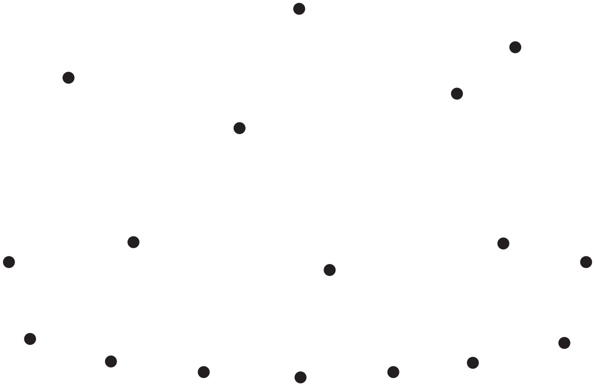
Construction de la triangulation de Delaunay de segments par un algorithme de flip

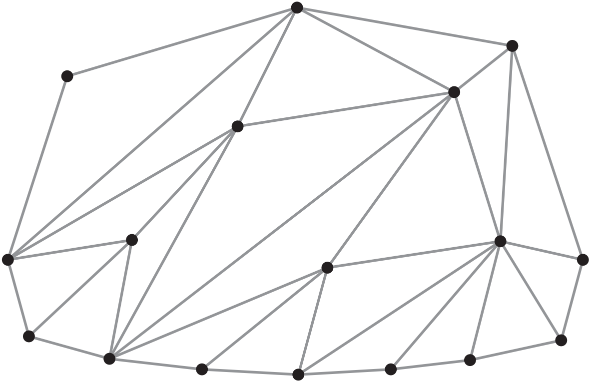
Mathieu Brévilliers

Laboratoire LMIA
Université de Haute-Alsace

Triangulation de points



Triangulation de points



Triangulation de points

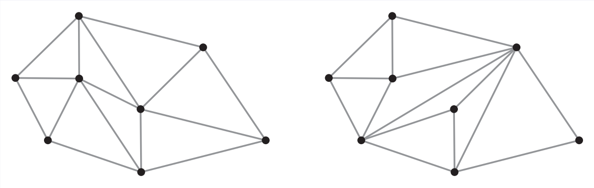
Théorème

Pour tout ensemble S de n sites, soit n' le nombre de sites sur la frontière de l'enveloppe convexe de S.

Toute triangulation de S admet :

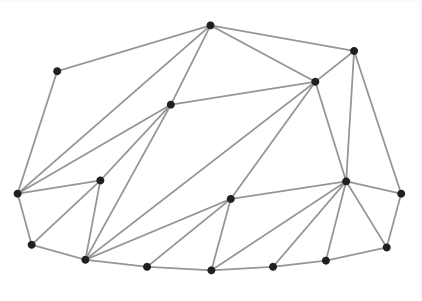
- $2n - n' - 2$ faces et
- $3n - n' - 3$ arêtes.

Exemples où $n = 8$ et $n' = 6$: 8 faces et 15 arêtes



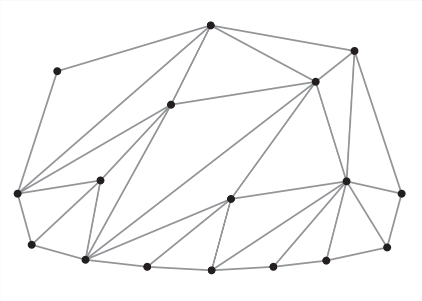
Triangulation de Delaunay

Triangulation quelconque

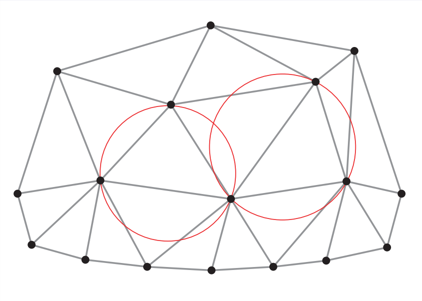


Triangulation de Delaunay

Triangulation quelconque

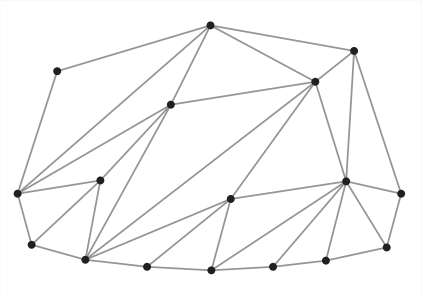


Triangulation de Delaunay

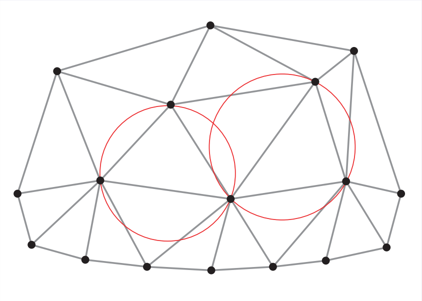


Triangulation de Delaunay

Triangulation quelconque



Triangulation de Delaunay



Régularité

La triangulation de Delaunay maximise le minimum des angles des triangles.

Algorithme de flip

Une triangulation quelconque de S

$\Downarrow$

Modifications locales

$\Downarrow$

Triangulation de Delaunay de S

Algorithme de flip

Une triangulation quelconque de S

$\Downarrow$

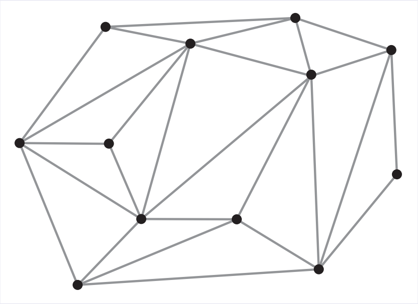
Modifications locales

$\Downarrow$

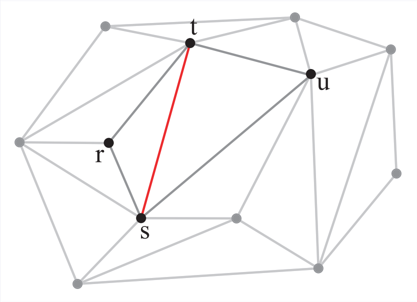
Triangulation de Delaunay de S

1. Comment savoir si la triangulation courante est de Delaunay ?
2. Quelles sont les modifications locales à effectuer ?
3. L'algorithme converge-t-il vers la triangulation de Delaunay ?

Légalité d'une arête

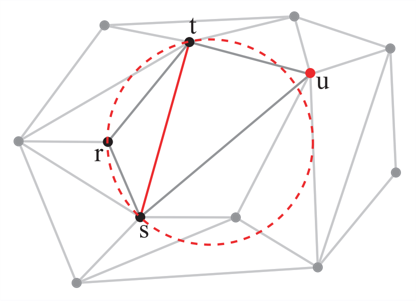


Légalité d'une arête

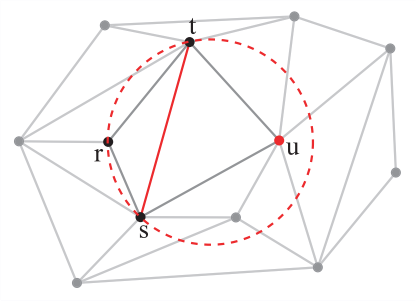


Légalité d'une arête

Arête légale

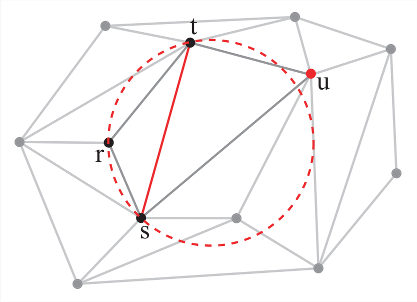


Arête illégale

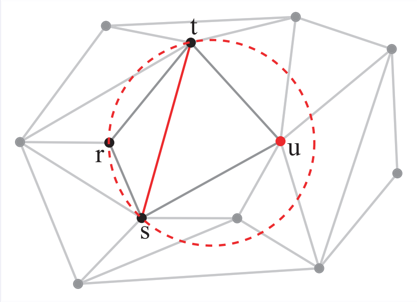


Légalité d'une arête

Arête légale



Arête illégale

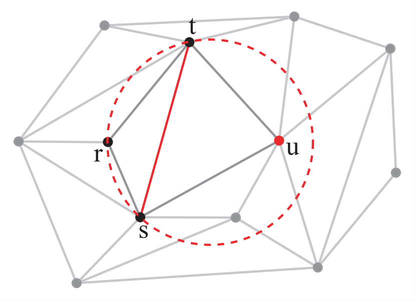


Théorème

La triangulation de Delaunay de S est la seule triangulation de S dont toutes les arêtes sont légales.

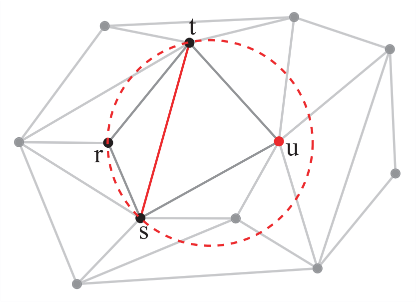
Modifications locales

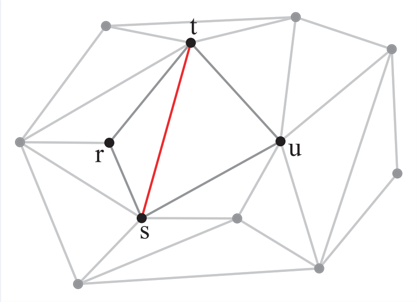
Arête illégale



Modifications locales

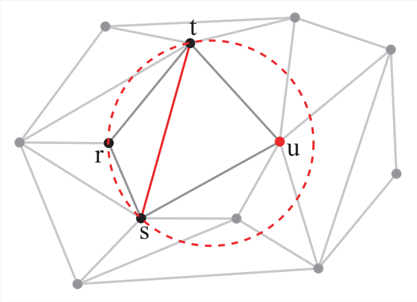
Arête illégale

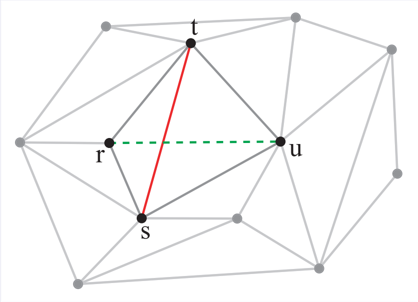




Modifications locales

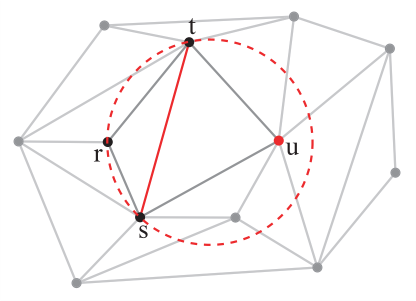
Arête illégale



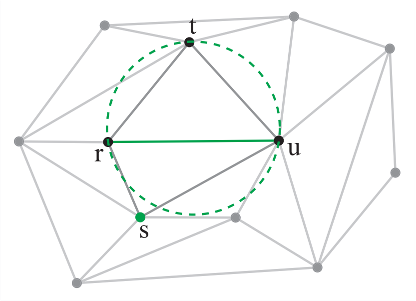


Modifications locales

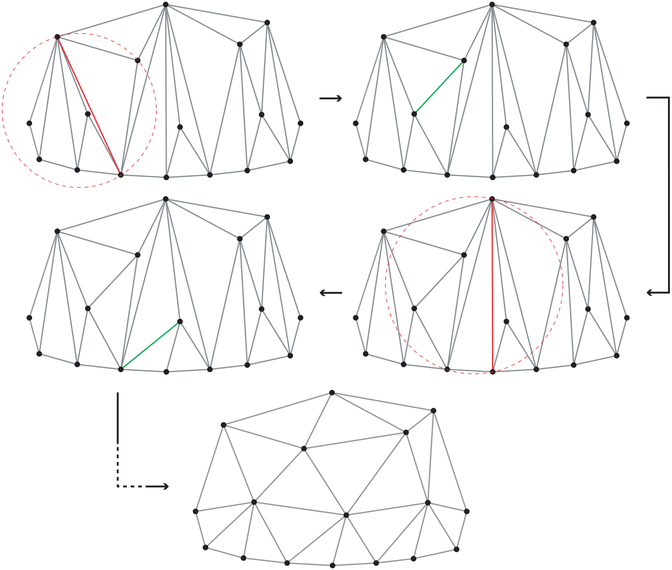
Arête illégale



Arête légale

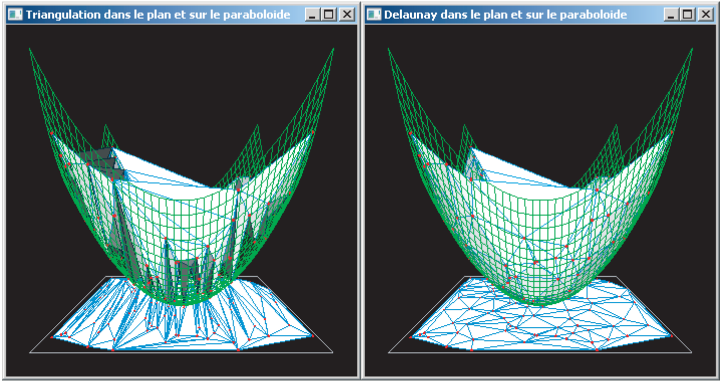


Exemple

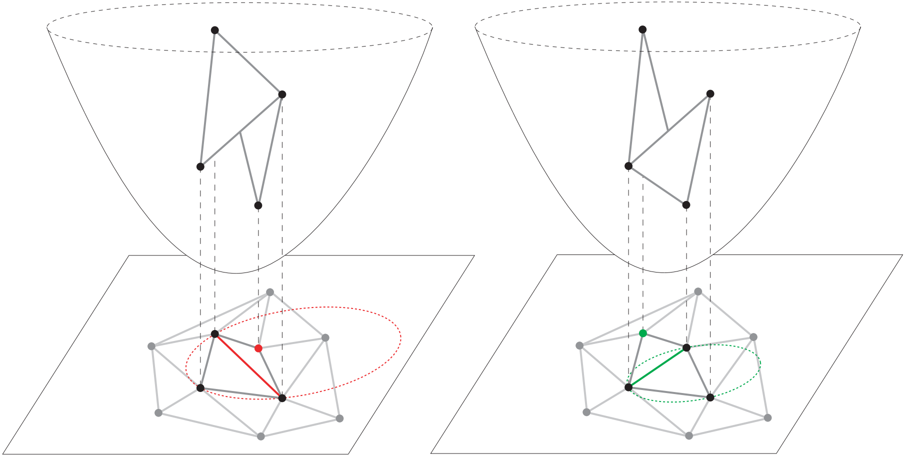


Convergence de l'algorithme

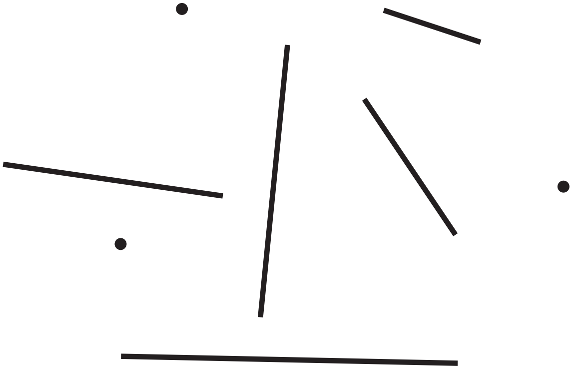
- Un flip d'arête doit améliorer la triangulation.
- Observation du relèvement de la triangulation courante sur un paraboloïde de dimension trois.



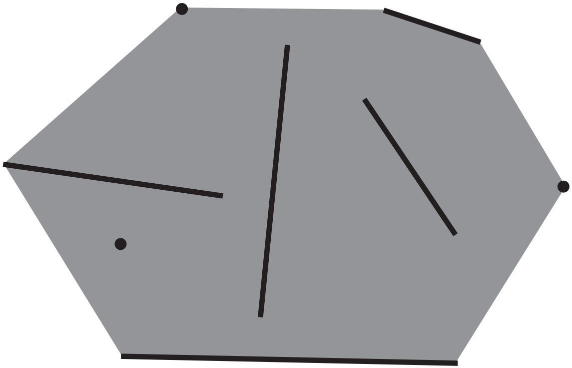
Convergence de l'algorithme



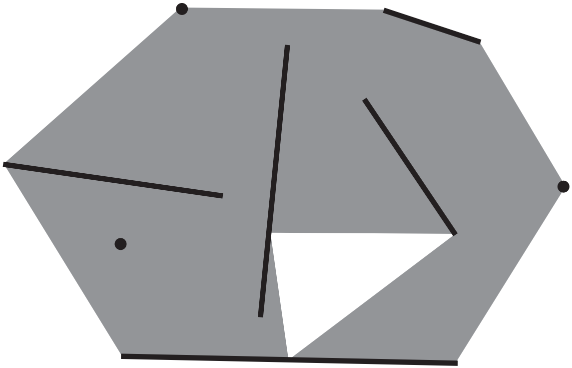
Triangulation de segments



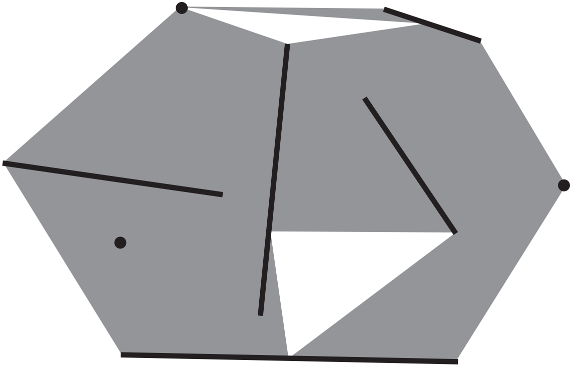
Triangulation de segments



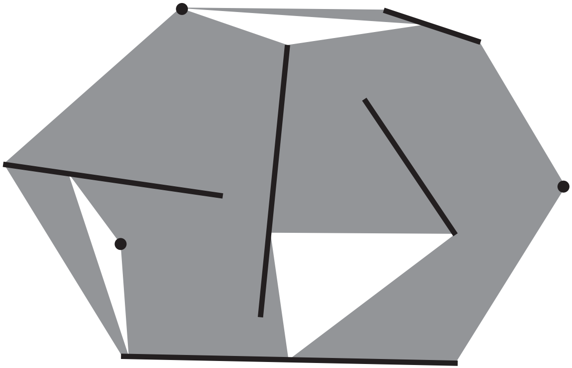
Triangulation de segments



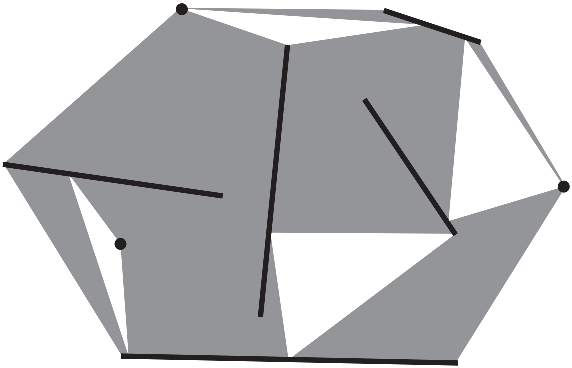
Triangulation de segments



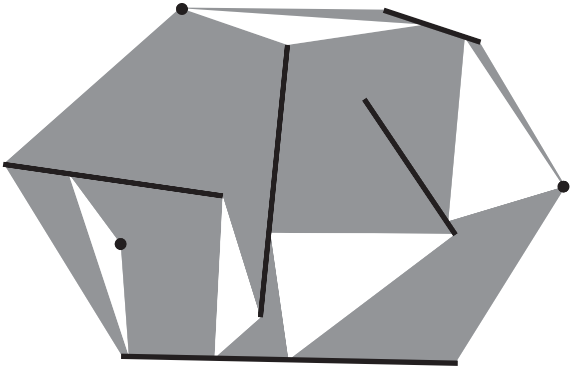
Triangulation de segments



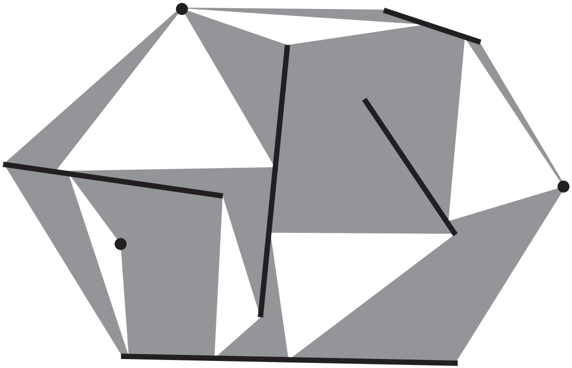
Triangulation de segments



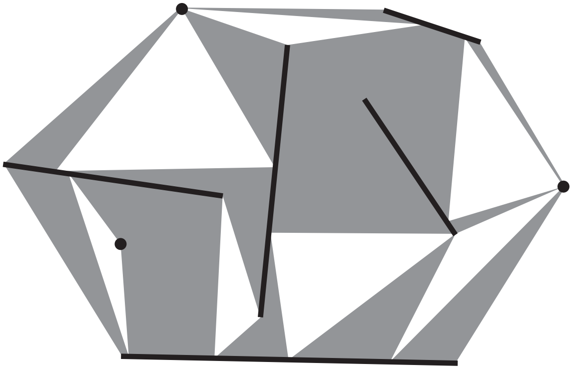
Triangulation de segments



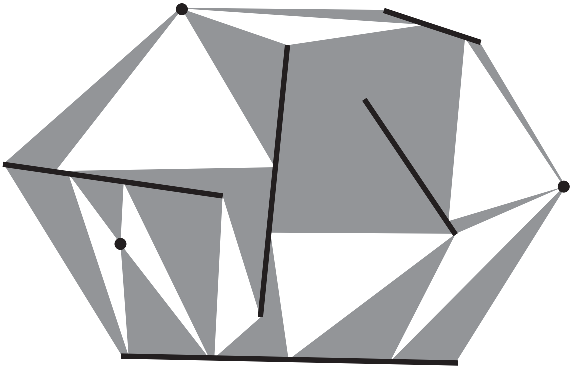
Triangulation de segments



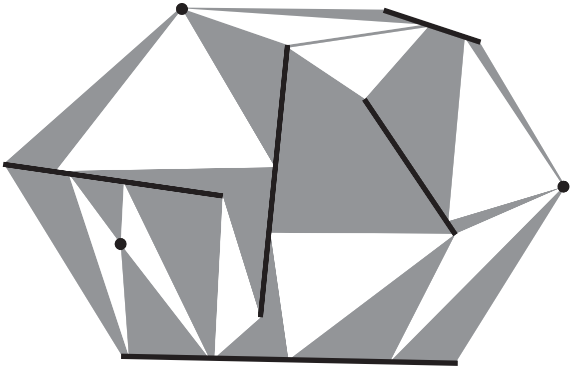
Triangulation de segments



Triangulation de segments



Triangulation de segments



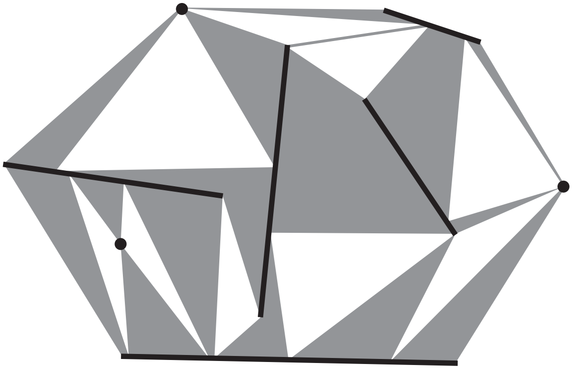
Triangulation de segments

Définition

Une triangulation de segments $\mathcal{T}$ de S est une partition de l'enveloppe convexe $conv(S)$ de S en sites, faces et arêtes tels que :

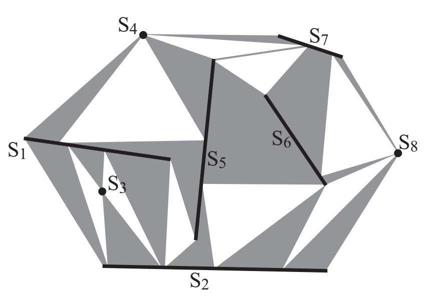
1. Chaque face de $\mathcal{T}$ est un triangle ouvert dont les sommets sont sur trois sites de S distincts et dont les côtés ouverts ne coupent pas S,
2. Aucune face ne peut être ajoutée sans couper une face déjà existante,
3. Les arêtes de $\mathcal{T}$ sont les composantes connexes de $conv(S) \setminus (F \cup S)$, où F est l'union des faces de $\mathcal{T}$.

Triangulation de segments



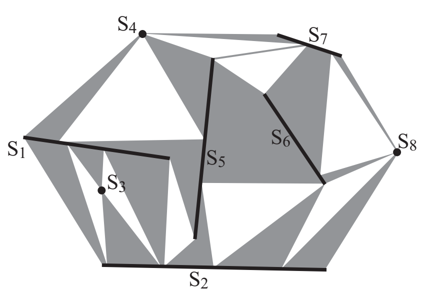
Propriétés topologiques

Triangulation de segments

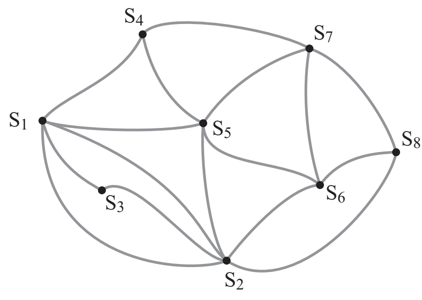


Propriétés topologiques

Triangulation de segments

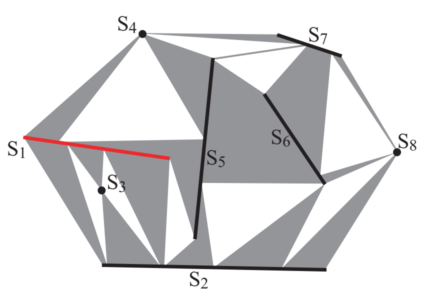


Graphe

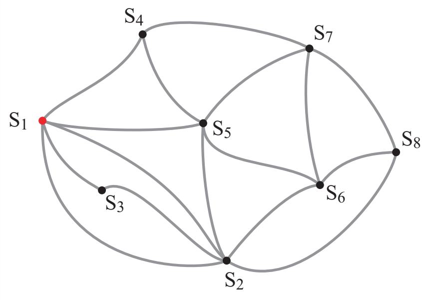


Propriétés topologiques

Triangulation de segments

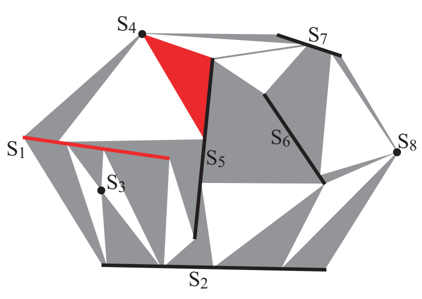


Graphe

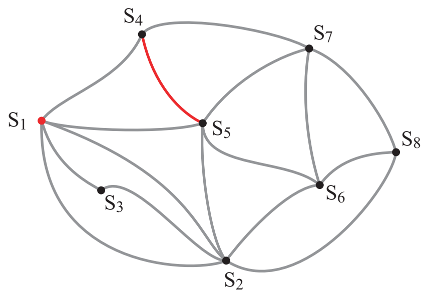


Propriétés topologiques

Triangulation de segments

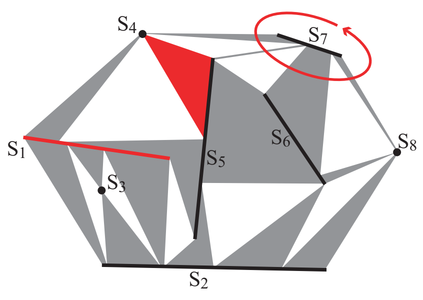


Graphe

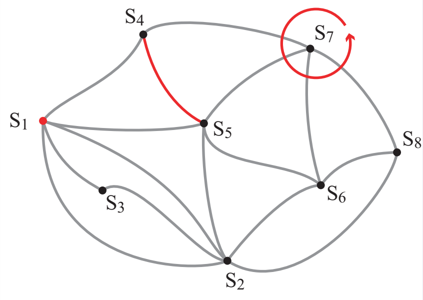


Propriétés topologiques

Triangulation de segments



Graphe



Propriétés topologiques

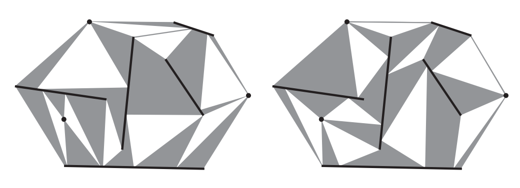
Théorème

Pour tout ensemble S de n sites, soit n' le nombre de côtés de l'enveloppe convexe de S qui sont pas des sites.

Toute triangulation de segments de S admet :

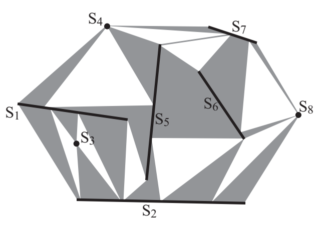
- $2n - n' - 2$ faces et
- $3n - n' - 3$ arêtes.

Exemples où $n = 8$ et $n' = 5$: 9 faces et 16 arêtes

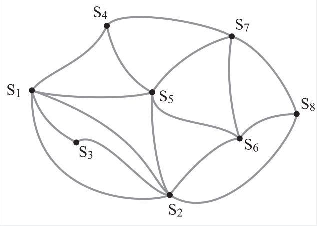


Propriétés topologiques

Triangulation de segments

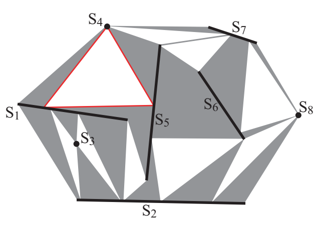


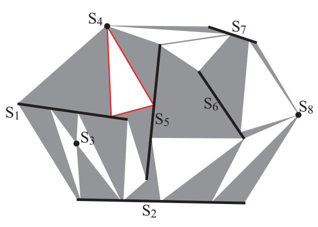
Carte combinatoire



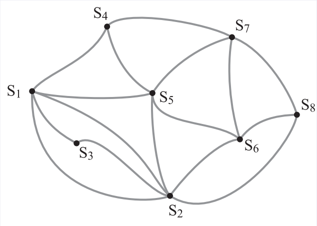
Propriétés topologiques

Triangulations de segments

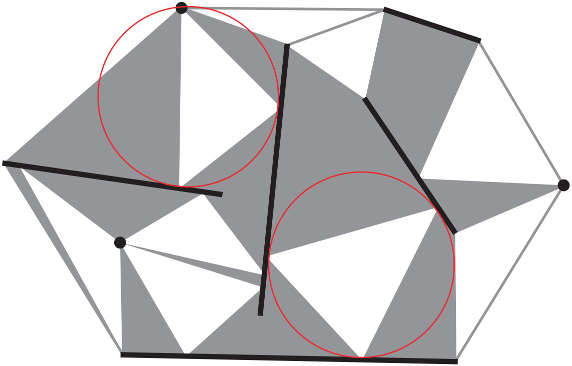




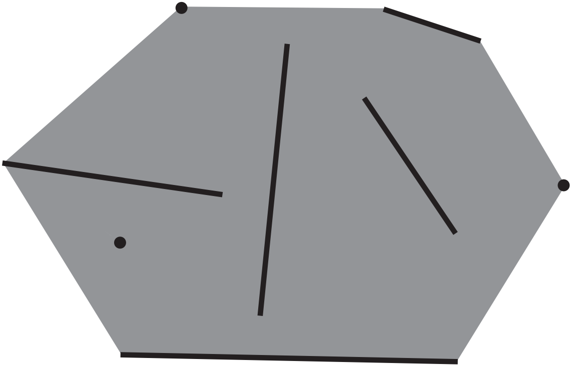
Carte combinatoire



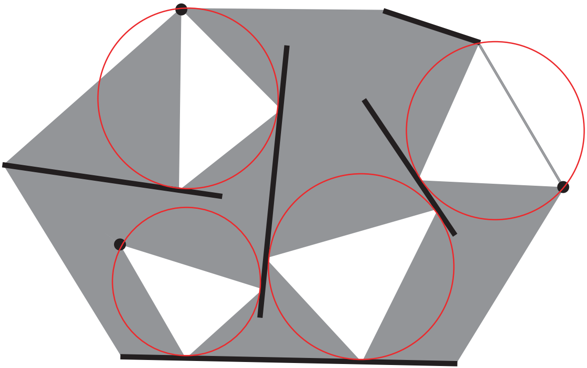
Triangulation de Delaunay de segments



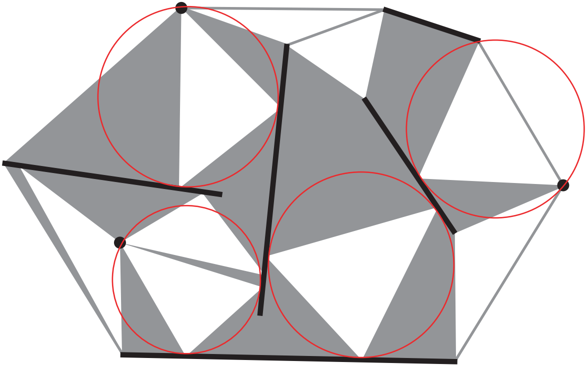
Triangulation de Delaunay de segments



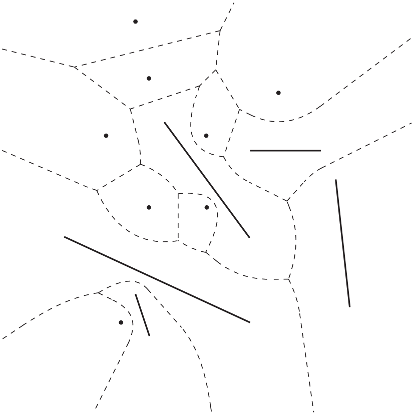
Triangulation de Delaunay de segments



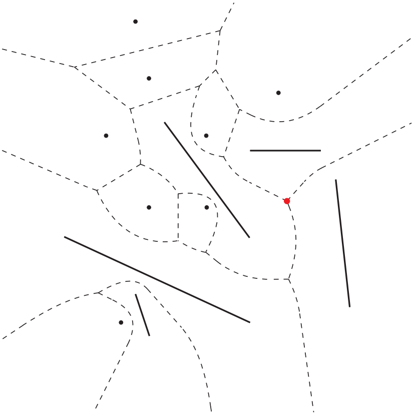
Triangulation de Delaunay de segments



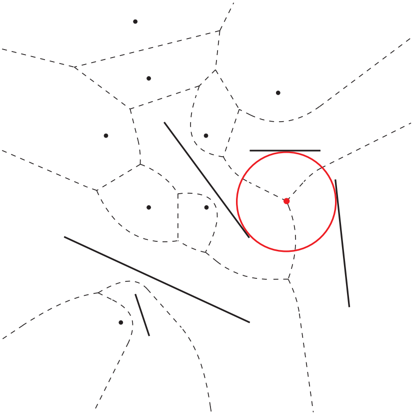
Lien avec le diagramme de Voronoï de segments

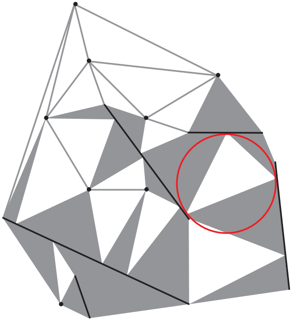


Lien avec le diagramme de Voronoï de segments

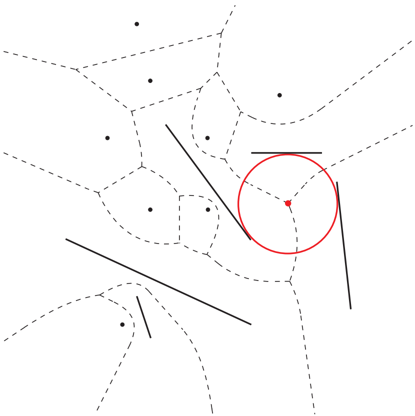


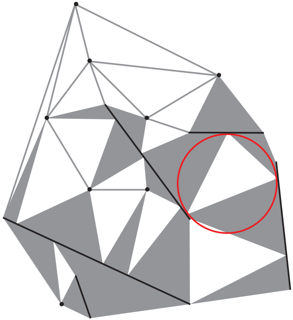
Lien avec le diagramme de Voronoï de segments





Lien avec le diagramme de Voronoï de segments





Théorème

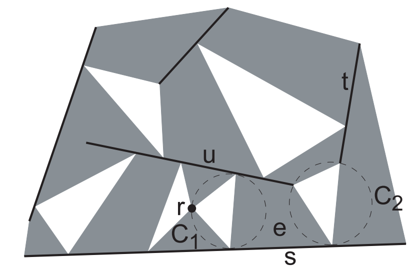
La triangulation de Delaunay de segments de S est duale du diagramme de Voronoï de segments de S.

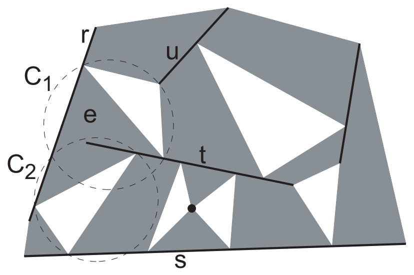
Légalité géométrique d'une arête

Définition

Une arête e est légale si les sites r, s, t et u ne rencontrent pas les intérieurs des cercles C_1 et C_2.

Exemples





Légalité géométrique d'une arête

Théorème

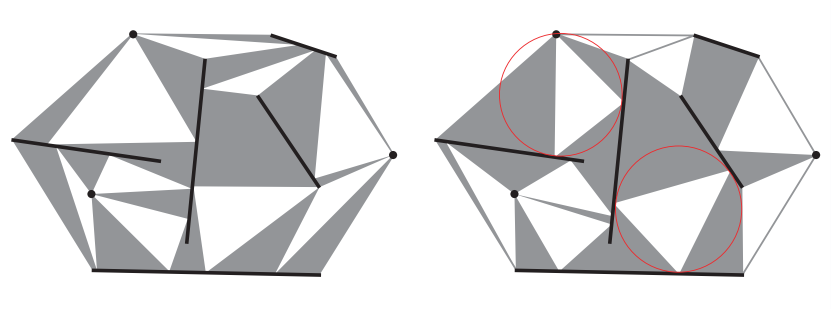
La triangulation de Delaunay de segments de S est l'unique triangulation de segments de S dont toutes les arêtes sont géométriquement légales.

Légalité géométrique d'une arête

Théorème

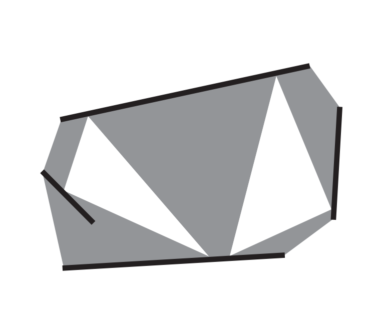
La triangulation de Delaunay de segments de S est l'unique triangulation de segments de S dont toutes les arêtes sont géométriquement légales.

Et si une triangulation a la même topologie que celle de Delaunay ?



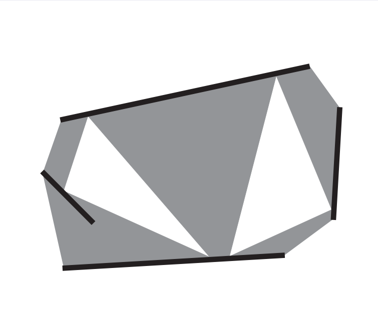
Légalité topologique d'une arête

Les faces d'une triangulation...

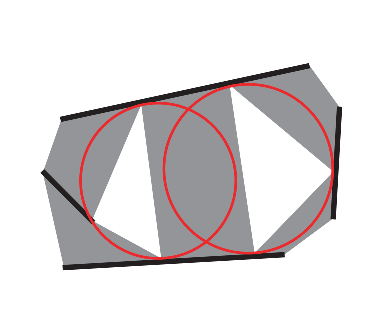


Légalité topologique d'une arête

Les faces d'une triangulation...

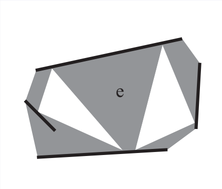


...et leurs triangles de tangence



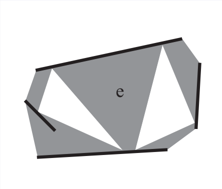
Légalité topologique d'une arête

Exemple 1

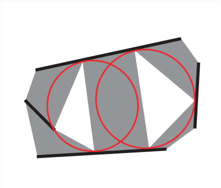


Légalité topologique d'une arête

Exemple 1

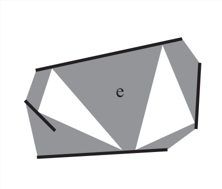


Arête légale

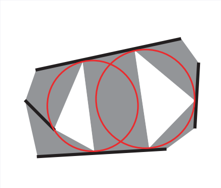


Légalité topologique d'une arête

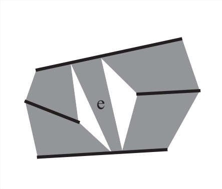
Exemple 1



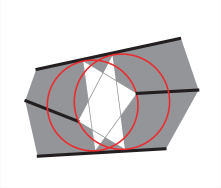
Arête légale



Exemple 2

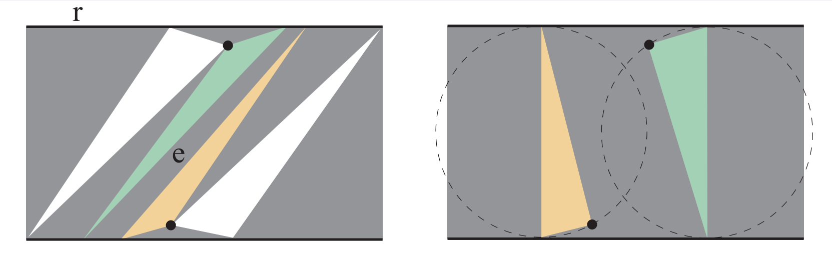


Arête illégale



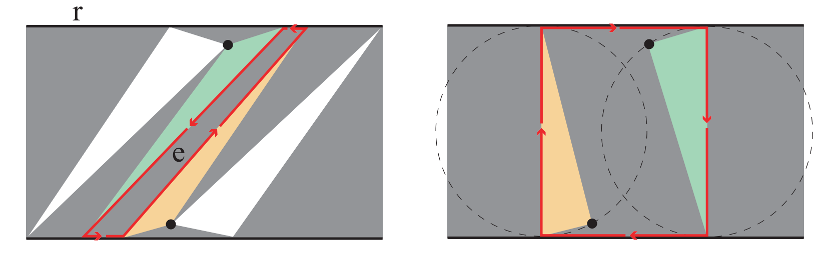
Légalité topologique d'une arête

Remarque : le test des cercles vides n'est pas toujours suffisant.



Légalité topologique d'une arête

Remarque : le test des cercles vides n'est pas toujours suffisant.



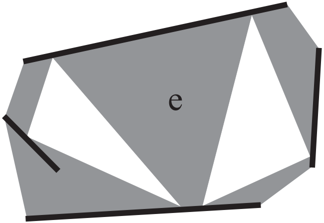
Légalité topologique d'une arête

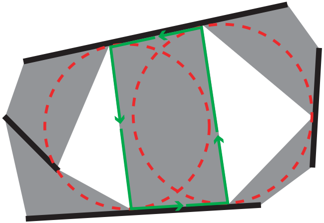
Définition

Une arête *e* est topologiquement légale si les deux conditions suivantes sont réunies.

Quand on considère les triangles de tangences des faces adjacentes à *e* :

1. les cercles circonscrits à ces triangles sont localement vides,
2. le polygone correspondant à la frontière de l'arête *e* est correctement orienté.

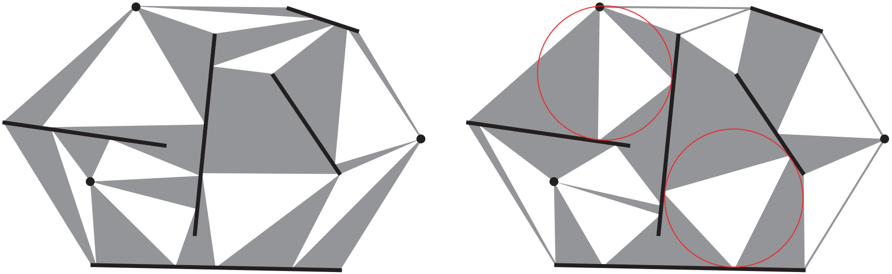




Légalité topologique d'une arête

Théorème

Une triangulation de segments dont toutes les arêtes sont légales a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments.



Algorithme de flip : difficultés rencontrées

Méthode 1 : Extension directe de l'algorithme de flip classique

Flipper les arêtes qui sont géométriquement illégales.

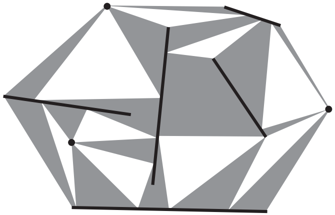
Algorithme de flip : difficultés rencontrées

Méthode 1 : Extension directe de l'algorithme de flip classique

Flipper les arêtes qui sont géométriquement illégales.

Problème

Si la triangulation courante a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments, alors l'algorithme effectue des modifications topologiques.



Algorithme de flip : difficultés rencontrées

Méthode 2 : utiliser la légalité topologique

Flipper les arêtes qui sont topologiquement illégales.

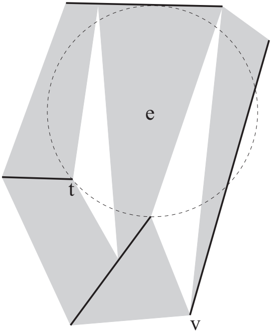
Algorithme de flip : difficultés rencontrées

Méthode 2 : utiliser la légalité topologique

Flipper les arêtes qui sont topologiquement illégales.

Problème

Le polygone associé à une arête topologiquement illégale n'est pas forcément convexe.



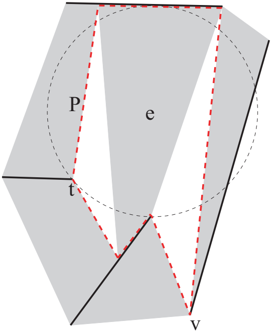
Algorithme de flip : difficultés rencontrées

Méthode 2 : utiliser la légalité topologique

Flipper les arêtes qui sont topologiquement illégales.

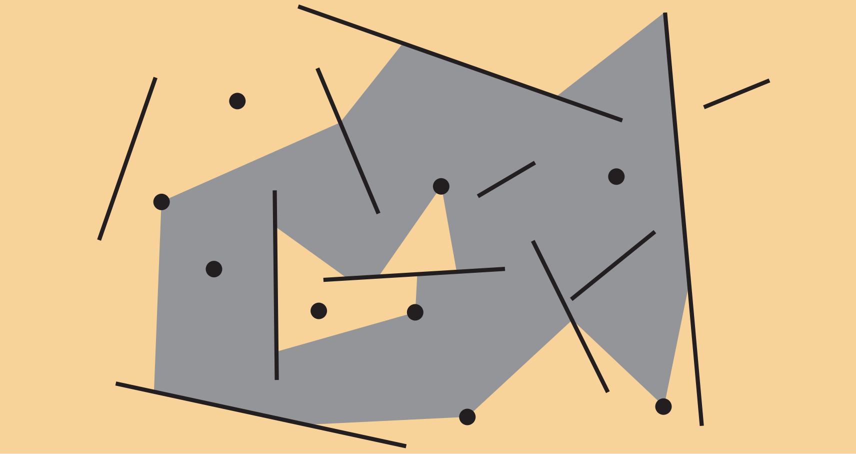
Problème

Le polygone associé à une arête topologiquement illégale n'est pas forcément convexe.



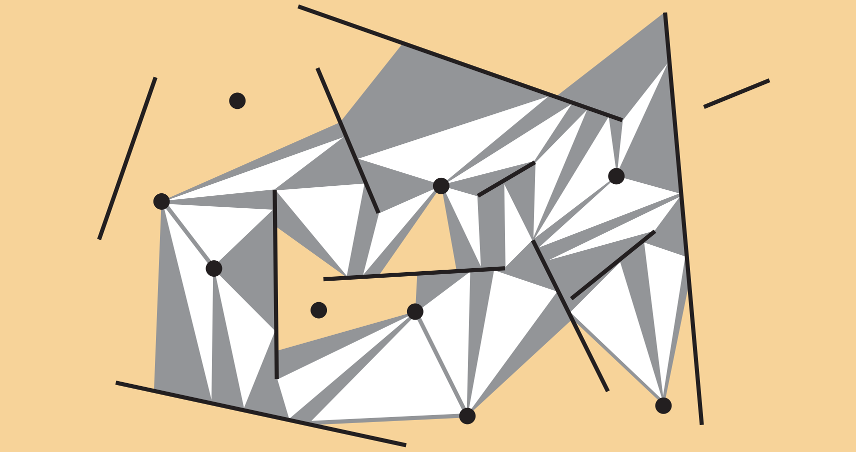
Triangulations de S-polygones

Un S-polygone



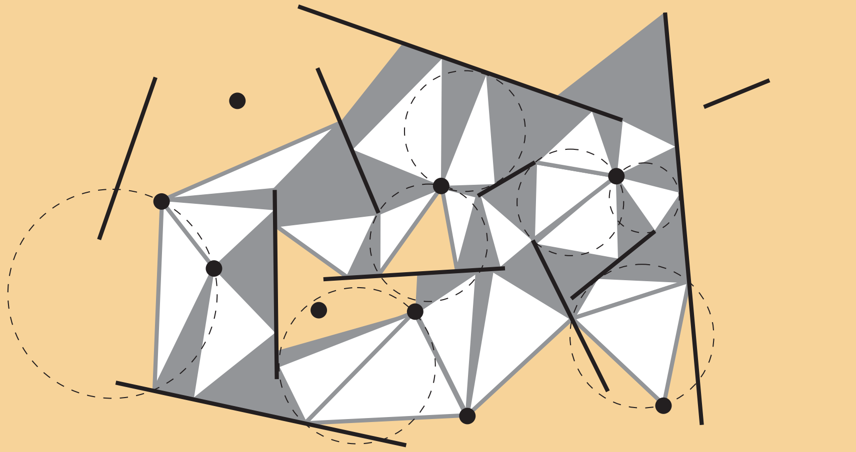
Triangulations de S-polygones

Une triangulation de segments d'un S-polygone



Triangulations de S-polygones

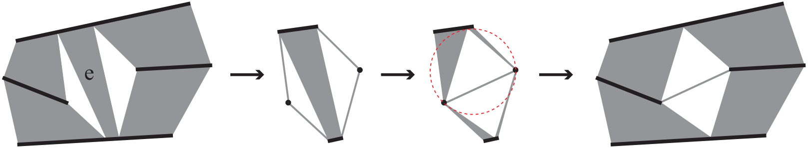
Une triangulation de Delaunay de segments d'un S-polygone



Algorithme de flip

- Au départ : une triangulation de segments de S.
- L'algorithme traite toutes les arêtes en boucle.
- Pour chaque arête, on calcule la triangulation de Delaunay de segments de son polygone associé.

Exemple d'étape de l'algorithme



Fonctions localement convexes

Fonction localement convexe

Si U est une région de $\mathbf{R}^2$, une fonction $\phi : U \to \mathbf{R}$ est localement convexe si la restriction de ϕ à chaque segment inclus dans U est convexe.

Fonctions localement convexes

Fonction localement convexe

Si U est une région de $\mathbf{R}^2$, une fonction $\phi : U \to \mathbf{R}$ est localement convexe si la restriction de ϕ à chaque segment inclus dans U est convexe.

On note $L(U)$ l'ensemble des fonctions $\phi : U \to \mathbf{R}$ qui sont localement convexes sur U.

Enveloppe convexe inférieure d'une fonction

Étant donnée une fonction $f : U \cap S \to \mathbf{R}$, l'enveloppe convexe inférieure de f sur (U, S) est la fonction $f_{U,S}$ définie sur U par

$$f_{U,S}(x) = \sup\{\phi(x) : \phi \in L(U),\ \forall y \in U \cap S,\ \phi(y) \leq f(y)\}.$$

Théorème

- Si t est un triangle de Delaunay de U, alors $f_{U,S}$ est affine sur t.

Relèvements des triangulations de segments de U

Théorème

- Si t est un triangle de Delaunay de U, alors $f_{U,S}$ est affine sur t.
- Si t est un triangle
  - inclus dans U,
  - dont les sommets sont dans S, et
  - sur lequel $f_{U,S}$ est affine,

  alors t est un triangle de Delaunay de U.

Relèvements des triangulations de segments de U

Théorème

L'ensemble des triangles

- inclus dans U,
- dont les sommets sont dans S, et
- sur lesquels $f_{U,S}$ est affine

est l'ensemble des faces d'une triangulation de segments de U.

Cette triangulation est dite induite par $f_{U,S}$.

Relèvements des triangulations de segments de U

Théorème

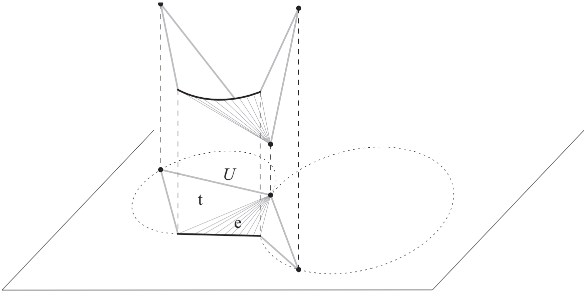
Une triangulation de segments de U est de Delaunay si et seulement si elle est induite par $f_{U,S}$.

Relèvements des triangulations de segments de U

Définition

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de segments de U. La fonction $f_{U,S,\mathcal{T}} : U \to \mathbf{R}$ est définie de la manière suivante :

– $f_{U,S,\mathcal{T}}(p) = f(p)$ si p est un point de S,
– $f_{U,S,\mathcal{T}}(p) = f_{\overline{t},S}(p)$ si p est dans une face t de $\mathcal{T}$,
– $f_{U,S,\mathcal{T}}(p) = f_{\overline{e},S}(p)$ si p est dans une arête e de $\mathcal{T}$.



Théorème

- Si $\mathcal{T}$ est la triangulation de Delaunay de segments de U, alors
$$f_{U,S,\mathcal{T}} = f_{U,S}.$$
- Pour toute triangulation de segments $\mathcal{T}$ de U,
$$f_{U,S,\mathcal{T}} \geq f_{U,S}.$$

Convergence de l'algorithme

On note f_n la fonction $f_{conv(S),S,\mathcal{T}_n}$ correspondant à la triangulation $\mathcal{T}_n$ obtenue à une étape n de l'algorithme de flip.

Théorème

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers $f_{conv(S),S}$ quand n tend vers $+\infty$.

Convergence de l'algorithme

On note f_n la fonction $f_{conv(S),S,\mathcal{T}_n}$ correspondant à la triangulation $\mathcal{T}_n$ obtenue à une étape n de l'algorithme de flip.

Théorème

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers $f_{conv(S),S}$ quand n tend vers $+\infty$.

- Preuve :

On note f_n la fonction $f_{conv(S),S,\mathcal{T}_n}$ correspondant à la triangulation $\mathcal{T}_n$ obtenue à une étape n de l'algorithme de flip.

Théorème

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers $f_{conv(S),S}$ quand n tend vers $+\infty$.

- Preuve :
  1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante,

Convergence de l'algorithme

On note f_n la fonction $f_{conv(S),S,\mathcal{T}_n}$ correspondant à la triangulation $\mathcal{T}_n$ obtenue à une étape n de l'algorithme de flip.

Théorème

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers $f_{conv(S),S}$ quand n tend vers $+\infty$.

- Preuve :
  1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante,
  2. Montrer que la fonction g vers laquelle $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge est localement convexe.

Convergence de l'algorithme

On note f_n la fonction $f_{conv(S),S,\mathcal{T}_n}$ correspondant à la triangulation $\mathcal{T}_n$ obtenue à une étape n de l'algorithme de flip.

Théorème

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers $f_{conv(S),S}$ quand n tend vers $+\infty$.

- Preuve :
  1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante,
  2. Montrer que la fonction g vers laquelle $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge est localement convexe.

Proposition

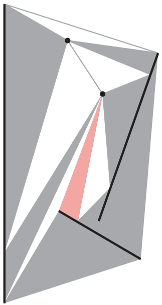
L'angle minimal de la triangulation courante $\mathcal{T}_n$ est supérieur ou égal à une valeur qui ne dépend que de la triangulation de segments initiale $\mathcal{T}_0$.

Convergence de l'algorithme

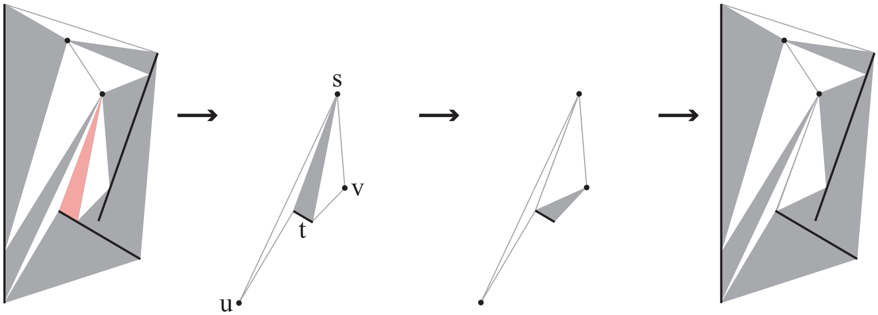
Corollaire

Il existe un entier N tel que, quel que soit $n \geq N$, la triangulation $\mathcal{T}_n$ a la même topologie que la triangulation de Delaunay de segments de S.

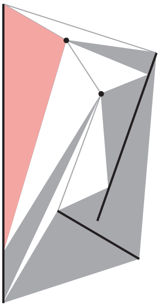
Exemple



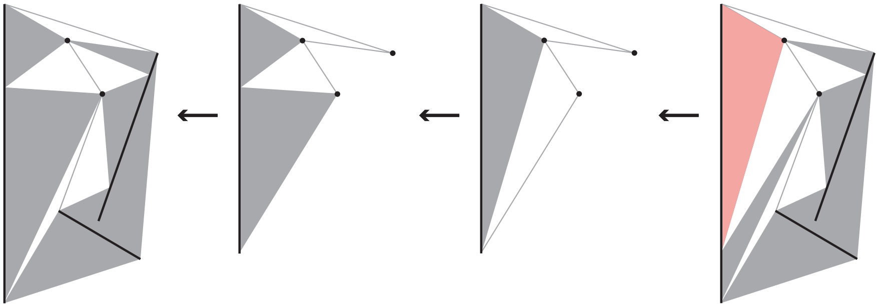
Exemple



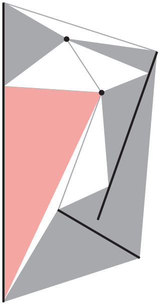
Exemple



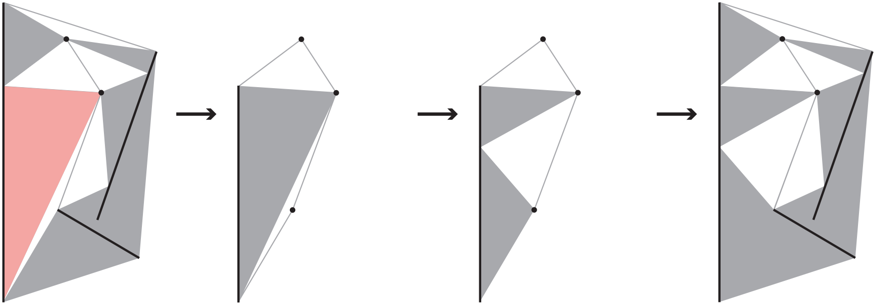
Exemple



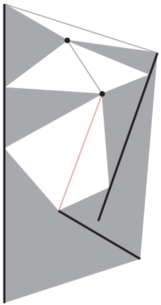
Exemple



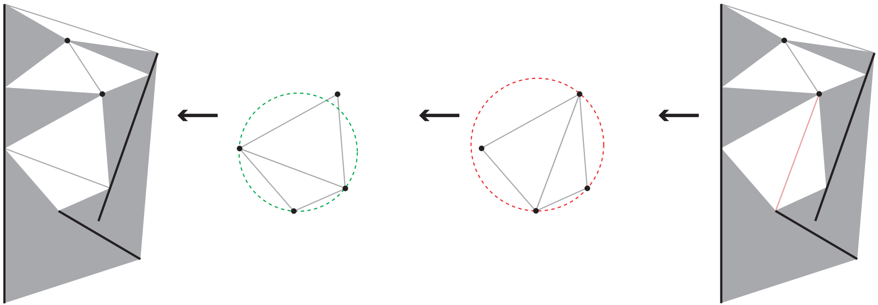
Exemple



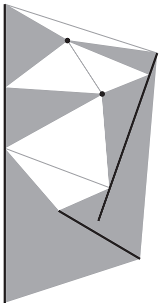
Exemple



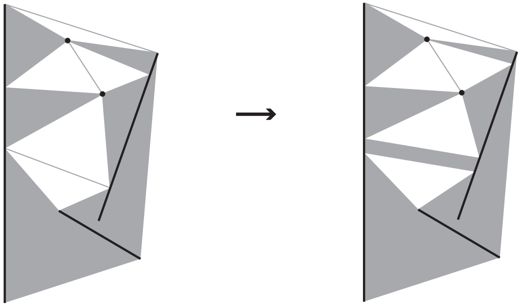
Exemple



Exemple



Exemple



Remarques sur le comportement de l'algorithme

Remarques sur le comportement de l'algorithme

- L'algorithme traite même les arêtes topologiquement légales,

Remarques sur le comportement de l'algorithme

- L'algorithme traite même les arêtes topologiquement légales,
- une arête peut être traitée plusieurs fois,

Remarques sur le comportement de l'algorithme

- L'algorithme traite même les arêtes topologiquement légales,
- une arête peut être traitée plusieurs fois,
- une arête topologiquement illégale n'est pas forcément immédiatement flippable,

Remarques sur le comportement de l'algorithme

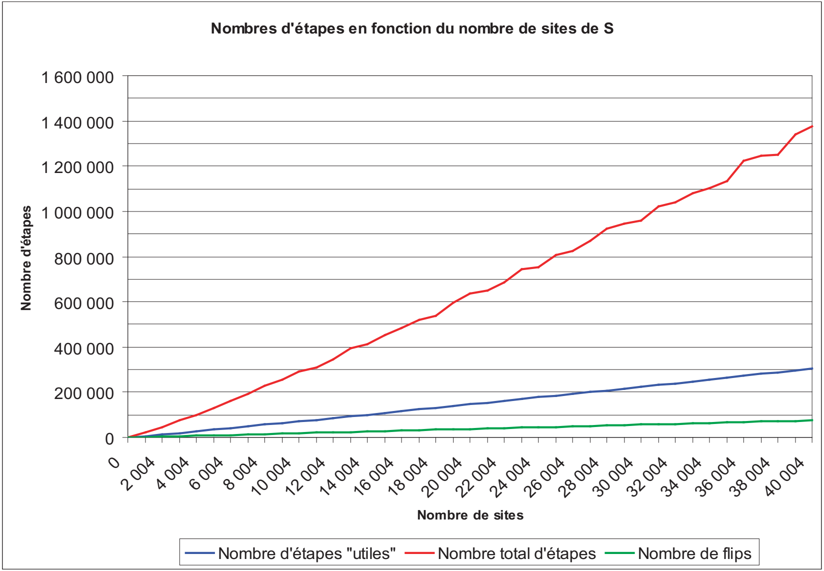
- L'algorithme traite même les arêtes topologiquement légales,
- une arête peut être traitée plusieurs fois,
- une arête topologiquement illégale n'est pas forcément immédiatement flippable,
- une arête topologiquement légale peut être flippée, devenir illégale, et être à nouveau flippée plus tard pour redevenir légale.

Remarques sur le comportement de l’algorithme

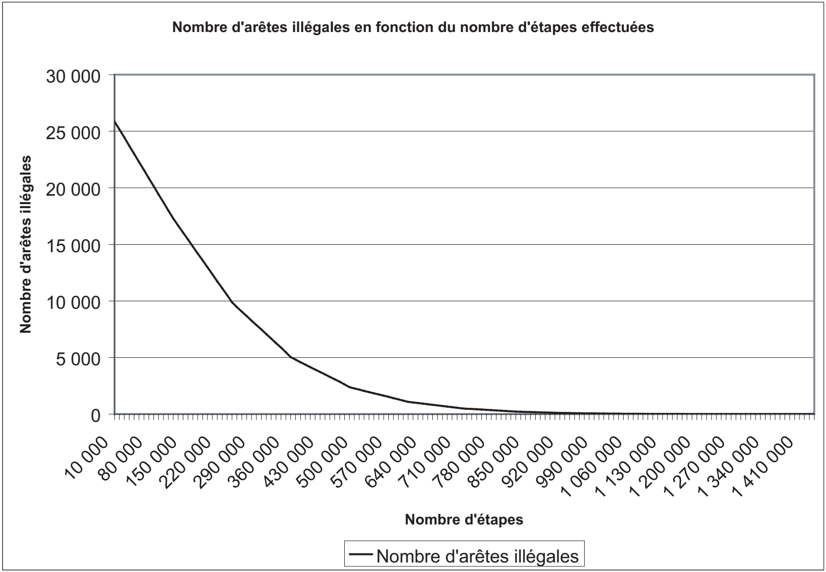
- L’algorithme traite même les arêtes topologiquement légales,
- une arête peut être traitée plusieurs fois,
- une arête topologiquement illégale n’est pas forcément immédiatement flippable,
- une arête topologiquement légale peut être flippée, devenir illégale, et être à nouveau flippée plus tard pour redevenir légale.

La complexité de cet algorithme de flip est donc difficile à évaluer.

Résultats expérimentaux



Résultats expérimentaux



Conclusion

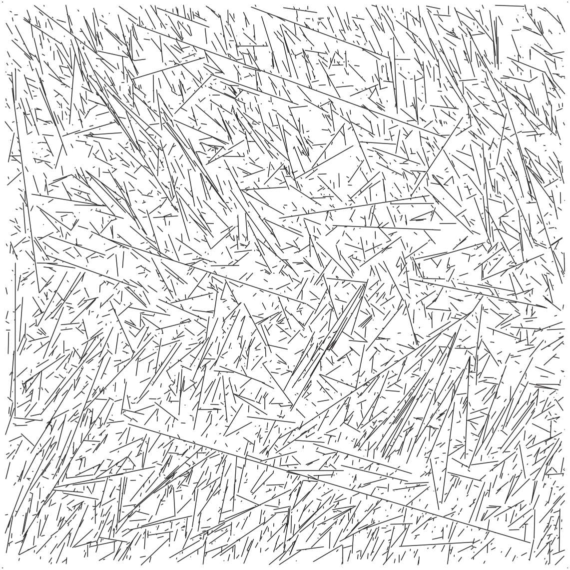
- Nouvelle généralisation de la notion de triangulation d'un ensemble de segments,
- Extension de la légalité des arêtes pour caractériser la triangulation de Delaunay de segments,
- Algorithme de flip pour construire la triangulation de Delaunay de segments.

Conclusion

- Nouvelle généralisation de la notion de triangulation d'un ensemble de segments,
- Extension de la légalité des arêtes pour caractériser la triangulation de Delaunay de segments,
- Algorithme de flip pour construire la triangulation de Delaunay de segments.

- Perspectives :
  - Amélioration de l'algorithme de flip,
  - Optimalité de la triangulation de Delaunay de segments,
  - Sites plus généraux,
  - Généralisation en 3D.

Exemple avec 5 000 sites



Exemple avec 5 000 sites

Exemple avec 5 000 sites