriés

IV.1 Modélisation

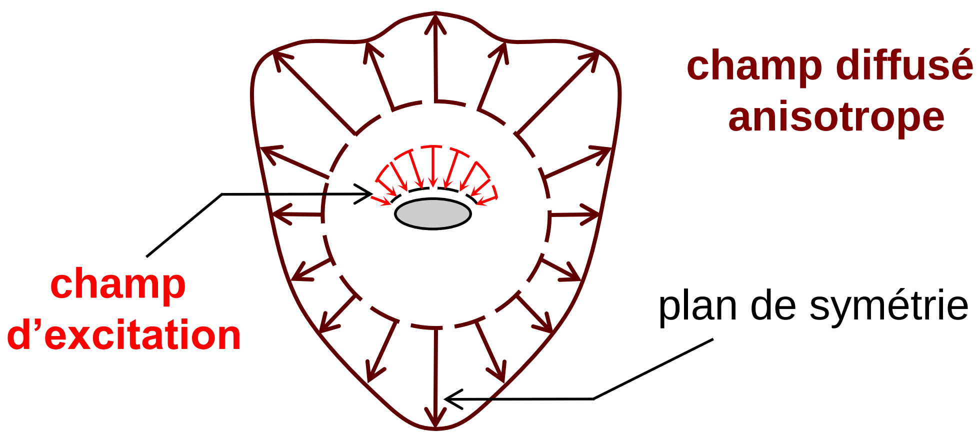


- ✓**distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs**
- ✓**couche d'épaisseur 2*h***
- ✓ n_0 **: nombre de diffuseurs par unité de surface**

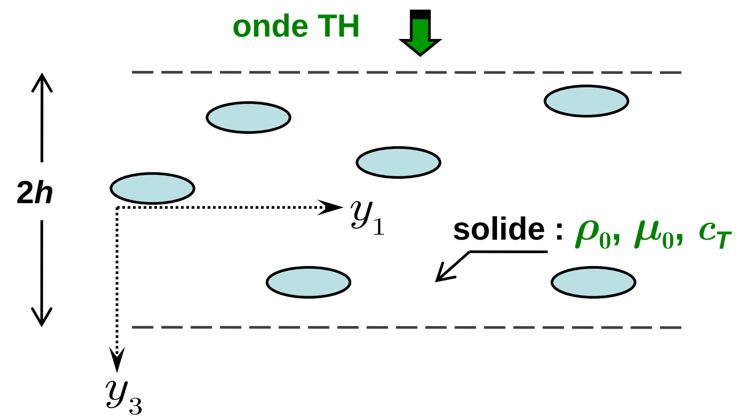
IV.1 Modélisation



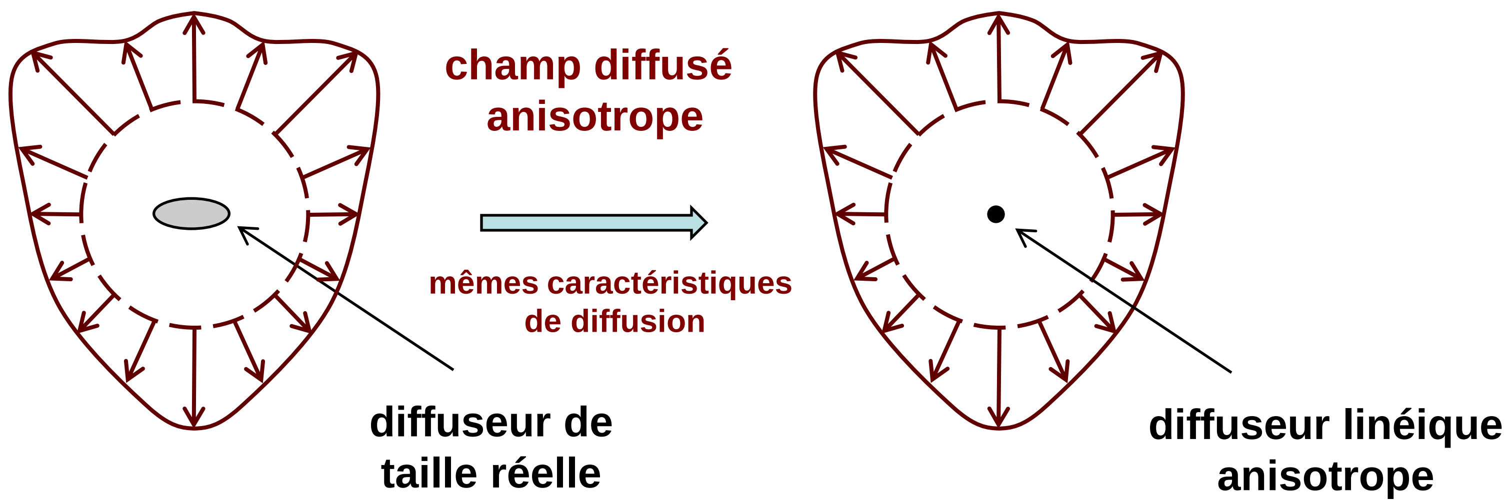
- ✓distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs
- ✓couche d'épaisseur 2*h*
- ✓ n_0 : nombre de diffuseurs par unité de surface
- ✓ **symétrie / y_3**



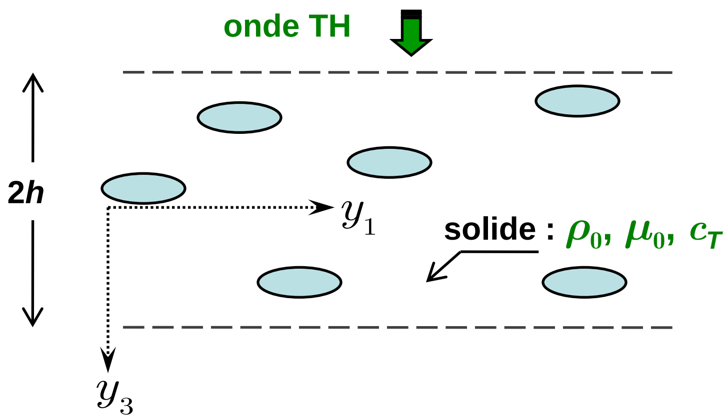
IV.1 Modélisation



- ✓distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs
- ✓couche d'épaisseur 2h
- ✓ n_0 : nombre de diffuseurs par unité de surface
- ✓ symétrie / y_3
- ✓ **diffuseurs linéiques**



IV.1 Modélisation



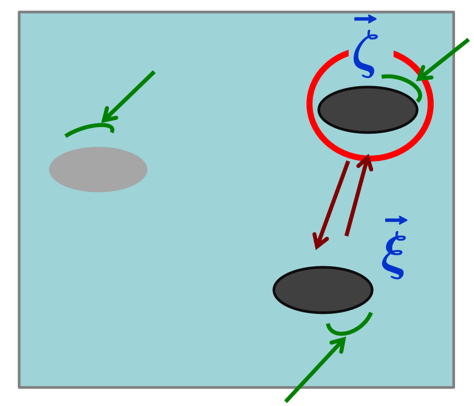
- ✓distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs
- ✓couche d'épaisseur 2h
- ✓ n_0 : nombre de diffuseurs par unité de surface
- ✓ symétrie / y_3
- ✓ diffuseurs linéiques

- description probabiliste

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Tot}} \right\rangle(\vec{y}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\vec{y}) + n_0 \int_{-h}^{h}\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\vec{y};\vec{\zeta})\, \mathrm{d}\zeta_3 \mathrm{d}\zeta_1$$

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \right\rangle(\vec{y};\vec{\zeta}) = \mathbf{u}^{\mathrm{Inc}}(\vec{y}) + n_0 \int_{-h}^{h}\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Dif}} \right\rangle(\vec{y};\vec{\xi},\vec{\zeta})\, \mathrm{d}\xi_3 \mathrm{d}\xi_1$$

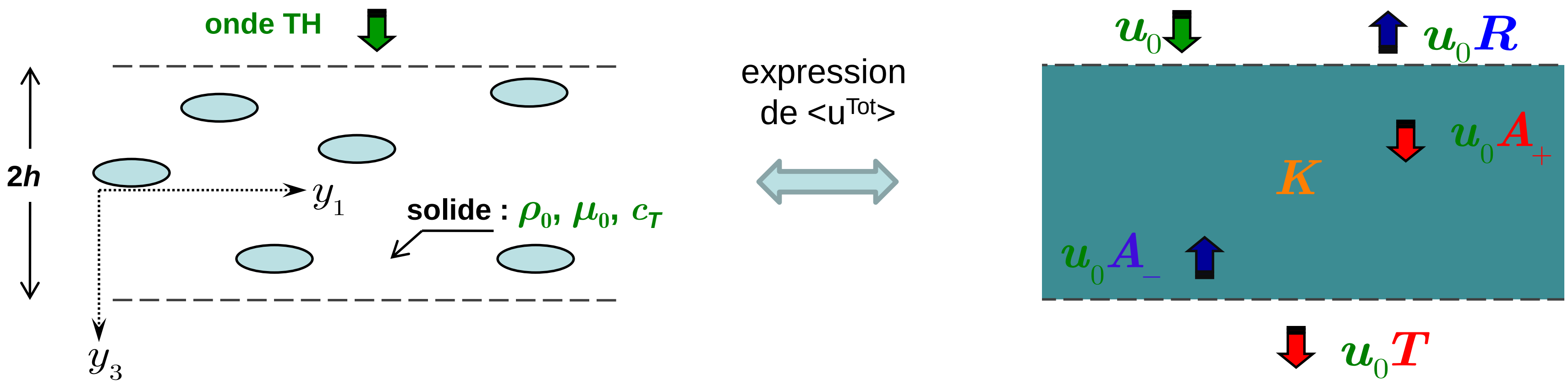
- illustration



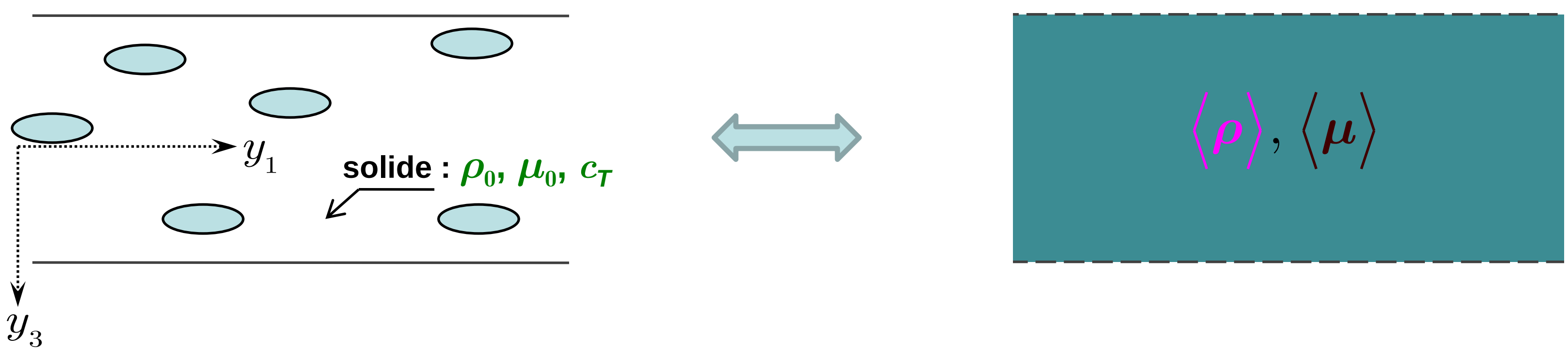
- Hypothèse Globale de Fermeture

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Ex}} \right\rangle(\vec{\zeta};\vec{\zeta}) = \left\langle \mathbf{u}^{\mathrm{Tot}} \right\rangle(\vec{\zeta}) \quad , \quad (y_3,y_1) \rightarrow (\zeta_3,\zeta_1)$$

IV.1 Modélisation

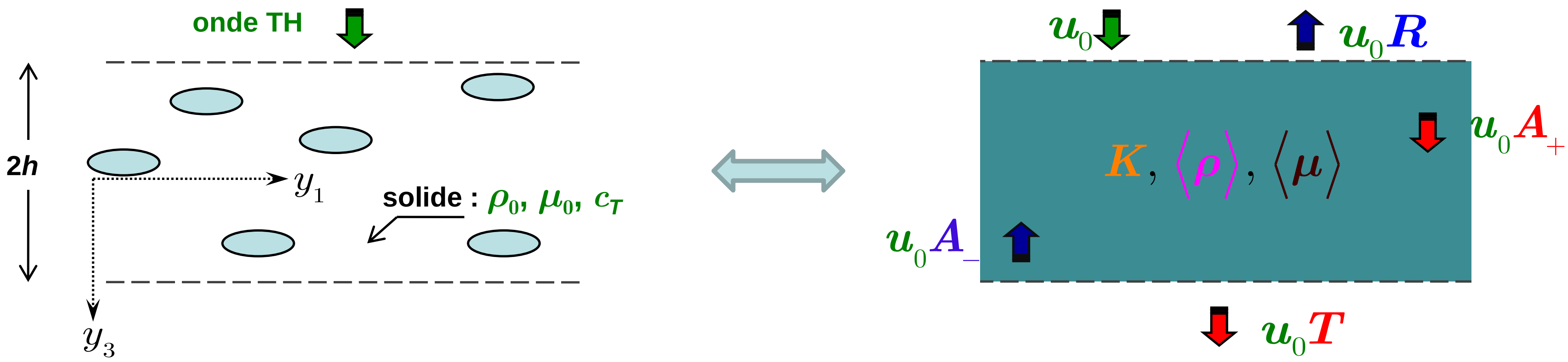


propriétés acoustiques de l'onde cohérente : $K, \; R, \; T, \; A_-, \; A_+$



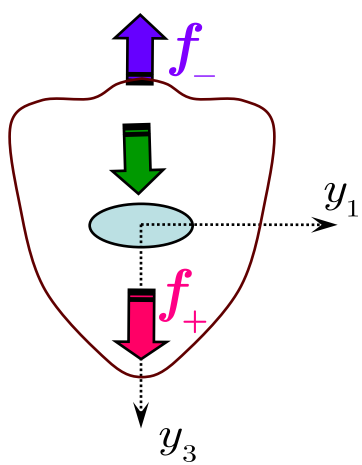
propriétés mécaniques effectives : $\langle \rho \rangle, \; \langle \mu \rangle$

IV.1 Modélisation



- **Nombre d'onde effectif** * $K^2 = k_T^2 \left(1 + n_0 \frac{2\pi}{k_T^2} f_+\right)^2 - k_T^2 \left(n_0 \frac{2\pi}{k_T^2} f_-\right)^2$
- **Masse volumique effective** $\langle \rho \rangle(\omega) = \rho_0 \left(1 + n_0 \frac{2\pi}{k_T^2}\left(f_+ + f_-\right)\right)$
- **Module de rigidité effectif** $\langle \mu \rangle(\omega) = \mu_0 \Big/ \left(1 + n_0 \frac{2\pi}{k_T^2}\left(f_+ - f_-\right)\right)$

✓ ***description complète***
✓ ***flexibilité***

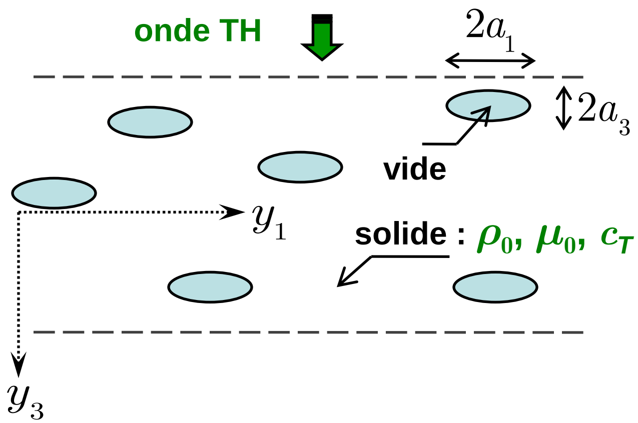


fibre, coque, cavité, fissure,…

- ***traiter les cas de distributions de fissures (non) uniforme et surfacique***

*[Waterman & Truell, J. Math. Phys (1961)]

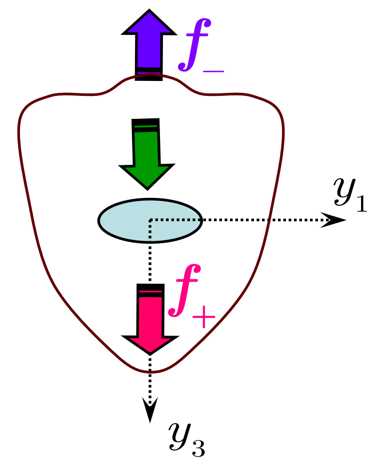
IV.2 Distribution uniforme de fissures



- ✓**ouverture des fissures :** $\boldsymbol{\tau} = a_3 \,/\, a_1$
- ✓**une seule famille de fissures ($\boldsymbol{\tau}$ fixe)**
- ✓**densité de fissures :** $\varepsilon = \boldsymbol{n}_0 a_1^2$

➢ *Nombre d'onde effectif*

$$\overrightarrow{K}(\omega) = \left(\frac{\omega}{c(\omega)} + \mathrm{i}\,\alpha(\omega) \right) \vec{y}_3$$

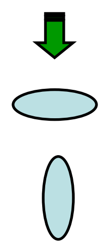


fissure ouverte vide

✓**Effet de l'ouverture des fissures sur α et c**

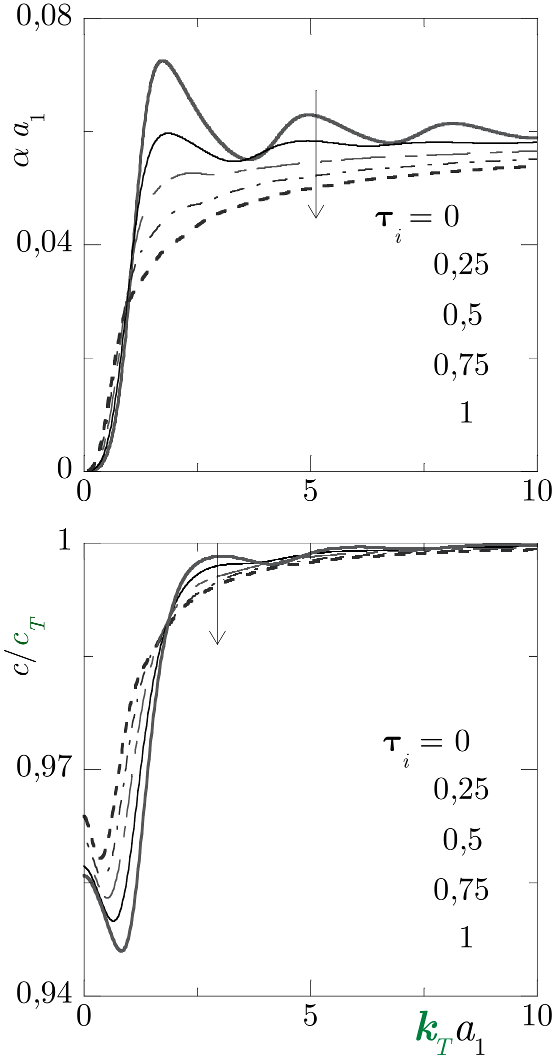
$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau} \leq \mathbf{1},\ \vec{a}_1 \parallel \vec{y}_1$$

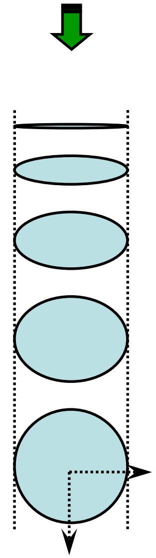
$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}} > \mathbf{1},\ \vec{a}_3 \parallel \vec{y}_1$$



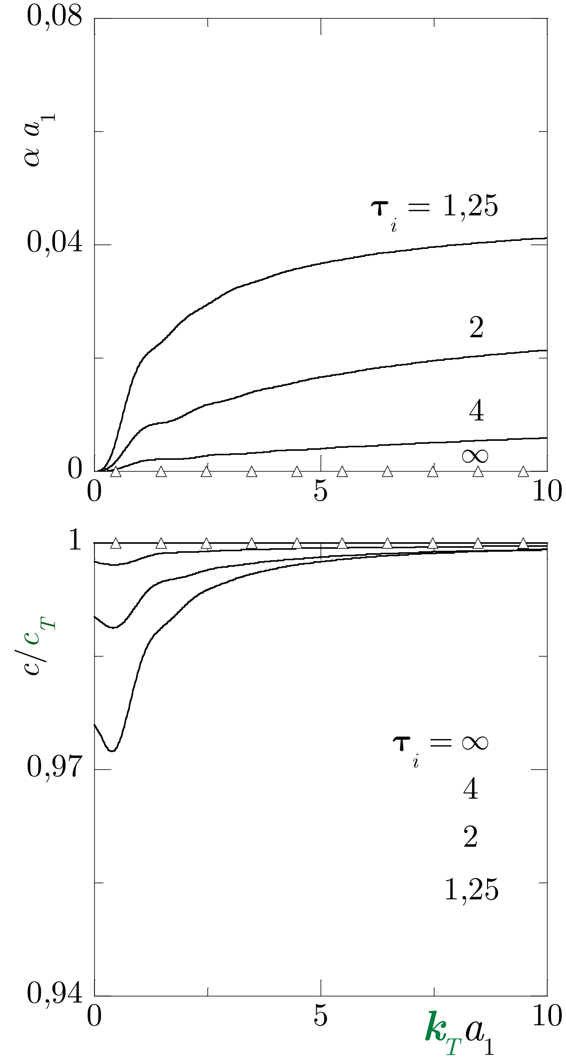
$\varepsilon = 0{,}03$

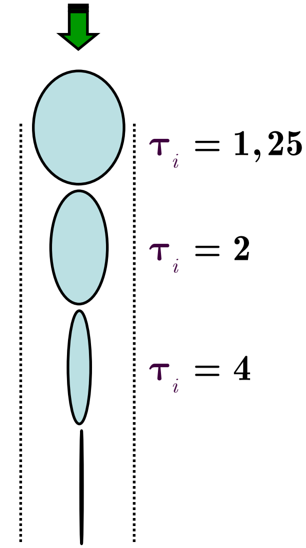
Effet de l'ouverture sur α et c





atténuation et célérité gouvernées par le **volume de la fissure**



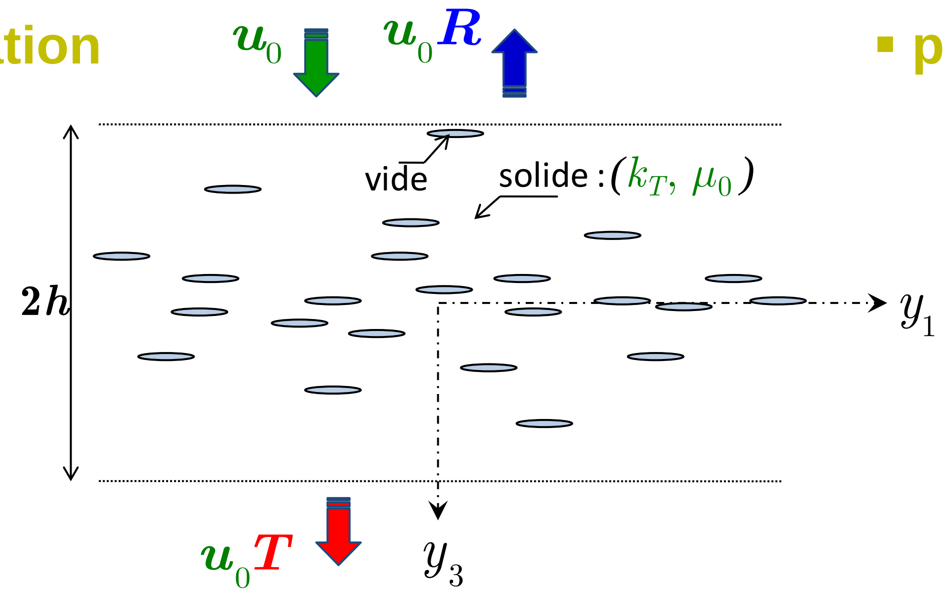


atténuation et célérité gouvernées par la **longueur active**

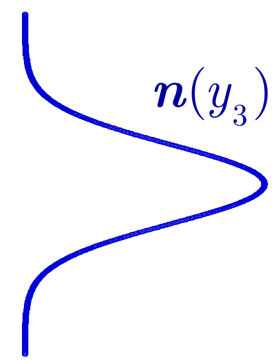
[Caleap, Aristégui & Angel, Geophys. J. Int. (2009)]

IV.3 Distribution non-uniforme de fissures

- illustration

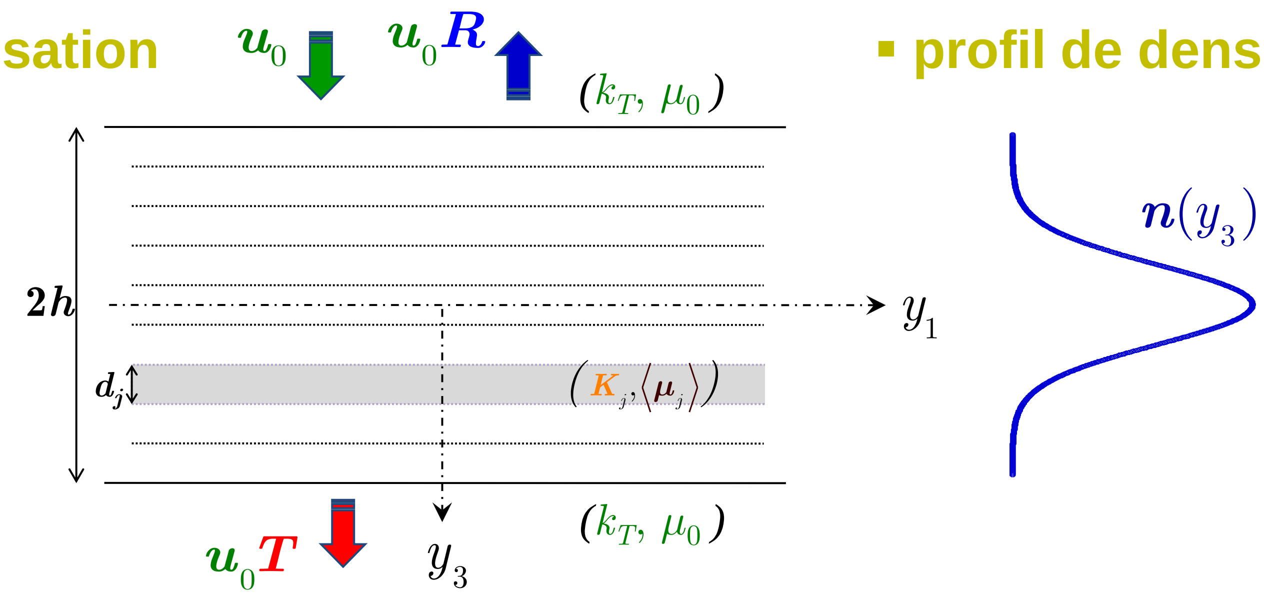


- profil de densité de fissures



IV.3 Distribution non-uniforme de fissures

- modélisation
- profil de densité de fissures

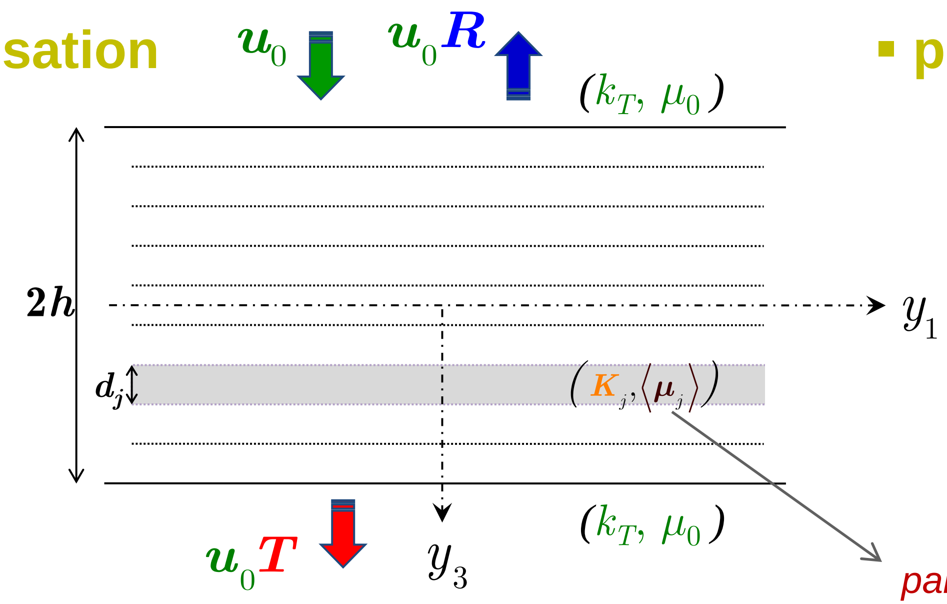


$$\begin{Bmatrix} T e^{ik_T h} \\ i k_T \mu_0 T e^{ik_T h} \end{Bmatrix} = \prod_{j=p}^{1} \begin{bmatrix} \cos K_j d_j & \dfrac{\sin K_j d_j}{K_j \langle \mu_j \rangle} \\ -K_j \langle \mu_j \rangle \sin K_j d_j & \cos K_j d_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-ik_T h} + R e^{ik_T h} \\ i k_T \mu_0 \left(e^{-ik_T h} - R e^{ik_T h} \right) \end{Bmatrix}$$

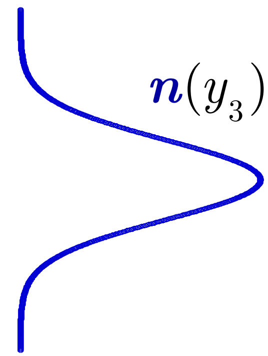
[Aristégui, Caleap, Poncelet, Shuvalov & Angel, Springer Proceedings in Physics (2009)]

IV.3 Distribution non-uniforme de fissures

- modélisation

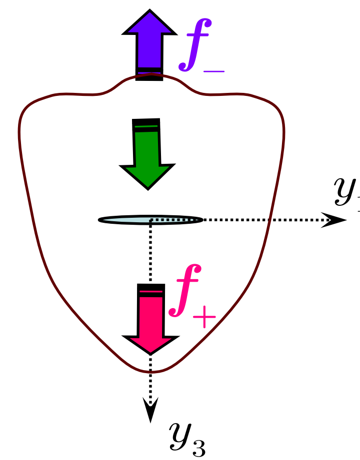


- profil de densité de fissures



$$n(0)a^2 = 0,03$$

paramètres effectifs



fissure plate vide

✓*Nombre d'onde effectif*

$$K^2(y_3) = k_T^2\left(1 + n(y_3)\frac{2\pi}{k_T^2} f_+\right)^2 - k_T^2\left(n(y_3)\frac{2\pi}{k_T^2} f_-\right)^2$$

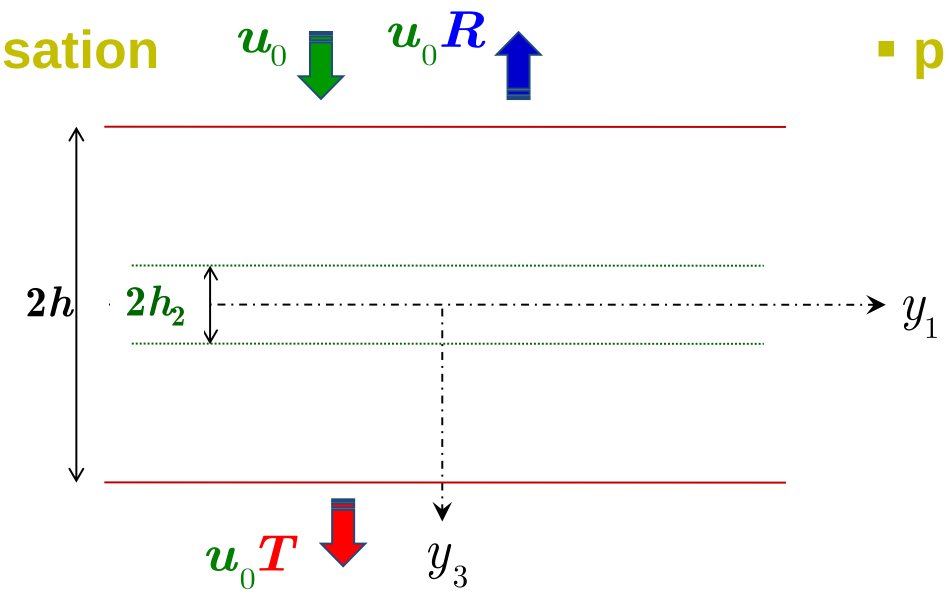
✓*Module de rigidité effectif*

$$\langle\mu\rangle(y_3) = \mu_0 \Big/ \left(1 + n(y_3)\frac{2\pi}{k_T^2}\left(f_+ - f_-\right)\right)$$

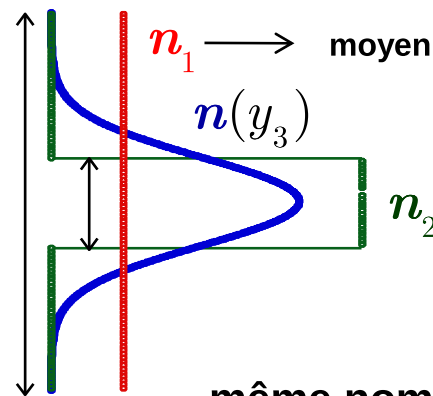
varie spatialement

Différents profils de densité

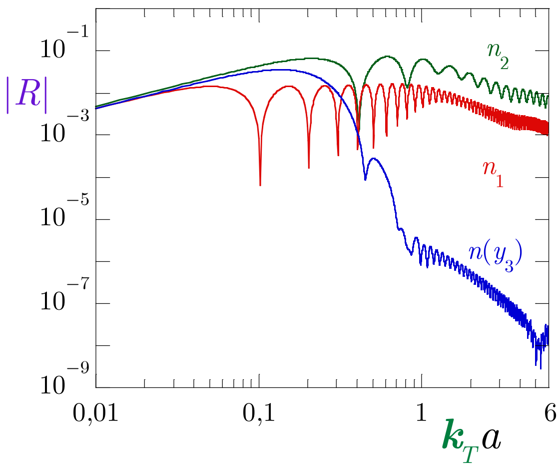
- modélisation

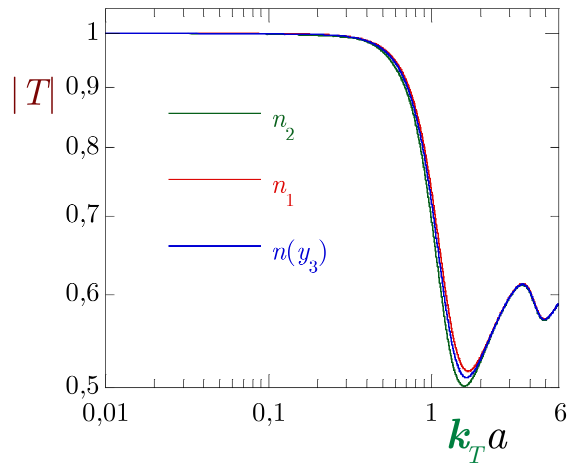


- profils de densité de fissures



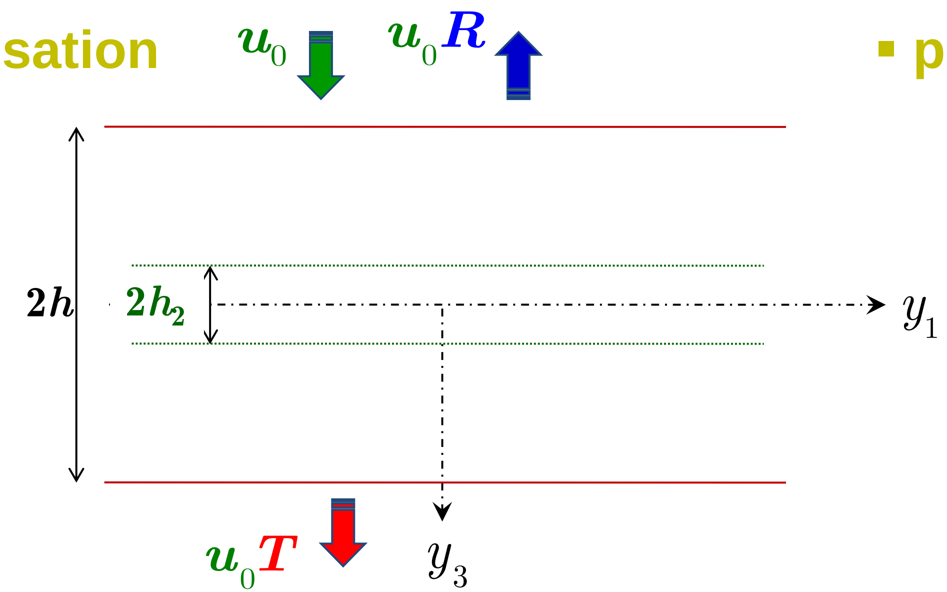
même nombre de fissures



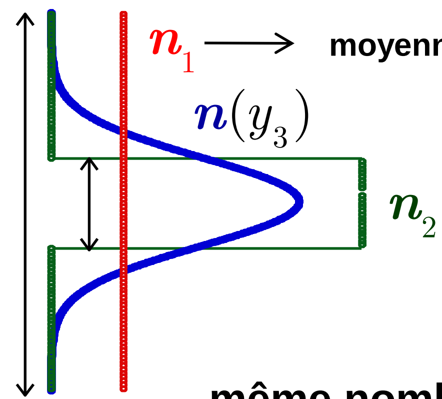


Différents profils de densité

- modélisation



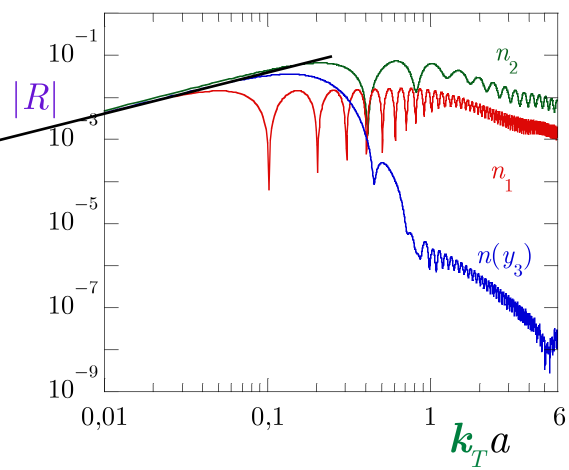
- profils de densité de fissures

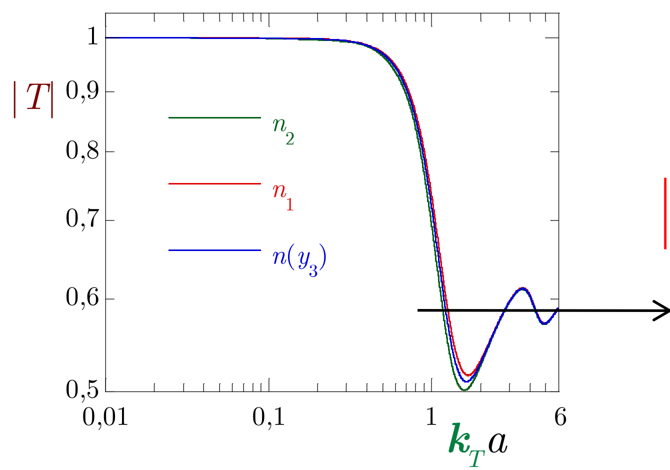


$n_1 \longrightarrow$ moyenne du profil Gaussien

même nombre de fissures

$$|\boldsymbol{R}| \simeq \langle \boldsymbol{n} \rangle \boldsymbol{k}_T h$$

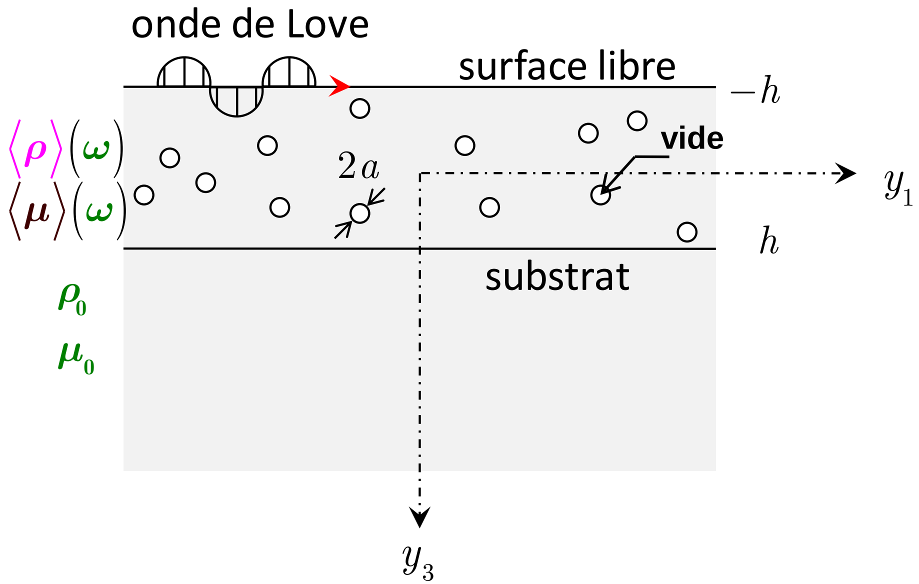




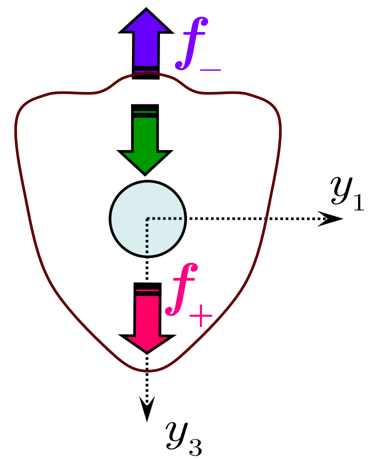
$$|\boldsymbol{T}| \to \exp\left(-4 \langle \boldsymbol{n} \rangle a h\right)$$

densité de fissures effective

IV.4 Distribution surfacique de fissures



- ✓ **distribution uniforme et aléatoire**
- ✓ n_0 **: nombre de cavités par unité de surface**



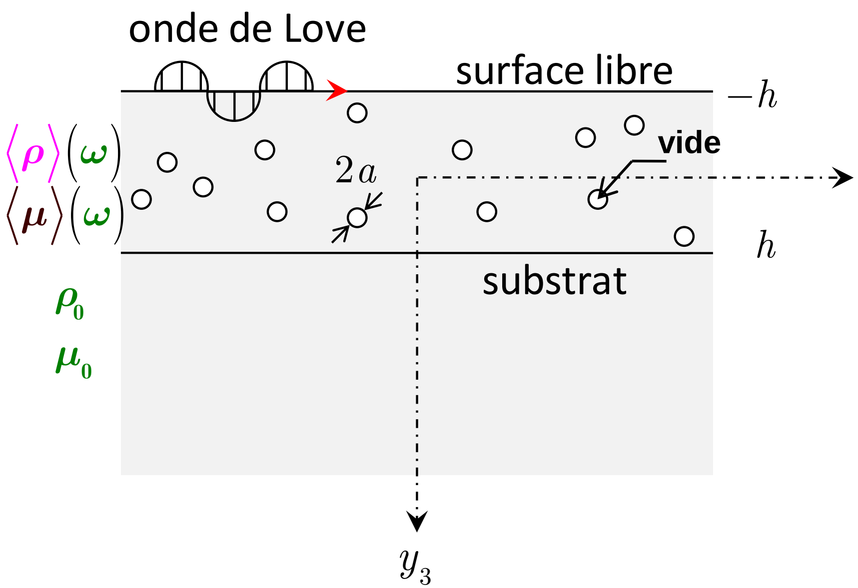
cylindre vide

✓Couche avec des cavités : milieu effectif

$$\langle\boldsymbol{\rho}\rangle(\omega),\quad \langle\boldsymbol{\mu}\rangle(\omega),\quad \overrightarrow{K}(\omega)=\left(\frac{\omega}{c(\omega)}+\mathrm{i}\,\alpha(\omega)\right)\vec{\boldsymbol{y}}_3$$

[Aristégui, Shuvalov, Poncelet & Caleap, J. Acoust. Soc. Am. (2009)]

IV.4 Distribution surfacique de fissures



- ✓ distribution uniforme et aléatoire
- ✓ n_0 : nombre de cavités par unité de surface

$$u_2(y_1, y_3) = U(y_3)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_{Love}y_1}$$

✓**Équation de dispersion :** $\mathrm{i}\tan\left(h\sqrt{k_{couche}(\omega)-K_{Love}^2}\right)-\dfrac{\mu_0}{\langle\mu\rangle(\omega)}\dfrac{\sqrt{k_T^2-K_{Love}^2}}{\sqrt{k_{couche}(\omega)-K_{Love}^2}}=0$

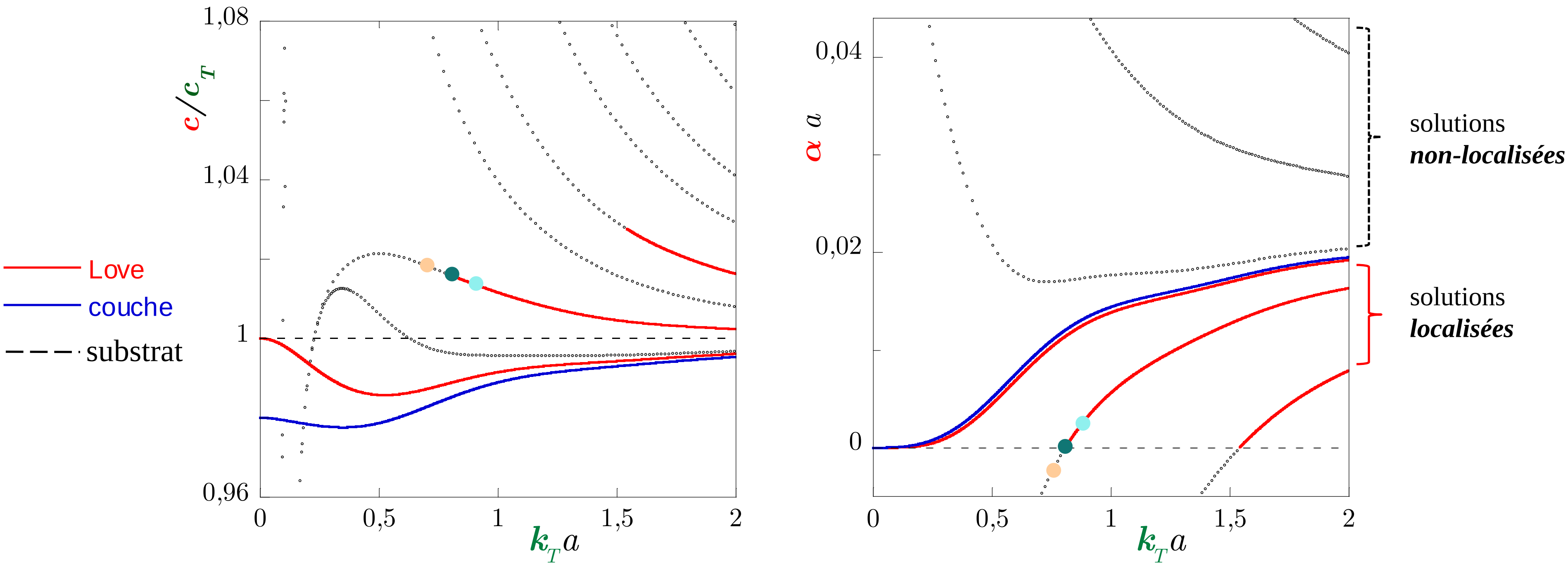
Les solutions ***localisées à la surface*** décroissent dans la profondeur du substrat :

$$\mathrm{Im}\sqrt{k_T^2-K_{Love}^{(n)2}}\geq 0$$

➤**Branches d'atténuation $\alpha^{(n)}$ et de dispersion $c^{(n)}$** $\quad (n=0,\,1,\,\dots)$

$$\overrightarrow{K}_{Love}(\omega)=K_{Love}\vec{y}_1=\left(\frac{\omega}{c(\omega)}+\mathrm{i}\alpha(\omega)\right)\vec{y}_1$$

Spectres de dispersion et d'atténuation



Les solutions ***localisées*** ***à la surface*** décroissent dans la profondeur du substrat :

$$\mathrm{Im}\sqrt{k_T^2 - K_{Love}^{(n)2}} \geq 0$$

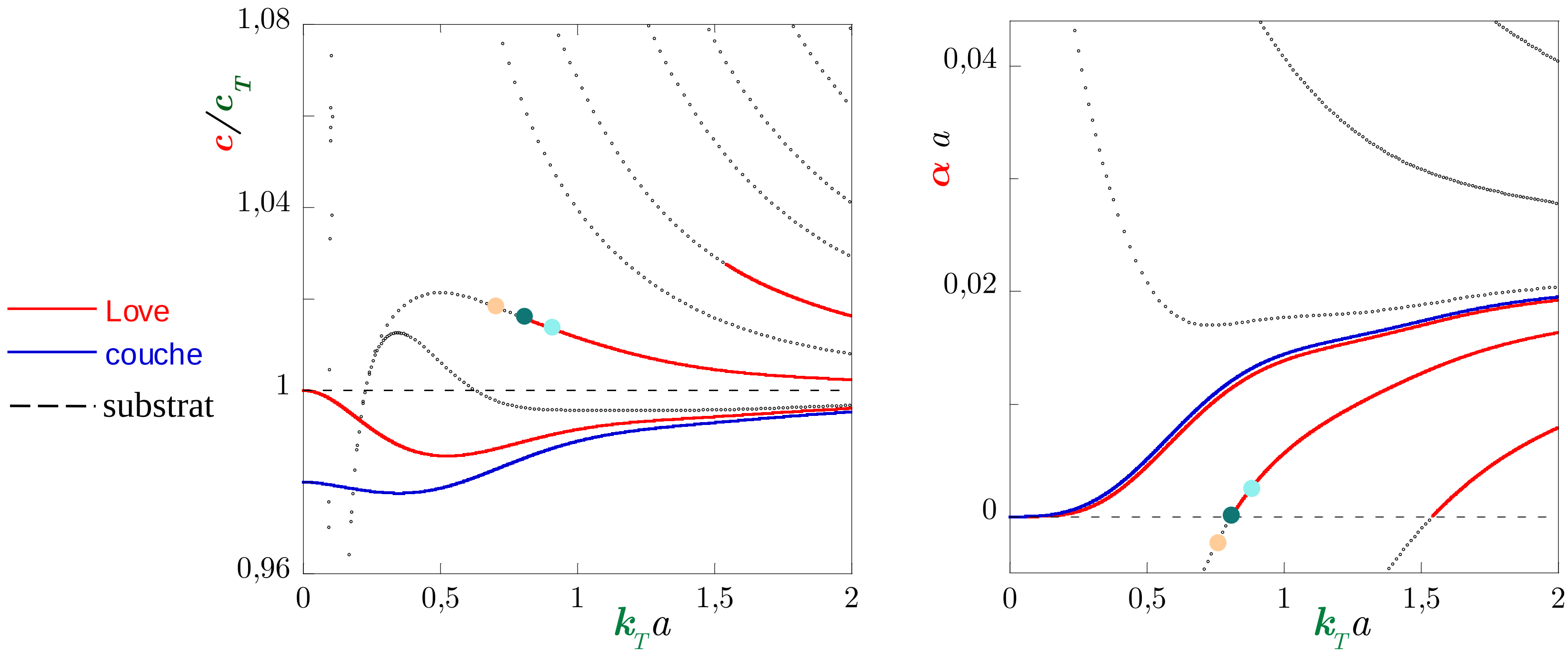
couche d'épaisseur :

$h = 10a$

densité de fissures :

$\varepsilon = 0,03$

Spectres de dispersion et d'atténuation



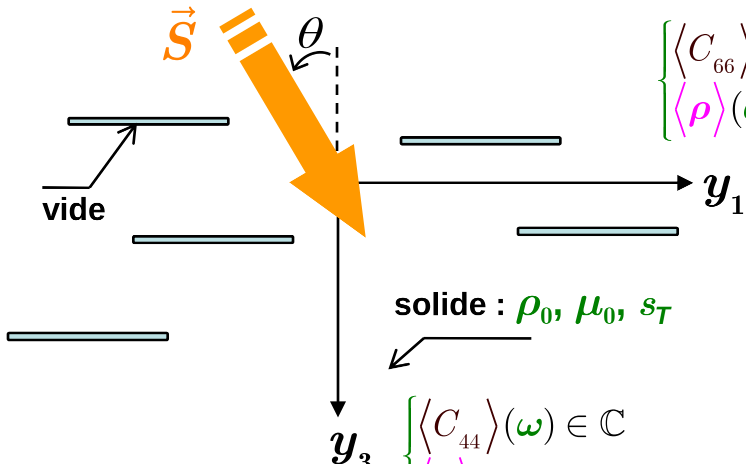
Les solutions ***localisées* à la surface** décroissent dans la profondeur du substrat :

$$\mathrm{Im}\sqrt{k_T^2 - K_{Love}^{(n)2}} \geq 0$$

$$\begin{cases} c_{coupure}^{(n)}(\omega) > c_T, \quad \forall \omega > 0 \\ \alpha^{(n)} \neq 0 \\ \alpha^{(0)}(\omega) \approx \alpha(\omega) \end{cases}$$

IV.5 Tenseurs effectifs appropriés

onde cohérente TH



$$\begin{cases} \langle C_{66}\rangle(\omega) = \mu_0 \\ \langle \rho \rangle(\omega) = \rho_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle C_{44}\rangle(\omega) \in \mathbb{C} \\ \langle \rho \rangle(\omega) = \rho_0 \end{cases}$$

propriétés sont connues selon **deux** directions

$$\vec{K} = \omega \vec{S} = \omega\left(S_1 \vec{y}_1 + S_3 \vec{y}_3\right)$$

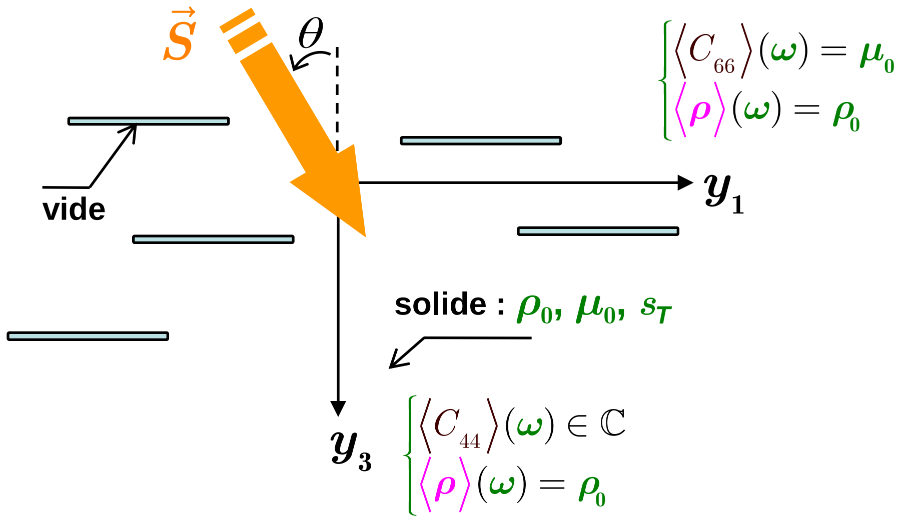
lenteur de phase effective

Peut-on décrire la propagation de l'onde cohérente TH pour toute direction du plan (y_3, y_1) à l'aide de l'équation de dispersion propre au milieu homogène ?

$$\langle C_{66}\rangle S_1^2 + \langle C_{44}\rangle S_3^2 - \rho_0 = 0$$

IV.5 Tenseurs effectifs appropriés

onde cohérente TH



propriétés sont connues selon **deux** directions

$$\vec{K} = \underbrace{\omega \vec{S}}_{\text{lenteur de phase effective}} = \omega \begin{pmatrix} S \sin\theta \\ S \cos\theta \end{pmatrix}$$

Peut-on décrire la propagation de l'onde cohérente TH pour toute direction du plan (y_3, y_1) à l'aide de l'équation de dispersion propre au milieu homogène ?

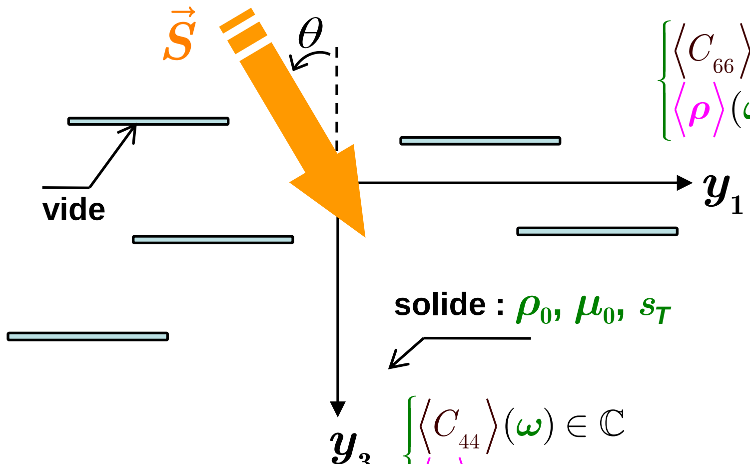
$$\langle C_{66} \rangle S^2 \sin^2\theta + \langle C_{44} \rangle S^2 \cos^2\theta - \rho_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S = S' + \mathrm{i} S''$$

IV.5 Tenseurs effectifs appropriés

onde cohérente TH



$$\begin{cases} \langle C_{66} \rangle(\omega) = \mu_0 \\ \langle \rho \rangle(\omega) = \rho_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle C_{44} \rangle(\omega) \in \mathbb{C} \\ \langle \rho \rangle(\omega) = \rho_0 \end{cases}$$

propriétés sont connues selon **deux** directions

$$\vec{K} = \omega \vec{S} = \omega \begin{pmatrix} S \sin\theta \\ S \cos\theta \end{pmatrix}$$

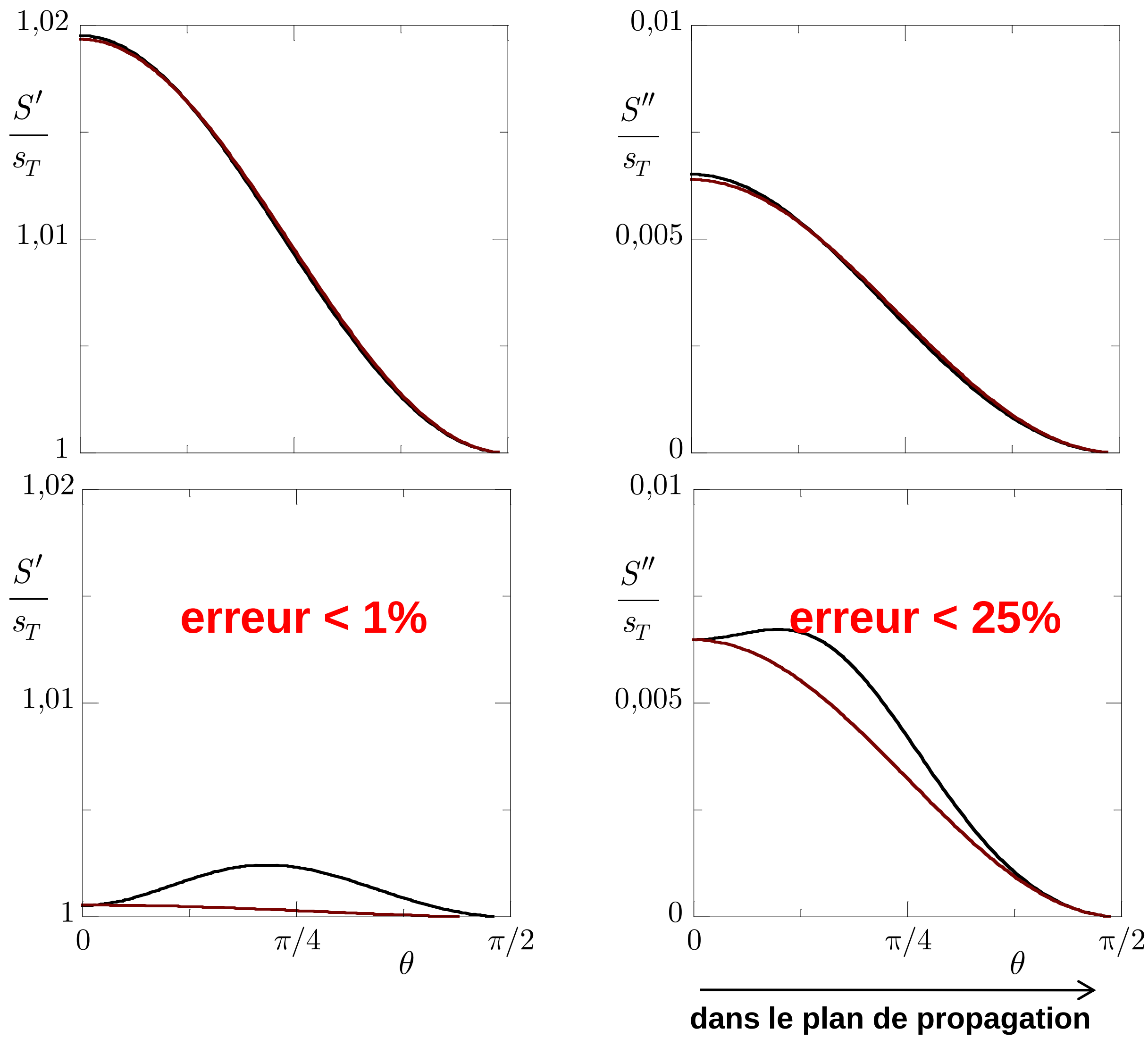
lenteur de phase effective

Peut-on décrire la propagation de l'onde cohérente TH pour toute direction du plan (y_3, y_1) à l'aide de l'équation de dispersion propre au milieu homogène ?

✓**Alternativement nous pouvons calculer la lenteur de phase effective à partir d'une méthode énergétique pour tout angle θ**

(limitée au faibles concentrations de fissures !)

IV.5 Tenseurs effectifs appropriés



densité de fissures : $\varepsilon = 0,01$

$k_T a = 0,8$

Éq.de dispersion vs.
méthode énergétique

$k_T a = 3$

Conclusion

✓**Diffusion simple d'ondes TH par une fissure (plate, elliptique)**
✓**Diffusion multiple d'ondes cohérentes TH en milieux multifissurés**

➢**Nous avons développé un modèle pour traiter le cas des fissures *inclinées***
➢**Nous avons montré l'intérêt des propriétés mécaniques effectives en traitant les cas de :**

- **-distribution *uniforme* de fissures**
- **-distribution *non-uniforme* de fissures**
- **-distribution *surfacique* de fissures**

Perspectives

✓**Réitération des théories de diffusion multiple afin d'investiguer la diffusion d'ondes planes vectorielles (Longitudinales-Transverses Verticales) dans des milieux multifissurés**

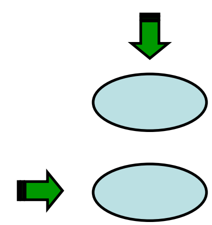
$$\Rightarrow \boldsymbol{C}_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = ?$$

✓**Inversion basse fréquence des résultats analytiques pour obtenir**

taille de fissures

densité de fissures,…

$$\begin{cases} \langle C_{44}\rangle(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\mu}_0\left(\dfrac{1}{1+\pi\varepsilon+\pi\varepsilon\boldsymbol{\tau}} + O\left(\boldsymbol{k}_T^2 a^2 \ln\left(\boldsymbol{k}_T a\right)\right) - \mathrm{i}\,\dfrac{\pi^2\varepsilon\left(1+\boldsymbol{\tau}\right)^2}{8\left(1+\left(1+\boldsymbol{\tau}\right)\pi\varepsilon\right)^2}\,\boldsymbol{k}_T^2 a^2\left(1+O\left(\ln\left(\boldsymbol{k}_T a\right)\right)\right)\right) \\ \langle C_{66}\rangle(\boldsymbol{\omega}) = \langle C_{44}\rangle(\boldsymbol{\omega}) \quad \left(\text{avec } \boldsymbol{\tau} \mapsto \dfrac{1}{\boldsymbol{\tau}}\right) \end{cases}$$

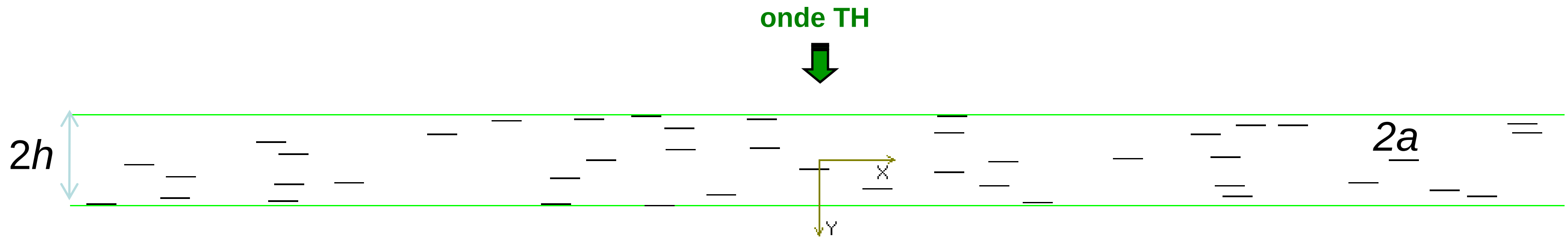


Partie C

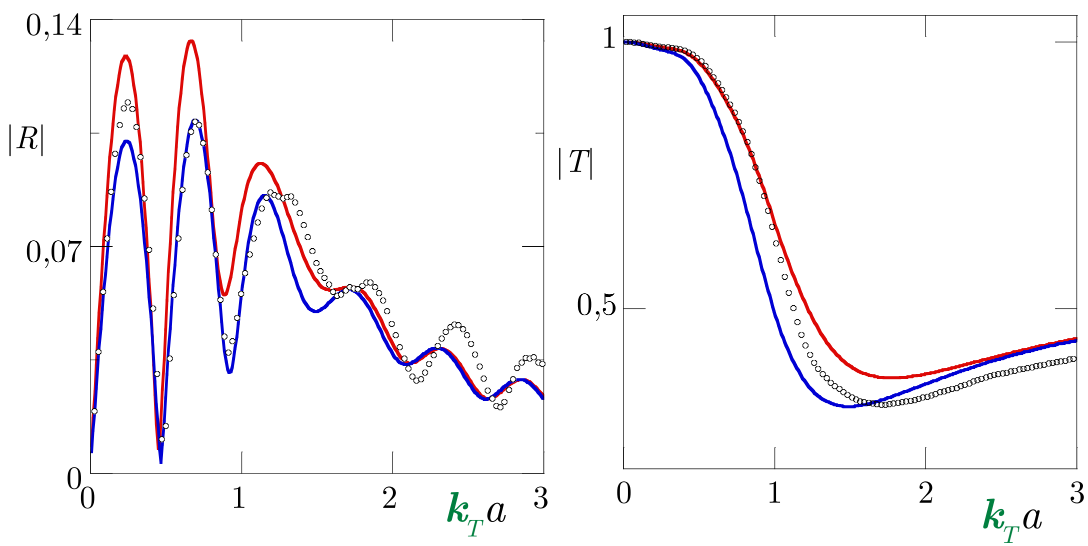
V. Comparaison à des prédictions numériques (FDTD)

1. Distribution uniforme de fissures plates
2. Distribution non-uniforme de fissures plates

V.1 Distribution uniforme de fissures



Spectres moyens de réflexion et de transmission



FDTD*
fissures de taille réelle **partie A**
diffuseurs linéiques **partie B**

couche d'épaisseur :

$h = 3a$

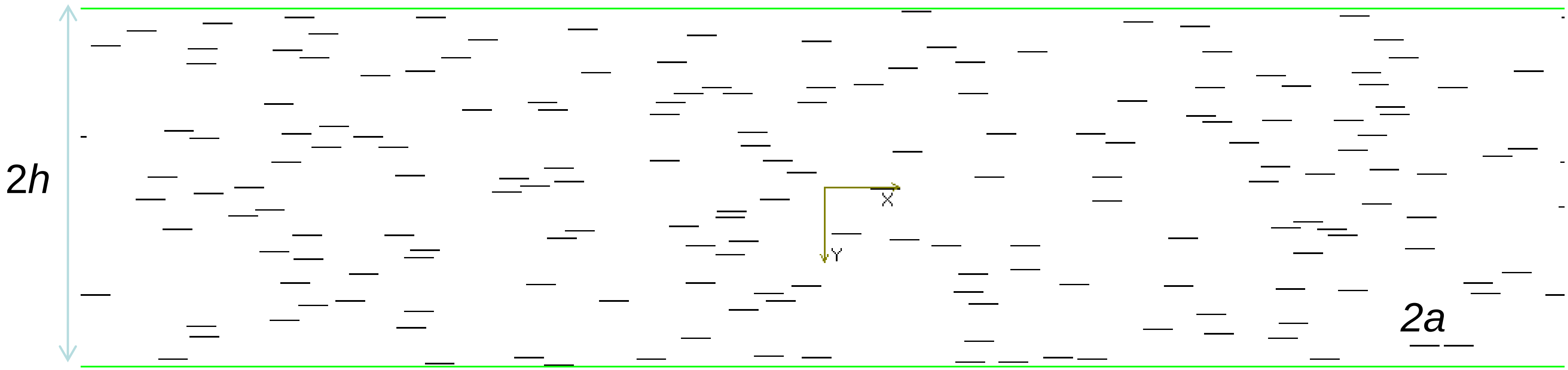
densité de fissures :

$\varepsilon = 0{,}07$

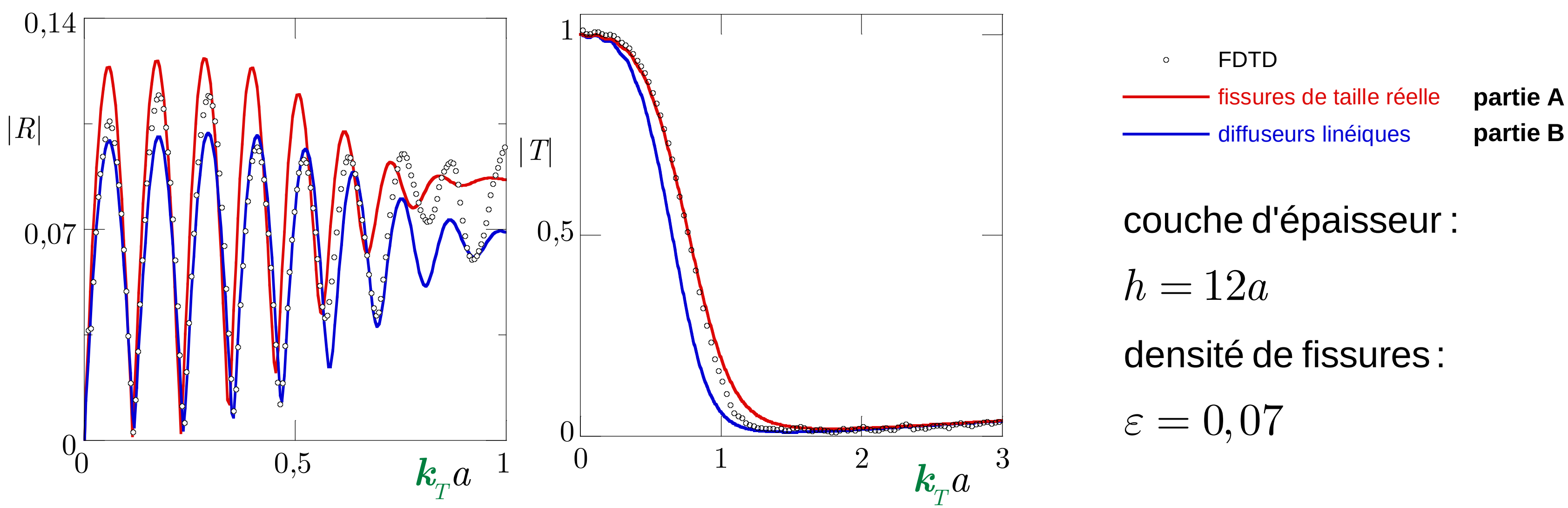
moyenne sur (80 simulations x 2000 récepteurs)

***[S. Golkin, Thèse de Doctorat, LMP]**

V.1 Distribution uniforme de fissures



Spectres moyens de réflexion et de transmission



couche d'épaisseur :

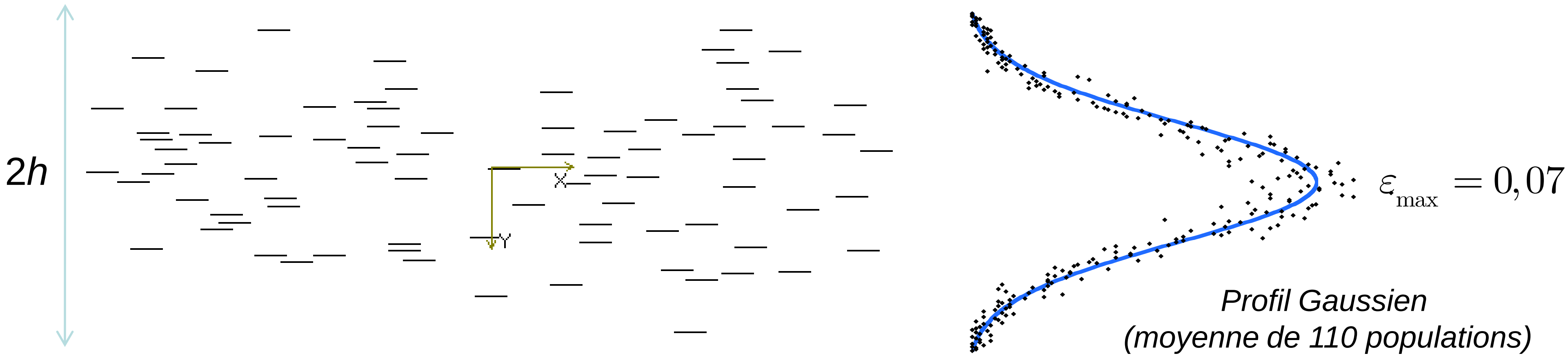
$h = 12a$

densité de fissures :

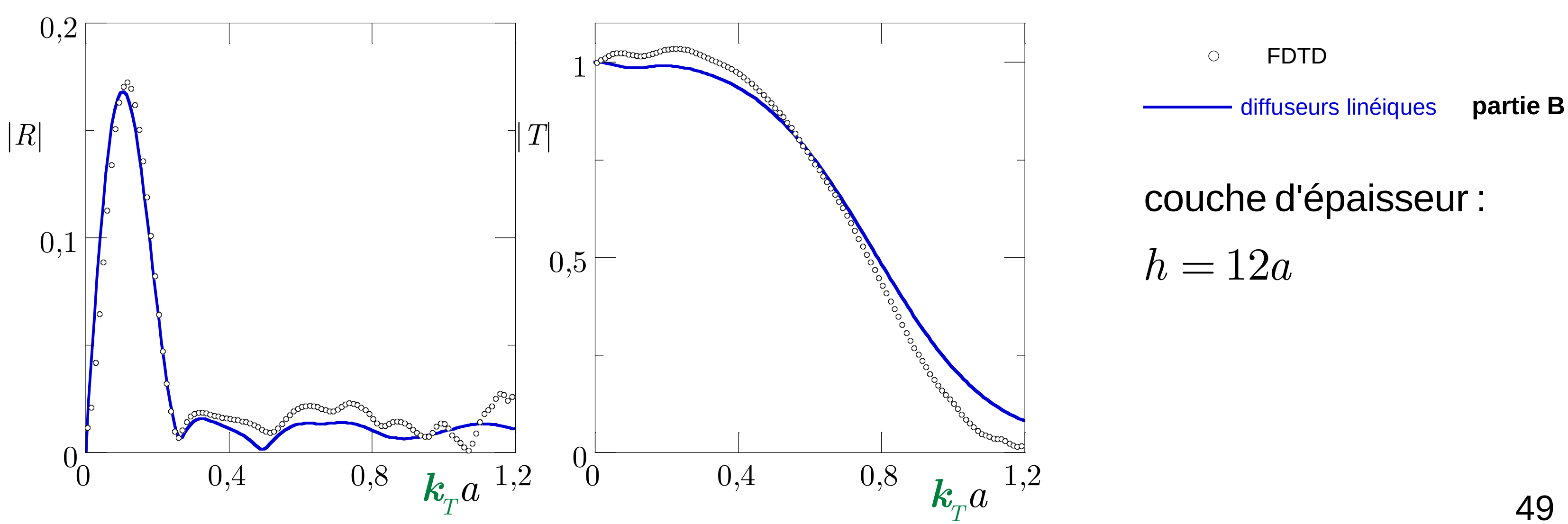
$\varepsilon = 0,07$

moyenne sur (80 simulations x 2000 récepteurs)

V.2 Distribution non-uniforme de fissures



Spectres moyens de réflexion et de transmission



couche d'épaisseur :

$h = 12a$