Idéaux fermés de certaines algèbres de fonctions analytiques.

Brahim Bouya

UNIVERSITÉ MOHAMMED V - AGDAL
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat

N^0 d'ordre: 2325

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

Brahim Bouya

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Analyse

Idéaux fermés de certaines algèbres de fonctions analytiques.

Sous la direction de
Pr. Omar El-Fallah

Soutenu le 09/01/2007 à Rabat. Devant le Jury composé de :

Président :

H. Sayeh	P.E.S à la faculté des sciences de Rabat.

Examinateurs :

A. Borichev	Professeur à l'université de Provence, Marseille.
A. Boussejra	P.E.S à la faculté des sciences de Kénitra.
O. El-Fallah	P.E.S à la faculté des sciences de Rabat.
K. Kellay	Maître de Conférence à l'université de Provence, Marseille.
M. Mbekhta	Professeur à l'université de Lille I.

Faculté des Sciences, 4 Avenue Ibn Battouta B.P. 1014 RP, Rabat-Maroc.
Tel +212 (0) 37 77 18 34/35/38, Fax : +212 (0) 37 77 42 61, http://www.fsr.ac.ma

Avant Propos

Cette thèse a été préparée dans le cadre de L'UFR : "Modèles fonctionnels et sous-espaces invariants" au département de Mathématiques et Informatique de la faculté des sciences à Rabat.

Mes remerciements les plus respectueux sont adressés à mon directeur de thèse le Professeur O. El-Fallah, de sa disponibilité avec un grand intêret et pour ses conseils avisés.

Je tiens à remercier aussi le Professeur K. Kellay, qui a participé à la codirection de cette thèse, de son suivi avec beaucoup de patience et de ces encouragements.

J'ai eu la chance au cours de ces années d'éffectué plusieurs séjours à l'étranger. Financé par l'action intégrée Franco-Marocaine No. MA/03/64. Je veux exprimer ici toute ma gratitude envers tous ceux qui ont rendu possibles ces voyages et tout particulièrement au Professeur K. Kellay pour son accueil.

Je remercie le Professeur H. Sayeh pour avoir bien voulu accepter de présider le Jury de cette soutenance.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux Professeurs, A. Borichev et K. Kellay de l'université de Provence, Marseille, A. Boussejra de la faculté des sciences de Kénitra, M. Mbekhta de l'université de Lille I et A. Nicolau de l'université Autònoma de Barcelona pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce travail.

Je voudrais aussi exprimer mes vifs compliments à Monsieur Koubida et Madame Rabiâa du département de Mathématiques de la faculté des sciences de Rabat de leur disponibilité.

A ma famille.
A tous ceux qui me sont chers.

Sommaire

CHAPITRE 1

Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse à la description des idéaux fermés de certaines algèbres de fonctions analytiques sur le disque et le polydisque unité.
Commençons d'abord par préciser quelques notations. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Muni de la multiplication ordinaire et de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}^p} |f(z)|$, l'algèbre du polydisque $\mathcal{A}(\mathbb{D}^p)$, des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}^p$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}^p$, est une algèbre de Banach commutative unitaire. Il est connu que le spectre de $\mathcal{A}(\mathbb{D}^p)$ est homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}^p$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^p)$, on désigne par $\mathcal{I}(f)$ l'idéal fermé de $\mathcal{A}(\mathbb{D}^p)$ engendré par f et par

$$\begin{cases} Z_f := \{z \in \overline{\mathbb{D}}^p \ : \ f(z) = 0\}, \\ E_f := Z_f \cap \partial\mathbb{D}^p, \end{cases}$$

où $\partial\mathbb{D}^p$ est la frontière topologique de $\mathbb{D}^p$. Pour tout sous ensemble fermé $E \subset \overline{\mathbb{D}}^p$ on pose

$$\mathcal{J}(E) := \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^p) \ : \ f_{|E} = 0\}$$

Il est claire que $\mathcal{J}(E)$ est un idéal fermé de $\mathcal{A}(\mathbb{D}^p)$.

1. *Algèbres de Fonctions Analytiques sur le disque unité*

Il est bien connu que toute fonction f dans l'algèbre du disque se décompose en un produit d'une fonction intérieure U_f et d'une fonction extérieure O_f et on a $f = \lambda U_f O_f$ $(|\lambda| = 1)$, avec

$$\begin{cases} U_f = B_f S_f \\ B_f(z) := z^m \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z} \frac{\overline{z_n}}{|z_n|} \\ S_f(z) := \exp\Big\{ - \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_f(\theta)\Big\} \\ O_f(z) := \exp\Big\{ \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log|f(e^{i\theta})| d\theta\Big\}, \end{cases}$$

où $|U_f(z)| = 1$ presque partout sur le cercle unité, B_f est le produit de Blaschke associé à la suite $\{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\} = Z_f \cap \mathbb{D}$ (z_n est répété selon l'ordre de multilicité du zéro z_n de la fonction f) et S_f est la fonction intérieure singulière associée à la mesure singulière $\mu_f \geq 0$ portée sur un sous ensemble de E_f. Pour toutes fonctions intérieures U et V, on dit que U divise V si $\frac{V}{U}$ est une fonction analytique bornée. Dans ce cas $\frac{V}{U}$ est une fonction intérieure dont la mesure singulière associée est $\mu_V - \mu_U \geq 0$. Soit $\mathfrak{U}$ une famille non vide de fonctions intérieures. Il existe une unique fonction intérieure U, que l'on nomme le plus grand commun diviseur des fonctions de $\mathfrak{U}$, vérifiant

i) U divise chaque fonction de $\mathfrak{U}$
ii) Si U_1 est une fonction intérieure qui divise chaque fonction de $\mathfrak{U}$, alors U_1 divise U.

Il est facile de vérifier que la fonction $U = BS$, où B est le produit de Blaschke associé au zéros communs des fonctions de $\mathfrak{U}$ et S est la fonction intérieure singulière associée à la mesure suivante:

$$\mu_S(E) = \inf \sum_{j=1}^{n} \inf_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu(E_j), \qquad (E = \cup_j E_j)$$

où l'inf est pris sur toutes les partitions disjointes de l'ensemble $E = \cup_j E_j$ à des sous ensembles E_j de Baire et où $\mathfrak{M}$ désigne la famille de toute les mesures singulières des fonctions de $\mathfrak{U}$.

Notons par $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, l'algèbre des fonctions holomorphes et bornées sur $\mathbb{D}$. Le théorème de Beurling-Rudin caractérise complètement les idéaux fermés de l'algèbre du disque $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ **[20]**. Plus précisément, soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$ un idéal fermé. On désigne par $U_\mathcal{I}$, le plus grand commun diviseur des facteurs intérieurs des fonctions non identiquement nulle de $\mathcal{I}$ et on pose

$$E_\mathcal{I} := \cap_{f \in \mathcal{I}} E_f.$$

Théorème 1. *Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$ un idéal fermé. On a*

$$\mathcal{I} = U_\mathcal{I} \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \cap \mathcal{J}(E_\mathcal{I}),$$

En particulier, pour qu'une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ satisfasse $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(E_f)$ il faut et il suffit que f soit extérieure.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude des idéaux fermés des algèbres de Banach incluse dans l'algèbre du disque. Korenblum dans **[22]** a donné une description complète des idéaux fermés de l'algèbre

H^2_1; des fonctions analytiques f telles que $f' \in H^2$, où H^2 est l'espace de Hardy usuel. Il a montré que tout idéal fermé $\mathcal{I} \subset H^2_1$ s'écrit sous la forme $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}^\infty \cap H^2_1$, où $\overline{\mathcal{I}}^\infty$ est la fermeture de $\mathcal{I}$ dans l'algèbre du disque. D'autres résultats du même type ont été ensuite obtenus dans **[25]** par Matheson pour l'agèbre lip_α $(0 < \alpha < 1)$, des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre α sur $\overline{\mathbb{D}}$:

$$|f(z) - f(w)| \leq o(|z-w|^\alpha) \qquad (\ |z-w| \to 0).$$

Notons que cette condition est équivalente à la condition suivante

$$|f'(z)| = o((1-|z|)^{\alpha-1}) \qquad (\ |z| \to 1^-).$$

Dans la suite lip_α sera munie de la norme

$$\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + \sup\{(1-|z|)^{1-\alpha}|f'(z)| : z \in \mathbb{D}\},$$

où $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$. Des résultats analogues ont été obtenus par Shamoyan pour les algèbres $\lambda^{(n)}_\omega$ des fonctions analytiques f sur $\mathbb{D}$ telles que $|f^{(n)}(\zeta_1) - f^{(n)}(\zeta_2)| = o(\omega(|\zeta_1 - \zeta_2|))$, $|\zeta_1 - \zeta_2| \to 0$, où n est un entier naturel superieur à 1 et ω est un module de continuité **[27]**. Notons aussi que dans **[28, 29]** Shirokov a donné une caractérisation complète des idéaux fermés d'une large classe d'algèbres de Banach de type Besov englobant les algèbres $\mathcal{AB}^s_{2,2} := \Big\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) :\ \sum_{n\geq 0} |\widehat{f}(n)|^2(1+n)^{2s} < \infty \Big\}$, $(s > 1/2)$. En ce qui concerne l'algèbre $\mathcal{AB}^{1/2}_{2,2}$ (comme cas limite $s = 1/2$), la description des idéaux fermés parait d'être compliqué **[10, 16]**.

Signalons finalement que dans **[13]** J. Esterle à montrer que dans l'algèbre

$$\mathcal{A}^+ := \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) :\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{f}(n)| < +\infty\},$$

il existe des idéaux fermé non standard.

Soit $\mathcal{D}$ l'espace de Dirichlet des fonctions holomorphes f sur le disque unité tels que l'intégrale de Dirichlet de f

$$D(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z)$$

est finie, où $dA(z) = \frac{1}{\pi} r dr dt$ est la mesure planaire normalisé sur $\mathbb{D}$. L'espace de Dirichlet muni de la norme

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt + D(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)|\hat{f}(n)|^2,$$

est un espace de Hilbert.
Le chapitre 4 contient l'article [**4**] et a été annoncer dans [**5**]. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la caractérisations des idéaux fermés de l'algèbre $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{D} \cap \mathrm{lip}_\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1/2)$. Notons que si $1/2 < \alpha \leq 1$, alors $\mathrm{lip}_\alpha \subset \mathcal{D}$. Muni du produit usuel et de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} := \|f\|_\alpha + D^{1/2}(f),$$

$\mathcal{A}_\alpha$ est une algèbre de Banach commutative unitaire. Nous donnons une description complète des idéaux fermés de l'algèbre $\mathcal{A}_\alpha$. Plus précisément, nous montrons que tout idéal fermé $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}_\alpha$ s'écrit sous la forme $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}^\infty \cap \mathcal{A}_\alpha$. On Pose

$$E_\mathcal{I} := \{z \in \mathbb{T} : f(z) = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{I}\},$$

$$\mathcal{J}_\alpha(E_\mathcal{I}) := \{f \in \mathcal{A}_\alpha : f_{|E_\mathcal{I}} = 0\}\}.$$

On désigne par $U_\mathcal{I}$, le plus grand commun diviseur des facteurs intérieurs des fonctions non identiquement nulle de $\mathcal{I}$. Nous obtenons le théorème suivant:

Théorème 2. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal fermé de $\mathcal{A}_\alpha$, alors*

$$\mathcal{I} = \Big\{ f \in \mathcal{J}_\alpha(E_\mathcal{I}) \,:\, f/U_\mathcal{I} \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \Big\},$$

Pour montrer ce résultat nous ramenons notre problème à un problème d'approximation et ce grâce a la méthode de la résolvante de Beurling–Carleman–Domar. Ensuite, nous donnons un raffinement de la méthode d'approximation de Korenblum [**22**] dans $\mathcal{A}_\alpha$.

2. *Algèbres de Fonctions Analytiques sur le polydisque unité*

Une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ est dite Beurling-Rudin-extérieure (BR-extérieure) si $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(E_f)$. Il est alors clair que dans ce cas $Z_f = E_f$. Le problème de déterminer les fonctions $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ ayant $Z_f = (\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$ et qui sont BR-extérieure est connue sous le nom de *Problème de Levin uniforme* [**19, 24**]. Dans une série de papiers [**17, 18, 19**], H. Hedenmalm à donner quelques résultats concernant ce problème. Dans le cas où $Z_f \subset \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$, il a montré que $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(Z_f)$ si et seulement si les fonctions $f(\cdot, w)$ sont extérieures pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$ et la fonction $f(1, \cdot)$ est soit identiquement nulle soit extérieure [**17**].

Dans **[18]** et pour le cas où $Z_f = E_f = (\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$, H. Hedenmalm a montré que si

$$|\log|f(z,w)|| = o(1/\inf\{|1-z|,|1-w|\}) \qquad \big(z \to 1 \text{ ou } w \to 1\big),$$

alors $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(E_f)$.
Pour tout $\alpha \geq 0$, on pose

$$\mathcal{A}^+_\alpha := \big\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \|f\|_\alpha := \sum_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{f}(n)|(1+n)^\alpha < +\infty\big\},$$

où $\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$. Notons que $\mathcal{A}^+_0$ n'est autre que $\mathcal{A}^+$, définie précédemment.
J. P. Kahane à étudié les idéaux fermés primairs de $\mathcal{A}^+$ **[21]**. En particulier, il a montré que si $f \in \mathcal{A}^+$ telle que $Z_f = \{1\}$, alors $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(\{1\})$ si et seulement si f est une fonction extérieure. Ce résultat reste encore valable pour l'algèbre de Beurling $\mathcal{A}^+_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$.
Pour tout $0 \leq \alpha < 1$ et pour tout $0 \leq \beta < 1$, on définie l'algèbre de Beurling du bidisque comme suit :

$$\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta} := \big\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2) : \|f\|_{\alpha,\beta} := \sum_{m,n\in\mathbb{N}} |\widehat{f}(m,n)|(1+m)^\alpha(1+n)^\beta < +\infty\big\},$$

où

$$\widehat{f}(m,n) := \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta},e^{i\varphi})e^{-im\theta}e^{-in\varphi}d\theta d\varphi.$$

Muni du produit usuel et de la norme $\|\ .\ \|_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ est une algèbre de Banach commutative unitaire dont le spectre est homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}^2$.
Pour tout $F \subset \overline{\mathbb{D}}^2$, on note

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta}(F) := \{f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta} : f_{|F} = 0\}.$$

Il est claire que $\mathcal{J}_{\alpha,\beta}(F)$ est un idéal fermé de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$. On définie $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f)$ comme étant l'idéal fermé de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ engendré par f. Dans le chapitre 3, nous obtenons les deux théorèmes suivants

Théorème 3. *Soit $f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ telle que $(\alpha,\beta) \in [0,1[\times]0,1[$. Supposons que $Z_f = \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$, alors $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{J}_{\alpha,\beta}(Z_f)$ si et seulement si f est une fonction BR-extérieure.*

Théorème 4. *Soit* $f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ *telle que* $(\alpha,\beta) \in]0,1[\times]0,1[$. *Supposons que* $Z_f = E_f = (\{1\}\times\overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}}\times\{1\})$. *Si*

$$|\log|f(z,w)|| = o(1/\inf\{|1-z|,|1-w|\}) \qquad \big(z \to 1 \ ou \ w \to 1\big),$$

alors $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{J}_{\alpha,\beta}(E_f)$.

Notons que la notion de la $\delta-$visibilité, introduite et étudier dans [**9, 11, 31**] (Voir le chapitre suivant concernant la $\delta-n-$visibilité), est un outil fondamental dans la preuve du théorème 3 et du théorème 4. La preuve du théorème 3 est basée sur l'estimation de la résolvante du shift dans l'algèbre quotient. Cette résolvante est majorée par la norme de l'inverse d'une fonction dans l'algèbre. La $\delta-1-$visibilté (l'estimation de la norme de l'inverse) nous donne une bonne estimation. Ensuite une application du principe de Phragmén-Lindelöf (Théorème 14) nous permet de conclure. Dans la preuve du théorème 4 en estime la résolvante de "la fonction distance" dans l'algèbre quotient et ce grâce à la $\delta-2-$visibilité (la résolution d'une identité de Bezout avec contrôle des normes des solutions dans l'algèbre). Aussi le principe de Phragmén-Lindelöf nous donne le résultat. Cette technique n'est pas applicable pour le cas $\alpha=\beta=0$.

CHAPITRE 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques notions et résultats qui nous seront utiles pour les chapitres suivants.

(1) Notions de la $\delta - n-$visibilité.
(2) Variantes du Principe de Phragmén-Lindelöf.
(3) Propriété de Factorisation.

1. *La* $\delta - n-$*visibilité*

Dans cette partie nous rappelons la notion de la $\delta - n-$visibilité d'une algèbre de Banach commutative unitaire et nous mettons en évidence quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite. Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire dont l'ensemble des caractères sera noté $\mathcal{M}_A$. La transformation de Gelfand associée à A est l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_A : \quad A &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{M}_A) \\ x &\longrightarrow \widehat{x} : \phi \in \mathcal{M}_A \longrightarrow \widehat{x}(\phi) = \phi(x), \end{aligned} \tag{1}$$

où $\mathcal{C}(\mathcal{M}_A)$ est l'algèbre des fonctions continues sur $\mathcal{M}_A$. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in A^n$, on pose

$$\delta_f =: \inf_{\phi \in \mathcal{M}_A} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mid \widehat{f_k}(\phi) \mid^2 \Big)^{1/2}. \tag{2}$$

Définition 5. *Soit* $0 < \delta \leq 1$. *On dit que le spectre de* A *est* $\delta - n-$*visible s'il existe une constante* $\mathcal{C}_n(\delta)$, *qui dépend seulement de* δ *et de* n, *telle que pour tout* $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in A^n$ *vérifiant* $\delta_f \geq \delta$ *et*

$$\|f\| := \Big(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 \Big)^{1/2} \leq 1, \tag{3}$$

il existe $g = (g_1, g_2, ..., g_n) \in A^n$ *solution de l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k g_k = 1$$

et

$$\|g\| = (\sum_{k=1}^{n} \|g_k\|^2)^{1/2} \leq \mathcal{C}_n(\delta).$$

Posons

$$\mathcal{C}_n(\delta, A) := \sup_f \Big\{ \inf \big\{ \|g\| \,:\, g \in A^n \text{ et } \sum_{k=1}^{n} g_k f_k = 1 \big\} \Big\},$$

le sup étant pris sur les $f \in A^n$ tels que $\delta_f \geq \delta$ et tels que (3) est satisfaite.
En particulier

$$\mathcal{C}_{\mathbf{1}}(\delta, A) := \sup\{\|f^{-1}\| \,:\, \|f\| \leq 1 \text{ et } |\widehat{f}(\phi)| \geq \delta \quad (\phi \in \mathcal{M}_A)\}$$

et

$$\mathcal{C}_{\mathbf{2}}(\delta, A) = \sup_f \Big\{ \inf \big\{ \|g\| \,:\, g = (g_1, g_2) \in A^2 \text{ et } f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1 \big\} \Big\}.$$

où le sup est porté sur tout les $f = (f_1, f_2) \in A^2$ tels que $\delta_f \geq \delta$ et tels que $\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \leq 1$. Notons que $c_n(\delta^{'}, A) \leq c_n(\delta, A)$, pour tout $\delta \leq \delta^{'} \leq 1$. Il existe alors, une constante critique $0 \leq \delta_n(A) \leq 1$ définie par

$$\delta_n(A) := \inf\{\delta > 0 \,:\, \mathcal{C}_n(\delta, A) < +\infty\}.$$

Dans le cas où $\delta_n(A) = 0$ on dit que le spectre de l'algèbre A est $n-$visible.

1.1. *Les algèbres de Beurling et la $\delta - 1-$visibilité.* On dira que la fonction ω est un poids sur $\mathbb{N}$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \omega(0) = 1 \\ \omega(n+m) \leq \omega(n)\omega(m) \qquad (n, m \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On suppose dans toute la suite que ω est un poids croissant sur $\mathbb{N}$. On définie l'algèbre de Beurling du disque unité associée au poids ω comme suit

$$\mathcal{A}_\omega^+ := \big\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) \,:\, \|f\|_\omega := \sum_{m \in \mathbb{N}} |\widehat{f}(m)| \omega(m) < +\infty \big\}.$$

Dans le cas ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega^{1/n}(n) = 1$, la transformée de Gelfand $\mathcal{G}_\omega$ associée à $\mathcal{A}_\omega^+$ est compacte si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega(n) = +\infty$.
Les algèbres de Beurling forment un cadre fondamental pour l'étude de la $\delta-$visibililté. Il a été montré dans [**9, 11, 31**] que l'estimation

de la quantité $\mathcal{C}_{\mathbf{1}}(\delta, \mathcal{A}^+_\omega)$, dépend d'une part d'une certaine régularité de ω et d'autre part de la vitesse de croissance de ω. Dans le cas où $\omega(n) = (1+n)^\alpha$, l'algèbre $\mathcal{A}^+_\omega$ sera notée $\mathcal{A}^+_\alpha$, comme précédement. Dans ce cas nous avons le résultat suivant

Théorème 6. *Soit* $0 < \delta < 1$ *et soit* $0 < \alpha$. *On a*

(1) $\mathcal{C}_{\mathbf{1}}(\delta, \mathcal{A}^+) = \frac{1}{2\delta - 1}$, $1/2 < \delta < 1$ *et* $\delta_1(\mathcal{A}^+) = 1/2$

(2) $\mathcal{C}_{\mathbf{1}}(\delta, \mathcal{A}^+_\alpha) \leq \begin{cases} c/\delta^{2+1/\alpha} & (\alpha < 1) \\ c/\delta^{2\alpha+1} & (\alpha \geq 1) \end{cases}$

(3) $\mathcal{C}_{\mathbf{1}}(\delta, \mathcal{A}^+_\omega) \leq c_\alpha e^{d_\alpha (\frac{1}{\delta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \qquad (\omega(n) = e^{n^\alpha}$ *et* $\alpha < 1)$

où c *est une constante universelle et* c_α *et* d_α *sont des constantes qui dépendent uniquement de* α.

On pose

$$\mathcal{A}_\alpha := \Big\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) : \|f\|_\alpha := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|(1+|n|)^\alpha < +\infty \Big\} \qquad (\alpha \geq 0).$$

Il est claire que $\mathcal{A}_\alpha$ est une algèbre de Banach dont le spectre est homéomorphe à $\mathbb{T}$. Du théorème 6 et **[9]** (Corollaire 5.5 et Théorèmes 5.2 et 5.2'), on obtient

Proposition 7. *Soit* $0 < \delta < 1$ *et soit* $\alpha > 0$. *On a*

$$\mathcal{C}_{\mathbf{1}}(\delta, \mathcal{A}_\alpha) \leq \delta^{-d_\alpha}.$$

où d_α *est une constante qui dépend seulement de* α.

On pose $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. On suppose, dans tout ce qui suit, que $\alpha_i \geq 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit les algèbres de Beurling suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{A}^+_\alpha := \Big\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^n) : \|f\|_\alpha := \sum\limits_{m\in\mathbb{N}^n} |\widehat{f}(m)|(1+m)^\alpha < +\infty \Big\}, \\ \mathcal{A}_\alpha := \Big\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^n) : \|f\|_\alpha := \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)|(1+|m|)^\alpha < +\infty \Big\}, \end{cases}$$

où pour tout $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{cases} |m| := (|m_1|, |m_2|, \ldots, |m_n|), \\ (1+|m|)^\alpha := (1+|m_1|)^{\alpha_1}(1+|m_2|)^{\alpha_2} \ldots (1+|m_n|)^{\alpha_n}, \end{cases}$$

et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$ et $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\widehat{f}(m) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} f(e^{i\theta}) e^{-i(m.\theta)} d\theta,$$

avec

$$\begin{cases} e^{i\theta} := (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}) \qquad (\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in [0, 2\pi]^n) \\ m.\theta := m_{{}_1}\theta_{{}_1} + m_{{}_2}\theta_{{}_2} + \ldots + m_{{}_n}\theta_{{}_n} \\ d\theta := d\theta_{{}_1} d\theta_{{}_2} \ldots d\theta_{{}_n} \end{cases}$$

Muni du produit usuel et de la norme $\| \ . \ \|_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha^+$ et $\mathcal{A}_\alpha$ sont des algèbres de Banach dont les spectres sont homéomorphes à $\overline{\mathbb{D}}^n$ et à $\mathbb{T}^n$ respectivement.
Une généralisation de la proposition 7 au cas de plusieurs variables nous donne la proposition suivante :

Proposition 8. *Soit $n \geq 1$ et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tel que $\alpha_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Posons $\gamma = \inf\{1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, alors on a*

$$\mathcal{C}_{\mathbf{1}}(\delta, \mathcal{A}_\alpha) \leq c_\alpha \delta^{-(n+1+\frac{1}{\gamma}(n/2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i))} \qquad (0 < \delta < 1),$$

où c_α est une constante qui dépend seulement de α.

Preuve. Pour simplifier les notations on suppose que $n = 2$. Le cas $n > 2$ se traite de manière analogue. Soit $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ telle que $|f| \geq \delta > 0$ et telle que $\|f\|_{\alpha,\beta} \leq 1$. Pour tout $0 < \rho < 1$, on définie la fonction suivante

$$f_\rho(z, w) := \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} \rho^{|n|+|m|} z^n w^m \qquad (\rho \leq |z| \leq 1/\rho \text{ et } \rho \leq |w| \leq 1/\rho),$$

où $a_{n,m} = \widehat{f}(n, m)$. On pose $\inf\{\alpha, \beta, 1\} = \gamma$. Pour tout $z, w \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned} |f(z, w) - f_\rho(z, w)| &= |\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} (1 - \rho^{|n|+|m|}) z^n w^m| \\ &\leq \sup_{n,m \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \rho^{|n|+|m|}}{(1 + |n|)^\alpha (1 + |m|)^\beta} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \rho^{|n|}}{(1 + |n|)^\alpha} + \sup_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \rho^{|m|}}{(1 + |m|)^\beta} \\ &\leq 2(1 - \rho)^\gamma \end{aligned}$$

Soit ρ tel que $2(1 - \rho)^\gamma = \delta/3$, donc le rayon spectral de $(f - f_\rho) f_\rho^{-1}$ est inférieur strictement de 1 et par conséquent

$$f^{-1} = \sum_{p \in \mathbb{N}} (f_\rho - f)^p f_\rho^{-p-1}. \tag{4}$$

Soit $p \geq 2$, on a

$$
\begin{aligned}
& \|(f-f_\rho)^p\|_{\alpha,\beta} \\
= & \ \|\Big(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m}(1-\rho^{|n|+|m|})z^n w^m\Big)^p\|_{\alpha,\beta} \\
\leq & \sup_{n_i,m_j\in\mathbb{Z}} \frac{(1-\rho^{|n_1|+|m_1|})\ldots(1-\rho^{|n_p|+|m_p|})}{(1+|n_1|)^\alpha(1+|m_1|)^\beta\ldots(1+|n_p|)^\alpha(1+|m_p|)^\beta} \times \\
& \qquad \times(1+|n_1+n_2+\ldots+n_p|)^\alpha(1+|m_1+m_2+\ldots+m_p|)^\beta \\
\leq & \ p^{\alpha+\beta} \sup_{n_i,m_j\in\mathbb{Z}} \sup_{k=1}^{p} \sup_{l=1}^{p} \frac{(1-\rho^{|n_1|+|m_1|})(1-\rho^{|n_2|+|m_2|})\ldots(1-\rho^{|n_p|+|m_p|})}{(1+|n_1|)^\alpha(1+|m_1|)^\beta\ldots(1+|n_p|)^\alpha(1+|m_p|)^\beta} \\
& \ \times(1+|n_k|)^\alpha(1+|m_l|)^\beta \\
\leq & \ p^{(\alpha+\beta)}(2(1-\rho)^\gamma)^{p-2}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Pour tout $\lambda > 0$, on définie $\mathbb{T}_\lambda$ comme étant le cercle de centre 0 et de rayon λ. On pose $\widehat{f_\rho^{-p-1}}(n,m) = b_{n,m}$, où $p \geq 0$ étant fixé. On utilisant l'inégalité de Hölder suivit de l'égalité de Plancherel-Parseval, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \|f_\rho^{-p-1}\|_{\alpha,\beta} \\
= & \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|b_{n,m}|(1+|m|)^\beta\Big)(1+|n|)^\alpha \\
\leq & \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\rho^{2|m|}(1+|m|)^{2\beta}\Big)^{1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|b_{n,m}|^2\rho^{-2|m|}\Big)^{1/2}(1+|n|)^\alpha \\
\leq & \Big(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\rho^{2(|n|+|m|)}(1+|n|)^{2\alpha}(1+|m|)^{2\beta}\Big)^{1/2} \\
& \qquad\qquad \times\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|b_{n,m}|^2\rho^{-2|m|}\Big)\rho^{-2|n|}\Big)^{1/2} \\
\leq & \frac{c}{(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}}\Big(\int_{\mathbb{T}_\rho\cup\mathbb{T}_{1/\rho}}\int_{\mathbb{T}_\rho\cup\mathbb{T}_{1/\rho}}|f_\rho^{-p-1}(\xi,\zeta)|^2 d\xi d\zeta\Big)^{1/2} \\
\leq & \frac{c}{\delta^{p+1}(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

De (4), (5) et (6) on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\|f^{-1}\|_{\alpha,\beta} \\
\leq\ & \sum_{p\geq 0} \|(f-f_\rho)^p\|_{\alpha,\beta}\|f_\rho^{-p-1}\|_{\alpha,\beta} \\
\leq\ & \|f_\rho^{-1}\|_{\alpha,\beta} + \|f_\rho^{-2}\|_{\alpha,\beta} + \frac{1}{2(1-\rho)^{2\gamma+\alpha+\beta+1}} \sum_{p\geq 2} \frac{p^{(\alpha+\beta)}(2(1-\rho)^\gamma)^p}{\delta^{p+1}} \\
\leq\ & \frac{c}{\delta^3(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}} = \frac{c}{\delta^{3+\frac{1}{\gamma}(\alpha+\beta+1)}}
\end{aligned}$$

□

1.2. *Les algèbres de Beurling et la $\delta-n-$visibilité.* La $\delta-n-$visibilité revient à la résolution de l'identité de Bezout avec contrôle des normes des solutions. Le théorème suivant à été obtenue par O. El Fallah et M. Zarrabi [**12**, Théorème 2.1]

Théorème 9. *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathcal{A}_\alpha^+$. Pour tout $0 < \delta \leq 1$ et pour tout $m \geq 2$, si*

$$0 < \delta^2 \leq \sum_{i=1}^m |f_i(z)|^2 \leq \sum_{i=1}^m \|f_i\|_\alpha^2 \leq 1, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Alors il existe $h_1, h_2, \ldots, h_m \in \mathcal{A}_\alpha^+$ tels que

$$\begin{cases} f_1h_1 + f_2h_2 + \ldots + f_mh_m = 1, \\ \\ \|h_1\|_\alpha^2 + \|h_2\|_\alpha^2 + \ldots + \|h_m\|_\alpha^2 \leq \delta^{-d_\alpha}. \end{cases}$$

où d_α est une constante qui ne dépend que de α.

Sous les hypothèses du Théorème, il est clair que

$$\mathcal{C}_m(\delta, \mathcal{A}_\alpha^+) \leq \delta^{-d_\alpha},$$

Dans le chapitre 3, nous donnons une extention du théorème 9 au cas de plusieurs variables. Notons que Krantz et Li ont résolut l'identité de Bezout avec estimé pour les algèbres de Lipschitz à plusieurs variables.

2. *Variantes du Principe de Phragmén-Lindelöf*

Nous rappelons ici quelques résultats de type Phragmén-Lindelöf, connue aussi sous le nom d'estimation de Taylor–Williams. On pose

$$\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} : \ -Re(z) < |z|^2\}.$$

Notons que la frontière de $\mathcal{R}$ est le cercle Γ de centre $\{-1/2\}$ et de rayon $\{1/2\}$.

Théorème 10. *Soit f une fonction analytique sur le domaine $\mathcal{R}$ telle que*

$$|f(z)| \leq ce^{|z|^{-\mu}} \qquad (z \in \mathcal{R}),$$

où c est une constante absolue et $\mu < 1$. Si f est bornée par une constante M sur Γ, alors f est bornée par la même constante M sur $\mathcal{R}$.

Preuve. Soit μ_1 un nombre réel tel que $\mu < \mu_1 < 1$ et fixons $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mu_1(\pi/2 + \varepsilon_0) < \pi/2$. On pose

$$\psi_\delta(z) = f(z)e^{-\delta z^{-\mu_1}} \qquad (\delta > 0).$$

Pour tout $z = |z|e^{i\theta}, \in \Gamma$, on a

$$|\psi_\delta(z)| \leq Me^{-\delta \frac{cos(\mu_1\theta)}{|z|^{\mu_1}}} \leq Me^{-\delta \frac{cos(\theta)}{|z|^{\mu_1}}} = Me^{\delta |z|^{1-\mu_1}} \leq Me^{\delta}.$$

On a aussi

$$|\psi_\delta(z)| \leq ce^{|z|^{-\mu} - \delta |z|^{-\mu_1} cos(\mu_1\theta)} \qquad (z \in \mathcal{R}).$$

Puisque $\lim_{\eta \to 0} \max_{z \in \mathcal{R}, |z| = \eta} |\arg(z)| = \pi/2$, il existe $\eta_0 > 0$ assez petit tel que

$$|\psi_\delta(z)| \leq ce^{|z|^{-\mu} - \delta |z|^{-\mu_1} cos(\mu_1(\pi/2 + \varepsilon_0))} \qquad (|z| \leq \eta_0).$$

Puisque $\mu < \mu_1$ et puisque $cos(\mu_1(\pi/2 + \varepsilon_0)) > 0$, il existe $r_\delta > 0$ assez petit tel que

$$|\psi_\delta(z)| \leq M \qquad (z \in \mathcal{R} \text{ et } |z| \leq r_\delta).$$

En appliquant le principe du maximum à la fonction ψ_δ dans le domaine $\mathcal{D}_\delta := \{z \in \mathcal{R} : \ |z| \geq r_\delta\}$, on obtient

$$|\psi_\delta(z)| \leq Me^{\delta} \qquad (z \in \mathcal{R}).$$

En fait tendre δ vers 0 pour en déduire que $|f(z)| \leq M$ sur le domaine $\mathcal{R}$. $\square$

Théorème 11. *Soit f une fonction analytique sur le domaine $\mathcal{R}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante c_ε dépendant de ε et vérifiant*

$$\begin{cases} |f(x)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon x^{-1}} & (x > 0), \\ |f(z)| \leq c e^{\sigma |z|^{-1}} & (z \in \mathcal{R}), \end{cases}$$

où c et σ sont des constantes absolue. Si f est bornée par une constante M sur Γ, alors f est bornée par la même constante M sur $\mathcal{R}$.

Preuve. La fonction

$$\psi_\delta(z) = f(z) e^{-\delta z^{-1}}$$

est bornée sur l'axe réel positif et sur la frontière de $\mathcal{R}$. Par application du théorème 10, on en déduit que ψ_δ est bornée par une constante qui dépend de δ dans chaque domaine $\mathcal{R}^+ := \{z \in \mathcal{R} : Im(z) > 0\}$ et $\mathcal{R}^- := \{z \in \mathcal{R} : Im(z) < 0\}$. Réappliquant le théorème 10 nous obtenons

$$|\psi_\delta(z)| \leq M e^\delta \qquad (z \in \mathcal{R}).$$

En fait tendre δ vers 0 pour en déduire le résultat. $\square$

On définie

$$\mathbb{C}^+ := \big\{ z \in \mathbb{C} : \; Re(z) > 0 \big\}.$$

Une application du théorème 11, nous donne le théorème suivant

Théorème 12. *Soit ϕ une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose qu'il existe une constante c_ε qui dépend de ε et telle que*

$$\begin{array}{lll} (i) & |\phi(z)| \leq c_1 \big(- Re(z) \big)^{-N} & z \notin \mathbb{C}^+, \\ (ii) & |\phi(z)| \leq c_2 e^{\sigma |z|^{-1}} & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ (iii) & |\phi(x)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon x^{-1}} & x > 0, \end{array}$$

où N est un entier et les c_i $(i \in \{1, 2\})$ et σ sont des constantes. Alors ϕ est un polynôme en $1/z$ de degré inférieur ou égal à N.

Preuve. D'aprés la condition (i) on a

$$|\phi(z)| \leq c_1 |z|^{-2N} \qquad (z \notin \mathcal{R}). \tag{7}$$

La fonction

$$\psi(z) = z^{2N} \phi(z).$$

est bornée par c_1 sur Γ et vérifie les conditons de croissance du théorème 11. On en déduit que la fonction ψ est bornée sur le domaine $\mathcal{R}$ par c_1. Donc

$$|\phi(z)| \leq c_1 |z|^{-2N} \qquad (z \in \mathcal{R}). \tag{8}$$

De l'équations (7) et (8) on en déduit que ϕ est un polynôme en $1/z$ de degré inférieur ou égal à $2N$ et compte tenue de la condition (i) sur l'axe réel négatif, nous concluons que le degré de ϕ ne peut pas dépasser N et on obtient

$$|\phi(z)| \leq c_1 |z|^{-N} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

□

Pour montrer le théorème qui suit, nous aurons besoin du lemme suivant qui est due à Domar **[7]**:

Lemme 13. *Soit E un sous ensemble fermé de $\partial\mathbb{D}$ et soit u une fonction souharmonique définie sur $\mathbb{C}\setminus E$ satisfaisant $u(z) \leq ||z|-1|^{-1}$, alors $u(z) \leq cd^{-1}(z, E)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus E)$.*

Théorème 14. *Soit ϕ une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et soit $\varepsilon > 0$. On suppose que*

$$\begin{array}{lll} (i) & |\phi(\lambda)| \leq c_1(|\lambda|-1)^{-N} & |\lambda| > 1, \\ (ii) & |\phi(\lambda)| \leq c_2 e^{c_3/(1-|\lambda|)} & |\lambda| < 1, \\ (iii) & |\phi(x)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon/1-x} & (x < 1), \end{array}$$

où les c_i $(i \in \{1,2,3\})$ sont des constantes, N est un entier et c_ε est une constante qui dépend de ε. Alors ϕ est un polynôme en $\frac{1}{1-\lambda}$ de degré inférieur ou égal à N.

Preuve. Compte tenue des conditions (i) et (ii), le lemme 13 appliqué à la fonction $\log|\phi|$ nous donne

$$|\phi(\lambda)| \leq ce^{c/|\lambda-1|} \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

On pose $\psi(\lambda) = \phi(1-\lambda)$. Donc

$$|\psi(\lambda)| \leq ce^{c/|\lambda|} \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

La condition (i) implique

$$|\psi(\lambda)| \leq c\big(-Re(\lambda)\big)^{-N} \qquad (Re(\lambda) < 0).$$

On a aussi, d'aprés la condition (iii), que

$$|\psi(x)| \le c_\varepsilon e^{\varepsilon/x} \qquad (x>0).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 12 à la fonction ψ pour en déduire le résultat. $\square$

3. *La F-propriété*

Soit $1 \le p < \infty$. Notons par $\mathcal{H}^p$ l'espace de Hardy usuel de toute les fonctions analytiques f sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p} := \sup_{0<r<1} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{1/p} < \infty.$$

Commençons par le théorème classique suivant **[8]**

Théorème 15. *Soit $f \in \mathcal{H}^p$, $1 \le p \le \infty$ et soit U une fonction intérieure telle que $f/U \in \mathcal{H}^1$, alors $f/U \in \mathcal{H}^p$ et $\|f/U\|_{\mathcal{H}^p} = \|f\|_{\mathcal{H}^p}$.*

Définition 16. *Soit X un espace Banach inclu dans $\mathcal{H}^1$. On dit que X admet la propriété de factorisation (la F-propriété) si pour toute fonction $f \in X$ et pour toute fonction intérieure U telle que $f/U \in \mathcal{H}^1$ on a $f/U \in X$.*

Dans ce qui suit on va montrer que les agèbres de Banach lip_α et $\mathcal{A}_\alpha$ possède la F-propriété. La F-propriété de l'espace de Dirichlet découle immédiatement de la formule de Carleson suivante :

Théorème 17. *Soit $F \in \mathcal{H}^2$ et soit $U = BS$, où B est le produit de Blaschke associé au zéros $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ et S est la fonction intérieure singulière généré par la mesure μ. On a*

$$\begin{aligned} &\pi D(FU) \\ = \ & \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|\zeta - z_n|^2}\Big)|F(\zeta)|^2 dm(\zeta) \\ &+ \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \frac{2}{|\zeta-\xi|^2} d\mu(\zeta)|F(\xi)|^2 dm(\xi) \\ &+ \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \frac{(\log|F(\zeta)| - \log|F(\xi)|)(|F(\zeta)|^2 - |F(\xi)|^2)}{|\zeta-\xi|^2} dm(\zeta)dm(\xi). \end{aligned}$$

Ce corollaire est immédiat

Corollaire 3.1. *Soit $f \in \mathcal{D}$ et soit U une fonction intérieure telle que $f/U \in \mathcal{H}^2$. Alors $f/U \in \mathcal{D}$ et $\|f/U\|_{\mathcal{D}} \le \|f\|_{\mathcal{D}}$.*

La F-propriété de l'algèbre lip_α est une conséquence immédiate du théorème suivant **[15]** :

Théorème 18. *Soit $U \in \mathcal{H}^\infty$ et soit $f \in \mathrm{lip}_\alpha$. Alors la fonction*

$$T_U f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)\overline{U(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta \qquad (z \in \mathbb{D})$$

est dans lip_α et il existe une constante c_α qui dépend uniquement de α telle que $\|T_U f\|_\alpha \leq c_\alpha \|U\|_\infty \|f\|_\alpha$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\big(T_U f\big)'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)\overline{U(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{(f(\zeta) - f(z/|z|))\overline{U(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}d\zeta \qquad (z \in \mathbb{D}).\end{aligned}$$

Donc pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ nous avons

$$\begin{aligned}|\big(T_U f\big)'(z)| &\leq \frac{\|U\|_\infty}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|f(\zeta) - f(z/|z|)|}{|\zeta - z|^2}|d\zeta| \\ &= \frac{\|U\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i(t+\theta)}) - f(e^{i\theta})|}{1 - 2r\cos t + r^2}dt\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|t| \leq \eta$, alors

$$|f(e^{i(t+\theta)}) - f(e^{i\theta})| \leq \varepsilon |t|^\alpha \qquad (\theta \in [-\pi, +\pi])$$

Donc

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i(t+\theta)}) - f(e^{i\theta})|}{1 - 2r\cos t + r^2}dt \\ \leq\ & \varepsilon \int_{|t|\leq\eta} \frac{|t|^\alpha}{(1-r)^2 + 4rt^2/\pi^2}dt + \|f\|_\alpha \int_{|t|\geq\eta} \frac{|t|^\alpha}{(1-r)^2 + 4rt^2/\pi^2}dt \\ \leq\ & \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-r)^{1-\alpha}}\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1 + (2u/\pi)^2}du \\ & \qquad + \frac{\|f\|_\alpha}{r^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-r)^{1-\alpha}}\int_{|u|\geq\frac{\eta\sqrt{r}}{1-r}} \frac{u^\alpha}{1 + (2u/\pi)^2}du \\ \leq\ & \varepsilon O\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big) + \|f\|_\alpha o\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big).\end{aligned}$$

En fait tendre ε vers 0 pour obtenir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i(t+\theta)}) - f(e^{i\theta})|}{1 - 2r\cos t + r^2} dt \leq \|f\|_\alpha o\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big).$$

Ce qui implique que

$$|\big(T_U f\big)'(z)| \leq \|U\|_\infty \|f\|_\alpha o\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

□

Corollaire 3.2. *Soit $f \in \mathrm{lip}_\alpha$ et soit U une fonction intérieure telle que $f/U \in \mathcal{H}^\infty$. Alors $f/U \in \mathrm{lip}_\alpha$ et $\|f/U\|_\alpha \leq c_\alpha \|f\|_\alpha$.*

Preuve. Puisque $f/U \in \mathcal{H}^\infty$ et $|U(e^{i\theta})| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$, alors $(f/U)(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})\overline{U(e^{i\theta})}$, presque partout sur $\mathbb{T}$. Par conséquent $T_U f = f/U$. Le résultat donc s'ensuit immédiatement à partir du théorème 18. □

Corollaire 3.3. *Les algèbres de Banach lip_α et $\mathcal{A}_\alpha$ possède la F-propriété.*

Preuve. La preuve de ce corollaire est une conséquence du Théorème 15 et des corollaires 3.1 et 3.2. □

CHAPITRE 3

Idéaux fermés de l'algèbre $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$

Une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ est dite Beurling-Rudin-extérieure (BR-extérieure) si $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(E_f)$. Il est alors clair que dans ce cas $Z_f = E_f$. Le problème de déterminer les fonctions $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ ayant $Z_f = (\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$ et qui sont BR-extérieure est connue sous le nom de *Problème de Levin uniforme* **[24, 19]**. Dans une série de papiers **[17, 18, 19]**, H. Hedenmalm à donner quelques résultats concernant ce problème. Dans le cas où $Z_f \subset \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$, il a montré que $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(Z_f)$ si et seulement si les fonctions $f(\cdot, w)$ sont extérieures pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$ et la fonction $f(1, \cdot)$ est soit identiquement nulle soit extérieure **[17]**. Dans **[18]** et pour le cas où $Z_f = E_f = (\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$, H. Hedenmalm a montré que si

$$|\log |f(z,w)|| = o(1/\inf\{|1-z|, |1-w|\}) \qquad \big(z \to 1 \text{ ou } w \to 1\big),$$

alors $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(E_f)$.
Dans ce travail on s'intéresse aux idéaux fermés de certaines algèbres de Beurling définies dans le polydisque. Pour tout $0 \leq \alpha < 1$ et pour tout $0 \leq \beta < 1$, on définie l'algèbre de Beurling du bidisque comme suit :

$$\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta} := \Big\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2) : \|f\|_{\alpha,\beta} := \sum_{m,n \in \mathbb{N}} |\widehat{f}(m,n)|(1+m)^\alpha (1+n)^\beta < +\infty \Big\},$$

où

$$\widehat{f}(m,n) := \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) e^{-im\theta} e^{-in\varphi} d\theta d\varphi.$$

Muni du produit usuel et de la norme $\| \,.\, \|_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ est une algèbre de Banach commutative unitaire dont le spectre est homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}^2$. Pour tout $F \subset \overline{\mathbb{D}}^2$, on note

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta}(F) := \{ f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta} : f_{|F} = 0 \}.$$

Il est claire que $\mathcal{J}_{\alpha,\beta}(F)$ est un idéal fermé de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$. Dans ce chapitre, nous obtenons les deux théorèmes suivants

Théorème 19. *Soit* $f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ *telle que* $(\alpha,\beta) \in [0,1[\times]0,1[$. *Supposons que* $Z_f = \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$, *alors* $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{J}_{\alpha,\beta}(Z_f)$ *si et seulement si* f *est une fonction BR-extérieure.*

Théorème 20. *Soit* $f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ *telle que* $(\alpha,\beta) \in]0,1[\times]0,1[$. *Supposons que* $Z_f = E_f = (\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$. *Si*

$$|\log|f(z,w)|| = o(1/\inf\{|1-z|,|1-w|\}) \qquad \big(z \to 1 \text{ ou } w \to 1\big),$$

alors $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{J}_{\alpha,\beta}(E_f)$.

1. *La* $\delta - 2-$*visibilité de l'algèbre* $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$

Pour montrer le Théorème 20 nous aurons besoin du théorème suivant

Théorème 21. *Soit* $\alpha,\beta > 0$ *et soit* $f_1, f_2 \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$. *Pour tout* $0 < \delta \leq 1$, *si*

$$0 < \delta^2 \leq |f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 \leq \|f_1\|^2_{\alpha,\beta} + \|f_2\|^2_{\alpha,\beta} \leq 1 \qquad (z \in \mathbb{D}^2),$$

alors il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ *tels que*

$$\begin{cases} f_1h_1 + f_2h_2 = 1, \\ \\ \|h_1\|^2_{\alpha,\beta} + \|h_2\|^2_{\alpha,\beta} \leq \delta^{-d_{\alpha,\beta}}. \end{cases}$$

où $d_{\alpha,\beta}$ *est une constante qui ne dépend que de* α *et de* β.

Ce théorème signifie que

$$\mathcal{C}_2(\delta, \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}) \leq \delta^{-d_{\alpha,\beta}} \qquad (0 < \delta \leq 1 \text{ et } \alpha,\beta > 0),$$

Compte tenue de la proposition 8, la preuve du théorème 21 est une conséquence simple du lemme suivant

Lemme 22. *Soit* $\alpha,\beta > 0$. *On a*

$$\mathcal{C}_2(\delta, \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}) \leq c\, \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \qquad (0 < \delta \leq 1),$$

où c *est une constante universelle.*

Avant d'établir la preuve du lemme 22, nous commençons d'abord par préciser quelque notations. Pour chaque fonction $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ on définie la fonction $g_{r,s} \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ par

$$g_{r,s}(z,w) = g(rz, sw) \qquad (z, w \in \mathbb{D} \text{ et } r, s \in [0,1]).$$

On note par $\partial_z = \partial/\partial z$ la derivée partielle par rapport à la variable z. Nous avons besoin du lemme suivant

Sous–lemme 23. *Soient $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}^2$ et $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ tels que*

$$b(z,w) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{a(\xi,w)}{\xi - z} dA(\xi) \quad (z, w \in \mathbb{D}),$$

où dA est la mesure d'aire. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$, alors

$$\widehat{b}(n,m) = 0, \qquad\qquad (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

$$\widehat{b}(n,m) = 2\int\limits_0^1 \widehat{(a)_{r,1}}(n+1,m) r^{-n} dr, \qquad (n,m) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{fb}(n,m)|(1+n)^\alpha (1+m)^\beta \leq 2\|f\|_{\alpha,\beta} \int\limits_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr.$$

Preuve. Par le théorème de convergence dominée de Lebesque et grâce à la continuité de a et de b on obtient

$$b(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{a(\xi, e^{i\varphi})}{\xi - e^{i\theta}} dA(\xi).$$

Le théorème de Fubini nous permet de conclure que

$$\widehat{b}(n,m) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\mathbb{D}} \Big(\int\limits_0^{2\pi} a(\xi, e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi\Big)\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-in\theta}}{\xi - e^{i\theta}} d\theta\Big) d\mathrm{A}(\xi).$$

Si $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, alors $\widehat{b}(n,m) = 0$. Sinon

$$
\begin{aligned}
\widehat{b}(n,m) &= \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{\mathbb{D}} \Big(\int\limits_0^{2\pi} a(\xi, e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi \Big) \xi^{-n-1} d\mathrm{A}(\xi) \\
&= 2 \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} a(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) e^{-i(n+1)\theta} e^{-im\varphi} d\theta d\varphi \Big) r^{-n} dr \\
&= 2 \int\limits_0^1 \widehat{(a)_{r,1}}(n+1, m) r^{-n} dr.
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\widehat{fb}(n,m) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{m} \widehat{b}(-l,k) \widehat{f}(n+l, m-k),
$$

alors

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{fb}(n,m)| (1+n)^{\alpha} (1+m)^{\beta} \\
= & \sum_{n,m=0}^{\infty} |\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k \le m} \widehat{b}(-l,k) \widehat{f}(n+l, m-k) (1+n)^{\alpha} (1+m)^{\beta}| \\
\le & \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k \le m} |\widehat{b}(-l,k)| (1+|k|)^{\beta} |\widehat{f}(n+l, m-k)| \times \\
& \qquad\qquad \times (1+n+l)^{\alpha} (1+m-k)^{\beta} \\
\le & \|f\|_{\alpha,\beta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{b}(-l,k)| (1+|k|)^{\beta} \\
\le & 2\|f\|_{\alpha,\beta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^1 |\widehat{(a)_{r,1}}(1-l,k)| (1+|k|)^{\beta} r^{l} dr \\
\le & 2\|f\|_{\alpha,\beta} \int\limits_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$\square$

Preuve du lemme 22. Soit $\delta \in]0,1]$ et soit $f_1, f_2 \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ satisfaisant

$$\begin{cases} \|f_1\|^2_{\alpha,\beta} + \|f_2\|^2_{\alpha,\beta} \leq 1, \\ \mathrm{F}(z,w) = |f_1(z,w)|^2 + |f_2(z,w)|^2 \geq \delta^2. \end{cases} \tag{10}$$

Supposons d'abord que f_1 et f_2 sont holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}^2$. On pose

$$\phi_i = \frac{\overline{f}_i}{\mathrm{F}}, \qquad i = 1, 2.$$

Comme dans la résolution du problème de la couronne, nous allons corriger la solution (ϕ_1, ϕ_2) de l'équation $f_1\phi_1 + f_2\phi_2 = 1$, pour aboutir a une solution holomorphe au voisinage du bidisque. D'abord, on commence par corriger les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 par rapport à la premiere variable, soit

$$\begin{cases} g_1 &= \phi_1 + f_2 b, \\ g_2 &= \phi_2 - f_1 b, \\ \overline{\partial}_z b &= \phi_1 \overline{\partial}_z \phi_2 - \phi_2 \overline{\partial}_z \phi_1 = a. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$ et que les fonctions g_i $(i = 1, 2)$ sont holomorphes, au voisinage du disque, par rapport à la premiere variable. Ensuite, nous recorrigeons les fonctions obtenues g_1 et g_2 comme suit

$$\begin{cases} h_1 &= g_1 + f_2 d, \\ h_2 &= g_2 - f_1 d, \\ \overline{\partial}_w d &= g_1 \overline{\partial}_w g_2 - g_2 \overline{\partial}_w g_1 = c. \end{cases}$$

On obtient ainsi une solution (h_1, h_2) de fonctions holomorphes au voisinage du bidisque, de l'équation $f_1 h_1 + f_2 h_2 = 1$.
Dans ce qui suit nous allons majorer la norme de h_1 et de h_2. On a

$$\begin{aligned} \|h_1\|_{\alpha,\beta} &= \|\phi_1 + f_2 b + f_2 d\|_{\alpha,\beta} \\ &\leq \|\phi_1\|_{\alpha,\beta} + \sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 b}(n,m)|(1+n)^\alpha (1+m)^\beta \\ &\quad + \sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 d}(n,m)|(1+n)^\alpha (1+m)^\beta, \end{aligned} \tag{11}$$

Il est facile de voir que

$$\|\phi_1\|_{\alpha,\beta} \leq \|\mathrm{F}^{-1}\|_{\alpha,\beta} \|f_1\|_{\alpha,\beta} \leq \mathcal{C}_{\mathbf{1}}(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta}. \tag{12}$$

D'aprés le lemme 23, on obtient

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 b}(n,m)|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} \leq 2\|f_2\|_{\alpha,\beta} \int_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr. \qquad (13)$$

Puisque

$$\begin{aligned} & \|(a)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \\ = \;& \| \left(\overline{(\partial_z f_1)_{r,1} (f_2)_{r,1}} - \overline{(f_1)_{r,1} (\partial_z f_2)_{r,1}} \right) (\mathrm{F}^{-2})_{r,1} \|_{\alpha,\beta} \\ \leq \;& \|(\mathrm{F}^{-1})_{r,1}\|^2_{\alpha,\beta} \left(\|(\partial_z f_1)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \|(f_2)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} + \|(f_1)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \|(\partial_z f_2)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \right) \\ \leq \;& \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \left(\|(\partial_z f_1)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta} + \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|(\partial_z f_2)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr \leq \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \times \\ \times \left(\|f_2\|_{\alpha,\beta} \int_0^1 \|(\partial_z f_1)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr + \|f_1\|_{\alpha,\beta} \int_0^1 \|(\partial_z f_2)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr \right). \end{aligned}$$

Or, on a pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|(\partial_z f_i)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr &= \int_0^1 \sum_{n,m=0}^{\infty} n |\widehat{f_i}(n,m)|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} r^{n-1} dr \\ &\leq \|f_i\|_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr \leq 2\, \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta}. \qquad (14)$$

En combinant les inégalités (13) et (14), on obtient

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 b}(n,m)|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} \leq 4\, \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta}. \qquad (15)$$

Dans ce qui suit nous allons majorer la quantité suivante

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 d}(n,m)|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta}.$$

En utilisant le lemme 23 on obtient

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 d}(n,m)|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} \leq 2\|f_2\|_{\alpha,\beta} \int_0^1 \|(c)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} ds, \quad (16)$$

où

$$c = g_1\overline{\partial_w}g_2 - g_2\overline{\partial_w}g_1 = \phi_1\overline{\partial_w}\phi_2 - \phi_2\overline{\partial_w}\phi_1 - \overline{\partial_w}b.$$

De la même façons que dans l'équation (14) on peut montrer que

$$\int_0^1 \|\Big(\phi_1\overline{\partial_w}\phi_2 - \phi_2\overline{\partial_w}\phi_1\Big)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} ds \leq 2\,\mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}. \quad (17)$$

Puisque $\overline{\partial_z}(\overline{\partial_w}b)_{1,s} = (\overline{\partial_w}a)_{1,s}$. Donc, en utilisant le lemme 23, on en déduit que si $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, alors $\widehat{(\overline{\partial_w}b)_{1,s}}(n,m) = 0$. Sinon

$$\begin{aligned} |\widehat{(\overline{\partial_w}b)_{1,s}}(n,m)| &= 2|\int_0^1 \widehat{(\overline{\partial_w}a)_{r,s}}(n+1,m)r^{-n}dr| \\ &\leq 2\int_0^1 |\widehat{(\overline{\partial_w}a)_{r,s}}(n+1,m)|dr. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\int_0^1 \|(\overline{\partial_w}b)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} ds \leq 2\int_0^1\int_0^1 \|(\overline{\partial_w}a)_{r,s}\|_{\alpha,\beta} dr ds.$$

Comme $a = \Big(\overline{\partial_z(f_1)f_2} - \overline{f_1\partial_z f_2}\Big)\mathrm{F}^{-2}$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\partial_w}a = \Big(&\overline{\partial_z\partial_w(f_1)f_2 + \partial_z f_1\partial_w f_2 - \partial_w f_1\partial_z f_2 - f_1\partial_z\partial_w f_2}\Big)\mathrm{F}^{-2} - \\ &2\Big(\overline{\partial_z(f_1)f_2} - \overline{f_1\partial_z(f_2)}\Big)\Big(f_1\overline{\partial_w f_1} + f_2\overline{\partial_w f_2}\Big)\mathrm{F}^{-3}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\|\Big(\overline{\partial_z\partial_w(f_1)f_2 + \partial_z f_1\partial_w f_2 - \partial_w f_1\partial_z f_2 - f_1\partial_z\partial_w f_2}\Big)_{r,s}\Big(\mathrm{F}^{-2}\Big)_{r,s}\|_{\alpha,\beta} \\ &\leq \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\Big(\|\partial_z\partial_w(f_1)_{r,s}\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta} + \|\partial_z(f_1)_{r,1}\|_{\alpha,\beta}\|\partial_w(f_2)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} \\ &\qquad + \|\partial_w(f_1)_{1,s}\|_{\alpha,\beta}\|\partial_z(f_2)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} + \|f_1\|_{\alpha,\beta}\|\partial_z\partial_w(f_2)_{r,s}\|_{\alpha,\beta}\Big). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\|(\overline{\partial_z(f_1)f_2} - \overline{f_1\partial_z(f_2)})_{r,s}(f_1\overline{\partial_w f_1} + f_2\overline{\partial_w f_2})_{r,s}(\mathrm{F}^{-3})_{r,s}\|_{\alpha,\beta} \\
&\leq \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\Big(\|(\partial_z(f_1))_{r,1}\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta} + \|f_1\|_{\alpha,\beta}\|\partial_z((f_2))_{r,1}\|_{\alpha,\beta}\Big)\times \\
&\qquad\qquad \times\Big(\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|(\partial_w f_1)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} + \|f_2\|_{\alpha,\beta}\|(\partial_w f_2)_{1,s}\|_{\alpha,\beta}\Big).
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 \|(\overline{\partial_w}a)_{r,s}\|_{\alpha,\beta}drds \\
\leq\ & 4\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta} + 2\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta} \\
\leq\ & 6\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \|(\overline{\partial_w}b)_{1,s}\|_{\alpha,\beta}ds \leq 12\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}. \tag{18}$$

De (16), (17) et (18), en déduit que

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 d}(n,m)|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} \leq 28\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\|f_1\|_{\alpha,\beta}. \tag{19}$$

Les inégalités (11), (12), (15) et (19) entraînent que

$$\|h_1\|_{\alpha,\beta} \leq 33\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\|f_1\|_{\alpha,\beta}.$$

De la même façons on peut montrer que

$$\|h_2\|_{\alpha,\beta} \leq 33\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta})\|f_2\|_{\alpha,\beta}.$$

On obtient donc

$$(\|h_1\|^2_{\alpha,\beta} + \|h_2\|^2_{\alpha,\beta})^{1/2} \leq 33\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}).$$

On suppose maintenant que f_1 et f_2 ne sont pas holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}^2$. On considère les fonctions $(f_1)_{r,r}$ et $(f_2)_{r,r}$ $(r < 1)$. Donc il existe $(h_1(r), h_2(r)) \in (\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta})^2$ tel que

$$\begin{cases} (f_1)_{r,r}h_1(r) + (f_2)_{r,r}h_2(r) = 1, \\ (\|h_1(r)\|^2_{\alpha,\beta} + \|h_2(r)\|^2_{\alpha,\beta})^{1/2} \leq 33\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}), \quad r < 1. \end{cases}$$

On sait que $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ est le dual de

$$\mathcal{B}_{\alpha,\beta} := \{(u_{n,m})_{n,m\geq 0} : \sup_{n,m\geq 0} \frac{|u_{n,m}|}{(1+n)^\alpha (1+m)^\beta} < \infty\}.$$

D'aprés le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité fermé de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ est compacte pour la topologie $*-$faible. On en déduit qu'il existe $(h_1, h_2) \in (\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta})^2$ tel que

$$\begin{cases} f_1 h_1 + f_2 h_2 = 1, \\ (\|h_1\|^2_{\alpha,\beta} + \|h_2\|^2_{\alpha,\beta})^{1/2} \leq 33\ \mathcal{C}_{\mathbf{1}}{}^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}). \end{cases}$$

Ce qui termine la preuve du lemme 22.

2. *Idéaux fermés de l'algèbre* $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$

Dans la suite, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 24. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}$. Alors il existe $M > 0$ tel que*

$$\|1/f(z,\cdot)\| \leq e^{\frac{M}{1-|z|}} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Preuve. Soit $z \in \mathbb{D}$. La fonction $f(z,\cdot) \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ ne s'annule pas sur $\overline{\mathbb{D}}$, donc $f(z,\cdot)$ est extérieure et on a

$$\log|f(z,w)|^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Re\Big(\frac{e^{i\varphi}+w}{e^{i\varphi}-w}\Big) \log|f(z,e^{i\varphi})|^{-1} d\varphi \qquad (w \in \mathbb{D}).$$

En utilisant la représentation de Herglotz, on en déduit

$$\log|f(z,e^{i\varphi})|^{-1} \leq 2\log|f(0,e^{i\varphi})|^{-1}(1-|z|)^{-1} \qquad (\varphi \in [-\pi,+\pi]).$$

Par conséquent

$$\log|f(z,w)|^{-1} \leq 2\log|f(0,w)|^{-1}(1-|z|)^{-1} \qquad (z,w \in \mathbb{D}).$$

Ce qui termine la preuve du lemme. □

Comme dans [[**17**], proposition 1.2] et dans [**19**], une application de la représentation de Herglotz nous donne le lemme suivant

Lemme 25. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ telle que $Z_f \subset \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *$f(\cdot,w)$ est une fonction extérieure pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$,*
2. *$\lim_{r\to 1^-} (1-r)\log|f(r,w)| = 0$ pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$,*
3. *$\lim_{r\to 1^-} \inf_{w\in\overline{\mathbb{D}}} (1-r)\log|f(r,w)| = 0$.*

2.1. *Preuve du théorème 19.* Puisque les homomorphismes d'algèbres suivants

$$\begin{array}{rlll} h_w: \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta} & \longrightarrow & \mathcal{A}^+_{\alpha} & \\ f & \longrightarrow & f(\cdot,w), & \qquad (w \in \overline{\mathbb{D}}) \end{array}$$

sont surjectifs, il est facile de voir qu'il est nécessaire que f soit BR-extérieure pour que $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{J}_{\alpha,\beta}(Z_f)$. Montrons maintenant que cette condition est aussi suffisante. Sans perdre de généralité on peut supposer que $\|f\|_{\alpha,\beta} \leq 1$. Soit π la surjection canonique sur $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ associée à $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f)$. Notons u la fonction définie par $u(z,w) = z$, le spectre de $\pi(u)$ est le singleton $\{1\}$, donc l'application

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \pi(u))^{-1}$$

est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Nous allons vérifiés que ϕ satisfait bien les trois conditions du théorème 14. Pour $|\lambda| > 1$ on a

$$\begin{aligned} \|\phi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} &\leq \sum_{n\geq 0} \|\pi(u)^n \lambda^{-n-1}\|_{\alpha,\beta} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} |\lambda|^{-n-1}(1+n)^{\alpha} \\ &\leq \frac{c}{(|\lambda|-1)^{1+\alpha}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Pour $|\lambda| < 1$, soit

$$L_\lambda(f)(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z,w) - f(\lambda,w)}{z-\lambda} & si \;\; z \neq \lambda \\ \dfrac{\partial}{\partial z} f(z,w)|_{z=\lambda} & si \;\; z = \lambda. \end{cases} \tag{21}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|L_\lambda(f)\|_{\alpha,\beta} &= \| \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} (\frac{z^n - \lambda^n}{z-\lambda}) w^m \|_{\alpha,\beta} \\ &= \| \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} (z^{n-1} + z^{n-2}\lambda + \cdots + \lambda^{n-1}) w^m \|_{\alpha,\beta} \\ &\leq \frac{\|f\|_{\alpha,\beta}}{1-|\lambda|} \leq \frac{1}{1-|\lambda|}. \end{aligned}$$

De l'équation (21), on a

$$\|\phi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} \leq \|\pi(L_\lambda(f))\|_{\alpha,\beta} \|(f(\lambda,\cdot))^{-1}\|_{\beta},$$

donc

$$\|\phi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} \leq \frac{1}{1-|\lambda|}\|(f(\lambda,\cdot))^{-1}\|_{\beta}.$$

On pose

$$\delta(\lambda) = \inf\{|f(\lambda,w)| : \quad w \in \mathbb{D}\}.$$

Grâce au théorème 6 on obtient

$$\|\phi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} \leq \frac{C}{(1-|\lambda|)(\delta(\lambda))^{2+1/\beta}}. \tag{22}$$

D'aprés le lemme 24, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|\phi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} \leq e^{\frac{M}{1-|\lambda|}} \qquad (|\lambda| < 1). \tag{23}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Sachant que $f(\cdot,w)$ est extérieure pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$, il existe, d'aprés le lemme 25, une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$\delta(x) \geq c_\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon}{1-x}} \qquad (0 < x < 1). \tag{24}$$

On obtient

$$\|\phi(x)\|_{\alpha,\beta} \leq c_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{1-x}} \qquad (x < 1). \tag{25}$$

Soit $(\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f))^*$, le dual de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f)$, les équations (20), (23) et (25) nous implique que les conditions du théorème 14 sont satisfaites pour toute les fonctions

$$\lambda \longrightarrow \phi_g(\lambda) := \langle\phi(\lambda), g\rangle \qquad g \in (\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f))^*,$$

On en conclus que les fonctions ϕ_g sont des polynômes en $\frac{1}{1-\lambda}$ de degré 1. Donc $\pi(1-z) = 0$. Ce qui implique que $\mathcal{J}_{\alpha,\beta}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}) \subseteq \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f)$ et par conséquent $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{J}_{\alpha,\beta}(Z_f)$. Ce qui termine la preuve du théorème 19.

2.2. *Preuve du théorème 20.* Commençons d'abord par établir quelque lemmes qui nous serons utile dans la preuve du théorème 20.

Lemme 26. *Soit* $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ *et soit* $\alpha \in [0,1[$. *Supposons qu'il existe* $0 < \varepsilon < 2(1-\alpha)$ *tel que*

$$\int_{\mathbb{D}} |\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)|^2(1-|z|)^{2(1-\alpha)-\varepsilon} dA(z) < +\infty.$$

Alors $f \in \mathcal{A}^+_\alpha$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}|a_n|(1+n)^{\alpha} &\leq \Big(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(1+n)^{1+\varepsilon}}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n\geq 0}|a_n|^2(1+n)^{2\alpha+1+\varepsilon}\Big)^{1/2}\\ &\leq c_{\varepsilon,\alpha}\Big(\|f\|_\infty+\int_{\mathbb{D}}|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)|^2(1-|z|^2)^{2(1-\alpha)-\varepsilon}dA(z)\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Ce qui implique le résultat. □

Une extention de ce lemme au cas du bidisque nous donne le lemme suivant

Lemme 27. *Soit* $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}^2)$ *et soit* $(\alpha,\beta)\in[0,1[^2$. *Supposons que les fonctions* $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,0)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial w}f(z,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(0,w)$ *et* $\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial w^2}f(0,w)$ *sont dans* $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$. *S'il existe* $0<\varepsilon<\inf\{2(1-\alpha),2(1-\beta)\}$ *tel que*

$$\int_{\mathbb{D}^2}|\frac{\partial^4 f}{\partial z^2\partial w^2}(z,w)|^2(1-|z|)^{2(1-\alpha)-\varepsilon}(1-|w|)^{2(1-\beta)-\varepsilon}dA(z)dA(w)<+\infty.$$

Alors $f\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} & f(z,w)\\ = & \sum_n\Big(\sum_m a_{n,m}w^m\Big)z^n\\ = & \sum_{n\geq 2}\Big(\sum_{m\geq 2}a_{n,m}w^m\Big)z^n+\sum_{n\geq 0}a_{n,0}z^n+\sum_{n\geq 0}a_{n,1}z^n w\\ & \qquad +\sum_{m\geq 2}a_{0,m}w^m+\sum_{m\geq 2}a_{1,m}zw^m.\\ = & \sum_{n\geq 2}\Big(b_n(w)\Big)z^n+f(z,0)+w\frac{\partial f}{\partial w}(z,0)\\ & \qquad +(f(0,w)-a_{0,0}-a_{0,1}w)+(z\frac{\partial f}{\partial z}(0,w)-a_{1,0}-a_{1,1}w).\end{aligned}$$

où $b_n(w) = \sum\limits_{m\geq 2} a_{n,m} w^m$. On a

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n\geq 2}\sum_{m\geq 2} |a_{n,m}|(1+n)^\alpha(1+m)^\beta \\
= \ & \sum_{n\geq 2}\Big(\sum_{m\geq 2}|a_{n,m}|(1+m)^\beta\Big)(1+n)^\alpha \\
\leq \ & \Big(\sum_{m\geq 2}\frac{1}{(1+m)^{1+\varepsilon}}\Big)^{1/2}\sum_{n\geq 2}\Big(\sum_{m\geq 2}|a_{n,m}|^2(1+m)^{2\beta+1+\varepsilon}\Big)^{1/2}(1+n)^\alpha \\
\leq \ & c_{\varepsilon,\beta}\sum_{n\geq 2}\Big(\int_{\mathbb{D}}|\frac{\partial^2 b_n}{\partial w^2}(w)|^2(1-|w|^2)^{2(1-\beta)-\varepsilon}dA(w)\Big)^{1/2}(1+n)^\alpha \\
\leq \ & c_{\varepsilon,\beta}\Big(\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(1+n)^{1+\varepsilon}}\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{D}}\sum_{n\geq 2}\Big(|\frac{\partial^2 b_n}{\partial w^2}(w)|^2(1+n)^{2\alpha+1+\varepsilon}\Big) \\
& \qquad\qquad \times(1-|w|^2)^{2(1-\beta)-\varepsilon}dA(w)\Big)^{1/2} \\
\leq \ & c_{\varepsilon,\alpha,\beta}\Big(\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}|\frac{\partial^4 f}{\partial z^2\partial w^2}(z,w)|^2(1-|z|^2)^{2(1-\alpha)-\varepsilon} \\
& \qquad\qquad \times(1-|w|^2)^{2(1-\beta)-\varepsilon}dA(z)dA(w)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique le résultat. $\square$

Pour tout ce qui suit on pose

$$
\begin{cases}
\mathbb{D}_1 := \{z\in\mathbb{C} : \ |z-1|\leq 1\} \\
Im(f) := \{f(z,w) : \ (z,w)\in\mathbb{D}^2\} \quad (f\in\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}^2))
\end{cases}
$$

Lemme 28. *Soit u la fonction définie sur $\mathbb{D}^2$ par*

$$u(z,w) = \frac{(1-z)(1-w)}{\big((1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}\big)^2}.$$

Alors u vérifie les propriétés suivantes

1. $|u(z,w)|\leq 2\inf\{|1-z|, \ |1-w|\}$,
2. $Im(u)\subset\mathbb{D}_1$,
3. $v = u^2\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta} \qquad (\alpha,\beta<1)$.

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
\big|(1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}\big| \ & \geq \ Re\big((1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}\big) \\
& \geq \ \max\{Re(1-z)^{1/2}, Re(1-w)^{1/2}\} \\
& \geq \ \cos(\frac{\pi}{4})\max\{|1-z|^{1/2}, |1-w|^{1/2}\}.
\end{aligned}
$$

Donc
$$|u(z,w)| \leq \cos^{-2}(\frac{\pi}{4}) \inf\{|1-z|,\ |1-w|\}.$$
Il est claire que $\mathbb{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq |z|^2/2\}$. Soit $(z,w) \in \mathbb{D}^2$. On a $Re(\frac{1}{1-z}) \geq 1/2$ et $Re(\frac{1}{1-w}) \geq 1/2$. Donc $Re(u(z,w))/|u(z,w)|^2 = Re\Big(\big(\frac{1}{1-z}\big)^{1/2} + \big(\frac{1}{1-w}\big)^{1/2}\Big)^2 \geq 1/2$. Ce qui implique que $u(z,w) \in \mathbb{D}_1$. Par conséquent $Im(u) \subset \mathbb{D}_1$.
On utilisant le lemme 26 il est facile de montrer que les fonctions $v(0,w)$, $\frac{\partial v}{\partial z}(0,w)$, $v(z,0)$ et $\frac{\partial v}{\partial w}(z,0)$ sont dans $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$, pour tout $\alpha, \beta < 1$.
Un calcul élémentaire de la dérivée nous donne
$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial w^2}(z,w)\\ =\ & \frac{105}{2} \frac{(1-z)(1-w)}{\big((1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}\big)^8} - \frac{45}{4} \frac{(1-z)^{1/2}(1-w)^{1/2}}{\big((1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}\big)^6}.\end{aligned}$$
On a
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}^2} \Big|\frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial w^2}(z,w)\Big|^2 (1-|z|)^{1-\alpha}(1-|w|)^{1-\beta} dA(z)dA(w)\\ \leq\ & c \int_{\mathbb{D}^2} \frac{1}{|1-z|^2} \frac{1}{|1-w|^2} (1-|z|)^{1-\alpha}(1-|w|)^{1-\beta} dA(z)dA(w)\\ \leq\ & c \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1-|z|)^\alpha} \frac{1}{(1-|w|)^\beta} d|z|d|w|\\ \leq\ & c_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$
Donc, par le lemme 27 et avec $\varepsilon = 1-\alpha$, on en déduit que $v \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$, pour tout $\alpha, \beta < 1$. Ce qui termine la preuve du lemme. □

Nous aurons aussi besoin de ce lemme

Lemme 29. *Soit* $(\alpha, \beta) \in [0,1[\times[0,1[$ *et soit* $N \geq 1$. *On a*
$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta}\big((1-z)^N(1-w)^N\big) = \mathcal{I}_{\alpha,\beta}\big((1-z)(1-w)\big) = \mathcal{J}_{\alpha,\beta}\big(\{1\}\times\overline{\mathbb{D}}\cup\overline{\mathbb{D}}\times\{1\}\big).$$

Preuve. On suppose que $N = 2$. Pour $N > 2$, la preuve ce traite de manière analogue. Il est claire que
$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta}\big((1-z)^2(1-w)^2\big) \subseteq \mathcal{I}_{\alpha,\beta}\big((1-z)(1-w)\big) \subseteq \mathcal{J}_{\alpha,\beta}\big(\{1\}\times\overline{\mathbb{D}}\cup\overline{\mathbb{D}}\times\{1\}\big). \tag{26}$$
Soit $f \in \mathcal{J}_{\alpha,\beta}\big(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}} \cup \overline{\mathbb{D}} \times \{1\}\big)$. On a
$$f(z,w) = f(z,w) - f(1,w) - f(z,1) + f(1,1) = \sum_{n,m} \widehat{f}(n,m)(z^n - 1)(w^m - 1).$$

Donc $f \in \mathcal{I}_{\alpha,\beta}\big((1-z)(1-w)\big)$. Par conséquent

$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta}\big((1-z)(1-w)\big) \supseteq \mathcal{J}_{\alpha,\beta}\big(\{1\}\times\overline{\mathbb{D}}\cup\overline{\mathbb{D}}\times\{1\}\big). \tag{27}$$

On note par $\big(\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}\big)^*$ le dual de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$. On sait que $\big(\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}\big)^*$ coïncide avec l'ensemble suivant

$$\Big\{\Big(a_{n,m}\Big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \,:\, \sup_{n,m}\frac{|a_{n,m}|}{(1+n)^\alpha(1+m)^\beta} < +\infty\Big\}.$$

Soit $\psi \in \big(\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}\big)^*$, une forme lineaire s'annulant sur l'ensemble $\{(1-z)(1-w)(1-z^n)(1-w^m) \,:\, (n,m)\in\mathbb{N}^2\}$. Il est facile de montrer que ψ s'annule aussi sur $(1-z)(1-w)$. Par conséquent

$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta}\big((1-z)^2(1-w)^2\big) \supseteq \mathcal{I}_{\alpha,\beta}\big((1-z)(1-w)\big). \tag{28}$$

Ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Preuve du théorème 20 : On définie la fonction v comme suit

$$v(z,w) = \frac{(1-z)^2(1-w)^2}{\big((1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}\big)^4} \qquad ((z,w)\in\mathbb{D}^2).$$

On sait, d'aprés le lemme 28, que $v\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$. Soit π la surjection canonique de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ associée à $\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f)$. Le spectre de $\pi(v)$ est nulle donc l'application

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-\pi(v))^{-1}$$

est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Le lemme 28 entraîne que $Im(v)\subset\mathcal{S} := \{z\in\mathbb{C}\backslash]-\infty,\ 0[\,:\, |z^{1/2}-1|\le 1\}$. D'aprés la proposition 8 ou le théorème 21, l'algèbre $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ est $\delta-1-$visible et il existe $N\in\mathbb{N}$ qui ne dépend que de α et de β tel que

$$\|\varphi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} \le d^{-N}(\lambda,\mathcal{S}) \le c|\lambda|^{-2N} \qquad \big(\lambda<0\big), \tag{29}$$

où $d(\lambda,\mathcal{S})$ est la distance du point λ à l'ensemble $\mathcal{S}$. Soit $\lambda\neq 0$. On pose

$$\delta(\lambda) := \inf\{|\lambda-v(z,w)|+|f(z,w)| \,:\, (z,w)\in\mathbb{D}^2\}.$$

Il est claire que $\delta(\lambda)>0$. Notons

$$\mathcal{Q}_\lambda := \{(z,w)\in\overline{\mathbb{D}}^2 \,:\, |v(z,w)-\lambda|\le|\lambda|/2\}.$$

Nous avons

$$|\lambda-v(z,w)|+|f(z,w)| \ge |\lambda-v(z,w)| \ge \frac{|\lambda|}{2} \qquad \big((z,w)\notin\mathcal{Q}_\lambda\big).$$

D'aprés le lemme 28, on a

$$c\inf\{|1-z|^2,|1-w|^2\} \ge |v(z,w)| \ge |\lambda|/2 \qquad \big((z,w)\in\mathcal{Q}_\lambda\big),$$

donc, pour tout $\varepsilon > 0$

$$|\lambda - v(z,w)| + |f(z,w)| \geq |f(z,w)| \geq c_\varepsilon e^{-\varepsilon|\lambda|^{-1/2}} \qquad \big((z,w) \in \mathcal{Q}_\lambda\big).$$

Par conséquent

$$\delta(\lambda) \geq c_\varepsilon e^{-\varepsilon|\lambda|^{-1/2}}.$$

D'après le théorème 21, il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ tel que

$$\begin{cases} (\lambda - v(z))h_1(z) + f(z)h_2(z) = 1, \\ \\ \|h_1\|^2_{\alpha,\beta} + \|h_2\|^2_{\alpha,\beta} \leq \delta(\lambda)^{-d_{\alpha,\beta}}, \end{cases}$$

où $d_{\alpha,\beta}$ est une constante qui dépend seulement de α et de β. Ce qui entraîne que

$$\|\varphi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} = \|(\lambda - \pi(v))^{-1}\|_{\alpha,\beta} \leq \|\pi(h_1)\|_{\alpha,\beta} \leq \delta(\lambda)^{-d_{\alpha,\beta}/2}.$$

Donc

$$\|\varphi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|^{-1/2}} \qquad \big(\lambda \neq 0\big). \tag{30}$$

On définie les fonctions φ_g comme suit

$$\lambda \longrightarrow \varphi_g(\lambda) := \langle \varphi(\lambda), g\rangle \qquad g \in (\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f))^*.$$

On fixe $g \in (\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f))^*$. Le théorème classique de Phragmén-Lindelöf appliqué à la fonction φ_g nous permet de déuire, en utilisant les inégalités (29) et (30), que φ_g est un polynôme en $1/\lambda$ de degré inférieur à $2N$. Par suite, le théorème de Banach-Steinhaus nous implique que $\pi(v)^{2N} = 0$ et $v^{2N} \in \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f)$. Soit maintenant la fonction g définie par

$$g(z,w) = (1-z)(1-w)\big((1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}\big)^{8N} \qquad (z, w \in \mathbb{D}^2).$$

On a $v^{2N}g(z,w) = (1-z)^{4N+1}(1-w)^{4N+1}$, donc $(1-z)^{4N+1}(1-w)^{4N+1} \in \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(f)$. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme 29 pour en déduire le résultat.

CHAPITRE 4

Closed ideals in some algebras of analytic functions

We obtain a complete description of closed ideals of the algebra $\mathcal{D}\cap \mathrm{lip}_\alpha$, $0<\alpha\leq \frac{1}{2}$, where $\mathcal{D}$ is the Dirichlet space and lip_α is the algebra of analytic functions satisfying the Lipschitz condition of order α.

1. *Introduction*

The Dirichlet space $\mathcal{D}$ consists of the complex-valued analytic functions f on the unit disk $\mathbb{D}$ with finite Dirichlet integral

$$D(f):=\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2dA(z)<+\infty,$$

where $dA(z)=\frac{1}{\pi}rdrdt$ denotes the normalized area measure on $\mathbb{D}$. Equipped with the pointwise algebraic operations and the norm

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}}:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^2dt+D(f)=\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)|\hat{f}(n)|^2,$$

$\mathcal{D}$ becomes a Hilbert space. For $0<\alpha\leq 1$, let lip_α be the algebra of analytic functions f on $\mathbb{D}$ that are continuous on $\overline{\mathbb{D}}$ satisfing the Lipschitz condition of order α on $\overline{\mathbb{D}}$:

$$|f(z)-f(w)|=o(|z-w|^\alpha)\qquad (\ |z-w|\to 0).$$

Note that this condition is equivalent to

$$|f'(z)|=o((1-|z|)^{\alpha-1})\qquad (|z|\to 1^-).$$

Then, lip_α is a Banach algebra when equipped with the norm

$$\|f\|_\alpha:=\|f\|_\infty+\sup\{(1-|z|)^{1-\alpha}|f'(z)|:z\in\mathbb{D}\}.$$

Here $\|f\|_\infty:=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|$. Unlike as for the case when $0<\alpha\leq 1/2$, the inclusion $\mathrm{lip}_\alpha\subset\mathcal{D}$ always holds provided that $1/2<\alpha\leq 1$. In what follows, let $0<\alpha\leq 1/2$ and define $\mathcal{A}_\alpha:=\mathcal{D}\cap\mathrm{lip}_\alpha$. It is easy to check that $\mathcal{A}_\alpha$ is a commutative Banach algebra when it is endowed with the pointwise algebraic operations and the norm

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} := \|f\|_\alpha + D^{1/2}(f) \qquad (f \in \mathcal{A}_\alpha).$$

In order to describe the closed ideals in subalgebras of the disc algebra $\mathcal{A}(\mathbb{D})$, it is natural to make use of Nevanlinna's factorization theory. For $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ there is a canonical factorization $f = C_f U_f O_f$, where C_f is a constant, U_f a inner function that is $|U_f| = 1$ $a.e$ on $\mathbb{T}$ and O_f the outer function given by

$$O_f(z) = \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f(e^{i\theta})|d\theta\Big\}.$$

Denote by $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ the algebra of bounded analytic functions. Note that $\mathcal{A}_\alpha$ has the so-called F-property [**28, 6**]: if $f \in \mathcal{A}_\alpha$ and U is an inner function such that $f/U \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ then $f/U \in \mathcal{A}_\alpha$ and $\|f/U\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq C_\alpha\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha}$, where C_α is independent of f. Korenblum [**22**] has described the closed ideals of the algebra H^2_1 of analytic functions f such that $f' \in H^2$, where H^2 is the Hardy space. This result has been extended to some other Banach algebras of analytic functions, by Matheson for lip_α [**25**] and by Shamoyan for the algebra $\lambda^{(n)}_\omega$ of analytic functions f on $\mathbb{D}$ such that

$$|f^{(n)}(\zeta_1) - f^{(n)}(\zeta_2)| = o(\omega(|\zeta_1-\zeta_2|)) \;\; as \; |\zeta_1-\zeta_2| \to 0,$$

where n is a nonnegative integer and ω an arbitrary nonnegative non-decreasing subadditive function on $(0,+\infty)$ [**27**]. Shirokov [**29, 28**] had given a complete description of closed ideals for Besov algebras $AB^s_{p,q}$ of analytic functions and particularly for the case $s > 1/2$ and $p = q = 2$

$$AB^s_{2,2} = \Big\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \sum_{n\geq 0}|\widehat{f}(n)|^2(1+n)^{2s} < \infty\Big\}.$$

Note that the case of $AB^{1/2}_{2,2} = \mathcal{A}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{D}$ the problem of description of closed ideals appears to be much more difficult (see [**16, 10**]). The purpose of this paper is to describe the structure of the closed ideals of the Banach algebras $\mathcal{A}_\alpha$. More precisely we prove that these ideals are standard in the sense of the Beurling-Rudin characterization of the closed ideals in the disc algebra [**20**]:

Théorème 30. *If $\mathcal{I}$ is closed ideal of $\mathcal{A}_\alpha$, then*

$$\mathcal{I} = \Big\{ f \in \mathcal{A}_\alpha \,:\, f_{|E_{\mathcal{I}}} = 0 \text{ and } f/U_{\mathcal{I}} \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \Big\},$$

where $E_{\mathcal{I}} := \{z \in \mathbb{T} : f(z) = 0,\ \forall f \in \mathcal{I}\}$ and $U_{\mathcal{I}}$ is the greatest common divisor of the inner parts of the non-zero functions in $\mathcal{I}$.

Such characterization of closed ideals can be reduced further to a problem of approximation of outer functions using the Beurling–Carleman–Domar resolvent method. Define $d(\xi, E)$ to be the distance from $\xi \in \mathbb{T}$ to the set $E \subset \mathbb{T}$. Suppose that $\mathcal{I}$ is a closed ideal in $\mathcal{A}_\alpha$ such that $U_{\mathcal{I}} = 1$. We have $Z_{\mathcal{I}} = E_{\mathcal{I}}$, where

$$Z_{\mathcal{I}} := \{z \in \overline{\mathbb{D}} :\ f(z) = 0,\ \forall f \in \mathcal{I}\}.$$

Next, for $f \in \mathcal{A}_\alpha$ such that

$$|f(\xi)| \leq C d(\xi, E_{\mathcal{I}})^{M_\alpha} \qquad (\xi \in \mathbb{T}),$$

where M_α is a positive constant depending only on $\mathcal{A}_\alpha$, we have $f \in \mathcal{I}$ (see section 3 for more precisions). Now, to prove Theorem 30 we need Theorem 31 below, which states that every function in $\mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ can be approximated in $\mathcal{A}_\alpha$ by functions with boundary zeros of arbitrary high order.

Théorème 31. *Let f be a function in $\mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ and let $M > 0$. There exists a sequence of functions $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$ such that*

(1) *For all $n \in \mathbb{N}$, we have $f_n = f g_n \in \mathcal{A}_\alpha$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{A}_\alpha} = 0$.*

(2) $|g_n(\xi)| \leq C_n d^M(\xi, E_f) \qquad (\xi \in \mathbb{T}),$

where $E_f := \{\xi \in \mathbb{T} : f(\xi) = 0\}$.

To prove this Theorem, we give a refinement of the classical Korenblum approximation theory [**22, 25, 27, 29, 28**].

2. *Main result on approximation of functions in $\mathcal{A}_\alpha$*

We begin by fixing some notations. Let $f \in \mathcal{A}_\alpha$ and let $\{\gamma_n := (a_n, b_n)\}_{n\geq 0}$ be the countable collection of the (disjoint open) arcs of $\mathbb{T} \setminus E_f$. Without loss of the generality, we can suppose that the arc lengths of γ_n are less than $1/2$. In what follows, we denote by Γ the union of a family of arcs γ_n. Define

$$f_{\Gamma}(z) := \exp\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f(e^{i\theta})|d\theta \right\}.$$

The difficult part in the proof of Theorem 31 is to establish the following

Théorème 32. *Let $f \in \mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ be an outer function such that $\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq 1$ and let $N \geq 1$ and $\rho > 1$. Then we have $f^\rho f_{\Gamma}^N \in \mathcal{A}_\alpha$ and*

$$\sup_{\Gamma} \|f^\rho f_{\Gamma}^N\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq C_{N,\rho}, \tag{31}$$

where $C_{N,\rho}$ is a positive constant independent of Γ.

Remarque 1. For a set $S \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$, we denote by $co(S)$ the convex hull of S consisting of the intersection of all convex sets that contain S. Set $\Gamma_n = \cup_{m\geq n}\gamma_m$ and let f be as in the Theorem 32. It is clear that the sequence $(f^\rho f_{\Gamma_n}^N)_n$ converges uniformly on compact subsets of $\mathbb{D}$ to f^ρ. We use (31) to deduce, by the Hilbertian structure of $\mathcal{D}$, that there is a sequence $h_n \in co(\{f^\rho f_{\Gamma_m}^N\}_{m=n}^{\infty})$ converging to f^ρ in $\mathcal{D}$. Also, by [**25**, section4], we obtain that h_n converges to f^ρ in lip_α, for sufficiently large N (in fact, we can prove that this result remains true for every $N \geq 1$). Therefore $\|h_n - f^\rho\|_{\mathcal{A}_\alpha} \to 0$, as $n \to \infty$.

Define $\mathcal{J}(F)$ to be the closed ideal of all functions in $\mathcal{A}_\alpha$ that vanish on $F \subset \overline{\mathbb{D}}$. In the proof of Theorem 31, we need the following classical lemma, see for instance [**25**, Lemma 4] and [**22**, Lemma 24].

Lemme 33. *Let $f \in \mathcal{A}_\alpha$ and E' be a finite subset of $\mathbb{T}$ such that $f_{|E'} = 0$. Let $M > 0$ be given. For every $\varepsilon > 0$ there is an outer function F in $\mathcal{J}(E')$ such that*

(1) $\|Ff - f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq \varepsilon$,

(2) $|F(\xi)| \leq Cd^M(\xi, E') \qquad (\xi \in \mathbb{T})$.

Proof of Theorem 31 : Now, we can deduce the proof of Theorem 31 by using Theorem 32 and Lemma 33. Indeed, let f be a function in $\mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ such that $\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq 1$ and let $\epsilon > 0$. For $m \geq 1$ we have

$$(fO_f^{\frac{1}{m}} - f)' = (O_f^{\frac{1}{m}} - 1)f' + \frac{1}{m}U_f O_f^{\frac{1}{m}} O_f'.$$

The F-property of $\mathcal{A}_\alpha$ implies that $O_f \in \mathcal{A}_\alpha$. Then, there exists $\eta_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\|fO_f^{\frac{1}{m}} - f\|_{\mathcal{A}_\alpha} < \epsilon/3 \qquad (m \geq \eta_0).$$

Set $\Gamma_n = \cup_{p\geq n}\gamma_p$ and $N \geq M/\alpha$ for a given $M > 0$. By Remark 1 applied to O_f (with $\rho = 1+\frac{1}{m}$), there is a sequence $k_{n,m} \in co(\{f_{\Gamma_p}^N\}_{p=n}^{\infty})$ such that

$$\|O_f^{1+\frac{1}{m}}k_{n,m} - O_f^{1+\frac{1}{m}}\|_{\mathcal{A}_\alpha} < \frac{1}{m} \qquad (n \in \mathbb{N},\ m \geq 1).$$

It is clear that

$$\|O_f^{\frac{1}{m}} f_{\Gamma_n}^N - O_f^{\frac{1}{m}}\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow +\infty).$$

Then for every $m \geq 1$ we get

$$\|O_f^{\frac{1}{m}} k_{n,m} - O_f^{\frac{1}{m}}\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow +\infty).$$

So, there is a sequence $k_m \in co(\{f_{\Gamma_p}^N\}_{p=m}^{\infty})$ such that

$$\begin{cases} \|O_f^{1+\frac{1}{m}}k_m - O_f^{1+\frac{1}{m}}\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq \frac{1}{m} & (m \geq 1), \\ \|O_f^{\frac{1}{m}}k_m - O_f^{\frac{1}{m}}\|_\infty \leq \frac{1}{m} & (m \geq 1). \end{cases}$$

We have

$$(fO_f^{\frac{1}{m}}k_m - fO_f^{\frac{1}{m}})' = (f' - U_f O_f')(O_f^{\frac{1}{m}}k_m - O_f^{\frac{1}{m}}) + U_f(O_f^{1+\frac{1}{m}}k_m - O_f^{1+\frac{1}{m}})'.$$

Since $\|O_f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq C_\alpha \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq C_\alpha$, we obtain

$$\begin{aligned}
& \|fO_f^{\frac{1}{m}}k_m - fO_f^{\frac{1}{m}}\|_{\mathcal{A}_\alpha} \\
= \ & \|fO_f^{\frac{1}{m}}k_m - fO_f^{\frac{1}{m}}\|_\infty + \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|)^{1-\alpha}|(fO_f^{\frac{1}{m}}k_m - fO_f^{\frac{1}{m}})'(z)|\} \\
& + D^{1/2}(fO_f^{\frac{1}{m}}k_m - fO_f^{\frac{1}{m}}) \\
\leq \ & \|fO_f^{\frac{1}{m}}k_m - fO_f^{\frac{1}{m}}\|_\infty + C_\alpha\|f\|_\alpha \|O_f^{\frac{1}{m}}k_m - O_f^{\frac{1}{m}}\|_\infty \\
& + \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|)^{1-\alpha}|(O_f^{1+\frac{1}{m}}k_m - O_f^{1+\frac{1}{m}})'(z)|\} \\
& + C\|O_f^{\frac{1}{m}}k_m - O_f^{\frac{1}{m}}\|_\infty D^{1/2}(f) + CD^{1/2}(O_f^{1+\frac{1}{m}}k_m - O_f^{1+\frac{1}{m}}) \\
\leq \ & C_\alpha\|O_f^{\frac{1}{m}}k_m - O_f^{\frac{1}{m}}\|_\infty + C\|O_f^{1+\frac{1}{m}}k_m - O_f^{1+\frac{1}{m}}\|_{\mathcal{A}_\alpha} \\
\leq \ & \frac{C_\alpha}{m}.
\end{aligned}$$

Then, fix $\eta_1 \geq \eta_0$ such that

$$\|fO_f^{\frac{1}{m}}k_m - fO_f^{\frac{1}{m}}\|_{\mathcal{A}_\alpha} < \epsilon/3 \qquad (m \geq \eta_1).$$

We have $k_m = \sum_{i\leq j_m} c_i f^N_{\Gamma_i}$, where $\sum_{i\leq j_m} c_i = 1$. Set $E'_m = \cup_{i<j_m}\partial\gamma_i$. Using Lemma 33, we obtain an outer function $F_m \in \mathcal{J}(E'_m)$ such that $|F_m(\zeta)| \leq C_m d^M(\zeta, E'_m)$ for $\zeta \in \mathbb{T}$ and

$$\|fO_f^{\frac{1}{m}}k_mF_m - fO_f^{\frac{1}{m}}k_m\|_{\mathcal{A}_\alpha} < \frac{1}{m} \qquad (m \geq 1).$$

Then fix $\eta_2 \geq \eta_1$ such that

$$\|fO_f^{\frac{1}{m}}k_mF_m - fO_f^{\frac{1}{m}}k_m\|_{\mathcal{A}_\alpha} < \epsilon/3 \qquad (m \geq \eta_2).$$

Consequently we obtain

$$\|fO_f^{\frac{1}{m}}k_mF_m - f\|_{\mathcal{A}_\alpha} < \epsilon \qquad (m \geq \eta_2).$$

It is not hard to see that

$$|O_f^{\frac{1}{m}}k_mF_m(\xi)| \leq |k_mF_m(\xi)| \leq C_m d^M(\xi, E_f) \qquad (\xi \in \mathbb{T}).$$

Therefore $g_m = O_f^{\frac{1}{m}}k_mF_m$ is the desired sequence, which completes the proof of Theorem 31.

3. *Beurling–Carleman–Domar resolvent method*

Since $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathrm{lip}_\alpha$, then for all $f \in \mathcal{A}_\alpha$, E_f satisfies the Carleson condition

$$\int_{\mathbb{T}} \log \frac{1}{d(e^{it}, E_f)} dt < +\infty.$$

For $f \in \mathcal{A}_\alpha$, we denote by B_f the Blashke product with zeros $Z_f \setminus E_f$, where $Z_f := \{z \in \overline{\mathbb{D}} : f(z) = 0\}$. We begin with following lemma

Lemme 34. *Let $\mathcal{I}$ be a closed ideal of $\mathcal{A}_\alpha$. Define $B_{\mathcal{I}}$ to be the Blashke product with zeros $Z_{\mathcal{I}} \setminus E_{\mathcal{I}}$. There is a function $f \in \mathcal{I}$ such that $B_f = B_{\mathcal{I}}$.*

Preuve. Let $g \in \mathcal{I}$ and let B_n be the Blashke product with zeros $Z_g \cap \mathbb{D}_n$, where $\mathbb{D}_n := \{z \in \mathbb{D} : |z| < \frac{n-1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$. Set $g_n = g/K_n$, where $K_n = B_n/I_n$ and I_n is the Blashke product with zeros $Z_{\mathcal{I}} \cap \mathbb{D}_n$. We have $g_n \in \mathcal{I}$ for every n. Indeed, fix $n \in \mathbb{N}$. It is permissible to assume that Z_{K_n} consists of a single point, say $Z_{K_n} = \{w\}$. Let $\pi : \mathcal{A}_\alpha \to \mathcal{A}_\alpha/\mathcal{I}$ be the canonical quotient map. First suppose $w \notin Z_{\mathcal{I}}$, then $\pi(K_n)$ is invertible in $\mathcal{A}_\alpha/\mathcal{I}$. It follows that $\pi(g_n) = \pi(g)\pi^{-1}(K_n) = 0$, hence $g_n \in \mathcal{I}$. If $w \in Z_{\mathcal{I}}$, we consider the following ideal $\mathcal{J}_w := \{f \in \mathcal{A}_\alpha : fI_n \in \mathcal{I}\}$. It is clear that $\mathcal{J}_w$ is closed. Since $w \notin Z_{\mathcal{J}_w}$, it follows that K_n is invertible in the quotient algebra $\mathcal{A}_\alpha/\mathcal{J}_w$ and so $g/(I_nK_n) \in \mathcal{J}_w$. Hence $g_n \in \mathcal{I}$.

It is clear that g_n converges uniformly on compact subsets of $\mathbb{D}$ to $f = (g/B_g)B_{\mathcal{I}}$ and we have $B_f = B_{\mathcal{I}}$. In the sequel we prove that $f \in \mathcal{I}$. If we obtain

$$|(g_n)'(z)| \leq o\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big) \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

uniformly with respect to n, we can deduce by using [**25**, Lemma 1] that $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n - f\|_\alpha = 0$. Indeed, by the Cauchy integral formula

$$\begin{aligned}
(g_n)'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\zeta)\overline{K_n(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{(g(\zeta) - g(z/|z|))\overline{K_n(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}d\zeta \qquad (z \in \mathbb{D}).
\end{aligned}$$

Then, for $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
|(g_n)'(z)| &\leq \frac{\|K_n\|_\infty}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|g(\zeta) - g(z/|z|)|}{|\zeta - z|^2}|d\zeta| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{i(t+\theta)}) - g(e^{i\theta})|}{1 - 2r\cos t + r^2}dt.
\end{aligned}$$

For all $\varepsilon > 0$, there is $\eta > 0$ such that if $|t| \leq \eta$, we have

$$|g(e^{i(t+\theta)}) - g(e^{i\theta})| \leq \varepsilon|t|^\alpha \qquad (\theta \in [-\pi, +\pi]).$$

Then

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{i(t+\theta)}) - g(e^{i\theta})|}{1 - 2r\cos t + r^2}dt \\
\leq\ & \varepsilon\int_{|t|\leq\eta} \frac{|t|^\alpha}{(1-r)^2 + 4rt^2/\pi^2}dt + \|g\|_\alpha\int_{|t|\geq\eta} \frac{|t|^\alpha}{(1-r)^2 + 4rt^2/\pi^2}dt \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-r)^{1-\alpha}}\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1 + (2u/\pi)^2}du \\
&\qquad + \frac{\|g\|_\alpha}{r^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-r)^{1-\alpha}}\int_{|u|\geq\frac{\eta\sqrt{r}}{1-r}} \frac{u^\alpha}{1 + (2u/\pi)^2}du \\
\leq\ & \varepsilon O\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big) + \|g\|_\alpha o\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big).
\end{aligned}$$

We obtain

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{i(t+\theta)}) - g(e^{i\theta})|}{1 - 2r\cos t + r^2} dt \leq \|g\|_\alpha o\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big). \qquad (32)$$

Consequently

$$|\big(g_n\big)'(z)| \leq \|g\|_\alpha o\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

By the F-property of $\mathcal{A}_\alpha$, we have $\|g_n\| \leq C_\alpha \|g\|_{\mathcal{A}_\alpha}$. Using the Hilbertian structure of $\mathcal{D}$, we deduce that there is a sequence $h_n \in co(\{g_k\}_{k=n}^{\infty})$ converging to f in $\mathcal{D}$. It is clear that $h_n \in \mathcal{I}$ and $\lim\limits_{n\to+\infty} \|h_n - f\|_\alpha = 0$. Then $\lim\limits_{n\to+\infty} \|h_n - f\|_{\mathcal{A}_\alpha} = 0$. Thus $f \in \mathcal{I}$. This completes the proof of the lemma. $\square$

As a consequence of Theorem 31, we can prove Theorem 30 and deduce that each closed ideal of $\mathcal{A}_\alpha$ is standard. For the sake of completeness, we sketch here the proof.

Proof of Theorem 30 : Define γ on $\mathbb{D}$ by $\gamma(z) = z$ and let $\pi : \mathcal{A}_\alpha \to \mathcal{A}_\alpha/\mathcal{I}$ be the canonical quotient map. Also, let $f \in \mathcal{J}(E_{\mathcal{I}})$ be such that $f/U_{\mathcal{I}} \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ and $(f_n)_n$ be the sequence in Theorem 31 associated to f with $M \geq 3$. More exactly, we have $f_n = fg_n$, where $|g_n(\xi)| \leq d^3(\xi, E_f) \leq d^3(\xi, E_{\mathcal{I}})$. Define

$$\mathrm{L}_\lambda(f)(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & \text{if } z \neq \lambda, \\ f'(\lambda) & \text{if } z = \lambda. \end{cases}$$

Then

$$\pi(f)(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1} = f(\lambda)(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1} + \pi\big(\mathrm{L}_\lambda(f)\big). \qquad (33)$$

It is clear that $(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1}$ is an analytic function on $\mathbb{C} \setminus Z_{\mathcal{I}}$. Note that the multiplicity of the pole $z_0 \in Z_{\mathcal{I}} \cap \mathbb{D}$ of $(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1}$ is equal to the multiplicity of the zero z_0 of $U_{\mathcal{I}}$. Since $U_{\mathcal{I}}$ divides f, then according to (33) we can deduce that $\pi(f)(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1}$ is an analytic function on $\mathbb{C} \setminus E_{\mathcal{I}}$. Let $|\lambda| > 1$, we have

$$\begin{aligned} \|\pi(f)(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{A}_\alpha} &\leq \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma^n\|_{\mathcal{A}_\alpha} |\lambda|^{-n-1} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \frac{C}{(|\lambda| - 1)^{3/2}}. \qquad (34) \end{aligned}$$

By Lemma 34, there is $g \in \mathcal{I}$ such that $B_g = B_{\mathcal{I}}$. Let $k = f(g/B_g)$. Then $k = (f/B_{\mathcal{I}})g \in \mathcal{I}$ and for $|\lambda| < 1$, we have

$$k(\lambda)(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1} = -\pi\big(\mathrm{L}_\lambda(k)\big).$$

Therefore

$$\begin{aligned}
\|\pi(f)(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{A}_\alpha} &\leq |f(\lambda)|\|(\pi(\gamma) - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{A}_\alpha} + \|\mathrm{L}_\lambda(f)\|_{\mathcal{A}_\alpha} \\
&\leq \frac{\|\mathrm{L}_\lambda(k)\|_{\mathcal{A}_\alpha}}{|g/B_g|(\lambda)} + \|\mathrm{L}_\lambda(f)\|_{\mathcal{A}_\alpha} \\
&\leq \frac{C(f,k)}{(1-|\lambda|)|g/B_g|(\lambda)} \\
&\leq C(f,k)e^{\frac{C}{1-|\lambda|}} \quad (|\lambda| < 1). \qquad (35)
\end{aligned}$$

We use [**30**, Lemmas 5.8 and 5.9] to deduce

$$\|\pi(f)(\pi(\gamma) - \xi)^{-1}\| \leq \frac{C(f,k)}{d(\xi, E_{\mathcal{I}})^3} \qquad (1 \leq |\xi| \leq 2,\ \xi \notin E_{\mathcal{I}}).$$

Then, we obtain

$$\xi \mapsto |(g_n)(\xi)|\|\pi(f)(\pi(\gamma) - \xi)^{-1}\| \in L^\infty(\mathbb{T}).$$

With a simple calculation as in [**14**, Lemma 2.4], we can deduce that

$$\pi(f_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} (g_n)(\xi)\pi(f)(\pi(\gamma) - \xi)^{-1} d\xi.$$

Denote $\mathcal{I}^\infty_{U_{\mathcal{I}}}(E_{\mathcal{I}}) := \{h \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : h_{|E_{\mathcal{I}}} = 0 \text{ and } h/U_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})\}$. From [**20**, p. 81], we know that $\mathcal{I}^\infty_{U_{\mathcal{I}}}(E_{\mathcal{I}})$ has an approximate identity $(e_m)_{m\geq 1} \in \mathcal{I}^\infty_{U_{\mathcal{I}}}(E_{\mathcal{I}})$ such that $\|e_m\|_\infty \leq 1$. $\mathcal{I}$ is dense in $\mathcal{I}^\infty_{U_{\mathcal{I}}}(E_{\mathcal{I}})$ with respect to the sup norm $\|\ .\ \|_\infty$, so there exists $(u_m)_{m\geq 1} \in \mathcal{I}$ with $\|u_m\|_\infty \leq 1$ and $\lim\limits_{m\to\infty} u_m(\xi) = 1$ for $\xi \in \mathbb{T} \setminus E_{\mathcal{I}}$. Therefore $\pi(f_n) = \pi(f_n - f_n u_m) \to 0$ as $m \to \infty$. Then $f_n \in \mathcal{I}$ and $f \in \mathcal{I}$.

4. *Proof of Theorem 32*

The proof of Theorem 32 is based on a series of lemmas. In what follows, C_ρ will denote a positive number that depends only on ρ, not necessarily the same at each occurrence. For an open subset Δ of $\mathbb{D}$, we put

$$\|f'\|^2_{L^2(\Delta)} := \int_\Delta |f'(z)|^2 dA(z).$$

We begin with the following key lemma

Lemme 35. *Let $f \in \mathcal{A}_\alpha$ be such that $\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq 1$ and let $\rho > 1$ be given. Then*

$$\int_\gamma \frac{|f(e^{it})|^{2\rho}}{d(e^{it})} dt \leq C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)},$$

where $a, b \in E_f$, $\gamma = (a,b) \subset \mathbb{T} \setminus E_f$, $d(z) := \min\{|z-a|, |z-b|\}$ and $\Delta_\gamma := \{z \in \mathbb{D} : \; z/|z| \in \gamma\}$.

Preuve. Let $e^{it} \in \gamma$ and define $z_t := (1-d(e^{it}))e^{it}$. Since $|\gamma| < 1/2$, we obtain $|z_t| > 1/2$. We have

$$|f(e^{it})|^{2\rho} \leq 2^{2\rho-1} \left(|f(e^{it}) - f(z_t)|^{2\rho} + |f(z_t)|^{2\rho} \right). \tag{36}$$

By Hölder's inequality combined with the fact that $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq 1$, we get

$$\begin{aligned}
|f(e^{it}) - f(z_t)|^{2\rho} &= |f(e^{it}) - f(z_t)|^{2\rho-2} |f(e^{it}) - f(z_t)|^2 \\
&\leq 2^{2\rho-2}(1-|z_t|) \int_{|z_t|}^1 |f'(re^{it})|^2 dr \\
&\leq 2^{2\rho-1} d(e^{it}) \int_0^1 |f'(re^{it})|^2 r dr.
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{|f(e^{it}) - f(z_t)|^{2\rho}}{d(e^{it})} dt &\leq 2^{2\rho-1} \int_\gamma \int_0^1 |f'(re^{it})|^2 r dr dt \\
&\leq 2^{2\rho-1} \pi \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Since $d(e^{it}) \leq 1/2$, we obtain $\frac{d(e^{it})}{\sqrt{2}} \leq d(z_t) \leq \sqrt{2} d(e^{it})$. Put $d(z_t) = |z_t - \xi|$ and note that either $\xi = a$ or $\xi = b$. Let

$$z_t(u) = (1-u)z_t + u\xi \qquad (0 \leq u \leq 1).$$

With a simple calculation, we can prove that for all $e^{it} \in \gamma$ and for all u, $0 \leq u \leq 1$, we have

$$|z_t(u) - w| > \frac{1}{2}(1-u)d(e^{it}) \qquad (w \in \partial\Delta_\gamma),$$

where $\partial\Delta_\gamma$ is the boundary of Δ_γ. Then $\mathbb{D}_{t,u} := \{z \in \mathbb{D} : |z - z_t(u)| \leq \frac{1}{2}(1-u)d(e^{it})\} \subset \Delta_\gamma$, for all $e^{it} \in \gamma$ and for all u, $0 \leq u \leq 1$. Since

$|f'(z)|$ is subharmonic on $\mathbb{D}$, it follows that

$$\begin{aligned} |f'(z_t(u))| &\leq \frac{4}{\pi(1-u)^2 d^2(e^{it})} \int_{\mathbb{D}_{t,u}} |f'(z)| dA(z) \\ &\leq \frac{2}{\pi^{1/2}(1-u)d(e^{it})} \|f'\|_{L^2(\Delta_\gamma)}. \end{aligned}$$

Set $\varepsilon_\rho = 2\alpha(\rho-1)$. We have

$$\begin{aligned} |f^\rho(z_t)|^2 &= |f^\rho(z_t) - f^\rho(\xi)|^2 \\ &= \rho^2 |z_t - \xi|^2 \Big| \int_0^1 f^{\rho-1}(z_t(u)) f'(z_t(u)) du \Big|^2 \\ &\leq C_\rho d^2(e^{it}) \Big(\int_0^1 |z_t(u) - \xi|^{\frac{\varepsilon_\rho}{2}} |f'(z_t(u))| du \Big)^2 \\ &\leq C_\rho d^{\varepsilon_\rho}(e^{it}) \Big(\int_0^1 \frac{1}{(1-u)^{1-\frac{\varepsilon_\rho}{2}}} du \Big)^2 \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} \\ &\leq C_\rho d^{\varepsilon_\rho}(e^{it}) \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}. \end{aligned}$$

Hence

$$\int_\gamma \frac{|f(z_t)|^{2\rho}}{d(e^{it})} dt \leq C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}. \tag{38}$$

Therefore the result follows from (36), (37) and (38). $\square$

In the sequel, we denote by f an outer function in $\mathcal{A}_\alpha$ such that $\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq 1$ and we fix a constant ρ, $1 < \rho \leq 2$. By [**25**, Theorem B], we have $f^\rho f_\Gamma^N \in \mathrm{lip}_\alpha$ and $\|f^\rho f_\Gamma^N\|_{\mathrm{lip}_\alpha} \leq C_{N,\rho}$. To prove Theorem 32 we need to estimate the integral $\int_{\mathbb{D}} |(f^\rho f_\Gamma^N)'|^2 dA(z)$. Define

$$g_\Gamma(z) := \frac{1}{\pi} \int\limits_\Gamma \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - z)^2} \log |f(e^{i\theta})| d\theta. \tag{39}$$

Clearly we have $f' = f(g_\Gamma + g_{\mathbb{T}\setminus\Gamma})$ and $(f_\Gamma^N)' = N f_\Gamma^N g_\Gamma$, so

$$\begin{aligned} f^\rho (f_\Gamma^N)' &= N f^\rho f_\Gamma^N g_\Gamma &(40)\\ &= f^{\rho-1} N f' f_\Gamma^N - N f^\rho f_\Gamma^N g_{\mathbb{T}\setminus\Gamma}. &(41) \end{aligned}$$

Since $\|f\|_\infty \leq 1$, it is obvious that $\|f_\Gamma^N\|_\infty \leq 1$ and $\|f^{\rho-1}\|_\infty \leq 1$. Hence, by (40) we get

$$\int_{\mathbb{D}} |(f^\rho f_\Gamma^N)'|^2 dA(z) \leq \rho^2 + N^2 \int_{\mathbb{D}} |f^\rho (f_\Gamma)'|^2 dA(z). \tag{42}$$

We fix $\gamma = (a,b) \subset \mathbb{T} \setminus E_f$ such that $f(a) = f(b) = 0$. Our purpose in what follows is to estimate the integral

$$\int_{\Delta_\gamma} |f^\rho (f_\Gamma)'|^2 dA(z) \tag{43}$$

which we can rewrite as

$$\int_{\Delta_\gamma} |f^\rho (f_\Gamma)'|^2 dA(z) = \int_{\Delta_\gamma^1} + \int_{\Delta_\gamma^2},$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma^1 &:= \Big\{ z \in \Delta_\gamma : \ d(z) < 2(1-|z|) \Big\} \\ \Delta_\gamma^2 &:= \Big\{ z \in \Delta_\gamma : \ d(z) \geq 2(1-|z|) \Big\}. \end{aligned}$$

4.1. The integral on the region Δ_γ^1. We begin with the following lemma.

Lemme 36.
$$\int_{\Delta_\gamma} \frac{|f(z) - f(z/|z|)|^{2\rho}}{(1-|z|)^2} dA(z) \leq \frac{1}{2\alpha(\rho-1)} \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}.$$

Preuve. Let $z = re^{it} \in \Delta_\gamma$ and put $\varepsilon_\rho = 2\alpha(\rho-1)$. We have

$$\begin{aligned} r|f(re^{it}) - f(e^{it})|^{2\rho} &= r|f(re^{it}) - f(e^{it})|^{2\rho-2}|f(re^{it}) - f(e^{it})|^2 \\ &\leq r(1-r)^{1+\varepsilon_\rho} \int_r^1 |f'(se^{it})|^2 ds \\ &\leq (1-r)^{1+\varepsilon_\rho} \int_0^1 |f'(se^{it})|^2 s ds. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta_\gamma} \frac{|f(z) - f(z/|z|)|^{2\rho}}{(1-|z|)^2} dA(z) \\ &= \int_0^1 \Big(\int_\gamma |f(re^{it}) - f(e^{it})|^{2\rho} \frac{rdt}{\pi} \Big) \frac{dr}{(1-r)^2} \\ &\leq \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} \int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{1-\varepsilon_\rho}} dr. \end{aligned}$$

This completes the proof. $\square$

Now, we can state the following result.

Lemme 37.

$$\int_{\Delta_\gamma^1} |f(z)|^{2\rho}|f_\Gamma'(z)|^2 dA(z) \le C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}.$$

Preuve. By Cauchy's estimate, it follows that $|f_\Gamma'(re^{it})| \le \frac{1}{1-r}$. Using Lemma 36, we get

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta_\gamma^1} |f(z)|^{2\rho}|f_\Gamma'(z)|^2 dA(z) \\
\le\ & \int_{\Delta_\gamma^1} \frac{|f(z)|^{2\rho}}{(1-|z|)^2} dA(z) \\
\le\ & C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} + 2^{2\rho-1}\int_{\Delta_\gamma^1} \frac{|f(z/|z|)|^{2\rho}}{(1-|z|)^2} dA(z). \qquad (44)
\end{aligned}$$

Using Lemma 35, we obtain

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_\gamma^1} \frac{|f(z/|z|)|^{2\rho}}{(1-|z|)^2} dA(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{\Delta_\gamma^1} \frac{|f(e^{it})|^{2\rho}}{(1-r)^2} r\,dr\,dt \\
&\le \frac{C}{\pi}\int_\gamma \frac{|f(e^{it})|^{2\rho}}{d(e^{it})} dt \\
&\le C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}. \qquad (45)
\end{aligned}$$

The result of our lemma follows by combining the estimates (44) and (45). □

4.2. The integral on the region Δ_γ^2. In this subsection, we estimate the integral $\int_{\Delta_\gamma^2} |f(z)|^{2\rho}|f_\Gamma'(z)|^2 dA(z)$. Before this, we make some remarks. For $z \in \mathbb{D}$ define

$$a_\gamma(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{-\log|f(e^{i\theta})|}{|e^{i\theta}-z|^2} d\theta & \text{if } \gamma \nsubseteq \Gamma, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}\setminus\Gamma} \frac{-\log|f(e^{i\theta})|}{|e^{i\theta}-z|^2} d\theta & \text{if } \gamma \subseteq \Gamma. \end{cases}$$

Using the equation (40), it is easy to see that

$$|f(z)^\rho f_\Gamma'(z)|^2 \le 4 \left| f(z)^\rho \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{-\log|f(e^{i\theta})|}{|e^{i\theta}-z|^2} d\theta \right|^2. \qquad (46)$$

Using the equation (41), it is clear that

$$|f(z)^\rho f_\Gamma'(z)|^2 \le 2|f'(z)|^2 + 8 \left| f(z)^\rho \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus\Gamma} \frac{-\log|f(e^{i\theta})|}{|e^{i\theta}-z|^2} d\theta \right|^2. \qquad (47)$$

Then

$$\int_{\Delta_\gamma^2} |f(z)|^{2\rho} |f'_\Gamma(z)|^2 dA(z) \le 2\|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} + 8\int_{\Delta_\gamma^2} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z) dA(z). \quad (48)$$

Since $\log|f| \in L^1(\mathbb{T})$, we have

$$a_\gamma(z) \le \frac{C}{d^2(z)} \qquad (z \in \Delta_\gamma). \quad (49)$$

Given such inequality, it is not easy to estimate immediately the integral of the function $|f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z)$ on the whole Δ_γ^2. In what follows, we give a partition of Δ_γ^2 into three parts so that one can estimate the integral $\int |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z) dA(z)$ on each part. Let $z \in \Delta_\gamma^2$, three situations are possible :

$$a_\gamma(z) \le 8\frac{|\log(d(z))|}{d(z)}, \quad (50)$$

$$8\frac{|\log(d(z))|}{d(z)} < a_\gamma(z) < 8\frac{|\log(d(z))|}{1-r}, \quad (51)$$

$$8\frac{|\log(d(z))|}{1-r} \le a_\gamma(z). \quad (52)$$

We can now divide Δ_γ^2 into the following three parts

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma^{21} &:= \Big\{ z \in \Delta_\gamma^2 : z \text{ satisfying } (50) \Big\}, \\ \Delta_\gamma^{22} &:= \Big\{ z \in \Delta_\gamma^2 : z \text{ satisfying } (51) \Big\}, \\ \Delta_\gamma^{23} &:= \Big\{ z \in \Delta_\gamma^2 : z \text{ satisfying } (52) \Big\}. \end{aligned}$$

4.2.1. **The integral on the regions Δ_γ^{21} and Δ_γ^{23}.** In this case we begin by the following

Lemme 38.

$$\int_{\Delta_\gamma^{21}} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z) dA(z) \le C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}.$$

Preuve. Using Lemma 36, we get

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_\gamma^{21}} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z)dA(z)\\
\leq\ & 2^\rho \int_{\Delta_\gamma^{21}} |f(z)|^{\rho-1}|f(z)-f(z/|z|)|^{\rho+1}a_\gamma^2(z)dA(z)\\
&\qquad\qquad +2^\rho\int_{\Delta_\gamma^{21}} |f(z)|^{\rho-1}|f(z/|z|)|^{\rho+1}a_\gamma^2(z)dA(z)\\
\leq\ & C_\rho \int_{\Delta_\gamma} \frac{|f(z)-f(z/|z|)|^{\rho+1}}{(1-|z|)^2}dA(z) + C_\rho\int_{\Delta_\gamma^{21}} \frac{|f(e^{it})|^{\rho+1}}{d^2(e^{it})} rdrdt\\
\leq\ & C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} + C_\rho \int_{\Delta_\gamma^{21}} \frac{|f(e^{it})|^{\rho+1}}{d^2(e^{it})}drdt = I_{2,1}.
\end{aligned}$$

Let $e^{it}\in\gamma$ and denote by ζ_t the point of $\partial\Delta_\gamma^2\cap\mathbb{D}$ such that $\zeta_t/|\zeta_t| = e^{it}$. We have

$$|e^{it}-\zeta_t| = 1-|\zeta_t| = \frac{d(\zeta_t)}{2}\leq d(e^{it}).$$

Then

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_\gamma^{21}} \frac{|f(e^{it})|^{\rho+1}}{d^2(e^{it})}drdt &\leq \int_{\Delta_\gamma^{2}} \frac{|f(e^{it})|^{\rho+1}}{d^2(e^{it})}drdt\\
&= \int_\gamma \frac{|f(e^{it})|^{\rho+1}}{d^2(e^{it})}\int_{|\zeta_t|}^1 drdt\\
&\leq \int_\gamma \frac{|f(e^{it})|^{\rho+1}}{d(e^{it})}dt.
\end{aligned}$$

Using Lemma 35, we get

$$I_{2,1}\leq C_\rho\|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}.$$

This proves the result. $\square$

Lemme 39.

$$\int_{\Delta_\gamma^{23}} |f(z)|^{2\rho}a_\gamma^2(z)dA(z)\leq CA(\Delta_\gamma),$$

where $A(\Delta_\gamma)$ is the area measure of Δ_γ.

Preuve. Set

$$\Lambda_\gamma := \begin{cases} \Gamma & \text{for } \gamma\not\subseteq\Gamma,\\ \mathbb{T}\setminus\Gamma & \text{for } \gamma\subseteq\Gamma.\end{cases}$$

Let $z \in \Delta_\gamma^{23}$. We have

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \exp\Big\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\log|f(e^{i\theta})|d\theta \Big\} \\
&\leq \exp\Big\{ \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda_\gamma} \frac{1-r}{|e^{i\theta}-z|^2}\log|f(e^{i\theta})|d\theta \Big\} \\
&= \exp\Big\{ -(1-r)a_\gamma(z) \Big\} \\
&\leq d^8(z).
\end{aligned}$$

Using (49), we obtain the result. □

4.2.2. **The integral on the region Δ_γ^{22}.** Here, we will give an estimate of the following integral

$$\int_{\Delta_\gamma^{22}} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z)dA(z).$$

Before doing this, we begin with some lemmas. The next one is essential for what follows. Note that a similar result is used by different authors: Korenblum [**22**], Matheson [**25**], Shamoyan [**27**] and Shirokov [**29, 28**].

Lemme 40. *Let $z \in \Delta_\gamma^{22}$ and let $\mu_z = 1 - \frac{8|\log(d(z))|}{a_\gamma(z)}$. Then*

$$|f(\mu_z z)| \leq d^2(z). \tag{53}$$

Preuve. Let $z \in \Delta_\gamma$ and let $\mu < 1$. We have

$$\begin{aligned}
|f(\mu z)| &= \exp\Big\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-(\mu r)^2}{|e^{i\theta}-\mu z|^2}\log|f(e^{i\theta})|d\theta \Big\} \\
&\leq \exp\Big\{ \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda_\gamma} \frac{1-(\mu r)^2}{|e^{i\theta}-\mu z|^2}\log|f(e^{i\theta})|d\theta \Big\} \\
&\leq \exp\Big\{ -(1-\mu r)\inf_{\theta\in\Lambda_\gamma}\Big|\frac{e^{i\theta}-z}{e^{i\theta}-\mu z}\Big|^2 a_\gamma(z) \Big\}.
\end{aligned}$$

For $z \in \Delta_\gamma^{22}$, it is clear that $1-\mu_z \leq d(z) \leq |e^{i\theta}-z|$ for all $e^{i\theta} \in \Lambda_\gamma$. Then

$$\inf_{\theta\in\Lambda_\gamma}\Big|\frac{e^{i\theta}-z}{e^{i\theta}-\mu_z z}\Big| \geq \frac{1}{2} \qquad (z \in \Delta_\gamma^{22}).$$

Thus

$$|f(\mu_z z)| \leq \exp\Big\{ -\frac{1-\mu_z}{4}a_\gamma(z) \Big\} \qquad (z \in \Delta_\gamma^{22}).$$

Then, we have

$$|f(\mu_z z)| \leq \exp\Big\{ -\frac{1}{4}(1-\mu_z)a_\gamma(z) \Big\} = d^2(z) \qquad (z \in \Delta_\gamma^{22}),$$

which yields (53). $\square$

For $r<1$, define

$$\gamma_r := \{z \in \mathbb{D} :\ |z| = r \text{ and } z/|z| \in \gamma\}.$$

Without loss of generality, we can suppose that $d(z) \leq \frac{1}{2}$, $z \in \Delta^2_\gamma$. We need the following

Lemme 41. *Let $r<1$. Then*

$$\int_{\gamma_r \cap \Delta^{22}_\gamma} |f(re^{it}) - f(\mu_{re^{it}} re^{it})|^{2\rho} a^2_\gamma(re^{it}) r dt \leq \frac{C_\rho}{(1-r)^{1-\varepsilon_\rho}} \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)},$$

where $\varepsilon_\rho = \alpha(\rho - 1)$.

Preuve. Let $re^{it} \in \Delta^{22}_\gamma$. Then

$$\begin{aligned} |f(re^{it}) - f(\mu_{re^{it}} re^{it})|^{\rho-1} [(1-\mu_{re^{it}}) a_\gamma(re^{it})]^2 & \\ \leq 64 (1-\mu_{re^{it}})^{\varepsilon_\rho} \log^2(d(re^{it})) \leq C_\rho. & \end{aligned}$$

It is clear that $1-r \leq 1-\mu_{re^{it}} \leq d(re^{it}) \leq \frac{1}{2}$ and so $\frac{1}{2} \leq \mu_{re^{it}} \leq r$. We have

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_r \cap \Delta^{22}_\gamma} |f(re^{it}) - f(\mu_{re^{it}} re^{it})|^{2\rho} a^2_\gamma(re^{it}) r dt \\ \leq\ & C_\rho \int_{\gamma_r \cap \Delta^{22}_\gamma} \frac{|f(re^{it}) - f(\mu_{re^{it}} re^{it})|^{\rho+1}}{(1-\mu_{re^{it}})^2} r dt \\ \leq\ & \frac{C_\rho}{(1-r)^{1-\varepsilon_\rho}} \int_{\gamma_r \cap \Delta^{22}_\gamma} \frac{|f(re^{it}) - f(\mu_{re^{it}} re^{it})|^2}{1-\mu_{re^{it}}} r dt \\ \leq\ & \frac{C_\rho}{(1-r)^{1-\varepsilon_\rho}} \int_{\gamma_r \cap \Delta^{22}_\gamma} \left(\int_{\mu_{re^{it}} r}^{r} |f'(se^{it})|^2 ds \right) r dt \\ \leq\ & \frac{C_\rho}{(1-r)^{1-\varepsilon_\rho}} \int_{S_r} |f'(se^{it})|^2 s ds dt \\ \leq\ & \frac{C_\rho}{(1-r)^{1-\varepsilon_\rho}} \int_{S_r} |f'(w)|^2 dA(w), \end{aligned}$$

where

$$S_r := \left\{ w \in \mathbb{D} :\ 0 \leq |w| \leq r \text{ and } \frac{w}{|w|} \in \gamma \right\}.$$

The proof is therefore completed. $\square$

The last result that we need before giving the proof of Theorem 32 is the following one.

Lemme 42.

$$\int_{\Delta_\gamma^{22}} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z)\, dA(z) \leq C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} + CA(\Delta_\gamma).$$

Preuve. Using (49) and Lemmas 40 and 41, we find that

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_\gamma^{22}} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z)\, dA(z) \\
= \ & \frac{1}{\pi}\int_0^1 \Big(\int_{\gamma_r \cap \Delta_\gamma^{22}} |f(re^{it})|^{2\rho} a_\gamma^2(re^{it}) r\, dt \Big)\, dr \\
\leq \ & CA(\Delta_\gamma) \\
& + 2^{2\rho-1} \int_0^1 \Big(\int_{\gamma_r \cap \Delta_\gamma^{22}} |f(re^{it}) - f(\mu_{re^{it}} re^{it})|^{2\rho} a_\gamma^2(re^{it}) r\, dt \Big)\, dr \\
\leq \ & CA(\Delta_\gamma) + C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)}.
\end{aligned}$$

This completes the proof of the lemma. □

4.2.3. **Conclusion.** Now, according to (48) and Lemmas 38, 39 and 42, we obtain

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_\gamma^2} |f(z)|^{2\rho} |f'_\Gamma(z)|^2\, dA(z) &\leq 2\|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} + 8\int_{\Delta_\gamma^2} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z)\, dA(z) \\
&\leq C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} + CA(\Delta_\gamma).
\end{aligned}$$

Combining this with Lemma 37, we deduce that

$$\int_{\Delta_\gamma} |f(z)|^{2\rho} |f'_\Gamma(z)|^2\, dA(z) \leq C_\rho \|f'\|^2_{L^2(\Delta_\gamma)} + CA(\Delta_\gamma).$$

Hence

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{2\rho} |f'_\Gamma(z)|^2\, dA(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_{\gamma_n}} |f(z)|^{2\rho} |f'_\Gamma(z)|^2\, dA(z) \\
&\leq C_\rho \sum_{n=1}^{\infty} \|f'\|^2_{L^2(\Delta_{\gamma_n})} + C\sum_{n=1}^{\infty} A(\Delta_{\gamma_n}) \\
&\leq C_\rho.
\end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem 32.

Bibliographie

[1] A. Aleman and A. Dahlner, *Uniform spectral radius and compact Gelfand transform,* Studia Math. 172 (2006), no. 1, 25–46.

[2] E. J. Bjork, *On the Spectral Radius Formula in Banach Algebras,* Pacific J.Math. 40 (1972), 279-284.

[3] F. F. Bonsal and J. Duncan, *Complete normed algebras,* Springer, New York, 1958.

[4] B. Bouya, *Closed Ideals in some algebras of analytic functions,* Canad. J. Math. 2007.

[5] B. Bouya, *Idéaux fermés de certaines algèbres de fonctions analytiques,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.

[6] L. Carleson, *A representation formula in the Dirichlet space,* Math. Z. 73 (1960), 190–196.

[7] Y. Domar, *On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function,* Ark. Mat. 3 (1957), 429-440.

[8] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces,* Pure and Appl. Math, Vol.38, Academic Press, New York, 1970.

[9] O. El Fallah, A. Ezzaaraoui, *Majorations uniformes de normes d'inverses dans les algèbres de Beurling,* J. London Math. Soc. (2) 65 (2002), no. 3, 705-719.

[10] O. El Fallah, K. Kellay, T. Ransford, *Cyclicity in the Dirichlet space,* Ark. Mat. 44 (1), 2006 61-86.

[11] O. El Fallah, N. K. Nikolski et M. Zarrabi, *Estimates for resolvents in Beurling-Sobolev algebras,* translation in St. Petersburg Math. J. 10 (1999), no. 6, 901-964.

[12] O. El Fallah et M. Zarrabi, *Estimations des solutions de l'équation de Bézout dans les algèbres de Beurling analytiques,* Math. Scand. 96 (2005), no. 2, 307–319.

[13] J. Esterle, *Distributions on Kronecker sets, strong forms of uniqueness, and closed ideals of A^+,* J. Reine Angew. Math. 450 (1994), 43–82.

[14] J. Esterle, E. Strouse, et F. Zouakia, *Closed ideals of A^+ and the Cantor set,* J. Reine Angew. Math. 449 (1994), 65–79.

[15] V. P. Havin, *The factorization of analytic functions that are smooth up to the boundary,* Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 22 (1971), 202-205.

[16] H. Hedenmalm, A. Shields, *Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions,* Mich. Math. J. 37 (1990) 91–104.

[17] H. HEDENMALM, *Outer functions in function algebras on the bidisc,* Trans. Amer. Math. Soc. 306(1988), 697-714.

[18] H. HEDENMALM, *Outer functions of several complex variables,* J. Funct. Anal. 80(1988), 9-15.

[19] H. HEDENMALM, *Translates of functions of two variables,* Duke Mathematical Journal. 58(1989), no.1, 251-297.

[20] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions,* Prentic-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[21] J. P. KAHANE, *Idéaux férmés dans certaines algébres de fonctions analytiques,* Actes Table Ronde Int. C.N.R.S. Montpellier, Lect. Notes 336, Springer-Verlag 1973, 5-14.

[22] B. I. KORENBLUM, *Invariant subspaces of the shift operator in a weighted Hilbert space,* Mat. Sb. 89(131)(1972), 110–138.

[23] S. G. KRANTZ ET S. Y. LI, *Explicit solutions for corona problem with Lipschitz data in the polydisc,* Pacific J.Math 174, (2) (1996), 443-458.

[24] B. YA. LEVIN, *Translates of functions of ywo variables,* Problem 7.20, Linear and Complex Analysis Problem Book, 199 Research Problems, Lecture Notes in Math. vol. 1043, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, and Tokyo, 1984, p. 421.

[25] A. MATHESON, *Approximation of analytic functions satisfying a Lipschitz condition,* Mich. Math. J. 25 (1978), no. 3, 289–298.

[26] W. RUDIN, Real and complex analysis, second ed., McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1974.

[27] F. A. SHAMOYAN, *Closed ideals in algebras of functions that are analytic in the disk and smooth up to its boundary,* Mat. Sb. 79 (1994), no. 2, 425–445

[28] N. SHIROKOV, *Closed ideals of algebras of type* B^{α}_{pq}, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (1982), no. 6, 1316–1332.

[29] N. SHIROKOV, *Analytic functions smooth up to the boundary,* Lecture Notes in Math, vol 1312 Springer-Verlag, 1988, Berlin.

[30] B. A. TAYLOR AND D. L. WILLIAMS, *Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values,* Canad. J. Math. 22 1970 1266–1283.

[31] N. K. NIKOLSKII, *In search of the invisible spectrum,* Ann. Inst. Fourier 49 (1999) 1925-1998.

[32] J. D. STAFNEY, *An unbounded inverse property in the algebra of absolutely convergent Fourier series,* Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967) 497-498.