



**HAL**  
open science

# Construction of the segment Delaunay triangulation by a flip algorithm

Mathieu Brévilliers

► **To cite this version:**

Mathieu Brévilliers. Construction of the segment Delaunay triangulation by a flip algorithm. Informatique [cs]. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2008. Français. NNT: . tel-00372365

**HAL Id: tel-00372365**

**<https://theses.hal.science/tel-00372365>**

Submitted on 1 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Doctorat en Informatique

Mathieu BRÉVILLIERS

Construction de la triangulation  
de Delaunay de segments par  
un algorithme de flip

Thèse soutenue le 9 décembre 2008

Jury :

M. Ferran HURTADO	Rapporteur
M. Michel POCCHIOLA	Rapporteur
Mme Dominique ATTALI	Examinatrice
Mme Dominique BECHMANN	Examinatrice
M. Nicolas CHEVALLIER	Directeur de thèse
M. Dominique SCHMITT	Co-directeur de thèse



## Unité de recherche

Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications (LMIA)

Équipe de Modélisation et Algorithmique Géométrique (MAGE)

4 rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France

<http://www.lmia.uha.fr>



# Construction de la triangulation de Delaunay de segments par un algorithme de flip

## Résumé

Étant donné un ensemble  $S$  de points du plan, une triangulation de  $S$  est une décomposition de l'enveloppe convexe de  $S$  en triangles dont les sommets sont les points de  $S$ . Une triangulation de  $S$  est dite de Delaunay si le cercle circonscrit à chaque triangle ne contient aucun point de  $S$  en son intérieur. Dans cette thèse, nous étudions une généralisation de ces notions à un ensemble  $S$  de segments disjoints du plan.

Nous commençons par définir une nouvelle famille de diagrammes, appelés triangulations de segments. Nous étudions leurs propriétés géométriques et topologiques et nous donnons un algorithme pour construire efficacement une telle triangulation.

Nous généralisons ensuite la notion de triangulation de Delaunay aux triangulations de segments et nous mettons en évidence la dualité avec le diagramme de Voronoï de segments.

Nous étendons également la légalité des arêtes au cas des triangulations de segments en définissant, d'une part, la légalité géométrique qui caractérise la triangulation de Delaunay de segments parmi l'ensemble de toutes les triangulations de segments possibles et, d'autre part, la légalité topologique qui caractérise les triangulations de segments qui ont la même topologie que celle de Delaunay.

Enfin, nous décrivons un algorithme de « flip » qui transforme toute triangulation de segments en une triangulation qui a la même topologie que celle de Delaunay. À l'aide de fonctions localement convexes, nous démontrons que la suite de triangulations construites par cet algorithme converge vers celle de Delaunay et nous prouvons qu'une triangulation de segments qui a la même topologie que celle de Delaunay est obtenue après un nombre fini d'étapes.

## Mots-clés

Géométrie algorithmique, Triangulation de Delaunay, Triangulation de segments, Diagramme de Voronoï de segments, Légalité d'arête, Algorithme de flip, Fonction localement convexe.



# Construction of the segment Delaunay triangulation by a flip algorithm

## Abstract

Given a set  $S$  of points in the plane, a triangulation of  $S$  is a partition of the convex hull of  $S$  into triangles whose vertices are the points of  $S$ . A triangulation of  $S$  is said to be Delaunay if no point of  $S$  lies inside the triangles' circumcircles. In this thesis, we study a generalization of these notions to a set  $S$  of disjoint segments in the plane.

At first, we define a new family of diagrams, called segment triangulations. We study their geometric and topologic properties and we give an algorithm that efficiently computes such a triangulation.

Then, we generalize the notion of Delaunay triangulation to segment triangulations and we point out that it is dual to the segment Voronoi diagram.

We also extend the notion of edge legality to segment triangulations. On the one hand, we define the geometric legality, which characterizes the segment Delaunay triangulation among the set of all possible segment triangulations. On the other hand, we introduce a topologic legality, which characterizes the segment triangulations that have the same topology as the Delaunay one.

Finally, we give a « flip » algorithm that transforms any segment triangulation in a triangulation that has the same topology as the Delaunay one. By using locally convex functions, we show that the sequence of triangulations computed by this algorithm converges to the segment Delaunay triangulation. Moreover, we prove that a segment triangulation with the same topology as the Delaunay one is achieved after a finite number of steps.

## Keywords

Computational geometry, Delaunay triangulation, Segment triangulation, Segment Voronoi diagram, Edge legality, Flip algorithm, Locally convex function.





## Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Messieurs Nicolas Chevallier et Dominique Schmitt pour leur encadrement sans faille, leur disponibilité, leur soutien et leurs conseils avisés tout au long de ces trois années de thèse.

Monsieur Ferran Hurtado m'a fait l'honneur de rapporter ce mémoire. Il a également accepté de se déplacer d'Espagne pour assister à ma soutenance de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma plus sincère reconnaissance.

J'exprime également mes sincères remerciements à Monsieur Michel Pocchiola, qui a accepté de rapporter ce travail.

Je remercie vivement Madame Dominique Bechmann de l'intérêt qu'elle a porté à mon travail et d'avoir accepté de présider mon jury.

Je suis aussi très reconnaissant à Madame Dominique Attali de s'être intéressée à ma thèse et d'avoir accepté de l'examiner.

---

Je tiens à remercier sincèrement les membres de l'équipe MAGE pour leur aide, leurs conseils, leurs encouragements et leur soutien.

---

Je remercie de tout cœur ma fiancée, Anne Stehlin, qui m'a soutenu, encouragé et supporté tout au long de cette drôle d'aventure.

Enfin, je remercie tous les membres de ma famille ainsi que tous les amis qui m'ont témoigné leur soutien.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Triangulations d'ensembles de points</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités . . . . .	2
1.2 Triangulation de Delaunay . . . . .	4
1.3 Notion de côté illégal . . . . .	7
1.4 Régularité de la triangulation de Delaunay . . . . .	9
1.5 Algorithme de flip . . . . .	11
<b>2 Triangulations de segments</b>	<b>15</b>
2.1 Définition et existence . . . . .	16
2.2 Propriétés des arêtes . . . . .	20
2.3 Propriétés topologiques . . . . .	27
2.4 Structure de données . . . . .	30
2.4.1 Définitions . . . . .	30
2.4.2 Exemple . . . . .	31
2.5 Algorithme par balayage . . . . .	33
<b>3 Triangulations de Delaunay de segments</b>	<b>41</b>
3.1 Diagramme de Voronoï de segments dans le plan . . . . .	42
3.2 Triangulation de Delaunay de segments . . . . .	43
3.3 Construction incrémentale . . . . .	46
3.3.1 Description de l'algorithme . . . . .	46
3.3.2 Complexité de l'algorithme . . . . .	50
<b>4 Légalité des arêtes</b>	<b>55</b>
4.1 Légalité géométrique d'une arête . . . . .	56
4.2 Légalité topologique d'une arête . . . . .	59
4.2.1 Définitions . . . . .	59
4.2.2 Résultats préliminaires . . . . .	61
4.2.3 Caractérisation de la triangulation de Delaunay de segments	66

<b>5</b>	<b>Algorithme de flip</b>	<b>73</b>
5.1	Difficultés liées à la légalité . . . . .	74
5.2	Triangulations de segments de polygones . . . . .	76
5.3	Description de l'algorithme de flip . . . . .	80
5.3.1	Principe général de l'algorithme . . . . .	80
5.3.2	Détails sur l'étape de modification locale . . . . .	80
5.3.3	Détails sur la terminaison de l'algorithme . . . . .	83
5.3.4	Particularités de l'algorithme . . . . .	84
5.4	Fonctions localement convexes . . . . .	86
5.4.1	Définitions . . . . .	86
5.4.2	Relèvement de la triangulation de Delaunay de segments . . . . .	86
5.4.3	Relèvement d'une triangulation de segments . . . . .	89
5.5	Preuves des principaux résultats . . . . .	89
5.5.1	Preuve du Théorème 5.3 . . . . .	89
5.5.2	Preuve du Théorème 5.4 . . . . .	98
5.5.3	Preuve du Théorème 5.5 . . . . .	102
5.6	Convergence de l'algorithme . . . . .	106
5.7	Résultats expérimentaux . . . . .	113
	<b>Conclusion</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>

# Introduction

Étant donné un ensemble  $S$  de  $n$  points dans le plan appelés sites, une triangulation de  $S$  est une partition de l'enveloppe convexe de  $S$  en triangles dont l'ensemble des sommets est  $S$  et dont les côtés ouverts ne coupent pas  $S$ . Dans cette thèse, nous étudions une généralisation de la notion de triangulation au cas où les sites sont des segments disjoints. Notre objectif principal est de donner un algorithme, dit de « flip », qui transforme une telle triangulation en une triangulation de segments particulière, appelée triangulation de Delaunay de segments.

La notion de triangulation est très utile dans tous les domaines où il est nécessaire de discrétiser l'espace pour résoudre un problème donné. C'est pourquoi le problème de la construction d'une triangulation de  $S$  admet de nombreuses applications comme, par exemple, la modélisation de surfaces, la résolution d'équations différentielles par la méthode des éléments finis, la décomposition de l'espace de travail d'un robot, la reconstruction d'un objet à partir d'un ensemble de points ou de coupes de cet objet, le calcul de l'éclairage et du rendu dans une scène, ...

Dans la résolution de nombreux problèmes, la qualité du résultat dépend en grande partie de la régularité de la triangulation utilisée. Dans beaucoup de ces applications, il s'agit de trouver la triangulation la plus régulière possible, c'est-à-dire celle dont les triangles sont les plus « équilatéraux » possible.

Les travaux de Delaunay [29, 30] dans le domaine de la cristallographie ont mené à la définition de triangulations de  $S$  particulièrement régulières, appelées triangulations de Delaunay de  $S$ , qui sont telles que le cercle circonscrit à chacun de leurs triangles ne contienne aucun site de  $S$  en son intérieur.

La triangulation de Delaunay de  $S$  peut aussi être caractérisée parmi l'ensemble des triangulations de  $S$  par la légalité de ses arêtes. On dit qu'une arête d'une triangulation donnée est légale si le cercle circonscrit à l'un des triangles qui lui est adjacent ne contient pas en son intérieur le troisième sommet de l'autre triangle adjacent à l'arête. Lawson [57] a prouvé que la triangulation de Delaunay est la seule qui n'a aucune arête illégale. Il a aussi été démontré par Sibson [72]

que les triangulations de Delaunay sont les plus régulières, en ce sens qu'elles maximisent le minimum des angles des triangles.

Brown [21] et Edelsbrunner et Seidel [38] ont montré qu'on peut également caractériser la triangulation de Delaunay de  $S$  en observant les relèvements des triangulations de  $S$  sur un parabolôïde de dimension trois. Le principe est le suivant. On identifie le plan à un plan horizontal de l'espace à trois dimensions, puis on projette verticalement les sites de  $S$  sur un parabolôïde de révolution d'axe vertical. Ensuite, pour chaque face  $rst$  d'une triangulation donnée, on considère le triangle dont les sommets sont les projections de  $r$ ,  $s$  et  $t$  sur ce même parabolôïde. L'ensemble de ces triangles forme une surface appelée le relèvement de la triangulation. Il a été démontré que la triangulation de Delaunay est l'unique triangulation dont le relèvement est l'enveloppe convexe inférieure de la projection des sites de  $S$  sur le parabolôïde.

La triangulation de Delaunay peut être construite en temps optimal de plusieurs manières comme, par exemple, avec un algorithme de partage et fusion [62, 41] ou avec un algorithme de balayage [44].

Une autre méthode de construction a été décrite par Lawson [57]. Il s'agit d'un algorithme dit « de flip » qui permet de transformer une triangulation quelconque en triangulation de Delaunay par une suite d'améliorations locales. Cet algorithme est directement basé sur la notion de légalité des arêtes. Si on supprime une arête illégale et si on la remplace par l'autre diagonale du quadrilatère formé par les deux faces qui lui sont adjacentes, alors on obtient une nouvelle arête qui est légale. Cet échange d'arête est appelé un flip et l'algorithme effectue des flips jusqu'à ce que la triangulation courante ne contienne plus aucune arête illégale. Cet algorithme est particulièrement simple à implémenter et, bien qu'ayant une complexité en  $O(n^2)$  dans le pire des cas, il est efficace en pratique lorsque la triangulation initiale n'est pas « trop mauvaise ». De plus, cet algorithme a été rendu semi-dynamique et analysé sous l'hypothèse de randomisation par Guibas, Knuth et Sharir [49].

Dans le premier chapitre, nous rappelons les définitions et les principales propriétés des triangulations quelconques et des triangulations de Delaunay d'ensembles de points dans le plan. Nous détaillons aussi la notion de légalité d'une arête et nous donnons l'algorithme de flip de Lawson.

La notion de triangulation a été généralisée de diverses manières. Un pseudo-triangle, par exemple, est un polygone simple qui comporte exactement trois angles aigus. Une pseudo-triangulation d'un ensemble  $S$  de points est un graphe

planaire dont les sommets sont les points de  $S$ , les arêtes sont des segments de droite, la face externe est l'enveloppe convexe de  $S$  et toute autre face est un pseudo-triangle [69, 71]. Aichholzer, Aurenhammer et Hackl [3] ont encore généralisé cette notion en supprimant la contrainte de simplicité des pseudo-triangles, ce qui a donné naissance au concept de pré-triangulation.

Une autre généralisation consiste à se donner, en plus de l'ensemble de points  $S$ , un ensemble de segments  $S'$  d'intérieurs disjoints dont les extrémités sont dans  $S$ . Une triangulation de  $S$  contrainte par  $S'$  est alors une triangulation de  $S$  telle que les segments de  $S'$  soient des arêtes de la triangulation (voir Figure 1(a)). De plus, Lee et Lin [61] et Chew [25] ont adapté la propriété du cercle vide de manière à définir la notion de triangulation de Delaunay contrainte.

En pratique, une triangulation contrainte peut contenir des triangles irréguliers, c'est-à-dire très allongés. Une méthode qui permet de réduire le nombre de ces triangles consiste à ajouter des points dans l'ensemble  $S$  initial pour générer des triangulations dites de Steiner (voir Figure 1(b)) [12, 37, 43]. En général, il s'agit d'optimiser un critère sur la forme des triangles tout en minimisant le nombre de points supplémentaires.

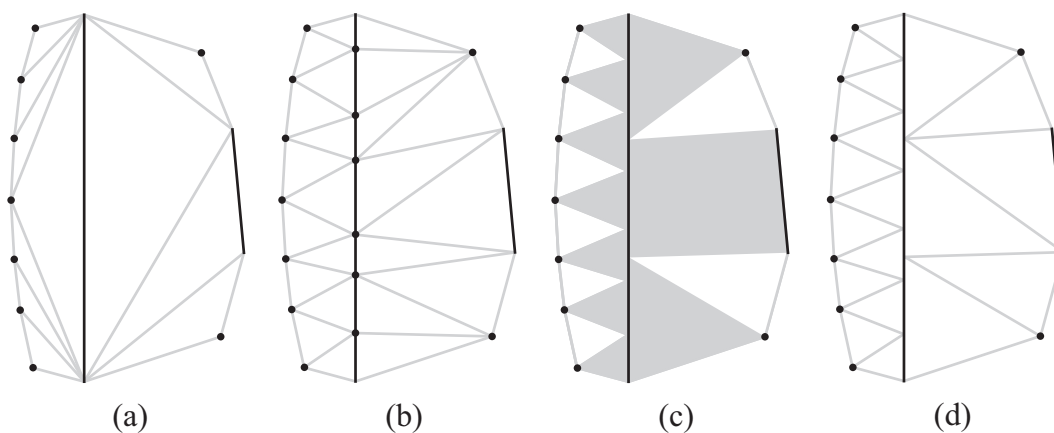


FIGURE 1 – Une triangulation contrainte (a), une triangulation de Steiner (b), une triangulation de segments (c) et une triangulation faiblement contrainte (d).

Dans le deuxième chapitre, nous étudions une nouvelle généralisation de la notion de triangulation à un ensemble  $S$  de segments disjoints, aussi appelés des sites. Les faces de ces nouvelles triangulations, appelées triangulations de segments, sont des triangles d'intérieurs disjoints dont les sommets sont sur trois sites distincts et dont les côtés ouverts ne coupent aucun site de  $S$  (voir Figure 1(c)). On peut voir qu'il n'est pas possible de recouvrir l'enveloppe convexe de



$S$  avec de tels triangles; les composantes connexes restantes sont appelées les arêtes de la triangulation. Nous donnons plusieurs propriétés de ces arêtes qui permettent notamment de prouver que les nombres de faces et d'arêtes dans une triangulation de segments sont des invariants de  $S$ . Nous donnons ensuite une manière de représenter en machine une triangulation de segments et nous montrons comment construire une telle triangulation avec un algorithme de balayage.

Au cours de l'étude des arêtes des triangulations de segments, nous sommes amenés à définir une autre famille de triangulations, que nous appelons triangulations faiblement contraintes. Dans une triangulation faiblement contrainte, chaque sommet d'une face est dans un site de  $S$  et chaque côté ouvert d'une face, ou bien est inclus dans un site, ou bien ne rencontre aucun site (voir Figure 1(d)). Dans une triangulation de Steiner, quand un point est ajouté sur un segment initial, celui-ci se décompose en deux nouveaux segments (voir Figure 1(b)). Chaque nouveau segment est alors le côté commun à deux triangles qui sont de part et d'autre du segment. Cette contrainte est très forte et n'est pas toujours justifiée si les régions à trianguler de part et d'autre du segment initial sont indépendantes. La notion de triangulation faiblement contrainte permet de s'affranchir de cette contrainte en autorisant deux décompositions différentes d'un segment selon qu'on se place d'un côté ou de l'autre du segment (voir Figure 1(d)).

Lorsque  $S$  est un ensemble de points en position générale, c'est-à-dire si  $S$  n'admet pas quatre points cocycliques, la triangulation de Delaunay de  $S$  est unique et est duale du diagramme de Voronoï de  $S$ . Le diagramme de Voronoï de  $S$  est une partition du plan en régions telles que chaque région soit l'ensemble des points du plan qui sont plus proches d'un site de  $S$  que de tous les autres. Le diagramme de Voronoï de  $S$  et la triangulation de Delaunay de  $S$  sont duaux en ce sens que les régions de Voronoï, leurs côtés et leurs sommets correspondent respectivement aux sites, aux arêtes et aux faces de la triangulation de Delaunay.

Les diagrammes de Voronoï apparaissent d'abord dans le domaine des mathématiques, dans les travaux de Gauss [48], de Dirichlet [33] et de Voronoï [73] sur la réduction des formes quadratiques. Ils ont depuis été utilisés et redécouverts dans de nombreux domaines. En effet, ces diagrammes permettent de représenter des relations de distance entre des objets ainsi que des phénomènes de croissance. Il est donc naturel de les voir utilisés, par exemple, pour modéliser des cristaux ou pour planifier des trajectoires et de les observer dans la nature sur la carapace d'une tortue, sur le pelage d'une girafe ou sur des formes de dessiccation.

La notion de diagramme Voronoï a été généralisée de différentes manières [7, 67, 9]. On peut, par exemple, généraliser la notion de distance en considé-

rant l'ensemble des métriques  $L_p$  [58]. Dans certaines applications, les sites de  $S$  n'ont pas nécessairement tous la même importance. Le diagramme de Voronoï a donc été généralisé en permettant d'attribuer un poids à chaque site de  $S$  [60, 6]. Par ailleurs, si, pour tout point du plan, on considère les  $k$  sites les plus proches, on obtient encore une autre généralisation des diagrammes de Voronoï, appelés diagrammes de Voronoï d'ordre  $k$  [10, 1]. Enfin, une autre problématique consiste à généraliser l'ensemble de sites considérés, par exemple, en remplaçant les points de  $S$  par des disques [8, 54], des ellipses [42] ou des courbes plus ou moins générales [74, 51, 5]. Dans le cadre de cette thèse, nous sommes plus particulièrement intéressés par le cas où les sites sont des segments, traité par exemple dans [55, 60, 59].

Le diagramme de Voronoï de segments dans le plan peut être construit en temps optimal de plusieurs façons : Kirkpatrick [55], Lee [59] et Yap [74] ont proposé des algorithmes de partage et fusion, Fortune [46] a décrit un algorithme de balayage et Boissonnat et al. [13] ont donné un algorithme incrémental randomisé. Ce dernier a été rendu dynamique par Dobrindt et Yvinec [34] et, dans le cas où les segments sont connectés, le problème a été résolu par Devillers [31]. Aggarwal et al. [2] ont étudié le cas où les segments de  $S$  sont les côtés d'un polygone convexe et une solution randomisée a été proposée par Chew [24]. Ce diagramme de Voronoï est aussi connu sous le nom d'axe médian ou de squelette et est très utilisé en analyse de forme. Le diagramme de Voronoï de segments trouve aussi son intérêt dans la planification de trajectoire. O'Dunlaing et Yap [66] l'ont utilisé pour le déplacement d'un disque et, si on considère un objet polygonal et non plus circulaire, le problème a été abordé par O'Dunlaing, Sharir et Yap [64, 65] et Chew et Kedem [26, 27]. Ces derniers ont d'ailleurs été les premiers à définir le dual géométrique du diagramme de Voronoï de segments, sans pour autant l'étudier en détail. On peut également noter que Karavelas [52, 53] a utilisé un dual topologique du diagramme de Voronoï de segments, appelé graphe de Delaunay de segments, pour implémenter efficacement la construction du diagramme de Voronoï de segments dans la bibliothèque de calcul géométrique CGAL.

Dans le troisième chapitre, nous montrons que la famille des triangulations de segments de  $S$  contient le dual du diagramme de Voronoï de segments de  $S$ , que nous appelons la triangulation de Delaunay de segments de  $S$ . On peut remarquer que la triangulation de Delaunay de segments correspond exactement au dual du diagramme de Voronoï de segments défini par Chew et Kedem [26, 27]. La dualité de ces deux diagrammes nous permet ensuite d'adapter l'algorithme incrémental

randomisé de Boissonnat et Yvinec [15] à la construction de la triangulation de Delaunay de segments.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la légalité des arêtes dans les triangulations de segments. Nous définissons la légalité géométrique et la légalité topologique d'une arête et, dans les deux cas, nous montrons comment la notion de légalité permet de caractériser la triangulation de Delaunay de segments de  $S$  parmi l'ensemble de toutes les triangulations de segments de  $S$  possibles. Il s'agit d'une généralisation des résultats connus dans le cadre des triangulations d'ensembles de points.

Diverses généralisations de l'algorithme de flip de Lawson ont également été proposées. En dimension trois, l'algorithme ne se comporte pas aussi bien que dans le plan. Néanmoins, Joe [50] a montré que, si une tétraédrisation de Delaunay est donnée, il est possible d'insérer un nouveau point et de mettre à jour le diagramme à l'aide d'une suite de flips. Cheng et Dey [22] ont montré qu'une triangulation d'une surface qui est très proche d'une surface lisse peut être transformée en une triangulation de Delaunay avec un algorithme de flip et ce résultat peut être directement utilisé pour maintenir le maillage d'une surface qui subit des déformations [23].

Dans le plan, Galtier et al. [47] et Bose et al. [16] ont généralisé l'opération de flip en effectuant plusieurs flips simultanément dans des régions indépendantes. Edelsbrunner, Tan et Waupotitsch [40] et Bern et al. [11] ont abordé la notion de flip sous un autre angle. En effet, on peut considérer qu'un flip classique se résume à ajouter une arête qui n'est pas présente dans la triangulation courante et à supprimer l'arête de la triangulation courante qui la coupe. Dans ce cas, on peut généraliser cette méthode en insérant une arête qui joint n'importe quel couple de sites de  $S$ , en supprimant toutes les arêtes de la triangulation courante qui coupent cette nouvelle arête, puis en triangulant les régions polygonales adjacentes à la nouvelle arête.

En outre, la notion de flip a été étudiée dans le cadre de différents types de triangulations comme, par exemple, les triangulations contraintes par Lee et Lin [61], les triangulations pondérées par Edelsbrunner et Shah [39], les pseudo-triangulations par Aichholzer et al. [4] et les pré-triangulations par Aichholzer, Aurenhammer et Hackl [3].

Pour une synthèse récente sur les algorithmes de flip, on pourra se référer à l'article de Bose et Hurtado [17].

Dans le dernier chapitre, nous commençons par montrer quels sont les problèmes qui se posent lorsqu'on souhaite généraliser l'algorithme de flip classique au cas des triangulations de segments. Nous décrivons ensuite une extension de l'algorithme de flip classique pour construire la triangulation de Delaunay de segments par une suite de modifications locales. La première difficulté est que les modifications locales doivent aussi être effectuées dans des régions non convexes du plan. Nous avons surmonté cette difficulté en utilisant des fonctions localement convexes pour définir le relèvement des triangulations de segments sur un parabolôïde en dimension trois et pour montrer que le relèvement de la triangulation de Delaunay de segments est l'enveloppe convexe inférieure du relèvement des sites sur ce parabolôïde. Nous montrons ensuite que chaque étape de notre algorithme de flip fait baisser le relèvement de la triangulation courante et que ce relèvement converge vers celui de la triangulation de Delaunay de segments. Le dernier corollaire de ce chapitre constitue le résultat principal de ce mémoire : nous montrons que l'algorithme de flip que nous proposons calcule une triangulation de segments qui a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments en un nombre fini d'étapes. La triangulation de Delaunay de segments finale peut ensuite être calculée en temps linéaire avec le nombre de faces.

Des résumés des résultats de cette thèse ont été présentés dans [18] et [19]. Pour davantage de détails au sujet des diagrammes de Voronoï, des triangulations de Delaunay, de leurs propriétés et de leurs applications, le lecteur peut se référer aux ouvrages [70, 35, 67, 15, 68, 28].



# Chapitre 1

## Triangulations d'ensembles de points

*Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats importants au sujet des triangulations d'ensembles de points dans le plan. Dans les chapitres suivants nous étendrons une partie de ces résultats en considérant des ensembles de segments disjoints au lieu d'ensembles de points.*

*Nous commençons par définir la notion de triangulation d'un ensemble  $S$  de points du plan et nous montrons que les nombres de faces et d'arêtes d'une triangulation de  $S$  sont des invariants de  $S$ , c'est-à-dire que toutes les triangulations d'un même ensemble  $S$  donné ont toujours les mêmes nombres de faces et d'arêtes. Nous décrivons également un algorithme qui construit une triangulation de  $S$  en temps  $O(n \log n)$ , où  $n$  est le nombre de points de  $S$ .*

*Dans un deuxième temps, nous nous intéressons plus particulièrement aux triangulations de Delaunay. Nous définissons la notion de triangle de Delaunay à l'aide de la propriété du cercle vide et nous donnons les propriétés de ces triangles qui servent à prouver l'existence et l'unicité de la triangulation de Delaunay de  $S$  (dans le cas où les points sont en position générale).*

*Ensuite, nous étudions plus en détail la triangulation de Delaunay de  $S$  en la caractérisant parmi l'ensemble de toutes les triangulations possibles de  $S$ . Nous rappelons la définition d'un côté illégal d'une triangulation et nous montrons que la triangulation de Delaunay est la seule qui n'a aucun côté illégal. Nous mettons également en évidence la régularité de la triangulation de Delaunay de  $S$  en montrant qu'elle maximise le minimum des angles de ses triangles. Enfin, la régularité de la triangulation de Delaunay de  $S$  permet de déduire naturellement un algorithme dit de « flip » qui transforme une triangulation de  $S$  quelconque en la triangulation de Delaunay de  $S$  par une suite d'améliorations locales.*

## 1.1 Généralités

Dans cette section, nous commençons par rappeler la définition d'une triangulation d'un ensemble de points du plan. Nous calculons ensuite le nombre de faces et de côtés d'une triangulation et nous donnons un algorithme incrémental de construction d'une triangulation.

Tout d'abord, nous introduisons quelques notations. Soit  $c$  un sous-ensemble du plan. L'adhérence de  $c$ , c'est-à-dire le plus petit fermé du plan contenant  $c$ , est notée  $\bar{c}$ . L'intérieur de  $c$  est noté  $c^\circ$  et, si  $Aff(c)$  désigne le sous-espace affine engendré par  $c$ , l'intérieur relatif de  $c$ , c'est-à-dire le plus grand ouvert de  $Aff(c)$  contenu dans  $c$ , est noté  $relint(c)$ . On note  $\partial(c)$  la frontière de  $c$ , c'est-à-dire  $\bar{c} \setminus c^\circ$ . De plus, pour tout point  $x$  du plan et pour tout réel  $r$  strictement positif, on note  $B(x, r)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Si  $s$  et  $t$  sont deux points distincts dans le plan, le segment fermé qui joint  $s$  à  $t$  est noté  $[s, t]$ . Ce même segment pourra aussi être noté  $]s, t[$ ,  $]s, t]$  ou  $[s, t[$  s'il est ouvert, respectivement, en  $s$  et  $t$ , en  $s$  ou en  $t$ .

**Définition 1.1** Soit  $S$  un ensemble de  $n \geq 3$  points du plan appelés des sites. On suppose que  $S$  est en position générale, c'est-à-dire que  $S$  n'admet pas trois sites alignés et n'admet pas quatre sites cocycliques.

L'enveloppe convexe de  $S$ , notée  $conv(S)$ , est la plus petite partie convexe du plan qui contient  $S$ .

On appelle triangulation de  $S$  toute décomposition de  $conv(S)$  en triangles d'intérieurs disjoints dont les sommets sont les sites de  $S$  et dont les côtés ouverts ne contiennent pas de sites de  $S$ .

Ces triangles sont aussi appelés les faces de la triangulation et leurs côtés sont aussi appelés les arêtes de la triangulation.

**Propriété 1.1** Si  $n'$  est le nombre de sommets de  $conv(S)$ , alors toute triangulation de  $S$  admet  $3n - n' - 3$  côtés et  $2n - n' - 2$  triangles.

*Preuve.* Soient  $c$  et  $f$  les nombres de côtés et de faces d'une triangulation quelconque  $T(S)$  de  $S$ . D'après la relation d'Euler, on a :

$$f = c - n + 1 \tag{1.1}$$

On sait que chaque face a trois côtés, que chaque côté interne est adjacent à exactement deux faces, et que chaque côté de  $conv(S)$  est adjacent à une seule face. On obtient :

$$3f = 2c - n' \tag{1.2}$$

Le résultat se déduit directement de (1.1) et (1.2).  $\square$

Nous définissons maintenant une notion de visibilité qui nous permet d'introduire un algorithme de construction d'une triangulation. Cet algorithme est inspiré de la construction incrémentale de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points du plan [35, 68].

**Définition 1.2** *Soit  $\Omega$  un ensemble de points du plan. La notion de visibilité est définie de la manière suivante :*

- deux points  $s$  et  $t$  du plan sont visibles l'un de l'autre (relativement à  $\Omega$ ) si  $]s, t[$  ne rencontre pas  $\Omega$ ,
- un segment  $s$  est visible d'un point  $p$  si tous les points de  $s$  sont visibles de  $p$ .

### Algorithme incrémental de construction d'une triangulation de $S$

1. Trier les sites de  $S$  par abscisses croissantes.
2. Construire une triangulation  $T$  en formant un triangle avec les trois premiers sites  $s_1, s_2$  et  $s_3$ .
3. Pour chaque site  $s \in S \setminus \{s_1, s_2, s_3\}$  dans l'ordre du tri,
  - Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des côtés de  $\partial(\text{conv}(T))$  visibles de  $s$ ,
  - Pour chaque côté  $c$  de  $\mathcal{C}$ ,
  - Ajouter dans  $T$  le triangle engendré par  $c$  et  $s$ .

**Propriété 1.2** *L'algorithme incrémental de construction d'une triangulation d'un ensemble de  $n$  sites est en  $O(n)$  après le tri.*

*Preuve.* Soient  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  les  $n$  sites de  $S$  dans l'ordre du tri. Soit  $s_{k-1}$  le dernier site inséré, et soit  $s_k$  le site à insérer à l'étape  $k$  de l'algorithme (voir Figure 1.1). Les points de  $\partial(\text{conv}(\{s_1, \dots, s_{k-1}\}))$  visibles de  $s_k$  (relativement à  $\text{conv}(\{s_1, \dots, s_{k-1}\})$ ) forment une ligne polygonale connexe qui contient  $s_{k-1}$ . Ceci permet de retrouver les côtés de  $\partial(\text{conv}(\{s_1, \dots, s_{k-1}\}))$  visibles de  $s_k$  en un temps proportionnel au nombre de côtés visibles. Pour chaque côté visible, un et un seul triangle est créé et n'est jamais détruit. Comme le nombre total de triangles est en  $O(n)$  d'après la Propriété 1.1, l'algorithme est en  $O(n)$  après le tri.  $\square$

En pratique, l'algorithme précédent construit une triangulation dont les faces sont généralement allongées. Une telle triangulation ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants dans un problème de modélisation de surface par exemple, pour lequel la régularité des triangles est importante. Nous présentons dans la section suivante la notion de triangulation de Delaunay qui a des propriétés de régularité intéressantes.



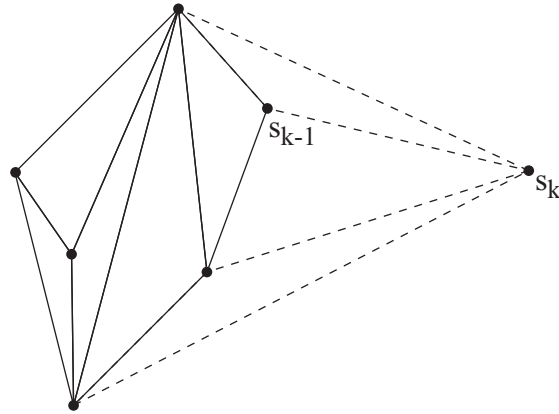


FIGURE 1.1 – État de la triangulation lors de l’insertion du  $k$ -ième site. Les traits pleins sont les côtés ajoutés au cours des  $k - 1$  premières étapes de l’algorithme, et les traits en pointillés sont les côtés ajoutés à l’insertion de  $s_k$ .

## 1.2 Triangulation de Delaunay

Dans cette section, nous commençons par définir les triangles de Delaunay et nous démontrons quelques propriétés importantes de ces triangles. Ces propriétés serviront de base pour démontrer ensuite l’existence et l’unicité de la triangulation de Delaunay de  $S$ .

**Définition 1.3** Soit  $S$  un ensemble de sites en position générale. On appelle triangle de Delaunay de  $S$  un triangle dont les sommets sont des sites de  $S$  et qui est inscriptible dans un cercle vide, c’est-à-dire un cercle qui ne contient aucun site de  $S$  en son intérieur.

**Propriété 1.3** Lorsque  $S$  est en position générale, pour tout côté d’un triangle de Delaunay, il existe un cercle vide qui passe par les extrémités de ce côté, et qui ne passe par aucun autre site de  $S$ .

*Preuve.* Soient  $rst$  un triangle de Delaunay et  $\sigma$  le cercle circonscrit à  $rst$ . Soit  $\sigma'$  un cercle passant par  $s$  et  $t$ , et qui ne contient pas  $r$  (voir Figure 1.2). La partie de  $\sigma'$  qui est du même côté de  $[s, t]$  que  $r$  est contenue dans  $\sigma$ , et ne contient donc aucun autre site de  $S$ . En choisissant  $\sigma'$  suffisamment proche de  $\sigma$ , l’autre partie de  $\sigma'$  est également vide. D’où le résultat.  $\square$

**Propriété 1.4** Les sommets et côtés ouverts de l’ensemble des triangles de Delaunay sont deux à deux disjoints ou confondus.

*Preuve.* (i) Aucun site ne peut appartenir à un côté ouvert car sinon il appartient à tout cercle qui passe par les extrémités du côté. Ceci est contradictoire avec la Propriété 1.3.

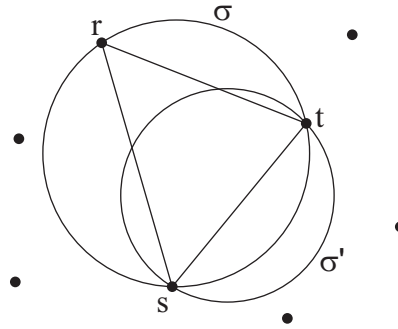


FIGURE 1.2 –  $rst$  est un triangle de Delaunay, et  $\sigma'$  est un cercle vide qui ne passe que par les sites  $s$  et  $t$ .

(ii) Deux côtés ouverts ne peuvent se couper en plus d'un point car sinon une extrémité d'un côté serait contenue dans l'autre côté ouvert, en contradiction avec (i).

(iii) Supposons que les intérieurs de deux côtés  $[s, t]$  et  $[s', t']$  se coupent en exactement un point. D'après la propriété précédente, il existe deux cercles vides  $\sigma$  et  $\sigma'$  qui passent respectivement par  $s, t$  et  $s', t'$ .  $s'$  et  $t'$  sont donc de part et d'autre de  $[s, t]$ , et à l'extérieur de  $\sigma$  (voir Figure 1.3). Cela signifie que  $\sigma$  et  $\sigma'$  se coupent en quatre points, ce qui est impossible.  $\square$

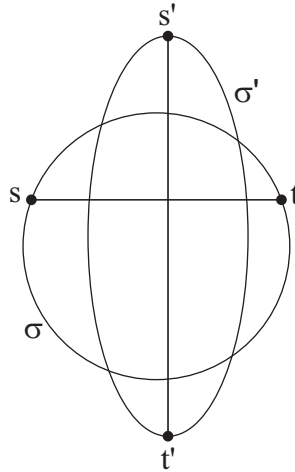


FIGURE 1.3 – Pour que les intérieurs de deux côtés  $[s, t]$  et  $[s', t']$  de deux triangles de Delaunay se coupent en exactement un point, il faudrait que les cercles  $\sigma$  et  $\sigma'$  se coupent en quatre points.

**Propriété 1.5** *Les intérieurs des triangles de Delaunay sont deux à deux dis-joints.*

*Preuve.* Les cercles circonscrits aux triangles de Delaunay sont vides, donc aucun sommet d'un tel triangle ne peut être contenu dans un autre triangle. Les intérieurs de deux triangles ne peuvent donc se couper que si les intérieurs de deux de leurs côtés se coupent. Ceci est impossible d'après la Propriété 1.4.  $\square$

**Propriété 1.6** *Soient  $s$  et  $t$  deux sites de  $S$  tels qu'il existe un cercle vide qui passe par  $s$  et  $t$ . Alors :*

- soit  $[s, t]$  est un côté commun à exactement deux triangles de Delaunay,
- soit  $[s, t]$  est un côté de  $\text{conv}(S)$  et d'exactly un triangle de Delaunay.

*Preuve.* (i) Soit  $\sigma$  un cercle vide qui passe par  $s$  et  $t$ .  $S$  admet au moins trois sites, et ces sites ne sont pas alignés. On peut donc supposer, à une permutation de  $s$  et  $t$  près, qu'il existe un site  $r$  à gauche de  $[s, t]$ . Soit  $\sigma'$  le cercle circonscrit à  $rst$  (voir Figure 1.4). La partie de  $\sigma'$  à droite de  $[s, t]$  est contenue dans  $\sigma$  et est donc vide. On peut toujours choisir le site  $r$  de telle sorte que la partie de  $\sigma'$  à gauche de  $[s, t]$  soit également vide.  $rst$  est donc un triangle de Delaunay. Comme les intérieurs des triangles de Delaunay sont disjoints,  $[s, t]$  n'est le côté d'aucun autre triangle de Delaunay qui est à gauche de  $[s, t]$ .

(ii) S'il existe un site à droite de  $[s, t]$ , le même raisonnement qu'en (i) montre qu'il existe également un unique triangle de Delaunay à droite de  $[s, t]$ , tel que  $[s, t]$  soit un côté de ce triangle. Dans ce cas  $[s, t]$  est le côté d'exactly deux triangles de Delaunay.

(iii) S'il n'existe pas de site à droite de  $[s, t]$ , cela signifie que  $[s, t]$  est un côté de  $\text{conv}(S)$ , et le côté d'un unique triangle de Delaunay.  $\square$

**Définition 1.4** *On appelle triangulation de Delaunay de  $S$  toute triangulation de  $S$  dont tous les triangles sont des triangles de Delaunay de  $S$ .*

Les propriétés qui caractérisent les triangles de Delaunay et leurs côtés nous permettent de montrer l'existence de la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points du plan.

**Théorème 1.1** *Tout ensemble  $S$  d'au moins trois sites en position générale admet une et une seule triangulation de Delaunay.*

*Preuve.* (i) D'après les Propriétés 1.4 et 1.5, les intérieurs des triangles de Delaunay sont deux à deux disjoints et leurs sommets et côtés ouverts sont deux à deux disjoints ou confondus. Il reste donc à prouver que les triangles de Delaunay de  $S$  recouvrent  $\text{conv}(S)$ .

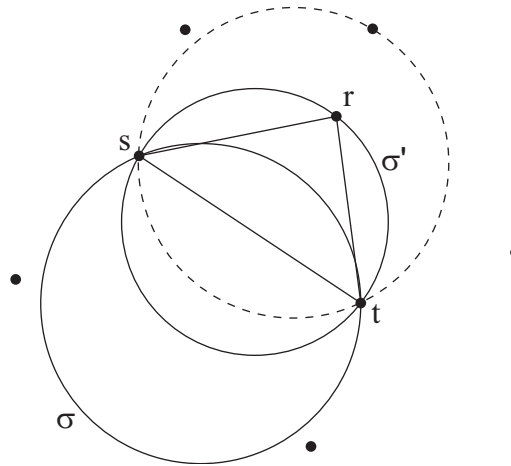


FIGURE 1.4 – Il existe un cercle vide  $\sigma'$  circonscrit à  $rst$ , tel que  $r$  soit à gauche de  $[s, t]$ .

(ii) Si tel n'est pas le cas, soit  $\mathcal{C}$  la partie de  $\text{conv}(S)$  privée des triangles de Delaunay de  $S$ . La frontière de  $\mathcal{C}$  est alors constituée de côtés de  $\text{conv}(S)$  et de triangles de Delaunay de  $S$ . D'après la Propriété 1.3, tout côté d'un triangle de Delaunay est inscriptible dans un cercle vide. De même, tout côté de  $\text{conv}(S)$  est porté par une droite  $\mathcal{D}$  telle que tous les sites de  $S$  soient du même côté de  $\mathcal{D}$ .  $\mathcal{D}$  est donc la limite d'un cercle vide dont le centre tend vers l'infini. Il en résulte que tout côté de  $\text{conv}(S)$  est inscriptible dans un cercle vide. D'après la Propriété 1.6, aucun côté de triangle de Delaunay et aucun côté de  $\text{conv}(S)$  ne peut donc être un côté de  $\mathcal{C}$ . Il en résulte que les triangles de Delaunay de  $S$  recouvrent  $\text{conv}(S)$  (voir Figure 1.5).  $\square$

### 1.3 Notion de côté illégal

*Dans cette section, nous définissons la notion de côté illégal d'une triangulation et nous démontrons que seule la triangulation de Delaunay n'a pas de côté illégal.*

Dans la suite, on appelle côté interne d'une triangulation de  $S$ , tout côté de cette triangulation qui n'est pas un côté de  $\text{conv}(S)$ .

**Définition 1.5** *Un côté interne  $[s, t]$  d'une triangulation  $T$  est dit illégal lorsque les deux triangles  $rst$  et  $r'ts$  adjacents à  $[s, t]$  sont tels que le cercle circonscrit à  $rst$  (respectivement  $r'ts$ ) contienne  $r'$  (respectivement  $r$ ) en son intérieur (voir Figure 1.6). Les côtés de  $T$  qui sont sur  $\partial(\text{conv}(S))$  ne sont jamais illégaux.*

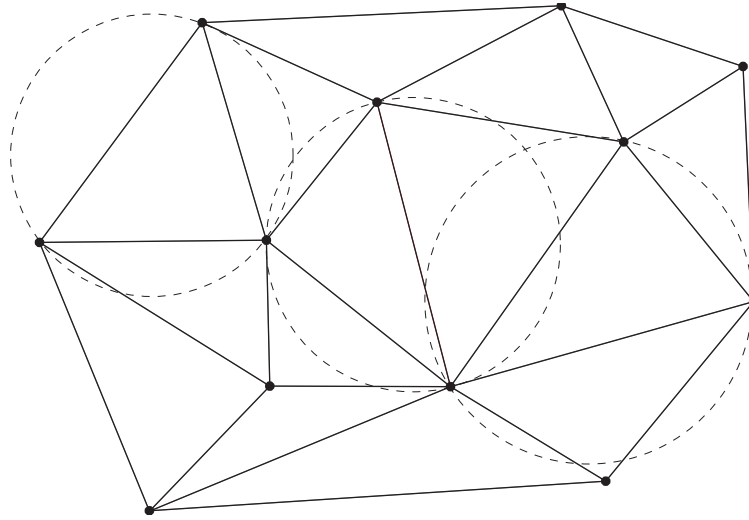


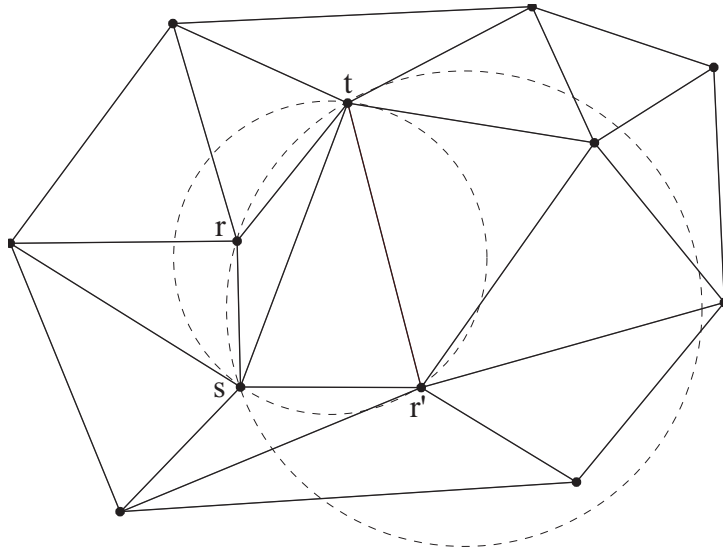
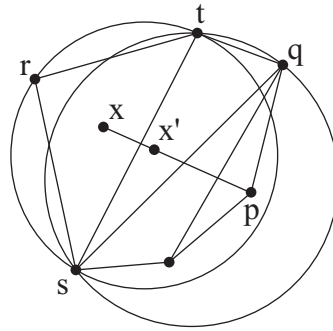
FIGURE 1.5 – Exemple de triangulation de Delaunay d'un ensemble de points du plan.

**Théorème 1.2** *La triangulation de Delaunay de  $S$  est l'unique triangulation de  $S$  sans côté illégal.*

*Preuve.* Par définition, la triangulation de Delaunay de  $S$  ne contient aucun côté illégal. Montrons que toute autre triangulation en contient au moins un.

Si une triangulation n'est pas de Delaunay, elle admet au moins un triangle  $rst$  dont le cercle circonscrit contient un site  $p$  en son intérieur. Comme le nombre de sites est fini, on peut toujours choisir un point  $x$  à l'intérieur du triangle  $rst$  tel que le segment ouvert  $]x, p[$  ne passe par aucun site de  $S$ . On peut aussi supposer, à une permutation de  $r$ ,  $s$ , et  $t$  près, que  $[s, t]$  est le côté de  $rst$  coupé par  $]x, p[$ .

Montrons maintenant que l'un au moins des côtés coupés par  $]x, p[$  est illégal. Si  $]x, p[$  ne coupe que le seul côté  $[s, t]$ , ce côté est commun aux triangles  $rst$  et  $pst$  et  $[s, t]$  est illégal puisque le cercle circonscrit à  $rst$  contient  $p$  en son intérieur. Supposons maintenant que, si  $]x, p[$  coupe  $k$  côtés, alors l'un d'entre eux au moins est illégal, et montrons que le résultat reste vrai si  $]x, p[$  coupe  $k + 1$  côtés (voir Figure 1.7). Soit  $qst$  le triangle adjacent à  $rst$  par le côté  $[s, t]$ . Si  $q$  est contenu dans le cercle circonscrit à  $rst$ , alors  $[s, t]$  est illégal. Sinon, le cercle circonscrit à  $qst$  contient  $p$  et, si  $x'$  est un point de l'intersection de  $]x, p[$  avec l'intérieur du triangle  $qst$ , alors  $]x', p[$  coupe  $k$  côtés. D'après l'hypothèse de récurrence,  $]x', p[$  coupe donc au moins un côté illégal.  $\square$

FIGURE 1.6 – Exemple de côté illégal  $[s, t]$ .FIGURE 1.7 – Cas où  $]x, p[$  coupe  $k$  côtés.

## 1.4 Régularité de la triangulation de Delaunay

Dans cette section, nous allons montrer la régularité de la triangulation de Delaunay en nous appuyant sur la suite croissante des angles des triangles qui permet de comparer plusieurs triangulations d'un même ensemble de points.

**Définition 1.6** Pour toute triangulation  $T$ , soit  $\mathcal{A}(T)$  la suite croissante des angles aux sommets de tous les triangles de  $T$ . On note  $\mathcal{A}(T) > \mathcal{A}(T')$  si  $\mathcal{A}(T)$  est supérieure à  $\mathcal{A}(T')$  dans l'ordre lexicographique. Une triangulation  $T$  de  $S$  est dite *équiangulaire* si, pour toute triangulation  $T'$  de  $S$ , on a  $\mathcal{A}(T) \geq \mathcal{A}(T')$ .

La démonstration de la régularité de la triangulation de Delaunay utilise la propriété du cercle capable que nous rappelons ci-dessous (voir Figure 1.8).

Dans la suite, l'angle formé par deux vecteurs  $\vec{pq}$  et  $\vec{rs}$  dans cet ordre est noté  $\angle(\vec{pq}, \vec{rs})$ .

**Propriété 1.7** Soient  $C$  le cercle circonscrit à un triangle  $rst$  et  $p, p'$  et  $p''$  trois points du plan du même côté de la droite  $(st)$  que  $r$  et, respectivement, sur, à l'extérieur de et à l'intérieur de  $C$ . Alors  $\angle(\vec{p's}, \vec{p't}) < \angle(\vec{ps}, \vec{pt}) = \angle(\vec{rs}, \vec{rt}) < \angle(\vec{p''s}, \vec{p''t})$ .

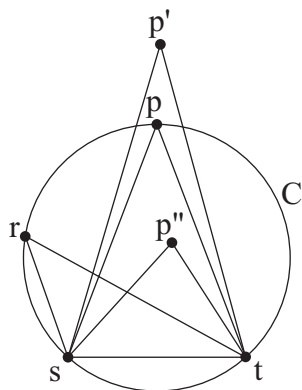


FIGURE 1.8 – Propriété du cercle capable :  $\angle(\vec{p's}, \vec{p't}) < \angle(\vec{ps}, \vec{pt}) = \angle(\vec{rs}, \vec{rt}) < \angle(\vec{p''s}, \vec{p''t})$ .

**Théorème 1.3** La triangulation de Delaunay de  $S$  est l'unique triangulation équiangulaire de  $S$ .

*Preuve.* Si  $T$  est une triangulation de  $S$  qui n'est pas de Delaunay, d'après le Théorème 1.2,  $T$  admet au moins un côté illégal  $[s, t]$ . Soient  $rst$  et  $pst$  les deux triangles de  $T$  adjacents à  $[s, t]$  (voir Figure 1.9). Montrons que si  $T'$  est la triangulation obtenue en remplaçant les triangles  $rst$  et  $pst$  dans  $T$  par  $trp$  et  $srp$ , alors  $\mathcal{A}(T') > \mathcal{A}(T)$ .

Il suffit de montrer que si  $\alpha$  est le plus petit angle aux sommets des triangles  $trp$  et  $srp$ , alors il existe au moins un angle inférieur à  $\alpha$  aux sommets du triangle  $rst$  ou du triangle  $pst$ .

De manière évidente, si  $\alpha = \angle(\vec{tr}, \vec{tp})$ , alors  $\angle(\vec{tr}, \vec{ts}) < \alpha$  et si  $\alpha = \angle(\vec{sr}, \vec{sp})$ , alors  $\angle(\vec{st}, \vec{sr}) < \alpha$ . Dans les quatre cas suivants, on conclut directement à l'aide de la Propriété 1.7 :

- si  $\alpha = \angle(\vec{pt}, \vec{pr})$ , alors  $\angle(\vec{st}, \vec{sr}) < \alpha$  ;
- si  $\alpha = \angle(\vec{pr}, \vec{ps})$ , alors  $\angle(\vec{tr}, \vec{ts}) < \alpha$  ;

- si  $\alpha = \angle(\overrightarrow{rp}, \overrightarrow{rt})$ , alors  $\angle(\overrightarrow{sp}, \overrightarrow{st}) < \alpha$  ;
- si  $\alpha = \angle(\overrightarrow{rs}, \overrightarrow{rp})$ , alors  $\angle(\overrightarrow{ts}, \overrightarrow{tp}) < \alpha$ .

Il en résulte que  $T$  ne peut pas être équiangulaire, et que la triangulation de Delaunay est l'unique triangulation équiangulaire de  $S$ .  $\square$

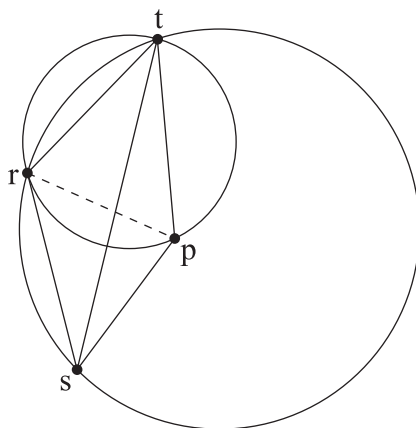


FIGURE 1.9 – Le côté  $[s, t]$  est illégal.

## 1.5 Algorithme de flip

*Dans cette section, nous donnons un algorithme de construction de la triangulation de Delaunay à partir d'une triangulation quelconque, par une suite de modifications locales.*

D'après la preuve du Théorème 1.3, si, dans une triangulation quelconque, on remplace localement un côté illégal par un côté légal, on obtient une triangulation dont la suite d'angles est lexicographiquement strictement supérieure. Il en résulte que, lorsqu'on supprime successivement les côtés illégaux d'une triangulation, on obtient une suite de triangulations deux à deux distinctes. Comme le nombre total de triangulations possibles d'un ensemble  $S$  donné est fini, on obtient, après un nombre fini d'échanges, une triangulation qui n'a plus de côté illégal. D'après les Théorèmes 1.2 et 1.3, cette triangulation est la triangulation de Delaunay. On en déduit un algorithme (dit de « flip ») qui permet de transformer une triangulation quelconque  $T$  en triangulation de Delaunay par une suite de modifications locales.



**Algorithme de flip**

1. Insérer tous les côtés de la triangulation initiale  $T$  dans une pile et les marquer comme appartenant à la pile.
2. Tant que la pile n'est pas vide,
  - Dépiler le premier côté  $[s, t]$  et le démarquer,
  - Si  $[s, t]$  est illégal,
    - Soient  $rst$  et  $pst$  les deux triangles de part et d'autre de  $st$ ,
    - Remplacer  $[s, t]$  par  $[r, p]$  dans  $T$ ,
    - Marquer et empiler ceux des côtés  $[r, s]$ ,  $[r, t]$ ,  $[p, s]$ , et  $[p, t]$  qui ne sont pas déjà marqués.

On peut remarquer qu'il est inutile de placer les côtés de l'enveloppe convexe dans la pile puisque ceux-ci ne peuvent être illégaux.

Cet algorithme a été donné par Lawson [57] et permet de calculer la triangulation de Delaunay de  $S$  à partir de toute autre triangulation de  $S$  avec  $O(n^2)$  flips d'arête, où  $n$  est le nombre de sites de  $S$ .

Une autre manière de voir que cet algorithme de flip converge vers la triangulation de Delaunay consiste à examiner le relèvement de la triangulation courante sur un paraboloidé de dimension trois [21, 38, 68].

Plus précisément, on appelle paraboloidé le graphe de la fonction  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . De plus, pour tout point  $p$  du plan, on note  $p'$  la projection verticale de  $p$  sur le paraboloidé, c'est-à-dire que  $p' = (p, f(p))$  dans  $\mathbf{R}^3$ . Pour toute triangulation  $\mathcal{T}$  d'un ensemble  $S$  de points, on fait correspondre à chaque triangle  $pqr$  de  $\mathcal{T}$  le triangle  $p'q'r'$  formé par les projections verticales respectives de  $p$ ,  $q$  et  $r$  sur le paraboloidé. On obtient alors une surface appelée le relèvement de  $\mathcal{T}$  (voir Figure 1.10).

Soit  $t = pqr$  un triangle de la triangulation de Delaunay  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$  de  $S$ . Soit  $\mathcal{P}_t$  le plan qui contient le triangle  $p'q'r'$ . L'intersection de  $\mathcal{P}_t$  et du paraboloidé est une ellipse dont la projection verticale dans le plan est le cercle circonscrit à  $t$ , noté  $\mathcal{C}_t$ . Par conséquent, il est facile de voir que tout point du paraboloidé qui est en-dessous (respectivement sur ou au-dessus) du plan  $\mathcal{P}_t$  se projette verticalement en un point du plan à l'intérieur (respectivement sur ou à l'extérieur) de  $\mathcal{C}_t$ . D'après la définition d'une triangulation de Delaunay, quel que soit le triangle  $t$  de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ , le cercle  $\mathcal{C}_t$  est vide relativement à  $S$ . Donc la projection verticale de tout point de  $S \setminus \{p, q, r\}$  sur le paraboloidé est au-dessus du plan  $\mathcal{P}_t$ . D'après la définition

d'une enveloppe convexe, on en déduit que le relèvement de  $\mathcal{T}_D$  est l'enveloppe convexe inférieure de la projection de  $S$  sur le paraboloid.

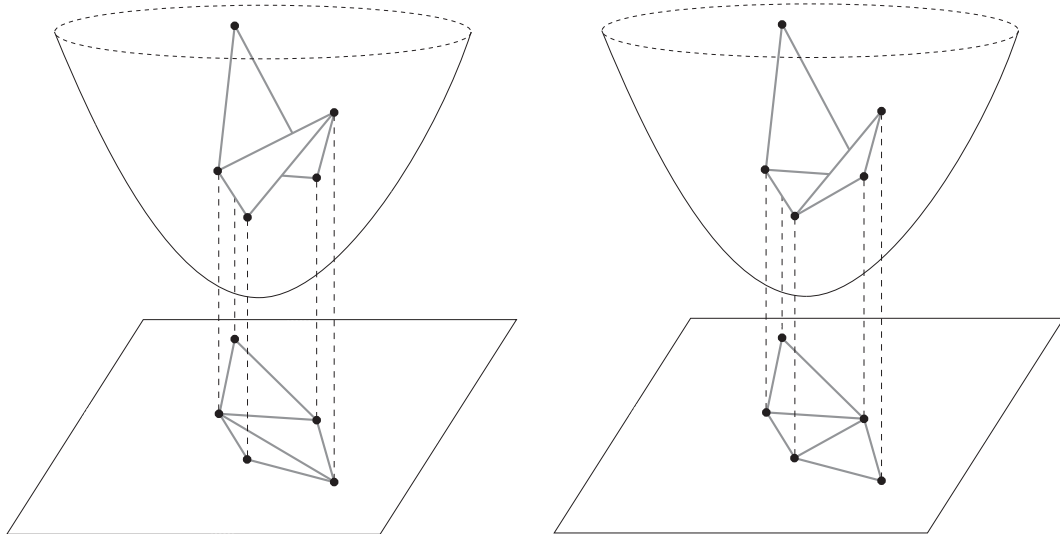


FIGURE 1.10 – La figure de gauche représente le relèvement sur le paraboloid d'une triangulation quelconque d'un ensemble de points. La figure de droite représente le relèvement de la triangulation de Delaunay du même ensemble de points.

Par définition de l'enveloppe convexe inférieure, le relèvement de toute triangulation de  $S$  qui n'est pas de Delaunay est supérieur au relèvement de la triangulation de Delaunay. La Figure 1.11 montre que le flip d'une arête fait baisser le relèvement de la triangulation courante à l'endroit où le flip est effectué. Comme l'opération de flip fait baisser le relèvement de la triangulation courante, une arête « flippée » ne peut pas réapparaître. Par conséquent, l'algorithme de flip converge nécessairement vers la triangulation dont le relèvement est l'enveloppe convexe inférieure de la projection de  $S$  sur le paraboloid, c'est-à-dire vers la triangulation de Delaunay de  $S$ .

Nous utilisons une approche similaire dans le Chapitre 5 pour montrer la convergence de notre algorithme de flip pour la construction d'une triangulation de Delaunay d'un ensemble de segments du plan.

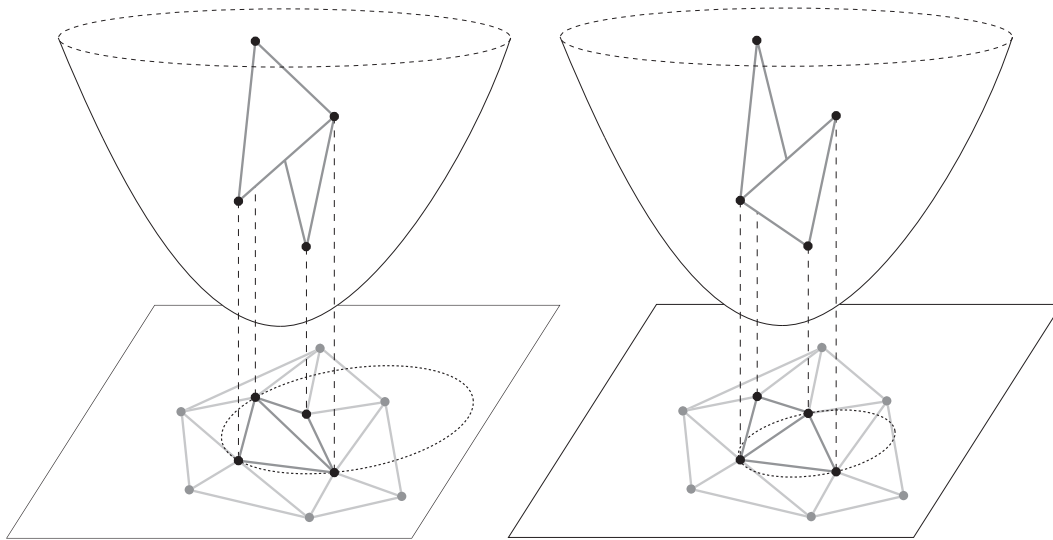


FIGURE 1.11 – Cette figure montre le relèvement des deux faces adjacentes à une arête traitée par l'algorithme, avant et après le flip de cette arête.

## Chapitre 2

# Triangulations de segments

*Dans ce chapitre, nous donnons une généralisation de la notion de triangulation à un ensemble de segments disjoints dans le plan.*

*Dans un premier temps, nous définissons ce que nous appelons des triangulations de segments et nous prouvons l'existence de telles triangulations pour tout ensemble  $S$  de segments.*

*Ensuite, nous nous concentrons sur l'étude des arêtes des triangulations de segments. La principale différence par rapport aux triangulations classiques est que ces arêtes peuvent être des polygones. Nous introduisons la notion de triangulation faiblement contrainte afin de prouver que chaque arête d'une triangulation de segments « connecte » exactement deux segments, tout comme chaque arête d'une triangulation de points relie deux de ces points. Cette propriété permet de caractériser la forme géométrique ainsi que la frontière d'une arête d'une triangulation de segments. Nous montrons ensuite que, pour toute triangulation de segments, on peut trouver une carte combinatoire planaire qui représente cette triangulation. À l'aide de cette carte, nous montrons que les nombres de faces et d'arêtes d'une triangulation de segments sont des invariants de  $S$ , ce qui généralise une propriété classique des triangulations de points.*

*Enfin, nous montrons comment représenter une carte combinatoire en machine en adaptant cette structure de données pour qu'elle contienne toutes les informations nécessaires à la représentation d'une triangulation de segments. Nous montrons ensuite comment construire efficacement une triangulation de segments de  $S$  en adaptant un algorithme de construction par balayage d'une triangulation contrainte [36].*

## 2.1 Définition et existence

*Dans cette section nous donnons tout d'abord une définition intuitive d'une triangulation de segments que nous illustrons à l'aide d'un exemple. Nous donnons ensuite la définition formelle d'une telle triangulation. Enfin, nous étudions le cas particulier d'une triangulation de trois segments pour prouver l'existence d'une triangulation de segments quel que soit l'ensemble de segments initial.*

Dans un premier temps nous allons définir la notion de triangulation de segments de manière intuitive. Supposons que nous disposions d'un ensemble  $S$  de points et de segments disjoints dans le plan. Plaçons à l'intérieur de l'enveloppe convexe de  $S$  des triangles ouverts disjoints qui touchent  $S$  en leurs sommets (voir Figure 2.1). Si l'ensemble de ces triangles est maximal, c'est-à-dire s'il n'est plus possible d'en ajouter un sans qu'il coupe un triangle déjà existant, alors on dit que le diagramme obtenu est une triangulation de segments de  $S$  (voir Figure 2.2). Cela définit une partition de l'enveloppe convexe de  $S$  en trois ensembles distincts : les sites, les faces et les arêtes de la triangulation. Les sites sont les points et segments initiaux, les faces sont les triangles ouverts que nous avons ajoutés et les arêtes sont les composantes connexes de l'enveloppe convexe privée des sites et des faces.

Il est intéressant de remarquer que les arêtes d'une triangulation de segments ne sont pas forcément des segments de droites comme dans le cas classique d'une triangulation d'un ensemble de points du plan. En effet, les arêtes peuvent être des polygones comme nous le montre la Figure 2.2.

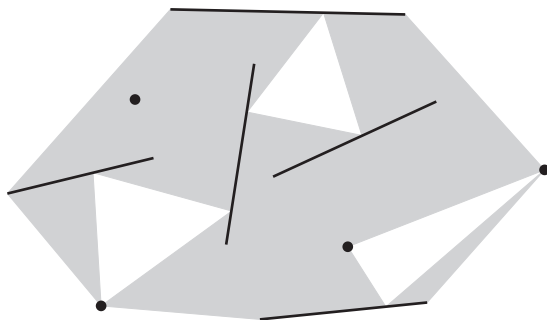


FIGURE 2.1 – En noir, les points et segments de  $S$ . En gris, l'enveloppe convexe de  $S$  privée de trois triangles qui touchent  $S$  en leurs sommets.

Nous pouvons maintenant définir plus formellement une triangulation de segments. Soit  $S$  un ensemble fini de  $n \geq 2$  segments du plan qui sont fermés et

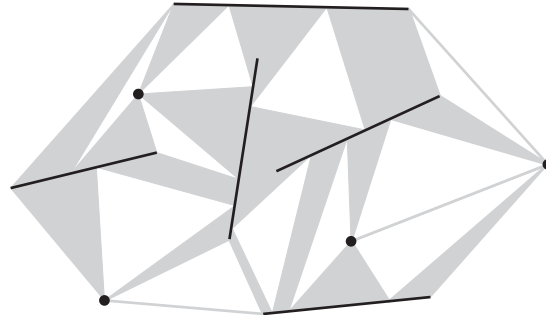


FIGURE 2.2 – Une triangulation de segments de  $S$  : les sites sont en noir, les faces en blanc et les arêtes en gris.

disjoints. Ces segments sont appelés des sites. Notons qu'un segment peut être réduit à un point. On dit qu'un cercle est tangent à un site  $s$  si  $s$  coupe le cercle mais pas son intérieur. On suppose que les sites sont en position générale, c'est-à-dire que trois extrémités de segments ne sont pas alignées et aucun cercle n'est tangent à quatre sites (on considère qu'un point a une extrémité, confondue avec lui-même). Dans la suite, le mot « triangles » désignera toujours des triangles non plats. On notera  $\mathbf{S}$  l'union des sites de  $S$ , c'est-à-dire l'ensemble des points des sites de  $S$ .

**Définition 2.1** Une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $S$  est une partition de l'enveloppe convexe  $\text{conv}(\mathbf{S})$  de  $\mathbf{S}$  en sites, faces et arêtes tels que :

1. Chaque face de  $\mathcal{T}$  est un triangle ouvert dont les sommets sont sur trois sites de  $S$  distincts et dont les côtés ouverts ne coupent pas  $\mathbf{S}$ ,
2. Aucune face ne peut être ajoutée sans couper une face déjà existante,
3. Les arêtes de  $\mathcal{T}$  sont les composantes connexes de  $\text{conv}(\mathbf{S}) \setminus (F \cup \mathbf{S})$ , où  $F$  est l'union des faces de  $\mathcal{T}$ .

Dans la suite, on utilisera indifféremment les mots « triangle » et « face » pour désigner les faces d'une triangulation de segments.

Étant donnés trois sites distincts  $r$ ,  $s$  et  $t$ , on dit qu'un triangle s'appuie sur  $r$ ,  $s$ ,  $t$  lorsque les trois sommets du triangle appartiennent à  $r$ ,  $s$ ,  $t$  et que ces sites sont rencontrés dans cet ordre lorsque la frontière du triangle est parcourue dans le sens trigonométrique.

**Propriété 2.1** Soit  $S = \{r, s, t\}$  un ensemble de trois sites distincts du plan. Au plus deux triangles d'intérieurs disjoints peuvent s'appuyer sur les trois sites de  $S$  : l'un sur  $r$ ,  $s$ ,  $t$  et l'autre sur  $r$ ,  $t$ ,  $s$ .

*Preuve.* Prenons deux triangles dans le plan dont les intérieurs sont disjoints et étudions les différents cas dans lesquels ces deux triangles peuvent s'appuyer sur les trois mêmes sites. Soit  $B$  la frontière de l'enveloppe convexe des deux triangles. Comme les sommets des triangles ne sont pas tous alignés,  $B$  admet au moins trois côtés. Comme les triangles sont disjoints, les trois côtés d'un même triangle ne peuvent pas appartenir à  $B$  et  $B$  contient exactement deux côtés qui relient un sommet de l'un des triangles à un sommet de l'autre triangle.

(i) Considérons d'abord le cas où deux côtés  $[u, v]$  et  $[v, w]$  d'au moins un triangle sont sur  $B$  (voir figure 2.3). Comme les intérieurs des deux triangles sont disjoints, aucun sommet du deuxième triangle ne peut être confondu avec  $v$ . En outre, il n'existe pas de segment qui joint  $v$  à un sommet du deuxième triangle sans couper le côté  $[w, u]$ . Il en résulte qu'aucun sommet du deuxième triangle ne peut appartenir au même site que  $v$ . Cela signifie que deux tels triangles ne peuvent pas s'appuyer sur les trois mêmes sites.

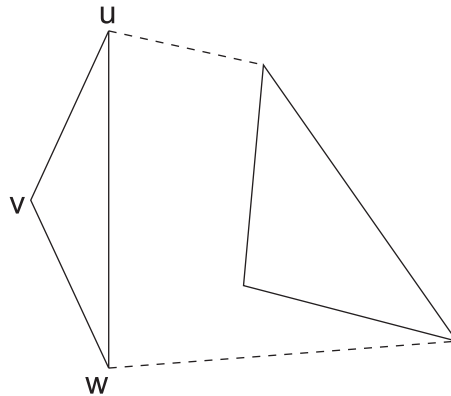
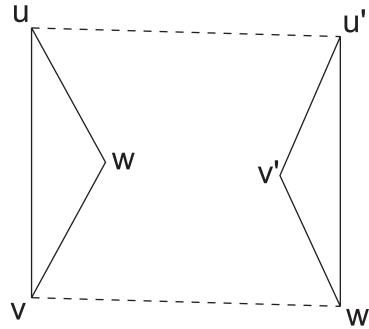


FIGURE 2.3 – Un triangle au moins a deux côtés sur  $B$ .

(ii) Considérons maintenant le cas où chaque triangle a exactement un côté sur  $B$  (voir figure 2.4). Soient  $uvw$  et  $u'v'w'$  les deux triangles orientés dans le sens trigonométrique tels que  $[u, v]$  et  $[w', u']$  soient des côtés de  $B$ .

- Si  $w$  et  $u'$  appartiennent à un même site  $s_1$ , alors ni  $u$  et  $v'$ , ni  $u$  et  $w'$  ne peuvent appartenir à un même site  $s_2$  puisque les sites sont deux à deux disjoints.
- Si  $w$  et  $w'$  appartiennent à un même site  $s_1$ , alors ni  $v$  et  $v'$ , ni  $v$  et  $u'$  ne peuvent appartenir à un même site  $s_2$ .

- Si  $w$  et  $v'$  appartiennent à un même site  $s_1$ , alors  $u$  et  $u'$  appartiennent nécessairement à un même site  $s_2$  et  $v$  et  $w'$  à un même site  $s_3$ . Le triangle  $uvw$  s'appuie alors sur  $s_2, s_3, s_1$  et le triangle  $u'v'w'$  s'appuie sur  $s_2, s_1, s_3$ .

FIGURE 2.4 – Chaque triangle a exactement un côté sur  $B$ .

(iii) Il reste à traiter le cas où l'un des triangles a un côté sur  $B$  et l'autre a un sommet sur  $B$  (voir figure 2.5). Soit  $uvw$  le triangle orienté dans le sens trigonométrique tel que  $u$  soit un sommet de  $B$ , et soit  $u'v'w'$  le triangle orienté dans le sens trigonométrique tel que  $[w', u']$  soit un côté de  $B$ .

- Si  $u$  et  $u'$  appartiennent à un même site  $s_1$ , alors :
  - si  $w$  et  $w'$  appartiennent à un même site  $s_2$ , alors  $v$  et  $v'$  ne peuvent pas appartenir à un même site  $s_3$ ,
  - si  $v$  et  $w'$  appartiennent à un même site  $s_2$ , alors  $w$  et  $v'$  appartiennent nécessairement à un même site  $s_3$  et les triangles  $uvw$  et  $u'v'w'$  s'appuient respectivement sur  $s_1, s_2, s_3$  et sur  $s_1, s_3, s_2$ .
- Si  $u$  et  $v'$  appartiennent à un même site  $s_1$ , alors ni  $v$  et  $w'$ , ni  $w$  et  $w'$  ne peuvent appartenir à un même site  $s_2$ .
- Si  $u$  et  $w'$  appartiennent à un même site  $s_1$ , alors :
  - si  $w$  et  $v'$  appartiennent à un même site  $s_2$ , alors  $v$  et  $u'$  ne peuvent pas appartenir à un même site  $s_3$ ,
  - si  $v$  et  $v'$  appartiennent à un même site  $s_2$ , alors  $w$  et  $u'$  appartiennent nécessairement à un même site  $s_3$ , et les triangles  $uvw$  et  $u'v'w'$  s'appuient respectivement sur  $s_1, s_2, s_3$  et sur  $s_3, s_2, s_1$ .

(iv) Il résulte de ce qui précède que, si deux triangles s'appuient sur trois mêmes sites, alors ces trois sites sont rencontrés dans deux ordres distincts lorsqu'on parcourt les sommets des triangles dans le sens trigonométrique. Par conséquent, au plus deux triangles s'appuient sur les trois sites de  $S$  : l'un sur  $r, s, t$  et l'autre sur  $r, t, s$ .  $\square$



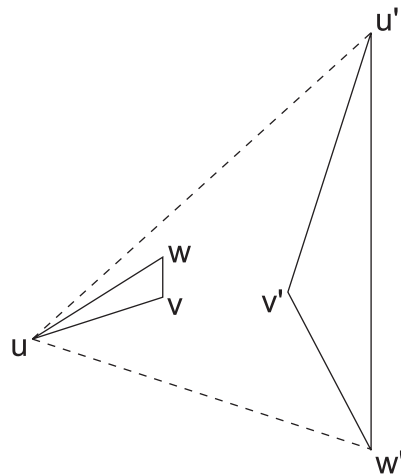


FIGURE 2.5 – L'un des triangles a un côté sur  $B$ , et l'autre a un sommet sur  $B$ .

**Propriété 2.2** *Tout ensemble de sites  $S$  admet une triangulation de segments.*

*Preuve.* Par définition, on ne peut pas rajouter de nouvelle face dans une triangulation de segments de  $S$ . Pour montrer l'existence d'une telle triangulation, il suffit donc de montrer que le nombre de triangles disjoints qui s'appuient sur trois sites distincts de  $S$  est majoré.

Si  $S$  admet exactement deux sites, alors il existe une unique triangulation de segments de  $S$  et elle ne compte aucune face. Si  $S$  admet au moins trois sites, alors, d'après la propriété précédente, pour tout sous-ensemble  $\{r, s, t\}$  de trois sites de  $S$ , il existe au plus deux faces disjointes dont les sommets sont sur  $r$ ,  $s$  et  $t$ . Le nombre total de faces d'une triangulation de segments de  $S$  est donc majoré par  $2C_n^3$ , où  $n$  est le cardinal de  $S$ .  $\square$

Nous verrons dans la Section 2.3 que le majorant  $2C_n^3$  de la preuve précédente est loin d'être optimal.

## 2.2 Propriétés des arêtes

*Nous introduisons les notions de  $S$ -polygone et de triangulation faiblement contrainte d'un  $S$ -polygone pour prouver qu'une arête d'une triangulation de segments de  $S$  connecte exactement deux sites de  $S$ . Cette propriété permet de caractériser la forme géométrique d'une arête d'une triangulation de segments.*

En observant une triangulation de segments de  $S$ , on peut constater qu'une arête connecte deux sites de  $S$ , en ce sens que la fermeture d'une arête coupe toujours exactement deux sites de  $S$ . Pour prouver cette propriété, nous ne raisonnons pas directement sur une triangulation de segments de  $S$  mais sur une partition de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  que nous appelons triangulation faiblement contrainte. Intuitivement, une triangulation faiblement contrainte de  $S$  peut être construite en décomposant en triangles les arêtes d'une triangulation de segments de  $S$  (voir Figure 2.6). Cependant, les triangulations faiblement contraintes peuvent être définies indépendamment des triangulations de segments. En outre, nous les définissons sur des régions plus générales que  $\text{conv}(\mathbf{S})$ , appelées  $S$ -polygones (voir Figure 2.7).

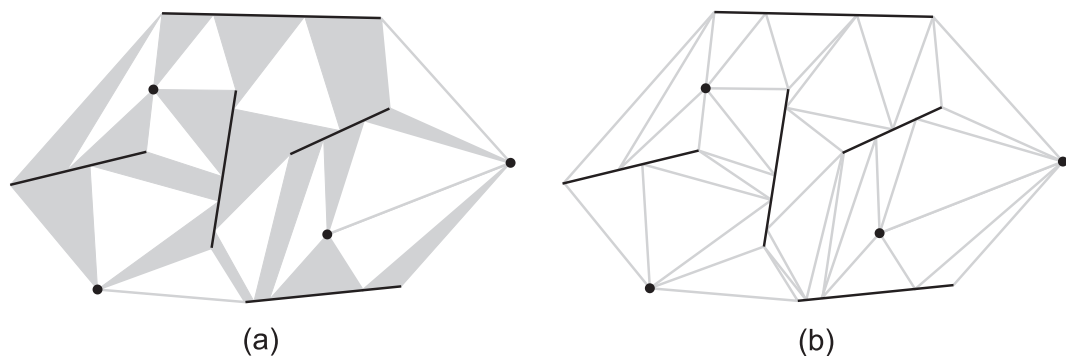


FIGURE 2.6 – Une triangulation faiblement contrainte (b) déduite d'une triangulation de segments (a).

**Définition 2.2** 1. *Étant donné un ensemble  $S$  de sites, on appelle  $S$ -polygone (éventuellement à trous) toute région fermée  $A$  incluse dans  $\text{conv}(\mathbf{S})$  et telle que la frontière de  $A$  soit composée d'un nombre fini de segments disjoints de deux types :*

- d'une part des segments fermés inclus dans  $\mathbf{S}$  (éventuellement réduits à des points),
- d'autre part des segments ouverts qui ne coupent pas  $\mathbf{S}$  et dont les extrémités sont dans  $\mathbf{S}$ .

2. *On dit qu'un  $S$ -polygone  $A$  est non dégénéré si  $A$  est égal à la fermeture de son intérieur et si  $A \setminus \mathbf{S}$  est connexe.*

3. *On appelle triangulation faiblement contrainte de  $A$  (relativement à  $S$ ), toute partition de  $A$  en triangles dont les sommets sont dans  $\mathbf{S}$ , dont les intérieurs ne coupent pas  $\mathbf{S}$ , et dont les côtés ouverts ou bien ne coupent pas  $\mathbf{S}$ , ou bien sont inclus dans  $\mathbf{S}$ .*

Si  $A = \text{conv}(\mathbf{S})$ , une telle triangulation est encore appelée triangulation faiblement contrainte de  $S$ .

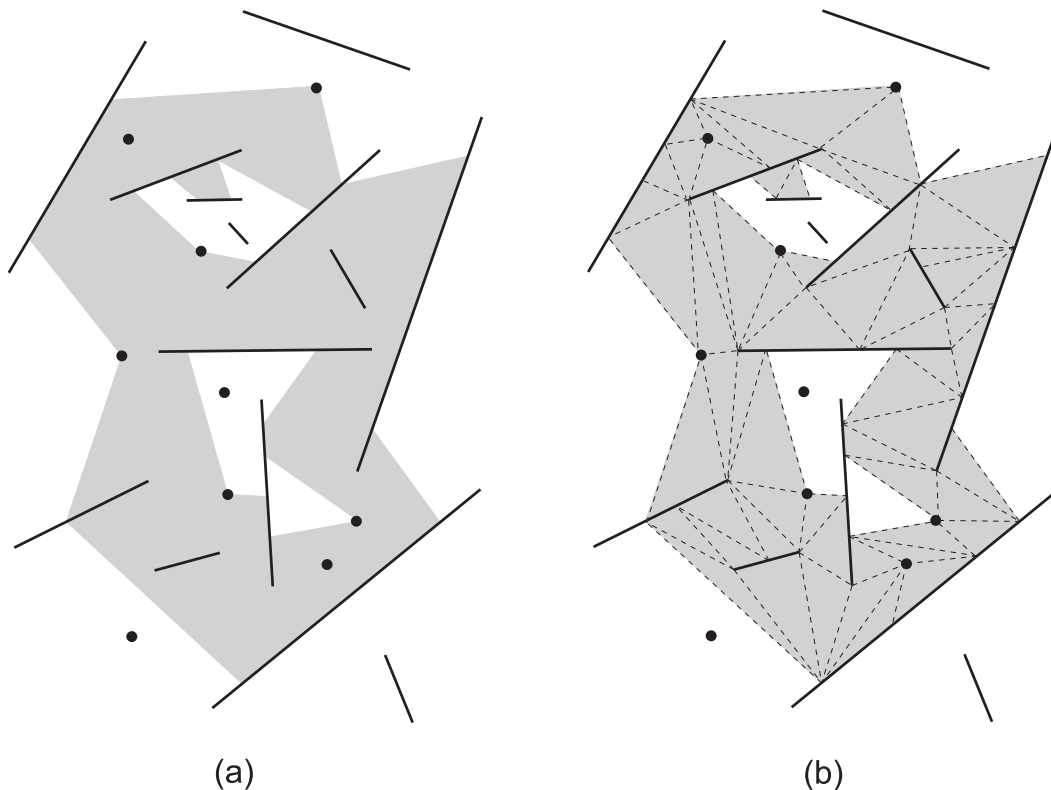


FIGURE 2.7 – Un  $S$ -polygone en gris (a) et une triangulation faiblement contrainte (en pointillés) de ce  $S$ -polygone (b).

L'existence d'une triangulation faiblement contrainte d'un ensemble  $S$  de sites en position générale se justifie simplement par l'existence d'une triangulation contrainte de  $S$ . En effet, une triangulation contrainte de  $S$  est un cas particulier de triangulation faiblement contrainte de  $S$  dans lequel les sommets des triangles sont exclusivement sur les extrémités des sites de  $S$ .

**Lemme 2.1** *Soit  $A$  un  $S$ -polygone non dégénéré qui coupe au moins trois sites de  $S$ . Soit  $t$  un triangle fermé qui a un côté dans  $\mathbf{S}$  et qui est une face d'une triangulation faiblement contrainte de  $A$ .*

*$\overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})}$  coupe exactement les mêmes sites que  $A$ .*

*Preuve.* Comme  $\overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})} \subset A$ ,  $\overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})}$  ne peut pas couper d'autres sites que ceux coupés par  $A$ . Il suffit donc de prouver que  $\overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})}$  coupe les sites rencontrés par  $A \setminus t$  et les sites rencontrés par  $t$ .

Comme  $\mathbf{S}$  est d'intérieur vide et comme  $A$  est égal à la fermeture de son intérieur,  $\overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})} = \overline{A \setminus t}$ . Les sites coupés par  $A \setminus t$  sont donc aussi coupés par  $\overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})}$ . Il reste à montrer que les sites coupés par  $t$  sont aussi coupés par  $\overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})}$ .

Soient  $p_1, p_2, p_3$  les sommets de  $t$  tels que  $[p_1, p_2]$  soit le côté de  $t$  qui est inclus dans  $\mathbf{S}$  (voir Figure 2.8). Il suffit de montrer que  $\overline{A \setminus t}$  contient  $p_3$  et au moins une des extrémités de  $[p_1, p_2]$ .

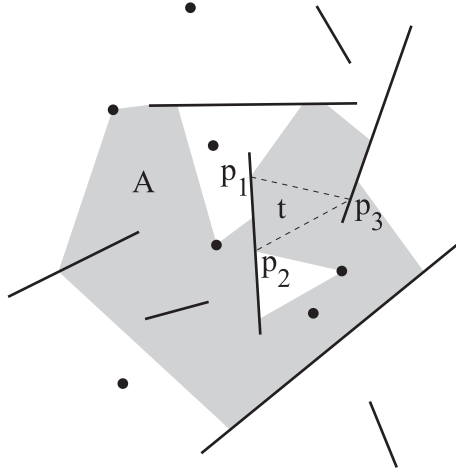


FIGURE 2.8 – Un  $S$ -polygone  $A$  et une face  $t$  d'une triangulation faiblement contrainte de  $A$  telle que  $t$  ait un côté dans  $\mathbf{S}$ .

Comme  $A$  coupe au moins trois sites de  $S$ ,  $[p_1, p_3]$  et  $[p_2, p_3]$  ne sont pas tous les deux sur la frontière de  $A$  car sinon  $A \setminus \mathbf{S}$  ne serait pas connexe ( $t \setminus \mathbf{S}$  serait l'une des composantes connexes de  $A \setminus \mathbf{S}$ ) et ceci contredirait la définition d'un  $S$ -polygone non dégénéré. On peut donc supposer, à une permutation de  $p_1$  et  $p_2$  près, que  $[p_1, p_3]$  n'est pas sur la frontière de  $A$ .  $[p_1, p_3]$  est alors sur la frontière de  $A \setminus t$  et, par suite,  $[p_1, p_3]$  est inclus dans  $\overline{A \setminus t} = \overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})}$ .  $\square$

**Lemme 2.2** *Soit  $A$  un  $S$ -polygone non dégénéré qui coupe au moins trois sites de  $S$ . Soit  $t$  un triangle fermé qui a un côté dans  $\mathbf{S}$  et qui est une face d'une triangulation faiblement contrainte de  $A$ .*

*Alors la fermeture de toute composante connexe de  $A \setminus (t \cup \mathbf{S})$  est un  $S$ -polygone non dégénéré.*

*Preuve.* Soit  $A'$  une composante connexe de  $A \setminus (t \cup \mathbf{S})$ . Il suffit de montrer que  $\overline{A'}$  vérifie toutes les caractéristiques d'un  $S$ -polygone non dégénéré.

(i) Par définition,  $\overline{A'}$  est une région fermée du plan.

(ii) Il est clair que  $\overline{A'}$  est inclus dans  $\text{conv}(\mathbf{S})$ .

(iii) Montrons que  $\overline{A'}$  est égal à la fermeture de son intérieur. Pour chaque point  $x$  de  $A \setminus (t \cup \mathbf{S})$ , il existe  $r > 0$  tel que soit  $B(x, r)$  est inclus dans  $A \setminus (t \cup \mathbf{S})$ , soit l'intersection de  $B(x, r)$  et d'un demi-plan contenant  $x$  est inclus dans  $A \setminus (t \cup \mathbf{S})$ . Comme une boule ou un demi-disque sont connexes, chaque composante connexe de  $A \setminus (t \cup \mathbf{S})$  est incluse dans l'adhérence de son intérieur. Par conséquent, l'adhérence d'une telle composante connexe est égale à l'adhérence de son intérieur.

(iv) Il reste encore à étudier la nature de la frontière de  $\overline{A'}$ . Cette frontière est incluse dans la réunion de la frontière de  $A$ , de la frontière de  $t$  et de  $\mathbf{S}$ . En outre, tout côté ouvert de  $t$  est soit inclus dans  $\mathbf{S}$ , soit égal à un segment frontière de  $A$  qui n'est pas dans  $\mathbf{S}$ , soit inclus dans l'intérieur de  $A \setminus \mathbf{S}$ . Par conséquent, la frontière de  $\overline{A'}$  est la réunion disjointe de segments fermés inclus dans  $\mathbf{S}$  et de segments ouverts qui ne coupent pas  $\mathbf{S}$  et dont les extrémités sont dans  $\mathbf{S}$ .  $\square$

Nous prouvons maintenant, à l'aide des deux précédents lemmes, une propriété des triangulations faiblement contraintes qui servira ensuite à mettre en évidence le fait qu'une arête d'une triangulation de segments connecte exactement deux sites.

**Lemme 2.3** *Si  $A$  est un  $S$ -polygone non dégénéré qui coupe au moins trois sites de  $S$ , alors toute triangulation faiblement contrainte de  $A$  contient au moins un triangle qui s'appuie sur trois sites de  $S$  distincts.*

*Preuve.* Étant donnée une triangulation faiblement contrainte  $T$  de  $A$ , soit  $\Delta_T(A)$  l'ensemble (éventuellement vide) des triangles de  $T$  qui ont un côté inclus dans  $\mathbf{S}$ . Nous montrons, par récurrence sur le nombre  $|\Delta_T(A)|$  de triangles dans  $\Delta_T(A)$ , que  $T$  contient au moins un triangle qui s'appuie sur trois sites de  $S$  distincts.

Si  $\Delta_T(A) = \emptyset$ , il est évident que chaque triangle de  $T$  s'appuie sur trois sites de  $S$  distincts. Supposons maintenant que cela reste vrai pour une triangulation faiblement contrainte  $T$  de  $A$  telle que  $|\Delta_T(A)| < k$ , avec  $k \geq 1$ .

D'une part, d'après le Lemme 2.1, pour toute triangulation faiblement contrainte  $T$  de  $A$  avec  $|\Delta_T(A)| = k$  et pour tout triangle fermé  $t$  de  $\Delta_T(A)$ ,  $\overline{A \setminus (t \cup \mathbf{S})}$  coupe les mêmes sites que  $A$ . D'autre part, la fermeture de toute composante connexe de  $A \setminus (t \cup \mathbf{S})$  coupe les deux sites qui contiennent les sommets de  $t$ . Cela signifie que la fermeture d'au moins une de ces composantes connexes coupe au moins trois sites. Soit  $A'$  la fermeture d'une telle composante connexe de  $A \setminus (t \cup \mathbf{S})$ .

D'après le Lemme 2.2,  $A'$  est un  $S$ -polygone. De plus, si  $T'$  est la restriction de  $T$  à  $A'$ , alors  $|\Delta_{T'}(A')| < |\Delta_T(A)|$ . Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,  $T'$  contient au moins un triangle qui s'appuie sur trois sites de  $S$  distincts. Il en est de même pour  $T$ .  $\square$

**Théorème 2.1** *La fermeture d'une arête d'une triangulation de segments de  $S$  coupe exactement deux sites de  $S$ .*

*Preuve.* Soient  $\mathcal{T}$  une triangulation de segments de  $S$ ,  $F$  l'union des faces ouvertes de  $\mathcal{T}$  et  $a$  une composante connexe de  $\text{conv}(\mathbf{S}) \setminus (F \cup \mathbf{S})$ . Il est clair que  $\bar{a}$  est un  $S$ -polygone.  $\bar{a}$  est soit réduit à un segment dont les extrémités sont dans  $\mathbf{S}$ , soit un  $S$ -polygone non dégénéré.

Supposons que  $\bar{a}$  coupe au moins trois sites de  $S$ . D'après le lemme précédent, on peut placer dans  $\bar{a}$  une face d'une triangulation de segments de  $S$  et cela contredit l'hypothèse que  $\mathcal{T}$  est déjà une triangulation de segments de  $S$ . Donc  $\bar{a}$  rencontre au plus deux sites de  $S$ .

Dans le cas où  $\bar{a}$  est un  $S$ -polygone non dégénéré,  $\bar{a}$  est un « polygone » à au moins trois sommets. Par définition, ses sommets sont dans  $\mathbf{S}$ , donc ils ne peuvent pas tous appartenir à un même site de  $S$ . On en déduit que  $\bar{a}$  coupe au moins deux sites de  $S$ .  $\square$

On peut déduire directement du Lemme 2.3 que les triangles d'une triangulation faiblement contrainte qui s'appuient sur trois sites sont les faces d'une triangulation de segments. D'où :

**Corollaire 2.1** *Toute triangulation faiblement contrainte de  $S$  est un raffinement d'une triangulation de segments de  $S$ , c'est-à-dire une triangulation de segments dont les arêtes sont décomposées en triangles.*

Ce dernier résultat montre qu'une arête d'une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $S$  connecte exactement deux sites de  $S$ . La forme géométrique d'une arête dépend donc directement de la nature et de la position des sites qu'elle connecte. La fermeture d'une arête est soit réduite à un segment de droite qui joint deux points de deux sites de  $S$  distincts, soit un triangle avec un côté et son sommet opposé dans  $\mathbf{S}$ , soit un quadrilatère (pas forcément convexe) dont deux côtés opposés sont dans  $\mathbf{S}$  (voir Figure 2.9).

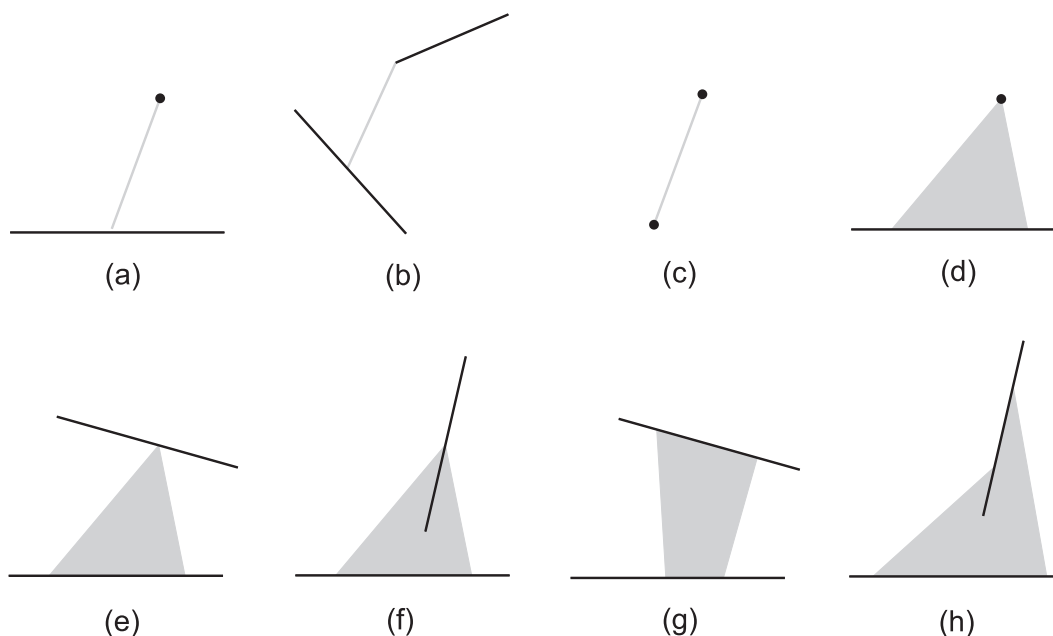


FIGURE 2.9 – La forme d'une arête dépend des sites qu'elle connecte : les arêtes (en gris) sont soit des segments en (a), (b) et (c), soit des triangles en (d), (e) et (f), soit des quadrilatères en (g) et (h).

On peut également remarquer que, si  $e$  est une arête d'une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $S$ , alors  $\bar{e}$  contient soit deux côtés de deux faces de  $\mathcal{T}$  distinctes, soit deux côtés de  $\partial(\text{conv}(\mathbf{S}))$  qui ne sont pas des sites, soit un côté d'une face de  $\mathcal{T}$  et un côté de  $\partial(\text{conv}(\mathbf{S}))$  qui n'est pas un site.

En effet, si  $\bar{e}$  est un segment de droite, comme  $e$  est une composante connexe de  $\text{conv}(\mathbf{S}) \setminus (F \cup \mathbf{S})$ , où  $F$  est l'union des faces de  $\mathcal{T}$ ,  $e$  est soit un côté commun à deux faces de  $\mathcal{T}$ , soit un côté commun à une face de  $F$  et à  $\partial(\text{conv}(\mathbf{S}))$ , soit l'unique côté de  $\partial(\text{conv}(\mathbf{S}))$  si  $S$  est réduit à deux points.

D'autre part, si  $\bar{e}$  est un triangle, alors un côté de  $\bar{e}$  est sur un site et le sommet opposé est sur un autre site. Comme les sites sont disjoints, les deux autres côtés

de  $\bar{e}$  sont soit des côtés de faces de  $\mathcal{T}$ , soit des côtés de  $\partial(\text{conv}(\mathbf{S}))$  qui ne sont pas des sites.

Enfin, si  $\bar{e}$  est un quadrilatère, deux côtés opposés de  $\bar{e}$  sont sur deux sites de  $S$ . Les deux autres côtés de  $\bar{e}$  sont soit des côtés de faces de  $\mathcal{T}$ , soit des côtés de  $\partial(\text{conv}(\mathbf{S}))$  qui ne sont pas des sites.

## 2.3 Propriétés topologiques

*Dans cette section nous définissons la carte combinatoire associée à une triangulation de segments. Nous montrons ensuite que cette carte est planaire et cela nous permet d'exprimer les nombres de faces et d'arêtes d'une triangulation de segments en fonction du nombre de sites.*

D'après le Théorème 2.1, une arête d'une triangulation de segments « connecte » deux sites. Pour toute triangulation de segments, on peut donc définir une carte combinatoire de la manière suivante :

**Définition 2.3** *Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation de segments de  $S$ . La carte combinatoire associée à  $\mathcal{T}$  est définie par :*

1. *les sommets de la carte sont les sites de  $S$ ,*
2. *les arcs qui connectent deux sites  $s$  et  $t$  dans la carte correspondent aux arêtes de  $\mathcal{T}$  dont les fermetures coupent  $s$  et  $t$ .*
3. *pour tout sommet  $s$  de la carte, les arcs issus de  $s$  sont ordonnés selon l'ordre trigonométrique des arêtes de  $\mathcal{T}$  autour de  $s$ .*

**Définition 2.4** *On dit que deux triangulations de segments de  $S$  ont la même topologie si elles ont la même carte combinatoire associée.*

**Proposition 2.1** *La carte combinatoire associée à une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $S$  est planaire et ses faces correspondent aux faces de  $\mathcal{T}$  ainsi qu'à la face externe de  $\mathcal{T}$  (c'est-à-dire le complémentaire de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ ).*

*Preuve.* Pour chaque site  $s$  de  $S$ , soit  $\gamma_s$  une courbe de Jordan convexe fermée telle que :

- $s$  est à l'intérieur de  $\gamma_s$  (c'est-à-dire dans la région du plan bornée par  $\gamma_s$ ),
- $S \setminus s$  est à l'extérieur de  $\gamma_s$ ,
- l'intérieur de  $\gamma_s$  ne coupe que les arêtes de  $\mathcal{T}$  dont les fermetures rencontrent  $s$  (voir Figure 2.10(a)).



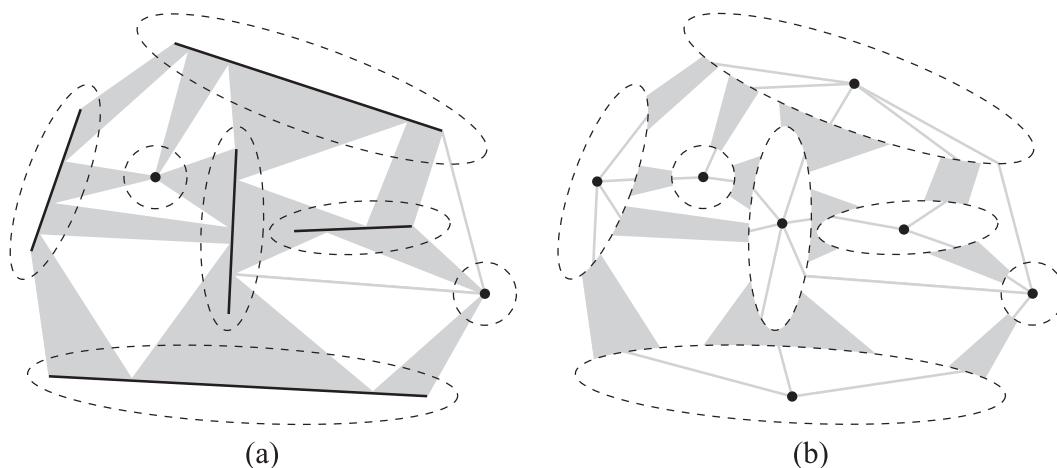


FIGURE 2.10 – Les sites sont isolés dans des convexes (a), puis sont remplacés par des points (b).

Remplaçons maintenant chaque site  $s$  de  $S$  par un point  $p_s$  à l'intérieur de  $\gamma_s$ . Pour chaque arête  $e$  de  $\mathcal{T}$  qui coupe  $\gamma_s$ , on remplace la partie de  $e$  à l'intérieur de  $\gamma_s$  par un segment de droite qui connecte  $p_s$  à un point de  $e$  sur  $\gamma_s$  (voir Figure 2.10(b)). On obtient alors une nouvelle arête, dite réduite. Après cette opération, l'ordre des arêtes autour de  $s$  reste inchangé et les arêtes réduites restent disjointes.

Ensuite, on remplace chaque arête réduite par un arc de Jordan inclus dans l'arête réduite (voir Figure 2.11(a)). Finalement, on obtient une représentation plane de la carte combinatoire associée à  $\mathcal{T}$  (voir Figure 2.11(b)).  $\square$

Comme l'ordre des arêtes autour de chaque site reste inchangé, il y a une bijection entre l'ensemble des faces de la carte combinatoire et l'ensemble constitué des faces de  $\mathcal{T}$  et de la face externe de  $\mathcal{T}$ .

La planarité de la carte combinatoire associée à une triangulation de segments nous permettra d'utiliser la formule d'Euler pour caractériser les nombres de faces et d'arêtes dans la triangulation de segments.

**Théorème 2.2** *Toute triangulation de segments  $\mathcal{T}$  d'un ensemble  $S$  de  $n$  sites contient  $3n - n' - 3$  arêtes et  $2n - n' - 2$  faces, où  $n'$  est le nombre de côtés de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  qui ne sont pas des sites.*

*Preuve.* Soient  $f$  le nombre de faces de  $\mathcal{T}$ ,  $a$  le nombre total d'arêtes de  $\mathcal{T}$ ,  $a'$  le nombre d'arêtes de  $\mathcal{T}$  qui sont adjacentes à  $\partial(\text{conv}(\mathbf{S}))$  et à exactement une

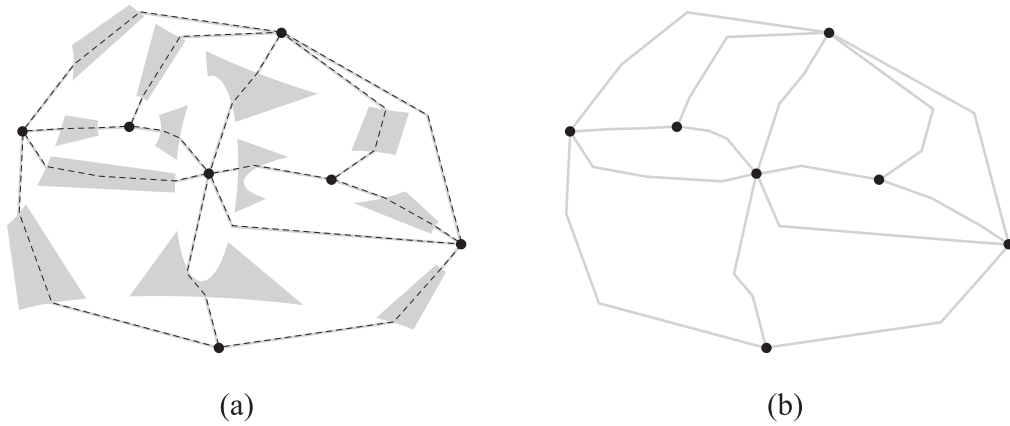


FIGURE 2.11 – Dans chaque arête réduite (en gris) on peut trouver une courbe qui relie les deux sites connectés par l’arête (a). L’ensemble des points et de ces courbes forme une représentation plane de la carte combinatoire (b).

face de  $\mathcal{T}$ , et  $a''$  le nombre d’arêtes qui ne sont adjacentes à aucune face de  $\mathcal{T}$  et qui ont donc deux côtés dans  $\partial(\text{conv}(\mathbf{S}))$  (voir Figure 2.12). Comme  $\mathcal{T}$  a le même nombre de faces, d’arêtes et de sommets que la carte combinatoire qui lui est associée et comme cette carte est plane, d’après la relation d’Euler :

$$f - a + n = 1 \quad (2.1)$$

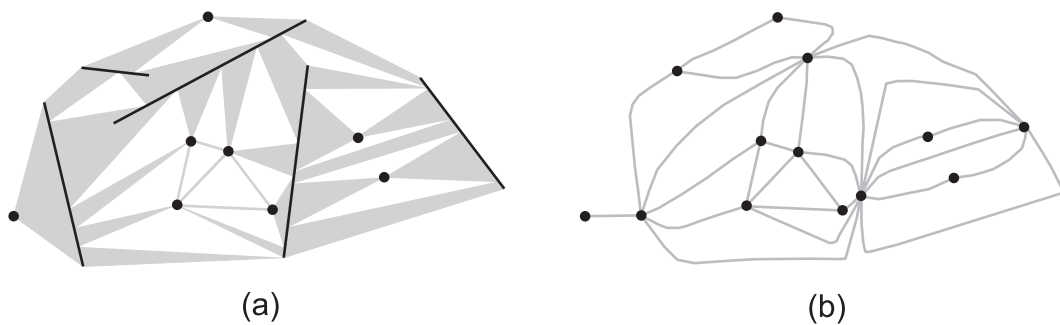


FIGURE 2.12 – Une triangulation de segments (a) et une représentation de sa carte combinatoire associée (b). Dans cet exemple,  $n = 13$ ,  $n' = 8$ ,  $a' = 6$ ,  $a'' = 1$ ,  $f = 16$  et  $a = 28$ .

On sait que chaque face interne de la représentation géométrique  $G$  de la carte associée à  $\mathcal{T}$  a trois arêtes, que chaque arête interne est adjacente à exactement deux faces internes, que chaque arête comptée dans  $a'$  est adjacente à une face

interne et celles comptées dans  $a''$  à aucune. On obtient donc :

$$3f = 2a - a' - 2a'' \quad (2.2)$$

Or on sait que les arêtes comptées dans  $a'$  sont adjacentes à la face externe de  $G$ , donc elles correspondent à un côté de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ . De plus les arêtes comptées dans  $a''$  sont adjacentes deux fois à la face externe, donc elles correspondent à deux côtés de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ . On déduit que  $n' = a' + 2a''$ , d'où la relation suivante :

$$3f = 2a - n' \quad (2.3)$$

Le résultat se déduit directement de (2.1) et (2.3).  $\square$

Ce dernier résultat montre que la taille d'une triangulation de segments de  $S$  dépend linéairement du nombre de sites de  $S$ . Cela montre aussi que les nombres de faces et d'arêtes d'une triangulation de segments sont des invariants de l'ensemble de sites. Il s'agit de la généralisation d'une propriété bien connue des triangulations d'ensembles de points dans le plan.

## 2.4 Structure de données

*Dans cette section, nous commençons par donner une représentation d'une carte combinatoire, puis nous montrons comment adapter cette structure de données pour la représentation des triangulations de segments.*

### 2.4.1 Définitions

Une carte combinatoire peut être représentée par un triplet  $C = (B, \alpha, \sigma)$  où  $B$  est un ensemble fini d'éléments appelés des brins,  $\sigma$  est une permutation de  $B$  et  $\alpha$  est une involution de  $B$  sans point fixe.

Pour tout brin  $b$  de  $B$ ,

- l'orbite  $\langle \alpha \rangle (b) = \{b, \alpha(b)\}$  représente une arête de  $C$  ;
- l'orbite  $\langle \sigma \rangle (b) = \{b, \sigma(b), \dots, \sigma^{k-1}(b)\}$ , où  $k$  est le plus petit entier non nul tel que  $\sigma^k(b) = b$ , représente un sommet de  $C$  ;
- l'orbite  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b) = \{b, (\sigma^{-1} \circ \alpha)(b), \dots, (\sigma^{-1} \circ \alpha)^{k-1}(b)\}$ , où  $k$  est le plus petit entier non nul tel que  $(\sigma^{-1} \circ \alpha)^k(b) = b$ , représente une face de  $C$ .

Si  $C = (B, \alpha, \sigma)$  est la carte combinatoire associée à une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  d'un ensemble de sites  $S$ , on associe à chaque brin  $b$  de  $B$  un site  $s$  de  $S$  ( $b$  est dit issu de  $s$ ) tel que :

- $b$  et  $\alpha(b)$  sont issus de deux sites adjacents à la même arête de  $\mathcal{T}$  ;
- $b$  et  $\sigma(b)$  sont issus d'un même site  $s$  et l'arête de  $\mathcal{T}$  représentée par  $\langle \alpha \rangle (\sigma(b))$  suit l'arête de  $\mathcal{T}$  représentée par  $\langle \alpha \rangle (b)$  dans le sens trigonométrique autour de  $s$ .

Notons que les faces de  $C$  correspondent aux faces de  $\mathcal{T}$  et au complémentaire de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ . En effet, pour tout brin  $b$  de  $B$ , les brins de l'orbite  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b)$  sont :

- soit issus des trois sites de  $S$  sur lesquels s'appuie une face de  $\mathcal{T}$ . En outre, ces sites sont rencontrés dans l'ordre trigonométrique sur la face.
- soit issus des sites de  $S$  qui coupent la frontière de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ . Ces sites sont rencontrés dans l'ordre rétrograde sur cette frontière. Lorsqu'un site coupe la frontière en exactement deux points, deux brins de  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b)$  en sont issus.

Comme chaque brin de  $B$  appartient à l'orbite d'une et une seule face de  $C$ , les coordonnées des sommets des faces de  $\mathcal{T}$  et de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  peuvent être associées aux brins  $b$  de  $B$  de la manière suivante :

- si  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b)$  représente un triangle  $\tau$  de  $\mathcal{T}$ , on associe à  $b$  les extrémités du côté de  $\tau$  qui est contenu dans l'arête de  $\mathcal{T}$  représentée par  $\langle \alpha \rangle (b)$  ;
- si  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b)$  représente le complémentaire de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ , on associe à  $b$  les extrémités du côté de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  qui est contenu dans l'arête de  $\mathcal{T}$  représentée par  $\langle \alpha \rangle (b)$ .

Dans les deux cas, les sommets associés à  $b$  appartiennent aux deux sites dont sont issus  $b$  et  $\alpha(b)$ . Si  $x$  et  $y$  sont les extrémités (éventuellement confondues) d'un tel site, tout point  $p$  du site peut être défini par un réel  $k \in [0, 1]$  tel que  $\overrightarrow{xp} = k\overrightarrow{xy}$ .

### 2.4.2 Exemple

Soient  $S = \{r, s, t, u, v, w\}$  un ensemble de sites,  $\mathcal{T}$  une triangulation de  $S$  et  $C = (B, \alpha, \sigma)$  la carte associée à  $\mathcal{T}$  (voir Figure 2.13). Pour une meilleure compréhension, voici quelques exemples :

- L'orbite  $\langle \alpha \rangle (7) = \{7, -7\}$  correspond à l'arête qui connecte les sites  $u$  et  $t$ .

- L'orbite  $\langle \alpha \rangle (6) = \{6, -6\}$  correspond à l'arête qui connecte les sites  $v$  et  $t$ .
- L'orbite  $\langle \sigma \rangle (5) = \{5, -3, 6\}$  correspond au site  $v$ .
- L'orbite  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (-2) = \{-2, 3, 5\}$  correspond à la face dont les sommets sont sur les sites  $u$ ,  $s$  et  $v$  dans l'ordre trigonométrique.
- L'orbite  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (1) = \{1, 2, 8, -9, -4, -1\}$  correspond à la face externe, c'est-à-dire au complémentaire de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ .

Le Tableau 2.1 montre une implémentation de la carte associée à  $\mathcal{T}$ . Pour chaque brin  $b$ ,  $\xi$  est le site dont est issu  $b$ .  $\pi_1$  est le coefficient qui permet de calculer le sommet de la triangulation associé à  $b$  sur le site  $\xi$ .  $\pi_2$  est le coefficient qui permet de calculer le sommet de la triangulation associé à  $b$  sur le site dont est issu  $\alpha(b)$ .

Par exemple,  $\langle \alpha \rangle (3)$  correspond à une arête qui connecte les sites  $s$  et  $v$ . Pour le brin 3,  $\pi_1 = 0,5$  indique que la face correspondant à  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (3)$  a un sommet  $p$  sur  $s$  tel que  $\overrightarrow{xp} = 0,5\overrightarrow{xy}$ , où  $x$  et  $y$  sont les extrémités de  $s$ . Enfin, la valeur  $\pi_2 = 0,4$  indique que la face correspondant à  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (3)$  a un sommet  $q$  sur  $v$  tel que  $\overrightarrow{xq} = 0,4\overrightarrow{xy}$ , où  $x$  et  $y$  sont les extrémités de  $v$ .

Dans la Figure 2.13(d), on représente chaque brin  $b$  par un segment en pointillés dont une extrémité est au point défini par le couple  $(\xi(b), \pi_1(b))$  et qui est orienté vers le point défini par le couple  $(\xi(\alpha(b)), \pi_2(b))$ .

$b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
$\alpha$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma$	1	-1	2	3	-3	5	8	-2	-7	4	-5	6	9	7	-4	-6	-9	-8
$\xi$	r	s	s	s	v	v	u	u	t	s	u	v	t	u	t	t	w	w
$\pi_1$	0	1	0,5	0,2	0,4	0,8	0,9	1	0,8	0	0,3	0	0	0,9	0,4	0,8	0	1
$\pi_2$	1	0	0,4	0,4	0,3	0,8	0,8	1	0	0	0,5	0,2	0	0,8	0	0,9	0,9	1

TABLE 2.1 – Une implémentation de la carte associée à la triangulation de segments de la Figure 2.13.

Remarquons qu'il suffirait d'associer à chaque brin  $b$  un unique sommet : celui qui appartient au site dont est issu  $b$ . Lorsque  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b)$  représente un triangle de  $\mathcal{T}$ , ses sommets seraient alors les trois sommets associés aux trois brins de  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b)$ . En revanche, lorsque  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b)$  représente le complémentaire de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ , la détermination de ses sommets serait moins aisée. En effet, le nombre de sommets de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  peut être supérieur au nombre de brins de  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle (b)$ . Cela se produit lorsqu'un site est contenu dans la frontière

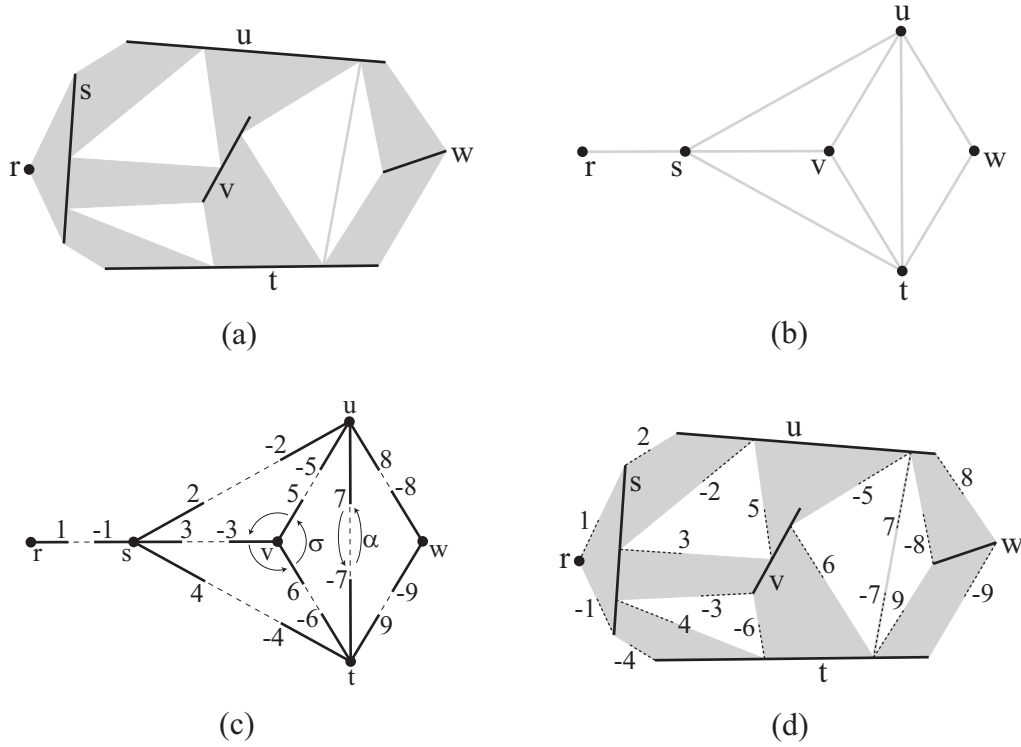


FIGURE 2.13 – Une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  (a), la carte combinatoire associée à  $\mathcal{T}$  (b), la représentation des brins de cette carte (c), et la représentation des brins (en pointillés) dans  $\mathcal{T}$ .

de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ . Dans ce cas, ses deux extrémités sont deux sommets consécutifs de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  mais une seule de ses extrémités est associée à un brin de  $\langle \sigma^{-1} \circ \alpha \rangle$  (b). Pour pouvoir déterminer l'ensemble des sommets de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ , il faut donc, en plus, savoir quels sont les sites contenus dans la frontière de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ .

## 2.5 Algorithme par balayage

*Nous adaptons au cas des triangulations de segments un algorithme de construction par balayage d'une triangulation contrainte quelconque [36]. Nous montrons que cet algorithme construit une triangulation de segments en temps  $O(n \log n)$ , où  $n$  est le nombre de sites.*

Soient  $S$  un ensemble de sites et  $P$  l'ensemble composé, d'une part, des sites de  $S$  qui sont des points et, d'autre part, des extrémités des sites de  $S$  qui sont des segments. Rappelons qu'une triangulation contrainte de  $S$  est une triangulation

$T$  de  $P$  telle que les sites de  $S$  qui sont des segments soient des arêtes de  $T$ . Il est clair que :

**Proposition 2.2** *Toute triangulation contrainte de  $S$  est un raffinement d'une triangulation de segments de  $S$  (voir Figure 2.14).*

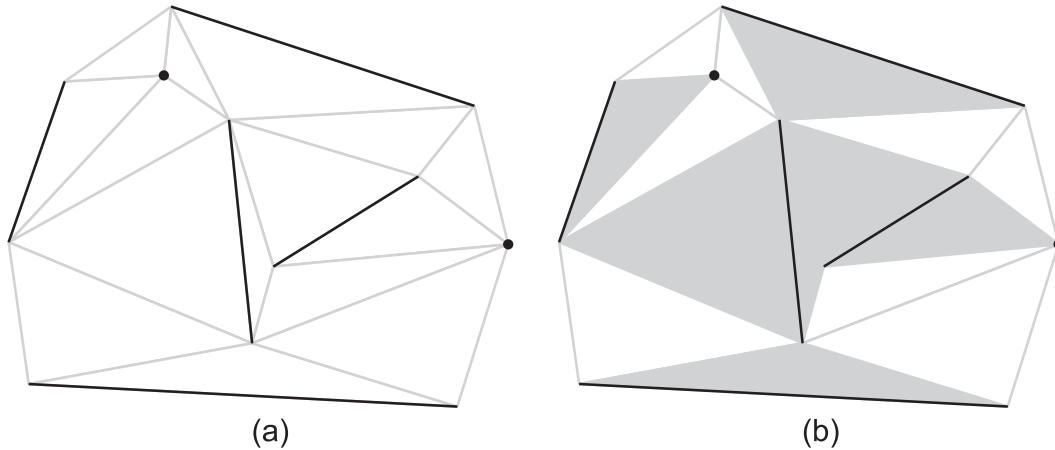


FIGURE 2.14 – Une triangulation contrainte (a) et la triangulation de segments correspondante (b).

Pour qu'une triangulation de segments admette un raffinement qui soit une triangulation contrainte, il faut que les sommets des faces de la triangulation de segments soient exclusivement sur les extrémités des segments de  $S$ .

Nous adaptons maintenant un algorithme bien connu de construction d'une triangulation contrainte par balayage [36] pour construire une telle triangulation de segments.

L'algorithme simule le balayage du plan par une droite  $\mathcal{D}$  qui se déplace de  $-\infty$  vers  $+\infty$  perpendiculairement à l'axe des abscisses. Nous supposons que  $P$  n'admet pas deux points ayant la même abscisse (si tel n'était pas le cas, il suffirait de pivoter légèrement la droite  $\mathcal{D}$ ). À un instant donné du balayage, on note  $P_b$  l'ensemble des points de  $P$  déjà balayés et  $S_c$  l'ensemble des sites de  $S$  qui ne sont pas réduits à des points et qui coupent  $\mathcal{D}$ . Les sites de  $S_c$  décomposent  $\mathcal{D}$  en intervalles  $I$ . On appelle front, l'ensemble des segments orientés  $[s, t]$  tels que  $s, t \in P_b$  et que le segment ouvert  $]s, t[$  ne soit visible, relativement à  $S_c$ , d'aucun point de  $P_b$  à droite de la droite orientée  $(st)$ . Cela signifie que, pour tout point  $x$  du segment ouvert  $]s, t[$  et pour tout point  $y$  de  $P_b$  à droite de  $(st)$ , le segment  $[x, y]$  coupe  $S_c$ .

Le front ainsi obtenu est le même que celui de l'algorithme qui construit une triangulation contrainte par balayage et vérifie donc les mêmes propriétés, à savoir :

- le front est une ligne polygonale fermée, pas nécessairement simple (voir Figure 2.15) ;
- le point  $p_1$  de  $P$  d'abscisse minimale est un sommet du front ;
- les extrémités des sites de  $S_c$  qui appartiennent à  $P_b$  sont des sommets du front ;
- chaque point du front est visible d'au moins un point de  $\mathcal{D}$  ;
- pour chacun des intervalles  $I$  qui décomposent  $\mathcal{D}$ , l'ensemble des points du front visibles de  $I$  est une ligne polygonale connexe  $\gamma_I$  ;
- $\gamma_I$  relie soit les deux sites de  $S_c$  qui définissent  $I$ , soit l'unique site de  $S_c$  définissant  $I$  et le point  $p_1$  (notons que si  $S_c$  est vide,  $I = \mathcal{D}$  et  $\gamma_I$  est le front) ;
- $\gamma_I$  est convexe dans ce sens que si  $[r, s]$  et  $[s, t]$  sont deux côtés orientés consécutifs de  $\gamma_I$ ,  $\angle([r, s], [s, t]) > 0$  ;
- les points de  $\gamma_I$  visibles d'un point donné de  $I$  forment une ligne connexe qui contient le point de  $\gamma_I$  d'abscisse maximale ;
- les lignes  $\gamma_I$  forment une partition du front.

Nous donnons maintenant un algorithme qui met à jour le front lorsque  $\mathcal{D}$  balaye le plan. Nous montrons également comment des faces d'une triangulation de segments de  $S$  peuvent être construites lors de la mise à jour du front.

Après le balayage des deux premiers points de  $P$ , le front est constitué d'exactly deux côtés d'orientations opposées, géométriquement confondus et qui relient les deux points de  $P_b$ . Aucune face n'est encore créée.

Supposons maintenant que les  $k$  premiers points de  $P$  ont été balayés, que le front a été mis à jour et qu'un certain nombre de faces ont été créées. Lorsque  $\mathcal{D}$  balaye le  $(k + 1)$ -ième point  $p_{k+1}$  de  $P$ , l'algorithme distingue trois cas possibles selon la nature de  $p_{k+1}$  :

1.  $p_{k+1}$  est un site de  $S$  réduit à un point (voir Figure 2.16).

On détermine l'intervalle  $I$  de  $\mathcal{D}$  qui contient  $p_{k+1}$  et la ligne polygonale  $\mathcal{C}$  de côtés de  $\gamma_I$  visibles de  $p_{k+1}$ . Les côtés de  $\mathcal{C}$  sont supprimés du front et remplacés par deux côtés qui relient  $p_{k+1}$  aux deux extrémités de  $\mathcal{C}$  (si  $\mathcal{C}$  est réduit à un point, les deux côtés créés sont géométriquement confondus mais d'orientations opposées). Pour tout côté de  $\mathcal{C}$  qui n'est pas un site, on construit un triangle qui s'appuie sur ce côté et sur  $p_{k+1}$ .



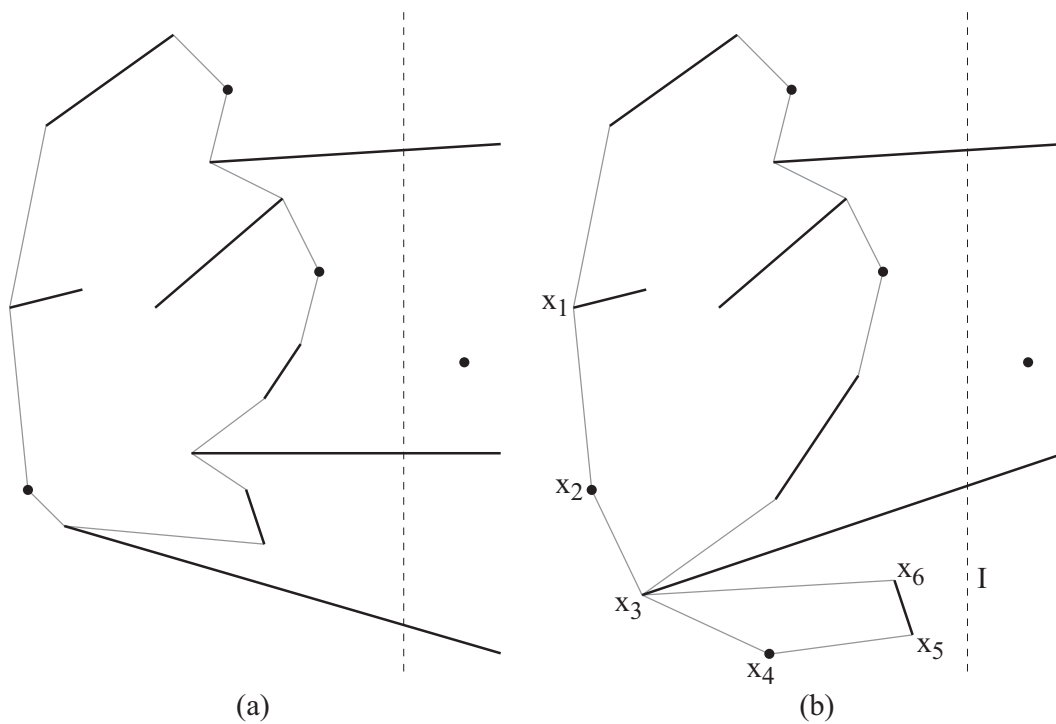


FIGURE 2.15 – Deux exemples de front. En (b), on peut remarquer que le front n'est pas nécessairement une ligne polygonale simple. En effet, pour l'intervalle  $I$ ,  $\gamma_I = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_3$  n'est pas simple.

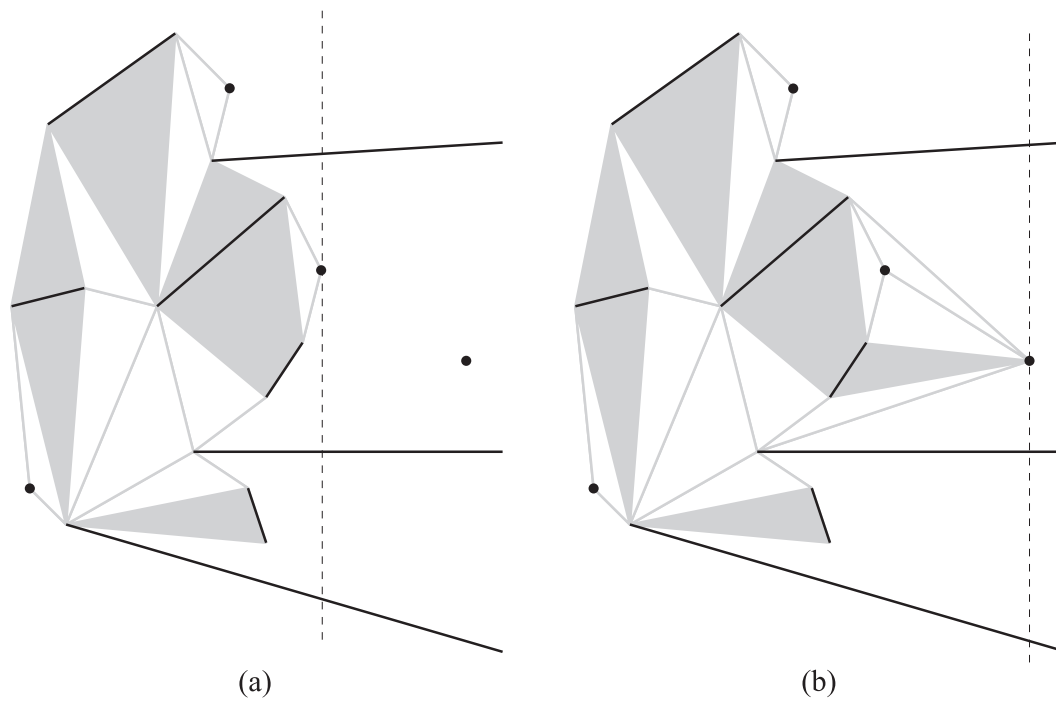


FIGURE 2.16 – Triangulation de segments partielle après l'insertion de  $p_k$  (a), puis de  $p_{k+1}$  (b), dans le cas où  $p_{k+1}$  n'est pas une extrémité de segment.

2.  $p_{k+1}$  est l'extrémité gauche d'un site de  $S$  non réduit à un point (voir Figure 2.17).

On effectue les mêmes opérations que dans le cas 1. Notons cependant que l'intervalle  $I$  qui contient  $p_{k+1}$  est maintenant partagé en deux intervalles par le nouveau site de  $S_c$  d'extrémité  $p_{k+1}$ .

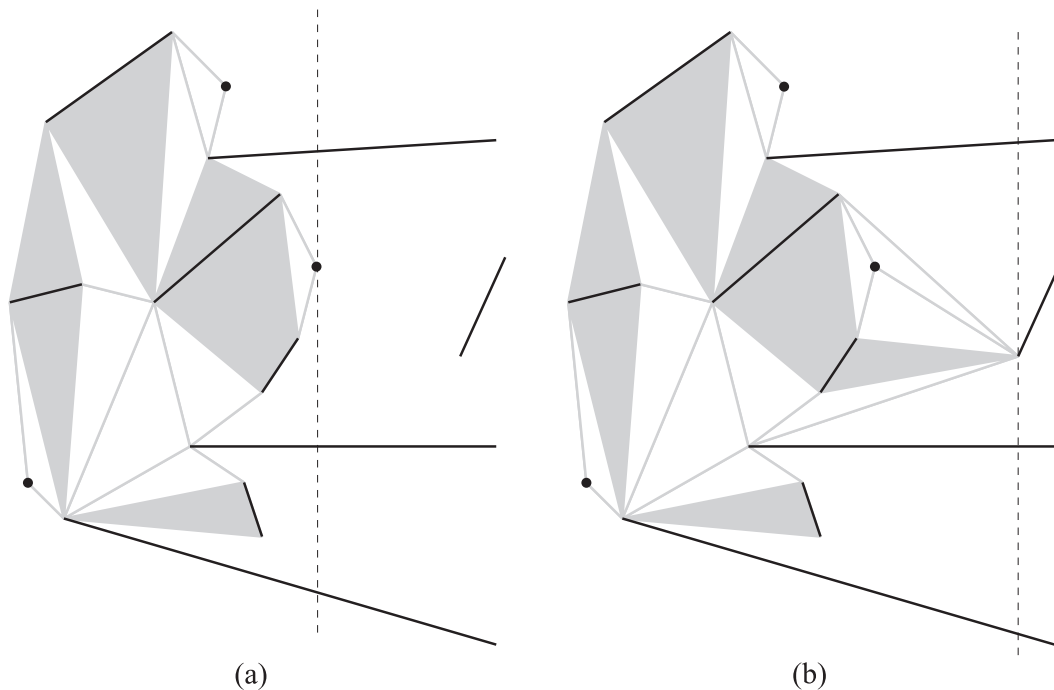


FIGURE 2.17 – Triangulation de segments partielle après l'insertion de  $p_k$  (a), puis de  $p_{k+1}$  (b), dans le cas où  $p_{k+1}$  est l'extrémité gauche d'un segment.

3.  $p_{k+1}$  est l'extrémité droite d'un site de  $S$  non réduit à un point (voir Figures 2.18 et 2.19).

Soit  $p_h$  l'autre extrémité de ce site et soient  $I$  et  $J$  les deux intervalles de  $\mathcal{D}$  délimités par  $[p_h, p_{k+1}]$  et tels que les ordonnées des points de  $I$  soient supérieures à celles des points de  $J$ . On détermine les lignes polygonales  $\mathcal{C}_I$  et  $\mathcal{C}_J$  de  $\gamma_I$  et  $\gamma_J$  visibles de  $p_{k+1}$ .

- Si  $\mathcal{C}_I$  contient au moins un côté,  $p_h$  est une extrémité de  $\mathcal{C}_I$ . Les côtés de  $\mathcal{C}_I$  sont supprimés du front et remplacés par un côté qui relie  $p_{k+1}$  à l'extrémité de  $\mathcal{C}_I$  distincte de  $p_h$ . On construit des triangles qui s'appuient sur  $p_{k+1}$  et sur les côtés de  $\mathcal{C}_I$  qui ne sont pas des sites et qui ne sont pas issus de  $p_h$ .
- Si  $\mathcal{C}_I$  ne contient pas de côté, le côté orienté  $[p_{k+1}, p_h]$  est ajouté au front. De la même manière :
- ou bien les côtés de  $\mathcal{C}_J$  sont remplacés sur le front par un côté qui relie l'extrémité de  $\mathcal{C}_J$  distincte de  $p_h$  à  $p_{k+1}$  et des triangles sont créés qui

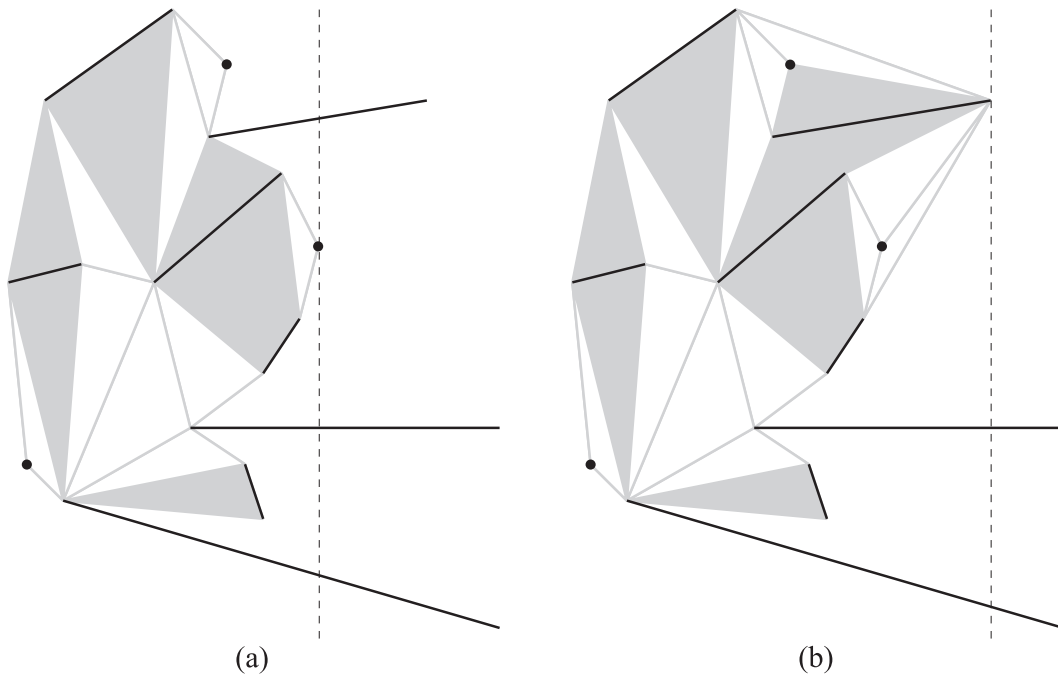


FIGURE 2.18 – Triangulation de segments partielle après l’insertion de  $p_k$  (a), puis de  $p_{k+1}$  (b), dans le cas où  $p_{k+1}$  est l’extrémité droite d’un segment.

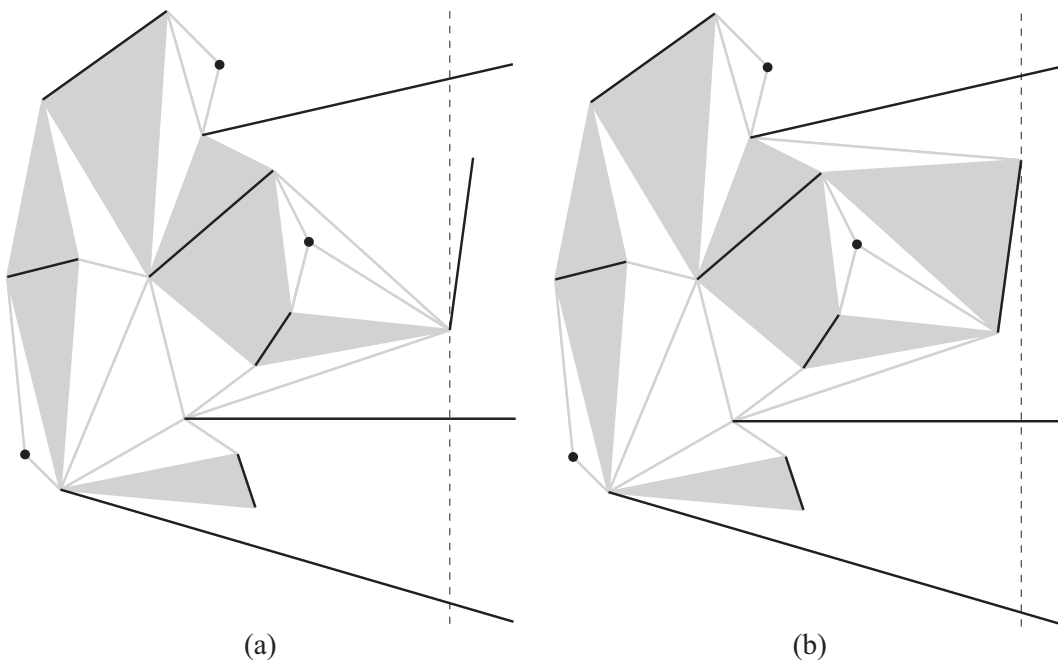


FIGURE 2.19 – Triangulation de segments partielle après l’insertion de  $p_k$  (a), puis de  $p_{k+1}$  (b), dans le cas où  $p_{k+1}$  est l’extrémité droite d’un segment qui devient un côté du front.

s'appuient sur  $p_{k+1}$  et sur les côtés de  $\mathcal{C}_J$  qui ne sont pas des sites et ne sont pas issus de  $p_h$ ,

– ou bien le côté orienté  $[p_h, p_{k+1}]$  est ajouté au front.

Notons qu'après le balayage de  $p_{k+1}$ , les intervalles  $I$  et  $J$  sont fusionnés en un unique intervalle.

**Théorème 2.3** (i) Lorsque  $\mathcal{D}$  a balayé tous les sites de  $S$ , les triangles construits par l'algorithme sont les faces d'une triangulation de segments de  $S$ .

(ii) Cette triangulation peut être construite en temps  $O(n \log n)$ , où  $n$  est le nombre de sites de  $S$ .

*Preuve.* (i.1) Tout triangle  $\tau$  créé lorsque  $\mathcal{D}$  balaye le point  $p_{k+1}$  s'appuie sur  $p_{k+1}$  et sur un côté orienté  $c$  du front tel que  $p_{k+1}$  soit l'unique point de  $P$  déjà balayé qui est à droite de la droite orientée engendrée par  $c$  et qui voit le côté  $c$ . L'intérieur de  $\tau$  ne coupe donc aucun site de  $S$  et ne coupe l'intérieur d'aucun triangle précédemment construit. En outre, les extrémités de tout côté du front qui n'est pas un site appartiennent à deux sites distincts de  $S$ . Il en résulte que  $\tau$  s'appuie sur trois sites distincts et est donc une face d'une triangulation de segments de  $S$ .

(i.2) Comptons maintenant le nombre de triangles construits par l'algorithme. Lorsque  $\mathcal{D}$  a balayé  $k$  points de  $P$ , soient  $n_k$  le nombre de sites de  $S$  dont un point au moins a été balayé,  $n'_k$  le nombre de côtés du front qui ne sont pas des sites et  $f_k$  le nombre de triangles construits.

(i.2.1) Lorsque  $k = 2$ , le front est constitué d'exactly deux côtés orientés, géométriquement confondus. Si les deux points balayés sont les extrémités d'un même site de  $S$ , on a  $n_2 = 1$  et  $n'_2 = 0$ . Sinon  $n_2 = 2$  et  $n'_2 = 2$ . Comme aucune face n'a encore été créée, on a, dans les deux cas,  $f_2 = 2n_2 - n'_2 - 2 = 0$ .

(i.2.2) Supposons que, pour  $k \geq 2$ ,

$$f_k = 2n_k - n'_k - 2 \quad (2.4)$$

et montrons que  $f_{k+1} = 2n_{k+1} - n'_{k+1} - 2$ . Lors du balayage du  $(k+1)$ -ième point  $p_{k+1}$  de  $P$ , dans les cas 1 et 2 de l'algorithme,  $p_{k+1}$  appartient à un site dont aucun point n'avait encore été balayé. D'où :

$$n_{k+1} = n_k + 1. \quad (2.5)$$

En outre, deux nouveaux côtés qui ne sont pas des sites sont ajoutés au front et un nombre  $m \geq 0$  de côtés qui ne sont pas des sites sont supprimés du front. D'où :

$$n'_{k+1} = n'_k + 2 - m. \quad (2.6)$$

Comme, pour chacun de ces  $m$  côtés supprimés, un nouveau triangle est créé,

$$f_{k+1} = f_k + m. \quad (2.7)$$

Il résulte de (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) que  $f_{k+1} = 2n_{k+1} - n'_{k+1} - 2$ .

Dans le cas 3 de l'algorithme,

$$n_{k+1} = n_k. \quad (2.8)$$

Considérons d'abord le traitement de l'intervalle  $I$ . Si le nombre  $m_I$  de côtés de  $\gamma_I$  qui ne sont pas des sites et qui sont visibles de  $p_{k+1}$  n'est pas nul, ces  $m_I$  côtés sont supprimés du front, un nouveau côté qui n'est pas un site est ajouté au front et  $m_I - 1$  triangles sont construits. Si  $m_I = 0$ , aucun côté n'est supprimé du front, aucun côté qui n'est pas un site n'est ajouté au front et aucun triangle n'est créé. Dans tous les cas, lors du traitement de l'intervalle  $I$ , le nombre de triangles créés est donc l'opposé de la variation du nombre de côtés qui ne sont pas des sites sur le front. Il en est de même lors du traitement de l'intervalle  $J$ . D'où, au total,

$$f_{k+1} - f_k = n'_k - n'_{k+1}. \quad (2.9)$$

De (2.4), (2.8) et (2.9) il résulte que  $f_{k+1} = 2n_{k+1} - n'_{k+1} - 2$ .

(i.2.3) Lorsque tous les points de  $P$  sont balayés, le front est la frontière de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  et, d'après (i.2.2), le nombre total de triangles créés est égal à  $2n - n' - 2$  où  $n$  est le nombre de sites de  $S$  et  $n'$  est le nombre de côtés de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  qui ne sont pas des sites. Il résulte de (i.1) et du Théorème 2.2 que les triangles créés par l'algorithme sont les faces d'une triangulation de segments de  $S$ .

(ii) Le nombre de points de  $P$  est en  $O(n)$  où  $n$  est le cardinal de  $S$ . Ces points sont triés par abscisses croissantes en temps  $O(n \log n)$ . Pour stocker la décomposition de  $\mathcal{D}$  en intervalles, on peut choisir une structure de données telle qu'un arbre binaire de recherche qui permet de faire une recherche ou une mise à jour en temps  $O(\log n)$ . De plus, pour chaque intervalle  $I$ , l'algorithme maintient le point d'abscisse maximale de  $\gamma_I$  (c'est-à-dire le dernier point inséré dans  $I$ ) pour pouvoir y accéder en temps constant. Pour chaque point de  $P$  balayé, l'algorithme effectue au pire une recherche et une mise à jour de l'arbre. Puis il parcourt les côtés du front qui doivent être supprimés (à deux près). Comme les sites de  $S$  sont deux à deux disjoints, le nombre total de côtés parcourus sur le front est proportionnel au nombre de côtés parcourus qui ne sont pas des sites. Par suite ce nombre est aussi proportionnel au nombre de triangles créés. Comme le nombre total de ces triangles est en  $O(n)$ , d'après (i), la complexité de l'algorithme est en  $O(n \log n)$ .  $\square$

## Chapitre 3

# Triangulations de Delaunay de segments

*Dans ce chapitre, nous étendons la notion de triangulation de Delaunay dans le cadre des triangulations de segments.*

*Nous commençons par rappeler la définition du diagramme de Voronoï de segments et par donner la définition d'une triangulation de Delaunay de segments. A l'aide des propriétés du diagramme de Voronoï de segments, nous montrons l'existence d'une triangulation de Delaunay de segments quel que soit l'ensemble de segments considéré.*

*Nous montrons également que la triangulation de Delaunay de segments est duale du diagramme de Voronoï de segments. Il est à noter que le dual du diagramme de Voronoï de segments a déjà été défini par Chew et Kedem pour résoudre le problème du placement de la plus grande copie possible d'un polygone convexe sans intersection avec des obstacles polygonaux [26, 27]. Ce même diagramme a aussi été utilisé plus récemment par Memari et Boissonnat pour la reconstruction d'un objet à partir d'un ensemble de coupes de cet objet [14, 63].*

*Comme il existe plusieurs méthodes efficaces pour construire le diagramme de Voronoï d'un ensemble de segments [46, 15] et comme la dualité permet de passer en temps linéaire du diagramme de Voronoï de segments à la triangulation de Delaunay de segments, cela signifie qu'il est possible de construire de manière efficace la triangulation de Delaunay d'un ensemble de segments donné. Pour illustrer ces propos, nous adaptons aux cas des triangulations de Delaunay de segments un algorithme incrémental randomisé de construction du diagramme de Voronoï de segments [13, 15].*

### 3.1 Diagramme de Voronoï de segments dans le plan

Dans cette section nous commençons par rappeler la définition du diagramme de Voronoï d'un ensemble de segments dans le plan. Nous donnons ensuite la propriété qui nous permettra, dans la section suivante, d'établir des liens entre le diagramme de Voronoï de segments et une triangulation de segments particulière.

**Définition 3.1** Pour tous points  $p$  et  $q$  de  $\mathbf{R}^2$ , on note  $d(p, q)$  la distance euclidienne de  $p$  à  $q$ . Pour tout point  $p \in \mathbf{R}^2$  et pour toute partie  $Q \subset \mathbf{R}^2$ ,  $d(p, Q) = \inf\{d(p, q) : q \in Q\}$  est la distance de  $p$  à  $Q$ .

**Définition 3.2** La région de Voronoï d'un site  $s$  de  $S$  est l'ensemble des points  $p$  du plan tels que  $d(p, s) < d(p, t)$ ,  $\forall t \in S \setminus \{s\}$ . On appelle squelette de  $S$  l'ensemble des points du plan équidistants d'au moins deux sites et plus proches de ces deux sites que de tous les autres. Les sommets de Voronoï sont les points du plan équidistants d'au moins trois sites et plus proches de ces sites que de tous les autres. Les arêtes de Voronoï sont les composantes connexes du squelette privé des sommets de Voronoï.

Le diagramme de Voronoï de  $S$ , noté  $\text{Vor}(S)$ , est la partition du plan formée par les régions, arêtes et sommets de Voronoï (voir Figure 3.1).

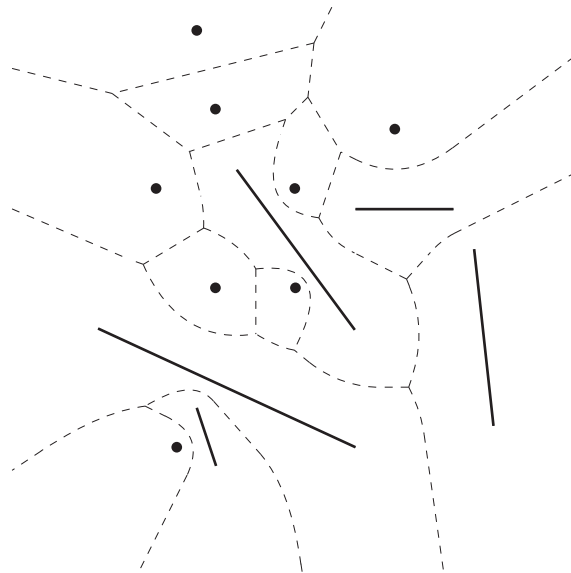


FIGURE 3.1 – Exemple de diagramme de Voronoï d'un ensemble de points et de segments du plan.

Lorsque les sites sont en position générale, un sommet de Voronoï est équidistant d'exactly trois sites.

Le squelette est une réunion de segments de droites, de demi-droites, de droites et d'arcs de paraboles.

Nous donnons maintenant une propriété de dénombrement des diagrammes de Voronoï de segments. Nous utiliserons cette propriété ultérieurement pour mettre en évidence les liens qui existent entre diagrammes de Voronoï de segments et triangulations de segments.

**Propriété 3.1** *Le diagramme de Voronoï d'un ensemble  $S$  de  $n$  sites en position générale contient  $2n - n' - 2$  sommets et  $3n - n' - 3$  arêtes, où  $n'$  est le nombre de côtés de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  qui ne sont pas des sites.*

*Preuve.* Notons  $s$  le nombre de sommets de Voronoï,  $a$  le nombre d'arêtes de Voronoï et  $a_i$  le nombre d'arêtes de Voronoï adjacentes à  $i$  sommets de Voronoï, avec  $i = 0, 1$  ou  $2$ . On a  $a = a_0 + a_1 + a_2$ . Chaque sommet de Voronoï est adjacent à trois arêtes. Donc  $3s = 2a_2 + a_1 = 2a - a_1 - 2a_0$ . Or, chaque arête de Voronoï adjacente à exactement un sommet correspond à un côté de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  qui n'est pas un site. De même, chaque arête de Voronoï adjacente à aucun sommet correspond à deux côtés de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ . D'où,  $a_1 + 2a_0 = n'$ . En outre, d'après la relation d'Euler,  $n - a + s = 1$ . Il en résulte que  $s = 2n - n' - 2$  et  $a = 3n - n' - 3$ .  $\square$

## 3.2 Triangulation de Delaunay de segments

*Dans cette section, nous définissons la notion de triangulation de Delaunay de segments à l'aide de la propriété des cercles vides (voir Figure 3.2). Nous montrons ensuite qu'une telle triangulation existe pour tout ensemble  $S$  de sites donné et que cette triangulation est duale du diagramme de Voronoï de segments de  $S$ .*

**Définition 3.3** *Un cercle est vide (relativement à  $S$ ) si le disque ouvert borné par ce cercle ne coupe pas un site de  $S$ . De la même manière, un disque est vide (relativement à  $S$ ) si le disque ouvert de même centre et de même rayon ne coupe pas un site de  $S$ .*

**Définition 3.4** *Une triangulation de segments de  $S$  est dite de Delaunay si le cercle circonscrit à chaque face est vide.*



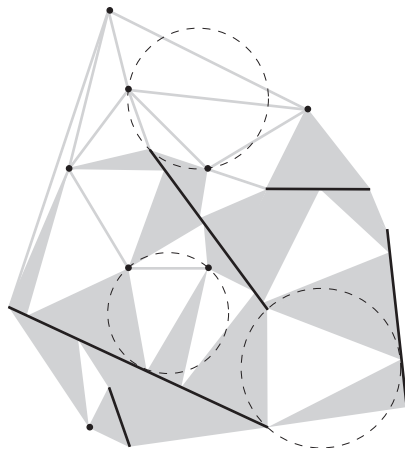


FIGURE 3.2 – Exemple de triangulation de Delaunay d'un ensemble de points et de segments du plan.

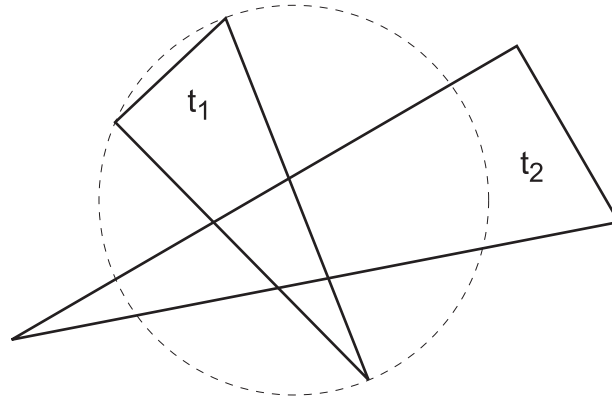
Pour tout sommet  $v$  de  $Vor(S)$ , on désigne par  $C(v)$  le cercle vide maximal centré en  $v$  et par  $T(v)$  le triangle ouvert engendré par les points d'intersection de  $C(v)$  avec  $\mathbf{S}$ . Dans la suite, on note  $F$  l'ensemble des triangles  $T(v)$ .

**Lemme 3.1** *Les triangles de  $F$  sont les faces d'une triangulation de segments de  $S$ .*

*Preuve.* (i) Montrons que les triangles de  $F$  sont disjoints. Supposons qu'il existe deux triangles  $t_1$  et  $t_2$  de  $F$  qui ne sont pas disjoints et montrons qu'il y a une contradiction. Comme le cercle circonscrit à  $t_1$  est vide, cela signifie que ce cercle ne contient pas en son intérieur les sommets de  $t_2$  (voir Figure 3.3). De plus, par définition, le cercle circonscrit à  $t_2$  est également vide : il faudrait donc que ce cercle coupe le cercle circonscrit à  $t_1$  en quatre points, ce qui est impossible. Donc, les triangles de  $F$  sont deux à deux disjoints.

(ii) Il est évident que le nombre de triangles de  $F$  est égal au nombre de sommets de  $Vor(S)$ .

(iii) Montrons que le nombre de sommets de  $Vor(S)$  est égal au nombre de faces d'une triangulation de segments de  $S$ . D'après le Théorème 2.2, toute triangulation de segments de  $S$  compte  $2n - n' - 2$  faces, où  $n$  est le nombre de sites de  $S$  et où  $n'$  est le nombre de côtés de  $conv(\mathbf{S})$  qui ne sont pas des sites. Le résultat de la Propriété 3.1 montre que le nombre de sommets du diagramme de Voronoï de  $S$  est égal au nombre de faces d'une triangulation de segments de  $S$ .

FIGURE 3.3 –  $t_1$  et  $t_2$  ne sont pas disjoints.

(iv) On déduit directement de (i), (ii) et (iii) que les triangles de  $F$  sont les faces d'une triangulation de segments de  $S$ .  $\square$

Comme tout ensemble  $S$  admet un diagramme de Voronoï de segments, il en résulte que :

**Corollaire 3.1** *Tout ensemble  $S$  admet une triangulation de Delaunay de segments de  $S$ .*

**Théorème 3.1** *Le diagramme de Delaunay de segments de  $S$  est dual du diagramme de Voronoï de segments de  $S$ .*

*Preuve.* Dans toute cette preuve, nous considérons les arêtes fermées de Voronoï.

1. Soit  $a$  une arête du diagramme de Voronoï de  $S$ . L'arête  $a$  joint deux sommets de Voronoï  $v_1(a)$  et  $v_2(a)$ . Les points de  $a$  sont équidistants de deux sites  $s_1(a)$  et  $s_2(a)$ . Pour un point  $p$  du plan, notons  $\pi_{i,a}(p)$  le point de  $s_i(a)$  le plus proche de  $p$ . L'application  $p \rightarrow \pi_{i,a}(p)$  est continue. Posons, pour  $p \in a$ ,  $\sigma_a(p) = ]\pi_{1,a}(p), \pi_{2,a}(p)[$  et  $E(a) = \bigcup_{p \in a} \sigma_a(p)$  (l'arête  $a$  est fermée).

2.  $E(a)$  est connexe car c'est l'image de  $a \times ]0, 1[$  par l'application continue  $(p, t) \in a \times ]0, 1[ \rightarrow (1 - t)\pi_{1,a}(p) + t\pi_{2,a}(p)$ .

3. Si  $a$  et  $a'$  sont deux arêtes de Voronoï et si  $p \in a$  et  $p' \in a'$ , alors  $(a \neq a' \text{ ou } p \neq p') \Rightarrow \sigma_a(p) \cap \sigma_{a'}(p') = \emptyset$ . On peut le démontrer en utilisant le fait que deux cercles se coupent en au plus deux points.

4. Si  $t$  est un triangle de Delaunay alors pour toute arête  $a$  de Voronoï et pour tout  $p \in a$ ,  $\sigma_a(p) \cap t^\circ = \emptyset$ .

5. Pour tout  $s \in S$ , pour toute arête  $a$  de Voronoï et pour tout  $p \in a$ ,  $s \cap \sigma_a(p) = \emptyset$  car  $\sigma_a(p)$  est contenu dans un cercle vide.

Les points 2, 4 et 5 montrent que  $E(a)$  est inclus dans une arête de Delaunay.

Soit  $a$  une arête de Voronoï joignant les sommets de Voronoï  $v_1(a)$  et  $v_2(a)$  et équidistante des sites  $s_1(a)$  et  $s_2(a)$ . Le triangle de Delaunay  $t_1$  correspondant à  $v_1(a)$  joint deux points  $p_1 \in s_1(a)$  et  $p_2 \in s_2(a)$ . Le segment ouvert  $]p_1, p_2[$  est inclus dans  $E(a)$  car  $]p_1, p_2[ = \sigma_a(v_1(a))$ . On en déduit que l'arête de Delaunay contenant  $E(a)$  est adjacente aux triangles  $t_1$  et  $t_2$  et aux sites  $s_1(a)$  et  $s_2(a)$ .

L'application qui à une arête de Voronoï  $a$  associe l'arête de Delaunay contenant  $E(a)$  est bijective. En effet, les nombres d'arêtes de Voronoï et de Delaunay sont égaux. De plus cette application est injective car les ensembles  $E(a)$ ,  $a \in \{\text{arêtes de Voronoï}\}$  sont deux à deux disjoints et  $E(a)$  contient les côtés des triangles de Delaunay adjacents à l'arête de Delaunay contenant  $E(a)$ .

On en conclut que les bijections :

sommets de Voronoï  $\leftrightarrow$  triangles de Delaunay,

régions de Voronoï  $\leftrightarrow$  sites de  $S$ ,

arêtes de Voronoï  $\leftrightarrow$  arêtes de Delaunay,

respectent les adjacences. □

**Remarque 3.1** Dans la preuve de ce théorème, nous avons montré que  $E(a)$  est inclus dans l'arête de Delaunay duale de  $a$ . En fait, les résultats sur les fonctions localement convexes de la Section 5.4 montreront que cette inclusion est une égalité. Par conséquent, une arête de Delaunay adjacente à deux sites  $s$  et  $t$  est une réunion disjointe de segments  $]a, b[$  ouverts tels que  $a \in s$ ,  $b \in t$  et il existe un cercle vide tangent à  $s$  et  $t$  en  $a$  et  $b$ .

### 3.3 Construction incrémentale

*Dans cette section, nous décrivons un algorithme incrémental pour construire une triangulation de Delaunay de segments. L'algorithme que nous donnons ici est directement inspiré de la méthode incrémentale de construction du diagramme de Voronoï de segments décrite par Boissonnat et al. [13, 15] et Devillers [31]. En réalité, il s'agit exactement du même algorithme, à ceci près que nous manipulons la structure duale du diagramme de Voronoï de segments.*

#### 3.3.1 Description de l'algorithme

Si on considère un ensemble  $S$  de sites en position générale, l'algorithme incrémental doit résoudre le problème suivant : étant donnée la triangulation de Delaunay de segments  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  d'un sous-ensemble  $S_c$  de  $S$ , comment insérer un site  $s$  de  $S \setminus S_c$  dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$ ? Autrement dit, comment calculer  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ ?

Dans un premier temps, nous commençons par supposer que  $s$  est à l'intérieur de  $\text{conv}(S_c)$ . Nous verrons plus tard que la méthode donnée ici s'adapte facilement au cas plus général où  $s$  n'est pas nécessairement à l'intérieur de  $\text{conv}(S_c)$ .

D'après la Remarque 3.1, une arête d'une triangulation de Delaunay de segments peut être considérée comme une réunion disjointe de segments inscriptibles dans des cercles vides. Dans la suite, les faces de Delaunay ainsi que les segments qui composent les arêtes d'une triangulation de Delaunay de segments sont appelés les éléments de cette triangulation.

Pour construire  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ , il faut commencer par supprimer les parties de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  qui n'existent pas dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ . Cela consiste à retirer de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  tous les éléments qui ne sont pas inscriptibles dans un cercle vide relativement à  $S_c \cup \{s\}$ . Cela signifie que des faces et des parties d'arêtes de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  disparaissent. Pour certaines arêtes, tous les éléments qui la composent disparaissent : ces arêtes sont dites entièrement remises en cause par  $s$ . Pour d'autres arêtes, seulement une partie de leurs éléments ne sont plus inscriptibles dans un cercle vide et disparaissent (voir Figure 3.4) : ces arêtes sont dites partiellement remises en cause par  $s$ . Enfin, il peut aussi arriver qu'une face adjacente à une arête disparaisse et qu'aucun élément de cette arête ne disparaisse : comme une telle arête ne sera plus adjacente aux mêmes faces après l'insertion de  $s$ , elle est aussi dite partiellement remise en cause par  $s$ .

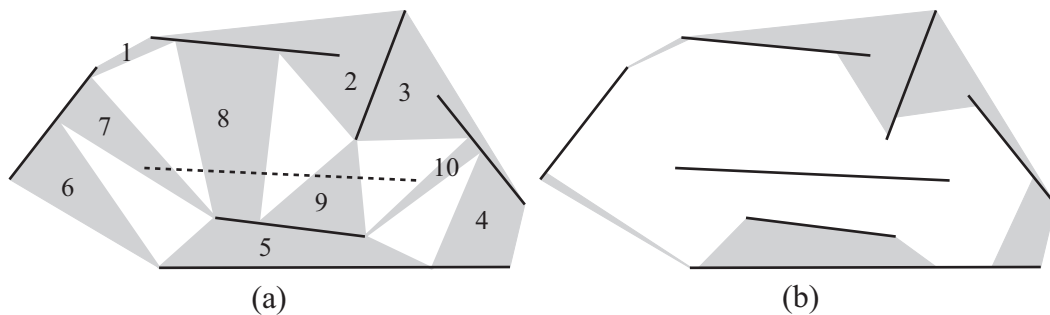


FIGURE 3.4 – La Figure (a) représente la triangulation de Delaunay courante  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  et le prochain site  $s$  à insérer est en pointillés. Les arêtes 1 à 6 sont partiellement remises en cause par  $s$  et les arêtes 7 à 10 sont entièrement remises en cause par  $s$ . La Figure (b) montre le trou obtenu après la suppression des éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  qui ne peuvent pas exister dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ .

La suppression de tous ces éléments génère un trou à l'intérieur de la triangulation courante. Les éléments supprimés sont soit des faces dont les sommets sont

sur trois sites de  $S_c$ , soit des segments qui joignent des points de deux sites de  $S_c$ . Par conséquent, le bord de ce trou est composé de segments inclus dans les sites de  $S_c$  et de segments qui sont des éléments restants de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$ .

Pour construire  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ , il reste à rajouter dans ce trou les éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$  qui ne sont pas déjà dans la triangulation courante. Ces nouveaux éléments sont nécessairement soit des triangles dont les sommets sont sur deux sites de  $S_c$  et sur  $s$ , soit des segments qui joignent un point d'un site de  $S_c$  et un point de  $s$ . En effet, il ne serait pas possible d'ajouter une face dont les sommets sont sur trois sites de  $S_c$ , ni un segment qui joint des points de deux sites de  $S_c$  car cela signifierait que cet élément existait déjà dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$ , ce qui est contradictoire. Les éléments à construire formeront donc le « polygone des voisins » de  $s$  dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$  ayant un sommet sur  $s$ . Comme la frontière d'un tel polygone est connexe, le bord du trou est nécessairement connexe.

Voyons maintenant quels sont les éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$  à ajouter pour combler le trou obtenu. Pour chaque segment du bord du trou qui est un élément restant de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  il existe un cercle vide relativement à  $S_c \cup \{s\}$  qui passe par les extrémités de ce segment. En particulier, il est facile de voir qu'il existe un tel cercle qui est aussi tangent à  $s$  (voir Figure 3.5). Cela signifie que chacun de ces segments est un côté d'une nouvelle face de Delaunay qui a un sommet sur  $s$ .

De plus, si on considère deux éléments restants de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  qui sont consécutifs sur le bord du trou, dans ce sens qu'il existe un site  $t$  qui contient une extrémité de chacun de ces éléments, les deux éléments engendrent deux nouvelles faces de Delaunay qui ont chacune un sommet sur  $s$  et un autre sommet sur  $t$ . Ces deux faces sont adjacentes à une nouvelle arête de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$  qui connecte les sites  $s$  et  $t$ .

La création de toutes ces nouvelles faces et arêtes se fait simplement en parcourant les éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  qui sont sur le bord du trou. Cela revient à parcourir l'ensemble des arêtes qui sont partiellement remises en cause par  $s$ . Cela peut se faire sans avoir au préalable explicitement déterminé le trou. Supposons qu'on ait déterminé une des arêtes partiellement remises en cause par  $s$  et notons la  $a_0$ . Cette arête contient un élément  $e_0$  qui est sur le bord du trou et le problème consiste à trouver l'arête  $a_1$  partiellement remise en cause par  $s$  qui contient l'élément  $e_1$  qui suit  $e_0$  sur le bord du trou (en le parcourant dans le sens trigonométrique). Comme  $e_0$  et  $e_1$  ont chacun une extrémité dans un site  $t$ ,  $a_0$  et  $a_1$  sont toutes les deux incidentes à  $t$ . Par conséquent, pour passer de  $a_0$  à  $a_1$ , il suffit de parcourir les arêtes incidentes à  $t$  dans l'ordre trigonométrique inverse

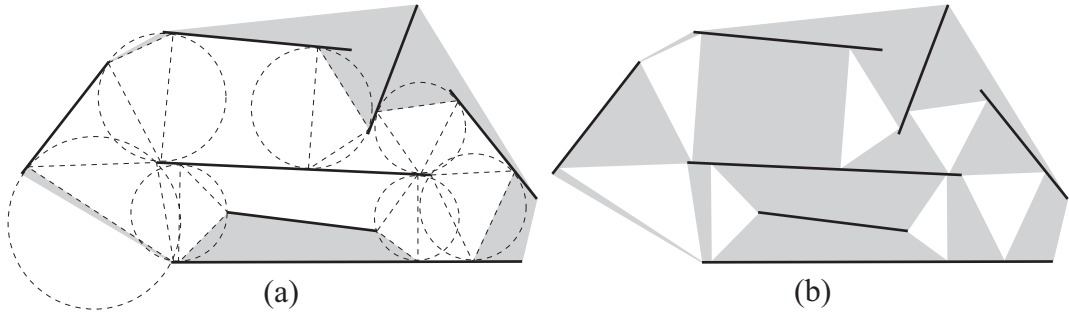


FIGURE 3.5 – La Figure (a) montre que chaque côté du trou qui n'est pas dans  $S_c$  est inscriptible dans un cercle vide relativement à  $S_c \cup \{s\}$  et tangent à  $s$  : il s'agit du cercle circonscrit à une face de Delaunay de  $\mathcal{T}_D(S_c \cup \{s\})$ . La Figure (b) représente  $\mathcal{T}_D(S_c \cup \{s\})$ .

en partant de  $a_0$ .  $a_1$  est la première arête partiellement remise en cause par  $s$  rencontrée après  $a_0$ . En effet, toutes les arêtes incidentes à  $t$  qui sont parcourues entre  $a_0$  et  $a_1$  sont nécessairement des arêtes entièrement remises en cause par  $s$ .

Par exemple, dans la Figure 3.4(a), les arêtes 2 et 1 contiennent deux éléments de  $\mathcal{T}_D(S_c)$  qui sont consécutifs sur le bord du trou (voir Figure 3.4(b)). Pour passer de l'arête 2 à l'arête 1 comme décrit précédemment, il faut parcourir l'arête 8 qui est entièrement remise en cause.

De plus, comme le bord du trou est connexe, cette méthode permet de parcourir toutes les arêtes partiellement remises en cause par  $s$  et, en même temps, de construire toutes les nouvelles faces et arêtes de  $\mathcal{T}_D(S_c \cup \{s\})$ .

Pour l'instant, pour simplifier le problème, nous avons décrit l'insertion d'un nouveau site  $s$  dans la triangulation courante  $\mathcal{T}_D(S_c)$  en faisant l'hypothèse que  $s$  est à l'intérieur de  $\text{conv}(S_c)$ . Cependant, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée et on peut être amené à insérer un site  $s$  dont au moins un point est à l'extérieur de  $\text{conv}(S_c)$ .

Dans ce cas, le trou obtenu en enlevant les éléments de  $\mathcal{T}_D(S_c)$  qui ne peuvent pas exister dans  $\mathcal{T}_D(S_c \cup \{s\})$  forme une « cavité creusée » dans  $\mathcal{T}_D(S_c)$  (voir Figure 3.6). De plus, les arêtes de  $\mathcal{T}_D(S_c)$  qui ont un élément sur  $\partial(\text{conv}(S_c))$  visible d'au moins un point de  $s$  sont elles aussi dites partiellement remises en cause par  $s$  car ces arêtes ne seront plus adjacentes à la face externe après l'insertion de  $s$ . Le bord de la cavité obtenue est toujours connexe et se compose de segments inclus dans les sites de  $S_c$  et d'éléments de  $\mathcal{T}_D(S_c)$  inclus dans des arêtes partiellement remises en cause. Comme précédemment, chaque élément de  $\mathcal{T}_D(S_c)$  qui est sur le bord de la cavité engendre une nouvelle face  $\mathcal{T}_D(S_c \cup \{s\})$  (voir Figure 3.7). Si on

connaît au moins une arête partiellement remise en cause par  $s$ , on peut utiliser la même méthode que précédemment pour parcourir le bord de la cavité dans les deux sens et construire toutes les nouvelles faces et arêtes de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ .

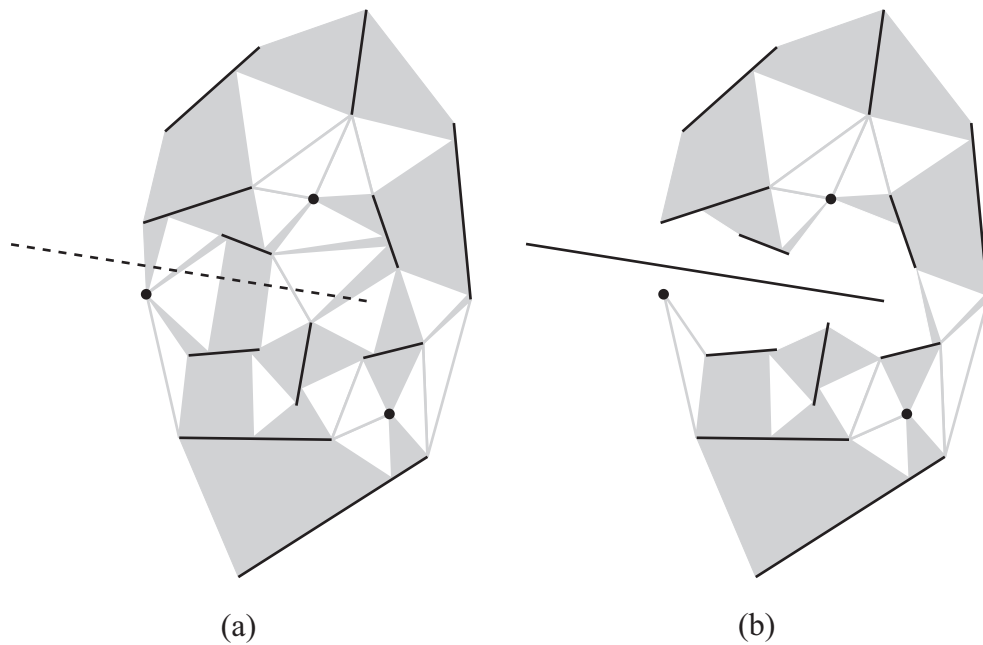


FIGURE 3.6 – La Figure (a) représente la triangulation de Delaunay courante  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  et le prochain site  $s$  à insérer est en pointillés. La Figure (b) montre la cavité obtenue après la suppression des éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  qui ne peuvent pas exister dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ .

On peut aussi remarquer que, si  $s$  n'a aucun point à l'intérieur de  $\text{conv}(S_c)$ , il se peut qu'aucun élément de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  ne soit supprimé et les seuls éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  qui sont sur le bord de la « cavité » sont des éléments qui sont sur  $\partial(\text{conv}(S_c))$  et qui sont visibles d'au moins un point de  $s$  (voir Figure 3.8). La méthode de construction de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$  reste inchangée.

Enfin, lorsque  $s$  n'a aucun point à l'intérieur de  $\text{conv}(s_c)$ , il peut aussi arriver qu'aucun des éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  qui sont sur  $\partial(\text{conv}(S_c))$  ne soit visible de  $s$  (voir Figure 3.9). Dans ce cas, il suffit d'ajouter une arête qui connecte  $s$  et l'unique site de  $S_c$  visible de  $s$ .

### 3.3.2 Complexité de l'algorithme

Après l'insertion d'un site  $s$  et la localisation d'une arête partiellement remise en cause par  $s$ , la méthode décrite ci-dessus permet de mettre à jour la triangulation courante en temps proportionnel au nombre de faces et d'arêtes

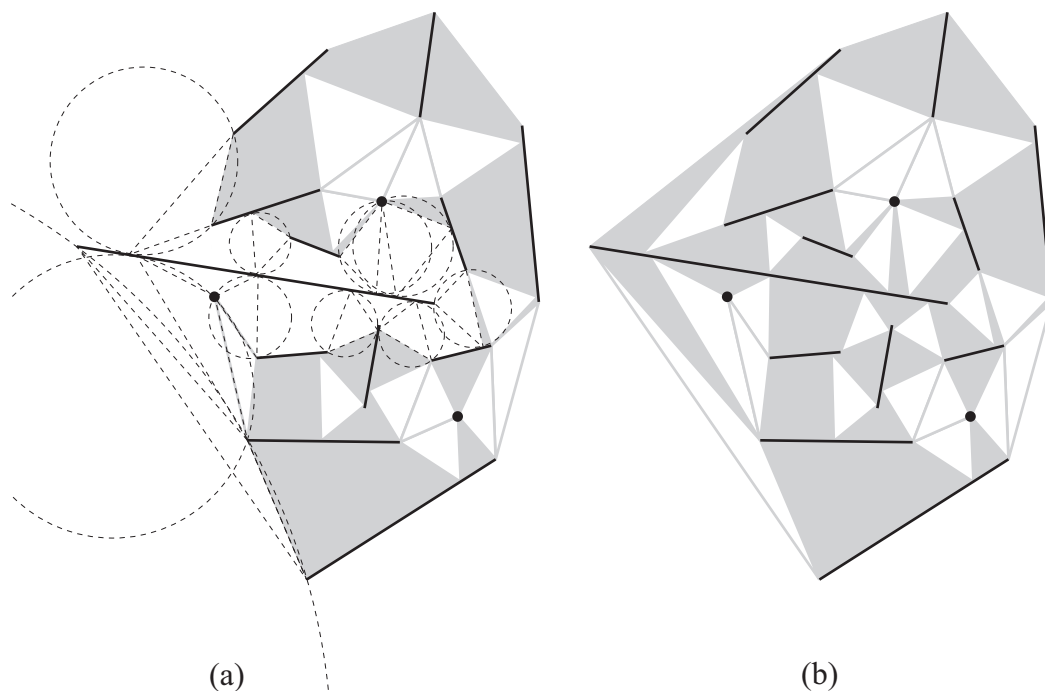


FIGURE 3.7 – La Figure (a) montre que chaque côté de la cavité qui n'est pas dans  $S_c$  est inscriptible dans un cercle vide relativement à  $S_c \cup \{s\}$  et tangent à  $s$  : il s'agit du cercle circonscrit à une face de Delaunay de  $\mathcal{T}_D(S_c \cup \{s\})$ . La Figure (b) représente  $\mathcal{T}_D(S_c \cup \{s\})$ .

détruites et construites. On peut en effet tester en temps constant si une arête est remise en cause : il suffit de vérifier si  $s$  rencontre l'arête elle-même ou au moins un des disques ouverts circonscrits à ses faces adjacentes. La complexité de l'algorithme est donc déterminée par le nombre total d'arêtes créées et par les temps de localisation d'arêtes partiellement remises en cause. Si on suppose que l'ordre d'apparition des sites est aléatoire, les mêmes techniques de randomisation que celles mises en œuvre par Boissonnat et al. [15] pour la construction du diagramme de Voronoï de segments nous permettent, d'une part, de calculer le nombre moyen d'arêtes construites par notre algorithme et, d'autre part, d'implémenter efficacement la localisation d'arêtes partiellement remises en cause. Dans le cadre de la construction du diagramme de Voronoï de segments, Boissonnat et al. ont reformulé le problème en termes d'objets, de régions et de conflits. L'algorithme prend en entrée un ensemble d'objets qui sont les données du problème, c'est-à-dire un ensemble  $S$  de sites. Pour tout sous-ensemble  $S_c$  de  $S$ , les régions sont les arêtes du diagramme de Voronoï de segments de  $S_c$ . On appelle domaine d'influence  $\mathcal{D}_e$  d'une région  $e$  la réunion des disques maximaux d'intérieurs vides centrés sur  $e$  et on dit qu'un site  $s$  de  $S \setminus S_c$  est en conflit avec  $e$  si  $s$



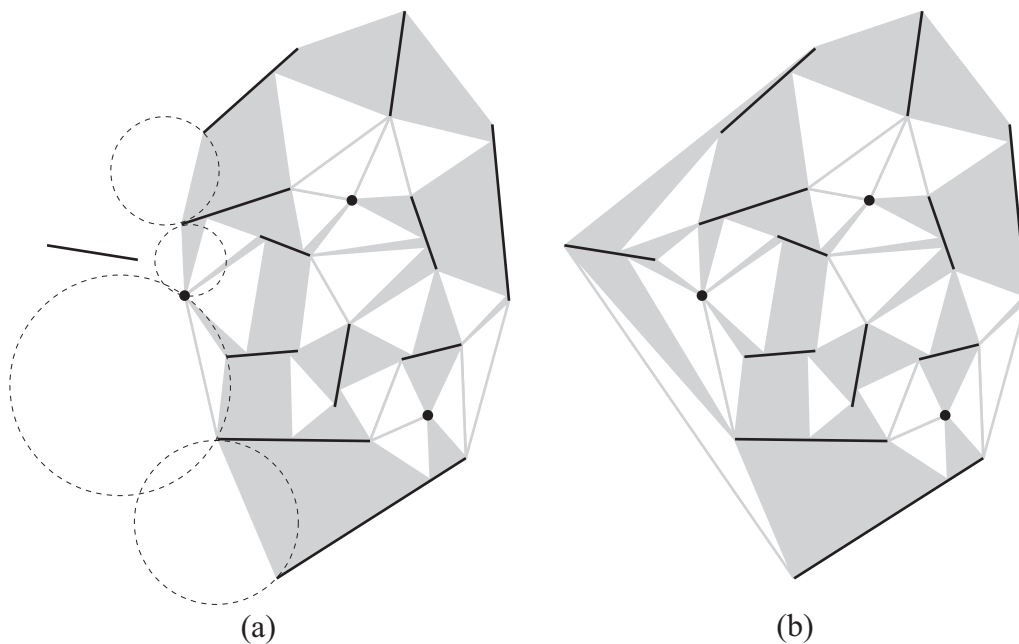


FIGURE 3.8 – La Figure (a) représente la triangulation de Delaunay courante  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  et le prochain site  $s$  à insérer est à l’extérieur de  $\text{conv}(S_c)$ . Les cercles en pointillés montre que chaque élément de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  qui est sur  $\partial(\text{conv}(S_c))$  et qui est visible de  $s$  est inscriptible dans un cercle vide relativement à  $S_c \cup \{s\}$ . La Figure (b) montre la triangulation  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ .

rencontre  $\mathcal{D}_e$ . Afin de pouvoir détecter efficacement les conflits existant entre le nouvel objet à insérer et les régions courantes, l’algorithme maintient une structure de données spécifique appelée graphe d’influence. Ce graphe représente en quelque sorte l’histoire de la construction incrémentale et dépend donc de la suite chronologique des objets traités. Les résultats obtenus sur la complexité d’un algorithme incrémental randomisé qui utilise un graphe d’influence ne sont valables que si l’algorithme en question satisfait plusieurs contraintes quant à la mise à jour du graphe d’influence. Boissonnat et al. ont montré que leur algorithme satisfait toutes ces contraintes et cela leur permet d’en déduire que, appliqué à un ensemble  $S$  de  $n$  sites, leur algorithme incrémental construit en moyenne  $O(n)$  régions en tout et est capable de localiser les régions en conflit avec un site inséré en temps moyen  $O(\log n)$ . Le diagramme de Voronoï de segments de  $S$  est donc construit en temps moyen  $O(n \log n)$ .

Par dualité, l’algorithme que nous avons présenté ici est identique à celui de Boissonnat et al. En effet, dans notre contexte, les objets traités par l’algorithme sont les sites de  $S$ , une région est une arête de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$ , le domaine d’influence  $\mathcal{D}_e$  de toute région  $e$  est la réunion des disques d’intérieurs vides circonscrits aux

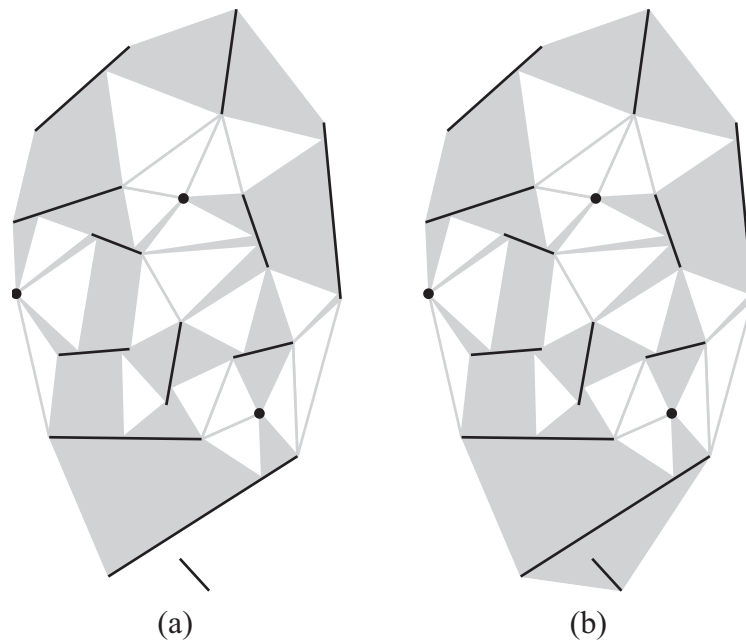


FIGURE 3.9 – La Figure (a) représente la triangulation de Delaunay courante  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c)$  et le prochain site  $s$  à insérer qui est à l'extérieur de  $\text{conv}(S_c)$ . La Figure (b) montre la triangulation  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(S_c \cup \{s\})$ .

éléments de  $e$  et un site  $s$  de  $S \setminus S_c$  est en conflit avec  $e$  si  $s$  rencontre  $\mathcal{D}_e$ . On peut remarquer que les régions en conflits avec  $s$  correspondent aux arêtes remises en cause par  $s$  que nous avons définies dans la description de notre algorithme. On en déduit que les résultats obtenus par Boissonnat et al. s'appliquent directement à l'algorithme incrémental de construction de la triangulation de Delaunay de segments de  $S$ . Cet algorithme construit donc en moyenne  $O(n)$  arêtes en tout et localise une arête partiellement remise en cause par un site  $s$  en temps moyen  $O(\log n)$ . Il en résulte que :

**Théorème 3.2** *La triangulation de Delaunay d'un ensemble de  $n$  segments du plan peut être calculée en temps moyen  $O(n \log n)$  par un algorithme incrémental randomisé.*



# Chapitre 4

## Légalité des arêtes

*Dans ce chapitre, nous généralisons la légalité d'une arête aux triangulations de segments.*

*Nous commençons par définir la notion de légalité géométrique et nous montrons ensuite que, pour un ensemble  $S$  de sites donnés, la triangulation de Delaunay de segments de  $S$  est la seule triangulation de segments de  $S$  sans arête géométriquement illégale. Ce premier résultat est une extension directe de la propriété qui caractérise la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points.*

*Nous définissons ensuite le concept de légalité topologique d'une arête d'une triangulation de segments. Le résultat énoncé précédemment avec la légalité géométrique ne tient plus si on considère la légalité topologique des arêtes. Cependant, nous montrons que, si toutes les arêtes d'une triangulation de segments donnée sont topologiquement légales, alors cette triangulation a la même topologie que celle de Delaunay. Ce résultat permet de vérifier en temps linéaire avec le nombre d'arêtes si une triangulation de segments donnée a la même topologie que celle de Delaunay. Nous utilisons directement ce résultat dans l'algorithme de flip que nous présentons dans le Chapitre 5.*

## 4.1 Légalité géométrique d'une arête

Dans cette section, nous étendons la définition de la légalité aux arêtes d'une triangulation de segments. Nous montrons ensuite comment caractériser la triangulation de Delaunay de segments à l'aide de cette notion.

**Définition 4.1** Soit  $e$  une arête d'une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $S$ .

1. Si  $e$  n'est adjacente à aucune face de  $\mathcal{T}$ , alors  $e$  est géométriquement légale.
2. Sinon, soit  $S'$  l'ensemble des sites qui contiennent les sommets des (au plus deux) faces de  $\mathcal{T}$  adjacentes à  $e$ . L'arête  $e$  est géométriquement légale si l'intérieur des cercles circonscrits à ces faces ne coupe pas  $S'$ .

Cette définition est une extension directe de la légalité d'une arête dans une triangulation d'un ensemble de points. On note tout de même que le cercle circonscrit à une face peut ne pas être vide relativement aux sites qui contiennent les sommets de cette face (voir Figure 4.1).

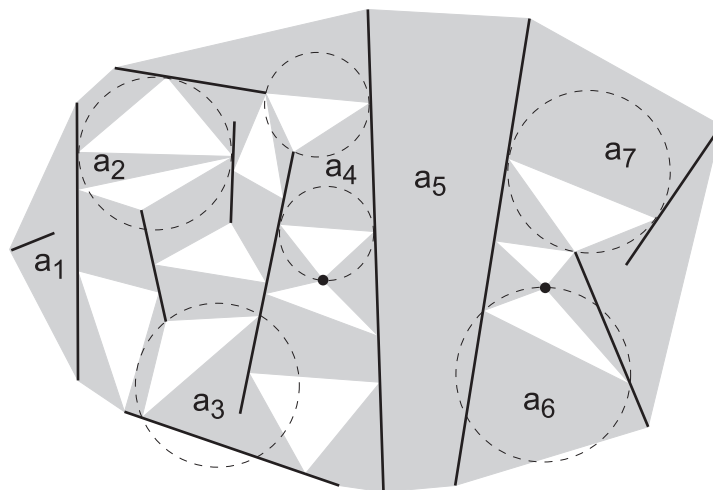


FIGURE 4.1 – Les arêtes  $a_1$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  et  $a_7$  sont géométriquement légales et les arêtes  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_6$  sont géométriquement illégales.

Le théorème suivant généralise directement le résultat du Théorème 1.2 au cas des triangulations de segments.

**Théorème 4.1** La triangulation de Delaunay de  $S$  est l'unique triangulation de segments de  $S$  dont toutes les arêtes sont géométriquement légales.

*Preuve.* Par définition, la triangulation de Delaunay de segments de  $S$  n'a aucune arête géométriquement illégale. Montrons maintenant que toute autre triangulation de segments de  $S$  a au moins une arête géométriquement illégale.

Soit  $\mathcal{T}(S)$  une triangulation de segments de  $S$  qui n'est pas de Delaunay et montrons que  $\mathcal{T}(S)$  contient une arête géométriquement illégale. Comme  $\mathcal{T}(S)$  n'est pas de Delaunay, elle admet au moins une face  $f$  telle que le disque ouvert  $\mathcal{D}_f$  circonscrit à  $f$  coupe  $\mathbf{S}$ .

Soient  $x$  un point de  $f$  et  $p$  un point de  $\mathcal{D}_f$  qui appartient à  $\mathbf{S}$ . On peut toujours choisir  $p$  de telle sorte que le segment ouvert  $]x, p[$  ne coupe pas  $\mathbf{S}$ .

Comme  $p$  ne peut pas être un sommet de  $f$  puisqu'il appartient à  $\mathcal{D}_f$ ,  $]x, p[$  coupe une arête de  $\mathcal{T}(S)$  adjacente à  $f$ . Si  $]x, p[$  ne coupe aucune autre arête de  $\mathcal{T}(S)$ , ou bien  $p$  appartient à l'un des sites qui coupent la fermeture de  $e$ , ou bien  $p$  est un sommet de l'autre face de  $\mathcal{T}(S)$  adjacente à  $e$ . Dans tous les cas, l'arête  $e$  est géométriquement illégale (voir Figure 4.2).

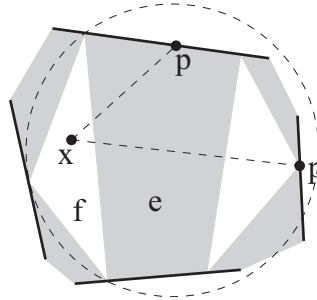


FIGURE 4.2 – Dans les deux cas, l'arête  $e$  est géométriquement illégale.

On peut maintenant faire l'hypothèse de récurrence suivante : si  $]x, p[$  coupe  $k$  arêtes, avec  $k \geq 1$ , alors au moins l'une d'entre elles est géométriquement illégale. Il reste à prouver que si  $]x, p[$  coupe  $k + 1$  arêtes alors  $\mathcal{T}(S)$  contient une arête géométriquement illégale.

Supposons donc que  $]x, p[$  coupe  $k + 1$  arêtes, avec  $k + 1 \geq 2$ . Dans ce cas,  $]x, p[$  traverse  $e$  et coupe aussi l'autre face  $g$  adjacente à  $e$ . Soient  $\mathcal{D}_g$  le disque ouvert circonscrit à  $g$  et  $[a, b]$  le côté de  $\partial(g)$  qui est inclus dans  $e$  (voir Figure 4.3).

Si  $e$  est illégale, le résultat est trivial. Si  $e$  est légale,  $\mathcal{D}_f$  est tangent aux sites qui contiennent les sommets de  $f$ . Or, deux de ces sites contiennent  $a$  et  $b$ . Donc les points  $a$  et  $b$  ne peuvent pas être dans  $\mathcal{D}_f$ . Comme  $]x, p[$  est inclus dans  $\mathcal{D}_f$  et traverse  $e$ ,  $y = [a, b] \cap ]x, p[$  est un point inclus dans  $\mathcal{D}_f$ . On en déduit que  $[a, b]$  scinde  $\mathcal{D}_f$  en deux parties dont l'une contient  $f$  et l'autre contient  $p$ . Soit  $\mathcal{D}_1$  la partie de  $\mathcal{D}_f$  qui contient  $f$  et soit  $\mathcal{D}_2$  la partie de  $\mathcal{D}_f$  qui contient  $p$ . Comme

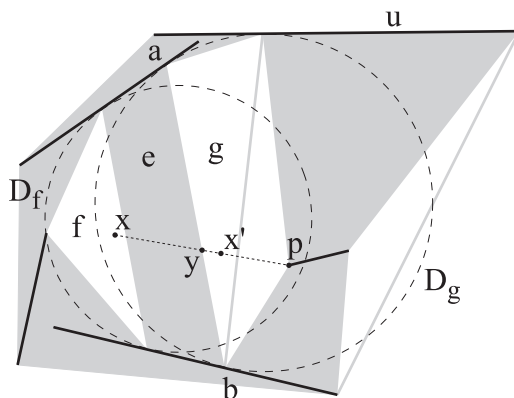


FIGURE 4.3 – Illustration de la preuve du Théorème 4.1 dans le cas où  $k = 2$ .

le cercle circonscrit à  $g$  passe par  $a$  et  $b$ , le disque  $\mathcal{D}_g$  contient au moins  $\mathcal{D}_1$  ou  $\mathcal{D}_2$  (les deux cercles qui bornent  $\mathcal{D}_f$  et  $\mathcal{D}_g$  ne peuvent pas se couper en quatre points). Si  $\mathcal{D}_g$  contient  $\mathcal{D}_1$ , alors il contient aussi  $f$ . Or, comme  $e$  est légale,  $\mathcal{D}_g$  est tangent aux trois sites qui contiennent les sommets de  $g$  et dans ce cas, comme  $S$  n'admet pas quatre sites cocycliques,  $\mathcal{D}_g$  ne peut pas être tangent aux trois sites qui contiennent les sommets de  $f$ . Si  $\mathcal{D}_g$  contient  $f$ , il coupe donc l'un de ces sites. Ceci est impossible puisque  $e$  est légale. Il en résulte que  $\mathcal{D}_g$  contient  $\mathcal{D}_2$  et contient donc aussi  $p$ . En outre, pour tout point  $x'$  de  $[y, p] \cap g$ , le segment  $]x', p[$  coupe exactement  $k$  arêtes. D'après l'hypothèse de récurrence, on en conclut que  $\mathcal{T}(S)$  contient une arête illégale.  $\square$

D'après ce théorème, pour savoir si une triangulation de segments donnée est de Delaunay, il suffit de s'assurer que toutes ses arêtes sont légales. D'après le Théorème 2.2, le nombre d'arêtes d'une triangulation de segments est en  $O(n)$  où  $n$  est le nombre de sites. De plus, le test de légalité d'une arête peut être effectué en temps constant puisqu'il suffit de tester l'intersection entre au plus deux cercles et au plus quatre segments. Cela signifie qu'on peut vérifier en temps linéaire en le nombre de sites si une triangulation de segments donnée est de Delaunay.

Il convient de remarquer qu'un algorithme de construction d'une triangulation de Delaunay de segments pourrait commettre des erreurs de calculs et calculer la triangulation de Delaunay de segments à  $\epsilon$  près, dans ce sens que les sommets des faces calculées sont à une distance  $\epsilon > 0$  des sommets des faces de la triangulation de Delaunay. Il est évident que la notion de légalité que nous avons définie pour l'instant n'est pas suffisante pour vérifier si une telle triangulation est de Delaunay.

En outre, la triangulation de Delaunay de segments peut être facilement calculée lorsque sa topologie est connue. En effet, il suffit alors de placer chaque face de la carte combinatoire associée de telle sorte que le cercle circonscrit à la face soit tangent aux sites sur lesquels la face s'appuie. Il en résulte qu'un algorithme qui construit la triangulation de Delaunay n'a besoin de construire que sa topologie. Il serait donc intéressant de pouvoir décider si une triangulation donnée a la même topologie que la triangulation de Delaunay.

## 4.2 Légalité topologique d'une arête

*Dans cette section, nous commençons par définir la légalité topologique d'une arête dans une triangulation de segments. Puis nous donnons quelques résultats préliminaires qui nous permettent ensuite de caractériser la triangulation de Delaunay de segments à l'aide de cette définition.*

### 4.2.1 Définitions

La notion de légalité topologique d'une arête que nous introduisons ici n'utilise pas les caractéristiques géométriques des faces adjacentes à l'arête considérée : c'est là qu'intervient la notion de triangle de tangence.

**Définition 4.2** *Soit  $f$  une face d'une triangulation de segments de  $S$ . Le triangle de tangence de  $f$  est un triangle ouvert tel que :*

- ses sommets sont sur les trois mêmes sites que les sommets de  $f$ ,
- son cercle circonscrit est tangent à ces trois sites,
- ces trois sites sont rencontrés dans le même ordre si  $f$  et son triangle de tangence sont parcourus dans le même sens.

**Lemme 4.1** *Toute face d'une triangulation de segments de  $S$  admet un triangle de tangence.*

*Preuve.* Considérons une face  $f$  d'une triangulation de segments de  $S$  dont les sommets sont sur les sites  $r$ ,  $s$  et  $t$ .  $f$  est alors aussi une face d'une triangulation de segments de  $\{r, s, t\}$ .

Soit  $n'$  le nombre de côtés de  $\text{conv}(\{r, s, t\})$  qui ne sont pas des sites. On distingue plusieurs cas selon la valeur de  $n'$ . Montrons que le résultat est vrai dans chacun de ces cas.

Si  $n' = 4$ , d'après le Théorème 2.2, le nombre de triangles d'une triangulation de segments de  $\{r, s, t\}$  est nul et  $f$  ne peut être une face d'une telle triangulation.



Si  $n' = 3$ , d'après le Théorème 2.2, toutes les triangulations de segments de  $\{r, s, t\}$  admettent exactement une face et trois arêtes. Chacune des arêtes contient donc un côté de la face et un côté de  $\text{conv}(\{r, s, t\})$ . L'ordre des sites sur la face est alors déterminé par l'ordre des sites sur  $\text{conv}(\{r, s, t\})$  et cet ordre est le même dans toutes les triangulations de  $\{r, s, t\}$ . De plus, d'après le Corollaire 3.1, la triangulation de Delaunay de  $\{r, s, t\}$  existe. Donc le triangle de tangence de  $f$  est la face de la triangulation de Delaunay de segments de  $\{r, s, t\}$ .

Si  $n' = 2$ , alors, d'après le Théorème 2.2, toutes les triangulations de segments de  $\{r, s, t\}$  admettent exactement deux faces et, d'après la Propriété 2.1, ces deux faces rencontrent les sites  $r, s, t$  dans deux ordres distincts. Comme, d'après le Corollaire 3.1, la triangulation de Delaunay de  $\{r, s, t\}$  existe, l'une de ses deux faces est le triangle de tangence de  $f$ .  $\square$

La notion de triangle de tangence nous permet de définir la légalité topologique d'une arête d'une triangulation de segments donnée :

**Définition 4.3** *Soit  $e$  une arête d'une triangulation de segments de  $S$ .  $e$  est topologiquement légale dans les deux cas suivants :*

1.  *$e$  est adjacente à au plus une face de la triangulation.*
2.  *$e$  est adjacente à deux faces  $T_1$  et  $T_2$  et la propriété suivante est vraie.*  
*Soient  $t, r, u, v$  les sites tels que  $t, r, u$  soient incidents à  $T_1$  et  $r, t, v$  soient incidents à  $T_2$  dans le sens trigonométrique. Soient  $t_1r_1u_1$  et  $r_2t_2v_2$  les triangles de tangence de  $T_1$  et  $T_2$  avec  $t_i \in t, r_i \in r, u_1 \in u$  et  $v_2 \in v$ .*  
*Alors :*
  - *le polygone  $t_1t_2r_2r_1$  est soit réduit à un segment, soit un polygone simple orienté dans le sens trigonométrique (avec trois ou quatre côtés),*
  - *les intérieurs des cercles circonscrits à  $t_1r_1u_1$  et  $r_2t_2v_2$  ne coupent pas les sites  $t, r, u, v$ .*

Le deuxième point de cette définition peut être formulé de manière plus intuitive : on peut dire que  $e$  est topologiquement légale s'il existe une triangulation de segments de  $\{r, t, u, v\}$  qui contient les faces  $T_1$  et  $T_2$  et qui a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments de  $\{r, t, u, v\}$ . Les Figures 4.4(a) et 4.4(b) montrent une triangulation de segments et les triangles de tangence correspondants dans le cas d'une arête topologiquement légale. A l'aide de cet exemple simple, on peut voir que cette définition formalise le fait que  $e$  est topologiquement légale s'il est possible de déplacer continuellement les sommets de  $T_1$  et  $T_2$  sur les sites pour transformer continuellement  $T_1$  et  $T_2$  en leurs triangles de tangence

respectifs, sans que ces triangles ne se coupent au cours de cette transformation (voir Figure 4.4(c)).

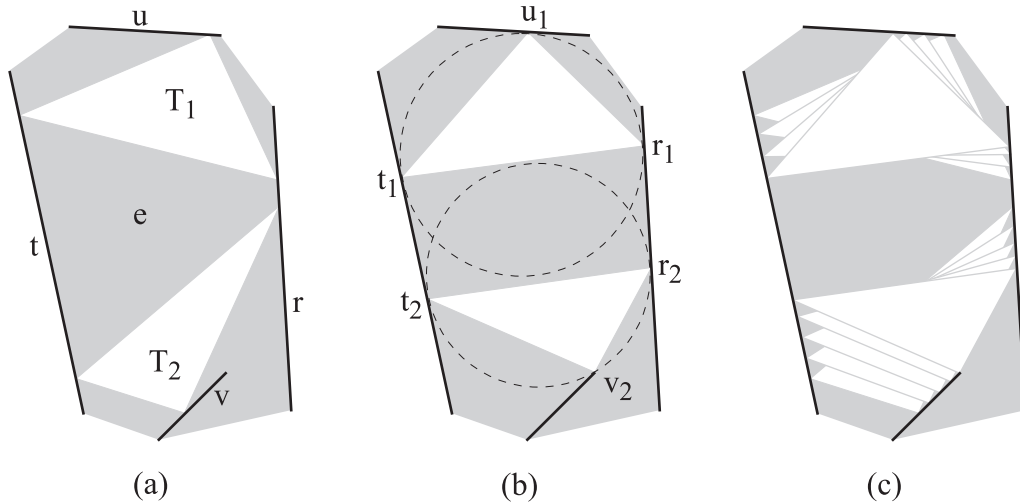


FIGURE 4.4 – Une triangulation de segments (a) où l'arête  $e$  est topologiquement légale car les triangles de tangence (b) sont tels que  $t_1t_2r_2r_1$  soit un polygone simple orienté dans le sens trigonométrique et leurs cercles circonscrits soient vides. Plus intuitivement, cela signifie qu'on peut déplacer  $T_1$  et  $T_2$  de manière continue et sans intersection (c) jusqu'à ce qu'ils soient dans la même position que leurs triangles de tangence.

La Figure 4.5 donne un exemple d'arête topologiquement illégale dans lequel à la fois le polygone  $t_1t_2r_2r_1$  n'est pas orienté dans le sens trigonométrique et les cercles circonscrits à  $t_1r_1u_1$  et  $r_2t_2v_2$  ne sont pas vides relativement à  $t$ ,  $r$ ,  $u$  et  $v$ . Cependant, il est intéressant de remarquer que ces deux conditions ne sont pas forcément fausses simultanément. D'une part, si les triangles de tangence sont tels que  $t_1 = t_2$  et  $r_1 = r_2$ , alors le polygone  $t_1t_2r_2r_1$  est réduit à un segment et seule la condition sur les cercles vides s'applique pour décider de la légalité topologique d'une telle arête (voir Figure 4.6). D'autre part, l'exemple de la Figure 4.7 montre qu'il est possible que le polygone  $t_1t_2r_2r_1$  ne soit pas correctement orienté alors que les cercles circonscrits à  $t_1r_1u_1$  et  $r_2t_2v_2$  sont vides.

### 4.2.2 Résultats préliminaires

Pour caractériser la triangulation de Delaunay de segments à l'aide de la notion de légalité topologique que nous venons de définir, nous utilisons un résultat de

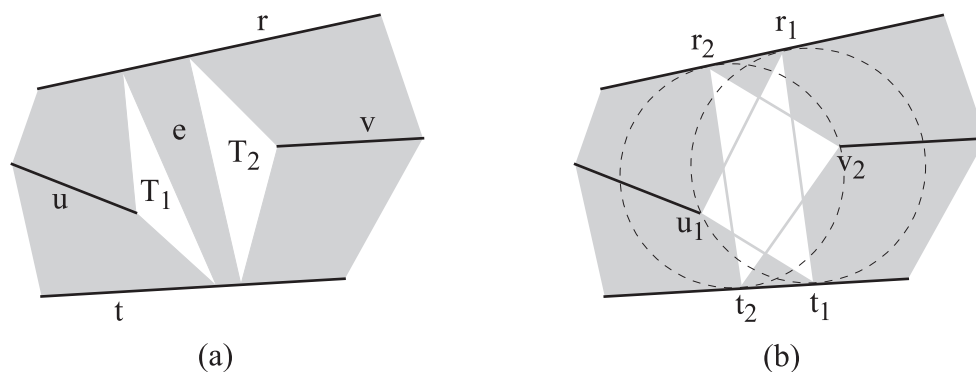


FIGURE 4.5 – Une triangulation de segments (a) où l'arête  $e$  est topologiquement illégale car les triangles de tangence (b) sont tels que  $t_1t_2r_2r_1$  ne soit pas correctement orienté et leurs cercles circonscrits ne soient pas vides.

Devillers et al. [32] qui permet de vérifier la planarité d'une représentation géométrique d'une carte combinatoire en testant la planarité de ses faces. Ce résultat a été énoncé dans le cas où les arêtes de la carte sont représentées géométriquement par des segments de droite. Il s'étend aisément au cas où les arêtes de la carte sont représentées géométriquement par des courbes simples.

**Lemme 4.2** *Soit un ensemble de courbes lisses et de lignes polygonales qui représentent une carte combinatoire  $C$  dans le plan. Cette représentation géométrique de  $C$  est planaire si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) *tous les circuits de  $C$  sont représentés par des courbes fermées simples,*
- (ii) *l'ordre des arêtes de  $C$  en chaque sommet  $s$  correspond à l'ordre géométrique des courbes issues du point qui représente  $s$  dans le plan.*

*Preuve.* Le résultat de Devillers et al. est formulé avec des segments au lieu de courbes lisses ou de lignes polygonales, mais avec un argument d'approximation on obtient le même résultat. En effet, chaque courbe lisse peut être approximée par une ligne polygonale. De plus, dans la carte correspondante, on peut donc ajouter les sommets des lignes polygonales et décomposer les arêtes en plusieurs sous-arêtes. Notons que le nombre de faces reste inchangé. Cette approximation permet donc de se ramener directement au résultat de Devillers et al.  $\square$

La preuve du Théorème 4.2 nécessitera de construire une carte planaire intermédiaire à partir d'une triangulation de segments donnée. Il est nécessaire de s'assurer de l'existence de ce graphe en démontrant le résultat suivant :

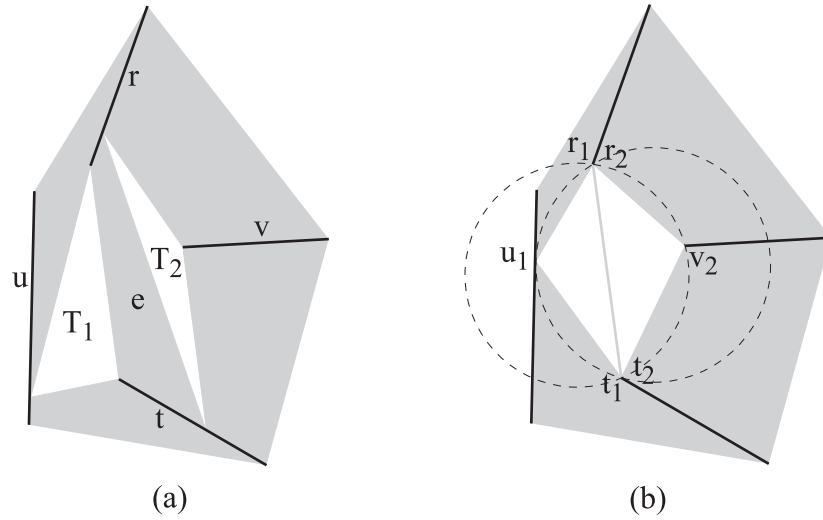


FIGURE 4.6 – Une triangulation de segments (a) où l'arête  $e$  est topologiquement illégale car les cercles circonscrits aux triangles de tangence ne sont pas vides (b).

**Lemme 4.3** Soit  $T = uvw$  un triangle qui s'appuie sur trois sites  $U$ ,  $V$  et  $W$  tel que  $u \in U$ ,  $v \in V$  et  $w \in W$ . Pour tout réel  $\epsilon > 0$  assez petit, il existe trois points  $p_{T,U}$ ,  $p_{T,V}$  et  $p_{T,W}$  et trois courbes simples  $\gamma_{T,U,V}$ ,  $\gamma_{T,V,W}$  et  $\gamma_{T,W,U}$  tels que :

1. La courbe  $\gamma_{T,U,V}$  joint  $p_{T,U}$  et  $p_{T,V}$ , la courbe  $\gamma_{T,V,W}$  joint  $p_{T,V}$  et  $p_{T,W}$  et la courbe  $\gamma_{T,W,U}$  joint  $p_{T,W}$  et  $p_{T,U}$ .
2. Les courbes (et les points) sont dans  $\text{relint}(T)$ .
3. Les courbes sont disjointes à leurs extrémités près.
4.  $p_{T,U}$ ,  $p_{T,V}$  et  $p_{T,W}$  sont à une distance  $\epsilon$  des sites respectifs  $U$ ,  $V$  et  $W$ .
5. Si on appelle  $\epsilon$ -voisinage d'un site, l'ensemble des points du plan qui sont à une distance inférieure ou égale à  $\epsilon$  de ce site, alors l'intérieur de ces trois courbes ne rencontre pas les  $\epsilon$ -voisinages de  $U$ ,  $V$  et  $W$ .
6. Tout point de  $\gamma_{T,U,V}$  (respectivement  $\gamma_{T,V,W}$  et  $\gamma_{T,W,U}$ ) est à une distance inférieure ou égale à  $\epsilon$  de  $[u, v]$  (respectivement  $[v, w]$  et  $[w, u]$ ).

*Preuve.* Soient  $\gamma_{U,\epsilon}$ ,  $\gamma_{V,\epsilon}$  et  $\gamma_{W,\epsilon}$  les courbes fermées simples qui bornent les  $\epsilon$ -voisinages respectifs de  $U$ ,  $V$  et  $W$ . Supposons qu'on choisisse  $\epsilon$  suffisamment petit pour que ces trois  $\epsilon$ -voisinages soient disjoints (voir Figure 4.8). Soit  $T' = u'v'w'$  le triangle formé par les parallèles à  $[u, v]$ ,  $[v, w]$  et  $[w, u]$  qui coupent  $T$  et qui sont à une distance  $\epsilon$  de  $[u, v]$ ,  $[v, w]$  et  $[w, u]$ . Tout point de  $T'$  est à distance au moins  $\epsilon$  de la frontière de  $T$ . Donc tout point de  $T'$  est à une distance supérieure à  $\epsilon$  de tout point à l'extérieur de  $T$ . Cela signifie que  $T'$  ne rencontre pas les  $\epsilon$ -voisinages de  $U$ ,  $V$  et  $W$ . De plus, les sommets de  $T'$  sont sur les bissectrices respectives des

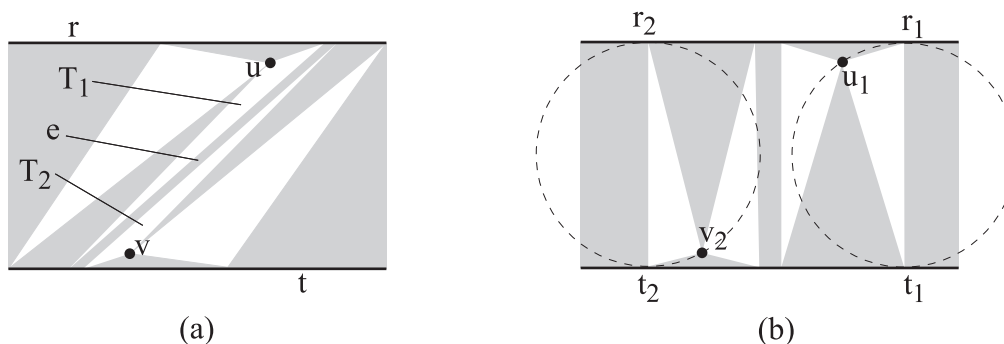


FIGURE 4.7 – Une triangulation de segments (a) où l'arête  $e$  est topologiquement illégale car les triangles de tangence (b) sont tels que  $t_1 t_2 r_2 r_1$  ne soit pas correctement orienté, bien que leurs cercles circonscrits soient vides.

angles de  $T$ . Soit  $p_{T,U}$  le point d'intersection de  $\gamma_{U,\epsilon}$  et de la bissectrice de l'angle en  $u$  de  $T$ . Le point  $p_{T,U}$  est nécessairement sur  $[u, u']$ , ce qui signifie que  $p_{T,U}$  est à une distance inférieure ou égale à  $\epsilon$  de  $[u, v]$  et de  $[u, w]$ . On détermine de la même manière les points  $p_{T,V}$  et  $p_{T,W}$ .

Si on choisit  $\epsilon$  suffisamment petit, alors il existe un point  $p_1 \in [u', v']$  et un point  $p_2 \in [p_1, v']$  tels que les intérieurs de  $p_{T,U}p_1$  et  $p_{T,V}p_2$  ne coupent pas  $T'$  ni les  $\epsilon$ -voisinages de  $U$ ,  $V$  et  $W$ . La courbe  $\gamma_{T,U,V}$  est la ligne polygonale formée par les points  $p_{T,U}$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_{T,V}$  dans cet ordre. On détermine de la même manière les courbes  $\gamma_{T,V,W}$  et  $\gamma_{T,W,U}$ . Par construction, ces courbes sont disjointes et tout point de ces courbes est à distance inférieure ou égale à  $\epsilon$  de la frontière de  $T$ .  $\square$

**Remarque 4.1** Il convient de remarquer que le triangle  $T'$  de la preuve précédente est contenu dans la région  $R_T$  du plan bornée par les courbes  $\gamma_{T,U,V}$ ,  $\gamma_{T,V,W}$  et  $\gamma_{T,W,U}$ . Si on fait tendre  $\epsilon$  vers 0,  $T'$  et  $R_T$  tendent donc vers  $T$ .

Le lemme qui suit permet de s'assurer de l'existence des graphes géométriques utilisés dans la deuxième partie de la preuve du Théorème 4.2.

**Lemme 4.4** *Si une arête est topologiquement légale, alors les triangles de tangence correspondant aux faces adjacentes à l'arête sont disjoints.*

*Preuve.* Ce résultat découle directement du point (i) de la preuve du Lemme 3.1.  $\square$

**Lemme 4.5** *Soient  $s_1, s_2, s_3$  trois segments disjoints et  $O$  un point de  $s_1$ . Soient  $a_i, a'_i \in s_i$  avec  $i = 1, 2, 3$ . Considérons les triangles  $T = \text{conv}(\{a_1, a_2, a_3\})$  et  $T' = \text{conv}(\{a'_1, a'_2, a'_3\})$  orientés par l'ordre des indices.*

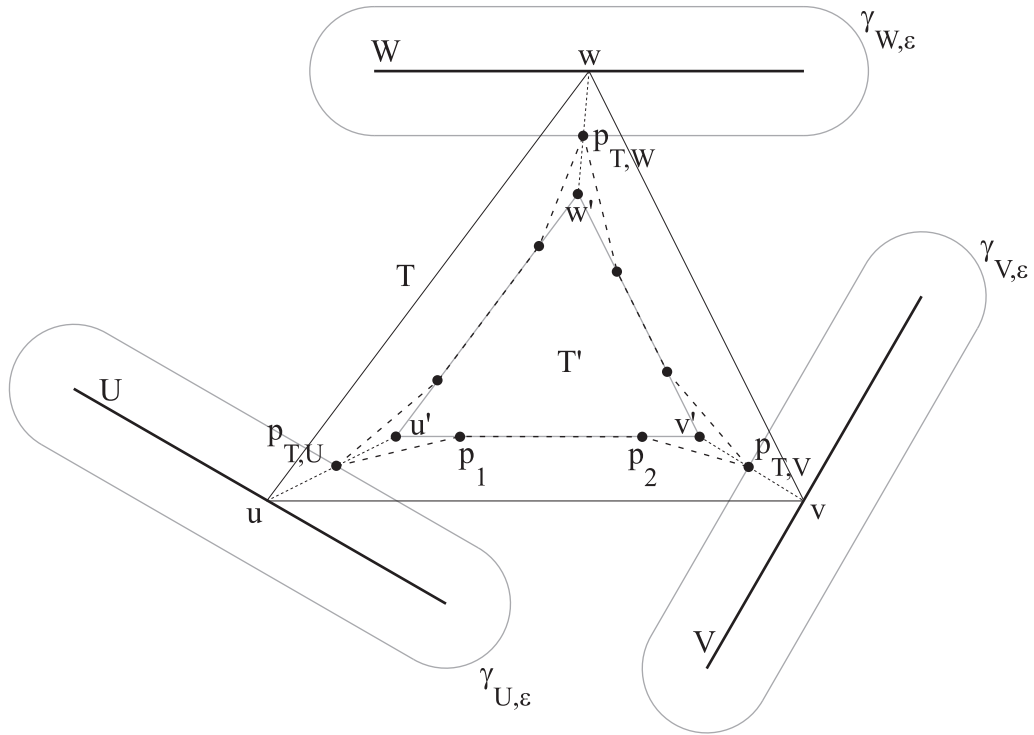


FIGURE 4.8 – Illustration de la preuve du Lemme 4.3.

Si  $T \cap s_i = \{a_i\}$  et  $T' \cap s_i = \{a'_i\}$ , avec  $i = 1, 2$ , ou  $3$  et si  $T$  et  $T'$  ont la même orientation, alors la courbe formée par les segments  $[a_2, a_3]$ ,  $[a_3, a'_3]$ ,  $[a'_3, a'_2]$  et  $[a'_2, a_2]$  n'enferme pas le point  $O$ .

*Preuve.* Notons  $\gamma$  la courbe formée par les segments  $[a_2, a_3]$ ,  $[a_3, a'_3]$ ,  $[a'_3, a'_2]$  et  $[a'_2, a_2]$ . Supposons que  $\gamma$  enferme le point  $O$  et montrons que cela mène à une contradiction. On peut distinguer les quatre cas illustrés dans la Figure 4.9. Si on considère le cas de la Figure 4.9(a), comme  $O \in s_1$  et comme  $T \cap s_1 = \{a_1\}$  et  $T' \cap s_1 = \{a'_1\}$ , on en déduit que  $s_1$  est aussi enfermé par la courbe  $\gamma$ . Cela signifie que  $a'_1$  est nécessairement à gauche de  $\overrightarrow{a'_3 a_2}$  et que  $a_1$  est nécessairement à gauche de  $\overrightarrow{a_2 a_3}$ . Il en résulte que  $T$  et  $T'$  n'ont pas la même orientation, ce qui contredit les hypothèses.

On peut utiliser le même raisonnement pour prouver le résultat dans tous les autres cas illustrés dans la Figure 4.9.  $\square$

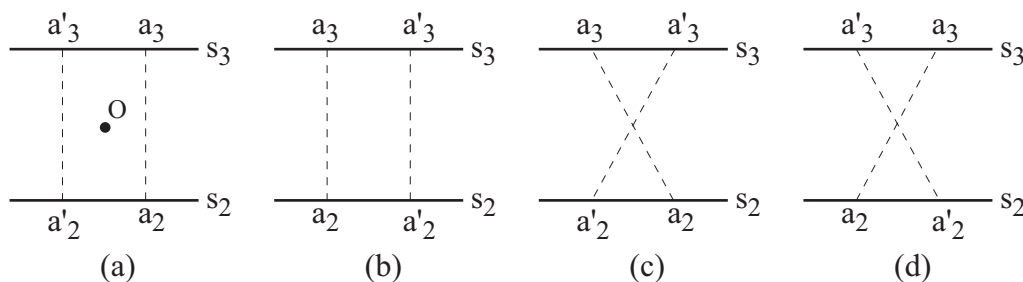


FIGURE 4.9 – Illustration de la preuve du Lemme 4.5.

### 4.2.3 Caractérisation de la triangulation de Delaunay de segments

**Théorème 4.2** *Une triangulation de segments de  $S$  dont toutes les arêtes sont topologiquement légales a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments de  $S$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{T}(S)$  une triangulation de segments de  $S$ . Si toutes les arêtes de  $\mathcal{T}(S)$  sont topologiquement légales et si les triangles de tangence des faces de  $\mathcal{T}(S)$  sont les faces d'une triangulation de segments de  $S$ , alors les arêtes de cette triangulation sont géométriquement légales. D'après le Théorème 4.1, cette dernière est la triangulation de Delaunay de segments de  $S$ . Comme les relations d'adjacence sont les mêmes dans ces deux triangulations, elles ont la même topologie. Par conséquent, il suffit de montrer que les triangles de tangence sont deux à deux disjoints et ne rencontrent aucun site de  $S$ .

Dans la suite, nous définissons un graphe géométrique planaire  $\Gamma$  à partir de  $\mathcal{T}(S)$  et nous appelons  $C$  la carte dont  $\Gamma$  est une représentation géométrique dans le plan (Étape 1). Ensuite, nous définissons une autre représentation géométrique  $\Gamma'$  de  $C$  à l'aide des triangles de tangence de  $\mathcal{T}(S)$  (Étape 2). Enfin, nous montrons que  $\Gamma'$  satisfait les conditions nécessaires pour appliquer le Lemme 4.2 et conclure que les triangles de tangence sont deux à deux disjoints et ne rencontrent aucun site de  $S$  (Étape 3).

**Étape 1.** On commence par construire un graphe géométrique  $\Gamma$  à partir de la triangulation  $\mathcal{T}(S)$ .

Soit  $\epsilon$  un réel strictement positif. Pour chaque site  $s \in S$ , soit  $\gamma_{s,\epsilon}$  la courbe fermée simple formée par l'ensemble des points à distance  $\epsilon$  de  $s$ . La courbe  $\gamma_{s,\epsilon}$  est orientée dans le sens trigonométrique. On choisit  $\epsilon$  assez petit pour que les courbes  $\gamma_{s,\epsilon}$  soient disjointes.

Soit  $T$  un triangle de  $\mathcal{T}(S)$  incident à trois sites  $s, t$  et  $u$  dans le sens trigonométrique. Soient  $p_{T,s}, p_{T,t}$  et  $p_{T,u}$  trois points à l'intérieur de  $T$  tels que  $p_{T,s} \in \gamma_{s,\varepsilon}$ ,  $p_{T,t} \in \gamma_{t,\varepsilon}$ , et  $p_{T,u} \in \gamma_{u,\varepsilon}$ . Maintenant, d'après le Lemme 4.3, on peut choisir et joindre les points  $p_{T,s}, p_{T,t}, p_{T,u}$  par trois courbes disjointes  $\gamma_{T,s,t}, \gamma_{T,t,u}$  et  $\gamma_{T,u,s}$  qui sont à l'intérieur de  $T$  et à une distance inférieure à  $\varepsilon$  de la frontière de  $T$  et qui ne coupent  $\gamma_{s,\varepsilon}, \gamma_{t,\varepsilon}$  et  $\gamma_{u,\varepsilon}$  qu'en leurs extrémités. On fait ensuite de même en considérant la face externe de  $\mathcal{T}(S)$ , c'est-à-dire  $\mathbf{R}^2 \setminus \text{conv}(\mathbf{S})$ . Dans la suite,  $\gamma_{T,s,t}$  désigne la courbe qui joint  $p_{T,s}$  à  $p_{T,t}$  et  $\gamma_{T,t,s}$  désigne la courbe qui joint  $p_{T,t}$  à  $p_{T,s}$ , c'est-à-dire qu'il s'agit de la même courbe géométrique, mais avec une orientation différente.

Soient  $s$  un site et  $T_0, \dots, T_{k-1}$  les faces de  $\mathcal{T}(S)$  incidentes à  $s$  dans le sens trigonométrique autour de  $s$  (la face externe peut être l'une de ces faces). La courbe  $\gamma_{s,\varepsilon}$  est divisée en  $k$  courbes simples disjointes  $\gamma_{s,T_i,T_{i+1}}$  qui joignent les points  $p_{T_i,s}$  aux points  $p_{T_{i+1},s}$  ( $i = i \bmod k$ ). Tout comme précédemment,  $\gamma_{s,T_{i+1},T_i}$  et  $\gamma_{s,T_i,T_{i+1}}$  correspondent à la même courbe géométrique, mais avec une orientation différente.

Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, le graphe géométrique  $\Gamma$  est planaire (voir Figure 4.10) et il définit une carte combinatoire, que l'on nomme  $C$ .

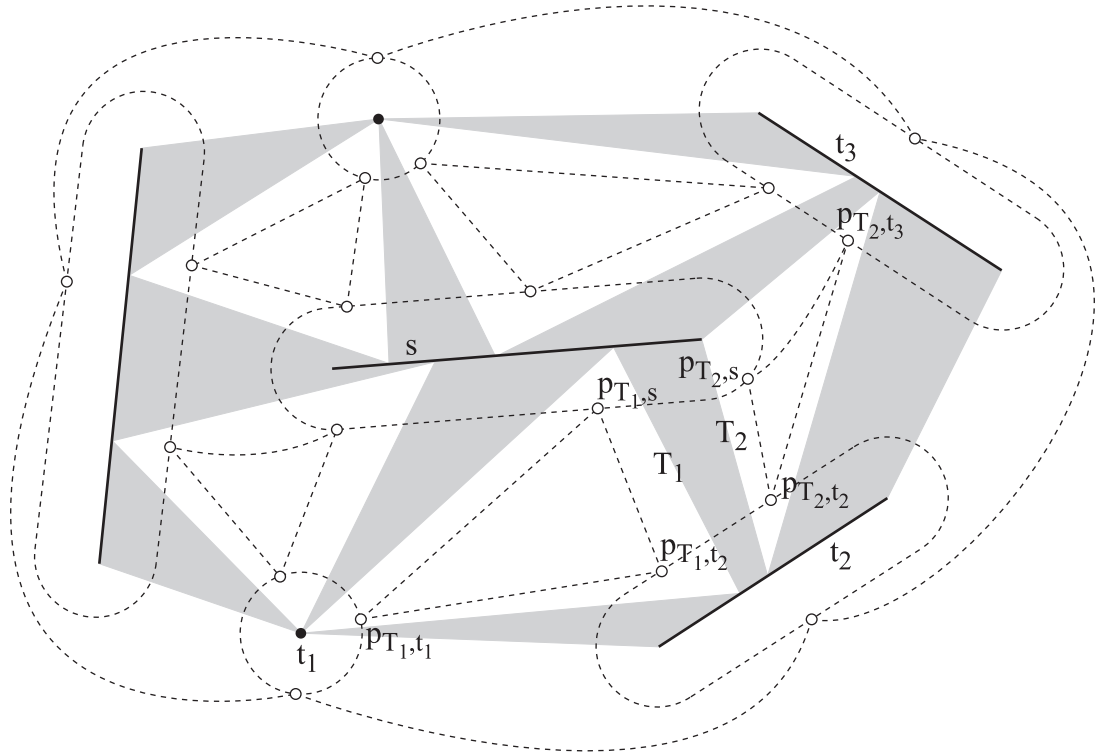


FIGURE 4.10 – Illustration de l'Étape 1 de la preuve du Théorème 4.2.



**Étape 2.** Dans un deuxième temps, nous construisons une autre représentation géométrique  $\Gamma'$  de la carte  $C$ . On procède comme à l'Étape 1 en considérant les triangles de tangence de  $\mathcal{T}(S)$  au lieu de ses faces. Pour chaque triangle  $T$  de  $\mathcal{T}(S)$ , on note  $T'$  le triangle de tangence correspondant.

Dans chaque triangle de tangence  $T'$ , on choisit trois points  $p'_{T,s}$ ,  $p'_{T,t}$  et  $p'_{T,u}$  qui sont respectivement sur les courbes  $\gamma_{s,\varepsilon}$ ,  $\gamma_{t,\varepsilon}$  et  $\gamma_{u,\varepsilon}$ . D'après le Lemme 4.4, deux triangles de tangence  $T'_1$  et  $T'_2$ , consécutivement incidents au même site  $s$ , sont nécessairement disjoints (voir Figure 4.11). Ensuite, comme à l'Étape 1, on joint ces points à l'aide de trois courbes simples disjointes  $\gamma'_{T,s,t}$ ,  $\gamma'_{T,t,u}$  et  $\gamma'_{T,u,s}$  qui sont à l'intérieur de  $T'$  et à une distance inférieure à  $\varepsilon$  de la frontière de  $T'$ . Par rapport à l'Étape 1, seule la définition des courbes autour des sites change.

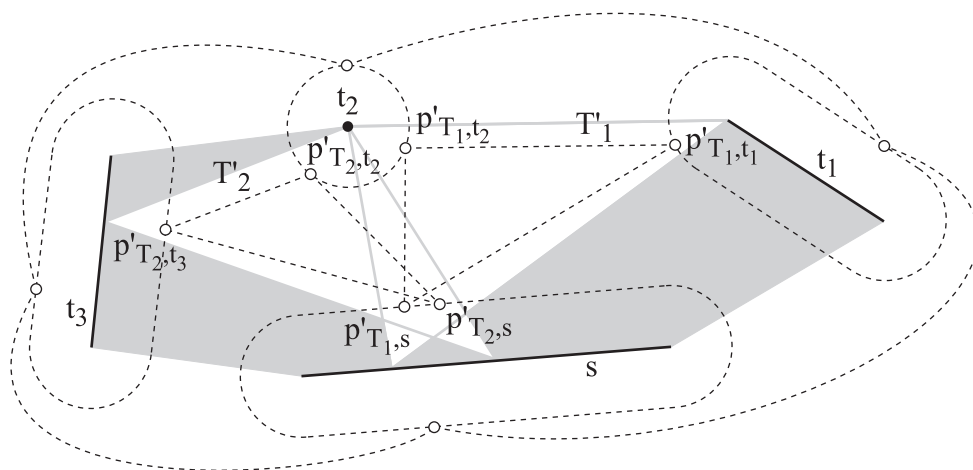


FIGURE 4.11 – La légalité topologique des arêtes garantit que cette situation ne peut pas se produire dans  $\Gamma'$ .

Soient  $s$  un site et  $T_0, \dots, T_{k-1}$  les faces de  $\mathcal{T}(S)$  incidentes à  $s$  dans le sens trigonométrique autour de  $s$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , on considère la courbe  $\gamma'_{s,T_i,T_{i+1}}$  qui va de  $p'_{T_i,s}$  à  $p'_{T_{i+1},s}$  dans le sens trigonométrique sur  $\gamma_{s,\varepsilon}$ .

L'ensemble des courbes  $\gamma'_{T,s,t}$ ,  $\gamma'_{s,T_i,T_{i+1}}$  définit une nouvelle représentation géométrique  $\Gamma'$  de la carte  $C$  (voir Figure 4.12).

**Étape 3.** La troisième étape consiste à prouver que la représentation géométrique  $\Gamma'$  de  $C$  est planaire. En effet, d'après la Remarque 4.1, si  $\Gamma'$  est planaire et si on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, alors les triangles de tangence  $T'$  forment une triangulation de segments de  $S$  (il convient d'ajouter qu'il faut choisir les courbes « externes » de  $\Gamma'$  à une distance inférieure ou égale à  $2\varepsilon$  de  $\text{conv}(\mathcal{S})$ ).

Nous allons prouver la planarité de  $\Gamma'$  à l'aide du Lemme 4.2. Pour cela nous devons montrer que  $\Gamma'$  satisfait les deux conditions de ce lemme. Comme chaque

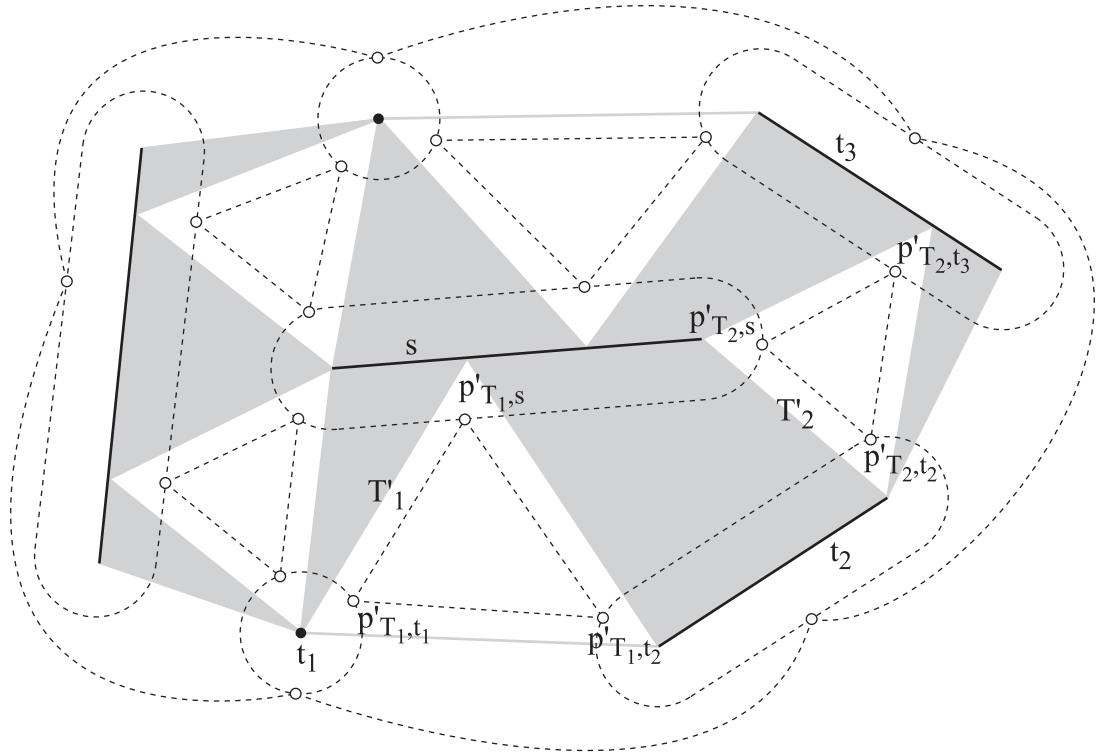


FIGURE 4.12 – Illustration de l'Étape 2 de la preuve du Théorème 4.2.

triangle  $T'$  a la même orientation que le triangle  $T$  correspondant dans  $\mathcal{T}(S)$  et comme les courbes  $\gamma_{s,T_i,T_{i+1}}$  et  $\gamma'_{s,T_i,T_{i+1}}$  sont orientées dans le sens trigonométrique sur  $\gamma_{s,\epsilon}$ , l'ordre géométrique des courbes de  $\Gamma'$  autour d'un sommet est le même que l'ordre géométrique des courbes de  $\Gamma$  autour du sommet correspondant. Donc la condition (ii) du Lemme 4.2 est satisfaite. Il reste à montrer que les représentations géométriques (dans  $\Gamma'$ ) des circuits de  $C$  sont des courbes simples fermées. La carte  $C$  contient trois types de circuits :

1. des circuits avec trois arcs qui correspondent aux faces de  $\mathcal{T}(S)$  et le circuit externe qui correspond à la frontière de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ ;
2. des circuits avec quatre arcs qui correspondent aux arêtes de  $\mathcal{T}(S)$ ;
3. des circuits autour de chaque site de  $\mathcal{T}(S)$ .

Les représentations géométriques des circuits du premier type sont des courbes simples par construction. Les représentations géométriques des circuits du deuxième type sont aussi des courbes simples car toutes les arêtes de  $\mathcal{T}(S)$  sont topologiquement légales par hypothèse et, d'après le Lemme 4.4, des triangles adjacents sont disjoints. Le résultat n'est pas aussi évident pour les circuits du troisième type.

Soient  $s$  un site et  $T_0, \dots, T_{k-1}$  les faces de  $\mathcal{T}(S)$  incidentes à  $s$  dans le sens trigonométrique autour de  $s$ . Pour simplifier la preuve, on suppose que ces faces sont toutes internes. On commence par choisir arbitrairement un vecteur non nul  $\vec{U}$  et une origine  $O$  qui est dans  $s$ . Pour toute courbe orientée  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  qui ne contient pas  $O$ , on note  $var(\gamma)$  la variation de l'angle  $\angle(\vec{U}, \overrightarrow{O\gamma(t)})$  le long de la courbe  $\gamma$ . Comme toutes les courbes  $\gamma'_{s, T_i, T_{i+1}}$  sont orientées dans le sens trigonométrique, il suffit de prouver que :

$$var(\gamma'_{s, T_0, T_1}) + var(\gamma'_{s, T_1, T_2}) + \dots + var(\gamma'_{s, T_{k-1}, T_0}) = 2\pi.$$

Pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , soient  $t_0, \dots, t_{k-1}$  les sites différents de  $s$  tels que  $T_{i-1}$  et  $T_i$  soient incidents à  $t_i$ . La représentation géométrique  $\alpha'_i$  du circuit correspondant à une face  $T_i$  est une courbe fermée qui commence au point  $p'_{T_i, s}$  et qui est formée des trois courbes  $\gamma'_{T_i, s, t_i}$ ,  $\gamma'_{T_i, t_i, t_{i+1}}$  et  $\gamma'_{T_i, t_{i+1}, s}$ . Il est évident que les courbes  $\alpha'_i$  n'entourent pas l'origine  $O$ , donc :

$$var(\alpha'_i) = var(\gamma'_{T_i, s, t_i}) + var(\gamma'_{T_i, t_i, t_{i+1}}) + var(\gamma'_{T_i, t_{i+1}, s}) = 0.$$

Soit  $\beta'_i$  la représentation géométrique du circuit correspondant à l'arête incidente à  $T_{i-1}$  et  $T_i$ . Il s'agit d'une courbe fermée qui commence au point  $p'_{T_{i-1}, s}$  et qui est constituée des quatre courbes  $\gamma'_{T_{i-1}, s, t_i}$ ,  $\gamma'_{t_i, T_{i-1}, T_i}$ ,  $\gamma'_{T_i, t_i, s}$  et  $\gamma'_{s, T_i, T_{i-1}}$ . La condition d'orientation de la légalité topologique des arêtes implique que les courbes  $\beta'_i$  n'entourent pas l'origine  $O$ , donc :

$$var(\beta'_i) = var(\gamma'_{T_{i-1}, s, t_i}) + var(\gamma'_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + var(\gamma'_{T_i, t_i, s}) + var(\gamma'_{s, T_i, T_{i-1}}) = 0.$$

Maintenant, si on effectue la somme  $var(\beta'_i) + var(\alpha'_i)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , tous les termes  $var(\gamma'_{T_{i-1}, s, t_i})$  et  $var(\gamma'_{T_{i-1}, t_i, s})$  s'annulent. Idem pour les termes  $var(\gamma'_{T_i, s, t_i})$  et  $var(\gamma'_{T_i, t_i, s})$ . En effet, ces termes sont les variations d'angle le long de la même courbe géométrique, mais parcourue en sens opposés. On obtient :

$$\sum_{i=0}^{k-1} (var(\alpha'_i) + var(\beta'_i)) = \sum_{i=0}^{k-1} (var(\gamma'_{T_i, t_i, t_{i+1}}) + var(\gamma'_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + var(\gamma'_{s, T_i, T_{i-1}})) = 0.$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=0}^{k-1} var(\gamma'_{s, T_{i-1}, T_i}) = \sum_{i=0}^{k-1} (var(\gamma'_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + var(\gamma'_{T_i, t_i, t_{i+1}})). \quad (4.1)$$

Comme  $\Gamma$  est planaire par construction, le même calcul avec  $\Gamma$  donne le résultat suivant :

$$\sum_{i=0}^{k-1} var(\gamma_{s, T_{i-1}, T_i}) = \sum_{i=0}^{k-1} (var(\gamma_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + var(\gamma_{T_i, t_i, t_{i+1}})) = 2\pi. \quad (4.2)$$

La dernière chose à voir est que les sommes (4.1) et (4.2) sont égales. Pour cela, sur chaque courbe  $\gamma_{t_i, \varepsilon}$ , il suffit de choisir une courbe  $\delta_i$  qui joint  $p_{t_i, T_{i-1}}$  à  $p'_{t_i, T_{i-1}}$ . Comme les triangles  $T_i$  et  $T'_i$  ont la même orientation, d'après le Lemme 4.5, les courbes successives

$$\gamma_{t_i, T_{i-1}, T_i}, \gamma_{T_i, t_i, t_{i+1}}, \delta_{i+1}, \gamma'_{T_i, t_{i+1}, t_i}, \gamma'_{t_i, T_i, T_{i-1}}, -\delta_i$$

forment une courbe fermée qui n'entoure pas l'origine  $O$  (voir Figure 4.13). En effectuant la somme sur  $i$  des variations d'angles, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-1} (\text{var}(\gamma_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + \text{var}(\gamma_{T_i, t_i, t_{i+1}}) + \text{var}(\delta_{i+1}) + \text{var}(\gamma'_{T_i, t_{i+1}, t_i}) + \\ & \qquad \qquad \qquad \text{var}(\gamma'_{t_i, T_i, T_{i-1}}) + \text{var}(-\delta_i)) = 0 \\ & \sum_{i=0}^{k-1} (\text{var}(\gamma_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + \text{var}(\gamma_{T_i, t_i, t_{i+1}}) + \text{var}(\gamma'_{T_i, t_{i+1}, t_i}) + \text{var}(\gamma'_{t_i, T_i, T_{i-1}})) = 0 \\ & \sum_{i=0}^{k-1} (\text{var}(\gamma_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + \text{var}(\gamma_{T_i, t_i, t_{i+1}})) + \sum_{i=0}^{k-1} (\text{var}(\gamma'_{T_i, t_{i+1}, t_i}) + \text{var}(\gamma'_{t_i, T_i, T_{i-1}})) = 0 \\ & \sum_{i=0}^{k-1} (\text{var}(\gamma_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + \text{var}(\gamma_{T_i, t_i, t_{i+1}})) = - \sum_{i=0}^{k-1} (\text{var}(\gamma'_{T_i, t_{i+1}, t_i}) + \text{var}(\gamma'_{t_i, T_i, T_{i-1}})) \\ & \sum_{i=0}^{k-1} (\text{var}(\gamma_{t_i, T_{i-1}, T_i}) + \text{var}(\gamma_{T_i, t_i, t_{i+1}})) = \sum_{i=0}^{k-1} (\text{var}(\gamma'_{T_i, t_i, t_{i+1}}) + \text{var}(\gamma'_{t_i, T_{i-1}, T_i})) \\ & 2\pi = \sum_{i=0}^{k-1} \text{var}(\gamma_{s, T_{i-1}, T_i}) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{var}(\gamma'_{s, T_{i-1}, T_i}). \end{aligned}$$

L'égalité des sommes (4.1) et (4.2) permet d'affirmer que les représentations géométriques de tous les circuits de  $C$  sont des courbes simples. Il suffit ensuite d'appliquer le Lemme 4.2 sur  $\Gamma'$ , puis de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 pour conclure que les triangles de tangence sont deux à deux disjoints et ne rencontrent aucun site de  $S$ . Ces triangles sont donc les faces d'une triangulation de segments de  $S$ .  $\square$

Le Théorème 4.2 montre que l'on peut tester si une triangulation de segments a la topologie de la triangulation de Delaunay de segments en vérifiant la légalité topologique des arêtes. D'une part, le test de légalité topologique d'une arête donnée peut s'effectuer en temps constant. En effet, toutes les opérations nécessaires pour le test de légalité se font en temps constant : calculer les points de tangence d'un cercle tangent à trois sites donnés, vérifier l'orientation d'un polygone à au plus quatre côtés et, enfin, calculer si un segment rencontre l'intérieur d'un cercle. D'autre part, d'après le Théorème 2.2, le nombre d'arêtes d'une triangulation de segments est linéaire avec le nombre de sites. Il en résulte que :

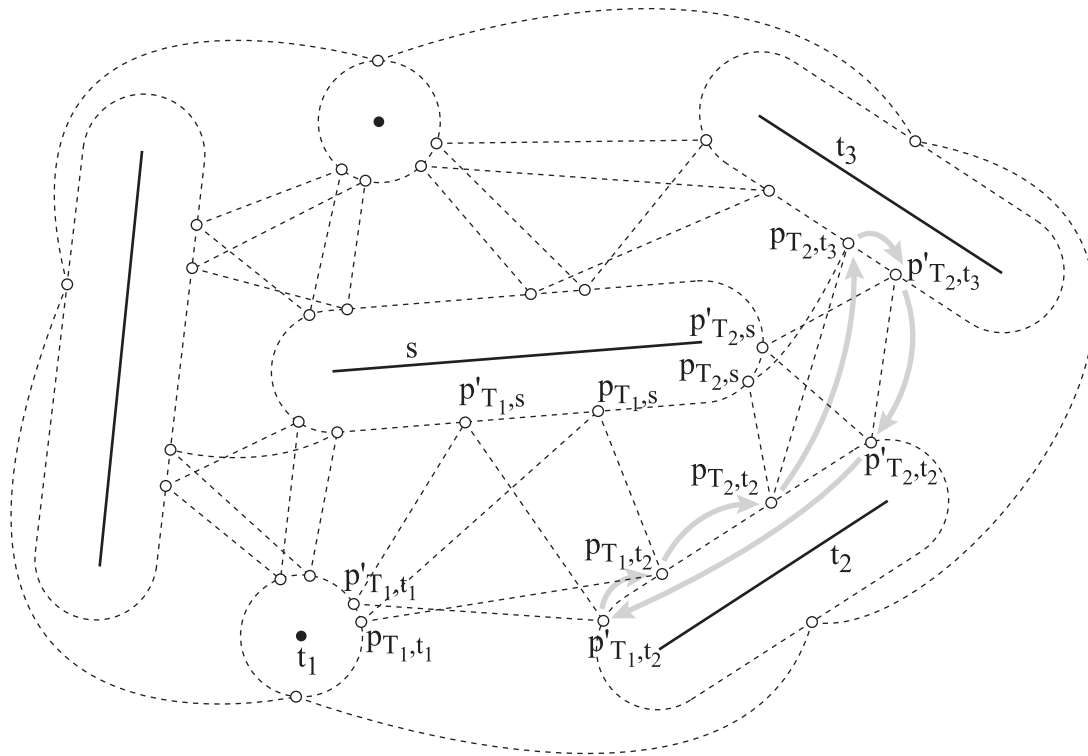


FIGURE 4.13 – Illustration de l'Étape 3 de la preuve du Théorème 4.2.

**Corollaire 4.1** *Il existe un algorithme linéaire qui vérifie si une triangulation de segments donnée a la topologie de la triangulation de Delaunay de segments.*

# Chapitre 5

## Algorithme de flip

*Dans ce chapitre nous décrivons un algorithme de flip qui transforme toute triangulation de segments de  $S$  en une autre qui à la même topologie que celle de Delaunay. La véritable triangulation de Delaunay de segments est ensuite calculée en temps linéaire avec le nombre de faces de la triangulation.*

*Nous commençons par mettre en évidence plusieurs problèmes qui apparaissent lorsqu'on souhaite généraliser l'algorithme de flip classique à la construction de la triangulation de Delaunay de segments.*

*Nous donnons ensuite une description détaillée de notre algorithme de flip. Une des différences avec l'algorithme de flip classique est qu'une modification locale améliore localement la triangulation courante, sans nécessairement effectuer un flip d'arête. Nous donnons également quelques particularités de cet algorithme qui rendent difficile le calcul de sa complexité.*

*Enfin, nous démontrons que notre algorithme de flip est correct. À l'aide de fonctions localement convexes, nous commençons par montrer que l'enveloppe convexe inférieure du relèvement des sites de  $S$  sur un paraboléide en dimension trois se projette verticalement en la triangulation de Delaunay de  $S$ . Dans un deuxième temps, nous définissons le relèvement d'une triangulation de segments de  $S$  quelconque et nous montrons que le relèvement de la triangulation de Delaunay de segments de  $S$  est inférieur ou égal aux relèvements de toutes les autres triangulations. Nous prouvons ensuite que la suite des relèvements des triangulations de segments calculées par l'algorithme de flip converge vers le relèvement de la triangulation de Delaunay de segments. Enfin, nous montrons qu'après un nombre fini d'étapes, l'algorithme calcule une triangulation de segments qui a la même topologie que celle de Delaunay.*

## 5.1 Difficultés liées à la légalité

Dans le cadre des triangulations d'ensembles de points, la notion de légalité d'une arête est utilisée pour construire la triangulation de Delaunay avec un algorithme de flip (voir Section 1.5). Lorsque cet algorithme traite une arête illégale, il remplace cette arête par l'autre diagonale du quadrilatère formé par les deux faces adjacentes à l'arête illégale.

On pourrait être tenté de suivre le même raisonnement dans le cadre des triangulations de segments, c'est-à-dire que la légalité des arêtes pourrait permettre de déterminer quels sont les changements topologiques à effectuer pour calculer la triangulation de Delaunay de segments par une suite de modifications locales. Nous montrons dans la suite que ce raisonnement ne peut pas s'appliquer directement dans le cadre des triangulations de segments.

Tout d'abord, imaginons qu'on souhaite décrire un algorithme de flip en utilisant la légalité géométrique d'une arête dans une triangulation de segments. L'algorithme suivrait donc le même schéma que dans la Section 1.5 : lorsqu'une arête géométriquement illégale est traitée, il faudrait effectuer un flip, c'est-à-dire remplacer l'arête illégale par une nouvelle arête légale.

Un exemple simple montre que la légalité géométrique n'est pas adaptée pour un algorithme de flip sur les triangulations de segments. En effet, considérons une triangulation de segments d'un ensemble  $S$  de sites qui a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments de  $S$  mais qui n'est pas de Delaunay (voir Figure 5.1). Il est évident qu'il n'y a aucune modification topologique à effectuer : il suffit de déplacer les sommets des faces sur les sites correspondants et on obtient directement la triangulation de Delaunay de  $S$ . Cependant, comme la triangulation n'est pas de Delaunay, elle contient au moins une arête géométriquement illégale et l'algorithme de flip entreprendrait d'effectuer des modifications topologiques, ce qui nous éloignerait de la triangulation de Delaunay de segments.

Supposons maintenant qu'on souhaite décrire un algorithme de flip en utilisant la notion de légalité topologique d'une arête. Le problème évoqué précédemment ne se pose plus car, si une triangulation de segments de  $S$  a la même topologie que la triangulation de Delaunay de  $S$ , cela signifie que toutes les arêtes de la triangulation sont topologiquement légales.

Cependant, on peut faire d'autres remarques. Dans une triangulation de points, une arête illégale peut toujours être flippée. En effet, le polygone formé par les deux faces adjacentes à l'arête illégale est toujours convexe et la deuxième dia-

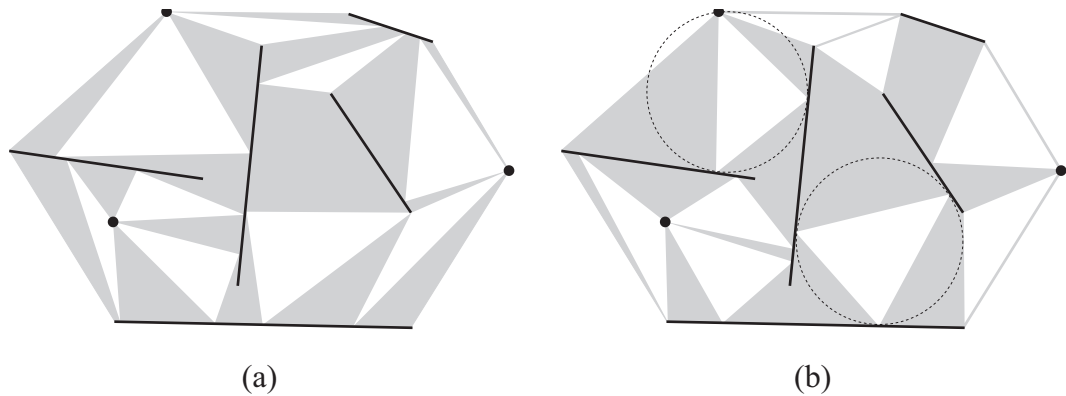


FIGURE 5.1 – La triangulation de segments (a) a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments (b).

gonale de ce polygone ne coupe aucune autre arête de la triangulation courante. Malheureusement, on ne dispose pas d'une telle propriété dans les triangulations de segments et une arête topologiquement illégale ne peut pas toujours être flipée. Pour mieux saisir le problème, observons l'exemple suivant.

Supposons qu'on dispose d'une triangulation de segments de  $S$  qui contient une arête  $e$  qui est topologiquement illégale, qui est en forme de trapèze, qui connecte deux sites  $U$  et  $W$  et dont les deux faces adjacentes s'appuient sur les sites  $T, U, W$  en  $t, u_1, w_1$  pour l'une et sur les sites  $V, W, U$  en  $v, w_2, u_2$  pour l'autre (voir Figure 5.2). De plus, on note  $P$  le polygone  $tu_1u_2vw_2w_1$ .

Dans cet exemple, flipper l'arête  $e$  consisterait donc à enlever cette arête  $e$  qui connecte  $U$  et  $W$ , puis à ajouter à l'intérieur du polygone  $P$  une nouvelle arête qui connecterait les sites  $T$  et  $V$ . On voit bien que  $t$  n'est pas visible de  $v$  dans le polygone  $P$ , ce qui rend impossible l'ajout d'une telle arête : l'opération de flip est impossible dans cette situation, bien que l'arête  $e$  soit topologiquement illégale.

Par ailleurs, même si le polygone  $P$  est convexe et que l'opération de flip est possible, on se rend facilement compte que cette opération n'est pas triviale. Considérons l'exemple donné dans la Figure 5.3(a) avec les mêmes notations que précédemment : l'arête  $e$  est topologiquement illégale et il est possible de la remplacer par une nouvelle arête  $e'$  qui connecte les sites  $T$  et  $V$  (voir Figure 5.3(b)). On peut même constater que  $e'$  est définie de manière unique car  $T$  et  $V$  ne rencontrent la frontière de  $P$  qu'en  $t$  et  $v$  :  $e'$  est donc nécessairement un segment qui joint  $t$  à  $v$ . Cependant, le placement de  $e'$  n'est pas suffisant pour obtenir une nouvelle triangulation de segments car on voit bien que les deux zones blanches adjacentes à  $e'$  dans la Figure 5.3(b) ne sont pas triangulaires : ce



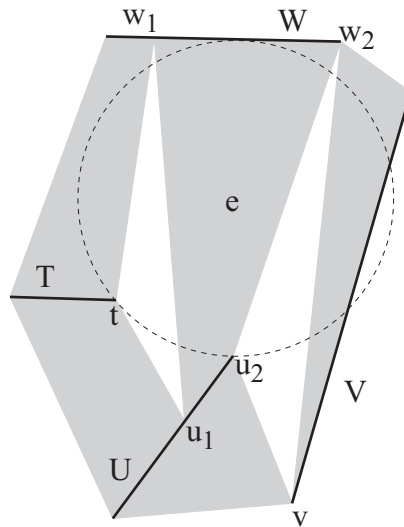


FIGURE 5.2 – L'arête  $e$  est topologiquement illégale car le disque ouvert tangent à  $T$ ,  $U$  et  $W$  rencontre le site  $V$ . Cependant, il est impossible de remplacer  $e$  par une arête qui connecte les sites  $T$  et  $V$  car il n'existe pas de segment qui joint  $t$  à  $v$  à l'intérieur de  $P$ .

ne sont donc pas des faces d'une triangulation de segments. Il faut donc placer deux nouvelles faces adjacentes à  $e'$  à l'intérieur de  $P$  et on voit bien qu'il y a une infinité de manières de positionner ces deux faces (voir Figure 5.4). On peut donc se poser les questions suivantes : toutes les manières de placer ces deux nouvelles faces sont-elles équivalentes ? Autrement dit, la manière de placer ces deux faces a-t-elle une influence sur le déroulement d'un algorithme de flip ? On peut également se demander s'il existe une manière optimale de placer les deux nouvelles faces créées par un flip. Les réponses à ces questions ne semblent *a priori* pas évidentes.

Toutes ces remarques montrent que la réalisation d'un algorithme de flip pour construire une triangulation de Delaunay de segments n'est pas une extension triviale du cas des ensembles de points.

## 5.2 Triangulations de segments de polygones

*Dans cette section, nous généralisons la notion de triangulation de segments en la contraignant à des  $S$ -polygones (voir Définition 2.2). Les principales définitions et propriétés du Chapitre 2 s'étendent naturellement à ce cadre là.*

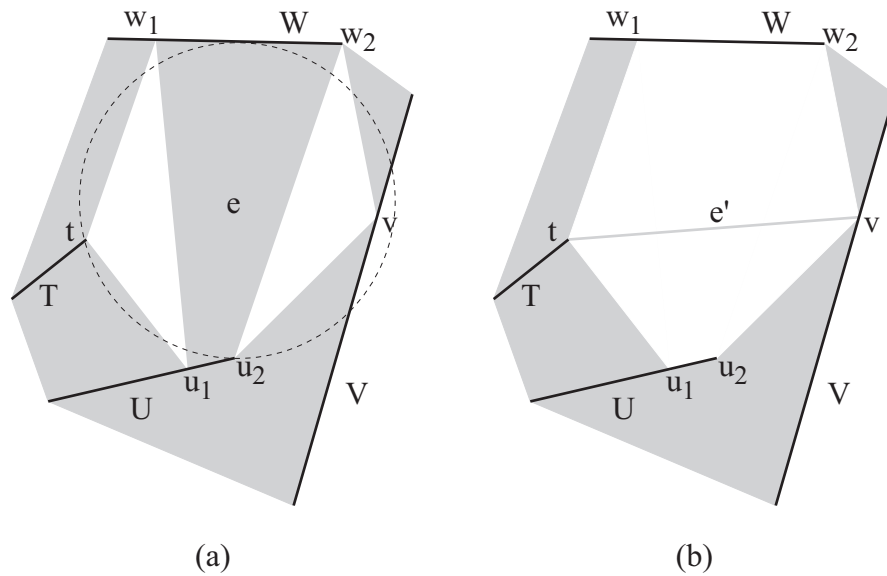


FIGURE 5.3 – En (a), on voit que l'arête  $e$  est topologiquement illégale car le disque ouvert tangent à  $T$ ,  $U$  et  $W$  rencontre le site  $V$ . En (b), l'arête  $e$  est flippée, c'est-à-dire qu'elle est remplacée par une arête  $e'$  qui connecte les sites  $T$  et  $V$ . Les deux régions blanches adjacentes à  $e'$  sont les régions dans lesquelles on doit placer les deux nouvelles faces de la triangulation qui sont engendrées par le flip de  $e$ .

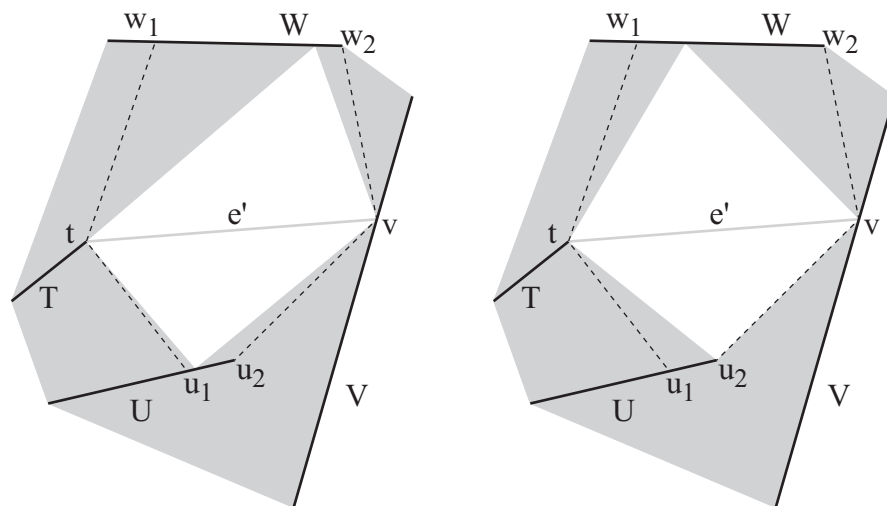


FIGURE 5.4 – Il existe une infinité de façons de placer à l'intérieur de  $P$  (en pointillés) deux nouvelles faces adjacentes à  $e'$  : cette figure montre deux exemples possibles.

Dans l'algorithme de flip que nous présentons dans ce chapitre, chaque étape considère une partie de la triangulation courante et cette partie n'est pas nécessairement convexe. C'est pourquoi nous devons, dans un premier temps, généraliser la notion de triangulation de segments à des  $S$ -polygones.

De plus, cela permet de généraliser la notion classique de triangulation d'un polygone. En effet, si l'intersection d'un  $S$ -polygone avec  $\mathbf{S}$  est un ensemble fini de points, alors on se ramène au cas des triangulations de polygones.

Une triangulation de segments est pour le moment définie sur la région  $\text{conv}(\mathbf{S})$ . Nous généralisons directement cette définition en considérant un  $S$ -polygone au lieu de l'enveloppe convexe des sites (voir Figure 5.5(a) et (b)). Dans la suite,  $U$  désigne toujours un  $S$ -polygone et  $S'$  désigne l'ensemble des composantes connexes de  $\mathbf{S}' = U \cap \mathbf{S}$ .

**Définition 5.1** Une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $U$  (relativement à  $S$ ) est une partition de  $U$  en sites, faces et arêtes tels que :

1. Chaque face de  $\mathcal{T}$  est un triangle ouvert dont les sommets sont sur trois sites de  $S'$  distincts et dont les côtés ouverts ne coupent pas  $\mathbf{S}'$ ,
2. Aucune face ne peut être ajoutée sans couper une face déjà existante,
3. Les arêtes de  $\mathcal{T}$  sont les composantes connexes de  $U \setminus (F \cup \mathbf{S}')$ , où  $F$  est l'union des faces de  $\mathcal{T}$ .

**Théorème 5.1** Le nombre de faces d'une triangulation de segments de  $U$  dépend uniquement de  $U$  et de  $S$ .

*Preuve.* Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation de segments de  $U$ . Tout comme dans la Définition 2.3, on peut associer une carte combinatoire  $C$  à  $\mathcal{T}$ . De plus, en appliquant la même méthode que dans la preuve de la Proposition 2.1, on peut voir que  $C$  est planaire. Les faces de  $C$  correspondent aux faces de  $\mathcal{T}$  et aux composantes connexes du complémentaire de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathbf{R}^2$ . Soient respectivement  $f$ ,  $a$  et  $s$  les nombres de faces, d'arêtes et de sommets de  $C$ . Comme  $C$  est planaire, on obtient la relation d'Euler sous la forme suivante :  $f - a + s = 2$ . Le résultat se démontre facilement en utilisant la même démarche que dans la preuve du Théorème 2.2.  $\square$

On peut maintenant généraliser la notion de triangulation de Delaunay de segments aux  $S$ -polygones (voir Figure 5.5(c)). Dans la suite, on dit qu'un point  $q \in U$  est visible d'un point  $p \in U$  si le segment ouvert  $]p, q[$  est inclus dans  $U \setminus \mathbf{S}$ .

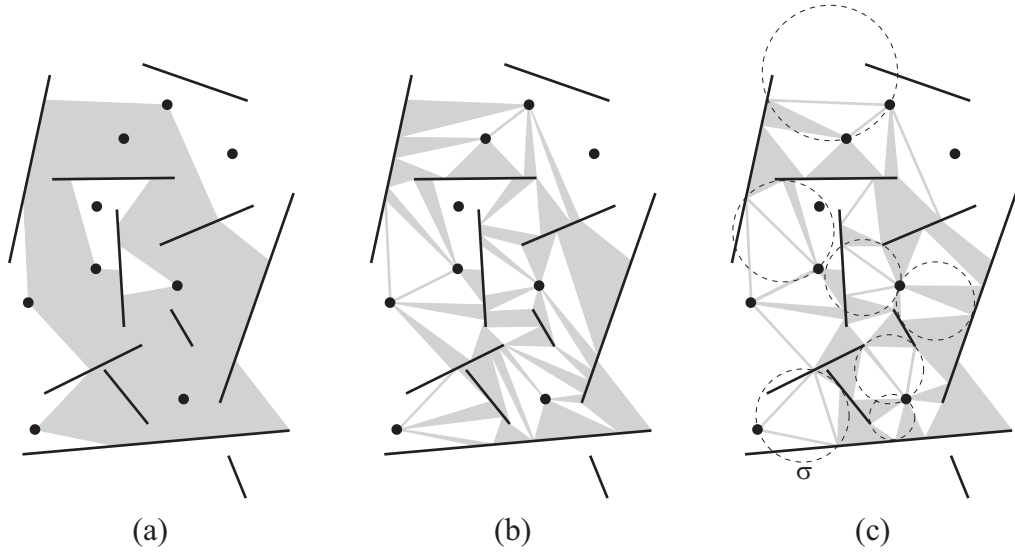


FIGURE 5.5 – Un  $S$ -polygone  $U$  (a), une triangulation de segments quelconque de  $U$  (b) et une triangulation de Delaunay de segments de  $U$  (c). Le cercle  $\sigma$  est tangent à quatre composantes connexes de  $U \cap \mathbf{S}$ .

**Définition 5.2** 1. Soit  $t$  un triangle inclus dans  $U$  dont les sommets sont dans  $\mathbf{S}$ . Le triangle  $t$  est un triangle de Delaunay de  $U$  s'il existe un point  $p$  à l'intérieur de  $t$  tel que l'intérieur du cercle circonscrit à  $t$  ne contienne aucun point de  $\mathbf{S}$  visible depuis  $p$ .

2. Une triangulation de segments de  $U$  est dite de Delaunay si tous ses triangles sont de Delaunay.

**Remarque 5.1** Il est important de noter que, si  $t$  est un triangle de Delaunay de  $U$ , alors, pour tout point  $x$  de  $t$ , le cercle circonscrit à  $t$  ne contient aucun point de  $\mathbf{S}$  visible de  $x$ . Pour le voir on peut utiliser le Corollaire 5.1 et la preuve de la Proposition 5.1.

On peut aussi remarquer que la notion de triangle de Delaunay utilisée dans cette définition est très proche de celle utilisée dans la définition d'une triangulation de Delaunay contrainte [61, 25]. En effet, si dans une telle triangulation, on note  $S$  l'ensemble des sites et  $S'$  la réunion des segments qui forment les contraintes, un triangle  $t$  est de Delaunay si l'intérieur de son cercle circonscrit ne rencontre aucun site de  $S$  qui est visible depuis les trois sommets de  $t$  relativement à  $S'$ .

**Théorème 5.2** Tout  $S$ -polygone admet une triangulation de Delaunay de segments.

Ce résultat est une conséquence des Théorèmes 5.5 et 5.6 de la Section 5.4. On peut remarquer qu'une triangulation de Delaunay d'un  $S$ -polygone n'est pas nécessairement unique car il peut exister un cercle tangent à quatre composantes connexes de  $U \cap \mathbf{S}$  même si les sites de  $S$  sont en position générale (voir Figure 5.5(c)).

## 5.3 Description de l'algorithme de flip

*Dans cette section, nous décrivons un algorithme de flip qui transforme une triangulation de segments quelconque en une triangulation de segments qui a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments. Nous indiquons également comment en déduire facilement la triangulation de Delaunay de segments.*

### 5.3.1 Principe général de l'algorithme

L'algorithme que nous proposons prend en entrée une triangulation de segments quelconque de  $S$ . Une telle triangulation peut être calculée, par exemple, à l'aide de l'algorithme par balayage décrit dans la Section 2.5. De plus, l'algorithme dispose en entrée d'une file qui contient toutes les arêtes de la triangulation initiale.

Une étape de l'algorithme se déroule de la manière suivante. On commence par sortir de la file l'arête  $e$  qui est en tête et on note  $P_e$  la fermeture du polygone formé par l'union de  $e$  et de ses (au plus) deux faces adjacentes. Ensuite, on effectue une modification locale de la triangulation courante à l'intérieur de  $P_e$  et on génère une nouvelle arête  $e'$  à la place de  $e$ . L'arête  $e'$  est ensuite ajoutée à la fin de la file.

Si la modification locale change la topologie de la triangulation de segments courante, alors on dit que l'arête  $e$  a été flippée.

L'algorithme répète l'étape de modification locale jusqu'à ce que toutes les arêtes de la triangulation courante soient topologiquement légales.

### 5.3.2 Détails sur l'étape de modification locale

Soient  $\mathcal{T}_k$  la triangulation courante après la  $k$ -ième étape de l'algorithme et  $e$  l'arête traitée par l'algorithme à l'étape  $k + 1$ . Par définition,  $P_e$  est un  $S$ -polygone et la restriction de  $\mathcal{T}_k$  au polygone  $P_e$  est une triangulation de segments

de  $P_e$ , notée  $\mathcal{T}(P_e)$ . La modification locale effectuée dans  $P_e$  consiste à calculer une triangulation de Delaunay de segments de  $P_e$ , notée  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$ .

D'après le Théorème 5.1,  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$  a autant de faces que  $\mathcal{T}(P_e)$ . Donc, d'après la définition de  $P_e$ ,  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$  a au plus deux faces et on vérifie facilement qu'il y a au plus deux topologies possibles. La modification locale se ramène donc au calcul des (au plus) deux faces de Delaunay de  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$ . Dans la suite, nous donnons une méthode qui permet d'effectuer ce calcul en temps constant.

Dans le cas où  $\mathcal{T}(P_e)$  ne contient aucune face, il n'y a rien à faire :  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$  est égal à  $\mathcal{T}(P_e)$ .

Si  $\mathcal{T}(P_e)$  comporte une seule face  $f$ , alors toutes les triangulations de  $P_e$  ont nécessairement la même topologie. Pour obtenir  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$ , il faut placer dans  $P_e$  une face dont le cercle circonscrit est tangent aux composantes connexes de  $P_e \cap \mathbf{S}$  et qui les rencontre dans le même ordre que  $f$ . Une telle face existe nécessairement puisque, d'après le Théorème 5.2, tout  $S$ -polygone admet une triangulation de Delaunay de segments.

Enfin, si  $\mathcal{T}(P_e)$  compte deux faces, on procède de la manière suivante. Soient  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et  $s$  les quatre segments de  $P_e \cap \mathbf{S}$  dans l'ordre dans lequel ils sont rencontrés en parcourant la frontière de  $P_e$  dans le sens trigonométrique (voir Figures 5.6(b), 5.7(b) et 5.8(b)). Par définition de  $P_e$ , deux de ces quatre segments sont nécessairement des points : à une permutation près de  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et  $s$ , on peut supposer que  $p$  et  $r$  sont réduits à des points.

On peut commencer par se demander si  $\mathcal{T}(P_e)$  a la même topologie que  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$ .

Si  $p$  n'est pas visible de  $r$ , c'est-à-dire si le segment ouvert  $]p, r[$  n'est pas entièrement inclus dans  $P_e$  ou s'il rencontre  $\mathbf{S}$ , alors aucune triangulation de  $P_e$  ne peut contenir une arête connectant  $p$  et  $r$ , ce qui implique que  $\mathcal{T}(P_e)$  et  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$  ont la même topologie (voir Figure 5.6). Dans ce cas, il suffit de placer la face qui s'appuie sur  $p$ ,  $q$  et  $s$  de sorte que son cercle circonscrit passe par  $p$  et soit tangent aux parties de  $q$  et de  $s$  visibles depuis  $p$ . On procède de même pour la face qui s'appuie sur  $r$ ,  $s$  et  $q$ .

Si  $p$  est visible de  $r$ , le segment  $]p, r[$  coupe nécessairement tout triangle qui s'appuie sur  $p$ ,  $q$  et  $s$  (voir Figures 5.7(b) et 5.8(b)). En particulier,  $]p, r[$  coupe l'unique triangle  $t$  dont le cercle circonscrit passe par  $p$  et est tangent aux parties de  $q$  et de  $s$  visibles depuis  $p$ . Cela signifie qu'il existe à l'intérieur de  $t$  un point visible de  $r$ .

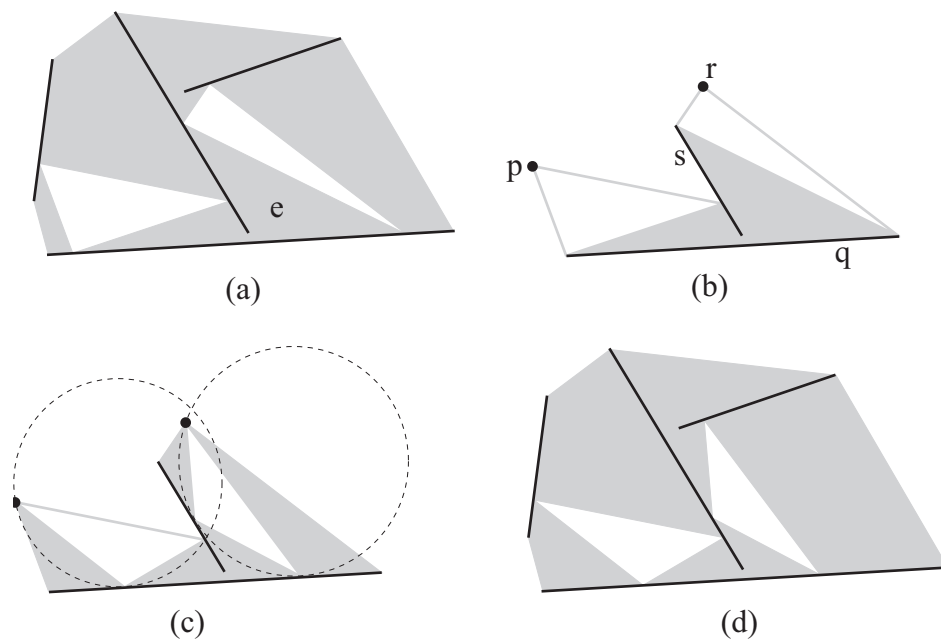


FIGURE 5.6 – Cette figure montre une triangulation de segments  $\mathcal{T}_k$  (a) , la triangulation initiale  $\mathcal{T}(P_e)$  du polygone associé à  $e$  (b) , la triangulation de Delaunay de segments  $\mathcal{T}_D(P_e)$  de ce polygone (c) et la triangulation résultante  $\mathcal{T}_{k+1}$  (d). Dans cet exemple, l'arête  $e$  n'est pas flippée et on obtient  $\mathcal{T}_{k+1}$  en déplaçant les deux faces adjacentes à  $e$  à l'intérieur de  $P_e$ .

Dans ce cas, d'après la définition d'une triangulation de Delaunay de segments d'un  $S$ -polygone, si  $r$  est à l'extérieur du cercle  $\sigma$  circonscrit à  $t$ , alors  $t$  est un triangle de  $\mathcal{T}_D(P_e)$  (voir Figure 5.7). On en déduit que  $\mathcal{T}(P_e)$  et  $\mathcal{T}_D(P_e)$  ont la même topologie. On calcule la face de Delaunay qui s'appuie sur  $r$ ,  $s$  et  $q$  de la même manière.

Si  $r$  est à l'intérieur de  $\sigma$ , d'après la Remarque 5.1,  $t$  n'est pas une face de  $\mathcal{T}_D(P_e)$  et  $e$  n'est donc pas une arête de  $\mathcal{T}_D(P_e)$  (voir Figure 5.8). Par conséquent, il faut flipper l'arête  $e$ , c'est-à-dire la remplacer par une nouvelle arête qui connecte  $p$  à  $r$ . Les sommets des deux nouvelles faces sont alors les points de contact des deux cercles respectivement tangents à  $p$ ,  $r$ ,  $s$  et à  $r$ ,  $p$ ,  $q$ .

Il peut arriver que  $p$  et  $r$  soient confondus (voir Figure 5.9). Dans ce cas,  $\mathcal{T}(P_e)$  contient deux faces qui s'appuient sur les trois composantes connexes de  $P_e \cap \mathbf{S}$  et il n'y a qu'une seule topologie possible. Le calcul des faces de  $\mathcal{T}_D(P_e)$  reste inchangé.

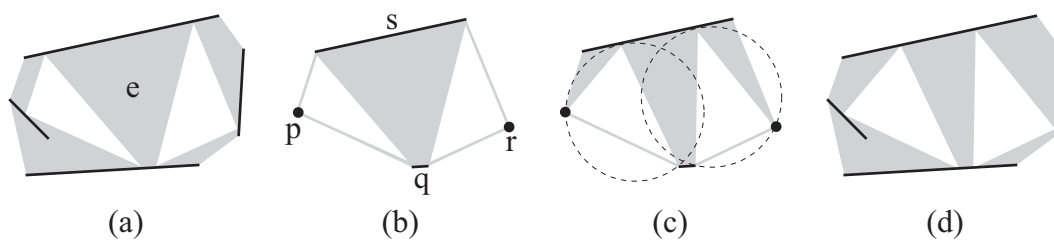


FIGURE 5.7 – Exemple de modification locale où l’algorithme ne flippe pas l’arête traitée  $e$  : la triangulation courante  $\mathcal{T}_k$  est représentée en (a), la triangulation  $\mathcal{T}(P_e)$  en (b), puis  $\mathcal{T}_D(P_e)$  en (c) et, finalement, la nouvelle triangulation obtenue  $\mathcal{T}_{k+1}$  en (d).

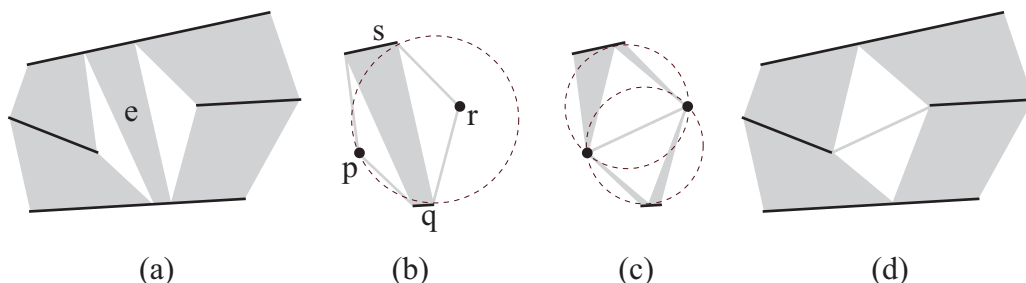


FIGURE 5.8 – Dans cet exemple, l’étape de modification locale provoque le flip de l’arête  $e$ .  $\mathcal{T}_k$  est représentée en (a),  $\mathcal{T}(P_e)$  en (b),  $\mathcal{T}_D(P_e)$  en (c) et  $\mathcal{T}_{k+1}$  en (d).

On peut remarquer que les modifications locales effectuées par l’algorithme n’engendrent pas nécessairement de changements topologiques : il s’agit d’une différence importante par rapport à l’algorithme de flip classique dans lequel chaque modification locale se traduit par un flip d’arête.

### 5.3.3 Détails sur la terminaison de l’algorithme

Comme nous l’avons déjà indiqué précédemment, l’algorithme arrête d’effectuer des modifications locales dès que toutes les arêtes de la triangulation de segments courante sont topologiquement légales. Cela signifie qu’on doit être capable de maintenir le nombre d’arêtes topologiquement illégales dans la triangulation courante.

On commence donc par compter le nombre d’arêtes topologiquement illégales dans la triangulation de segments initiale. D’après la définition de la légalité topologique d’une arête, on peut évaluer en temps constant si une arête donnée est topologiquement légale ou non. En outre, d’après le Théorème 2.2, on peut



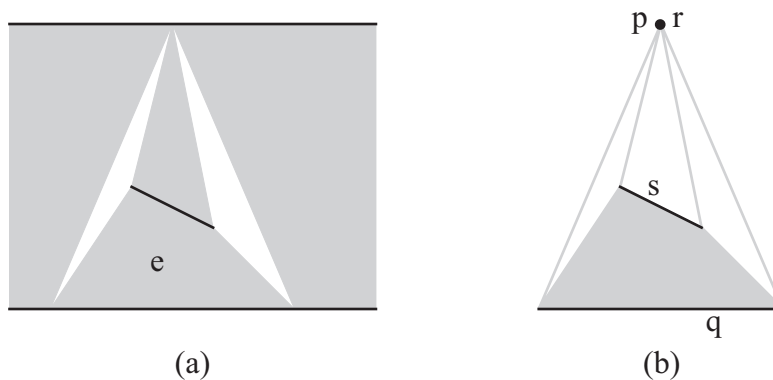


FIGURE 5.9 – Au cours du traitement de l’arête  $e$  de  $\mathcal{T}_k$  (a), comme  $p = r$  dans  $\mathcal{T}(P_e)$  (b), l’arête  $e$  ne peut pas être flippée et  $\mathcal{T}_D(P_e)$  a la même topologie que  $\mathcal{T}(P_e)$ .

parcourir l’ensemble des arêtes de la triangulation initiale en un temps linéaire avec le nombre de sites de  $S$ .

Ensuite, le nombre d’arêtes topologiquement illégales doit être mis à jour après chaque changement de topologie dans la triangulation courante, c’est-à-dire après chaque flip d’une arête  $e$ . Les faces adjacentes à  $e$  sont aussi adjacentes à au plus quatre autres arêtes (voir Figure 5.8). Après le flip de l’arête  $e$ , ces arêtes ne sont plus adjacentes aux mêmes faces. Par conséquent, il faut retester leur légalité.

Quand il n’y a plus d’arête topologiquement illégale, d’après le Théorème 4.2, cela signifie que la triangulation de segments de  $S$  obtenue a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments de  $S$ . Cependant, les cercles circonscrits aux faces de la triangulation obtenue ne sont pas nécessairement vides puisqu’il existe une infinité de triangulations de segments qui ont la même topologie. Par conséquent, pour calculer la triangulation de Delaunay de segments de  $S$ , il reste simplement à modifier la position des sommets des faces sur les sites.

### 5.3.4 Particularités de l’algorithme

On peut commencer par remarquer que la gestion des arêtes à traiter diffère de la pile d’arêtes illégales de l’algorithme de flip classique. En effet, les arêtes qui ont un côté dans la frontière de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  sont traitées par l’algorithme alors qu’elles sont topologiquement légales. De plus, à l’issue d’une étape de modification locale, la nouvelle arête obtenue est remise dans la file des arêtes à traiter : cette file contient donc en permanence toutes les arêtes de la triangulation courante.

Comme nous l'avons déjà évoqué dans la Section 5.1, il est possible qu'une arête soit topologiquement illégale et que l'algorithme soit incapable de la flipper à cause de la forme du polygone associé à l'arête (voir Figure 5.2). Ce genre de configuration est la raison pour laquelle une étape de modification locale doit nécessairement améliorer géométriquement la triangulation, même si l'arête traitée est topologiquement légale. En effet, pour que l'algorithme puisse flipper l'arête  $e$  de la Figure 5.2 à une étape ultérieure, il faut impérativement modifier la position des faces adjacentes à  $e$  en traitant les autres arêtes à proximité de  $e$ .

Par ailleurs, la nouvelle arête obtenue au cours d'une étape de modification locale n'est pas nécessairement topologiquement légale. En effet, lorsque l'arête traitée est topologiquement illégale mais ne peut pas être flippée, l'algorithme se contente de modifier légèrement la position des sommets des faces adjacentes à cette arête. Il peut aussi arriver qu'une arête topologiquement légale soit flippée et par conséquent devienne illégale, comme le montre l'exemple de la Figure 5.10.

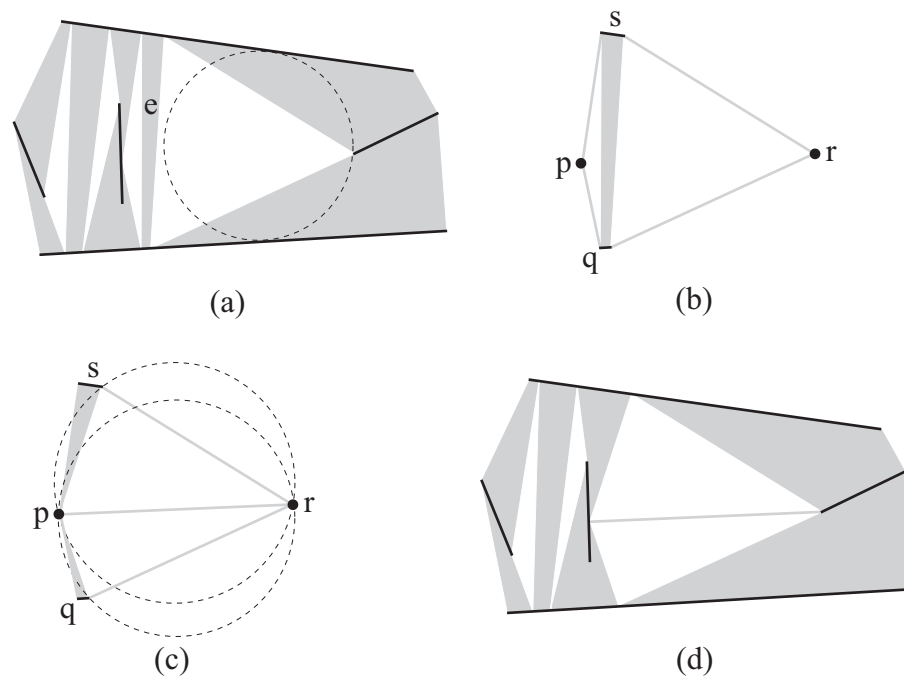


FIGURE 5.10 – Exemple de modification locale où l'algorithme flippe une arête  $e$  qui est topologiquement légale. La triangulation courante  $\mathcal{T}_k$  est représentée en (a), la triangulation  $\mathcal{T}(P_e)$  en (b), puis  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(P_e)$  en (c) et, finalement, la nouvelle triangulation obtenue  $\mathcal{T}_{k+1}$  en (d).

Toutes ces remarques montrent que la complexité de notre algorithme de flip s'avère difficile à calculer. Dans la suite, nous montrons que cet algorithme converge vers la triangulation de Delaunay de segments et qu'il calcule, en un nombre fini d'étapes, une triangulation de segments qui a la même topologie que celle de Delaunay .

## 5.4 Fonctions localement convexes

*Dans cette section, à l'aide de fonctions localement convexes, nous définissons et nous caractérisons le relèvement d'une triangulation de segments et d'une triangulation de Delaunay de segments sur un parabolöide en dimension trois.*

### 5.4.1 Définitions

Nous commençons par rappeler brièvement la définition d'une fonction localement convexe : si  $V$  est une région de  $\mathbf{R}^2$ , une fonction  $\phi : V \rightarrow \mathbf{R}$  est localement convexe si la restriction de  $\phi$  à chaque segment inclus dans  $V$  est convexe.

Nous donnons maintenant une nouvelle définition de l'enveloppe convexe inférieure d'une fonction. Dans la suite, cette définition remplacera l'enveloppe convexe inférieure habituellement utilisée dans  $\mathbf{R}^3$ . On peut remarquer qu'on retrouve la même définition si on considère un domaine  $V$  qui est convexe.

**Définition 5.3** *Soit  $L(V)$  l'ensemble des fonctions  $\phi : V \rightarrow \mathbf{R}$  qui sont localement convexes sur  $V$ . Étant donnée une fonction  $f$  définie sur  $V \cap \mathbf{S}$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , l'enveloppe convexe inférieure de  $f$  sur  $(V, \mathbf{S})$  est la fonction  $f_{V, \mathbf{S}}$  définie sur  $V$  par*

$$f_{V, \mathbf{S}}(x) = \sup\{\phi(x) : \phi \in L(V), \forall y \in V \cap \mathbf{S}, \phi(y) \leq f(y)\}.$$

### 5.4.2 Relèvement de la triangulation de Delaunay de segments

Pour une meilleure lisibilité, les lemmes intermédiaires ainsi que les preuves les plus longues ont été reportées aux sections suivantes.

Dans la suite,  $U$  désigne un  $S$ -polygone et  $f$  désigne la fonction définie sur  $\mathbf{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Pour tout point  $p$  de  $U$ , on note  $Vis_p$  l'ensemble des points  $q$  de  $\mathbf{S}$  tels que le segment ouvert  $[p, q]$  soit inclus dans  $U \setminus \mathbf{S}$ .  $V_p$  désigne l'enveloppe convexe de  $\overline{Vis_p}$ .

**Théorème 5.3** 1. Pour tout point  $p$  de  $U$ , il existe un sous-ensemble  $S_p$  de  $S$  qui contient un, deux ou trois points et tel que  $p$  soit dans  $t = \text{conv}(S_p)$ ,  $t$  soit inclus dans  $U$  et la fonction  $f_{U, \mathbf{S}}$  soit affine sur  $t$ .

2. Plus précisément, en supposant que  $p$  est à l'intérieur de  $U$  et pas dans  $\mathbf{S}$ , si  $S_p$  est un sous-ensemble de  $Vis_p$  tel que  $p$  soit dans  $t = \text{conv}(S_p)$  et tel que  $f_{V_p, \overline{Vis_p}}$  soit affine sur  $t$ , alors  $t$  est inclus dans  $U$  et  $f_{U, \mathbf{S}} = f_{V_p, \overline{Vis_p}}$  sur  $t$ .

**Corollaire 5.1** Si  $t$  est un triangle de Delaunay de  $U$ , alors  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $t$ .

*Preuve.* Commençons par le cas où  $U = \text{conv}(\mathbf{S})$ . Soit  $h_t : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction affine qui est égale à  $f$  sur les sommets de  $t$ . Soit  $p$  un point de  $t$  tel que  $Vis_p$  ne rencontre pas l'intérieur du cercle circonscrit à  $t$ . Comme  $U$  est convexe, le cercle circonscrit à  $t$  ne contient aucun point de  $\mathbf{S}$  en son intérieur. Donc,  $h_t \leq f$  sur  $\mathbf{S}$ . On en déduit que  $f_{U, \mathbf{S}} \geq h_t$  sur  $U$ . De plus,  $f_{U, \mathbf{S}} = f = h_t$  sur les sommets de  $t$ . Donc, par convexité,  $f_{U, \mathbf{S}} \leq h_t$  sur  $t$  et on en conclut que  $f_{U, \mathbf{S}} = h_t$  sur  $t$ .

Dans le cas général, si  $t$  est un triangle de Delaunay de  $U$ , alors  $t$  est aussi un triangle de Delaunay de  $(V_p, \overline{Vis_p})$ . Donc, d'après le cas convexe,  $f_{V_p, \overline{Vis_p}}$  est affine sur  $t$ . D'après le théorème précédent, on en déduit que  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $t$ .  $\square$

**Théorème 5.4** Soient  $p$  un point de  $U$  et  $\mathcal{C}_p$  l'ensemble des sous-ensembles convexes  $C$  de  $U$  tels que :

- $p \in C$ ,
  - $C$  est relativement ouvert,
  - la fonction  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $C$ .
1. Il existe un élément maximal  $C_p$  dans  $\mathcal{C}_p$ , c'est-à-dire que  $C_p \in \mathcal{C}_p$  et  $C \subset C_p$  pour tout  $C \in \mathcal{C}_p$ .
  2. La fonction  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $\overline{C_p}$ , l'ensemble convexe  $\overline{C_p}$  a un nombre fini de points extrémaux et ces points extrémaux sont tous dans  $\mathbf{S}$ .
  3. La collection de tous les ensembles  $C_p$ ,  $p \in U$ , forme une partition de  $U$ .

**Théorème 5.5** Tout élément  $C_p$  de dimension deux peut être décomposé en un nombre fini de triangles d'intérieurs disjoints dont les sommets sont des points extrémaux de  $C_p$ . Soit  $T$  l'ensemble des triangles qui résultent de la décomposition de tous les  $C_p$  de dimension deux, avec  $p \in U \setminus \mathbf{S}$ . Alors les triangles de  $T$  sont les faces d'une triangulation de segment de  $U$ . Une telle triangulation est dite induite par  $f_{U, \mathbf{S}}$ .

**Proposition 5.1** Soient  $s_1, s_2$  et  $s_3$  trois points de  $\mathbf{S}$  non alignés et soit  $t = \text{conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ . Si  $t$  est inclus dans  $U$  et si  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $t$ , alors  $t$  est un triangle de Delaunay de  $U$ .

*Preuve.* Soit  $p$  un point à l'intérieur de  $t$  et  $q$  un point de  $\text{Vis}_p$ . On note  $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction affine égale à  $f_{U,\mathbf{S}}$  sur  $t$ . La fonction  $f_{U,\mathbf{S}}$  est convexe sur  $[p, q]$  et égale à  $h$  sur un voisinage de  $p$ . On en déduit que  $f_{U,\mathbf{S}} \geq h$  sur  $[p, q]$ . Comme  $f_{U,\mathbf{S}} = f$  sur  $\mathbf{S}$ , on a  $f(q) = f_{U,\mathbf{S}}(q) \geq h(q)$ . Donc  $q$  n'est pas dans la région du plan où  $f < h$  qui correspond précisément à l'intérieur du cercle circonscrit à  $t$ .  $\square$

D'après la proposition précédente, tout triangle d'une triangulation de segments induite par  $f_{U,\mathbf{S}}$  est un triangle de Delaunay de  $U$ . De plus, d'après le Corollaire 5.1,  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur tout triangle de Delaunay de  $U$ . On en déduit directement le résultat suivant :

**Théorème 5.6** Une triangulation de segments de  $U$  est de Delaunay si et seulement si elle est induite par  $f_{U,\mathbf{S}}$ .

Le graphe de la fonction  $f_{U,\mathbf{S}}$  est aussi appelé le relèvement de la triangulation de Delaunay de  $U$  (voir Figure 5.11). Il reste encore à définir le relèvement d'une triangulation de segments quelconque de  $U$ .

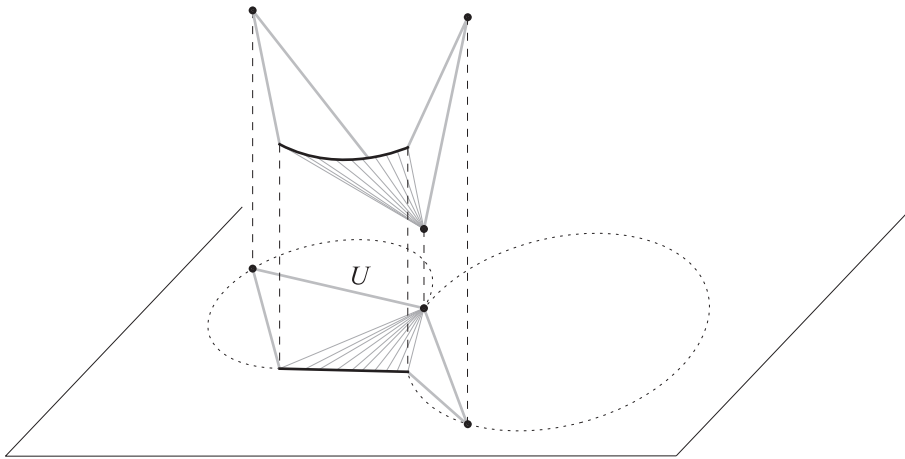


FIGURE 5.11 – Un  $S$ -polygone  $U$  et le graphe de la fonction  $f_{U,\mathbf{S}}$ .  $U$  peut être partitionné de la manière suivante : d'une part, on a les sites de  $S$  et, d'autre part, on a deux triangles ouverts et une infinité de segments ouverts sur lesquels  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine. Chaque composante connexe de la réunion de ces segments est une des cinq arêtes de la triangulation de Delaunay de segments de  $U$ .

### 5.4.3 Relèvement d'une triangulation de segments

**Définition 5.4** Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation de segments de  $U$ . La fonction  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}} : U \rightarrow \mathbf{R}$  est définie de la manière suivante :

- $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}(p) = f(p)$  si  $p$  est un point de  $\mathbf{S}$ ,
- $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}(p) = f_{\bar{e},\mathbf{S}}(p)$  si  $p$  appartient à une arête  $e$  de  $\mathcal{T}$ ,
- $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}(p) = f_{\bar{t},\mathbf{S}}(p)$  si  $p$  est à l'intérieur d'un triangle de  $\mathcal{T}$ .

**Théorème 5.7** Pour toute triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $U$ ,  $f_{U,\mathbf{S}} \leq f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$ .

*Preuve.* Soit  $e$  une arête de  $\mathcal{T}$ . D'après la Définition 5.3,  $f_{\bar{e},\mathbf{S}}$  est le supremum d'une famille de fonctions localement convexes qui sont inférieures ou égales à  $f$  sur  $\bar{e} \cap \mathbf{S}$ . Comme  $\bar{e} \subset U$ , on a aussi  $(\bar{e} \cap \mathbf{S}) \subset (U \cap \mathbf{S})$ . Cela implique que la fonction  $f_{U,\mathbf{S}}$  fait partie de la famille de fonctions qui définit  $f_{\bar{e},\mathbf{S}}$ . On déduit que  $f_{U,\mathbf{S}} \leq f_{\bar{e},\mathbf{S}}$ . Avec le même raisonnement, on prouve que  $f_{U,\mathbf{S}} \leq f_{\bar{t},\mathbf{S}}$  pour tout triangle  $t$  de  $\mathcal{T}$  et on en conclut que  $f_{U,\mathbf{S}} \leq f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$ .  $\square$

## 5.5 Preuves des principaux résultats

Dans cette section, nous donnons les preuves des Théorèmes 5.3, 5.4 et 5.5.

### 5.5.1 Preuve du Théorème 5.3

**Lemme 5.1** Soient  $p, q$  et  $r$  trois points de  $U$  tels que :

- il existe une boule  $B(p, \rho)$  de centre  $p$  et de rayon  $\rho > 0$  telle que  $B(p, \rho) \cap \text{conv}(\{p, q, r\})$  soit inclus dans  $U$ ,
- les segments ouverts  $]p, q[$  et  $]p, r[$  sont inclus dans  $U \setminus \mathbf{S}$ ,
- l'intérieur du triangle  $\text{conv}(\{p, q, r\})$  ne contient aucun point  $u$  de  $\mathbf{S}$  tel que le segment  $[p, u]$  soit inclus dans  $U$ .

Alors le triangle  $\text{conv}(\{p, q, r\})$  est inclus dans  $U$ .

*Preuve.* Soit  $E$  l'ensemble des points  $x$  à l'intérieur du triangle  $t = \text{conv}(\{p, q, r\})$  tels qu'il existe un segment  $[p, x]$  inclus dans  $U$ , où  $x$  est dans  $\partial(U)$ . Il suffit de prouver que  $E = \emptyset$ . Supposons que  $E \neq \emptyset$  et montrons qu'il y a une contradiction. Comme  $U$  est fermé, on peut choisir le point  $u$  dans  $E$  tel qu'il n'y a aucun point de  $E$  à l'intérieur du triangle  $t'$  défini par les droites  $(p, q)$ ,  $(p, r)$  et la droite parallèle à  $(q, r)$  passant par  $u$  (voir Figure 5.12). Par hypothèse,  $u$  ne peut pas être dans  $\mathbf{S}$  et, comme  $U$  est un  $S$ -polygone,  $u$  est nécessairement sur un segment  $]s_1, s_2[$  de la frontière de  $U$  tel que  $s_1, s_2$  sont dans  $\mathbf{S}$  et  $]s_1, s_2[ \cap \mathbf{S} = \emptyset$ . Il est évident qu'un segment inclus dans  $U$  ne peut pas traverser  $]s_1, s_2[$ . Donc  $[s_1, s_2]$

ne traverse ni  $[p, q]$ , ni  $[p, r]$ . On en déduit que  $s_1$  ou  $s_2$  est dans  $t'$ . Supposons que  $s_1$  est dans  $t'$ . D'après la manière dont on a choisi  $u$ ,  $[p, s_1]$  n'est pas inclus dans  $U$ . Donc, on peut trouver un point  $v$  de  $\partial(U)$  dans  $[p, s_1]$  tel que  $[p, v]$  est dans  $U$ . Cela contredit la définition de  $u$ .  $\square$

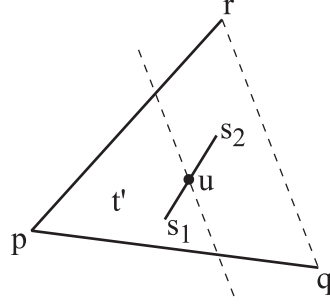


FIGURE 5.12 – Illustration de la preuve du Lemme 5.1.

**Lemme 5.2** Soient  $p$  un point de  $U^\circ \setminus \mathbf{S}$  et  $H$  un demi-plan fermé tels que  $p \in \partial(H)$ . Alors il existe un point  $q \in \mathbf{S} \cap (\mathbf{R}^2 \setminus H)$  tel que  $[p, q[$  est inclus dans  $U \setminus \mathbf{S}$ .

*Preuve.* On peut trouver un point  $u \in \partial(U)$  tel que  $u \in \mathbf{R}^2 \setminus H$  et  $[p, u] \subset U$ . Si  $[p, u] \cap \mathbf{S} \neq \emptyset$ , alors le résultat est vrai. Sinon, cela signifie que  $u$  est contenu dans un segment  $]s_1, s_2[$  de  $\partial(U)$  tel que  $s_1, s_2 \in \mathbf{S}$  et  $]s_1, s_2[ \cap \mathbf{S} = \emptyset$  (voir Figure 5.13 (a)). Au moins un des sommets  $s_1$  et  $s_2$  est dans  $\mathbf{R}^2 \setminus H$  : on note  $s$  ce sommet. Soit  $v$  le point de  $\mathbf{S}$  dans le triangle  $t = \text{conv}(\{p, u, s\})$  tel que l'angle en  $p$  est minimal. Le triangle  $t' = puv$  ne contient aucun point de  $\mathbf{S}$ , sauf sur son côté  $pv$ . Si le segment  $[p, v[$  est inclus dans  $U$ , alors le résultat est vrai. Sinon, il existe un point  $r$  dans  $\partial(U)$  et dans  $[p, v]$  tel que  $[p, r[$  est inclus dans  $U^\circ$  (voir Figure 5.13 (b)). Si  $[p, r]$  rencontre  $\mathbf{S}$ , alors le résultat est vrai. Sinon,  $r$  est contenu dans un segment  $]r_1, r_2[$  de  $\partial(U)$  tel que  $r_1, r_2 \in \mathbf{S}$  et  $]r_1, r_2[ \cap \mathbf{S} = \emptyset$ . Donc, un des sommets  $r_1$  et  $r_2$  est à l'intérieur de  $t'$ , ce qui contredit la définition de  $v$ .  $\square$

**Lemme 5.3** Soient  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction convexe,  $U$  un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^n$ ,  $A$  un sous-ensemble convexe fermé de  $\mathbf{R}^n$ ,  $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction convexe et  $W$  une composante connexe de  $A^\circ \cap U$ .

Si  $\phi \geq f$  sur  $A$  et si  $\phi = f$  sur  $\partial(A)$ , alors la fonction  $g : U \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$g = \begin{cases} f \text{ sur } U \setminus W \\ \phi \text{ sur } W \end{cases}$$

est localement convexe sur  $U$ .

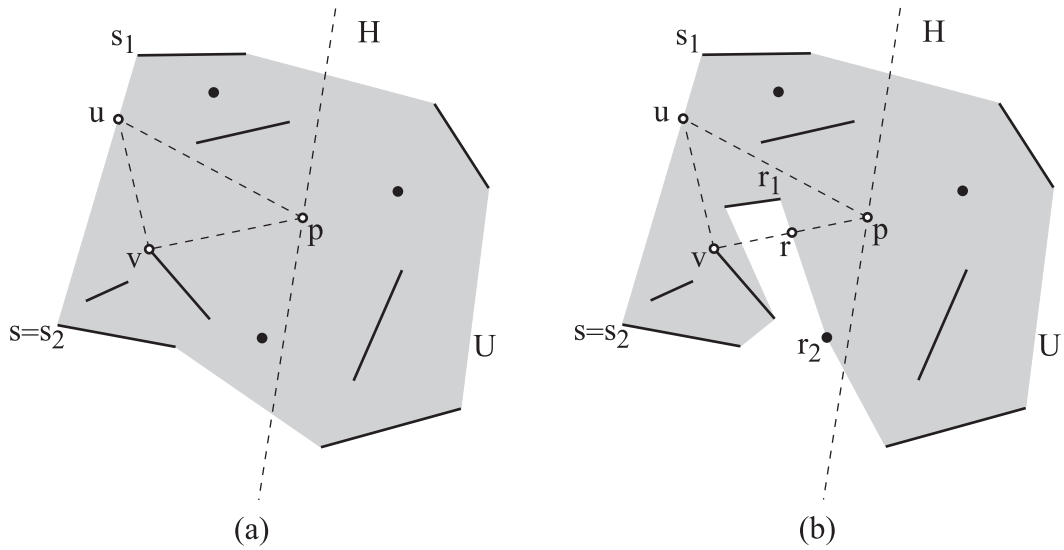


FIGURE 5.13 – Illustration de la preuve du Lemme 5.2.

*Preuve.* Soient  $p$  et  $q$  deux points de  $U$  tels que le segment  $[p, q]$  soit inclus dans  $U$ . Montrons que la restriction  $g_{|[p, q]}$  de  $g$  à  $[p, q]$  est convexe. Si  $[p, q]$  ne rencontre pas  $W$ , alors  $g_{|[p, q]} = f$  sur  $[p, q]$  et  $g_{|[p, q]}$  est convexe sur  $[p, q]$ . On peut remarquer que  $I = [p, q] \cap W$  est un intervalle. En effet, soient  $r$  et  $s$  deux points de  $W \cap [p, q]$  (voir Figure 5.14). Comme  $A^\circ$  est convexe,  $[r, s]$  est inclus dans  $A^\circ$ . De plus,  $[r, s] \subset [p, q] \subset U$ , donc  $[r, s] \subset U \cap A^\circ$ . D'après la définition d'une composante connexe,  $[r, s]$  est inclus dans  $W$ . Dans la suite,  $r$  et  $s$  sont les extrémités de  $I$ .

1. Supposons que  $r, s \in \partial(A)$ . D'après la définition de la fonction  $g$ ,  $g_{|[p, q]}$  est égal à  $f$  sur  $[p, r]$ , à  $\phi$  sur  $[r, s]$  et à  $f$  sur  $[s, q]$ . Si  $r = s$ , alors  $g_{|[p, q]} = f$  sur  $[p, q]$  et  $g_{|[p, q]}$  est convexe sur  $[p, q]$ . Supposons maintenant que  $r \neq s$ . D'une part, sur le segment  $[r, s]$ , la fonction  $\phi$  est convexe,  $\phi \geq f$  et  $g = \phi$ . D'autre part,  $g = f$  sur  $[p, r]$  et  $f(r) = \phi(r)$ . Donc la dérivée à droite de  $\phi$  en  $r$  est supérieure à la dérivée à droite de  $f$  en  $r$ . On en déduit que  $g_{|[p, q]}$  est convexe sur  $[p, s]$ . De la même manière, en utilisant les dérivées à gauche de  $\phi$  et de  $f$  en  $s$ , on peut montrer que  $g_{|[p, q]}$  est convexe sur  $[r, q]$ , ce qui montre que  $g_{|[p, q]}$  est convexe sur  $[p, q]$ .

2. Supposons que  $r, s \in A^\circ$  et montrons que  $r = p$  et  $s = q$ . Supposons, au contraire, que l'intervalle  $[p, r]$  n'est pas vide et montrons qu'il y a une contradiction. Comme  $r \in A^\circ$ , il existe un point  $r' \in [p, r[$  tel que  $[r', r] \subset A^\circ$ . Or  $[r', r] \subset [p, q] \subset U$ , donc  $[r, r'] \subset U \cap A^\circ$ . On en déduit que  $r$  et  $r'$  sont dans la même composante connexe de  $U \cap A^\circ$ , ce qui contredit le fait que  $r$  soit une



extrémité de  $I$ . De la même manière, on peut prouver que  $s = q$ . Par conséquent,  $g_{[p,q]} = \phi$  sur  $[p, q]$  et, finalement,  $g_{[p,q]}$  est convexe.

3. Supposons que  $r \in \partial(A)$  et  $s \in A^\circ$ . Dans ce cas, on peut montrer (comme dans le deuxième cas) que  $s = q$  et le résultat s'obtient en appliquant le raisonnement du premier cas.  $\square$

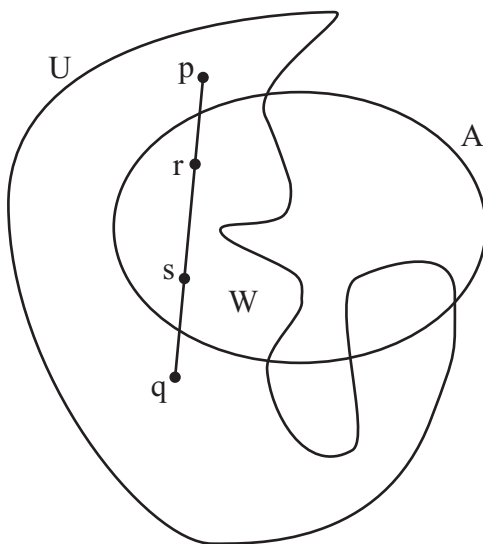


FIGURE 5.14 – Illustration de la preuve du Lemme 5.3.

### Preuve du Théorème 5.3

Nous commençons par prouver le résultat lorsque  $U = \text{conv}(\mathbf{S})$ . Dans ce cas, le théorème est une reformulation d'un résultat classique sur les sous-ensembles convexes fermés de  $\mathbf{R}^d$  [20] : les intérieurs relatifs des faces d'un sous-ensemble convexe fermé de  $\mathbf{R}^d$  forment une partition de ce sous-ensemble. Soit  $E = \{(x, f(x)) : x \in \mathbf{S}\}$  le relèvement de  $S$  sur le paraboloïde défini par la fonction  $f$ . Les points extrémaux du sous-ensemble compact convexe  $\mathbf{K} = \text{conv}(E)$  sont exactement les points de  $E$  car  $f$  est strictement convexe. Pour tout point  $p$  de  $U$ , soit  $\varphi(p) = \min\{z \in \mathbf{R} : (p, z) \in \mathbf{K}\}$ . Nous allons prouver que  $f_{U,\mathbf{S}} = \varphi$ .

Il est évident que  $\varphi$  est une fonction convexe sur  $U$  et que  $\varphi(p) = f(p)$  pour tout point  $p \in \mathbf{S}$ . On en déduit que  $\varphi \leq f_{U,\mathbf{S}}$ . Il reste à prouver que  $\varphi \geq f_{U,\mathbf{S}}$ .

Pour tout point  $p \in U$ , le point  $a = (p, \varphi(p))$  est dans  $\partial(\mathbf{K})$ . Donc le point  $a$  est dans l'intérieur relatif d'une face  $F$  de  $\mathbf{K}$  (de dimension  $\leq 2$ ). Soit  $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  la projection définie par  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  et soit  $G$  l'image de la face  $F$  par  $\pi$ . Montrons que, pour tout  $q \in G$ ,  $b = (q, \varphi(q))$  est l'unique point de  $F$  tel que  $\pi(b) = q$ .

Commençons par le cas où  $q = p$ . Supposons qu'il existe un point  $a' \in F$  tel que  $\pi(a') = p$  et  $a' \neq a$  et montrons que cela mène à une contradiction (voir Figure 5.15). Cela signifie qu'il existe un point  $a'' \in F$  tel que  $a \in ]a', a''[$  car  $a$  est dans l'intérieur relatif de  $F$ . Comme  $\pi(a') = p$  et comme  $\pi(a) = p$ , on a nécessairement  $\pi(a'') = p$  et on en déduit que  $a' = (p, z')$  et  $a'' = (p, z'')$ , où  $z'$  et  $z''$  sont des réels. Comme  $a \in ]a', a''[$ , on a  $z'$  ou  $z'' < \varphi(p)$ , ce qui contredit la définition de  $\varphi$ .

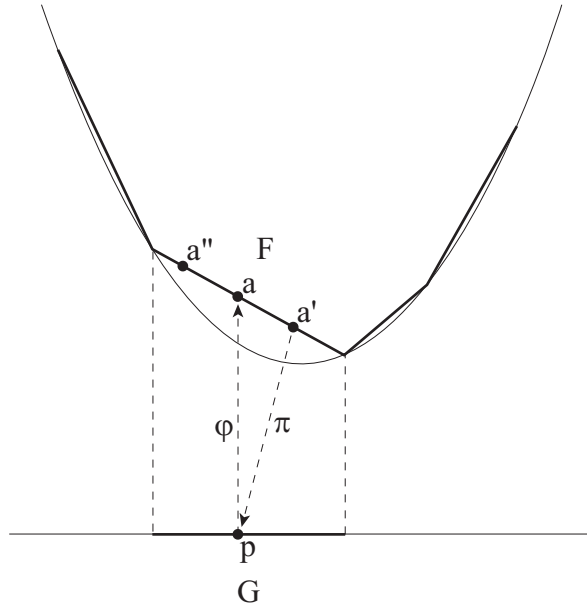


FIGURE 5.15 – Illustration de la preuve du Théorème 5.3 dans le cas où  $U = \text{conv}(\mathbf{S})$  et  $q = p$ .

Considérons maintenant le cas où  $q \neq p$  et  $b = (q, z_q) \in F$ . Comme  $a$  est dans l'intérieur relatif de  $F$ , il existe  $c = (r, z_r) \in F$  tel que  $a \in ]b, c[$  (voir Figure 5.16). D'après la définition de  $\varphi$ , on a  $\varphi(q) \leq z_q$  et  $\varphi(r) \leq z_r$ . Mais  $\varphi$  est convexe sur  $[q, r]$  et  $(p, \varphi(p))$  appartient au segment  $[b, c]$ . Par conséquent, pour tout  $x$  dans  $[q, r]$ ,  $(x, \varphi(x)) \in [b, c]$ , ce qui montre que  $z_q = \varphi(q)$ .

On en déduit que  $\varphi$  est affine sur  $G$ . En effet, si  $q$  et  $r$  sont deux points de  $G$  et si  $\lambda \in [0, 1]$ , alors le point  $(1 - \lambda)(q, \varphi(q)) + \lambda(r, \varphi(r))$  est dans  $F$  et sa projection est  $(1 - \lambda)q + \lambda r$ . D'où, par unicité,  $\varphi((1 - \lambda)q + \lambda r) = (1 - \lambda)\varphi(q) + \lambda\varphi(r)$ .

Étant donné que  $G = \pi(F)$ , les points extrémaux de  $G$  sont des projections de points extrémaux de  $F$ , qui sont tous dans  $E$ . Donc les points extrémaux de  $G$  sont dans  $\mathbf{S}$ . Finalement, comme  $\varphi = f$  sur  $\mathbf{S}$ , comme  $\varphi$  est affine sur  $G$  et comme  $f_{U, \mathbf{S}}$  est convexe sur  $G$ , on obtient  $\varphi \geq f_{U, \mathbf{S}}$  sur  $G$ . Cela prouve le résultat dans le cas où  $U = \text{conv}(\mathbf{S})$  :

$$p \in G, S_p = \text{Ext}(G) \subset \mathbf{S}, f_{U, \mathbf{S}} = \varphi \text{ et } \varphi \text{ est affine sur } G.$$

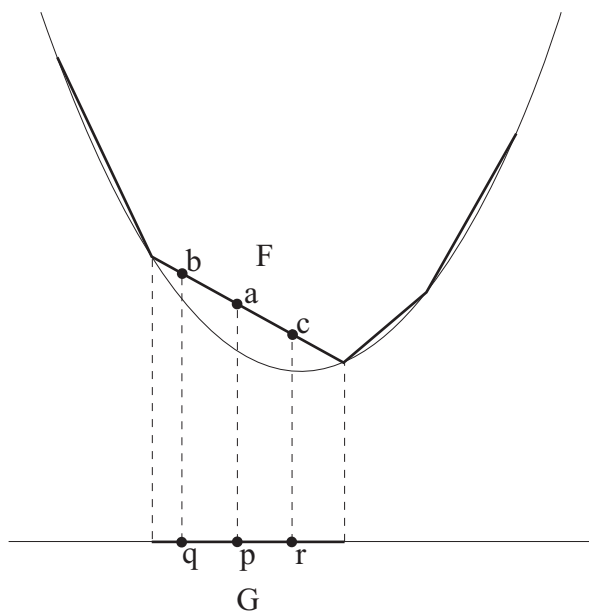


FIGURE 5.16 – Illustration de la preuve du Théorème 5.3 dans le cas où  $U = \text{conv}(\mathbf{S})$  et  $q \neq p$ .

Pour prouver le théorème dans le cas général, nous avons besoin d'un résultat plus précis pour tout point  $p$  à l'intérieur de  $U = \text{conv}(\mathbf{S})$  : il faut prouver qu'il existe une fonction affine  $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $f_{U,\mathbf{S}} = h$  sur  $G$  et telle que  $h \leq f$  sur  $\mathbf{S}$ .

Soit  $H$  un plan supportant de  $\mathbf{K}$  tel que  $a = (p, \varphi(p)) \in H$ . Comme  $p$  est à l'intérieur de  $U$ , l'hyperplan  $H$  ne peut pas être vertical. Donc  $H$  est le graphe d'une fonction affine  $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . Commençons par montrer que  $\mathbf{K}$  est au-dessus de  $H$ . Si  $\mathbf{K}$  contient un point  $(q, z)$  tel que  $z < h(q)$ , alors  $\mathbf{K}$  est inclus dans le demi-plan fermé  $\{(x, y) : y \leq h(x)\}$ . De plus, il existe un point  $r \in U$  tel que  $p = (1 - \lambda)q + \lambda r$ , où  $\lambda \in ]0, 1[$ . Comme  $\varphi$  est convexe, on a  $\varphi(p) \leq (1 - \lambda)\varphi(q) + \lambda\varphi(r)$ . D'après la définition de  $\varphi$ ,  $\varphi(q) \leq z$  et comme  $(r, \varphi(r))$  est dans  $\mathbf{K}$ , on a  $\varphi(r) \leq h(r)$ . D'où :

$$\varphi(p) \leq (1 - \lambda)z + \lambda h(r) < (1 - \lambda)h(q) + \lambda h(r) = h(p),$$

ce qui est impossible, car  $(p, \varphi(p))$  est dans  $H$ . On en déduit que  $\mathbf{K}$  est au-dessus de  $H$  et que  $h \leq f$  sur  $\mathbf{S}$ . Finalement,  $D = H \cap \mathbf{K}$  est une face de  $\mathbf{K}$  qui contient le point  $a = (p, \varphi(p))$  et cette face  $D$  contient une face  $F$  telle que  $a \in \text{relint}(F)$ . Comme précédemment, on peut prouver que  $f_{U,\mathbf{S}} = \varphi = h$  sur  $G = \pi(F)$ . On obtient le résultat suivant :

Pour tout point  $p$  à l'intérieur de  $U$ , il existe une fonction affine  $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  et un sous-ensemble  $S_p$  de  $\mathbf{S}$  tels que  $h \leq f$  sur  $\mathbf{S}$ ,  $h = f$  sur  $S_p$ ,  $p \in \text{conv}(S_p)$  et  $f_{U,\mathbf{S}} = h$  sur  $\text{conv}(S_p)$ .

Pour prouver le premier point du théorème dans le cas général, nous allons appliquer ce résultat au sous-ensemble convexe  $V_p = \text{conv}(\overline{Vis_p})$  à la place de  $U$ . Si  $p$  est dans  $\mathbf{S}$  ou dans  $\partial(U)$ , la preuve est triviale. Si  $p \in U^\circ \setminus \mathbf{S}$ , alors on procède en cinq étapes.

**Étape 1.** *Nous prouvons que  $p$  est à l'intérieur de  $V_p = \text{conv}(\overline{Vis_p})$ .*

Si  $p \notin V_p^\circ$ , alors il existe un demi-plan fermé  $H$  tel que  $p \in \partial(H)$  et  $V_p \subset H$ . D'après le Lemme 5.2, il existe un point  $q \in \mathbf{S} \setminus H$  tel que  $[p, q] \subset U \setminus \mathbf{S}$ . Donc  $q \in Vis_p$ , ce qui contredit le fait que  $Vis_p \subset V_p \subset H$ .

**Étape 2.** *Il existe une fonction affine  $h_p$  définie sur  $\mathbf{R}^2$  et un sous-ensemble  $S_p$  de  $\overline{Vis_p}$  (qui contient deux ou trois points) tels que  $h_p \leq f$  sur  $\overline{Vis_p}$ ,  $f = h_p$  sur  $S_p$  et  $p \in \text{conv}(S_p)$  (cela signifie que  $f_{V_p,\mathbf{S}} = h_p$  sur  $\text{conv}(S_p)$ ).*

Ce résultat découle directement de l'utilisation du théorème dans le cas convexe, en remplaçant  $U$  par  $V_p = \text{conv}(\overline{Vis_p})$  et  $S$  par  $\overline{Vis_p}$ .

**Étape 3.** *Nous prouvons que  $\text{conv}(S_p) \subset U$ .*

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points  $q \in \text{conv}(S_p)$  tels que  $[p, q] \subset U$ . Il faut montrer que  $\mathcal{C} = \text{conv}(S_p)$ . Comme chaque point  $q$  de  $S_p$  est aussi dans  $\mathcal{C}$ , il suffit de prouver que  $\mathcal{C}$  est convexe. Soient  $q$  et  $q'$  deux points de  $\mathcal{C}$ . Si  $q$ ,  $q'$  et  $p$  sont alignés, alors  $[q, q'] \subset [p, q] \cup [p, q'] \subset U$ . Donc  $[q, q'] \in \mathcal{C}$ . Il reste à étudier le cas où  $q$ ,  $q'$  et  $p$  ne sont pas alignés. Comme  $p$  n'est pas dans  $S$ ,  $p$  n'est pas non plus dans  $S_p$ . On sait que  $f$  est strictement convexe, donc, d'une part,  $f(p) < h_p(p)$  et, d'autre part  $\text{conv}(\{p, q, q'\}) \setminus \{q, q'\}$  est inclus dans  $\{x \in \mathbf{R}^2 : f(x) < h_p(x)\}$ . De plus,  $h_p \leq f$  sur  $Vis_p$ , donc  $\text{conv}(\{p, q, q'\}) \setminus \{q, q'\}$  ne peut pas contenir un point  $s \in \mathbf{S}$  tel que  $[p, s] \subset U \setminus \mathbf{S}$ . D'après le Lemme 5.1,  $\text{conv}(\{p, q, q'\}) \subset U$ . On en déduit que  $[q, q'] \in \mathcal{C}$  et que  $\mathcal{C} = \text{conv}(S_p)$ .

**Étape 4.** *Nous prouvons que  $f_{U,\mathbf{S}} \leq h_p$  sur  $\text{conv}(S_p)$ .*

On sait que  $f_{U,\mathbf{S}}$  est convexe sur  $\text{conv}(S_p)$  et que  $f_{U,\mathbf{S}} = f = h_p$  sur  $S_p$ , d'où le résultat.

**Étape 5.** *Nous prouvons que  $f_{U,\mathbf{S}} = h_p$  sur  $\text{conv}(S_p)$ .*

Soit  $A$  le sous-ensemble convexe de  $\mathbf{R}^2$  où  $f \leq h_p$ . Comme  $p$  n'est ni dans  $\mathbf{S}$ , ni dans  $S_p$  et comme  $f$  est strictement convexe, on a  $f(p) < h_p(p)$ . On en déduit

que  $p$  est dans l'intérieur  $A^\circ$  de  $A$ . Soit  $W$  la composante connexe de  $U \cap A^\circ$  qui contient  $p$ . D'après le Lemme 5.3, la fonction  $g : U \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$g = \begin{cases} f \text{ sur } U \setminus W \\ h_p \text{ sur } W \end{cases}$$

est localement convexe sur  $U$ . Si  $g \leq f$  sur  $\mathbf{S} \cap U$ , alors  $f_{U,\mathbf{S}} \geq g$ . Comme  $S_p \subset \{h_p = f\}$  et comme  $\text{conv}(S_p) \setminus S_p \subset W$ , on a  $g = h_p$ . On en conclut que  $f_{U,\mathbf{S}} \geq h_p$  sur  $\text{conv}(S_p)$ . Pour obtenir ce résultat, il suffit donc de prouver que  $g \leq f$  sur  $\mathbf{S} \cap U$ .

Cela revient à prouver que  $W$  ne contient aucun point de  $\mathbf{S}$ . Supposons au contraire qu'il existe un point  $q \in \mathbf{S} \cap W$  et montrons qu'il y a une contradiction.

Comme  $W$  est connexe par arc, il existe un chemin  $\gamma$  qui joint  $p$  à  $q$  dans  $W$ . Dans la suite, nous souhaiterions utiliser un plus court chemin qui joigne  $p$  à  $q$  dans  $W$ . Cependant, comme  $W$  n'est pas fermé, un tel chemin n'existe pas nécessairement. Pour s'assurer de l'existence d'un plus court chemin de  $p$  à  $q$ , il ne faut pas considérer  $W$  mais plutôt un sous-ensemble de  $W$  qui soit fermé. Par continuité, la distance  $\delta = d(\gamma, \partial(A))$  de  $\gamma$  à la frontière de  $A$  est strictement positive. Soit  $A_\delta = \{x \in A : d(x, \partial(A)) \geq \delta\}$  (voir Figure 5.17). Il est évident que  $A_\delta$  est fermé et convexe et que  $A_\delta$  contient le chemin  $\gamma$ . On considère maintenant  $A_\delta \cap W$  et, pour montrer l'existence d'un plus court chemin de  $p$  à  $q$  dans  $A_\delta \cap W$ , il reste à montrer que  $A_\delta \cap W$  est fermé.

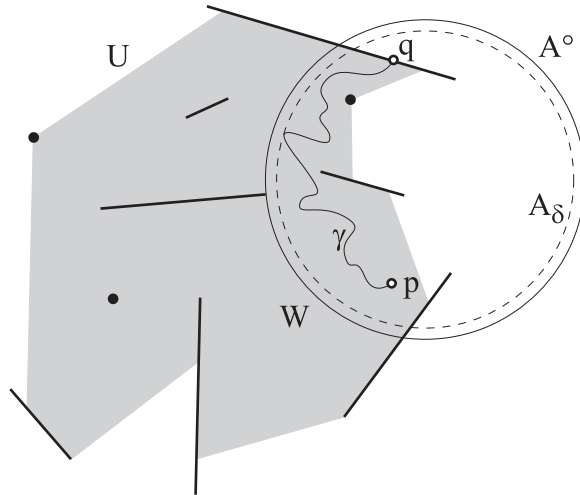


FIGURE 5.17 – Illustration de l'étape 5 de la preuve du Théorème 5.3.

Cela revient à montrer que  $\overline{A_\delta \cap W} = A_\delta \cap W$ . Il suffit donc de prouver que  $\forall x \in \overline{A_\delta \cap W}$ , alors  $x \in A_\delta \cap W$ . En effet, si  $x \in \overline{A_\delta \cap W}$ , alors  $x \in U$ . Comme  $U$  est un  $S$ -polygone, on en déduit qu'il existe une boule  $B(x, r)$  avec  $r > 0$  telle

que  $U_x = B(x, r) \cap U$  soit étoilé par rapport à  $x$ . Cela signifie que  $U_x$  est connexe. Comme  $A^\circ$  est convexe, on en déduit que  $W_x = U_x \cap A^\circ$  est aussi étoilé par rapport à  $x$  et est aussi connexe. De plus, comme  $B(x, r) \cap W \cap A_\delta$  n'est pas vide et est inclus dans  $W_x$ ,  $W_x$  contient au moins un point de  $W$ . D'après la définition d'une composante connexe, comme  $W_x \subset (A^\circ \cap U)$  et comme  $W_x$  contient au moins un point de  $W$ , on a  $W_x \subset W$  et  $x \in W$ . De plus,  $A_\delta$  est fermé, donc  $x \in A_\delta$ . On en déduit que  $x \in A_\delta \cap W$ , ce qui implique que  $A_\delta \cap W$  est fermé.

Par conséquent, il existe un plus court chemin  $\gamma_\delta$  qui joint  $p$  à  $q$  dans  $A_\delta \cap W$ . Montrons maintenant que  $\gamma_\delta$  est rectiligne entre les points de  $\mathbf{S}$ . Supposons le contraire, et montrons qu'il y a une contradiction. Soit  $x$  un point de  $\gamma_\delta$  et soient  $p_1$  et  $p_2$  les points d'intersection de  $\gamma_\delta$  avec la boule  $B(x, r)$ ,  $r > 0$  (voir Figure 5.18). Pour tout point  $x$  de  $U \setminus \mathbf{S}$ , il existe  $r > 0$  tel que  $U \cap B(x, r)$  soit convexe, donc, pour tout  $x$  dans  $A_\delta \cap W \setminus \mathbf{S}$ , il existe  $r > 0$  tel que  $A_\delta \cap W \cap B(x, r)$  soit convexe. Comme le voisinage de  $x$  dans  $A_\delta \cap W$  est convexe, le plus court chemin qui joint  $p_1$  à  $p_2$  est nécessairement le segment  $[p_1, p_2]$ . Or,  $x \notin [p_1, p_2]$  et cela contredit le fait que  $\gamma_\delta$  est le plus court chemin qui joint  $p$  à  $q$  dans  $A_\delta \cap W$ .

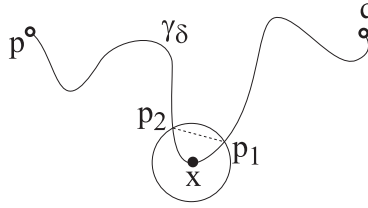


FIGURE 5.18 – Illustration de l'étape 5 de la preuve du Théorème 5.3.

Soit  $q'$  le premier point de  $\mathbf{S}$  rencontré par  $\gamma_\delta$ . Le segment  $[p, q']$  est dans  $A_\delta \cap W$  et  $[p, q']$  ne contient aucun point de  $\mathbf{S}$ , donc  $q'$  est dans  $Vis_p$ . De plus,  $q' \in A_\delta \subset A^\circ$  et  $f$  est strictement convexe, donc  $f(q') < h_p(q')$ , ce qui contredit la définition de  $h_p$ .

On en déduit que  $W$  ne contient aucun point de  $\mathbf{S}$  et que  $g \leq f$  sur  $\mathbf{S} \cap U$ . Finalement, cela permet de conclure que  $f_{U, \mathbf{S}} \geq h_p$  sur  $conv(S_p)$ .

La preuve du deuxième point du théorème se déduit facilement de la preuve du premier.  $\square$

La preuve du Théorème 5.3 utilise une propriété géométrique importante de  $U$  : pour tout point  $p$  de  $U \setminus \mathbf{S}$ , il existe une boule  $B(p, r)$ ,  $r > 0$ , telle que  $U \cap B(p, r)$  soit convexe. C'est la raison pour laquelle ce théorème semble difficile à étendre en dimension supérieure.

### 5.5.2 Preuve du Théorème 5.4

**Lemme 5.4** Soient  $p_0, p_1, q_0$  et  $q_1$  quatre points de  $U$  tels que :

- les segments  $[p_0, p_1]$  et  $[q_0, q_1]$  sont inclus dans  $U$ ,
- l'intersection  $]p_0, p_1[ \cap ]q_0, q_1[$  contient au moins un point  $p$
- la fonction  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur les deux segments  $[p_0, p_1]$  et  $[q_0, q_1]$ .

Alors le quadrilatère  $\mathcal{Q} = \text{conv}(\{p_0, p_1, q_0, q_1\})$  est inclus dans  $U$  et la fonction  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $\mathcal{Q}$ .

*Preuve.* Si les quatre points  $p_0, p_1, q_0, q_1$  sont alignés, alors le résultat est trivial. Le point  $p$  est dans l'intérieur de  $\mathcal{Q}$ . Soit  $h_p$  la fonction affine égale à  $f_{U, \mathbf{S}}$  en  $p_0, p_1$  et  $q_0$ . Comme  $f_{U, \mathbf{S}}$  et  $h_p$  sont affines sur  $[p_0, p_1]$  et comme elles sont égales en  $p$  et  $q_0$ , cela signifie qu'elles sont égales sur tout le segment  $[q_0, q_1]$ . Par conséquent,  $h_p$  et  $f_{U, \mathbf{S}}$  sont égales sur  $[p_0, p_1]$  et sur  $[q_0, q_1]$ .

L'application  $f$  est strictement convexe,  $f_{U, \mathbf{S}}(p_0) \geq f(p_0)$ ,  $f_{U, \mathbf{S}}(p_1) \geq f(p_1)$  et  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $[p_0, p_1]$ , donc  $f_{U, \mathbf{S}}(p) > f(p)$  et  $p \notin \mathbf{S}$ .

Montrons que l'intérieur  $\omega$  de  $\mathcal{Q}$  ne contient pas de point de  $\mathbf{S}$  visible depuis  $p$ . Soit  $q$  un point de  $\omega$  tel que  $[p, q] \subset U$ . Comme  $p \notin \mathbf{S}$ , il existe un voisinage convexe de  $p$  dans  $U$ . Comme  $p \in ]p_0, p_1[ \cap ]q_0, q_1[$  et comme  $p_0, p_1, q_0$  ne sont pas colinéaires, le voisinage convexe de  $p$  dans  $U$  contient forcément deux points de  $[p_0, p_1]$  et deux points de  $[q_0, q_1]$  qui sont les sommets d'un quadrilatère qui contient  $p$  dans son intérieur et qui est inclus dans le voisinage convexe de  $p$  dans  $U$ . Donc, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que la boule  $B(p, \varepsilon)$  soit incluse dans  $U$ . Par conséquent il existe un point  $q' \in B(p, \varepsilon)$  tel que  $p \in ]q', q[$  et tel que  $q'$  soit le barycentre de deux points  $p_2, q_2$  appartenant respectivement aux segments  $[p_0, p_1] \cap B(p, \varepsilon)$  et  $[q_0, q_1] \cap B(p, \varepsilon)$  (voir Figure 5.19). Comme  $q' \in [p_2, q_2] \subset U$ , comme  $f_{U, \mathbf{S}}$  est convexe sur  $[p_2, q_2]$  et comme  $h_p$  est affine sur  $[p_2, q_2]$ , on a  $f_{U, \mathbf{S}}(q') \leq h_p(q')$ . De plus, comme  $f_{U, \mathbf{S}}(p) = h_p(p)$  et comme  $f_{U, \mathbf{S}}$  est convexe sur  $[q', q]$ , on en déduit que  $f_{U, \mathbf{S}}(q) \geq h_p(q)$ . Or  $q \in \omega$ ,  $h_p \geq f$  en  $p_0, p_1, q_0, q_1$  et  $f$  est strictement convexe donc  $h_p(q) > f(q)$ . Par conséquent,  $f_{U, \mathbf{S}}(q) > f(q)$  et  $q \notin \mathbf{S}$ .

Comme  $\omega$  ne contient pas de point de  $\mathbf{S}$  visible depuis  $p$ , le Lemme 5.1 montre que les quatre triangles  $\text{conv}(\{p, p_0, p_1\})$ ,  $\text{conv}(\{p, p_0, q_0\})$ ,  $\text{conv}(\{p, p_1, q_0\})$  et  $\text{conv}(\{p, q_0, q_1\})$  sont inclus dans  $U$ , donc  $\mathcal{Q}$  est inclus dans  $U$ . La convexité de  $f_{U, \mathbf{S}}$  sur  $\mathcal{Q}$  et l'égalité de  $f_{U, \mathbf{S}}$  et de  $h_p$  sur  $[p_0, p_1] \cup [q_0, q_1]$  montrent que  $f_{U, \mathbf{S}} = h_p$  sur  $\mathcal{Q}$ .  $\square$

**Définition 5.5** Un convexe est relativement ouvert si il est ouvert dans la variété affine qu'il engendre.

**Lemme 5.5** Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux convexes relativement ouverts de  $\mathbf{R}^n$ . Si  $C_1$  et  $C_2$  ont une intersection non vide alors  $\text{conv}(C_1 \cup C_2)$  est relativement ouvert.

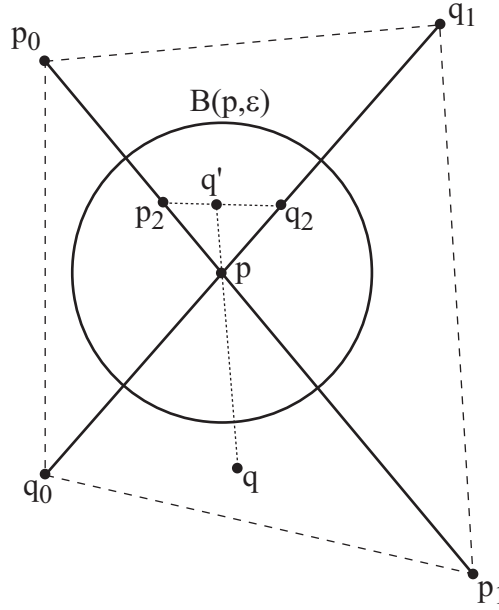


FIGURE 5.19 – Illustration de la preuve du Lemme 5.4.

*Preuve.* On peut supposer que 0 est un point d'intersection de  $C_1$  et  $C_2$ . Soient  $d$  la dimension de  $\text{conv}(C_1 \cup C_2)$  et  $p \in \text{conv}(C_1 \cup C_2)$ . D'après le théorème de Carathéodory, il existe  $d+1$  points  $p_0, p_1, \dots, p_d \in C_1 \cup C_2$  affinement indépendants et  $\alpha_0, \dots, \alpha_d$  des réels positifs de somme 1 tels que  $p = \sum_{i=0}^d \alpha_i p_i$ . La démonstration du théorème de Carathéodory montre que l'on peut supposer que  $p_0 = 0$ , on a alors  $p = \sum_{i=1}^d \alpha_i p_i$  où les  $\alpha_i$  sont des réels positifs de somme  $\leq 1$ . Comme  $C_1$  et  $C_2$  sont relativement ouverts, il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que pour chaque  $i \in \{1, \dots, d\}$  et chaque  $t_i \in [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$ , le point  $t_i p_i$  appartienne à  $C_1 \cup C_2$ . Par conséquent

$$C = \text{conv}\{-\varepsilon e_1, \dots, -\varepsilon e_d, (1 + \varepsilon)e_1, \dots, (1 + \varepsilon)e_d\}$$

est inclus dans  $\text{conv}(C_1 \cup C_2)$ . La boîte  $B = \{\sum_{i=1}^d x_i e_i : |x_i| \leq \frac{\varepsilon^2}{4d}, i = 1, \dots, d\}$  est un voisinage ( $d$ -dimensionnel) de 0 et on vérifie que

$$B + \text{conv}\{0, e_1, \dots, e_d\} \subset C.$$

Donc  $\text{conv}\{0, e_1, \dots, e_d\}$  est inclus dans l'intérieur de  $C$  et par conséquent,  $p$  est dans l'intérieur de  $C$ . On en déduit que  $p$  est dans l'intérieur de  $\text{conv}(C_1 \cup C_2)$ .  $\square$

#### Preuve du Théorème 5.4

Si  $p \in \mathbf{S}$ , alors, comme  $f$  est strictement convexe, l'ensemble  $\mathcal{C}_p$  contient un seul élément, c'est-à-dire  $\{p\}$ . Supposons maintenant que  $p \notin \mathbf{S}$ .



**Étape 1.** *Montrons que  $\mathcal{C}_p$  contient au moins un élément  $C$ .*

D'après le Théorème 5.3, il existe trois points  $a_p$ ,  $b_p$  et  $c_p$  de  $\mathbf{S}$  (ces points ne sont pas forcément distincts) tels que  $p \in t_p = \text{conv}(\{a_p, b_p, c_p\})$ ,  $t_p$  est inclus dans  $U$  et  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $t_p$ . Si  $p \in \text{relint}(t_p)$ , alors  $C = \text{relint}(t_p)$  est dans  $\mathcal{C}_p$ . Sinon,  $p$  est dans l'un des trois segments  $]a_p, b_p[$ ,  $]b_p, c_p[$  ou  $]c_p, a_p[$  et ce segment est dans  $\mathcal{C}_p$ .

**Étape 2.** *Montrons que si  $C_0$  et  $C_1$  sont dans  $\mathcal{C}_p$ , alors  $\text{conv}(C_0 \cup C_1)$  est aussi un élément de  $\mathcal{C}_p$ .*

Cela revient à prouver que, pour tous  $p_0 \in C_0$  et  $p_1 \in C_1$ , le segment  $[p_0, p_1]$  est inclus dans  $U$  et la fonction  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $[p_0, p_1]$ . Si  $p_0$  ou  $p_1$  est égal à  $p$ , alors le résultat est trivial. Considérons maintenant le cas où  $p_0$  et  $p_1$  sont différents de  $p$ . Comme  $C_0$  and  $C_1$  sont relativement ouverts, il existe  $q_0 \in C_0$  et  $q_1 \in C_1$  tels que  $p$  soit dans  $]p_0, q_0[$  et dans  $]p_1, q_1[$  (voir Figure 5.20). D'après le Lemme 5.4, le quadrilatère  $\mathcal{Q} = \text{conv}(\{p_0, p_1, q_0, q_1\})$  est inclus dans  $U$  et  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $\mathcal{Q}$ . Par conséquent,  $[p_0, p_1] \subset U$  et  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $[p_0, p_1]$ .

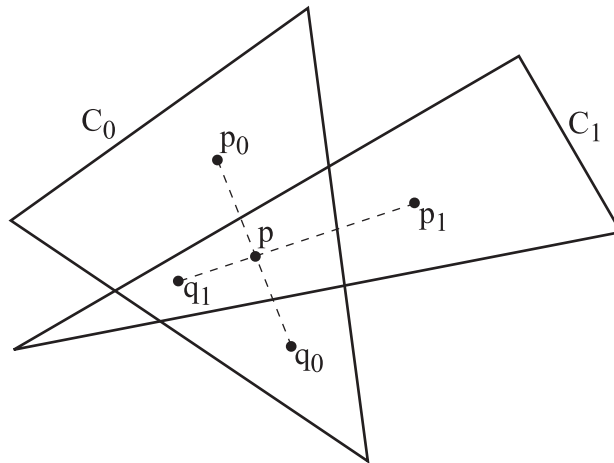


FIGURE 5.20 – Illustration de l'étape 2 de la preuve du Théorème 5.4.

**Étape 3.** *Montrons que  $\text{conv}(\cup_{C \in \mathcal{C}_p} C)$  est relativement ouvert.*

Soit  $C_p = \text{conv}(\cup_{C \in \mathcal{C}_p} C)$ . D'après l'étape 2,  $C_p$  est inclus dans  $U$  et  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $C_p$ . Il reste à montrer que  $C_p$  est relativement ouvert. Si  $C_p$  est contenu dans une droite, alors  $C_p = \cup_{C \in \mathcal{C}_p} C$  et il est clair que  $C_p$  est relativement ouvert.

Supposons maintenant que  $C_p$  est de dimension 2. D'après le Lemme 5.5, si  $C_0, \dots, C_n$  est une collection finie d'éléments de  $\mathcal{C}_p$ , alors  $\text{conv}(\cup_{i=0}^n C_i)$  est relativement ouvert. Supposons que  $C_0$  et  $C_1$  ne sont pas inclus dans une même droite. De plus, d'après le théorème de Carathéodory, pour tout point  $q$  de  $C_p$ , il existe

au plus trois éléments  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  dans  $\mathcal{C}_p$  tels que  $q \in \text{conv}(C_2 \cup C_3 \cup C_4)$ . Par conséquent,  $q$  est dans  $\text{conv}(\cup_{i=0}^4 C_i)$ , qui est ouvert dans  $\mathbf{R}^2$  d'après le Lemme 5.5. On en déduit que  $C_p$  est relativement ouvert.

**Étape 4.** *Montrons que  $C_p$  ne contient aucun point de  $\mathbf{S}$ .*

Supposons le contraire et montrons qu'il y a une contradiction. Si  $q$  est un point de  $C_p \cap \mathbf{S}$ , alors  $f(q) = f_{U,\mathbf{S}}(q)$ . Comme  $f$  est strictement convexe, on en déduit que, sur tout segment  $]r, s[ \subset U$  qui contient  $q$ ,  $f$  ne peut pas être inférieure ou égale à une fonction affine  $h$  telle que  $h(q) = f(q)$ . D'après l'étape 2,  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $C_p$ . Donc  $f > f_{U,\mathbf{S}}$  en au moins un point de  $]r, s[$ , ce qui contredit la définition de  $f_{U,\mathbf{S}}$ .

**Étape 5.** *Montrons que les points extrémaux de  $\overline{C_p}$  sont dans  $\mathbf{S}$ .*

Soit  $q$  un point extrémal de  $\overline{C_p}$ . Le point  $q$  est la limite d'une suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  de points de  $C_p$ . D'après le Théorème 5.3, pour tout  $n$ , il existe trois points  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  dans  $\mathbf{S}$  tels que  $t_n = \text{conv}(\{a_n, b_n, c_n\})$  soit inclus dans  $U$ ,  $q_n \in t_n$ , et  $f_{U,\mathbf{S}}$  soit affine sur  $t_n$ . D'après l'étape 4,  $q_n$  n'est égal ni à  $a_n$ , ni à  $b_n$ , ni à  $c_n$ . Donc on peut supposer que  $q_n \in \text{relint}(t_n)$ , en enlevant, si nécessaire l'un des points  $a_n$ ,  $b_n$  ou  $c_n$ .

Montrons maintenant que  $C'_p = \text{conv}(C_p \cup \text{relint}(t_n))$  est inclus dans  $U$  et que  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $C'_p$ . On effectue le même raisonnement qu'à l'étape 2 : il suffit de prouver que, pour tous  $p_0 \in C_p$  et  $p_1 \in \text{relint}(t_n)$ , le segment  $[p_0, p_1]$  est inclus dans  $U$  et la fonction  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $[p_0, p_1]$ . Si  $p_0$  ou  $p_1$  est égal à  $p$ , alors le résultat est trivial. Sinon, comme  $C_p$  et  $\text{relint}(t_n)$  sont relativement ouverts, il existe  $q_0 \in C_p$  et  $q_1 \in \text{relint}(t_n)$  tels que  $q_n$  soit dans  $]p_0, q_0[$  et dans  $]p_1, q_1[$ . D'après le Lemme 5.4, le quadrilatère  $\mathcal{Q} = \text{conv}(\{p_0, p_1, q_0, q_1\})$  est inclus dans  $U$  et  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $\mathcal{Q}$ . Par conséquent,  $[p_0, p_1] \subset U$  et  $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $[p_0, p_1]$ .

D'après le Lemme 5.5,  $C'_p$  est relativement ouvert. On en déduit que  $C'_p \in \mathcal{C}_p$ , ce qui montre que  $\text{relint}(t_n) \subset C_p$ . Par conséquent,  $t_n$  est inclus dans  $\overline{C_p}$ .

Comme  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  sont dans  $\mathbf{S} \cap \overline{C_p}$ , à une extraction d'une sous-suite près, on peut supposer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  et  $(c_n)_{n \geq 0}$  convergent vers trois points  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $\mathbf{S} \cap \overline{C_p}$ . Si on extrait encore une sous-suite, on peut également supposer que les suites des coefficients barycentriques de  $q_n$  convergent. On en déduit que  $q$  est barycentre des trois points  $a, b, c \in \mathbf{S} \cap \overline{C_p}$ . Étant donné que  $q$  est un point extrémal de  $\overline{C_p}$ , on obtient  $q = a$ ,  $b$ , ou  $c$ , ce qui montre que  $q$  est dans  $\mathbf{S}$ .

**Étape 6.** *Montrons que  $f_{U,\mathbf{S}} = h$  sur  $\overline{C_p}$ .*

Appelons  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  et  $\gamma_n$  les coefficients barycentriques de  $q_n$  par rapport au triplet  $(a_n, b_n, c_n)$ . Il y a différents cas à traiter suivant lesquels des points  $a$ ,  $b$  ou  $c$  sont égaux à  $q$ . Supposons par exemple que  $a = q$  et  $b, c \neq q$ . On a

$$q = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

où  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ ,  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$  et  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ , par conséquent  $\alpha = 1$  et  $\beta = \gamma = 0$ . De plus  $f_{U, \mathbf{S}}(q_n) = \alpha_n f(a_n) + \beta_n f(b_n) + \gamma_n f(c_n)$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{U, \mathbf{S}}(q_n) = \alpha f(a) = f(q).$$

Par définition de  $C_p$ ,  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $C_p$ . Il existe donc une fonction affine  $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $f_{U, \mathbf{S}} = h$  sur  $C_p$ . Comme  $h$  est continue, d'après ce qui précède, pour tout point extrémal  $q$  de  $\overline{C_p}$ ,

$$h(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{U, \mathbf{S}}(q_n) = f(q).$$

Comme  $f_{U, \mathbf{S}}$  est convexe sur  $\overline{C_p}$ ,  $f_{U, \mathbf{S}}$  ne peut pas être inférieure à  $h$  en un point de la frontière relative de  $C_p$ . Cela montre que  $f_{U, \mathbf{S}} = h$  sur  $\overline{C_p}$ .

**Étape 7.** *Montrons que le nombre de points extrémaux de  $\overline{C_p}$  est fini.*

Comme  $f$  est strictement convexe, chaque segment  $s \in S$  peut contenir au plus un point extrémal de  $\overline{C_p}$ . Donc  $\overline{C_p}$  admet un nombre fini de points extrémaux.

**Étape 8.** *Montrons que, pour tous points  $p$  et  $q$  de  $U$ , on a soit  $C_p \cap C_q = \emptyset$ , soit  $C_p = C_q$ .*

Soient  $p$  et  $q$  deux points de  $U$ . Si  $C_p \cap C_q \neq \emptyset$ , en raisonnant comme à l'étape 2, on peut voir que  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $C = \text{conv}(C_p \cup C_q)$  et la maximalité de  $C_p$  et  $C_q$  montre que  $C_p = C_q$ .  $\square$

### 5.5.3 Preuve du Théorème 5.5

**Lemme 5.6**  $f_{U, \mathbf{S}}$  est continue sur  $U \cap \mathbf{S}$ .

*Preuve.* Soit  $p$  un point de  $U \cap \mathbf{S}$ . La fonction  $f_{U, \mathbf{S}}$  est continue en un point  $p$  s'il est possible de l'encadrer par deux fonctions continues et égales en  $p$ . Comme  $f_{U, \mathbf{S}}(p) = f(p)$  et comme  $f \leq f_{U, \mathbf{S}}$ , il suffit de prouver qu'il existe un  $r > 0$  et une fonction continue  $g$  définie sur le voisinage  $V = U \cap B(p, r)$  de  $p$  tels que  $g(p) = f(p)$  et  $f_{U, \mathbf{S}} \leq g$  sur  $V$ . Comme  $U$  est un  $S$ -polygone, on peut trouver un  $r > 0$  tel que  $B(p, r) \cap U$  est une union de rayons de la boule  $B(p, r)$ . La fonction

$f$  est majorée sur  $U$  par un réel  $M$ . D'après le Théorème 5.3, la fonction  $f_{U,\mathbf{S}}$  est aussi majorée par  $M$  sur  $U$ . Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}^2$  par

$$g(x) = f_{U,\mathbf{S}}(p) + \frac{M - f_{U,\mathbf{S}}(p)}{r} \|x - p\|.$$

Il s'agit d'un « cône de révolution » qui a les propriétés suivantes :

- $g$  est affine sur chaque demi-droite issue de  $p$ ,
- $g = M \geq f_{U,\mathbf{S}}$  sur la frontière de  $B(p, r)$ ,
- $g(p) = f_{U,\mathbf{S}}(p)$ .

Comme  $f_{U,\mathbf{S}}$  est localement convexe,  $f_{U,\mathbf{S}} \leq g$  sur chaque rayon de  $B(p, r)$  inclus dans  $U$ . D'où,  $g \geq f_{U,\mathbf{S}}$  sur  $B(p, r) \cap U$ .  $\square$

**Lemme 5.7** *Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $p \in U \setminus \mathbf{S}$ , tout  $p' \in \mathbf{S}$  et tout segment  $[q, r]$  tels que :*

- $d(p, p') \leq \delta$
  - $q, r \in \mathbf{S}$ ,  $]q, r[ \subset U \setminus \mathbf{S}$ ,  $p \in ]q, r[$ ,
  - $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $[q, r]$ ,
- on a  $d(p', q) \leq \varepsilon$  ou  $d(p', r) \leq \varepsilon$ .

*Preuve.* Supposons au contraire qu'il existe un  $\varepsilon > 0$ , une suite  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de points de  $U \setminus \mathbf{S}$ , une suite  $(p'_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de points de  $\mathbf{S}$  et une suite de segments  $[q_n, r_n]$  tels que :

- $d(p_n, p'_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,
- et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,
- $q_n, r_n \in \mathbf{S}$ ,  $]q_n, r_n[ \subset U \setminus \mathbf{S}$ ,  $p_n \in ]q_n, r_n[$ ,
- $f_{U,\mathbf{S}}$  est affine sur  $[q_n, r_n]$ ,
- $d(p'_n, q_n)$  et  $d(p'_n, r_n) \geq \varepsilon$ .

Comme  $d(p_n, p'_n)$  tend vers 0, on peut supposer que  $d(p_n, p'_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Quel que soit  $n \in \mathbf{N}$ , il existe  $\lambda_n \in [0, 1]$  tel que  $p_n = (1 - \lambda_n)q_n + \lambda_n r_n$  et on en déduit que  $p_n - q_n = \lambda_n(r_n - q_n)$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $d(p_n, q_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $d(p_n, r_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  (voir Figure 5.21). Donc :

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq d(p_n, q_n) = \lambda_n d(r_n, q_n) \leq \lambda_n \text{diam}(U)$$

et on a alors  $\lambda_n \geq \frac{\varepsilon}{2 \text{diam}(U)}$ , où  $\text{diam}(U) = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$ . De la même manière, on obtient  $1 - \lambda_n \geq \frac{\varepsilon}{2 \text{diam}(U)}$ . À une extraction d'une sous-suite près, on peut supposer que les suites  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(p'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$  convergent respectivement vers les points  $p$ ,  $p'$ ,  $q$  et  $r$ . Comme  $d(p_n, p'_n)$  tend vers 0, on a  $p = p' \in \mathbf{S}$ . De plus, la fonction  $f$  est strictement convexe et continue, donc :

$$\alpha = \inf\{(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1 - \lambda)x + \lambda y) : \\ x, y \in U, d(x, y) \geq \varepsilon, \lambda, 1 - \lambda \geq \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{diam}(U)}\} > 0.$$

Comme  $p \in \mathbf{S}$ , d'après le Lemme 5.6, la fonction  $f_{U, \mathbf{S}}$  est continue en  $p$ . Par ailleurs,  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}^2$ , donc il existe  $\beta > 0$  tel que  $\forall x \in U, d(x, p) \leq \beta$  implique que  $|f_{U, \mathbf{S}}(x) - f_{U, \mathbf{S}}(p)| \leq \frac{\alpha}{4}$  et  $|f(x) - f(p)| \leq \frac{\alpha}{4}$ . Pour  $n$  suffisamment grand, on a  $d(p_n, p) \leq \beta$ , d'où  $|f_{U, \mathbf{S}}(p_n) - f_{U, \mathbf{S}}(p)| \leq \frac{\alpha}{4}$ , et  $|f(p_n) - f(p)| \leq \frac{\alpha}{4}$ . D'une part, comme  $f_{U, \mathbf{S}}(p) = f(p)$ , on obtient  $|f_{U, \mathbf{S}}(p_n) - f(p_n)| \leq \frac{\alpha}{2}$ . D'autre part, d'après les définitions de  $\lambda_n$  et de  $\alpha$ , on a :

$$f(p_n) = f((1 - \lambda_n)q_n + \lambda_n r_n) \leq (1 - \lambda_n)f(q_n) + \lambda_n f(r_n) - \alpha.$$

Les points  $q_n$  et  $r_n$  sont dans  $U \cap \mathbf{S}$ . Donc  $f_{U, \mathbf{S}} = f$  en  $q_n$  et en  $r_n$  et on en déduit que :

$$(1 - \lambda_n)f(q_n) + \lambda_n f(r_n) = (1 - \lambda_n)f_{U, \mathbf{S}}(q_n) + \lambda_n f_{U, \mathbf{S}}(r_n).$$

Par hypothèse,  $f_{U, \mathbf{S}}$  est affine sur  $[q_n, r_n]$ , d'où :

$$(1 - \lambda_n)f_{U, \mathbf{S}}(q_n) + \lambda_n f_{U, \mathbf{S}}(r_n) = f_{U, \mathbf{S}}((1 - \lambda_n)q_n + \lambda_n r_n) = f_{U, \mathbf{S}}(p_n).$$

Cela permet d'affirmer que :

$$f(p_n) \leq f_{U, \mathbf{S}}(p_n) - \alpha.$$

Donc  $f_{U, \mathbf{S}}(p_n) - f(p_n) \geq \alpha$ , ce qui contredit l'inégalité  $|f_{U, \mathbf{S}}(p_n) - f(p_n)| \leq \frac{\alpha}{2}$ .  $\square$

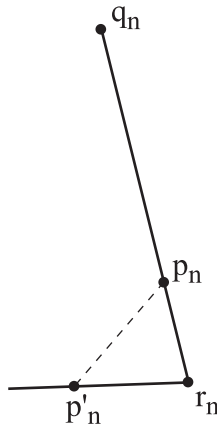


FIGURE 5.21 – Comme  $d(p'_n, r_n) \geq \varepsilon$  et comme  $d(p_n, p'_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , on peut en conclure que  $d(p_n, r_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ . On peut faire le même raisonnement avec  $q_n$  à la place de  $r_n$ .

**Preuve du Théorème 5.5**

Soit  $A$  une composante connexe de  $(U \setminus \mathbf{S}) \setminus \cup_{t \in T} t^o$ . Nous devons prouver que  $V = \overline{A}$  rencontre au plus deux sites de  $S$ . Supposons au contraire que  $V \setminus A$  est une union de  $k \geq 3$  segments disjoints  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$  qui sont inclus dans  $\mathbf{S}$ . Montrons que cela mène à une contradiction.

Pour  $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$ , soit  $A_{ij}$  l'ensemble des points  $a \in A$  tels que  $C_a = ]p'_i, p'_j[$ , où  $p'_i \in S_i$  et  $p'_j \in S_j$ . Quel que soit le couple  $(i, j)$ , si  $A_{ij}$  est un ouvert de  $A$ , alors cela signifie que  $A$  est une réunion d'au moins deux ouverts disjoints non vides de  $A$ . On en déduit alors que  $A$  ne peut pas être connexe, ce qui contredit la définition de  $A$ . Dans le reste de la preuve, nous montrons que  $A_{ij}$  est un ouvert de  $A$ .

Soient  $a$  un point de  $A_{ij}$ ,  $\rho = \min\{d(S_l, S_m) : 1 \leq l, m \leq k, l \neq m\}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{4} \min\{\rho, d(a, p'_i), d(a, p'_j)\}$  et  $\delta$  un réel strictement positif associé à  $\varepsilon$  par le Lemme 5.7 et qu'on peut supposer inférieur ou égal à  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Soit  $I$  l'ensemble des points de  $C_a$  dont la distance à  $p'_i$  et  $p'_j$  est supérieure ou égale à  $\varepsilon$ . L'ensemble  $I$  est un segment  $[a_i, a_j]$  qui ne rencontre pas  $\mathbf{S}$ . Donc il existe un  $\alpha > 0$  tel que  $I_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^2 : d(x, I) \leq \alpha\}$  ne rencontre pas  $\mathbf{S}$ . Il existe un  $\beta > 0$  tel que : tout segment  $[q, r]$  dont les extrémités sont dans  $\mathbf{S}$ , qui ne rencontre pas  $C_a$  et qui est à une distance inférieure ou égale à  $\beta$  de  $a$ , contient un point à une distance inférieure ou égale à  $\frac{\delta}{2}$  de  $a_i$  et un point à une distance inférieure ou égale à  $\frac{\delta}{2}$  de  $a_j$ .

Pour le voir, il faut remarquer que les extrémités du segment  $[q, r]$  ne peuvent pas être dans  $I_\alpha$  et que, si  $[q, r]$  est très proche de  $a$ , alors  $[q, r]$  est presque parallèle à  $C_a$  (voir Figure 5.22).

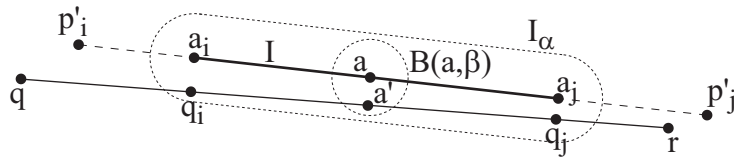


FIGURE 5.22 – Illustration de l'existence de  $\beta$ .

Soit  $a'$  un point de  $A$  tel que  $d(a, a') \leq \beta$ . Alors on peut choisir  $]q, r[ = C_{a'}$ . D'après le choix de  $\beta$ ,  $C_{a'} = ]q, r[$  doit contenir un point  $q_i$  à une distance inférieure ou égale à  $\frac{\delta}{2}$  de  $a_i$  et un point  $q_j$  à une distance inférieure ou égale à  $\frac{\delta}{2}$  de  $a_j$ .

Considérons maintenant le segment  $[q, q_i]$ . Ce segment est inclus dans  $[q, r]$  qui est presque parallèle à  $]p'_i, p'_j[$ . Donc, soit il contient un point  $p$  à une distance inférieure ou égale à  $\delta$  de  $p'_i$ , soit il est inclus dans la boule  $B(p'_i, \varepsilon + \delta)$  (voir Figures 5.23(a) et (b)). Dans le premier cas, on utilise le Lemme 5.7 avec  $p, [q, r]$

et  $p' = p'_i$  : on en déduit que  $d(p'_i, q) \leq \varepsilon$ , ce qui implique que  $q \in S_i$ . Dans le second cas,  $d(p'_i, q) \leq \rho/2$ , d'où  $q \in S_i$ . De la même manière, on prouve que  $r \in S_j$ . Finalement, cela signifie que, si on choisit un réel  $\mu$  tel que  $0 < \mu < \beta$ , alors  $A \cap B(a, \mu) \subset A_{ij}$  et on en déduit que  $A_{ij}$  est un ouvert de  $A$ .  $\square$

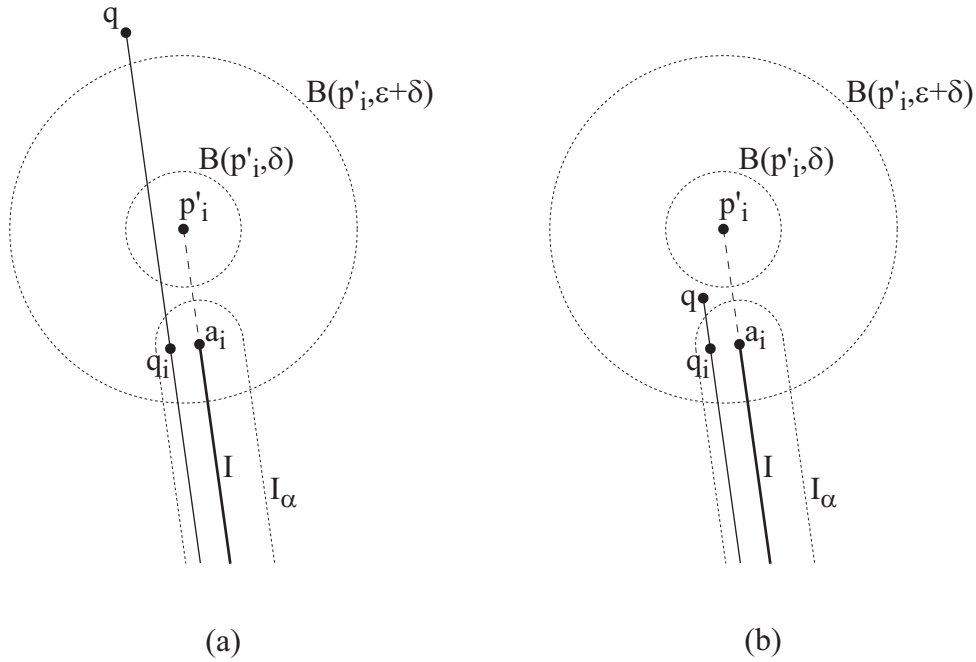


FIGURE 5.23 – Illustration de la preuve du Théorème 5.5.

## 5.6 Convergence de l'algorithme

Dans cette section, nous montrons que l'algorithme de flip que nous proposons converge vers la triangulation de Delaunay de segments.

**Lemme 5.8** Soit  $t$  un triangle d'une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $U$  et soit  $h$  la fonction affine qui vaut  $f$  aux sommets de  $t$ . La fonction  $f_{U, \mathcal{S}, \mathcal{T}}$  est égale à  $h$  sur  $\partial(t)$ .

*Preuve.* Soient  $a, b$  et  $c$  les trois sommets de  $t$  et  $e$  l'arête de  $\mathcal{T}$  telle que  $]a, b[ \subset e$ . La fonction  $f_{\bar{e}, \mathcal{S}}$  fait partie de la famille de fonctions localement convexes qui sert à définir  $f_{[a, b], \mathcal{S}}$ . D'où,  $f_{\bar{e}, \mathcal{S}} \leq f_{[a, b], \mathcal{S}}$ . D'une part, par définition,  $f_{U, \mathcal{S}, \mathcal{T}} = f_{\bar{e}, \mathcal{S}}$  sur  $e$ , et donc aussi sur  $]a, b[$ . D'autre part, il est évident que  $f_{[a, b], \mathcal{S}}$  est égal à  $h$  sur  $]a, b[$ . On en conclut que  $f_{U, \mathcal{S}, \mathcal{T}} \leq h$  sur  $]a, b[$ . On prouve le même résultat sur  $]b, c[$  et  $]c, a[$  en considérant les arêtes qui contiennent respectivement ces côtés de  $t$ . D'où,  $f_{U, \mathcal{S}, \mathcal{T}} \leq h$  sur  $\partial(t)$ .

Soit  $f'_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  la fonction égale à  $h$  sur  $\partial(t)$  quel que soit le triangle  $t$  de  $\mathcal{T}$  et égale à  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  partout ailleurs dans  $U$ . On peut voir que la fonction  $f'_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est localement convexe sur les arêtes de  $\mathcal{T}$ . Donc, d'après l'inégalité obtenue dans le paragraphe précédent et d'après la définition de  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$ , pour tout triangle  $t$  de  $\mathcal{T}$ , on a nécessairement  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}} = f'_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  sur  $\partial(t)$ . D'où,  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}} = h$  sur  $\partial(t)$ .  $\square$

**Lemme 5.9** *La fonction  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est continue.*

*Preuve.* Soit  $p$  un point de  $U \cap \mathbf{S}$ . Il y a un nombre fini d'arêtes  $e_1, \dots, e_m$  de  $\mathcal{T}$  dont l'adhérence contient  $p$ . De même, il y a un nombre fini de triangles  $t_1, \dots, t_n$  de  $\mathcal{T}$  dont l'adhérence contient  $p$ . Comme les adhérences des autres arêtes et des autres triangles de  $\mathcal{T}$  ne contiennent pas  $p$ , il existe un réel  $r > 0$  tel que ces triangles et ces arêtes soient tous à une distance  $\geq r$  de  $p$ . Par conséquent,

$$U \cap B(p, r) \subset \mathbf{S} \cup \overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_m} \cup \overline{t_1} \dots \cup \overline{t_n}.$$

Or, d'après le Lemme 5.6, les fonctions  $f_{\overline{e_i},\mathbf{S}}$  et les fonctions  $f_{\overline{t_i},\mathbf{S}}$  sont continues en  $p$ , donc  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est continue en  $p$ .

De plus,  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est continue sur chaque triangle de  $\mathcal{T}$  et on peut facilement voir que  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est aussi continue sur chaque arête. Comme dans le Lemme 5.8, on voit que  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est continue sur tout côté d'un triangle de  $\mathcal{T}$ . On en déduit que  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est continue.  $\square$

**Définition 5.6** *Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation de segments de  $S$  et soit  $U = \text{conv}(\mathbf{S})$ . On définit la pente de  $\mathcal{T}$  de la manière suivante :*

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sup \left\{ \frac{f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}(p) - f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}(q)}{|p - q|} : p \in U \setminus \mathbf{S}, q \in U \cap \mathbf{S}, [p, q] \subset U \right\}.$$

**Proposition 5.2** *Si  $\mathcal{T}$  est une triangulation de segments de  $S$ , alors on a :*

$$\sigma(\mathcal{T}) < +\infty.$$

*Preuve.* Pour montrer que  $\sigma(\mathcal{T})$  est fini, il suffit de montrer que  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux ou, plus exactement, que les dérivées partielles de  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  sont majorées par morceaux.

D'une part,  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est continue et, d'autre part,  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est affine sur les faces de  $\mathcal{T}$ . Il suffit donc d'étudier les dérivées partielles de  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  sur les arêtes. Or les arêtes peuvent être décomposées en une réunion finie de triangles et de trapèzes tels que chacun de ces triangles ou trapèzes soit lui-même une réunion de segments d'intérieurs disjoints sur lesquels  $f_{U,\mathbf{S},\mathcal{T}}$  est affine (voir Figure 5.24). Il nous suffit d'examiner séparément le cas des triangles et des trapèzes.



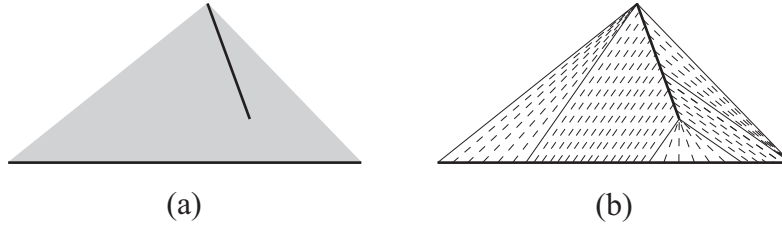


FIGURE 5.24 – Une arête d’une triangulation de segments (a) peut être décomposée en une réunion finie de trapèzes et de triangles qui sont eux-mêmes des réunions de segments disjoints sur lesquels  $f_{U,S,T}$  est affine.

**Cas des triangles.** Considérons un triangle  $t = \text{conv}(O, A, B)$  inclus dans l’adhérence d’une arête tel que  $O$  appartienne à un site  $S_1 \in S$ ,  $A$  et  $B$  appartiennent au même site  $S_2 \in S$  et  $f_{U,S,T}$  soit affine sur chaque segment  $[O, q]$  pour tout point  $q \in [A, B]$ . Plaçons nous dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ . Le triangle  $t$  correspond aux points  $p$  de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant  $x, y \geq 0$  et  $x + y \leq 1$ . Soit  $q$  le point de coordonnées  $\frac{1}{x+y}(x, y) \in [A, B]$ . Cela implique que  $p = (1 - (x + y))O + (x + y)q$ . On a donc :

$$f_{U,S,T}(p) = (1 - (x + y))f_{U,S,T}(O) + (x + y)f_{U,S,T}(q).$$

En remplaçant avec les coordonnées, on obtient :

$$f_{U,S,T}(x, y) = (1 - (x + y))f_{U,S,T}(0, 0) + (x + y)f_{U,S,T}\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right).$$

La fonction  $f_{U,S,T}$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le triangle  $t$  privé de  $(0, 0)$ . Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la fonction  $f$  est de la forme

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + ax + by + c$$

où  $A, B, C, a, b$  et  $c$  sont des réels. Un simple calcul montre que pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  dans  $t$ ,

$$f_{U,S,T}(x, y) = ax + by + \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{(x + y)}.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial(f_{U,S,T})}{\partial(x)} = a - \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{(x + y)^2} + \frac{2Ax + 2By}{(x + y)}.$$

Comme  $x$  et  $y$  sont  $\geq 0$ ,

$$\left| \frac{2Ax + 2By}{(x + y)} \right| \leq 2 \max(|A|, |B|)$$

et

$$\left| \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{(x+y)^2} \right| \leq \max(|A|, |B|, |C|).$$

Par conséquent, pour tout  $(x, y) \in t$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\left| \frac{\partial(f_{U,S,T})}{\partial(x)}(x, y) \right| \leq |a| + 3 \max(|A|, |B|, |C|).$$

On prouve de même que pour tout  $(x, y) \in t$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\left| \frac{\partial(f_{U,S,T})}{\partial(y)}(x, y) \right| \leq |b| + 3 \max(|A|, |B|, |C|).$$

**Cas des trapèzes.** On peut choisir un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que le trapèze corresponde aux points de coordonnées  $(x, y)$  telles que  $x, y \geq 0$  et  $a \leq x + y \leq b$  où  $b \geq a > 0$  (voir Figure 5.25). Chaque point  $(x, y)$  est sur le segment d'extrémités  $(x + y, 0)$ ,  $(0, x + y)$  et  $f_{U,S,T}$  est affine sur ce segment. Comme  $(x, y) = \frac{x}{x+y}(x + y, 0) + \frac{y}{x+y}(0, x + y)$  on a

$$f_{U,S,T}(x, y) = \frac{x}{x+y}f(x + y, 0) + \frac{y}{x+y}f(0, x + y)$$

qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le trapèze (fermé).

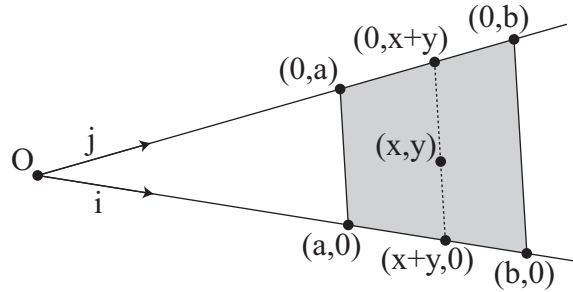


FIGURE 5.25 – Illustration du repère choisi dans le cas des trapèzes.

Finalement, pour montrer que  $\sigma(\mathcal{T}) < +\infty$ , prenons deux points  $p, q \in U$  tels que le segment  $[p, q]$  soit inclus dans  $U$ . Le segment  $[p, q]$  traverse un nombre fini de régions associées à  $\mathcal{T}$ . La restriction de  $f_{U,S,T}$  à  $[p, q]$  est continue, dérivable sauf en un nombre fini de points et la dérivée est bornée. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, le taux d'accroissement est majoré par une constante qui ne dépend que de la borne sur la dérivée.  $\square$

Dans la suite, on note  $\theta(\mathcal{T})$  l'angle minimal des triangles de  $\mathcal{T}$ .

**Proposition 5.3** *Il existe une constante positive  $c$  qui ne dépend que de  $f$ ,  $S$  et  $U$  telle que, pour toute triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $U$  :*

$$\theta(\mathcal{T}) \geq \frac{c}{\max(1, \sigma(\mathcal{T}))}.$$

*Preuve.* Soit  $\Delta = \text{conv}(\{p_1, p_2, p_3\})$  un triangle de  $\mathbf{R}^2$ . Pour  $1 \leq i \leq 3$ , appelons  $h_i$  la longueur de la hauteur issue de  $p_i$  et  $a_i$  la longueur du côté opposé à  $p_i$ . Nous définissons le défaut du triangle  $\Delta$  par  $\text{def}(\Delta) = \max(\frac{a_1}{h_1}, \frac{a_2}{h_2}, \frac{a_3}{h_3})$ . Le défaut d'une triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $U$  est  $\text{def}(\mathcal{T}) = \max\{\text{def}(\Delta) : \Delta \in \mathcal{T}\}$ . On peut facilement montrer que  $\theta(\Delta) \geq \frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \text{def}(\Delta)}$ . Par conséquent il suffit de montrer qu'il existe une constante positive  $C$  qui ne dépend que de  $f$ ,  $S$  et  $U$  telle que, pour toute triangulation de segments  $\mathcal{T}$  de  $U$  :

$$\text{def}(\mathcal{T}) \leq C \max(1, \sigma(\mathcal{T})).$$

Soient  $\Delta$  un triangle d'une triangulation de segments quelconque de  $U$  et  $h$  l'unique fonction affine égale à  $f$  aux sommets de  $\Delta$ . Posons

$$\sigma(\Delta) = \sup\left\{\frac{h(p) - f(q)}{|p - q|} : p \in \Delta \setminus \mathbf{S}, q \in \mathbf{S} \cap \Delta\right\}.$$

Remarquons que si  $\Delta \in \mathcal{T}$  alors  $\sigma(\Delta) \leq \sigma(\mathcal{T})$ . Il suffit donc de démontrer que, pour tout triangle  $\Delta$  d'une triangulation de segments de  $U$ ,

$$\text{def}(\Delta) \leq C \max(1, \sigma(\Delta)).$$

Soit  $\Delta = \text{conv}(p, q, r)$  un triangle d'une triangulation de segments de  $U$ . Comme  $p$ ,  $q$  et  $r$  appartiennent à des segments différents de  $S$  il existe  $l_0 > 0$  indépendant de  $\Delta$  tel que  $d(p, q)$ ,  $d(q, r)$ ,  $d(r, p) \geq l_0$ . Supposons que l'angle au sommet  $r$  de  $\Delta$  soit maximal et appelons  $s$  le pied de la hauteur issue de  $r$ .

Si  $\Delta$  a deux angles supérieurs à  $\frac{\pi}{3}$ , cela signifie que l'un des angles en  $p$  ou en  $q$  est supérieur à  $\frac{\pi}{3}$ . On en déduit que  $d(r, s) \geq (\sin \frac{\pi}{3})l_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}l_0$ . Or, si on note  $D = \text{diam}(U)$ , on a  $d(p, q) \leq D$ . Donc,

$$\text{def}(\Delta) = \frac{d(p, q)}{d(r, s)} \leq \frac{D}{\frac{\sqrt{3}}{2}l_0} \leq \frac{2D}{l_0}.$$

Si  $\Delta$  a un seul angle supérieur à  $\frac{\pi}{3}$ , il s'agit nécessairement de l'angle en  $r$ . Dans ce cas, on a  $s \in [p, q]$  et  $d(p, s)$ ,  $d(q, s) \geq (\cos \frac{\pi}{3})l_0 = \frac{1}{2}l_0$ . Notons  $s = (1 - t)p + tq$ . Comme  $d(p, q) \leq D$ , on a

$$\frac{l_0}{2D} \leq t \leq 1 - \frac{l_0}{2D}.$$

On note

$$m = \min\{(1-t)f(p) + tf(q) - f((1-t)p + tq) :$$

$$p, q \in U, d(p, q) \geq l_0, \frac{l_0}{2D} \leq t \leq 1 - \frac{l_0}{2D}\}.$$

Comme  $f$  est strictement convexe,  $m$  est strictement positif. De plus,  $f$  étant uniformément continue sur  $U$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $d(x, y) \leq \delta$  entraîne  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{m}{2}$ . Comme  $def(\Delta) = \frac{d(p, q)}{d(r, s)}$  et  $d(p, q) \leq D$ , on a  $d(r, s) \leq \frac{D}{def(\Delta)}$ .

Si  $d(r, s) \geq \delta$ , alors

$$def(\Delta) \leq \frac{D}{d(r, s)} \leq \frac{D}{\delta}.$$

Au contraire, lorsque  $d(r, s) \leq \delta$ , on a  $def(\Delta) \geq \frac{D}{\delta}$  et

$$f(r) \leq f(s) + \frac{m}{2} \tag{5.1}$$

$$\leq f((1-t)p + tq) + \frac{m}{2} \tag{5.2}$$

$$\leq (1-t)f(p) + tf(q) - m + \frac{m}{2} \tag{5.3}$$

$$\leq h(s) - \frac{m}{2} \tag{5.4}$$

d'où

$$\sigma(\Delta) \geq \frac{h(s) - f(r)}{d(s, r)} \geq \frac{m}{2d(r, s)} \geq \frac{m}{2D} def(\Delta).$$

Finalement, on a  $def(\Delta) \leq C \max(1, \sigma(\Delta))$  avec  $C = D \max(\frac{2}{l_0}, \frac{1}{\delta}, \frac{2}{m})$ .  $\square$

Ensuite, il faut montrer que  $f_{U, \mathbf{s}, T_{n+1}} \leq f_{U, \mathbf{s}, T_n}$  quel que soit  $T_n$ , et que  $f_{U, \mathbf{s}, T_n}$  converge vers  $f_{U, \mathbf{s}}$ .

**Théorème 5.8** *La suite de fonctions  $(f_{conv(\mathbf{s}), \mathbf{s}, \mathcal{T}_n})_{n \in \mathbf{N}}$  décroît vers  $f_{conv(\mathbf{s}), \mathbf{s}}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .*

*Preuve.* Soit  $f_n = f_{conv(\mathbf{s}), \mathbf{s}, \mathcal{T}_n}$ . La première chose à prouver est que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante. À l'étape  $n$  de l'algorithme de flip, on effectue l'étape de modification locale de l'algorithme en considérant l'arête  $e_n$  qui est en tête de la file à ce moment là. On note  $t_1$  et  $t_2$  les deux triangles adjacents à  $e_n$  (ou  $t_1$  l'unique triangle adjacent à  $e_n$ ) et on note  $a_1, \dots, a_m$ ,  $m \leq 4$ , les autres arêtes adjacentes aux triangles  $t_i$ . Le polygone associé à  $e_n$  est  $P_n = \overline{e_n \cup t_1 \cup t_2}$  (ou  $\overline{e_n \cup t_1}$ ). Au cours de l'étape de modification locale, on calcule la triangulation  $\mathcal{Q}_n$  de  $P_n$  qui est induite par  $f_{P_n, \mathbf{s}}$ . On désigne les éléments de  $\mathcal{Q}_n$  de la façon suivante :

–  $t'_1$  et  $t'_2$  sont les nouveaux triangles (ou  $t'_1$ ),

- $b_i$  est l'arête adjacente à  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,
- $e_{n+1}$  est la nouvelle arête qui remplace  $e_n$ .

Les nouvelles arêtes de  $\mathcal{T}_{n+1}$  sont  $e_{n+1}$  et les arêtes  $a'_i = a_i \cup b_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Si on note  $\mathcal{P}_n$  la restriction de  $\mathcal{T}_n$  à  $P_n$ , alors, d'après le Théorème 5.7, on a  $f_{P_n, \mathbf{S}} \leq f_{P_n, \mathbf{S}, \mathcal{P}_n}$ . Or, comme  $f_{P_n, \mathbf{S}, \mathcal{P}_n} = f_n$  sur  $P_n$ , on en déduit que  $f_{P_n, \mathbf{S}} \leq f_n$ . De plus, par définition, on a  $f_{P_n, \mathbf{S}} = f_{P_n, \mathbf{S}, \mathcal{Q}_n}$ . On en déduit que, sur  $t_1^{\circ} \cup t_2^{\circ} \cup e_{n+1}$ ,  $f_{n+1} = f_{P_n, \mathbf{S}, \mathcal{Q}_n} = f_{P_n, \mathbf{S}} \leq f_n$ . Il reste à prouver que  $f_{n+1} \leq f_n$  sur les arêtes  $a'_i$ . D'une part, comme  $a_i \subset a'_i$ ,  $f_{n+1} = f_{a'_i, \mathbf{S}} \leq f_{a_i, \mathbf{S}} = f_n$  sur  $a_i$ . D'autre part, comme  $b_i \subset a'_i$ ,  $f_{n+1} = f_{a'_i, \mathbf{S}} \leq f_{b_i, \mathbf{S}} = f_{P_n, \mathbf{S}} \leq f_n$  sur  $b_i$ . Par conséquent,  $f_{n+1} \leq f_n$  sur  $t_1^{\circ} \cup t_2^{\circ} \cup e_{n+1} \cup a'_1 \cup \dots \cup a'_m$ , ce qui implique que  $f_{n+1} \leq f_n$  sur  $\text{conv}(\mathbf{S})$ . Par la même occasion, on a également prouvé l'inégalité  $f_{n+1} \leq f_{P_n, \mathbf{S}} \leq f_n$  sur  $P_n$ .

Cela signifie que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers une fonction  $g : \text{conv}(\mathbf{S}) \rightarrow \mathbf{R}$ . Il reste à prouver que  $g$  est localement convexe.

Comme  $g \geq f$  sur  $\text{conv}(\mathbf{S})$  et comme  $g = f$  sur  $\mathbf{S}$ , il suffit de montrer que  $g$  est convexe sur tout segment  $]p_0, p_1[$  inclus dans l'intérieur de  $\text{conv}(\mathbf{S})$  et qui ne rencontre pas  $\mathbf{S}$ . Soit  $p$  un point d'un tel segment  $]p_0, p_1[$ . Pour cela il suffit de prouver qu'il existe une boule  $B(p, \varepsilon)$  de rayon  $\varepsilon > 0$  centrée en  $p$  et une infinité d'entiers  $n$  tels que  $I_{p, \varepsilon} = ]p_0, p_1[ \cap B(p, \varepsilon)$  est inclus soit dans un triangle de  $\mathcal{T}_n$ , soit dans le polygone  $P_n$  associé à l'arête traitée à l'étape  $n$ . En effet, pour ces entiers  $n$ , soit  $f_n$ , soit  $f_{P_n, \mathbf{S}}$  est convexe sur  $I_{p, \varepsilon}$ . De plus, comme  $f_{n+1} \leq f_{P_n, \mathbf{S}} \leq f_n$  sur  $P_n$ , la fonction  $g$  est la limite d'une suite de fonctions convexes sur  $I_{p, \varepsilon}$ .

L'inégalité  $f_{n+1} \leq f_n$  implique que  $\sigma(\mathcal{T}_{n+1}) \leq \sigma(\mathcal{T}_n)$ . Donc, pour tout entier  $n$ , on a :

$$\theta(\mathcal{T}_n) \geq \frac{c}{\max(1, \sigma(\mathcal{T}_n))} \geq \frac{c}{\max(1, \sigma(\mathcal{T}_0))}.$$

Cela signifie que les angles de tout triangle  $t$  généré par l'algorithme sont minorés par une constante  $c_0 > 0$ . Maintenant, il est facile de voir qu'il existe un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que, si  $t$  est un triangle généré par l'algorithme et si  $t$  rencontre le segment  $I_{p, \varepsilon}$ , alors la longueur du segment  $]p_0, p_1[ \cap t$  est plus grande que  $2\varepsilon$ .

**Cas 1 :** Supposons que, à l'étape  $n_0$ ,  $p$  est dans une arête  $e$  de la triangulation de segments  $\mathcal{T}_{n_0}$ . Tant que l'arête  $e$  n'est pas en tête de la file,  $e$  ne fait que s'agrandir. À une étape ultérieure de l'algorithme, l'étape de modification locale sera appliquée sur l'arête  $e$  dans une triangulation de segments  $\mathcal{T}_{n_1}$  et l'arête  $e$  contiendra encore le point  $p$ . En utilisant le résultat obtenu dans le paragraphe précédent, on voit que les seuls triangles de  $\mathcal{T}_{n_1}$  qui peuvent rencontrer  $I_{p, \varepsilon}$  sont

les triangles  $t_1$  et  $t_2$  qui sont adjacents à  $e$ . On en déduit que  $I_{p,\varepsilon}$  est inclus dans le polygone  $P_{n_1}$ .

**Cas 2 :** Supposons que, à l'étape  $n_0$ ,  $p$  est dans un triangle  $t$  de la triangulation de segments  $\mathcal{T}_{n_0}$ . Si  $I_{p,\varepsilon}$  est inclus dans  $t$ , la preuve est terminée. Sinon,  $I_{p,\varepsilon}$  rencontre une arête  $e$  adjacente à  $t$ . Comme dans le Cas 1,  $I_{p,\varepsilon}$  est inclus dans le polygone  $P_{n_1}$  à l'étape  $n_1 \geq n_0$  quand  $e$  est traitée par l'algorithme.

Dans tous les cas, nous avons montré qu'il existe une infinité d'entiers  $n$  tels que  $I_{p,\varepsilon}$  soit inclus dans  $P_n$  ou dans un triangle de  $\mathcal{T}_n$ .  $\square$

Enfin, il faut montrer qu'après un nombre fini d'étapes, l'algorithme de flip calcule une triangulation de segments qui a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments.

**Corollaire 5.2** *Il existe un entier  $N$  tel que, quel que soit  $n \geq N$ , la triangulation  $\mathcal{T}_n$  a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments de  $\text{conv}(\mathbf{S})$ .*

*Preuve.* L'ensemble des topologies de toutes les triangulations de segments de  $S$  est fini. Donc, si le corollaire était faux, une triangulation de segments dont la topologie n'est pas celle de la triangulation de Delaunay de segments apparaîtrait une infinité de fois. Par conséquent, il suffit de prouver que, s'il existe une suite croissante d'entiers  $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que les triangulations  $\mathcal{T}_{k_n}$  aient la même topologie, alors il s'agit de la topologie de la triangulation de Delaunay de segments.

En extrayant une sous-suite de  $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , on peut supposer qu'un triangle  $t_{k_n}$  de  $\mathcal{T}_{k_n}$  converge vers un triangle  $t_\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par extractions successives de plusieurs sous-suites, on peut donc supposer que  $\mathcal{T}_{k_n}$  converge vers une triangulation  $\mathcal{T}_\infty$ . Comme  $f_{\text{conv}(\mathbf{S}),\mathbf{S}} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\text{conv}(\mathbf{S}),\mathbf{S},\mathcal{T}_{k_n}}$ ,  $f_{\text{conv}(\mathbf{S}),\mathbf{S}}$  est nécessairement affine sur chacun des triangles de  $\mathcal{T}_\infty$ . D'après le Théorème 5.6,  $\mathcal{T}_\infty$  est la triangulation de Delaunay de segments de  $S$ . Par conséquent, toutes les triangulations  $\mathcal{T}_{k_n}$  ont la même topologie que celle de Delaunay.  $\square$

## 5.7 Résultats expérimentaux

*Dans cette section, nous donnons quelques résultats expérimentaux qui permettent d'avoir une idée générale de l'efficacité de l'algorithme de flip que nous proposons.*

L'implémentation de l'algorithme de flip que nous proposons s'effectue en trois phases. Tout d'abord, il faut commencer par générer aléatoirement un ensemble  $S$  de  $n$  segments disjoints dans un rectangle donné  $\mathcal{R}$ . Puis on calcule une triangulation de segments de  $S$  à l'aide de l'algorithme par balayage de la Section 2.5. Enfin, on applique l'algorithme de flip avec, en entrée, la triangulation précédemment calculée. Nous commençons par détailler la méthode utilisée pour la génération aléatoire des sites, puis nous analysons les résultats obtenus.

### Génération aléatoire des sites

Supposons qu'on dispose déjà d'un ensemble  $S_c$  de sites disjoints dans  $\mathcal{R}$ . Nous décrivons maintenant la méthode que nous avons appliquée pour générer un nouveau site  $s$  dans  $\mathcal{R}$  disjoint des sites de  $S_c$ .

On commence par choisir un point  $p$  de  $\mathcal{R}$  et une droite  $\mathcal{D}$  passant par  $p$ . Ensuite, on détermine les extrémités  $p_1$  et  $p_2$  du plus grand segment inclus dans  $\mathcal{D} \cap \mathcal{R}$ , qui contient  $p$  et dont l'intérieur ne rencontre aucun site de  $S_c$ . Enfin, les extrémités de  $s$  sont choisies aléatoirement dans le segment ouvert  $]p_1, p_2[$ .

Pour implémenter cette méthode, nous avons utilisé la structure de localisation suivante. Si on fait passer une droite verticale par chaque extrémité des sites de  $S_c$ , on obtient une décomposition du plan en trapèzes dont les côtés sont soit dans ces droites verticales, soit dans des sites de  $S_c$  (voir Figure 5.26). On peut voir cette décomposition comme un ensemble de bandes verticales (délimitées par les droites verticales) qui contiennent chacune un certain nombre de trapèzes (délimités par les sites de  $S_c$  qui rencontrent la bande verticale). Cette structure permet de localiser efficacement un point donné, d'abord dans une bande verticale, puis dans un trapèze de cette bande verticale [28].

### Résultats

Les courbes de la Figure 5.27 et le Tableau 5.1 montrent l'évolution du nombre d'étapes de l'algorithme de flip en fonction du nombre de sites de  $S$ . Ces mesures ont été effectuées de la manière suivante. Nous avons fait varier le nombre  $n$  de sites de  $S$  de 1 000 à 40 000 par paliers de 1 000 sites. Pour chaque  $n$ , nous avons fait la moyenne des résultats observés au cours de la construction de la triangulation de Delaunay de 20 ensembles distincts de  $n$  sites.

Le nombre total d'étapes correspond au nombre de modifications locales effectuées par l'algorithme pour supprimer toutes les arêtes topologiquement illégales de la triangulation. Le nombre de flips correspond au nombre de modifications locales où l'algorithme a effectué un changement topologique dans la triangulation. Le nombre d'étapes « utiles » correspond au nombre de modifications locales au

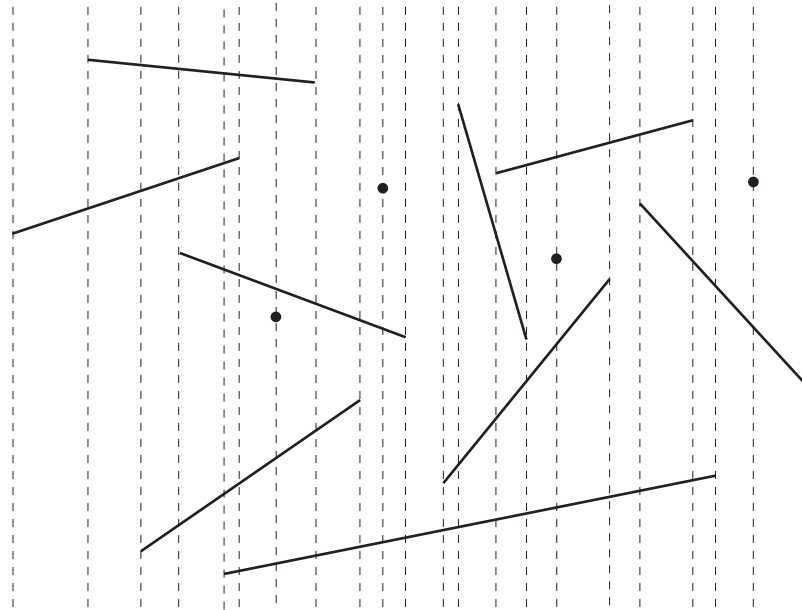


FIGURE 5.26 – Décomposition du plan par des droites verticales qui passent par les extrémités des sites.

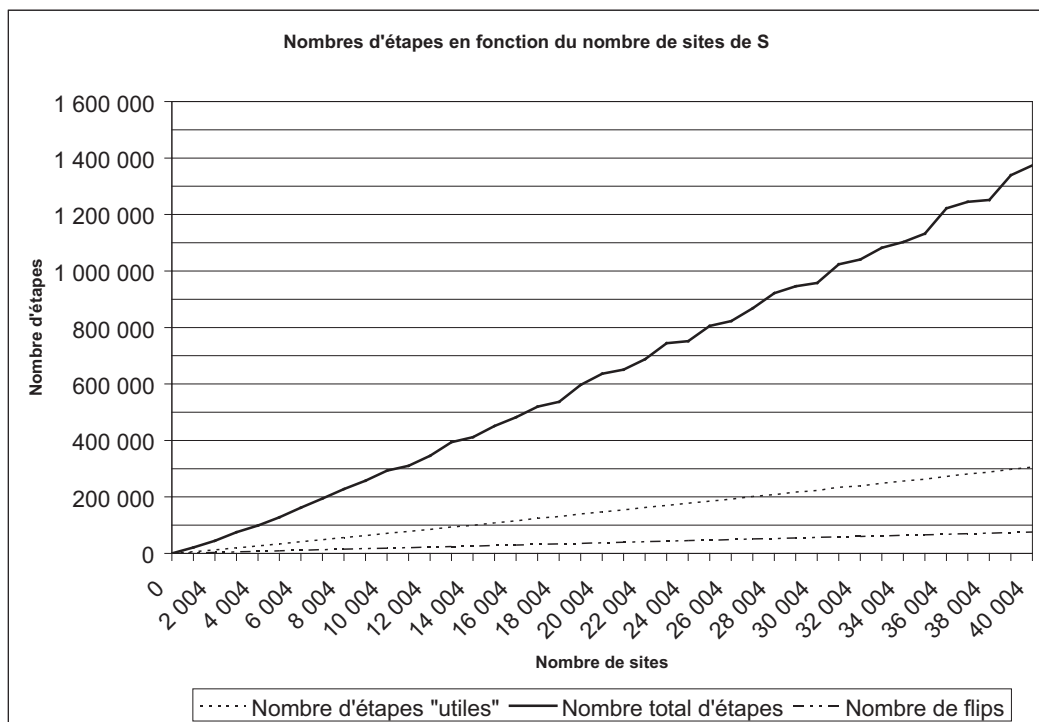


FIGURE 5.27 – Nombres d'étapes en fonction du nombre de sites de  $S$ .



cours desquelles, soit un flip a été effectué, soit au moins un sommet d'une face adjacente à l'arête traitée a été déplacé géométriquement d'au moins  $\epsilon = 10^{-10}$  : il s'agit d'une manière de compter les étapes de l'algorithme qui sont vraiment « utiles » pour que l'algorithme converge. En effet, si les faces adjacentes à une arête traitée ne bougent (presque) pas, alors la triangulation ne s'est pas significativement améliorée à cet endroit là et cette étape n'est donc pas véritablement utile pour converger vers la topologie de la triangulation de Delaunay de segments.

$n$	1 004	10 004	20 004	30 004	40 004
$a$	3 005	30 005	60 005	90 005	120 005
$a_i$	645	6 446	12 945	19 424	25 861
$e$	21 189	293 023	636 317	957 682	1 251 870
$e_u$	6 163	70 825	146 979	222 951	305 773
$f$	1 779	18 619	37 662	56 381	75 491

TABLE 5.1 – Sous-ensemble des valeurs mesurées au cours de notre étude expérimentale.  $n$  est le nombre de sites,  $a$  le nombre total d'arêtes,  $a_i$  le nombre moyen d'arêtes illégales dans la triangulation initiale,  $e$  le nombre total moyen d'étapes de l'algorithme,  $e_u$  le nombre moyen d'étapes utiles et  $f$  le nombre moyen de flips effectués.

On peut voir que le nombre de flips ainsi que le nombre d'étapes « utiles » sont très nettement inférieurs au nombre total d'étapes de l'algorithme. Cela s'explique par le fait que, tant qu'il reste une arête topologiquement illégale dans la triangulation courante, l'algorithme continue à traiter en boucle toutes les arêtes de la triangulation, même celles qui sont légales et dont les faces adjacentes sont déjà dans leurs positions de Delaunay, c'est-à-dire que leurs cercles circonscrits sont vides.

Il devrait être possible de réduire le nombre total d'étapes en gérant de manière différente la file des arêtes à traiter, de sorte qu'on effectue seulement les modifications locales vraiment nécessaires. Il faudrait par exemple trouver un moyen de décider quelles sont les arêtes à traiter avant d'autres pour accélérer la convergence de l'algorithme. Une solution envisageable serait aussi de maintenir une sorte de pile d'arêtes illégales similaire à celle utilisée dans le cas de l'algorithme de flip pour les triangulations de Delaunay d'ensemble de points (voir Section 1.5). Cependant, comme nous l'avons vu dans la Section 5.1, une arête illégale dans une triangulation de segments ne peut pas nécessairement être flip-pée à cause de la position géométrique des faces qui lui sont adjacentes. Il faudrait donc trouver un moyen d'améliorer la triangulation à proximité de chaque arête

illégale jusqu'à ce qu'on puisse la flipper sans pour autant traiter systématiquement toutes les arêtes de la triangulation.

La Figure 5.28 et le Tableau 5.2 montrent l'évolution du nombre d'arêtes illégales au cours de l'exécution de l'algorithme de flip. Les chiffres donnés sont les moyennes des résultats observés au cours de la construction de la triangulation de Delaunay de 20 ensembles de 40 000 sites générés aléatoirement. Le nombre d'arêtes illégales a été relevé toutes les 10 000 étapes de l'algorithme.

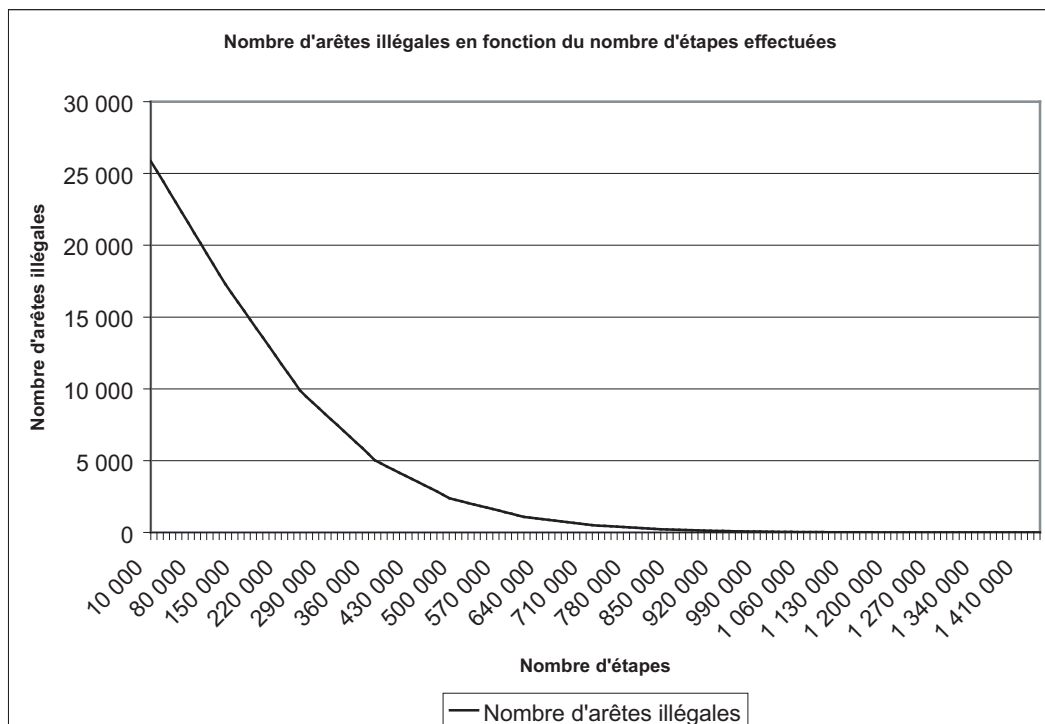


FIGURE 5.28 – Evolution du nombre moyen d'arêtes illégales au cours de l'algorithme de flip (pour des ensembles de 40 000 sites). Contrairement à ce qu'on pourrait croire en lisant le graphique, le nombre moyen d'arêtes illégales n'atteint la valeur 0 qu'après 1 440 000 étapes.

On peut constater que, pour des ensembles de 40 000 sites, les triangulations quelconques construites par balayage comportent en moyenne environ 26 000 arêtes illégales. Cela correspond à environ 20 % du nombre total d'arêtes et nous avons d'ailleurs observé que cette proportion reste constante quel que soit le nombre de sites de  $S$ .

Cette courbe montre également que 98 % des arêtes illégales ont disparu après 800 000 étapes. Cela signifie que les 640 000 étapes suivantes (en moyenne) servent à supprimer les 2 % d'arêtes illégales restantes. Encore une fois, cela s'explique

$e$	$a_i$
0	25 844
200 000	12 976
400 000	4 369
600 000	1 185
800 000	298
1 000 000	54
1 200 000	5
1 440 000	0

TABLE 5.2 – Sous-ensemble des valeurs mesurées au cours de notre étude expérimentale sur 20 ensembles de 40 000 sites.  $e$  est le nombre d'étapes de l'algorithme et  $a_i$  est le nombre moyen d'arêtes illégales restantes après  $e$  étapes.

par le nombre important d'étapes qui ne sont pas véritablement utiles pour la convergence de l'algorithme.

Les Figures 5.29, 5.30 et 5.31 montrent, respectivement, un ensemble  $S$  de 5 000 sites générés aléatoirement, une triangulation de segments de  $S$  construite par balayage et la triangulation de Delaunay de segments de  $S$  calculée à l'aide de notre algorithme de flip.

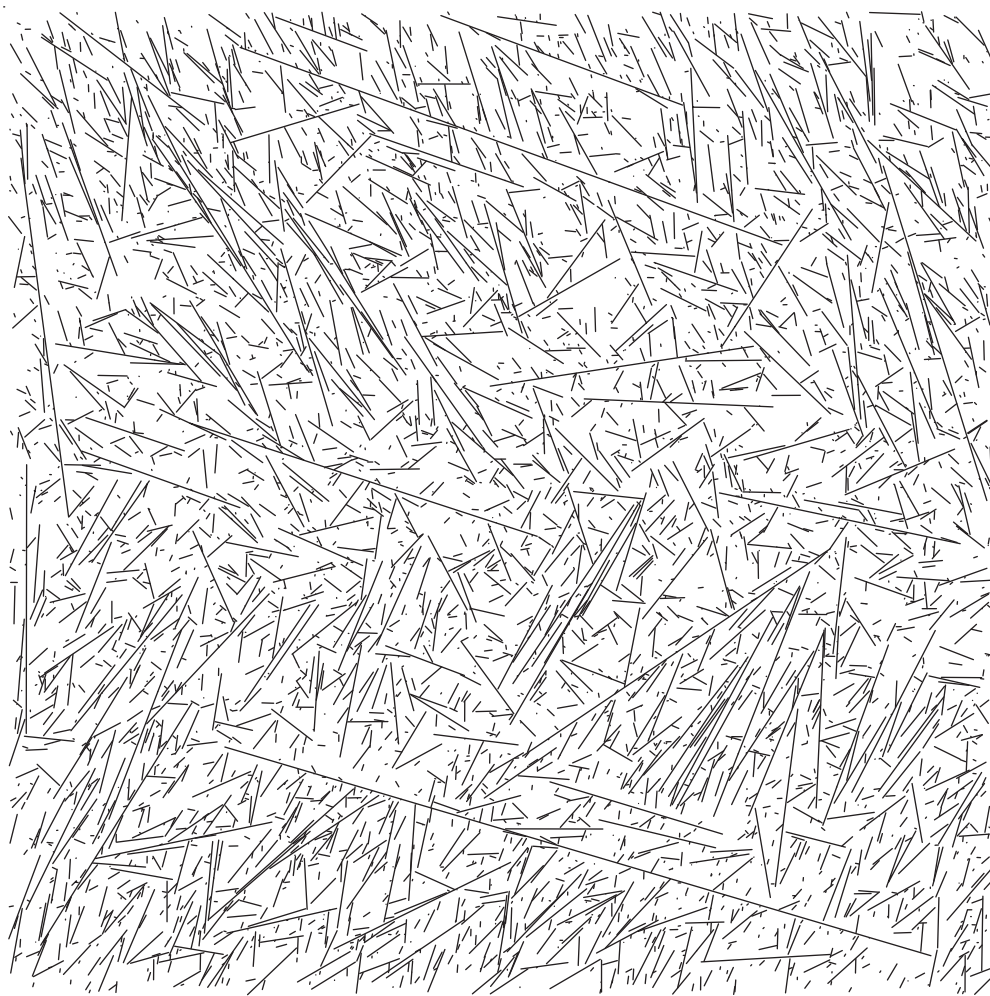


FIGURE 5.29 – Un ensemble  $S$  de 5 000 sites disjoints générés aléatoirement.

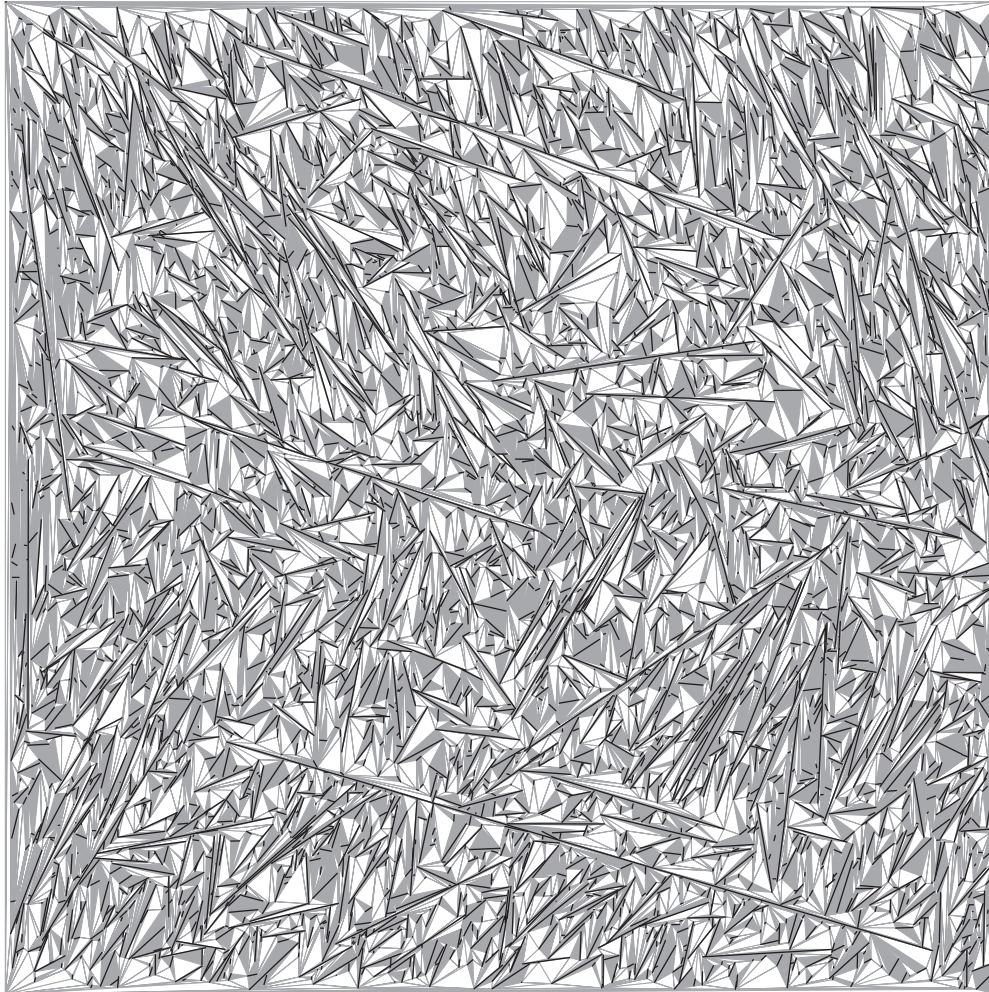


FIGURE 5.30 – Triangulation de segments de  $S$  calculée par l'algorithme de balayage décrit dans la Section 2.5.



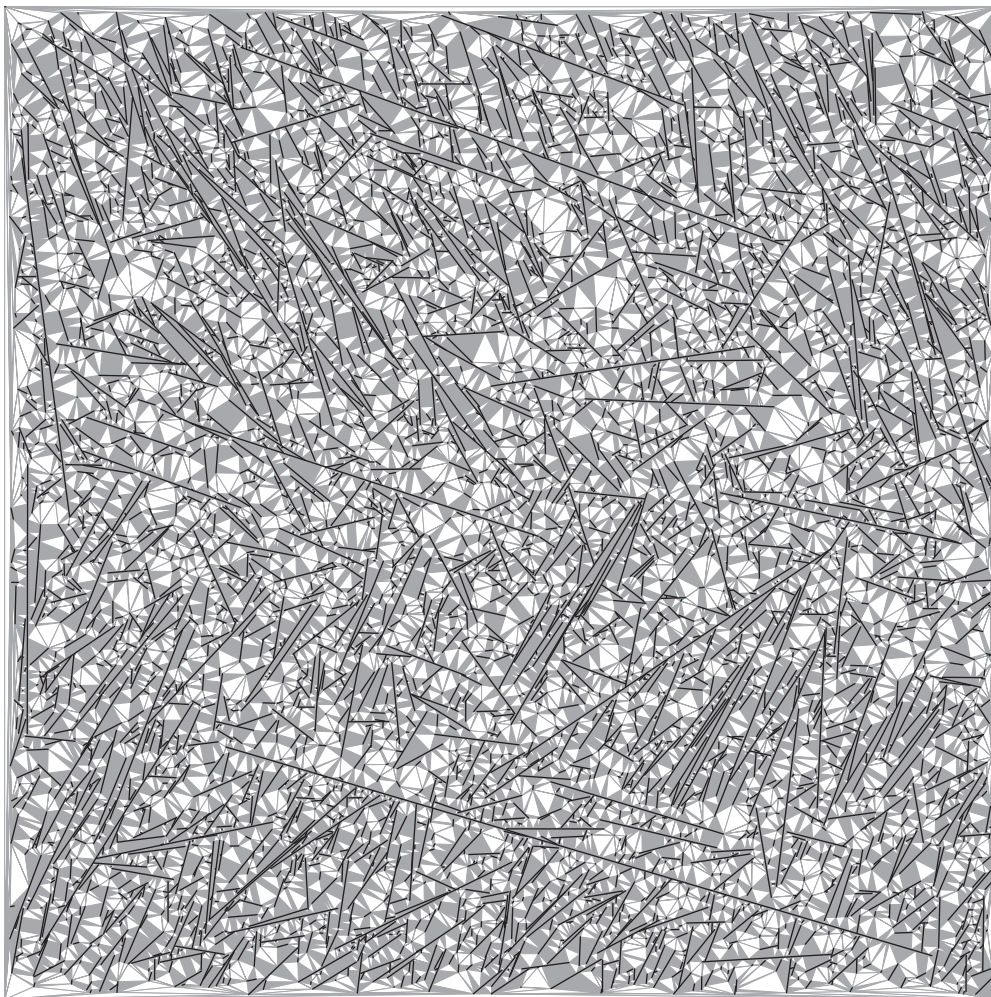


FIGURE 5.31 – Triangulation de Delaunay de segments de  $S$  calculée à l'aide de notre algorithme de flip.



# Conclusion

Nous avons défini une nouvelle famille de diagrammes, appelés triangulations de segments, qui généralise la notion de triangulation à un ensemble de segments disjoints du plan. Nous avons montré que plusieurs propriétés des triangulations d'ensembles de points s'étendent aux triangulations de segments. De plus, nous avons donné une manière de représenter en machine une triangulation de segments, ainsi qu'un algorithme de balayage qui construit efficacement une telle triangulation.

Nous avons ensuite étendu la notion de triangulation de Delaunay aux triangulations de segments et la dualité avec le diagramme de Voronoï de segments a été mise en évidence. Puis, en adaptant un algorithme incrémental randomisé de construction du diagramme de Voronoï de segments, nous avons obtenu une méthode de construction efficace de la triangulation de Delaunay de segments.

Nous avons également étendu la légalité des arêtes au cas des triangulations de segments en définissant deux notions distinctes : d'une part, la légalité géométrique et, d'autre part, la légalité topologique. La légalité géométrique permet de caractériser la triangulation de Delaunay de segments parmi l'ensemble de toutes les triangulations de segments possibles et la légalité topologique permet de caractériser les triangulations de segments qui ont la même topologie que celle de Delaunay. Cela conduit à un algorithme linéaire reconnaissant ces dernières triangulations.

Enfin, nous avons décrit un algorithme de flip qui transforme toute triangulation de segments en une autre triangulation qui a la même topologie que celle de Delaunay. Nous avons démontré que la suite de triangulations construites par cet algorithme de flip converge vers la triangulation de Delaunay de segments et nous avons prouvé qu'on obtient une triangulation de segments qui a la même topologie que celle de Delaunay après un nombre fini de modifications locales.

L'algorithme de flip que nous proposons pourra très certainement être amélioré. Le problème de l'algorithme actuel réside dans le fait que toutes les arêtes de la triangulation sont systématiquement traitées. Il semble assez évident que cet



l'algorithme serait plus efficace si on trouvait un moyen de choisir et d'ordonner les arêtes à traiter.

La preuve de la convergence de notre algorithme de flip utilise une propriété qui permet de contrôler les angles des triangles au cours de l'exécution de l'algorithme. De plus, la triangulation de Delaunay de segments est la seule triangulation de segments dont le relèvement est convexe. Ces résultats nous font penser que la triangulation de Delaunay de segments vérifie une propriété d'optimalité. Une perspective intéressante serait évidemment d'identifier cette propriété et de la démontrer.

Si nous parvenons à mettre en évidence une telle propriété, il pourrait aussi être intéressant d'essayer de la transposer dans le cadre des triangulations faiblement contraintes que nous avons définies. On pourra aussi s'intéresser aux avantages et inconvénients de ce nouveau type de triangulations dans le cadre de la génération de maillages.

De plus, nous avons bon espoir que les résultats obtenus pourront être étendus, notamment en considérant des sites plus généraux tels qu'un ensemble de segments non disjoints, des disques ou toutes sortes d'objets convexes, par exemple.

En revanche, l'extension de la notion de triangulation de Delaunay de segments et de ses propriétés en dimension trois semble un problème plus difficile. En effet, du point de vue du diagramme dual, très peu de résultats ont été donnés concernant le diagramme de Voronoï de segments dans  $\mathbf{R}^3$  et la complexité de ce diagramme reste un problème ouvert [56, 45]. Néanmoins, nous espérons qu'une bonne généralisation des triangulations de segments en dimension trois améliorera la compréhension de ces diagrammes de Voronoï.

# Bibliographie

- [1] P. K. Agarwal, M. de Berg, J. Matousek, and O. Schwarzkopf. Constructing levels in arrangements and higher order voronoi diagrams. *SIAM J. Comput.*, 27 :654–667, 1998.
- [2] A. Aggarwal, L. J. Guibas, J. Saxe, and P. W. Shor. A linear-time algorithm for computing the Voronoi diagram of a convex polygon. *Discrete Comput. Geom.*, 4(6) :591–604, 1989.
- [3] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, and T. Hackl. Pre-triangulations and liftable complexes. In *Proc. 22th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 282–291, 2006.
- [4] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, H. Krasser, and P. Brass. Pseudotriangulations from surfaces and a novel type of edge flip. *SIAM J. Comput.*, 32(6) :1621–1653, 2003.
- [5] H. Alt, O. Cheong, and A. Vigneron. The voronoi diagram of curved objects. *Discrete Comput. Geom.*, 34(3) :439–453, 2005.
- [6] F. Aurenhammer. Power diagrams : Properties, algorithms and applications. *SIAM J. Comput.*, 16 :78–96, 1987.
- [7] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams : A survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Comput. Surv.*, 23 :345–405, 1991.
- [8] F. Aurenhammer and H. Imai. Geometric relations among Voronoi diagrams. *Geometriae Dedicata*, 27, 1988.
- [9] F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi diagrams. In Jörg-Rüdiger Sack and Jorge Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, Amsterdam, 1998.
- [10] F. Aurenhammer and O. Schwarzkopf. A simple on-line randomized incremental algorithm for computing higher order Voronoi diagrams. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 2 :363–381, 1992.
- [11] M. W. Bern, H. Edelsbrunner, D. Eppstein, S. L. Mitchell, and T. S. Tan. Edge insertion for optimal triangulations. *Discrete Comput. Geom.*, 10 :47–65, 1993.

- [12] M. W. Bern and D. Eppstein. Mesh generation and optimal triangulation. In Ding-Zhu Du and Frank Kwang-Ming Hwang, editors, *Computing in Euclidean Geometry*, number 4 in Lecture Notes Series on Computing, pages 47–123. World Scientific, second edition, 1995.
- [13] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, R. Schott, M. Teillaud, and M. Yvinec. Applications of random sampling to on-line algorithms in computational geometry. *Discrete Comput. Geom.*, 8(1) :51–71, 1992.
- [14] J.-D. Boissonnat and P. Memari. Shape reconstruction from unorganized cross-sections. In *Symposium on Geometry Processing*, pages 89–98, 2007.
- [15] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec. *Géométrie algorithmique*. Ediscience international, Paris, 1995.
- [16] P. Bose, J. Czyzowicz, Z. Gao, P. Morin, and D. R. Wood. Simultaneous diagonal flips in plane triangulations. In *SODA '06 : Proceedings of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm*, pages 212–221, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [17] P. Bose and F. Hurtado. Flips in planar graphs. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 42(1) :60–80, 2009.
- [18] M. Bréviailliers, N. Chevallier, and D. Schmitt. Triangulations of line segment sets in the plane. In *FSTTCS*, pages 388–399, 2007.
- [19] M. Bréviailliers, N. Chevallier, and D. Schmitt. Flip algorithm for segment triangulations. In *MFCS*, pages 180–192, 2008.
- [20] A. Bronsted. *An Introduction to Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [21] K. Q. Brown. Voronoi diagrams from convex hulls. *Inform. Process. Lett.*, 9 :223–228, 1979.
- [22] S.-W. Cheng and T. K. Dey. Delaunay edge flips in dense surface triangulations. In *24th European Workshop on Computational Geometry*, pages 1–4, 2008.
- [23] S.-W. Cheng and T. K. Dey. Maintaining deforming surface meshes. In *SODA '08 : Proceedings of the nineteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 112–121, Philadelphia, PA, USA, 2008. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [24] L. P. Chew. Building voronoi diagrams for convex polygons in linear expected time. Technical Report PCS-TR90-147, Dept. Math. Comput. Sci., Dartmouth College, Hanover, NH, 1986.
- [25] L. P. Chew. Constrained Delaunay triangulations. *Algorithmica*, 4 :97–108, 1989.

- [26] L. P. Chew and K. Kedem. Placing the largest similar copy of a convex polygon among polygonal obstacles. In *Proc. 5th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 167–174, 1989.
- [27] L. P. Chew and K. Kedem. A convex polygon among polygonal obstacles : placement and high-clearance motion. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 3 :59–89, 1993.
- [28] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, and M. Overmars. *Computational Geometry : Algorithms and Applications*. Springer-Verlag TELOS, Santa Clara, CA, USA, 2008.
- [29] B. Delaunay. Neue darstellung der geometrischen kristallographie. *Z. Kristallograph.*, 84 :109–149, 1932.
- [30] B. Delaunay. Sur la sphère vide. *Bull. Acad. Sci. USSR : Class. Sci. Math. Nat.*, 7 :793–800, 1934.
- [31] O. Devillers. Randomization yields simple  $o(n \log^* n)$  algorithms for difficult  $\omega(n)$  problems. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 2(1) :97–111, 1992.
- [32] O. Devillers, G. Liotta, F. P. Preparata, and R. Tamassia. Checking the convexity of polytopes and the planarity of subdivisions. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 11 :187–208, 1998.
- [33] G. L. Dirichlet. Über die reduction der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 40 :209–227, 1850.
- [34] K. Dobrindt and M. Yvinec. Remembering conflicts in history yields dynamic algorithms. In *Proc. 4th Annu. Internat. Sympos. Algorithms Comput. (ISAAC 93)*, volume 762 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 21–30. Springer-Verlag, 1993.
- [35] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*, volume 10 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, Heidelberg, West Germany, 1987.
- [36] H. Edelsbrunner. Triangulations and meshes in computational geometry. *Acta Numerica*, pages 133–213, 2000.
- [37] H. Edelsbrunner and D. Guoy. Sink-insertion for mesh improvement. In *SCG '01 : Proceedings of the seventeenth annual symposium on Computational geometry*, pages 115–123. ACM, 2001.
- [38] H. Edelsbrunner and R. Seidel. Voronoi diagrams and arrangements. *Discrete Comput. Geom.*, 1 :25–44, 1986.
- [39] H. Edelsbrunner and N. R. Shah. Incremental topological flipping works for regular triangulations. *Algorithmica*, 15(3) :223–241, 1996.

- [40] H. Edelsbrunner, T. Tand, and R. Waupotitsch. An  $o(n^2 \log n)$  time algorithm for the minmax angle triangulation. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13 :994–1008, 1992.
- [41] M. Elbaz and J.-C. Spehner. Construction of voronoi diagrams in the plane by using maps. *Theoret. Comp. Sci.*, 77 :331–343, 1990.
- [42] I. Z. Emiris, E. P. Tsigaridas, and G. M. Tzoumas. The predicates for the voronoi diagram of ellipses. In *SCG '06 : Proceedings of the twenty-second annual symposium on Computational geometry*, pages 227–236, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [43] H. Erten and A. Üngör. Triangulations with locally optimal steiner points. In *SGP '07 : Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing*, pages 143–152, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2007. Eurographics Association.
- [44] P. Kauffman et J.-C. Spehner. Sur l’algorithme de fortune. *Revue internationale de CFAO et d’informatique graphique*, 10(4) :321–336, 1995.
- [45] H. Everett, S. Lazard, D. Lazard, and M. Safey El Din. The voronoi diagram of three lines. In *SCG '07 : Proceedings of the twenty-third annual symposium on Computational geometry*, pages 255–264, New York, NY, USA, 2007. ACM Press.
- [46] S. J. Fortune. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. *Algorithmica*, 2 :153–174, 1987.
- [47] J. Galtier, F. Hurtado, M. Noy, S. Pérennes, and J. Urrutia. Simultaneous edge flipping in triangulations. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*
- [48] C. F. Gauss. Recursion der untersuchungen über die eigenschaften der positiven ternaren quadratischen formen von ludwig august seeber. *J. Reine Angew. Math.*, 20 :312–320, 1840.
- [49] L. J. Guibas, D. E. Knuth, and M. Sharir. Randomized incremental construction of delaunay and voronoi diagrams. *Algorithmica*, 7(4) :381–413, 1992.
- [50] B. Joe. Construction of three-dimensional delaunay triangulations from local transformations. *Comp. Aided Geom. Design.*, 8(2) :123–142, 1991.
- [51] M. Karavelas and M. Yvinec. The voronoi diagram of of planar convex objects. In *Proc. 11th European Symposium on Algorithms*, volume 2832 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 337–348. Springer-Verlag, 2003.
- [52] M. I. Karavelas. A robust and efficient implementation for the segment voronoi diagram. In *International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, pages 51–62, 2004.

- [53] M. I. Karavelas. Voronoi diagrams in cgal. In *22nd European Workshop on Computational Geometry*, pages 229–232, 2006.
- [54] D.-S. Kim, D. Kim, and K. Sugihara. Voronoi diagram of a circle set from voronoi diagram of a point set : geometry. *Comput. Aided Geom. Des.*, 18(6) :563–585, 2001.
- [55] D. G. Kirkpatrick. Efficient computation of continuous skeletons. *Symposium on Foundations of Computer Science*, 0 :18–27, 1979.
- [56] V. Koltum and M. Sharir. Three dimensional euclidean voronoi diagrams of lines with a fixed number of orientations. *SIAM J. Comput.*, 32(3) :616–642, 2003.
- [57] C. L. Lawson. Software for  $C^1$  surface interpolation. In J. R. Rice, editor, *Math. Software III*, pages 161–194. Academic Press, New York, NY, 1977.
- [58] D. T. Lee. Two-dimensional voronoi diagrams in the  $l_p$ -metric. *J. ACM*, 27 :604–618, 1980.
- [59] D. T. Lee. Medial axis transformation of a planar shape. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 4(4) :363–369, 1982.
- [60] D. T. Lee and R. L. Drysdale. Generalization of voronoi diagrams in the plane. *SIAM J. Comput.*, 10 :73–87, 1981.
- [61] D. T. Lee and A. K. Lin. Generalized Delaunay triangulation for planar graphs. *Discrete Comput. Geom.*, 1 :201–217, 1986.
- [62] D. T. Lee and B. J. Schachter. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation. *Internat. J. Comput. Inform. Sci.*, 9(3) :219–242, 1980.
- [63] P. Memari and J.-D.Boissonnat. Provably good 2d shape reconstruction from unorganized cross-sections. *Computer Graphics Forum*, 27(5) :1403–1410, 2008.
- [64] C. O’Dunlaing, M. Sharir, and C. K. Yap. Generalized voronoi diagrams for moving a ladder, i : topological analysis. *Commun. Pure Appl. Math.*, 39 :423–483, 1986.
- [65] C. O’Dunlaing, M. Sharir, and C. K. Yap. Generalized voronoi diagrams for moving a ladder, ii : efficient construction of the diagram. *Algorithmica*, 2 :27–59, 1987.
- [66] C. O’Dunlaing and C. K. Yap. A retraction method for planning the motion of a disk. *J. Algorithms*, 2 :104–111, 1985.
- [67] A. Okabe, B. Boots, and K. Sugihara. *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1992.

- [68] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1998.
- [69] M. Pocchiola and G. Vegter. Topologically sweeping visibility complexes via pseudotriangulations. *Discrete Comput. Geom.*, 16(4) :419–453, 1996.
- [70] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry : An Introduction*. Springer-Verlag, New York, NY, 1985.
- [71] G. Rote, F. Santos, and I. Streinu. Pseudo-triangulations - a survey, 2006.
- [72] R. Sibson. Locally equiangular triangulations. *Comput. J.*, 21(3) :243–245, 1978.
- [73] M. G. Voronoï. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *J. Reine Angew. Math.*, 134 :198–287, 1908.
- [74] C.-K. Yap. An  $o(n \log n)$  algorithm for the voronoi diagram of a set of simple curve segments. *Disc. Comput. Geom.*, 2 :365–393, 1987.