



HAL
open science

Conditions de compatibilité en mécanique des solides

Danielle Léonard Fortuné

► **To cite this version:**

Danielle Léonard Fortuné. Conditions de compatibilité en mécanique des solides. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Poitiers, 2008. Français. NNT: . tel-00375897

HAL Id: tel-00375897

<https://theses.hal.science/tel-00375897>

Submitted on 16 Apr 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 21942337

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

Unité de Formation et de Recherche Sciences Fondamentales et Appliquées
(Diplôme National – Arrêté ministériel du 16 Avril 1974)

École Doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur & Aéronautique

Secteur de Recherche : Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces.

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

par

Danielle LÉONARD-FORTUNÉ

Conditions de compatibilité en mécanique des solides

-

Méthode de Darboux

Directeur de Thèse : Claude VALLÉE

Soutenue le 18 Décembre 2008 devant la commission d'examen

Jury

C. Vallée	Professeur Émérite	Université de Poitiers	Président, Rapporteur.
B. Miara	Professeure	ESIEE Paris	Rapporteur.
G. de Saxcé	Professeur	Université de Lille 1	Rapporteur.
D. Chevallier	Directeur de Recherche Émérite	E.N.P.C Paris	Examineur.
H. Emamirad	Professeur	Université de Poitiers	Examineur.
A. Ibrahimbegovic	Professeur	ENS Cachan	Examineur.

À mon père et ma mère, au Professeur Eugen Loós.

L'heure est aux remerciements, donc prenons la plume (de l'ordinateur), comme je l'ai fait pendant des années pour préparer mes enseignements ou pour effectuer la démonstration d'un résultat. Quiconque a eu l'occasion d'entrer dans mon bureau se rend tout de suite compte que mes dossiers sont plutôt papiers qu'informatiques !

Je dois en premier lieu exprimer mes remerciements aux deux rapporteurs extérieurs du mémoire de thèse qui ont accepté de juger ce travail. Je remercie chaleureusement Bernadette Miara qui a toléré de prendre connaissance progressivement des différents chapitres que je lui faisais parvenir afin d'établir son rapport. Géry de Saxcé a subi le même sort et je le remercie très sincèrement pour sa patience et son expertise. Pour une thèse d'état les textes stipulent que le directeur de thèse est à la fois rapporteur et président de jury. C'est plutôt dans sa fonction de (D de T)⁸ (Directeur de Thèse durant 18 ans) que je souhaite lui exprimer ma reconnaissance bien que, parfois, entre un mayennais et une ardennaise, de caractères plutôt marqués, il puisse y avoir des étincelles. Un travail en sa compagnie est toujours une source de questionnement en attente de réponses étayées. Sa culture scientifique est incroyablement étendue ce qui lui permet de guider efficacement vers des recherches mieux ciblées. Je considère comme un réel privilège d'avoir pu travailler ces longues années avec Claude Vallée. J'espère garder longtemps le bagage de connaissance acquise à ses côtés ainsi qu'un certain état d'esprit critique. Je suis très satisfaite d'avoir dans mon jury un des spécialistes des coques Adnan Ibrahimbegovic qui est venu, pour ma soutenance, en tant qu'examineur. Je suis aussi très heureuse que Dominique Chevallier, spécialiste des groupes de Lie, ait accepté de faire partie de ce jury. Je remercie aussi Hassan Emamirad de revenir côtoyer un peu de mécanique, matière qu'il a pratiquée dans les premières années de son recrutement en enseignant la mécanique générale à mes côtés.

J'ai une pensée émue pour ceux qui m'ont donné le goût de la mécanique et m'ont détournée de mon univers premier des mathématiques. Un certificat de mécanique des solides et des fluides dans la maîtrise de mathématiques appliquées m'a permis de connaître la salle 112 du bâtiment de mécanique, le Professeur Jean Boscher, le maître assistant

René Fouchet, et le Professeur de mécanique analytique André Berroir, ainsi qu'un étudiant discret : Claude Vallée. C'est le Professeur Alain Guichardet qui, à la suite d'un oral sur les Distributions, a téléphoné à Claude Mathurin pour me conseiller vers cette discipline. Le DEA de mécanique de l'époque m'a fait découvrir avec ravissement les joies du calcul tensoriel avec Jacques Derouet en responsable TD. L'examen a été catastrophique, j'ai traité le problème en coordonnées sphériques au lieu des coordonnées cylindriques. Simultanément, à l'ENSIMA, sur les conseils du professeur Alexis Lagarde, je suivais avec effroi les signes de main vers la gauche ou vers la droite du Professeur Laurent, expert en RDM qui, à sa manière, représentait le produit vectoriel. Ma route était tracée, je ferai de la mécanique avec des vecteurs, des tenseurs, des équations. J'arrête là l'évocation de mes souvenirs sinon plusieurs pages seraient à noircir.

Je pense avoir eu la chance de bénéficier d'une large part de sympathie de tous ceux que j'ai côtoyés dans l'exercice de mon métier : de l'atelier au secrétariat en passant par les couloirs astiqués du bâtiment, la bibliothèque, la conciergerie, la salle de tirage,.... Les étudiants m'ont beaucoup aidée à trouver ce métier passionnant, les collègues enseignant-chercheurs aussi. Le grand avantage des étudiants est que l'on ne se voit presque pas vieillir alors que les collègues nous remettent dans la réalité.

Je considère que ma route a croisé de nombreux collègues qui m'ont permis d'être ce que je suis, cependant je souhaite rendre un hommage particulier à Eugen Soós qui est venu plusieurs fois à Poitiers en tant que professeur invité au laboratoire. J'en garde le souvenir d'un chercheur passionné, curieux, travaillant en continu, sans manger mais en fumant et tellement attentif au travail des autres alors qu'il aurait pu imposer ses méthodes. Il m'a fait promettre de passer une thèse, et c'est en partie pour cela que je concrétise cette promesse. Dans un autre registre, je dois aussi beaucoup à un autre grand personnage, Jean Marie Souriau : c'est celui que l'on ne comprend qu'après plusieurs conférences ou plusieurs lectures. En effet, tout est à la fois très simple et très compliqué. Donc mille fois merci à Jean Marie Souriau pour ses outils de bon mécanicien-géomètre

sans lesquels beaucoup de mes démonstrations n'auraient eu aucune conclusion.

Je rends aussi hommage, à ce que certains d'entre nous connaissent sous le vocable CFTV. Qu'est ce que c'est ? C'est un lieu de rencontre, non virtuel, entre des mécaniciens, mathématiciens, physiciens, qui a 52 ans d'âge, initialement créée à l'initiative de Jean Marie Souriau et réactivé en 1997 par Claude Vallée. Des exposés formels ou informels y sont présentés sur les travaux en cours, suivis avec gentillesse par un Jean Marie Souriau très simple et d'utiles conseils, engendrant de multiples discussions et réflexions.

Je resserre maintenant mes remerciements aux personnes qui m'ont aidés plus particulièrement lors de la rédaction de ce mémoire, Françoise, Nadia, Kossi, Franck, Mathieu, les membres de l'équipe du geste sportif qui passaient régulièrement pour voir si j'étais toujours vivante, attachée à la rédaction de mon manuscrit, ou pour m'offrir un café, les collègues qui me croisaient dans les couloirs pour savoir si cette soutenance était toujours d'actualité, Eric Straw qui m'a prêté son penseur,... Ma famille : Jérôme dans le rôle du dépanneur ordi serviable, Véronique disponible à mes urgences, Isabelle relectrice attentive de textes, Michel pour sa patience de ne pas me voir à la maison avant 20h voir 21h, Claude (femme de Claude) très patiente elle aussi pour les écarts d'horaire de son mari pris dans son rôle de directeur de thèse exigeant! Et Timo et Lilou deux beaux petits enfants qui m'ont divertie lorsque j'abandonnais ce manuscrit.

TABLES DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	17
Chapitre 1.....	23
CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ EN GRANDES DÉFORMATIONS – MÉTHODE DE DARBOUX.....	23
1- Introduction.....	23
2- Historique et présentation des travaux sur les conditions de compatibilité dans le cadre de la mécanique des milieux continus.....	23
3- Notations et rappel des conditions de compatibilité en petites déformations.....	24
3-1 Existence du déplacement $u(X)$	25
3-2 Existence du tenseur taux de rotation $\omega(X)$	26
3-3 Intégrabilité de $\frac{1}{2}[\frac{\partial u}{\partial X} + (\frac{\partial u}{\partial X})^T] = \varepsilon$ où le tenseur symétrique ε est donné.....	26
4- Conditions de compatibilité en grandes déformations.....	27
4-1 Condition d'existence de la rotation R	28
4-2 Condition pour que le système $dx = RUdX$ soit intégrable.....	29
4-3 Bilan des conditions de compatibilité obtenues.....	31
5- Résumé des différentes étapes de l'intégration du système (2.1).....	32
6- Recherche du déplacement lorsque le tenseur de petites déformations est sphérique.....	33
6-1 Construction de la matrice A et de sa transposée.....	34
6-2 Condition de compatibilité satisfaite par A	35
6-3 Expression covariante de $d\omega = j(AdX)$	36
6-4 Intégration de $d\omega = j(AdX)$	37
6-5 Champ de déplacement.....	37
7- Rotation d'un solide rigide autour d'un point fixe.....	38
7-1 Rotation d'angle α autour d'un axe de vecteur directeur v , formule de Gibbs et forme exponentielle.....	39
7-2 Expression d'une rotation autour d'un point fixe.....	40
7-3 Construction de A	41

7-4 Construction de Adj A et de Rot (A^T).....	42
8- Recherche du déplacement dans le cas où C est sphérique	43
8-1 Construction de l'application A	43
8-2 Vérification de la condition de compatibilité : Rot (A^T) + Adj A = 0	44
8-3 Détermination de la rotation R.....	47
8-4 Détermination de la valeur de $\mu(1)$	48
8-5 Réécriture de la rotation R(X).....	49
8-6 Détermination de la transformation $x(X)$	51
9- Identités de Bianchi.....	53
10- Conclusion.....	54
Chapitre 2.....	55
COMPARAISON ENTRE LA MÉTHODE DE CHRISTOFFEL ET LA MÉTHODE DE DARBOUX – NATURE TENSORIELLE DES OBJETS PRÉSENTÉS AU CHAPITRE 1.....	55
1- Introduction	55
2- Expression de la métrique d'un espace vectoriel en coordonnées curvilignes. Racine carrée de la métrique.....	56
3- Expression des coefficients de Christoffel en fonction de Λ et U	58
4-Tenseur de torsion T.....	58
4-1 Transformation du terme $\varepsilon_{j\ell n}(\Lambda_m^n U_i^j - \Lambda_i^n U_m^j)$	59
4-2 Interprétation du terme $\frac{\partial U_i^k}{\partial X^m} - \frac{\partial U_m^k}{\partial X^i}$	60
4-3 Expression du tenseur de torsion T	61
4-4 Efficacité de la méthode proposée au chapitre 1 pour exprimer la nullité de la torsion 62	
5- Tenseur de courbure K.....	63
5-1 Expression du tenseur de courbure par la méthode de Darboux.....	63
5-2 Expression des différences des dérivées partielles secondes croisées de R en fonction de Λ et de ses dérivées	64
5-3 Expression de $(\Lambda_\ell^p \Lambda_m^q - \Lambda_m^p \Lambda_\ell^q)$ en fonction de l'adjuguée de Λ	65
6- Comparaison de la méthode de Christoffel avec la méthode de Darboux	68
6-1 Méthode de Christoffel	68
6-2 Méthode de Darboux.....	69

7- Symétrie et antisymétries du tenseur de courbure K.....	70
8- Tenseur de Ricci et Tenseur d'Einstein	71
9- Tenseur d'Einstein de la 3-sphère (S³).....	72
9-1 Métrique de la 3-sphère	73
9-2 Tenseur de courbure et tenseur d'Einstein de la 3-sphère	74
10- Conclusion.....	76
Chapitre 3.....	79
ETUDE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES DE DIMENSION 3 DE MÊME COURBURE QUE LA SPHÈRE.....	79
1- Introduction.....	79
2- Formulation de l'hypothèse sur la courbure.....	80
3- Application de la méthode de Darboux au cas où, en plus de la condition sur la courbure, la métrique est supposée sphérique.....	81
3-1 Construction de Λ et satisfaction de la condition sur la courbure	82
3-2 Changement de paramètres	84
4- Association d'une rotation à un changement de paramètres	85
5- Transformation du problème en une condition de compatibilité d'un système aux dérivées partielles.....	86
5-1 Condition de compatibilité associée à l'intégrabilité du système (5.1)	87
5-2 Système aux dérivées partielles satisfait par W	90
6- Calcul de $\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}(A)$ quand $A = \Lambda + j(W)U$	91
6-1 Expression du rotationnel de $(j(W)U)^T$ en fonction de $\frac{\partial W}{\partial X}$	91
6-2 Expression de $\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}$	92
6-3 Expression de $\text{tr}(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1})I - \frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}$	93
6-4 Expression de $\text{Rot}(j(W)U)^T$ en fonction de W	93
6-5 Expression de $\text{Adj}(\Lambda + j(W)U)$	93
6-6 Sur la nullité de $\text{Rot}[(\Lambda + j(W)U)^T] + \text{Adj}(\Lambda + j(W)U)$	94
7- Existence du champ de vecteurs W.....	95
7-1 Variations de λ	95

7-2 Symétrie des dérivées secondes de W	95
7-3 Bilan de l'étude sur l'existence du champ de vecteurs W	97
8- Existence du champ de rotation Ω	98
9- Conclusion.....	98
Chapitre 4.....	101
THÉORIE DES SURFACES	101
1-Introduction.....	101
2- Préliminaires.....	102
2-1 Première forme fondamentale - Vecteurs de Gram	102
2-2 Introduction d'un champ de rotation Ω	103
3- Convention sur le choix des vecteurs de Gram.....	104
4- Intégrabilité du système aux dérivées partielles (2.2.1)	105
4-1 Vecteurs de Darboux.....	105
4-2 Condition de compatibilité satisfaite par les vecteurs de Darboux - Conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi.....	106
4-3 Condition de compatibilité satisfaite par les vecteurs de Gram.....	107
5- La deuxième forme fondamentale b de la surface et les formules de Weingarten.....	108
5-1 Variations de la normale n - Deuxième forme fondamentale	108
5-2 Formules de Weingarten	110
6- Liens entre la deuxième forme fondamentale b et les vecteurs de Gram et de Darboux.....	111
6-1 Variations de la normale n et symétrie de la deuxième forme fondamentale.....	111
6-2 Factorisation de la deuxième forme fondamentale en fonction des vecteurs de Gram et de Darboux	112
6-3 Nouvelle version des formules de Weingarten	113
6-4 Détermination des vecteurs de Darboux connaissant les deux formes fondamentales	114
7- Courbures scalaires et Théorème d'excellence de Gauss.....	115
7-1 Calcul du déterminant de la deuxième forme fondamentale	116
7-2 Courbures principales – Courbure totale – Courbure moyenne.....	116
7-3 Théorème d'excellence de Gauss.....	117
7-4 Nouvelles expressions de la courbure totale et de la courbure de Gauss.....	117
8- Méthode de reconstruction de la surface - Théorème de P.O. Bonnet..	118

9- Exemple de reconstruction d'une surface connaissant ses deux formes fondamentales	120
9-1 Choix des deux vecteurs de Gram où la première forme fondamentale est sphérique	120
9-2 Détermination des deux premières composantes des deux vecteurs de Darboux.....	120
9-3 Détermination des troisièmes composantes des deux vecteurs de Darboux.....	121
9-4 Vérification des conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi	121
9-5 Intégration du système d'équations aux dérivées partielles afin de déterminer la rotation Ω	122
9-6 Détermination de l'équation paramétrique de la surface	124
10- Conclusion.....	124
Chapitre 5.....	127
SURFACES MINIMALES.....	127
1- Introduction.....	127
2- Mise en œuvre du processus de minimisation	129
2-1 Équations de liaison	129
2-2 Technique des multiplicateurs de Lagrange.	130
3- Transformation des intégrales de surface en intégrales de circulation.	130
4- Formulation faible	131
5- Système adjoint	132
6- Condition de compatibilité assurant l'existence du champ de vecteurs λ	133
7- Condition de compatibilité assurant l'existence du champ de vecteurs μ.	135
8- Processus de recherche d'une surface minimale.....	136
9- Nouveau système adjoint.....	137
9-1 Modification du système adjoint.....	137
9-2 Condition d'intégrabilité assurant l'existence de ℓ	139
9-3 Condition d'intégrabilité assurant l'existence de m	139
9-4 Conditions aux limites	141
10- Sœur de la surface minimale \mathcal{S}.....	141
10-1 Définition	141
10-2 Propriétés de la surface \mathcal{S}' d'équation paramétrique $m(u,v)$	141

11-La sœur de la surface d'Enneper.....	145
12-La sœur de la caténoïde	150
13- La sœur de la sœur de la sœur... ..	153
14- Conclusion.....	153
Chapitre 6.....	155
ÉQUIVALENCE ENTRE L'ANNULATION DU TENSEUR DE COURBURE DE RIEMANN-CHRISTOFFEL DANS UNE COQUE ET LES CONDITIONS DE GAUSS-CODAZZI-MAINARDI SUR LA SURFACE MOYENNE	155
Résumé.....	156
1- Introduction	158
2- Expression des composantes de C dans la coque en fonction des composantes des deux formes fondamentales de la surface moyenne	160
3- Positivité de C dans la coque.....	161
3- 1 Racine carrée de la première forme fondamentale a.....	161
3- 2 Première factorisation de $g_{\alpha\beta}$	162
3- 3 Un carré parfait	162
3- 4 Matrices A et B associées aux 2 formes fondamentales a et b	163
3- 5 Défini-positivité de C.....	163
3- 6 Seconde factorisation de $g_{\alpha\beta}$	164
4- Factorisation de C	165
5- Décomposition de $\nabla\Theta$ en produit	165
6- Choix d'une base orthonormée dans le plan tangent à la surface moyenne.....	166
7- Vecteurs de Darboux	167
8- Nouvelle version des formules de Gauss	168
8- 1 Composantes des vecteurs de Darboux.....	168
8- 2 Formulation matricielle des troisièmes composantes des vecteurs de Darboux.....	168
9- Nouvelle version des formules de Weingarten	169
9- 1 Premières et deuxièmes composantes des vecteurs de Darboux	169

9- 2 Formulation matricielle du tenseur de courbure	170
9- 3 Nouvelle expression de la courbure de Gauss	170
10- Nouvelles expressions des composantes de U	171
11- Nouvelle version des conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi.....	171
11- 1 Conditions de compatibilité satisfaites par les vecteurs de Darboux.....	172
11- 2 Reconstruction de la surface à partir de ses deux formes fondamentales. Théorème de Bonnet	172
11- 3 Equivalence entre les conditions G-C-M. classiques et les conditions de compatibilité satisfaites par les vecteurs de Darboux	173
12- Théorème d'excellence de Gauss	174
13- Calcul de $\text{Rot} (U^T)$.....	175
14- Calcul de Λ.....	176
14- 1 Calcul de $U \text{Rot} (U^T)$	176
14- 2 Calcul de la trace de $U \text{Rot} (U^T)$	177
15- Propriétés algébriques.....	178
16- Simplification de la partie 2×2 de Λ.....	180
17- Les conditions G-C-M. impliquent les conditions de Riemann-Christoffel.....	181
18- Réciproque - Les conditions de Riemann-Christoffel impliquent les conditions G-C-M.....	183
19- Conclusion.....	185
CONCLUSION - PERSPECTIVES	187
1. Conclusion.....	187
1-1 La similitude des méthodes 3D et 2D	187
1-2 Nature tensorielle des objets matriciels introduits	189
1-3 Reconnaître une 3-sphère.....	189
1-4 Les surfaces minimales	190
1-5 La comparaison entre les deux méthodes mises en place pour une coque et pour sa surface moyenne.....	190
2. Perspectives - Géométrie Riemannienne du solide rigide	190
2-1 Expression de l'énergie cinétique	191
2-2 Métrique du solide rigide	192
2-3 Tableau du projet	192

2-4 Exergue de la peinture	192
BIBLIOGRAPHIE	195
ANNEXE A	205
ANNEXE B	225
ANNEXE C	235
ANNEXE D	247

INTRODUCTION

Ce document présente la synthèse des travaux menés depuis un peu plus de quinze ans sous l'intitulé :

« Conditions de compatibilité en mécanique des solides – Méthode de Darboux. »

Ce titre est sans doute réducteur mais il permet de situer ce travail de recherche dans le contexte « cinématique » de la mécanique des solides déformables plutôt que dans ceux de la dynamique des solides rigides ou des lois de comportement des matériaux. Ce ne sont pas des aspects que nous avons négligés, ils ont fait l'objet de résultats publiés en collaboration avec plusieurs doctorants :

Bruno Deshouillères, François Isnard, Eric Lainé, Mohamed Hjiad, Céline Bouby, Karine Champion-Réaud, François Peyraut, Kossi Atchonouglo, Tony Monnet, Camélia Lerintiu, et chercheurs :

Gérard Bézine, Jean Marie Souriau, Eugen Soós, Géry de Saxcé, W.Pietraszkiewicz, Z.-Q. Feng, E. Baesu, S. Cleja-Tigoiu et Claude Vallée bien sûr !

Les thèmes concernés par ces travaux sont :

- la mécanique du contact avec frottement,
- les lois de comportement non linéaires des matériaux élastiques, hyper-élastiques, piezo-électriques, élasto-plastiques anisotropes, et des matériaux standards implicites admettant un bipotentiel,
- la dynamique de solides rigides (systèmes vibratoires, identification des paramètres inertiels).

Ces articles et communications sont référencés dans l'annexe D.

Les efforts appliqués étant donnés, un problème de mécanique des solides déformables est assujetti à trois impératifs principaux :

- le champ de tenseur des contraintes doit satisfaire les équations de la dynamique ou les équations de l'équilibre,

- le comportement des matériaux doit être modélisé par des lois judicieusement choisies reliant le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations,

- le tenseur des déformations doit satisfaire les conditions de compatibilité.

Le travail présenté ici correspond à l'étude du troisième impératif. Bien sûr, on peut se dire :

Que peut-on bien encore découvrir sur cette question ?

Le point de départ est, sans nul doute, celui d'avoir enseigné cette matière que l'on appelle Mécanique des Milieux Continus ou Mécanique des Milieux Déformables car à l'encontre de mes collègues qui, lorsqu'ils passent leur habilitation ont, entre autres, un avenir dans l'enseignement, j'ai un passé dans l'enseignement ! Mieux comprendre des concepts, mieux se faire comprendre, quitte à construire et enseigner sa propre méthode, ses propres développements s'ils sont plus lisibles, s'ils permettent de résoudre plus judicieusement certains problèmes ! C'est ce que m'a apporté durant de nombreuses années le travail en équipe avec Claude Vallée et notamment, la construction de TD inédits sur son cours de Grandes Déformations. Il faut ici rendre un grand hommage au Mécanicien-Géomètre, Jean-Marie Souriau qui, en publiant ses deux tomes de Calcul Linéaire [SOUR 1], a donné une légèreté et une maniabilité aux calculs matriciel et tensoriel. De nombreux développements délicats n'ont eu de formulations simples que grâce à une bonne connaissance de ses techniques de calcul.

Ainsi, naturellement, le chapitre 1 expose les conditions de compatibilité en grandes déformations. Après un rappel des développements classiques en petites déformations et un exemple traité dans une base non orthonormée, l'aspect non linéaire est poursuivi tout au long du document. A partir du tenseur de Cauchy-Green droit noté C , la décomposition polaire est mise à profit pour faire apparaître un champ de rotations R et la racine carrée U de C . À la suite de cette décomposition, deux conditions de compatibilité se mettent en place, l'une relative à l'existence de la rotation, l'autre relative à l'existence du déplacement du milieu considéré. Les non linéarités sont gérables, les conditions de compatibilité sont découplées et elles permettent, au paragraphe 5, de décliner les différentes étapes de l'intégration. La condition relative à l'existence de la rotation donne lieu à une vérification instructive sur la rotation d'un solide rigide autour d'un point fixe. Puis l'exemple d'un tenseur de Cauchy sphérique est développé.

Le chapitre 2 est là pour rassurer les adeptes de la géométrie riemannienne qui baignent dans les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k , le tenseur de torsion T , le tenseur de courbure K , le tenseur d'Einstein S et nous rassurer nous même, par la même occasion ! En effet, le chapitre 1 expose une théorie qui garde une structure matricielle très calculatoire mais ne dit rien de la nature des objets mis en jeu. Ce chapitre met donc en place la comparaison entre les tenseurs de la géométrie riemannienne (méthode de Christoffel) et les objets matriciels présentés dans la méthode développée au chapitre précédent que nous baptisons **méthode de Darboux**. Deux objets matriciels B et E , dont la nullité assure les deux conditions de compatibilité du problème posé précédemment, sont comparés aux différents tenseurs de la géométrie riemannienne. Ainsi, le tenseur de torsion est identifié avec le regroupement $\frac{(\text{Adj}U)E}{(\det U)^2}$, le

tenseur de courbure avec le regroupement $\frac{(\text{Adj}U)B}{(\det U)^2}$ et le tenseur d'Einstein avec le

regroupement $\frac{B^T U}{\det U}$.

La méthode de Christoffel et la méthode de Darboux sont mises en concurrence pour résoudre le système aux dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^T \frac{\partial x}{\partial X} = C.$$

La méthode de Darboux s'en sort nettement à son avantage.

Dans le contexte de la géométrie riemannienne, en regardant le tenseur de Cauchy-Green comme un tenseur métrique g , le paragraphe 9 présente le tenseur d'Einstein de la 3-sphère paramétrée en coordonnées stéréographiques. Ce tenseur est non nul et sphérique. C'est une transition pour aborder le chapitre suivant.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des variétés riemanniennes de dimension 3 de même courbure que la 3-sphère de rayon ρ . Nous faisons, de nouveau, la « promotion » de la méthode de Darboux pour résoudre ce problème dont les développements géométriques sont intéressants. La variété est paramétrée par X^1, X^2, X^3 , on établit la condition de courbure en partant de l'expression du tenseur d'Einstein écrit en termes de B et U . Puis une étude intermédiaire est développée dans le cas particulier où la métrique est de la forme sphérique

$g_{ij} = \frac{4\rho^2}{\lambda^2} \delta_{ij}$ afin de caractériser la fonction scalaire λ introduite. Des relations sont établies

pour préciser quels nouveaux paramètres x^1, x^2, x^3 de la variété la feraient reconnaître comme une 3-sphère. Ces relations apparaissent sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à intégrer pour obtenir le changement de paramétrage $x(X)$. Nous mettons en œuvre la méthode de Darboux en vérifiant une succession de conditions de compatibilité qui assure l'existence d'une rotation Ω et d'un vecteur W . Le processus complet est présenté au paragraphe 9, il précise les différentes étapes qui mènent jusqu'à la transformation $x(X)$ pour laquelle la nouvelle métrique sera celle de la 3-sphère de rayon ρ en coordonnées stéréographiques. À notre connaissance, cette démarche est inédite.

Les deux chapitres suivants nous ramènent vers des voies plus familières, celle de la théorie des surfaces et celle de l'étude de la surface moyenne des coques.

Le chapitre 4 prend ses racines dans la théorie générale des surfaces de Gaston Darboux [DAR 1] et dans l'article publié en collaboration avec Claude Vallée [VAL 3] en 1996. Les notions et propriétés connues des surfaces à partir de leurs deux formes fondamentales \mathbf{a} et \mathbf{b} sont rappelées, les paramètres d'un point x de la surface sont notés u, v . Une « extension » de la décomposition polaire du chapitre 1 conduit à l'existence de deux champs de vecteurs U_1 et U_2 (à la place de la racine carrée U de C) baptisés vecteurs de Gram et à l'existence d'un champ de rotations Ω (à la place de la rotation R). Comme l'avait fait Gaston Darboux, nous associons aux dérivées partielles de la rotation par rapport aux paramètres u et v , deux champs de vecteurs Y_1 et Y_2 baptisés encore vecteurs de Darboux. Les conditions de compatibilité associées à l'existence de la rotation $\Omega(u,v)$ et de la position $x(u,v)$ établissent de façon très synthétique ce qu'on appelle généralement les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi. Un « dictionnaire » est mis en place afin de bien préciser le rapport entre les deux formes fondamentales de la surface, les vecteurs de Gram U_1 et U_2 , les vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 et la normale n . Nous revisitons ainsi, le théorème d'excellence de Gauss, et différentes propriétés des courbures totale et moyenne. Mais surtout, nous établissons le lien entre la seconde forme fondamentale \mathbf{b} et les vecteurs de Gram et de Darboux, ce qui achève la mise en place du processus de reconstruction d'une surface à partir de ses deux formes

fondamentales conformément au Théorème de Bonnet (paragraphe 8). Un exemple, où les formes fondamentales sont sphériques, complète cette étude.

Sous couvert de la méthode exposée au chapitre précédent, le chapitre 5 est consacré au problème de Plateau qui étudie les surfaces minimales. Minimiser l'aire d'une surface \mathcal{S} , dont le contour \mathcal{T} est donné, revient à minimiser l'intégrale :

$$A(\mathbf{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

où $EG - F^2$ est le déterminant de la première forme fondamentale. Le premier avantage de l'utilisation des vecteurs de Gram est de remplacer l'intégrale précédente par une fonctionnelle linéaire en U_1 et U_2

$$A(S) = \iint_{\mathcal{S}} (U_1 \times U_2) \cdot e_3 \, du \, dv$$

où e_3 est un vecteur unitaire et où la croix \times représente le produit vectoriel et le point le produit scalaire.

Une technique de commande optimale, similaire à celle employée en robotique, permet d'associer au système primal (ici les équations de Gauss-Codazzi-Mainardi) un système adjoint (ou dual) satisfait par deux multiplicateurs de Lagrange vectoriels λ et μ (ou variables adjointes). Ce système aux dérivées partielles dual est soumis à son tour à des conditions d'intégrabilité de Frobenius qui conduisent à retrouver la condition découverte par Jean-Baptiste Meusnier : les surfaces minimales ont une courbure moyenne nulle. Un processus de construction d'une surface minimale est décliné au paragraphe 8. Des quatre équations aux dérivées partielles constituant le système adjoint, nous dégagons des équations satisfaites par $m = \Omega\mu$. Alors, la surface d'équations paramétriques $m(u,v)$ apparaît comme une surface minimale \mathcal{S}' que nous appelons surface sœur de la surface \mathcal{S} . Les surfaces sœurs ont même première forme fondamentale mais leurs secondes formes fondamentales sont différentes. Après avoir énoncé des propriétés spécifiques des surfaces sœurs, deux exemples sont développés.

Le dernier chapitre se présente sous la forme d'un projet d'article. Il établit la cohérence entre les équations de compatibilité d'une coque 3D et les conditions de compatibilité 2D de sa surface moyenne \mathcal{S} . Un point de la coque 3D est paramétré par y^1, y^2, x^3 (notés X^1, X^2, X^3 au chapitre 1), la surface moyenne est paramétrée par x^1, x^2 (notés u et v au chapitre 4). La relation $\Theta(y, x^3) = \theta(y) + x^3 a_3(y)$ établit la correspondance entre un point de la surface moyenne et un point de la coque, le champ de vecteurs $a_3(y)$ représentant la normale à la surface (noté n au chapitre 4).

Une factorisation de $g_{\alpha\beta}$, partie 2×2 de la métrique g_{ij} de la coque, est construite. Cette factorisation met en jeu les deux formes fondamentales de la surface moyenne. Plus précisément $g_{\alpha\beta}$ se factorise de la manière suivante :

$$g_{\alpha\beta} = (vu)_{\alpha}^{\mu} \delta_{\mu\nu} (vu)_{\beta}^{\nu}$$

où u représente la racine carrée de la première fondamentale \mathbf{a} et où le groupement vu correspond à

$$vu = u - x^3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}.$$

Les composantes de la métrique de la coque se factorisent alors sous la forme :

$$g_{ij} = (U)_i^k \delta_{k\ell} (U)_j^\ell$$

avec

$$U = \begin{bmatrix} & & 0 \\ vu & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui, en général, n'est pas symétrique.

Nous sommes alors en mesure de construire Λ à partir de la formule :

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} \left\{ U[\text{Rot}(U^T)]U - \frac{\text{tr}[U\text{Rot}(U^T)]}{2} U \right\}$$

du chapitre 1. Il prend la forme surprenante

$$\Lambda = \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & 0 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & 0 \\ Y_1^3 & Y_2^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut alors facilement conclure à l'équivalence entre les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi

$$\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2 = 0$$

sur la surface moyenne, et l'annulation du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda = 0$$

dans la coque.

Chapitre 1

CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ EN GRANDES DÉFORMATIONS – MÉTHODE DE DARBOUX

1- Introduction

Le titre de ce chapitre évoque un problème qui peut paraître académique pour les mécaniciens qui ont tous croisés, dans leurs études ou dans leurs parcours d'ingénieurs, le traitement des conditions de compatibilité. Mais ce problème peut encore donner lieu à des développements intéressants, surtout lorsque l'on ne veut pas se limiter aux petites déformations et linéariser le problème.

2- Historique et présentation des travaux sur les conditions de compatibilité dans le cadre de la mécanique des milieux continus

Cette première partie concerne un travail initié, en 1992, par Claude Vallée [VAL 1]. C'est le point de départ d'une méthodologie originale concernant l'intégration du système aux dérivées partielles testant si un champ C prescrit à l'avance est un tenseur de déformation de Cauchy-Green droit.

Soit X un point d'un milieu continu D simplement connexe dont les trois coordonnées (dites variables de Lagrange) sont notées (X^1, X^2, X^3) . Une fois le milieu déformé, le point X a pris une nouvelle position x dont les coordonnées sont les variables d'Euler (x^1, x^2, x^3) . Le tenseur de déformation de Cauchy-Green droit du milieu est défini par :

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^k} \delta_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial X^\ell} = C_{k\ell}(X) \quad (2.1)$$

où nous avons noté δ_{ij} les coefficients de la métrique de l'espace tridimensionnel.

Lorsque l'intérêt se porte sur une possibilité d'intégrer le système aux dérivées partielles (2.1), le tenseur C étant prescrit, une question préalable est de comprendre sous quelles conditions un tenseur symétrique défini positif donné $C(X)$ peut être un tenseur de déformation de Cauchy-Green droit ? La réponse à cette question est dite **condition de**

compatibilité. Dans le cadre des petites déformations, il est relativement simple d'établir une méthode détectant les tenseurs qui sont des tenseurs de déformations puis d'effectuer les intégrations qui permettent de remonter à la transformation $x(X)$. Un bref rappel est fait dans ce sens au paragraphe 3.

Est-il imaginable qu'une méthode respectant des règles similaires puisse se mettre en place dans le cadre non linéaire des grandes déformations ? La technique très prometteuse, établie par Claude Vallée est basée sur l'utilisation de la racine carrée $U(X)$ (choisie symétrique et défini-positive) de $C(X)$. Elle met en œuvre la décomposition polaire

$$\frac{\partial x}{\partial X} = R(X)U(X)$$

classiquement enseignée en mécanique des milieux continus [VAL 2], [COI 1], qui exprime le gradient de déformation comme le produit d'une rotation $R(X)$ par $U(X)$ dit tenseur des déformations pures gauche.

Ce point est présenté au paragraphe 4, il fait partie d'un enseignement de Maîtrise de Mécanique à l'Université de Poitiers depuis 1996. De nombreux exemples ont été mis au point dans ce cadre, ils montrent que les méthodes visant à déterminer la transformation $x(X)$ débouchent sur une intégration effective. Le paragraphe 6 concerne une résolution en petites déformations. Une vérification des conditions de compatibilité satisfaites par la rotation d'un solide rigide est présentée au paragraphe 7. Le cas d'un tenseur de Cauchy-Green sphérique est résolu au paragraphe 8.

3- Notations et rappel des conditions de compatibilité en petites déformations

Le vecteur déplacement est noté $u(X)$. Le tenseur de déformation linéarisé est noté ε , il correspond à la partie symétrique du tenseur gradient $\frac{\partial u}{\partial X}$ du vecteur déplacement :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \right] \quad (3.1)$$

où $\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T$ désigne la transposée de $\frac{\partial u}{\partial X}$.

La partie antisymétrique, appelée tenseur de taux de rotation, est notée ω :

$$\omega = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial X} - \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \right].$$

La somme de ε et ω restitue le tenseur gradient du vecteur déplacement

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \varepsilon + \omega.$$

3-1 Existence du déplacement $u(X)$

Au cours des développements ultérieurs, nous utiliserons la notation condensée « dL » pour désigner la variation en X d'un champ différentiable L dans la direction h à la place de la notation de Fréchet $DL(X)h$. Avec cette notation, il est cohérent de regarder le vecteur constant h comme la variation dX de X . Ainsi la variation de u s'écrira-t-elle sous la forme:

$$du = \frac{\partial u}{\partial X} dX = (\varepsilon + \omega) dX. \quad (3.1.1)$$

Lorsque l'on se donne le tenseur de déformation ε symétrique, le tenseur antisymétrique ω est inconnu. Sa variation $d\omega$, elle-même antisymétrique, est obligatoirement de la forme $j(V)$ où V est un vecteur. Cette dernière notation est associée au produit vectoriel par la formule

$$j(V)W = V \wedge W$$

valable pour tout vecteur W (Annexe A, A-1-2). Dans ce cas particulier, le vecteur V dépend linéairement de dX et est donc l'image du vecteur constant dX par une application linéaire notée A . Ainsi:

$$d\omega = j(AdX). \quad (3.1.2)$$

Si l'on veut que le système aux dérivées partielles (3.1.1) soit intégrable, il faut imposer la symétrie des dérivées secondes du vecteur déplacement. Avec nos notations, il vient :

$$\delta du - d\delta u = (\delta\varepsilon dX - d\varepsilon \delta X) + j(A\delta X)dX - j(AdX)\delta X = 0 \quad (3.1.3)$$

Utilisons les propriétés du rotationnel généralisé et de la trace présentées dans l'Annexe B (B-4-2) et dans l'Annexe A (A-7-3) :

$$\delta\varepsilon dX - d\varepsilon \delta X = (\text{Rot } \varepsilon)^T (\delta X \wedge dX)$$

$$j(A\delta X)dX - j(AdX)\delta X = [(\text{tr} A)I - (A)^T] (\delta X \wedge dX).$$

Reportons ces deux expressions dans la relation (3.1.3) et oublions le vecteur constant $\delta X \wedge dX$, nous obtenons une équation linéaire

$$A - (\text{tr} A)I = \text{Rot } \varepsilon$$

qui permet de déterminer A .

En prenant la trace de cette équation, nous pouvons montrer que la trace de A est nulle et ensuite exprimer A en fonction de $\text{Rot } \varepsilon$:

$$\boxed{A = \text{Rot } \varepsilon} \quad (3.1.4)$$

En effet, lorsque l'on applique la formule B-5-6 de l'Annexe B

$$\text{tr}(\text{Rot} B) = \text{div}[j^{-1}(B^T - B)]$$

au cas où le champ d'application linéaire B est le champ symétrique ε , on conclue à la nullité de la trace de $\text{Rot}\varepsilon$ et donc à celle de A.

3-2 Existence du tenseur taux de rotation $\omega(X)$

La condition de compatibilité (3.1.4) assure la symétrie des dérivées secondes du vecteur déplacement u. Elle permet de déterminer A connaissant ε . Il faut maintenant s'assurer de l'intégrabilité du système aux dérivées partielles :

$$d\omega = j(\text{Ad}X) \quad (3.1.2)$$

Cette intégrabilité exige la symétrie des dérivées secondes de ω :

$$\delta d\omega - d\delta\omega = j(\delta \text{Ad}X - dA\delta X) = j[(\text{Rot}(A^T))^T (\delta X \wedge dX)] = 0$$

où nous avons utilisé la propriété B-4-2 de l'Annexe B.

L'existence de ω est donc tributaire de la condition de compatibilité :

$$\boxed{\text{Rot}(A^T) = 0} \quad (3.2.1)$$

3-3 Intégrabilité de $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \right] = \varepsilon$ où le tenseur symétrique ε est donné

L'intégrabilité du système aux dérivées partielles (3.1.1) nous a conduit à construire A en fonction de ε par (3.1.4) et à satisfaire la condition de compatibilité (3.2.1). Ainsi, pour un ε donné, nous devons construire :

$$A = \text{Rot}\varepsilon$$

puis vérifier que :

$$\text{Rot}(A^T) = 0.$$

Ces deux étapes assurent à la fois l'intégrabilité de

$$d\omega = j(\text{Ad}X)$$

et celle de

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \varepsilon + \omega.$$

Remarque 3.1 : L'habitude en mécanique des milieux continus est de combiner les deux relations en une seule, appelée conditions de Saint Venant [SOL 1]

$$\text{Rot}((\text{Rot}\varepsilon)^T) = 0 \quad (3.3.1)$$

relation plus reconnaissable sous sa forme indicielle

$$\partial_\ell \partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_\ell \partial_i \varepsilon_{kj} + \partial_k \partial_i \varepsilon_{\ell j} - \partial_k \partial_j \varepsilon_{i\ell} = 0$$

où ∂_i désigne la dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de Lagrange X^i .

Remarque 3.2 : La considération directe des conditions de Saint Venant satisfaites par le tenseur ε n'est pas souhaitable. Il est beaucoup plus constructif, surtout lorsque l'on effectue les intégrations, de conserver le découplage en deux étapes. La méthode est alors la suivante : intégrer $d\omega = j(\text{Ad}X)$ connaissant A , ajouter ω à ε afin de connaître le gradient du déplacement puis, par une dernière intégration, trouver la nouvelle position de X après déformation :

$$x = X + u(X).$$

C'est l'esprit de cette démarche que nous allons poursuivre afin d'établir les conditions de compatibilité en grandes déformations.

4- Conditions de compatibilité en grandes déformations

Intéressons-nous maintenant à un tenseur $C(X)$ symétrique défini-positif et cherchons s'il peut être un tenseur de déformations de Cauchy-Green tel que

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^k} \delta_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial X^\ell} = C_{k\ell}(X). \quad (2.1)$$

Notons $U(X)$ la racine carrée de $C(X)$ (choisie symétrique et définie positive) et U^{-1} son inverse. La relation précédente prend la forme matricielle :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^T \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) = U^2$$

et peut se transformer en

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X} U^{-1}\right)^T \left(\frac{\partial x}{\partial X} U^{-1}\right) = I.$$

Cette factorisation nous permet d'affirmer qu'il existe un champ de rotations R dépendant de la variable X tel que :

$$\frac{\partial x}{\partial X} U^{-1} = R.$$

Ainsi, nous retrouvons la décomposition polaire à droite du gradient de déformation :

$$\frac{\partial x}{\partial X} = RU.$$

Remarquons que cette décomposition en produit dans le cas non-linéaire correspond à la décomposition en somme dans le cas linéaire :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Cette démarche remplace le système aux dérivées partielles du second ordre initialement posé par le système aux dérivées partielles du premier ordre suivant :

Résoudre le système aux dérivées partielles $d\mathbf{x} = \mathbf{R}Ud\mathbf{X}$ où la rotation $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ est inconnue.

Les deux questions clés du cas linéaire

- les dérivées secondes du vecteur déplacement sont-elles symétriques ?
- le tenseur taux de rotation $\boldsymbol{\omega}$ existe-t-il ?

deviennent :

- les dérivées secondes de \mathbf{x} sont elles symétriques ?
- la rotation \mathbf{R} existe-t-elle ?

4-1 Condition d'existence de la rotation \mathbf{R}

Jusqu'à présent, nous n'avons pas insisté sur la propriété

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

de la rotation \mathbf{R} .

En dynamique du solide rigide, la situation est analogue avec une rotation \mathbf{R} qui dépend du paramètre temps. Par dérivation par rapport au temps, il s'en suit une propriété d'antisymétrie qui justifie l'introduction du vecteur rotation instantanée. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, la rotation \mathbf{R} dépend de trois paramètres X^1, X^2, X^3 . Mais, pour la même raison, nous obtenons par dérivation

$$d\mathbf{R}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R} = \mathbf{0}.$$

Cette égalité implique l'antisymétrie de $\mathbf{R}^T d\mathbf{R}$, en effet :

$$(\mathbf{R}^T d\mathbf{R})^T = d\mathbf{R}^T \mathbf{R} = -\mathbf{R}^T d\mathbf{R}.$$

Il existe donc un vecteur \mathbf{V} dépendant linéairement de $d\mathbf{X}$ tel que :

$$\mathbf{R}^T d\mathbf{R} = \mathbf{j}(\mathbf{V}).$$

Nous pouvons poser $\mathbf{V} = \mathbf{A}d\mathbf{X}$ en introduisant un champ d'applications linéaires \mathbf{A} . La relation précédente devient :

$$R^T dR = j(AdX).$$

Le système aux dérivées partielles

$$dR = Rj(AdX)$$

sera intégrable si les dérivées secondes de R sont symétriques. Notons δX une deuxième variation de la variable de Lagrange X et calculons la variation de dR lorsque X varie de δX (seconde variation de R) :

$$\delta dR = \delta R j(AdX) + R j(\delta AdX) = R [j(A\delta X)j(AdX) - j(\delta AdX)] \quad (4.1.1)$$

Échangeons d et δ , puis effectuons la différence, cette différence doit être nulle :

$$\delta dR - d\delta R = R [j(A\delta X)j(AdX) - j(AdX)j(A\delta X) + j(dA\delta X - \delta AdX)] = 0 \quad (4.1.2)$$

Les propriétés (A-7-2) et (B-4-2) des Annexes A et B

$$j(A\delta X)j(AdX) - j(AdX)j(A\delta X) = j(A\delta X \wedge AdX) = j[(AdjA)^T (\delta X \wedge dX)]$$

$$dA\delta X - \delta AdX = (Rot(A^T))^T (\delta X \wedge dX)$$

permettent de simplifier la formule (4.1.2). L'identification à zéro du vecteur sous le symbole j puis l'oubli du vecteur $\delta X \wedge dX$, aboutissent au résultat suivant :

$$\boxed{Rot(A^T) + AdjA = 0} \quad (4.1.3)$$

Ce sont les équations de compatibilité qui assurent l'existence de la rotation R. La non linéarité porte sur le terme $AdjA$. Nous pouvons constater que l'équivalent linéaire de la condition de compatibilité (4.1.3) assurant l'existence du tenseur ω est la condition de compatibilité (3.2.2) où le terme non linéaire $AdjA$ est absent.

Nous devons aborder maintenant le deuxième volet de la démarche proposée :

Les dérivées secondes de x sont elles symétriques ?

4-2 Condition pour que le système $dx = RUdX$ soit intégrable

De nouveau l'idée directrice est d'imposer la symétrie des dérivées secondes de x afin que RU soit effectivement la dérivée par rapport à X de x. Effectuons sur le système

$$dx = RUdX$$

une deuxième variation notée δ

$$\delta(dx) = \delta RUdX + R\delta U dX = R [j(A\delta X)U dX + \delta U dX].$$

Échangeons d et δ , puis effectuons la différence afin de l'annuler :

$$\delta dx - d\delta x = R[j(A\delta X)UdX - j(AdX)U\delta X + \delta UdX - dU\delta X]$$

Le terme $\delta UdX - dU\delta X$ est facilement identifiable car :

$$\delta UdX - dU\delta X = (\text{Rot } U)^T (\delta X \wedge dX)$$

si U est symétrique.

Examinons le terme $j(A\delta X)UdX - j(AdX)U\delta X$ en utilisant les notions de trace (Annexe A, Définition 2) et d'adjuguée (Annexe A, Définition 6).

$$\begin{aligned} j(A\delta X)UdX - j(AdX)U\delta X &= (A\delta X) \wedge (UdX) + (U\delta X) \wedge (AdX) \\ &= (AU^{-1}U\delta X) \wedge (UdX) + (U\delta X) \wedge (AU^{-1}UdX) \\ &= \text{tr}(AU^{-1})((U\delta X) \wedge (UdX)) - (AU^{-1})^T ((U\delta X) \wedge (UdX)) \\ &= [\text{tr}(AU^{-1})I - (AU^{-1})^T]((U\delta X) \wedge (UdX)) \\ &= [\text{tr}(AU^{-1})I - (AU^{-1})^T](\text{Adj } U)^T (\delta X \wedge dX) \\ &= (\det U)[\text{tr}(AU^{-1})I - (AU^{-1})^T](U^{-1})^T (\delta X \wedge dX) \end{aligned}$$

La symétrie des dérivées secondes de x se traduit donc par :

$$(\text{Rot } U)^T + (\det U)[\text{tr}(AU^{-1})(U^{-1})^T - (U^{-1}AU^{-1})^T] = 0 \quad (4.2.1)$$

ou encore

$$(\text{Adj } U)[AU^{-1} - \text{tr}(AU^{-1})I] = \text{Rot } U \quad (4.2.2)$$

Nous désirons déterminer A à partir de l'équation linéaire (4.2.2). A cet effet, nous en prenons la trace après multiplication à gauche par U

$$\text{tr}(U\text{Rot } U) = -2(\det U)\text{tr}(AU^{-1}).$$

Il vient

$$\text{tr}(AU^{-1}) = -\frac{1}{2(\det U)} \text{tr}(U\text{Rot } U),$$

ce qui nous permet de déduire de la condition de compatibilité (4.2.2) une expression explicite de A en fonction de U et de son rotationnel :

$$\boxed{A = \frac{1}{\det U} \left[U(\text{Rot } U)U - \frac{\text{tr}(U\text{Rot } U)}{2} U \right]} \quad (4.2.3)$$

4-3 Bilan des conditions de compatibilité obtenues

La condition d'intégrabilité du système aux dérivées partielles

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^k} \delta_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial X^\ell} = C_{k\ell}(X^1, X^2, X^3)$$

est que le champ d'applications linéaires A, construit à l'aide la formule,

$$\boxed{A = \frac{1}{\det U} [U(\text{Rot}U)U - \frac{\text{tr}(U\text{Rot}U)}{2} U]} \quad (4.2.3)$$

(où U est la racine carrée choisie symétrique et défini-positive de C)

satisfasse à :

$$\boxed{\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0} \quad (4.1.3)$$

Remarque 4.1 : Si, nous n'avons pas exigé la symétrie de U, [SOUC 1], [SOUC 2], la condition de compatibilité (4.1.3) aurait été inchangée, seule l'expression (4.2.3) de A aurait été modifiée en remplaçant RotU par Rot(U^T), c'est-à-dire :

$$\boxed{A = \frac{1}{\det U} [U(\text{Rot}(U^T))U - \frac{\text{tr}(U\text{Rot}(U^T))}{2} U]} \quad (4.3.1)$$

La relation (4.2.1) s'écrirait

$$[\text{Rot}(U^T) + (\det U)(\text{tr}(AU^{-1})U^{-1} - U^{-1}AU^{-1})]^T = 0. \quad (4.2.1')$$

Remarque 4.2 : En linéarisant les conditions de compatibilité du cas non linéaire retrouve-t-on les conditions de compatibilité du cas linéaire ?

En se limitant au premier ordre, il vient successivement :

$$C \cong I + 2\varepsilon$$

$$U \cong I + \varepsilon, \quad \det U \cong 1 + \text{tr}\varepsilon$$

$$\text{Rot}U \cong \text{Rot}\varepsilon$$

$$U\text{Rot}U \cong \text{Rot}\varepsilon$$

$$\text{tr}(U\text{Rot}U) \cong \text{tr}(\text{Rot}\varepsilon) = 0$$

$$U(\text{Rot}U)U \cong \text{Rot}\varepsilon.$$

$$\frac{1}{\det U} U(\text{Rot}U)U \cong \text{Rot}\varepsilon$$

$$A \cong \text{Rot}\varepsilon$$

$$\text{Adj}A \cong 0.$$

Nous constatons bien la concordance avec les conditions de compatibilité établies dans le cas linéaire puisque :

$$\boxed{A \cong \text{Rot}\varepsilon} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{Rot}(A^T) \cong 0}$$

Remarque 4.3 : Si nous regardons $C(X)$ comme l'expression de la métrique dans les coordonnées curvilignes X^1, X^2, X^3 , les conditions de compatibilité dégagées aux paragraphes 4-1 et 4-2 sont à mettre en relation avec l'annulation des tenseurs de torsion et de courbure de l'espace euclidien tridimensionnel. Il faut remarquer que tous nos calculs se déroulent sans jamais faire appel aux coefficients de Christoffel. C'est un des principaux atouts du développement présenté. Il fait aussi pressentir une démarche constructive en géométrie riemannienne, rendant de la faisabilité à des résolutions parfois inextricables si l'on s'obstine à utiliser les coefficients de Christoffel. Le lien sera précisé au chapitre 2.

5- Résumé des différentes étapes de l'intégration du système (2.1)

Étape 1 : Calculer U , solution de : $U_k^i \delta_{ij} U_\ell^j = C_{k\ell}$.

Étape 2 : Calculer : $A = \frac{1}{\det U} [U \text{Rot}(U^T) U - \frac{\text{tr}(U \text{Rot}(U^T))}{2} U]$.

Étape 3 : Vérifier que A satisfasse à : $\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0$.

Étape 4 : Intégrer le système $dR = Rj(\text{Ad}X)$.

Étape 5 : Intégrer le système $\frac{\partial X}{\partial X} = RU$.

Quelles sont les difficultés qui peuvent survenir lors du développement de ces étapes ?

Etape 1

Il n'y a pas de souci pour trouver U si on connaît une base dans laquelle C est diagonale. Sinon, trouver la racine carrée de C peut amener à quelques difficultés de calculs [HOG 1]. Cette question a été traitée dans les articles [BOU 1], [VAL 4]. Le Théorème de Cayley-Hamilton fournit une relation entre C et U

$$\left(C + \frac{(\text{tr}U)^2 - \text{tr}C}{2} I\right)U = (\text{tr}U)C + (\det C)^{1/2} I$$

qui permettrait de calculer U si on connaissait le scalaire $\text{tr} U$. Il se trouve que $\text{tr} U$ est la plus grande racine du polynôme du quatrième degré :

$$y^4 - 2(\text{tr}C)y^2 - 8(\text{dét}C)^{1/2}y + 2\text{tr}(C^2) - (\text{tr}C)^2 = 0.$$

Etape 4

C'est de loin la plus délicate. Nous appliquons une méthode d'intégration constructive due à G. Frobenius et revisitée par J. Dieudonné [DIE 1]. Elle consiste à joindre un point X_0 pris comme référence au point X par une droite paramétrée sous la forme

$$X_\lambda = X_0 + \lambda(X - X_0) \quad (5.1)$$

où le paramètre λ balaye l'intervalle $[0,1]$. Le système aux dérivées partielles est remplacé par un système différentiel ordinaire en λ plus facile à résoudre (paragraphe 8). La solution $R(X)$ est obtenue en attribuant la valeur 1 au paramètre λ dans la solution du système différentiel ordinaire.

Etape 5

Elle est plus aisée que l'étape 4 car, dans le système $\frac{\partial x}{\partial X} = RU$, le second membre ne dépend pas de x lui-même. Dans ce cas simple la méthode de Frobenius conduit à l'expression intégrale

$$x(X) = x(X_0) + \int_0^1 R(X_0 + \lambda(X - X_0))U(X_0 + \lambda(X - X_0))(X - X_0)d\lambda$$

Nous allons maintenant consacrer les trois paragraphes qui suivent au traitement de différents exemples :

- le cas où le tenseur ε est sphérique en petites déformations.
- la vérification de la formule $\text{Rot}(A^\top) + \text{Adj}A = 0$ lorsque A provient de la variation de la rotation d'un solide rigide autour d'un point fixe.
- le cas où le tenseur C est sphérique en grandes déformations.

6- Recherche du déplacement lorsque le tenseur de petites déformations est sphérique

En fait, notre méthode est valable même lorsque les coordonnées sont associées à une base non orthonormée. Pour l'illustrer, essayons de trouver le vecteur déplacement lorsque les composantes du tenseur de déformation linéarisé sont de la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \alpha(X^1, X^2, X^3)g_{ij}$$

où les g_{ij} sont les composantes (constantes) de la métrique de l'espace et α une fonction des coordonnées du point X . Il faut donc résoudre le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X^j} + \frac{\partial u_j}{\partial X^i} \right) = \varepsilon_{ij}$$

où les u_i sont les composantes covariantes du déplacement du point X.

Pour y parvenir, nous commençons par assurer l'existence du tenseur de taux de rotation ω dont les composantes covariantes sont :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X^j} - \frac{\partial u_j}{\partial X^i} \right).$$

La somme de ε et ω reconstituera le tenseur gradient du déplacement

$$\frac{\partial u_i}{\partial X^j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}.$$

6-1 Construction de la matrice A et de sa transposée

La matrice A se calcule à partir de ε grâce à la condition de compatibilité

$$A = \text{Rot} \varepsilon .$$

En utilisant l'expression tensorielle (B-4-1) du rotationnel généralisé de ε présentée dans l'annexe B, nous obtenons

$$A_j^k = (\text{Rot} \varepsilon)_j^k = \eta^{k\ell n} g_{ni} \frac{\partial \varepsilon_j^i}{\partial X^\ell} = \eta^{k\ell n} \frac{\partial \varepsilon_{nj}}{\partial X^\ell} = \eta^{k\ell n} g_{nj} \partial_\ell \alpha .$$

où les η^{ijk} désignent les composantes contravariantes du produit mixte (Annexe A, A-1-1).
Les composantes mixtes de la transposée de A

$$(A^T)_i^m = g^{mj} A_j^k g_{ki}$$

sont :

$$(A^T)_i^m = g^{mj} (A)_j^k g_{ki} = g^{mj} g_{ki} \eta^{k\ell n} g_{nj} \partial_\ell \alpha = \eta^{k\ell n} g_{ki} (g^{mj} g_{jn}) \partial_\ell \alpha$$

et finalement :

$$\boxed{(A^T)_i^m = \eta^{k\ell m} g_{ki} \partial_\ell \alpha .}$$

6-2 Condition de compatibilité satisfaite par A

Explicitons maintenant la condition de compatibilité que doit satisfaire A afin d'assurer l'intégrabilité de

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X^j} + \frac{\partial u_j}{\partial X^i} \right) = \varepsilon_{ij}.$$

Il faut imposer la condition

$$\text{Rot}(A^T) = 0.$$

Nous réitérons donc un calcul similaire au calcul précédent de $\text{Rot} \varepsilon$ pour calculer le rotationnel de A^T .

$$[(\text{Rot}(A^T))_i^h] = \eta^{hqr} g_{rm} \frac{\partial (A^T)_i^m}{\partial X^q} = \eta^{hqr} g_{rm} \eta^{k\ell m} g_{ki} \partial_q \partial_\ell \alpha = \eta^{hqr} \eta_{i\ell} \partial_\ell \partial_q \alpha = g^{j\ell} \eta^{hqr} \eta_{ijr} \partial_\ell \partial_q \alpha$$

Pour simplifier cette expression, utilisons la propriété A-1-1 du produit mixte (Annexe A)

$$\eta^{hqr} \eta_{ijr} = \delta_i^h \delta_j^q - \delta_i^q \delta_j^h.$$

La condition de compatibilité se traduit donc, en composantes mixtes, par :

$$g^{j\ell} (\delta_i^h \delta_j^q - \delta_i^q \delta_j^h) \partial_\ell \partial_q \alpha = 0,$$

équation que nous pouvons tout aussi bien écrire :

$$\partial_j (g^{j\ell} \partial_\ell \alpha) \delta_i^h - \partial_i (g^{h\ell} \partial_\ell \alpha) = 0$$

Le vecteur V de composantes

$$V^h = g^{h\ell} \partial_\ell \alpha$$

satisfait donc à :

$$\partial_\ell (V^\ell) \delta_i^h - \partial_i V^h = 0,$$

ce qui n'est possible que si :

$$\partial_i V^h = 0,$$

c'est-à-dire :

$$g^{h\ell} \partial_i \partial_\ell \alpha = 0.$$

Comme la matrice de coefficients $g^{h\ell}$ est inversible, cela implique que toutes les dérivées secondes de la fonction α soient nulles. Il existe donc 4 constantes, que nous noterons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, c$, telles que :

$$\alpha(X^1, X^2, X^3) = \varphi_1 X^1 + \varphi_2 X^2 + \varphi_3 X^3 + c.$$

La conclusion de cette étude est que les seuls tenseurs ε de petites déformations qui soient proportionnels au tenseur métrique sont de la forme:

$$\varepsilon_{ij} = (\varphi_k X^k + c) g_{ij}.$$

Sous cette hypothèse, nous sommes assurés que le déplacement $u(X)$ du point X vers x existe. La détermination de u s'effectue en ajoutant au tenseur des petites déformations ε_{ij} le tenseur taux de rotation ω_{ij} puis en intégrant le système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u_i}{\partial X^j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}.$$

Cette intégration s'effectuera en deux étapes :

- connaissant A , intégrer $d\omega = j(AdX)$
- connaissant ω , intégrer $\frac{\partial u_i}{\partial X^j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$.

6-3 Expression covariante de $d\omega = j(AdX)$

Dans un premier temps, développons en composantes cette égalité matricielle

$$(d\omega)_k^i = d(\omega_k^i) = \frac{\partial \omega_k^i}{\partial X^h} dX^h.$$

D'après la définition 5 de l'Annexe A:

$$[j(AdX)]_k^i = g^{ij} \eta_{\ell k j} (AdX)^\ell = g^{ij} \eta_{\ell k j} A_h^\ell dX^h.$$

Après simplification par dX^h , l'identification des deux expressions conduit à :

$$\partial_h \omega_k^i = g^{ij} \eta_{\ell k j} A_h^\ell.$$

Nous retiendrons l'expression des dérivées partielles de ω en version trois fois covariantes

$$\partial_h \omega_{ik} = \eta_{\ell k i} A_h^\ell.$$

6-4 Intégration de $d\omega = j(\text{Ad}X)$

Intégrons le système d'équations aux dérivées partielles

$$\partial_h \omega_{ik} = \eta_{\ell ki} A_h^\ell$$

sachant que les A_h^ℓ sont constants et s'expriment en fonction des 3 constantes φ_i

$$A_h^\ell = \eta^{\ell nm} g_{mh} \varphi_n.$$

L'intégration de

$$\partial_h \omega_{ik} = \eta_{\ell ki} \eta^{\ell nm} g_{mh} \varphi_n$$

ne présente pas de difficulté particulière car, d'après l'Annexe A (A-1-1) :

$$\eta_{ki\ell} \eta^{nm\ell} = \delta_k^n \delta_i^m - \delta_k^m \delta_i^n$$

Le second membre se transforme en

$$\eta_{\ell ki} \eta^{\ell nm} g_{mh} \varphi_n = (\delta_k^n \delta_i^m - \delta_k^m \delta_i^n) g_{mh} \varphi_n = g_{ih} \varphi_k - g_{kh} \varphi_i.$$

Les composantes covariantes du tenseur ω prennent la forme :

$$\omega_{ik} = (g_{ih} \varphi_k - g_{kh} \varphi_i) X^h = \varphi_k X_i - \varphi_i X_k$$

à un tenseur taux de rotation constant près.

6-5 Champ de déplacement

Il reste à intégrer le système aux dérivées partielles

$$\partial_k u_i = \varepsilon_{ik} + \omega_{ik}$$

avec

$$\varepsilon_{ik} = (\varphi_j X^j + c) g_{ik} \text{ et } \omega_{ik} = \varphi_k X_i - \varphi_i X_k.$$

c'est-à-dire :

$$\partial_k u_i = (\varphi_j X^j + c) g_{ik} + \varphi_k X_i - \varphi_i X_k.$$

L'intégration s'effectue facilement si nous nous souvenons de quelques propriétés simples du produit scalaire.

$$X_i = g_{ik} X^k \text{ donc : } \partial_k X_i = g_{ik}$$

$$g(X, X) = g_{ij} X^i X^j = \|X\|^2 \text{ donc : } \partial_k (\|X\|^2) = 2g_{ki} X^i = 2X_k$$

Les regroupements suivants sont alors possibles

$$\partial_k u_i = (\varphi_j X^j + c) \partial_k X_i + [\partial_k (\varphi_j X^j + c)] X_i - \frac{1}{2} \varphi_i \partial_k (\|X\|^2).$$

L'intégration donnant les composantes du déplacement devient évidente. À un déplacement de solide rigide près, il vient :

$$u_i(X) = (\varphi_j X^j + c) X_i - \frac{1}{2} \varphi_i \|X\|^2$$

ou bien, en composantes contravariantes :

$$u^i(X) = (\varphi_j X^j + c) X^i - \frac{1}{2} g^{ij} \varphi_j \|X\|^2$$

Le vecteur déplacement du point X est donc de la forme :

$$u(X) = c X + g(\varphi^T, X) X - \frac{1}{2} \|X\|^2 \varphi^T = c X + \frac{1}{2} [2 \frac{X}{\|X\|} \otimes \frac{X^T}{\|X\|} - I] \|X\|^2 \varphi^T$$

où l'on a noté φ^T le vecteur de composantes contravariantes $g^{ij} \varphi_j$.

7- Rotation d'un solide rigide autour d'un point fixe

Notre objectif ici est de vérifier que la rotation d'un solide rigide autour d'un point fixe satisfait bien la condition requise au paragraphe 4-1 quel que soit le paramétrage choisi pour représenter cette rotation. La tradition en Mécanique Générale est de décomposer la rotation en un produit de trois rotations simples qui sont celles d'un système gyroscopique ([LAM 1] et [DUC 1]). A titre d'exemple nous noterons R la rotation et la paramètrons par les angles d'Euler. Nous construirons A telle que :

$$dR = Rj(AdX)$$

puis, nous vérifierons que A satisfait bien à :

$$\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0.$$

C'est la condition de compatibilité pour que R soit effectivement une rotation.

Auparavant, deux paragraphes vont rappeler certaines propriétés des rotations.

7-1 Rotation d'angle α autour d'un axe de vecteur directeur \mathbf{v} , formule de Gibbs et forme exponentielle

Une rotation d'angle α autour d'un axe de vecteur unitaire \mathbf{v} peut s'exprimer matriciellement par la formule de Gibbs [GIB 1]

$$R(\alpha, \mathbf{v}) = \cos \alpha \mathbf{I} + \sin \alpha \mathbf{j}(\mathbf{v}) + (1 - \cos \alpha) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}^T .$$

Une autre forme intéressante est la représentation par l'exponentielle de la matrice antisymétrique $\alpha \mathbf{j}(\mathbf{v})$ [SOUR 1]. En effet, la série convergente

$$\exp(\alpha \mathbf{j}(\mathbf{v})) = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{j}(\mathbf{v}) + \frac{\alpha^2}{2!} [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^2 + \frac{\alpha^3}{3!} [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^3 + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^n + \dots \quad (7.1.1)$$

peut se simplifier en remarquant que les puissances de $\mathbf{j}(\mathbf{v})$ satisfont les propriétés A-7-2 évoquées dans l'annexe A :

$$[\mathbf{j}(\mathbf{v})]^2 = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}^T - \mathbf{I}$$

$$[\mathbf{j}(\mathbf{v})]^3 = -\mathbf{j}(\mathbf{v})$$

$$[\mathbf{j}(\mathbf{v})]^4 = -(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}^T - \mathbf{I})$$

et ainsi de suite.

Ces relations nous permettent d'exprimer le développement en série de l'exponentielle comme une combinaison linéaire de \mathbf{I} , $\mathbf{j}(\mathbf{v})$ et $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}^T$

$$\exp(\alpha \mathbf{j}(\mathbf{v})) = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots\right) \mathbf{I} + \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots\right) \mathbf{j}(\mathbf{v}) + \left(\frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!} - \dots\right) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}^T) .$$

Les trois factorisations mettent en évidence $\cos \alpha$ pour la première série, $\sin \alpha$ pour la deuxième série et $1 - \cos \alpha$ pour la dernière série, d'où le résultat annoncé.

Par ailleurs, en dérivant chaque terme du développement en série (7.1.1) de l'exponentielle, nous pouvons calculer facilement la dérivée d'une rotation par rapport à son angle:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha [\exp(\alpha \mathbf{j}(\mathbf{v}))] &= \mathbf{j}(\mathbf{v}) + \alpha [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^2 + \frac{\alpha^2}{2!} [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^3 + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^n + \dots \\ &= \left[\mathbf{I} + \alpha \mathbf{j}(\mathbf{v}) + \frac{\alpha^2}{2!} [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^2 + \frac{\alpha^3}{3!} [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^3 + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} [\mathbf{j}(\mathbf{v})]^{n-1} + \dots \right] \mathbf{j}(\mathbf{v}) \\ &= [\exp(\alpha \mathbf{j}(\mathbf{v}))] \mathbf{j}(\mathbf{v}) . \end{aligned}$$

soit

$$\partial_\alpha R(\alpha, \mathbf{v}) = R(\alpha, \mathbf{v}) \mathbf{j}(\mathbf{v}) .$$

7-2 Expression d'une rotation autour d'un point fixe

Choisissons une origine O et une base orthonormée directe (x_0, y_0, z_0) dans l'espace tridimensionnel. La rotation R d'un solide rigide autour du point O généralement présentée lors de l'étude d'un système gyroscopique est paramétrée par les 3 angles d'Euler (ψ, θ, φ) . Ces angles sont associés aux trois rotations simples

$$R(\psi, z_0), R(\theta, u), R(\varphi, z),$$

la première d'angle ψ autour de z_0 , la deuxième d'angle θ autour de $u = R(\psi, z_0)x_0$ et la troisième d'angle φ autour de $z = R(\theta, u)z_0$.

La rotation R est alors le produit des trois rotations

$$R = R(\varphi, z)R(\theta, u)R(\psi, z_0)$$

dans cet ordre, ou bien encore, sous forme exponentielle

$$R = \exp[\varphi j(z)]\exp[\theta j(u)]\exp[\psi j(z_0)] \quad (7.2.1)$$

Présentons ici une expression de R due à J. M. Souriau [SOUR 1], plus judicieuse, aussi bien dans notre perspective d'effectuer des dérivations par rapport aux angles, que dans son utilisation lors d'une programmation informatique.

Propriété : La formule (7.2.1) caractérisant la rotation R admet une décomposition en produit de trois rotations autour d'axes fixes

$$R = \exp[\varphi j(z)]\exp[\theta j(u)]\exp[\psi j(z_0)] = \exp[\psi j(z_0)]\exp[\theta j(x_0)]\exp[\varphi j(z_0)].$$

La démonstration s'appuie sur les deux propriétés suivantes satisfaites par toute rotation Ω

$$j(\Omega v) = \Omega j(v)\Omega^T \quad (\text{Annexe A, A-8-8})$$

$$\exp(\Omega B \Omega^T) = \Omega (\exp B) \Omega^T$$

Cette deuxième relation se déduit facilement de la propriété:

$$\text{pour } n \text{ importe quel entier } n, (\Omega B \Omega^T)^n = \Omega B^n \Omega^T$$

en l'appliquant à chaque terme du développement en série de l'exponentielle.

Transformons, tout d'abord, le terme $\exp[\varphi j(z)]$ de la formule (7.2.1)

$$\begin{aligned} \exp[\varphi j(z)] &= \exp[\varphi j(R(\theta, u)z_0)] \\ &= \exp[R(\theta, u)\varphi j(z_0)(R(\theta, u))^T] = R(\theta, u)\exp[\varphi j(z_0)]R(-\theta, u) \\ &= \exp[\theta j(u)]\exp[\varphi j(z_0)]\exp[-\theta j(u)]. \end{aligned}$$

Reportons ce résultat dans le développement de la rotation R

$$\begin{aligned} R &= \exp[\theta j(u)] \exp[\varphi j(z_0)] \exp[-\theta j(u)] \exp[\theta j(u)] \exp[\psi j(z_0)] \\ &= \exp[\theta j(u)] \exp[\varphi j(z_0)] \exp[\psi j(z_0)] = \exp[\theta j(u)] \exp[(\varphi + \psi)j(z_0)] \\ &= \exp[\theta j(u)] \exp[\psi j(z_0)] \exp[\varphi j(z_0)]. \end{aligned}$$

Transformons maintenant le terme $\exp[\theta j(u)]$

$$\exp[\theta j(u)] = \exp[\theta j(R(\psi, z_0)x_0)] = \exp[\psi j(z_0)] \exp[\theta j(x_0)] \exp[-\psi j(z_0)].$$

Reportons de nouveau cette expression dans le développement de R

$$\begin{aligned} R &= \exp[\theta j(u)] \exp[\psi j(z_0)] \exp[\varphi j(z_0)] \\ &= \exp[\psi j(z_0)] \exp[\theta j(x_0)] \exp[-\psi j(z_0)] \exp[\psi j(z_0)] \exp[\varphi j(z_0)] \\ &= \exp[\psi j(z_0)] \exp[\theta j(x_0)] \exp[\varphi j(z_0)] \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé que l'on peut aussi écrire :

$$\boxed{R = R(\psi, z_0)R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0)}.$$

Nous pouvons mesurer combien cette nouvelle représentation de R est intéressante lors d'une dérivation puisque les vecteurs x_0 et z_0 sont indépendants des trois angles d'Euler.

7-3 Construction de A

Regroupons les trois angles d'Euler ψ, θ, φ en un vecteur colonne noté X. Nous pouvons construire les trois colonnes de la représentation matricielle de A dans la base (x_0, y_0, z_0) à partir de la définition

$$dR = Rj(AdX)$$

où dX est le vecteur de composantes $d\psi, d\theta, d\varphi$.

Il vient successivement :

$$\partial_\varphi R = R(\psi, z_0)R(\theta, x_0)\partial_\varphi R(\varphi, z_0) = R(\psi, z_0)R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0)j(z_0) = R j(z_0)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta R &= R(\psi, z_0)\partial_\theta R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0) = R(\psi, z_0)R(\theta, x_0)j(x_0)R(\varphi, z_0) \\ &= R(\psi, z_0)R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0)[R(-\varphi, z_0)j(x_0)R(\varphi, z_0)] = Rj[R(-\varphi, z_0)x_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\psi R &= \partial_\psi [R(\psi, z_0)]R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0) = R(\psi, z_0)j(z_0)R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0) \\ &= R(\psi, z_0)R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0)[[R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0)]^T j(z_0)R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0)] \\ &= Rj[(R(\theta, x_0)R(\varphi, z_0))^T z_0]. \end{aligned}$$

Ces trois dérivées partielles permettent la formation de dR

$$dR = Rj[R(-\varphi, z_0)R(-\theta, x_0)z_0 d\psi + R(-\varphi, z_0)x_0 d\theta + z_0 d\varphi].$$

Nous en déduisons la représentation matricielle de A

$$A = [R(-\varphi, z_0)R(-\theta, x_0)z_0 \quad R(-\varphi, z_0)x_0 \quad z_0]$$

c'est-à-dire, une fois effectué le calcul des colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7-4 Construction de $\text{Adj } A$ et de $\text{Rot } (A^T)$

On peut construire l'adjuguée de A par la formule A-8-10 de l'Annexe A

$$\text{Adj } A = A^2 - (\text{tr} A)A + \frac{(\text{tr} A)^2 - \text{tr}(A^2)}{2} I.$$

Elle conduit à :

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \theta & \sin \theta \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \end{bmatrix}.$$

Construire le Rotationnel de A^T revient à calculer le rotationnel des colonnes de A^T conformément à la généralisation du rotationnel d'un vecteur, il vient successivement :

$$\text{rot} \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{rot} \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{rot} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons $\text{Rot}(A^T)$ en rassemblant les trois rotationnels :

$$\text{Rot}(A^T) = \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \theta \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \theta & -\cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Nous vérifions effectivement que $\text{Rot}(A^T)$ et $\text{Adj}A$ sont opposés.

Cet exemple illustre la propriété suivante des rotations (4.1.3) :

Pour toute rotation $R(X^1, X^2, X^3)$, l'application linéaire A définie par:

$$dR = Rj(\text{Ad}X),$$

satisfait à :

$$\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0.$$

8- Recherche du déplacement dans le cas où C est sphérique

Nous allons résoudre le système aux dérivées partielles (2.1), par la méthode exposée au paragraphe 4, dans le cas où le tenseur de Cauchy-Green est sphérique. Notons $\rho(X)$ une fonction strictement positive telle que :

$$C_{ij} = \rho^2(X)\delta_{ij} \quad (8.1)$$

L'objectif est de préciser les conditions que la fonction $\rho(X)$ doit satisfaire pour que le système (8.1) soit intégrable, puis de trouver la solution. Nous allons suivre la méthode de construction déclinée au paragraphe 5.

8-1 Construction de l'application A

La racine carrée U choisie symétrique et définie positive du tenseur de Cauchy-Green C est sphérique :

$$U(X) = \rho(X)I.$$

Dans la suite des développements, afin d'alléger les expressions, nous omettrons de préciser explicitement que les champs ρ, U, A, \dots dépendent de X.

La formule B-5-5 de l'Annexe B permet de calculer le rotationnel de U.

$$\text{Rot}U = j(\text{grad}\rho)$$

Ainsi

$$U(\text{Rot}U) = j(\rho \text{grad}\rho)$$

est antisymétrique et sa trace est nulle, si bien que l'expression de A se réduit à :

$$A = \frac{1}{\det U} U(\text{Rot}U)U.$$

L'application linéaire A est donc de la forme antisymétrique :

$$A = j\left(\frac{1}{\rho} \text{grad}\rho\right) = j[\text{grad}(\ln \rho)].$$

8-2 Vérification de la condition de compatibilité : $\text{Rot}(A^T) + \text{Adj} A = 0$

Connaissant A, il vient :

$$A^T = -j[\text{grad}(\ln \rho)].$$

En utilisant les formules (B-5-4) de l'Annexe B et (A-8-5) de l'annexe A :

$$\text{Rot}(A^T) = \text{div}(\text{grad}(\ln \rho))I - \frac{\partial(\text{grad}(\ln \rho))}{\partial X}$$

$$\text{Adj}A = \text{grad}(\ln \rho) \otimes [\text{grad}(\ln \rho)]^T.$$

La condition de compatibilité se résume donc à un système aux dérivées partielles linéaire du second ordre satisfait par la fonction ρ

$$\text{grad}(\ln \rho) \otimes [\text{grad}(\ln \rho)]^T = \frac{\partial(\text{grad}(\ln \rho))}{\partial X} - \text{div}(\text{grad}(\ln \rho))I \quad (8.2.1)$$

Introduisons le vecteur

$$W = \frac{1}{\rho} \text{grad}(\ln \rho) = \frac{1}{\rho^2} \text{grad}\rho$$

Le premier membre de l'équation (8.2.1) devient :

$$\text{grad}(\ln \rho) \otimes [\text{grad}(\ln \rho)]^T = \rho^2 W \otimes W^T.$$

Le deuxième membre de l'équation se transforme en

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho W)}{\partial X} - \text{div}(\rho W)I &= \rho \frac{\partial W}{\partial X} + W \otimes (\text{grad}\rho)^T - [\rho \text{div}W + g(W, \text{grad}\rho)]I \\ &= \rho \frac{\partial W}{\partial X} + \rho^2 W \otimes W^T - [\rho \text{div}W + \rho^2 g(W, W)]I \end{aligned}$$

Le produit tensoriel de W par W^T commun aux deux membres disparaît de l'équation (8.2.1) et l'on découvre que le champ de vecteurs W satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial W}{\partial X} = [\text{div}W + \rho g(W, W)]I \quad (8.2.2)$$

où la fonction ρ figure encore.

Mais, comme par définition de la divergence d'un vecteur :

$$\text{tr}\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right) = \text{div}W,$$

il vient, en prenant la trace des deux membres de (8.2.2),

$$2\text{div}W + 3\rho g(W, W) = 0. \quad (8.2.3)$$

On peut donc éliminer ρ dans (8.2.2).

Le champ de vecteurs W satisfait donc le système aux dérivées partielles du premier ordre

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{1}{3}(\text{div}W)I} \quad (8.2.4)$$

Le gradient du champ de vecteurs W est donc symétrique, il est en particulier égal à sa transposée. Son rotationnel est donc nul. On en déduit:

$$\text{Rot}[(\text{div}W)I] = j(\text{grad}(\text{div}W)) = 0.$$

La divergence du vecteur W est donc une constante.

Si cette constante est nulle, alors, d'après (8.2.3), la norme de W est nulle, W est nul, $\text{grad}\rho$ est nul, ρ est une constante ρ_0 , A est nulle et la rotation est constante. La solution du système est une similitude :

$$x(X) = \rho_0 R_0 X + T_0.$$

Dans ce cas, le système :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^T \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) = \rho_0^2 I$$

admet comme solutions les transformations auxquelles nous nous attendions : translation, rotation et homothétie de rapport ρ_0 . Si, de plus, ρ_0 vaut 1, la transformation se réduit à celle d'un solide rigide.

Si la divergence de W est une constante non nulle, notons là $3k$. Le système aux dérivées partielles (8.2.4) devient:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = k I.$$

Il s'intègre facilement

$$W(X) = kX + W_1$$

où W_1 désigne un vecteur constant. En revenant à la formule (8.2.3)

$$2 \operatorname{div} W + 3 \rho g(W, W) = 0$$

nous pouvons découvrir la forme que doit prendre la fonction $\rho(X)$ pour que la condition de compatibilité soit satisfaite :

$$\rho(X) = \frac{-2k}{\|kX + W_1\|^2}.$$

La constante k doit donc être négative afin d'assurer la positivité de la fonction $\rho(X)$. Introduisons la constante strictement positive $c = -k$ et posons $W_1 = cX_1$, la fonction $\rho(X)$ prend la forme :

$$\boxed{\rho(X) = \frac{2}{c\|X - X_1\|^2}}$$

Elle est définie dans l'ouvert constitué de l'espace tout entier auquel on retire le point X_1 . Non seulement le système

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^T \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) = \rho_0^2 I$$

est intégrable, mais aussi le système

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^T \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) = \frac{4}{c^2\|X - X_1\|^4} I.$$

Dans ce dernier cas:

$$U = \frac{2}{c\|X - X_1\|^2} I \qquad A = -2j\left(\frac{X - X_1}{\|X - X_1\|^2}\right)$$

8-3 Détermination de la rotation R

Pour déterminer R, nous devons maintenant intégrer le système :

$$dR = R j(\text{Ad}X)$$

qui peut se transformer en

$$dR = \frac{2}{\|X - X_1\|^2} R[(X - X_1) \otimes dX^T - dX \otimes (X - X_1)^T]$$

Choisissons un point de référence X_0 , distinct de X_1 , et notons R_0 la valeur de R en ce point. La méthode de G. Frobenius, conduit à introduire un paramètre λ variant dans l'intervalle $[0,1]$ et à remplacer le système aux dérivées partielles par le système différentiel ordinaire:

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\lambda} = \Omega j(A(X_0 + \lambda(X - X_0))(X - X_0)) \\ \Omega(0) = R_0 \end{cases}$$

La valeur de R en X sera la valeur de Ω en $\lambda = 1$.

Le système différentiel ordinaire :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = 2\Omega(\lambda) \frac{[(X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)) \otimes (X - X_0)^T - (X - X_0) \otimes (X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0))^T]}{\|X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)\|^2}$$

se simplifie en

$$\frac{1}{2} \|X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)\|^2 \frac{d\Omega}{d\lambda} = \Omega(\lambda) [(X - X_0) \otimes (X_1 - X_0)^T - (X_1 - X_0) \otimes (X - X_0)^T]$$

Choisissons une nouvelle variable μ solution de

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{2}{\|X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)\|^2} \\ \mu(0) = 0 \end{cases}$$

Ce nouveau choix de paramètre conduit au système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\mu} = \Omega(\mu) [(X - X_0) \otimes (X_1 - X_0)^T - (X_1 - X_0) \otimes (X - X_0)^T] \\ \Omega(0) = R_0 \end{cases}$$

dont la solution générale est

$$\Omega(\lambda) = R_0 \exp[\mu(\lambda)((X - X_0) \otimes (X_1 - X_0)^T - (X_1 - X_0) \otimes (X - X_0)^T)]$$

ou bien encore

$$\Omega(\lambda) = R_0 \exp[\mu(\lambda)j((X_1 - X_0) \wedge (X - X_0))].$$

Pour terminer l'intégration, il faut calculer l'exponentielle

$$\exp[\mu(\lambda)j((X_1 - X_0) \wedge (X - X_0))] = \exp[\mu(\lambda)j((X - X_1) \wedge (X_0 - X_1))]$$

qui est une rotation d'axe unitaire

$$v = \frac{(X - X_1) \wedge (X_0 - X_1)}{\|(X - X_1) \wedge (X_0 - X_1)\|}$$

et d'angle

$$\alpha(\lambda) = \mu(\lambda)\|(X - X_1) \wedge (X_0 - X_1)\|$$

Le calcul de cette exponentielle peut être mené de la manière suivante :

$$\exp[\mu(\lambda)j((X - X_1) \wedge (X_0 - X_1))] = I + \sin[\alpha(\lambda)]j(v) + [1 - \cos[\alpha(\lambda)]](v \otimes v^T - I)$$

La rotation $R(X)$ est obtenue pour $\lambda = 1$, elle vaut donc :

$$R(X) = R_0 \left\{ I + \sin[\alpha(1)]j(v) + [1 - \cos[\alpha(1)]](v \otimes v^T - I) \right\}.$$

Reste à calculer la valeur de $\mu(1)$, pour en déduire celle de $\alpha(1)$.

8-4 Détermination de la valeur de $\mu(1)$

Nous avons défini au paragraphe précédent la variable μ par :

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{2}{\|X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)\|^2} \text{ avec } \mu(0) = 0.$$

Par intégration, il vient :

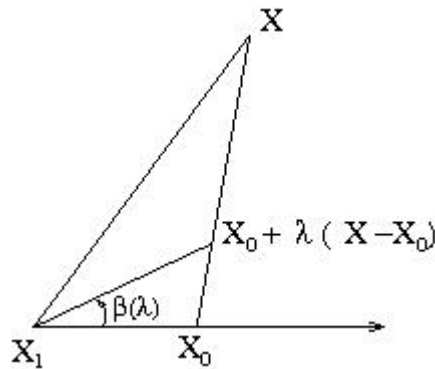
$$\mu(1) = \int_0^1 \frac{2}{\|X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)\|^2} d\lambda.$$

Si les trois points X_0, X_1, X étaient alignés, la rotation $\exp[\mu(\lambda)j((X - X_1) \wedge (X_0 - X_1))]$ serait égale à I et $R(X)$ serait égale à la rotation constante R_0 . Dans le cas contraire les trois points

X_1, X_0, X sont les trois sommets d'un triangle T_1 d'aire $S(1)$. Construisons aussi le triangle T_λ de sommets X_1, X_0 , et $X_0 + \lambda(X - X_0)$ et notons $S(\lambda)$ son aire. Ce triangle est délimité par les trois vecteurs $(X_0 - X_1)$, $X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)$ et $\lambda(X - X_0)$. Soit $\beta(\lambda)$ l'angle entre les deux vecteurs $X_0 - X_1$ et $X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)$, nous pouvons remarquer que :

- d'une part les aires de T_1 et de T_λ sont dans le rapport λ : $S(\lambda) = \lambda S(1)$, d'où : $\frac{dS}{d\lambda} = S(1)$
- d'autre part, il existe une relation entre la variation de $\beta(\lambda)$ et celle de $S(\lambda)$

$$\frac{dS}{d\lambda} = \frac{1}{2} \|X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)\|^2 \frac{d\beta}{d\lambda}$$



Ces deux relations combinées donnent la dérivée de l'angle β par rapport à λ .

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{2}{\|X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)\|^2} S(1)$$

Nous pouvons maintenant affirmer que :

$$\mu(1) = \int_0^1 \frac{2}{\|X_0 - X_1 + \lambda(X - X_0)\|^2} d\lambda = \frac{1}{S(1)} \int_0^1 d\beta = \frac{\beta(1)}{S(1)}.$$

8-5 Réécriture de la rotation $R(X)$

Nous allons tenter de transformer les dénominateurs présents dans l'expression de la rotation obtenue à la fin du paragraphe 8-3. Commençons par remarquer que

$$\|(X - X_1) \wedge (X_0 - X_1)\| = 2S(1).$$

Ainsi :

$$\alpha(1) = \|(X - X_1) \wedge (X_0 - X_1)\| \mu(1) = 2\beta(1).$$

La rotation R prend la forme :

$$\begin{aligned} R(X) &= R_0 \left\{ I + \sin(2\beta(1))j(v) + [1 - \cos(2\beta(1))][v \otimes v^T - I] \right\} \\ &= R_0 \left\{ I + 2 \sin \beta(1)[\cos \beta(1)j(v) + \sin \beta(1)[j(v)]^2] \right\}. \end{aligned}$$

Or les cosinus et sinus de l'angle $\beta(1)$ satisfont les relations :

$$\|(X - X_1) \wedge (X_0 - X_1)\| = \|X_0 - X_1\| \|X - X_1\| \sin \beta(1)$$

$$g(X_0 - X_1, X - X_1) = \|X_0 - X_1\| \|X - X_1\| \cos \beta(1)$$

ce qui nous permet de transformer l'expression de la rotation $R(X)$

$$\begin{aligned} (R_0)^{-1} R(X) &= I + \frac{2}{\|X_0 - X_1\|^2 \|X - X_1\|^2} g(X_0 - X_1, X - X_1) j((X - X_1) \wedge (X_0 - X_1)) \\ &\quad + \frac{2}{\|X_0 - X_1\|^2 \|X - X_1\|^2} [j((X - X_1) \wedge (X_0 - X_1))]^2 \end{aligned}$$

Développons les deux termes présents dans le crochet:

$$j((X - X_1) \wedge (X_0 - X_1)) = (X_0 - X_1) \otimes (X - X_1)^T - (X - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T \quad (8.5.1)$$

$$\begin{aligned} [j((X - X_1) \wedge (X_0 - X_1))]^2 &= (X_0 - X_1) \otimes (X - X_1)^T (X_0 - X_1) \otimes (X - X_1)^T \\ &\quad - (X_0 - X_1) \otimes (X - X_1)^T (X - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T \\ &\quad - (X - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T (X_0 - X_1) \otimes (X - X_1)^T \\ &\quad + (X - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T (X - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} [j((X_0 - X_1) \wedge (X - X_1))]^2 &= g(X - X_1, X_0 - X_1) [(X_0 - X_1) \otimes (X - X_1)^T + (X - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T] \\ &\quad - \|X - X_1\|^2 (X_0 - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T - \|X_0 - X_1\|^2 (X - X_1) \otimes (X - X_1)^T \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

Reportons les relations (8.5.1) et (8.5.2) dans l'expression de la rotation

$$\begin{aligned} (R_0)^{-1} R(X) &= I + \frac{4g(X_0 - X_1, X - X_1)}{\|X_0 - X_1\|^2 \|X - X_1\|^2} (X_0 - X_1) \otimes (X - X_1)^T - \frac{2}{\|X - X_1\|^2} (X - X_1) \otimes (X - X_1)^T \\ &\quad - \frac{2}{\|X_0 - X_1\|^2} (X_0 - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T. \end{aligned}$$

La rotation s'écrit finalement sous la forme factorisée suivante :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{R}_0 \left[2 \frac{(\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1)}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\|} \otimes \frac{(\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1)^T}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\|} - \mathbf{I} \right] \left[2 \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|} \otimes \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)^T}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|} - \mathbf{I} \right]. \quad (8.5.3)$$

La rotation obtenue est donc un produit de 3 rotations :

- \mathbf{R}_0 qui est une rotation constante,
- la rotation $2 \frac{(\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1)}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\|} \otimes \frac{(\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1)^T}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\|} - \mathbf{I}$ qui est la rotation constante d'angle π autour du vecteur unitaire constant $\frac{\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\|}$,
- la rotation $2 \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|} \otimes \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)^T}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|} - \mathbf{I}$ qui est la rotation, d'angle π autour du vecteur unitaire $\frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_1}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|}$ dépendant de X.

8-6 Détermination de la transformation $\mathbf{x}(\mathbf{X})$

Pour déterminer la transformation pour laquelle le tenseur de déformation de Cauchy est :

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \rho^2(\mathbf{X})\mathbf{I} \text{ avec } \rho(\mathbf{X}) = \frac{2}{c\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|^2}$$

il reste à intégrer le système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \rho(\mathbf{X})\mathbf{R}(\mathbf{X})$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{2}{c}\mathbf{R}_0 \left[\mathbf{I} - \frac{2}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\|^2} (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1) \otimes (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1)^T \right] \left[\frac{1}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|^2} \mathbf{I} - \frac{2}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|^4} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1) \otimes (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)^T \right]$$

En utilisant la notation \mathbf{X}_λ définie en (5.1), la méthode de Frobenius conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{x}(\mathbf{X}_0) &= \frac{2}{c}\mathbf{R}_0 \left[\mathbf{I} - \frac{2}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\|^2} (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1) \otimes (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1)^T \right] \times \\ &\int_0^1 \frac{1}{\|\mathbf{X}_\lambda - \mathbf{X}_1\|^2} \left[(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) - \frac{2}{\|\mathbf{X}_\lambda - \mathbf{X}_1\|^2} \mathbf{g}(\mathbf{X}_\lambda - \mathbf{X}_1, \mathbf{X} - \mathbf{X}_0)(\mathbf{X}_\lambda - \mathbf{X}_1) \right] d\lambda \end{aligned}$$

ou bien encore

$$x(X) - x(X_0) = \frac{2}{c} R_0 \left[I - \frac{2}{\|X_0 - X_1\|^2} (X_0 - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T \right] \times \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{(X_\lambda - X_1)}{\|X_\lambda - X_1\|^2} \right] d\lambda$$

La solution du système aux dérivées partielles est donc :

$$\boxed{x(X) = x(X_0) + \frac{2}{c} R_0 \left[\frac{2}{\|X_0 - X_1\|^2} (X_0 - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T - I \right] \left[\frac{(X - X_1)}{\|X - X_1\|^2} - \frac{(X_0 - X_1)}{\|X_0 - X_1\|^2} \right]} \quad (8.6.1)$$

Cette transformation est la somme :

- d'une translation constante

$$T_1 = x(X_0) - \frac{2}{c} R_0 \left[\frac{2}{\|X_0 - X_1\|^2} (X_0 - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T - I \right] \frac{(X_0 - X_1)}{\|X_0 - X_1\|^2}$$

- d'une transformation fonction de X :

$$\frac{2}{c} R_0 \left[\frac{2}{\|X_0 - X_1\|^2} (X_0 - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T - I \right] \frac{(X - X_1)}{\|X - X_1\|^2}$$

qui est le produit de composition d'une homothétie de rapport $\frac{2}{c}$, d'une rotation constante

$$R_1 = R_0 \left[\frac{2}{\|X_0 - X_1\|^2} (X_0 - X_1) \otimes (X_0 - X_1)^T - I \right]$$

et de l'inversion $\frac{(X - X_1)}{\|X - X_1\|^2}$ de centre X_1 .

Bilan des résultats

La résolution du système aux dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial x}{\partial X}^T \frac{\partial x}{\partial X} = \rho^2(X) I$$

nous a amené à étudier le système aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \rho R .$$

La fonction ρ ne peut être quelconque. Le cas évident où ρ est une constante ρ_0 conduit à une similitude

$$x(X) = \rho_0 R_0 X + T_0 .$$

En particulier, si $\rho_0 = 1$ la transformation est celle d'un solide rigide.

Il existe une solution inattendue pour laquelle

$$\rho(X) = \frac{2}{c\|X - X_1\|^2}.$$

La transformation est alors composée d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation et d'une inversion,

$$\boxed{x(X) = T_1 + \frac{2}{c} R_1 \frac{(X - X_1)}{\|X - X_1\|^2}}.$$

9- Identités de Bianchi

Un complément à l'étude des conditions de compatibilité en grandes déformations a été publié en 2001 [FOR 1] en collaboration avec C.Vallée. Ce travail intitulé

« Bianchi Identities in the case of large deformations »

étudie les deux objets

$$E = [\text{Rot}(U^T) + (\det U)[\text{tr}(AU^{-1})U^{-1} - U^{-1}AU^{-1}]]^T \quad (4.2.1')$$

$$B = [\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A]^T \quad (4.1.3)$$

associés à la métrique $C(X)$ et correspondant respectivement à la torsion et à la courbure de l'espace tridimensionnel.

Dans cet article, reproduit en Annexe C, ainsi que dans [FOR 2], nous avons montré que E et B satisfont des identités qui sont une alternative aux identités de Bianchi (satisfaites par les tenseurs de courbure et de torsion) habituellement développées en Géométrie Riemannienne à l'aide des coefficients de Christoffel et des dérivées covariantes. Les objets E et B sont des candidats potentiellement plus simples d'utilisation que les deux tenseurs d'ordre trois et quatre que sont les tenseurs de torsion et de courbure. Jusqu'ici nous n'avons pas prêté attention à la nature tensorielle des objets. Le chapitre qui suit associe aux objets matriciels E et B des objets plus précis qui sont des tenseurs.

Remarque 9.1 : *G. de Saxcé a prolongé cette étude sur les équations de compatibilité dans [SAX 1] en établissant comment les opérateurs divergence et rotationnel se transforment par changements de variables. Il a aussi exhibé la forme de l'équation d'équilibre satisfaite par le tenseur de Piola-Kirchhoff.*

Remarque 9.2 : *Sanda Cleja-Tigoiu, Claude Vallée et moi-même avons rédigé un article publié en Novembre 2008 au journal MMS, qui met en avant une équation de torsion dans le cadre d'une étude sur des dislocations [CLE 1].*

10- Conclusion

Ce chapitre présente une méthodologie permettant d'intégrer en deux étapes découplées un système aux dérivées partielles du type:

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^k} \delta_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial X^\ell} = C_{k\ell}$$

où C est symétrique et définie positive. Les exemples résolus montrent la faisabilité de cette méthode. Nous garderons en mémoire que la clé réside essentiellement dans

- la considération de la racine carrée de C
- la décomposition polaire de $\frac{\partial x}{\partial X}$
- la forme spéciale de la différentielle d'une rotation R :

$$dR = Rj(AdX).$$

remarque que l'on doit aux travaux de G. Darboux [DAR 1].

Alors l'espoir existe pour que ce chapitre, consacré à un problème de mécanique des milieux continus, puisse apporter, en Géométrie Riemannienne [BER 6], une alternative à l'emploi des symboles de Christoffel. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

COMPARAISON ENTRE LA MÉTHODE DE CHRISTOFFEL ET LA MÉTHODE DE DARBOUX – NATURE TENSORIELLE DES OBJETS PRÉSENTÉS AU CHAPITRE 1

1- Introduction

La démarche présentée au chapitre précédent est celle que peut développer un mécanicien qui traite le tenseur de déformation de Green Lagrange droit $C(X)$ et qui cherche à déterminer la nouvelle position des points du milieu continu subissant cette déformation. Cette question aurait pu être résolue par la géométrie riemannienne en considérant que les coefficients C_{ij} étaient les coefficients d'une métrique. C'est la voie suivie, par exemple, par [TRU 1] ou [SOK 1]. Mais ces auteurs abordent la question en introduisant les coefficients de Christoffel. Nous allons donc reprendre le problème

- d'une part pour préciser le lien entre les différents objets mis en évidence au chapitre 1 et les tenseurs de courbure, de torsion, de Ricci et d'Einstein de la géométrie riemannienne,

- d'autre part, pour mettre en lumière les avantages de notre méthode que nous baptiserons méthode de Darboux.

La littérature sur la géométrie riemannienne ne manque pas, citons par exemple [BER 1-6], [LOV 1], [WEI 1], [GAL 1], [LAF 1]. Nous rappellerons ici les définitions des différents tenseurs concernés et nous chercherons à caractériser la nature tensorielle des objets B et E introduits au paragraphe 9 du chapitre précédent, avec plusieurs objectifs :

- persuader le lecteur que les coefficients de Christoffel sont des outils qui alourdissent inutilement les développements (en rebutant souvent les non-initiés),

- montrer que l'application de la méthode de Darboux simplifie les démonstrations de résultats classiques,

- montrer que l'adaptabilité de la méthode à des domaines tels que l'étude des surfaces ou la modélisation des coques minces est envisageable,

- et, dans le futur, généraliser cette méthode à des dimensions supérieures à trois, par exemple six dans le cadre d'une étude de la métrique d'un solide rigide.

2- Expression de la métrique d'un espace vectoriel en coordonnées curvilignes. Racine carrée de la métrique

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'un produit scalaire symétrique défini-positif. Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées X^1, X^2, X^3 dans une base non nécessairement orthonormée. Les composantes de la métrique dans cette base sont notées δ_{ij} . Lors d'un changement de variables $X \mapsto x$, c'est-à-dire si on repère un point par ses coordonnées curvilignes x^1, x^2, x^3 , les coefficients de la métrique deviennent :

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^i} \delta_{k\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^j} = g_{ij}. \quad (2.1)$$

Ils constituent toujours une matrice positive et non dégénérée.

Remarque : Les δ_{ij} correspondent aux g_{ij} constants du paragraphe 6 du chapitre 1. Dans une base orthonormée, les δ_{ij} sont égaux à 0 ou 1 et la notation est cohérente avec celle de Kronecker. Les nouveaux g_{ij} sont fonctions de X^1, X^2, X^3 et correspondent aux C_{ij} du chapitre 1.

A partir de g_{ij} , on peut construire une matrice 3×3 notée U satisfaisant :

$$U_i^k \delta_{k\ell} U_j^\ell = g_{ij},$$

par exemple la racine carrée de g, choisie symétrique et défini-positif, comme c'est l'habitude en décomposition polaire. Comme l'a fait remarquer G. Darboux [DAR 1], la symétrie de U n'est pas obligatoire, par contre il faut veiller à l'inversibilité de U. L'introduction de U permet de transformer l'équation (2.1) en :

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^i} (U^{-1})_m^i \delta_{k\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^j} (U^{-1})_n^j = \delta_{mn}.$$

Cette dernière relation nous incite à définir la rotation R de composantes :

$$R_m^k = \frac{\partial x^k}{\partial X^i} (U^{-1})_m^i.$$

Nous retiendrons que le gradient de x satisfait :

$$\frac{\partial x}{\partial X} = RU. \quad (2.2)$$

L'application linéaire R satisfaisant la propriété

$$R_p^k \delta_{k\ell} R_q^\ell = \delta_{pq}$$

sa dérivation par rapport à la coordonnée X^m conduit à la relation :

$$\delta_{k\ell} \frac{\partial R_p^k}{\partial X^m} R_q^\ell = -\delta_{k\ell} R_p^k \frac{\partial R_q^\ell}{\partial X^m}$$

ou bien encore :

$$\delta_{k\ell} \frac{\partial R_p^k}{\partial X^m} R_q^\ell = -\delta_{\ell k} R_p^\ell \frac{\partial R_q^k}{\partial X^m}.$$

Cette dernière relation traduit une propriété d'antisymétrie sur les indices p et q des coefficients de Shield [SHI 1],

$$A_{pqm} = \delta_{k\ell} \frac{\partial R_p^k}{\partial X^m} R_q^\ell = -A_{qpm}.$$

Au chapitre 1, nous avons défini une application linéaire A liée aux dérivées de la rotation R par la formule :

$$dR = Rj(AdX).$$

Pour éviter une confusion de notation avec les coefficients de Shield, nous la noterons désormais Λ plutôt que A . Le symbole de Levi-Civita ε_{pqn} permet de relier les composantes de Λ aux coefficients de Shield par la formule :

$$A_{pqm} = \varepsilon_{pqn} \Lambda_m^n$$

où l'antisymétrie par rapport aux deux premiers indices devient explicite. Les dérivées partielles de la rotation R sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_p^k}{\partial X^m} &= A_{pqm} \delta^{qj} R_j^k \\ &= \varepsilon_{pqn} \Lambda_m^n \delta^{qj} R_j^k. \end{aligned}$$

Lorsque m prend successivement les valeurs 1, 2, 3, la relation précédente met en évidence trois vecteurs de composantes $\Lambda_1^n, \Lambda_2^n, \Lambda_3^n$. Ce sont ces trois vecteurs que Darboux avait introduits initialement [DAR 1] en les interprétant comme trois « vecteurs rotations instantanées » associés aux trois « temps » X^1, X^2, X^3 .

3- Expression des coefficients de Christoffel en fonction de Λ et U

Les coefficients de Christoffel [WEI 1], [POS 1] se définissent lorsque l'on dérive partiellement les composantes $\frac{\partial x^q}{\partial X^i}$ du gradient de x :

$$\frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial x^q}{\partial X^i} \right) = \Gamma_{mi}^p \frac{\partial x^q}{\partial X^p}.$$

Reprenons cette dérivation en utilisant la décomposition polaire du gradient. Les dérivées secondes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial x^q}{\partial X^i} \right) &= \frac{\partial}{\partial X^m} (R_j^q U_i^j) = \frac{\partial R_j^q}{\partial X^m} U_i^j + R_j^q \frac{\partial U_i^j}{\partial X^m} = \varepsilon_{j\ell n} \Lambda_m^n \delta^{\ell k} R_k^q U_i^j + R_k^q \frac{\partial U_i^k}{\partial X^m} \\ &= R_k^q (\varepsilon_{j\ell n} \Lambda_m^n \delta^{\ell k} U_i^j + \frac{\partial U_i^k}{\partial X^m}) \end{aligned}$$

doivent être identifiées avec

$$\Gamma_{mi}^p \frac{\partial x^q}{\partial X^p} = \Gamma_{mi}^p R_k^q U_p^k = R_k^q (\Gamma_{mi}^p U_p^k).$$

Après élimination du terme R_k^q , la comparaison des deux expressions aboutit au système linéaire

$$\boxed{\Gamma_{mi}^p U_p^k = \frac{\partial U_i^k}{\partial X^m} + \varepsilon_{j\ell n} \delta^{\ell k} \Lambda_m^n U_i^j.}$$

qui permet de calculer les coefficients de Christoffel en fonction des composantes de U et Λ .

Remarque 3.1 *L'expression habituelle des coefficients de Christoffel en fonction de la métrique et de ses dérivées va donc être remplacée par une expression en fonction de U et de ses dérivées. L'utilisation de la racine carrée se substitue à celle de la métrique.*

4-Tenseur de torsion T

Considérons le tenseur de torsion T de composantes

$$T_{mi}^q = \Gamma_{mi}^q - \Gamma_{im}^q$$

dont la nullité traduira la symétrie éventuelle des coefficients de Christoffel relativement aux deux indices inférieurs. D'après le résultat du paragraphe précédent :

$$(\Gamma_{mi}^p - \Gamma_{im}^p) U_p^k = \frac{\partial U_i^k}{\partial X^m} - \frac{\partial U_m^k}{\partial X^i} + \varepsilon_{j\ell n} \delta^{\ell k} (\Lambda_m^n U_i^j - \Lambda_i^n U_m^j).$$

En multipliant les deux membres de cette relation par les composantes $(U^{-1})_k^q$ de l'inverse de U et en sommant sur k, le tenseur de torsion T apparaît sous la forme suivante :

$$T_{mi}^q = \Gamma_{mi}^q - \Gamma_{im}^q = (U^{-1})_k^q \left[\frac{\partial U_i^k}{\partial X^m} - \frac{\partial U_m^k}{\partial X^i} + \varepsilon_{j\ell n} \delta^{\ell k} (\Lambda_m^n U_i^j - \Lambda_i^n U_m^j) \right]. \quad (4.1)$$

Il est maintenant intéressant d'établir les liens qui unissent le tenseur de torsion T aux groupements matriciels que nous avons privilégiés lors de l'établissement des conditions de compatibilité tridimensionnelles du chapitre 1.

4-1 Transformation du terme $\varepsilon_{j\ell n} (\Lambda_m^n U_i^j - \Lambda_i^n U_m^j)$

Commençons par étudier un produit mixte où interviennent linéairement Λ et U. Soient V, W, Z, trois vecteurs arbitraires, considérons les produits mixtes

$$(\Lambda V, UW, Z) = \varepsilon_{nj\ell} \Lambda_m^n V^m U_i^j W^i Z^\ell = \varepsilon_{nj\ell} \Lambda_m^n U_i^j V^m W^i Z^\ell.$$

$$(UV, \Lambda W, Z) = \varepsilon_{jn\ell} U_m^j V^m \Lambda_i^n W^i Z^\ell = -\varepsilon_{nj\ell} \Lambda_i^n U_m^j V^m W^i Z^\ell.$$

La somme de ces deux produits mixtes fait apparaître le terme que nous souhaitons évaluer :

$$(\Lambda V, UW, Z) + (UV, \Lambda W, Z) = \varepsilon_{nj\ell} (\Lambda_m^n U_i^j - \Lambda_i^n U_m^j) V^m W^i Z^\ell \quad (4.1.1)$$

En nous reportant à la définition de la trace énoncée dans l'Annexe A, et en n'oubliant pas que U est inversible (en particulier que $(\det U)U^{-1} = \text{Adj} U$), nous pouvons transformer la somme des deux produits mixtes en

$$\begin{aligned} (\Lambda V, UW, Z) + (UV, \Lambda W, Z) &= \text{tr}(\Lambda U^{-1})(UV, UW, Z) - (UV, UW, \Lambda U^{-1}Z) \\ &= (V, W, (\det U)[\text{tr}(\Lambda U^{-1})I - U^{-1}\Lambda]U^{-1}Z) \\ &= \varepsilon_{mih} (\det U)[\text{tr}(\Lambda U^{-1})I - U^{-1}\Lambda]_k^h (U^{-1})_\ell^k V^m W^i Z^\ell. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

L'identification des formes trilineaires (4.1.1) et (4.1.2) de V, W, Z nous permet de conclure à l'expression suivante :

$$\boxed{\varepsilon_{nj\ell} (\Lambda_m^n U_i^j - \Lambda_i^n U_m^j) = \varepsilon_{mih} (\det U)[\text{tr}(\Lambda U^{-1})U^{-1} - U^{-1}\Lambda U^{-1}]_k^h} \quad (4.1.3)$$

4-2 Interprétation du terme $\frac{\partial U_i^k}{\partial X^m} - \frac{\partial U_m^k}{\partial X^i}$

Dans un premier temps, rappelons l'expression indicielle du rotationnel d'un vecteur. Soit V un champ de vecteurs dépendant de X , l'Annexe B définit le rotationnel de V par :

$$((\text{rot}V) \wedge W)^\ell = [j(\text{rot}V)W]^\ell = \left[\frac{\partial V}{\partial X} - \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T \right]_m^\ell W^m \quad (4.2.1)$$

où W désigne un vecteur constant.

D'une part, les composantes de la transposée de $\frac{\partial V}{\partial X}$ sont

$$\left(\left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T \right)_m^\ell = \delta^{\ell i} \frac{\partial V^h}{\partial X^i} \delta_{hm} \quad (4.2.2)$$

D'autre part, les composantes du produit vectoriel $(\text{rot}V) \wedge W$ peuvent se découvrir en effectuant le produit scalaire avec un vecteur Z . La considération du produit mixte :

$$((\text{rot}V), W, Z) = \varepsilon_{jmi} (\text{rot}V)^j W^m Z^i = \delta_{\ell i} ((\text{rot}V) \wedge W)^\ell Z^i$$

permet d'obtenir :

$$((\text{rot}V) \wedge W)^\ell = \delta^{\ell i} \varepsilon_{jmi} (\text{rot}V)^j W^m. \quad (4.2.3)$$

Les relations (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) nous amènent à l'expression suivante, satisfaite par les composantes du rotationnel d'un champ de vecteurs :

$$\varepsilon_{jmi} (\text{rot}V)^j = \frac{\partial(\delta_{i\ell} V^\ell)}{\partial X^m} - \frac{\partial(\delta_{mh} V^h)}{\partial X^i}.$$

Appliquons cette formule au cas particulier $V = U^T W$ où W est un vecteur constant. Les composantes contravariantes de V s'écrivent en fonction des composantes de U :

$$V^\ell = \delta^{\ell j} U_j^k \delta_{kp} W^p$$

si bien que :

$$\varepsilon_{jmi} (\text{rot}(U^T W))^j = \left[\frac{\partial(U_i^k)}{\partial X^m} - \frac{\partial(U_m^k)}{\partial X^i} \right] \delta_{kp} W^p.$$

En généralisant l'opérateur rotationnel aux applications linéaires L par la définition de l'Annexe B :

$$(\text{Rot } L)W = \text{rot}(LW)$$

où W est un vecteur constant. Nous pouvons conclure, en éliminant W :

$$\boxed{\frac{\partial(U_i^k)}{\partial X^m} - \frac{\partial(U_m^k)}{\partial X^i} = \varepsilon_{jmi} \delta^{pk} (\text{Rot}(U^T))_p^j} \quad (4.2.4)$$

4-3 Expression du tenseur de torsion T

L'expression du tenseur de torsion s'obtient en regroupant les résultats établis aux paragraphes 4-1 et 4-2

$$T_{mi}^q = \varepsilon_{jmi} \delta^{pk} (U^{-1})_k^q \left\{ \text{Rot}(U^T) + \det U (U^{-1}) [\text{tr}(\Lambda U^{-1}) I - \Lambda U^{-1}] \right\}_p^j.$$

Nous reconnaissons ici le terme noté E^T au paragraphe 9 du chapitre 1

$$E^T = \text{Rot}(U^T) + \det U (U^{-1}) [\text{tr}(\Lambda U^{-1}) I - \Lambda U^{-1}].$$

Les propriétés de transposition permettent de remplacer le terme $\delta^{pk} (U^{-1})_k^q$ par $\delta^{qk} ((U^{-1})^T)_k^p$.
La factorisation

$$\boxed{T_{mi}^q = \varepsilon_{jmi} \delta^{qk} [(U^{-1}E)^T]_k^j = \varepsilon_{jmi} \delta^{jk} (U^{-1}E)_k^q} \quad (4.3.1)$$

se met alors en évidence.

Mais le symbole de Levi-Civita ε_{jmi} n'est pas un tenseur, faisons plutôt intervenir le tenseur η de composantes $\eta_{jmi} = (\det U) \varepsilon_{jmi}$. Nous obtenons

$$\boxed{T_{mi}^q = \frac{1}{(\det U)^2} \eta_{jmi} ((\text{Adj}U)E)_k^q \delta^{jk}} \quad (4.3.2)$$

Ce résultat est particulièrement intéressant :

- d'une part, il met en évidence la propriété tensorielle suivante

$$\boxed{\frac{(\text{Adj}U)E}{(\det U)^2}}$$

est un tenseur une fois contravariant et une fois covariant,

- d'autre part, il montre, qu'en dimension 3, le tenseur T d'ordre trois peut être raisonnablement remplacé par le tenseur d'ordre deux $\frac{(\text{Adj}U)E}{(\det U)^2}$, d'utilisation plus aisée.

4-4 Efficacité de la méthode proposée au chapitre 1 pour exprimer la nullité de la torsion

Lors de la caractérisation de la symétrie des dérivées partielles secondes de x (paragraphe 4-2 et 9 du chapitre 1), le résultat suivant a été mis en évidence :

$$d(\delta x) - \delta(dx) = RE(\delta X \wedge dX)$$

avec

$$E = [\text{Rot}(U^T) + \det U(U^{-1})[\text{tr}(\Lambda U^{-1})I - \Lambda U^{-1}]]^T.$$

Cette relation peut se décliner sous la forme indicielle :

$$(d\delta x)^q - (\delta dx)^q = R_k^q E_p^k (dX \wedge \delta X)^p = R_k^q E_p^k \varepsilon_{min} \delta^{np} dX^m \delta X^i.$$

Or, le calcul des dérivées secondes de x concerne directement les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k et le tenseur de torsion T

$$d(\delta x)^q - (\delta dx)^q = (\Gamma_{mi}^p - \Gamma_{im}^p) R_k^q U_p^k \delta X^i dX^m = T_{mi}^p R_k^q U_p^k \delta X^i dX^m.$$

Il suffit alors d'une identification des deux expressions pour obtenir le tenseur de torsion

$$T_{mi}^p U_p^k = E_p^k \varepsilon_{min} \delta^{np}$$

expression qui se transforme en multipliant les deux membres de la relation par l'inverse de U

$$T_{mi}^q = \varepsilon_{nmi} \delta^{np} (U^{-1} E)_p^q$$

qui n'est autre que la formule (4.3.1).

Au chapitre 1, la recherche des conditions d'intégrabilité du système aux dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial x}{\partial X} = RU$ nous a amené à imposer la symétrie des dérivées secondes de x et donc à imposer $E = 0$, ce qui équivaut à la nullité du tenseur de torsion T .

Remarque 4.1 : Si le tenseur de torsion est nul, les coefficients de Christoffel admettent une symétrie par rapport aux deux indices inférieurs

$$\Gamma_{im}^p = \Gamma_{mi}^p$$

et se calculent en fonction de la métrique et de ses dérivées [WEI 1]

$$\Gamma_{mi}^q = \frac{1}{2} g^{jq} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^m} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial X^j} \right).$$

Par la méthode de Darboux, la nullité de la torsion permet de calculer Λ en fonction de U et $\text{Rot}(U^T)$:

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U(\text{Rot}(U^T))U - \frac{\text{tr}(U\text{Rot}(U^T))}{2}U].$$

Les coefficients de Christoffel Γ_{jk}^ℓ sont issus de la décomposition linéaire des variations de $\frac{\partial x}{\partial X}$ qui ne satisfait aucune propriété algébrique. Les coefficients de Λ sont issus de la décomposition linéaire des variations de R dont les coefficients satisfont l'identité algébrique

$$R_i^k \delta_{k\ell} R_j^\ell = \delta_{ij}.$$

On passe de $\frac{\partial x}{\partial X}$ à R par

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^j} = U_j^k R_k^i.$$

Les coefficients U_j^k de la racine carrée U de la métrique peuvent s'interpréter comme les coefficients d'une matrice de passage entre une « base orthonormée » constituée des trois colonnes de la rotation R et « une base quelconque » constituée des trois colonnes du gradient de x . On peut s'attendre à ce que les calculs se déroulent plus efficacement dans la « base orthonormée » que dans « la base quelconque ».

Nous réalisons mieux combien l'utilisation des coefficients de Christoffel peut être délicate et combien l'utilisation de Λ peut être source d'ouverture lors de la résolution effective de certains problèmes géométriques.

5- Tenseur de courbure K

5-1 Expression du tenseur de courbure par la méthode de Darboux

Comme en mécanique des milieux continus notons F le gradient $\frac{\partial x}{\partial X}$ et décomposons le en produit RU . Le tenseur de courbure K (une fois contravariant et 3 fois covariants) se définit lorsque l'on exprime les différences croisées des dérivées secondes partielles de F :

$$\frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial F_h^k}{\partial X^\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial F_h^k}{\partial X^m} \right) = K_{h\ell m}^p F_p^k.$$

Pour préparer le calcul de K , effectuons les dérivées premières

$$\frac{\partial F_h^k}{\partial X^\ell} = \frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} U_h^i + R_i^k \frac{\partial U_h^i}{\partial X^\ell},$$

puis secondes de F

$$\frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial F_h^k}{\partial X^\ell} \right) = \frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \right) U_h^i + \frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \frac{\partial U_h^i}{\partial X^m} + \frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \frac{\partial U_h^i}{\partial X^\ell} + R_i^k \frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial U_h^i}{\partial X^\ell} \right).$$

Échangeons les indices ℓ et m ,

$$\frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial F_h^k}{\partial X^m} \right) = \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \right) U_h^i + \frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \frac{\partial U_h^i}{\partial X^\ell} + \frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \frac{\partial U_h^i}{\partial X^m} + R_i^k \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial U_h^i}{\partial X^m} \right)$$

et effectuons la différence

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial F_h^k}{\partial X^\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial F_h^k}{\partial X^m} \right) &= \left[\frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \right) \right] U_h^i \\ &+ \frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \frac{\partial U_h^i}{\partial X^m} + \frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \frac{\partial U_h^i}{\partial X^\ell} - \frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \frac{\partial U_h^i}{\partial X^\ell} - \frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \frac{\partial U_h^i}{\partial X^m} \\ &+ R_i^k \left[\frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial U_h^i}{\partial X^\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial U_h^i}{\partial X^m} \right) \right] \end{aligned}$$

Nous constatons que cette différence se simplifie énormément puisque les termes produits de dérivées premières de R et de U disparaissent 2 à 2 et que les dérivées secondes croisées de U sont symétriques. Finalement :

$$\boxed{K_{h \ell m}^p R_n^k U_p^n = \left[\frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \right) \right] U_h^i} \quad (5.1.1)$$

Reste à calculer les différences croisées des dérivées partielles secondes de R. Nous pouvons d'ores et déjà prévoir que le tenseur de courbure ne concerne que Λ et ses dérivées.

5-2 Expression des différences des dérivées partielles secondes croisées de R en fonction de Λ et de ses dérivées

Nous avons déjà établi au paragraphe 2 que

$$\frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} = \varepsilon_{ijp} \Lambda_\ell^p \delta^{jn} R_n^k$$

Dérivons une seconde fois cette expression

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \right) &= \varepsilon_{ijp} \delta^{jn} \left(\frac{\partial \Lambda_\ell^p}{\partial X^m} R_n^k + \Lambda_\ell^p \frac{\partial R_n^k}{\partial X^m} \right) \\
 &= \varepsilon_{ijp} \left(\delta^{jn} \frac{\partial \Lambda_\ell^p}{\partial X^m} R_n^k + \delta^{js} \Lambda_\ell^p \frac{\partial R_s^k}{\partial X^m} \right) \\
 &= \varepsilon_{ijp} \left(\delta^{jn} \frac{\partial \Lambda_\ell^p}{\partial X^m} + \varepsilon_{srq} \delta^{js} \delta^{rn} \Lambda_\ell^p \Lambda_m^q \right) R_n^k.
 \end{aligned}$$

Échangeons les indices ℓ et m , puis effectuons la différence des dérivées secondes croisées ainsi obtenues :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \right) = \left[\varepsilon_{ijp} \left(\frac{\partial \Lambda_\ell^p}{\partial X^m} - \frac{\partial \Lambda_m^p}{\partial X^\ell} \right) \delta^{jn} + \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{srq} \delta^{js} \delta^{rn} (\Lambda_\ell^p \Lambda_m^q - \Lambda_m^p \Lambda_\ell^q) \right] R_n^k} \quad (5.2.1)$$

Au cours des développements précédents, nous avons déjà traité un terme du genre $\left(\frac{\partial \Lambda_\ell^p}{\partial X^m} - \frac{\partial \Lambda_m^p}{\partial X^\ell} \right)$ où U figurait à la place de Λ . Il introduisait alors le rotationnel de U^T . Pour les mêmes raisons

$$\frac{\partial \Lambda_\ell^p}{\partial X^m} - \frac{\partial \Lambda_m^p}{\partial X^\ell} = \varepsilon_{m\ell q} \delta^{pr} (\text{Rot}(\Lambda^T))_r^q = \varepsilon_{m\ell q} \delta^{qr} ((\text{Rot}(\Lambda^T))^T)_r^p.$$

Nous réservons la simplification du terme $(\Lambda_\ell^p \Lambda_m^q - \Lambda_m^p \Lambda_\ell^q)$ au paragraphe qui suit.

5-3 Expression de $(\Lambda_\ell^p \Lambda_m^q - \Lambda_m^p \Lambda_\ell^q)$ en fonction de l'adjuguée de Λ

D'une certaine façon, les produits de la forme $\Lambda_\ell^p \Lambda_m^q$ mettent en jeu l'adjuguée de Λ . Revenons sur la définition de l'adjuguée en partant du produit mixte. Si V, W, Z sont trois vecteurs constants, alors :

$$(\Lambda V, \Lambda W, Z) = (V, W, (\text{Adj} \Lambda) Z).$$

En oubliant le vecteur Z , nous obtenons :

$$(\Lambda V) \wedge (\Lambda W) = (\text{Adj} \Lambda)^T (V \wedge W).$$

Les composantes contravariantes des deux membres de cette identité vectorielle sont :

$$\begin{aligned}
 [(\Lambda V) \wedge (\Lambda W)]^h &= \delta^{hk} \varepsilon_{pqk} \Lambda_\ell^p \Lambda_m^q V^\ell W^m \\
 [(\text{Adj} \Lambda)^T (V \wedge W)]^h &= [(\text{Adj} \Lambda)^T]_r^h \delta^{rj} \varepsilon_{\ell mj} V^\ell W^m.
 \end{aligned}$$

Après identification de ces deux composantes et simplification par $V^\ell W^m$, il vient :

$$\delta^{hk} \varepsilon_{pqk} \Lambda_\ell^p \Lambda_m^q = [(\text{Adj} \Lambda)^T]_r^h \delta^{rj} \varepsilon_{\ell mj}$$

ou encore

$$\varepsilon_{pqk} \Lambda_\ell^p \Lambda_m^q = \delta_{kh} \varepsilon_{\ell m j} \delta^{rj} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_r^h$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par ε^{isk}

$$\varepsilon^{isk} \varepsilon_{pqk} \Lambda_\ell^p \Lambda_m^q = \varepsilon^{isk} \delta_{kh} \varepsilon_{\ell m j} \delta^{rj} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_r^h$$

et profitons de l'identité

$$\varepsilon^{isk} \varepsilon_{pqk} = \delta_p^i \delta_q^s - \delta_p^s \delta_q^i.$$

Le premier membre se transforme en

$$\varepsilon^{isk} \varepsilon_{pqk} \Lambda_\ell^p \Lambda_m^q = (\delta_p^i \delta_q^s - \delta_p^s \delta_q^i) \Lambda_\ell^p \Lambda_m^q = \Lambda_\ell^i \Lambda_m^s - \Lambda_\ell^s \Lambda_m^i.$$

Ainsi en changeant l'indice i en p et l'indice s en q

$$\boxed{\Lambda_\ell^p \Lambda_m^q - \Lambda_m^p \Lambda_\ell^q = \varepsilon^{pqk} \varepsilon_{\ell m j} \delta_{kh} \delta^{jt} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_t^h.}$$

Dans la formule (5.2.1), il nous reste à simplifier, le terme

$$\varepsilon_{ijp} \varepsilon_{srq} \delta^{js} \delta^{rn} (\Lambda_\ell^p \Lambda_m^q - \Lambda_m^p \Lambda_\ell^q) = \varepsilon_{pi}^s \varepsilon_{\ell m}^t (\varepsilon_{srq} \varepsilon^{pqk}) \delta_{kh} \delta^{rn} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_t^h$$

En remarquant que $\varepsilon_{srq} \varepsilon^{k pq}$ vaut $\delta_s^k \delta_r^p - \delta_s^p \delta_r^k$, nous obtenons la factorisation

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{srq} \delta^{js} \delta^{rn} (\Lambda_\ell^p \Lambda_m^q - \Lambda_m^p \Lambda_\ell^q) &= \varepsilon_{pih} \varepsilon_{\ell m}^t \delta^{pn} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_t^h - \varepsilon_{pi}^p \varepsilon_{\ell m}^t \delta^{rn} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_t^h \\ &= \varepsilon_{pih} \varepsilon_{\ell m s} \delta^{sr} \delta^{pn} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_r^h \end{aligned}$$

où l'on a changé l'indice de sommation t en r et où l'on a fait disparaître le terme en ε_{pi}^p qui est nul.

5-4 Expression du tenseur de courbure K

Rassemblons tout d'abord les deux résultats acquis aux paragraphes précédents, afin de préciser l'écart entre les dérivées secondes croisées de la rotation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \right) &= [\varepsilon_{ijp} \varepsilon_{m \ell q} \delta^{qr} ((\text{Rot}(\Lambda^T))^T)_r^p \delta^{jn} + \varepsilon_{pih} \varepsilon_{\ell m s} \delta^{sr} \delta^{pn} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_r^h] R_n^k \\ &= [\varepsilon_{ijp} \varepsilon_{m \ell q} \delta^{qr} \delta^{jn} ((\text{Rot}(\Lambda^T))^T)_r^p + \varepsilon_{iph} \varepsilon_{m \ell s} \delta^{sr} \delta^{pn} [(\text{Adj} \Lambda)^T]_r^h] R_n^k \end{aligned}$$

Nous pouvons constater que, dans cette dernière expression, les deux termes de la somme ont en commun les produits de symboles de Levi-Civita et les produits de symboles de Kronecker. En remarquant que les indices muets de sommation qui se correspondent sont :

p et h, j et p, q et s,

le groupement $\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda$ apparaît

$$\frac{\partial}{\partial X^m} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial X^\ell} \left(\frac{\partial R_i^k}{\partial X^m} \right) = \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{m\ell q} \delta^{qr} \delta^{jn} [(\text{Rot}(\Lambda^T) + (\text{Adj}\Lambda))^T]_r^p R_n^k$$

Ainsi, en reprenant la relation (5.1.1) et en faisant disparaître les composantes R_n^k de la rotation de part et d'autre de l'égalité, le tenseur de courbure K est tel que :

$$\boxed{K_{h\ell m}^p U_p^n = \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{m\ell q} \delta^{qr} \delta^{jn} [(\text{Rot}(\Lambda^T) + (\text{Adj}\Lambda))^T]_r^p U_h^i}$$

Si l'on cherche à faire apparaître une version complètement covariante du tenseur de courbure K, c'est-à-dire avec les quatre indices de K en position basse, il suffit pour cela de faire apparaître la métrique à gauche de l'expression précédente en multipliant par $\delta_{nk} U_t^k$.

$$K_{h\ell m}^p U_p^n \delta_{nk} U_t^k = \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{m\ell q} \delta^{qr} \delta^{jn} \delta_{nk} [(\text{Rot}(\Lambda^T) + (\text{Adj}\Lambda))^T]_r^p U_h^i U_t^k$$

soit,

$$K_{ht\ell m} = K_{h\ell m}^p g_{pt} = \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{m\ell q} \delta^{qr} [(\text{Rot}(\Lambda^T) + (\text{Adj}\Lambda))^T]_r^p U_h^i U_t^j.$$

A droite de l'égalité on reconnaît, un produit de composantes de U qui met en évidence l'adjuguée de U :

$$\varepsilon_{ijp} U_h^i U_t^j = [(\text{Adj}U)^T]_s^n \delta_{pn} \delta^{sk} \varepsilon_{htk}.$$

Ainsi, le tenseur de courbure K s'écrit :

$$K_{ht\ell m} = \varepsilon_{m\ell q} \delta^{qr} [(\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda)^T]_r^p [(\text{Adj}U)^T]_s^n \delta_{np} \delta^{sk} \varepsilon_{htk}.$$

Nous constatons la présence du groupement $[(\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda)^T]$ dans l'expression de K, c'est ce que l'on a noté B au paragraphe 9 du chapitre 1, ainsi :

$$\begin{aligned} K_{ht\ell m} &= \varepsilon_{m\ell q} \delta^{qr} [B]_r^p [(\text{Adj}U)^T]_s^n \delta_{np} \delta^{sk} \varepsilon_{htk} \\ &= \varepsilon_{m\ell q} [B^T]_r^q [(\text{Adj}U)^T]_s^n (\delta^{pr} \delta_{np}) \delta^{sk} \varepsilon_{htk} \\ &= \varepsilon_{m\ell q} [B^T]_r^q [(\text{Adj}U)^T]_s^r \delta^{sk} \varepsilon_{htk} \\ &= \varepsilon_{m\ell q} [B^T (\text{Adj}U)^T]_s^q \delta^{sk} \varepsilon_{htk} \end{aligned}$$

D'où, la forme complètement covariante du tenseur de courbure :

$$\boxed{K_{ht\ell m} = \varepsilon_{m\ell q} \varepsilon_{htk} \delta^{ks} [(\text{Adj}U)B^T]_s^q = \varepsilon_{m\ell q} \varepsilon_{htk} \delta^{ks} (B^T \text{Cof } U)_s^q} \quad (5.4.1)$$

où l'on a remplacé la transposée $(\text{Adj}U)^T$ par $\text{Cof} U$ (Annexe A, définition 6).

Il est bien connu que le tenseur de courbure K n'a que six composantes indépendantes. Nous reviendrons au paragraphe 7 sur les propriétés d'antisymétrie et de symétrie de K qui mènent à cette conclusion.

Remarque 5.1 : Si le tenseur de courbure est nul, c'est-à-dire si les dérivées secondes de F sont symétriques, alors les coefficients de Christoffel et leurs dérivées partielles satisfont :

$$K_{i\ mn}^q = \frac{\partial \Gamma_{im}^q}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^q}{\partial X^m} + \Gamma_{im}^j \Gamma_{nj}^q - \Gamma_{in}^j \Gamma_{mj}^q = 0$$

tandis que la nullité de la courbure se traduit, dans le cadre de la méthode de Darboux, par la formule (4.1.3) du chapitre 1 :

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda = 0$$

ou bien

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Cof}(\Lambda^T) = 0.$$

6- Comparaison de la méthode de Christoffel avec la méthode de Darboux

Examinons le déroulement des différentes étapes associées aux points de vue de Christoffel et de Darboux pour résoudre un système aux dérivées partielles du type

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^i} \delta_{k\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^j} = g_{ij}$$

dans le contexte de la mécanique des milieux continus.

6-1 Méthode de Christoffel

Elle consiste à poser

$$\frac{\partial x}{\partial X} = F$$

1^{ère} étape

Calculer les coefficients de Christoffel Γ_{mi}^q à l'aide des coefficients de la métrique $g = F^T F$.

$$\Gamma_{mi}^q = \frac{1}{2} g^{jq} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^m} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial X^j} \right)$$

2^{ème} étape

Vérifier que le tenseur de courbure est bien nul

$$K_{i n m}^q = \frac{\partial \Gamma_{im}^q}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^q}{\partial X^m} + \Gamma_{im}^j \Gamma_{nj}^q - \Gamma_{in}^j \Gamma_{mj}^q = 0$$

3^{ème} étape

Trouver F en intégrant les équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre :

$$\frac{\partial F_i^q}{\partial X^m} = \Gamma_{mi}^p F_p^q$$

4^{ème} étape

Intégrer les équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial X^q}{\partial X^i} = F_i^q.$$

Pour cette méthode, que nous nommons méthode de Christoffel, la difficulté se situe, dans le peu de maniabilité des coefficients de Christoffel Γ_{mi}^p et des composantes du tenseur de courbure $K_{ht\ell m}$. Le point délicat réside surtout dans l'intégration de l'étape 3.

6-2 Méthode de Darboux

Elle consiste à trouver une solution algébrique U de

$$U_i^k \delta_{k\ell} U_j^\ell = g_{ij}$$

et à poser

$$\frac{\partial x}{\partial X} = RU$$

en introduisant une rotation inconnue R.

1^{ère} étape

Calculer la matrice Λ à l'aide de la formule

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U(\text{Rot}(U^T))U - \frac{\text{tr}(U\text{Rot}(U^T))}{2} U].$$

2^{ème} étape

Vérifier que la courbure est bien nulle

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda = 0.$$

3^{ème} étape

Trouver la rotation R en intégrant les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial R_i^q}{\partial X^m} = \varepsilon_{ijn} \delta^{jp} \Lambda_m^n R_p^q \text{ en notation indicielle}$$

ou

$$dR = Rj(\Lambda dX) \text{ en notation matricielle.}$$

4^{ème} étape

Intégrer les équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial X^q}{\partial X^i} = (R U)_i^q.$$

Les opérations développées dans les deux méthodes sont voisines en apparence, mais l'avantage incontesté de la méthode de Darboux est de gérer seulement des matrices Λ et $\text{Rot}(\Lambda^T)$ et de proposer à la 3^{ème} étape une intégration facilitée par le fait que R est a priori une rotation.

Exercice pour les « mordus » de Christoffel :

Résoudre par cette méthode le problème des similitudes infinitésimales traité au paragraphe 8 du chapitre 1.

Bon courage !

7- Symétrie et antisymétries du tenseur de courbure K

La formule

$$K_{ht\ell m} = \varepsilon_{m\ell q} \varepsilon_{htk} \delta^{ks} [((\text{Adj}U)B)^T]_s^q = \varepsilon_{m\ell q} \varepsilon_{htk} \delta^{ks} (B^T \text{Cof } U)_s^q. \quad (5.4.1)$$

exprime le tenseur de courbure K en fonction de $(\text{Adj}U)B$. En dimension 3, il n'y a donc pas plus de 9 coefficients indépendants parmi les 81 coefficients de ce tenseur d'ordre 4.

La chute de 81 à 9 est une conséquence des antisymétries de $K_{ht\ell m}$ par rapport aux deux premiers indices et aux deux derniers indices

$$K_{th\ell m} = -K_{ht\ell m}$$

$$K_{ht m\ell} = -K_{ht\ell m}$$

qui proviennent respectivement des antisymétries des symboles de Levi-Civita ε_{htk} et $\varepsilon_{m\ell q}$ présents dans la formule (5.4.1). Il existe une symétrie supplémentaire entre le groupe (h, t) des deux premiers indices et le groupe (ℓ, m) des deux derniers indices

$$K_{\ell m h t} = K_{h t \ell m}$$

En effet, la première identité de Bianchi de l'Annexe C implique la symétrie de BU^T . Cette symétrie équivaut à celle de $(\text{Adj}U)B$:

$$B^T(\text{Adj}U)^T = (\text{Adj}U)B \Leftrightarrow B^T(U^{-1})^T = U^{-1}B \Leftrightarrow UB^T = BU^T.$$

La symétrie de $(\text{Adj}U)B$ s'exprime en composantes par

$$\delta^{ks}[(\text{Adj}U)B]_s^q = \delta^{qs}[(\text{Adj}U)B]^T_s^k.$$

En remplaçant dans (5.4.1) on trouve

$$K_{ht\ell m} = \varepsilon_{\ell m q} \varepsilon_{thk} \delta^{qs}[(\text{Adj}U)B]^T_s^k$$

et l'on reconnaît $K_{\ell mht}$.

Remarque 7.1 : Le tenseur de courbure K d'ordre 4 possède seulement 6 composantes significatives, qui sont les coefficients de la matrice 3×3 symétrique $(\text{Adj}U)B$. Une opération de contraction imaginée par Ricci sur le 2^{ème} indice contravariant et le 3^{ème} covariant du tenseur K permet d'extraire un tenseur d'ordre 2 appelé maintenant tenseur de Ricci. Quelle est la relation entre le tenseur de Ricci et la matrice $(\text{Adj}U)B$? Nous abordons cette question au paragraphe suivant.

8- Tenseur de Ricci et Tenseur d'Einstein

Considérons donc la version deux fois covariantes du tenseur de Ricci \mathbf{R}

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{hm} &= K_{h\ell m}^\ell = K_{h p \ell m} g^{p\ell} = \varepsilon_{m\ell q} \varepsilon_{hpk} \delta^{ks} [(B^T(\text{Adj}U)^T)_s^q] g^{p\ell} \\ &= \varepsilon_{m\ell q} \varepsilon_{hpk} g^{p\ell} \delta^{ns} (B^T)_n^q (\text{Adj}U)_s^k \end{aligned}$$

Le symbole de Levi-Civita n'est pas un tenseur, préférons lui le tenseur trois fois covariant associé au produit mixte

$$\eta_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \det U$$

Ainsi

$$\mathbf{R}_{hm} = \eta_{m\ell q} \eta_{hpk} (\det U)^{-2} g^{p\ell} \delta^{ns} (B^T)_n^q (\text{Adj}U)_s^k = \eta_{m\ell q} \eta_{hk}^\ell (\det U)^{-2} \delta^{ns} (B^T)_n^q (\text{Adj}U)_s^k.$$

La version mixte une fois covariante et une fois contravariante du tenseur de Ricci se calcule par :

$$\mathbf{R}_m^j = \mathbf{R}_{hm} g^{hj} = \eta_{m\ell q} \eta_k^{j\ell} (\det U)^{-2} \delta^{ns} (B^T)_n^q (\text{Adj}U)_s^k,$$

ou, en remplaçant $\eta_k^{j\ell}$ par $\eta^{j\ell i} g_{ik}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_m^j &= \eta_{m\ell q} \eta^{j\ell i} \mathbf{g}_{ik} (\det U)^{-2} \delta^{ns} (\mathbf{B}^T)_n^q (\text{Adj}U)_s^k \\ &= \eta_{m\ell q} \eta^{j\ell i} U_i^r \delta_{rp} U_k^p (\det U)^{-2} \delta^{ns} (\mathbf{B}^T)_n^q (\text{Adj}U)_s^k \\ &= \eta_{qm\ell} \eta^{ij\ell} U_i^r \delta_{rp} (\det U)^{-2} \delta^{ns} (\mathbf{B}^T)_n^q (U \text{Adj}U)_s^p\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression de \mathbf{R}_m^j , remplaçons le produit contracté $\eta_{qm\ell} \eta^{ij\ell}$ par $\delta_q^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_q^j$ et le produit matriciel $(U \text{Adj}U)_s^p$ par $(\det U) \delta_s^p$

$$\mathbf{R}_m^j = (\det U)^{-1} (\delta_q^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_q^j) \delta_{rp} \delta^{ns} (\mathbf{B}^T)_n^q U_i^r \delta_s^p = (\det U)^{-1} [(\mathbf{B}^T)_n^q U_q^n \delta_m^j - (\mathbf{B}^T)_n^j U_m^n].$$

Le résultat pressenti est confirmé : le tenseur de Ricci dans sa version mixte ne dépend que du groupe $\mathbf{B}^T U$, qui acquiert ici le statut de tenseur

$$\boxed{\mathbf{R}_m^j = (\det U)^{-1} [(\text{tr}(\mathbf{B}^T U) \mathbf{I} - (\mathbf{B}^T U)]_m^j}$$

En dimension 3, le tenseur d'Einstein \mathbf{S} est obtenu à partir du tenseur de Ricci en lui retranchant la moitié de sa trace, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \mathbf{R}_j^j = (\det U)^{-1} \text{tr}(\mathbf{B}^T U).$$

Ses composantes prennent donc la forme

$$\boxed{\mathbf{S}_m^j = -\frac{(\mathbf{B}^T U)_m^j}{\det U}}$$

Cette expression du tenseur d'Einstein \mathbf{S} met clairement en avant le grand avantage de la méthode que nous avons développée à partir de l'idée de Darboux. La matrice $\frac{\mathbf{B}^T U}{\det U}$ est un tenseur mixte, ce résultat établit complètement la légitimité de notre démarche, le calcul de la matrice \mathbf{B} est une **alternative** au calcul de la courbure et offre une ouverture nouvelle à la résolution des problèmes posés en géométrie riemannienne.

9- Tenseur d'Einstein de la 3-sphère (S^3)

En guise d'exemple, et en préparation du chapitre 3, nous allons nous intéresser à la sphère de rayon ρ plongée dans \mathbf{R}^4 . Cette 3-sphère sera paramétrée en coordonnées stéréographiques [SOUR 1].

9-1 Métrique de la 3-sphère

La sphère de rayon ρ de \mathbf{R}^4 peut se paramétrer en constituant un atlas de 2 cartes. Nous noterons y un point de la sphère de coordonnées (y^1, y^2, y^3, y^4) et (x^1, x^2, x^3) les coordonnées stéréographiques. Les relations liant les coordonnées de y à ces paramètres s'écrivent :

$$y^1 = \frac{2\rho x^1}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

$$y^2 = \frac{2\rho x^2}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

$$y^3 = \frac{2\rho x^3}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

$$y^4 = \pm \rho \left(\frac{2}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} - 1 \right).$$

Il est facile de vérifier que :

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = \rho^2.$$

La 3-sphère de rayon ρ hérite de la métrique euclidienne de \mathbf{R}^4 par identification des « éléments d'arc » :

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2$$

et

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Calculons les coefficients g_{ij} de la métrique de la 3-sphère, pour cela posons :

$$\lambda = 1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Pour i variant de 1 à 3, il vient :

$$dy^i = \frac{2\rho dx^i}{\lambda} - \frac{2\rho x^i}{\lambda^2} d\lambda,$$

l'indice $i = 4$ étant à part,

$$dy^4 = \pm \left(-\frac{2\rho}{\lambda^2} d\lambda \right).$$

Sachant que :

$$d\lambda = 2(x^i dx^i)$$

il suffit maintenant de regrouper les résultats précédents pour découvrir l'expression de l'élément d'arc :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4\rho^2}{\lambda^2}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{1}{\lambda^2}[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 1](d\lambda)^2 - \frac{2(x^i dx^i)}{\lambda}d\lambda] \\ &= \frac{4\rho^2}{\lambda^2}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\lambda(d\lambda)^2 - \frac{1}{\lambda}(d\lambda)d\lambda]. \end{aligned}$$

D'où, finalement :

$$ds^2 = \frac{4\rho^2}{\lambda^2}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2].$$

Nous avons ainsi déterminé les coefficients de la métrique de la 3-sphère en coordonnées stéréographiques :

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = \frac{4\rho^2}{[1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^2} \quad \text{et} \quad g_{12} = g_{23} = g_{31} = g_{21} = g_{32} = g_{13} = 0.$$

Les coefficients de la métrique obtenue sont donc :

$$g_{ij} = \frac{4\rho^2}{[1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^2} \delta_{ij}$$

On peut en prendre la racine carrée U symétrique et positive, elle est unique.

$$U = \frac{2\rho}{1 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2} I \quad \text{ou} \quad U_j^i = \frac{2\rho}{\lambda} \delta_j^i.$$

9-2 Tenseur de courbure et tenseur d'Einstein de la 3-sphère

Reprenons le problème dans le contexte de la mécanique des milieux continus avec les notations du chapitre 1. Les coordonnées stéréographiques x^1, x^2, x^3 avec lesquelles nous avons paramétré la 3-sphère peuvent être regardées comme les coordonnées de Lagrange X^1, X^2, X^3 d'un milieu continu. Si on essaie d'intégrer le système aux dérivées partielles

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^i} \delta_{k\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^j} = \frac{4\rho^2}{[1 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2]^2} \delta_{ij}$$

on peut s'attendre à une obstruction : **La courbure ne va pas être nulle.**

Conservons l'hypothèse de la nullité de la torsion qui permet d'appliquer la formule :

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U(\text{Rot}U)U - \frac{1}{2} \text{tr}(U(\text{Rot}U)U)]$$

Les calculs qui se présentent alors sont similaires à ceux que nous avons développés au chapitre 1 pour le cas d'un tenseur de déformation de Green Lagrange droit sphérique. La fonction notée $\rho(X)$ au paragraphe 8 du chapitre 1 est ici remplacée par :

$$f(x) = \frac{2\rho}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} = \frac{2\rho}{\lambda}$$

avec ρ constant. Il vient, en s'appuyant sur les formules établies dans l'annexe B et en remplaçant X par x :

$$\text{Rot}U = j\left(\frac{-4\rho x}{\lambda^2}\right)$$

$$U\text{Rot}U = \frac{2\rho}{\lambda} j\left(\frac{-4\rho x}{\lambda^2}\right) = j\left(-8\frac{\rho^2 x}{\lambda^3}\right)$$

$$\text{tr}[U\text{Rot}U] = 0$$

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} U(\text{Rot}U)U = \frac{\lambda^3}{8\rho^2} \frac{2\rho}{\lambda} j\left(-8\frac{\rho^2 x}{\lambda^3}\right) = j\left(-\frac{2x}{\lambda}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\Lambda^T) &= \text{Rot} j\left(\frac{2x}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{\lambda}\right) - \text{div}\left(\frac{2x}{\lambda}\right)I \\ &= \frac{2}{\lambda} I - x \otimes [\text{grad}\left(\frac{2}{\lambda}\right)]^T - \left[\frac{6}{\lambda} - \frac{4}{\lambda^2} \|x\|^2\right] I \\ &= \left(-\frac{4}{\lambda} + 4\frac{\lambda-1}{\lambda^2}\right) I - \frac{4}{\lambda^2} x \otimes x^T. \end{aligned}$$

Ainsi, le rotationnel de Λ^T s'écrit :

$$\text{Rot}(\Lambda^T) = -\frac{4}{\lambda^2} I - \frac{4}{\lambda^2} x \otimes x^T$$

L'adjuguée de Λ est celle d'une application antisymétrique (Annexe A) :

$$\text{Adj}\Lambda = \text{Adj}\left[j\left(\frac{-2}{\lambda} x\right)\right] = \frac{4}{\lambda^2} x \otimes x^T$$

Comme nous l'avions pressenti la mesure de la courbure,

$$B^T = \text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda$$

n'est pas nulle dans la situation présente

$$B^T = -\frac{4}{\lambda^2} I$$

soit encore, en réintroduisant la valeur de λ :

$$\mathbf{B}^T = -\frac{4}{[1+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^2} \mathbf{I}.$$

Le tenseur de Ricci

$$\mathbf{R} = (\det \mathbf{U})^{-1} [(\text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{U}) \mathbf{I} - (\mathbf{B}^T \mathbf{U}))]$$

est constant, et sphérique :

$$\mathbf{R} = -\frac{2}{\rho^2} \mathbf{I}.$$

Le tenseur d'Einstein

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{\det \mathbf{U}} \mathbf{B}^T \mathbf{U}$$

est aussi constant et sphérique :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\rho^2} \mathbf{I}.$$

10- Conclusion

Les différents points développés au cours de ce chapitre sont intéressants à divers titres.

Il a permis, en dimension 3, de situer, dans le cadre de la géométrie riemannienne, la méthode d'intégration du système d'équations aux dérivées partielles préconisée au chapitre 1. Après avoir montré sa faisabilité par rapport à celle qui met en jeu les coefficients de Christoffel, nous avons dégagé la nature des deux objets E et B présentés comme des matrices au paragraphe 9 du chapitre 1, ces deux matrices ont acquis une nature tensorielle :

- la matrice $\frac{(\text{Adj} \mathbf{U}) \mathbf{E}}{(\det \mathbf{U})^2}$ acquiert le statut de tenseur mixte d'ordre 2 et remplace avantageusement le tenseur de torsion T d'ordre 3.

- la matrice $\frac{(\text{Adj} \mathbf{U}) \mathbf{B}}{(\det \mathbf{U})^2}$ acquiert le statut de tenseur mixte d'ordre 2 et remplace avantageusement le tenseur de courbure K d'ordre 4.

- la matrice $\frac{\mathbf{B}^T \mathbf{U}}{\det \mathbf{U}}$ acquiert le statut de tenseur mixte d'ordre 2 et remplace avantageusement le tenseur de Ricci

$$\mathbf{R} = (\det U)^{-1}[(\operatorname{tr}(\mathbf{B}^T U))\mathbf{I} - (\mathbf{B}^T U)]$$

et le tenseur d'Einstein :

$$\mathbf{S} = -\frac{(\mathbf{B}^T U)}{\det U}.$$

Le tenseur $\frac{\mathbf{B}^T U}{\det U}$ candidate ainsi à mesurer la courbure de l'espace.

N'oublions pas que cette méthode, que nous avons baptisée méthode de Darboux, s'est montrée efficace essentiellement grâce à l'idée d'origine :

Factoriser les coefficients g_{ij} de la métrique g en $U_i^k \delta_{k\ell} U_j^\ell$ où la « racine carrée » U n'est pas nécessairement choisie symétrique.

Nous devons poursuivre cette décomposition lors d'extensions futures. Nous avons déjà abordé cet aspect au paragraphe 9 par la recherche du tenseur d'Einstein de la 3-sphère plongée dans \mathbb{R}^4 . Pour passer d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 à une variété riemannienne de dimension 3, une piste à suivre est de

- conserver la notion de métrique,
- conserver la nullité de la torsion en exprimant Λ en fonction de U par la formule

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U(\operatorname{Rot}(U^T))U - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(U(\operatorname{Rot}(U^T))U)],$$

- renoncer à la rotation R
- renoncer à la nullité de la courbure et la mesurer par la matrice

$$\mathbf{B} = (\operatorname{Rot}(\Lambda^T) + \operatorname{Adj}\Lambda)^T$$

ou bien par le tenseur $\frac{\mathbf{B}^T U}{\det U}$.

Le chapitre 3 suivant est consacré à l'étude des variétés riemanniennes dont le tenseur d'Einstein est le même que celui de la 3-sphère.

Le chapitre 4 sera pour sa part consacré à l'étude de surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 en adaptant la méthode de Darboux [CIA 14].

Chapitre 3

ETUDE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES DE DIMENSION 3 DE MÊME COURBURE QUE LA SPHÈRE

1- Introduction

Le paragraphe 9 du chapitre 2 nous a amené à étudier la 3-sphère. Afin d'analyser ce que l'on peut expérimenter sur les variétés riemanniennes 3D dans l'esprit de la méthode de Darboux, nous allons tenter de répondre à la question suivante :

Quelle sont les variétés riemanniennes de dimension 3 qui ont le même tenseur de courbure que la 3-sphère ?

C'est une question préalable à une question plus générale de Poincaré [POI 1] :

Est-ce que toutes les variétés compactes simplement connexes sont homéomorphes à des sphères ?

Il se trouve que la dimension de la variété pour laquelle la réponse est la plus difficile à mettre en œuvre en géométrie non riemannienne est la dimension 3.

La réponse à la conjecture de Poincaré en dimension 3 a été prouvée récemment par G. Perelman [PER 1], [PER 2], [PER 3] en se basant sur la technique des flots de Ricci. Cette technique imaginée par R. S. Hamilton vient de « l'analyse » par la théorie des équations différentielles [HAM 1, 2]. Elle consiste à munir la variété d'une métrique arbitraire et à faire évoluer cette métrique vers celle de la sphère par le flot des solutions d'une équation différentielle. Sur la conjecture de Poincaré, citons aussi les articles suivants : [AND 1], [CAO 1, 2], [CHO 1], [MIL 1].

Dans le cadre plus restreint d'une variété riemannienne 3D, notre hypothèse de départ revient à supposer le tenseur d'Einstein identique à celui de la 3-sphère de rayon ρ (chapitre 2, paragraphe 9) :

$$S_m^j = \frac{1}{\rho^2} \delta_m^j.$$

Nous espérons que cette application de la méthode de Darboux pourra contribuer dans un avenir plus ou moins proche à une démonstration plus « géométrique » de la conjecture de Poincaré.

2- Formulation de l'hypothèse sur la courbure

Soit \mathcal{V} une variété riemannienne 3D. Notons (X^1, X^2, X^3) un paramétrage de \mathcal{V} et g_{ij} les coefficients de la métrique dans ces paramètres.

Soit U une solution de

$$\delta_{kl} U_i^k U_j^l = g_{ij}.$$

En accord avec l'hypothèse de nullité de la torsion toujours admise en géométrie riemannienne, nous pouvons introduire la matrice Λ solution du système linéaire

$$E^T = \text{Rot}(U^T) + \det U (U^{-1}) [\text{tr}(\Lambda U^{-1}) I - \Lambda U^{-1}] = 0. \quad (2.1)$$

Nous en avons déjà extrait l'expression de Λ en fonction de U et de ses dérivées (chapitre 1, paragraphe 4-3) :

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U \text{Rot}(U^T) U - \frac{1}{2} \text{tr}(U (\text{Rot}(U^T)) U)]. \quad (2.2)$$

La version mixte du tenseur d'Einstein se calcule facilement à partir de la matrice $B^T = \text{Rot} \Lambda^T + \text{Adj} \Lambda$ (chapitre 2, paragraphe 8) :

$$S = -\frac{1}{\det U} B^T U.$$

Notre hypothèse de départ sur la courbure est donc :

$$-\frac{B^T U}{\det U} = \frac{1}{\rho^2} I.$$

Elle est équivalente à :

$$-B^T \frac{U}{\rho} = (\det \frac{U}{\rho}) I$$

ou encore à :

$$B^T = -\text{Adj} \frac{U}{\rho}.$$

En résumé, nous cherchons donc les métriques g qui satisfont la condition sur la courbure

$$\boxed{\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda + \text{Adj}\frac{U}{\rho} = 0} \quad (2.3)$$

où U est une « racine carrée » de la métrique et Λ la solution (2.2) de la condition (2.1) de nullité de la torsion.

3- Application de la méthode de Darboux au cas où, en plus de la condition sur la courbure, la métrique est supposée sphérique

Supposons, en plus de la condition (2.3) sur la courbure, que les composantes de la métrique soient de la forme sphérique

$$g_{ij} = \frac{4\rho^2}{\lambda^2} \delta_{ij}$$

où λ est une fonction scalaire strictement positive des paramètres (X^1, X^2, X^3) .

Afin d'expérimenter la faisabilité de la méthode de Darboux, essayons de vérifier, dans ce cas particulier, que la variété est bien une 3-sphère.

La racine carrée U choisie symétrique et défini-positive de g est :

$$U = \frac{2\rho}{\lambda} I.$$

Cette racine carrée doit satisfaire à la condition de nullité de la torsion :

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U \text{Rot}(U^T)U - \frac{1}{2} \text{tr}(U(\text{Rot}U^T))U]$$

et à la condition sur la courbure :

$$\text{Adj}\Lambda + \text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\frac{U}{\rho} = 0$$

3-1 Construction de Λ et satisfaction de la condition sur la courbure

Les calculs se déroulent de la façon suivante :

$$\text{Rot } U = -\frac{2\rho}{\lambda} j(\text{grad } \lambda)$$

$$U \text{ Rot } U = -\frac{4\rho^2}{\lambda^3} j(\text{grad } \lambda).$$

Cette dernière matrice étant antisymétrique, sa trace est nulle, et l'expression de Λ se réduit à :

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} U (\text{Rot } U) U$$

soit

$$\Lambda = -\frac{1}{\lambda} j(\text{grad } \lambda) = -j(\text{grad}(\ln \lambda))$$

Examinons maintenant ce qu'implique la condition sur la courbure

$$\text{Adj } \Lambda + \text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj} \frac{U}{\rho} = 0$$

pour la fonction λ . Il vient :

$$\text{Adj}\left(\frac{U}{\rho}\right) = \frac{4}{\lambda^2} I, \quad \text{Adj } \Lambda = \frac{1}{\lambda^2} (\text{grad } \lambda) \otimes (\text{grad } \lambda)^T$$

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\Lambda^T) &= \frac{\partial}{\partial X} (\text{grad}(\ln \lambda)) - \Delta(\ln \lambda) I \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial X} (\text{grad } \lambda) - \frac{1}{\lambda^2} (\text{grad } \lambda) \otimes (\text{grad } \lambda)^T - \Delta(\ln \lambda) I \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial X} (\text{grad } \lambda) - \frac{1}{\lambda^2} (\text{grad } \lambda) \otimes (\text{grad } \lambda)^T - \left[\frac{1}{\lambda} \Delta(\lambda) I + \frac{1}{\lambda^2} \|\text{grad } \lambda\|^2 I \right] \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les notations Δ , $\|\cdot\|$, \otimes , pour représenter respectivement le Laplacien, la norme euclidienne et le produit tensoriel associés à la métrique.

Satisfaire la condition de courbure revient alors à imposer à la fonction λ de satisfaire l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{1}{\lambda^2} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial X} (\text{grad } \lambda) + (4 + \|\text{grad } \lambda\|^2 - \lambda \Delta \lambda) I \right] = 0.$$

Multiplions par λ^2 et posons $V = \text{grad } \lambda$, l'équation devient :

$$\lambda \frac{\partial V}{\partial X} + (4 + \|V\|^2 - \lambda \text{div } V)I = 0. \quad (3.1.1)$$

En prendre la trace nous permet d'établir un lien entre la divergence de V et le carré de la norme de V

$$\|V\|^2 + 4 = \frac{2}{3} \lambda \text{div } V \quad (3.1.2)$$

ce qui nous incite à remplacer $\|V\|^2$ dans l'équation (3.1.1) et à transformer cette équation aux dérivées partielles non linéaire en l'équation aux dérivées partielles linéaire :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{1}{3} (\text{div } V)I} \quad (3.1.3)$$

La résolution de l'équation est maintenant relativement simple. Le gradient de V est sphérique, il est donc en particulier symétrique. L'identité

$$\text{Rot}\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T = 0$$

implique

$$\text{Rot}[(\text{div } V)I] = 0$$

soit encore, en se référant à la propriété B-5-5 de l'Annexe B :

$$j(\text{grad}(\text{div } V)) = 0.$$

La divergence de V est donc constante. Posons

$$\text{div } V = 6c.$$

La constante c est strictement positive à cause de (3.1.2). L'équation aux dérivées partielles (3.1.3) se transforme en :

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 2cI$$

ce qui permet d'affirmer que V est de la forme :

$$V = 2c(X + H)$$

où H désigne un vecteur constant.

Maintenant que le champ de vecteur V est déterminé, nous pouvons remonter à la forme de la fonction λ . L'intégration de $V = \text{grad } \lambda$ conduit à une forme quadratique pour la fonction λ

$$\lambda(X) = c[\langle X, X \rangle + 2\langle H, X \rangle] + c_0$$

où l'on a noté \langle, \rangle le produit scalaire euclidien associé à la métrique δ_{ij} et c_0 une constante. Mais cette forme de la fonction λ assure seulement que le champ de vecteurs V est solution du système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{1}{3}(\operatorname{div} V)I.$$

Il ne faut pas oublier la relation (3.1.2) qui devient :

$$\|V\|^2 + 4 = 4\lambda c$$

et implique :

$$\lambda = \frac{1}{c} + c\|X + H\|^2.$$

Cette dernière expression de λ détermine la valeur de la constante c_0 :

$$c_0 = \frac{1}{4c}(4 + \|H\|)^2.$$

La fonction λ , satisfaisant à la condition de nullité de la torsion et à la condition sur la courbure, prend donc la forme suivante :

$$\lambda(X) = \frac{1}{c}(1 + c^2\|X + H\|^2)$$

où H est un vecteur constant et c un scalaire constant.

3-2 Changement de paramètres

Préférons aux paramètres X^1, X^2, X^3 , les paramètres x^1, x^2, x^3 définis par la relation

$$x = c(X + H).$$

L'expression de la fonction λ devient :

$$\lambda(x) = \frac{1}{c}(1 + \langle x, x \rangle).$$

Dans les nouveaux paramètres x^1, x^2, x^3 , les nouveaux coefficients g'_{ij} de la métrique sont tels que :

$$c^2 g'_{ij} = g_{ij} = \frac{4\rho^2}{\lambda^2} \delta_{ij}.$$

Ainsi :

$$g'_{ij} = \frac{4\rho^2}{(c\lambda)^2} \delta_{ij} = \frac{4\rho^2}{(1 + \langle x, x \rangle)^2} \delta_{ij}$$

et l'on reconnaît la métrique de la 3-sphère de rayon ρ paramétrée par les coordonnées stéréographiques.

4- Association d'une rotation à un changement de paramètres

Soit x^1, x^2, x^3 un autre paramétrage de \mathcal{V} . Avec ces nouveaux paramètres, les nouveaux coefficients g'_{ij} de la métrique sont liés aux anciens par la formule :

$$g'_{k\ell} \frac{\partial x^k}{\partial X^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial X^j} = g_{ij} \quad (4.1)$$

Comme nous l'avons fait pour les coefficients g_{ij} nous pouvons aussi trouver une solution U' de :

$$g'_{k\ell} = \delta_{mn} U_k'^m U_\ell'^n \quad (4.2)$$

En insérant les définitions de U et U' dans l'identité (4.1), nous obtenons

$$\delta_{mn} (U_k^m \frac{\partial x^k}{\partial X^i}) (U_\ell^n \frac{\partial x^\ell}{\partial X^j}) = \delta_{mn} U_i^m U_j^n$$

que l'on peut aussi écrire en utilisant la notation du produit matriciel :

$$\delta_{mn} (U' \frac{\partial x}{\partial X})_i^m (U' \frac{\partial x}{\partial X})_j^n = \delta_{mn} U_i^m U_j^n$$

ou bien encore, puisque U est inversible :

$$\delta_{mn} (U' \frac{\partial x}{\partial X} U^{-1})_i^m (U' \frac{\partial x}{\partial X} U^{-1})_j^n = \delta_{ij}.$$

Ainsi le produit $(U' \frac{\partial x}{\partial X} U^{-1})$ correspond à une rotation Ω et

$$\boxed{U' \frac{\partial x}{\partial X} = \Omega U}$$

Puisque Ω est une rotation, il existe un champ d'applications linéaires A telle que :

$$d\Omega = \Omega j(\text{Ad}X).$$

N'oublions pas que la condition d'intégrabilité de cette équation aux dérivées partielles est :

$$\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0.$$

5- Transformation du problème en une condition de compatibilité d'un système aux dérivées partielles

Soit \mathcal{V} une variété riemannienne de dimension 3 dont on connaît les coefficients g_{ij} de la métrique dans un paramétrage X^1, X^2, X^3 . Savoir si cette variété est une 3-sphère revient à savoir s'il existe un changement de paramétrage tel que, dans les nouveaux paramètres x^1, x^2, x^3 , les nouveaux coefficients g'_{ij} de la métrique soient ceux d'une sphère en coordonnées stéréographiques. Notons U et U' des solutions inversibles de

$$U_i^k \delta_{k\ell} U_j^\ell = g_{ij}$$

$$U_i'^k \delta_{k\ell} U_j'^\ell = g'_{ij}.$$

Nous avons vu qu'on pouvait choisir $U' = \frac{2\rho}{\lambda} I$ avec $\lambda = 1 + \langle x, x \rangle$ et qu'il existait une rotation $\Omega(X)$ telle que

$$U' \frac{\partial x}{\partial X} = \Omega U.$$

Autrement dit

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\lambda}{2\rho} \Omega U.$$

Nous pouvons donc ramener le problème de géométrie riemannienne initialement posé à une question de compatibilité d'un système aux dérivées partielles :

« Le système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}{2\rho} \Omega U \quad (5.1)$$

est-il intégrable ? »

5-1 Condition de compatibilité associée à l'intégrabilité du système (5.1)

Nous pouvons réécrire le système aux dérivées partielles (5.1) sous la forme

$$dx = \frac{1+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}{2\rho} \Omega U dX \quad (5.1.1)$$

La réponse à la question de son intégrabilité se traduit par la symétrie des dérivées secondes croisées de x :

$$\delta(dx) = d(\delta x)$$

comme nous en avons pris l'habitude au cours des chapitres précédents.

Commençons par effectuer la variation seconde $\delta(dx)$:

$$\delta(dx) = \delta\left(\frac{1+\langle x, x \rangle}{2\rho} \Omega U dX\right) = \frac{\langle \delta x, x \rangle}{\rho} \Omega U dX + \frac{1+\langle x, x \rangle}{2\rho} (\delta\Omega U + \Omega \delta U) dX.$$

Les variations de la rotation étant de la forme $\delta\Omega = \Omega j(A\delta X)$ nous sommes amenés à l'expression suivante de $\delta(dx)$:

$$\begin{aligned} \delta(dx) &= \frac{\langle \delta x, x \rangle}{\rho} \Omega U dX + \frac{1+\langle x, x \rangle}{2\rho} \Omega (j(A\delta X) U + \delta U) dX \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{1+\langle x, x \rangle}{2\rho} \langle \Omega U \delta X, x \rangle \Omega U dX + \frac{1+\langle x, x \rangle}{2\rho} \Omega (j(A\delta X) U + \delta U) dX \end{aligned}$$

soit, après factorisation par λ et Ω :

$$\delta(dx) = \frac{\lambda}{2\rho} \Omega \left[\frac{1}{\rho} \langle \Omega U \delta X, x \rangle U dX + (j(A\delta X) U + \delta U) dX \right].$$

La variation seconde $d(\delta x)$ s'obtient en échangeant d et δ dans la relation précédente. Égalons les deux variations secondes obtenues en oubliant le facteur multiplicatif $\frac{\lambda}{2\rho}$ non nul et la rotation inversible Ω .

$$\frac{1}{\rho} [\langle \Omega U \delta X, x \rangle U dX - \langle \Omega U dX, x \rangle U \delta X] + [j(A\delta X) U dX - j(AdX) U \delta X] + [\delta U dX - dU \delta X] = 0$$

Le premier membre de la relation ci-dessus est la somme de trois termes :

- le dernier terme se transforme grâce à la généralisation du rotationnel

$$\delta U dX - dU \delta X = (\text{Rot}(U))^T (\delta X \wedge dX)$$

- le deuxième terme se transforme grâce à la propriété A-8-9 de l'Annexe A

$$\begin{aligned} j(A\delta X)UdX - j(AdX)U\delta X &= (A\delta X) \wedge (UdX) + (U\delta X) \wedge (AdX) \\ &= [\text{tr}(AU^{-1})I - (AU^{-1})^T](AdjU)^T(\delta X \wedge dX) \end{aligned}$$

- le premier terme se transforme grâce à la formule du double produit vectoriel bien connue en mécanique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}[\langle \Omega U \delta X, x \rangle U dX - \langle \Omega U dX, x \rangle U \delta X] &= \frac{1}{\rho}[\langle U \delta X, \Omega^T x \rangle U dX - \langle U dX, \Omega^T x \rangle U \delta X] \\ &= \frac{1}{\rho}(\Omega^T x) \wedge [(U dX) \wedge (U \delta X)] \\ &= \frac{1}{\rho}(\Omega^T x) \wedge [(AdjU)^T(dX \wedge \delta X)] \end{aligned}$$

d'où la transformation :

$$\frac{1}{\rho}[\langle \Omega U \delta X, x \rangle U dX - \langle \Omega U dX, x \rangle U \delta X] = -\frac{1}{\rho}j(\Omega^T x)(AdjU)^T(\delta X \wedge dX).$$

Il reste à rassembler ces 3 nouvelles expressions et à oublier le vecteur $(\delta X \wedge dX)$:

$$[\text{tr}(AU^{-1})I - (AU^{-1})^T - j(\frac{\Omega^T x}{\rho})](AdjU)^T + (\text{Rot}(U^T))^T = 0.$$

Finalement, nous pouvons conclure que l'intégrabilité du système aux dérivées partielles

$$dx = \frac{1 + \langle x, x \rangle}{2\rho} \Omega U dX$$

est conditionnée par la condition de compatibilité que devront satisfaire A, U et x :

$$[\text{tr}(AU^{-1})I - (AU^{-1})^T - j(\frac{\Omega^T x}{\rho})](AdjU)^T + (\text{Rot}(U^T))^T = 0 \quad (5.1.2)$$

Nous avons vu différentes variantes pour traduire la nullité de la torsion, choisissons celle présentée à la formule (2.1) :

$$\text{Rot}(U^T) + AdjU[\text{tr}(\Lambda U^{-1})I - \Lambda U^{-1}] = 0.$$

Elle fournit une expression du rotationnel de U^T qui permet de transformer la condition d'intégrabilité (5.1.2) en une condition complètement algébrique. Après simplification à droite par $(AdjU)^T$, la condition d'intégrabilité devient :

$$[\text{tr}(AU^{-1})I - (AU^{-1})^T - j(\frac{\Omega^T x}{\rho})] - [\text{tr}(\Lambda U^{-1})I - (\Lambda U^{-1})^T] = 0$$

ou encore

$$j\left(\frac{\Omega^T x}{\rho}\right) = (A - \Lambda)U^{-1} - \text{tr}((A - \Lambda)U^{-1})I \quad (5.1.3)$$

Examinons cette condition. Le membre de gauche de l'égalité est visiblement antisymétrique donc de trace nulle ce qui implique que $\text{tr}((A - \Lambda)U^{-1})$ soit nulle et que la relation (5.1.3) s'écrive plus simplement

$$j\left(\frac{\Omega^T x}{\rho}\right) = (A - \Lambda)U^{-1} \quad (5.1.4)$$

A ce point du raisonnement, la relation (5.1.4) nous permet d'affirmer l'existence d'un champ de vecteur W tel que :

$$\boxed{A = \Lambda + j(W)U} \quad (5.1.5)$$

et que les nouveaux paramètres x sont liés au champ W par :

$$\boxed{x = \rho\Omega W}.$$

La matrice Ω étant une rotation, il vient :

$$\langle x, x \rangle = \rho^2 \langle W, W \rangle$$

et nous pouvons exprimer la fonction λ en fonction de W au lieu de x

$$\boxed{\lambda = 1 + \rho^2 \langle W, W \rangle}.$$

Le problème initial concernait la résolution du système aux dérivées partielles

$$dx = \frac{1 + \langle x, x \rangle}{2\rho} \Omega U dX \quad (5.1.1)$$

où Ω était une rotation inconnue.

L'intégrabilité de ce système vient de mettre en évidence un vecteur W . Si on connaît le vecteur W et la rotation Ω , on connaîtra x par la formule

$$x = \rho\Omega W \quad (5.1.6)$$

Nous allons adapter la stratégie suivante :

- déterminer W ,
- déterminer Ω ,
- calculer x .

Commençons par traduire le système différentiel (5.1.1) en profitant de l'expression (5.1.6) de x .

5-2 Système aux dérivées partielles satisfait par W

Reprenons le système différentiel (5.1.1) en y remplaçant x par $\rho\Omega W$. Il devient :

$$\rho d(\Omega W) = \frac{\lambda}{2\rho} \Omega U dX$$

puis, en utilisant la définition de A :

$$\rho\Omega dW = \Omega[-\rho j(\text{Ad}X)W + \frac{\lambda}{2\rho} U]dX.$$

En simplifiant par Ω et en divisant par ρ , nous obtenons :

$$dW = j(W)A dX + \frac{\lambda}{2\rho^2} U dX.$$

Le vecteur W est donc solution du système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial W}{\partial X} = j(W)A + \frac{\lambda}{2\rho^2} U.$$

Remarquons que nous avons réussi à découpler la recherche de W de la recherche de Ω puisqu'alors que la rotation Ω figurait dans l'équation aux dérivées partielles satisfaite par x , elle ne figure plus dans l'équation aux dérivées partielles satisfaite par W .

Nous sommes de nouveau confrontés à une question de compatibilité qui s'énonce comme suit :

Quelles conditions de compatibilité doivent satisfaire U et A pour que le système aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial W}{\partial X} = j(W)A + \frac{\lambda}{2\rho^2} U \tag{5.2.1}$$

soit intégrable lorsque $\lambda = 1 + \rho^2 \langle W, W \rangle$ et $A = \Lambda + j(W)U$?

Afin de préparer l'étude de l'intégrabilité des systèmes différentiels satisfaits par W et Ω , nous allons commencer par calculer $\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A$.

6- Calcul de Rot (A^T) + Adj(A) quand A = Λ + j(W)U

Avant de calculer la somme

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Rot}[(j(W)U)^T] + \text{Adj}[\Lambda + j(W)U]$$

nous allons successivement calculer :

- le rotationnel de $(j(W)U)^T$,
- l'adjuguée de $\Lambda + j(W)U$.

6-1 Expression du rotationnel de $(j(W)U)^T$ en fonction de $\frac{\partial W}{\partial X}$

Partons de la propriété B-4-2 de l'Annexe B. Pour deux variations δX et dX :

$$[\text{Rot}((j(W)U)^T)]^T (\delta X \wedge dX) = \delta(j(W)U)dX - d(j(W)U)\delta X.$$

Développons la différence située au second membre de l'égalité.

$$\begin{aligned} \delta[W \wedge (UdX)] - d[W \wedge (U\delta X)] &= (\delta W) \wedge (UdX) - (dW) \wedge (U\delta X) + W \wedge (\delta U dX - dU \delta X) \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial X} \delta X\right) \wedge (UdX) - \left(\frac{\partial W}{\partial X} dX\right) \wedge (U\delta X) + j(W)(\delta U dX - dU \delta X). \end{aligned}$$

D'une part,

$$\delta U dX - dU \delta X = [\text{Rot}(U^T)]^T (\delta X \wedge dX)$$

grâce encore à la propriété B-4-2 de l'annexe B.

D'autre part, d'après la propriété A-8-9 de l'annexe A,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial X} \delta X\right) \wedge (UdX) + (U\delta X) \wedge \left(\frac{\partial W}{\partial X} dX\right) = \left\{ (\text{Adj}U) \left[\text{tr} \left(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} \right) I - \frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} \right] \right\}^T (\delta X \wedge dX).$$

En reportant ces deux factorisations dans le calcul en attente, nous mettons en évidence le produit vectoriel $\delta X \wedge dX$

$$\delta[W \wedge (UdX)] - d[W \wedge (U\delta X)] = \left\{ (\text{Adj}U) \left[\text{tr} \left(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} \right) I - \frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} \right] - [\text{Rot}(U^T)] j(W) \right\}^T (\delta X \wedge dX)$$

Ainsi, nous pouvons conclure au résultat intermédiaire

$$\boxed{\text{Rot}[(j(W)U)^T] = (\text{Adj}U) \left[\text{tr} \left(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} \right) I - \frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} \right] - [\text{Rot}(U^T)] j(W)} \quad (6.1.1)$$

où il reste à remplacer $\frac{\partial W}{\partial X}$ par son expression (5.2.1).

6-2 Expression de $\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}$

Nous n'avons pas encore invoqué l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (5.2.1) satisfaite par W

$$\frac{\partial W}{\partial X} = j(W)[\Lambda + j(W)U] + \frac{1 + \rho^2 \langle W, W \rangle}{2\rho^2} U.$$

Nous en déduisons

$$\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} = j(W)\Lambda U^{-1} + (j(W))^2 + \frac{1 + \rho^2 \langle W, W \rangle}{2\rho^2} I.$$

La propriété A-7-2 de l'Annexe A permet de remplacer le carré de $j(W)$ par :

$$(j(W))^2 = W \otimes W^T - \langle W, W \rangle I.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} = j(W)\Lambda U^{-1} + W \otimes W^T - \langle W, W \rangle I + \frac{1 + \rho^2 \langle W, W \rangle}{2\rho^2} I$$

ou bien encore

$$\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} = j(W)\Lambda U^{-1} + W \otimes W^T + \left(\frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{2} \langle W, W \rangle\right) I. \quad (6.2.1)$$

Nous pouvons maintenant prendre la trace de $\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}$:

$$\text{tr}\left(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}\right) = \text{tr}[j(W)\Lambda U^{-1}] + \langle W, W \rangle + \frac{3}{2\rho^2} - \frac{3}{2} \langle W, W \rangle$$

soit :

$$\text{tr}\left(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}\right) = \text{tr}[j(W)\Lambda U^{-1}] + \frac{3}{2\rho^2} - \frac{1}{2} \langle W, W \rangle \quad (6.2.2)$$

6-3 Expression de $\text{tr}\left(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}\right) I - \frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}$

En soustrayant les résultats obtenus en (6.2.1) et (6.2.2), nous obtenons la valeur de la contribution de $\frac{\partial W}{\partial X}$ dans (6.1.1) :

$$\left[\text{tr}\left(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}\right)\right] I - \frac{\partial W}{\partial X} U^{-1} = \left[\text{tr}(j(W)\Lambda U^{-1})\right] I - j(W)\Lambda U^{-1} + \frac{1}{\rho^2} I - W \otimes W^T \quad (6.3.1)$$

6-4 Expression de Rot (j(W)U)^T en fonction de W

Reportons dans (6.1.1) la valeur de $\text{tr}\left(\frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}\right) I - \frac{\partial W}{\partial X} U^{-1}$ obtenue en (6.3.1) :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Rot}[(j(W)U)^T] &= (\text{Adj}U) \left[\left(\text{tr}(j(W)\Lambda U^{-1}) + \frac{1}{\rho^2} \right) I - (j(W)\Lambda U^{-1} + W \otimes W^T) \right] \\ &\quad - [\text{Rot}(U^T)](j(W)) \end{aligned}} \quad (6.4.1)$$

6-5 Expression de Adj (Λ + j(W)U)

Le calcul du rotationnel de $[j(W)U]^T$ a fait apparaître le groupement ΛU^{-1} . Dans un premier temps, nous allons développer l'adjuguée de $\Lambda + j(W)U$ en mettant aussi en évidence ce groupement. Appliquons la propriété A-8-3 de l'Annexe A :

$$\text{Adj}(\Lambda + j(W)U) = \text{Adj}[(\Lambda U^{-1} + j(W))U] = (\text{Adj}U)\text{Adj}(\Lambda U^{-1} + j(W)).$$

Ainsi (AdjU) s'est mis en facteur à gauche et nous espérons faire apparaître, dans le développement de l'adjuguée de $\Lambda U^{-1} + j(W)$, des termes communs aux facteurs placés à droite de AdjU dans (6.4.1).

Il nous reste à calculer l'adjuguée de $\Lambda U^{-1} + j(W)$. Soient Y et Z deux vecteurs constants, la définition de l'adjuguée (A-8-1, Annexe A) implique

$$\begin{aligned} [\text{Adj}((\Lambda U^{-1} + j(W)))^T (Y \wedge Z)] &= [(\Lambda U^{-1} + j(W))Y] \wedge [(\Lambda U^{-1} + j(W))Z] \\ &= [\text{Adj}(\Lambda U^{-1}) + \text{Adj}(j(W))]^T (Y \wedge Z) \\ &\quad + [j(W)Y] \wedge (\Lambda U^{-1}Z) + (\Lambda U^{-1}Y) \wedge [j(W)Z] \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

La propriété A-7-7 de l'Annexe A permet de poser

$$[j(W)Y] \wedge (\Lambda U^{-1}Z) + (\Lambda U^{-1}Y) \wedge [j(W)Z] = M^T (Y \wedge Z)$$

en introduisant la matrice

$$M = [-\text{tr}(j(W)\Lambda U^{-1}) + \text{tr}(j(W))\text{tr}(\Lambda U^{-1})]I \\ - [\text{tr}(j(W))\Lambda U^{-1} - [\text{tr}(\Lambda U^{-1})]j(W) + j(W)\Lambda U^{-1} + \Lambda U^{-1}j(W)]$$

qui se simplifie en

$$M = j(W)\Lambda U^{-1} - \text{tr}[j(W)\Lambda U^{-1}]I + \{\Lambda U^{-1} - [\text{tr}(\Lambda U^{-1})]I\}j(W)$$

car la trace de $j(W)$ est nulle.

Nous obtenons ainsi, en oubliant le vecteur $Y \wedge Z$ dans (6.5.1) :

$$\text{Adj}(\Lambda U^{-1} + j(W)) = \text{Adj}(\Lambda U^{-1}) + \text{Adj}(j(W)) + M .$$

La propriété (A-8-5) de l'Annexe A permet de remplacer l'adjuguée de $j(W)$ par $W \otimes W^T$, ainsi :

$$\text{Adj}(\Lambda U^{-1} + j(W)) = \text{Adj}(\Lambda U^{-1}) + W \otimes W^T + M .$$

En multipliant à gauche par $\text{Adj}U$ et en utilisant à nouveau la propriété A-8-3, nous obtenons finalement :

$$\boxed{\text{Adj}(\Lambda + j(W)U) = \text{Adj}\Lambda + (\text{Adj}U)[W \otimes W^T + j(W)\Lambda U^{-1} - \text{tr}(j(W)\Lambda U^{-1})I] \\ + (\text{Adj}U)[\Lambda U^{-1} - \text{tr}(\Lambda U^{-1})I]j(W)} \quad (6.5.2)$$

6-6 Sur la nullité de $\text{Rot}[(\Lambda + j(W)U)^T] + \text{Adj}(\Lambda + j(W)U)$

La somme des expressions (6.4.1) et (6.5.2) de $\text{Rot}[(j(W)U)^T]$ et $\text{Adj}(\Lambda + j(W)U)$ obtenues aux paragraphes 6.4 et 6.5 permet de calculer $\text{Rot}(A)^T + \text{Adj}A$:

$$\boxed{\text{Rot}(\Lambda + j(W)U)^T + \text{Adj}(\Lambda + j(W)U) = \text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda + \frac{1}{\rho^2} \text{Adj}U \\ + \{-\text{Rot}(U^T) + (\text{Adj}U)[\Lambda U^{-1} - [\text{tr}(\Lambda U^{-1})]I]\}j(W)} \quad (6.6.1)$$

Examinons le second membre de la formule (6.6.1). D'une part la somme des trois premiers termes est nulle grâce à la **condition sur la courbure**. D'autre part, le terme en facteur de $j(W)$ est nul grâce à la **condition de nullité de la torsion** écrite sous la forme :

$$-\text{Rot}(U^T) + (\text{Adj}U)\Lambda U^{-1} - [\text{tr}(\Lambda U^{-1})](\text{Adj}U) = 0 .$$

Nous avons donc prouvé que les conditions sur la courbure et sur la torsion impliquent

$$\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0$$

quand $A = \Lambda + j(W)U$.

7- Existence du champ de vecteurs W

7-1 Variations de λ

Les variations de $\lambda = 1 + \rho^2 \langle W, W \rangle$ mettent en jeu les variations de W

$$d\lambda = 2\rho^2 \langle dW, W \rangle = \lambda \langle UdX, W \rangle + 2\rho^2 \langle W \wedge AdX, W \rangle = \lambda \langle UdX, W \rangle.$$

Nous serons donc en mesure, dans des développements ultérieurs, d'exprimer les variations de λ sous la forme :

$$\boxed{d\lambda = \lambda \langle UdX, W \rangle}.$$

7-2 Symétrie des dérivées secondes de W

À partir du système

$$dW = \frac{\lambda}{2\rho^2} UdX + W \wedge (AdX) \quad (7.2.1)$$

évaluons la différence $\delta(dW) - d(\delta W)$ des dérivées secondes de W

$$\begin{aligned} \delta dW - d\delta W &= \frac{1}{2\rho^2} [\delta\lambda(UdX) - d\lambda(U\delta X)] + \frac{\lambda}{2\rho^2} [\delta UdX - dU\delta X] \\ &\quad + W \wedge (\delta AdX - dA\delta X) + (\delta W) \wedge (AdX) - (dW) \wedge (A\delta X) \end{aligned}$$

dans laquelle nous introduisons les variations de λ

$$\begin{aligned} \delta dW - d\delta W &= \frac{\lambda}{2\rho^2} [\langle U\delta X, W \rangle UdX - \langle UdX, W \rangle U\delta X] + \frac{\lambda}{2\rho^2} [\delta UdX - dU\delta X] \\ &\quad + W \wedge (\delta AdX - dA\delta X) + (\delta W) \wedge (AdX) - (dW) \wedge (A\delta X) \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Le deuxième membre de (7.2.2) est une somme de quatre termes :

- le premier terme est un double produit vectoriel

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2\rho^2} [\langle U\delta X, W \rangle UdX - \langle UdX, W \rangle U\delta X] &= \frac{\lambda}{2\rho^2} (W \wedge [(UdX) \wedge (U\delta X)]) \\ &= -\frac{\lambda}{2\rho^2} j(W)(AdjU)^T (\delta X \wedge dX) \\ &= \frac{\lambda}{2\rho^2} [(AdjU)j(W)]^T (\delta X \wedge dX) \end{aligned}$$

- le deuxième terme met en jeu le rotationnel de U^T

$$\frac{\lambda}{2\rho^2}[\delta U dX - dU \delta X] = \frac{\lambda}{2\rho^2}(\text{Rot}(U^T))^T(\delta X \wedge dX)$$

- le troisième terme met en jeu le rotationnel de A^T

$$j(W)(\delta A dX - dA \delta X) = j(W)(\text{Rot}(A^T))^T(\delta X \wedge dX)$$

- le dernier terme

$$(\delta W) \wedge (AdX) - (dW) \wedge (A\delta X)$$

est plus complexe, il faut y remplacer dW et δW par leurs expressions données par (7.2.1).
Effectuons ces remplacements :

$$\begin{aligned} (\delta W) \wedge (AdX) - (dW) \wedge (A\delta X) &= \frac{\lambda}{\rho^2}[(U\delta X) \wedge (AdX) - (UdX) \wedge (A\delta X)] \\ &\quad + [W \wedge (A\delta X)] \wedge (AdX) - [W \wedge (AdX)] \wedge (A\delta X). \end{aligned}$$

Nous avons déjà rencontré une expression du type

$$(U\delta X) \wedge (AdX) + (A\delta X) \wedge (UdX)$$

elle se transforme en :

$$[\text{tr}(AU^{-1})I - (AU^{-1})^T][(\text{Adj}U)^T(\delta X \wedge dX)] = \left\{ (\text{Adj}U)[\text{tr}(AU^{-1})I - AU^{-1}] \right\}^T(\delta X \wedge dX).$$

C'est encore la propriété A-8-9 de l'Annexe A qui nous a été utile ici.

L'identité de Jacobi (propriété A-2-2) ainsi que la propriété A-8-1 de l'Annexe A permettent de remplacer la somme des deux double-produits vectoriels

$$[W \wedge (A\delta X)] \wedge (AdX) - [W \wedge (AdX)] \wedge (A\delta X)$$

par le double produit vectoriel unique

$$-[(A\delta X) \wedge (AdX)] \wedge W = W \wedge [(A\delta X) \wedge (AdX)] = j(W)(\text{Adj}A)^T(\delta X \wedge dX).$$

Le dernier terme de la somme se simplifie donc à son tour en :

$$\left\{ \frac{\lambda}{2\rho^2}[(\text{Adj}U)[(\text{tr}(AU^{-1})I - AU^{-1})]^T + j(W)(\text{Adj}A)^T] \right\}(\delta X \wedge dX).$$

La somme des quatre termes que nous venons de simplifier permet d'obtenir la différence $\delta dW - d\delta W$. Le vecteur $(\delta X \wedge dX)$ peut se factoriser à droite :

$$\delta dW - d\delta W =$$

$$\left\{ \frac{\lambda}{2\rho^2} [(\text{Adj}U)j(W) + \text{Rot}(U^T) + (\text{Adj}U)(\text{tr}(AU^{-1})I - AU^{-1})]^T + j(W)[\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A]^T \right\} (\delta X \wedge dX)$$

Il ne faut pas oublier la relation

$$A = \Lambda + j(W)U$$

qui permet de remplacer AU^{-1} par $\Lambda U^{-1} + j(W)$ et $\text{tr}(AU^{-1})$ par $\text{tr}(\Lambda U^{-1})$.

Dans les termes en facteur de $\frac{\lambda}{2\rho^2}$, les produits $(\text{Adj}U)j(W)$ vont s'annihiler. Par suite :

$$\delta dW - d\delta W = \left\{ \frac{\lambda}{2\rho^2} [\text{Rot}(U^T) + (\text{Adj}U)(\text{tr}(\Lambda U^{-1})I - \Lambda U^{-1})]^T + j(W)[\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A]^T \right\} (\delta X \wedge dX)$$

Nous avons vu au paragraphe 6 que le champ A satisfait la condition

$$\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0.$$

D'autre part, une version de la nullité de la torsion est :

$$\text{Rot}(U^T) + \text{Adj}U[\text{tr}(\Lambda U^{-1})I - \Lambda U^{-1}] = 0.$$

La différence $\delta dW - d\delta W$ est donc nulle. Les dérivées secondes de W sont donc symétriques.

7-3 Bilan de l'étude sur l'existence du champ de vecteurs W

Il n'y a pas d'obstruction à l'intégration du système aux dérivées partielles

$$\frac{\partial W}{\partial X} = j(W)\Lambda + (j(W))^2 U + \frac{1 + \rho^2 \langle W, W \rangle}{2\rho^2} U.$$

L'existence du champ de vecteurs W est assurée par le théorème de Frobenius [DIE 1] sans autres conditions que

- la nullité de la torsion,
- la condition sur la courbure.

8- Existence du champ de rotation Ω

Le système aux dérivées partielles

$$d\Omega = \Omega j(\text{Ad}X)$$

est intégrable car la condition de Frobenius

$$\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0 \quad (8.1)$$

est satisfaite. En effet, sous la condition de courbure

$$\text{Adj}\Lambda + \text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\frac{U}{\rho} = 0$$

et sous la condition de nullité de la torsion

$$\text{Rot}(U^T) + (\text{Adj}U)[\text{tr}(\Lambda U^{-1})I - \Lambda U^{-1}] = 0.$$

La condition (8.1) a déjà été vérifiée au paragraphe 6.6 pour $A = \Lambda + j(W)U$ et W solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial W}{\partial X} = j(W)A + \frac{1 + \rho^2 \langle W, W \rangle}{2\rho^2} U.$$

L'existence du champ de rotations Ω est assurée par le théorème de Frobenius.

9- Conclusion

Résumons le chemin parcouru. Étant donné une variété riemannienne \mathcal{V} de dimension 3 dont les coefficients g_{ij} de la métrique dans un paramétrage X^1, X^2, X^3 sont tels que le tenseur d'Einstein soit celui d'une 3-sphère de rayon ρ

$$S_j^i = \frac{1}{\rho^2} \delta_j^i$$

on peut franchir successivement les étapes suivantes :

1^{ère} étape

Calculer U solution de :

$$\delta_{k\ell} U_i^k U_j^\ell = g_{ij}(X^1, X^2, X^3).$$

2^{ème} étape

Calculer

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [\text{URot}(U^T) - \frac{1}{2} \text{tr}(\text{URot}(U^T))I]U.$$

3^{ème} étape

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial W}{\partial X} = j(W)[\Lambda + j(W)U] + \frac{1 + \rho^2 \langle W, W \rangle}{2\rho^2} U$$

afin de déterminer W .

4^{ème} étape

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$d\Omega = \Omega j([\Lambda + j(W)U]dX)$$

afin de déterminer Ω .

5^{ème} étape

Calculer les nouveaux paramètres par la formule (5.1.2)

$$x = \rho \Omega W.$$

L'étape 2 est seulement l'affirmation de la nullité de la torsion. A cause de cette nullité, et aussi de la condition sur la courbure, il n'y a pas d'obstruction :

- à l'étape 3, pour intégrer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le vecteur W ,
- à l'étape 4, pour intégrer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la rotation Ω .

Avec les nouveaux paramètres x^1, x^2, x^3 les coefficients de la métrique sont :

$$g'_{ij}(x^1, x^2, x^3) = \frac{4\rho^2}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \delta_{ij}$$

On reconnaît la métrique de la 3-sphère de rayon ρ en coordonnées stéréographiques.

Nous avons donc prouvé que la variété \mathcal{V} était une 3-sphère de rayon ρ .

L'analyse de la démarche présentée dans ce paragraphe montre clairement que l'idée maîtresse qui fait réussir le schéma de changement de paramètres est une nouvelle fois l'utilisation de la « racine carrée U » de la métrique g . Le raisonnement s'affranchit des coefficients de Christoffel en s'appuyant sur Λ , pour exprimer la nullité de la torsion, puis sur le tenseur $B^T U$ pour traduire la courbure.

Le problème géométrique est remplacé par la recherche d'un vecteur W et d'une rotation Ω solution d'un système aux dérivées partielles.

$$\begin{cases} dW = W \wedge (\text{Ad}X) + \frac{1 + \rho^2 \langle W, W \rangle}{2\rho^2} U dX \\ d\Omega = \Omega j(\text{Ad}X) \end{cases}$$

Les conditions de compatibilité de ce système correspondant aux hypothèses géométriques choisies sur la courbure et la torsion, le théorème de Frobenius permet de conclure à l'intégrabilité du système aux dérivées partielles et donc à la pertinence de la conjecture géométrique. A notre connaissance, cette démarche est inédite.

Chapitre 4

THÉORIE DES SURFACES

1-Introduction

Les ouvrages et articles sur les coques sont nombreux mais ils sont souvent délicats à aborder car une culture préliminaire sur la théorie des surfaces est nécessaire. Les subtilités du calcul tensoriel, l'utilisation des symboles de Christoffel peuvent en rendre la lecture hermétique. La recherche de nouveaux concepts dans le domaine des surfaces est toujours d'actualité car des formulations plus simples permettraient à la fois

- de simplifier les raisonnements et les démonstrations (P. G. Ciarlet [CIA 1-10], B. Miara [MIA 1,2], M. Berger [BER 1-6])

- de proposer des logiciels de calculs plus robustes (A. Ibrahimbegovic [IBR 1-8], W. Pietraskiewicz [PIE 3-5], M. Bernadou [BERN 1-2]).

Un point particulièrement délicat à aborder en théorie des surfaces est celui des conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi (G-C-M).

Dans le cas d'une coque mince satisfaisant aux hypothèses de Kirchoff-Love, l'étude des déformations se réduit à celle de sa surface moyenne. Les conditions G-C-M doivent être satisfaites aussi bien avant qu'après déformation. Pour construire des modèles de coques plus élaborés tel que celui de Donnell, il est nécessaire de procéder à des approximations des conditions G-C-M [BAR 1]. Ces approximations consistent à effectuer des opérations de linéarisation, mais lorsque l'on exprime les conditions G-C-M en utilisant les symboles de Christoffel, comme c'est l'habitude, il n'est pas si aisé de les linéariser par rapport aux gradients de déplacement sur la surface moyenne.

Dans ce chapitre nous allons proposer une nouvelle formulation des conditions G-C-M afin de leur donner plus de lisibilité et de maniabilité. Pour y parvenir, nous présentons la théorie des surfaces en privilégiant des variables différentes de celles classiquement utilisées. Une nouvelle fois, cette méthode prend ses racines dans l'ouvrage de Gaston Darboux [DAR 1] et [VAL 3].

2- Préliminaires

2-1 Première forme fondamentale - Vecteurs de Gram

Soit E^3 un espace tridimensionnel Euclidien. Dans ce chapitre, et dans les suivants, nous noterons par un point le produit scalaire que nous avons noté précédemment par un crochet \langle, \rangle . Nous choisirons, pour repérer les points de l'espace, une base orthonormée directe e_1, e_2, e_3 . Dans cette base, les composantes δ_{ij} de la métrique coïncident avec les symboles de Kronecker et les composantes η_{ijk} du produit mixte η coïncident avec les symboles de Levi-Civita.

Considérons une surface S paramétrée par deux paramètres notés u et v . Soit un point x de cette surface, désignons par $x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)$ ses coordonnées. Le calcul de l'élément d'arc sur la surface

$$ds^2 = dx \cdot dx = \delta_{ij} dx^i dx^j = \delta_{ij} \left[\frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial u} (du)^2 + \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial v} (dv)^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} + \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) du dv \right]$$

nécessite seulement la connaissance des trois produits scalaires

$$E = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \quad G = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

Ainsi l'élément d'arc est la forme quadratique

$$ds^2 = E (du)^2 + 2F du dv + G (dv)^2$$

dite première forme fondamentale de la surface S . En utilisant le formalisme matriciel, la première forme fondamentale s'écrit :

$$ds^2 = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

et on dit que la matrice 2x2

$$\mathbf{a}(u, v) = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}$$

est la matrice de la première forme fondamentale de S ou plus succinctement la première forme fondamentale de S . Cette matrice est symétrique et définie positive par construction.

Les composantes E, F, G de la première forme fondamentale étant données, nous pouvons, par le procédé de Gram-Schmitt par exemple, construire algébriquement, dans l'espace Euclidien E^3 , deux champs de vecteurs U_1 et U_2 de telle manière que leurs produits scalaires soient les mêmes que ceux des vecteurs $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ tangents en x à la surface S :

$$\boxed{U_1 \cdot U_1 = E} \quad (2.1.1)$$

$$\boxed{U_1 \cdot U_2 = U_2 \cdot U_1 = F} \quad (2.1.2)$$

et

$$\boxed{U_2 \cdot U_2 = G}. \quad (2.1.3)$$

Nous appellerons ces vecteurs U_1 et U_2 « **vecteurs de Gram** ». Ils dépendent de u et v .

Il est aisé de vérifier que les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ et $U_1 \times U_2$ sont de même longueur

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| = \|U_1 \times U_2\|$$

où \times désigne le produit vectoriel. Pour cela, il suffit d'appliquer l'identité de Pythagore (Annexe A, A-7-1) aux champs de vecteurs $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ dans un sens, puis aux champs de vecteurs U_1 et U_2 en sens inverse :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right)^2 \\ &= (U_1 \cdot U_1)(U_2 \cdot U_2) - (U_1 \cdot U_2)^2 \\ &= (U_1 \times U_2) \cdot (U_1 \times U_2). \end{aligned}$$

2-2 Introduction d'un champ de rotation Ω

Puisque les deux champs de vecteurs $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ ont les mêmes produits scalaires que les deux champs de vecteurs de Gram U_1 et U_2 , c'est qu'ils se déduisent les uns des autres par l'intermédiaire d'une rotation Ω

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \Omega U_1} \quad \boxed{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \Omega U_2}. \quad (2.2.1)$$

En conséquence :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \Omega(U_1 \times U_2). \quad (2.2.2)$$

3- Convention sur le choix des vecteurs de Gram

La normale unitaire \mathbf{n} en un point \mathbf{x} de la surface \mathcal{S} définie par

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| \mathbf{n}$$

est donc telle que :

$$\mathbf{n} = \Omega \left(\frac{\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2}{\|\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2\|} \right).$$

Les six composantes des deux vecteurs de Gram sont solutions des trois équations algébriques (2.1.1), (2.1.2), et (2.1.3). Il y a beaucoup de degrés de liberté pour les choisir. Nous limiterons ce choix en convenant que

$$\boxed{\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0} \quad \boxed{\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0}.$$

Nous choisissons aussi les deux champs de vecteurs \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 du plan orthogonal à \mathbf{e}_3 de telle sorte que :

$$\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 = \|\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2\| \mathbf{e}_3. \quad (3.1)$$

Avec ces conventions :

- la normale a pour expression

$$\boxed{\mathbf{n} = \Omega \mathbf{e}_3} \quad (3.2)$$

- l'élément d'aire a pour expression

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| = \|\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2\| = (\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = \eta(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{e}_3)$$

- les composantes (u_1^1, u_1^2) et (u_2^1, u_2^2) des vecteurs de Gram sur les vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sont solutions des trois équations

$$(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 = E$$

$$(u_2^1)^2 + (u_2^2)^2 = G$$

$$u_1^1 u_2^1 + u_2^2 u_1^2 = F.$$

Remarque 3.1 : Multipliée à gauche par sa transposée, la matrice $\begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix}$ donne la première forme fondamentale \mathbf{a} :

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que la deuxième composante du vecteur de Gram U_1 soit égale à la première composante du vecteur de Gram U_2 , la matrice $\begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix}$ est alors symétrique. Un choix possible est la racine carrée symétrique et défini-positive de la première forme fondamentale \mathbf{a} de la surface. Dans ce cas le déterminant $u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1$ est strictement positif et la convention (3.1) est respectée.

Remarque 3.2 : En un point x , les trois colonnes de la rotation Ω constituent une base locale de l'espace Euclidien E^3 . Les deux premières colonnes Ωe_1 et Ωe_2 sont orthogonales à la troisième colonne $\Omega e_3 = \mathbf{n}$. Ce sont donc des vecteurs du plan tangent à la surface S . La base locale orthonormée directe $\Omega e_1, \Omega e_2, \mathbf{n}$ semble plus appropriée pour étudier la surface S que la base $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \mathbf{n}$. On passe d'une base à l'autre par la matrice de passage

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & 0 \\ u_1^2 & u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4- Intégrabilité du système aux dérivées partielles (2.2.1)

4-1 Vecteurs de Darboux

La rotation Ω dépend des deux paramètres u et v . Une pratique courante des mécaniciens lorsqu'ils dérivent la rotation d'un solide rigide par rapport au temps est d'introduire un vecteur dit « vecteur rotation instantanée ». Nous sommes dans une situation analogue avec une rotation Ω dépendant des deux « temps » u et v . Comme en cinématique du solide rigide nous pouvons, selon une prescription de G. Darboux [DAR 1], associer un vecteur rotation instantanée à chacune des dérivées partielles du champ de rotations Ω par rapport aux paramètres u et v . Nous les appellerons « **vecteurs de Darboux** » et nous les noterons Y_1 et Y_2 . En adoptant la notation $Y \times I$ pour représenter le produit vectoriel à gauche par Y (noté $j(Y)$ dans les chapitres précédents), les vecteurs Y_1 et Y_2 sont donc définis par :

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega(Y_1 \times I)} \quad \boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega(Y_2 \times I)}. \quad (4.1.1)$$

Nous avons ainsi introduit un nouveau système aux dérivées partielles. Avant d'étudier l'intégrabilité du système aux dérivées partielles (2.2.1) où figure la rotation Ω , commençons par étudier l'intégrabilité du système (4.1.1).

4-2 Condition de compatibilité satisfaite par les vecteurs de Darboux - Conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi

Dérivons partiellement $\frac{\partial \Omega}{\partial u}$ par rapport à la variable v , grâce aux équations (4.1.1) nous pouvons factoriser par Ω à gauche

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial v} (Y_1 \times I) + \Omega \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v} \times I \right) = \Omega [(Y_2 \times I)(Y_1 \times I) + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v} \times I \right)].$$

En échangeant les indices 1 et 2, nous échangeons l'ordre de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} \right) = \Omega [(Y_1 \times I)(Y_2 \times I) + \left(\frac{\partial Y_2}{\partial u} \times I \right)].$$

La différence des dérivées partielles secondes croisées de Ω est donc :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} \right) = \Omega [(Y_2 \times I)(Y_1 \times I) - (Y_1 \times I)(Y_2 \times I) + \frac{\partial Y_1}{\partial v} \times I - \frac{\partial Y_2}{\partial u} \times I]. \quad (4.2.1)$$

L'identité de Jacobi (paragraphe A-2-2 de l'Annexe A) permet d'affirmer que

$$(Y_2 \times I)(Y_1 \times I) - (Y_1 \times I)(Y_2 \times I) = (Y_2 \times Y_1) \times I. \quad (4.2.2)$$

La condition de compatibilité que doivent satisfaire les deux vecteurs de Darboux afin que le système d'équations aux dérivées partielles (4.1.1) soit intégrable est donc :

$$\boxed{Y_2 \times Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} = 0}. \quad (4.2.3)$$

Remarque 4.1 : Ces conditions sont les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi (G-C-M). La preuve est reportée au chapitre 6.

Remarque 4.2 : Cette formulation concise des conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi est directement due à l'utilisation des composantes des deux vecteurs de Darboux qui remplacent très avantageusement les symboles de Christoffel. La formule (4.2.3) se trouve explicitement écrite dans l'ouvrage de Gaston Darboux [DAR 1].

Remarque 4.3 : À ce stade, il est intéressant de remarquer la similitude des approches menées au chapitre 1 dans le cas 3D, et dans ce chapitre consacré aux surfaces dans le cas 2D.

Nous avons établi dans ce chapitre la condition d'intégrabilité de Frobenius

$$Y_2 \times Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} = 0$$

du système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega(Y_1 \times I) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega(Y_2 \times I).$$

Cette démarche est à comparer avec celle du chapitre 1 où nous avons associé la condition d'intégrabilité de Frobenius

$$\text{Adj}\Lambda + \text{Rot}(\Lambda^T) = 0$$

au système aux dérivées partielles :

$$dR = Rj(\Lambda dX).$$

4-3 Condition de compatibilité satisfaite par les vecteurs de Gram

Nous venons de trouver les conditions assurant l'existence de la rotation Ω . Étudions maintenant l'intégrabilité du système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \Omega U_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \Omega U_2. \quad (2.2.1)$$

Pour cela, calculons les dérivées partielles secondes croisées de la position x :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial v} U_1 + \Omega \frac{\partial U_1}{\partial v} = \Omega [Y_2 \times U_1 + \frac{\partial U_1}{\partial v}]$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) = \Omega [Y_1 \times U_2 + \frac{\partial U_2}{\partial u}]$$

Les conditions de compatibilité assurant l'existence d'une solution $x(u, v)$ du système d'équations aux dérivées partielles (2.2.1) sont donc:

$$\boxed{\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0} \quad (4.3.1)$$

Remarque 4.4 : En projetant sur e_3 une conséquence immédiate de la relation précédente est :

$$e_3 \cdot (Y_2 \times U_1) = e_3 \cdot (Y_1 \times U_2)$$

puisque les dérivées des vecteurs U_1 et U_2 sont perpendiculaires à e_3 comme U_1 et U_2 .

Remarque 4.5 : Ici encore, il est intéressant de faire le parallèle entre les approches menées au chapitre 1 et dans ce chapitre.

Nous avons établi dans ce chapitre la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0$$

du système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \Omega U_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \Omega U_2.$$

Au chapitre 1, nous avons établi la condition d'intégrabilité

$$[\text{Rot}(U^T) + (\det U)(\text{tr}(\Lambda U^{-1})U^{-1} - U^{-1}\Lambda U^{-1})]^T = 0$$

du système aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial x}{\partial X} = RU$$

Cette remarque, ainsi que la remarque 4.3 du paragraphe 4.2, seront les clés de la preuve de l'équivalence entre les conditions de Riemann-Christoffel d'une coque et les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi sur sa surface moyenne au chapitre 6.

Remarque 4.6 : A ce stade, nous ne pouvons pas reconstruire la surface S par la résolution des systèmes aux dérivées partielles 4.1.1 et 2.2.1. Si nous connaissons les vecteurs de Gram par la première forme fondamentale, nous ne savons rien des vecteurs de Darboux. Il est naturel que la seule connaissance de la métrique ne permette pas la reconstruction de la surface. Une information sur la courbure est nécessaire. Nous allons voir que la connaissance supplémentaire de la deuxième forme fondamentale de la surface S détermine les vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 .

5- La deuxième forme fondamentale b de la surface et les formules de Weingarten

Dans un premier temps, rappelons la définition de la deuxième forme fondamentale b et les formules de Weingarten telles qu'on les trouve dans la littérature sur les surfaces.

5-1 Variations de la normale n - Deuxième forme fondamentale

La courbure de la surface concerne la variation de la normale. Considérons des petites variations du et dv des paramètres u et v , la variation dn de la normale en x à la surface S est alors :

$$dn = \frac{\partial n}{\partial u} du + \frac{\partial n}{\partial v} dv$$

alors que la variation de la position x est le vecteur tangent :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv .$$

La première forme fondamentale est le carré $dx \cdot dx$ de la longueur de la variation première dx . Le calcul de la seconde forme fondamentale $n \cdot ddx = -dn \cdot dx$ nécessite seulement la connaissance des trois produits scalaires

$$L = -\frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \quad N = -\frac{\partial n}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \quad M = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial n}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right). \quad (5.1.1)$$

Ainsi la deuxième forme fondamentale est la forme quadratique

$$n \cdot ddx = L du du + N dv dv + 2M du dv .$$

En utilisant le formalisme matriciel, la seconde forme fondamentale s'écrit :

$$ddx = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

et on dit que la matrice 2×2

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

est la matrice de la deuxième forme fondamentale de S .

Le vecteur tangent $\frac{\partial x}{\partial u}$ est orthogonal à la normale

$$n \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

et par dérivation par rapport à v

$$\frac{\partial n}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = -n \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right).$$

De même le vecteur tangent $\frac{\partial x}{\partial v}$ est orthogonal à la normale

$$n \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

et par dérivation par rapport à u

$$\frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = -n \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

La symétrie des dérivées secondes de la position x implique l'égalité

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$$

et nous pouvons simplifier la valeur du coefficient M de la deuxième forme fondamentale

$$M = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

5-2 Formules de Weingarten

Considérons de nouveau le vecteur normal unitaire \mathbf{n} . Puisque $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, on en déduit par dérivation

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} = 0 \text{ et } \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = 0.$$

Les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}$ appartiennent donc au plan tangent en \mathbf{x} à la surface S . On peut les décomposer sur la base $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ du plan tangent.

Si on pose provisoirement

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} = \alpha \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + \beta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = \gamma \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + \delta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

et si on effectue les produits scalaires avec $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$, on en déduit successivement :

$$E\alpha + F\beta = -L$$

$$F\alpha + G\beta = -M$$

$$E\gamma + F\delta = -M$$

$$F\gamma + G\delta = -N.$$

La résolution de ce système linéaire permet de calculer les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et d'établir les formules de Weingarten :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} = \frac{1}{EG - F^2} \left[(FM - GL) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + (FL - EM) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right] \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = \frac{1}{EG - F^2} \left[(FN - GM) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + (FM - EN) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right] \end{cases}$$

Dans ces deux formules nous reconnaissons les coefficients de la matrice $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$ et nous pouvons les rassembler en une seule relation matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \end{bmatrix} \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$$

ou bien encore en l'expression de la variation première de la normale

$$dn = - \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix} \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}. \quad (5.2.1)$$

6- Liens entre la deuxième forme fondamentale b et les vecteurs de Gram et de Darboux

Regardons maintenant comment se traduisent les relations (5.1.1) et (5.2.1) lorsqu'on adopte la méthodologie introduisant les vecteurs de Gram et de Darboux.

6-1 Variations de la normale n et symétrie de la deuxième forme fondamentale

Reprenons l'expression :

$$n = \Omega e_3$$

de la normale. Ses dérivées partielles par rapport aux paramètres u et v sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial u} &= \frac{\partial \Omega}{\partial u} e_3 = \Omega (Y_1 \times e_3) \\ \frac{\partial n}{\partial v} &= \frac{\partial \Omega}{\partial v} e_3 = \Omega (Y_2 \times e_3). \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

En introduisant les vecteurs de Darboux, la variation première de la normale est donc :

$$dn = \Omega (du Y_1 \times e_3 + dv Y_2 \times e_3).$$

Rapprochons là de la variation première de la position exprimée à l'aide des vecteurs de Gram :

$$dx = \Omega (U_1 du + U_2 dv).$$

Lorsque nous effectuons le produit scalaire des deux variations premières dx et dn , la rotation Ω disparaît et il vient en utilisant la propriété A-1-1 de l'Annexe A liant produit mixte, produit scalaire et produit vectoriel :

$$dx \cdot dn = e_3 \cdot [(U_1 \times Y_1) du du + (U_2 \times Y_2) dv dv + (U_1 \times Y_2 + U_2 \times Y_1) du dv]. \quad (6.1.2)$$

En comparant avec l'expression de la deuxième forme fondamentale

$$n \cdot ddx = -dx \cdot dn = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

nous parvenons aux formules

$$\boxed{L = e_3 \cdot (Y_1 \times U_1), N = e_3 \cdot (Y_2 \times U_2), M = \frac{1}{2} [e_3 \cdot (Y_2 \times U_1) + e_3 \cdot (Y_1 \times U_2)]}. \quad (6.1.3)$$

Ainsi s'expriment les coefficients de la deuxième forme fondamentale en fonction des vecteurs de Gram et de Darboux. La dernière relation peut se simplifier car nous avons déjà remarqué (Remarque 4.4) que :

$$\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{Y}_2 \times \mathbf{U}_1) = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{U}_2).$$

Ainsi :

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{Y}_2 \times \mathbf{U}_1) = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{U}_2). \quad (6.1.4)$$

Remarque 5.1 : c'est la remarque 4.4 qui assure la symétrie de la deuxième forme fondamentale.

6-2 Factorisation de la deuxième forme fondamentale en fonction des vecteurs de Gram et de Darboux

Réécrivons les expressions (6.1.3) des coefficients de la seconde forme fondamentale sous la forme suivante

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{U}_1) = \mathbf{U}_1^T (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}) \mathbf{Y}_1$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{Y}_2 \times \mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_2^T (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}) \mathbf{Y}_2$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{Y}_2 \times \mathbf{U}_1) = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_1^T (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}) \mathbf{Y}_2 = \mathbf{U}_2^T (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}) \mathbf{Y}_1$$

qui met en évidence, au centre des expressions, l'opération $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}$ de produit vectoriel par \mathbf{e}_3 . Nous sommes conduits à exprimer la matrice de la deuxième forme fondamentale comme le produit de trois matrices, la première liée aux vecteurs de Gram et la troisième aux vecteurs de Darboux:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T \\ \mathbf{U}_2^T \end{bmatrix} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}) [\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2].$$

Comme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T \\ \mathbf{U}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^1 & \mathbf{u}_1^2 & 0 \\ \mathbf{u}_2^1 & \mathbf{u}_2^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{I} = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nous obtenons [VAL 3] en effectuant par blocs le produit des trois matrices

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}. \quad (6.2.1)$$

6-3 Nouvelle version des formules de Weingarten

Les formules (6.1.1) exprimant les dérivées partielles de la normale en fonction des vecteurs de Darboux peuvent se rassembler sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \end{bmatrix} = -\Omega(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}) \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$$

Rapprochons-les de l'expression matricielle des formules de Weingarten classiques

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \end{bmatrix} \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b} = -\Omega \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}$$

où nous avons introduit les deux vecteurs de Gram.

Montrer l'équivalence entre ces deux formulations revient à vérifier que

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b} = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}) \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}.$$

Souvenons-nous de l'expression

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I}) \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$$

de la deuxième forme fondamentale évoquée au paragraphe 6.2, il nous reste à vérifier que la relation vectorielle

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{-1} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{Y}) = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{Y})$$

est satisfaite par les deux vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 . Il se trouve que cette relation est satisfaite pour tout vecteur Y . En effet, d'une part le vecteur $\mathbf{e}_3 \times Y$ n'a pas de composantes sur \mathbf{e}_3 et, d'autre part :

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{-1} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les formules (6.1.1)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \end{bmatrix} = \Omega(Y_1 \times \mathbf{e}_3) \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = \Omega(Y_2 \times \mathbf{e}_3).$$

constituent donc une nouvelle version des formules de Weingarten. Nous verrons comment profiter de la simplicité de cette version au cours des chapitres suivants.

6-4 Détermination des vecteurs de Darboux connaissant les deux formes fondamentales

La détermination des composantes des vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 à partir des coefficients des deux formes fondamentales s'effectue en deux phases.

Dans une première phase, les deux premières composantes de Y_1 et Y_2 se déduisent des première et deuxième formes fondamentales en résolvant le système linéaire (6.2.1) du paragraphe 6.2 :

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \quad (6.2.1)$$

Au premier membre, la matrice $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et la matrice $\begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix}$ sont inversibles puisque leurs déterminants sont respectivement égaux à 1 et à la racine carrée du déterminant de la première forme fondamentale. Ainsi les deux premières composantes de Y_1 et Y_2 se calculent en effectuant le produit matriciel suivant:

$$\begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{b}. \quad (6.4.1)$$

Dans une deuxième phase les troisièmes composantes de Y_1 et Y_2 sont obtenues en projetant la condition de compatibilité 4.3.1

$$\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0$$

sur les deux premiers vecteurs de base e_1 et e_2 . La projection sur e_3 a déjà servi pour assurer la symétrie de la deuxième forme fondamentale \mathbf{b} . En projetant successivement sur e_1 et sur e_2 , nous obtenons le système de deux équations:

$$\frac{\partial u_1^1}{\partial v} - \frac{\partial u_2^1}{\partial u} + Y_1^3 u_2^2 - Y_2^3 u_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial u_1^2}{\partial v} - \frac{\partial u_2^2}{\partial u} + Y_2^3 u_1^1 - Y_1^3 u_2^1 = 0.$$

Les composantes Y_1^3 et Y_2^3 sont donc solutions du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} u_2^2 & -u_1^2 \\ -u_2^1 & u_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^3 \\ Y_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2^1}{\partial u} - \frac{\partial u_1^1}{\partial v} \\ \frac{\partial u_2^2}{\partial u} - \frac{\partial u_1^2}{\partial v} \end{bmatrix}. \quad (6.4.2)$$

Remarquons que la matrice 2×2 de ce système linéaire est le produit de trois matrices

$$\begin{bmatrix} u_2^2 & -u_1^2 \\ -u_2^1 & u_1^1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -J \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix} J$$

Cette matrice 2×2 est inversible car son déterminant est la racine carrée du déterminant de la première forme fondamentale, cela permet de calculer les troisièmes composantes des deux vecteurs de Darboux :

$$\begin{bmatrix} Y_1^3 \\ Y_2^3 \end{bmatrix} = -J \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix}^{-1} J \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2^1}{\partial u} - \frac{\partial u_1^1}{\partial v} \\ \frac{\partial u_2^2}{\partial u} - \frac{\partial u_1^2}{\partial v} \end{bmatrix}. \quad (6.4.3)$$

Remarquons que les troisièmes composantes de Y_1 et Y_2 ne dépendent que des coefficients de la première forme fondamentale et de leurs dérivées.

Remarque 6.1 : *Mises à part les formules de Weingarten, un bon nombre de résultats figurent dans l'article [VAL 3] publié en collaboration avec Claude Vallée en 1996 « Compatibility equations in shell theory » dans Int. J. Engng. Sci. vol 34 n°5, pp 495-499. Cependant, nous avons présenté ici une généralisation qui nous dispense d'imposer la symétrie de la matrice*

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix}$$

Un tel renoncement à la symétrie avait déjà été envisagé aux chapitres 1 et 2 en ce qui concernait « la racine carrée » U du tenseur de Cauchy- Green droit C .

Remarque 6.2 : *Conformément à l'affirmation de P. O. Bonnet [BON 1, 2] selon laquelle les deux formes fondamentales déterminent une surface à une rotation et une translation près, nous allons maintenant, grâce à la méthodologie mise en place, pouvoir détailler une méthode effective de reconstruction d'une surface. Nous développerons cette méthode aux paragraphes 8 et 9 en l'illustrant par un exemple.*

Remarque 6.3 : *Les spécialistes des coques que sont P. G. Ciarlet, et leurs collaborateurs avaient l'habitude de traiter les deux formes fondamentales avec les outils traditionnels de la géométrie traditionnelle [CIA 10]. L'article cité ci-dessus (Remarque 6.1) a été pour eux une source d'inspiration et ils ont publiés plusieurs articles précisant la topologie des espaces fonctionnels mis en jeu dans cette méthodologie à la Darboux [CIA 11-14].*

7- Courbures scalaires et Théorème d'excellence de Gauss.

Nous venons de constater que les troisièmes composantes des deux vecteurs de Darboux ne dépendent que de la métrique. Peut-on prouver, grâce à cette propriété, que le déterminant de \mathbf{b} ne dépend que de la métrique, et par suite que, de manière surprenante, une information sur la courbure est contenue dans la donnée de la métrique.

7-1 Calcul du déterminant de la deuxième forme fondamentale

Reprenons les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi (4.2.3) :

$$Y_2 \times Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} = 0$$

La troisième équation est notre version de la condition de Gauss :

$$\frac{\partial Y_1^3}{\partial v} - \frac{\partial Y_2^3}{\partial u} + Y_2^1 Y_1^2 - Y_2^2 Y_1^1 = 0$$

elle s'écrit tout aussi bien :

$$\det \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = \frac{\partial Y_1^3}{\partial v} - \frac{\partial Y_2^3}{\partial u}.$$

Puisque Y_1^3 et Y_2^3 ne dépendent que de la métrique et de ses dérivées (6.4.2), cette dernière remarque nous permet d'affirmer que $\det \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}$ ne dépend que de la métrique. De l'expression (6.2.1) de la deuxième forme fondamentale

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}.$$

il s'en suit la propriété surprenante suivante:

« Le déterminant de la deuxième forme fondamentale ne dépend que de la première forme fondamentale. »

7-2 Courbures principales – Courbure totale – Courbure moyenne

Les courbures principales de la surface sont les racines χ_1 et χ_2 du trinôme du second degré

$$P(\chi) = \det(\mathbf{b} - \chi \mathbf{a}) = (\det \mathbf{a}) \det(\mathbf{b} \mathbf{a}^{-1} - \chi \mathbf{I}_2)$$

La courbure totale et la courbure moyenne sont respectivement le produit et la demi-somme de ces racines :

$$K = \chi_1 \chi_2 \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2}(\chi_1 + \chi_2).$$

Avec les notations classiques

$$\det(\mathbf{b} - \chi \mathbf{a}) = \det \begin{bmatrix} L - \chi E & M - \chi F \\ M - \chi F & N - \chi G \end{bmatrix} = \det \mathbf{b} - (EN + GL - 2FM)\chi + (\det \mathbf{a})\chi^2$$

Les valeurs des courbures totale et moyenne sont donc :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det \mathbf{b}}{\det \mathbf{a}}.$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} \right) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{b} \mathbf{a}^{-1})$$

7-3 Théorème d'excellence de Gauss

La courbure totale K est donc le quotient des déterminants de \mathbf{a} et \mathbf{b} , elle ne dépend donc que de la métrique puisque nous avons établi précédemment au paragraphe 7.1 que le déterminant de la deuxième forme fondamentale ne dépend que de la métrique. Cette propriété constitue le théorème d'excellence de Gauss [GAU 1] qui affirme que :

« La courbure totale ne dépend que de la première forme fondamentale. »

Remarque : La courbure totale est aussi dite courbure de Gauss.

7-4 Nouvelles expressions de la courbure totale et de la courbure de Gauss

En calculant le déterminant de la deuxième forme fondamentale à partir de son expression (6.2.1) nous parvenons à l'expression

$$K = \frac{Y_1^1 Y_2^2 - Y_2^1 Y_1^2}{\sqrt{\det \mathbf{a}}} = \frac{\eta(Y_1, Y_2, \mathbf{e}_3)}{\eta(U_1, U_2, \mathbf{e}_3)}$$

de la courbure totale en fonction des vecteurs de Gram et de Darboux.

Question : Peut-on aussi exprimer la courbure moyenne en fonction des vecteurs de Gram et de Darboux?

Réponse : Oui.

En effet, les expressions (6.1.3)

$$L = \eta(\mathbf{e}_3, Y_1, U_1) \quad N = \eta(\mathbf{e}_3, Y_2, U_2) \quad M = \eta(\mathbf{e}_3, Y_2, U_1) = \eta(\mathbf{e}_3, Y_1, U_2)$$

et les expressions des coefficients des deux formes fondamentales (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.3)

$$E = U_1 \cdot U_1, \quad F = U_1 \cdot U_2, \quad G = U_2 \cdot U_2,$$

permettent de calculer le numérateur de H

$$(EN - FM) + (GL - FM) = \eta(\mathbf{e}_3, Y_2, EU_2 - FU_1) + \eta(\mathbf{e}_3, Y_1, GU_1 - FU_2)$$

En remarquant que les vecteurs $EU_2 - FU_1$ et $GU_1 - FU_2$ sont respectivement les double-produits vectoriels

$$U_1 \times (U_2 \times U_1) \text{ et } U_2 \times (U_1 \times U_2)$$

et, en nous souvenant de la convention (3.1)

$$U_1 \times U_2 = \eta(U_1, U_2, e_3) e_3$$

nous pouvons factoriser $EN + GL - 2FM$ en

$$\eta(U_1, U_2, e_3)[\eta(Y_2, e_3, U_1 \times e_3) - \eta(Y_1, e_3, U_2 \times e_3)] = \eta(U_1, U_2, e_3)(Y_2 \cdot U_1 - Y_1 \cdot U_2).$$

Par ailleurs, la valeur du dénominateur de H est :

$$2(EG - F^2) = 2[\eta(U_1, U_2, e_3)]^2$$

Nous pouvons ainsi conclure que la courbure moyenne H s'exprime en fonction des vecteurs de Gram et des vecteurs de Darboux :

$$H = \frac{1}{2} \frac{Y_2 \cdot U_1 - Y_1 \cdot U_2}{(U_1 \times U_2) \cdot e_3} = \frac{Y_2 \cdot U_1 - Y_1 \cdot U_2}{2\eta(U_1, U_2, e_3)}.$$

8- Méthode de reconstruction de la surface - Théorème de P.O. Bonnet

Supposons que les deux formes fondamentales

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

d'une surface S paramétrée par u et v soient données et essayons de reconstruire cette surface. Nous pouvons résoudre ce problème inverse en réordonnant les résultats précédents de la manière suivante :

1^{ère} étape :

Trouver deux vecteurs de Gram U_1 et U_2 , orthogonaux à e_3 solutions de :

$$U_1 \cdot U_1 = E$$

$$U_1 \cdot U_2 = F$$

$$U_2 \cdot U_2 = G.$$

2^{ème} étape :

Déterminer les deux premières composantes des deux vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 en effectuant le produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{b}$$

3^{ème} étape :

Déterminer les troisièmes composantes des deux vecteurs de Darboux en résolvant le système linéaire

$$- \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^3 \\ Y_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2^1}{\partial u} - \frac{\partial u_1^1}{\partial v} \\ \frac{\partial u_2^2}{\partial u} - \frac{\partial u_1^2}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

4^{ème} étape :

Vérifier que les deux vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 satisfont les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi

$$Y_2 \times Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} = 0.$$

Remarque : *Quel avantage de ne pas avoir à vérifier les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi exprimées avec les symboles de Christoffel !*

5^{ème} étape :

Intégrer le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega(Y_1 \times I) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega(Y_2 \times I)$$

afin de déterminer le champ de rotations Ω .

Remarque : *C'est le théorème de Frobenius qui fournit encore une réelle méthode de résolution de ce système. C'est une intégration délicate, mais pas insurmontable, car nous savons que Ω est une rotation. La solution Ω du système est déterminée à une rotation constante multiplicative à gauche près.*

6^{ème} étape :

Intégrer le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \Omega U_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \Omega U_2.$$

afin de déterminer l'équation paramétrique $x(u,v)$ de la surface.

Remarque : L'intégration met encore en œuvre la méthode de Frobenius, mais cette étape n'est pas délicate car le second membre ne dépend pas de x . La position x est alors déterminée à une translation constante additive près.

En conclusion

Cette méthode effective de reconstruction de la surface à partir de ses deux formes fondamentales constitue le théorème de Pierre Ossian Bonnet [BON 1]. Cette construction est obtenue à une rotation constante et une translation constante près conformément au théorème. Nous allons l'illustrer par un exemple en mettant en œuvre les différentes étapes présentées ci-dessus.

9- Exemple de reconstruction d'une surface connaissant ses deux formes fondamentales

Nous allons effectuer les différentes étapes déclinées au paragraphe précédent afin d'exhiber les équations paramétriques d'une surface en partant de ses deux formes fondamentales \mathbf{a} et \mathbf{b} . Ce développement a fait l'objet d'une présentation au Colloque de Calcul des Structures de Giens 2007 [FOR 3].

Considérons les deux formes fondamentales :

$$\mathbf{a} = \frac{(4R^2)^2}{(4R^2 + u^2 + v^2)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = -4R \frac{4R^2}{(4R^2 + u^2 + v^2)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où R est une constante homogène à une longueur. Nous allons vérifier que les conditions G-C-M sont satisfaites et construire la surface.

9-1 Choix des deux vecteurs de Gram où la première forme fondamentale est sphérique

Il est naturel de choisir :

$$U_1 = \frac{4R^2}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_2 = \frac{4R^2}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9-2 Détermination des deux premières composantes des deux vecteurs de Darboux

Les deux premières composantes des vecteurs de Darboux s'obtiennent grâce à la formule :

$$\begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{b}.$$

Il vient :

$$\begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = \frac{4R}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9-3 Détermination des troisièmes composantes des deux vecteurs de Darboux

Les troisièmes composantes s'obtiennent grâce à la formule:

$$\begin{bmatrix} Y_1^3 \\ Y_2^3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2^1}{\partial u} - \frac{\partial u_1^1}{\partial v} \\ \frac{\partial u_2^2}{\partial u} - \frac{\partial u_1^2}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$\begin{bmatrix} Y_1^3 \\ Y_2^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 2v \\ -2u \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons alors reconstituer les deux vecteurs de Darboux :

$$Y_1 = \frac{1}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 4R \\ 2v \end{bmatrix} \quad Y_2 = \frac{1}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} -4R \\ 0 \\ -2u \end{bmatrix}.$$

9-4 Vérification des conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi

Les deux vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 doivent satisfaire le système d'équations aux dérivées partielles

$$Y_2 \times Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} = 0.$$

Effectuons la dérivée partielle de Y_1 par rapport au paramètre v

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} = \frac{1}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 0 \\ -8rv \\ 2(4R^2 + u^2 - v^2) \end{bmatrix}$$

puis la dérivée partielle de Y_2 par rapport au paramètre u

$$\frac{\partial Y_2}{\partial u} = \frac{1}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 8Ru \\ 0 \\ 2(-4R^2 + u^2 - v^2) \end{bmatrix}.$$

La différence vaut donc :

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} = \frac{-8R}{(4R^2 + u^2 + v^2)^2} \begin{bmatrix} u \\ v \\ -2R \end{bmatrix}.$$

D'autre part, calculons le produit vectoriel des deux vecteurs de Darboux

$$Y_1 \times Y_2 = \frac{-8R}{(4R^2 + u^2 + v^2)^2} \begin{bmatrix} u \\ v \\ -2R \end{bmatrix}.$$

Ces deux expressions sont identiques ce qui implique que les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi soient satisfaites. Nous sommes ainsi assurés de poursuivre les intégrations nécessaires pour obtenir la rotation Ω puis l'expression paramétrique $x(u,v)$ de la surface S qui admet pour formes fondamentales \mathbf{a} et \mathbf{b} .

9-5 Intégration du système d'équations aux dérivées partielles afin de déterminer la rotation Ω .

La rotation Ω est solution du système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega j(Y_1) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega j(Y_2)$$

où l'on a repris la notation

$$j(W)Z = W \times Z$$

pour représenter matriciellement le produit vectoriel de deux vecteurs W et Z .

Extraire la rotation Ω de ce système n'est pas si simple car Ω figure au second membre des équations. De nouveau, l'application de la méthode de Frobenius nous montre la marche à suivre. Nous allons remplacer la résolution du système aux dérivées partielles par la résolution d'un système différentiel ordinaire gouverné par un paramètre λ .

La méthode de Frobenius consiste à rechercher une rotation solution du système différentiel ordinaire

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = \Theta(\lambda)j[(u - u_0)Y_1(u_0 + \lambda(u - u_0), v_0 + \lambda(v - v_0)) + (v - v_0)Y_2(u_0 + \lambda(u - u_0), v_0 + \lambda(v - v_0))]$$

(9.5.1)

assorti de la condition initiale

$$\Theta(0) = \Omega(u_0, v_0) = \Omega_0.$$

Elle permet de déterminer $\Omega(u, v) = \Theta(1)$ à partir de la connaissance de $\Omega(u_0, v_0) = \Omega_0$.

Sans restreindre la généralité, nous allons supposer : $u_0 = 0, v_0 = 0$ et $\Omega_0 = I_3$.

En remplaçant les deux vecteurs Y_1 et Y_2 par leurs expressions dans le système (9.5.1), nous obtenons le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\lambda} = \frac{4R}{4R^2 + \lambda^2(u^2 + v^2)} \Theta(\lambda) j \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Theta(0) = I_3 \end{cases}$$

Résoudre ce système différentiel ordinaire en continuant à le gouverner par le paramètre λ n'est pas chose si aisée. Nous allons choisir un nouveau paramètre μ afin de transformer le système différentiel linéaire en un système différentiel linéaire à coefficients constants

$$\frac{d\Theta}{d\mu} = \Theta(\mu) j \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si nous y parvenons, nous saurons intégrer ce nouveau système en calculant l'exponentielle de matrice

$$\exp(j(\mu \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix})) \quad (9.5.2)$$

Il suffit de choisir pour μ la fonction de λ satisfaisant

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{4R}{4R^2 + \lambda^2(u^2 + v^2)} \\ \mu(0) = 0 \end{cases}$$

Le calcul explicite de $\Theta(1)$ nécessite seulement la valeur

$$\mu(1) = \int_0^1 \frac{4R}{4R^2 + \lambda^2(u^2 + v^2)} d\lambda = \frac{2}{\sqrt{u^2 + v^2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2R}\right).$$

Introduisons l'angle ψ compris entre 0 et π et défini par:

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2R}$$

ainsi :

$$\mu(1)\sqrt{u^2 + v^2} = \psi.$$

Le développement de l'exponentielle (9.5.2) par la formule de Gibbs conduit à :

$$\Omega = \cos \psi \, I + (1 - \cos \psi) \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{bmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{bmatrix}^T + \sin \psi \, j \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \begin{bmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Les relations trigonométriques liant $\cos \psi$ et $\sin \psi$ à $\tan \frac{\psi}{2}$ permettent d'expliciter la rotation Ω en fonction de u et v :

$$\Omega(u, v) = \frac{1}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 4R^2 - u^2 + v^2 & -2uv & 4Ru \\ -2uv & 4R^2 + u^2 - v^2 & 4Rv \\ -4Ru & -4Rv & 4R^2 - u^2 - v^2 \end{bmatrix}.$$

en ayant fait le choix d'une rotation multiplicative à gauche égale à l'identité.

9-6 Détermination de l'équation paramétrique de la surface

Il reste à intégrer le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \Omega U_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \Omega U_2$$

soit encore sous la forme condensée:

$$dx = \Omega(du U_1 + dv U_2).$$

Cette dernière intégration est simple puisque le second membre ne dépend pas de x . Elle permet d'expliciter les équations paramétrées de la surface :

$$x(u, v) = \frac{R}{4R^2 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 4Ru \\ 4Rv \\ 4R^2 - u^2 - v^2 \end{bmatrix}$$

en ayant fait le choix d'une translation nulle.

On reconnaît la représentation stéréographique d'une demi-surface sphérique de rayon R .

10- Conclusion

La méthodologie développée dans ce chapitre permet d'effectuer une reconstruction effective d'une surface à partir de la connaissance de ses deux formes fondamentales comme le précisent les différentes étapes du bilan présentée au paragraphe 8 et comme l'illustre l'exemple traité au paragraphe 9.

Dans le cadre de l'étude des surfaces, nous avons constaté que l'utilisation

- de la « décomposition polaire » généralisée

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \Omega U_1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \Omega U_2 \quad (10.1)$$

- et des vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 définis par

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega (Y_1 \times I) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega (Y_2 \times I)$$

engendre une méthode très efficace pour la reconstruction d'une surface.

L'introduction de la rotation Ω a permis le découplage des conditions de compatibilité en deux systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre :

- conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi

$$Y_2 \times Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} = 0 \text{ en ce qui concerne les deux vecteurs de Darboux,}$$

- conditions d'intégrabilité du système (10.1)

$\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0$ en ce qui concerne les vecteurs de Darboux et les vecteurs de Gram.

Nous allons continuer à développer cette méthodologie en étudiant les surfaces minimales, avec les mêmes outils, dans le chapitre 5.

Chapitre 5

SURFACES MINIMALES

1- Introduction

A la lumière de l'étude des surfaces développée au chapitre précédent, reprenons le problème de Plateau :

Trouver la surface S dont le bord est délimité par une courbe fermée Γ donnée et dont l'aire est minimale.

A l'origine du problème se trouve un essai de Lagrange sur la détermination des extrema de fonctionnelles intégrales qui donna naissance aux équations de Lagrange. Les premiers exemples découverts furent la caténoïde et l'hélicoïde. Jean-Baptiste Meusnier [MEU 1] établit en 1785 que les surfaces minimales étaient des surfaces de courbure moyenne nulle (selon la terminologie adoptée un peu plus tard par Sophie Germain). Ces problèmes ont pris le nom du physicien belge Joseph Plateau (1801-1883) qui réalisa différentes expériences avec du savon liquide à la glycérine et des fils de cuivre. Bien qu'un physicien puisse penser qu'il est naturel qu'un contour \mathcal{T} délimite une surface minimale, le mathématicien est en droit de se demander s'il est vrai que toute courbe fermée dans l'espace entoure une surface minimale [GRA 1].

En 1930, T. Radó montra que le problème de Plateau pouvait être résolu pour toute courbe de longueur finie [RAD 1], puis pour tout contour qui peut entourer une surface d'aire finie [RAD 2]. Indépendamment, J. Douglas [DOU 1] démontra les mêmes résultats et précisa le problème en le reformulant. Plus récemment, R. Osserman [OSS 1, 2], M. Do Carmo [DOC 1, 2] ont obtenu de nouveaux résultats, à partir d'hypothèses sur la courbure de Gauss, sur la stabilité de sous domaines bornés de surfaces minimales.

Reprenons les notations introduites aux paragraphes 2-1 et 2-2 du chapitre 4. La surface S est paramétrée par u et v et un point de S est noté x . Dans l'espace Euclidien E^3 est choisie une base orthonormée directe e_1, e_2, e_3 . L'aire de S est le résultat de l'intégration de l'élément d'aire

$$A(S) = \iint_S \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \right\| du dv = \iint_S \sqrt{EG - F^2} du dv .$$

Minimiser $A(S)$ est un problème de calcul des variations qui risque de se révéler très complexe si la géométrie de la surface est traitée avec les variables E, F, G, L, M, N et les symboles de Christoffel.

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, une surface est caractérisée par ses deux formes fondamentales, conformément au Théorème de Bonnet qui assure que cette surface est alors parfaitement définie à une rotation et une translation près. Nous allons adopter la stratégie suivante : au lieu de chercher la surface qui minimise l'aire $A(S) = \iint_S \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$ (regardée comme une fonctionnelle intégrale de la première forme fondamentale), nous allons simplement chercher les deux formes fondamentales de la surface. Dans ce processus de minimisation il ne faudra pas oublier que les deux formes fondamentales ne sont pas indépendantes : elles doivent satisfaire les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi (G-C-M.).

C'est, pour nous, l'occasion de tester si la méthode présentée au chapitre précédent (qui préfère les composantes des vecteurs de Darboux et de Gram aux composantes des deux formes fondamentales), permet de résoudre de manière constructive le problème. Nous nourrissons l'espoir qu'avec notre méthode le processus de minimisation se déroule plus aisément et que la condition de Meusnier (de nullité de la courbure moyenne) s'en déduise plus naturellement.

Une première conséquence simplificatrice de l'introduction des vecteurs de Gram U_1 et U_2 est l'expression de l'aire de la surface

$$A(S) = \iint_S (U_1 \times U_2) \cdot e_3 \, du \, dv \quad (1.1)$$

qui devient linéaire en U_1 et en U_2 . La recherche des surfaces minimales revient donc à minimiser sous contraintes la fonctionnelle (1.1) puisque les vecteurs U_1, U_2 ne sont pas libres.

Nous choisirons les variables $u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2, Y_1^1, Y_1^2, Y_1^3, Y_2^1, Y_2^2$ et Y_2^3 . Les deux séries de « contraintes » que doivent respecter ces variables sont :

- les conditions de compatibilité (G-C-M) satisfaites par les vecteurs de Darboux

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} + Y_2 \times Y_1 = 0, \quad (1.2)$$

- les conditions de compatibilité satisfaites par les vecteurs de Gram

$$\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0. \quad (1.3)$$

Le problème de Plateau prend la forme du problème de calcul des variations sous contraintes suivant :

Minimiser la fonctionnelle

$$\Phi(U_1, U_2, Y_1, Y_2) = \iint_S (U_1 \times U_2) \cdot e_3 \, du \, dv$$

en respectant les deux conditions locales :

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} + Y_2 \times Y_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0.$$

2- Mise en œuvre du processus de minimisation**2-1 Équations de liaison**

Traditionnellement, les contraintes sont traitées en mécanique par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange. Les deux contraintes à respecter étant vectorielles, nous allons affecter, à chacune d'entre elles, un multiplicateur de Lagrange vectoriel.

Les variations des conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi satisfaites par les vecteurs de Darboux

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} + Y_2 \times Y_1 = 0 \quad (1.2)$$

sont de la forme

$$\frac{\partial \delta Y_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta Y_2}{\partial u} + \delta Y_2 \times Y_1 + Y_2 \times \delta Y_1 = 0 \quad (2.1.1)$$

où δY_1 désigne une variation de Y_1 et δY_2 une variation de Y_2 . Nous leurs affecterons un multiplicateur de Lagrange λ .

Les variations des conditions satisfaites par les vecteurs de Gram et par les vecteurs de Darboux

$$\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0 \quad (1.3)$$

sont de la forme

$$\frac{\partial \delta U_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta U_2}{\partial u} + \delta Y_2 \times U_1 + Y_2 \times \delta U_1 - \delta Y_1 \times U_2 - Y_1 \times \delta U_2 = 0 \quad (2.1.2)$$

où δU_1 désigne une variation de U_1 et δU_2 une variation de U_2 . Nous leurs affecterons un multiplicateur de Lagrange μ .

Nous dirons que (2.1.1) et (2.1.2) sont les équations de liaison du problème de minimum.

2-2 Technique des multiplicateurs de Lagrange.

La variation de l'aire de la surface est la fonctionnelle linéaire

$$\delta\Phi = \iint_S [(\delta U_1 \times U_2) \cdot e_3 + (U_1 \times \delta U_2) \cdot e_3] du dv$$

des champs de vecteurs δU_1 et δU_2 .

Cette variation doit être nulle, dès que les variations $\delta U_1, \delta U_2, \delta Y_1$ et δY_2 satisfont les équations de liaisons linéaires (2.1.1) et (2.1.2). La technique des multiplicateurs de Lagrange conduit à imposer que la variation $\delta\Phi$ de l'aire de S soit égale à la somme des deux intégrales

$$\iint_S \lambda \cdot \left(\frac{\partial \delta Y_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta Y_2}{\partial u} + \delta Y_2 \times Y_1 + Y_2 \times \delta Y_1 \right) du dv$$

et

$$\iint_S \mu \cdot \left(\frac{\partial \delta U_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta U_2}{\partial u} + \delta Y_2 \times U_1 + Y_2 \times \delta U_1 - \delta Y_1 \times U_2 - Y_1 \times \delta U_2 \right) du dv.$$

Ainsi, nous aboutissons au problème suivant :

Trouver U_1, U_2, Y_1 et Y_2 qui satisfont

(i) la condition intégrale

$$\begin{aligned} \iint_S [(U_2 \times e_3) \cdot \delta U_1 + (e_3 \times U_1) \cdot \delta U_2] dudv &= \iint_S \lambda \cdot \left(\frac{\partial \delta Y_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta Y_2}{\partial u} \right) dudv + \iint_S \mu \cdot \left(\frac{\partial \delta U_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta U_2}{\partial u} \right) du dv \\ &+ \iint_S \lambda \cdot (\delta Y_2 \times Y_1) du dv + \iint_S \mu \cdot (\delta Y_2 \times U_1) du dv \\ &+ \iint_S \lambda \cdot (Y_2 \times \delta Y_1) du dv - \iint_S \mu \cdot (\delta Y_1 \times U_2) du dv \\ &+ \iint_S \mu \cdot (Y_2 \times \delta U_1) du dv - \iint_S \mu \cdot Y_1 \times \delta U_2 du dv. \end{aligned}$$

pour tous vecteurs $\delta U_1, \delta U_2, \delta Y_1, \delta Y_2$

(ii) la condition locale 1.2

(iii) la condition locale 1.3.

3- Transformation des intégrales de surface en intégrales de circulation.

La formule de Green-Riemann permet de passer d'une intégrale sur le contour \mathcal{T} à une intégrale sur S . Si P et Q sont des fonctions dérivables, définies sur une surface S fermée bornée de contour \mathcal{T} , alors :

$$\int_{\mathcal{T}} (P du + Q dv) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv.$$

Appliquons cette formule à l'intégrale mettant en jeu les dérivées des variations des vecteurs de Darboux

$$\iint_S \lambda \cdot \left(\frac{\partial \delta Y_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta Y_2}{\partial u} \right) du dv = \iint_S \left[\frac{\partial(\lambda \cdot \delta Y_1)}{\partial v} - \frac{\partial(\lambda \cdot \delta Y_2)}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} \cdot \delta Y_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \cdot \delta Y_2 \right] du dv$$

ainsi :

$$\iint_S \lambda \cdot \left(\frac{\partial \delta Y_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta Y_2}{\partial u} \right) du dv = - \int_r (\lambda \cdot \delta Y_1 du + \lambda \cdot \delta Y_2 dv) - \iint_S \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \cdot \delta Y_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \cdot \delta Y_2 \right) du dv .$$

Appliquons la aussi à l'intégrale mettant en jeu les dérivées des variations des vecteurs de Gram

$$\iint_S \mu \cdot \left(\frac{\partial \delta U_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta U_2}{\partial u} \right) du dv = \iint_S \left[\frac{\partial(\mu \cdot \delta U_1)}{\partial v} - \frac{\partial(\mu \cdot \delta U_2)}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial v} \cdot \delta U_1 + \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \delta U_2 \right] du dv$$

ainsi :

$$\iint_S \mu \cdot \left(\frac{\partial \delta U_1}{\partial v} - \frac{\partial \delta U_2}{\partial u} \right) du dv = - \int_r (\mu \cdot \delta U_1 du + \mu \cdot \delta U_2 dv) - \iint_S \left(\frac{\partial \mu}{\partial v} \cdot \delta U_1 - \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \delta U_2 \right) du dv .$$

4- Formulation faible

Revenons à la condition intégrale du paragraphe 2 en introduisant les transformations opérées au paragraphe 3 pour remplacer certaines intégrales de surface par des intégrales de contour. Nous pouvons affirmer que :

La fonctionnelle linéaire des vecteurs $\delta U_1, \delta U_2, \delta Y_1, \delta Y_2$,

$$\begin{aligned} & \iint_S [(U_2 \times e_3) \cdot \delta U_1 + (e_3 \times U_1) \cdot \delta U_2] du dv + \int_r (\lambda \cdot \delta Y_1 du + \lambda \cdot \delta Y_2 dv) + \iint_S \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \cdot \delta Y_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \cdot \delta Y_2 \right) du dv \\ & + \int_r (\mu \cdot \delta U_1 du + \mu \cdot \delta U_2 dv) + \iint_S \left(\frac{\partial \mu}{\partial v} \cdot \delta U_1 - \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \delta U_2 \right) du dv \\ & - \iint_S \delta Y_2 \cdot (Y_1 \times \lambda) du dv - \iint_S \delta Y_2 \cdot (U_1 \times \mu) du dv \\ & - \iint_S \delta Y_1 \cdot (\lambda \times Y_2) du dv + \iint_S \delta Y_1 \cdot (U_2 \times \mu) du dv \\ & - \iint_S \delta U_1 \cdot (\mu \times Y_2) du dv + \iint_S \delta U_2 \cdot (\mu \times Y_1) du dv \end{aligned}$$

doit être nulle.

Afin d'obtenir une suite de relations intégrales que doivent vérifier les vecteurs de Darboux, les vecteurs de Gram ainsi que les multiplicateurs de Lagrange, nous allons maintenant effectuer successivement différents choix de variations des vecteurs $\delta U_1, \delta U_2, \delta Y_1, \delta Y_2$

Premier choix : Si $\delta U_2, \delta Y_1$ et δY_2 sont nuls, nous découvrons que

$$\iint_S (U_2 \times e_3 - \mu \times Y_2 + \frac{\partial \mu}{\partial v}) \cdot \delta U_1 \, du \, dv + \int_{\mathcal{F}} \mu \cdot \delta U_1 \, du = 0 \quad (4.1)$$

Deuxième choix : Si $\delta U_1, \delta Y_1$ et δY_2 sont nuls, nous découvrons que

$$\iint_S (e_3 \times U_1 + \mu \times Y_1 - \frac{\partial \mu}{\partial u}) \cdot \delta U_2 \, du \, dv + \int_{\mathcal{F}} \mu \cdot \delta U_2 \, dv = 0 \quad (4.2)$$

Troisième choix : Si $\delta U_1, \delta U_2$ et δY_2 sont nuls, nous découvrons que

$$\iint_S (\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \times Y_2 + U_2 \times \mu) \cdot \delta Y_1 \, du \, dv + \int_{\mathcal{F}} \lambda \cdot \delta Y_1 \, du = 0 \quad (4.3)$$

Quatrième choix : Si $\delta U_1, \delta U_2$ et δY_1 sont nuls, nous découvrons que

$$\iint_S (-\frac{\partial \lambda}{\partial u} - Y_1 \times \lambda - U_1 \times \mu) \cdot \delta Y_2 \, du \, dv + \int_{\mathcal{F}} \lambda \cdot \delta Y_2 \, dv = 0 \quad (4.4)$$

5- Système adjoint

Les conditions d'extrémalité (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4) constituent la formulation faible des équations que doivent satisfaire les champs de vecteurs $U_1, U_2, Y_1, Y_2, \lambda, \mu$ pour que la surface reconstruite par l'algorithme du paragraphe 8 du chapitre 4, à partir de U_1, U_2, Y_1, Y_2 , soit une surface minimale.

En choisissant convenablement la topologie des espaces fonctionnels auxquels appartiennent les inconnues $U_1, U_2, Y_1, Y_2, \lambda, \mu$, nous aboutirons à la formulation forte

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \lambda \times Y_1 + \mu \times U_1 \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda \times Y_2 + \mu \times U_2 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \mu \times Y_1 + e_3 \times U_1 \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \mu \times Y_2 + e_3 \times U_2 \quad (5.2)$$

et il faudra assortir ces équations aux dérivées partielles dans \mathcal{S} des cinq conditions aux limites sur \mathcal{F}

$$\lambda^1 = 0 \quad \lambda^2 = 0 \quad \lambda^3 = 0 \quad \mu^1 = 0 \quad \mu^2 = 0. \quad (5.3)$$

La situation est semblable à celle de la commande optimale en robotique où une fonction coût est minimisée, en respectant les équations différentielles ordinaires du mouvement satisfaites par les variables d'état repérant les positions et les vitesses du robot.

Suite à une démarche initiée par Pontriaguine, des multiplicateurs de Lagrange fonctions du temps notés p_i et dits variables adjointes sont affectés aux équations du mouvement. La mise

en œuvre du processus d'optimisation conduit à un système différentiel ordinaire satisfait par les variables adjointes. Ce système est dit système adjoint du système des équations du mouvement. Par analogie, nous dirons que le système aux dérivées partielles constitué des équations (5.1) et (5.2) est le système adjoint (ou le système dual) des équations (1.2) et (1.3).

Il ne faut donc pas oublier le système de départ que nous appellerons système primal. Les variables primales U_1, U_2, Y_1 et Y_2 satisfont :

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} + Y_2 \times Y_1 = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0 \quad (1.3)$$

A nouveau surgissent des questions de compatibilité : les systèmes aux dérivées partielles (5.1) et (5.2) sont-ils intégrables au sens de Frobenius ?

6- Condition de compatibilité assurant l'existence du champ de vecteurs λ

Comparons les dérivées secondes croisées de λ . Commençons par évaluer la dérivée première de $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$ par rapport à v à partir de (5.1)

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial v} (\lambda \times Y_1 + \mu \times U_1) = \frac{\partial \lambda}{\partial v} \times Y_1 + \lambda \times \frac{\partial Y_1}{\partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \times U_1 + \mu \times \frac{\partial U_1}{\partial v}.$$

Remplaçons $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial v}$ par leurs valeurs déduites de (5.1) elle-même et de (5.2), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) = (\lambda \times Y_2 + \mu \times U_2) \times Y_1 + \lambda \times \frac{\partial Y_1}{\partial v} + (\mu \times Y_2 + e_3 \times U_2) \times U_1 + \mu \times \frac{\partial U_1}{\partial v}.$$

En échangeant les indices 1 et 2, nous échangeons l'ordre des dérivations partielles de λ

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) = (\lambda \times Y_1 + \mu \times U_1) \times Y_2 + \lambda \times \frac{\partial Y_2}{\partial u} + (\mu \times Y_1 + e_3 \times U_1) \times U_2 + \mu \times \frac{\partial U_2}{\partial u}.$$

La différence de ces dérivées secondes

$$\begin{aligned} & (\lambda \times Y_2 + \mu \times U_2) \times Y_1 + (\mu \times Y_2 + e_3 \times U_2) \times U_1 \\ & - (\lambda \times Y_1 + \mu \times U_1) \times Y_2 - (\mu \times Y_1 + e_3 \times U_1) \times U_2 \\ & + \lambda \times \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} \right) + \mu \times \left(\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

met en évidence

- la différence $\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u}$ que l'on peut remplacer par $Y_1 \times Y_2$ grâce à (1.2),
- la différence $\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u}$ que l'on peut remplacer par $Y_1 \times U_2 - Y_2 \times U_1$ grâce à (1.3).

La différence des dérivées secondes croisées de λ vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) &= (\lambda \times Y_2) \times Y_1 - (\lambda \times Y_1) \times Y_2 + \lambda \times (Y_1 \times Y_2) \\ &\quad + (\mu \times U_2) \times Y_1 + \mu \times (Y_1 \times U_2) - (\mu \times Y_1) \times U_2 \\ &\quad + (\mu \times Y_2) \times U_1 - (\mu \times U_1) \times Y_2 - \mu \times (Y_2 \times U_1) \\ &\quad + (e_3 \times U_2) \times U_1 - (e_3 \times U_1) \times U_2. \end{aligned}$$

Lorsqu' on l'applique, successivement aux quatre groupements de trois vecteurs (λ, Y_2, Y_1) , (μ, U_2, Y_1) , (μ, Y_2, U_1) et (e_3, U_2, U_1) , l'identité de Jacobi satisfaite par le double produit vectoriel (propriété A-2-2 de l'Annexe A) permet les quatre simplifications suivantes

$$(\lambda \times Y_2) \times Y_1 + (Y_2 \times Y_1) \times \lambda + (Y_1 \times \lambda) \times Y_2 = 0$$

$$(\mu \times U_2) \times Y_1 + (U_2 \times Y_1) \times \mu + (Y_1 \times \mu) \times U_2 = 0$$

$$(\mu \times Y_2) \times U_1 + (U_1 \times \mu) \times Y_2 + (Y_2 \times U_1) \times \mu = 0$$

$$(e_3 \times U_2) \times U_1 + (U_1 \times e_3) \times U_2 = (U_1 \times U_2) \times e_3.$$

Ainsi, la différence des dérivées croisées se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) = (U_1 \times U_2) \times e_3.$$

Ce dernier double produit vectoriel est nul car les deux vecteurs U_1, U_2 sont orthogonaux à e_3 .

Les dérivées secondes de λ sont donc symétriques. Il n'y a pas d'obstruction à l'intégration du système aux dérivées partielles (5.1).

7- Condition de compatibilité assurant l'existence du champ de vecteurs μ .

Comparons maintenant les dérivées secondes croisées de μ . Commençons par évaluer la dérivée première de $\frac{\partial\mu}{\partial u}$ par rapport à v à partir de (5.2)

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial\mu}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial v} (\mu \times Y_1 + e_3 \times U_1) = \frac{\partial\mu}{\partial v} \times Y_1 + \mu \times \frac{\partial Y_1}{\partial v} + e_3 \times \frac{\partial U_1}{\partial v}.$$

Remplaçons $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ par sa valeur déduite de (5.2) elle-même, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial\mu}{\partial u} \right) = (\mu \times Y_2 + e_3 \times U_2) \times Y_1 + \mu \times \frac{\partial Y_1}{\partial v} + e_3 \times \frac{\partial U_1}{\partial v}.$$

En échangeant les indices 1 et 2, nous échangeons l'ordre des dérivations partielles de μ

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial\mu}{\partial v} \right) = (\mu \times Y_1 + e_3 \times U_1) \times Y_2 + \mu \times \frac{\partial Y_2}{\partial u} + e_3 \times \frac{\partial U_2}{\partial u}.$$

La différence de ces dérivées secondes croisées

$$(\mu \times Y_2 + e_3 \times U_2) \times Y_1 - (\mu \times Y_1 + e_3 \times U_1) \times Y_2 + \mu \times \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} \right) + e_3 \times \left(\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} \right)$$

met en évidence une nouvelle fois

- la différence $\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u}$ que l'on peut remplacer par $Y_1 \times Y_2$ grâce à (1.2),
- la différence $\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u}$ que l'on peut remplacer par $Y_1 \times U_2 - Y_2 \times U_1$ grâce à (1.3).

La différence des dérivées croisées de μ vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial\mu}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial\mu}{\partial v} \right) &= (\mu \times Y_2) \times Y_1 - (\mu \times Y_1) \times Y_2 + \mu \times (Y_1 \times Y_2) \\ &\quad + (e_3 \times U_2) \times Y_1 - (e_3 \times U_1) \times Y_2 + e_3 \times (Y_1 \times U_2 - Y_2 \times U_1) \end{aligned}$$

Lorsqu'on l'applique successivement aux trois groupements de trois vecteurs (μ, Y_1, Y_2) , (e_3, U_2, Y_1) et (U_1, e_3, Y_2) , l'identité de Jacobi permet les trois simplifications suivantes :

$$(\mu \times Y_2) \times Y_1 + (Y_1 \times \mu) \times Y_2 + (Y_2 \times Y_1) \times \mu = 0$$

$$(e_3 \times U_2) \times Y_1 + (U_2 \times Y_1) \times e_3 = U_2 \times (Y_1 \times e_3)$$

$$(U_1 \times e_3) \times Y_2 + (Y_2 \times U_1) \times e_3 = U_1 \times (e_3 \times Y_2).$$

La différence des dérivées secondes croisées de μ se réduit donc à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \mu}{\partial v} \right) &= U_2 \times (Y_1 \times e_3) + U_1 \times (e_3 \times Y_2) \\ &= (U_1 \cdot Y_2 - U_2 \cdot Y_1) e_3 \end{aligned}$$

car les vecteurs de Gram sont perpendiculaires au vecteur e_3 .

La symétrie des dérivées secondes de μ nécessite la condition

$$\boxed{U_1 \cdot Y_2 - U_2 \cdot Y_1 = 0} \quad (6.3)$$

qui lie les vecteurs de Darboux aux vecteurs de Gram. Cette seule condition (6.3) assure l'intégrabilité des systèmes aux dérivées partielles (5.1) et ((5.2).

Nous reconnaissons la condition découverte par Meusnier [MEU 1] puisque la courbure moyenne qui s'exprime traditionnellement en fonction des composantes des deux formes fondamentales par la formule

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}.$$

s'explique en fonction des vecteurs U_1, U_2, Y_1, Y_2 (chapitre 4, paragraphe 7-4) par la formule alternative

$$H = \frac{U_1 \cdot Y_2 - U_2 \cdot Y_1}{2(U_1 \times U_2) \cdot e_3}.$$

8- Processus de recherche d'une surface minimale

Le programme que nous proposons pour résoudre le problème de Plateau est donc le suivant :

(i) Trouver six champs de vecteurs $U_1, U_2, Y_1, Y_2, \lambda$ et μ satisfaisant le système algébro-différentiel

$$U_1 \cdot e_3 = 0 \quad U_2 \cdot e_3 = 0 \quad U_1 \cdot Y_2 - U_2 \cdot Y_1 = 0.$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} + Y_2 \times Y_1 = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \lambda \times Y_1 + \mu \times U_1 \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda \times Y_2 + \mu \times U_2 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}} = \mu \times \mathbf{Y}_1 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_1 \quad \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{v}} = \mu \times \mathbf{Y}_2 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_2 \quad (5.2)$$

et les conditions aux limites sur \mathcal{T}

$$\lambda^1 = 0 \quad \lambda^2 = 0 \quad \lambda^3 = 0 \quad \mu^1 = 0 \quad \mu^2 = 0 \quad (5.3)$$

(ii) Construire la surface par l'algorithme détaillé au paragraphe 8 du chapitre 4.

Notre méthode introduit les inconnues supplémentaires λ et μ mais nous savons, par l'expérience d'autres problèmes de mécanique, que la technique des multiplicateurs de Lagrange donne de la souplesse au calcul numérique et qu'il ne faut surtout pas les éliminer.

Remarque : Ces résultats ont été présentés lors de la 8^{ème} Conférence « Shell Structures, Theory and Applications » (SSTA) en 2005 à Jurata en Pologne [VAL 5].

9- Nouveau système adjoint

9-1 Modification du système adjoint

Les quatre équations aux dérivées partielles satisfaites par les champs de vecteurs λ et μ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} &= \lambda \times \mathbf{Y}_1 + \mu \times \mathbf{U}_1 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{v}} &= \lambda \times \mathbf{Y}_2 + \mu \times \mathbf{U}_2 \\ \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}} &= \mu \times \mathbf{Y}_1 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_1 \\ \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{v}} &= \mu \times \mathbf{Y}_2 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_2. \end{aligned}$$

font apparaître des groupements

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{Y}_1 \times \lambda, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{Y}_2 \times \lambda, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{Y}_1 \times \mu \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{Y}_2 \times \mu.$$

La pratique des vecteurs rotation instantanée en mécanique nous suggère de préférer aux vecteurs λ et μ les vecteurs $\ell = \Omega \lambda$ et $m = \Omega \mu$.

Puisque les vecteurs de Darboux sont associés aux dérivées partielles de la rotation Ω par les définitions

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega(Y_1 \times I) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega(Y_2 \times I).$$

Les dérivées partielles des vecteurs ℓ et m

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial u} &= \frac{\partial \Omega}{\partial u} \times \lambda + \Omega \times \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \Omega(Y_1 \times \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial u}) \\ \frac{\partial \ell}{\partial v} &= \Omega(Y_2 \times \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial v}) \\ \frac{\partial m}{\partial u} &= \Omega(Y_1 \times \mu + \frac{\partial \mu}{\partial u}) \\ \frac{\partial m}{\partial v} &= \Omega(Y_2 \times \mu + \frac{\partial \mu}{\partial v}) \end{aligned}$$

restituent les groupements précédemment remarqués.

Par ailleurs, la propriété A-8-2 de l'Annexe A implique directement que l'adjuguée d'une rotation, telle que Ω , soit sa transposée. Cette propriété associée à la propriété A-8-1 montre que l'image d'un produit vectoriel par une rotation est l'image des produits vectoriels. Ainsi

$$\begin{aligned} \Omega(\mu \times U_1) &= m \times (\Omega U_1) & \Omega(\mu \times U_2) &= m \times (\Omega U_2) \\ \Omega(e_3 \times U_1) &= (\Omega e_3) \times (\Omega U_1) & \Omega(e_3 \times U_2) &= (\Omega e_3) \times (\Omega U_2). \end{aligned}$$

Rappelons-nous, qu'au chapitre 4, les vecteurs tangents $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ (respectivement la normale n) se sont révélés être les images des vecteurs de Gram (respectivement de e_3) par la rotation Ω .

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \Omega U_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \Omega U_2, \quad n = \Omega e_3.$$

Le système aux dérivées partielles satisfait par λ et μ se transforme donc en un système aux dérivées partielles plus simple satisfait par ℓ et m

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial u} &= m \times \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial \ell}{\partial v} &= m \times \frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial u} &= n \times \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial m}{\partial v} &= n \times \frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned} \tag{8.2}$$

9-2 Condition d'intégrabilité assurant l'existence de ℓ

L'existence de λ assure l'existence de ℓ . La preuve de la symétrie des dérivées secondes partielles de λ invoquait plusieurs fois l'identité de Jacobi. La preuve de la symétrie des dérivées secondes partielles de ℓ devrait se révéler plus simple. Etudions donc directement l'intégrabilité du système aux dérivées partielles (8.1). Comparons les dérivées secondes croisées de ℓ :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \ell}{\partial u} \right) = \frac{\partial m}{\partial v} \times \frac{\partial x}{\partial u} + m \times \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \ell}{\partial v} \right) = \frac{\partial m}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} + m \times \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

A cause de (8.2) et de la symétrie des dérivées secondes de la position x , cette différence se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \ell}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \ell}{\partial v} \right) = \left(n \times \frac{\partial x}{\partial v} \right) \times \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \times n \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

L'identité de Jacobi permet de la transformer en $\left(\frac{\partial x}{\partial v} \times \frac{\partial x}{\partial u} \right) \times n$ qui est nul. Comme c'était le cas du système (5.1), il n'y a pas d'obstruction à l'intégrabilité du système aux dérivées partielles (8.1).

Nous pouvons constater le plein accord entre les symétries des dérivées secondes de λ et ℓ puisqu'elles découlent respectivement des égalités

$$(U_1 \times U_2) \times e_3 = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial x}{\partial v} \times \frac{\partial x}{\partial u} \right) \times n = 0.$$

9-3 Condition d'intégrabilité assurant l'existence de m

L'existence de μ était assurée par la condition de Meusnier de nullité de la courbure moyenne. La preuve de la symétrie des dérivées secondes partielles de μ invoquait plusieurs fois l'identité de Jacobi. A cause de la symétrie des dérivées secondes de la position x , la différence des dérivées secondes partielles croisées de m , se réduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial m}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial m}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(n \times \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(n \times \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial n}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial v} \times \frac{\partial x}{\partial u} + n \times \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial n}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial v} \times \frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned}$$

Cette différence

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{v}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \quad (9.3.1)$$

peut se traduire en termes de vecteurs de Gram et de vecteurs de Darboux

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{v}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} &= [\Omega \mathbf{Y}_1 \times \mathbf{e}_3] \times (\Omega \mathbf{U}_2) - [\Omega (\mathbf{Y}_2 \times \mathbf{e}_3)] \times (\Omega \mathbf{U}_1) \\ &= \Omega [(\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{e}_3) \times \mathbf{U}_2 - (\mathbf{Y}_2 \times \mathbf{e}_3) \times \mathbf{U}_1]. \end{aligned}$$

Puisque les vecteurs de Gram sont orthogonaux à \mathbf{e}_3 , les doubles produits vectoriels se simplifient et il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{v}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} &= [\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{U}_2 - \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{U}_1] \Omega \mathbf{e}_3 = [\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{U}_2 - \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{U}_1] \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} \right\|} [\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{U}_2 - \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{U}_1] \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} \right) \\ &= \frac{[\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{U}_2 - \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{U}_1]}{\| \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 \|} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} \right) \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{v}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = -2H \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} \right)$$

en reconnaissant la courbure moyenne H de la surface S (paragraphe 7-4 du chapitre 4).

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{u}} \right) = -2H \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} \right).$$

Les dérivées secondes de \mathbf{m} seront symétriques si la courbure moyenne est nulle et nous retrouvons la condition de Meusnier.

Nous pouvons aussi calculer la différence (9.3.1) en invoquant les formules de Weingarten (paragraphe 5-2 du chapitre 4) qui impliquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{FM - GL}{EG - F^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{v}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} &= -\frac{FM - EN}{EG - F^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} \right). \end{aligned}$$

Nous retrouvons la valeur

$$-\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) = -2H \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

de la différence (9.3.1) en reconnaissant l'expression de la courbure moyenne du paragraphe 7-2 du chapitre 4.

9-4 Conditions aux limites

Sur le bord \mathcal{T} de la surface, les conditions aux limites deviennent :

$$\ell = 0 \text{ et } \mathbf{n} \times \mathbf{m} = 0.$$

En effet, puisque Ω est une rotation,

$$\begin{aligned} \ell &= \Omega \lambda \\ \text{et } \mathbf{n} \times \mathbf{m} &= \Omega \mathbf{e}_3 \times \Omega \boldsymbol{\mu} = \Omega(\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

sont nuls si et seulement si λ et $\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\mu}$ sont nuls. Nous reconnaissons les conditions aux limites (5.3) satisfaites par λ et $\boldsymbol{\mu}$.

10- Sœur de la surface minimale S

10-1 Définition

Nous appellerons **sœur de la surface S** , la surface S' d'équation paramétrique $\mathbf{m}(u,v)$ solution du système aux dérivées partielles (8.2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u} &= \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial v} &= \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Remarque : Le système aux dérivées partielles (8.2) n'étant intégrable au sens de Frobenius que si la courbure moyenne de la surface d'équation paramétrique $\mathbf{x}(u,v)$ est nulle (paragraphe 9.3) seules les surfaces minimales ont une sœur.

10-2 Propriétés de la surface S' d'équation paramétrique $\mathbf{m}(u,v)$

Nous allons étudier la surface S' d'équation paramétrique $\mathbf{m}(u,v)$ et énoncer une liste de propriétés qui la concerne et qui la lie à la surface S d'équation paramétrique $\mathbf{x}(u,v)$.

Propriété 10.1 : Les deux surfaces S et S' ont même première forme fondamentale (ou même métrique).

Démonstration :

Notons par des primes les variables liées à la surface S' (vecteurs de Gram, vecteurs de Darboux,...). D'après (8.2) :

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = (\Omega \mathbf{e}_3) \times (\Omega \mathbf{U}_1) = \Omega (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} = (\Omega \mathbf{e}_3) \times (\Omega \mathbf{U}_2) = \Omega (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_2).$$

Nous pouvons donc associer à la surface S' les vecteurs de Gram

$$\mathbf{U}'_1 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_1 \text{ et } \mathbf{U}'_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_2.$$

Remarquons qu'ils se déduisent des vecteurs de Gram \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 par une rotation d'angle $\pi/2$ autour de \mathbf{e}_3 . Leurs produits scalaires sont donc conservés. Cette propriété permet d'affirmer que la première forme fondamentale de la surface S' coïncide avec celle de la surface S .

Propriété 10.2 : Les rotations, et par la suite les deux vecteurs de Darboux associés aux surfaces S et S' , sont identiques.

Démonstration :

Le choix de $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_1$ et $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_2$ comme vecteurs de Gram de la surface S' implique $\Omega' = \Omega$ et par suite

$$\mathbf{Y}'_1 = \mathbf{Y}_1 \text{ et } \mathbf{Y}'_2 = \mathbf{Y}_2.$$

Propriété 10.3 : Les normales aux deux surfaces sont identiques.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}$ et $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}}$ se déduisent des vecteurs

$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}$ et $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}}$ du plan tangent en \mathbf{x} à la surface S par rotation d'angle $\pi/2$ autour de \mathbf{n} .

Propriété 10.4 : La courbure moyenne de la surface S' est nulle. La sœur d'une surface minimale est elle-même une surface minimale.

Démonstration :

Calculons la courbure moyenne H' de la surface S' par son expression (paragraphe 7-4, chapitre 4)

$$H' = \frac{\mathbf{Y}'_2 \cdot \mathbf{U}'_1 - \mathbf{Y}'_1 \cdot \mathbf{U}'_2}{\|\mathbf{U}'_1 \times \mathbf{U}'_2\|} = \frac{\mathbf{Y}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_1) - \mathbf{Y}_1 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{U}_2)}{\|\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2\|} = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{U}_1 \times \mathbf{Y}_2 - \mathbf{U}_2 \times \mathbf{Y}_1)}{\|\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2\|}.$$

La condition de compatibilité satisfaite par les vecteurs de Gram de la surface S (formule notée (1.3) dans ce chapitre) permet de remplacer le vecteur $U_1 \times Y_2 - U_2 \times Y_1$ par $\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u}$. Ainsi

$$H' = \frac{1}{\|U_1 \times U_2\|} e_3 \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} \right) = 0$$

puisque les vecteurs U_1 et U_2 sont orthogonaux à e_3 .

La courbure moyenne de S' est donc nulle.

Remarque : Nous n'avons pas explicitement invoqué la nullité de la courbure moyenne de la surface S .

Propriété 10.5 : Les deux surfaces S et S' ont même courbure de Gauss.

Démonstration :

Calculons la courbure de Gauss K' de la surface S' par son expression (paragraphe 7-4, chapitre 4).

$$K' = \frac{\eta(Y'_1, Y'_2, e_3)}{\sqrt{\det \mathbf{a}'}}.$$

Comme les métriques, ainsi que les vecteurs de Darboux des surfaces S et S' coïncident, il en est de même de leurs courbures totales en cohérence avec le théorème d'excellence de Gauss.

Propriété 10.6 : La seconde forme fondamentale de la surface sœur a pour expression matricielle

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} U_1 \cdot Y_1 & U_1 \cdot Y_2 \\ U_2 \cdot Y_1 & U_2 \cdot Y_2 \end{bmatrix}.$$

Démonstration :

Les définitions de vecteurs de Gram de la surface sœur

$$U'_1 = e_3 \times U_1 = \mathbf{j}(e_3)U_1$$

$$U'_2 = e_3 \times U_2 = \mathbf{j}(e_3)U_2$$

impliquent

$$\begin{bmatrix} (U'_1)^T \\ (U'_2)^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \mathbf{j}(e_3).$$

L'expression de la matrice de la seconde forme fondamentale

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} j(\mathbf{e}_3) [Y_1 \quad Y_2]$$

présentée au cours du paragraphe 6-2 du chapitre 4 conduit à :

$$\mathbf{b}' = - \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [j(\mathbf{e}_3)]^2 [Y_1 \quad Y_2] = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [Y_1 \quad Y_2]$$

ou aussi bien à

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [Y_1 \quad Y_2]$$

puisque les vecteurs de Gram U_1 et U_2 ont leurs troisièmes composantes nulles. Ainsi nous aboutissons à l'expression annoncée

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [Y_1 \quad Y_2] = \begin{bmatrix} U_1^T Y_1 & U_1^T Y_2 \\ U_2^T Y_1 & U_2^T Y_2 \end{bmatrix}$$

qui est symétrique à cause de la nullité de la courbure moyenne de la surface S .

$$U_2 \cdot Y_1 = U_1 \cdot Y_2.$$

Propriété 10.7 : La seconde forme fondamentale de la surface sœur S' s'exprime en fonction des première et seconde formes fondamentales de la surface minimale S par la formule

$$\begin{bmatrix} L' & M' \\ M' & N' \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

C'est à dire

$$\mathbf{b}' = \frac{-1}{\sqrt{\det \mathbf{a}}} \mathbf{a} \mathbf{J} \mathbf{b}.$$

Démonstration :

Partons encore de l'expression

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} j(\mathbf{e}_3) [Y_1 \quad Y_2]$$

présentée au cours du paragraphe 6-2 du chapitre 4. Multiplions la à gauche par $\mathbf{a} \mathbf{J}$, en choisissant l'expression

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [U_1 \quad U_2]$$

de la première forme fondamentale. Nous obtenons

$$\mathbf{aJb} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [U_1 \quad U_2] \mathbf{J} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \mathbf{j}(e_3) [Y_1 \quad Y_2].$$

Mais la matrice 3×3 ,

$$[U_1 \quad U_2] \mathbf{J} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix}$$

de noyau $\mathbf{R}e_3$, se simplifie en :

$$[U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} -U_2^T \\ U_1^T \end{bmatrix} = U_2 U_1^T - U_1 U_2^T = \mathbf{j}(U_1 \times U_2) = \|U_1 \times U_2\| \mathbf{j}(e_3) = \sqrt{\det \mathbf{a}} \mathbf{j}(e_3).$$

Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{a}}} \mathbf{aJb} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [\mathbf{j}(e_3)]^2 [Y_1 \quad Y_2]$$

et nous reconnaissons l'opposée de \mathbf{b}' .

En conclusion :

Nous avons mis en évidence que toute surface minimale S admettait une sœur S' de même métrique, de même normale, de même courbure de Gauss, et de seconde forme fondamentale

$$\mathbf{b}' = \frac{-1}{\sqrt{\det \mathbf{a}}} \mathbf{aJb} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot Y_1 & U_1 \cdot Y_2 \\ U_2 \cdot Y_1 & U_2 \cdot Y_2 \end{bmatrix}.$$

Nous avons tous les outils de calcul nécessaires pour construire la sœur d'une surface minimale puisque nous savons que les vecteurs de Darboux sont les mêmes et que les vecteurs de Gram ont tourné d'un angle $\frac{\pi}{2}$ autour de e_3 . Nous allons traiter deux exemples.

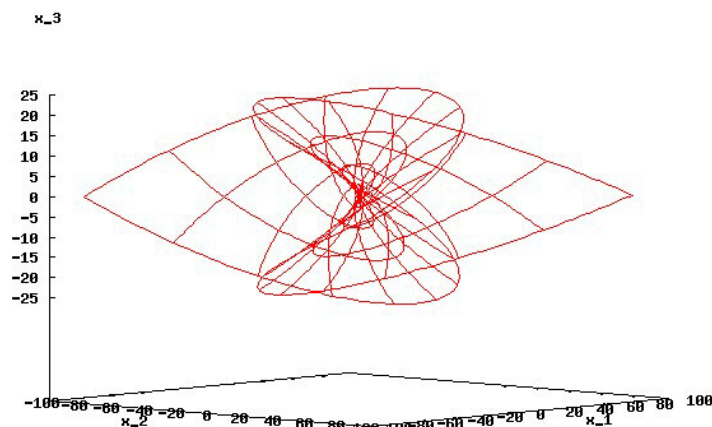
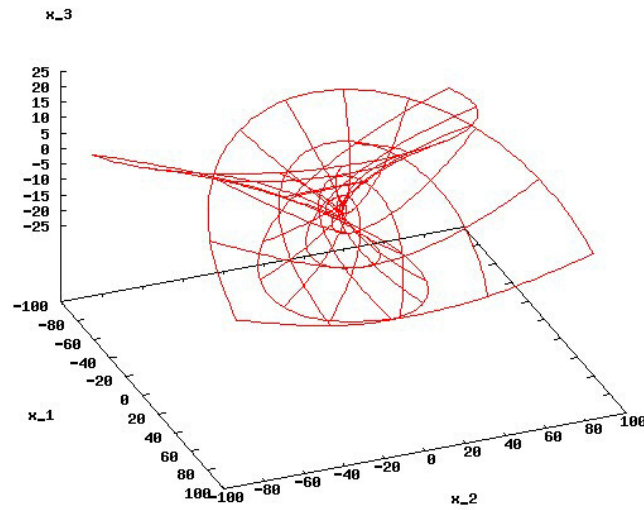
11-La sœur de la surface d'Enneper

Choisissons la représentation paramétrique suivante de la surface d'Enneper

$$\begin{aligned} x^1(u, v) &= \ell \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \right) \\ x^2(u, v) &= \ell \left(v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \right) \\ x^3(u, v) &= \ell (u^2 - v^2) \end{aligned}$$

où, ici, ℓ est un scalaire strictement positif.

Les figures ci-dessous représentent la surface d'Enneper sous deux angles de vue différents.



Calculons tout d'abord les composantes des vecteurs $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ tangents en \mathbf{x} à la surface d'Enneper :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \ell(1 - u^2 + v^2) \\ 2\ell uv \\ 2\ell u \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 2\ell uv \\ \ell(1 - v^2 + u^2) \\ -2\ell v \end{bmatrix}$$

Les coefficients de la première forme fondamentale \mathbf{a} sont donc :

$$E = \ell^2(1 + u^2 + v^2)^2, \quad F=0, \quad G = \ell^2(1 + u^2 + v^2)^2$$

et la matrice \mathbf{a} de la première forme fondamentale est proportionnelle à l'identité

$$\mathbf{a} = \ell^2(1 + u^2 + v^2)^2 \mathbf{I}_2.$$

Un choix simple des vecteurs de Gram est :

$$U_1 = \ell(1 + u^2 + v^2)\mathbf{e}_1, \quad U_2 = \ell(1 + u^2 + v^2)\mathbf{e}_2.$$

La rotation Ω qui transforme les vecteurs de Gram en les vecteurs tangents $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ a donc :

pour première colonne

$$\Omega \mathbf{e}_1 = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 1 - u^2 + v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{bmatrix}$$

et pour deuxième colonne

$$\Omega \mathbf{e}_2 = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 2uv \\ 1 + u^2 - v^2 \\ -2v \end{bmatrix}.$$

La troisième colonne \mathbf{n} de Ω s'obtient en faisant le produit vectoriel des deux premières colonnes

$$\mathbf{n} = \Omega \mathbf{e}_3 = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{bmatrix}$$

L'expression matricielle complète de la rotation Ω est donc

$$\Omega = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \begin{bmatrix} 1 - u^2 + v^2 & 2uv & -2u \\ 2uv & 1 + u^2 - v^2 & 2v \\ 2u & -2v & 1 - u^2 - v^2 \end{bmatrix}.$$

Les dérivées partielles de la normale

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} = \frac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{bmatrix} 1 - u^2 + v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{bmatrix} -2uv \\ 1 + u^2 - v^2 \\ -2v \end{bmatrix}$$

permettent de calculer la seconde forme fondamentale \mathbf{b} par la formule

$$\mathbf{b} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \end{bmatrix}$$

d'où l'expression :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = 2\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le calcul des composantes des vecteurs de Darboux peut s'effectuer à partir des équations (6.2.1) et (6.4.2) du chapitre 4.

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{J} \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$-\mathbf{J} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{J} \begin{bmatrix} Y_1^3 \\ Y_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2^1}{\partial u} - \frac{\partial u_1^1}{\partial v} \\ \frac{\partial u_2^2}{\partial u} - \frac{\partial u_1^2}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

La résolution de ces équations linéaires est simple, elle donne :

$$Y_1 = \frac{-2}{\ell(1+u^2+v^2)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{bmatrix} \quad Y_2 = \frac{-2}{\ell(1+u^2+v^2)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -u \end{bmatrix}$$

La valeur de $\text{tr}(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b})$ ou de $Y_2 \cdot U_1 - Y_1 \cdot U_2$ est nulle, la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle. C'est une surface minimale, cherchons sa sœur !

Nous savons que la rotation de la surface sœur définie par $m(u,v)$ est inchangée mais que les vecteurs de Gram tournent d'un angle $\frac{\pi}{2}$ autour de \mathbf{e}_3

$$U_1' = \ell(1+u^2+v^2)\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \ell(1+u^2+v^2)\mathbf{e}_2$$

$$U_2' = \ell(1+u^2+v^2)\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\ell(1+u^2+v^2)\mathbf{e}_1$$

Les vecteurs tangents en m à la surface sœur sont les images par Ω de ces vecteurs de Gram :

$$\frac{\partial m}{\partial u} = \Omega U_1' = \ell \begin{bmatrix} 2uv \\ 1+u^2-v^2 \\ -2v \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial m}{\partial v} = \Omega U_2' = -\ell \begin{bmatrix} 1-u^2+v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{bmatrix}$$

L'intégration de ces équations permet de trouver une représentation paramétrique de la surface sœur de la surface d'Enneper :

$$m(u, v) = \ell \begin{bmatrix} u^2 v - \frac{1}{3} v^3 - v \\ \frac{1}{3} u^3 - uv^2 + u \\ -2uv \end{bmatrix} + m_0$$

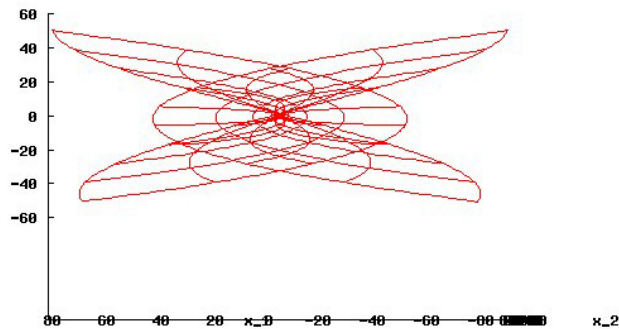
où m_0 est un vecteur constant que l'on peut choisir égal à zéro. Nous savons que ces deux surfaces n'ont pas les mêmes secondes formes fondamentales, la formule qui les relie est :

$$\mathbf{b}' = \frac{-1}{\sqrt{\det \mathbf{a}}} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

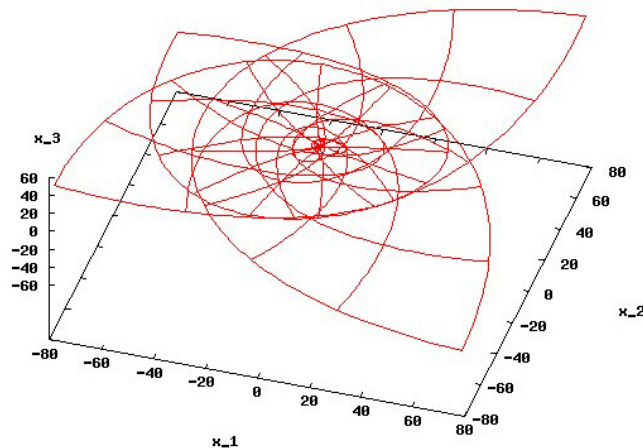
La seconde forme fondamentale de la sœur de la surface d'Enneper est donc :

$$\mathbf{b}' = -2\ell \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ alors que } \mathbf{b} = 2\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La représentation de la surface sœur de la surface d'Enneper donne sous un angle de vue perpendiculaire à l'axe e_1 :



et sous un autre angle de vue :



12-La sœur de la caténoïde

Choisissons la représentation paramétrique suivante :

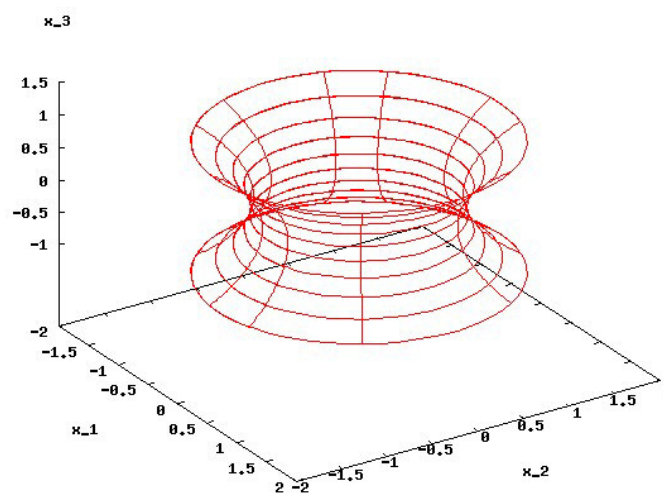
$$x^1(u, v) = \ell \operatorname{ch} u \cos v$$

$$x^2(u, v) = \ell \operatorname{ch} u \sin v$$

$$x^3(u, v) = \ell u$$

de la caténoïde où ℓ est un scalaire strictement positif.

La caténoïde est représentée par la figure ci-dessous



Les composantes des vecteurs $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$, tangents en x à la caténoïde, sont :

$$\frac{\partial x^1}{\partial u} = \ell \operatorname{sh} u \cos v \qquad \frac{\partial x^1}{\partial v} = -\ell \operatorname{ch} u \sin v$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial u} = \ell \operatorname{sh} u \sin v \qquad \frac{\partial x^2}{\partial v} = \ell \operatorname{ch} u \cos v$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial u} = \ell \qquad \frac{\partial x^3}{\partial v} = 0$$

La première forme fondamentale \mathbf{a} est proportionnelle à l'identité

$$\mathbf{a} = (\ell \operatorname{ch} u)^2 \mathbf{I}_2.$$

Un choix simple des vecteurs de Gram est

$$U_1 = \ell \operatorname{ch} u \mathbf{e}_1, \quad U_2 = \ell \operatorname{ch} u \mathbf{e}_2.$$

La rotation Ω , qui transforme les vecteurs de Gram en les vecteurs tangents $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$, a donc pour expression matricielle :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \cos v \operatorname{th} u & -\sin v & -\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u} \\ \sin v \operatorname{th} u & \cos v & -\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u} \\ \frac{1}{\operatorname{ch} u} & 0 & \operatorname{th} u \end{bmatrix}.$$

En dérivant partiellement la rotation Ω par rapport aux paramètres u et v , les formules

$$\Omega^T \frac{\partial \Omega}{\partial u} = j(Y_1) \quad \text{et} \quad \Omega^T \frac{\partial \Omega}{\partial v} = j(Y_2)$$

permettent d'obtenir les deux vecteurs de Darboux

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \operatorname{ch} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \operatorname{ch} u \\ 0 \\ \operatorname{th} u \end{bmatrix}.$$

La connaissance des vecteurs de Gram et des vecteurs de Darboux permet de trouver la seconde forme fondamentale

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = \ell \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La valeur de $\operatorname{tr}(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b})$ ou de $Y_2 \cdot U_1 - Y_1 \cdot U_2$ est nulle, la caténoïde est de courbure moyenne nulle. C'est une surface minimale, cherchons sa sœur !

Nous savons que la rotation de la surface sœur est inchangée mais que les vecteurs de Gram tournent d'un angle $\frac{\pi}{2}$ autour de e_3 .

$$\begin{aligned} U'_1 &= \ell \operatorname{ch} u e_3 \times e_1 = \ell \operatorname{ch} u e_2 \\ U'_2 &= \ell \operatorname{ch} u e_3 \times e_2 = -\ell \operatorname{ch} u e_1 \end{aligned}$$

Les vecteurs tangents en m à la surface sœur sont les images par Ω de ces vecteurs de Gram :

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u} = \Omega U'_1 = \ell \begin{bmatrix} -\sin v \operatorname{ch} u \\ \cos v \operatorname{ch} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial v} = \Omega U'_2 = -\ell \begin{bmatrix} \cos v \operatorname{sh} u \\ \sin v \operatorname{sh} u \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'intégration de ces équations permet de trouver une représentation paramétrique de la surface sœur de la caténoïde

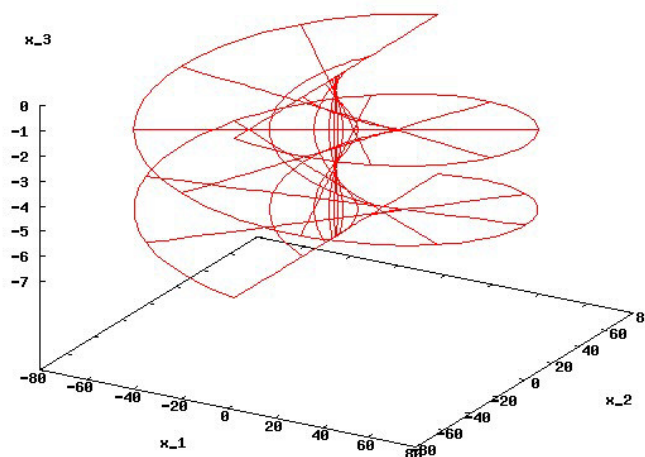
$$\mathbf{m}(u, v) = \ell \begin{bmatrix} -\sin v \operatorname{sh} u \\ \cos v \operatorname{sh} u \\ -v \end{bmatrix} + \mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \operatorname{sh} u \cos v \\ \ell \operatorname{sh} u \sin v \\ -v \end{bmatrix} + \mathbf{m}_0$$

où \mathbf{m}_0 est un vecteur constant que l'on peut choisir égal à zéro. Nous reconnaissons une représentation paramétrique de l'hélicoïde gauche car la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de \mathbf{e}_3 .

La figure ci-dessous représente l'hélicoïde gauche



13- La sœur de la sœur de la sœur...

La surface d'équation paramétrique $m(u,v)$ est elle-même de courbure moyenne nulle. On peut chercher sa sœur. Elle aura encore les mêmes vecteurs de Darboux et ses vecteurs de Gram seront

$$U_1'' = e_3 \times U_1' = e_3 \times (e_3 \times U_1) = -U_1 \quad U_2'' = -U_2.$$

Ce sera une surface S'' de représentation paramétrique $-x(u,v)$. C'est, à nouveau, une surface de courbure moyenne nulle et on peut en chercher la sœur S''' . Ses vecteurs de Darboux sont encore les mêmes et ses vecteurs de Gram sont

$$U_1''' = e_3 \times U_1'' = -e_3 \times U_1 = -U_1' \quad U_2''' = -U_2'.$$

Une représentation paramétrique de S''' est $-m(u,v)$. A nouveau, c'est une surface de courbure moyenne nulle et on peut en chercher la sœur S'''' . Ses vecteurs de Darboux sont toujours les mêmes et ses vecteurs de Gram ont tourné quatre fois d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ autour de e_3 par rapport à ceux de S .

$$U_1'''' = e_3 \times U_1''' = -e_3 \times (e_3 \times U_1) = U_1 \quad U_2'''' = U_2.$$

Une représentation paramétrique de S'''' est $x(u,v)$. La boucle est bouclée, les sœurs sont quatre.

Remarque : Dans le cadre des surfaces minimales, on trouve dans la littérature des surfaces cousines et des surfaces conjuguées [DAN 1] de même première forme fondamentale, les surfaces de Bryant par exemple. Mais les relations entre les secondes formes fondamentales sont différentes de celles que nous avons obtenues par la considération du système adjoint.

14- Conclusion

À partir de l'étude du problème de Plateau, ce chapitre a permis de mettre en évidence, plusieurs résultats intéressants :

- dans le cadre de la théorie des surfaces mettant en jeu les vecteurs de Gram et de Darboux que nous avons développée au chapitre 4, la condition de Meusnier de nullité de la courbure moyenne apparaît comme une condition d'intégrabilité de Frobenius du système adjoint,

- le système adjoint admet des solutions qui sont elles-mêmes des surfaces minimales de même première forme fondamentale mais de seconde forme fondamentale distincte satisfaisant à une règle précise, ce qui nous a amené à la définition de surfaces minimales sœurs,

- la suite des surfaces minimales sœurs boucle en quatre itérations.

Nous avons revisité le problème de Plateau par une approche à la Pontriaguine, issue de la commande optimale : la fonction coût est l'aire à minimiser, le temps est remplacé par les deux paramètres de la surface et les « équations du mouvement » par les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi. Les outils de la Mécanique, essentiellement les multiplicateurs de Lagrange, nous ont permis de proposer une voie inexplorée à notre connaissance par les géomètres.

Nous pensons que le programme de construction d'une surface minimale à partir d'un contour donné présenté au paragraphe 8 est prêt pour bâtir des logiciels de calcul. Peut être inspirera-t-il le génie civil, notamment les architectes qui cherchent à créer de nouveaux designs. Peut être les surfaces minimales simulées par ces logiciels feront-elles de nouveau rêver les artistes, sculpteurs et photographes pour leurs formes esthétiques élégantes et dépouillées comme ce fut le cas des objets mathématiques de l'Institut Poincaré dans les années 30 [FORT 1].

Chapitre 6

ÉQUIVALENCE ENTRE L'ANNULATION DU TENSEUR DE COURBURE DE RIEMANN-CHRISTOFFEL DANS UNE COQUE ET LES CONDITIONS DE GAUSS-CODAZZI-MAINARDI SUR LA SURFACE MOYENNE

Ce chapitre présente un travail effectué en commun avec Claude Vallée sur une question posée par P. G. Ciarlet. Il est rédigé sous la forme d'un article de revue et apparaît donc sous une présentation différente de celle des chapitres précédents. Conçu comme un tout permettant au lecteur de suivre les étapes du raisonnement, il revient sur différents aspects déjà abordés aux chapitres 1 et 4. Spécialement dédié à la théorie des coques, il adopte une approche et des notations légèrement différentes. Nous utiliserons par exemple

- la notation (y^1, y^2, x^3) au lieu de (x^1, x^2, x^3) pour désigner les paramètres d'un point de la coque,
- la notation (x^1, x^2) au lieu de (u, v) pour désigner les paramètres de la surface moyenne,
- la notation a_3 au lieu de n pour désigner la normale unitaire à la surface moyenne,
- la notation anglo-saxonne \times au lieu de \wedge pour désigner le produit vectoriel,
- la notation g au lieu de C ,
- les notations A et B pour désigner la représentation matricielle des deux formes fondamentales \mathbf{a} et \mathbf{b} d'une surface.

Ce chapitre a deux objectifs :

- établir, pour une coque \mathcal{D} de surface moyenne \mathcal{S} , l'équivalence entre l'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel (condition de compatibilité 3D) dans \mathcal{D} et les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi (condition de compatibilité 2D) sur \mathcal{S} .
- montrer que la méthodologie proposée aux chapitres 1 et 4 est une voie constructive pour traiter les questions traditionnelles de la théorie des coques minces en conduisant les calculs de manière plus simple.

Les résultats obtenus sont le fruit de réflexions de plusieurs années [VAL 6]. De nombreux tâtonnements ont précédé le choix des bons objets à la fois en 2D et 3D. Par exemple, les résultats établis en dimension 2 sur les plaques planes minces [BEL 1] [FOR 4] ont été la source de nombreux développements ultérieurs.

Résumé

Dans un domaine simplement connexe, une condition nécessaire et suffisante bien connue pour que le système aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Theta^k}{\partial x^i} \delta_{k\ell} \frac{\partial \Theta^\ell}{\partial x^j} = g_{ij}(x)$$

soit intégrable, est la nullité du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, associé aux g_{ij} considérés comme les composantes d'une métrique. Dans le cas particulier d'un espace Euclidien 3D, si on introduit une matrice 3×3 inversible U , solution (non nécessairement symétrique) de

$$U_i^k \delta_{k\ell} U_j^\ell = g_{ij}$$

et la matrice 3×3

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U(\text{Rot}(U^T)U) - \frac{\text{tr}[U(\text{Rot}(U^T))]U}{2}]$$

cette condition de compatibilité prend la forme condensée :

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda = 0.$$

Lorsque $\Theta(x^1, x^2, x^3) = \theta(x^1, x^2) + x^3 a_3(x^1, x^2)$ paramétrise une coque, où $\theta(x^1, x^2)$ paramétrise la surface moyenne et $a_3(x^1, x^2)$ désigne la normale unitaire, une question se pose :

Les conditions de Riemann-Christoffel associées à la métrique g se réduisent-elles aux conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi associées aux première et deuxième formes fondamentales a et b de la surface moyenne ?

Nous présentons ici une démonstration de l'équivalence entre ces conditions de compatibilité 2D et 3D. Si l'on cherche une preuve de cette équivalence à partir des conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi (G-C-M) développées avec des symboles de Christoffel, c'est un pari perdu ! Une version condensée des conditions G-C-M. a été proposée par Claude Vallée et moi-même (1996) et simultanément par Athanassios Fokas et Israel Gelfand (1996 et 2000). L'idée clé est de préférer aux six symboles proposés par Elwin Bruno Christoffel les composantes de deux vecteurs rotations instantanées Y_α proposées par Gaston Darboux. Les deux premières composantes de ces deux vecteurs de Darboux sont déterminées par une équation linéaire mettant en jeu les deux formes fondamentales :

$$uJ \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = b$$

où J désigne la matrice 2×2 antisymétrique $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et u la racine carrée (choisie symétrique et défini-positive) de la première forme fondamentale \mathbf{a} . Les troisièmes composantes Y_1^3 et Y_2^3 sont déterminées par l'équation linéaire mettant en jeu les dérivées partielles de la racine carrée de la première forme fondamentale :

$$\begin{bmatrix} Y_1^3 & Y_2^3 \end{bmatrix} J u J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^1}{\partial x^2} - \frac{\partial u_2^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u_1^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u_2^2}{\partial x^1} \end{bmatrix}.$$

Avec la méthode de Darboux, les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi prennent l'expression élégante suivante ([DAR 1], page 369) :

$$\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 = Y_1 \times Y_2.$$

Cette approche est mise en œuvre dans les publications récentes sur le sujet de P. G. Ciarlet [CIA 11-14] et de W. Pietraszkiewicz [PIE 3-5].

Dans le cas d'une coque, une solution pour U est :

$$U(x^1, x^2, x^3) = \begin{bmatrix} u(x^1, x^2) - x^3 u^{-1}(x^1, x^2) b(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de U

$$\det U = (\det u) [1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2]$$

met en jeu la courbure moyenne H et la courbure de Gauss K de la surface moyenne. La définition de Λ conduit à

$$\Lambda = \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & 0 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & 0 \\ Y_1^3 & Y_2^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est alors relativement simple de démontrer que les conditions de Riemann-Christoffel traduites sous la forme

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda = 0$$

sont équivalentes aux conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi traduites sous la forme

$$\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 = Y_1 \times Y_2.$$

1- Introduction

Nous utiliserons dans la suite les notations et conventions suivies par P. G. Ciarlet [CIA 10]. Commençons par lister les principales.

Tous les espaces, matrices, etc..., considérés sont réels. Les indices et exposants grecs varient dans l'ensemble $\{1,2\}$, les indices et exposants latins varient dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, et la convention de sommation qui respecte la répétition des indices et exposants est utilisée systématiquement. E^3 représente l'espace Euclidien de dimension 3. Le produit scalaire Euclidien et le produit vectoriel des vecteurs v et w de E^3 sont notés $v \cdot w$ et $v \times w$, la norme d'un vecteur v de E^3 est notée $\|v\|$. L'espace E^3 est muni d'une base orthonormée directe constituée de trois vecteurs \hat{e}_i .

Soit ω un domaine de \mathbf{R}^2 . Soit $y = (y^\alpha)$ un point quelconque du domaine $\bar{\omega}$, et soit ∂_α la dérivée partielle par rapport à la variable y^α : $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$. Considérons une immersion

$\theta \in C^3(\bar{\omega}; E^3)$, c'est à dire une application telle que les deux vecteurs

$$a_\alpha(y) = \partial_\alpha \theta(y)$$

soient linéairement indépendants pour tous les points $y \in \bar{\omega}$. Ces deux vecteurs engendrent le plan tangent à la surface

$$S = \theta(\bar{\omega})$$

au point $\theta(y)$, et le vecteur unitaire

$$a_3(y) = \frac{a_1(y) \times a_2(y)}{\|a_1(y) \times a_2(y)\|}$$

est normal à S au point $\theta(y)$. Les trois vecteurs $a_i(y)$ constituent une base covariante au point $\theta(y)$. La base contravariante $a^i(y)$ est définie par les relations

$$a^i(y) \cdot a_j(y) = \delta_j^i$$

où δ_j^i est le symbole de Kronecker. Le vecteur $a_3(y)$ est unitaire donc $a_3(y) = a^3(y)$, les vecteurs $a^\alpha(y)$ appartiennent eux aussi à l'espace tangent à S en $\theta(y)$.

Les composantes covariantes et contravariantes $a_{\alpha\beta}$ et $a^{\alpha\beta}$ de la première forme fondamentale de S , les symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ et les composantes covariantes et mixtes de la seconde forme fondamentale sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= a_\alpha \cdot a_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma &= a^\sigma \cdot \partial_\beta a_\alpha \\ b_{\alpha\beta} &= a^3 \cdot \partial_\beta a_\alpha, \quad b_\alpha^\beta = a^{\beta\sigma} b_{\sigma\alpha}. \end{aligned}$$

L'élément d'aire sur S est $\sqrt{a} dy$ où $a = \det(a_{\alpha\beta})$, on peut noter que $\sqrt{a} = \|a_1 \times a_2\|$.

Soit Ω le domaine $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, soit $x = (x^i)$ un point générique de $\overline{\Omega}$ (par conséquent $x^\alpha = y^\alpha$) et soit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Nous considérons une coque de surface moyenne $S = \theta(\overline{\omega})$ et d'épaisseur 2ε , c'est-à-dire, le solide dont la configuration de référence est le domaine $\Theta(\overline{\omega} \times]-\varepsilon, \varepsilon[)$ où, pour tous points $(y, x^3) \in \overline{\omega} \times]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$\Theta(y, x^3) = \theta(y) + x^3 a_3(y)$$

Cette définition prend son sens uniquement si l'application Θ est globalement injective sur le domaine $\overline{\Omega}$. C'est le cas si l'immersion θ est elle-même globalement injective sur $\overline{\omega}$, et si ε est suffisamment petit.

Rappelons le théorème 4.1.1 de l'article de Philippe G. Ciarlet [CIA 10].

Théorème 1.1: Soit ω un domaine de \mathbf{R}^2 et soit $\theta \in C^3(\overline{\omega}; E^3)$ une immersion injective. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'application $\Theta : \overline{\Omega} \rightarrow E^3$ définie par

$$\Theta(y, x^3) = \theta(y) + x^3 a_3(y) \text{ pour tous } (y, x^3) \in \overline{\Omega},$$

où $\Omega = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, est un C^2 -difféomorphisme de $\overline{\Omega}$ dans $\Theta(\overline{\Omega})$ et $\det(g_1, g_2, g_3) > 0$ dans $\overline{\Omega}$, où l'on a noté $g_i = \partial_i \Theta$.

Dans ce qui suit, nous supposons que ε est strictement positif et suffisamment petit pour assurer la validité de ce théorème. En particulier, $(y^1, y^2, x^3) \in \overline{\Omega}$ constitue alors un système de coordonnées curvilignes qui permet de représenter correctement la configuration de référence $\Theta(\overline{\Omega})$ de la coque.

Le champ $C = \nabla \Theta^T \nabla \Theta$ de tenseurs métriques associé à l'immersion Θ satisfait à la condition de compatibilité [VAL 1], [CIA 11, 13].

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj} \Lambda = 0 \text{ dans } \Omega$$

où le champ de matrices Λ est défini en fonction d'un champ U solution de $U^T U = C$ par

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U \text{Rot}(U^T) U - \frac{\text{tr}[U \text{Rot}(U)^T]}{2} U].$$

Cette condition de compatibilité est une alternative à la condition de compatibilité classique exprimant la nullité, dans Ω , du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel associé au champ C .

De même que les composantes $g_{ij} = \partial_i \Theta \cdot \partial_j \Theta$ de $C = \nabla \Theta^T \nabla \Theta$ ne peuvent être arbitraires, les composantes $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ des premières et secondes formes fondamentales de la surface $\theta(\overline{\omega})$,

définie par l'immersion $\theta : \omega \rightarrow E^3$, ne peuvent pas être des fonctions arbitraires. Elles doivent satisfaire les conditions de compatibilité de Gauss-Codazzi-Mainardi [CIA 10].

Dans cet article nous répondons à la question :

Est-ce que l'annulation, dans la coque, du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel associé au champ $g_{ij} = \partial_i \Theta \cdot \partial_j \Theta$ équivaut aux conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi (C-G-M) satisfaites sur la surface moyenne par les champs

$$a_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \theta \cdot \partial_\beta \theta$$

et

$$b_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} \theta \cdot \frac{\partial_1 \theta \times \partial_2 \theta}{\|\partial_1 \theta \times \partial_2 \theta\|} ?$$

2- Expression des composantes de C dans la coque en fonction des composantes des deux formes fondamentales de la surface moyenne

Théorème 2.1 : Soit $\Theta = \theta + x^3 a_3$ la paramétrisation d'une coque et g_{ij} les composantes du tenseur $C = \nabla \Theta^T \nabla \Theta$. Alors :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - 2b_{\alpha\beta} x^3 + b_{\alpha\tau} a^{\tau\sigma} b_{\sigma\beta} (x^3)^2 \\ g_{\alpha 3} &= g_{3\alpha} = 0 \\ g_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Remarque : Les composantes g_{ij} de la métrique de la coque sont complètement déterminées par les deux formes fondamentales de la surface moyenne. Ce sont des trinômes du second degré en x^3 . Les fonctions

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha\tau} a^{\tau\sigma} b_{\sigma\beta}$$

sont les composantes de la troisième forme fondamentale de la surface moyenne.

Démonstration : Les relations

$$\partial_\alpha \Theta = a_\alpha + x^3 \partial_\alpha a_3$$

et

$$\partial_3 \Theta = a_3$$

impliquent :

$$g_{\alpha 3} = \partial_\alpha \Theta \cdot \partial_3 \Theta = a_\alpha \cdot a_3 + x^3 \partial_\alpha a_3 \cdot \partial_\alpha a_3 = 0$$

$$g_{33} = \partial_3 \Theta \cdot \partial_3 \Theta = a_3 \cdot a_3 = 1$$

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \Theta \cdot \partial_\beta \Theta = a_{\alpha\beta} + x^3 (a_\alpha \cdot \partial_\beta a_3 + a_\beta \cdot \partial_\alpha a_3) + (x^3)^2 (\partial_\alpha a_3 \cdot \partial_\beta a_3).$$

Puisque les vecteurs a_α et a_3 sont orthogonaux, l'expression

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha$$

des composantes de la deuxième forme fondamentale peut se transformer en :

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_3$$

ou, par symétrisation, en :

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_3).$$

Ainsi, le coefficient du terme de degré 1 en x^3 dans $\mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{n}$ est autre que $-2\mathbf{b}_{\alpha\beta}$. Les formules de Weingarten ([CIA 10], théorème 2.6.1) :

$$\partial_\alpha \mathbf{a}_3 = -\mathbf{b}_{\alpha\rho} \mathbf{a}^\rho$$

ou bien

$$\partial_\beta \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}^{\tau\sigma} \mathbf{b}_{\sigma\beta} \mathbf{a}_\tau$$

permettent de calculer le coefficient du terme de degré deux en x^3 :

$$(\partial_\alpha \mathbf{a}_3 \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}^{\tau\sigma} \mathbf{b}_{\sigma\beta} \mathbf{a}_\tau \cdot \mathbf{b}_{\alpha\rho} \mathbf{a}^\rho = \mathbf{a}^{\tau\sigma} \mathbf{b}_{\sigma\beta} \mathbf{b}_{\alpha\rho} \mathbf{a}_\tau \cdot \mathbf{a}^\rho = \mathbf{b}_{\alpha\tau} \mathbf{a}^{\tau\sigma} \mathbf{b}_{\sigma\beta}$$

ce qui achève la démonstration.

3- Positivité de C dans la coque

3- 1 Racine carrée de la première forme fondamentale a

Comme \mathbf{a} est défini-positif, on peut en prendre la racine carrée. Nous adopterons la définition précise suivante.

Définition 3.1 : Soient $a_{\alpha\beta}$ les composantes d'une forme bilinéaire symétrique défini-positif. Nous appellerons racine carrée de \mathbf{a} la seule matrice \mathbf{u} dont les coefficients vérifient

(i) les relations

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{u}_\alpha^\tau \delta_{\tau\sigma} \mathbf{u}_\beta^\sigma$$

(ii) la condition de symétrie

$$\delta_{\sigma\tau} \mathbf{u}_\alpha^\sigma = \delta_{\rho\alpha} \mathbf{u}_\tau^\rho$$

(iii) la condition de positivité

$$\delta_{\sigma\tau} \mathbf{u}_\alpha^\sigma \mathbf{V}^\alpha \mathbf{V}^\tau \geq 0$$

satisfaite pour toutes les valeurs de \mathbf{V}^1 et \mathbf{V}^2 .

Remarque : De la relation (i) on déduit :

$$a^{\tau\sigma} = (u^{-1})_{\alpha}^{\tau} \delta^{\alpha\beta} (u^{-1})_{\beta}^{\sigma}.$$

3- 2 Première factorisation de $g_{\alpha\beta}$

Théorème 3.2.1 : Les composantes $g_{\alpha\beta}$ se factorisent de la manière suivante

$$g_{\alpha\beta} = u_{\alpha}^{\tau} [\delta_{\tau\sigma} - 2x^3 e_{\tau\sigma} + (x^3)^2 e_{\tau\lambda} \delta^{\lambda\mu} e_{\mu\sigma}] u_{\beta}^{\sigma}$$

où e désigne le tenseur de composantes :

$$e_{\tau\sigma} = (u^{-1})_{\tau}^{\rho} b_{\rho\nu} (u^{-1})_{\sigma}^{\nu}.$$

Démonstration : Puisque $g_{\alpha\beta}$ est un trinôme du second degré en x^3 , il suffit d'établir la démonstration successivement pour les termes de degré 0, 1 et 2.

Au degré 0, c'est vrai par définition de la racine carrée u de a .

Au degré 1, c'est vrai parce que :

$$u_{\alpha}^{\tau} e_{\tau\sigma} u_{\beta}^{\sigma} = u_{\alpha}^{\tau} (u^{-1})_{\tau}^{\rho} b_{\rho\mu} (u^{-1})_{\sigma}^{\mu} u_{\beta}^{\sigma} = \delta_{\alpha}^{\rho} b_{\rho\mu} \delta_{\beta}^{\mu} = b_{\alpha\beta}.$$

Au degré 2, c'est encore vrai parce que:

$$u_{\alpha}^{\tau} e_{\tau\lambda} \delta^{\lambda\mu} e_{\mu\sigma} u_{\beta}^{\sigma} = \delta_{\alpha}^{\rho} b_{\rho\nu} (u^{-1})_{\tau}^{\nu} \delta^{\lambda\mu} (u^{-1})_{\mu}^{\xi} b_{\xi\eta} \delta_{\beta}^{\eta} = b_{\alpha\nu} a^{\nu\xi} b_{\xi\beta}.$$

3- 3 Un carré parfait

L'étude de la positivité de C se ramène successivement à celle de $g_{\alpha\beta}$ (théorème 2.1 du paragraphe 2) puis à celle de

$$h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 2x^3 e_{\alpha\beta} + (x^3)^2 e_{\alpha\lambda} \delta^{\lambda\sigma} e_{\sigma\beta}.$$

Théorème 3.3.1 : Au sens de la définition 3.1, la forme bilinéaire symétrique h a pour racine carrée la matrice v de coefficients

$$v_{\alpha}^{\tau} = \delta_{\alpha}^{\tau} - x^3 e_{\alpha\rho} \delta^{\rho\tau}.$$

Démonstration :

(i) Si on calcule le produit $v_{\alpha}^{\tau} \delta_{\tau\sigma} v_{\beta}^{\sigma}$ on retrouve bien $h_{\alpha\beta}$.

(ii) Si on calcule $\delta_{\sigma\tau} v_{\alpha}^{\sigma}$ et $\delta_{\alpha\rho} v_{\tau}^{\rho}$, on trouve la valeur commune $\delta_{\alpha\tau} - x^3 e_{\alpha\tau}$.

Remarque : La mise en évidence de ce carré parfait assure la positivité de C. Reste à étudier sa défini-positivité.

3- 4 Matrices A et B associées aux 2 formes fondamentales a et b

Associations aux deux formes fondamentales les matrices A et B de composantes

$$A_{\alpha}^{\sigma} = a_{\alpha\beta} \delta^{\beta\sigma} \quad B_{\alpha}^{\sigma} = b_{\alpha\beta} \delta^{\beta\sigma}.$$

À cause des symétries de $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$, ces deux matrices sont symétriques au sens de la définition 3.1(ii).

La définition de u implique

$$A_{\alpha}^{\sigma} = u_{\alpha}^{\tau} (\delta_{\tau\rho} u_{\beta}^{\rho}) \delta^{\beta\sigma} = u_{\alpha}^{\tau} (\delta_{\beta\rho} u_{\tau}^{\rho}) \delta^{\beta\sigma} = u_{\tau}^{\rho} \delta_{\rho}^{\sigma} u_{\alpha}^{\tau} = u_{\tau}^{\sigma} u_{\alpha}^{\tau} = (u^2)_{\alpha}^{\sigma}.$$

La matrice A est le carré de la matrice u et elle est défini-positive.

Remarque : En notant I_2 la matrice unité, la matrice v s'écrit dans ces notations

$$v = I_2 - x^3 u^{-1} B u^{-1}.$$

En effet, la formule :

$$v_{\alpha}^{\tau} = \delta_{\alpha}^{\tau} - x^3 (u^{-1})_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\eta} (u^{-1})_{\rho}^{\eta} \delta^{\rho\tau}$$

peut se transformer à cause de la symétrie de u^{-1} en :

$$v_{\alpha}^{\tau} = \delta_{\alpha}^{\tau} - x^3 (u^{-1})_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\eta} \delta^{\rho\eta} (u^{-1})_{\rho}^{\tau} = \delta_{\alpha}^{\tau} - x^3 (u^{-1})_{\rho}^{\tau} B_{\sigma}^{\rho} (u^{-1})_{\alpha}^{\sigma}$$

d'où la conclusion.

3- 5 Défini-positivité de C

L'étude de la défini-positivité de C se ramène à celle de l'inversibilité de la matrice :

$$A - x^3 B.$$

Il faut donc étudier la non annulation du déterminant de la matrice $A - x^3 B$. Le calcul de ce déterminant met en jeu les 2 courbures principales χ_1 et χ_2 ou bien les 2 rayons de courbure

$R_1 = \frac{1}{\chi_1}$ et $R_2 = \frac{1}{\chi_2}$ ([CIA.10], théorème 2.5.1). Les courbures principales sont les deux

racines du trinôme du second degré :

$$P(\chi) = \det(B - \chi A) = \det(B - \chi u^2) = (\det A) \det(u^{-1} B u^{-1} - \chi I_2).$$

Le produit des deux racines est la courbure de Gauss ou courbure totale :

$$K = \chi_1 \chi_2 = \det(u^{-1} B u^{-1}) = \frac{\det B}{\det A}.$$

La demi-somme des racines est la courbure moyenne :

$$H = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(u^{-1} B u^{-1}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(B A^{-1}).$$

Avec ces notations :

$$\det C = (\det A)[K(x^3)^2 - 2Hx^3 + 1]^2$$

$$(\det C)^{1/2} = (\det U) = (\det u)[K(x^3)^2 - 2Hx^3 + 1].$$

L'étude de la stricte positivité du trinôme du second degré $K(x^3)^2 - 2Hx^3 + 1$ permet d'estimer l'épaisseur 2ε de la coque. L'épaisseur 2ε est tributaire des deux racines $\frac{1}{\chi_1}$ et $\frac{1}{\chi_2}$ du trinôme.

3- 6 Seconde factorisation de $g_{\alpha\beta}$

Théorème 3.6.1 : Les composantes de $g_{\alpha\beta}$ se factorisent de la manière suivante

$$g_{\alpha\beta} = (vu)_{\alpha}^{\mu} \delta_{\mu\nu} (vu)_{\beta}^{\nu}$$

où u est la racine carrée de la première forme fondamentale a et $v = I_2 - x^3 u^{-1} B u^{-1}$.

Démonstration : La première factorisation de $g_{\alpha\beta}$ et le calcul explicite de la racine carrée v de h autorisent les factorisations successives suivantes :

$$g_{\alpha\beta} = u_{\alpha}^{\tau} h_{\tau\sigma} u_{\beta}^{\sigma} = u_{\alpha}^{\tau} v_{\tau}^{\mu} \delta_{\mu\nu} v_{\sigma}^{\nu} u_{\beta}^{\sigma} = (uv)_{\alpha}^{\mu} \delta_{\mu\nu} (vu)_{\beta}^{\nu}.$$

Remarque : Le produit

$$vu = u - x^3 u^{-1} B$$

n'est pas la racine carrée de $g_{\alpha\beta}$ au sens de la définition 3.1 car il ne vérifie pas la condition de symétrie 3.1(ii).

4- Factorisation de C

Théorème 4.1 : Les composantes g_{ij} de C se factorisent de la manière suivante

$$g_{ij} = U_i^k \delta_{k\ell} U_j^\ell$$

avec

$$U_\alpha^\mu = (vu)_\alpha^\mu \quad U_3^\alpha = 0 \quad U_\alpha^3 = 0 \quad U_3^3 = 1.$$

Démonstration : Ceci découle directement de la factorisation de $g_{\alpha\beta}$.

Remarque 1 : Avec ce choix $U^T U = C$.

Remarque 2 : $\det U = (\det u)[K(x^3)^2 - 2Hx^3 + 1]$.

Remarque 3 : Les composantes de U sont des fonctions de x^3 du premier degré. Ceci aura des conséquences simplificatrices importantes dans la suite, notamment lors du calcul de $\text{Rot}(U^T)$.

5- Décomposition de $\nabla\Theta$ en produit

Théorème 5.1 : Il existe un champ de rotations R tel que $\nabla\Theta = RU$.

Démonstration : Puisque

$$[\nabla\Theta]^T \nabla\Theta = U^T U$$

et que U est inversible, nous en déduisons :

$$[(\nabla\Theta)U^{-1}]^T [(\nabla\Theta)U^{-1}] = I$$

en désignant par I l'identité dans E^3 .

Il existe donc un champ de rotations R tel que $[(\nabla\Theta)U^{-1}] = R$ c'est-à-dire :

$$\nabla\Theta = RU.$$

Remarque 1 : À la suite de [SOUC 1], nous avons fait une légère entorse au lemme de décomposition polaire classique en acceptant U distinct de U^T .

Remarque 2 : Cependant, l'alternative à la considération du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel proposée dans [CIA 11, 13] et [VAL 1] reste toujours possible.

Il faut maintenant distinguer U^T de U. Par chance, les formules restent correctes sans changement dans [CIA 11] car les démonstrations n'avaient pas utilisé la symétrie de U.

Notre objectif final est de montrer que l'annulation de

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda$$

équivaut à imposer les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi (G-C-M).

La détermination de Λ nécessite le calcul préalable de $\text{Rot}(U^T)$. Calculer $\text{Rot}(U^T)$ n'est pas chose si aisée même si U dépend linéairement de x^3 . Si l'on exprimait les conditions G-C-M. à l'aide des coefficients de Christoffel, l'équivalence envisagée risquerait d'être difficile à établir. Une version lisible des conditions G-C-M. proposée initialement par Claude Vallée et moi-même [VAL 3] dans le cadre des surfaces ordinaires, et par Athanassios Fokas et Israel Gelfand dans le cadre des solitons [FOK 1, 2] a été développée récemment en précisant le cadre fonctionnel [CIA 11-14] et les applications à la théorie des coques [PIE 3-5]. Nous allons la rappeler brièvement.

6- Choix d'une base orthonormée dans le plan tangent à la surface moyenne.

Théorème 6.1 : Les vecteurs tangents à la surface moyenne

$$t_\alpha = (u^{-1})_\alpha^\beta a_\beta$$

sont unitaires et orthogonaux entre eux.

Démonstration :

$$t_\alpha \cdot t_\beta = (u^{-1})_\alpha^\tau a_\tau \cdot (u^{-1})_\beta^\sigma a_\sigma = (u^{-1})_\alpha^\tau a_{\tau\sigma} (u^{-1})_\beta^\sigma = \delta_{\alpha\beta}.$$

Remarque 1 : Le produit vectoriel de ces deux vecteurs n'est autre que le vecteur normal a_3 . En effet :

$$a_1 \times a_2 = u_1^\alpha u_2^\beta t_\alpha \times t_\beta = (\det u) t_1 \times t_2$$

le produit vectoriel $t_1 \times t_2$ étant unitaire comme produit vectoriel de deux vecteurs unitaires orthogonaux, la racine carrée u de a ayant été choisie positive, on en déduit

$$\|a_1 \times a_2\| = \det u$$

puis :

$$t_1 \times t_2 = a_3.$$

Remarque 2 : Les trois vecteurs t_1, t_2, a_3 forment une base orthonormée directe. Il existe donc une rotation Ω telle que :

$$t_\alpha = \Omega \hat{e}_\alpha \quad \text{et} \quad a_3 = \Omega \hat{e}_3.$$

7- Vecteurs de Darboux

Définition : Nous appellerons vecteurs de Darboux, les deux vecteurs Y_α définis par :

$$\partial_\alpha \Omega = \Omega(Y_\alpha \times I)$$

où $(Y_\alpha \times I)$ désigne la multiplication vectorielle à gauche par Y_α .

Remarque : Cette définition est légitime car, Ω étant une rotation, $\Omega^T \partial_\alpha \Omega$ est obligatoirement antisymétrique et donc de la forme $Y_\alpha \times I$.

Théorème 7 : Les dérivées des nouveaux vecteurs de la base t_1 et t_2 du plan tangent et du vecteur normal sont :

$$\partial_\beta t_\alpha = (\Omega Y_\beta) \times t_\alpha \quad \partial_\beta a_3 = (\Omega Y_\beta) \times a_3.$$

Démonstration : De la définition précédente, on déduit :

$$\partial_\beta t_\alpha = \partial_\beta (\Omega \hat{e}_\alpha) = (\partial_\beta \Omega) \hat{e}_\alpha = \Omega(Y_\beta \times \hat{e}_\alpha) = (\Omega Y_\beta) \times (\Omega \hat{e}_\alpha) = (\Omega Y_\beta) \times t_\alpha.$$

De même

$$\partial_\beta a_3 = \partial_\beta (\Omega \hat{e}_3) = (\partial_\beta \Omega) \hat{e}_3 = \Omega(Y_\beta \times \hat{e}_3) = (\Omega Y_\beta) \times (\Omega \hat{e}_3) = (\Omega Y_\beta) \times a_3.$$

Remarque 1 : Les trois composantes de Y_1 et les trois composantes de Y_2 remplacent les 6 coefficients de Christoffel traditionnels.

Remarque 2 : Les trois équations précédentes remplacent les formules de Gauss et de Weingarten qui concernent les dérivées $\partial_\beta a_\alpha$ et $\partial_\beta a_3$

$$\partial_\beta a_\alpha = \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma a_\sigma + b_{\beta\alpha} a_3 \quad \partial_\beta a_3 = -b_{\beta\sigma} a^\sigma.$$

Remarque 3 : Dans la formulation usuelle, la symétrie en α et β de $\partial_\beta a_\alpha$ dérivée seconde du vecteur position de la surface est assurée par la symétrie des symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$$

et la symétrie des composantes du tenseur de courbure

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}.$$

Si l'on utilise les vecteurs de Darboux, la symétrie de $\partial_\beta a_\alpha$ n'est pas assurée par les notations, il faut l'imposer explicitement.

8- Nouvelle version des formules de Gauss

8- 1 Composantes des vecteurs de Darboux

Théorème 8.1.1 Les troisièmes composantes des vecteurs de Darboux sont solutions de deux équations linéaires :

$$\varepsilon_{3\nu\mu} (u_1^\mu Y_2^3 - u_2^\mu Y_1^3) = (\partial_2 u_1^\mu - \partial_1 u_2^\mu) \delta_{\mu\nu}.$$

Les premières et deuxièmes composantes satisfont les relations

$$\varepsilon_{3\mu\nu} (u_\alpha^\mu Y_\beta^\nu - u_\beta^\mu Y_\alpha^\nu) = 0.$$

Démonstration : En dérivant le vecteur

$$a_\alpha = u_\alpha^\mu t_\mu = u_\alpha^\mu \Omega \hat{e}_\mu$$

par rapport à y_β , il vient :

$$\partial_\beta a_\alpha = (\partial_\beta u_\alpha^\mu) \Omega \hat{e}_\mu + u_\alpha^\mu \Omega (Y_\beta \times \hat{e}_\mu)$$

Par suite, le vecteur :

$$\partial_\beta a_\alpha - \partial_\alpha a_\beta = \Omega [(\partial_\beta u_\alpha^\mu - \partial_\alpha u_\beta^\mu) \hat{e}_\mu + (u_\alpha^\mu Y_\beta - u_\beta^\mu Y_\alpha) \times \hat{e}_\mu]$$

est nul si et seulement si :

$$(\partial_\beta u_\alpha^\mu - \partial_\alpha u_\beta^\mu) \hat{e}_\mu + (u_\alpha^\mu Y_\beta - u_\beta^\mu Y_\alpha) \times \hat{e}_\mu = 0.$$

En projetant sur le vecteur \hat{e}_ν , on obtient

$$(\partial_\beta u_\alpha^\mu - \partial_\alpha u_\beta^\mu) \delta_{\mu\nu} = \varepsilon_{3\nu\mu} (u_\alpha^\mu Y_\beta^3 - u_\beta^\mu Y_\alpha^3)$$

puis les deux équations linéaires annoncées satisfaites par les troisièmes composantes des vecteurs de Darboux en choisissant $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

En projetant sur le vecteur \hat{e}_3 , on obtient

$$\varepsilon_{3\mu\nu} (u_\alpha^\mu Y_\beta^\nu - u_\beta^\mu Y_\alpha^\nu) = 0.$$

8- 2 Formulation matricielle des troisièmes composantes des vecteurs de Darboux

Corollaire 8.2.1 : Les troisièmes composantes des deux vecteurs de Darboux sont solutions de l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} Y_1^3 & Y_2^3 \end{bmatrix} J u J = [\partial_2 u_1^1 - \partial_1 u_2^1 \quad \partial_2 u_1^2 - \partial_1 u_2^2]$$

avec $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Démonstration : Multiplions la relation

$$\varepsilon_{3\nu\mu} (u_1^\mu Y_2^3 - u_2^\mu Y_1^3) = (\partial_2 u_1^\mu - \partial_1 u_2^\mu) \delta_{\mu\nu}$$

par $\delta^{\nu\lambda}$ et sommons sur ν , nous obtenons :

$$-\varepsilon_{3\mu\nu} \delta^{\nu\lambda} (u_1^\mu Y_2^3 - u_2^\mu Y_1^3) = \partial_2 u_1^\lambda - \partial_1 u_2^\lambda.$$

Introduisons la matrice J de composantes $J_\mu^\lambda = \varepsilon_{3\mu\nu} \delta^{\nu\lambda}$, la dernière relation peut se transformer en :

$$(Ju)_2^\lambda Y_1^3 - (Ju)_1^\lambda Y_2^3 = \partial_2 u_1^\lambda - \partial_1 u_2^\lambda$$

puis en :

$$[Y_1^3 \quad Y_2^3] JuJ = [\partial_2 u_1^1 - \partial_1 u_2^1 \quad \partial_2 u_1^2 - \partial_1 u_2^2].$$

9- Nouvelle version des formules de Weingarten

9- 1 Premières et deuxièmes composantes des vecteurs de Darboux

Théorème 9.1.1 : Les premières et deuxièmes composantes des vecteurs de Darboux sont solutions des équations linéaires

$$Y_\alpha \times \hat{e}_3 = -b_{\alpha\rho} (u^{-1})_\nu^\rho \delta^{\nu\lambda} \hat{e}_\lambda.$$

Inversement, les composantes du tenseur de courbure sont liées aux premières et deuxièmes composantes des vecteurs de Darboux par les formules

$$b_{\alpha\beta} = \varepsilon_{3\nu\mu} Y_\alpha^\nu (u)^\mu_\beta.$$

Démonstration : Si l'on compare les formules de Weingarten classiques

$$\partial_\alpha a^3 = -b_{\alpha\rho} a^\rho = -b_{\alpha\rho} a^{\rho\mu} a_\mu = -b_{\alpha\rho} (u^{-1})_\nu^\rho \delta^{\nu\lambda} (u^{-1})_\lambda^\mu u_\mu^\tau t_\tau = -b_{\alpha\rho} (u^{-1})_\nu^\rho \delta^{\nu\lambda} t_\lambda$$

avec les formules :

$$\partial_\alpha a^3 = (\Omega Y_\alpha) \times a_3 = (\Omega Y_\alpha) \times (\Omega \hat{e}_3) = \Omega(Y_\alpha \times \hat{e}_3)$$

on en déduit :

$$-b_{\alpha\rho} (u^{-1})_\nu^\rho \delta^{\nu\lambda} \hat{e}_\lambda = Y_\alpha \times \hat{e}_3.$$

En projetant sur \hat{e}_μ , on obtient :

$$-b_{\alpha\mu} (u^{-1})^\mu_\rho = \varepsilon_{3\nu\mu} Y_\alpha^\nu$$

ou bien encore :

$$b_{\alpha\beta} = \varepsilon_{3\nu\mu} Y_\alpha^\nu u_\beta^\mu.$$

Remarque : Les formules :

$$\varepsilon_{3\nu\mu} (u_\alpha^\mu Y_\beta^\nu - u_\beta^\mu Y_\alpha^\nu) = 0$$

déduites des conditions :

$$a_{3\cdot} (\partial_\beta a_\alpha - \partial_\alpha a_\beta) = 0$$

assurent la symétrie $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ du tenseur de courbure.

9- 2 Formulation matricielle du tenseur de courbure

Corollaire 9.2.1 : La matrice B associée au tenseur de courbure b se factorise en produit de trois matrices

$$B = u J \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}.$$

Démonstration : De l'expression précédente de $b_{\alpha\beta}$, on déduit :

$$B_\alpha^\sigma = b_{\alpha\beta} \delta^{\beta\sigma} = \varepsilon_{3\nu\mu} Y_\alpha^\nu u_\beta^\mu \delta^{\beta\sigma}$$

puis, grâce à la symétrie de u :

$$B_\alpha^\sigma = u_\beta^\sigma (\delta^{\beta\mu} \varepsilon_{3\nu\mu}) Y_\alpha^\nu.$$

En reconnaissant la composante

$$J_v^\beta = \delta^{\beta\mu} \varepsilon_{3\nu\mu}$$

de la matrice J , on aboutit à :

$$B_\alpha^\sigma = u_\beta^\sigma J_v^\beta Y_\alpha^\nu$$

c'est-à-dire à la factorisation annoncée.

9- 3 Nouvelle expression de la courbure de Gauss

Corollaire 9.3.1 : La courbure de Gauss ne dépend que des premières composantes des deux vecteurs de Darboux et de la métrique :

$$K = \frac{\det B}{\det A} = \frac{1}{\det u} \begin{vmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{vmatrix} = \frac{(Y_1 \times Y_2) \cdot \hat{e}_3}{\det u}.$$

Démonstration : La factorisation précédente de la matrice B associée au tenseur de courbure conduit, en prenant le déterminant, à :

$$\det B = (\det u) \begin{vmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{vmatrix}$$

d'où la conclusion.

Remarque : Cette nouvelle expression de la courbure de Gauss nous permettra par la suite d'établir facilement le théorème d'excellence de Gauss.

10- Nouvelles expressions des composantes de U

Théorème 10.1 : Les composantes de U s'expriment linéairement en fonction de la racine carrée u de la première forme fondamentale **a** et des deux premières composantes des deux vecteurs de Darboux par les formules

$$U_\beta^\alpha = u_\beta^\alpha - x^3 J_\nu^\alpha Y_\beta^\nu$$

$$U_3^\alpha = 0 \quad U_\alpha^3 = 0 \quad U_3^3 = 1.$$

Démonstration : Maintenant que nous savons que B se factorise en $B = u J \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}$, le

produit $vu = u - x^3 u^{-1} B$ se simplifie en :

$$vu = u - x^3 J \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}$$

d'où l'expression annoncée de U.

11- Nouvelle version des conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi

Les symétries

$$\partial_\sigma \partial_\alpha a_\beta = \partial_\alpha \partial_\sigma a_\beta$$

conduisent aux conditions G-C-M classiques. Ces conditions sur les dérivées troisièmes du vecteur position de la surface vont être remplacées par des conditions sur les dérivées secondes de la rotation Ω .

11- 1 Conditions de compatibilité satisfaites par les vecteurs de Darboux

Théorème 11.1.1: Les deux vecteurs de Darboux satisfont les conditions de compatibilité

$$\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 = Y_1 \times Y_2 .$$

Démonstration : Si l'on dérive

$$\partial_\alpha \Omega = \Omega(Y_\alpha \times I)$$

par rapport à y_β , on trouve

$$\partial_\beta \partial_\alpha \Omega = \Omega[(Y_\beta \times (Y_\alpha \times I)) + (\partial_\beta Y_\alpha) \times I] .$$

Ainsi la différence des dérivées secondes croisées de Ω

$$\partial_\beta \partial_\alpha \Omega - \partial_\alpha \partial_\beta \Omega = \Omega[Y_\beta \times (Y_\alpha \times I) - Y_\alpha \times (Y_\beta \times I) + (\partial_\beta Y_\alpha) \times I - (\partial_\alpha Y_\beta) \times I]$$

sera nulle si et seulement si :

$$(\partial_\beta Y_\alpha - \partial_\alpha Y_\beta) \times I = Y_\alpha \times (Y_\beta \times I) - Y_\beta \times (Y_\alpha \times I) .$$

L'identité de Jacobi permet de transformer le second membre de cette équation en

$$(Y_\alpha \times Y_\beta) \times I$$

et d'en déduire :

$$(\partial_\beta Y_\alpha - \partial_\alpha Y_\beta) = Y_\alpha \times Y_\beta .$$

11- 2 Reconstruction de la surface à partir de ses deux formes fondamentales. Théorème de Bonnet

Si on connaît les deux formes fondamentales **a** et **b**, on peut calculer les composantes des 2 vecteurs de Darboux en résolvant les équations linéaires :

$$\varepsilon_{3\nu\mu} (u_1^\mu Y_2^\nu - u_2^\mu Y_1^\nu) = (\partial_2 u_1^\mu - \partial_1 u_2^\mu) \delta_{\mu\nu}$$

$$\varepsilon_{3\nu\mu} Y_\alpha^\nu u_\beta^\mu = b_{\alpha\beta} .$$

Puisque les deux vecteurs de Darboux satisfont les conditions de compatibilité :

$$\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 = Y_1 \times Y_2$$

on peut intégrer les équations aux dérivées partielles :

$$\partial_\alpha \Omega = \Omega(Y_\alpha \times I)$$

et déterminer Ω à la multiplication à gauche près par une rotation constante. Ensuite, en intégrant les équations aux dérivées partielles :

$$\partial_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{u}_\alpha^\beta \Omega \hat{\mathbf{e}}_\beta$$

on peut déterminer le vecteur position à une translation près.

Ainsi, conformément au théorème de Bonnet [BON 1], la surface est retrouvée à une rotation près.

11- 3 Equivalence entre les conditions G-C-M. classiques et les conditions de compatibilité satisfaites par les vecteurs de Darboux

Théorème 11.3.1 : Les conditions G-C-M équivalent aux conditions :

$$\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2 = 0$$

que satisfont les vecteurs de Darboux.

Démonstration : Les conditions G-C-M. équivalent à la symétrie [CIA 10] :

$$\partial_\sigma \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \partial_\alpha \partial_\sigma \mathbf{a}_\beta .$$

Si l'on calcule la dérivée de :

$$\partial_\sigma \mathbf{a}_\beta = \partial_\sigma (\mathbf{u}_\beta^\mu \mathbf{t}_\mu) = \partial_\sigma (\mathbf{u}_\beta^\mu \Omega \hat{\mathbf{e}}_\mu) = \partial_\sigma (\mathbf{u}_\beta^\mu) \Omega \hat{\mathbf{e}}_\mu + \mathbf{u}_\beta^\mu \Omega (\mathbf{Y}_\sigma \times \hat{\mathbf{e}}_\mu)$$

par rapport à y_α , on obtient la somme de quatre termes :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha (\partial_\sigma \mathbf{a}_\beta) &= \partial_\alpha [\partial_\sigma (\mathbf{u}_\beta^\mu)] \Omega \hat{\mathbf{e}}_\mu \\ &+ (\partial_\sigma \mathbf{u}_\beta^\mu) \Omega (\mathbf{Y}_\alpha \times \hat{\mathbf{e}}_\mu) + \partial_\alpha (\mathbf{u}_\beta^\mu) \Omega (\mathbf{Y}_\sigma \times \hat{\mathbf{e}}_\mu) \\ &+ \mathbf{u}_\beta^\mu \Omega [(\partial_\alpha \mathbf{Y}_\sigma) \times \hat{\mathbf{e}}_\mu + \mathbf{Y}_\alpha \times (\mathbf{Y}_\sigma \times \hat{\mathbf{e}}_\mu)] . \end{aligned}$$

Le premier terme est symétrique en (α, σ) ainsi que la somme des deuxième et troisième termes. Lorsque l'on antisymétrise en α et σ , il reste seulement :

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta - \partial_\alpha \partial_\sigma \mathbf{a}_\beta &= \mathbf{u}_\beta^\mu \Omega [(\partial_\alpha \mathbf{Y}_\sigma - \partial_\sigma \mathbf{Y}_\alpha) \times \hat{\mathbf{e}}_\mu + \mathbf{Y}_\alpha \times (\mathbf{Y}_\sigma \times \hat{\mathbf{e}}_\mu) - \mathbf{Y}_\sigma \times (\mathbf{Y}_\alpha \times \hat{\mathbf{e}}_\mu)] \\ &= \mathbf{u}_\beta^\mu \Omega [(\partial_\alpha \mathbf{Y}_\sigma - \partial_\sigma \mathbf{Y}_\alpha) \times \hat{\mathbf{e}}_\mu - (\mathbf{Y}_\sigma \times \mathbf{Y}_\alpha) \times \hat{\mathbf{e}}_\mu] . \end{aligned}$$

La dernière simplification provient de l'application de l'identité de Jacobi. L'image par la rotation Ω d'un produit vectoriel de deux vecteurs étant le produit vectoriel de l'image par Ω de ces deux vecteurs, il vient :

$$\begin{aligned}
 \partial_\sigma \partial_\alpha a_\beta - \partial_\alpha \partial_\sigma a_\beta &= \Omega [(\partial_\alpha Y_\sigma - \partial_\sigma Y_\alpha - Y_\sigma \times Y_\alpha) \times u_\beta^\mu \hat{e}_\mu] \\
 &= \Omega (\partial_\alpha Y_\sigma - \partial_\sigma Y_\alpha - Y_\sigma \times Y_\alpha) \times [u_\beta^\mu (\Omega \hat{e}_\mu)] \\
 &= \Omega (\partial_\alpha Y_\sigma - \partial_\sigma Y_\alpha - Y_\sigma \times Y_\alpha) \times a_\beta.
 \end{aligned}$$

Si les conditions G-C-M classiques sont satisfaites, alors :

$$[\Omega (\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2)] \times a_1 = 0$$

$$[\Omega (\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2)] \times a_2 = 0.$$

Comme les deux vecteurs a_1 et a_2 sont indépendants, on en déduit :

$$\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2 = 0.$$

Réciproque : Si les deux vecteurs de Darboux satisfont les conditions de compatibilité

$$\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2 = 0$$

alors :

$$\partial_\sigma \partial_\alpha a_\beta - \partial_\alpha \partial_\sigma a_\beta = 0$$

et les conditions G-C-M sont satisfaites.

Remarque : La condition $(\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2) \cdot \hat{e}_3 = 0$ équivaut à la condition de Gauss.

Démonstration : En effet :

$$\begin{aligned}
 [\partial_2 \partial_1 a_1 - \partial_1 \partial_2 a_1] \cdot a_2 &= \{ [\Omega (\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2)] \times a_1 \} \cdot a_2 \\
 &= [\Omega (\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2)] \cdot \|a_1 \times a_2\| a_3 \\
 &= \|a_1 \times a_2\| [\Omega (\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2)] \cdot (\Omega \hat{e}_3) \\
 &= \|a_1 \times a_2\| (\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2 - Y_1 \times Y_2) \cdot \hat{e}_3.
 \end{aligned}$$

12- Théorème d'excellence de Gauss

Théorème 12.1 : La courbure de Gauss est entièrement déterminée par la connaissance de la métrique.

Démonstration : Si nous rapprochons :

- l'expression de la courbure de Gauss

$$K = \frac{(Y_1 \times Y_2) \cdot \hat{e}_3}{\det u}$$

- la condition de Gauss

$$(Y_1 \times Y_2) \cdot \hat{e}_3 = (\partial_2 Y_1 - \partial_1 Y_2) \cdot \hat{e}_3$$

- et les formules caractérisant les troisièmes composantes des vecteurs de Darboux

$$\begin{bmatrix} Y_1^3 & Y_2^3 \end{bmatrix} J u J = [\partial_2 u_1^1 - \partial_1 u_2^1 \quad \partial_2 u_1^2 - \partial_1 u_2^2]$$

nous arrivons à la conclusion étonnante découverte par Gauss :

La courbure de Gauss K ne dépend que de la première forme fondamentale, elle ne dépend pas de la deuxième forme fondamentale (*Theorema egregium*, [GAUS 1]).

13- Calcul de Rot (U^T)

Afin d'exprimer l'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel dans la coque sous la forme

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda = 0$$

avec

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} \left\{ [U \text{Rot}(U^T)] U - \frac{\text{tr}[U \text{Rot}(U^T)]}{2} U \right\}$$

commençons par calculer $\text{Rot}(U^T)$ en établissant la propriété suivante :

Propriété : Puisque :

$$U = \begin{bmatrix} u - x^3 J \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors

$$\text{Rot}(U^T) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -Y_2^2 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & -Y_1^1 \end{bmatrix} & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\alpha_1 = \partial_1 u_2^1 - \partial_2 u_1^1 \quad \alpha_2 = \partial_1 u_2^2 - \partial_2 u_1^2$$

$$\beta_1 = \partial_1 Y_2^2 - \partial_2 Y_1^2 \quad \beta_2 = \partial_2 Y_1^1 - \partial_1 Y_2^1.$$

Démonstration : Pour obtenir les colonnes de $\text{Rot}(U^T)$, il suffit de calculer le rotationnel ordinaire des vecteurs colonnes de

$$U^T = \begin{bmatrix} u_1^1 + x^3 Y_1^2 & u_1^2 - x^3 Y_1^1 & 0 \\ u_2^1 + x^3 Y_2^2 & u_2^2 - x^3 Y_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le rotationnel de la troisième colonne est évidemment nul. Si on calcule le rotationnel des deux premières colonnes, on obtient le résultat annoncé.

Remarque : Si nous reprenons l'expression de B :

$$B = u J \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} -Y_1^2 & -Y_2^2 \\ Y_1^1 & Y_2^1 \end{bmatrix}$$

alors :

$$u^{-1} B J = \begin{bmatrix} -Y_1^2 & -Y_2^2 \\ Y_1^1 & Y_2^1 \end{bmatrix} J = \begin{bmatrix} -Y_2^2 & Y_1^2 \\ Y_2^1 & -Y_1^1 \end{bmatrix}.$$

En transposant, on obtient :

$$-J B u^{-1} = \begin{bmatrix} -Y_2^2 & Y_1^2 \\ Y_2^1 & -Y_1^1 \end{bmatrix}$$

puis la formule alternative pour l'expression du rotationnel de U^T :

$$\text{Rot}(U^T) = \begin{bmatrix} -J B u^{-1} & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

14- Calcul de Λ

14- 1 Calcul de $U \text{ Rot}(U^T)$

Nous devons effectuer le produit de deux binômes matriciels du premier degré en x^3 :

$$U = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - x^3 \begin{bmatrix} u^{-1} B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\text{Rot}(U^T) = \begin{bmatrix} -J B u^{-1} & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous constatons que le produit des deux binômes matriciels ne fait pas intervenir de terme en $(x^3)^2$. Finalement, nous obtenons le binôme matriciel du premier degré en x^3 :

$$URot(U^T) = \begin{bmatrix} -uJBu^{-1} & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} -u^{-1}BJBu^{-1} & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

14- 2 Calcul de la trace de $URot(U^T)$

Pour évaluer la trace de $URot(U^T)$, il suffit de calculer les traces des deux matrices 2×2

$$uJBu^{-1} \text{ et } u^{-1}BJBu^{-1}$$

La matrice $u^{-1}BJBu^{-1}$ est antisymétrique à cause de l'antisymétrie de la matrice J et de la symétrie des matrices B et u^{-1} , sa trace est donc nulle. La matrice $uJBu^{-1}$ a la même trace que $u^{-1}uJB$

$$\text{tr}(uJBu^{-1}) = \text{tr}(JB).$$

Cette trace est donc nulle à cause de l'antisymétrie de la matrice J et de la symétrie de la matrice B . En conclusion

$$\text{tr}[URot(U^T)] = 0.$$

L'expression de Λ en fonction de U et $Rot(U^T)$ se réduit donc à :

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} U[Rot(U^T)]U.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier $URot(U^T)$ par U et à le diviser par le trinôme du second degré en x^3 (paragraphe 3.5)

$$\det U = (\det u)[K(x^3)^2 - 2Hx^3 + 1].$$

14- 3 Calcul de $U[Rot(U^T)]U$

De nouveau, nous devons effectuer la multiplication de deux binômes matriciels du premier degré en x^3 : celle de

$$URot(U^T) = \begin{bmatrix} -uJBu^{-1} & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} -u^{-1}BJBu^{-1} & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

par

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - x^3 \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{-1}\mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le produit est un trinôme matriciel de degré 2 en x^3 .

Le coefficient matriciel du terme de degré 0 est :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{u}\mathbf{J}\mathbf{B} & 0 \\ [\alpha_1 & \alpha_2]\mathbf{u} & 0 \end{bmatrix}$$

Le coefficient matriciel du terme de degré 2 est :

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{u}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{B} & 0 \\ [\beta_1 & \beta_2]\mathbf{u}^{-1}\mathbf{B} & 0 \end{bmatrix}$$

Le coefficient matriciel du terme de degré 1 est la différence :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B} & 0 \\ [\beta_1 & \beta_2]\mathbf{u} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{u}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{B} & 0 \\ [\alpha_1 & \alpha_2]\mathbf{u}^{-1}\mathbf{B} & 0 \end{bmatrix}$$

La partie 2×2 de $U[\text{Rot}(U^T)]U$ a donc pour expression :

$$-\mathbf{u}\mathbf{J}\mathbf{B} + x^3(\mathbf{u}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B} + \mathbf{u}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) - (x^3)^2\mathbf{u}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Cette expression peut se simplifier grâce à plusieurs propriétés algébriques que nous allons exposer successivement sous forme de lemmes.

15- Propriétés algébriques

Lemme 15.1 : La matrice $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ est une combinaison linéaire des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} dont les coefficients sont respectivement l'opposé de la courbure de Gauss \mathbf{K} et le double de la courbure moyenne \mathbf{H}

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = 2\mathbf{H}\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{A}.$$

Démonstration : Les courbures principales χ_1 et χ_2 sont les racines du polynôme

$$P(\chi) = \det(\mathbf{B} - \chi\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B} - \chi\mathbf{u}^2) = (\det \mathbf{A})\det(\mathbf{u}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}^{-1} - \chi\mathbf{I}_2).$$

Ce sont donc les valeurs propres de la matrice 2×2 symétrique $u^{-1}Bu^{-1}$. En vertu du théorème de Hamilton-Cayley, cette matrice est solution de son propre polynôme caractéristique

$$\det(u^{-1}Bu^{-1} - \chi I_2) = (\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2) = \chi^2 - (\chi_1 + \chi_2)\chi + \chi_1\chi_2 = \chi^2 - 2H\chi + K$$

ainsi :

$$(u^{-1}Bu^{-1})(u^{-1}Bu^{-1}) - 2H(u^{-1}Bu^{-1}) + KI_2 = 0$$

soit, en multipliant à gauche et à droite par u

$$B(u^{-1}u^{-1})B - 2HB + Ku = 0$$

d'où la conclusion annoncée.

Lemme 15.2 : Pour toute matrice 2×2 symétrique telle que la matrice B , la propriété suivante est satisfaite

$$B J B = (\det B) J.$$

Commentaire : La matrice BJB est antisymétrique, elle est donc proportionnelle à la matrice J . En prenant le déterminant du produit BJB , on apprend que le carré du coefficient de proportionnalité est égal au carré du déterminant de la matrice B .

Démonstration : Reste à prouver que le coefficient de proportionnalité est exactement $\det B$. Afin de s'assurer du signe, il suffit de considérer le cas particulier où B est l'identité.

Lemme 15.3 : La matrice $u^{-1}(BJB)u^{-1}$ est proportionnelle à J :

$$u^{-1}(BJB)u^{-1} = \frac{\det B}{\det u} J.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer deux fois le lemme précédent pour B et pour u^{-1}

$$u^{-1}(BJB)u^{-1} = \det B (u^{-1}J u^{-1}) = \det B \det(u^{-1}) J.$$

Lemme 15.4 : La matrice $u^{-1}(BJB)u^{-1}$ est proportionnelle à J :

$$u^{-1}(BJB)u^{-1} = K(\det u)J.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme précédent et de se souvenir de l'expression de la courbure de Gauss

$$K = \frac{\det B}{\det A} = \frac{\det B}{(\det u)^2}.$$

16- Simplification de la partie 2×2 de Λ

Théorème 16.1 : La partie 2×2 de $U[\text{Rot}(U^T)]U$ est un trinôme matriciel du second degré en x^3 qui se divise par le trinôme du second degré ordinaire

$$\det U = (\det u)[1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2].$$

Le quotient ne dépend pas de x^3 et a pour valeur

$$-Ju^{-1}B = \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}.$$

Démonstration : Le coefficient du terme de degré 0 de ce polynôme matriciel peut se transformer, grâce au lemme 15.2, en :

$$-uJB = -(uJu)u^{-1}B = -(\det u)Ju^{-1}B.$$

Le coefficient du terme de degré 2 peut se transformer, grâce au lemme 15.4, en :

$$-(u^{-1}BJBu^{-1})u^{-1}B = -K(\det u)Ju^{-1}B.$$

Le coefficient du terme de degré 1 peut se transformer, grâce aux lemmes 15.4, 15.1 et 15.2, en :

$$\begin{aligned} (u^{-1}BJBu^{-1})u + uJ(BA^{-1}B) &= K(\det u)Ju + uJ(2HB - KA) \\ &= K(\det u)Ju + 2HuJB - K(uJu)u \\ &= 2H(uJu)u^{-1}B = 2(\det u)HJu^{-1}B. \end{aligned}$$

Ainsi, tous les coefficients matriciels de la partie 2×2 de $U\text{Rot}(U^T)U$ sont proportionnels à la matrice $-Ju^{-1}B$. Le facteur de proportionnalité du terme de degré 0 en x^3 est $\det u$, celui du terme de degré 1 en x^3 est $-2(\det u)H$, celui du terme de degré 2 en x^3 est $K(\det u)$. La division par $\det U = (\det u)[1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2]$ va donner exactement la matrice 2×2 :

$$-Ju^{-1}B = \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{bmatrix}$$

qui est composée des deux premières composantes des deux vecteurs de Darboux.

17- Les conditions G-C-M. impliquent les conditions de Riemann-Christoffel

Théorème 17.1 : Si les conditions G-C-M. sont satisfaites sur la surface moyenne, alors les conditions de Riemann-Christoffel sont satisfaites dans la coque.

Démonstration : Les formules matricielles du paragraphe 8.2 exprimant les troisièmes composantes des deux vecteurs de Darboux en fonction des dérivées des coefficients de la racine carrée u de la matrice A permettent de conclure que :

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2] = -[Y_1^3 \quad Y_2^3]J u J.$$

En multipliant à droite par u et en utilisant la relation :

$$u J u = (\det u)J$$

on en déduit :

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2] = (\det u)[Y_1^3 \quad Y_2^3].$$

Si les conditions de Mainardi-Codazzi sont satisfaites alors

$$\beta_1 = Y_1^1 Y_2^3 - Y_1^3 Y_2^1$$

$$\beta_2 = Y_1^2 Y_2^3 - Y_1^3 Y_2^2$$

et on en déduit

$$[\beta_1 \quad \beta_2] = [Y_1^3 \quad Y_2^3]J B u^{-1}J.$$

La 3^{ème} composante de la troisième ligne de Λ est nulle. Les deux premières composantes de cette troisième ligne admettent donc la factorisation :

$$[Y_1^3 \quad Y_2^3][(\det u)I_2 + x^3 J B u^{-1}J u - x^3 (\det u)A^{-1}B - (x^3)^2 J B u^{-1}J u^{-1}B].$$

Le coefficient matriciel du terme du deuxième degré en x^3 peut se transformer en :

$$-JB\left(\frac{1}{\det u}J\right)B = -\frac{1}{\det u}J(BJB) = -\frac{\det B}{\det u}JJ = \frac{\det B}{\det u}I_2 = K(\det u)I_2$$

grâce au lemme 15.2.

Le coefficient matriciel du terme du premier degré en x^3 :

$$J B u^{-1}J u - (\det u)A^{-1}B$$

peut se transformer en :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \mathbf{B} \mathbf{u}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{u} - (\det \mathbf{u}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} &= \mathbf{J} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{J} \mathbf{u} + (\det \mathbf{u}) \mathbf{J}^2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ &= (\det \mathbf{u}) \mathbf{J} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J} + (\det \mathbf{u}) \mathbf{J}^2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ &= (\det \mathbf{u}) \mathbf{J} (\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}). \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ est antisymétrique, elle est donc proportionnelle à la matrice \mathbf{J} . Le coefficient de proportionnalité dépend linéairement de la matrice $\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$; ce facteur est la trace de $\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$, c'est-à-dire $2\mathbf{H}$ (chapitre 4, paragraphe 7.2). Ainsi :

$$\mathbf{J} \mathbf{B} \mathbf{u}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{u} - (\det \mathbf{u}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = 2\mathbf{H}(\det \mathbf{u}) \mathbf{J}^2 = -2\mathbf{H} \det \mathbf{u}.$$

Finalement, la troisième ligne de Λ se factorise en :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^3 & \mathbf{Y}_2^3 \end{bmatrix} (\det \mathbf{u}) [1 - 2\mathbf{H}x^3 + \mathbf{K}(x^3)^2] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^3 & \mathbf{Y}_2^3 \end{bmatrix} \det \mathbf{U}.$$

La division de $\mathbf{U} \text{Rot}(\mathbf{U}^T) \mathbf{U}$ par $\det \mathbf{U}$ donne exactement :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^1 & \mathbf{Y}_2^1 & 0 \\ \mathbf{Y}_1^2 & \mathbf{Y}_2^2 & 0 \\ \mathbf{Y}_1^3 & \mathbf{Y}_2^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est alors facile de se rendre compte que l'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel sous la forme

$$(\text{Rot}(\Lambda^T))^T + (\text{Adj} \Lambda)^T = 0$$

est satisfaite puisque, dans ce cas :

$$(\text{Adj} \Lambda)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{Y}_1^2 \mathbf{Y}_2^3 - \mathbf{Y}_1^3 \mathbf{Y}_2^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_1^3 \mathbf{Y}_2^1 - \mathbf{Y}_1^1 \mathbf{Y}_2^3 \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_1^1 \mathbf{Y}_2^2 - \mathbf{Y}_1^2 \mathbf{Y}_2^1 \end{bmatrix}$$

$$(\text{Rot}(\Lambda^T))^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1 \mathbf{Y}_2^1 - \partial_2 \mathbf{Y}_1^1 \\ 0 & 0 & \partial_1 \mathbf{Y}_2^2 - \partial_2 \mathbf{Y}_1^2 \\ 0 & 0 & \partial_1 \mathbf{Y}_2^3 - \partial_2 \mathbf{Y}_1^3 \end{bmatrix}.$$

On reconnaît, dans l'annulation de la somme de ces deux matrices, les conditions G-C-M. sous la forme explicitée au paragraphe 11- 1.

$$\partial_2 \mathbf{Y}_1 - \partial_1 \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2.$$

18- Réciproque - Les conditions de Riemann-Christoffel impliquent les conditions G-C-M.

Théorème 18.1 : Si le tenseur de Riemann-Christoffel est nul dans la coque alors les conditions G-C-M sont satisfaites sur la surface moyenne.

Démonstration :

Les conditions de Riemann-Christoffel sont les conditions d'intégrabilité de

$$\partial_\alpha R = R[(\Lambda \hat{e}_\alpha) \times I].$$

Dans le cas d'une coque, la 3^{ème} colonne de Λ est nulle, cela implique $\partial_3 R = 0$.

La symétrie des dérivées secondes de R mettant en jeu une dérivation par rapport à x^3 impose la nullité de

$$\partial_\alpha \partial_3 R = \partial_3 \partial_\alpha R = \partial_3 \{ R[(\Lambda \hat{e}_\alpha) \times I] \} = R \{ [(\partial_3 \Lambda) \hat{e}_\alpha] \times I \}.$$

Ceci n'est possible que si

$$\partial_3 \Lambda = 0.$$

Non seulement la 3^{ème} colonne de Λ est nulle, mais aussi ses deux premières colonnes ne dépendent que de y^1 et y^2 . On sait déjà que c'est le cas pour les deux premières composantes de ces deux premières colonnes. Ceci doit être vrai aussi pour les troisièmes composantes. Autrement dit, la troisième ligne de $U[\text{Rot}(U^T)]U$ doit être divisible par :

$$\det U = (\det u)[1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2].$$

Nous avons déjà remarqué que le terme de degré 0 en x^3 de cette troisième ligne avait pour valeur

$$[\alpha_1 \ \alpha_2]u = (\det u)[Y_1^3 \ Y_2^3].$$

La divisibilité de $U[\text{Rot}(U^T)]U$ par $\det U$ impose les deux équations :

$$[\beta_1 \ \beta_2]u - [\alpha_1 \ \alpha_2]u^{-1}B = -2H(\det u)[Y_1^3 \ Y_2^3]$$

$$-[\beta_1 \ \beta_2]u^{-1}B = K(\det u)[Y_1^3 \ Y_2^3].$$

La première équation donne les valeurs de β_1 et β_2

$$[\beta_1 \ \beta_2]u = (\det u)[Y_1^3 \ Y_2^3](A^{-1}B - 2HI_2).$$

Nous avons aussi remarqué que :

$$BA^{-1}J + JA^{-1}B = 2HJ .$$

En multipliant à gauche par $-J$, nous en déduisons

$$A^{-1}B - 2HI_2 = JBA^{-1}J .$$

Ainsi :

$$[\beta_1 \ \beta_2] = (\det u)[Y_1^3 \ Y_2^3]JBA^{-1}Ju^{-1} = (\det u)[Y_1^3 \ Y_2^3]JBu^{-1}(u^{-1}Ju^{-1})$$

$$[\beta_1 \ \beta_2] = [Y_1^3 \ Y_2^3]JBu^{-1}J$$

en utilisant à nouveau le lemme 15.2.

La valeur de $[\beta_1 \ \beta_2]u^{-1}B$ est donc :

$$[\beta_1 \ \beta_2]u^{-1}B = [Y_1^3 \ Y_2^3]JB(u^{-1}Ju^{-1})B = \frac{1}{\det u}[Y_1^3 \ Y_2^3]J(BJB) = -\frac{\det B}{\det u}[Y_1^3 \ Y_2^3]$$

$$[\beta_1 \ \beta_2]u^{-1}B = -(\det u)K[Y_1^3 \ Y_2^3]$$

en utilisant le lemme 15.2, ainsi que la propriété

$$\frac{\det B}{\det u} = K(\det u) .$$

Cette valeur de $[\beta_1 \ \beta_2]u^{-1}B$ est exactement celle que réclamait la deuxième équation. La condition de divisibilité de $U[\text{Rot}(U^T)]U$ par $\det U$ se réduit donc à

$$[\beta_1 \ \beta_2] = [Y_1^3 \ Y_2^3]JBu^{-1}J .$$

Mais, nous avons appris, au paragraphe 16, que :

$$Bu^{-1}J = \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_1^2 \\ Y_2^1 & Y_2^2 \end{bmatrix}$$

Et, au paragraphe 13, que :

$$\beta_1 = \partial_1 Y_2^2 - \partial_2 Y_1^2$$

$$\beta_2 = \partial_2 Y_1^1 - \partial_1 Y_2^1 .$$

La condition ci-dessus se ramène ainsi à

$$\partial_2 Y_1^1 - \partial_1 Y_2^1 = Y_1^2 Y_2^3 - Y_1^3 Y_2^2$$

$$\partial_2 Y_1^2 - \partial_1 Y_2^2 = Y_1^3 Y_2^1 - Y_1^1 Y_2^3.$$

On reconnaît les deux premières des conditions G-C-M, celles de Codazzi et Mainardi. Reste à imposer totalement la condition

$$\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda = 0.$$

Maintenant que l'on sait que les conditions de Codazzi et Mainardi sont satisfaites, on peut conclure, comme au paragraphe 17, que :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & 0 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & 0 \\ Y_1^3 & Y_2^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'annulation de $\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda$ impose la condition supplémentaire :

$$\partial_2 Y_1^3 - \partial_1 Y_2^3 = Y_1^1 Y_2^2 - Y_1^2 Y_2^1$$

c'est à dire la condition de Gauss.

19- Conclusion

Nous avons prouvé l'équivalence entre l'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel dans la coque et les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi sur la surface moyenne en préférant les vecteurs rotations instantanées de Darboux aux symboles de Christoffel tant en 2D qu'en 3D.

La démonstration met étonnement en jeu la division d'un trinôme du second degré en x^3 à coefficients matriciels (matrice 2×2) par le trinôme du second degré

$$1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2$$

construit avec la courbure de Gauss K et la courbure moyenne H de la surface moyenne.

Nous avons revisité au passage les formules de Gauss, les formules de Weingarten, le théorème de Bonnet et le théorème d'excellence de Gauss.

Nous pensons que la technique développée à partir des vecteurs de Darboux est une méthode puissante qui se révélera fructueuse aussi bien dans l'étude mathématique des surfaces (les surfaces minimales par exemple [VAL 5]), que dans l'étude mécanique des coques.

CONCLUSION - PERSPECTIVES

1. Conclusion

Que doit-on retenir des développements présentés dans ces six chapitres?

1-1 La similitude des méthodes 3D et 2D

La méthodologie développée en 3D permet d'intégrer en deux étapes découplées un système aux dérivées partielles du premier ordre du type:

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^k} \delta_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial X^\ell} = C_{k\ell}$$

où le tenseur C est symétrique et défini positif tel le tenseur de Cauchy-Green.

La clé réside essentiellement dans

- la considération d'une racine carrée U de C, non nécessairement symétrique, solution de :

$$U^T U = C$$

- la décomposition polaire de :

$$\frac{\partial x}{\partial X} = R U \tag{1.1}$$

- la forme spéciale de la variation d'une rotation R :

$$dR = Rj(AdX). \quad (1.2)$$

Les conditions de compatibilité s'écrivent:

$$\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A = 0 \quad (1.3)$$

avec

$$A = \frac{1}{\det U} [U(\text{Rot}(U^T))U - \frac{\text{tr}(U(\text{Rot}(U^T)))}{2}U] \quad (1.4)$$

Dans cette approche, l'étape d'intégration (1.2) s'effectue sous le contrôle de Monsieur Frobenius assisté de Madame Rotation (en affectueuse mémoire au professeur Eugen Soós).

Cette méthode 3D a été reproduite dans le cadre de l'étude des surfaces, nous avons constaté que l'utilisation

- de la « décomposition polaire » généralisée :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \Omega U_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \Omega U_2 \quad (1.5)$$

- des vecteurs de Darboux Y_1 et Y_2 définis par :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega(Y_1 \times I) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega(Y_2 \times I) \quad (1.6)$$

a permis le découplage des conditions de compatibilité en deux systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre :

- les conditions d'intégrabilité concernant les vecteurs de Darboux et les vecteurs de Gram :

$$\frac{\partial U_1}{\partial v} - \frac{\partial U_2}{\partial u} + Y_2 \times U_1 - Y_1 \times U_2 = 0 \quad (1.7)$$

- les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi concernant les deux vecteurs de Darboux :

$$Y_2 \times Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_2}{\partial u} = 0 \quad (1.8)$$

Les colonnes de A (notées aussi Λ aux chapitres 2 et 6) définies par (1.2) et les vecteurs Y_1 et Y_2 définis par (1.6) proviennent de la même source, l'ouvrage de Gaston Darboux sur la théorie de surfaces (1887).

Les non linéarités des conditions (1.3) et (1.8) sont du même ordre, elles apparaissent sous les formes de degré 2 $\text{Adj}A$ et $Y_2 \times Y_1$.

Des processus d'intégration ont été établis et illustrés d'exemples qui ont montré l'efficacité de cette méthode.

1-2 Nature tensorielle des objets matriciels introduits

Les matrices

$$E = [\text{Rot}(U^T) + (\det U)[\text{tr}(AU^{-1})U^{-1} - U^{-1}AU^{-1}]]^T \quad (2.1)$$

et

$$B = [\text{Rot}(A^T) + \text{Adj}A]^T \quad (2.2)$$

ont été confrontées, dans le cadre de la géométrie Riemannienne, aux tenseurs de torsion, de courbure, de Ricci et d'Einstein :

- la matrice $\frac{(\text{Adj}U)E}{(\det U)^2}$ acquiert le statut de tenseur mixte d'ordre 2 et remplace avantageusement le tenseur de torsion T d'ordre 3,

- la matrice $\frac{(\text{Adj}U)B}{(\det U)^2}$ acquiert le statut de tenseur mixte d'ordre 2 et remplace avantageusement le tenseur de courbure K d'ordre 4,

- le tenseur mixte d'Einstein prend la forme très simple de $-\frac{B^T U}{\det U}$.

La Mécanique propose donc aux Géomètres des tenseurs plus simples.

C'est à partir de cette étude que le développement du chapitre 3 prend corps.

1-3 Reconnaître une 3-sphère

Pour aborder l'étude de cette variété riemannienne de dimension trois, nous avons transgressé une hypothèse satisfaite dans l'espace Euclidien de dimension 3. Nous avons conservé la nullité de la torsion et donc, à partir de U solution de $U^T U = g$, nous avons gardé la construction de Λ sous la forme :

$$\Lambda = \frac{1}{\det U} [U(\text{Rot}(U^T))U - \frac{\text{tr}(U(\text{Rot}(U^T)))}{2} U].$$

Par contre, nous avons transgressé la nullité de la courbure, en renonçant à l'existence d'une rotation R, et à la nullité de

$$B = [\text{Rot}(\Lambda^T) + \text{Adj}\Lambda]^T$$

qui mesure donc la courbure.

Cela nous a permis de développer une démonstration à partir de l'hypothèse d'un tenseur d'Einstein S de forme sphérique : $S_j^i = \frac{1}{\rho^2} \delta_j^i$.

Nous avons tiré de ces développements un processus de changement de reparamétrage de la variété permettant de la reconnaître, dans cette nouvelle configuration, comme une 3-sphère de rayon ρ paramétrée en coordonnées stéréographiques.

Ces résultats n'étaient pas prévus mais ils ont été motivés par la simplicité du tenseur d'Einstein dans notre méthode.

1-4 Les surfaces minimales

Cette étude a été mise au point toujours avec la pensée que le meilleur test de faisabilité d'une méthode est de la mettre en œuvre sur un exemple. Les surfaces minimales correspondent à un vrai problème de mécanique qui n'est traité ici que pour son aspect géométrique, mais des prolongements de type sollicitations en contraintes seraient intéressants à développer.

Dans cette partie, il a encore été démontré la puissance de la méthode de Darboux ainsi que l'intérêt d'associer, au système primal, un système adjoint dont la solution hérite de propriétés intéressantes. Cette surface appelée sœur de la surface initiale satisfait, elle aussi, à la condition de Meusnier et on peut décliner ainsi une série de 4 sœurs minimales.

1-5 La comparaison entre les deux méthodes mises en place pour une coque et pour sa surface moyenne

Nous pouvons avouer que ce travail a été laborieux avec des tâtonnements et des embuches. Il n'était pas évident de mettre en correspondance les bons objets. L'équivalence entre les conditions d'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel et les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi a été montrée. Le lien entre la matrice Λ et les vecteurs de Darboux est finalement d'une simplicité déconcertante

$$\Lambda = \begin{bmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & 0 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & 0 \\ Y_1^3 & Y_2^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces développements font espérer que la théorie des coques pourra bénéficier d'une telle approche, tant sur le plan de l'analyse fonctionnelle que sur le plan de l'analyse numérique.

2. Perspectives - Géométrie Riemannienne du solide rigide

Elles sont nombreuses mais :

quel temps pour cela ?

quelles perspectives d'avenir pour ce type de recherche ?

quels doctorants et chercheurs motivés pour les réaliser ?

Gardons espoir et, toujours en mémoire d'Eugen Soos : **continuons la lutte !**

Voici donc l'esquisse d'une perspective de développement concernant la mécanique du solide rigide. Un travail très intéressant sur ce sujet est celui de D. P. Chevallier qui introduit les

caractéristiques d'inertie d'un solide rigide en se basant sur la géométrie des groupes de Lie [CHE 1,2]. Lors de leurs travaux de thèse liés à l'identification de paramètres d'inertie d'un solide rigide K. Atchonouglo [ATC 1, 2] et T. Monnet [MON 1], ont déjà mis en pratique l'idée de regrouper, dans une même matrice 4×4 symétrique, les paramètres inertiels du solide rigide. Le vecteur translation et la matrice rotation sont aussi regroupés dans une matrice 4×4 . Les six équations du mouvement prennent la forme de l'égalité à zéro d'une matrice 4×4 antisymétrique.

2-1 Expression de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique $W(S/R)$ d'un solide S , en mouvement dans un repère d'observation R d'origine O , est une forme quadratique de la vitesse de translation \dot{T} d'un de ses points (noté A) et du vecteur rotation instantanée ω . La matrice de cette forme quadratique est une matrice 6×6 qui rassemble les 10 caractéristiques inertiels de S (la masse m , le centre d'inertie G , la matrice d'inertie en A : $J(A,S)$)

$$W(S/R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{T}^T & \omega^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_3 & -mj(\overrightarrow{AG}) \\ -mj(\overrightarrow{AG}) & J(A,S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Reformulons cette expression de l'énergie cinétique afin de mettre en évidence les six paramètres repérant la position du solide.

Notons Θ la rotation du solide S et repérons sa translation par $T = \overrightarrow{OA}$, alors pour tout point M de S :

$$\overrightarrow{OM} = T + \overrightarrow{AM} = T + \Theta \overrightarrow{A_0 M_0},$$

où A_0 et M_0 sont les positions à l'instant initial du point privilégié A et du point générique M .

La vitesse du point M s'obtient par dérivation de \overrightarrow{OM} par rapport au temps :

$$\vec{V}(M) = \dot{T} + \dot{\Theta} \overrightarrow{A_0 M_0} = \dot{T} + \omega \wedge \overrightarrow{AM} = \dot{T} + j(\omega) \overrightarrow{AM} = \dot{T} + j(\omega) \Theta \overrightarrow{A_0 M_0}$$

et nous vérifions, par identification, que le vecteur rotation instantanée est tel que :

$$\dot{\Theta} = j(\omega) \Theta.$$

Choisissons trois paramètres (X^1, X^2, X^3) pour repérer la rotation Θ , alors comme nous l'avons souvent invoqué dans ce document, il existe une matrice Λ telle que :

$$\dot{\Theta} = \Theta j(\Lambda \dot{X})$$

L'expression du vecteur rotation instantanée est donc :

$$\omega = \Theta \Lambda \dot{X}$$

L'énergie cinétique s'exprime alors en fonction de \dot{T} et \dot{X} sous la forme :

$$W(S/R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{T}^T & \dot{X}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_3 & -j(\overline{mAG})\Theta\Lambda \\ \Lambda^T\Theta^T j(\overline{mAG}) & \Lambda^T\Theta^T J(A,S)\Theta\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{X} \end{bmatrix}.$$

Initialement G était en G_0 et le tenseur d'inertie avait une valeur $J(A_0, S)$ telle que :

$$\Theta^T J(A, S) \Theta = J(A_0, S)$$

ainsi :

$$j(\Theta \overline{A_0 G_0}) = \Theta j(\overline{A_0 G_0}) \Theta^T.$$

et :

$$\boxed{W(S/R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{T}^T & \dot{X}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_3 & -\Theta j(\overline{m A_0 G_0}) \Lambda \\ \Lambda^T j(\overline{m A_0 G_0}) \Theta^T & \Lambda^T J(A_0, S) \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{X} \end{bmatrix}} \quad (2.1)$$

2-2 Métrique du solide rigide

L'expression (2.1) de l'énergie cinétique que nous venons d'établir définit une métrique riemannienne sur l'espace des phases du solide rigide :

$$g = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} mI_3 & -\Theta j(\overline{m A_0 G_0}) \Lambda \\ \Lambda^T j(\overline{m A_0 G_0}) \Theta^T & \Lambda^T J(A_0, S) \Lambda \end{bmatrix}$$

Cette métrique est symétrique et définie positive, nous pouvons la décomposer par la factorisation suivante :

$$\boxed{g = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_3 & -j(\overline{m A_0 G_0}) \\ j(\overline{m A_0 G_0}) & J(A_0, S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^T & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}}$$

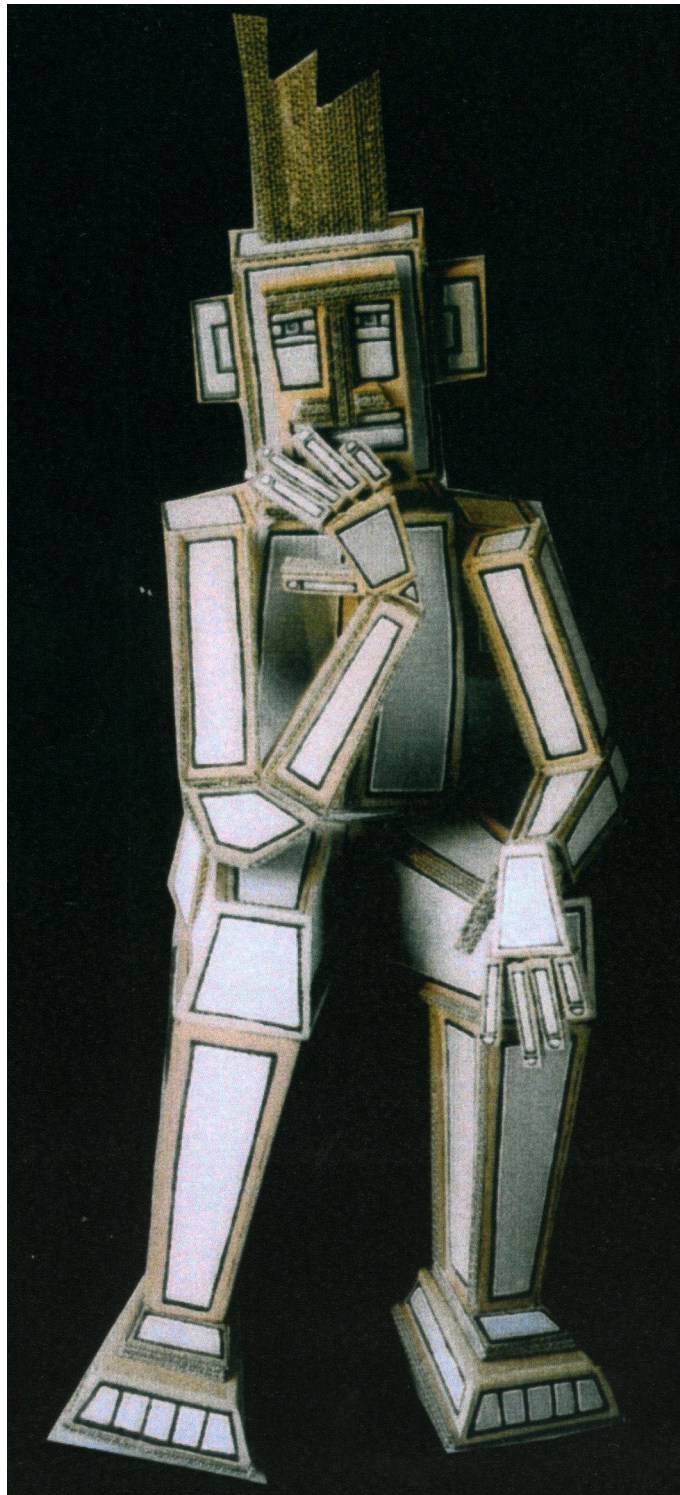
2-3 Tableau du projet

Le tableau (la **peinture** aurait dit Eugen Soos) est le suivant :

- imposer la nullité du tenseur de torsion,
- calculer le tenseur de courbure,
- exhiber le tenseur de Ricci et d'Einstein du solide rigide.

2-4 Exergue de la peinture

Pour cela, il faut continuer à réfléchir comme nous y invite le personnage qui suit.



Cogito, Eric STRAW, exposition à la Maison de l'Architecture - Poitiers 2008

Nous pensons que l'efficacité de la méthode que nous avons suivie s'est révélée dans la résolution des exemples traités et qu'elle donnera, aux mécaniciens et aux géomètres, l'envie d'un retour à Darboux.

BIBLIOGRAPHIE

- [AND 1] M.T. Anderson, Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci, Gazette des mathématiciens, 103, Janvier 2005.
- [ATC 1] K. Atchonouglo, Identification des paramètres caractéristiques d'un phénomène mécanique ou thermique régi par une équation différentielle ou aux dérivées partielles, Thèse, Université de Poitiers, (2007).
- [ATC 2] K. Atchonouglo, C. Vallée, T. Monnet, D. Fortuné, Identification of the ten inertia parameters of a rigid body, Prikl. Mat. Mekh., (PMM), 1, 35-40, (2008).
- [BAR 1] J. Barbe, Structures coques équations générales et stabilité, E.N.S.A.E., Toulouse (1983).
- [BEL 1] M. Belhassan, Étude en grandes déformations des compatibilités pour les plaques planes minces. Équations d'équilibre pour des plaques micro-polaires par le principe des travaux virtuels, DEA, Université de Poitiers, (1992).
- [BER 1] M. Berger, B. Gostiaux, Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces, Springer Verlag, Berlin (1988), translated from the French by Silvio Levy.
- [BER 2] M. Berger, Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure positive, C.R. Acad. Sci. Paris Série A-B 263 (1966), A76-A78.
- [BER 3] M. Berger, Une caractérisation purement métrique des variétés riemanniennes à courbure constante, E.B. Christoffel, Aachen/Monschau (1979), Birkhauser, Basel (1981), 480-492.
- [BER 4] M. Berger, Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math. France, 83 (1953), 279-330.
- [BER 5] M. Berger, Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure positive, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 15 (1961), 179-246.
- [BER 6] M. Berger, Riemannian geometry during the second half of the twentieth century, University lecture series, 17, American Mathematical Society, Providence, RI, (2000), enlarged from the 1998 original. MR 1 729 907.
- [BERN 1] M. Bernadou, Méthodes d'éléments finis pour les coques minces, Masson, Paris (1994).
- [BERN 2] M. Bernadou, P.G. Ciarlet, B. Miara, Existence theorems for two-dimensional linear shell theories, J. Elasticity, 34 (1994), 111-138.
- [BES 1] A. L. Besse, Einstein manifolds, Springer Verlag, Berlin (1987).

- [BES 2] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer Verlag, Berlin (1978).
- [BON 1] O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique, Cahier 19 (1848), 1-146.
- [BON 2] O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (Deuxième partie: détermination de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée)*, Journal de l'École Polytechnique, Paris, Cahier 42 (1867), 1-151.
- [BOU 1] C. Bouby, D. Fortuné, W. Pietraszkiewicz, C. Vallée, *Direct determination of the rotation in the polar decomposition of the deformation gradient by maximizing a Rayleigh quotient*, Zamm 85, 3 (2005), 155-162.
- [BOUR 1] J. P. Bourguignon, *L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci*, séminaire N. Bourbaki, exposé n° 653 (1985-1986), 45-61.
- [BRE 1] J. Breuneval, *Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques*, thèse, Université de Provence (1992).
- [CAO 1] H. D. Cao, B. Chow, *Recent developments on the Ricci flow*, Bulletin American Mathematical Society, 36 (1999), 59-74.
- [CAO 2] H.D. Cao, X.P. Zhu, *A complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures – application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. Math., 10, 2 (2006), 165-492.
- [CEY 1] Ö. Ceyhan, A. S. Fokas, M. Gürses, *Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations*, Journal of Mathematical Physics, 41, 4 (2000), 2251-2270.
- [CHE 1] D. P. Chevallier, *Introduction à la théorie des groupes de Lie réels*, Ellipses, Collection Mathématiques à l'Université (2006).
- [CHE 2] D. P. Chevallier, *On the foundations of ordinary and generalized rigid body dynamics and the principle of objectivity*, Archives of Mechanics, 56, 4, 313-353, Varsovie (2004).
- [CHO 1] B. Chow, D. Knopf, *The Ricci flow*, American Mathematical Society (2004).
- [CIA 1] P.G. Ciarlet, B. Miara, *Justification of the two-dimensional equations of a linearly elastic shallow shell*, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 327-360.
- [CIA 2] P.G. Ciarlet, *Introduction to linear shell theory*, Gauthier-Villars, Paris (1998).
- [CIA 3] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Volume 3: Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam (2000).

-
- [CIA 4] P.G. Ciarlet, Un modèle bi-dimensionnel non linéaire de coque analogue à celui de W. T. Koiter, C. R. Acad. Sci. Paris, 1, 331 (2000), 405-410.
- [CIA 5] P.G. Ciarlet, F. Larssonneur, Sur la détermination d'une surface dans \mathbf{R}^3 à partir de ses deux formes fondamentales, C. R. Acad. Sci. Paris, 1, 331 (2000), 893-897.
- [CIA 6] P.G. Ciarlet, F. Larssonneur, On the recovery of a surface with prescribed first and second fundamental forms, J. Math. Pures Appl., 81 (2002), 167-185.
- [CIA 7] P.G. Ciarlet, C. Mardare, On rigid and infinitesimal rigid displacements in shell theory, J. Math. Pures Appl., 83 (2004), 1-15.
- [CIA 8] P.G. Ciarlet, C. Mardare, Recovery of a manifold with boundary and its continuity as a function of its metric tensor, J. Math. Pures Appl. , 83 (2004), 811-843.
- [CIA 9] P.G. Ciarlet, C. Mardare, Recovery of a surface with boundary and its continuity as a function of its fundamental forms, Anal. Appl., 3 (2005), 99-117.
- [CIA 10] P.G. Ciarlet, An introduction to differential geometry with applications to elasticity, Journal of Elasticity, 78-79, 1-3 (2005), 1-207.
- [CIA 11] P.G. Ciarlet, L. Gratie, O. Iosifescu, C. Mardare, C. Vallée, Another approach to the fundamental theorem of Riemannian geometry in \mathbf{R}^3 , by way of rotation fields, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 87, 3 (2007), 237-252.
- [CIA 12] P.G. Ciarlet, L. Gratie, C. Mardare, New compatibility conditions for the fundamental theorem of surface theory, Comptes Rendus Mathématique, 345, 5 (2007), 273-278.
- [CIA 13] P.G. Ciarlet, L. Gratie, O. Iosifescu, C. Mardare, C. Vallée, Rotation fields and the fundamental theorem of Riemannian geometry in \mathbf{R}^3 , Comptes Rendus Mathématique 343, 6 (2006), 415-421.
- [CIA 14] P.G. Ciarlet, O. Iosifescu, Justification of the Darboux-Vallée-Fortuné compatibility relation in the theory of surfaces, C.R. Acad. Sci., Paris, 1, 346, (21-22), (2008), 1197-1202.
- [CLE 1] S.Cleja-Tigoiu, D. Fortuné, C.Vallée, Torsion equation in anisotropic elasto-plastic materials with continuously distributed dislocations, Journal of Mathematics and Mechanics of Solids, 13,667-689, November 2008.
- [COI 1] J. Coirier, C. Nadot-Martin, Mécanique des milieux continus, 3^{ème} édition, Dunod, Paris (2007).
- [DAN 1] B. Daniel, Sur les surfaces de Bryant et les disques minimaux délimités par trois droites, thèse, Université Paris 7, (2003).
- [DAR 1] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, 4 vol., Paris, Gauthier-Villars, Paris (1887-1896).

- [DES 1] P. Destuynder, A classification of thin shell theories, *Acta Applicandae Mathematicae*, 4 (1985), 15-63.
- [DIE 1] J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris, (1963).
- [DOC 1] M. P. Do Carmo, *Differential geometry of curve and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1976).
- [DOC 2] M. P. Do Carmo, *Stability of minimal submanifolds*, *Global Differential Geometry and Global Analysis, Proceedings, Berlin, (1979)*, *Lectures notes in Math.838*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 129-139.
- [DOU 1] J. Douglas, Solution of the problem of Plateau, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33, 1 (1931), 263-321.
- [DUC 1] J. Duc, D. Bellet, *Mécanique générale, Tome 2 : Mouvements des solides, gyroscope*, E.N.S.A.E., Toulouse (1982).
- [EDE 1] D. G. B. Edelen, A new look at the compatibility problem of elasticity theory, *Int. J. Eng. Sci.* 28 (1990), 23.
- [FEN 1] Z. Q. Feng, C. Vallée, D. Fortuné, F. Peyraud, The 3^é hyperelastic model applied to the modelling of 3D impact, *Finite Elements in Analysis and Design*, 43, 1, 51-58, (2006).
- [FIN 1] F. Finkel, A. S. Fokas, A new immersion formula for surfaces on Lie algebras and integrable equations. Bäcklund and Darboux transformations, *The geometry of solutions* (Halifax, NS, 1999), 207-216, *CRM Proc. Lecture Notes*, 29, AMS, Providence, RI, 201.
- [FOK 1] A. S. Fokas, I. M. Gelfand, F. Finkel, Q.M. Liu, A formula for constructing infinitely many surfaces on Lie algebras and integrable equations, *Selecta Math.*, 6, 4 (2000), 347-375.
- [FOK 2] A. S. Fokas, I. M. Gelfand, Surfaces on Lie groups, on Lie algebras, and their integrability, *Communications in Mathematical Physics*, 177, 1 (1996), 203-220.
- [FOR 1] D. Fortuné, *Mécanique Générale*, Dunod, Paris (2001).
- [FOR 2] D. Fortuné, C. Vallée, Bianchi Identities in the case of large deformations, *Int. J. Engng. Sci.*, 39, 2 (2001), 113-123.
- [FOR 3] D. Fortuné, C. Vallée, Formulation intrinsèque des identités de Bianchi par les conditions de compatibilité en grandes déformations, 11^{ème} C. F. M. Lille-Villeneuve d'Asq, 5, 1-4, 6-10 septembre 1993.
- [FOR 4] D. Fortuné, E. Lainé, M. Belhassan, Equations de compatibilité pour les structures planes minces en grandes déformations : Étude théorique, numérique et expérimentale, 12^{ème} C. F. M. Strasbourg, 2, 73-76, 4-8 septembre 1995.
- [FOR 5] D. Fortuné, Claude Vallée, Construire une coque mince connaissant ses 2 formes fondamentales : Exemple d'intégration pour des formes fondamentales sphériques

compatibles, 8th French Conference in Computational Structural Analysis, held in Giens, France, 21-25 mai 2007, in french.

[FORT 1] I. Fortuné, Les photographies des objets mathématiques de Man Ray, Mémoire de Maîtrise - Histoire de l'Art et Archéologie - mention Histoire de l'Art, Université de Paris I, (1998).

[GAL 1] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer Verlag, Berlin (1990).

[GAU 1] P. Gauduchon, Variétés riemanniennes autoduales (d'après C.H. Taubes et al.), Astérisque (1993), 216, Exp. 767, 4, 151-186, Séminaire Bourbaki, 93 (1992).

[GAUS 1] K. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comm. Soc. Göttingen Bd 6, (1823-1827).

[GIB 1] J. W. Gibbs, Elements of vector analysis, The collected Works of J. W. Gibbs, Longmans, Green and Co, New York, 1928.

[GRA 1] J. J. Gray, Le défi de Hilbert, Dunod, Paris, (2003).

[HAM 1] R. S. Hamilton, Three manifolds of positive Ricci curvature, Jour. Diff. Geom. 17 (1982), 255-306.

[HAM 2] R. S. Hamilton, Non singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds, Comm. Anal. Geom. 7 (1999), 695-729.

[IBR 1] A. Ibrahimbegovic, Théorie géométriquement exacte des coques en rotations finies et son implantation éléments finis, Revue européenne des éléments finis, éditions Hermès, Paris (1997).

[IBR 2] A. Ibrahimbegovic, F. Frey, Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations - Part I. A consistent formulation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 118, 3-4 (1994), 265-284.

[IBR 3] A. Ibrahimbegovic, F. Frey, Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations - Part II. Computational aspects, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 118, 3-4 (1994), 285-308.

[IBR 4] A. Ibrahimbegovic, F. Frey, Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations - Part III. Linearized kinematics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37 (1994), 3659-3683.

[IBR 5] A. Ibrahimbegovic, On assumed shear strain in finite rotation shell analysis, Eng. Comput., 12 (1995), 425-438.

[IBR 6] A. Ibrahimbegovic, Stress resultant geometrically exact shell theory for finite rotations and its finite element implementation, Appl. Mech. Rev., 50, 4 (1997).

- [IBR 7] A. Ibrahimbegovic, B. Brank, J. Korelc, Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation, *Computers & Structures*, 80, 9-10, (2002), 699-717.
- [IBR 8] A. Ibrahimbegovic, R.L. Taylor, On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 45 (2002), 5159-5176.
- [KOI 1] W.T. Koiter, On the nonlinear theory of thin elastic shells, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch*, B 69 (1966), 1-54.
- [LAF 1] J.Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble (1996).
- [LAM 1] L. Lamoureux, D. Fortuné, *Mécanique Générale : Aide Mémoire*, Dunod, Paris (2001).
- [LOV 1] A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover publications, Paris (1944).
- [LOVEL 1] D. Lovelock, H. Rund, *Tensor, differential forms, and variational principles*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York (1975).
- [MAR 1] J. E. Marsden, *Mathematical foundations of elasticity*, Dover publications, Paris (1989).
- [MAU 1] G. Maugin, *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*, North-Holland, Amsterdam (1988).
- [MEU 1] J. B. M. C. Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, *Mémoires de Savants étrangers*, 10 (1785).
- [MIA 1] B. Miara, E. Sanchez-Palencia, Asymptotic analysis of linearly elastic shells, *Asymptotic Anal.*, 12 (1996), 41-54.
- [MIA 2] B. Miara, Nonlinearly elastic shell models. I. The membrane model, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 142 (1998), 331-353.
- [MIL 1] J. Milnor, *Toward the Poincaré Conjecture and the Classification of 3- Manifolds*, *Notices of the AMS*, 50, 10, November 2003.
- [MON 1] T. Monnet, *Contribution à l'identification des paramètres inertiels des segments du corps humain*, Thèse, Université de Poitiers, (2007).
- [OSS 1] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand-Reinhold, N. Y., (1969).
- [OSS 2] R. Osserman, A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem, *Ann. of Math.* 91 (1970), 550-569.

-
- [PER 1] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv : math /0211159v1 math.DG 11 novembre 2002
- [PER 2] G. Perelman, Ricci Flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math/0303109v1 math.DG 10 mars 2003.
- [PER 3] G. Perlman, Finite extinction time for solutions to Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math/0307245v1 math. DG 17 juillet 2003.
- [PIE 1] W. Pietraszkiewicz, J. Badur, finite rotations in the description of continuum deformation, Int. J. Eng. Sci. , 21, (1983), 1097-1115.
- [PIE 2] W. Pietraszkiewicz, Finite Rotations in Structural Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, (1986)
- [PIE 3] W. Pietraszkiewicz, C. Vallée, A method of shell theory in determination of the surface from components of its two fundamental form, Zamm (Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik), 87, 8-9, (2007), 603-615.
- [PIE 4] W. Pietraszkiewicz, M. Szwabowicz, C. Vallée, Determination of the midsurface of a deformed shell from prescribed surface strains and bendings via the polar decomposition, International Journal of Non-Linear Mechanics, 43, Issue 7, September 2008, 579-587.
- [PIE 5] W. Pietraszkiewicz, M. Szwabowicz, Determination of the midsurface of a deformed shell from prescribed fields of surface strains and bendings, International Journal of Solids and Structures, 44, 18-19 (2007), 6163-6172.
- [POI 1] H. Poincaré, Second complément à l'analysis, Proc. London Math. Soc. 32 (1900).
- [POS 1] M. Postnikov, Leçons de géométrie algèbre linéaire et géométrie différentielle, Mir, Moscou (1988).
- [RAD 1] T. Radó, On Plateau's problem, Ann. of Math., 2, 31 (1930), 457-469.
- [RAD 2] T. Radó, The problem of the least area and the problem of Plateau, Mathematische Zeitschrift, 32, 763-796, (1930).
- [RIE 1] B. Riemann, Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zur Grunde liegen, in Gaussche Flachentheorie, Riemannsch Raume und Minkowski-Welt, Teuber-Archiv zur Mathematik, Band 1 (1984), 68-83.
- [ROU 1] P. Rougée, Mécanique des grandes transformations, Springer Verlag, Berlin (1997).
- [SAX 1] G. de Saxcé, C. Vallée, Affine tensors in shell theory , 7th Conference Shell Structures, Theory and Applications , Gdansk - Jurata, Poland, October 9-11, 2002, enlarged version published in the Journal of Theoretical and Applied Mechanics (JTAM), 41, 3 (2003), 593-621.

- [SAX 2] G. de Saxcé, C. Vallée, Calcul tensoriel affine et dynamique des particules matérielles et des solides rigides, 17^{ème} Congrès Français de Mécanique, Troyes, 5-9 septembre 2005.
- [SAX 3] G. de Saxcé, C. Vallée, Calcul tensoriel affine en théorie des coques, communication au 16^{ème} Congrès Français de Mécanique, Nice, 1-5 septembre 2003.
- [SCH 1] J.A. Schouten, Tensor Analysis for Physicists, Dover publications, New York (1944).
- [SHI 1] R.T. Shield, The rotation associated with large strains, Siam J. Appl. Math, (1973), 483-491.
- [SOK 1] I.S. Sokolnikoff, Tensor analysis, theory and applications, John Wiley, New-York (1951-1964).
- [SOL 1] L. Solomon, Élasticité linéaire, Masson, Paris (1968).
- [SOUC 1] R. Souchet, Leçons sur les grandes déformations, Cépaduès, Paris (2004).
- [SOUC 2] R. Souchet, Concerning the polar decomposition of the gradient, International Journal of Engineering Science, 31, 11 (1993), 1499-1506.
- [SOUR 1] J.M. Souriau, Calcul linéaire, Tome 1 et Tome 2, PUF, Paris (1964).
- [SOUR 2] J.M. Souriau, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris (1970).
- [TON 1] E.Tonti, On the formal structure of continuum mechanics, Part 1: Deformation Theory, Meccanica, (1970), 22-30.
- [TRU 1] C. Truesdell, Mechanics of Solids II, Encyclopedia of Physics, vol. a/2, Springer, Berlin, (1972).
- [VALI 1] R. Valid, The nonlinear Theory of Shells through Variational Principles : From Elementary Algebra to Differential Geometry, Wiley, New-York (1995).
- [VAL 1] C. Vallée, Compatibility equations for large deformations, International Journal of Engineering Science, 30, 12 (1992), 1753-1757.
- [VAL 2] C. Vallée, Cours de Grandes Déformations interne à l'Université de Poitiers.
- [VAL 3] C. Vallée, D. Fortuné, Compatibility equations in shell theory, International Journal of Engineering Science, 34, 5 (1996), 495-499.
- [VAL 4] C. Vallée, D. Fortuné, W. Pietraszkiewicz, C. Bouby, Calculation of the square root of C by determining a rotation, in 5th International Seminar on Geometry and Microstructures, held in Sinaia, Romania, September 26-28, (2001).

[VAL 5] C. Vallée, G. de Saxcé, D. Fortuné, Minimal Surfaces, 8th Conference Shell Structures, Theory and Applications (SSTA 2005), Gdansk - Jurata, Poland, October 12-14, 2005. Enlarged version published in the Proceedings Shell Structures, Theory and Applications edited by W. Pietraszkiewicz and C. Szymczak, 179-182, Balkema/Taylor and Francis Group plc, London (2005).

[VAL 6] C. Vallée, D. Fortuné, Link between compatibility conditions in shell theory and 3D compatibility conditions, in the 6th Conference Shell Structures, Theory and Applications, Gdansk-Jurata, Poland, October 12-14, 1998, Enlarged version published in Archives of Civil Engineering, XLV, 2 (1999), 369-374.

[WEI 1] S. Weinberg, Gravitation and cosmology- principles and applications of the general theory of relativity, John Wiley & Son, New York (1972).

ANNEXE A

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS TENSORIELLES

A-1 Généralités

La plupart des formules présentées dans cette annexe ont été établies dans les cours et les TD de Mécanique des Milieux Continus du L3 de Mécanique et Ingénierie, ainsi que dans les cours et TD de Grandes Déformations du Master 1 MSI et FAE dont Claude Vallée et moi-même étions responsables. Certaines formules sont extraites des tomes I et II du livre de « Calcul linéaire » publié par Jean Marie Souriau aux PUF.

L'espace vectoriel tridimensionnel euclidien est muni d'un produit mixte noté (\cdot, \cdot, \cdot) ou bien $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$, d'un produit scalaire noté (\cdot, \cdot) ou $g(\cdot, \cdot)$ et d'un produit vectoriel noté \wedge ou \times . La base choisie dans l'espace est notée e_1, e_2, e_3 .

De manière générale, les lettres U, V, W, X, Y, Z représenteront des vecteurs de l'espace vectoriel tridimensionnel, les lettres A, B, C, D représenteront des applications linéaires de cet espace vectoriel.

A-1-1 Notations

Composantes contravariantes U^i d'un vecteur U :

$$U = U^i e_i .$$

Produit mixte de trois vecteurs :

Le produit mixte est une forme trilinéaire non nulle complètement antisymétrique

$$(U, V, W) = \eta(U, V, W) = \eta_{ijk} U^i V^j W^k$$

où $\eta_{ijk} = \eta(e_i, e_j, e_k)$.

La propriété d'antisymétrie entraîne que $\eta(U, U, W)$ est nulle, puisque :

$$\eta(U, U, W) = -\eta(U, U, W) = 0.$$

Il faut noter, qu'une fois le produit mixte η choisi, toutes les autres formes trilinéaires complètement antisymétriques lui sont proportionnelles.

Produit scalaire de deux vecteurs :

On rend l'espace euclidien en le munissant d'un produit scalaire défini par une forme bilinéaire symétrique et définie positive g .

$$g(U, V) = g_{ij}U^iV^j = U^T V = V^T U = U_j V^j = V_j U^j$$

où $g(e_i, e_j) = g_{ij}$ et où U^T et V^T représentent les formes linéaires de composantes covariantes U_i et V_i

$$U_i = g(U, e_i) \text{ et } V_i = g(V, e_i).$$

Les composantes contravariantes $g^{k\ell}$ de g sont définies par :

$$g^{k\ell} g_{\ell j} = \delta_j^k,$$

où δ_j^k désigne le symbole de Kronecker.

Les descentes et les montées des indices s'effectueront à l'aide des g_{ij} et des $g^{k\ell}$ ainsi pour le produit mixte :

$$\eta^{ijk} = g^{i\ell} g^{jm} g^{kn} \eta_{\ell mn} \quad \text{ou bien} \quad \eta_{\ell mn} = g_{\ell i} g_{mj} g_{nk} \eta^{ijk},$$

d'où différents développements possibles du produit mixte :

$$\eta(U, V, W) = \eta_{ijk} U^i V^j W^k = \eta_{jk}^{\ell} (g_{\ell i} U^i) V^j W^k = \eta_{jk}^{\ell} U_{\ell} V^j W^k = \eta^{\ell h} U_{\ell} V_h W^k = \eta^{\ell hm} U_{\ell} V_h W_m.$$

L'unité de longueur étant accordée avec l'unité de volume, l'identité tensorielle suivante est satisfaite :

$$\boxed{\eta_{ijk} \eta^{\ell mk} = \delta_i^{\ell} \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^{\ell}}.$$

En conséquence en sommant sur deux autres indices, par exemple j et m

$$\boxed{\eta_{ijk} \eta^{\ell jk} = 2\delta_i^{\ell}}.$$

Produit vectoriel de deux vecteurs :

Le produit vectoriel de deux vecteurs se déduit du produit mixte et du produit scalaire en posant :

$$\eta(U, V, W) = g(U \wedge V, W) = g(U \times V, W) = g(U, V \times W).$$

L'antisymétrie de η entraîne

$$\eta(U, V, W) = g(U \times V, W) = -\eta(V, U, W) = -g(V \times U, W)$$

et donc l'antisymétrie du produit vectoriel : $U \times V = -V \times U$.

En composantes, il vient :

$$\eta(U, V, W) = \eta_{ijk} U^i V^j W^k = g_{\ell k} (U \times V)^\ell W^k,$$

d'où :

$$(U \times V)^\ell = g^{\ell k} \eta_{ijk} U^i V^j \text{ ou bien } (U \times V)_k = \eta_{ijk} U^i V^j.$$

On remarque évidemment que :

$$g(U \times V, U) = g(U \times V, V) = 0$$

puisque $\eta(U, U, V)$ ou $\eta(V, V, U)$ s'annule par antisymétrie.

A-1-2 Définitions

Définition 1 : Le déterminant

Le déterminant d'une application linéaire B est le scalaire noté $\det B$ défini par l'identité :

$$\boxed{\eta(BU, BV, BW) = (\det B) \eta(U, V, W)}$$

qui est légitimée par la proportionnalité à $\eta(U, V, W)$ de toute autre forme trilinéaire antisymétrique des trois vecteurs U, V, W .

En composantes :

$$\eta_{k\ell m} B_i^k U^i B_j^\ell V^j B_h^m W^h = (\det B) \eta_{ijh} U^i V^j W^h$$

où U^i, V^j, W^h représentent les composantes contravariantes des vecteurs U, V, W . Cette relation établit la formule :

$$\eta_{ijh} \det B = \eta_{k\ell m} B_i^k B_j^\ell B_h^m$$

qui permet de calculer $\det B$ en choisissant, par exemple, $i=1, j=2$ et $k=3$:

$$\eta_{123} \det B = \eta_{k\ell m} B_1^k B_2^\ell B_3^m.$$

On peut aussi multiplier les deux membres de l'égalité par η^{pqh} , soit :

$$\eta_{ijh} \eta^{pqh} \det B = (\delta_i^p \delta_j^q - \delta_i^q \delta_j^p) \det B = \eta_{k\ell m} \eta^{pqh} B_i^k B_j^\ell B_h^m$$

Ainsi :

$$\boxed{\det B = \frac{1}{3!} \eta_{k\ell m} \eta^{ijh} B_i^k B_j^\ell B_h^m.}$$

Définition 2 : La trace

La trace d'une application linéaire B est le scalaire noté $\text{tr} B$, défini par l'identité :

$$\boxed{\eta(BU, V, W) + \eta(U, BV, W) + \eta(U, V, BW) = (\text{tr} B) \eta(U, V, W)}$$

qui est légitimée par la proportionnalité à $\eta(U, V, W)$ de tout autre forme trilinéaire antisymétrique η appliquée sur les vecteurs U, V, W.

En composantes :

$$\eta_{kjh} B_i^k U^i V^j W^h + \eta_{ikh} U^i B_j^k V^j W^h + \eta_{ijk} U^i V^j B_h^k W^h = (\text{tr} B) \eta_{ijh} U^i V^j W^h.$$

Cette relation établit la formule

$$\eta_{kjh} B_i^k + \eta_{ikh} B_j^k + \eta_{ijk} B_h^k = \eta_{ijh} \text{tr} B$$

qui permet de calculer $\text{tr} B$ en choisissant $i=1, j=2$ et $h=3$:

$$\boxed{\text{tr} B = B_1^1 + B_2^2 + B_3^3 = B_1^1.}$$

Définition 3 : La transposition

La transposition est une opération qui, à une application linéaire B, fait correspondre l'application linéaire notée B^T (dite transposée de B) définie par l'identité

$$\boxed{g(BU, V) = g(U, B^T V).}$$

En composantes :

$$g_{ij} B_k^i U^k V^j = g_{ik} U^k (B^T)_j^i V^j$$

cette relation établit la formule :

$$g_{ij} B_k^i = g_{ik} (B^T)_j^i$$

qui permet de calculer les composantes de B^T :

$$\boxed{(B^T)_j^\ell = g^{\ell k} B_k^i g_{ij}}.$$

Définition 4 : Le produit tensoriel

Le produit tensoriel du vecteur U par la forme linéaire V^T est l'application linéaire notée $U \otimes V^T$ définie par l'identité

$$\boxed{(U \otimes V^T)W = (V^T W)U = g(V, W)U}$$

En composantes, cette relation établit les formules :

$$(U \otimes V^T)_j^i W^j = U^i V_j W^j$$

$$\boxed{(U \otimes V^T)_j^i = U^i V_j = g_{j\ell} V^\ell U^i}.$$

qui permettent de calculer les composantes de $U \otimes V^T$.

Définition 5 : L'application linéaire antisymétrique associée à un vecteur

Soit U un vecteur, l'application linéaire antisymétrique $j(U)$ associée au vecteur U est définie par l'identité

$$\boxed{j(U)V = U \times V}$$

ou bien encore en composantes

$$[j(U)]_k^\ell V^k = (U \times V)^\ell = g^{\ell m} \eta_{mik} U^i V^k.$$

Cette relation établit la formule :

$$\boxed{[j(U)]_k^\ell = g^{\ell m} \eta_{mik} U^i}.$$

qui permet de calculer les composantes de la matrice $j(U)$.

Définition 6 : L'adjuguée d'une application linéaire B

Soit B une application linéaire, l'adjuguée de B est l'application linéaire notée $\text{Adj}B$ définie par l'identité

$$\boxed{\eta(BU, BV, W) = \eta(U, V, (\text{Adj}B)W)}.$$

En composantes, cette relation permet d'établir la formule :

$$\eta_{k\ell m} B_i^k B_j^\ell = \eta_{ijn} (\text{Adj}B)_m^n$$

et de calculer les composantes de $\text{Adj}B$

$$(\text{Adj}B)_m^h = \frac{1}{2} \eta^{ijh} \eta_{k\ell m} B_i^k B_j^\ell.$$

Dans la littérature, une notion apparentée à celle d'adjuguée est la notion de comatrice ou de matrice des cofacteurs notée Cof B. Les deux notions sont transposées l'une de l'autre. Nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre des deux notions. De la définition de l'adjuguée de B, on déduit facilement satisfait à :

$$(BU) \times (BV) = (\text{Adj}B)^T (U \times V) = (\text{Cof} B)(U \times V).$$

A-2 Identités remarquables

A-2-1 La formule de Cramer

La forme quadrilinéaire vectorielle

$$\phi(U, V, W, X) = \eta(U, V, W)X - \eta(X, V, W)U - \eta(U, X, W)V - \eta(U, V, X)W$$

est nulle.

Commençons par prouver l'antisymétrie de ϕ . Il suffit de constater que l'échange de U et V entraîne un changement de signe :

$$\begin{aligned} \phi(V, U, W, X) &= \eta(V, U, W)X - \eta(X, U, W)V - \eta(V, X, W)U - \eta(V, U, X)W \\ &= -\eta(U, V, W)X + \eta(U, X, W)V + \eta(X, V, W)U + \eta(U, V, X)W \\ &= -\phi(U, V, W, X) \end{aligned}$$

et qu'il en va de même lorsqu'on échange U et X

$$\begin{aligned} \phi(X, V, W, U) &= \eta(X, V, W)U - \eta(U, V, W)X - \eta(X, U, W)V - \eta(X, V, U)W \\ &= \eta(X, V, W)U - \eta(U, V, W)X + \eta(U, X, W)V + \eta(U, V, X)W \\ &= -\phi(U, V, W, X). \end{aligned}$$

Dans un espace de dimension trois, toute forme quadrilinéaire complètement antisymétrique est nulle. Si deux des quatre vecteurs sont communs, la valeur de ϕ est nulle par antisymétrie. Si U, V, W ne sont pas indépendants, alors, par linéarité, $\phi(U, V, W, X) = 0$. Si U, V, W sont trois vecteurs indépendants, ils forment une base. Alors, pour tout vecteur X, la valeur de $\phi(U, V, W, X)$ est nulle, nous obtenons l'expression du développement de X dans la base U, V, W :

$$X = \frac{1}{\eta(U, V, W)} [\eta(X, V, W)U + \eta(U, X, W)V + \eta(U, V, X)W].$$

Cette formule, dite de Cramer, est connue pour résoudre les systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues $A_j^i X^j = Y^i$ où les données sont les A_j^i et les Y^i . Les coefficients A_j^i peuvent être regardés comme les composantes d'une application linéaire A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace tridimensionnel. Les Y^i (ainsi que les inconnues X^i) peuvent être regardées comme les composantes d'un vecteur Y (respectivement X). Si on introduit les trois vecteurs $U = Ae_1, V = Ae_2, W = Ae_3$ (dont les composantes sont celles des trois colonnes de la matrice A) le problème devient : trouver X^1, X^2, X^3 tels que :

$$X^1U + X^2V + X^3W = Y$$

Si la matrice de coefficients A_j^i est inversible, ses trois colonnes sont indépendantes, les trois vecteurs U, V, W forment une base et il s'agit de développer le vecteur Y dans cette base. D'après la formule de décomposition ci-dessus énoncée

$$X^1 = \frac{\eta(Y, V, W)}{\eta(U, V, W)} \quad X^2 = \frac{\eta(U, Y, W)}{\eta(U, V, W)} \quad X^3 = \frac{\eta(U, V, Y)}{\eta(U, V, W)}.$$

Les dénominateurs

$$\eta(U, V, W) = \eta(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = (\det A)\eta(e_1, e_2, e_3) = \eta_{123}\det A$$

sont les produits mixtes des trois colonnes de la matrice de coefficients A_j^i . Ils sont proportionnels au déterminant de cette matrice au facteur multiplicatif η_{123} près. Ce déterminant est non nul puisque la matrice est supposée inversible. Les numérateurs des formules qui déterminent les inconnues X^1, X^2, X^3 possèdent aussi en commun le facteur multiplicatif η_{123} qu'on peut prendre égal à 1 sans restreindre la généralité. On peut alors les interpréter comme des déterminants de la matrice A dans laquelle on aurait remplacée une colonne par le second membre Y du système linéaire de départ. Cette méthode de résolution numérique est due à Cramer.

A-2-2 Identité de Jacobi

La forme quadrilinéaire

$$\phi(U, V, W, Z) = \eta(U \times V, W, Z) + \eta(V \times W, U, Z) + \eta(W \times U, V, Z)$$

est complètement antisymétrique.

Elle est donc nulle, ce qui implique l'identité de Jacobi :

$$\boxed{(U \times V) \times W + (V \times W) \times U + (W \times U) \times V = 0.}$$

La démonstration de l'antisymétrie utilise le lien entre produit mixte, le produit scalaire g et le produit vectoriel énoncé au paragraphe A-1-1. La forme quadrilinéaire ϕ peut être réécrite

$$\phi(U, V, W, Z) = g(U \times V, W \times Z) + g(V \times W, U \times Z) + g(W \times U, V \times Z).$$

Nous noterons I, J, K les trois termes de cette somme

$$I = g(U \times V, W \times Z), \quad J = g(V \times W, U \times Z), \quad K = g(W \times U, V \times Z).$$

Nous montrerons que $\phi(U, V, W, Z)$ est complètement antisymétrique en prouvant que les six échanges entre U et V, U et W, U et Z, V et W, V et Z, W et Z entraînent un changement de signe.

Echange de U et V

$$\begin{aligned} \phi(V, U, W, Z) &= g(V \times U, W \times Z) + g(U \times W, V \times Z) + g(W \times V, U \times Z) \\ &= -g(U \times V, W \times Z) - g(W \times U, V \times Z) - g(V \times W, U \times Z) = -(I + K + J) \\ &= -\phi(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Echange de U et W

$$\begin{aligned} \phi(U, W, V, Z) &= g(W \times V, U \times Z) + g(V \times U, W \times Z) + g(U \times W, V \times Z) \\ &= -g(V \times W, U \times Z) - g(U \times V, W \times Z) - g(W \times U, V \times Z) = -(J + I + K) \\ &= -\phi(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Echange de U et Z

$$\begin{aligned} \phi(Z, V, W, U) &= g(Z \times V, W \times U) + g(V \times W, Z \times U) + g(W \times Z, V \times U) \\ &= -g(V \times Z, W \times U) - g(V \times W, U \times Z) - g(W \times Z, U \times V) = -(K + J + I) \\ &= -\phi(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Echange de V et W

$$\begin{aligned} \phi(U, W, V, Z) &= g(U \times W, V \times Z) + g(W \times V, U \times Z) + g(V \times U, W \times Z) \\ &= -g(W \times U, V \times Z) - g(V \times W, U \times Z) - g(U \times V, W \times Z) = -(K + J + I) \\ &= -\phi(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Echange de V et Z

$$\begin{aligned} \phi(U, Z, W, V) &= g(U \times Z, W \times V) + g(Z \times W, U \times V) + g(W \times U, Z \times V) \\ &= -g(U \times Z, V \times W) - g(W \times Z, U \times V) - g(W \times U, V \times Z) = -(J + I + K) \\ &= -\phi(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Echange de W et Z

$$\begin{aligned} \phi(U, V, Z, W) &= g(U \times V, Z \times W) + g(V \times Z, U \times W) + g(Z \times U, V \times W) \\ &= -g(U \times V, W \times Z) - g(V \times Z, W \times U) - g(U \times Z, V \times W) = -(I + K + J) \\ &= -\phi(U, V, W, Z). \end{aligned}$$

Comme au paragraphe précédent, la complète antisymétrie permet de conclure à la nullité de $\phi(U, V, W, Z)$, d'où l'Identité de Jacobi annoncée.

A-3 Propriétés de la transposition

La notion de transposée définie au paragraphe A-1-2 satisfait les trois propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}(AB)^T &= B^T A^T \\ (U \otimes V^T)^T &= V \otimes U^T \\ [j(U)]^T &= -j(U).\end{aligned}$$

A-4 Propriétés du déterminant.

Propriété A-4-1 : Polynôme caractéristique

Soient A une application linéaire de l'espace vectoriel tridimensionnel dans lui-même et λ un scalaire, alors :

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = \det A - \lambda \operatorname{tr}(\operatorname{Adj} A) A + \lambda^2 \operatorname{tr} A - \lambda^3}.$$

Il suffit pour le vérifier d'appliquer la définition du déterminant

$$\eta((A - \lambda I)U, (A - \lambda I)V, (A - \lambda I)W) = \det(A - \lambda I)\eta(U, V, W).$$

Développons en puissance de λ le premier membre de cette relation

$$\begin{aligned}\eta((A - \lambda I)U, (A - \lambda I)V, (A - \lambda I)W) &= \eta(AU, AV, AW) \\ &\quad - \lambda[\eta(AU, AV, W) + \eta(AU, V, AW) + \eta(U, AV, AW)] \\ &\quad + \lambda^2[\eta(AU, V, W) + \eta(U, AV, W) + \eta(U, V, AW)] \\ &\quad - \lambda^3\eta(U, V, W).\end{aligned}$$

Chaque coefficient se transforme grâce aux propriétés énoncées précédemment et se factorise par $\eta(U, V, W)$:

$$\eta(AU, AV, AW) = \det A \eta(U, V, W).$$

$$\begin{aligned}&\eta(AU, AV, W) + \eta(AU, V, AW) + \eta(U, AV, AW) \\ &= \eta(U, V, (\operatorname{Adj} A)W) + \eta(U, (\operatorname{Adj} A)V, W) + \eta((\operatorname{Adj} A)U, V, W) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{Adj} A)\eta(U, V, W)\end{aligned}$$

$$\eta(AU, V, W) + \eta(U, AV, W) + \eta(U, V, AW) = (\operatorname{tr} A)\eta(U, V, W).$$

D'où le résultat annoncé. Les trois invariants de l'application linéaire A sont $\det A$, $\text{tr}(\text{Adj}A)$ et $\text{tr}A$. Un développement de $\text{tr}(\text{Adj}A)$ sera présenté dans les propriétés de l'adjuguée.

Propriété A-4-2 : Dérivée du déterminant de A fonction différentiable d'un paramètre t .

Soit A une application linéaire différentiable d'un paramètre t alors la dérivée de son déterminant suit la règle suivante

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\det A) = \text{tr}(\text{Adj}A \frac{dA}{dt})}$$

La preuve se développe à partir de la définition du déterminant. Si U, V, W sont trois vecteurs, alors :

$$(\det A)\eta(U, V, W) = \eta(AU, AV, AW)$$

et par dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det A)\eta(U, V, W) &= \eta\left(\frac{dA}{dt}U, AV, AW\right) + \eta\left(AU, \frac{dA}{dt}V, AW\right) + \eta\left(AU, AV, \frac{dA}{dt}W\right) \\ &= \eta\left((\text{Adj}A)\frac{dA}{dt}U, V, W\right) + \eta\left(U, (\text{Adj}A)\frac{dA}{dt}V, W\right) + \eta\left(U, V, (\text{Adj}A)\frac{dA}{dt}W\right) \\ &= \text{tr}\left[(\text{Adj}A)\frac{dA}{dt}\right]\eta(U, V, W). \end{aligned}$$

Il suffit alors de simplifier par $\eta(U, V, W)$ pour obtenir le résultat.

A-5 Propriétés de la trace

Propriété A-5-1 : $\text{tr}(U \otimes V^T) = \text{tr}(V \otimes U^T) = g(U, V)$

Preuve : $\text{tr}(U \otimes V^T) = (U \otimes V^T)_i^i = U^i V_i = V^i U_i = g(U, V)$

Propriété A-5-2 : $\text{tr}(B^T) = \text{tr}B$

Preuve : Par définition de la transposée

$$(B^T)_j^\ell = g^{\ell k} B_k^i g_{ij}$$

Donc :

$$\text{tr}(B^T) = g^{\ell k} B_k^i g_{i\ell} = \delta_i^k B_k^i = B_i^i = \text{tr}B.$$

Propriété A-5-3 : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Preuve :

$$\text{tr}(AB) = (AB)_i^i = A_j^i B_i^j = B_i^j A_j^i = (BA)_j^j = \text{tr}(BA).$$

Propriété A-5-4 : $\text{tr}(j(U)(B + B^T)) = 0$

Preuve :

$$\text{tr}(j(U)B) = \text{tr}((j(U)B)^T) = -\text{tr}(B^T j(U)) = -\text{tr}(j(U)B^T).$$

En particulier, en choisissant $B=I$, $\text{tr}(j(U)) = 0$.

Propriété A-5-5 : $\text{tr}(j(U)B) = \frac{1}{2} \text{tr}[j(U)(B - B^T)]$

Cette propriété découle directement de la propriété A-5-4.

A-6 Propriété du produit tensoriel

Propriété A-6-1 : Si U, V, W forment une base orthonormée de l'espace tridimensionnel alors :

$$U \otimes U^T + V \otimes V^T + W \otimes W^T = I.$$

Propriété A-6-2 : $(U \otimes V^T)B^T = U \otimes (BV)^T$

$$\begin{aligned} \text{Cas particuliers : } (U \otimes V^T)(W \otimes Z^T) &= g(W, V)U \otimes Z^T \\ (U \otimes V^T)j(W) &= -U \otimes (j(W)V)^T. \end{aligned}$$

Propriété A-6-3 : $B(U \otimes V^T) = (BU) \otimes V^T$

$$\begin{aligned} \text{Cas particuliers : } (W \otimes Z^T)(U \otimes V^T) &= g(Z, U)W \otimes V^T \\ j(W)(U \otimes V^T) &= (j(W)U) \otimes V^T. \end{aligned}$$

Les démonstrations s'effectuent à partir des définitions du produit tensoriel, du produit scalaire, du produit vectoriel et n'offrent aucune difficulté.

Propriété A-6-4 : $B(U \otimes V^T)B^T = (BU) \otimes (BV)^T$

A-7 Propriétés de l'application $j(\cdot)$

Les propriétés qui vont être énoncées sont très utiles aux étudiants en mécanique car le produit vectoriel et le double produit vectoriel apparaissent dès les premiers cours de

mécanique générale. Différentes formules se déclinent à partir de la formule du double produit vectoriel qui s'écrit :

$$U \times (V \times W) = g(U, W)V - g(U, V)W$$

en utilisant la notation anglo-saxonne \times pour le produit vectoriel. L'introduction des composantes permet la démonstration suivante :

$$\begin{aligned} [U \times (V \times W)]^\ell &= g^{\ell k} \eta_{kij} U^i (V \times W)^j = g^{\ell k} \eta_{kij} g^{jh} \eta_{hpq} U^i V^p W^q = g_{mi} \eta^{\ell mh} \eta_{pqh} U^i V^p W^q \\ &= (\delta_p^\ell \delta_q^m - \delta_p^m \delta_q^\ell) g_{mi} U^i V^p W^q = \delta_p^\ell U_q V^p W^q - \delta_p^m U_m V^p W^\ell \\ &= (U_q W^q) V^\ell - (U_m V^m) W^\ell = [g(U, W)V - g(U, V)W]^\ell \end{aligned}$$

à partir de la propriété

$$\eta^{\ell mh} \eta_{pqh} = \delta_p^\ell \delta_q^m - \delta_p^m \delta_q^\ell$$

du produit mixte.

Propriété A-7-1 : Identité de Pythagore

$$\boxed{g(U \times V, U \times V) + g(U, V)^2 = g(U, U)g(V, V)}.$$

La démonstration considère le produit scalaire d'un vecteur V avec le double produit vectoriel $U \times (V \times U)$. D'une part, à cause de la formule du double produit vectoriel,

$$g(U \times (V \times U), V) = g(U, U)g(V, V) - [g(U, V)]^2$$

et, d'autre part, à cause de la définition du produit vectoriel,

$$g(U \times (V \times U), V) = \eta(U, V \times U, V) = \eta(V \times U, V, U) = g(U \times V, U \times V).$$

il vient, en égalant les deux expressions obtenues

$$[g(U \times V)]^2 + [g(U, V)]^2 = g(U, U)g(V, V).$$

Appliquée à deux vecteurs unitaires U et V formant entre eux un angle θ , cette relation s'interprète comme l'identité trigonométrique : $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Propriétés A-7-2 : La formule du double produit vectoriel conduit à un ensemble de propriétés de $j(\cdot)$

$$j(U)j(V) = V \otimes U^T - g(U, V)I$$

$$j(U)j(V) - j(V)j(U) = V \otimes U^T - U \otimes V^T$$

$$j(U \times V) = j(U)j(V) - j(V)j(U) = V \otimes U^T - U \otimes V^T.$$

En effet, à partir de $U \times (V \times W) = g(U, W)V - g(U, V)W$, nous déduisons :

$$j(U)j(V)W = (V \otimes U^T)W - g(U, V)W$$

ce qui donne la première des relations en oubliant W . En échangeant U et V dans cette première relation et en effectuant la différence, c'est la deuxième relation qui apparaît. La dernière relation se déduit aussi de la formule du double produit vectoriel

$$j(U \times V)W = -W \times (U \times V) = g(U, W)V - g(V, W)U = (V \otimes U^T - U \otimes V^T)W.$$

En oubliant W , il vient :

$$j(U \times V) = V \otimes U^T - U \otimes V^T.$$

Propriété A-7-3 : Soit une application linéaire B , la relation suivante est satisfaite pour tout vecteurs U et V :

$$\boxed{(BU) \times V + U \times (BV) = [(tr B)I - B^T](U \times V)}.$$

Ce résultat est obtenu en se référant à la définition de la trace. Soient U, V, W trois vecteurs alors, par définition de la trace :

$$\eta(BU, V, W) + \eta(U, BV, W) = (tr B)\eta(U, V, W) - \eta(U, V, BW)$$

ou bien encore, en introduisant le produit scalaire g

$$g((BU) \times V, W) + g(U \times (BV), W) = g((tr B)U \times V, W) - g(B^T(U \times V), W).$$

Les deux produits scalaires des vecteurs $(BU) \times V + U \times (BV)$ et $(tr B)U \times V - B^T(U \times V)$, avec tout vecteur W , étant égaux, nous en déduisons la propriété annoncée.

Propriété A-7-4 : $j(BU) + j(U)B = ((tr B)I - B^T)j(U)$.

Il suffit, pour justifier cette propriété, d'oublier V dans le résultat ci-dessus

$$j(BU)V + j(U)BV = [(tr B)I - B^T]j(U)V.$$

Propriété A-7-5 : $\boxed{j(U)B + B^T j(U) = j[(tr B)I - B]U}$.

La relation précédente met en évidence l'antisymétrie de la somme $j(U)B + B^T j(U)$. Le réarrangement du résultat précédent conduit tout naturellement à :

$$j(U)B + B^T j(U) = j[(tr B)I - B]U.$$

Propriété A-7-6 : $\det j(U) = 0$.

Il suffit, pour le vérifier, de partir de la définition du déterminant et d'utiliser la formule du double produit vectoriel.

$$\begin{aligned} [\det j(U)]\eta(V, W, Z) &= \eta(j(U)V, j(U)W, j(U)Z) = g(U \times V, (U \times W) \times (U \times Z)) \\ &= g(U \times V, \eta(U, W, Z)U) = \eta(U, V, U)\eta(U, W, Z) = 0 \end{aligned}$$

Propriété A-7-7 : Soient C et D deux applications linéaires et V un vecteur, alors l'application linéaire antisymétrique

$$C^T j(V)D + D^T j(V)C$$

(dépendant linéairement de V) est de la forme $j(MV)$ avec :

$$M = CD + DC - (\operatorname{tr}C)D - (\operatorname{tr}D)C + [(\operatorname{tr}C)(\operatorname{tr}D) - \operatorname{tr}(CD)]I.$$

Démonstration :

Appliquons $C^T j(V)D + D^T j(V)C$ à un vecteur W et effectuons le produit scalaire avec un vecteur Z

$$\begin{aligned} g([C^T j(V)D + D^T j(V)C]W, Z) &= g(j(V)DW, CZ) + g(j(V)CW, DZ) \\ &= \eta(V, DW, CZ) + \eta(V, CW, DZ) = g(V, (DW) \times (CZ) + (CW) \times (DZ)). \end{aligned}$$

Nous cherchons une application linéaire M telle que

$$g(j(MV)W, Z) = \eta(MV, W, Z) = g(V, M^T(W \times Z))$$

coincide avec :

$$g(V, (DW) \times (CZ) + (CW) \times (DZ))$$

C'est à dire :

$$(DW) \times (CZ) + (CW) \times (DZ) = M^T(W \times Z)$$

ou encore

$$j(DW)C + j(CW)D = M^T j(W)$$

pour tout vecteur W .

Prenons la transposée, puis retranchons les deux expressions :

$$j(DW)C + j(CW)D + C^T j(DW) + D^T j(CW) = M^T j(W) + j(W)M.$$

Appliquons trois fois la propriété A-7-5 :

$$j(DW)C + C^T j(DW) = j([(trC)I - C]DW)$$

$$j(CW)D + D^T j(CW) = j([(trD)I - D]CW)$$

$$j(W)M + M^T j(W) = j([(trM)I - M]W).$$

Nous en déduisons

$$j([(trC)D + (trD)C - CD - DC + M - (trM)I]W) = 0.$$

ceci implique nécessairement que

$$(trC)D + (trD)C - CD - DC + M - (trM)I = 0.$$

Afin d'obtenir M , il faut encore pré-calculer trM . Pour cela, prenons la trace des deux membres de l'équation précédente

$$trM = (trC)(trD) - tr(CD).$$

Finalement il vient

$$M = [(trC)(trD) - tr(CD)]I - [(trC)D + (trD)C] + CD + DC$$

ce qui correspond à l'expression attendue.

A-8 Propriétés de l'adjuguée d'une application linéaire A

Propriétés A-8-1 : Soient U et V deux vecteurs, A une application linéaire et α un scalaire, alors :

$$(\text{Adj}A)^T(U \times V) = (AU) \times (AV).$$

$$\text{Adj}(\alpha A) = \alpha^2 \text{Adj}A.$$

Cette propriété découle directement de la définition de l'adjuguée :

$$\begin{aligned} g((AU) \times (AV), W) &= \eta(AU, AV, W) = \eta(U, V, (\text{Adj}A)W) \\ &= g(U \times V, (\text{Adj}A)W) = g[(\text{Adj}A)^T(U \times V), W] \end{aligned}$$

En oubliant le vecteur W , nous obtenons la première propriété annoncée d'où nous déduisons facilement la deuxième en l'appliquant à αA .

Propriété A-8-2 : $(\text{Adj}A)A = (\det A)I$.

En effet :

$$\eta(U, V, (\text{Adj}A)AW) = \eta(AU, AV, AW) = (\det A)\eta(U, V, W) = \eta(U, V, (\det A)W),$$

d'où la propriété annoncée.

Remarque 1 : Il peut être intéressant de considérer $AdjA$ lorsque A n'est pas inversible.

Remarque 2 : La transposée de la comatrice de A coïncide avec $AdjA$.

Propriété A-8-3 : Soient A et B deux applications linéaires, alors :

$$Adj(AB) = (AdjB)(AdjA).$$

La preuve est simple.

$$\eta(U, V, Adj(AB)W) = \eta(ABU, ABV, W) = \eta(BU, BV, (AdjA)W) = \eta(U, V, (AdjB)(AdjA)W)$$

d'où la propriété annoncée, en oubliant les vecteurs U, V, W .

Propriété A-8-4 : $Adj(U \otimes V^T) = 0$.

La propriété A-8-1 implique :

$$(Adj(U \otimes V^T))^T(X \times Y) = [(U \otimes V^T)X] \times [(U \otimes V^T)Y] = g(V, X)g(V, Y)(U \times U) = 0.$$

Propriété A-8-5 : $Adj(j(U)) = (U \otimes U^T)$

La propriété A-8-1 et celle du double produit vectoriel ainsi que la définition 4 du produit tensoriel donnent immédiatement le résultat.

$$\begin{aligned} [Adj(j(U))]^T(X \times Y) &= [j(U)X] \times [j(U)Y] = [j(U)X] \times (U \times Y) = g(j(U)X, Y)U \\ &= g(j(X)Y, U)U = g(X \times Y, U)U = (U \otimes U^T)(X \times Y) \end{aligned}$$

Propriété A-8-6 : $Adj(A^T) = (AdjA)^T$

Cette formule peut se démontrer en utilisant les expressions de l'adjuguée et de la transposée

$$\begin{aligned} [Adj(A^T)]_m^h &= \eta^{ijh} \eta_{k\ell m} (A^T)_i^k (A^T)_j^\ell = \eta^{ijh} \eta_{k\ell m} (g^{kn} A_n^p g_{pi}) (g^{\ell q} A_q^r g_{rj}) \\ &= \eta_{pr}^h \eta^{nq} A_n^p A_q^r = \eta_{pri} g^{ih} \eta^{nqj} g_{jm} A_n^p A_q^r \\ &= g^{hi} (\eta^{nqj} \eta_{pri} A_n^p A_q^r) g_{jm} = g^{hi} ((AdjA)_i^j) g_{jm} \\ &= ((AdjA)^T)_m^h. \end{aligned}$$

Une démonstration intrinsèque sera exposée en A-8-10.

Propriété A-8-7 : Soient Q une application linéaire et U un vecteur, alors : $Q^T j(U)Q = j[(AdjQ)U]$.

Démonstration : Appliquons $Q^T j(U)Q$ à un vecteur V et effectuons le produit scalaire avec un vecteur W :

$$\begin{aligned} g(Q^T j(U)QV, W) &= g(j(U)QV, QW) = \eta(U, QV, QW) = \eta((\text{Adj}Q)U, V, W) \\ &= g(j[(\text{Adj}Q)U]V, W). \end{aligned}$$

En oubliant W , puis V , la relation prévue apparaît.

Propriétés A-8-8 : Soit R une rotation, alors les propriétés suivantes se vérifient très simplement :

$$R^T \text{ est l'inverse de } R \text{ (puisque } R^T R = R R^T = I),$$

$$\text{Adj}R = R^T \text{ (puisque } \det R = 1),$$

$R^T j(U)R = j(R^T U)$, $R j(U)R^T = j(RU)$ (en remplaçant, dans la propriété A-8-7, Q par R ou R^T),

$j(U)R = R j(R^T U)$, $R^T j(U) = R j(R^T U)$ (en multipliant, à gauche par R ou à droite par R^T la formule de la propriété A-8-7).

Propriétés A-8-9 : Soient A et B deux applications linéaires dont B inversible, alors :

$$(AV) \times (BW) + (BV) \times (AW) = [\text{tr}(AB^{-1})I - AB^{-1}]^T (\text{Adj}B)^T (V \times W)$$

Démonstration : Evaluons le premier terme en effectuant son produit scalaire avec un vecteur Z

$$\begin{aligned} g(AV \times BW, Z) + g(BV \times AW, Z) &= \eta(AV, BW, Z) + \eta(BV, AW, Z) \\ &= \eta(AB^{-1}(BV), BW, Z) + \eta(BV, AB^{-1}(BW), Z) \end{aligned}$$

La définition (A-1-2) de la trace appliquée à AB^{-1} permet de transformer ces deux termes en :

$$\begin{aligned} \eta(AB^{-1}(BV), BW, Z) + \eta(BV, AB^{-1}(BW), Z) &= \text{tr}(AB^{-1})\eta(BV, BW, Z) - \eta(BV, BW, (AB^{-1})Z) \\ &= \eta(BV, BW, [\text{tr}(AB^{-1})I - AB^{-1}]Z). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g(AV \times BW + BV \times AW, Z) &= \eta(BV, BW, [\text{tr}(AB^{-1})I - AB^{-1}]Z) \\ &= \eta(V, W, (\text{Adj}B)[\text{tr}(AB^{-1})I - AB^{-1}]Z) \\ &= g([\text{tr}(AB^{-1})I - AB^{-1}]^T (\text{Adj}B)^T (V \times W), Z). \end{aligned}$$

Comme le vecteur Z est arbitraire, nous en déduisons par linéarité l'identité vectorielle annoncée.

Propriétés A-8-10 : Développement en puissance de l'adjuguée de $A-\lambda I$

Soit A une application linéaire, alors :

$$\text{Adj}(A - \lambda I) = \text{Adj}A - \lambda[(\text{tr}A)I - A] + \lambda^2 I.$$

Démonstration : Au cours du paragraphe A-4-1 nous avons développée en puissances de λ le polynôme caractéristique $\det(A-\lambda I)$ d'une application linéaire A définie sur l'espace tridimensionnel. Il est aussi possible d'obtenir un développement en puissances de l'adjuguée de $A-\lambda I$. En effet, pour tous vecteurs U, V, W

$$\eta((A - \lambda I)U, (A - \lambda I)V, W) = \eta(U, V, \text{Adj}(A - \lambda I)W),$$

Développons par définition de l'adjuguée le premier membre en puissances de λ , par linéarité :

$$\begin{aligned} \eta((A - \lambda I)U, (A - \lambda I)V, W) &= \eta(AU, AV, W) - \lambda[\eta(U, AV, W) + \eta(AU, V, W)] + \lambda^2 \eta(U, V, W) \\ &= \eta(U, V, (\text{Adj}A)W) - \lambda[(\text{tr}A)\eta(U, V, W) - \eta(U, V, AW)] + \lambda^2 \eta(U, V, W) \\ &= \eta(U, V, [\text{Adj}A - \lambda((\text{tr}A)I - A) + \lambda^2]W). \end{aligned}$$

L'identification avec le deuxième membre implique la propriété annoncée.

La propriété A-8-2 permet de relier les développements en puissance de λ de l'adjuguée de $(A-\lambda I)$

$$\text{Adj}(A - \lambda I)(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)I.$$

Le développement du déterminant du polynôme caractéristique établi en A-4-1 conduit à l'identité :

$$(\text{Adj}A - \lambda[(\text{tr}A)I - A] + \lambda^2 I)(A - \lambda I) = (\det A - \lambda \text{tr}(\text{Adj}A) + \lambda^2 \text{tr}A - \lambda^3)I$$

Identifions les coefficients de même puissance en λ .

Le terme de degré zéro apporte le renseignement :

$$(\text{Adj}A)A = (\det A)I$$

ce que l'on savait déjà.

Le terme de degré 1 est à retenir

$$-(\text{tr}A)A + A^2 - \text{Adj}A = -[\text{tr}(\text{Adj}A)]I$$

Les termes en λ^2 et en λ^3 conduisent à des évidences. Revenons au terme en λ et prenons la trace, il vient

$$\text{tr}(\text{Adj}A) = \frac{1}{2}[(\text{tr}A)^2 - \text{tr}(A^2)].$$

Ces résultats conduisent à trois propriétés qui se présentent ainsi :

- **Le polynôme caractéristique d'une application linéaire A est de la forme suivante :**

$$\det(A - \lambda I) = \det A - \lambda \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2} + \lambda^2 \operatorname{tr} A - \lambda^3$$

- **L'adjuguée de A se développe en puissances de A**

$$\operatorname{Adj} A = A^2 - (\operatorname{tr} A)A + \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2} I,$$

- **L'adjuguée de (A-λI) se développe en puissances de λ et A**

$$\operatorname{Adj}(A - \lambda I) = A^2 + (\lambda - \operatorname{tr} A)A + (\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2}) I.$$

- **A est « solution de son polynôme caractéristique »,**

$$A^3 - (\operatorname{tr} A)A^2 + \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2} A - (\det A)I = 0.$$

C'est le théorème de Cayley-Hamilton en dimension trois, nous l'obtenons en effectuant le produit de $\operatorname{Adj} A$ par A que nous savons égal à $(\det A)I$.

Remarque 1 : *Maintenant, nous pouvons compléter la propriété A-8-2 en*

$$A(\operatorname{Adj} A) = (\operatorname{Adj} A)A = (\det A)I$$

puisque le développement de $\operatorname{Adj} A$ en puissance de A montre que A commute avec $\operatorname{Adj} A$. De plus si A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [A^2 - (\operatorname{tr} A)A + \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2} I].$$

Remarque 2 : *De même, la propriété A-8-6, démontrée en composantes*

$$(\operatorname{Adj} A)^T = \operatorname{Adj}(A^T)$$

devient claire en considération du développement de $\operatorname{Adj} A$ et de la propriété A-5-2

$$\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A.$$

ANNEXE B

ANALYSE TENSORIELLE

B-1 Généralités

La plupart des formules présentées dans cette annexe ont été établies dans les cours et TD de Grandes Déformations du Master 1 MSI et FAE dont Claude Vallée et moi-même étions responsables.

L'espace vectoriel tridimensionnel euclidien est muni d'un produit scalaire noté $g(\cdot, \cdot)$ ou plus simplement par un point ; d'un produit mixte noté $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$ ou plus simplement (\cdot, \cdot, \cdot) et d'un produit vectoriel noté \wedge ou \times . Une base orthonormée directe notée e_1, e_2, e_3 est choisie dans l'espace.

De manière générale, $f(X), h(X), \dots$ représenteront des champs scalaires dépendant des coordonnées d'espace X ; $V(X), W(X), \dots$ représenteront des champs vectoriels ; $A(X), B(X), \dots$ représenteront des champs d'applications linéaires. Les fonctions, les composantes des champs de vecteurs ou des champs d'applications seront supposées autant de fois dérivables que les opérateurs différentiels définis le nécessiteront.

B-2 Notations et Définitions

B-2-1 Définition du gradient d'une fonction

À la variation notée df d'un champ scalaire f , on peut associer un champ de vecteurs noté $\text{grad}f$ et dit gradient de f

$$df = g(\text{grad}f, dX) = \frac{\partial f}{\partial X} dX$$

où $\frac{\partial f}{\partial X}$ est la forme linéaire de composantes covariantes $\frac{\partial f}{\partial X^i}$.

B-2-2 Définition du gradient d'un champ de vecteurs

À la variation notée dV d'un champ vectoriel V , on peut associer un champ d'applications linéaire notée $\frac{\partial V}{\partial X}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial X} dX.$$

Les composantes de $\frac{\partial V}{\partial X}$ sont : $(\frac{\partial V}{\partial X})_j^i = \frac{\partial V^i}{\partial X^j}$.

B-2-3 Définition de la divergence d'un champ de vecteurs

La divergence du champ vectoriel V est le champ scalaire noté $\text{div}V$ défini par :

$$\text{div} V = \text{tr}\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right).$$

B-2-4 Définition du rotationnel d'un champ de vecteurs

Le rotationnel du champ vectoriel est le champ vectoriel noté $\text{rot} V$ défini par :

$$j(\text{rot} V) = \frac{\partial V}{\partial X} - \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T.$$

B-2-5 Composantes du rotationnel d'un champ de vecteurs

Pour mener à bien des cas où la démonstration intrinsèque n'est pas évidente, il est utile de connaître l'expression des composantes contravariantes du rotationnel d'un champ de vecteurs V :

$$\boxed{(\text{rot}V)^p = \eta^{p\ell h} g_{hi} \frac{\partial V^i}{\partial X^\ell} = \eta^{p\ell h} \frac{\partial V_h}{\partial X^\ell}}.$$

Démonstration : La définition 5 de l'annexe A de l'application j et la définition ci-dessus du rotationnel de V conduisent à :

$$g^{ij} \eta_{k\ell j} (\text{rot}V)^k = [j(\text{rot} V)]_\ell^i = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T \right]_\ell^i = \frac{\partial V^i}{\partial X^\ell} - g^{im} \frac{\partial V^m}{\partial X^\ell} g_{n\ell}$$

Multiplions par g_{hi} et sommions sur i :

$$\eta_{k\ell h} (\text{rot}V)^k = g_{hi} \frac{\partial V^i}{\partial X^\ell} - g_{n\ell} \frac{\partial V^n}{\partial X^h}.$$

Multiplions maintenant cette relation par $\eta^{p\ell h}$ et sommions sur ℓ et h

$$2\delta_k^p(\text{rotV})^k = \eta^{p\ell h} \left(g_{hi} \frac{\partial V^i}{\partial X^\ell} - g_{n\ell} \frac{\partial V^n}{\partial X^h} \right)$$

En changeant les indices muets de sommation dans le deuxième terme du second membre, il vient l'égalité avec le premier terme :

$$-\eta^{p\ell h} g_{n\ell} \frac{\partial V^n}{\partial X^h} = -\eta^{p h \ell} g_{ih} \frac{\partial V^i}{\partial X^\ell} = \eta^{p\ell h} g_{hi} \frac{\partial V^i}{\partial X^\ell}.$$

Ainsi

$$(\text{rotV})^p = \eta^{p\ell h} g_{hi} \frac{\partial V^i}{\partial X^\ell}.$$

ou bien, en introduisant les composantes covariantes de V

$$(\text{rotV})^p = \eta^{p\ell h} \frac{\partial(g_{hi} V^i)}{\partial X^\ell} = \eta^{p\ell h} \frac{\partial V_h}{\partial X^\ell}.$$

B-3 Formules usuelles d'analyse vectorielle

Les formules énoncées ci-dessous figurent dans de nombreux livres de mécanique et ne seront pas démontrées. Elles se déduisent pour la plupart des propriétés algébriques développées dans l'Annexe A.

$$\text{rot}(\text{grad}f) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot}f) = 0$$

$$\text{grad}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) = \text{grad}(\mathbf{V}^T \mathbf{W}) = \text{grad}(\mathbf{W}^T \mathbf{V}) = \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{W} + \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{V}$$

$$\frac{\partial(f \mathbf{V})}{\partial \mathbf{X}} = f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{V} \otimes (\text{grad}f)^T$$

$$\text{div}(f \mathbf{V}) = f \text{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \text{grad}f$$

$$\text{rot}(f \mathbf{V}) = f \text{rot} \mathbf{V} + (\text{grad}f) \wedge \mathbf{V}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{V} \wedge \mathbf{W})}{\partial \mathbf{X}} = j(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{X}} - j(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\text{div}(\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = \mathbf{W} \cdot \text{rot} \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{W}$$

$$\text{rot}(V \wedge W) = (\text{div}W)V - (\text{div}V)W + \frac{\partial V}{\partial X} W - \frac{\partial W}{\partial X} V$$

Cas particuliers

$$\text{grad}(\|X\|^2) = 2X$$

$$\frac{\partial X}{\partial X} = I$$

$$\text{div}X=3$$

$$\text{rot}X=0$$

B-4 Définition et propriétés du rotationnel d'un champ d'applications linéaires

B-4-1 Définition du rotationnel d'un champ d'applications linéaires

Le rotationnel d'un champ d'applications linéaires B est obtenu par extension du rotationnel en considérant le champ vectoriel Bk où k est un vecteur constant, ainsi nous poserons :

$$(\text{Rot}B)k = \text{rot}(Bk).$$

Si nous attribuons successivement à k les valeurs des vecteurs de la base orthonormée e_1, e_2, e_3 , nous voyons que les colonnes du rotationnel de B sont les rotationnels des vecteurs colonnes de B. Compte tenu de l'expression tensorielle obtenue en B-2-5 les composantes mixtes du rotationnel de B sont de la forme :

$$(\text{Rot}B)_j^p = \eta^{p\ell h} g_{hi} \frac{\partial B_j^i}{\partial X^\ell} = \eta^{p\ell h} \frac{\partial B_{hj}}{\partial X^\ell}.$$

B-4-2 Simplification de $(\delta B)dX - (dB)\delta X$

Propriété : Soient dX et δX deux variations de X, alors les variations dB et δB d'un champ d'applications linéaires B satisfont :

$$(\delta B)dX - (dB)\delta X = (\text{Rot}(B^T))^T (\delta X \wedge dX).$$

Démonstration : Soit k un vecteur constant alors :

$$g(\delta B dX - dB \delta X, k) = g(dX, \delta B^T k) - g(\delta X, dB^T k) = g(dX, \frac{\partial (B^T k)}{\partial X} \delta X) - g(\delta X, \frac{\partial (B^T k)}{\partial X} dX).$$

Factorisons le scalaire obtenu afin de le faire apparaître comme un produit scalaire avec le vecteur dX.

$$g(\delta B dX - dB \delta X, k) = g(dX, [\frac{\partial(B^T k)}{\partial X} - (\frac{\partial(B^T k)}{\partial X})^T] \delta X)$$

En reconnaissant le rotationnel de $B^T k$, il vient successivement :

$$\begin{aligned} g(\delta B dX - dB \delta X, k) &= g(dX, j[\text{rot}(B^T k)] \delta X) = \eta(dX, \text{rot}(B^T k), \delta X) = \eta(dX, (\text{Rot} B^T) k, \delta X) \\ &= \eta((\text{Rot} B^T) k, \delta X, dX) = g(\delta X \wedge dX, (\text{Rot} B^T) k) \\ &= g((\text{Rot} B^T)^T (\delta X \wedge dX), k) \end{aligned}$$

Le résultat annoncé est obtenu en oubliant le vecteur quelconque k .

B-5 Propriétés du rotationnel généralisé

Propriété B-5-1 : Pour tout champ vectoriel V : $\text{Rot}(\frac{\partial V}{\partial X})^T = 0$.

Démonstration : Elle est simple. Soit k vecteur constant, et appliquons la définition du rotationnel généralisé ainsi que la formule développant le gradient d'un produit scalaire. Le champ de vecteurs

$$[\text{Rot}(\frac{\partial V}{\partial X})^T] k = \text{rot}[(\frac{\partial V}{\partial X})^T k] = \text{rot}(\text{grad} g(V, k))$$

est nul à cause de la propriété du rotationnel ordinaire rappelée au paragraphe B-3.

Propriété B-5-2 : Pour tout champ vectoriel V :

$$\frac{\partial}{\partial X}(\text{rot} V) = \text{Rot}(\frac{\partial V}{\partial X}).$$

Démonstration : Pour tout vecteur constant k :

$$(\text{Rot}[j(\text{rot} V)]) k = [\text{Rot}(\frac{\partial V}{\partial X} - (\frac{\partial V}{\partial X})^T)] k.$$

Le deuxième membre se simplifie en

$$[\text{Rot}(\frac{\partial V}{\partial X})] k$$

à cause de la propriété B-5-1.

Par ailleurs :

$$[\text{Rot} j(\text{rot} V)] k = \text{rot}[(\text{rot} V) \wedge k] = \text{div}(\text{rot} V) k + \frac{\partial(\text{rot} V)}{\partial X} k = \frac{\partial(\text{rot} V)}{\partial X} k$$

à cause des propriétés de la divergence (B-3).

Ainsi, en comparant les deux expressions obtenues pour $[\text{Rot } j(\text{rot}V)]k$, et en oubliant k , il vient, par linéarité, la propriété annoncée.

Propriété B-5-3 : Pour tous champs vectoriels V et W

$$\text{Rot}(V \otimes W^T) = (\text{rot}V) \otimes W^T - j(V)\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^T.$$

Démonstration : Soit k un vecteur constant, appliquons lui le rotationnel du produit tensoriel,

$$\begin{aligned} \text{Rot}(V \otimes W^T)k &= \text{rot}[(V \otimes W^T)k] = \text{rot}[g(W, k)V] = g(W, k)\text{rot}V + \text{grad}(g(W, k)) \wedge V \\ &= [(\text{rot}V) \otimes W^T]k - V \wedge \left[\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^T k\right] = [(\text{rot}V) \otimes W^T - j(V)\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^T]k \end{aligned}$$

ce qui achève de démontrer la formule une fois oublié le vecteur k .

Propriété B-5-4 : Pour un champ vectoriel V ,

$$\text{Rot } j(V) = \frac{\partial V}{\partial X} - (\text{div}V)I.$$

Démonstration : Soit k un vecteur constant, appliquons lui le rotationnel de $j(V)$

$$[\text{Rot } j(V)]k = \text{rot}[j(V)k] = \text{rot}[V \wedge k] = -(\text{div}V)k + \frac{\partial V}{\partial X}k = \left[\frac{\partial V}{\partial X} - (\text{div}V)I\right]k$$

ce qui achève la démonstration en oubliant le vecteur k .

Propriété B-5-5 : Pour un champ d'applications linéaires B et un champ scalaire f ,

$$\text{Rot}(f B) = f \text{Rot}B + j(\text{grad}f)B,$$

en particulier

$$\text{Rot}(f I) = j(\text{grad}f).$$

Démonstration : Soit k un vecteur constant, appliquons lui le rotationnel de $f B$

$$[\text{Rot}(f B)]k = \text{rot}(f Bk) = f \text{rot}(Bk) + j(\text{grad}f)Bk = [f \text{Rot}B + j(\text{grad}f)B]k.$$

ce qui achève la vérification en oubliant le vecteur k .

Propriété B-5-6 : Pour un champ d'applications linéaires B , il vient la propriété suivante relative à la trace de B ,

$$\boxed{\text{tr}(\text{Rot}B) = \text{div}[j^{-1}(B^T - B)]},$$

où la notation $j^{-1}(B^T - B)$ a été utilisée pour représenter le vecteur Z tel que $B - B^T = -j(Z)$. Le cas particulier où B est symétrique et noté S se traduit par l'annulation de la trace du rotationnel de S

$$S = S^T \Rightarrow \text{tr}(\text{Rot}S) = 0.$$

Démonstration : Soient k , h et m trois vecteurs constants, alors par définition de la trace (A-1-2), Annexe A)

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Rot}B)\eta(k, h, m) &= \eta((\text{Rot}B)k, h, m) + \eta(k, (\text{Rot}B)h, m) + \eta(k, h, (\text{Rot}B)m) \\ &= \eta(\text{rot}(Bk), h, m) + \eta(k, \text{rot}(Bh), m) + \eta(k, h, \text{rot}(Bm)) \\ &= g(\text{rot}(Bk), h \wedge m) + g(\text{rot}(Bh), m \wedge k) + g(\text{rot}(Bm), k \wedge h). \end{aligned}$$

Les trois produits scalaires de cette somme peuvent être regardés comme trois divergences :

$$\begin{aligned} g(\text{rot}(Bk), h \wedge m) &= \text{div}[(Bk) \wedge (h \wedge m)] \\ g(\text{rot}(Bh), m \wedge k) &= \text{div}[(Bh) \wedge (m \wedge k)] \\ g(\text{rot}(Bm), k \wedge h) &= \text{div}[(Bm) \wedge (k \wedge h)]. \end{aligned}$$

Utilisons la propriété du double produit vectoriel évoquée au paragraphe A-7 de l'Annexe A et sommons les trois termes

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Rot}B)\eta(k, h, m) &= \text{div}[[g(Bh, k) - g(Bk, h)]m \\ &\quad + [g(Bm, h) - g(Bh, m)]k \\ &\quad + [g(Bk, m) - g(Bm, k)]h]. \end{aligned}$$

Ainsi, la partie antisymétrique de B apparaît :

$$\text{tr}(\text{Rot}B)\eta(k, h, m) = \text{div}[g((B - B^T)h, k)m + g((B - B^T)m, h)k + g((B - B^T)k, m)h].$$

Posons $B - B^T = j(Z)$ alors :

$$\text{tr}(\text{Rot}B)\eta(k, h, m) = \text{div}[\eta(Z, k, m)h + \eta(h, Z, m)k + \eta(h, k, Z)m].$$

Faisons appel à la formule de Cramer A-2-1, la somme des trois vecteurs sous la divergence se simplifie en :

$$\eta(Z, k, m)h + \eta(h, Z, m)k + \eta(h, k, Z)m = \eta(h, k, m)Z$$

Nous obtenons :

$$\text{tr}(\text{Rot}B)\eta(k, h, m) = \text{div}[\eta(h, k, m)Z] = \text{div}(-Z)\eta(k, h, m)$$

Sachant que $j^{-1}(B^T - B) = -Z$, nous aboutissons à la propriété annoncée.

B-6 Définitions et propriétés de la divergence d'un champ d'applications linéaires

B-6-1 Définition de la divergence d'un champ d'applications linéaires

La divergence d'un champ d'applications linéaires B est obtenue par extension de la divergence en considérant le champ vectoriel Bk où k est un vecteur constant, ainsi nous poserons :

$$(\text{Div}B)k = \text{div}(Bk).$$

Si nous attribuons successivement à k les valeurs des trois vecteurs de la base orthonormée e_1, e_2, e_3 , la divergence de B est la forme linéaire dont les composantes covariantes sont les divergences des vecteurs colonnes de B .

$$(\text{Div}B)_j = \frac{\partial B_j^i}{\partial X^i}.$$

Propriété : Pour tout champ de vecteurs V , alors

$$\text{div}(BV) = (\text{Div}B)V + \text{tr}\left(B \frac{\partial V}{\partial X}\right).$$

Démonstration : La divergence de BV est constituée de la somme de deux termes. Le premier, du aux variations de B , est $(\text{Div}B)V$ d'après la définition de la divergence généralisée. Le second terme du aux variations de V est

$$B_j^i \frac{\partial V^j}{\partial X^i} = \text{tr}\left(V \frac{\partial V}{\partial X}\right).$$

B-6-2 Propriétés de la divergence généralisée

Nous énonçons les propriétés les plus utiles en mécanique des milieux continus sans cependant les démontrer car elles n'interviendront pas directement dans le travail présenté ici :

$$\text{Div}(fB) = f \text{Div}B + (\text{grad}f)^T B$$

$$\text{Div}(fI) = (\text{grad}f)^T$$

$$\text{Div}(fV \otimes W) = f(\text{div}V)W^T + fV^T \frac{\partial W^T}{\partial X} + (\text{grad}f)^T V \otimes W^T$$

$$\text{Div}(X \otimes X^T) = 4X^T$$

$$\text{Div}(j(V)) = (\text{rot}V)^T$$

$$j[(\text{Div}(\text{Adj}B))^T] = \text{BRot}(B^T) - [\text{BRot}(B^T)]^T$$

En particulier :

$$\text{Div}(\text{Adj}(\frac{\partial V}{\partial X})) = 0.$$



PERGAMON

International Journal of Engineering Science 39 (2001) 113–123

International
Journal of
Engineering
Science

www.elsevier.com/locate/ijengsci

Bianchi identities in the case of large deformations

Danielle Fortune^{*}, Claude Vallee

*Laboratoire de Modélisation Mécanique et Mathématiques Appliquées, Université de Poitiers, UFR SFA SP2MI,
Boulevard 3 Téléport 2, 86960, Futuroscope Cedex, France*

Received 19 January 2000; accepted 19 January 2000

(Communicated by E. SOÓS)

Abstract

Explicit relations are given for the conditions satisfied by the tensors involved in the compatibility equations of three-dimensional continua undergoing large deformations. These relations are Bianchi identities: they reflect the dependence between compatibility equations drawn up by performing the polar decomposition of the transformation gradient. © 2000 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

In the framework of small deformations a symmetrical tensor ε will be a strain tensor if it satisfies the following compatibility equations:

$$\text{Curl} (\text{Curl } \varepsilon)^* = 0. \quad (1)$$

These equations are not independent, since the tensor B defined by

$$B^* = \text{Curl} (\text{Curl } \varepsilon)^* \quad (2)$$

satisfies the relations

$$B^* = B \quad \text{and} \quad \text{Div } B^* = 0. \quad (3)$$

^{*} Corresponding author. Tel.: +33-5-49-49-67-95; fax: +33-5-49-49-67-91.
E-mail address: fortune@13ma.univ-poitiers.fr (D. Fortune).

In this paper, we propose in the framework of nonlinear theory to generalize Eq. (3) for the tensor involved in compatibility equations by extending it to include the case of large deformations.

2. Notation

Let X be the Lagrange's variables, x the Euler's variables and

$$F = \frac{\partial x}{\partial X}$$

the derivative of the transformation undergone by the medium. The Cauchy strain tensor C is such that

$$F^*F = C, \quad (4)$$

where the asterisk on the right denotes the transposition.

In a previous study [1], compatibility equations were established for a three-dimensional continuum, starting from the polar decomposition of F

$$F = RU,$$

where R is a rotation and U is the square root of C [2].

The conditions under which (4) admits solutions were determined by introducing a linear mapping field A such that

$$R^*\delta R = j(A\delta X),$$

where δX denotes a constant vector field, δR the value of the Fréchet differential of R when X varies by δX , and $j(u)$ is the skew symmetrical linear mapping associated with the cross-product

$$j(u)v = u \times v.$$

3. Compatibility equations

The use of polar decomposition, and tensor A to account for the variation in the rotation R led us to reformulate the question as to whether system (4) admits solutions. We took the following two systems of equations:

$$dx = RU dX, \quad (5)$$

$$dR = Rj(A dX) \quad (6)$$

and the compatibility conditions were established using a two-step procedure.

The existence of A , i.e., the integrability of system (6), is ensured by the symmetry of the second derivatives of R . For the two constant vectors dX and δX , satisfying this condition amounts to cancelling

$$[d, \delta]R = d\delta R - \delta dR = Rj(B(dX \times \delta X)), \quad (7)$$

where after calculus

$$B = (\text{Curl}A^* + \text{Adj} A)^*. \quad (8)$$

$\text{Adj} A$ is the adjugate mapping of A , if k, h and ℓ are three vectors it is defined by

$$(Ak, Ah, \ell) = (k, h, (\text{Adj} A)\ell),$$

where $(\ , \ , \)$ stands for the triple product.

The system

$$dR = Rj(AdX)$$

is therefore integrable if tensor A satisfies

$$\text{Curl}A^* + \text{Adj} A = 0. \quad (9)$$

For (5) to be integrable, the second derivatives of x have to be symmetrical. Satisfying amounts to cancelling this conditions

$$[d, \delta]x = d\delta x - \delta dx = RE(dX \times \delta X), \quad (10)$$

where after calculus

$$E = (\text{Curl} U + (\det U)(\text{tr}(AU)I - U^{-1}A)U^{-1})^* \quad (11)$$

(I is the identity).

The system

$$dx = RUdX$$

is therefore integrable on condition E vanishes, which can also be written

$$A = \frac{1}{\det U} \left[U(\text{Curl} U) - \frac{\text{tr}(U \text{Curl} U)}{2} I \right] U. \quad (12)$$

Note that the procedure adopted up to this point is similar to that used in the linear case. Introducing the skew symmetrical part ω of the gradient of the displacement vector, one can show that, using tensor ε ,

$$d\omega = j((\text{Curl} \varepsilon)dX), \quad (13)$$

which makes it possible to re-write the compatibility equations (1) in the following form:

$$\begin{aligned} [d, \delta]\omega &= d\delta\omega - \delta d\omega = 0, \\ j((\text{Curl}(\text{Curl } \varepsilon)^*)(dX \times \delta X)) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

In the nonlinear theory developed in [1], which was outlined above, A played the role of $\text{Curl } \varepsilon$. After being linearized, relations (6) and (12) correspond to the present relation (13), and Eq. (9) to the present Eq. (14). In the linear theory $\text{Adj } A$ disappeared as a second-order term.

With a view to determining the dependence between the compatibility equations (9) and (12) to which this large deformation theory led, it is now proposed to draw up the Jacobi identity for each of them.

4. Bianchi identity conditions satisfied by tensor B

First it is proposed to deal with the variations in the rotation R occurring at X in three given directions, ∂X , dX and δX . Using the same notation [,] as that adopted in (7) and applying the Jacobi identity, we obtain

$$[\partial, [d, \delta]]R + [d, [\delta, \partial]]R + [\delta, [\partial, d]]R = 0. \quad (15)$$

The first term in this identity can be written more explicitly as follows:

$$[\partial, [d, \delta]]R = \partial([d, \delta]R) - [d, \delta]\partial R.$$

Using relations (6) and (7), we obtain

$$\begin{aligned} \partial([d, \delta]R) &= \partial(Rj(B(dX \times \delta X))) \\ &= \partial Rj(B(dX \times \delta X)) + Rj(\partial B(dX \times \delta X)) \\ &= R\{j(A\partial X)j(B(dX \times \delta X)) + j(\partial B(dX \times \delta X))\} \end{aligned}$$

and

$$[d, \delta]\partial R = [d, \delta]Rj(A\partial X) = Rj(B(dX \times \delta X))j(A\partial X).$$

The linear algebraic formula

$$j(A\partial X)j(B(dX \times \delta X)) - j(B(dX \times \delta X))j(A\partial X) = j((A\partial X) \times (B(dX \times \delta X)))$$

leads us to

$$[\partial, [d, \delta]]R = Rj\{((A\partial X) \times B(dX \times \delta X)) + \partial B(dX \times \delta X)\}.$$

The development of the other two terms constituting the Jacobi identity (15) can be deduced from the above result by performing a circular permutation procedure on ∂, d and δ . The six terms are added after re-arranging the similar terms together, as follows:

D. Fortune, C. Vallee / International Journal of Engineering Science 39 (2001) 113–123 117

$$\begin{aligned} & (A\partial X) \times (B(dX \times \delta X)) + (AdX) \times (B(\delta X \times \partial X)) + (A\delta X) \times (B(\partial X \times dX)) \\ & = j^{-1}(BA^* - AB^*)(\partial X, dX, \delta X) \end{aligned} \quad (16)$$

and

$$\partial B(dX \times \delta X) + dB(\delta X \times \partial X) + \delta B(\partial X \times dX) = (\text{Div } B^*)^*(\partial X, dX, \delta X). \quad (17)$$

To obtain formula (17), all that is required is to use an alternated property of the trace and Div, by generalizing the classical definition for the divergence of a vector to the divergence of a tensor T .

$$(\text{Div } T)k = \text{Div}(Tk)$$

for any constant vector k .

Formula (16) requires a much more elaborate proof, which will not be presented here.

We will specify only the notation j^{-1} : if T is a skew symmetrical linear mapping $j^{-1}(T)$ defined by

$$\langle T\ell, k \rangle = (j^{-1}(T), \ell, k),$$

where $\langle T\ell, k \rangle$ is the inner product of the two vectors $T\ell$ and k .

The results obtained in (16) and (17) therefore give the conditions on tensor B in order to satisfy the Jacobi identity (15) corresponding to the rotation R

$$R[j((\text{Div } B^*)^*) + BA^* - AB^*] = 0 \quad (18)$$

or

$$(\text{Div } B^*)^* + j^{-1}(BA^* - AB^*) = 0. \quad (19)$$

The latter identity is also called the second Bianchi identity [3] because, as we shall see in Section 9, tensor B depends on the curvature tensor corresponding to the metric defined by C .

5. Bianchi identity conditions satisfied by tensor E

We now write the Jacobi identity related to the variations in x occurring at X in three given directions $\partial X, dX$ and δX

$$[\partial, [d, \delta]]x + [d, [\delta, \partial]]x + [\delta, [\partial, d]]x = 0. \quad (20)$$

First we take the first term in the identity

$$\begin{aligned} [\partial, [d, \delta]]x &= \partial([d, \delta]x) - [d, \delta]\partial x = \partial(RE(dX \times \delta X)) - [d, \delta](RU\partial X) \\ &= (\partial R)E(dX \times \delta X) + R\partial E(dX \times \delta X) - ([d, \delta]R)U\partial X. \end{aligned}$$

By substituting the expressions for ∂R and $[d, \delta]R$ given by relations (6) and (7), it becomes possible to factorize the result by R as follows:

$$[\partial, [d, \delta]]_x = R[(A\partial X) \times (E(dX \times \delta X)) + (U\partial X) \times (B(dX \times \delta X)) + \partial E(dX \times \delta X)].$$

The other two terms present in (20) can be obtained by performing a circular permutation procedure on ∂, d and δ in the above expression. Upon applying formula (16) to tensors A and E and to tensors U and B and the definition of the divergence to the variations on E , the Jacobi identity related to variable x is satisfied whenever tensor E is consistent with

$$(\text{Div} E^*)^* + j^{-1}(EA^* - AE^* + BU - UB^*) = 0. \tag{21}$$

The latter identity is also called the first Bianchi identity [3], since it involves the torsion tensor, as we shall see in Section 9.

In Sections 4 and 5, we have therefore established the two Bianchi identities which are the conditions to be fulfilled by tensor fields B and E . These identities specify the dependance between the compatibility equations satisfied by tensor fields A and U . They involves only the divergence operator: the nonlinearity is accounted for by the skew symmetrical parts of the composite variables BA^*, EA^* and BU .

6. Condensed Bianchi identities

Let us take the second Bianchi identity, which was obtained in Section 4.

$$(\text{Div} B^*)^* + j^{-1}(BA^* - AB^*) = 0.$$

By introducing the rotation R defined by (5), this identity can be reduced to a single divergence term. We therefore multiply the left-hand side by R and then calculate the inner product with a constant vector k

$$\begin{aligned} \langle (\text{Div} B^*)^* + j^{-1}(BA^* - AB^*), R^*k \rangle &= \langle (\text{Div} B^*)^*, R^*k \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}((AB^* - BA^*)j(R^*k)) \\ &= \langle (\text{Div} B^*)^*, R^*k \rangle + \text{tr}(B^*j(R^*k)A) \end{aligned}$$

now A is related to R in (6), which can also be written as follows:

$$\frac{\partial}{\partial X}(R^*k) = j(R^*k)A$$

and hence

$$\begin{aligned} \langle (\text{Div} B^*)^* + j^{-1}(BA^* - AB^*), R^*k \rangle &= \langle (\text{Div} B^*)^*, R^*k \rangle + \text{tr}\left(B^* \frac{\partial}{\partial X}(R^*k)\right) \\ &= \text{Div}(B^*R^*k) = \text{Div}(B^*R^*)k. \end{aligned}$$

The second Bianchi identity therefore becomes

D. Fortune, C. Vallee / International Journal of Engineering Science 39 (2001) 113–123

119

$$\text{Div}(B^*R^*) = 0. \quad (22)$$

Working on similar lines, the first Bianchi identity (21) can be written as follows:

$$R^*(\text{Div}(E^*R^*))^* + j^{-1}(BU - UB^*) = 0. \quad (23)$$

7. Eulerian formulation

Here it is proposed to establish a tensor relation between the divergence operator, denoted Div_x when working in terms of Eulerian variables x , and the divergence operator used up to now in the context of Lagrange variables X .

For a tensor T we calculate

$$\text{Div}((\text{Adj } F)T).$$

Let k be a constant vector, then

$$\text{Div}((\text{Adj } F)T)k = \text{Div}((\text{Adj } F)Tk) = [\text{Div}(\text{Adj } F)Tk + \text{tr} \left[(\text{Adj } F) \frac{\partial(Tk)}{\partial X} \right]].$$

Now the term $\text{Div}(\text{Adj } F)$ cancels out, since F is the derivative $\partial x / \partial X$. It therefore suffices to transform the trace term

$$\text{Div}((\text{Adj } F)T)k = \text{tr} \left[(\det F) \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial(Tk)}{\partial X} \right] = (\det F) \text{tr} \left(\frac{\partial(Tk)}{\partial x} \right) = (\det F) \text{Div}_x(Tk).$$

This gives the formula

$$\text{Div}((\text{Adj } F)T) = (\det C)^{1/2} \text{Div}_x T$$

which can also be written as

$$\text{Div } T = (\det C)^{1/2} \text{Div}_x((\det C)^{-1/2} RUT).$$

It is therefore possible from now on to write the Bianchi identities in terms of Eulerian variables. The condensed form of expression (22) for tensor B is

$$\text{Div}_x((\det C)^{-1/2} RUB^*R^*) = 0.$$

This is the second Bianchi identity. The first Bianchi identity can be written as

$$(\text{Div}_x((\det C)^{-1/2} RUE^*R^*))^* + (\det C)^{-1/2} Rj^{-1}(BU - UB^*) = 0,$$

but

$$Rj^{-1}(BU - UB^*) = j^{-1}(RBUR^* - RUB^*R^*).$$

Let us introduce two tensors P and Q by the formulae

$$P^* = (\det C)^{-1/2}RUB^*R^*,$$

$$Q^* = (\det C)^{-1/2}RUE^*R^*,$$

then the two Bianchi identities become

$$(\text{Div}_x P^*)^* = 0, \tag{24}$$

$$(\text{Div}_x Q^*)^* + j^{-1}(P - P^*) = 0. \tag{25}$$

8. The case of small displacements

Only the following linear terms for B and E will be kept here out of the whole theory of large deformations developed above

$$B_L^* = \text{Curl } A^*,$$

$$E_L^* = \text{Curl } \varepsilon + \text{tr} A I - A.$$

The compatibility equations presented in (13) and (14) are related to each other by means of the following linearized Bianchi identities:

$$(\text{Div } B_L^*)^* = 0, \tag{26}$$

$$(\text{Div } E_L^*)^* + j^{-1}(B_L - B_L^*) = 0. \tag{27}$$

It can be seen that these linearized Bianchi identities are identical to those obtained in Eulerian terms in (24) and (25).

9. Metric associated with the strain tensor

In this section, the linear mapping fields C , B and E introduced above will be geometrically interpreted. Here we take X^i to denote the Lagrangian coordinates in a fixed orthonormal basis (ε_i) and we take

$$e_i = \frac{\partial x}{\partial X^i} = RU\varepsilon_i \tag{28}$$

thus (e_i) is the natural basis associated with Eulerian variables. The symmetrical strain tensor C can be associated with the metric

$$\langle e_i, e_j \rangle = (F^*F)_{ij} = C_{ij}. \quad (29)$$

The expression for the torsion tensor S comes from the derivatives of the components of the natural basis

$$\frac{\partial e_i}{\partial X^j} - \frac{\partial e_j}{\partial X^i} = S_i^m{}_j e_m. \quad (30)$$

Now, since e_i is $\partial x / \partial X^i$ and e_j is $\partial x / \partial X^j$, Eq. (30) can be seen to express the lack of symmetry of the second derivatives of x , and the torsion tensor S can be written in terms of tensor E , which was introduced into formula (10). In fact

$$S_i^m{}_j = \varepsilon_{ij}{}^k (U^{-1}E)^m{}_k, \quad (31)$$

where

$$\varepsilon_{ijk} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k)$$

is the Levi–Civita symbol and

$$\varepsilon_{ij}{}^k = (C^{-1})^{k\ell} \varepsilon_{ij\ell}$$

is obtained by shifting the third index with the contravariant components of C^{-1} .

The curvature tensor K assesses the lack of symmetry of the second variations of e_i

$$\frac{\partial}{\partial X^j} \left(\frac{\partial e_i}{\partial X^k} \right) - \frac{\partial}{\partial X^k} \left(\frac{\partial e_i}{\partial X^j} \right) = K_i^m{}_{kj} e_m. \quad (32)$$

In view of (28), relation (32) can be seen to express the lack of the symmetry of the second derivatives of the rotation R . The curvature tensor K can be written in terms of tensor B

$$K_i^m{}_{kj} = \varepsilon_i^{mp} \varepsilon_{jkq} (B^* \text{Adj } U)^q{}_p. \quad (33)$$

Starting from the metric defined by the strain tensor C , the curvature tensor K will be null if and only if tensor B is null, and the torsion tensor S will be null if and only if tensor E is null.

10. Bianchi identities with indices

Fitting the Jacobi identity to the e_i basis components yields the second Bianchi identity [3] satisfied by the covariant derivatives of K (denoted by a bar)

122 *D. Fortune, C. Vallee / International Journal of Engineering Science 39 (2001) 113–123*

$$K_j^\ell{}_{ik/h} + K_j^\ell{}_{kh/i} + K_j^\ell{}_{hi/k} - S_i^m{}_k K_j^\ell{}_{mh} - S_k^m{}_h K_j^\ell{}_{mi} - S_h^m{}_i K_j^\ell{}_{mk} = 0,$$

which can be re-written as follows upon introducing tensors B and A :

$$\varepsilon_{hki} (R_j((\text{Div } B^*)^* + j^{-1}(BA^* - AB^*))R^*)_j^\ell = 0.$$

These equations are equivalent to those obtained directly in (19).

Likewise, applying the Jacobi identity to the variations in x yields the first Bianchi identity [3] satisfied by the covariant derivatives of S .

$$K_k^\ell{}_{ij} + K_i^\ell{}_{jk} + K_j^\ell{}_{ki} - S_k^\ell{}_{i/j} - S_i^\ell{}_{j/k} - S_j^\ell{}_{k/i} - S_k^\ell{}_h S_i^h{}_j - S_i^\ell{}_h S_j^h{}_k - S_j^\ell{}_h S_k^h{}_i = 0.$$

These conditions can be rewritten in the following form:

$$\varepsilon_{ijk} [U^{-1}((\text{Div } E^*)^* + j^{-1}(EA^* - AE^* + BU - UB^*))]^\ell = 0,$$

which leads to the equations obtained directly in (21). These formulae are in line with studies by Enzo Tonti [4].

11. Conclusion

To answer the question of the integrability of the system

$$\frac{\partial x^*}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial X} = C$$

(where C denotes a positive symmetrical tensor defining a metric in three-dimensional space). We introduced a linear mapping A and constructed two linear tensors B and E summarizing all the information contained in the classical curvature and torsion tensors. The nonlinear compatibility equations correspond to the vanishing of B and E .

The dependence between these compatibility equations is given by the Bianchi identities, classically satisfied by the curvature and torsion tensors. These are obtained in the present study in a condensed form in which they are much easier to handle.

Non-linearities occur here only in the form of tensor products, and the sole operator involved is divergence.

These formulae should provide useful tools for dealing with continua undergoing large deformations.

D. Fortune, C. Vallee / International Journal of Engineering Science 39 (2001) 113–123

123

References

- [1] C. Vallee, Compatibility equations for large deformations, *Int. J. Engrg. Sci.* 30 (12) (1992) 1753–1757.
- [2] M.E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.
- [3] D. Lovelock, H. Rund, *Tensors Differential Forms and Variational Principles*, Wiley, New York, 1975.
- [4] E. Tonti, On the formal structure of continuum mechanics, Part I: Deformation Theory, *Meccanica*, March 1970, pp. 22–30.

ANNEXE D

TRAVAUX ET PUBLICATIONS

1-Thèse, rapport, livre

[1] L. LAMOUREUX, D. FORTUNÉ, « Mécanique Générale », Aide Mémoire, Editions DUNOD, 2001.

[2] D. FORTUNÉ, « Sur des applications de la théorie de P. BÉZIER sur les charges concentrées en élasticité linéaire », Université de Poitiers, *Mémoire de Thèse de 3^e cycle*, Mars 1974.

[3] D. LÉONARD, « Problèmes d'élastostatique plane. Méthode de MOSSAKOVSKI et KLIATCHKO permettant de tenir compte de l'influence du coefficient de Poisson, pour des domaines multiplement connexes, les charges étant données à la frontière. Application à la photoélasticimétrie », Université de Poitiers, *Mémoire de D. E. A.* , Septembre 1969.

2-Publications dans des revues internationales à comité de lecture

[4] K. ATCHONOUGLO, C. VALLÉE, T. MONNET, D. FORTUNÉ, “Identification of the ten inertia parameters of a rigid body », “Prikl. Mat. Mekh. », PMM,N°1, pp 35-40, 2008

[5] S.CLEJA-TIGOIU, D.FORTUNÉ, C.VALLÉE, « Torsion equation in anisotropic elasto-plastic materials with continuously distributed dislocations», “Journal of Mathematics and Mechanics of Solids”, accepté

[6] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, C. LERINTIU, “Subdifferential of the largest eigenvalue of a symmetrical matrix-Application of direct projection methods”, “Analysis and Applications”, Vol. 6, N°1, pp.99-112, 2008.

- [7] Z.-Q. FENG, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, F. PEYRAUT, “The 3^e hyperelastic model applied to the modelling of 3D impact problems”, “Finite Elements in Analysis and Design”, Vol. 43, N°1, pp. 51-58, 2006.
- [8] C. BOUBY, D. FORTUNÉ, W. PIETRASZKIEWICZ, C. VALLÉE, « Direct determination of the rotation in the polar decomposition of the deformation gradient by maximizing a Rayleigh quotient », *ZAMM*, Vol. **85**, Issue 3, pp. 155-162, 2005.
- [9] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, K. CHAMPION-RÉAUD, « A general solution of a linear dissipative oscillatory system avoiding decomposition into eigenvectors. », « J. Appl. Maths Mechs », Vol 69, n°6, pp 837-843, 2005 (translated from « Prikl. Mat. Mekh. », PMM).
- [10] C. VALLÉE, M. HJIAJ, D. FORTUNÉ, G. de SAXCÉ, « Duality extended by generalising the Legendre-Fenchel-Moreau transformation », in *IUTAM Symposium on “Complementary-Dual Variational Principles in Nonlinear Mechanics”*, held in Shanghai, China, august 13-16, 2002.
➤ Enlarged version « Generalized Legendre-Fenchel transformation » published in the Proceedings of the *IUTAM Symposium “Complementary, Duality, and Symmetry in Nonlinear Mechanics”*, (D. GAO Eds, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands), pp. 289-311, 2004.
- [11] E. BAESU, D. FORTUNÉ, E. SOOS, « Incremental behaviour of hyperelastic dielectrics and piezoelectric crystals », *ZAMP*, Vol. **54**, N°1, pp. 160-178, 2003.
- [12] D. FORTUNÉ, C. VALLÉE, « Bianchi Identities in the case of large deformations », *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. **39**, N°2, pp. 113-123, 2001.
- [13] F. ISNARD, G. DODDS, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Real-time dynamics simulation of a closed chain robot within a virtual reality environment », *IMechE Journal of Multi-body Dynamics*, Vol. **214**, pp. 219-232, 2000.
- [14] C. VALLÉE, A. HAMDOUNI, F. ISNARD, D. FORTUNÉ, « The Equations of Motion of a Rigid Body without Parametrization of Rotations », *J. Appl. Maths Mechs*, Vol **63(1)**, pp. 25-30, 1999. (translated from « Prikl. Mat. Mekh. », Vol. **63(1)**, pp. 30-36, 1999.)
- [15] E. LAINÉ, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Nonlinear isotropic constitutive laws : choice of the three invariants, convex potentials and constitutive inequalities », *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. **37(15)**, pp. 1927-1941, 1999.
- [16] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Link between compatibility conditions in shell theory and 3D compatibility conditions », in the *6th Conference “Shell Structures, Theory and Applications”*, Gdansk-Jurata, Poland, october 12-14, 1998.
➤ enlarged version published in *Archives of Civil Engineering*, Vol **XLV(2)**, pp. 369-374, 1999.
- [17] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Compatibility in shell theory », *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. **34(5)**, pp. 495-499, 1996.

- [18] D. FORTUNÉ, B. DESHOULLIÈRES, « Modelling of sliding wave phenomenon on the contact boundary between two bodies by the boundary integral element method : numerical visualization of isochroms », *Contact Mechanics*, plenum press, New-York, pp. 267-270, 1995.
- [19] D. FORTUNÉ, « Problèmes unilatéraux de deux plaques chargées en flexion », *Mechanics Research Communications*, Vol. **11(4)**, pp. 265-275, 1984.
- [20] G. BEZINE, D. FORTUNÉ, « Contact between plates by a new direct boundary integral equation formulation », *Int. J. Solids Structures*, Vol. **20(8)**, pp. 739-746, 1984.
- [21] D. FORTUNÉ, G. BEZINE, « Sur le contact sans frottement de deux plaques chargées en flexion », *Journal de Mécanique*, Vol. **20(3)**, pp. 475-494, 1981.

3-Publications dans des revues nationales à comité de lecture

- [22] C. VALLÉE, J.-M. SOURIAU, D. FORTUNÉ, G. de SAXCÉ, « Variance of the virtual displacement », *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. **332(12)**, pp.1013-1018, 2004.
- [23] K. RÉAUD, J.-M. SOURIAU, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Méthode de Le Verrier-Souriau et équations différentielles linéaires », *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série IIb, Vol. **328**, pp. 773-778, 2000.
- [24] D. FORTUNÉ, « Problème unilatéral lié au contact sans frottement d'une plaque plane encadrée et d'une plaque simplement posée », *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, Vol. 293, pp. 175-177, 21 septembre 1981.

4-Congrès internationaux à comité de lecture et actes

- [25] C. VALLÉE, C. LERINTIU, D. FORTUNÉ, K. ATCHONOUGLO, M. BAN, “Recovering the bipotential of an implicit standard material by Fitzpatrick’s method”, “36th Solid Mechanics Conference”, Gdansk, Poland, September 9-12, 2008.
- [26] K. ATCHONOUGLO, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, “Identification des fonctions caractéristiques d’une équation différentielle linéaire du second ordre”, “8th Applied Mathematics Congress”, Chambéry, France, 28th August – 1st September 2006.
- [27] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, Z.-Q. FENG, C. LERINTIU, “Sous-différentiel de la plus grande valeur propre d’une matrice symétrique”, “8th Applied Mathematics Congress”, held in Chambéry, France, 28th August – 1st September 2006.
- [28] C. VALLÉE, G. de SAXCÉ, D.FORTUNÉ « Minimal Surfaces », *8th Conference « Shell Structures, Theory and Applications » (SSTA 2005)*, Gdansk-Jurata, Poland, october 12-14, 2005.

[29] C. VALLÉE, C. LERINTIU, D. FORTUNÉ, M. BAN, G. de SAXCÉ, « Hill's bipotentiel », in *New Trends in Continuum Mechanics, International Conference, Constantza, Romania, september 8-12, 2003*.

[30] C. VALLÉE, M. HJIAJ, D. FORTUNÉ, G. de SAXCÉ, « Duality extended by generalising the Legendre-Fenchel-Moreau transformation », in *IUTAM Symposium on "Complementary-Dual Variational Principles in Nonlinear Mechanics"*, held in Shanghai, China, august 13-16, 2002.

- Enlarged version « Generalized Legendre-Fenchel transformation » published in the Proceedings of the *IUTAM Symposium "Complementary, Duality, and Symmetry in Nonlinear Mechanics"*, (D. GAO Eds, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands), pp. 289-311, 2004.

[31] K. RÉAUD, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Closed form solutions to the equations of motion avoiding mass matrix inversion and eigenvectors decomposition », *ASME:18th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, DETC2001/VIB 21358*, Pittsburgh, September 9-12, 2001.

[32] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, W. PIETRASZKIEWICZ, C. BOUBY, « Calculation of the square root of C by determining a rotation », in *5th International Seminar on Geometry and Microstructures*, held in Sinaia, Romania, september 26-28, 2001.

[33] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Link between compatibility conditions in shell theory and 3D compatibility conditions », in the *6th Conference Shell Structures, Theory and Applications*, Gdansk-Jurata, Poland, october 12-14, 1998.

- enlarged version published in *Archives of Civil Engineering*, Vol **XLV(2)**, pp. 369-374, 1999.

[34] B. DESHOULLIÈRES, D. FORTUNÉ, « A boundary integral approach to friction contact problems of classical elastostatics », *1st European Boundary Element Meeting*, Brussels, J. L. Migeot Editor, Structural Dynamics Research Corporation, Paris, 8-10 May 1988.

5-Congrès nationaux à comité de lecture avec actes

[35] D. FORTUNÉ, C. VALLÉE, « Construire une coque mince connaissant ses 2 formes fondamentales – Exemple d'intégration pour des formes fondamentales sphériques compatibles », « 8th French Conference in Computational Structural Analysis », Giens, France, 21-25 mai 2007.

[36] K. CHAMPION-RÉAUD, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, J.-L. CHAMPION-RÉAUD, « Extraction des pulsations et formes propres de la réponse d'un système vibratoire », *16ème Congrès Français de Mécanique*, Nice, 1-5 septembre 2003.

[37] K. CHAMPION-RÉAUD, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Détermination des vecteurs propres d'un système vibratoire par exploitation du concept de matrice adjuguée », *6ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France, 20-23 mai 2003.

- [38] E. LAINÉ, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Choice of the invariants. Nonlinear isotropic laws. Convex potentials », in *25th National Conference of Solid Mechanics*, Constanta, Romania, september 20-23, 2001.
- [39] K. RÉAUD, D. FORTUNÉ, S. PRUDHOMME, C. VALLÉE, « Méthode d'étude des vibrations d'un système mécanique non basée sur le calcul de ses modes propres », *15ème Congrès Français de Mécanique*, Nancy, 3-7 septembre 2001.
- [40] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, E. LAINÉ, « Comparaison de modèles isotropes du 1er et du 3ème ordre de matériaux élastiques compressibles », *14ème Congrès Français de Mécanique*, Toulouse, 30 août-3 septembre 1999.
- [41] E. LAINÉ, C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Modélisation du comportement élastique du caoutchouc en grandes déformations », *4^e Colloque national en calcul des structures*, Giens, 18-21 Mai 1999.
- [42] C. VALLÉE, M. R. PHILIPPE, D. FORTUNÉ, E. LAINÉ, « Estimation de la largeur de spectre d'une matrice symétrique », *6^e Journée du groupe Mode, S. M. A. I.*, Futuroscope, Poitiers, pp. 215-221, 19-21 Mars 1998.
- [43] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, K. JESSIN, E. LAINÉ, « Lois de comportement coaxiales linéaires et matériaux standards implicites », *13^e Congrès Français de Mécanique*, Poitiers, Vol. 4, pp. 541-544, 1-5 Septembre 1997.
- [44] A. HAMDOUNI, O. MILLET, D. FORTUNÉ, C. VALLÉE, « Formulation géométrique de la théorie des coques en grandes déformations », *C. M. M. 96*, Ghardia, Algérie, Mars 1996.
- [45] D. FORTUNÉ, E. LAINÉ, M. BELHASSAN, « Équations de compatibilité pour les structures planes minces en grandes déformations : Étude théorique, numérique et expérimentale », *12^e Congrès Français de Mécanique*, Strasbourg, Vol. 2, pp. 73-76, 4-8 Septembre 1995.
- [46] D. FORTUNÉ, C. VALLÉE, « Formulation intrinsèque des Identités de Bianchi par les conditions de compatibilité en grandes déformations », *11^e Congrès Français de Mécanique*, Lille-Villeneuve d'Asq, Vol. 5, pp. 1-4, 6-10 Septembre 1993.
- [47] B. DESHOULLIÈRES, D. FORTUNÉ, « Visualisation numérique des réseaux d'isochromes dans un milieu élastique par la méthode des équations intégrales de frontière. Application à un problème de frottement sec », *11^e Congrès Français de Mécanique*, Lille-Villeneuve d'Asq, Vol. 5, pp. 233-235, 6-10 Septembre 1993.
- [48] B. DESHOULLIÈRES, D. FORTUNÉ, « Application de la méthode des équations intégrales de frontière aux problèmes de contact avec frottement. Lois non classiques et problème quasi-statique », *10^e Congrès Français de Mécanique*, Paris, Vol. 2, pp. 129-132, 2-6 Septembre 1991.

- [49] B. DESHOULLIÈRES, D. FORTUNÉ, « Comparaison entre la loi classique et une loi non-locale de frottement par une méthode d'équations intégrales de frontière », *9^e Congrès Français de Mécanique*, Metz, Vol. 1, pp. 144-145, 5-8 Septembre 1989.
- [50] D. FORTUNÉ, G. BEZINE, « Contact unilatéral de deux plaques en flexion », *5^e Congrès Français de Mécanique*, Marseille, pp. 321-322, 7-11 Septembre 1981.
- [51] D. FORTUNÉ, « Sur la représentation des efforts par des charges concentrées », *2^e Congrès Français de Mécanique, Toulouse*, 2C4, 15-19 Septembre 1975.

6-Autres manifestations

- [52] D. FORTUNÉ, C. VALLÉE, « Identification de 2 paramètres élastiques pour une loi de comportement linéaire », *Colloque international de Théories Variationnelles*, Asnelles, 22-26 août 2005.
- [53] S. CHARLES, C. VALLÉE, O. BONNEAU, D. FORTUNÉ, « Méthode d'identification des coefficients dynamiques d'un système vibratoire linéaire, application à une turbomachine », *14^{ème} Colloque AFM/AAAF « Vibrations, chocs et bruit »*, Ecole Centrale de Lyon, 16-18 juin 2004.
- [54] D. FORTUNÉ, C. VALLÉE, « Décomposition polaire par la recherche de la rotation puis de la racine carrée du tenseur de déformation », *Colloque international de Théories Variationnelles*, Liré, 24-28 août 2003.
- [55] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Le bipotentiel et la transformée de Legendre généralisée », *Colloque international de Théories Variationnelles*, Bolquère, 24-28 août 1998.
- [56] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Transformations canoniques en mécanique des milieux continus et préservation de la convexité des potentiels », *Colloque international de Théories Variationnelles*, Bolquère, 24-28 août 1998.
- [57] C. VALLÉE, D. FORTUNÉ, « Théorie du second gradient dans une coquille mince entourant le cœur d'un matériau modélisé par une théorie du premier gradient », *Colloque international de Théories Variationnelles*, La Rochelle, 25-29 août 1997.

7-Encadrements de thèses et de stages de D.E.A.

Thèses

E. LAINÉ (1998)

Directeurs de thèse : C. VALLÉE et D. FORTUNÉ

« Lois de comportement isotropes non-linéaires en grandes déformations. Applications au caoutchouc. »

B. DESHOULLIÈRES (1990)

Encadrement : D. FORTUNÉ

« Contact avec frottement sec entre solides. Résolution pour la loi de Coulomb et des lois non classiques par la méthode des équations intégrales de frontière. »

[Stages de D.E.A.](#)

M. BEKRI (2004), en co-encadrement avec C. Vallée

« Identification des matrices de masse, d'amortissement et de raideur d'une turbopompe par la méthode du gradient. »

C. BOUBY (2002), en co-encadrement avec C. Vallée,

« Etude théorique et numérique de la détermination directe de la rotation de la décomposition polaire »

B. DIOUF (1999), en co-encadrement avec C. Vallée,

« Modèle du second gradient en électrostatique. »

F. THOMAS (1998), en co-encadrement avec C. Vallée,

« Nouvelle méthode de résolution des équations du mouvement de systèmes vibratoires linéaires discrets. »

K. JESSIN (1996), en co-encadrement avec C. Vallée,

« Lois élastiques linéaires admettant un bipotentiel. Application aux lois coaxiales. »

H. CAMOUNE (1995)

« Formulation eulérienne des équations de compatibilité pour les structures planes minces sollicitées en grandes déformations. »

F. CAQUINEAU (1992), en co-encadrement avec B. Deshoullières,

« Calcul de l'état de contrainte d'un solide élastique par la méthode des équations intégrales de frontière, visualisation par réseaux d'isochromes. Application à un problème de frottement sec. »

M. BELHASSAN (1992), en co-encadrement avec C. Vallée,

« Étude en grandes déformations des compatibilités pour les plaques planes minces. Équations d'équilibre pour des plaques micropolaires par le principe des travaux virtuels. »

Conditions de compatibilité en mécanique des solides

Résumé

Le fil conducteur est celui des conditions de compatibilité des systèmes aux dérivées partielles de la Mécanique des Solides Déformables. L'idée initiale, présentée dans l'ouvrage de Gaston Darboux sur la théorie générale des surfaces, est reprise. Elle consiste à remplacer les symboles de Christoffel par des vecteurs appelés vecteurs de Darboux. Ces vecteurs sont associés à des rotations de la même manière qu'un vecteur rotation instantanée est mis en évidence lors de l'étude du mouvement d'un solide rigide.

Les conditions de compatibilité en grandes déformations sont ainsi revisitées à la Darboux. Deux systèmes aux dérivées partielles découplés permettent d'obtenir le déplacement du milieu déformé en deux intégrations successives. L'étude de la nature tensorielle des objets exhibés montre la validité de nos concepts. Une étude inédite des variétés riemanniennes de dimension 3 de même courbure que la sphère est développée. De même, la théorie des surfaces est revue en introduisant les vecteurs de Darboux. La reconstruction d'une surface connaissant ses deux formes fondamentales est proposée conformément au théorème de Bonnet. L'étude particulière d'une surface minimale conduit à un processus de construction effectif à partir de la connaissance du bord. La notion de surface minimale sœur est dégagée, deux exemples sont présentés. Enfin l'équivalence entre l'annulation du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel dans une coque et les conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi sur sa surface moyenne est établie. Des perspectives, regardant le solide rigide comme une variété riemannienne de dimension 6, sont évoquées.

Abstract

The compatibility conditions, associated with partial differential equation of deformable bodies, are used as a guideline of the present work. The basic idea, first presented by Darboux in the context of the general theory of surfaces, consists in replacing the Christoffel symbols by vectors called the Darboux vectors. These vectors are related to rotations in a similar way as the instantaneous rotation vectors in rigid body dynamics. The compatibility conditions are revisited here in the framework of large strain. Two systems of decoupled partial differential equation allow to obtain the displacement of the deformed body by successive integrations. Our results show the validity of the developed tools. An original investigation of three-dimensional Riemann manifolds, with the same curvature as a sphere, is carried out. The theory of surfaces is also studied by introducing the Darboux vectors. A surface is rebuilt from his two fundamental forms in accordance with the Bonnet theorem. The particular study of a minimal surface leads to an efficient building process from the knowledge of the boundary. A new concept, called sister minimal surface, is introduced and its application is developed in the case of two examples. Finally the equivalence between the cancellation of the Riemann-Christoffel curvature tensor in a shell and the Gauss-Codazzi-Mainardi conditions on its mean surface is established. Further developments of the present work would be concerned with the rigid body, treated as a six-dimensional Riemann manifold.

Mots clés :

Conditions de compatibilité - Décomposition polaire - Tenseur de courbure - Tenseur de Ricci - Surfaces - Conditions de Gauss-Codazzi-Mainardi - Première et Seconde forme fondamentale - Surfaces minimales - Coques.