Corps enveloppants des algèbres de Lie en dimension infinie et en caractéristique positive

Jean-Marie Bois

UNIVERSITE DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE
UFR SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE

Discipline : Mathématiques

présentée par

M. Jean-Marie Bois

Titre :

Corps enveloppants des algèbres de Lie en dimension infinie et en caractéristique positive

Soutenue publiquement le 3 décembre 2004 devant le jury composé de :

M. Jacques Alev	Professeur à l'Université de Reims	directeur de recherche
M. Alain Bruguières	Professeur à l'Université de Montpellier II	examinateur
M. Gérard Cauchon	Professeur à l'Université de Reims	président du jury
M. François Dumas	Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand	rapporteur
M. Alfons Ooms	Professeur à l'Université du Limbourg	rapporteur
M. Rupert Yu	Maître de conférences à l'Université de Poitiers	examinateur

Remerciements

Mes plus vifs remerciements vont en tout premier lieu à M. Jacques Alev pour avoir accepté de diriger mes recherches. Il a su me transmettre sa rigueur, son enthousiasme et un esprit de curiosité si précieux en mathématiques. Son soutien permanent, tant scientifique que personnel, ont aussi beaucoup compté dans l'aboutissement de cette thèse.

Je remercie tout particulièrement MM. François Dumas et Alfons Ooms pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mes travaux. Ils ont ainsi accepté la lourde tâche d'en être les rapporteurs ; leur relecture attentive, leurs suggestions et leurs remarques m'ont été fort utiles.

Je veux aussi adresser des remerciements chaleureux à M. Gérard Cauchon pour l'honneur qu'il me fait de présider mon jury. Ses conseils éclairés et sa présence ont été plus d'une fois au cours de mes années à Reims une source d'inspiration.

Un grand merci enfin à mes examinateurs, MM. Alain Bruguières et Rupert Yu, pour avoir accepté de prendre part à mon jury.

Table des matières

Introduction

L'origine de cette étude remonte aux travaux de Gelfand et Kirillov sur les corps de fractions d'algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0. Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie. On note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante universelle et $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est intègre et noethérienne : on peut considérer son corps des fractions $K(\mathfrak{g}) = \operatorname{Frac} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, le corps enveloppant de $\mathfrak{g}$. Enfin, on note $C(\mathfrak{g})$ le centre du corps $K(\mathfrak{g})$. L'hypothèse fondamentale formulée par Gelfand et Kirillov en [19] est la suivante : pour une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur $\mathbb{K}$, le corps gauche $K(\mathfrak{g})$ est isomorphe à un corps de Weyl $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$ pour un choix convenable d'entiers n et s. Cette hypothèse est alors établie pour les algèbres de matrices $\mathfrak{gl}_n$ et $\mathfrak{sl}_n$, ainsi que pour les algèbres de Lie nilpotentes. Depuis, de nombreux travaux ont été consacrés à ce sujet [40, 6, 23, 26, 2, 3].

L'hypothèse de Gelfand et Kirillov admet deux prolongements naturels dans des directions très différentes, en caractéristique positive et en dimension infinie. D'abord, on observe que cette hypothèse a encore un sens lorsque le corps de base est de caractéristique $p > 0$: si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie modulaire, est-ce que le corps enveloppant $K(\mathfrak{g})$ est isomorphe à un corps de Weyl ? La question est ici résolue par l'affirmative dans le cas des algèbres de Lie de matrices $\mathfrak{gl}_n$, des algèbres $\mathfrak{sl}_n$ si p ne divise pas n, pour l'algèbre de Witt $W(1)$ et pour une certaine sous-algèbre de l'algèbre de Witt $W(2)$.

Le passage à la caractéristique p enrichit le problème de la manière suivante. Il est bien connu que, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie modulaire, le corps enveloppant est de dimension finie sur son centre. La question se pose alors de savoir comment déterminer l'exposant de l'algèbre simple centrale $K(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire l'ordre de l'élément défini par $K(\mathfrak{g})$ dans le groupe de Brauer de $C(\mathfrak{g})$. Lorsque $\mathfrak{g}$ est non-commutative et vérifie l'hypothèse de Gelfand-Kirillov, on montre que l'exposant de $K(\mathfrak{g})$ est exactement p.

La deuxième extension naturelle du problème de Gelfand et Kirillov concerne à nouveau un corps de base $\mathbb{K}$ de caractéristique 0, mais dans le cas où l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension infinie sur $\mathbb{K}$. Le problème se complique tout d'abord du fait que l'existence d'un corps des fractions pour l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ n'est pas assurée a priori. En outre, il n'est pas non plus clair à quels corps gauches faire jouer le rôle de corps de référence analogue à celui joué par les corps de Weyl dans le cadre du problème de Gelfand et Kirillov en dimension finie.

L'existence d'un corps enveloppant pour les algèbres de Lie à croissance sous-exponentielle est connue depuis longtemps [37]. Un premier pas vers l'étude des corps enveloppants en dimension infinie, et en particulier leur séparation à isomorphisme près, s'effectue à l'aide de la notion de *degré de transcendance de niveau* q, où q est un entier positif, non nul. Cette notion est construite par analogie avec le degré de transcendance de Gelfand-Kirillov à partir des dimensions de niveau q définies par Pétrogradsky en [33].

Cette thèse est divisée en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à l'exposition d'une notion très générale d'algèbres de Poisson et de modules de Poisson. Cette étude est menée en vue de généraliser les notions classiques de croissance et de dimensions des algèbres associatives et de leurs modules. Le cadre très vaste de cette étude permet d'englober comme cas particuliers non seulement le cas des algèbres commutatives de Poisson au sens plus classique envisagé par exemple par D. Farkas et S.Q. Oh [17, 32], mais aussi les algèbres associatives non commutatives et les algèbres de Lie.

Dans le chapitre 2, on étudie dans un cadre très général les notions de croissance et de dimensions des algèbres de Poisson et de leurs modules. On établit des résultats sur les dimensions de niveau q de Pétrogradsky [33] analogues aux résultats classiques sur la dimension de Gelfand-Kirillov [24]. On définit alors la notion de degré de transcendance de niveau q ; on étudie succinctement ses propriétés. On démontre que, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admettant un corps enveloppant, on a toujours $\mathrm{Dim}^q\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Tdeg}^q\, K(\mathfrak{g})$. Sous des conditions très raisonnables sur $\mathfrak{g}$, cet invariant est aussi égal à $\mathrm{Dim}^{q-1}(\mathfrak{g})$. Le chapitre s'achève alors par le calcul des degrés de transcendance de niveau 3 des corps enveloppants de certaines algèbres de Lie de dimension infinie, notamment les algèbres de type Cartan.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude plus approfondie d'une classe particulière d'algèbres et corps enveloppants d'algèbres de Lie de dimension infinie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Ces algèbres de Lie, étudiées par R. Yu en [41], sont les algèbres de type Witt $\mathfrak{w}(f)$ paramétrées par un plongement $f : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ d'un groupe abélien libre dans le groupe additif du corps $\mathbb{K}$. En particulier, on montre que le degré de transcendance de niveau 3 du corps enveloppant est égal au rang du groupe Γ. Par ailleurs, si f, g sont deux plongements définis sur le même groupe Γ, on donne une condition suffisante de non-isomorphisme entre les corps enveloppants de $\mathfrak{w}(f)$ et $\mathfrak{w}(g)$. On obtient ainsi une grande famille de corps gauches de degré de transcendance de Gelfand-Kirillov infinis, de même degrés de transcendance de niveau 3 et deux à deux non-isomorphes. Pour finir, on étudie la partie positive $\mathfrak{w}_+$ d'une algèbre de type Witt ; on démontre en particulier que le corps de Weyl $\mathcal{D}_1(\mathbb{K})$ ne se plonge pas dans $K(\mathfrak{w}_+)$.

Le chapitre 4 traite de la situation modulaire. On établit l'hypothèse de Gelfand et Kirillov pour les algèbres de matrices $\mathfrak{gl}_n$ et, lorsque p ne divise pas n, les algèbres $\mathfrak{sl}_n$, pour l'algèbre de Witt $W(1)$ et pour une certaine sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de l'algèbre de Witt $W(2)$. Plus précisément, si $W(2)$ est l'algèbre des dérivations de l'anneau de polynômes tronqués $\mathbb{K}[x, y]/(x^p, y^p)$, $\mathfrak{p}$ est la sous-algèbre formée des dérivations de la forme $f(x, y)\partial/\partial x$, autrement dit les dérivations qui s'annulent sur y. Alternativement, $\mathfrak{p}$ s'identifie au produit tensoriel de l'algèbre de Lie $W(1)$ avec l'algèbre associative de polynômes tronqués $\mathbb{K}[x]/(x^p)$. La méthode employée dans tous les cas est la même : on trouve une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de l'algèbre étudiée $\mathfrak{g}$ dont le corps enveloppant est isomorphe à un corps de Weyl $\mathcal{D}_{n,0}(\mathbb{K})$, puis on démontre que le corps enveloppant de $\mathfrak{g}$ est engendré par $\mathfrak{g}_0$ et des éléments centraux $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ tels que $2n + s = \dim(\mathfrak{g})$. Dans ce cas, on peut conclure que le corps enveloppant de $\mathfrak{g}$ est isomorphe au corps de Weyl $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$. En particulier, le centre de $K(\mathfrak{g})$ est une extension transcendante pure du corps de base et la classe de $K(\mathfrak{g})$ dans le groupe de Brauer du centre est d'ordre p. La question, posée par A. Braun et C. Hajarnavis en [8], de savoir si le centre de l'algèbre enveloppante est un anneau factoriel est également abordée. Le cas de $\mathfrak{gl}_n$ et $\mathfrak{sl}_n$ a été résolu par l'affirmative par A. Premet et R. Tange [34] ; on démontre ici par des méthodes analogues que c'est aussi le cas pour l'algèbre de Witt $W(1)$ et pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ définie précédemment.

Dans toute la suite, on choisit un corps de base commutatif $\mathbb{K}$ arbitraire. Tous les espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ; la dimension d'un espace vectoriel sera sa dimension sur $\mathbb{K}$ et les applications linéaires seront $\mathbb{K}$-linéaires. De même, toutes les algèbres considérées seront des $\mathbb{K}$-algèbres. Dans les chapitres 1 et 2, aucune restriction sur la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est imposée. Dans le chapitre 3, $\mathbb{K}$ sera supposé de caractéristique nulle. Dans le chapitre 4, $\mathbb{K}$ sera supposé de caractéristique positive.

Chapitre 1

Algèbres de Poisson

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'exposition des résultats concernant les algèbres de Poisson et leurs modules. Cette étude nous permettra de définir au chapitre 2 des notions de croissance et de dimension dans ce cadre très général.

Dans le premier paragraphe, on définit les algèbres et modules de Poisson. La définition utilisée ici est plus générale que la définition classique : en effet, on ne supposera pas que l'algèbre associative sous-jacente est commutative ni même unitaire. Cette généralisation nous permet alors de considérer les algèbres associatives non-commutatives et les algèbres de Lie comme cas particuliers d'algèbres de Poisson. Les résultats établis dans le chapitre suivant pourront donc s'appliquer pour ces deux types d'algèbres.

Dans le deuxième paragraphe, on développe les notions de graduation et de filtration sur les algèbres de Poisson de manière à généraliser les notions correspondantes pour les algèbres associatives et de Lie. En particulier, l'étude d'une algèbre de Poisson filtrée pourra parfois être simplifiée par l'étude de son algèbre de Poisson graduée associée. C'est notamment le cas pour les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie de dimension infinie.

Dans toute la suite du chapitre, on fixe un corps de base $\mathbb{K}$ quelconque.

1.1 Algèbres et modules de Poisson

1.1.1 Algèbres de Poisson

1.1.1.1 Définition

Définition 1.1 On appelle *algèbre de Poisson* tout espace vectoriel P muni de deux lois de composition internes . et $\{.,.\}$ telles que :

1. le couple $(P,.)$ est une algèbre associative (pas nécessairement commutative ni unitaire) ;
2. le couple $(P,\{.,.\})$ est une algèbre de Lie ;
3. pour tout $x \in P$, l'application $ham(x)\colon y \in P \mapsto \{x,y\} \in P$ est une dérivation de l'algèbre associative P.

Le crochet $\{.,.\}$ est appelé *crochet de Poisson sur* P. Les dérivations de la forme $ham(x)$ pour $x \in P$ sont appelées *dérivations hamiltoniennes de* P. L'algèbre de Poisson P est dite *commutative* (resp. *unitaire*) si l'algèbre associative sous-jacente $(P,.)$ est commutative (resp. unitaire). Le cas échéant, on écrira 1_P l'élément unité de P.

Remarque 1.2 On fait souvent l'hypothèse que l'algèbre associative sous-jacente à P est commutative et unitaire [17, 32]. Pour étudier les croissances et dimensions des algèbres, il est peu restrictif d'omettre cette hypothèse. Ceci nous permettra de particulariser tous les résultats obtenus notamment au chapitre 2 dans le cas des algèbres associatives et des algèbres de Lie (voir les exemples 1 et 2 suivants).

Exemple 1.3

1. Une algèbre associative A peut toujours être considérée comme une algèbre de Poisson, avec le crochet donné par le commutateur usuel $\{x,y\} = xy - yx$.
2. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut être considérée comme algèbre de Poisson si on munit $\mathfrak{g}$ du produit associatif trivial $xy = 0$ pour $x, y \in \mathfrak{g}$. L'algèbre associative ainsi définie n'est pas unitaire.
3. L'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$, munie du crochet de Poisson standard $\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}$, est une algèbre de Poisson.
4. Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie. L'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ est munie d'une structure d'algèbre de Poisson pour laquelle le plongement canonique $\mathfrak{g} \hookrightarrow S(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

1.1.1.2 Morphismes d'algèbres de Poisson

Définition 1.4 Soient P, Q deux algèbres de Poisson. Une application linéaire $f\colon P \to Q$ est un *morphisme d'algèbres de Poisson* si f est à la fois un morphisme d'algèbres associatives et d'algèbres de Lie. Si P et Q sont unitaires, le morphisme f est *unitaire* si $f(1_P) = 1_Q$.

1.1.1.3 Sous-algèbres de Poisson

Définition 1.5 Soit P une algèbre de Poisson. Un sous-espace vectoriel $Q \subseteq P$ est une *sous-algèbre de Poisson de* P si Q est à la fois une sous-algèbre associative et une sous-algèbre de Lie de P. Dans ce cas, Q, muni des lois induites, est aussi une algèbre de Poisson. Lorsque P est unitaire, Q est une *sous-algèbre de Poisson unitaire de* P si $1_P \in Q$.

Exemple 1.6 Soit P une algèbre de Poisson. On pose :

$$P^L = \{x \in P \mid \{x, P\} = 0\} \; ; \; P^A = \{x \in P \mid \forall\, p \in P, \; xp = px\} \; ; \; P^P = P^L \cap P^A.$$

Alors P^L, P^A et P^P sont des sous-algèbres de Poisson de P. Elles sont de plus unitaires lorsques P est unitaire.

Preuve. Traitons d'abord le cas de P^L. Observons que P^L est exactement le centre de P considéré comme algèbre de Lie. Il est alors clair que P^L est une sous-algèbre de Lie de P. Montrons que c'est aussi une sous-algèbre associative : si $x, y \in P^L$, on a $\{xy, P\} \subseteq x\{y, P\} + \{x, P\}y = 0$, d'où $xy \in P^L$. Enfin, si P est unitaire, l'élément unité 1_P est dans le noyau de toute dérivation d'algèbre associative de P, en particulier les dérivations hamiltoniennes. Il vient $\{x, 1_P\} = 0$ pour tout $x \in P$. On a donc $1_P \in P^L$.

Traitons maintenant le cas de P^A. Observons que P^A est exactement le centre de P considéré comme algèbre associative. Il est alors clair que P^A est une sous-algèbre associative (éventuellement unitaire) de P. De plus, P^A est aussi stable par toute dérivation d'algèbre associative de P ; en particulier, P^A est stable par les dérivations hamiltoniennes, autrement dit $\{x, P^A\} \subseteq P^A$ pour tout $x \in P$. C'est donc un idéal d'algèbre de Lie de P, et a fortiori c'est une sous-algèbre de Lie.

Enfin, P^P est une sous-algèbre de Poisson (éventuellement unitaire) car c'est l'intersection de deux sous-algèbres de Poisson (éventuellement unitaires).

1.1.1.4 Idéaux de Poisson et quotients

Définition 1.7 Soit P une algèbre de Poisson. Un sous-espace vectoriel $J \subseteq P$ est un *idéal de Poisson à gauche* (resp. *à droite*, *bilatère*) si :

1. J est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de l'algèbre associative P ;
2. J est un idéal de l'algèbre de Lie P.

Pour tout morphisme d'algèbres de Poisson $f \colon P \to Q$, l'image de f est une sous-algèbre de Poisson de Q et le noyau de f un idéal de Poisson bilatère de P.

Lemme 1.8 *Soient P une algèbre de Poisson et J un idéal de Poisson bilatère de P. On munit l'espace quotient P/J des structures associative et de Lie naturelles. Alors P/J est en fait une algèbre de Poisson, appelée algèbre de Poisson quotient de P par J.*

Preuve. Il suffit de vérifier que les dérivations hamiltoniennes de P induisent des dérivations d'algèbre associative de P/J, ce qui est facile à voir.

1.1.1.5 Localisation des algèbres de Poisson

Dans toute cette partie, on considère une algèbre de Poisson unitaire P. Rappelons qu'une partie $S \subseteq P$ est un *système de Ore à gauche* si les propriétés suivantes sont satisfaites [27, chapitre 2] :

1. $1_P \in S$ et $0 \notin S$;
2. $(\forall\, s, t \in S)\ st \in S$;
3. S ne contient pas de diviseur de zéro ;
4. S vérifie la *condition de Ore à gauche* :

$$(\forall\,(s,p) \in S \times P),\ (\exists\,(s',p') \in S \times P)\ :\ p's = s'p.$$

Dans ce cas, on peut former le localisé $S^{-1}P$ au sens associatif usuel. Pour $s, t \in S$ et $p, q \in P$, on a dans $S^{-1}P$:

1. $s^{-1}p = t^{-1}q$ si et seulement s'il existe $a, b \in P$ tels que $ap = bq \in P$ et $as = bt \in S$;
2. $s^{-1}p + t^{-1}q = (t's)^{-1}(t'p + s'q)$, avec $s't = t's$ pour un couple $(t', s') \in S \times P$;
3. $s^{-1}p.t^{-1}q = (t's)^{-1}(p'q)$, avec $t'p = p't$ pour un couple $(t', p') \in S \times P$.

On peut définir symétriquement les notions de système de Ore à droite et de localisation à droite. On dit enfin qu'une algèbre associative A vérifie les conditions de Ore si $S = A \smallsetminus \{0\}$ est un système de Ore à gauche et à droite.

Définition 1.9 Soit P une algèbre de Poisson. On dit que P est *localisable* si, pour tout système de Ore à gauche $S \subseteq P$, le localisé $S^{-1}P$ peut être muni d'un crochet de Poisson prolongeant celui de P.

Remarque 1.10 Si P est localisable, alors le prolongement du crochet de Poisson de P à un localisé $S^{-1}P$ est unique. Pour $x \in S^{-1}P$ et $s \in S$, on a la formule :

$$\{s^{-1}, x\} = -s^{-1}\{s, x\}s^{-1}.$$

On cherche maintenant à déterminer une condition suffisante pour qu'une algèbre de Poisson soit localisable.

Lemme 1.11 *Soient A une algèbre associative et $\beta\colon A \times A \to A$ une bidérivation de A. On définit une application trilinéaire $J_\beta\colon A \times A \times A \to A$ par la formule :*

$$(\forall\, x, y, z \in A)\ :\ J_\beta(x,y,z) = \beta\big(x, \beta(y,z)\big) + \beta\big(y, \beta(z,x)\big) + \beta\big(z, \beta(x,y)\big).$$

Si β est antisymétrique, alors J_β est une tridérivation de A.

Preuve. Démontrons par exemple que pour $a, b, y, z \in A$ on a $J_\beta(ab, y, z) = aJ_\beta(b, y, z) + J_\beta(a, y, z)b$. On utilise le fait que β est une bidérivation de A pour le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
J_\beta(ab, y, z) &= \beta\big(ab, \beta(y, z)\big) + \beta\big(y, \beta(z, ab)\big) + \beta\big(z, \beta(ab, y)\big) \\
&= a\beta\big(b, \beta(y, z)\big) + \beta\big(a, \beta(y, z)\big)b \\
&\quad +\beta\Big(y, a\beta(z, b) + \beta(z, a)b\Big) + \beta\Big(z, a\beta(b, y) + \beta(a, y)b\Big) \\
&= a\beta\big(b, \beta(y, z)\big) + \beta\big(a, \beta(y, z)\big)b \\
&\quad +a\beta\big(y, \beta(z, b)\big) + \beta(y, a)\beta(z, b) + \beta\big(y, \beta(z, a)\big)b + \beta(z, a)\beta(y, b) \\
&\quad +a\beta\big(z, \beta(b, y)\big) + \beta(z, a)\beta(b, y) + \beta(a, y)\beta(z, b) + \beta\big(z, \beta(a, y)\big)b \\
&= aJ_\beta(b, y, z) + J_\beta(a, y, z)b \\
&\quad +\beta(y, a)\beta(z, b) + \beta(z, a)\beta(y, b) + \beta(z, a)\beta(b, y) + \beta(a, y)\beta(z, b),
\end{aligned}$$

donc $J_\beta(ab, y, z) = aJ_\beta(b, y, z) + J_\beta(a, y, z)b$ lorsque β est antisymétrique.

Lemme 1.12 *Soient P une algèbre de Poisson et $S \subseteq P$ un système de Ore à gauche dans P. On suppose que le crochet de Poisson $\{.,.\}$ de P se prolonge en une bidérivation $(.,.)$ de $S^{-1}P$. Alors $(.,.)$ est un crochet de Poisson sur $S^{-1}P$.*

Preuve. Posons $\beta = (.,.)$: c'est par hypothèse une bidérivation de $S^{-1}P$. Il est facile de voir que β est antisymétrique. On définit maintenant l'application trilinéaire J_β comme dans le lemme précédent ; il s'agit alors d'une tridérivation de $S^{-1}P$. Comme $(.,.)$ prolonge le crochet de Poisson $\{.,.\}$ de P, l'identité de Jacobi se traduit par le fait que J_β s'annule sur $P \times P$. Mais alors J_β est une tridérivation de $S^{-1}P$ qui est nulle sur P, elle est donc nulle aussi sur $S^{-1}P$. On en déduit alors que $(.,.)$ vérifie bien l'identité de Jacobi sur $S^{-1}P$ tout entier.

Proposition 1.13 *Soient P une algèbre de Poisson. On suppose que P est de l'une ou l'autre des formes suivantes : soit P est non-commutative et le crochet est donné par $\{x, y\} = xy - yx$, soit P est commutative.*

1. *L'algèbre P est localisable.*
2. *Soit $\mu : P \to Q$ un morphisme d'algèbres de Poisson. On suppose que $\mu(S)$ est formé d'éléments inversibles dans Q. Alors μ se prolonge de manière unique en un morphisme d'algèbres de Poisson $\widehat{\mu} : S^{-1}P \to Q$.*

Preuve. La proposition est évidente dans le cas où P est non-commutative et munie du crochet $\{x, y\} = xy - yx$ (la même formule définit un crochet de Poisson sur tout localisé de P). On suppose désormais P commutative. Soit $S \subseteq P$ un système de Ore à gauche. On veut prolonger $\{.,.\}$ à $S^{-1}P$ tout entier. D'après le lemme précédent, il suffit de prolonger le crochet de Poisson $\{.,.\}$ en une bidérivation de $S^{-1}P$. Pour tout $x \in P$, la dérivation $ham(x)$ se prolonge en une dérivation de $S^{-1}P$ [27, lemme 14.2.2] ; on a la formule :

$$\{x, s^{-1}p\} = s^{-1}\{x,p\} - s^{-2}\{x,s\}p.$$

Un calcul tout à fait standard permet de voir que l'application $x \mapsto \{x, s^{-1}p\}$ est une dérivation de P dans $S^{-1}P$. On peut alors prolonger cette application en une dérivation de $S^{-1}P$ tout entier. Le prolongement $\{.,.\}$ ainsi obtenu sur $S^{-1}P$ est alors bien une bidérivation. Le n^{o}1 est établi.

Démontrons le n^{o}2. Les théorèmes classiques sur la localisation nous permettent de voir que l'application μ se prolonge en un morphisme d'algèbres associatives $\widehat{\mu} : S^{-1}P \to Q$. Il reste à vérifier que $\widehat{\mu}$ respecte les crochets de Poisson. Pour tous $x, y, z \in S^{-1}P$, on a :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}\big(\{x, yz\}\big) &= \widehat{\mu}\big(\{x,y\}z + y\{x,z\}\big) \\ &= \widehat{\mu}(y)\widehat{\mu}\big(\{x,z\}\big) + \widehat{\mu}\big(\{x,y\}\big)\widehat{\mu}(z). \end{aligned}$$

De même, on montre que l'on a :

$$\{\widehat{\mu}(x), \widehat{\mu}(yz)\} = \widehat{\mu}(y)\{\widehat{\mu}(x), \widehat{\mu}(z)\} + \{\widehat{\mu}(x), \widehat{\mu}(y)\}\widehat{\mu}(z).$$

Notons $b(x,y) = \widehat{\mu}(\{x,y\}) - \{\widehat{\mu}(x), \widehat{\mu}(y)\} \in Q$. On a donc :

$$(\forall\, x, y, z \in S^{-1}P) \ : \ b(x, yz) = b(x,y)\widehat{\mu}(z) + \widehat{\mu}(y)b(x,y) \tag{1.1}$$

Comme pour une dérivation, on montre que l'application linéaire antisymétrique $b : S^{-1}P \times S^{-1}P \to Q$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur P et par la condition (1.1). Le fait que μ soit un morphisme d'algèbres de Poisson signifie que b s'annule sur $P \times P$; on voit alors que $b \equiv 0$ sur $S^{-1}P \times S^{-1}P$, ce qui signifie exactement que $\widehat{\mu}$ respecte les crochets de Poisson. La proposition est démontrée.

Remarque 1.14 Avec les mêmes méthodes, on peut démontrer le résultat suivant. Soit P est une algèbre de Poisson et $\Omega \subseteq P$ un système de Ore à gauche formé d'éléments centraux relativement au produit associatif et au crochet de Poisson. Alors le crochet de Poisson de P se prolonge de manière unique au localisé $\Omega^{-1}P$.

1.1.2 Modules sur une algèbre de Poisson

1.1.2.1 Définition

La définition utilisée généralise celle utilisée par Farkas et Oh dans le cas des algèbres de Poisson commutatives [17, 32].

Définition 1.15 Soit P une algèbre de Poisson. Un *module de Poisson sur* P est un espace vectoriel M possédant les propriétés suivantes. Il existe :

1. des applications $(x,m) \in P \times M \mapsto x.m \in M$ et $(m,x) \in M \times P \mapsto m.x \in M$ munissant M d'une structure de bimodule sur l'algèbre associative P ;
2. une application $(x,m) \in P \times M \mapsto \{x,m\}_M \in M$ munissant M d'une structure de module sur l'algèbre de Lie P ;

ces applications étant soumises aux relations de compatibilité suivantes : pour tous $x, y \in P$ et $m \in M$,

$$\begin{aligned} \{xy, m\}_M &= x.\{y,m\}_M + \{x,m\}_M.y \;; && (1.2)\\ \{x,y\}.m &= \{x, y.m\}_M - y.\{x,m\}_M \;; && (1.3)\\ m.\{x,y\} &= \{x, m.y\}_M - \{x,m\}_M.y. && (1.4) \end{aligned}$$

Remarque 1.16 Comme P n'admet pas d'élément unité en général, on n'impose pas la condition $1_P.m = m$ ni $m.1_P = m$ pour tout $m \in M$. Lorsque P est unitaire, le module M sera dit *unitaire à gauche* (resp. *unitaire à droite*) si, pour tout $m \in M$, on a $1_P.m = m$ (resp. $m.1_P = m$).

Notons $\lambda, \rho, \varpi : P \to End(M)$ les applications linéaires définies par :

$$(\forall\, x \in P),\ (\forall\, m \in M)\ :\ \lambda(x)(m) = x.m\ ;\ \rho(x)(m) = m.x\ ;\ \varpi(x)(m) = \{x,m\}_M.$$

Le fait que M soit un bimodule sur l'algèbre associative P et un module d'algèbre de Lie sur P se traduit par les identités suivantes, pour tous $x, y \in P$:

$$\lambda(xy) = \lambda(x) \circ \lambda(y)\ ;\ \rho(xy) = \rho(y) \circ \rho(x)\ ;\ \lambda(x) \circ \rho(y) = \rho(y) \circ \lambda(x)\ ; \qquad (1.5)$$

$$\varpi(\{x,y\}) = [\varpi(x), \varpi(y)]. \qquad (1.6)$$

Insistons encore sur le fait que les relations $\lambda(1_P) = Id$ ou $\rho(1_P) = Id$ ne sont pas imposées, même lorsque l'algèbre P est unitaire. Le crochet $[u,v]$ de deux opérateurs $u, v \in End(M)$ est défini de la manière usuelle par $[u,v] = u \circ v - v \circ u$. Les relations de compatibilité (1.2), (1.3) et (1.4) sont équivalentes aux conditions suivantes, pour tous $x, y \in P$:

$$\begin{aligned} \varpi(xy) &= \lambda(x) \circ \varpi(y) + \rho(y) \circ \varpi(x)\ ; && (1.7)\\ \lambda(\{x,y\}) &= [\varpi(x), \lambda(y)]\ ; && (1.8)\\ \rho(\{x,y\}) &= [\varpi(x), \rho(y)]. && (1.9) \end{aligned}$$

Terminologie 1.17 Le triplet $\tau = (\lambda, \rho, \varpi)$ sera appelé *représentation de* P *dans* M.

Exemple 1.18

1. Soit P une algèbre de Poisson. Alors les opérations de multiplication à gauche, à droite et le crochet de Poisson munissent P d'une structure de module de Poisson sur lui-même.
2. Soit A une algèbre associative, que l'on considère comme algèbre de Poisson comme dans l'exemple 1.3. Soit M un bimodule sur A. Alors M est muni d'une structure de module de Poisson sur A en posant, pour $a \in A$ et $m \in M$: $\{a, m\}_M = a.m - m.a$.
3. Soit A une algèbre associative, que l'on considère comme algèbre de Poisson comme dans l'exemple 1.3. Soit M un module à gauche sur A. Alors M est muni d'une structure de module sur l'algèbre de Poisson A en posant, pour $a \in A$ et $m \in M$: $m.a = 0$ et $\{a, m\}_M = a.m$. Si $M \neq 0$, le module de Poisson ainsi défini n'est jamais unitaire à droite. De même, tout module à droite sur A peut être considéré comme un module de Poisson (non unitaire à gauche en général).
4. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, que l'on considère comme algèbre de Poisson comme dans l'exemple 1.3. Soit M un module sur $\mathfrak{g}$. Alors M est muni d'une structure de module de Poisson sur $\mathfrak{g}$ en posant, pour $x \in \mathfrak{g}$ et $m \in M$: $x.m = m.x = 0$.

1.1.2.2 Morphismes de modules

Définition 1.19 Soient P une algèbre de Poisson et M, N deux modules de Poisson sur P.

1. Une application linéaire $f \colon M \to N$ est un *morphisme de modules de Poisson* s'il s'agit à la fois d'un morphisme de bimodules sur l'algèbre associative P et d'un morphisme de modules de l'algèbre de Lie P.
2. Les modules M et N sont dits *isomorphes* s'il existe une application linéaire inversible $f : M \to N$ telle que f et f^{-1} soient des morphismes de modules de Poisson.

1.1.2.3 Sous-modules et modules quotients

Définition 1.20 Soient P une algèbre de Poisson et M un module de Poisson sur P. Un sous-espace vectoriel $N \subseteq M$ est un *sous-module de Poisson de* M s'il s'agit à la fois d'un sous-bimodule de l'algèbre associative P et d'un sous-module de l'algèbre de Lie P.

On remarque alors que N, muni des lois induites, est lui-même un P-module de Poisson. Notons aussi que si M est unitaire (à gauche ou à droite), alors N est unitaire du même côté. Enfin, l'image et le noyau d'un morphisme de modules sont des sous-modules des modules d'arrivée et de départ respectivement.

Exemple 1.21 Reprenons les exemples 1.18.

1. Soient P une algèbre de Poisson et $M = P$. Les sous-modules de M sont les idéaux bilatères de P.

2. Soient A une algèbre associative et M un bimodule d'algèbre associative sur A. Les sous-modules de Poisson de M sont exactement les sous-A-bimodules associatifs de M.
3. Soient A une algèbre associative et M un module à gauche sur A. Les sous-modules de Poisson de M sont exactement les sous-A-modules à gauche associatifs de M.
4. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et M un module sur $\mathfrak{g}$. Les sous-modules de Poisson de M sont exactement les sous-$\mathfrak{g}$-modules de Lie de M.

Lemme 1.22 *Soient P une algèbre de Poisson et M un module de Poisson sur P. Soit $N \subseteq M$ un sous-module de Poisson. On munit l'espace quotient M/N des structures de bimodule associatif et de module de Lie naturelles. Alors M/N est en fait un module de Poisson, appelé module de Poisson quotient de M par N.*

Preuve. C'est une vérification qui ne pose pas de difficulté et sera donc omise.

1.1.2.4 Algèbre enveloppante de Poisson

On introduit ici la notion d'algèbre enveloppante de Poisson en adaptant la notion développée dans [32] par Oh pour les algèbres de Poisson commutatives.

Définition 1.23 Soit P une algèbre de Poisson. On considère trois copies de l'espace vectoriel P, notées P_λ, P_ρ et P_ϖ. Pour tout élément $x \in P$, on notera x_λ (resp. x_ρ, x_ϖ) l'élément x considéré comme élément de P_λ (resp. de P_ρ, P_ϖ). On notera $A(P)$ l'algèbre associative définie comme quotient de l'algèbre tensorielle $T(P_\lambda \oplus P_\rho \oplus P_\varpi)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments suivants :

$$x_\lambda y_\lambda - (xy)_\lambda \ ; \ x_\rho y_\rho - (yx)_\rho \ ; \ x_\varpi y_\varpi - y_\varpi x_\varpi - \{x,y\}_\varpi \ ; \ x_\lambda y_\rho - y_\rho x_\lambda \ ; \tag{1.10}$$

$$x_\varpi y_\lambda - y_\lambda x_\varpi - \{x,y\}_\lambda \ ; \ x_\varpi y_\rho - y_\rho x_\varpi - \{x,y\}_\rho \ ; \ x_\lambda y_\varpi + y_\rho x_\varpi - (xy)_\varpi, \tag{1.11}$$

les éléments x, y variant dans P. On l'appelle *algèbre enveloppante de Poisson de P*.

Notations 1.24 Dans la suite, pour tout $x \in P$, on notera encore x_λ (resp. x_ρ, x_ϖ) l'image de l'élément $x_\lambda \in T(P_\lambda \oplus P_\rho \oplus P_\varpi)$ (resp. $x_\rho, x_\varpi \in T(P_\lambda \oplus P_\rho \oplus P_\varpi)$) dans le quotient $A(P)$. Pour tout sous-espace $X \subseteq P$, on notera $X_\lambda \subseteq A(P)$ (resp. $X_\rho, X_\varpi \subseteq A(P)$ le sous-espace engendré par les éléments x_λ (resp. x_ρ, x_ϖ) tels que $x \in X$.

L'algèbre $A(P)$ vérifie la propriété universelle suivante :

Théorème 1.25 *Soient B une algèbre associative et $\alpha, \beta, \gamma : P \to B$ trois applications linéaires vérifiant les conditions suivantes :*

1. *l'application α (resp. β, resp. γ) est un morphisme d'algèbres associatives (resp. un anti-morphisme d'algèbres associatives, resp. un morphisme d'algèbres de Lie) ;*
2. *pour tous $x, y \in P$, on a :*

$$\begin{aligned}
\alpha(x)\beta(y) &= \beta(y)\alpha(x) \ ; && (1.12)\\
\alpha(\{x,y\}) &= \gamma(x)\alpha(y) - \alpha(y)\gamma(x) \ ; && (1.13)\\
\beta(\{x,y\}) &= \gamma(x)\beta(y) - \beta(y)\gamma(x) \ ; && (1.14)\\
\gamma(xy) &= \alpha(x)\gamma(y) + \beta(y)\gamma(x). && (1.15)
\end{aligned}$$

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $\Phi : A(P) \to B$ tel que, pour tout $x \in P$:

$$\Phi(x_\lambda) = \alpha(x) \ ; \ \Phi(x_\rho) = \beta(x) \ ; \ \Phi(x_\varpi) = \gamma(x). \tag{1.16}$$

Dans ces conditions, on dit que Φ prolonge *le triplet (α, β, γ).*

Preuve. Comme les éléments x_λ, x_ρ et x_ϖ engendrent $A(P)$, la condition (1.16) entraîne que le morphisme Φ, s'il existe, est unique. Il reste à construire un tel morphisme. On commence par définir un morphime $\widehat{\Phi}$ sur l'algèbre tensorielle $T = T(P_\lambda \oplus P_\rho \oplus P_\varpi)$ par les conditions :

$$\widehat{\Phi}(x_\lambda) = \alpha(x) \ ; \ \widehat{\Phi}(x_\rho) = \beta(x) \ ; \ \widehat{\Phi}(x_\varpi) = \gamma(x).$$

Soit J l'idéal de T engendré par les éléments (1.10) et (1.11). Montrons que $\widehat{\Phi}(J) = 0$; on pourra alors définir par passage au quotient un morphisme $\Phi : A(P) = T/J \to B$ vérifiant la propriété (1.16). Soient $x, y \in P$. On a :

$$\widehat{\Phi}\left(x_\lambda y_\lambda - (xy)_\lambda\right) = \widehat{\Phi}(x_\lambda)\widehat{\Phi}(y_\lambda) - \widehat{\Phi}\left((xy)_\lambda\right) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(xy) = 0.$$

De même :

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}\left(x_\varpi y_\lambda - y_\lambda x_\varpi - \{x,y\}_\lambda\right) &= \widehat{\Phi}(x_\varpi)\widehat{\Phi}(y_\lambda) - \widehat{\Phi}(y_\lambda)\widehat{\Phi}(x_\varpi) - \widehat{\Phi}\left(\{x,y\}_\lambda\right)\\
&= \gamma(x)\alpha(y) - \alpha(y)\gamma(x) - \alpha\left(\{x,y\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Les autres relations se démontrent de même.

Corollaire 1.26 *Soient P une algèbre de Poisson, $A(P)$ son algèbre enveloppante et M un espace vectoriel. Soit $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) l'ensemble des représentations de P dans M (resp. de $A(P)$ dans M). Pour tout triplet $\tau = (\lambda, \rho, \varpi) \in \mathcal{R}$ il existe un unique $\tau' \in \mathcal{R}'$ qui prolonge τ, et l'application $\tau \mapsto \tau'$ est une bijection de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$.*

Avec les notations du corollaire, les sous-espaces de M stables à la fois pour λ, ρ et ϖ sont les sous-espaces de M stables pour τ'. Si τ_1 et τ_2 dont deux représentations de P dans M : τ_1 et τ_2 sont isomorphes si et seulement si τ_1' et τ_2' sont isomorphes. Aussi, M est de type fini en tant que P-module de Poisson si et seulement si M est de type fini en tant que $A(P)$-module à gauche.

1.2 Algèbres et modules de Poisson gradués et filtrés

1.2.1 Espaces vectoriels gradués et filtrés

Rappelons d'abord quelques faits généraux sur les espaces vectoriels gradués et filtrés (voir Bourbaki, *Algèbre*, chapitre 2).

1.2.1.1 Espaces vectoriels gradués

Soient Γ un groupe abélien et V un espace vectoriel. On dit que V est *gradué sur* Γ s'il existe un décomposition : $V = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} V^{(\gamma)}$, où chaque $V^{(\gamma)}$ est un sous-espace vectoriel de V (éventuellement réduit à $\{0\}$). Les éléments de $V^{(\gamma)}$ sont dits *homogènes, de degré* γ ; on note alors $\deg(v) = \gamma$. Tout élément $v \in V$ s'écrit comme une somme $v = \sum_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma$, les $v_\gamma \in V^{(\gamma)}$ étant nuls, sauf au plus un nombre fini d'entre eux. Pour $\gamma \in \Gamma$, l'élément v_γ est appelé *composante homogène de degré* γ *de* v. Un sous-espace $W \subseteq V$ est dit *gradué* si $W = \sum_{\gamma\in\Gamma} W \cap V^{(\gamma)}$. Dans ce cas, le quotient V/W est naturellement Γ-gradué ; plus précisément on a une identification :

$$\frac{V}{W} \simeq \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \frac{V^{(\gamma)}}{W \cap V^{(\gamma)}}.$$

Si V, W sont deux espaces Γ-gradués et $\delta \in \Gamma$: une application linéaire $f : V \to W$ est dite *homogène, de degré* δ si $f(V^{(\gamma)}) \subseteq W^{(\gamma+\delta)}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

1.2.1.2 Espaces vectoriels filtrés

Un espace vectoriel V est *filtré (sur* $\mathbb{Z}$*)* s'il existe une suite croissante de sous-espaces $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = V \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}. \tag{1.17}$$

On dira que V est *filtré sur* $\mathbb{N}$ (resp. *discret*) si $V_j = \{0\}$ pour tout $j < 0$ (resp. s'il existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $V_j = \{0\}$ pour $j < j_0$).

À tout élément $v \in V$ on associe sa *filtration* $\nu(v) = \nu_V(v) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid v \in V_n\} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. La deuxième condition de (1.17) signifie que $\nu(v) = -\infty$ si et seulement si $v = 0$.

1.2.1.3 Espace vectoriel gradué associé

Soit V un espace vectoriel filtré. On note $Gr(V)$ l'espace vectoriel $Gr(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{V_n}{V_{n-1}}$. C'est un espace vectoriel naturellement $\mathbb{Z}$-gradué, appelé *espace vectoriel gradué associé à V*. Les éléments homogènes de degré n sont les éléments de V_n/V_{n-1}. Pour $v \in V$ non nul, on appelle *forme initiale de v* l'élément $gr(v) = v + V_{\nu(v)-1}$; on pose aussi $gr(0) = 0$. Pour $v \neq 0$, on a toujours $\nu(v) = \deg\big(gr(v)\big)$. On voit enfin que si V est de dimension finie, alors $Gr(V)$ est de dimension finie aussi et $\dim(V) = \dim Gr(V)$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $gr_n : V_n \to V_n/V_{n-1}$ la projection canonique. Pour tout élément $v \in V$ tel que $v \neq 0$ et $\nu(v) \leq n$, on a les équivalences :

$$\nu(v) = n \iff gr_n(v) \neq 0 \iff gr(v) = gr_n(v).$$

Lemme 1.27 *Soient V un espace vectoriel filtré et $x, y \in V$.*

1. *Si $\nu(y) < \nu(x)$, on a $gr(x-y) = gr(x)$. Si $\nu(x) = \nu(y)$ et $gr(x) \neq gr(y)$, on a $gr(x-y) = gr(x) - gr(y)$.*
2. *On a $gr(x) = gr(y)$ si et seulement si $\nu(x-y) < \nu(x)$.*
3. *Soient $\{x_j\}_{j\in J}$ un nombre fini d'éléments de V. On pose $n = \max\{\nu(x_j) \mid j \in J\}$ et $J_0 = \{j \in J \mid \nu(x_j) = n\}$: pour $j \in J$, l'entier $\nu(x_j)$ est maximal si et seulement si $j \in J_0$. Soit $x = \sum_{j\in J} x_j$. Si $\sum_{j\in J_0} gr(x_j) \neq 0$, alors $\nu(x) = n$ et $gr(x) = \sum_{j\in J_0} gr(x_j)$.*

Preuve. Établissons le n^{o}1. On note $n = \nu(x)$. Si $\nu(y) < n$, on a $gr_n(y) = 0$, d'où

$$0 \neq gr(x) = gr_n(x) = gr_n(x) - gr_n(y) = gr_n(x-y),$$

par suite $gr_n(x-y) \neq 0$ et $gr(x-y) = gr_n(x-y) = gr(x)$. Si $\nu(y) = n$, on a $gr(x) - gr(y) = gr_n(x) - gr_n(y) = gr_n(x-y)$; comme $gr_n(x) \neq gr_n(y)$ on a $gr_n(x-y) \neq 0$, donc $\nu(x-y) = n$ et $gr(x-y) = gr_n(x-y) = gr(x) - gr(y)$.

Examinons à présent le n^{o}2 : si $gr(x) = gr(y)$, on a en particulier $\nu(x) = \nu(y) = n$. Dans ce cas, $0 = gr(x) - gr(y) = gr_n(x) - gr_n(y) = gr_n(x-y)$; ceci signifie bien que $\nu(x-y) < n$. Inversement, supposons $\nu(x-y) < \nu(x)$. On a d'après le n^{o}1 $gr(x) = gr(x - (x-y)) = gr(y)$.

Démontrons le n^{o}3. On a $x_j \in V_n$ pour tout j, donc $x = \sum_{j\in J} x_j \in V_n$ aussi. Dautre part, par construction de J_0, on a $gr_n(x_j) = gr(x_j)$ si $j \in J_0$ et $gr_n(x_j) = 0$ sinon. Il vient :

$$gr_n(x) = \sum_{j\in J} gr_n(x_j) = \sum_{j\in J_0} gr(x_j) \neq 0,$$

d'où $\nu(x) = n$ et $gr(x) = \sum_{j \in J_0} gr(x_j)$ comme annoncé.

1.2.1.4 Filtrations induites

On considère toujours un espace vectoriel filtré V. Soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors W est naturellement filtré par la famille $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $W_n = W \cap V_n$ pour tout n. L'espace vectoriel gradué associé $Gr(W)$ s'identifie au sous-espace de $Gr(V)$ engendré par la famille $\{gr(w) \mid w \in W\}$.

1.2.1.5 Topologie des espaces vectoriels filtrés

Soit V un espace vectoriel filtré. On peut naturellement munir V d'une structure d'espace vectoriel topologique pour laquelle une base de voisinages de 0 est donnée par la famille $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Cette topologie est métrisable, la distance entre deux points distincts x et y étant donnée par exemple par $dist(x, y) = e^{\nu(x-y)}$. Pour cette topologie, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in V$ si et seulement si $\nu(x - x_n)$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini. Lorsqu'on utilisera des notions topologiques sur un espace vectoriel filtré il s'agira toujours de notions relatives à la topologie définie par la filtration considérée.

Remarque 1.28 Si la filtration de V est discrète, alors la topologie de V est discrète aussi, c'est-à-dire que les suites convergentes sont stationnaires. De manière équivalente, cela signifie que tout sous-ensemble de V est fermé.

Lemme 1.29 *Soient V un espace vectoriel filtré et $A \subseteq B \subseteq V$ deux sous-espaces vectoriels. Notons $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs adhérences dans V. On a alors $\overline{A} = \overline{B}$ si et seulement si $Gr(A) = Gr(B)$.*

Preuve. Comme $A \subseteq B$, on a aussi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ et $Gr(A) \subseteq Gr(B)$. Il reste à étudier dans quels cas les inclusions réciproques sont vérifiées.

Supposons dans un premier temps $Gr(A) = Gr(B)$. Montrons que $B \subseteq \overline{A}$, ce qui fournira par passage aux adhérences $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Soit $b \in B$. Il existe $a_1 \in A$ tel que $gr(a_1) = gr(b)$. Comme $A \subseteq B$, on a aussi $b - a_1 \in B$ avec $\nu(b - a_1) < \nu(b)$, de sorte que $\nu(b - a_1) \leq \nu(b) - 1$. Comme précédemment, il existe $a'_2 \in A$ tel que $gr(a'_2) = gr(b - a_1)$. En posant $a_2 = a_1 + a'_2 \in A$, on a $\nu(b - a_2) < \nu(b) - 1$. Par récurrence, on construit de la sorte une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ dans A telle que $\nu(b - a_n) \leq \nu(b) - n$, donc telle que $\lim_{n\to\infty}(a_n) = b$.

Réciproquement, on suppose $\overline{A} = \overline{B}$. Montrons que $Gr(B) \subseteq Gr(A)$. Soit $b \in B$ un élément non nul. Comme $B \subseteq \overline{B} = \overline{A}$, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A tels que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Ceci signifie que $\lim_{n\to\infty} \nu(b - a_n) = -\infty$; en particulier, pour n assez grand, $\nu(b - a_n) < \nu(b)$. D'après le lemme 1.27, n^{o}2, on a bien $gr(b) = gr(a_n) \in Gr(A)$. On en déduit finalement que

$Gr(B) \subseteq Gr(A)$: le lemme est démontré.

Remarque 1.30 Reprenons les notations du lemme. Si $A \nsubseteq B$, on peut avoir $Gr(A) = Gr(B)$ sans avoir $\overline{A} = \overline{B}$. Par exemple, prenons $V = \mathbb{K}[x]$ avec la filtration discrète définie par $V_n = \sum_{j \leq n} \mathbb{K}x^j$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Les sous-espaces $A = \mathbb{K}x$ et $B = \mathbb{K}(1+x)$ sont fermés, de sorte que $\overline{A} = A \neq B = \overline{B}$. Enfin, on voit facilement que $Gr(A) = Gr(B) = \mathbb{K}\, gr(x)$.

Corollaire 1.31 *Soit V un espace vectoriel filtré. On suppose que la filtration de V est discrète. Soit W un sous-espace de V tel que $Gr(W) = Gr(V)$. Alors $W = V$.*

Preuve. On applique le lemme précédent avec $A = W$ et $B = V$: on a donc $\overline{W} = \overline{V} = V$. Comme la topologie de V est discrète, tout sous-ensemble de V est fermé ; en particulier $\overline{W} = W$.

1.2.2 Algèbres et modules de Poisson gradués

1.2.2.1 Algèbres de Poisson graduées

Définition 1.32 Soient Γ un groupe abélien et P une algèbre de Poisson. On dit que P est *graduée sur* Γ si $P = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} P^{(\gamma)}$ est gradué en tant qu'espace vectoriel et s'il existe un élément $\tau \in \Gamma$ tels que :

1. $(\forall\, \alpha, \beta \in \Gamma)$ $P^{(\alpha)} P^{(\beta)} \subseteq P^{(\alpha+\beta)}$;
2. $(\forall\, \alpha, \beta \in \Gamma)$ $\{P^{(\alpha)}, P^{(\beta)}\} \subseteq P^{(\alpha+\beta-\tau)}$.

Lorsque $\{.,.\} \neq 0$, l'élément τ est unique et sera noté $\tau(P)$. Si $\{.,.\} = 0$ on convient de poser $\tau(P) = 0$.

Remarque 1.33 Lorsque P est unitaire, l'élément 1_P est toujours homogène, de degré 0.

Preuve. Décomposons $1_P = \sum u_\gamma$, avec $u_\gamma \in P_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Soit a un élément homogène non nul de degré α. On a alors $a = a.1_P = \sum a u_\gamma$. Chaque $a u_\gamma$ est homogène, de degré $\alpha + \gamma$; en identifiant les composantes homogènes des deux côtés, on voit en particulier que $a u_0 = a$. Cette identité étant valable pour tout élément homogène a, elle est aussi valable (par additivité) lorsque $a \in P$ est quelconque ; autrement dit : pour tout $a \in P$, on a $a u_0 = a$. Avec $a = 1_P$, ceci montre que $u_0 = 1_P u_0 = 1_P$, donc 1_P est bien homogène, de degré 0.

1.2.2.2 Modules de Poisson gradués

Définition 1.34 Soient Γ un groupe abélien et P une algèbre de Poisson graduée sur Γ. On note $\tau = \tau(P) \in \Gamma$. Soit M un module de Poisson sur P. On dit que M est *gradué* si $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M^{(\gamma)}$ est gradué en tant qu'espace vectoriel et si on a :

1. $(\forall\, \alpha, \beta \in \Gamma)$ $P^{(\alpha)}.M^{(\beta)} + M^{(\beta)}.P^{(\alpha)} \subseteq M_{(\alpha+\beta)}$;
2. $(\forall\, \alpha, \beta \in \Gamma)$ $\{P^{(\alpha)}, M^{(\beta)}\}_M \subseteq M^{(\alpha+\beta-\tau)}$.

1.2.2.3 Graduation de l'algèbre enveloppante de Poisson

On reprend les notations 1.24.

Proposition 1.35 *Soit P une algèbre de Poisson graduée par un groupe Γ. On pose $\tau = \tau(P)$. L'algèbre enveloppante de Poisson $A = A(P)$ est naturellement Γ-graduée. Ses composantes homogènes sont déterminées par les conditions suivantes. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $x \in P^{(\gamma)}$ homogène, de degré γ, on a :*

$$x_\lambda, x_\rho \in A^{(\gamma)} \ \text{ et } x_\varpi \in A^{(\gamma-\tau)}. \tag{1.18}$$

Preuve. On reprend les notations de la construction 1.23. On notera $T = T(P_\lambda \oplus P_\rho \oplus P_\varpi)$ et J l'idéal engendré par les éléments (1.10) et (1.11). On peut graduer l'espace vectoriel $P_\lambda \oplus P_\rho \oplus P_\varpi$ de sorte que l'on ait, pour tout élément homogène $x \in P$:

$$\begin{cases} \deg(x_\lambda) = \deg(x_\rho) = \deg(x) \ ; \\ \deg(x_\varpi) = \deg(x) - \tau. \end{cases}$$

Cette graduation se prolonge en une graduation de l'algèbre tensorielle T. Pour voir que le quotient $A = T/J$ est gradué, il suffit alors de vérifier que les générateurs de l'idéal J sont homogènes, ce qui ne pose pas de difficulté.

Proposition 1.36 *Soient P une algèbre de Poisson Γ-graduée et M un module de Poisson sur P. Alors M est un P-module de Poisson gradué si et seulement si M est un $A(P)$-module à gauche gradué.*

1.2.3 Algèbres et modules de Poisson filtrés

1.2.3.1 Algèbres de Poisson filtrées

Définition 1.37 Une algèbre de Poisson P est dite *filtrée (sur $\mathbb{Z}$)* si l'espace vectoriel P est filtré par une suite de sous-espaces $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et s'il existe un entier $\tau \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$(\forall\, n, m \in \mathbb{Z}) \quad P_n P_m \subseteq P_{n+m} \quad ; \quad \{P_n, P_m\} \subseteq P_{n+m-\tau}. \tag{1.19}$$

Si de plus P est unitaire, on demandera aussi $1_P \in P_0$.

Lorsque le crochet de Poisson de P n'est pas nul, on choisira l'entier τ intervenant dans (1.19) le plus grand possible, c'est-à-dire soumis la condition :

$$\begin{aligned}(\forall\, n, m \in \mathbb{Z}) \quad &: \quad \{P_n, P_m\} \subseteq P_{n+m-\tau},\\ (\exists\, n_0, m_0 \in \mathbb{Z}) \quad &: \quad \{P_{n_0}, P_{m_0}\} \not\subseteq P_{n_0+m_0-\tau-1}.\end{aligned}$$

On notera dans ce cas $\tau = \tau(P)$. Si $\{.,.\} = 0$, on convient de poser $\tau(P) = 0$.

1.2.3.2 Algèbre de Poisson graduée associée

Soit P une algèbre de Poisson filtrée. On note $\tau = \tau(P)$ et $Gr(P)$ l'espace vectoriel gradué associé. On définit deux applications bilinéaires sur $Gr(P)$ en posant :

$$(\forall\, x, y \in P \setminus \{0\}) \quad : \quad (x + P_{\nu(x)-1})(y + P_{\nu(y)-1}) = xy + P_{\nu(x)+\nu(y)-1}, \tag{1.20}$$

$$\{x + P_{\nu(x)-1}, y + P_{\nu(y)-1}\} = \{x, y\} + P_{\nu(x)+\nu(y)-\tau-1}. \tag{1.21}$$

Lemme 1.38 *Soient P une algèbre de Poisson filtrée et $x, y \in P$.*

1. *On a* $gr(x)gr(y) = \begin{cases} gr(xy) & si \;\; \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y); \\ 0 & sinon. \end{cases}$
2. *On a* $\{gr(x), gr(y)\} = \begin{cases} gr(\{x, y\}) & si \;\; \nu(\{x, y\}) = \nu(x) + \nu(y) - \tau \;; \\ 0 & sinon. \end{cases}$

Preuve. Vérifions par exemple le n^{o}1. On a $gr(x)gr(y) = (x + P_{\nu(x)-1})(y + P_{\nu(y)-1}) = xy + P_{\nu(x)+\nu(y)-1}$. Cet élément est nul si dans $Gr(P)$ si $\nu(xy) \leq \nu(x) + \nu(y) - 1$, c'est-à-dire si $\nu(xy) < \nu(x)+\nu(y)$; dans le cas contraire, on a $\nu(x)+\nu(y) = \nu(xy)$ et $xy+P_{\nu(x)+\nu(y)-1} = gr(xy)$. Le n^{o}2 se démontre de même.

Lemme 1.39 *Les applications bilinéaires définies par (1.20) et (1.21) munissent l'espace $Gr(P)$ d'une structure d'algèbre de Poisson. Si P est unitaire, alors $Gr(P)$ est unitaire aussi.*

Preuve. On considère trois éléments non nuls $a, b, c \in P$ et on pose $i = \nu(a), j = \nu(b), k = \nu(c)$. On a donc $gr(a) = a+P_{i-1}$ et similairement pour $gr(b)$ et $gr(c)$. Comme les éléments homogènes engendrent l'espace vectoriel $Gr(P)$, il suffit de vérifier les relations d'associativité et de Jacobi sur des éléments homogènes. Un calcul simple analogue à celui du lemme précédent permet de vérifier les identités suivantes :

$$(gr(a)gr(b))\, gr(c) = gr(a)\,(gr(b)gr(c)) = abc + P_{i+j+k-1} \;; \tag{1.22}$$

$$\{gr(a), \{gr(b), gr(c)\}\} = \{a, \{b, c\}\} + P_{i+j+k-2\tau-1}. \tag{1.23}$$

L'équation (1.22) traduit exactement l'associativité du produit sur les éléments homogènes ; l'identité (1.23) permet de vérifier facilement l'identité de Jacobi. Le fait que les dérivations hamiltoniennes dans $Gr(P)$ sont des dérivations d'algèbres associatives pourrait s'établir de la même manière.

Enfin, si P est unitaire, on a $\nu(1_P) = 0$. Il est alors immédiat de vérifier que $gr(1_P) = 1_P + P_{-1}$ est un élément unité pour $Gr(P)$. Le lemme est démontré.

Soit P est une algèbre de Poisson filtrée et $\tau = \tau(P)$. Soit $Q \subseteq P$ un sous-espace vectoriel. À l'aide du lemme 1.38, on voit que si Q est stable pour le produit associatif (resp. le crochet de Poisson), alors $Gr(Q) \subseteq Gr(P)$ est aussi stable pour le produit associatif (resp. le crochet de Poisson). En particulier, si Q est une sous-algèbre de Poisson de P, alors $Gr(Q)$ est une sous-algèbre de Poisson de $Gr(P)$.

1.2.3.3 Modules de Poisson filtrés

Soient P une algèbre de Poisson filtrée, $\tau = \tau(P)$ et M un module de Poisson sur P.

Définition 1.40 On dit que M est un *P-module de Poisson filtré* si M est filtré, comme espace vectoriel, par une famille de sous-espaces $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les conditions :

$$(\forall\, n, m \in \mathbb{Z}) \quad P_n.M_m + M_m.P_n \subseteq M_{n+m} \quad ; \quad \{P_n, M_m\} \subseteq M_{n+m-\tau}.$$

1.2.3.4 Module de Poisson gradué associé

Soient P une algèbre de Poisson filtrée et M un module de Poisson filtré sur P ; on note $\tau = \tau(P)$, $Gr(P)$ l'algèbre de Poisson graduée associée à P et $Gr(M)$ l'espace vectoriel gradué associé à M. On définit des applications bilinéaires en posant, pour $x \in P \smallsetminus \{0\}$ et $m \in M \smallsetminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
(x + P_{\nu(x)-1}).(m + M_{\nu(m)-1}) &= x.m + M_{\nu(x)+\nu(m)-1}, \\
(m + M_{\nu(m)-1}).(x + P_{\nu(x)-1}) &= m.x + M_{\nu(x)+\nu(m)-1}, \\
\{x + P_{\nu(x)-1}, m + M_{\nu(m)-1}\}_M &= \{x, m\}_M + M_{\nu(x)+\nu(m)-\tau-1}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.41 *Soient P une algèbre de Poisson filtrée et M un P-module de Poisson filtré. Soient $x \in P$ et $m \in M$.*

1. *On a* $gr(x).gr(m) = \begin{cases} gr(x.m) & \text{si } \nu(x.m) = \nu(x) + \nu(m); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   Une formule analogue permet de calculer $gr(m).gr(x)$.

2. *On a* $\{gr(x), gr(m)\}_M = \begin{cases} gr(\{x, m\}_M) & \text{si } \nu(\{x, m\}_M) = \nu(x) + \nu(m) - \tau \; ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Preuve. On omet ici la démonstration, qui est tout à fait similaire à celle du lemme 1.38.

Lemme 1.42 *Les applications bilinéaires définies précédemment induisent une structure de $Gr(P)$-module de Poisson sur l'espace $Gr(M)$.*

Preuve. Ici encore, la démonstration est omise.

Soient P une algèbre de Poisson filtrée P, $\tau = \tau(P)$ et M un P-module de Poisson filtré. Soit $N \subseteq M$ un sous-espace vectoriel. À l'aide du lemme 1.41, on peut voir que si N est stable pour l'action associative à gauche (resp. à droite, resp. l'action de Lie), alors le sous-espace $Gr(N) \subseteq Gr(M)$ est aussi stable pour l'action associative à gauche (resp. à droite, resp. l'action de Lie). En particulier, si N est un sous-module de Poisson de M, alors $Gr(N)$ est un sous-module de Poisson de $Gr(M)$.

1.2.3.5 Filtration de l'algèbre enveloppante de Poisson

Soit P une algèbre de Poisson filtrée par une famille de sous-espaces $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$; on note $\tau = \tau(P)$. Soit $A = A(P)$ l'algèbre enveloppante de Poisson de P. Reprenons les notations 1.24. On construit une famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces de A comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose d'abord $\mathfrak{a}_n = (P_n)_\lambda + (P_n)_\rho + (P_{n+\tau})_\varpi$. Ensuite, on pose :

$$A_n = \sum_{n_1+\ldots+n_k\leq n} \mathfrak{a}_{n_1} \ldots \mathfrak{a}_{n_k}. \tag{1.24}$$

Pour tout élément $x \in P_n$, on a donc $x_\lambda, x_\rho \in A_n$ et $x_\varpi \in A_{n-\tau}$ (un tel phénomène de décalage apparaît aussi avec les graduations, voir la proposition 1.35).

Proposition 1.43 *On conserve les notations ci-dessus. La famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par (1.24) est une filtration de l'algèbre associative $A(P)$. Soit M un espace vectoriel filtré. Alors M est un P-module de Poisson filtré si et seulement si M est un $A(P)$-module à gauche filtré.*

1.2.3.6 Filtrations et topologie

Soit P une algèbre de Poisson filtrée. On munit P de la topologie définie par sa filtration. Alors les applications $(x, y) \in P^2 \mapsto x.y \in P$ et $(x, y) \in P^2 \mapsto \{x, y\} \in P$ sont continues. De même, si M est un P-module de Poisson filtré, muni de la topologie naturelle, les applications structurelles $(x, m) \in P \times M \mapsto x.m \in M$, $(m, x) \in M \times P \mapsto m.x \in M$ et $(x, m) \in P \times M \mapsto \{x, m\}_M \in M$ sont continues.

1.2.3.7 Filtrations et localisation

Soit P une algèbre de Poisson filtrée par une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}}$; on note $\tau = \tau(P)$. On suppose que l'algèbre associative $Gr(P)$ est intègre. Soit $S \subseteq P$ un système de Ore à gauche. On pose $Q = S^{-1}P$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$Q_n = \{s^{-1}p \mid (s,p) \in S \times P \ \text{ et } \ \nu(p) - \nu(s) \leq n\}.$$

On suppose enfin P localisable au sens de la définition 1.9, c'est-à-dire que le crochet de Poisson de P se prolonge en un crochet de Poisson sur Q.

Proposition 1.44 *Avec les hypothèses précédentes, on a :*

1. *Pour tous $p, q \in P$: on a $\nu(pq) = \nu(p) + \nu(q)$.*
2. *Supposons $s^{-1}p = t^{-1}q \in Q \setminus \{0\}$. Alors $\nu(p) - \nu(s) = \nu(q) - \nu(t)$.*
3. *La famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de l'algèbre de Poisson Q. On a, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$: $\{Q_n, Q_m\} \subseteq Q_{n+m-\tau}$. Plus précisément, on a $\tau(Q) = \tau(P)$.*
4. *Posons $\Sigma = \{gr(s) \mid s \in S\} \subseteq Gr_\tau(P)$. Alors Σ est un système de Ore à gauche dans $Gr(P)$ et on a un isomorphisme naturel d'algèbres associatives :*
$$\Sigma^{-1}Gr(P) \xrightarrow{\sim} Gr(S^{-1}P). \tag{1.25}$$
5. *Le crochet de Poisson de $Gr(P)$ se prolonge de manière unique en un crochet de Poisson sur le localisé $\Sigma^{-1}Gr(P)$. L'isomorphisme du n^{o}4 est un isomorphisme d'algèbres de Poisson.*

Preuve. Vérifions le n^{o}1. Soient $p, q \in P \setminus \{0\}$. On a donc $gr(p), gr(q) \in Gr(P) \setminus \{0\}$; comme $Gr(P)$ est intègre, $gr(p)gr(q) \neq 0$. D'après le lemme 1.38, on a $gr(p)gr(q) = gr(pq)$. En se servant du fait que $\nu(x) = \deg gr(x)$ pour tout $x \in P$, il vient $\nu(p) + \nu(q) = \nu(pq)$.

Vérifions le n^{o}2. Si $s^{-1}p = t^{-1}q$ dans $Q \setminus \{0\}$, il existe $a, b \in P$ tels que $ap = bq$ et $as = bt \in S$. En appliquant le n^{o}1, on a $\nu(a) + \nu(p) = \nu(b) + \nu(q)$ et $\nu(a) + \nu(s) = \nu(b) + \nu(t)$, d'où $\nu(p) - \nu(s) = \nu(q) - \nu(t)$. Remarquons que l'application ν induit une application $\widetilde{\nu}$ définie sur Q tout entier et vérifiant $\widetilde{\nu}(x) = \nu(p) - \nu(s)$ si $x = s^{-1}p$: d'après ce qui précède, $\widetilde{\nu}(x)$ est indépendant de l'écriture de x comme fraction à dénominateur dans S. En particulier, on voit que lorsque $x \in P$, on a $\widetilde{\nu}(x) = \nu(x)$, autrement dit on a :

$$(\forall\, n \in \mathbb{Z}) \ : \ Q_n \cap P = P_n. \tag{1.26}$$

Dans la suite, on écrira encore ν au lieu de $\widetilde{\nu}$.

Démontrons le n^{o}3. Il est clair que la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille croissante de sous-espaces d'intersection nulle et dont la réunion est Q tout entier. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Pour voir que $Q_nQ_m \subseteq Q_{n+m}$, on procèderait comme dans la démonstration du n^{o}2. Vérifions que $\{Q_n, Q_m\} \subseteq Q_{n+m-\tau}$. Pour $s^{-1}p \in P$ et $t^{-1}q \in Q$ tels que $\nu(p) - \nu(s) \leq n$ et $\nu(q) - \nu(t) \leq m$, on a :

$$\{s^{-1}p, t^{-1}q\} = t^{-1}s^{-1}\{p, q\} - t^{-1}s^{-1}\{s, q\}s^{-1}p - t^{-1}s^{-1}\{p, t\}t^{-1}q + t^{-1}s^{-1}\{s, t\}s^{-1}t^{-1}pq.$$

Or $-\nu(t^{-1}) - \nu(s) + \nu(\{p, q\}) \leq \nu(p) + \nu(q) - \tau - \nu(t) - \nu(s)$, d'où $t^{-1}s^{-1}\{p, q\} \in Q_{n+m-\tau}$. De même, les trois autres termes de la somme de droite sont dans $Q_{n+m-\tau}$; finalement on a bien $\{s^{-1}p, t^{-1}q\} \in Q_{n+m-\tau}$. L'entier $\tau(Q)$ est le plus grand entier t vérifiant $\{Q_n, Q_m\} \subseteq Q_{n+m-t}$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$. Il vient donc $\tau(Q) \geq \tau(P)$. Par ailleurs, pour $t = \tau(Q)$, on a aussi d'après (1.26) :

$$\{P_n, P_m\} \subseteq P \cap \{Q_n, Q_m\} \subseteq P \cap Q_{n+m-t} = P_{n+m-t},$$

d'où comme précédemment $\tau(P) \geq \tau(Q)$. On a donc bien $\tau(P) = \tau(Q)$.

Démontrons le n^{o}4. Montrons d'abord que Σ est un système de Ore à gauche dans $Gr(P)$. On a déjà $1_{Gr(P)} = gr(1_P) \in \Sigma$. De plus, pour $s, t \in S$, on a $gr(s)gr(t) = gr(st)$ par intégrité de $Gr(P)$ donc Σ est une partie multiplicative de $Gr(P)$. Ses éléments étant non nuls, ils sont aussi tous réguliers. Il reste à établir que Σ vérifie la condition de Ore à gauche.

Soient $\sigma \in \Sigma$ et $\pi \in Gr(P)$. Il existe $s \in S$ et des éléments $\{p_j\}_{1\leq j\leq n}$ dans P tels que :

$$\sigma = gr(s) \ \text{ et } \ \pi = \sum_{j=1}^{n} gr(p_j),$$

où les $\pi_j = gr(p_j)$ sont homogènes, de degrés deux à deux distincts. D'après le lemme d'existence de dénominateurs communs [27, lemme 2.1.8], il existe $t \in S$ et $r_1, \ldots, r_n \in P$ tels que $tp_j = r_js$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Notons $\tau = gr(t) \in \Sigma$ et $\rho_j = gr(r_j) \in Gr(P)$. De l'intégrité de $Gr(P)$ on déduit, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\tau\pi_j = gr(t)gr(p_j) = gr(tp_j) = gr(r_js) = gr(r_j)gr(s) = \rho_j\sigma,$$

d'où $\tau(\pi_1 + \ldots + \pi_n) = (\rho_1 + \ldots + \rho_n)\sigma$, avec $\tau \in \Sigma$. C'est bien la condition de Ore à gauche.

On peut à présent considérer le localisé $\Sigma^{-1}Gr(P)$. L'identité (1.26) signifie que la filtration de P est induite sur P par celle de Q. On en déduit une inclusion naturelle $Gr(P) \hookrightarrow Gr(Q)$. Or les éléments de Σ sont inversibles dans $Gr(Q)$: on vérifie en effet que, pour $s \in S$, on a $gr(s)^{-1} = gr(s^{-1})$ dans $Gr(S^{-1}P)$. On a donc un morphisme d'algèbres associatives injectif $\Sigma^{-1}Gr(P) \hookrightarrow Gr(S^{-1}P)$. Enfin, il est facile de voir que ce morphisme est aussi surjectif.

Pour le n^{o}5, il reste à observer que le crochet de Poisson sur $\Sigma^{-1}Gr(P)$ défini par l'isomorphisme (1.25) prolonge le crochet de Poisson naturel sur $Gr(P)$. La proposition est démontrée.

On considère à présent le cas particulier où P admet un corps des fractions (à gauche), c'est-à-dire le cas où P est intègre et où l'ensemble $S = P \setminus \{0\}$ est un système de Ore (à gauche).

On notera $K = \mathrm{Frac}(P)$ le localisé $S^{-1}P$. On suppose toujours que l'algèbre associative $Gr(P)$ est intègre. Le corps K est naturellement filtré par la famille $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, avec :

$$K_n = \{q^{-1}p \mid p, q \in P \ ; \ q \neq 0 \ ; \ \nu(p) - \nu(q) \leq n\}.$$

On notera encore ν l'application filtration définie sur K tout entier. On a :

Corollaire 1.45 *Soit H l'ensemble des éléments homogènes non nuls de $Gr(P)$. L'algèbre graduée associée $Gr(K)$ s'identifie naturellement au localisé de $Gr(P)$ en H. L'inclusion naturelle $Gr(P) \hookrightarrow Gr(K)$ est un morphisme d'algèbres de Poisson.*

Chapitre 2

Dimensions et degrés de transcendance des algèbres de Poisson

Introduction

Dans ce chapitre, on cherche à généraliser les notions de dimension et degré de transcendance de Gelfand-Kirillov dans le cadre plus général des algèbres de Poisson, en vue d'appliquer cette théorie aux algèbres de Lie de dimension infinie et à leurs algèbres enveloppantes et symétriques.

La première partie est une exposition générale de la notion de croissance des fonctions définies sur $\mathbb{N}$, à valeurs réelles positives. Cette notion est très voisine des notions classiques [24, 33]. Ensuite, pour tout entier $q \geq 1$, on introduit une famille de fonctions de jauge Φ_α^q dépendant d'un paramètre réel $\alpha > 0$, considérée par Pétrogradsky en [33]. La comparaison de la croissance d'une fonction f à la croissance des fonctions Φ_α^q, à q fixé, permet de définir un invariant de la croissance de f appelé *dimension de niveau q de f*. Quelques propriétés élémentaires de la dimension de niveau q des fonctions croissantes sont alors établies.

La deuxième partie est consacrée à la définition et à l'étude de la notion de croissance pour les algèbres et modules de Poisson. Dans le cas particulier d'une algèbre associative ou d'une algèbre de Lie, on retrouve la théorie classique [24, 33, 37]. La croissance d'une algèbre de Poisson P repose sur la notion de sous-espace engendré par des monômes de Poisson en des éléments d'un sous-espace X, définie de manière à tenir compte des deux lois de composition sur P, à savoir la multiplication associative et le crochet de Poisson. Lorsque X est un sous-espace générateur de l'algèbre de Poisson P, on note $\gamma_X(n)$ la dimension du sous-espace engendré par des monômes de Poisson de degré au plus n en les éléments de X. On montre que la croissance de la fonction γ_X est indépendante du choix du sous-espace générateur X ; on peut alors définir, pour tout entier $q \geq 1$, la notion de *dimension de niveau q* d'une algèbre de Poisson. Pour $q = 1, 2$ et 3, on retrouve les notions classiques de dimension d'espace vectoriel, de dimension de Gelfand-Kirillov et de superdimension des algèbres associatives. Cette partie s'achève par la comparaison de la dimension de niveau q d'une algèbre de Lie et des dimensions de niveau $q+1$ de ses algèbres enveloppante et symétrique (théorème 2.63). Les résultats obtenus ici sont un peu moins précis que ceux obtenus par Pétrogradsky en [33] ; toutefois, il convient de noter que dans le cas où $q = 2$, on peut omettre une condition technique figurant dans les hypothèses de [33, proposition 2]. Un argument classique permet alors d'établir l'existence d'un corps enveloppant pour une très large classe d'algèbres de Lie.

Dans la troisième partie, on définit une notion de *degré de transcendance de niveau* q pour les algèbres de Poisson par le même procédé que celui employé dans [19] pour définir le degré de transcendance de Gelfand-Kirillov à partir de la dimension de Gelfand-Kirillov. En suivant l'article de Zhang [42], on étudie brièvement les propriétés générales de ce degré de transcendance dans le cadre des localisations d'algèbres de Poisson filtrées. Les théorèmes obtenus sont alors appliqués pour démontrer le résultat suivant (théorème 2.78). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\mathrm{Dim}^q(\mathfrak{g}) < \infty$ pour un entier $q \geq 1$. Alors on a :

$$\mathrm{Tdeg}^{q+1}\ \mathrm{Frac}\,(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Tdeg}^{q+1}\ \mathrm{Frac}\,(S(\mathfrak{g})) = \mathrm{Dim}^{q+1}\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^{q+1}\ S(\mathfrak{g}) \leq \mathrm{Dim}^q(\mathfrak{g}).$$

Avec une condition supplémentaire (peu restrictive dans la pratique) sur $\mathfrak{g}$, la dernière inégalité est une égalité. Pour $q = 1$, on retrouve les théorèmes classiques sur le degré de transcendance de Gelfand-Kirillov des corps enveloppants d'algèbres de Lie de dimension finie [19, 24, 42]. Pour $q \geq 2$, les résultats semblent nouveaux.

Dans toute la suite du chapitre, on fixe un corps de base $\mathbb{K}$ quelconque.

2.1 Croissance et dimension des fonctions

2.1.1 Notion de croissance

Notations 2.1 Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions définies sur $\mathbb{N}$, à valeurs réelles et positives. On écrira $f \trianglelefteq g$ s'il existe un entier $C > 0$ tels que $f(n) \leq g(Cn)$ pour n assez grand. On écrira $f \preceq g$ si, pour tout réel $\rho > 1$: $f \trianglelefteq \rho g$.

Cette notion est légèrement différente de celles utilisées par Pétrogradsky en [33] et par Krause et Lenagan dans [24]. L'utilité de cette modification apparaîtra au lemme 2.4. La relation $\preceq$ est une relation de pré-ordre, c'est-à-dire qu'elle est réflexive et transitive. On peut donc définir une relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}_+$ en posant $f \sim g$ si $f \preceq g$ et $g \preceq f$. Lorsque $f \preceq g$ mais pas $f \sim g$, on écrira $f \prec g$. Enfin, on notera $\Gamma(f)$ la classe d'équivalence de f modulo $\sim$: $\Gamma(f)$ est appelée *croissance de f*. Notons que la relation de pré-ordre $\preceq$ induit une relation d'ordre, encore notée $\preceq$, sur l'ensemble des croissances de fonctions.

Remarque 2.2 Dans toute la suite, on s'intéressera essentiellement au comportement des fonctions au voisinage de $+\infty$. En particulier, on identifiera souvent implicitement des fonctions coïncidant partout, sauf en un nombre fini de points. On pourra donc parfois se contenter de définir une fonction f uniquement sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ de la forme $\{N, N+1, \ldots\}$ avec $N \geq 1$; on pourrait poser $f(k) = 0$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ pour que f soit effectivement définie sur $\mathbb{N}$ tout entier.

Terminologie 2.3 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction. Si $f \prec \exp(n)$, la fonction f est dite *à croissance sous-exponentielle*.

Pour les fonctions définies sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, il existe par ailleurs une relation d'équivalence plus classique, définie de la manière suivante. Pour $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on notera $f \approx g$ s'il existe une application $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(n) = 1$ et $f(n) = g(n)\rho(n)$ pour tout $n \geq 0$.

Lemme 2.4 *Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ deux applications à valeurs positives.*

1. *On suppose $f \approx g$: on a alors $f \sim g$. La réciproque est fausse.*
2. *Il existe des fonctions croissantes $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telles que $f \approx g$ mais que l'on ait ni $f \trianglelefteq g$, ni $g \trianglelefteq f$.*

Preuve. Démontrons le n^{o}1. Soit $\rho > 1$. Comme $f \approx g$ il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$: $f(n) \leq \rho g(n)$, d'où $f \trianglelefteq \rho g$. Comme ρ est arbitraire, on a $f \preceq g$ et par symétrie $f \sim g$. La réciproque est fausse, comme on le voit en posant par exemple $f(n) = n$ et $g(n) = 2n$.

Passons à la démonstration du n^{o}2. On définit tout d'abord une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ par récurrence de la manière suivante :

$$n_1 = 1 \quad ; \quad n_{k+1} = n_k + n_k^2 \;\text{ si }\; k \geq 1.$$

Pour tout $k \geq 1$, l'ensemble $[n_k, n_{k+1}[$ est un intervalle de longueur $n_{k+1} - n_k = n_k^2$ dans $\mathbb{N}$. Considérons ensuite deux suites réelles positives croissantes $(f_k)_{k\geq 1}$ et $(g_k)_{k\geq 1}$ telles que, pour tout $k \geq 1$, l'on ait :

$$g_{2k-1} < f_{2k-1} < f_{2k} < g_{2k}.$$

Autrement dit, on impose la condition $g_m < f_m$ si m est impair et $f_m < g_m$ si m est pair. On définit alors $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ par :

$$(\forall n \in [n_k, n_{k+1}[, \quad : \quad f(n) = f_k \quad \text{et} \quad g(n) = g_k.$$

Démontrons à présent que f et g sont incomparables pour la relation $\trianglelefteq$. Supposons $f \trianglelefteq g$: il existe $N, C > 0$ tels que pour tout $n \geq N$, $f(n) \leq g(Cn)$. Pour k suffisamment grand, on a $n_k \geq N$; en particulier on a alors $f_k = f(n_k) \leq g(Cn_k)$. Par ailleurs, pour k assez grand, on a aussi $Cn_k - n_k = (C-1)n_k < n_k^2$; dans ce cas, on a $Cn_k \in [n_k, n_{k+1}[$ et, par suite, $g(Cn_k) = g_k$. On a donc, pour tout k suffisamment grand, $f_k \leq g_k$, ce qui est une contradiction lorsque k est impair. On n'a donc pas $f \trianglelefteq g$. De même, on démontrerait que l'on n'a pas $g \trianglelefteq f$. Enfin, en choisissant les suites $(f_k)_{k\geq 1}$ et $(g_k)_{k\geq 1}$ de sorte que $\lim\limits_{k\to\infty} f_k/g_k = 1$, on a aussi $f \approx g$.

2.1.1.1 Opérations sur les croissances

Lemme 2.5 *Soient $f, g, f', g' : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ des fonctions croissantes et positives. On suppose $f \preceq f'$ et $g \preceq g'$.*

1. *On a $f + g \preceq f' + g'$ et $fg \preceq f'g'$. En particulier si $f \sim f'$ et $g \sim g'$, alors $f + g \sim f' + g'$ et $fg \sim f'g'$.*
2. *On a $\sup(f, g) \preceq \sup(f', g')$ et $\inf(f, g) \preceq \inf(f', g')$. En particulier si $f \sim f'$ et $g \sim g'$, alors $\sup(f, g) \sim \sup(f', g')$ et $\inf(f, g) \sim \inf(f', g')$.*

Preuve. Par transitivité, on peut supposer $g = g'$. Pour tout $\rho > 1$, il existe $C, N > 0$ tels que $f(n) \leq \rho f'(Cn)$ lorsque $n \geq N$. En utilisant la croissance et la positivité de g, il vient :

$$f(n) + g(n) \leq \rho f(Cn) + g(n) \leq \rho f(Cn) + \rho g(Cn),$$

d'où $f + g \trianglelefteq \rho(f' + g)$. Il vient $f + g \preceq f' + g$. Similairement on voit que $fg \preceq f'g'$.

Montrons maintenant que $\inf(f, g) \preceq \inf(f', g)$. Soit $\rho > 1$. Pour n assez grand, on a $\inf(f, g)(n) \leq f(n) \leq \rho f'(Cn)$ par hypothèse et $\inf(f, g)(n) \leq g(n) \leq \rho g(Cn)$ par croissance et positivité de g. Il vient $\inf(f, g)(n) \leq \rho \inf(f', g)(Cn)$ pour n assez grand, autrement dit : $\inf(f, g) \trianglelefteq \rho \inf(f', g)$, d'où $\inf(f, g) \preceq \inf(f', g)$. De même on montre que $\sup(f, g) \preceq \sup(f', g)$.

D'après le lemme précédent, les classes d'équivalence de fonctions croissantes $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ peut être muni de lois de composition bien définies et compatibles avec la relation d'ordre naturelle $\preceq$ de la manière suivante. Pour $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissantes, on pose :

$$\Gamma(f) + \Gamma(g) = \Gamma(f + g) \quad \text{et} \quad \Gamma(f)\Gamma(g) = \Gamma(fg).$$

De plus, cet ensemble ordonné est un treillis ; autrement dit, pour toutes fonctions croissantes positives $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, l'ensemble $\{\Gamma(f), \Gamma(g)\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. Celles-ci sont données par :

$$\sup\big(\Gamma(f), \Gamma(g)\big) = \Gamma\big(\sup(f, g)\big) \quad \text{et} \quad \inf\big(\Gamma(f), \Gamma(g)\big) = \Gamma\big(\inf(f, g)\big).$$

Lemme 2.6 *Soient* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *deux fonctions croissantes positives.*

1. *Si* $f + g \preceq f$ *alors* $\sup(f, g) \sim f$.
2. *Si* $f \sim 2f$ *et* $g \sim 2g$, *alors* $\sup(f, g) \sim f + g$.

Preuve. Dans le premier cas, on a $f \preceq \sup(f, g) \preceq f+g \preceq f$, d'où le résultat. Dans le deuxième cas, on a $\sup(f, g) \preceq f + g \preceq 2\sup(f, g) = \sup(2f, 2g) \sim \sup(f, g)$, prouvant le lemme.

Définition 2.7 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs réelles. La *dérivée discrète de* f est la fonction $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = f(0)$ et $g(n) = f(n) - f(n-1)$ si $n > 0$. On la notera $\Delta(f)$.

Lemme 2.8 *Soit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction à valeurs positives.*

1. *On a* $f \sim 2f$ *si et seulement si, pour tout* $\alpha > 0$: $f \sim \alpha f$.
2. *Il existe des fonctions* f *telles que* $f \prec 2f$.
3. *Supposons* f *croissante, non stationnaire. Si la dérivée discrète* $\Delta(f)$ *est croissante au voisinage de* $+\infty$, *alors* $f \sim 2f$.
4. *Soit* $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une application dérivable. Soit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la restriction de* φ *à* $\mathbb{N}$. *Si la fonction dérivée* F' *est croissante, alors la dérivée discrète* $\Delta(f)$ *est croissante aussi.*

Preuve. Voyons le n^{o}1. On suppose $f \sim 2f$. La relation $\sim$ étant compatible avec le produit des fonctions croissantes positives, il est facile de voir que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $f \sim 2^k f$. Soit $\alpha > 0$ un nombre réel. Il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $2^k \leq \alpha \leq 2^{k'}$. Mais alors $f \sim 2^k f \preceq \alpha f \preceq 2^{k'} f \sim f$, d'où $f \sim \alpha f$. L'implication réciproque est triviale. Pour le n^{o}2, on vérifie facilement que si $f(n) = C$ est constante, ou si $f(n) = \ln(n)$ pour $n \geq 1$, on a $f \prec 2f$.

Démontrons le n^{o}3. On pose $\lambda = \Delta(f)$, en particulier $\lambda(n) = f(n) - f(n-1)$ pour tout $n \geq 1$. Posons ensuite :

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \in \{0, \ldots, N_0\} \\ f(n) - f(N_0) & \text{si} \quad n > N_0. \end{cases}$$

Comme f est croissante, non-stationnaire et que $\Delta(f)$ est croissante au voisinage de $+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$. Il vient $f \approx g$, d'où aussi $f \sim g$. Ainsi, pour voir que $f \sim 2f$, on est ramené à voir que $g \sim 2g$. Posons $\mu = \Delta(g)$. On a :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \in \{0, \ldots, N_0\} \\ \lambda(n) & \text{si} \quad n > N_0. \end{cases}$$

On en déduit que μ est croissante : par suite, on a $\mu(k+n) \geq \mu(k)$ pour tous $n, k \geq 0$. Il vient, pour tout $n \geq 1$:

$$g(2n) - g(n) = \mu(2n) + \ldots + \mu(n+1) \geq \mu(n) + \ldots + \mu(1) = g(n) - g(0) = g(n),$$

d'où $2g(n) \leq g(2n)$. On a donc $2g \trianglelefteq g$ et a fortiori $2g \preceq g$. Enfin, l'inégalité $g \preceq 2g$ est toujours vérifiée, et l'on a bien $g \sim 2g$.

Pour le n^{o}4, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires : pour tout $n \geq 1$, il existe $\theta_n \in]n-1, n[$ tel que $\Delta(f)(n) = F(n) - F(n-1) = F'(\theta_n)$. Comme la suite $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ et la fonction F' sont croissantes, la dérivée discrète $\Delta(f)$ est aussi croissante.

2.1.2 Dimension et niveau d'une fonction

2.1.2.1 Fonctions de jauge

On va introduire à présent les familles de fonctions de jauge définies par Pétrogradsky [33]. En comparant une fonction f à ces fonctions de jauge, on obtient ainsi des invariants de croissance, le niveau et la dimension de f. Définissons par récurrence :

$$\ln^{(1)} n = \ln n \quad \text{et} \quad \ln^{(q+1)} n = \ln(\ln^{(q)} n), \; q = 1, 2, \ldots.$$

On pose alors, pour tous $\alpha \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand :

$$\Phi_\alpha^1(n) = \alpha \; ; \; \Phi_\alpha^2(n) = n^\alpha \; ; \; \Phi_\alpha^3(n) = \exp(n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}) \; ; \; \Phi_\alpha^q(n) = \exp\left(\frac{n}{(\ln^{(q-3)} n)^{1/\alpha}}\right), \; q = 4, 5, \ldots.$$

Notons que, pour $q \geq 4$, les fonctions $\Phi_\alpha^q(n)$ ne sont pas définies pour n au voisinage de 0.

Lemme 2.9 *Pour tous $q \geq 2$ et $\alpha > 0$, on a $\Phi_\alpha^q \sim 2\Phi_\alpha^q$.*

Preuve. En se servant du lemme 2.8, n^{o}4, c'est très facile.

Lemme 2.10 *Pour $q, r \geq 1$ et $\alpha, \beta > 0$ on a les inégalités strictes :*

1. $\Phi_\alpha^q(n) \prec \Phi_\beta^q(n)$ *si* $\alpha < \beta$ *;*
2. $\Phi_\alpha^q(n) \prec \Phi_\beta^r(n)$ *si* $q < r$ *;*
3. $\Phi_\alpha^q(n) \prec \exp(n)$.

Preuve. C'est le résultat de [33, lemme 1].

2.1.2.2 Dimensions et niveaux

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive. Pour tout $q \geq 1$ on appelle *dimension de niveau q de f* (resp. *dimension inférieure de niveau q de f*) la quantité suivante :

$$\mathrm{Dim}^q(f) = \inf\{\alpha > 0 \mid f(n) \preceq \Phi^q_\alpha(n)\} \quad \Big(\text{resp. } \underline{\mathrm{Dim}}^q(f) = \sup\{\alpha > 0 \mid f(n) \succeq \Phi^q_\alpha(n)\}\Big).$$

Ainsi $\mathrm{Dim}^q(f), \underline{\mathrm{Dim}}^q(f) \in [0, +\infty]$. Par construction, il s'agit d'un invariant de la croissance $\Gamma(f)$. Grâce au lemme 2.10, on voit que s'il existe $q \geq 1$ tel que $\mathrm{Dim}^q(f) \in]0, +\infty[$, alors $\mathrm{Dim}^r(f) = 0$ pour $r > q$ et $\mathrm{Dim}^r(f) = +\infty$ pour $r < q$. L'entier q est alors défini de manière unique et appelé *niveau de la fonction f*, noté $\mathrm{lev}(f)$. S'il existe $q \geq 1$ tel que $\mathrm{Dim}^q(f) = +\infty$ et $\mathrm{Dim}^{q+1}(f) = 0$, on dira que f est *située entre les niveaux q et $q+1$*.

2.1.2.3 Dimensions fortes

Il est techniquement agréable d'introduire la notion de dimension forte d'une fonction, légèrement différente en général de la notion introduite précédemment. On appelle *dimension forte de niveau q de f* (resp. *dimension inférieure forte de niveau q de f*) la quantité suivante :

$$\mathrm{stdim}^q(f) = \inf\{\alpha > 0 \mid f(n) \leq \Phi^q_\alpha(n) \text{ pour } n \text{ assez grand}\}$$

$$\Big(\text{resp. } \underline{\mathrm{stdim}}^q(f) = \sup\{\alpha > 0 \mid f(n) \geq \Phi^q_\alpha(n) \text{ pour } n \text{ assez grand}\}\Big).$$

Lemme 2.11 *On considère un entier $q \geq 1$.*

1. *On suppose $q \geq 2$. Soient $c, \beta, \varepsilon > 0$ et $\rho > 1$ des réels. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que, pour tout $n \geq N_0$: $\rho\Phi^q_\beta(cn) \leq \Phi^q_{\beta+\varepsilon}(n)$.*
2. *Soit $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction. On a : $\mathrm{Dim}^q(f) = \mathrm{stdim}^q(f)$ et $\underline{\mathrm{Dim}}^q(f) \geq \underline{\mathrm{stdim}}^q(f)$. Si de plus f est croissante, alors $\underline{\mathrm{Dim}}^q(f) = \underline{\mathrm{stdim}}^q(f)$.*

Preuve. Il s'agit essentiellement du résultat [33, lemme 2]. On va toutefois en reprendre la démonstration. Démontrons le n^{o}1 par exemple pour $q = 3$; les autres cas se traitent de manière analogue. Notons $b = \frac{\beta}{\beta+1}$ et $a = \frac{\beta+\varepsilon}{\beta+\varepsilon+1}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a l'équivalence :

$$\rho \exp((cn)^b) \leq \exp(n^a) \iff \exp(c^b n^b - n^a) \leq \frac{1}{\rho} \tag{2.1}$$

Comme $0 < b < a$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} (c^b n^b - n^a) = -\infty$; l'inégalité de droite dans (2.1) est donc vérifiée si n est suffisamment grand.

Démontrons le n^{o}2. Si $f(n) \leq \Phi^q_\alpha(n)$ pour n assez grand, on a aussi $f \preceq \Phi^q_\alpha$. L'inégalité $\mathrm{Dim}^q(f) \leq \mathrm{stdim}^q(f)$ est alors claire. De même, il est facile de montrer que $\underline{\mathrm{stdim}}^q(f) \leq \underline{\mathrm{Dim}}^q(f)$. Il reste à établir les inégalités inverses. On traite séparément les cas $q = 1$ et $q \geq 2$.

Commençons par le cas où $q \geq 2$. Posons $\alpha = \mathrm{Dim}^q(f)$. Soient $\rho > 1$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $C, N \in \mathbb{N}^\star$ tels que $f(n) \leq \rho\Phi^q_{\alpha+\varepsilon}(Cn)$, pour $n \geq N$. D'après le n^{o}1, il existe un entier $N' \geq N$ tel que $\rho\Phi^q_{\alpha+\varepsilon}(Cn) \leq \Phi^q_{\alpha+2\varepsilon}(n)$ pour tout $n \geq N'$. Il vient $f(n) \leq \Phi^q_{\alpha+2\varepsilon}(n)$ pour n assez grand, d'où $\mathrm{stdim}^q(f) \leq \alpha+2\varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on en déduit l'inégalité $\mathrm{stdim}^q(f) \leq \alpha = \mathrm{Dim}^q(f)$.

Supposons à présent f croissante. On pose maintenant $\alpha = \underline{\mathrm{Dim}}^q(f)$. Soit $\rho > 1$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $C, N_1 \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\Phi^q_{\alpha-\varepsilon}(n) \leq \rho f(Cn)$ pour $n \geq N_1$. Par ailleurs, il existe $N_2 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\Phi^q_{\alpha-\varepsilon}(n) \geq \rho\Phi^q_{\alpha-2\varepsilon}((C+1)n)$ pour $n \geq N_2$. Posons $N = \max\{CN_1, CN_2, C^2\}$. Pour tout $n \geq N$, on peut écrire $n = Cm + r$, avec $0 \leq r < C$. Comme $n \geq N \geq C^2$, on en déduit que $m \geq C$; en particulier, $(C+1)m \geq Cm + C \geq Cm + r = n$. De même, $m \geq N_1$. On en déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f(n) & \geq & f(Cm) \quad \text{(par croissance de } f\text{)} \\ & \geq & \dfrac{1}{\rho}\Phi^q_{\alpha-\varepsilon}(m) \quad \text{(parce que } m \geq N_1\text{)} \\ & \geq & \Phi^q_{\alpha-2\varepsilon}\big((C+1)m\big) \quad \text{(d'après le n}^o1\text{)} \\ & \geq & \Phi^q_{\alpha-2\varepsilon}(n) \quad \text{(par croissance de } \Phi^q_{\alpha-2\varepsilon}\text{).} \end{array}$$

On a ainsi montré que $f(n) \geq \Phi^q_{\alpha-2\varepsilon}(n)$ pour n assez grand. Il vient $\underline{\mathrm{stdim}}^q(f) \geq \alpha - 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, puis $\underline{\mathrm{stdim}}^q(f) \geq \alpha$ par passage /'a la limite quand ε tend vers 0.

Traitons à présent le cas où $q = 1$. On note encore $\alpha = \mathrm{Dim}^1(f)$. Pour tous $\rho > 1$ et $\varepsilon > 0$, il existe $C, N > 0$ tel que $f(n) \leq \rho\Phi^1_{\alpha+\varepsilon}(Cn) = \rho(\alpha+\varepsilon)$ si $n \geq N$. Il vient $\mathrm{stdim}^1(f) \leq \rho(\alpha+\varepsilon)$, d'où $\mathrm{stdim}^1(f) \leq \alpha$ par passage à la limite quand ρ tend vers 1 et ε tend vers 0.

Supposons maintenant f croissante ; on pose $\alpha = \underline{\mathrm{Dim}}^1(f)$. On a, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $\Phi_{\alpha-\varepsilon} \preceq f$. Pour tout $\rho > 1$, il existe $N > 0$ tel que $\alpha - \varepsilon \leq \rho f(Cn)$ si $n \geq N$. Par croissance de f, on en déduit, pour $n \geq CN$:

$$\frac{\alpha-\varepsilon}{\rho} \leq f(n).$$

L'inégalité $\underline{\mathrm{stdim}}^1(f) \geq \alpha$ s'obtient par passage à la limite quand ρ tend vers 1 et ε tend vers 0.

Remarque 2.12 L'inégalité $\underline{\mathrm{stdim}}^q(f) \leq \underline{\mathrm{Dim}}^q(f)$ est stricte en général. Considérons par exemple $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, définie par $f(n) = n$ si n est pair, et $f(n) = 0$ si n est impair. Il est clair que $\underline{\mathrm{stdim}}^2(f) = 0$, et comme $\Phi^2_1(n) = n \leq f(2n)$, on a $\underline{\mathrm{Dim}}^2(f) \geq 1$ (on voit facilement que $\underline{\mathrm{Dim}}^2(f) = 1$ en fait).

2.1.2.4 Dimension de Gelfand-Kirillov et superdimension

Introduisons, pour une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ les notions de dimension de Gelfand-Kirillov et de superdimension de f. On pose :

$$\mathrm{GKdim}(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln f(n)}{\ln n} \quad ; \quad \underline{\mathrm{GKdim}}(f) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln f(n)}{\ln n} \quad ;$$

$$\overline{\mathrm{Sdim}}(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln f(n)}{\ln n} \quad ; \quad \underline{\mathrm{Sdim}}(f) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln\ln f(n)}{\ln n}.$$

Lemme 2.13 [33, Corollary 2] *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive.*

1. *La dimension forte (resp. dimension inférieure forte) de niveau 1 de f coïncide avec la limite supérieure (resp. limite inférieure) de f :*

$$\mathrm{stdim}^1(f) = \limsup_{n\to\infty} f(n) \quad ; \quad \underline{\mathrm{stdim}}^1(f) = \liminf_{n\to\infty} f(n).$$

2. *Les dimensions fortes de niveau 2 de f coïncident avec les dimensions de Gelfand-Kirillov de f :*

$$\mathrm{stdim}^2(f) = \mathrm{GKdim}(f) \quad ; \quad \underline{\mathrm{stdim}}^2(f) = \underline{\mathrm{GKdim}}(f).$$

3. *Les dimensions fortes de niveau 3 de f coïncident, à une normalisation près, avec les superdimensions de f :*

$$\mathrm{stdim}^3(f) = \frac{\mathrm{Sdim}(f)}{1 - \mathrm{Sdim}(f)} \quad ; \quad \underline{\mathrm{stdim}}^3(f) = \frac{\underline{\mathrm{Sdim}}(f)}{1 - \underline{\mathrm{Sdim}}(f)}.$$

4. *Les dimensions fortes de niveau $q \geq 4$ de f peuvent se calculer comme suit :*

$$\mathrm{stdim}^q(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^{(q-2)} n}{\ln n - \ln\ln f(n)} \quad ; \quad \underline{\mathrm{stdim}}^q(f) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln^{(q-2)} n}{\ln n - \ln\ln f(n)}.$$

Preuve. On écrit les démonstrations pour stdim^q ; le cas de $\underline{\mathrm{stdim}}^q$ peut s'établir de la même manière. Supposons d'abord $q = 1$. Comme $\Phi^1_\alpha \equiv \alpha$, on a :

$$\mathrm{stdim}^1(f) = \inf\{\alpha > 0 \mid f(n) \leq \alpha \text{ pour } n \gg 0\}.$$

Par ailleurs, on a $\limsup_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{f(k)\}$; on vérifie alors immédiatement que $\mathrm{stdim}^1(f) = \limsup_{n\to\infty} f(n)$.

Supposons maintenant $q = 2$. Notons $\alpha = \mathrm{stdim}^2(f)$. Pour tout $\alpha' > \alpha$, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$: $f(n) \leq \Phi^2_{\alpha'}(n) = n^{\alpha'}$. Il vient :

$$(\forall\, n \geq N) \ : \ \frac{\ln f(n)}{\ln n} \leq \alpha',$$

d'où $\mathrm{GKdim}(f) \leq \alpha'$; en faisant tendre α' vers α on obtient $\mathrm{GKdim}(f) \leq \mathrm{stdim}^2(f)$. Démontrons l'inégalité réciproque. On pose $\beta = \mathrm{GKdim}(f)$. Pour tout $\beta' > \beta$, il existe $N \geq 1$ tel que l'on ait :

$$\sup_{n\geq N}\{\frac{\ln f(n)}{\ln n}\} \leq \beta',$$

d'où $f(n) \le n^{\beta'}$ pour tout $n \ge N$. Il vient $\mathrm{stdim}^2(f) \le \beta'$; en faisant tendre β' vers β on trouve bien $\mathrm{stdim}^2(f) \le \mathrm{GKdim}(f)$.

Supposons ensuite $q = 3$. Observons d'abord qu'on a une bijection croissante $\Theta :]0, \infty[\leftrightarrow]0, 1[$ définie par $\Theta(a) = \frac{a}{a+1}$ pour tout $a \in]0, +\infty[$. La bijection réciproque Θ^{-1} est donnée par $\Theta^{-1}(b) = \frac{b}{1-b}$ pour tout $b \in]0, 1[$. On pose maintenant $\alpha = \mathrm{stdim}^3(f)$. Pour tout $\alpha' > \alpha$, il existe $N \ge 1$ tel que pour tout $n \ge N$: $f(n) \le \Phi^3_{\alpha'}(n) = \exp(n^{\alpha'/(\alpha'+1)})$. Il vient :

$$(\forall\, n \ge N) \ : \ \frac{\ln\ln f(n)}{\ln n} \le \frac{\alpha'}{\alpha' + 1},$$

d'où $\mathrm{Sdim}(f) \le \alpha'/(\alpha' + 1)$. En faisant tendre α' vers α, il vient $\mathrm{Sdim}(f) \le \alpha/(\alpha + 1)$. En appliquant Θ^{-1}, on obtient $\frac{\mathrm{Sdim}(f)}{1-\mathrm{Sdim}(f)} \le \mathrm{stdim}^3(f)$. Similairement, on montre que $\mathrm{stdim}^3(f) \le \frac{\mathrm{Sdim}(f)}{1-\mathrm{Sdim}(f)}$.

Supposons enfin $q \ge 4$. Posons à nouveau $\alpha = \mathrm{stdim}^q(f)$. Pour tout $\alpha' > \alpha$, il existe $N \ge 1$ tel que :

$$(\forall\, n \ge N) \ : \ f(n) \le \exp\left(\frac{n}{(\ln^{(q-3)} n)^{1/\alpha'}}\right).$$

Pour tout $n \ge N$, on a donc $\ln\ln f(n) \le \ln\, n - \dfrac{1}{\alpha'} \ln^{(q-2)}\, n$, d'où l'on tire :

$$(\forall\, n \ge N) \ : \ \alpha' \ge \frac{\ln^{(q-2)}(n)}{\ln(n) - \ln\ln f(n)}.$$

On en déduit comme précédemment que $\alpha' \ge \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^{(q-2)} n}{\ln n - \ln\ln f(n)}$, puis que $\mathrm{stdim}^q(f) \ge \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^{(q-2)} n}{\ln n - \ln\ln f(n)}$. L'inégalité réciproque se démontre de manière analogue.

Remarque 2.14 D'après le lemme 2.11, le résultat précédent reste valable en remplaçant stdim^q par Dim^q ; si de plus f est croissante, on peut aussi remplacer $\underline{\mathrm{stdim}}^q$ par $\underline{\mathrm{Dim}}^q$.

On cherche maintenant à savoir comment se comportent les dimensions d'un niveau donné par rapport aux opérations naturelles sur les croissances.

Proposition 2.15 *Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions croissantes, positives. On a :*

1. Pour $q = 1$:

$$\mathrm{Dim}^1(f+g) = \mathrm{Dim}^1(f) + \mathrm{Dim}^1(g) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(f+g) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(f) + \underline{\mathrm{Dim}}^1(g)\ ;$$

$$\mathrm{Dim}^1(fg) = \mathrm{Dim}^1(f)\,\mathrm{Dim}^1(g) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(fg) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(f)\underline{\mathrm{Dim}}^1(g).$$

2. Pour $q = 2$:

$$\mathrm{Dim}^2(f+g) = \sup\{\mathrm{Dim}^2(f), \mathrm{Dim}^2(g)\}\ ;\ \underline{\mathrm{Dim}}^2(f+g) \geq \sup\{\underline{\mathrm{Dim}}^2(f), \underline{\mathrm{Dim}}^2(g)\}\ ;$$

$$\mathrm{Dim}^2(fg) \leq \mathrm{Dim}^2(f) + \mathrm{Dim}^2(g)\ ;\ \underline{\mathrm{Dim}}^2(fg) \geq \underline{\mathrm{Dim}}^2(f) + \underline{\mathrm{Dim}}^2(g).$$

3. Pour $q \geq 3$:

$$\mathrm{Dim}^q(f+g) = \sup\{\mathrm{Dim}^q(f), \mathrm{Dim}^q(g)\}\ ;\ \underline{\mathrm{Dim}}^q(f+g) \geq \sup\{\underline{\mathrm{Dim}}^q(f), \underline{\mathrm{Dim}}^q(g)\}\ ;$$

$$\mathrm{Dim}^q(fg) \leq \sup\{\mathrm{Dim}^q(f), \mathrm{Dim}^q(g)\}\ ;\ \underline{\mathrm{Dim}}^q(fg) \geq \sup\{\underline{\mathrm{Dim}}^q(f), \underline{\mathrm{Dim}}^q(g)\}.$$

Preuve. Pour le n^{o}1, on observe que pour une fonction croissante f, la limite de f en $+\infty$ existe. D'après le lemme 2.13, on a dans ce cas $\mathrm{Dim}^1(f) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(f) = \lim_{n\to\infty} f(n)$. Dès lors, les identités annoncée sont évidentes.

Pour le n^{o}2, notons $\alpha = \mathrm{Dim}^2(f)$ et $\beta = \mathrm{Dim}^2(g)$. On peut supposer $\alpha \geq \beta$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a, d'après le lemme 2.10 :

$$f + g \preceq \Phi^2_{\alpha+\varepsilon} + \phi^2_{\beta+\varepsilon} \preceq 2\Phi^2_{\alpha+\varepsilon} \sim \Phi^2_{\alpha+\varepsilon},$$

d'où $\mathrm{Dim}^2(f+g) \leq \alpha + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\mathrm{Dim}^2(f+g) \leq \alpha$. Comme par ailleurs $f \leq f + g$, on a aussi $\alpha = \mathrm{Dim}^2(f) \leq \mathrm{Dim}^2(f+g)$. Les autres inégalités et le cas $q \geq 3$ se traitent de même à l'aide du lemme 2.10.

2.1.3 Partitions généralisées

Le contenu de cette partie reprend essentiellement les parties 1 et 2 de l'article de Pétrogradsky [33]. La notion de partition généralisée nous permettra d'introduire un opérateur Π agissant sur les suites d'entiers positifs (partie 2.1.3.3). On verra en 2.62 que cet opérateur est exactement celui qui permet de passer de la croissance d'une algèbre de Lie à son algèbre enveloppante.

2.1.3.1 Lemme préparatoire

Lemme 2.16 [33, lemmes 6,7] *Soient $x, y \in \mathbb{N}$ deux entiers.*

1. *On a les majorations :* $\binom{x+y-1}{y} \leq \begin{cases} x^y & si \quad x \geq 1,\ y \geq 0\ ; \\ y^x & si \quad x \geq 1,\ y \geq 2. \end{cases}$
2. *Les fonctions* $x \mapsto \binom{x+y-1}{y}$ *et* $y \mapsto \binom{x+y-1}{y}$ *sont croissantes.*
3. *Pour y suffisamment grand, on a* $\binom{2y-1}{y} \geq \exp(y)$.

Preuve. On écrit d'abord :

$$\binom{x+y-1}{y} = \frac{x+y-1}{y} \cdot \frac{x+y-2}{y-1} \cdots \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x}{1}. \tag{2.2}$$

Lorsque $x, z \geq 1$ on voit que $\frac{x+z-1}{z} \leq x$; en majorant chaque terme dans (2.2) par x, on trouve bien $\binom{x+y-1}{y} \leq x^y$. Si $y \geq 2$, on utilise l'inégalité précédente avec $X = y-1$ et $Y = x$: l'inégalité $\binom{X+Y-1}{Y} \leq X^Y$ devient alors

$$\binom{y-1+x}{x} \leq (y-1)^x \leq y^x.$$

Pour le n^{o}2, on voit sur l'expression (2.2) que l'expression $\binom{x+y-1}{y}$ est croissante par rapport à la variable x ; on peut voir de même qu'elle est croissante par rapport à y.

Pour le n^{o}3, on utilise l'équivalent de Stirling :

$$n! \approx (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}. \tag{2.3}$$

On a, au voisinage de l'infini :

$$\binom{2y-1}{y} = \frac{1}{2}\binom{2y}{y} \approx \frac{1}{2}\frac{(2y)^{2y}}{e^{2y}}\sqrt{4\pi y}\frac{e^y}{y^y}\frac{e^y}{y^y}\frac{1}{2\pi y} \approx \frac{1}{2}\frac{2^{2y}}{\sqrt{\pi y}}.$$

Comme $\frac{4}{e} > 1$, on a $\lim_{y \to +\infty} \frac{4^y}{2\sqrt{\pi y}} e^{-y} = +\infty$. On en déduit alors bien l'inégalité annoncée.

2.1.3.2 Partitions généralisées

Définition 2.17 Soit $a = \{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'entiers positifs. La *suite de partitions généralisées associée à la suite* a est la suite $c = \pi(a)$ définie par la formule :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^\star) \ : \ c_n = \sum_{\substack{y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{N} \\ y_1+\ldots+ny_n=n}} h_n^a(y_1,\ldots,y_n), \tag{2.4}$$

où l'on a posé :

$$h_n^a(y_1,\ldots,y_n) = \prod_{j=1}^{n} \binom{y_j + a_j - 1}{y_j}. \tag{2.5}$$

On écrira souvent h_n au lieu de h_n^a.

Lemme 2.18 *On fixe une suite a d'entiers positifs. On définit les fonctions $h_n = h_n^a$ comme ci-dessus.*

1. *Si $y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n = n$, alors l'entier $h_n(y_1,\ldots,y_n)$ est le nombre de solutions de l'équation :*
$$1.(x_{1,1} + \ldots + x_{1,a_1}) + \ldots + n.(x_{n,1} + \ldots + x_{n,a_n}) = n, \tag{2.6}$$
dont les inconnues $x_{i,j} \in \mathbb{N}$ satisfont à la condition supplémentaire :
$$(\forall\ j \in \{1,\ldots,n\} \ : \ x_{j,1} + \ldots + x_{j,a_j} = y_j.$$

2. *Pour tout $n \geq 1$, l'entier c_n défini par (2.4) est le nombre total de solutions de l'équation (2.6) à inconnues dans $\mathbb{N}$.*

Preuve. Le n^{o}2 résulte immédiatement du n^{o}1, que l'on se propose d'établir. Or pour N et Y donnés, on sait que l'équation $X_1 + \ldots + X_N = Y$, d'inconnues $X_1,\ldots,X_N \in \mathbb{N}$, admet exactement $\binom{Y+N-1}{Y}$ solutions. Le système

$$\begin{cases} x_{1,1} + \ldots + x_{1,a_1} &= & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n,1} + \ldots + x_{n,a_n} &= & y_n \end{cases}$$

admet donc bien $h_n(y_1,\ldots,y_n) = \binom{y_1+a_1-1}{y_1}\cdots\binom{y_n+a_n-1}{y_n}$ solutions.

Remarque 2.19

1. Le terme de *partition généralisée* est justifié par le fait suivant. Si l'on considère la suite constante définie par $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$, alors c_n est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n = n$, autrement dit $c_n = p(n)$ est le nombre de partitions de l'entier n.
2. Les suites a et c sont liées par la relation suivante [5] :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-t^n)^{a_n}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Le résultat classique suivant, cité par Pétrogradsky en [33], nous sera utile dans le calcul des dimensions de niveau ≥ 3 des suites de partitions généralisées associées aux fonctions de jauge Φ_α^q.

Proposition 2.20 *On note $p(n)$ le nombre de partitions d'un entier $n \geq 1$. On a, au voisinage de l'infini :*

$$p(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

En particulier, $p(n) \sim \Phi_1^3(n)$ et $p(1) + p(2) + \ldots + p(n) \sim \Phi_1^3(n)$ aussi.

2.1.3.3 L'opérateur Π

Définition 2.21 Soit α une suite croissante d'entiers, $a = \Delta(\alpha)$ sa dérivée discrète. On définit la suite $A = \Pi(\alpha)$ comme suit : si $c = \pi(a)$ est la suite de partitions généralisées associée à la suite positive a, on pose pour tout $n \geq 1$: $A_n = c_1 + \ldots + c_n$.

On voit, grâce au lemme 2.18, que A_n est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'inéquation :

$$1.(x_{1,1} + \ldots + x_{1,a_1}) + 2.(x_{2,1} + \ldots + x_{2,a_2}) + \ldots + n.(x_{n,1} + \ldots + x_{n,a_n}) \leq n. \quad (2.7)$$

On peut indexer différemment les inconnues $x_{i,j} \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$(X_1, \ldots, X_{\alpha_n}) = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,a_1}; \ldots; x_{n,1}, \ldots, x_{n,a_n}).$$

On notera par commodité :

$$\begin{aligned} \underline{X} &= (X_1, \ldots, X_{\alpha_n}) \ ; \\ \underline{x} &= (x_{1,1}, \ldots, x_{1,a_1}; \ldots; x_{n,1}, \ldots, x_{n,a_n}). \end{aligned}$$

Pour tout $k \geq 1$, il existe un unique couple (i,j) tels que $X_k = x_{i,j}$. On vérifie que

$$i = i(k) = \max\{s \in \mathbb{N}^\star \mid a_1 + \ldots + a_s \leq k\}.$$

On observe alors que $\underline{x}$ est solution de (2.7) si et seulement si $\underline{X}$ est solution de :

$$\sum_{k=1}^{\alpha_n} i(k) X_k \leq n. \tag{2.8}$$

Lemme 2.22 *Soient α, β deux suites d'entiers positifs et $A = \Pi(\alpha)$, $B = \Pi(\beta)$ comme ci-dessus. S'il existe $N \geq 1$ tel que $\alpha_n \leq \beta_n$ pour tout $n \geq N$, alors $A_n \preceq B_n$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $A_n \trianglelefteq B_n$. Notons a_n, b_n les dérivées discrètes de α_n, β_n. Pour tout $k \geq 1$, on note :

$$\begin{aligned} i(k) &= \max\{s \in \mathbb{N}^\star \mid a_1 + \ldots + a_s \leq k\} = \max\{s \in \mathbb{N}^\star \mid \alpha_s \leq k\}, \\ j(k) &= \max\{s \in \mathbb{N}^\star \mid b_1 + \ldots + b_s \leq k\} = \max\{s \in \mathbb{N}^\star \mid \beta_s \leq k\}. \end{aligned}$$

Comme $\alpha_s \leq \beta_s$ lorsque $s \geq N$, on remarquera que $j(k) \leq i(k)$ lorsque $k \geq \alpha_N$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'entier A_n est le nombre de solutions $\underline{X} \in \mathbb{N}^{\alpha_n}$ de l'inéquation :

$$\sum_{k=1}^{\alpha_n} i(k) X_k \leq n. \tag{2.9}$$

De même, B_m est le nombre de solutions $\underline{Y} \in \mathbb{N}^{\beta_m}$ de l'inéquation :

$$\sum_{k=1}^{\beta_m} j(k) Y_k \leq m. \tag{2.10}$$

Lorsque $n \geq N$, on va construire une injection de l'ensemble des solutions de (2.9) dans l'ensemble des solutions de (2.10) avec $m = cn$, la constante $c > 0$ étant à définir.

Soit $c > 0$ (on donnera une valeur explicite pour c plus loin). Soit $n \geq N$, de sorte que $\alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_{cn}$. Soit $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_{\alpha_n}) \in \mathbb{N}^{\alpha_n}$ une solution de (2.8). En particulier on a $X_k \leq n$ pour tout $k \in \{1, \ldots, \alpha_n\}$. On définit $\underline{Y} = \iota(\underline{X}) \in \mathbb{N}^{\beta_{cn}}$ par :

$$(Y_1, \ldots, Y_{\beta_{cn}}) = (X_1, \ldots, X_{\alpha_n}, 0, \ldots, 0).$$

Par hypothèse on a $\sum_{k=1}^{\alpha_n} i(k)X_k \leq n$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\beta_{cn}} j(k)Y_k &= \sum_{k=1}^{\alpha_n} j(k)X_k = \sum_{k=1}^{\alpha_n} \big(j(k)-i(k)\big)X_k + \sum_{k=1}^{\alpha_n} i(k)X_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{\alpha_n} (j(k)-i(k))X_k + n \\
&\leq \sum_{k=1}^{\alpha_N} (j(k)-i(k))X_k + n \quad (\text{car } j(k)-i(k) \leq 0 \text{ pour } k > \alpha_N) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\alpha_N} |j(k)-i(k)|n + n = \left(1 + \sum_{k=1}^{\alpha_N} |j(k)-i(k)|\right) n = cn,
\end{aligned}$$

avec $c = 1 + \sum_{k=1}^{\alpha_N} |j(k)-i(k)|$. Donc $\underline{Y}$ vérifie $\sum_{k=1}^{\beta_{cn}} j(k)Y_k \leq cn$. L'application ι, qui est clairement injective, envoie bien toute solution de (2.9) sur une solution de (2.10) avec $m = cn$: le lemme est démontré.

Considérons une suite croissante d'entiers positifs $a = \{a_n\}_{n\geq 1}$. On cherche à comparer les dimensions de niveau q de $\Pi(a)$ en fonction de celles de a (corollaire 2.25). On commence cette étude par un cas particulier de suites équivaentes aux fonctions de jauge de Pétrogradsky. Fixons un entier $q \geq 2$ et un réel $\alpha > 0$. Si $q = 2$, on suppose aussi $\alpha \geq 1$. Afin de travailler avec des fonctions à valeurs entières, on remplace les fonctions de jauge Φ_α^q par des fonctions Ψ_α^q définies comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Psi_\alpha^q(n) = [\Phi_\alpha^q(n)],$$

les crochets désignant la partie entière. Il est clair que $\Psi_\alpha^q \approx \Phi_\alpha^q$ pour tout $q \geq 2$ et tout $\alpha \in]0, +\infty[$, d'où aussi $\Psi_\alpha^q \sim \Phi_\alpha^q$.

On cherche à étudier la croissance de $\Pi(\Psi_\alpha^q)$. On rappelle que, pour une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ d'entiers positifs, on note :

$$h_n(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{j=1}^{n} \binom{y_j + b_j - 1}{y_j}. \tag{2.11}$$

Lemme 2.23 *Fixons un entier $n \geq 1$ et posons $y_k = [\frac{n}{k}]$, où les crochets désignent la partie entière. On pose $H_n(k) = h_n(0, \ldots, 0, y_k, 0, \ldots, 0) = \binom{[n/k] + b_k - 1}{[n/k]}$.*

1. *Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $H_n(k) \leq (b_k)^{[n/k]}$.*

2. Pour $k \in \{1, \ldots, [n/2]\}$, on a $H_n(k) \leq n^{b_k}$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme 2.16.

Proposition 2.24 *Soient $q \geq 2$ un entier et $\alpha > 0$ un réel. Si $q = 2$, on suppose aussi $\alpha \geq 1$. On a alors :*

$$\mathrm{Dim}^{q+1}\, \Pi(\Psi^q_\alpha) = \underline{\mathrm{Dim}}^{q+1}\, \Pi(\Psi^q_\alpha) = \alpha.$$

Preuve. C'est un cas particulier des résultats de Pétrogradsky [33, Propositions 1,2,3]. Il suffit d'établir les inégalités suivantes :

$$\alpha \leq \underline{\mathrm{Dim}}^{q+1}\, \Pi(\Psi^q_\alpha) \leq \mathrm{Dim}^{q+1}\, \Pi(\Psi^q_\alpha) \leq \alpha.$$

L'inégalité centrale est toujours vérifiée, il reste à établir les deux autres. On étudie les cas $q = 2$, $q = 3$ et $q \geq 4$ séparément. On pose $\beta_n = \Psi^q_\alpha(n)$ et $b = \Delta(\beta)$ la dérivée discrète de β. Montrons tout d'abord que $\Delta(\Psi^q_\alpha) \approx \Delta(\Phi^q_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in [0, 1]$ tel que $\Psi^q_\alpha(n) = [\Phi^q_\alpha(n)] = \Phi^q_\alpha(n) - u_n$, d'où $\Delta(\Psi^q_\alpha)(n) = \Delta(\Phi^q_\alpha)(n) - u_n + u_{n-1}$. Comme $\Delta(\Phi^q_\alpha)(n)$ tend vers l'infini et $|u_n - u_{n_1}| \leq 2$, on en déduit $\Delta(\Psi^q_\alpha) \approx \Delta(\Phi^q_\alpha)$. En particulier, on voit que $\Delta(\Psi^q_\alpha)$ est croissante (au voisinage de l'infini), de sorte que $\underline{\mathrm{Dim}}^q\, \Delta(\Psi^q_\alpha) = \underline{\mathrm{stdim}}^q\, \Delta(\Psi^q_\alpha)$. On e, déduit en outre :

$$\mathrm{Dim}^q\, \Delta(\Psi^q_\alpha) = \underline{\mathrm{Dim}}^q\, \Delta(\Psi^q_\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1 & \text{si } q = 2, \\ \alpha & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, on pose maintenant $B = \Pi(\beta)$, de sorte que l'on a :

$$B_n = \sum_{\substack{y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{N} \\ y_1+\ldots+ny_n \leq n}} h_n(y_1, \ldots, y_n), \tag{2.12}$$

la fonction h_n étant définie par (2.11). Avec ces notations, on voit aussi que $b_n \leq \Phi^q_\alpha(n)$ pour tout $n \geq 1$.

Premier cas. On suppose $q = 2$ et $\alpha \geq 1$. On choisit $n \geq 1$ suffisamment grand pour avoir l'inégalité $[n/2] \geq [n^{1/(\alpha+1)}]$. On pose $p = p_n = [n^{1/(\alpha+1)}]$. D'après le lemme 2.16 et en utilisant le fait que $b_k \leq \Phi^2_\alpha(k) = k^\alpha$, on a :

$$\binom{y_k + b_k - 1}{y_k} \leq (b_k)^y_k \leq (k^\alpha)^{y_k}.$$

Par ailleurs, comme $p < [n/2]$, on a $[n/k] \geq 1$ pour $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Comme $y_1+2y_2+\ldots+ny_n = n$, on a aussi $y_k \leq n$ pour tout k ; en appliquant encore le lemme 2.16, on en déduit la majoration :

$$\binom{y_k + b_k - 1}{y_k} \leq (y_k)^b_k \leq n^{b_k}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} h_n(y_1,\ldots,y_n) &= \prod_{k=1}^{n}\binom{y_k+b_k-1}{y_k} = \prod_{k=1}^{p-1}\binom{y_k+b_k-1}{y_k}.\prod_{k=p}^{n}\binom{y_k+b_k-1}{y_k} \\ &\leq \underbrace{n^{b_1}\ldots n^{b_{p-1}}}_{P(n)}.\underbrace{(p^\alpha)^{y_p}\ldots(n^\alpha)^{y_n}}_{Q(n)}. \end{aligned}$$

On a d'une part :

$$P(n) = n^{b_1}\ldots n^{b_{p-1}} = n^{b_1+\ldots+b_{p-1}} = n^{\beta_{p-1}}.$$

Comme $\beta_{p-1} \leq \beta_p \leq \Phi_\alpha^2(p) = p^\alpha$, on a :

$$P(n) \leq n^{p^\alpha} \approx n^{n^{\alpha/(\alpha+1)}} = \exp\left(n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\ln(n)\right) \sim \Phi_\alpha^3(n),$$

d'où $P(n) \preceq \Phi_\alpha^3(n)$.

Enfin, en passant au logarithme dans l'expression :

$$R(n) = (p^\alpha)^{y_p}\ldots(n^\alpha)^{y_n} = \psi(y_p,\ldots,y_n) \tag{2.13}$$

on obtient une fonction linéaire des variables $y_p,\ldots,y_n$. Ces variables appartiennent au simplexe défini par les équations :

$$\begin{cases} y_p \geq 0,\ldots,y_n \geq 0 \\ y_p + (p+1)y_{p+1} + \ldots + ny_n \leq n \end{cases}$$

donc cette application linéaire atteint son maximum en l'un des sommets ; par conséquent il en va de même pour ψ. En notant $F(k) = (k^\alpha)^{n/k}$, on en déduit que $Q(n) \leq \max\{F(p), F(p+1),\ldots,F(n)\}$. En écrivant $F(k) = \exp(\alpha n\frac{\ln(k)}{k})$, on voit que la fonction F décroît sur $[3,+\infty[$. Par suite, lorsque n est suffisamment grand, on a $\max\{F(p), F(p+1),\ldots,F(n)\} = F(p)$. Il vient :

$$\begin{aligned} Q(n) \leq F(p) &= (p^\alpha)^{n/p} = \exp(\alpha n\frac{\ln(p)}{p}) \approx \exp(\alpha n\frac{\frac{1}{\alpha+1}\ln(n)}{n^{1/(\alpha+1)}}) \\ &= \exp(\frac{\alpha}{\alpha+1}\ln(n)n^{\alpha/(\alpha+1)}) \sim \Psi_\alpha^3(n). \end{aligned}$$

Finalement, on a montré que $Q(n) \preceq \Phi_\alpha^3(n)$.

En récapitulant les résultats obtenus sur $P(n)$ et $Q(n)$, on a $h_n(y_1,\ldots,y_n) \preceq \Phi_\alpha^3\Phi_\alpha^3 \sim \Psi_\alpha^3$. Maintenant, en notant $s(n)$ le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'inéquation $y_1+\ldots+ny_n \leq n$, on a d'après le lemme 2.20 $s(n) \sim \Phi_1^3(n)$ et donc :

$$B_n = \sum_{y_1+\ldots+ny_n\leq n} h_n(y_1,\ldots,y_n) \preceq s(n)\Phi_\alpha^3(n) \sim \Phi_1^3\Phi_\alpha^3 \sim \Phi_\alpha^3$$

dès que $\alpha \geq 1$. Ceci prouve que l'on a $\mathrm{Dim}^3\ \Pi(\Psi_\alpha^2) \leq \alpha$.

Démontrons maintenant l'inégalité $\underline{\mathrm{Dim}}^3(B_n) \geq \alpha$. On rappelle tout d'abord que l'on a $\underline{\mathrm{stdim}}^2(b_n) = \alpha - 1$. Si $\alpha = 1$ on a :

$$B_n = \sum_{y_1+\ldots+ny_n \leq n} h_n(y_1, \ldots, y_n) \geq \sum_{y_1+\ldots+ny_n \leq n} 1 = p(n) \sim \Phi_1^3(n),$$

d'où le résultat. On suppose donc $\alpha > 1$. Soit $\alpha' \in]1, \alpha[$: on va montrer que $\underline{\mathrm{Dim}}^3(B_n) \geq \alpha'$, ce qui permettra d'en déduire que $\underline{\mathrm{Dim}}^3(B_n) \geq \alpha$ par passage à la limite quand α' tend vers α.

Comme $\underline{\mathrm{stdim}}^2(b_n) = \alpha - 1$, il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $b_n \geq n^{\alpha'-1} \geq [n^{\alpha'-1}]$. Choisissons alors n assez grand pour avoir en outre $N \leq [n^{1/(\alpha'+1)}] \leq n$; on notera $p = p_n = [n^{1/(\alpha'+1)}]$. Posons alors :

$$h_n = h_n(0, \ldots, 0, y_N, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0), \tag{2.14}$$

où $y_k = [k^{\alpha'-1}]$ pour $k \in \{N, N+1, \ldots, p\}$; on notera $y_k = 0$ sinon. Grâce à (2.12), on voit que $B_n \geq h_n$ lorsque $\sum_{k=1}^{n} k.y_k \leq n$. Or

$$\sum_{k=1}^{n} ky_k = \sum_{k=N}^{p} ky_k \leq \sum_{k=N}^{p} k.k^{\alpha'-1} \leq k.k^{\alpha'} \leq \left(n^{1/(\alpha'+1)}\right)^{\alpha'+1} = n.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
B_n &\geq h_n = \prod_{m=N}^{p} \binom{y_m + b_m - 1}{b_m} \geq \prod_{m=N}^{p} \binom{2[m^{\alpha'-1}] - 1}{[m^{\alpha'-1}]} \quad \text{car } b_k \text{ et } y_k \geq [k^{\alpha'-1}] \\
&\geq \exp([N^{\alpha'-1}] + \ldots + [p^{\alpha'-1}]) \quad \text{d'après le lemme 2.16} \\
&\geq \exp(\sum_{m=N}^{p} m^{\alpha'-1} - p) \\
&= \exp(p^{\alpha'} c_1(p)) = \exp(n^{\alpha'/(\alpha'+1)} c_2(n)) \sim \exp(n^{\alpha'/(\alpha'+1)}) = \Phi_{\alpha'}^3,
\end{aligned}$$

où les réels $c_1(p)$ et $c_2(n)$ tendent vers des constantes non nulles lorsque n (et donc p) tendent vers l'infini. On en déduit alors que $\Psi_{\alpha'}^3(n) \trianglelefteq B_n$, d'où $\Psi_{\alpha'}^3 \preceq B_n$ puis $\underline{\mathrm{Dim}}^3(B_n) \geq \alpha'$. Ceci prouve bien que l'on a $\underline{\mathrm{Dim}}^3\,\Pi(\Psi_\alpha^2) \geq \alpha$.

Deuxième cas. On suppose $q = 3$. On a, pour tout $n \geq 1$: $b_n \leq \Phi_\alpha^3(n) = \exp(n^{\alpha/(\alpha+1)})$. On pose $a = \alpha/(\alpha+1)$ et $\delta = 1/a = 1 + 1/\alpha$. On considère $n \geq 1$ suffisamment grand pour avoir la minoration $[\frac{n}{2}] \geq [(\ln\, n - 2\delta \ln\, \ln\, n)^\delta] \geq 1$. On posera $p = p_n = [(\ln\, n - 2\delta \ln\, \ln\, n)^\delta]$. On a :

$$p^a \leq (\ln\, n - 2\delta \ln\, \ln\, n)^{\delta a} = \ln\, n - 2\delta \ln\, \ln\, n,$$

d'où $\exp(p^a) \leq \dfrac{n}{(\ln n)^{2\delta}}$. Comme $y_1 + \ldots + ny_n = n$, on a $y_k \leq n/k$ pour tout k. D'après le lemme 2.16, n^{o}1, on peut majorer :

$$\begin{aligned}
\binom{y_k + b_k - 1}{y_k} &\leq b_k^{y_k} &&\leq F(k) = \exp(k^a)^{n/k} \text{ pour tout } k\ ;\\
\binom{y_k + b_k - 1}{y_k} &\leq y_k^{b_k} &&\leq G(k) = n^{\exp(k^a)} \text{ si } k \leq [n/2].
\end{aligned}$$

On notera que $k \mapsto F(k)$ est décroissante et $k \mapsto G(k)$ est croissante. Il vient :

$$\begin{aligned}
h_n(y_1, \ldots, y_n) &= \prod_{k=1}^{n} \binom{y_k + b_k - 1}{y_k}\\
&= \prod_{k=1}^{p-1} \binom{y_k + b_k - 1}{y_k} \prod_{k=p}^{n} \binom{y_k + b_k - 1}{y_k}\\
&\leq G(1) \ldots G(p-1).F(p) \ldots F(n)\\
&\leq G(p)^p.F(p) \ldots F(n).
\end{aligned}$$

On a déjà :

$$\begin{aligned}
G(p)^p &= \exp(\ln n. \exp(p^a).p) \leq \exp\big(\frac{\ln n.n(\ln n - 2\delta \ln \ln n)^\delta}{(\ln n)^{2\delta}}\big)\\
&\leq \exp(\frac{n}{(\ln n)^{\delta-1}}) = \exp(\frac{n}{(\ln n)^{1/\alpha}}) = \Phi_\alpha^4.
\end{aligned}$$

De plus,

$$Q(n) = F(p) \ldots F(n) = (\exp\, p^a)^{y_p} \ldots (\exp\, n^a)^{y_n}.$$

L'argument utilisé dans la première partie de la démonstration permet de voir qu'il existe $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$ tel que $Q(n) \leq (\exp\, k^a)^{n/k} = \exp(nk^{-1/(\alpha+1)})$. Cette dernière expression étant décroissante par rapport à la variable k, on peut majorer :

$$\begin{aligned}
Q(n) &\leq (\exp\, p^a)^{n/p} = \exp\big(\frac{n}{(\ln n - 2\delta \ln \ln n)^\delta}.p^a\big)\\
&= \exp\big(\frac{n}{(\ln n - 2\delta \ln \ln n)^{1/\alpha}}\big) \sim \Phi_\alpha^4(n).
\end{aligned}$$

En rassemblant les deux majorations ainsi établies, on a donc $h_n(y_1, \ldots, y_n) \preceq \Phi_\alpha^4 \Phi_\alpha^4 \sim \Phi_\alpha^4$ lorsque $y_1 + \ldots + y_n \leq n$. Comme il existe $s(n) = p(1) + \ldots + p(n)$ solutions entières à cette inéquation et que $s(n) \sim \Phi_1^3$, on a :

$$B_n = \sum_{y_1 + \ldots + ny_n \leq n} h_n(y_1, \ldots, y_n) \preceq s(n)\Phi_\alpha^4 \sim \Phi_\alpha^4,$$

d'où $\mathrm{Dim}^4(B_n) \leq \alpha$.

Démontrons à présent que $\underline{\mathrm{Dim}}^4(B_n) \geq \alpha$. Soit $a = \alpha/(\alpha+1)$. On a $\underline{\mathrm{stdim}}^3(b_n) = \alpha$. On en déduit que, pour tout $\alpha' < \alpha$, il existe un entier $Nc \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq 1$, on ait $b_n \geq \exp(n^{a'}) + 1$, avec $a' = \alpha'/(\alpha'+1)$.

Posons $\delta = 1/a' = 1{+}1/\alpha'$. On pose aussi $p = p_n = [\ln(n^2)^\delta]$, et on choisit $n \geq 1$ suffisamment grand pour avoir les conditions supplémentaires suivantes :

$$n \geq [\ln(n^2)^\delta] \quad \text{et} \quad \frac{n}{p} - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{n}{\ln(n^2)^\delta}.$$

On pose enfin $y_p = [n/p]$. Dans le calcul qui suit, on notera $c_p = b_p - 1$. On a, en se servant de l'équivalent de Stirling (2.3) :

$$\begin{aligned} H_n(p) &= \binom{b_p + y_p - 1}{y_p} \approx \frac{(c_p + y_p)^{c_p + y_p}}{c_p^{c_p} y_p^{y_p}} \sqrt{\frac{c_p + y_p}{2\pi c_p y_p}} \\ &\geq \frac{(1 + y_p/c_p)^{c_p}(1 + c_p/y_p)^{y_p}}{\sqrt{2\pi c_p y_p}} \\ &\geq \frac{(c_p/y_p)^{y_p}}{\sqrt{2\pi} y_p \sqrt{(c_p/y_p)}} \geq \frac{Q_n(p)}{\sqrt{2\pi} n}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $Q_n(p) = \left(\dfrac{b_p - 1}{n}\right)^{n/p - 3/2}$. On définit une suite ρ_n par la condition $[\ln(n^2)^\delta] = \rho_n \ln(n^2)^\delta$; en particulier $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1$. En utilisant les minorations :

$$\frac{n}{p} - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{n}{\ln(n^2)^\delta} \quad \text{et} \quad b_p - 1 \geq \exp(p^{a'}),$$

on voit que :

$$Q_n(p) \geq \left(\frac{\exp(p^{a'})}{2(\ln(n^2)^\delta}\right)^{n(\ln(n^2)^\delta)/2} = \exp\left(\frac{n}{2\ln(n^2)^\delta}(p^{a'} - \ln(n))\right).$$

Or on a :

$$p^{a'} = \rho_n^{a'} \ln(n^2)^{a'\delta} = \rho_n^{a'} \ln(n^2) = 2\rho_n^{a'} \ln(n).$$

Il vient :

$$Q_n(p) \geq \exp\left(\frac{n}{2^{1+\delta}\ln(n)^\delta}(2\rho_n^{a'} - 1)\ln(n))\right).$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \rho_n^{a'} = 1$, il existe $c > 0$ tel que, pour tout n suffisamment grand, on ait $\dfrac{2\rho_n^{a'} - 1}{2^{1+\delta}} \geq c > 0$. Dans ce cas, on a aussi :

$$Q_n(p) \geq \exp\left(\frac{n}{c(\ln(n)^{1/\alpha'})}\right) \sim \Phi^4_{\alpha'}(n).$$

Il vient :

$$B_n = \sum_{y_1+\ldots+ny_n\leq n} h_n(y_1,\ldots,y_n) \geq H_n(p) \succeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\Phi^4_{\alpha'} \sim \Phi^4_{\alpha'},$$

d'où $\underline{\mathrm{Dim}}^4(B_n) \geq \alpha'$. En faisant tendre α' vers α, on en déduit que $\underline{\mathrm{Dim}}^4\,\Pi(\Psi^3_\alpha) \geq \alpha$.

Troisième cas. On suppose $q \geq 4$. On pose par commodité $r = q-3$ et $a = 1/\alpha$. Pour tout $k \geq 1$, on a $b_k \leq \Phi^q_\alpha(k) = \exp\big(\frac{k}{(\ln^{(r)}\,k)^\beta}\big)$. On considère $n \geq 1$ suffisamment grand pour avoir aussi les inégalités $[\frac{n}{2}] \geq [\ln n] \geq 1$. On posera $p = p_n = [\ln n]$. Comme précédemment, pour $y_1+\ldots+ny_n = n$, on a les majorations :

$$\binom{y_k+b_k-1}{y_k} \leq b_k^{y_k} \leq F(k) = \exp\big(\frac{k}{(\ln^{(r)}\,n)^a}\big) \text{ pour tout } k\ ;$$

$$\binom{y_k+b_k-1}{y_k} \leq y_k^{b_k} \leq G(k) = \exp\Big(\ln n.\exp\big(\frac{k}{(\ln^{(r)}\,n)^a}\big)\Big) \text{ si } k \leq [n/2].$$

On notera que $k \mapsto F(k)$ est décroissante et $k \mapsto G(k)$ est croissante. On vérifie que $F(p) = \exp\big(\frac{n}{(\ln^{(r+1)}\,n)^a}\big)$ et que :

$$G(p)^p = \exp\big(\ln n\,\ln n\,n^{(\ln^{(s+1)}\,n)^{-a}}\big) \preceq \exp(\sqrt{n}) = \Phi^3_1.$$

Comme dans les premier et deuxième cas, on en déduit la majoration, pour n assez grand :

$$B_n \preceq \Phi^3_1(n)\Phi^{q+1}_\alpha(n)\Phi^3_1(n) \sim \Phi^{q+1}_\alpha(n),$$

d'où $\mathrm{Dim}^{q+1}\,\Pi(\Phi^q_\alpha) \leq \alpha$.

Il reste à établir que $\underline{\mathrm{Dim}}^{q+1}(B_n) \geq \alpha$. Soit $a = \alpha/(\alpha+1)$. On note toujours $b = \Delta(\Psi^4_\alpha)$. Comme dans le cas $q = 3$, on montre que, pour tout $\alpha' < \alpha$, il existe un entier $N > 0$ tel que

$$(\forall\, n \geq N)\ :\ b_n \geq \exp\left(\frac{n}{\ln^{(q-3)}(n)^{1/\alpha'}}\right) + 1.$$

On pose $p = p_n = [\ln(n)]$, et on choisit $n \geq 1$ suffisamment grand pour avoir la condition supplémentaire $\dfrac{n}{p} - \dfrac{3}{2} \geq \dfrac{1}{2}\dfrac{n}{\ln(n)}$. On a, comme dans le deuxième cas, $H_n(p) \succeq \frac{Q_n(p)}{\sqrt{2\pi n}}$, avec

$$Q_n(p) = \left(\frac{b_p-1}{n}\right)^{n/p-3/2}.$$

On montre alors que :

$$Q_n(p) \geq \exp\left(n\left(\frac{1}{(\ln^{(q-3)}\,\ln(n))^{1/\alpha'}} - 1\right)\right) \geq \exp\left(\frac{n}{C(\ln^{(q-2)}\,n)^{1/\alpha'}}\right) \sim \Phi^{q+1}_{\alpha'},$$

d'où l'on déduit comme précédemment que $\underline{\mathrm{Dim}}^{q+1}\,\Pi(\Psi^q_\alpha) \geq \alpha$.

Corollaire 2.25 *Soient* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *une suite croissante d'entiers positifs et* $q \geq 2$ *un entier. Si* $q = 2$*, on suppose* $\underline{\mathrm{Dim}}^2(a_n) \geq 1$*. On a alors les inégalités suivantes :*

$$\underline{\mathrm{Dim}}^q(a) \leq \underline{\mathrm{Dim}}^{q+1}\,\Pi(a) \leq \mathrm{Dim}^{q+1}\;\Pi(a) \leq \mathrm{Dim}^q(a).$$

Preuve. Comme la suite a est croissante, on a $\alpha = \mathrm{Dim}^q(a) = \mathrm{stdim}^q(a)$ et $\beta = \underline{\mathrm{Dim}}^q(a) = \underline{\mathrm{stdim}}^q(a)$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0, il existe donc un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$:

$$\Psi^q_{\beta-\varepsilon}(n) \leq a_n \leq \Psi^q_{\alpha+\varepsilon}(n).$$

D'après le lemme 2.22, il vient $\Pi(\Psi^q_{\beta-\varepsilon}) \preceq \Pi(a) \preceq \Pi(\Psi^q_{\beta+\varepsilon})$. Compte tenu de la proposition 2.24, on en déduit par passage aux dimensions :

$$\beta - \varepsilon \leq \underline{\mathrm{Dim}}^{q+1}\,\Pi(a) \leq \mathrm{Dim}^{q+1}\;\Pi(a) \leq \alpha + \varepsilon.$$

Le résultat du corollaire provient du passage à la limite quand ε tend vers 0.

2.2 Croissance et dimension des algèbres et modules de Poisson

2.2.1 Sous-espaces engendrés par des monômes

2.2.1.1 Algèbres de Poisson

Notations 2.26 Pour toute algèbre de Poisson P et tous sous-espaces $X, Y \subseteq P$ on notera :

$$X \star Y = X.Y + Y.X + \{X, Y\}. \tag{2.15}$$

Définition 2.27 Soient P une algèbre de Poisson et $X \subseteq P$ un sous-espace vectoriel. On définit par récurrence une famille croissante de sous-espaces $\{X_P(n)\}_{n\geq 1}$ de P de la manière suivante : $X_P(1) = X$ et, pour $n \geq 1$:

$$X_P(n+1) = X_P(n) + \sum_{i+j=n+1} X_P(i) \star X_P(j). \tag{2.16}$$

On dira que $X_P(n)$ est le *sous-espace engendré par les monômes de Poisson de longueur au plus* n *en les éléments de* X.

Par construction, on a donc les inclusions suivantes, pour tous $i, j \geq 1$:

$$X_P(i) \star X_P(j) \subseteq X_P(i+j), \tag{2.17}$$

autrement dit $X_P(i)X_P(j) \subseteq X_P(i+j)$ et $\{X_P(i), X_P(j)\} \subseteq X_P(i+j)$. Le sous-espace $\mathbb{P}(X) = \bigcup_{n\geq 1} X_P(n)$ est alors une sous-algèbre de Poisson de P ; plus précisément c'est la sous-algèbre de Poisson de P engendrée par X.

Lemme 2.28 *Soient P une algèbre de Poisson, $X \subseteq P$ un sous-espace vectoriel et $\{X_P(n)\}_{n\geq 1}$ la famille définie à partir de X comme précédemment. On a, pour tout $n \geq 1$:*

$$X_P(n+1) = X_P(n) + X \star X_P(n). \tag{2.18}$$

Preuve. On note pour simplifier $X(k)$ au lieu de $X_P(k)$. On va d'abord établir l'inclusion suivante, pour tous $i, j \geq 1$:

$$X(i) \star X(j) \subseteq X \star X(i+j-1). \tag{2.19}$$

On procède par récurrence sur i. Pour $i = 1$ c'est évident, parce que $X(1) = X$. Supposons à présent la relation 2.19 établie pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et établissons-la pour $i = k+1$. On a $X(k+1) = X(k) + X \star X(k)$, d'où :

$$X(k+1) \star X(j) \subseteq X(k) \star X(j) + (X \star X(k)) \star X(j).$$

Par hypothèse de récurrence on a $X(k) \star X(j) \subseteq X \star X(k+j-1) \subseteq X \star X(k+j)$. Examinons le deuxième terme. On écrit $X \star X(k) = X.X(k) + X(k).X + \{X, X(k)\}$, d'où l'on déduit :

$$\begin{array}{rcl} (X \star X(k)) \star X(j) & = & (X.X(k) + X(k).X + \{X, X(k)\})\,.X(j) \\ & & +X(j).\,(X.X(k) + X(k).X + \{X, X(k)\}) \\ & & +\,\{X.X(k) + X(k).X + \{X, X(k)\}, X(j)\}\,. \end{array}$$

On a, d'après (2.17) :

$$\begin{array}{rcl} \big(X.X(k)\big).X(j) & = & X.\,(X(k)X(j)) \subseteq X.X(j+k) \subseteq X \star X(j+k)\ ; \\ \big(X(k).X\big).X(j) & = & X(k).\,(XX(j)) \subseteq X(k).X(j+1), \end{array}$$

d'où, par hypothèse de récurrence : $\big(X(k).X\big).X(j) \subseteq X \star X(k+j)$. Ensuite, en utilisant le fait que $\{.,.\}$ est une bidérivation, on a :

$$\big(\{X, X(k)\}\big).X(j) \subseteq \{X, X(k).X(j)\} + X(k).\{X, X(j)\}.$$

Compte tenu de (2.17) et de l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\big(\{X, X(k)\}\big).X(j) \subseteq \{X, X(k+j)\} + X(k).X(j+1) \subseteq X \star X(k+j).$$

Ceci prouve que $(X.X(k) + X(k).X + \{X, X(k)\}) .X(j) \subseteq X{\star}X(j{+}k)$. Un argument symétrique permet de voir que $X(j) (X.X(k) + X(k).X + \{X, X(k)\}) \subseteq X \star X(j + k)$. Pour établir que $\{X.X(k) + X(k).X + \{X, X(k)\}, X(j)\} \subseteq X \star X(j + k)$ on procèderait de manière analogue.

On peut à présent établir le lemme. Pour tout $n \geq 1$, on a, d'après 2.19 :

$$\begin{aligned} X(n+1) &= X(n) + \sum_{i+j=n+1} X(i) \star X(j) \\ &\subseteq X(n) + \sum_{i+j=n+1} X \star X(i+j-1) = X(n) + X \star X(n) \subseteq X(n+1), \end{aligned}$$

c'est la formule annoncée.

Remarque 2.29 Une algèbre de Poisson peut être engendrée par un sous-espace de dimension finie en tant qu'algèbre de Poisson sans être de type fini comme algèbre associative. Par exemple, si $\mathfrak{g}$ est de dimension infinie et engendrée par un sous-espace de dimension finie $X \subseteq \mathfrak{g}$, l'algèbre de Poisson $S(\mathfrak{g})$ est engendrée par $\mathbb{K}{+}X$, qui est de dimension finie. Par contre, en tant qu'algèbre associative seulement, $S(\mathfrak{g})$ s'identifie à une algèbre de polynômes à une infinité de variables et n'est donc pas de type fini.

2.2.1.2 Cas des algèbres associatives ou de Lie

Pour des algèbres associatives ou de Lie, il existe déjà des notions classiques de sous-espaces engendrés par des monômes (voir par exemple [33]). On va voir que la notion introduite ici en est une généralisation.

Soit $(S, \cdot)$ une algèbre associative ou de Lie. Les sous-espaces engendrés par les monômes de longueur $\leq n$ en les éléments de X sont définis classiquement de la manière suivante : $X^1 = X$ et, pour $n \geq 1$:

$$X^{n+1} = X^n + X \cdot X^n. \tag{2.20}$$

Pour les algèbres associatives, cela signifie que tout élément de X^n est une combinaison linéaire de produits d'éléments de X de la forme $x_1 x_2 \ldots x_k$, où $k \leq n$. Dans le cas des algèbres de Lie, cela signifie que tout élément de X^n est une combinaison linéaire de crochets itérés d'éléments de X de la forme $[x_1, [x_2, \ldots, [x_{k-1}, x_k] \ldots]]$ avec $k \leq n$.

Lemme 2.30 *Avec les notations précédentes, on a pour tout $n \geq 1$: $X^n = X_P(n)$. Autrement dit, pour la structure de Poisson naturelle sur une algèbre associative ou de Lie, les sous-espaces engendrés par les monômes de Poisson de longueur $\leq n$ ou par les monômes classiques de longueur $\leq n$ en les éléments de X sont les mêmes.*

Preuve. On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant clair.

Supposons dans un premier temps que S est associative. Pour $X, Y \subseteq S$, on a $X \star Y = X \cdot Y + Y \cdot X + [X, Y] = X \cdot Y + Y \cdot X$. Supposons avoir $X_P(k) = X^k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$; on a alors :

$$\begin{aligned} X_P(n+1) &= X_P(n) + \sum_{i+j=n+1} X_P(i) \star X_P(j) = X^n + \sum_{i+j=n+1} X^i \cdot X^j \\ &\subseteq X^n + \sum_{i+j=n+1} X^i X^j \subseteq X^{n+1}. \end{aligned}$$

L'inclusion $X^{n+1} \subseteq X_P(n+1)$ étant claire, le résultat est démontré si S est associative.

Supposons maintenant que S est une algèbre de Lie, et notons $[.,.]$ son crochet. Pour $X, Y \subseteq S$, on a alors $X \star Y = X.Y + Y.X + [X, Y] = [X, Y]$. Pour tout $n \geq 1$, on a d'après la définition (2.20) et le lemme 2.28 :

$$X^{n+1} = X^n + [X, X^n] = X_P(n) + X \star X_P(n) = X_P(n+1),$$

d'où le résultat si S est une algèbre de Lie.

2.2.1.3 Monômes de Poisson

Soient P une algèbre de Poisson et $X \subseteq P$ un sous-espace. On considère la suite $\{X_P(n)\}_{n \geq 1}$ des sous-espaces engendrés par les monômes de Poisson en les éléments de X définie en 2.27. Par ailleurs, on peut considérer P comme une algèbre de Lie seulement (en oubliant la structure associative) ; on a alors une autre famille de sous-espaces $\{X_L^n\}_{n \geq 1}$, à savoir les sous-espaces engendrés par les monômes de Lie en les éléments de X définis par les formules (2.20). Ces sous-espaces sont liés par les identités suivantes :

Lemme 2.31 *Avec les notations précédentes, on a, pour tout $n \geq 1$:*

$$X_P(n) = \sum_{j_1 + \ldots + j_k \leq n} X_L^{j_1} X_L^{j_2} \ldots X_L^{j_k}.$$

Autrement dit, tout élément de $X_P(n)$ se décompose comme combinaison linéaire d'éléments de la forme $\xi_1 \ldots \xi_k$, où chaque ξ_k est un crochet itéré d'éléments de X de la forme $\xi_k = \{x_{k,1}, \{\ldots, \{x_{k,j_k-1}, x_{k,j_k}\} \ldots\}\}$, avec $x_{k,j} \in X$ pour tous k, j et $j_1 + \ldots + j_k \leq n$.

Preuve. On pose $S_n = \sum_{j_1+\ldots+j_k \leq n} X_L^{j_1} X_L^{j_2} \ldots X_L^{j_k}$. On veut démontrer que $X_P(n) = S_n$ pour tout n. Grâce aux relations (2.17), l'inclusion $X_P(n) \supseteq S_n$ est évidente ; on va démontrer l'inclusion réciproque par récurrence. Pour $n = 1$, on a $X_P(1) = X = S_1$; supposons à présent $n \geq 1$

et $X_P(k) \subseteq S_k$ pour tout $k \leq n$. Soient $i, j \leq n$ tels que $i + j = n + 1$. Alors :

$$\begin{aligned} XX_P(n) &\subseteq X_L^1 \left(\sum_{j_1+\ldots+j_t \leq n} X_L^{j_1} \ldots X_L^{j_t} \right) \\ &\subseteq \sum_{j_0+j_1+\ldots+j_t \leq n+1} X_L^{j_0} \ldots X_L^{j_t} = S_{n+1}. \end{aligned}$$

De même, on montre que $X_P(n)X \subseteq S_{n+1}$. Enfin, compte tenu du fait que $\{.,.\}$ est une bidérivation d'algèbre associative :

$$\begin{aligned} \{X, X_P(n)\} &\subseteq \sum_{j_1+\ldots+j_t \leq n} \{X, X_L^{j_1} \ldots X_L^{j_t}\} \\ &\subseteq \sum_{j_1+\ldots+j_t \leq n} \sum_{s=1}^{t} X_L^{j_1} \ldots X_L^{j_{s-1}} \{X, X_L^{j_s}\} X_L^{j_{s+1}} \ldots X_L^{j_t} \\ &\subseteq \sum_{j_1+\ldots+j_t \leq n} \sum_{s=1}^{t} X_L^{j_1} \ldots X_L^{j_{s-1}} X_L^{1+j_s} X_L^{j_{s+1}} \ldots X_L^{j_t} \\ &\subseteq \sum_{i_1+\ldots+i_t \leq n+1} X_L^{i_1} \ldots X_L^{i_t} = S_{n+1}. \end{aligned}$$

Il vient : $X_P(n+1) = X_P(n) + X \star X_P(n) \subseteq S_{n+1}$. Le lemme est démontré.

2.2.1.4 Modules de Poisson

Notations 2.32 Soient P une algèbre de Poisson et M un module de Poisson sur P. Soient $X \subseteq P$ et $E \subseteq M$ deux sous-espaces vectoriels, on pose :

$$X \star E = X.E + E.X + \{X, E\}_M \subseteq M. \tag{2.21}$$

Définition 2.33 Soient P une algèbre de Poisson et M un module de Poisson sur P. Soient $X \subseteq P$ et $E \subseteq M$ deux sous-espaces vectoriels. On définit par récurrence une suite $\{E_M^X(n)\}_{n \geq 1}$ de sous-espaces de M de la manière suivante : $E_M^X(1) = E$ et, pour $n \geq 1$:

$$E_M^X(n+1) = E_M^X(n) + \sum_{i+j=n+1} X_P(i) \star E_M^X(j). \tag{2.22}$$

Remarque 2.34

1. Lorsque $M = P$ considéré comme un P-module de Poisson et qu'on choisit $X = E$, on a $E_M^X(n) = X_P(n)$ pour tout $n \geq 1$.

2. Pour tous $i, j \geq 1$, on a $X_P(i) \star E_M^X(j) \subseteq E_M^X(i+j)$.

Si X est un sous-espace générateur de P, le sous-espace $\mathbb{M}(E) = \bigcup_{n\geq 1} E_M^X(n)$ est un sous-module de Poisson de M. Plus précisément, c'est le sous-module de Poisson de M engendré par E. En particulier, M est de type fini si et seulement s'il existe un sous-espace $E \subseteq M$ de dimension finie tel que $M = \mathbb{M}(E)$. Si de plus P est de type fini, on peut choisir X de dimension finie aussi ; dans ce cas, tous les sous-espaces $E_M^X(n)$ sont de dimension finie.

Lemme 2.35 *Soient P une algèbre de Poisson, M un module de Poisson sur P et $X \subseteq P$, $E \subseteq M$ deux sous-espaces. On a, pour tout $n \geq 1$:*

$$E_M^X(n+1) = E_M^X(n) + X \star E_M^X(n).$$

Preuve. On procède de même que dans le lemme 2.28.

Soit M un P-module de Poisson. Comme M peut être considéré comme un module à gauche sur l'algèbre enveloppante $A(P)$, on s'intéresse à la comparaison des sous-espaces de monômes comme définis ci-dessus dans M en tant que P-module de Poisson et dans M en tant que $A(P)$-module à gauche.

Lemme 2.36 *Soient P une algèbre de Poisson, $A = A(P)$ son algèbre enveloppante et M un P-module de Poisson, considéré comme un $A(P)$-module à gauche. Soient $X \subseteq P$, $E \subseteq M$ deux sous-espaces. On note $[X]_0 \subseteq A(P)$ le sous-espace de P engendré par les éléments x_λ, x_ρ et x_ϖ tels que $x \in X$ et $[X] = [X]_0 + \mathbb{K}.1_A \subseteq A(P)$ le sous-espace de $A(P)$ engendré par $[X]_0$ et l'élément unité 1_A. On a :*

$$X \star E = [X]_0 \cdot E \quad \text{et} \quad E + X \star E = [X] \cdot E.$$

Preuve. La deuxième identité résulte immédiatement de la première. Démontrons celle-ci. Le sous-espace $X \star E$ est engendré par les éléments :

$$x.m, \ m.x \text{ ou } \{x, m\}_M, \text{ avec } x \in X, \ m \in E.$$

Par définition de la structure de $A(P)$-module à gauche sur M, il s'agit exactement des éléments de la forme :

$$x_\lambda \cdot m, \ x_\rho \cdot m \text{ ou } x_\varpi \cdot m, \text{ avec } x \in X, \ m \in E.$$

Or ces éléments engendrent bien le sous-espace $[X]_0 \cdot E$: le lemme est démontré.

Soient P une algèbre de Poisson, M un module de Poisson sur P et $A = A(P)$ l'algèbre enveloppante de P. On considère des sous-espaces $E \subseteq M$ et $X \subseteq P$. Notons $[X] \subseteq A$ le sous-espace engendré par $X_\lambda + X_\rho + X_\varpi$ et l'élément unité $1_A \in A$. On définit des sous-espaces $E_M^{X,P}(n)$ et $E_M^{[X],A}(n)$, pour $n \geq 1$, de la manière suivante. Les sous-espaces $E_M^{X,P}(n)$ sont ceux définis par $E_M^{X,P}(1) = E$ et la relation de récurrence (2.22). Les sous-espaces $E_M^{[X],A}(n)$ sont définis classiquement par :

$$E_M^{[X],A}(n) = [X]^{n-1} \cdot E,$$

avec la convention $[X]^0 = \mathbb{K}1_A$ (voir par exemple [24, chapitre 5]).

Proposition 2.37 *Avec les notations précédentes, on a :*

$$(\forall\, n \geq 1) \ : \ E_M^{X,P}(n) = E_M^{[X],A}(n).$$

Preuve. Pour alléger les notations on notera $E^P(n)$ et $E^A(n)$ au lieu de $E_M^{X,P}(n)$ et $E_M^{[X],A}(n)$. Pour $n = 1$ on a bien $E^P(1) = E = E^A(1)$. Supposons maintenant $n \geq 1$ et $E^A(n) = E^P(n)$; montrons que $E^A(n+1) = E^P(n+1)$ aussi. En utilisant le lemme 2.36 et le lemme précédent, on a :

$$E^A(n+1) = [X]E^A(n) = [X]E^P(n) = E^P(n) + X \star E^P(n) = E^P(n+1).$$

La proposition est établie.

2.2.2 Croissance et dimensions

2.2.2.1 Notion de croissance

Définition 2.38

1. Soient P une algèbre de Poisson et $X \subseteq P$ un sous-espace de dimension finie. On considère la suite des sous-espaces engendrés par les monômes de Poisson en les éléments de X, notée $\{X_P(n)\}_{n\geq 1}$ et définie en 2.27. Comme X est de dimension finie, l'espace vectoriel $X_P(n)$ est de dimension finie pour tout $n \geq 1$. Dans ce cas, la *fonction de croissance attachée à* X est la fonction définie par la formule : $\gamma_X(P; n) = \dim X_P(n)$. On notera souvent $\gamma_X(n)$ si aucune confusion sur P n'est possible.
2. Soient P une algèbre de Poisson, M un module de Poisson sur P, $X \subseteq P$ et $E \subseteq M$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie. On considère la suite des sous-espaces $\{E_M^X(n)\}_{n\geq 1}$ définie en 2.33. Comme X et E sont de dimension finie, l'espace vectoriel $E_M^X(n)$ est de dimension finie pour tout $n \geq 1$. Dans ce cas, on peut définir la *fonction de croissance attachée à* E *et* X par la formule : $\gamma_{E,X}^P(M; n) = \dim\, E_M^X(n)$.

Lemme 2.39

1. *Soit P une algèbre de Poisson. On suppose que P admet un sous-espace générateur de dimension finie X. Alors la classe d'équivalence de la fonction de croissance γ_X modulo $\sim$ ne dépend pas du choix de X.*
2. *Soient P une algèbre de Poisson et M un module de Poisson sur P. On suppose que P et M admettent des sous-espaces générateurs de dimension finie $X \subseteq P$ et $E \subseteq M$. Alors la classe d'équivalence de la fonction de croissance $\gamma^P_{E,X}(M; n)$ modulo $\sim$ ne dépend pas des choix de X et E.*

Preuve. On démontre par exemple le n^{o}1 ; le n^{o}2 se traiterait de la même manière. Soient X, Y deux sous-espaces générateurs finis de P. Il existe $N > 0$ tel que X soit contenu dans $Y_P(N)$. Montrons alors par récurrence que $X_P(n) \subseteq Y_P(Nn)$ pour tout $n \geq 1$. C'est clair pour $n = 1$; si l'on suppose maintenant que $X_P(j) \subseteq Y_P(Nj)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$: on a, en utilisant le lemme 2.28 :

$$X_P(n+1) = X_P(n) + X \star X_P(n) \subseteq Y_P(Nn) + Y_(N) \star Y_P(Nn) \subseteq Y_P(N(n+1)).$$

Il en résulte que $\gamma_X(n) \leq \gamma_Y(Nn)$, d'où $\gamma_X \preceq \gamma_Y$. Par symétrie, on a aussi $\gamma_Y \preceq \gamma_X$.

Le lemme précédent justifie les définitions suivantes :

Définition 2.40

1. Soit P une algèbre de Poisson engendrée par un sous-espace de dimension finie X. On appelle *croissance de* P et on note $\Gamma(P)$ la classe d'équivalence de γ_X modulo $\sim$. Celle-ci est indépendante du choix de X.
2. Soient P une algèbre de Poisson et M un module de Poisson sur P. On suppose que P et M admettent des sous-espaces générateurs de dimension finie $X \subseteq P$ et $E \subseteq M$. On appelle *croissance de* P et on note $\Gamma^P(M)$ la classe d'équivalence de la fonction $\gamma^P_{E,X}(M; n)$ modulo $\sim$. Celle-ci est indépendante des choix de X et E. On notera $\Gamma(M)$ si aucune confusion sur P n'est possible.

D'après la remarque 1.3, on pourra aussi parler de la croissance des algèbres associatives ou des algèbres de Lie, ainsi que de leurs modules. On retrouve ainsi les notions classiques développées par exemple dans [24] et [33].

2.2.2.2 Dimensions, niveaux

Définition 2.41 Soient P une algèbre de Poisson et $q \geq 1$ un entier.

1. Si P est de type fini, on appelle *dimension de niveau q de P* (resp. *dimension inférieure de niveau q de P*) la quantité $\mathrm{Dim}^q(P) = \mathrm{Dim}^q(\Gamma(P))$ (resp. $\underline{\mathrm{Dim}}^q(P) = \underline{\mathrm{Dim}}^q(\Gamma(P))$). Le *niveau de P*, noté $\mathrm{lev}(P)$, est défini par $\mathrm{lev}(P) = \mathrm{lev}\big(\Gamma(P)\big)$.
2. Dans le cas général, la *dimension de niveau q de P* (resp. la *dimension inférieure de niveau q de P*, resp. le *niveau de P*) est définie par :

$$\mathrm{Dim}^q(P) = \sup_Q\{\mathrm{Dim}^q(Q)\} \quad (\text{resp. } \sup_Q\{\underline{\mathrm{Dim}}^q(Q)\}, \text{ resp. } \sup_Q\{\mathrm{lev}(Q)\}),$$

   où Q parcourt l'ensemble des sous-algèbres de Poisson de type fini de P.

Les propriétés générales du niveau des fonctions permet de décrire le niveau d'une algèbre de Poisson P comme suit. S'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathrm{Dim}^q(P) =]0, +\infty[$, alors $\mathrm{Dim}^r(P) = +\infty$ pour tout $r < q$ et $\mathrm{Dim}^r(P) = 0$ pour $r > q$: dans ce cas, on a $\mathrm{lev}(P) = q$. S'il existe $q \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathrm{Dim}^q(P) = +\infty$ et $\mathrm{Dim}^{q+1}(P) = 0$, alors P est située entre les niveaux q et $q + 1$.

Définition 2.42 Soient P une algèbre de Poisson, M un P-module de Poisson et $q \geq 1$ un entier.

1. Si P et M sont de type fini, on appelle *dimension de niveau q de M* (resp. *dimension inférieure de niveau q de M*) la quantité $\mathrm{Dim}^q(M) = \mathrm{Dim}^q(\Gamma(M))$ (resp. $\underline{\mathrm{Dim}}^q(M) = \underline{\mathrm{Dim}}^q(\Gamma^P(M))$). Le *niveau de M*, noté $\mathrm{lev}(M)$, est défini par $\mathrm{lev}(M) = \mathrm{lev}\big(\Gamma^P(M)\big)$.
2. Dans le cas général, la *dimension de niveau q de M* (resp. la *dimension inférieure de niveau q de M*, resp. le *niveau de M*) est définie par :

$$\mathrm{Dim}^q(M) = \sup_{Q,N_Q}\{\mathrm{Dim}^q(N_Q)\} \quad (\text{resp. } \sup_{Q,N_Q}\{\underline{\mathrm{Dim}}^q(N_Q)\}, \text{ resp. } \sup_{Q,N_Q}\{\mathrm{lev}(N_Q)\}),$$

   où $Q \subseteq P$ parcourt l'ensemble des sous-algèbres de Poisson de type fini de P et $N_Q \subseteq M$ l'ensemble des sous-Q-modules de Poisson de type fini.

Remarque 2.43

1. D'après le lemme 2.13, on voit que pour $q = 2$, on retrouve la notion classique de dimension de Gelfand-Kirillov des algèbres associatives et de leurs modules. Pour $q = 3$, on retrouve (à normalisation près) la notion de superdimension.
2. Soit P une algèbre de Poisson de type fini. On munit P de la structure naturelle de P-module de Poisson décrite dans l'exemple 1.18, n^{o}1. Alors $\Gamma(P) = \Gamma^P(P)$: la croissance de l'algèbre de Poisson P est égale à la croissance du P-module de Poisson P.

Lemme 2.44 *Soient P une algèbre de Poisson et M un P-module de Poisson. On a :*

$$\mathrm{Dim}^1(M) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(M) = \dim(M). \tag{2.23}$$

En particulier, on a aussi $\mathrm{Dim}^1(P) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(P) = \dim(P)$.

Preuve. Il est clair qu'on peut se contenter d'établir (2.23) lorsque P et M sont de type fini. Soient $X \subseteq P$ et $E \subseteq M$ des sous-espaces générateurs de dimension finie. On note $\gamma(n)$ au lieu de $\gamma^P_{E,X}(M;n)$. Comme γ est croissante, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(n) = \limsup\limits_{n\to\infty}\gamma(n) = \liminf\limits_{n\to\infty}\gamma(n)$; d'après les lemmes 2.11 et 2.13 on a :

$$\mathrm{Dim}^1(M) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(M) = \lim_{n\to\infty}\gamma(n).$$

Comme $M = \bigcup\limits_{n\geq 1} E^X_M(n)$ et $\gamma(n) = \dim\, E^X_M(n)$, il est clair que $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(n) = \dim(M)$.

Le lemme précédent justifie le fait que, dans la suite, on s'intéresse surtout aux dimensions de niveaux $q \geq 2$.

Proposition 2.45 *Soit P une algèbre de Poisson. On suppose* $\mathrm{lev}(P) < \infty$. *Alors toute sous-algèbre intègre de P vérifie les conditions de Ore. En particulier, si P est intègre, P admet un corps des fractions.*

Preuve. Observons d'abord que P ne contient pas d'algèbre libre à deux générateurs. En effet, la dimension de niveau q d'une algèbre non-commutative libre est infinie, quel que soit q, or il existe $q \geq 1$ tel que $\mathrm{Dim}^q(P) < \infty$. Soit $B \subseteq P$ une sous-algèbre intègre : comme B ne contient pas d'algèbre libre non-commutative, B vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite d'après le lemme de Jategaonkar [24, proposition 4.13].

2.2.2.3 Croissance de l'algèbre associative sous-jacente à une algèbre de Poisson

Proposition 2.46 *Soit P une algèbre de Poisson qui est de type fini en tant qu'algèbre associative. Alors les croissances de P comme algèbre de Poisson et comme algèbre associative sont égales.*

Preuve. Soit $X \subseteq P$ un système générateur de P en tant qu'algèbre associative. On note $X_A(n)$ (resp. $X_P(n)$) les sous-espaces engendrés par les monômes associatifs (resp. les monômes de Poisson) de longueur $\leq n$ en les éléments de X. On note ensuite $\gamma^A_X(n) = \dim\, X_A(n)$ et $\gamma^P_X(n) = \dim\, X_P(n)$. Comme $X_A(n) \subseteq X_P(n)$, on a immédiatement $\gamma^A_X(n) \preceq \gamma^P_X(n)$.

Démontrons à présent l'inégalité réciproque. L'algèbre associative sous-jacente à P étant de type fini, il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\{X, X\} \subseteq X_A(2N)$. Montrons d'abord que, pour tout $n \geq 1$, on a $\{X, X_A(n)\} \subseteq X_A(n + 2N)$. Par construction, on a $X_A(n) = \sum_{k=1}^{n} X^k$; il vient :

$$\begin{aligned}
\{X, X_A(n)\} &= \sum_{k=1}^{n} \{X, X^j\} \subseteq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i+j=k-1} X^i \{X, X\} X^j \\
&\subseteq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i+j=k-1} \sum_{s=1}^{2N} X^i X^s X^j \subseteq \sum_{k=1}^{n+2N} X^k = X_A(n + 2N).
\end{aligned}$$

Maintenant, par récurrence sur n, on démontre que $X_P(n) \subseteq X_A(nN)$. Pour $n = 1$, c'est vrai par choix de N. Ensuite, on a d'après le lemme 2.28 :

$$\begin{aligned}
X_P(n + 1) &= X_P(n) + X \star X_P(n) = X_P(n) + X.X_P(n) + X_P(n).X + \{X, X_P(n)\} \\
&\subseteq X_A(nN) + X.X_A(nN) + X_A(nN).X + \{X, X_A(nN)\}.
\end{aligned}$$

On a toujours $X.X_A(nN) + X_A(nN).X \subseteq X_A(nN + 1) \subseteq X_A((n+1)N)$. D'après ce qui précède, on a aussi $\{X, X_A(nN)\} \subseteq X_A(nN + N) = X_A((n + 1)N)$. Il vient $X_P(n + 1) \subseteq X_A((n + 1)N)$, ce qui achève la récurrence. En passant aux dimensions, on a $\gamma_X^P(n) \leq \gamma_X^A(Nn)$, d'où l'on déduit que $\gamma_X^P \preceq \gamma_X^A$. La proposition est établie.

2.2.2.4 Croissance des modules

Soient P une algèbre de Poisson et $A(P)$ son algèbre enveloppante. On reprend les notations 1.24. Posons alors $[X] = X_\lambda + X_\rho + X_\varpi + \mathbb{K} \subseteq A(P)$.

Proposition 2.47 *Soit M un module de Poisson sur P. On considère des sous-espaces de dimension finie $E \subseteq M$ et $X \subseteq P$. Alors la fonction de croissance attachée aux sous-espaces $X \subseteq P$ et $E \subseteq M$, considéré comme P-module de Poisson, est égale à la fonction de croissance attachée à $[X] \subseteq A(P)$ et $E \subseteq M$, considéré comme $A(P)$-module à gauche. En particulier, si P et M sont de type fini, on a $\Gamma^P(M) = \Gamma^{A(P)}(M)$.*

Preuve. C'est un corollaire immédiat de la proposition 2.37.

Corollaire 2.48 *Soient P une algèbre de Poisson, M un module de Poisson sur P et $q \geq 1$ un entier. Les quantités $\mathrm{Dim}^q(M)$ et $\underline{\mathrm{Dim}}^q(M)$ sont indépendantes du fait que l'on considère M comme P-module de Poisson ou comme $A(P)$-module à gauche.*

La plupart des résultats concernant les croissances des modules de Poisson pourront donc être dérivés immédiatement des théorèmes relatifs aux modules sur les algèbres associatives et figurant par exemple dans [24].

2.2.3 Propriétés générales

Proposition 2.49 *Soient P une algèbre de Poisson et M un P-module de Poisson. On suppose P et M de type fini.*

1. *Si $M = \bigoplus_{j=1}^{n} M_j$, alors $\Gamma(M) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma(M_j)$.*
2. *Soit $0 \to K \to M \to N \to 0$ une suite exacte de P-modules de Poisson de type fini. On a $\Gamma(M) \succeq \Gamma(N) + \Gamma(K)$. Si K est de dimension finie et M est de dimension infinie, on a $\Gamma(M) = \Gamma(N)$. Si N est de dimension finie et M est de dimension infinie, on a $\Gamma(M) = \Gamma(K)$.*
3. *Soit $J \subseteq P$ un idéal de Poisson tel que $J \star M = 0$, de sorte que M est naturellement un P/J- module de Poisson. Alors $\Gamma^{P}(M) = \Gamma^{P/J}(M)$: les croissances de M comme P-module et comme P/J-module sont égales.*
4. *Soit $A_M \subseteq End(M)$ le quotient de l'algèbre enveloppante de Poisson $A(P)$ défini par le morphisme de structure $A(P) \to End(M)$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\Gamma(M) \preceq c.\Gamma(A_M)$.*
5. *Soit $\alpha \in End_P(M)$ un endomorphisme de module de Poisson. On suppose α injectif. Alors $\Gamma(n)\Gamma(M/\alpha M) \preceq \Gamma(M)$.*
6. *Si $M = \sum_{j=1}^{n} M_j$ et M est de dimension infinie, alors $\Gamma(M) = \sup\{\Gamma(M_j) \mid j = 1, \ldots, n\}$.*

Preuve. Ces résultats peuvent être obtenus en adaptant les démonstrations de [24, chapitre 5]. On va par exemple établir le n^{o}2. Soient $X \subseteq P$ un sous-espace générateur de P. Soit $E \subseteq M$ un sous-espace générateur de M et $F \subseteq N$ l'image de E dans N. Comme K est de type fini, on peut supposer que le sous-espace $G = E \cap K$ engendre K. Pour tout $n \geq 1$, on a la suite exacte :

$$0 \to K \cap E_M^X(n) \to E_M^X(n) \to F_N^X(n) \to 0,$$

d'où $\gamma_{E,X}(M;n) = \gamma_{F,X}(N;n) + \dim\big(K \cap E_M^X(n)\big)$. Par ailleurs, comme $E \supseteq G = E \cap K$, il est clair que $K \cap E_M^X(n) \supseteq G_K^X(n)$ pour tout $n \geq 1$, d'où $\dim\big(K \cap E_M^X(n)\big) \geq \gamma_{G,X}(K;n)$ et donc :

$$\gamma_{E,X}(M;n) \geq \gamma_{F,X}(N;n) + \gamma_{G,X}(K;n).$$

En passant aux croissances, il vient $\Gamma(M) \succeq \Gamma(N) + \Gamma(K)$.

Si $\dim(K) < \infty$, on peut supposer $G = K$, de sorte que $K \cap E_M^X(n) = K$ pour tout $n \geq 1$. Il vient :

$$\gamma_{E,X}(M;n) = \gamma_{F,X}(N;n) + \dim(K).$$

Si M est de dimension infinie, on a alors $\gamma_{E,X}(M;n) \approx \gamma_{F,X}(N;n)$, d'où l'on déduit que $\gamma_{E,X}(M;n) \sim \gamma_{F,X}(N;n)$.

Supposons à présent $\dim(N) < \infty$. On choisit un sous-espace $S \subseteq M$ de dimension finie tel que $M = K \oplus S$. On peut alors supposer $E = G \oplus S$. Comme K est de type fini, il existe $N \geq 1$ tel que $X \star E \subseteq G_K^X(N+1) + S$. Démontrons d'abord par récurrence la relation suivante :

$$(\forall\, n \geq 1)\ X \star G_K^X(n) \subseteq G_K^X(N+n) + S. \tag{2.24}$$

Si $n = 1$, c'est la définition de l'entier N. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} X \star G_K^X(n+1) &= X \star \big(G_K^X(n) + X \star G_K^X(n)\big) \\ &\subseteq \big(G_K^X(N+n) + S\big) + X \star \big(X \star G_K^X(n)\big) \\ &\subseteq G_K^X(N+n) + S + X \star \big(S + G_K^X(N+n)\big) \\ &\subseteq G_K^X(N+n) + S + X \star S + X \star G_K^X(N+n) \\ &\subseteq S + G_K^X(N+n) + G_K^X(N+1) + G_K^X(N+n+1), \end{aligned}$$

d'où l'inclusion annoncée.

Maintenant on établit, toujours par récurrence :

$$(\forall\, n \geq 1)\ E_M^X(n) \subseteq G_K^X(nN+1) + S. \tag{2.25}$$

Pour $n = 1$, on a $E_M^X(1) = E = G + S = G_K^X(1) + S \subseteq G_K^X(N+1) + S$. Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} E_M^X(n+1) &= E_M^X(n) + X \star E_M^X(n) \\ &\subseteq S + G_K^X(Nn+1) + X \star \big(S + G_K^X(Nn+1)\big) \\ &\subseteq S + G_K^X(N(n+1)+1) + G_K^X(N+1) + G_K^X(N(n=1)+1) \\ &\subseteq S + G_K^X(N(n+1)+1). \end{aligned}$$

C'est la relation annoncée. En passant aux dimensions, il vient :

$$\gamma_{E,X}(M;n) \leq \dim(S) + \gamma_{G,X}(K;Nn+1) \sim \gamma_{G,X}(K;n),$$

et finalement $\Gamma^P(E) \preceq \Gamma^P(K)$. L'inégalité $\Gamma^P(K) \preceq \Gamma^P(E)$ a été établie précédemment.

Corollaire 2.50 *Soient P une algèbre de Poisson et M un P-module de Poisson. Soit $q \geq 2$ un entier.*

1. *Si* $M = \sum_{j=1}^{n} M_j$, *alors* $\mathrm{Dim}^q(M) = \max\{\mathrm{Dim}^q(M_j) \mid j = 1, \ldots, n\}$.
2. *Soit* $0 \to K \to M \to N \to 0$ *une suite exacte de* P*-modules de Poisson de type fini. On a* $\mathrm{Dim}^q(M) \geq \max\{\mathrm{Dim}^q(N), \mathrm{Dim}^q(K)\}$. *Si* K *est de dimension finie et* M *est de dimension infinie, on a* $\mathrm{Dim}^q(M) = \mathrm{Dim}^q(N)$. *Si* N *est de dimension finie et* M *est de dimension infinie, on a* $\mathrm{Dim}^q(M) = \mathrm{Dim}^q(K)$.
3. *Soit* $A_M \subseteq End(M)$ *le quotient de l'algèbre enveloppante de Poisson* $A(P)$ *défini par le morphisme de structure* $A(P) \to End(M)$. *Alors* $\mathrm{Dim}^q(M) \leq \mathrm{Dim}^q(A_M)$.
4. *Soit* $\alpha \in End_P(M)$ *un endomorphisme de module de Poisson. On suppose* α *injectif. Alors* $\mathrm{Dim}^2(M) \geq \mathrm{Dim}^2(M/\alpha M) + 1$ *et, si* $q \geq 3$: $\mathrm{Dim}^q(M) \geq \mathrm{Dim}^q(M/\alpha M)$.

Proposition 2.51 *Soit* P, Q *deux algèbres de Poisson de type fini.*

1. *Si* Q *est une sous-algèbre ou un quotient de* P, *on a* $\Gamma(Q) \preceq \Gamma(P)$.
2. $\Gamma(P \oplus Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$.
3. *Soient* I, J *des idéaux bilatères de* P. *Alors* $\sup\{\Gamma(P/I), \Gamma(P/J)\} \preceq \Gamma(P/(I \cap J)) \preceq \Gamma(P/I) + \Gamma(P/J)$.
4. *Si* $P = A$ *et* $Q = B$ *sont associatives et unitaires, on a* $\Gamma(A \otimes B) = \Gamma(A)\Gamma(B)$.
5. *Soit* $J \subseteq P$ *un idéal de Poisson contenant un élément régulier à gauche ou à droite dans* P. *Alors* $\Gamma(n)\Gamma(P/J) \leq \Gamma(P)$.
6. *Si* $0 \to J \to P \to Q \to 0$, *où* J *est un idéal de dimension finie et* P *est de dimension infinie, alors* $\Gamma(P) = \Gamma(Q)$.

Preuve. On va démontrer le n^{o}4. Notons $T = A \otimes B$. Soient $X \subseteq A, Y \subseteq B$ deux sous-espaces générateurs ; on peut supposer $1_A \in X, 1_B \in Y$, de sorte que $A_X(n) = X^n$ et $B_Y(n) = Y^n$ pour tout n. On pose $Z = X \otimes Y \subseteq T$, qui est un sous-espace générateur de T contenant 1_T. On a alors :

$$T_Z(n) = Z^n = (X \otimes Y)^n \subseteq X^n \otimes Y^n = (X^n \otimes \mathbb{K}).(\mathbb{K} \otimes Y^n) \subseteq Z^n.Z^n = Z^{2n},$$

d'où $\gamma_Z(T; n) \leq \gamma_X(A; n)\gamma_Y(B; n) \leq \gamma_Z(T; 2n)$. Or pour toute fonction croissante f et toute constante $C \geq 1$, on a toujours $f(n) \sim f(Cn)$; il vient $\gamma_Z(T; n) \sim \gamma_X(A; n)\gamma_Y(B; n)$, d'où le résultat.

Corollaire 2.52 *Soit* P, Q *deux algèbres de Poisson de type fini et* $q \geq 2$ *un entier.*

1. *Si* Q *est une sous-algèbre ou un quotient de* P, *on a* $\mathrm{Dim}^q(Q) \leq \mathrm{Dim}^q(P)$.
2. $\mathrm{Dim}^q(P \oplus Q) = \max\{\mathrm{Dim}^q(P), \mathrm{Dim}^q(Q)\}$.

3. *Soient I, J des idéaux bilatères de P. Alors* $\mathrm{Dim}^q(P/(I \cap J)) = \max\{\mathrm{Dim}^q(P/I), \mathrm{Dim}^q(P/J)\}$.
4. *Si $P = A$ et $Q = B$ sont associatives et unitaires, on a*

$$\underline{\mathrm{Dim}}^2(A) + \underline{\mathrm{Dim}}^2(B) \leq \underline{\mathrm{Dim}}^2(A \otimes B) \leq \mathrm{Dim}^2(A \otimes B) \leq \mathrm{Dim}^2(A) + \mathrm{Dim}^2(B).$$

   Si $q \geq 3$:

$$\max\{\underline{\mathrm{Dim}}^q(A), \underline{\mathrm{Dim}}^q(B)\} \leq \underline{\mathrm{Dim}}^q(A \otimes B) \leq \mathrm{Dim}^q(A \otimes B) \leq \max\{\mathrm{Dim}^q(A), \mathrm{Dim}^q(B)\}.$$

5. *Soit $J \subseteq P$ un idéal de Poisson contenant un élément régulier à gauche ou à droite dans P. Alors* $\mathrm{Dim}^2(P) \geq \mathrm{Dim}^2(P/J) + 1$ *et, pour $q \geq 3$:* $\mathrm{Dim}^q(P) \geq \mathrm{Dim}^q(P/J)$.
6. *Si $0 \to J \to P \to Q \to 0$, où J est un idéal de dimension finie et P est de dimension infinie, alors* $\mathrm{Dim}^q(P) = \mathrm{Dim}^q(Q)$.

2.2.3.1 Localisation

Proposition 2.53 *Soient P une algèbre de Poisson de type fini et $\Omega \subseteq P$ un système de Ore à gauche formé d'éléments centraux relativement au produit associatif et au crochet de Poisson. Le localisé $\Omega^{-1}P$ est naturellement une algèbre de Poisson. Soit $X \subseteq \Omega^{-1}P$ un sous-espace de dimension finie. Alors* $\Gamma\big(\gamma_X(\Omega^{-1}P; n)\big) \preceq \Gamma(P)$.

Preuve. On note $Q = \Omega^{-1}P$. Il existe un élément $d \in \Omega \setminus \{0\}$ tel que $dX \subseteq P$. Posons alors $Y = dX + \mathbb{K}d + \mathbb{K}$. Montrons que, pour tout $n \geq 1$, $Q_X(n) \subseteq d^{-n}Y_P(n)$.

Pour $n = 1$, cela résulte de la définition de Y. Supposons le résultat valable jusqu'à l'ordre n. Soient $i, j \leq n$. En utilisant le fait que d est central pour le produit associatif, on a :

$$Q_X(i)Q_X(j) \subseteq d^{-i}Y_P(i)d^{-j}Y_P(j) \subseteq d^{-(i+j)}Y_P(i+j) \ ;$$

en utilisant le fait que d est central pour le crochet de Poisson, c'est-à-dire constant pour toutes les dérivations hamiltoniennes de P, on a :

$$\{Q_X(i), Q_X(j)\} \subseteq \{d^{-i}Y_P(i), d^{-j}Y_P(j)\} = d^{-(i+j)}\{Y_P(i), Y_P(j)\} \subseteq d^{-(i+j)}Y_P(i+j).$$

Maintenant, en réinjectant dans la relation

$$Q_X(n+1) = Q_X(n) + \sum_{i+j=n+1} Q_X(i)Q_X(j) + \{Q_X(i), Q_X(j)\}$$

et en observant que $d^{-n}Y_P(n) = d^{-(n+1)}.dY_P(n) \subseteq d^{-(n+1)}Y_P(n+1)$, on obtient bien la relation $Q_X(n) \subseteq d^{-n}Y_P(n)$.

Corollaire 2.54 *Soient P une algèbre de Poisson et $\Omega \subseteq P$ un système de Ore à gauche formé d'éléments centraux relativement au produit associatif et au crochet de Poisson. Soit $q \geq 2$ un entier. Alors* $\mathrm{Dim}^q(\Omega^{-1}P) = \mathrm{Dim}^q(P)$ *et* $\underline{\mathrm{Dim}}^q(\Omega^{-1}P) = \underline{\mathrm{Dim}}^q(P)$.

2.2.3.2 Graduations et filtrations

Soit P une algèbre de Poisson graduée, $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M^{(k)}$ un module de Poisson $\mathbb{Z}$-gradué en dimension finie. On note $A_M(P) \subseteq End(M)$ le quotient de l'algèbre enveloppante $A(P)$ défini par le morphisme de structure $A(P) \to End(M)$. On note $d_M(n) = \sum_{k=-n}^{n} \dim M^{(k)}$.

Proposition 2.55 *On suppose M et P de type fini. Alors $\Gamma(M) \preceq \Gamma(d_M)$. Si de plus $A_M(P)$ est graduée en dimension finie, alors $\Gamma(M) = \Gamma(d_M)$.*

Preuve. C'est le résultat de [24, lemme 6.1].

Soit P une algèbre de Poisson filtrée. On considère un P-module M, filtré par une famille de sous-espaces $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. On notera $d_M(n) = \dim(M_n)$. Rappelons que l'espace vectoriel gradué $Gr(M)$ est naturellement un module gradué sur l'algèbre de Poisson $Gr(P)$.

Proposition 2.56 *On utilise les notations précédentes.*

1. *On a $\Gamma^{Gr(P)}(Gr\, M) \preceq \Gamma^P(M) \preceq \Gamma(d_M)$.*
2. *Si de plus $A_M(P)$ est filtrée en dimension finie, alors $\Gamma^{Gr(P)}(Gr\, M) = \Gamma^P(M) = \Gamma(d_M)$.*

Corollaire 2.57 *Soit P une algèbre de Poisson filtrée. On a $\Gamma(Gr(P)) \preceq \Gamma(P)$.*

2.2.3.3 Algèbres de Poisson commutatives

Le premier résultat ci-dessous souligne l'importance de tenir compte des crochets de Poisson sur une algèbre associative et commutative lors des calculs de dimensions.

Proposition 2.58 *Soit P une algèbre de Poisson commutative, munie du crochet trivial $\{.,.\} = 0$. Alors $\mathrm{Dim}^3(P) = 0$.*

Preuve. Comme le crochet $\{.,.\}$ est trivial, les sous-algèbres de Poisson de P sont exactement les sous-algèbres associatives de P. Soit $Q \subseteq P$ une sous-algèbre de P de type fini. Comme Q est commutative, on a $\mathrm{Dim}^2(Q) = \mathrm{GKdim}(Q) < \infty$, donc $\mathrm{Dim}^3(Q) = 0$. Par passage au sup, on en déduit que $\mathrm{Dim}^3(P) = 0$.

Remarque 2.59 On verra que pour des algèbres commutatives P munies d'un crochet de Poisson non nul, on peut avoir $\mathrm{Dim}^q(P) \neq 0$ pour $q \geq 3$ (voir le corollaire 2.63 lorsque P est l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie).

Proposition 2.60 *Soit P une algèbre de Poisson commutative en tant qu'algèbre associative. Soit $X \subseteq P$ un sous-espace de dimension finie. On définit par récurrence $X^L(1) = X$ et $X^L(n+1) = X^L(n) + \{X, X^L(n)\}$ pour $n \geq 1$. On note $t_X(n)$ le degré de transcendance au sens classique de la sous-algèbre commutative engendrée par $X^L(n)$. Alors $\gamma_X^P \succeq \Pi(t_X)$.*

Preuve. On note $X_P(n)$ le sous-espace de P engendré par les monômes de Poisson de longueur $\leq n$ en les éléments de X. Notons $T_X = \Pi(t_X)$, où l'opérateur Π est défini en 2.21. On veut démontrer que $\dim X_P(n) \geq T_X(n)$.

Notons $d = \Delta(t_X)$, de sorte que $d(i) = t_X(i) - t_X(i-1)$ pour $i \geq 2$ et $d(1) = t_X(1)$. Soit $n \geq 1$ un entier. Comme $t_X(n) = \mathrm{trdeg}\, \mathbb{K}[X^L(n)]$, on peut choisir des éléments algébriquement indépendants $x_{i,j}$, avec $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, d(n)\}$, tels que $x_{i,j} \in X^L(i)$ pour tout i. Les monômes de la forme

$$M(\underline{\boldsymbol{k}}) = M(k_{1,1}, \ldots, k_{n,d(n)}) = x_{1,1}^{k_{1,1}} \ldots x_{1,d(1)}^{k_{1,d(1)}} \ldots x_{n,1}^{k_{n,1}} \ldots x_{n,d(n)}^{k_{n,d(n)}},$$

pour $\underline{\boldsymbol{k}}$ variant dans $\mathbb{N}^{t_X(n)}$, sont linéairement indépendants. De plus, chaque $x_{i,j}^{k_{i,j}} \in X^L(i)^{k_{i,j}} \subseteq X_P(ik_{i,j})$. Par suite, on voit que $M(k_{1,1}, \ldots, k_{n,d(n)}) \in X_P(n)$ si la condition

$$(k_{1,1} + \ldots + k_{1,d(1)}) + \ldots + n(k_{n,1} + \ldots + k_{n,d(n)}) \leq n$$

est satisfaite. Par définition cette inégalité admet $T_X(n)$ solutions telles que $k_{i,j} \in \mathbb{N}$ pour tous i et j, donc on a bien $\dim X_P(n) \geq T_X(n)$.

2.2.4 Algèbres de Lie et algèbres enveloppantes

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et $S(\mathfrak{g})$ son algèbre symétrique, munie du crochet de Poisson qui prolonge le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$. On cherche ici à comparer les dimensions de niveaux q de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $S(\mathfrak{g})$.

Supposons d'abord $\mathfrak{g}$ engendrée par un sous-espace vectoriel de dimension finie X. Alors l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est engendrée par X comme algèbre associative et $S(\mathfrak{g})$ est engendrée par X comme algèbre de Poisson. On notera $\gamma_X^{\mathfrak{g}}(n)$ (resp. $\gamma_X^{\mathcal{U}}(n), \gamma_X^S(n)$) les fonctions de croissance associées et $\lambda_X^{\mathfrak{g}}(n)$ (resp. $\lambda_X^{\mathcal{U}}(n), \lambda_X^S(n)$) leurs dérivées discrètes.

On choisit maintenant une base $\{u_1, u_2, \ldots\}$ de $\mathfrak{g}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_1, \ldots, u_{n_1} \text{ est une base de } X = \mathfrak{g}_X(1) \, ; \\ u_{n_1+1}, \ldots, u_{n_1+n_2} \text{ est une base de } \mathfrak{g}_X(2) \text{ modulo } \mathfrak{g}_X(1) \, ; \\ \ldots \\ u_{n_1+n_2+\ldots+n_k+1}, \ldots, u_{n_1+n_2+\ldots+n_k+n_{k+1}} \text{ est une base de } \mathfrak{g}_X(k+1) \text{ modulo } \mathfrak{g}_X(k) \, ; \\ \ldots \end{cases}$$

En particulier, on a pour tout $k \geq 1$: $n_1 + \ldots + n_k = \dim \mathfrak{g}_X(k) = \gamma_X^{\mathfrak{g}}(k)$, soit encore $n_k = \lambda_X^{\mathfrak{g}}(k)$. D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, les monômes $\{u_{j_1} \ldots u_{j_k} \, | j_1 \leq \ldots \leq j_k\}$ forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Pour le lemme qui suit, on a besoin de la notion de longueur d'un élément dans une algèbre de Poisson. Soit P une algèbre de Poisson engendrée par un sous-espace quelconque $X \subseteq P$. Pour tout $p \in P$, on notera $l_P^X(p) = \inf\{n \geq 1 \, | p \in X_P(n)\}$ la longueur de p relative au système générateur X. Cette notion recoupe bien les notions usuelles de longueur des éléments dans des algèbres de Lie ou associatives.

Lemme 2.61 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de type fini et $\{u_1, u_2, \ldots\}$ une base de $\mathfrak{g}$ construite comme ci-dessus. Soient $j_1, \ldots, j_k \geq 1$ des entiers (non nécessairement ordonnés). On a :*

$$l_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}^X(u_{j_1} \ldots u_{j_k}) = l_{S(\mathfrak{g})}^X(u_{j_1} \ldots u_{j_k}) = l_{\mathfrak{g}}^X(u_{j_1}) + \ldots + l_{\mathfrak{g}}^X(u_{j_k}).$$

Preuve. On peut par exemple procéder comme dans la démonstration de [39, proposition 1].

Proposition 2.62 *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de type fini et $X \subseteq \mathfrak{g}$ un sous-espace générateur de dimension finie. Notons $\gamma_X^{\mathfrak{g}}, \gamma_X^{\mathcal{U}}$ et γ_X^S les fonctions de croissance associées à X dans $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $S(\mathfrak{g})$ respectivement. Alors on a :*

$$\gamma_X^{\mathcal{U}} = \gamma_X^S = \Pi\left(\gamma_X^{\mathfrak{g}}\right),$$

où l'opérateur Π est celui défini en 2.21.

Preuve. On établit le lemme pour l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$; le cas de l'algèbre symétrique se démontre de même. Notons $\lambda_X^{\mathcal{U}} = \Delta(\gamma_X^{\mathcal{U}})$ et $\lambda = \Delta(\gamma_X^L)$. Montrons que pour tout $k \geq 1$, $\lambda_X^{\mathcal{U}}(k)$ est le nombre de solutions de l'équation :

$$1.(n_{1,1} + \ldots + n_{1,\lambda(1)}) + 2.(n_{2,1} + \ldots + n_{2,\lambda(2)}) + \ldots + k.(n_{k,1} + \ldots + n_{k,\lambda(k)}) = k, \qquad (2.26)$$

où les inconnues $n_{i,j}$ sont dans $\mathbb{N}$. Par définition de l'opérateur Π, ceci signifie bien que $\gamma_X^{\mathcal{U}} = \Pi\left(\gamma_X^L\right)$.

Soit $M = u_{j_1} \dots u_{j_s}$ un monôme de Poincaré-Birkhoff-Witt de longueur k. D'après le lemme 2.61, on voit que les u_j apparaissant dans la décomposition de M sont tous de longueur $\leq k$, autrement dit vérifient $j \leq n_1 + \dots + n_k$. Par suite, on peut écrire tout monôme de Poincaré-Birkhoff-Witt de longueur k de la manière suivante :

$$M(n_{1,1}, \dots, n_{k,\lambda(k)}) = u_1^{n_{1,1}} \dots u_{\lambda(1)}^{n_{1,\lambda(1)}} \dots u_{\lambda(1)+\dots+\lambda(k-1)+1}^{n_{k,1}} \dots u_{\lambda(1)+\dots+\lambda(k)}^{n_{k,\lambda(k)}},$$

avec des exposants $n_{i,j} \in \mathbb{N}$. La longueur d'un tel monôme est précisément

$$1.(n_{1,1} + \dots + n_{1,\lambda(1)}) + 2.(n_{2,1} + \dots + n_{2,\lambda(2)}) + \dots + k.(n_{k,1} + \dots + n_{k,\lambda(k)}),$$

donc $(n_{1,1}, \dots, n_{k,\lambda(k)})$ est une solution de (2.26). On peut donc définir une application évidemment surjective entre l'ensemble des monômes de Poincaré-Birkhoff-Witt de longueur k et l'ensemble des solutions de (2.26) ; le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt entraîne aussi qu'elle est injective. La proposition est démontrée.

En appliquant le corollaire 2.25, on obtient :

Corollaire 2.63 *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de type fini, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et $S(\mathfrak{g})$ son algèbre symétrique.*

1. *Pour tout $q \geq 1$, on a $\mathrm{Dim}^q\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^q\, S(\mathfrak{g})$ et $\underline{\mathrm{Dim}}^q\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \underline{\mathrm{Dim}}^q\, S(\mathfrak{g})$.*
2. *Pour tout $q \geq 1$, on a :*

$$\underline{\mathrm{Dim}}^q(\mathfrak{g}) \leq \underline{\mathrm{Dim}}^{q+1}\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \leq \mathrm{Dim}^{q+1}\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \leq \mathrm{Dim}^q(\mathfrak{g}).$$

Preuve. Le n^{o}1 résulte immédiatement de la proposition précédente, car les fonctions de croissances dans $S(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ attachées à un sous-espace générateur $X \subseteq \mathfrak{g}$ sont les mêmes. Le n^{o}2 résulte du corollaire 2.25 si $q \geq 2$. Si $q = 1$, compte tenu du fait que $\mathrm{Dim}^1(\mathfrak{g}) = \underline{\mathrm{Dim}}^1(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{Dim}^2 = \mathrm{GKdim}$, c'est une reformulation des résultats de la théorie classique (voir par exemple [24, exemple 6.9]).

Corollaire 2.64 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\mathrm{lev}(\mathfrak{g}) < \infty$. Alors l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ admet un corps des fractions.*

Preuve. Si $\mathrm{lev}(\mathfrak{g}) < \infty$, on a $\mathrm{lev}\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \leq \mathrm{lev}(\mathfrak{g}) + 1 > \infty$. Par suite, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est intègre et de niveau fini : d'après la proposition 2.45, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ admet bien un corps de fractions.

2.3 Degrés de transcendance

Dans cette partie, les algèbres de Poisson considérées seront toujours unitaires et localisables au sens de la définition 1.9 : autrement dit, le crochet de Poisson de P se prolonge à tout localisé de P. Rappelons que c'est le cas si P est une algèbre associative avec le crochet $\{x, y\} = xy - yx$ ou si P est commutative (proposition 1.13). Enfin, pour tout sous-espace $Y \subseteq P$, on notera $\mathbb{P}(Y)$ la sous-algèbre de Poisson engendrée par Y.

L'étude générale des degrés de transcendance de niveau q (sections 2.3.1 à 2.3.3) est inspirée de l'étude du degré de transcendance de Gelfand-Kirillov par Zhang [42].

2.3.1 Définitions

Définition 2.65 Soient P une algèbre de Poisson et $q \geq 1$ un entier. Le *degré de transcendance de niveau q de P* est défini par la formule :

$$\mathrm{Tdeg}^q(P) = \sup_X \inf_b \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX),$$

où X parcourt l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de P contenant 1_P et b l'ensemble des éléments réguliers de P.

Pour $q = 2$ et P une algèbre associative, muni du crochet de Poisson $\{x, y\} = xy - yx$, on retrouve la notion de degré de transcendance de Gelfand et Kirillov défini en [19]. Pour $q = 1$ on a le résultat suivant :

Proposition 2.66 *Soit P une algèbre de Poisson de type fini. Alors* $\mathrm{Tdeg}^1(P) = \dim(P)$.

Preuve. On rappelle que $\mathrm{Dim}^1(P) = \dim(P)$ pour toute algèbre de Poisson P. Si P est de dimension finie, on a $\mathrm{Dim}^1(Q) \leq \mathrm{Dim}^1(P)$ pour toute sous-algèbre de Poisson $Q \subseteq P$, d'où l'on déduit facilement que $\mathrm{Tdeg}^1(P) \leq \dim(P)$. Étudions l'inégalité réciproque. Si $\mathrm{Tdeg}^1(P) = \infty$, on a aussi $\mathrm{Dim}^1(P) = \infty$. Si $\mathrm{Tdeg}^1(P) < \infty$: soit $X \subseteq P$ un sous-espace de dimension finie. On a :

$$\inf_b \mathrm{Dim}^1\ \mathbb{P}(bX) < \infty,$$

donc il existe un élément régulier $b \in P$ tel que $\dim \mathbb{P}(bX) < \infty$. Dans ce cas, b est un élément régulier de l'algèbre de dimension finie $\mathbb{P}(bX)$: en particulier, b est inversible dans $\mathbb{P}(bX)$. Dans ce cas, $X = b^{-1}.bX \subseteq \mathbb{P}(bX)$, d'où $\mathbb{P}(X) \subseteq \mathbb{P}(bX)$ et aussi $\mathrm{Dim}^1\ \mathbb{P}(X) \leq \mathrm{Dim}^1\ \mathbb{P}(bX) \leq \mathrm{Tdeg}^1(P)$; finalement on a aussi $\mathrm{Dim}^1(P) = \sup_X \mathrm{Dim}^1\ \mathbb{P}(X) \leq \mathrm{Tdeg}^1(P)$.

Dans tout ce qui suit, on pourra se limiter à l'étude du cas où $q \geq 2$. Comme dans la partie 2.1.2.2 pour les fonctions, on voit que s'il existe $q \geq 1$ tel que $0 < \mathrm{Tdeg}^q(P) < \infty$, alors

$\mathrm{Tdeg}^r(P) = \infty$ si $r < q$ et $\mathrm{Tdeg}^q(P) = 0$ si $r > q$: on dira que P est de *niveau de transcendance* q, on notera $q = \mathrm{Tlev}(P)$. On voit facilement que $\mathrm{Tlev}(P) \leq \mathrm{lev}(P)$.

2.3.2 Localisations

Dans tout ce qui suit, un entier $q \geq 1$ est fixé.

Notations 2.67 Soient P une algèbre de Poisson et $X \subseteq P$ un sous-espace de dimsension finie contenant 1_P. On note

$$I_X^q(P) = \inf_b \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX),$$

b décrivant l'ensemble des éléments réguliers de P. On a donc $\mathrm{Tdeg}^q(P) = \sup_X I_X^q(P)$.

Proposition 2.68 *Soient P une algèbre de Poisson et $S \subseteq P$ une partie de Ore à gauche. Alors* $\mathrm{Tdeg}^q(S^{-1}P) \leq \mathrm{Dim}^q(P)$.

Preuve. Soit $X \subseteq S^{-1}P$ un sous-espace de dimension finie. Il existe $s \in S$ tel que $s.X \subseteq P$; dans ce cas on a $\mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(sX) \leq \mathrm{Dim}^q(P)$ et par suite :

$$\inf_b \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX) \leq \mathrm{Dim}^q(P).$$

Il vient alors $\mathrm{Tdeg}^q(P) = \sup_X \inf_b \mathrm{Dim}^q(bX) \leq \mathrm{Dim}^q(P)$, c'est ce qu'on voulait.

Les résultats qui suivent sont établis dans [42, paragraphe 3] pour les degrés de transcendance de Gelfand-Kirillov.

Proposition 2.69 *Soient P une algèbre de Poisson et $S \subseteq P$ un système de Ore à gauche dans P.*

1. *Soit $P \subseteq Q \subseteq S^{-1}P$ une algèbre de Poisson intermédiaire entre P et $S^{-1}P$. Alors :*

$$\mathrm{Tdeg}^q(Q) = \sup_{X_0 \subseteq P} I_{X_0}(Q),$$

$X_0 \subseteq P$ parcourant l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de P contenant 1_P.

2. *Si $P \subseteq Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq S^{-1}P$ on a* $\mathrm{Tdeg}^q(Q_2) \leq \mathrm{Tdeg}^q(Q_1)$.
3. *Si $P \subseteq Q \subseteq S^{-1}P$, on a* $\mathrm{Tdeg}^q(S^{-1}P) \leq \mathrm{Tdeg}^q(Q) \leq \mathrm{Tdeg}^q(P)$.

Preuve. Démontrons le n^{o}1. Comme $P \subseteq Q$, il est clair que

$$\sup_{X_0 \subseteq P} I^q_{X_0}(Q) \leq \sup_{X \subseteq Q} I^q_X(Q) = \mathrm{Tdeg}^q(Q).$$

Réciproquement, soit $X \subseteq Q$ un sous-espace de dimension finie contenant 1_Q. Il existe $s \in S$ tel que $sX \subseteq P$. Soit $X_0 = \mathbb{K}1_P + sX$: on a donc $X \subseteq s^{-1}X_0$. Maintenant, si $b \in Q$ est régulier, l'élément $bs \in Q$ est régulier aussi. Il vient :

$$\begin{aligned} I^q_X(Q) &= \inf_b \mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(bX) \leq \inf_{bs} \mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(bsX) \\ &\leq \inf_{bs} \mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(bss^{-1}X_0) = \inf_b \mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(bX_0) \\ &= I^q_{X_0}(Q) \leq \sup_{X_0 \subseteq P} I^q_{X_0}(Q). \end{aligned}$$

Par passage au sup, on en déduit $\mathrm{Tdeg}^q(Q) \leq \sup_{X_0 \subseteq P} I^q_{X_0}(Q)$.

Démontrons le n^{o}2. Sous nos hypothèses, on voit que si un élément $b \in Q_1$ est régulier dans Q_1, alors b est aussi régulier dans Q_2. Il vient, pour $X_0 \subseteq P$:

$$I^q_{X_0}(Q_2) = \inf_{b \in Q_2} \mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(bX_0) \leq \inf_{b \in Q_1} \mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(bX_0) = I^q_{X_0}(Q_1),$$

puis en passant au sup on obtient $\mathrm{Tdeg}^q(Q_2) \leq \mathrm{Tdeg}^q(Q_1)$. Le n^{o}3 est un cas particulier du n^{o}2.

Proposition 2.70 *Soit P une algèbre de Poisson intègre ; on suppose* $\mathrm{Tdeg}^q(P) < \infty$. *Alors P vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite. On a de plus* $\mathrm{Tdeg}^q(\mathrm{Frac}\, P) \leq \mathrm{Tdeg}^q(P)$.

Preuve. Il suffit de démontrer que P vérifie les conditions de Ore. Supposons par exemple que P ne vérifie pas la condition de Ore à gauche : il existe $x, y \in P$ tels que $Px \cap Py = \{0\}$. Soit $X = \mathbb{K} + \mathbb{K}x + \mathbb{K}y$. Pour tout $b \in P$ non nul, l'algèbre associative $\mathbb{K}[bx, by]$ est isomorphe à l'algèbre non-commutative libre à deux générateurs Lib_2. Comme $\mathbb{P}(bX) \supseteq \mathbb{K}[bx, by]$, on a $\mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(bX) \geq \mathrm{Dim}^q(Lib_2) = \infty$; on a donc $I^q_X(P) = \infty$ puis $\mathrm{Tdeg}^q(P) = \infty$.

Remarque 2.71 Contrairement à la proposition 2.45, on ne peut rien dire en général sur les sous-algèbres quelconques de P. Par exemple, le corps de Weyl $\mathcal{D}_1(\mathbb{C})$ contient une sous-algèbre non-commutative libre, mais $\mathrm{Tdeg}^2\, \mathcal{D}_1(\mathbb{C}) = 2$ (voir [19, 28]).

Théorème 2.72 *Soit P une algèbre de Poisson intègre. On suppose que P admet un corps de fractions qui est de type fini comme corps gauche. Alors :*

1. $\mathrm{Tdeg}^q(P) = \inf_Q\{\mathrm{Dim}^q(Q)\}$, *$Q \subseteq P$ parcourant l'ensemble des sous-algèbres de Poisson de type fini telles que* $\mathrm{Frac}(Q) = \mathrm{Frac}(P)$.
2. *Soit $X \subseteq P$ un sous-espace de dimension finie contenant 1_P. Si* $\mathrm{Frac}\,\mathbb{P}(X) = \mathrm{Frac}(P)$, *alors* $\mathrm{Tdeg}^q(P) = I_X^q(P)$.

Preuve. Démontrons le n^{o}1. Soit $Q \subseteq P$ une sous-algèbre de Poisson de type fini telle que $\mathrm{Frac}(Q) = \mathrm{Frac}(P)$. Comme $Q \subseteq P \subseteq \mathrm{Frac}(Q)$, on a $\mathrm{Tdeg}^q(P) \leq \mathrm{Tdeg}^q(Q) \leq \mathrm{Dim}^q(Q)$. Il vient :

$$\mathrm{Tdeg}^q(P) \leq \inf_Q \mathrm{Dim}^q(Q).$$

Réciproquement, on veut montrer que $\mathrm{Tdeg}^q(P) \geq \inf_Q \mathrm{Dim}^q(Q)$. On peut supposer $\mathrm{Tdeg}^q(P) < \infty$, sinon c'est trivial. Comme P est de type fini, il existe $X \subseteq \mathrm{Frac}(P)$ de dimension finie tel que $\mathrm{Frac}(P) = \mathrm{Frac}\,\mathbb{P}(X)$. Quitte à remplacer X par le sous-espace de P engendré par les numérateurs et les dénominateurs des fractions non-commutatives composant une base de X, on peut supposer $X \subseteq P$. On a alors :

$$I_X^q(P) = \inf_b \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX) \leq \mathrm{Tdeg}^q(P) > \infty.$$

Il existe $b \in P$ non nul tel que $\mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX) < \infty$. On en déduit que $\mathbb{P}(bX)$ vérifie les conditions de Ore. On a alors $\mathrm{Frac}\,\mathbb{P}(bX) \supseteq X$, d'où

$$\mathrm{Frac}\,\mathbb{P}(bX) \supseteq \mathrm{Frac}\,\mathbb{P}(X) = \mathrm{Frac}(P).$$

Il vient :

$$\mathrm{Tdeg}^q(P) \geq I_X^q(P) = \inf_b \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX) \geq \inf_Q \mathrm{Dim}^q(Q).$$

Pour le n^{o}2 : on peut supposer $\mathrm{Tdeg}^q(P) < \infty$. Soit $X \subseteq P$ un sous-espace de dimension finie contenant 1_P et tel que $\mathrm{Frac}\,\mathbb{P}(X) = \mathrm{Frac}(P)$. Soit $b \neq 0$. Comme précédemment, si $\mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX) < \infty$, on a $\mathrm{Frac}\,\mathbb{P}(bX) = \mathrm{Frac}\,\mathbb{P}(X) = \mathrm{Frac}(P)$. Dans ce cas, on a les inégalités :

$$\mathrm{Tdeg}^q(P) \geq I_X^q(P) = \inf \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX) \geq \inf_b \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(X) = \mathrm{Tdeg}^q(P).$$

Définition 2.73 Une algèbre de Poisson P est *stable* si, pour $q = \mathrm{lev}(P)$, on a :

1. $\mathrm{Tdeg}^q(P) = \mathrm{Dim}^q(P)$;
2. pour tout système de Ore à gauche $S \subseteq P$, on a $\mathrm{Tdeg}^q(S^{-1}P) = \mathrm{Tdeg}^q(P)$.

Proposition 2.74 *Soit P une algèbre de Poisson admettant un corps de fractions.*

1. *Si* $\mathrm{Tdeg}^q(P) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P)$ *alors, pour toute sous-algèbre de Poisson* $P \subseteq Q \subseteq \mathrm{Frac}(P)$ *on a* $\mathrm{Tdeg}^q(Q) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P)$.
2. *L'algèbre* P *est stable si et seulement si* $\mathrm{Dim}^q(P) \leq \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P)$.
3. *Si* P *est stable et* $Q \subseteq \mathrm{Frac}(P)$ *vérifie* $\mathrm{Frac}(Q) = \mathrm{Frac}(P)$, *alors* $\mathrm{Dim}^q(Q) \geq \mathrm{Dim}^q(P)$. *Si de plus* $\mathrm{Dim}^q(Q) = \mathrm{Dim}^q(P)$, *alors* Q *est stable.*
4. *Si* P *est stable et* $Q \subseteq P$ *vérifie* $\mathrm{Frac}(Q) = \mathrm{Frac}(P)$, *alors* $\mathrm{Dim}^q(Q) = \mathrm{Dim}^q(P)$ *et* Q *est stable.*

Preuve. Pour le n^{o}1, il suffit de considérer les inégalités :

$$\mathrm{Tdeg}^q(P) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P) \leq \mathrm{Tdeg}^q(Q) \leq \mathrm{Tdeg}^q(P).$$

Vérifions le n^{o}2. Si P est stable, on a $\mathrm{Dim}^q(P) = \mathrm{Tdeg}^q(P) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P)$. Réciproquement, on considère un système de Ore à gauche $S \subseteq P$. On calcule alors :

$$\mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P) \leq \mathrm{Tdeg}^q(S^{-1}P) \leq \mathrm{Tdeg}^q(P) \leq \mathrm{Dim}^q(P) \leq \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P).$$

Il vient $\mathrm{Tdeg}^q(S^{-1}P) = \mathrm{Tdeg}^q(P)$ et P est stable.

Démontrons le n^{o}3. On a $\mathrm{Dim}^q(P) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(Q) \leq \mathrm{Dim}^q(Q)$. Si $\mathrm{Dim}^q(Q) = \mathrm{Dim}^q(P)$, on a $\mathrm{Dim}^q(Q) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(Q)$, d'où la stabilité de Q d'après le n^{o}2.

Pour le n^{o}4 il suffit de voir que $\mathrm{Dim}^q(Q) = \mathrm{Dim}^q(P)$ d'après le n^{o}3. Or

$$\mathrm{Dim}^q(Q) \leq \mathrm{Dim}^q(P) = \mathrm{Tdeg}^q(P) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(Q).$$

D'après le n^{o}2, Q est stable et $\mathrm{Dim}^q(Q) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(Q) = \mathrm{Tdeg}^q\ \mathrm{Frac}(P) = \mathrm{Dim}^q(P)$.

2.3.3 Filtrations

Proposition 2.75 *Soit* P *une algèbre de Poisson unitaire filtrée. On suppose* $Gr(P)$ *intègre.*

1. *Pour tout* $q \geq 1$, *on a* $\mathrm{Tdeg}^q(P) \geq \mathrm{Tdeg}^q\ Gr(P)$.
2. *Supposons en outre* P *localisable. Si* $\mathrm{Dim}^q(P) = \mathrm{Dim}^q\ Gr(P) < \infty$ *et* $Gr(P)$ *est stable, alors* P *est stable.*

Preuve. On note pour simplifier $Q = Gr(P)$. Démontrons le n^{o}1. On a

$$\mathrm{Tdeg}^q(P) = \sup_{X \subseteq P} \inf_b \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX).$$

Notons $\beta = Gr(b)$. Il est clair que $Gr\,\mathbb{P}(bX) \supseteq \mathbb{P}(\beta Gr(X))$. En utilisant le corollaire 2.57, on voit que :

$$\mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}(bX) \geq \mathrm{Dim}^q\ Gr\left(\mathbb{P}(bX)\right) \geq \mathrm{Dim}^q\ \mathbb{P}\left(\beta Gr(X)\right) \geq I^q_{Gr(X)}(Q).$$

Or, pour tout sous-espace de dimension finie $Y \subseteq Q$, il existe un sous-espace gradué de dimension finie $Gr(X) \subseteq Q$ tel que $Y \subseteq Gr(X)$. Il est alors facile de montrer que :

$$\mathrm{Tdeg}^q(Q) = \sup_Y I_Y^q(Q) \leq \sup_X I_{Gr(X)}^q(Q) \leq \sup_X I_X^q(P) = \mathrm{Tdeg}^q(P).$$

Pour le n^{o}2, on a :

$$\mathrm{Dim}^q(P) = \mathrm{Dim}^q(Q) = \mathrm{Tdeg}^q(Q) \leq \mathrm{Tdeg}^q(P),$$

le résultat provient alors de la proposition 2.74, n^{o}2.

2.3.4 Algèbres enveloppantes et corps enveloppants

Dans ce qui suit on fixe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de niveau fini. On note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $K(\mathfrak{g})$ son corps enveloppant (dont l'existence est assurée par le corollaire 2.64), $S(\mathfrak{g})$ son algèbre symétrique, munie du crochet de Poisson canonique et $Q(\mathfrak{g}) = \mathrm{Frac}\ S(\mathfrak{g})$ le corps des fractions de $S(\mathfrak{g})$, muni du crochet de Poisson qui prolonge celui de l'algèbre symétrique. L'algèbre de Poisson $S(\mathfrak{g})$ s'identifie naturellement au gradué associé de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, relativement à la filtration canonique. D'après le corollaire 1.45, $K(\mathfrak{g})$ est filtrée aussi et $Gr\, K(\mathfrak{g}) \simeq H^{-1}S(\mathfrak{g})$, où $H \subseteq S(\mathfrak{g})$ est l'ensemble des éléments homogènes non nuls de $S(\mathfrak{g})$.

Pour tout sous-espace $X \subseteq Q(\mathfrak{g})$, on notera $\mathbb{K}(X)$ le sous-corps de $Q(\mathfrak{g})$ engendré par X. On définit aussi par récurrence :

$$X_1^L = X \ ; \ X_{n+1}^L = X_n^L + \{X, X_n^L\}.$$

Enfin, pour tout $n \geq 1$, on note $t_X(n) = \mathrm{trdeg}\ \mathbb{K}(X_n^L)$ le degré de transcendance au sens classique des algèbres commutatives du sous-corps $\mathbb{K}(X_n^L)$.

Lemme 2.76 *On reprend les notations ci-dessus. Soient $X, Y \subseteq Q(\mathfrak{g})$ deux sous-espaces vectoriels. On suppose que $X \subseteq \mathbb{K}(Y)$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $X_n^L \subseteq \mathbb{K}(Y_n^L)$. En particulier, on a toujours $t_X(n) \leq t_Y(n)$.*

Preuve. Observons d'abord le fait suivant. Pour $V, W \subseteq Q(\mathfrak{g})$, on a :

$$\{\mathbb{K}(V), \mathbb{K}(W)\} \subseteq \mathbb{K}\left(V + W + \{V, W\}\right).$$

En effet, si $\alpha \in \mathbb{K}(V)$ et $\beta \in \mathbb{K}(W)$: il existe deux fractions rationnelles $\alpha^*(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}(t_1, \ldots, t_n)$ et $\beta^*(t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{K}(t_1, \ldots, t_p)$ ainsi que des éléments $v_1, \ldots, v_n \in V$, $w_1, \ldots, w_p \in W$ tels que $\alpha = \alpha^*(v_1, \ldots, v_n)$ et $\beta = \beta^*(w_1, \ldots, w_p)$. On vérifie alors facilement que l'on a :

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \alpha^*}{\partial t_i}(v_1, \ldots, v_n) \frac{\partial \beta^*}{\partial t_j}(w_1, \ldots, w_p)\{v_i, w_j\},$$

d'où $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{K}(V + W + \{V, W\})$.

On peut maintenant établir le lemme. Il s'agit de montrer que $X_n^L \subseteq \mathbb{K}(Y_n^L)$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n = 1$ on a $X \subseteq \mathbb{K}(Y)$ par hypothèse. Supposons maintenant la relation $X_n^L \subseteq \mathbb{K}(Y_n^L)$ satifaite pour un entier $n \geq 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} X_{n+1}^L &= X_n^L + \{X, X_n^L\} \subseteq \mathbb{K}(Y_n^L) + \{\mathbb{K}(Y), \mathbb{K}(Y_n^L)\} \\ &\subseteq \mathbb{K}(Y_n^L + Y + \{Y, Y_n^L\}) = \mathbb{K}(Y_{n+1}^L). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

Proposition 2.77 *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de type fini,* $S(\mathfrak{g})$ *son algèbre symétrique et* $Q(\mathfrak{g}) = \mathrm{Frac}\, S(\mathfrak{g})$*, avec les crochets de Poisson naturels. Alors* $\mathrm{Tdeg}^q\, Q(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^q\, S(\mathfrak{g})$.

Preuve. Notons pour simplifier $S = S(\mathfrak{g})$ et $Q = Q(\mathfrak{g})$. Soit $X \subseteq \mathfrak{g}$ un sous-espace générateur de dimension finie et $X' = X + \mathbb{K}$. Soit $b \in Q$ avec $b \neq 0$. On pose $Y = bX'$. Comme $bX \subseteq Y$ et $b \in Y$, on a aussi $X \subseteq \mathbb{K}(Y)$, d'où pour tout $n \geq 1$: $t_X(n) \leq t_Y(n)$.

Par ailleurs, on a $t_X(n) = \dim X_n^L$. En effet, des éléments linéairement indépendants dans $\mathfrak{g}$ sont algébriquement indépendants dans $Q(\mathfrak{g})$. On voit ensuite que, par construction, X_n^L est le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les monômes de Lie de longueur $\leq n$ en les éléments de X ; en particulier $\dim X_n^L = \gamma_X(\mathfrak{g}; n)$.

On a, d'après le corollaire 2.63 :

$$\gamma_X^S = \Pi(\gamma_X^{\mathfrak{g}}) = \Pi(t_X).$$

Comme $t_X(n) \leq t_Y(n)$, on a d'après le lemme 2.22 $\Pi(t_X) \preceq \Pi(t_Y)$. La proposition 2.60 donne l'inégalité $\Pi(t_Y) \preceq \gamma_Y^Q$. Il vient finalement $\gamma_X^S \preceq \gamma_Y^Q$, d'où :

$$\mathrm{Dim}^q(S) = \mathrm{Dim}^q(\gamma_X^S) \leq \mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(Y).$$

Comme $\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(bX')$, on a :

$$\mathrm{Dim}^q(S) \leq \inf_b \mathrm{Dim}^q\, \mathbb{P}(bX') \leq \mathrm{Tdeg}^q(Q) = \mathrm{Tdeg}^q\, \mathrm{Frac}(S) \leq \mathrm{Dim}^q(S).$$

Théorème 2.78 *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de niveau fini. Pour tout* $q \in \mathbb{N}^\star$*, on a :*

$$\mathrm{Tdeg}^q\, K(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^q\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^q\, S(\mathfrak{g}) = \mathrm{Tdeg}^q\, Q(\mathfrak{g}). \tag{2.27}$$

Si de plus $\mathrm{Dim}^{q-1}(\mathfrak{g}) = \underline{\mathrm{Dim}}^{q-1}(\mathfrak{g}) < \infty$*, alors* $\mathrm{Tdeg}^q\, K(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^{q-1}(\mathfrak{g})$.

Preuve. On note $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $S = S(\mathfrak{g})$ et $K = K(\mathfrak{g})$. D'après le corollaire 2.63 et la proposition précédente, on a :

$$\mathrm{Dim}^q(\mathcal{U}) = \mathrm{Dim}^q(S) = \mathrm{Tdeg}^q(S).$$

En particulier l'algèbre S est stable. Comme de plus $Gr(\mathcal{U}) \simeq S$ avec $\mathrm{Dim}^q(\mathcal{U}) = \mathrm{Dim}^q(S)$, l'algèbre $\mathcal{U}$ est stable aussi d'après la proposition 2.75. En particulier on a $\mathrm{Tdeg}^q(K) = \mathrm{Dim}^q(\mathcal{U})$. La dernière assertion provient du théorème 2.63.

2.3.5 Application : algèbres de Lie de champs de vecteurs

Dans cette partie, on choisit comme corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le corps des nombres complexes. Les descriptions utilisées des algèbres de type Cartan sont tirées de [25].

On commence par introduire des outils commodes pour les calculs explicites de dimensions de niveau q des algèbres de Lie.

2.3.5.1 Suites exactes

Proposition 2.79 *On considère une suite exacte d'algèbres de Lie* $0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{q} \to 0$. *On suppose* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{q}$ *de type fini. En outre, on suppose* $\mathfrak{g}$ *de dimension infinie.*

1. *Si* $\mathfrak{h}$ *est de dimension finie, alors les croissances de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{q}$ *sont égales. En particulier, pour tout* $q \geq 2$, *on a* $\mathrm{Dim}^q(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^q(\mathfrak{q})$ *et* $\underline{\mathrm{Dim}}^q(\mathfrak{g}) = \underline{\mathrm{Dim}}^q(\mathfrak{q})$.
2. *Si* $\mathfrak{q}$ *est de dimension finie, alors les croissances de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h}$ *sont égales. En particulier, pour tout* $q \geq 2$, *on a* $\mathrm{Dim}^q(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^q(\mathfrak{h})$ *et* $\underline{\mathrm{Dim}}^q(\mathfrak{g}) = \underline{\mathrm{Dim}}^q(\mathfrak{h})$.

Preuve. Démontrons le premier point. La suite exacte d'algèbres de Lie $0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{q} \to 0$ induit une suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules. D'après la proposition 2.49, n^{o}2, les croissances de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{q}$ comme $\mathfrak{g}$-modules sont égales. D'après le n^{o}3 de la même proposition, la croissance de $\mathfrak{q}$ comme $\mathfrak{g}$-module ou comme $\mathfrak{q}$-module sont les mêmes. On peut enfin conclure grâce au fait que la croissance de $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie est égale à la croissance de $\mathfrak{g}$ comme $\mathfrak{g}$-module, et similairement pour $\mathfrak{q}$.

Pour le deuxième point on applique encore la proposition 2.49 : les croissances de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ comme $\mathfrak{h}$-modules sont les mêmes. Enfin, il est facile de vérifier que les croissances de $\mathfrak{g}$ comme $\mathfrak{g}$-module et comme $\mathfrak{h}$-modules sont égales.

2.3.5.2 Algèbres de Lie filtrées

Proposition 2.80 *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie filtrée en dimension finie par une famille* $\{\mathfrak{g}_n\}_{n\geq 1}$. *Pour tout* $n \geq 1$, *on pose* $d(n) = \dim(\mathfrak{g}_n)$. *On note enfin* $\mathfrak{gr}(\mathfrak{g})$ *l'algèbre de Lie graduée associée.*

1. *Si* $\mathfrak{gr}(\mathfrak{g})$ *est de type fini, alors* $\mathfrak{g}$ *est de type fini aussi et on a :*
$$\Gamma(\mathfrak{g}) = \Gamma\left(\mathfrak{gr}(\mathfrak{g})\right) = \Gamma(d).$$
2. *On suppose qu'il existe deux entiers* $k, N > 0$ *tels que* $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_n] = \mathfrak{g}_{n+k}$ *pour tout* $n \geq N$. *Alors* $\mathfrak{gr}(\mathfrak{g})$ *est de type fini.*

Preuve. Démontrons le n^{o}1. L'algèbre associative $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, munie de la filtration induite par celle de $\mathfrak{g}$, est filtrée sur $\mathbb{N}$ en dimension finie avec $A_0 = \mathbb{K}$. Comme $Gr\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}\left(\mathfrak{gr}(\mathfrak{g})\right)$, l'algèbre $Gr(A)$ est aussi de type fini. Enfin, l'espace $M = \mathfrak{g}$ est muni d'une filtration de A-modules en dimension finie, de telle sorte que le $Gr(A)$-module $Gr(M)$ est de type fini. On applique [24, proposition 6.6] : on a les identités

$$\Gamma^A(\mathfrak{g}) = \Gamma^{Gr(A)}\left(\mathfrak{gr}(\mathfrak{g})\right) = \Gamma(d).$$

Pour finir, il reste à remarquer que $\Gamma^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}) = \Gamma^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \Gamma(\mathfrak{g})$, autrement dit les croissances de $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie, comme $\mathfrak{g}$-module et comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module sont les mêmes. Il en va de même pour $\mathfrak{gr}(\mathfrak{g})$. Le n^{o}1 est établi.

Pour le n^{o}2, on pose par commodité $\mathfrak{h} = \mathfrak{gr}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{h}^{(n)} = \mathfrak{g}_n/\mathfrak{g}_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Pour montrer que $\mathfrak{h}$ est de type fini, on montre que $\mathfrak{h}$ est engendrée par $\displaystyle\sum_{j=1}^{N+k} \mathfrak{h}^{(j)}$. À cet effet, il suffit par exemple de voir que $\mathfrak{h}^{(n+k)} \subseteq [\mathfrak{h}^{(k)}, \mathfrak{h}^{(n)}]$ pour tout $n \geq N$. Soient $n \geq N$ et $x \in \mathfrak{g}_{n+k} \smallsetminus \mathfrak{g}_{n+k-1}$. Par hypothèse, il existe des éléments $a_i \in \mathfrak{g}_k$, $b_i \in \mathfrak{g}_n$ en nombre fini tels que $x = \displaystyle\sum_i [a_i, b_i]$. Comme $[a_i, b_i] \in [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_n] \subseteq \mathfrak{g}_{n+k}$, on a :

$$\begin{aligned} gr(x) = x + \mathfrak{g}_{n+k-1} &= \left(\sum_i [a_i, b_i]\right) + \mathfrak{g}_{n+k-1} = \sum_i \left([a_i, b_i] + \mathfrak{g}_{n+k-1}\right) \\ &= \sum_i [a_i + \mathfrak{g}_{k-1}, b_i + \mathfrak{g}_{n-1}] = \sum_i [gr(a_i), gr(b_i)], \end{aligned}$$

avec $gr(a_i) \in \mathfrak{h}^{(k)}$ et $gr(b_i) \in \mathfrak{h}^{(n)}$. Le n^{o}2 est établi.

Terminologie 2.81 Soit S une algèbre associative ou de Lie. On suppose S munie d'une filtration $\{S_n\}_{n \geq 1}$. On dira que la filtration est *régulière* s'il existe deux entiers $k, N > 0$ tels que :

$$(\forall\, n \geq N) \ : \ S_k.S_n = S_{n+k}.$$

2.3.5.3 Produits tensoriels

Dans ce qui suit, les produits tensoriels considérés sont des produits tensoriels sur $\mathbb{K}$. On notera alors $\otimes$ au lieu de $\otimes_{\mathbb{K}}$. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et A une algèbre associative, commutative, unitaire. L'espace vectoriel $A \otimes \mathfrak{g}$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie vérifiant $[a \otimes x, a' \otimes x'] = (aa') \otimes [x, x']$, pour tous $a, a' \in A$ et $x, x' \in \mathfrak{g}$.

Lemme 2.82 *Supposons A et $\mathfrak{g}$ munies de filtrations régulières $\{A_m\}_{m\geq 1}$ et $\{\mathfrak{g}_m\}_{m\geq 1}$. On définit une suite de sous-espaces du produit tensoriel $\mathfrak{p} = A \otimes \mathfrak{g}$ par $\mathfrak{p}_m = A_m \otimes \mathfrak{g}_m$ pour tout $m \geq 1$. Alors la famille $(\mathfrak{p}_m)_{m\geq 1}$ est une filtration régulière de $\mathfrak{p}$.*

Preuve. Il est clair que la suite $(\mathfrak{p}_m)_{n\geq 1}$ est une filtration de $\mathfrak{p}$. Montrons qu'elle est régulière. Par hypothèse, il existe $k, N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $A_k A_n = A_{n+k}$; il existe aussi $k', N' \geq 1$ tels que l'on ait $[\mathfrak{g}_{k'}, \mathfrak{g}_n] = \mathfrak{g}_{n+k'}$ pour tout $n \geq N'$. Quitte à changer N et N' en $\max\{N, N'\}$ on peut supposer $N = N'$. Montrons qu'on peut aussi se ramener au cas où $k = k'$. Soient $n \geq N$ et $q \geq 1$. Par régularité de la filtration de A, on a :

$$A_{n+qk} = A_k A_{n+(q-1)k} = \ldots = (A_k)^q A_n.$$

Par définition des filtrations d'algèbres, on a toujours $(A_k)^q A_n \subseteq A_{qk} A_n \subseteq A_{qk+n}$. Il vient, pour tous $n \geq N$ et $q \geq 1$:

$$A_{n+qk} \subseteq A_{qk} A_n \subseteq A_{qk+n},$$

d'où $A_{qk} A_n = A_{qk+n}$. Ceci prouve qu'on peut remplacer k par tout multiple de k dans le cas de l'algèbre associative A. Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on procèderait de même pour voir qu'on peut remplacer k' par tout multiple de k'. On se ramène enfin au cas où $k = k'$ en remplaçant ces deux entiers par le ppcm de k et k'.

On peut maintenant achever la preuve du lemme. Soient $a \in A_{n+k}$ et $x \in \mathfrak{g}_{n+k}$; montrons que $a \otimes x \in [\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_n]$. Par linéarité, on peut supposer a et x de la forme $a = a_k a_n$ et $x = [x_k, x_n]$, avec $a_k \in A_k,\ a_n \in A_n$ et $x_k \in \mathfrak{g}_k,\ x_n \in \mathfrak{g}_n$. Mais alors $a \otimes x = a_k a_n \otimes [x_k, x_n] = [a_k \otimes x_k, a_n \otimes x_n] \in [\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_n]$, c'est ce qu'on voulait.

2.3.5.4 L'algèbre $\mathfrak{vect}(n)$

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'algèbre des fonctions polynômiales sur $\mathbb{C}^n$. On note alors $\mathfrak{vect}(n) = Der\,\mathbb{C}[X]$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{C}^n$. C'est un $\mathbb{C}[X]$-module libre, avec $\mathfrak{vect}(n) = \mathbb{C}[X]\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[X]\frac{\partial}{\partial x_n}$.

On utilisera dans la suite les notation multi-indicielles suivantes. Pour tout élément $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. On note aussi $\varepsilon_k = (\delta_{1,k}, \ldots, \delta_{n,k})$ le n-uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice k qui vaut 1. On pose en outre, pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$ (quand ces expressions sont définies) :

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{C}[X], \\ e_\alpha^k &= x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathfrak{vect}(n). \end{aligned}$$

On a donc, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$ et $1 \leq j, k \leq n$:

$$[e_\alpha^j, e_\beta^k] = \beta_j e_{\alpha+\beta}^k - \alpha_k e_{\alpha+\beta}^j. \tag{2.28}$$

Théorème 2.83 *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{vect}(n)$ *admet un corps enveloppant. On a de plus :*

$$\mathrm{Tdeg}^3\ K\big(\mathfrak{vect}(n)\big) = n.$$

Preuve. Traitons d'abord le cas où $n = 1$. On note $e_n = x^{n+1}\frac{\partial}{\partial x}$, pour tout $n \geq -1$. On a donc les relations $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$ pour tous $i, j \geq -1$. On pose, pour $m \geq 1$:

$$\mathfrak{g}_m = \sum_{j=-1}^{m} \mathbb{C}e_j.$$

Il est facile de vérifier que la famille $\{\mathfrak{g}_m\}_{m\geq 1}$ est une filtration de $\mathfrak{vect}(1)$. Vérifions aussi qu'elle est régulière. Soit $m \geq 2$, on va montrer que $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \mathfrak{g}_{m+1}$. L'inclusion $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] \subseteq \mathfrak{g}_{m+1}$ provient du fait qu'on est en présence d'une filtration d'algèbre de Lie. Soit à présent $j \leq m+1$: montrons que $e_j \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m]$. On étudie séparément les cas où $j = 0$, $j \leq m$ mais $j \neq 0$ et $j = m + 1$.

Si $j = 0$, on utilise la relation $2e_0 = [e_{-1}, e_1] \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subseteq [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m]$. Si $j \leq m$ et $j \neq 0$, on a :

$$[e_0, e_j] = je_j,$$

d'où $e_j = [j^{-1}e_0, e_j] \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m]$. Pour finir, on suppose $j = m + 1$. On a alors $[e_1, e_m] = (m - 1)e_{m+1}$. Comme $m \geq 2$, on a $m - 1 \neq 0$ d'où $e_{m+1} \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m]$. La filtration est bien régulière.

On a $d(m) = \dim(\mathfrak{g}_m) = m+2$. D'après la proposition 2.80, la croissance de $\mathfrak{vect}(1)$ est égale à la croissance de la fonction d, d'où l'on déduit immédiatement que $\mathrm{Dim}^2\ \mathfrak{vect}(1) = \underline{\mathrm{Dim}}^2\ \mathfrak{vect}(1) = 1$. D'après le théorème 2.78, $\mathfrak{vect}(1)$ admet un corps enveloppant, et l'on a $\mathrm{Tdeg}^3\ K\big(\mathfrak{vect}(1)\big) = 1$.

Traitons à présent le cas $n \geq 2$. Pour simplifier les écritures, on notera $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(n)$. Pour tout $m \geq 1$, on note $\mathfrak{g}_m$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les éléments e_α^k avec $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $|\alpha| \leq m$. En utilisant les relations (2.28), on voit que la famille $\{\mathfrak{g}_m\}_{m\geq 1}$ est une filtration de $\mathfrak{g}$. De plus la dimension de $\mathfrak{g}_m$ est donnée par un polynôme $d(m)$ de degré n. D'après la proposition 2.56, il vient : $\mathrm{Dim}^2(\mathfrak{g}) \leq \mathrm{Dim}^2(d) = n$.

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ définie comme suit :

$$\mathfrak{h} = \{f(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} \mid f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[X]\}.$$

On voit que $\mathfrak{h}$ s'identifie au produit tensoriel $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{C}[X_2, \ldots, X_n] \otimes \mathfrak{vect}(1)$. L'algèbre de polynômes $A = \mathbb{C}[X_2, \ldots, X_n]$ est munie d'une filtration régulière $\{A_m\}_{m\geq 1}$ telle que $\dim(A_m)$ soit un polynôme de degré $n - 1$. En utilisant l'étude de $\mathfrak{vect}(1)$ ci-dessus et le lemme 3.28, on voit que $\mathfrak{h}$ est muni d'une filtration régulière $\{\mathfrak{h}_m\}_{m\geq 1}$ telle que $\dim(\mathfrak{h}_m)$ soit donnée par une fonction polynômiale $P(m)$ de degré n. La croissance de $\mathfrak{h}$ est égale à la croissance de P d'après la proposition 2.80. Il vient :

$$\underline{\mathrm{Dim}}^2(\mathfrak{g}) \geq \underline{\mathrm{Dim}}^2(\mathfrak{h}) = n.$$

D'après le théorème 2.78, $\mathfrak{vect}(n)$ admet un corps enveloppant, et on a $\mathrm{Tdeg}^3\ K\big(\mathfrak{vect}(n)\big) = n$.

2.3.5.5 L'algèbre $\mathfrak{svect}(n)$.

Soit $\partial = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathfrak{vect}(n)$. On pose $\mathrm{div}(\partial) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial x_k}(x) \in \mathbb{C}[X]$. On a la relation, pour tous $\partial_1, \partial_2 \in \mathfrak{vect}(n)$: $\mathrm{div}\,[\partial_1, \partial_2] = \partial_1(\mathrm{div}\ \partial_2) - \partial_2(\mathrm{div}\ \partial_1)$. En particulier on a une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{svect}(n) = \{\partial \in \mathfrak{vect}(n) \mid \mathrm{div}(\partial) = 0\}$.

Remarque 2.84 On voit facilement que $\mathfrak{svect}(1)$ est de dimension 1. On supposera donc, dans toute la suite, qu'on a $n \geq 2$.

Théorème 2.85 *L'algèbre de Lie $\mathfrak{svect}(n)$ admet un corps enveloppant. Si $n \geq 2$, on a :*

$$\mathrm{Tdeg}^3\ K\big(\mathfrak{svect}(n)\big) = n.$$

Preuve. Étudions d'abord le cas où $n = 2$. On pose :

$$A = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \geq -1 \text{ et } \alpha \neq (-1, -1)\}.$$

Pour tout $\alpha \in A$, on définit :

$$S_\alpha = (\alpha_2 + 1)x^\alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - (\alpha_1 + 1)x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Les $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ forment une base de $\mathfrak{svect}(2)$, et on a :

$$(\forall\ \alpha, \beta \in A)\ :\ [S_\alpha, S_\beta] = c(\alpha, \beta) S_{\alpha+\beta}, \tag{2.29}$$

où $c(\alpha, \beta) = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)$.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $\|\alpha\| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. On pose alors $\mathfrak{g}_1 = Vect\{S_\alpha \mid \alpha \in A,\ \|\alpha\| \leq 1$ et, pour $m \geq 2$: $\mathfrak{g}_m = Vect\{S_\alpha \mid \alpha \in A,\ \|\alpha\| \leq m,\ \alpha \neq (m, m)\}$. À l'aide des formules explicites (2.29), on voit que $(\mathfrak{g}_m)_{m \geq 1}$ est une filtration de $\mathfrak{svect}(2)$; on va montrer qu'elle est régulière. Par exemple, on montre que pour $m \geq 2$, on a $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \mathfrak{g}_{m+1}$. Soit $\alpha \in A$ tel que $\alpha_1, \alpha_2 \leq m + 1$. On distingue trois cas cas.

Si $\|\alpha\| \leq m$ et $\alpha_1 \neq \alpha_2$, on a :

$$[S_0, S_\alpha] = (\alpha_2 - \alpha_1) S_\alpha,$$

d'où $S_\alpha \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m]$ car $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$. Si $\|\alpha\| \leq m$ et $\alpha_1 = \alpha_2$, on a, avec $\varepsilon_2 = (0, 1)$:

$$[S_{\varepsilon_2}, S_{\alpha - \varepsilon_2}] = (\alpha_1 + 2) S_\alpha.$$

Comme $\alpha_1 \geq -1$, on a $\alpha_1 + 2 \neq 0$ d'où $S_\alpha \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m]$.

Supposons ensuite $\|\alpha\| = m + 1$. Si $S_\alpha \in \mathfrak{g}_{m+1}$, on ne peut pas avoir $\alpha_1 = \alpha_2 = m + 1$. Sans perte de généralité, on supposera $\alpha_1 \leq m$ et $\alpha_2 = m + 1$ (le cas $\alpha_1 = m + 1$ et $\alpha_2 \leq m$ se traiterait de même). Soit $\varepsilon = (1, 1)$. Si $\alpha_1 \geq 0$, on a :

$$[S_\varepsilon, S_{\alpha-\varepsilon}] = 2(\alpha_1 - \alpha_2)S_\alpha,$$

comme $\alpha_2 = m + 1 > \alpha_1$ on en déduit $S_\alpha \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m]$. Si $\alpha_1 = -1$, on a la relation :

$$[S_{\varepsilon_2}, S_{\alpha-\varepsilon_2}] = -\alpha_2 S_\alpha,$$

avec $-\alpha_2 = -(m + 1) \neq 0$. Il vient encore $S_\alpha \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m]$.

On voit enfin que $d(m) = \dim(\mathfrak{g}_m) = (m + 2)^2 - 2$ pour $m \geq 2$; on en déduit en utilisant la proposition 2.80 que $\mathrm{Dim}^2\big(\mathfrak{svect}(2)\big) = \underline{\mathrm{Dim}}^2\big(\mathfrak{svect}(2)\big) = 2$.

Étudions à présent le cas $n \geq 3$. Comme $\mathfrak{svect}(n)$ se plonge dans $\mathfrak{vect}(n)$, on a $\mathrm{Dim}^2\big(\mathfrak{svect}(n)\big) \leq \mathrm{Dim}^2\big(\mathfrak{vect}(n)\big) = n$. Pour l'inégalité réciproque, on considère la sous-algèbre $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{svect}(n)$ engendrée par les dérivations de la forme

$$\partial = p(x_1, \ldots, x_{n-2}) \left(q(x_{n-1}, x_n)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + r(x_{n-1}, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

avec $\mathrm{div}(\partial) = 0$. Il est facile de voir que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-2}] \otimes \mathfrak{svect}(2)$. En utilisant le lemme 3.28 on montre que $\underline{\mathrm{Dim}}^2\big(\mathfrak{svect}(n)\big) \geq \underline{\mathrm{Dim}}^2(\mathfrak{h}) = n$ (comme il a été fait pour l'algèbre $\mathfrak{vect}(n)$). Il vient $\mathrm{Dim}^2\big(\mathfrak{svect}(n)\big) = \underline{\mathrm{Dim}}^2\big(\mathfrak{svect}(n)\big) = n$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème 2.78.

2.3.5.6 L'algèbre de Poisson.

On définit sur $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n]$ le crochet de Poisson standard par la formule usuelle $\{f, g\} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}$. On notera $\mathfrak{po}(2n)$ l'algèbre de Lie sous-jacente. L'élément unité de l'algèbre associative $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n]$ sera noté $1_{\mathfrak{po}} \in \mathfrak{po}(2n)$. C'est un élément central pour le crochet de Lie $\{., .\}$.

Théorème 2.86 *L'algèbre de Lie $\mathfrak{po}(2n)$ admet un corps enveloppant. On a de plus :*

$$\mathrm{Tdeg}^3\, K\big(\mathfrak{po}(2n)\big) = 2n.$$

Preuve. On utilise les notations multi-indicielles usuelles. Pour tout entier $m \geq 1$, on pose $\mathfrak{g}_m = Vect\{p^\alpha q^\beta \mid |\alpha + \beta| \leq m + 2\}$. On a les relations, pour tous $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{N}^n$:

$$\{p^\alpha q^\beta, p^a q^b\} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j b_j - a_j \beta_j)\, p^{\alpha+a-\varepsilon_j} q^{\beta+b-\varepsilon_j}.$$

À l'aide de ces relations explicites, on va démontrer comme dans le cas de $\mathfrak{svect}(2)$ que la famille $(\mathfrak{g}_m)_{m\geq 1}$ est une filtration régulière de $\mathfrak{po}(2n)$. On peut ensuite conclure comme dans les théorèmes 2.83 et 2.85.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha+\beta| \leq m+3$, de sorte que $p^\alpha q^\beta \in \mathfrak{g}_{m+1}$. On suppose $m \geq 4n$ (l'utilité de cette condition apparaîtra ultérieurement). Montrons que $p^\alpha q^\beta \in \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m\}$. On suppose tout d'abord que $|\alpha+\beta| \leq m+2$, de sorte que $p^\alpha q^\beta \in \mathfrak{g}_m$ en réalité. Si $\alpha \neq \beta$, il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\alpha_k \neq \beta_k$. On a alors :

$$\{p_k q_k, p^\alpha q^\beta\} = (\beta_k - \alpha_k) p^\alpha q^\beta.$$

Comme $p_k q_k \in \mathfrak{g}_1$, on en déduit que $p^\alpha q^\beta \in \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m\}$.

Si $\alpha = \beta = 0$, on a $1_{\mathfrak{po}} = \{p_1, q_1\} \in \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m\}$. Si $\alpha = \beta \neq 0$, il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\alpha_k = \beta_k > 0$. Dans ce cas, on a :

$$\{p_k^2, p^{\alpha-\varepsilon_k} q^{\alpha+\varepsilon_k}\} = 2\beta_k p^\alpha q^\beta.$$

On en déduit encore que $p^\alpha q^\beta \in \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m\}$.

On suppose à présent que $|\alpha+\beta| = m+3$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $p_k^2 q_k \in \mathfrak{g}_1$. Lorsque $\alpha_k > 0$, on a alors :

$$\{p_k^2 q_k, p^{\alpha-\varepsilon_k} q^\beta\} = (2(\alpha_k - 1) - \beta_k)\, p^\alpha q^\beta.$$

Lorsque $2(\alpha_k - 1) - \beta_k \neq 0$, on en déduit que $p^\alpha q^\beta \in \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m\}$. Si $\beta_k > 0$, on obtient la même conclusion en échangeant les rôles de p et q sous la condition $2(\beta_k - 1) - \alpha_k \neq 0$. Il reste à étudier le cas où, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a soit $\alpha_k = \beta_k = 0$, soit $2(\beta_k - 1) - \alpha_k = 2(\alpha_k - 1) - \beta_k = 0$. Ceci implique alors que, pour tout k, on a $\alpha_k = \beta_k = 0$ ou $\alpha_k = \beta_k = 2$. En particulier $|\alpha+\beta| \leq 4n$. Or on a $|\alpha+\beta| = m+3 \geq 4n+3$, ce cas n'est donc jamais réalisé. Le théorème est démontré.

2.3.5.7 L'algèbre $\mathfrak{h}(2n)$.

Pour tout polynôme $f \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n]$ on pose $H_f = \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j} \in \mathfrak{vect}(2n)$. On remarque que la dérivation H_f n'est autre que la dérivation hamiltonienne $ham(f)$ associée à f dans l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n]$, vue comme algèbre de Poisson au moyen du crochet de Poisson standard. L'application $f \mapsto H_f$ est donc un morphisme d'algèbres de Lie. On appelle *algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens* son image ; on la note $\mathfrak{h}(2n)$. On voit qu'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{C}.1_{\mathfrak{po}} \to \mathfrak{po}(2n) \to \mathfrak{h}(2n) \to 0,$$

où $1_{\mathfrak{po}}$ désigne encore l'élément unité de $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n]$ vu comme élément de $\mathfrak{po}(2n)$.

Théorème 2.87 *L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(2n)$ admet un corps enveloppant. On a de plus :*

$$\mathrm{Tdeg}^3\ K\big(\mathfrak{h}(2n)\big) = 2n.$$

Preuve. Ici, il suffit d'utiliser le lemme 2.79 et le théorème 2.86.

2.3.5.8 L'algèbre $\mathfrak{k}(2n+1)$.

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[t; q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n]$; les dérivations considérées dans ce qui suit sont des dérivations de cette algèbre ; on identifiera $Der\,\mathbb{C}[X]$ à $\mathfrak{vect}(2n+1)$. Notons E la dérivation eulérienne :

$$E = \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial}{\partial q_j} + p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \in \mathfrak{vect}(2n+1).$$

Pour $f \in \mathbb{C}[X]$, on pose :

$$H_f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j} \in \mathfrak{vect}(2n+1).$$

Pour tout $f \in \mathbb{C}[X]$ on pose alors $D(f) = 2f - E(f) \in \mathbb{C}[X]$ et :

$$K_f = D(f)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} E + H_f \in \mathfrak{vect}(2n+1).$$

Pour $f, g \in \mathbb{C}[X]$ on pose enfin $\{f,g\}_P = H_f(g) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} \in \mathbb{C}[X]$. Le *crochet de Lagrange* (ou *crochet de contact*) de f et g est défini par la formule :

$$\{f,g\}_L = D(f)\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} D(g) - \{f,g\}_P.$$

Lemme 2.88 *On reprend les notations précédentes.*

1. *Le crochet $\{.,.\}_L$ est un crochet de Lie sur $\mathbb{C}[X]$. Ce n'est pas une bidérivation. On notera $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie $\big(\mathbb{C}[X], \{.,.\}_L\big)$.*
2. *L'application $K\colon f \in \mathcal{L} \mapsto K_f \in \mathfrak{vect}(2n+1)$ est un morphisme d'algèbres de Lie injectif.*

Preuve. Ce résultat figure dans [25, paragraphe 1.2].

L'image du morphisme K s'appelle *algèbre de Lie des champs de contact* ; on la note $\mathfrak{k}(2n+1)$. Par construction, on a $\mathfrak{k}(2n+1) \simeq \mathcal{L}$: dans la suite, on identifiera $\mathfrak{k}(2n+1)$ à l'espace $\mathbb{C}[X]$, muni du crochet de contact $\{.,.\}_L$. À l'aide de méthodes analogues à celles utilisées précédemment, on démontre :

Théorème 2.89 *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{k}(2n+1)$ *admet un corps enveloppant. On a de plus :*

$$\mathrm{Tdeg}^3\ K\big(\mathfrak{k}(2n+1)\big) = 2n+1.$$

Preuve. On notera pour simplifier $\mathbb{C}[q,p]$ au lieu de $\mathbb{C}[q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n]$. Comme $\mathfrak{k}(2n+1) \subseteq \mathfrak{vect}(2n+1)$, l'inégalité $\mathrm{Dim}^2\ \big(\mathfrak{k}(2n+1)\big) \leq 2n+1$ est claire.

D'autre part, on considère $\mathfrak{g}_m$ le sous-espace de $\mathfrak{k}(2n+1)$ formé des polynômes en t de degré $\leq m$, autrement dit :

$$\mathfrak{g}_m = \sum_{j=0}^{m} \mathbb{C}[q,p]t^m.$$

On a $\{t^a f(q,p), t^b g(q,p)\}_L = -t^{a+b}\{f,g\}_P + r$, où $r \in \mathbb{C}[t;p,q]$ est un polynôme en t de degré $\leq a+b-1$, autrement dit $r \in \mathfrak{g}_{a+b-1}$. On peut en déduire que $(\mathfrak{g}_m)_{m\geq 0}$ est une filtration de $\mathfrak{k}(2n+1)$ pour laquelle $\mathfrak{gr}\big(\mathfrak{k}(2n+1)\big) \simeq \mathbb{C}[t] \otimes \mathfrak{po}(2n)$ (attention, ce n'est pas une filtration en dimension finie). La croissance de $\mathfrak{k}(2n+1)$ est plus grande que celle de $\mathfrak{gr}\big(\mathfrak{k}(2n+1)\big)$ (corollaire 2.57) ; on en déduit aussi que $\underline{\mathrm{Dim}}^2\,\mathfrak{k}(2n+1) \geq \underline{\mathrm{Dim}}^2\,\mathfrak{gr}\big(\mathfrak{k}(2n+1)\big)$. En utilisant le lemme 3.28 et le théorème 2.86, on a $\underline{\mathrm{Dim}}^2\,\mathbb{C}[t] \otimes \mathfrak{po}(2n) = 2n+1$, d'où $\underline{\mathrm{Dim}}^2\,\mathfrak{k}(2n+1) \geq 2n+1$.

Finalement on en déduit que $\mathrm{Dim}^2\ \mathfrak{k}(2n+1) = \underline{\mathrm{Dim}}^2\,\mathfrak{k}(2n+1) = 2n+1$. D'après le théorème 2.78, $\mathfrak{k}(2n+1)$ admet un corps enveloppant tel que $\mathrm{Tdeg}^3\ K\big(\mathfrak{k}(2n+1)\big) = 2n+1$.

Chapitre 3

Corps enveloppants des algèbres de type Witt

Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier les corps enveloppants d'une classe d'algèbres de Lie de dimension infinie étudiées par R. Yu en [41], les algèbres de type Witt et Virasoro.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique 0 et Γ un groupe abélien libre de rang fini. Dans la première partie, on définit les algèbres de Lie de type Witt et Virasoro paramétrées par un plongement additif $f : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$. Soient $\mathfrak{w}(f)$ (resp. $Vir(f)$) l'algèbre de type Witt (resp. Virasoro) paramétrée par f. On établit l'existence d'un corps enveloppant en calculant les dimensions de niveau 2 de ces algèbres de Lie. On démontre en même temps que le degré de transcendance de niveau 3 du corps enveloppant des algèbres $\mathfrak{w}(f)$ et $Vir(f)$ est égal au rang du groupe Γ. Ce résultat permet ainsi de distinguer à isomorphisme près ces corps gauches pour des valeurs distinctes du rang de Γ. Dans un deuxième temps, on établit que les centres des corps enveloppants de $\mathfrak{w}(f)$ et $Vir(f)$ sont triviaux, c'est-à-dire engendrés par le centre des algèbres de Lie correspondantes. À cet effet, on procède comme suit. Notons $\mathfrak{g}$ l'une ou l'autre des algèbres $\mathfrak{w}(f)$ ou $Vir(f)$. On munit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de sa filtration canonique et $K(\mathfrak{g})$ de la filtration induite. On démontre que le centre du gradué associé, relativement au crochet de Poisson (c'est-à-dire l'algèbre des invariants de $Gr\, K(\mathfrak{g})$ sous l'action de $\mathfrak{g}$), est lui-même trivial ; puis on remonte cette propriété à l'algèbre filtrée $K(\mathfrak{g})$ proprement dite.

La comparaison des algèbres enveloppantes de même dimension de niveau 3 se fonde sur l'étude du spectre des éléments *ad*-diagonalisables. Un élément *ad*-diagonalisable de l'algèbre enveloppante définit un élément *ad*-localement fini du gradué associé, relativement au crochet de Poisson. En déterminant la forme explicite de tous les éléments *ad*-localement finis dans $Gr\,\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on peut donner une description complète des éléments *ad*-diagonalisables de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On montre alors que l'ensemble des valeurs propres associées à un tel élément est, à homothétie près, l'image du plongement f. On en déduit un critère d'isomorphisme entre algèbres enveloppantes construites sur des plongements différents ; on reconnaît le critère obtenu en [41] pour les algèbres de Lie. Dans le cas des corps enveloppants de même degré de transcendance, on utilise une méthode analogue. L'étude des éléments *ad*-localement finis du gradué associé repose sur un plongement de $Gr\,K(\mathfrak{g})$ dans un corps de séries de Malcev-Neumann [31, 11, 1]. On obtient alors une condition suffisante, portant sur les images de deux plongements $f, g : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$, pour que les corps enveloppants de $\mathfrak{w}(f)$ et $\mathfrak{w}(g)$ ne soient pas isomorphes.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des corps enveloppants des parties positives $\mathfrak{w}_+$ des algèbres de type Witt. On étudie d'abord les centralisateurs dans $\mathcal{U}(\mathfrak{w}_+)$ et $K(\mathfrak{w}_+)$. Pour ce faire, on commence par examiner le problème analogue dans le gradué associé $Gr\,K(\mathfrak{w}_+)$; on établit en particulier que le centralisateurs, relativement au crochet de Poisson, d'un élément homogène de degré non nul est isomorphe à un anneau de polynômes de Laurent en une variable. Ceci permet notamment d'en déduire que les centralisateurs dans le corps enveloppant d'éléments non-centraux sont commutatifs. On étudie aussi de manière plus approfondie la structure des centralisateurs dans l'algèbre enveloppante. Plus précisément, on montre que le centralisateur dans l'algèbre enveloppante d'un élément non-central est un module de type fini sur la sous-algèbre qu'il engendre. Ces résultats sont analogues à ceux obtenus pour le corps de Weyl $\mathcal{D}_1(\mathbb{K})$ par exemple dans [4, 21, 9].

Pour finir, on démontre que la plus grande sous-algèbre du corps enveloppant sur laquelle un élément non-central agit de manière localement nilpotente est réduite au centralisateur de cet élément. Ici encore, le résultat s'obtient à partir du résultat analogue dans $Gr\,K(\mathfrak{w}_+)$. On en déduit alors que $K(\mathfrak{w}_+)$ ne contient pas de sous-algèbre de Lie non-commutative de dimension finie. En particulier, il en résulte que le corps de Weyl $\mathcal{D}_1(\mathbb{K})$ ne se plonge dans aucun des corps gauches de la forme $K(\mathfrak{w}_+)$. En revanche, ces corps contiennent, comme le corps de Weyl $\mathcal{D}_1(\mathbb{K})$, une sous-algèbre non-commutative libre [28, 20].

Dans toute la suite du chapitre, on fixe un corps de base $\mathbb{K}$ de caractéristique 0.

3.1 Algèbres de type Witt

3.1.1 Définitions et notations

Soit Γ un groupe abélien. Dans [41], R. Yu définit et classe toutes les structures d'algèbre de Lie de type Witt sur l'espace vectoriel $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathbb{K}\, e_\alpha$. Une telle structure est définie par un crochet de la forme $[e_\alpha, e_\beta] = (f(\beta) - f(\alpha))e_{\alpha+\beta}$, pour une fonction $f : \Gamma \to \mathbb{K}$ telle que $f(0) = 0$. On se propose ici d'étudier le cas particulier où Γ est un groupe abélien libre de rang fini et $\mathfrak{w}(f)$ une algèbre simple.

Soient $d \geq 1$ un entier, $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ et $f : \Gamma \to \mathbb{K}$ un morphisme de groupes additifs. *L'algèbre de*

Witt (sur $\mathbb{K}$) associée à f, notée $\mathfrak{w}(f)$, est l'algèbre de Lie définie sur l'espace $\mathfrak{w}(f) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathbb{K}\, e_\alpha$ par le crochet $[e_\alpha, e_\beta] = (f(\beta) - f(\alpha))e_{\alpha+\beta}$, pour tous α, β dans Γ. Celle-ci est naturellement Γ-graduée ; en appelant *poids* le degré associé (noté pds), on a $\mathrm{pds}(e_\alpha) = \alpha$, pour tout $\alpha \in \Gamma$.

L'algèbre $\mathfrak{w}(f)$ est simple si et seulement si le morphisme f est injectif [41, théorème 3.7]. Dans ce cas, $\mathfrak{w}(f)$ admet une unique extension centrale non-triviale à isomorphisme près [41, théorème 5.1], appelée *algèbre de Virasoro associée à f*, et notée $Vir(f)$. Comme $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on a $Vir(f) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathbb{K}\, e_\alpha \oplus \mathbb{K}\, z$, et le crochet est donné par :

$$\big(\forall\, \alpha, \beta \in \Gamma\big) \;:\; [e_\alpha, e_\beta] = (f(\beta) - f(\alpha))e_{\alpha+\beta} + \delta_{\alpha+\beta,0}(f(\alpha)^3 - f(\alpha))z,$$

z étant central. On a alors la suite exacte :

$$0 \to \mathbb{K}\, z \to Vir(f) \to \mathfrak{w}(f) \to 0, \tag{3.1}$$

qui est une suite exacte d'algèbres de Lie Γ-graduées si on pose, dans $Vir(f)$, $\mathrm{pds}(e_\alpha) = \alpha$ et $\mathrm{pds}(z) = 0$. Lorsque $\Gamma = \mathbb{Z}$ et f est le plongement canonique $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$, l'algèbre $\mathfrak{w}(f)$ est isomorphe à l'algèbre de Witt $Der\, \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ et son extension centrale est alors l'algèbre de Virasoro classique.

Soient $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de Γ et $\mathfrak{w}_{\mathcal{E}}(f) = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{E}} \mathbb{K}\, e_\alpha$ le sous-espace gradué de $\mathfrak{w}(f)$ correspondant. On voit que $\mathfrak{w}_{\mathcal{E}}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{w}(f)$ si et seulement si la somme de deux éléments quelconques *distincts* de $\mathcal{E}$ est encore dans $\mathcal{E}$. En général, si $x \in \mathcal{E}$, on n'a pas nécessairement $x+x \in \mathcal{E}$. Ainsi, si $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\mathcal{E} = \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathfrak{w}_{\mathcal{E}}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{w}(f)$ isomorphe à $Der\, \mathbb{C}[t]$. On vérifie que quatre cas seulement se présentent :

1. L'ensemble $\mathcal{E}$ ne contient qu'un élément : l'algèbre $\mathfrak{w}_{\mathcal{E}}(f)$ est abélienne.
2. L'ensemble $\mathcal{E}$ contient exactement deux éléments. Alors il existe $\alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{E} = \{0, \alpha\}$. Dans ce cas, $\mathfrak{w}_{\mathcal{E}}(f)$ est l'algèbre de Lie résoluble de dimension 2.
3. L'ensemble $\mathcal{E}$ contient exactement trois éléments. Alors il existe $\alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{E} = \{-\alpha, 0, \alpha\}$. Dans ce cas $\mathfrak{w}_{\mathcal{E}}(f) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.
4. L'ensemble $\mathcal{E}$ est infini.

Par exemple, supposons Γ muni d'une relation d'ordre total compatible avec la structure de groupe et soit $\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma > 0\}$ le cône positif de Γ. Le sous-espace $\mathfrak{w}_+(f) = \mathfrak{w}_{\Gamma_+}(f)$ est une sous-algèbre graduée de $\mathfrak{w}(f)$, que l'on appellera *partie positive de* $\mathfrak{w}(f)$.

Convention 3.1 Dans toute la suite, les morphismes $f : \Gamma \to \mathbb{K}$ seront supposés injectifs. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, on identifiera l'image $f(\Gamma)$ à un sous-ensemble de $\mathbb{K}$. De plus, toutes les relations d'ordre considérées sur Γ seront supposées totales et compatibles avec la loi de groupe.

3.1.2 Degrés de transcendance des corps enveloppants des algèbres de type Witt

Théorème 3.2 *Soient* Γ *un groupe abélien libre de rang fini* $d \in \mathbb{N}^\star$*,* $f : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ *une application additive et injective et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}(f)$ *ou* $\mathfrak{g} = Vir(f)$*. On a* $\mathrm{Dim}^2(\mathfrak{g}) = \underline{\mathrm{Dim}}^2(\mathfrak{g}) = d$*. En particulier, l'algèbre enveloppante de* $\mathfrak{g}$ *admet un corps de fractions, et on a* $\mathrm{Dim}^3\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Tdeg}^3\ K(\mathfrak{g}) = d$*.*

Preuve. D'après le théorème 2.78, il suffit de démontrer que $\mathrm{Dim}^2(\mathfrak{g}) = \underline{\mathrm{Dim}}^2(\mathfrak{g}) = d$. Comme $Vir(f)$ est une extension de $\mathfrak{w}(f)$ par une algèbre de dimension finie, on peut se contenter de faire le calcul pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}(f)$ (proposition 2.79, n^{o}1). On cherche à utiliser la proposition 2.80 sur la croissance d'une algèbre de Lie filtrée.

Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \Gamma$, on pose $\|\alpha\| = \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_d|\}$. On définit ensuite, pour $m \geq 1$:

$$\mathfrak{g}_m = Vect\{e_\alpha \,\text{tq.}\, \|\alpha\| \leq m\}.$$

Il est clair que $\{\mathfrak{g}_m\}_{m\geq 1}$ est une filtration de $\mathfrak{g}$ en tant qu'espace vectoriel. Montrons que cette filtration est compatible avec le crochet de Lie : soient $e_\alpha \in \mathfrak{g}_i$ et $e_\beta \in \mathfrak{g}_j$: on a donc $\|\alpha\| \leq i$ et $\|\beta\| \leq j$. Mais alors $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| \leq i + j$, d'où $[e_\alpha, e_\beta] = \big(f(\beta) - f(\alpha)\big)e_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{g}_{i+j}$.

On cherche à appliquer la proposition 2.80. Démontrons à cet effet que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_n] = \mathfrak{g}_{n+1}$. Il suffit bien sûr de démontrer l'inclusion $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_n] \supseteq \mathfrak{g}_{n+1}$. Soit $\alpha \in \Gamma$ tel que $\|\alpha\| \leq n + 1$; vérifions que $e_\alpha \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_n]$. Trois cas se présentent. D'abord, on suppose $\alpha = 0$. On pose $\varepsilon = (1, 0, \ldots, 0) \in \Gamma$. On a alors

$$[e_{-\varepsilon}, e_\varepsilon] = 2f(\varepsilon)e_0.$$

Comme $f(\varepsilon) \neq 0$ par injectivité de f, et comme $e_{\pm\varepsilon} \in \mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_n$, on a bien $e_0 \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_n]$. Ensuite, si $\alpha \neq 0$ et $\|\alpha\| \leq n$, on a :

$$[e_0, e_\alpha] = f(\alpha)e_\alpha.$$

Comme $f(\alpha) \neq 0$, on en déduit encore que $e_\alpha \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_n]$.

Enfin, on suppose $\|\alpha\| = n + 1$. On définit un élément $\varepsilon \in \mathfrak{g}_1$ par les conditions suivantes : pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\varepsilon_k = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha_k \geq 1\ ; \\ -1 & \text{si } \alpha_k \leq -1\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose enfin $\beta = \alpha - \varepsilon$, de sorte que $\alpha = \beta + \varepsilon$. Par construction, si $\alpha_k \neq 0$, on a $|\beta_k| < |\alpha_k|$; en particulier $\|\beta\| \leq n$. Comme l'un des coefficients α_k vérifie $|\alpha_k| = n + 1$, on a plus précisément $\|\beta\| = n$. Comme on a supposé $n \geq 2$ et que $\|\varepsilon\| = 1$, on a $\beta \neq \varepsilon$. Par injectivité de f, on a $f(\beta) - f(\varepsilon) \neq 0$. En utilisant la relation :

$$[e_\varepsilon, e_\beta] = (f(\beta) - f(\varepsilon))\, e_\alpha,$$

on en déduit dans ce cas aussi que $e_\alpha \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_n]$.

On peut maintenant appliquer la proposition 2.80 : en notant $\varphi(n) = \dim(\mathfrak{g}_n)$, on a $\mathrm{Dim}^2(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dim}^2(\varphi)$ et $\underline{\mathrm{Dim}}^2(\mathfrak{g}) = \underline{\mathrm{Dim}}^2(\varphi)$. Comme $\varphi(n)$ est égal au nombre de d-uplets $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \Gamma$ tels que $\max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_d|\} \leq n$, on voit que $\varphi(n) = (2n+1)^d$, d'où l'on déduit bien que $\mathrm{Dim}^2(\varphi) = \underline{\mathrm{Dim}}^2(\varphi) = d$. Le théorème est démontré.

3.1.3 Centres des corps enveloppants des algèbres de type Witt

3.1.3.1 Le gradué associé du corps enveloppant

Notations 3.3 On introduit maintenant des notations que l'on conservera par la suite. On suppose Γ ordonné. On choisit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre graduée de $\mathfrak{w}(f)$ ou $\mathfrak{g} = Vir(f)$. Notons $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et $K(\mathfrak{g}) = \mathrm{Frac}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g})$; on les munit de leurs filtrations canoniques. Les algèbres graduées associées sont notées $S(\mathfrak{g}) = Gr(\mathcal{U})$ et $\mathcal{Q}(\mathfrak{g}) = Gr(K)$; on notera $\{.,.\}$ le crochet de Poisson canonique sur $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$. L'algèbre associative $S(\mathfrak{g})$ s'identifie naturellement à une algèbre de polynômes à une infinité de variables $E_\alpha = gr(e_\alpha)$ (α variant dans un sous-ensemble de Γ), et une variable supplémentaire $Z = gr(z)$ dans le cas de l'algèbre de Virasoro. L'algèbre $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ s'identifie alors à l'algèbre des fractions rationnelles en les mêmes variables dont les dénominateurs sont homogènes.

On notera $\partial_\alpha(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial E_\alpha}$, pour $\alpha \in \Gamma$ et $\varphi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$. On pose, pour $\varphi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$:

$$MV(\varphi) = \sup\{\alpha \in \Gamma \mid \partial_\alpha \varphi \neq 0\} \in \Gamma \cup \{- \in fty\}.$$

En particulier, si $\mathfrak{g} = Vir(f)$, on a $MV(\varphi) = - \in fty$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{K}[Z, Z^{-1}]$. On pose enfin, pour $\gamma \in \Gamma$: $\mathcal{Q}(\gamma) = \{\varphi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g}) \mid MV(\varphi) \leq \gamma\}$ et $\mathcal{Q}^-(\gamma) = \{\varphi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g}) \mid MV(\varphi) < \gamma\}$.

Proposition 3.4 *On reprend les notations ci-dessus.*

1. *Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{Q}(\gamma)$ est une sous-algèbre associative de $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ stable par inversion (c'est-à-dire que si $\varphi \in \mathcal{Q}(\gamma)$ est inversible dans $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$, alors $\varphi^{-1} \in \mathcal{Q}(\gamma)$ également).*
2. *Pour $\alpha, \beta \in \Gamma$: si $\alpha, \beta \geq 0$, alors $\{\mathcal{Q}(\alpha), \mathcal{Q}(\beta)\} \subseteq \mathcal{Q}(\alpha + \beta)$.*
3. *Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ tels que $MV(\varphi), MV(\psi) > 0$. Alors $MV(\{\varphi, \psi\}) = MV(\varphi) + MV(\psi)$ si et seulement si $MV(\varphi) \neq MV(\psi)$.*
4. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{Q}(\gamma) \setminus \mathcal{Q}^-(\gamma)$, la famille $\{\varphi^m\}_{m \geq 0}$ est libre sur $\mathcal{Q}^-(\gamma)$. En particulier, si $\psi \in \mathcal{Q}^-(\gamma)$, on a $MV(\varphi\psi) = MV(\varphi)$.*

Preuve. D'abord, il est facile de voir que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{Q}(\gamma)$ est une sous-algèbre associative de $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ stable par inversion. Considérons maintenant $\alpha, \beta \in \Gamma_+$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ tels que

$MV(\varphi) \leq \alpha$ et $MV(\psi) \leq \beta$. On a la formule :

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{\substack{a,b\in\Gamma \\ a\leq\alpha,\ b\leq\beta \\ a+b<\alpha+\beta}} \{E_a, E_b\}\partial_a\varphi\partial_b\psi + (\beta-\alpha)E_{\alpha+\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\psi, \tag{3.2}$$

où $\partial_\gamma = \frac{\partial}{\partial E_\gamma}$ pour tout élément $\gamma \in \Gamma$. Pour le voir, il suffirait par exemple de vérifier que l'expression de droite définit une bidérivation de $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ qui coïncide avec $\{.,.\}$ sur les générateurs E_α (la vérification est très simple et donc omise). Comme $\alpha, \beta \geq 0$: $\alpha + \beta \geq \max\{\alpha, \beta\}$; on en déduit que ni les dérivées de φ et ψ, ni les $\{E_a, E_b\}$ de la somme de gauche ne dépendent de E_γ pour $\gamma > \alpha + \beta$. Autrement dit, $\{\varphi, \psi\} \in \mathcal{Q}(\alpha + \beta)$.

Pour démontrer le numéro 3, on considère encore l'équation (3.2), en supposant qu'on a les égalités $\alpha = MV(\varphi)$ et $\beta = MV(\psi)$, avec $\alpha, \beta > 0$. Dérivons $\{\varphi, \psi\}$ par rapport à $E_{\alpha+\beta}$: comme $\alpha + \beta > \max\{\alpha, \beta\}$ on trouve $\partial_{\alpha+\beta}\{\varphi, \psi\} = (\beta - \alpha)\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\psi$, et $\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\psi \neq 0$ par définition de $MV(\varphi)$ et $MV(\psi)$. En particulier $\partial_{\alpha+\beta}\{\varphi, \psi\} \neq 0$ si et seulement si $\alpha \neq \beta$.

Pour démontrer l'affirmation 4, on observe d'abord que $\mathcal{Q}(\gamma) \subseteq \operatorname{Frac}\big(\mathcal{Q}^-(\gamma)\big)(E_\gamma)$, extension transcendante pure de $\operatorname{Frac}\big(\mathcal{Q}^-(\gamma)\big)$. Si $\varphi \in \mathcal{Q}(\gamma) \smallsetminus \mathcal{Q}^-(\gamma)$, on a $\frac{\partial\varphi}{\partial E_\gamma} \neq 0$, et il est alors clair que la famille $\{\varphi^m\}_{m\geq 0}$ est libre sur $\mathcal{Q}^-(\gamma)$.

3.1.3.2 Centres des corps enveloppants

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de type Witt u Virasoro. Pour déterminer le centre du corps enveloppant $K(\mathfrak{g})$, on détermine d'abord les invariants d u gradué associé $\mathcal{Q}(\mathfrak{g}) = Gr\, K(\mathfrak{g})$ sous l'action adjointe de $\mathfrak{g}$, autrement dit le centre de l'algèbre de Poisson $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ relativement au crochet de Poisson naturel.

Lemme 3.5 *Soit $f \colon \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ un morphisme additif.*

1. *Le centre de $Gr\, K\big(\mathfrak{w}(f)\big)$ relativement au crochet de Poisson $\{.,.\}$ est réduit à $\mathbb{K}$.*
2. *Le centre de $Gr\, K\big(Vir(f)\big)$ pour le crochet de Poisson $\{.,.\}$ est égal à la sous-algèbre $\mathbb{K}[Z, Z^{-1}]$, avec $Z = gr(z)$.*
3. *Soit $x \in K(Vir(f))$. On suppose que pour tout $F(z) \in \mathbb{K}(z)$, on a $gr(x - F(z)) \in \mathbb{K}(Z)$. Alors $x \in \mathbb{K}(z)$.*

Preuve. Les preuves des numéros 1 et 2 sont similaires ; écrivons-la pour le numéro 2. On note $K = K\big(Vir(f)\big)$. Soit φ un élément central, non nul de $Gr(K)$. Si φ ne dépend pas uniquement de E_0 et de Z, on peut ordonner Γ de sorte que $MV(\varphi) > 0$. En choisissant $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma > 0$ et $\gamma \neq MV(\varphi)$, on voit que $MV\,\{E_\gamma, \varphi\} = \gamma + MV(\varphi)$ d'après la proposition 3.4, n^{o}3.

En particulier, $\{E_\gamma, \varphi\} \neq 0$, contradiction. Nécessairement, φ ne dépend que de E_0 et de Z. Soit $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$. On a $0 = \{\varphi, E_\gamma\} = \{E_0, E_\gamma\}\partial_0(\varphi)$. Comme $\{E_0, E_\gamma\} \neq 0$, on a $\partial_0(\varphi) = 0$, donc φ ne dépend que de Z. Comme par ailleurs φ est une fraction rationnelle à dénominateur homogène, c'est un élément de $\mathbb{K}[Z, Z^{-1}]$.

Démontrons le numéro 3. On note $x = u^{-1}v$, avec $u, v \in \mathcal{U}\big(Vir(f)\big)$, et on suppose que, pour tout $F(z) \in \mathbb{K}(z)$ l'élément $gr(x - F(z)) \in \mathbb{K}(Z)$. On va montrer par récurrence sur $\nu(u) + \nu(v)$ que $x \in \mathbb{K}(z)$. Si $\nu(u) + \nu(v) = 0$, u et v sont des scalaires et $x \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(z)$. Passons à l'étape récursive. Vérifions d'abord qu'on a $gr(x^{-1} - F(z)) \in \mathbb{K}(Z)$ pour tout $F(z) \in \mathbb{K}(z)$. Si $F(z) = 0$, on a $gr(x^{-1}) = gr(x)^{-1} \in \mathbb{K}(Z)$; sinon, on peut écrire $x^{-1} - F(z) = F(z)(F(z)^{-1} - x)x^{-1}$, et en passant aux formes initiales on voit que $gr(x^{-1} - F(z)) \in \mathbb{K}(Z)$. On pourra donc, dans la suite, supposer $\nu(v) \geq \nu(u)$, en changeant au besoin x en x^{-1}. L'élément $gr(x)$ est alors une fraction rationnelle homogène dans $\mathbb{K}(Z)$, de degré $n = \nu(v) - \nu(u) \geq 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $gr(x) = (gr(u))^{-1}gr(v) = \lambda Z^n$, en particulier $gr(v) = gr(\lambda u z^n)$ et $\nu(v - \lambda u z^n) < \nu(v)$. Posons $x' = x - \lambda z^n = u^{-1}(v - \lambda u z^n)$. Il est clair que $gr(x' - F(z)) \in \mathbb{K}(Z)$ pour tout $F(z) \in \mathbb{K}(z)$; d'autre part on a $\nu(u) + \nu(v - \lambda u z^n) < \nu(u) + \nu(v)$. L'hypothèse de récurrence s'applique à x', et par suite $x = x' + \lambda z^n \in \mathbb{K}(z)$. La preuve du numéro 3 est achevée.

Théorème 3.6 *Soit $f\colon \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ un morphisme additif.*

1. *Les centres de $K\big(\mathfrak{w}(f)\big)$ et $\mathcal{U}\big(\mathfrak{w}(f)\big)$ sont réduits à $\mathbb{K}$.*
2. *Le centre de $\mathcal{U}\big(Vir(f)\big)$ est égal à $\mathbb{K}[z]$.*
3. *Le centre de $K\big(Vir(f)\big)$ est égal à $\mathbb{K}(z)$.*

Preuve. démontrons d'abord le numéro 1. Notons $K = K\big(\mathfrak{w}(f)\big)$. Pour tout élément central non-nul $\zeta \in K \setminus \{0\}$, l'élément $gr(\zeta)$ est encore central dans $Gr(K)$, relativement au crochet de Poisson. Ceci implique, d'après le lemme précédent, n^{o}1, que $gr(\zeta) = \lambda \in \mathbb{K}^\star$ et $\nu(\zeta) = 0$. Mais alors $\zeta - \lambda$ est encore central, et $\nu(\zeta - \lambda) < 0$; on en déduit que $\zeta - \lambda = 0$, d'où $\zeta \in \mathbb{K}$.

Considérons à présent $K = K(Vir(f))$ et soit C le centre de K. Alors $Gr(C)$ est une sous-algèbre du centre de $Gr(K)$, donc $Gr(C) \subseteq \mathbb{K}(Z)$ d'après le lemme précédent, n^{o}1. Soit $\zeta \in C$; pour tout élément $F(z) \in \mathbb{K}(z)$ on a encore $\zeta - F(z) \in C$. En particulier, $gr(\zeta - F(z)) \in \mathbb{K}(Z)$. D'après le lemme précédent, n^{o}2, on a $\zeta \in \mathbb{K}(z)$, d'où $C = \mathbb{K}(z)$. Le centre de $\mathcal{U}(Vir(f))$ est alors égal à $\mathbb{K}(z) \cap \mathcal{U}(Vir(f)) = \mathbb{K}[z]$.

3.1.4 Théorèmes de comparaison

Les invariants dimensionnels déterminés dans le théorème 3.2 ne permettent pas de distinguer par exemple les algèbres enveloppantes et les corps enveloppants de $\mathfrak{w}(f)$ et $\mathfrak{w}(g)$ lorsque $f, g : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ sont deux morphismes injectifs définis sur le même groupe libre. On introduit donc d'autres méthodes pour les comparer. Dans la partie 3.1.4.1, on commence par déterminer la forme de tous les éléments ad-diagonalisables (et même ad-localement finis) de $\mathcal{U}(\mathfrak{w}(f))$; on montre ensuite comment le spectre de la dérivation intérieure associée à un tel élément permet de reconstruire l'algèbre $\mathfrak{w}(f)$. Dans la partie 3.1.4.3 on modifie ces notions pour les utiliser dans le cas de corps gauches.

3.1.4.1 Algèbres enveloppantes de même dimension

Rappelons qu'un élément x d'une algèbre associative A est dit *ad-localement nilpotent* (resp. *ad-diagonalisable*) si $ad\,x\colon A \to A$ est localement nilpotent (resp. diagonalisable). On dit que x est *ad-localement fini* si, pour tout $y \in A$, la famille $\{(ad\,x)^m(y)\}_{m\geq 0}$ est liée. Les éléments *ad*-diagonalisables et *ad*-localement nilpotents sont aussi *ad*-finis.

Lemme 3.7 *Soient $f : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ un morphisme injectif et $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}(f)$ ou $\mathfrak{g} = Vir(f)$. Soit $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

1. *Si x est ad-localement fini, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et ζ un élément central tels que $x = \lambda e_0 + \zeta$.*
2. *Si x est ad-diagonalisable et non-central, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que l'ensemble des valeurs propres de $ad\,x$ soit exactement $\lambda f(\Gamma)$.*

Preuve. Rappelons d'abord le fait général suivant. Soit A une algèbre filtrée. Une famille de vecteurs $\{y_i\}_{i\in I}$ est libre dans A si la famille des formes initiales $\{gr(y_i)\}_{i\in I}$ est libre dans $Gr(A)$ (la réciproque est fausse en général). On en déduit que si $x \in A$ est *ad*-fini, alors l'élément $X = gr(x)$ est *ad*-fini aussi relativement au crochet de Poisson dans $Gr(A)$. En effet, soit $Y \in Gr(Y)$, on veut montrer que la famille $\{(ad\,X)^m Y\}_{m\geq 0}$ est liée. Il suffit de le voir si Y est de la forme $Y = gr(y)$, pour $y \in A$. S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $(ad\,X)^n(Y) = 0$, alors la famille $\{(ad\,X)^m(Y)\}_{m\geq 0}$ est liée. Sinon on a pour tout $m \geq 0$: $(ad\,X)^m(Y) = gr((ad\,x)^m(y))$; si la famille $\{(ad\,X)^m(Y)\}_{m\geq 0}$ était libre, la famille $(ad\,x)^m(y)$ serait libre aussi et x ne serait pas *ad*-localement fini.

On peut maintenant démontrer le numéro 1. On va traiter le cas où $\mathfrak{g} = Vir(f)$; la démonstration dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}(f)$ est tout à fait analogue et sera omise. On notera $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $S = Gr(\mathcal{U})$. Soit x un élément *ad*-localement fini non-central dans $\mathcal{U}$. Quitte à changer x en $x - \zeta$ pour un élément central ζ convenablement choisi, on peut supposer $gr(x) \notin \mathbb{K}[Z]$ (on utilise le lemme 3.5, n^{o}3). Appelons $X = gr(x) \in S$ la forme initiale de x. Cet élément est aussi *ad*-fini sur S. Notons $\mathcal{V}(X) = \{\alpha \in \Gamma \mid \partial_\alpha(X) \neq 0\}$: les variables non-centrales desquelles dépend la fraction rationnelle X sont exactement les E_α pour $\alpha \in \mathcal{V}(X)$. Par hypothèse, $\mathcal{V}(X)$ est non-vide. Si $\mathcal{V}(X) \neq \{0\}$, on peut choisir un ordre sur Γ tel que $MV(X) = \max \mathcal{V}(X) > 0$. Mais alors, pour tout élément homogène $Y \in S$ tel que $MV(Y) > MV(X)$, on voit par récurrence (en utilisant le lemme 3.4, n^{o}3) que $MV((ad\,X)^m Y) = MV(Y) + mMV(X)$. Ces éléments de Γ sont deux à deux distincts ; on en déduit facilement que les $(ad\,X)^m\,Y$ sont linéairement indépendants, contradiction. Donc $\mathcal{V}(X) = \{0\}$, autrement dit X ne dépend que de E_0 et de Z. On en déduit que $\partial_0(X) = \frac{\partial X}{\partial E_0}$ ne dépend également que de E_0 et Z. La sous-algèbre engendrée par E_0 et Z étant commutative relativement au crochet de Poisson, il vient $\{X, \partial_0(X)\} = 0$. Or pour tout élément $\alpha \in \Gamma$, on a $\{X, E_\alpha\} = \partial_0(X).f(\alpha)E_\alpha$. On en déduit par récurrence que, pour tout $m \geq 0$, $(ad\, X)^m(E_\alpha) = (f(\alpha)\partial_0(X))^m E_\alpha$. Lorsque $\alpha \neq 0$, ces éléments sont linéairement dépendants si et seulement si la famille $\{\partial_0(X)^m\}_{m\geq 0}$ est liée. Ceci implique que $\partial_0(X) = \lambda \in \mathbb{K}^\star$; comme par ailleurs $X = gr(x)$ est un polynôme (en E_0 et Z) homogène, on voit qu'il est de la forme $X = \lambda E_0 + \lambda' Z$. Il vient $\nu(x - \lambda e_0 - \lambda' z) \leq 0$, d'où $x - \lambda e_0 - \lambda' z \in \mathbb{K}$.

Prouvons le numéro 2. Soit x un élément ad-diagonalisable, non-central ; en particulier x est ad-fini. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ et ζ central tels que $x = \lambda e_0 + \zeta$. Remplacer x par $x - \zeta$ ne modifie pas les valeurs propres (ni les vecteurs propres) de $ad\, x$; on se ramène à déterminer le spectre de $ad(\lambda e_0)$. À l'aide de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt déduite de la base naturelle de $\mathfrak{g}$, il est facile de voir que celui-ci est précisément égal à $\lambda f(\Gamma)$. Le lemme est démontré.

Notons à présent $\mathcal{L}_d(\mathbb{K})$ l'ensemble des sous-groupes libres, de rang d du groupe additif $\mathbb{K}$; $\mathcal{L}_d(\mathbb{K})$ est non-vide si et seulement s'il existe un plongement $\Gamma = \mathbb{Z}^d \hookrightarrow \mathbb{K}$. Dans ce cas, on peut regarder l'action par homothéties du groupe multiplicatif $\mathbb{K}^\star$ sur $\mathcal{L}_d(\mathbb{K})$.

Théorème 3.8 *Soient f, g deux plongements $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. *les algèbres enveloppantes $\mathcal{U}\big(\mathfrak{w}(f)\big)$ et $\mathcal{U}\big(\mathfrak{w}(g)\big)$ sont isomorphes ;*

ii. *les algèbres enveloppantes $\mathcal{U}\big(Vir(f)\big)$ et $\mathcal{U}\big(Vir(g)\big)$ sont isomorphes ;*

iii. *les algèbres de Lie $\mathfrak{w}(f)$ et $\mathfrak{w}(g)$ sont isomorphes ;*

iv. *les orbites de $f(\Gamma)$ et $g(\Gamma)$ sous l'action de $\mathbb{K}^\star$ sont égales.*

Preuve. Remarquons d'abord que, pour tous plongements $f, g \colon \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ les orbites de $f(\Gamma)$ et $g(\Gamma)$ sont les mêmes si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ et $\sigma \in Aut(\Gamma)$ tel que $\lambda g = f \circ \sigma$. L'équivalence *iii*) $\iff$ *iv*) est alors simplement une autre formulation de [41, théorème 3.8]. L'implication *iii*) $\Rightarrow$ *i*) et *ii*) est évidente. Montrons *i*) $\Rightarrow$ *iv*). Si $\Phi \colon \mathcal{U}(\mathfrak{w}(g)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(\mathfrak{w}(f))$ est un isomorphisme, alors $ad(\Phi(e_0))$ est un élément ad-diagonalisable de $\mathcal{U}(\mathfrak{w}(f))$ ayant le même spectre que $ad(e_0) \in End_k\, \mathcal{U}\big(\mathfrak{w}(g)\big)$, c'est-à-dire $g(\Gamma)$. D'après le lemme précédent, n^{o}2, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $g(\Gamma) = \lambda f(\Gamma)$. L'implication *ii*) $\Rightarrow$ *iv*) se démontre de même.

3.1.4.2 Décomposition des éléments de $Gr\big(K(\mathfrak{g})\big)$

On considère toujours $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}(f)$ ou $Vir(f)$, $S(\mathfrak{g}) = Gr\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\big)$ et $\mathcal{Q}(\mathfrak{g}) = Gr\big(K(\mathfrak{g})\big)$. L'algèbre $S(\mathfrak{g})$ étant l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel Γ-gradué $\mathfrak{g}$, cette graduation se prolonge en une Γ-graduation de $S(\mathfrak{g})$, avec $\mathrm{pds}(E_\gamma) = \gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Le degré associé est encore appelé *poids* et les éléments homogènes *isobares*. Les éléments isobares sont les vecteurs propres de $ad\, E_0$ pour le crochet de Poisson. Cette Γ-graduation ne se prolonge pas à $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$: par exemple, si $\gamma \in \Gamma \smallsetminus \{0\}$, l'élément $E_0 + E_\gamma \in S(\mathfrak{g})$ est homogène au sens classique, donc inversible dans $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$. Toutefois, $E_0 + E_\gamma$ n'étant pas isobare, l'élément $(E_0 + E_\gamma)^{-1}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de fractions rationnelles à numérateur et dénominateur isobares. On va remédier à cette situation en montrant qu'on peut décomposer les éléments de $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ en somme infinie d'éléments isobares, en un sens que l'on précisera. Soient $\mathcal{Q}_{iso}$ le localisé de $S(\mathfrak{g})$ en les éléments isobares et $\mathcal{H}$ le sous-corps de $\mathcal{Q}_{iso}$ formé par les fractions isobares, de poids nul. On identifiera $\mathcal{Q}_{iso}$ à une sous-algèbre de Frac $S(\mathfrak{g})$.

Lemme 3.9 *L'algèbre $\mathcal{Q}_{iso}$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathcal{H}[\Gamma]$.*

Preuve. Choisissons une base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ de Γ. On vérifie que l'application Ψ définie pour $h \in \mathcal{H}$ et $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ par $\Psi\big(h.(a_1, \dots, a_d)\big) = h.E_{\varepsilon_1}^{a_1} \dots E_{\varepsilon_d}^{a_d}$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{H}[\Gamma]$ sur $\mathcal{Q}_{iso}$.

Un ordre sur le groupe Γ étant fixé, on peut plonger $\mathcal{H}[\Gamma]$ dans un corps de séries de Malcev-Neumann $\mathcal{H}[[\Gamma]]$ (voir par exemple [31, 11, 10, 1]). Les éléments de $\mathcal{H}[[\Gamma]]$ sont des séries formelles $x = \displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$, où chaque x_γ est isobare, de poids γ, et où l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid x_\gamma \neq 0\}$ est une partie bien-ordonnée de l'ensemble ordonné Γ. Le produit de deux telles séries est donné par la formule :

$$(\sum_{i\in\Gamma} x_i)(\sum_{j\in\Gamma} y_j) = \sum_{\gamma\in\Gamma}(\sum_{i+j=\gamma} x_i y_j).$$

Le corps Frac $S(\mathfrak{g})$ se plonge dans $\mathcal{H}[[\Gamma]]$; on pourra donc dorénavant identifier Frac $S(\mathfrak{g})$ à un sous-corps de $\mathcal{H}[[\Gamma]]$. A fortiori, l'algèbre $\mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ sera identifiée à une sous-algèbre de $\mathcal{H}[[\Gamma]]$. On démontre facilement :

Lemme 3.10 *Conservons les notations précédentes. Soient $x = \sum x_\gamma \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ et $h \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$, on note $\{h, x\} = \sum u_\gamma$ la décomposition en série de l'élément $\{h, x\} \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$. Si h est une fraction isobare, de poids nul, alors on a :*

$$(\forall\, \gamma \in \gamma) \;:\; u_\gamma = \{h, x_\gamma\}.$$

3.1.4.3 Corps enveloppants de mêmes degrés de transcendance

Soient $\mathcal{D}$ un corps gauche et $x \in \mathcal{D}$. On dira que x est *quasi-localement fini* (resp. *quasi-diagonal*) s'il existe une sous-algèbre B de $\mathcal{D}$ contenant x telle que $(ad\, x)_{|B} \colon B \to B$ soit localement fini (resp. diagonalisable), et telle que $\mathcal{D} = \mathrm{Frac}(B)$.

Lemme 3.11 *Soient $f : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ un morphisme injectif et $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}(f)$ ou $\mathfrak{g} = Vir(f)$.*

1. *Soit x un élément quasi-localement fini de $K(\mathfrak{g})$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, ζ un élément central et $x' \in K(\mathfrak{g})$ tels que $x = \lambda e_0 + \zeta + x'$ et $\nu(x') \leq 0$.*
2. *Si $x \in K(\mathfrak{g})$ est quasi-diagonal et non-central, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que l'ensemble des valeurs propres de $ad\,x$ (agissant dans $K(\mathfrak{g})$) soit contenu dans $\lambda f(\Gamma)$.*

Preuve. Commençons par une observation utile. Soit B une sous-algèbre de $K(\mathfrak{g})$ telle que $K(\mathfrak{g}) = \mathrm{Frac}(B)$. Si $Gr(B)$ est contenue dans une sous-algèbre $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ stable par inversion, alors $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$. En effet, soit $Y = gr(y) \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g})$ un élément homogène non-nul. En écrivant $y = u^{-1}v$ avec $u, v \in B$, on a aussi $Y = gr(y) = gr(u)^{-1}gr(v)$. Comme $gr(u), gr(v) \in Gr(B) \subseteq \mathcal{Q}'$, et que $\mathcal{Q}'$ est stable par inversion, on en déduit que $Y \in \mathcal{Q}'$, d'où le résultat. En particulier, on voit que $Gr(B)$ n'est pas contenue dans le sous-corps $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Frac}\, S(\mathfrak{g})$ formé des fractions isobares, de poids nul. De même, $Gr(B)$ n'est pas contenu dans une sous-algèbre de la forme $Q(\gamma)$, avec $\gamma \in \Gamma$ (formée de fractions rationnelles ne dépendant pas des variables E_α lorsque $\alpha > \gamma$, voir la section 3.3).

Démontrons le numéro 1. On va le faire dans le cas où $\mathfrak{g} = Vir(f)$; le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}(f)$ se traite de manière analogue. Soit B une sous-algèbre de $K(\mathfrak{g})$ contenant x et telle que $\mathrm{Frac}\, B = K(\mathfrak{g})$. On suppose $(ad\,x)_{|B} \colon B \to B$ localement fini. On peut supposer que B contient le centre de $K(\mathfrak{g})$, et que l'élément x est non-central dans B (sinon x est central dans $K(\mathfrak{g})$ et le résultat est évident). Quitte à changer x en $x - \zeta$ pour ζ central bien choisi, on peut donc supposer que $gr(x) \notin \mathbb{K}[Z, Z^{-1}]$ (lemme 3.5, n^{o}3). Cette opération est justifiée, car $ad\,x = ad(x - \zeta)$, donc $x - \zeta \in B$ est encore quasi-localement fini. Dans ce cas, l'élément $X = gr(x)$ est ad-localement fini sur $Gr(B)$. Montrons que X ne dépend que de E_0 et de Z. Supposons que ce ne soit pas le cas. On peut choisit un ordre sur Γ tel que $\gamma = MV(X) > 0$. Comme $Gr(B) \not\subseteq \mathcal{Q}(\gamma)$, il existe $y \in B$ tel que $MV\big(gr(y)\big) > MV(X)$. Comme dans la preuve du lemme 3.7, on en déduit que les éléments $\{(ad\,x)^m(y)\}_{m\geq 0}$ sont linéairement indépendants, contradiction. Donc X (ainsi que ses dérivées) ne dépendent que de E_0 et de Z, et $\partial_0(X) \neq 0$ car $X \notin \mathbb{K}[Z, Z^{-1}]$. Notons aussi que, comme E_0 et Z sont isobares, de poids nul, il en est de même de l'élément $\partial_0(X) = \frac{\partial X}{\partial E_0}$.

Soit $Y \in Gr(B)$. On décompose Y en série formelle $Y = \sum Y_\gamma$ comme dans la partie 3.1.4.2 ; en particulier chaque Y_γ est isobare, de poids γ. Comme $Gr(B) \not\subseteq \mathcal{H}$, on peut choisir Y de sorte que $Y \notin \mathcal{H}$, autrement dit il existe $\gamma_0 \in \Gamma \smallsetminus \{0\}$ tel que $Y_{\gamma_0} \neq 0$. Par récurrence on montre que $(ad\,X)^m Y = \partial_0(X)^m (ad\,E_0)^m Y$ pour tout entier $m \geq 0$; on en déduit la décomposition en série de $(ad\,X)^m(Y)$:

$$(ad\,X)^m(Y) = \sum_\gamma \partial_0(X)^m f(\gamma)^m Y_\gamma.$$

Cette famille étant liée, les familles des composantes isobares $\{\partial_0(X)^m f(\gamma)^m Y_\gamma\}_{m\geq 0}$ sont également liées, pour tout $\gamma \in \Gamma$. En particulier, pour $\gamma = \gamma_0$, comme $f(\gamma_0)Y_{\gamma_0} \neq 0$, on en déduit que $\{\partial_0(X)^m\}_{m\geq 0}$ est liée, d'où $\partial_0(X) = \lambda \in \mathbb{K}^\star$. Par suite, il existe $\lambda' \in \mathbb{K}$ tel que $X = \lambda E_0 + \lambda' Z$, en particulier $\nu(x - \lambda e_0 - \lambda' z) \leq 0$ et x a la forme annoncée dans le numéro 1.

Démontrons le numéro 2. On peut supposer $x = \lambda e_0 + x'$, avec $\nu(x') \leq 0$. En particulier, $\nu(x) \leq 1$. Soit μ une valeur propre de $ad\,x$. On peut supposer $\mu \neq 0$, sinon x serait central dans B, et par suite dans $K(\mathfrak{g})$, contrairement aux hypothèses. Il existe $y \in B$ tel que $[x, y] = \mu y$. On en déduit que $\nu(y) = \nu[x, y] \leq \nu(y) + \nu(x) - 1 \leq \nu(y)$. Toutes ces inégalités sont donc des égalités. On en déduit d'abord que $\nu(x) = 1$, c'est-à-dire $\lambda \neq 0$, d'où $gr(x) = \lambda E_0$; ensuite on voit que $\{gr(x), gr(y)\} = gr\,[x, y]$, car $\nu([x, y]) = \nu(y) + \nu(x) - 1$. On en déduit que $\{\lambda E_0, gr(y)\} = \mu gr(y)$, et donc μ est une valeur propre de $ad(\lambda E_0)$. Il vient $\mu \in \lambda f(\Gamma)$, d'où le numéro 2.

Proposition 3.12 *Soient $f, g : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ deux plongements. On suppose que les corps $K\big(\mathfrak{w}(f)\big)$ et $K\big(\mathfrak{w}(g)\big)$ sont isomorphes, ou que les corps $K\big(Vir(f)\big)$ et $K\big(Vir(g)\big)$ sont isomorphes. Alors il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $\lambda g(\Gamma) \subseteq f(\Gamma)$. Cette condition équivaut aussi à l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ et d'un endomorphisme injectif $\tau \colon \Gamma \hookrightarrow \Gamma$ tels que $\lambda g = f \circ \tau$.*

Preuve. Si Φ est un isomorphisme $K\big(\mathfrak{w}(g)\big) \xrightarrow{\sim} K\big(\mathfrak{w}(f)\big)$, on voit que $\Phi(e_0)$ est un élément quasi-diagonal de $K\big(\mathfrak{w}(f)\big)$ et le spectre de $ad(\Phi(e_0))$, agissant dans $K(\mathfrak{w}(f))$, est le même que celui de $ad\; e_0$ agissant dans $K(\mathfrak{w}(g))$, c'est-à-dire $g(\Gamma)$. D'après le lemme précédent, n^{o}2, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $g(\Gamma) \subseteq \lambda f(\Gamma)$, autrement dit $\lambda^{-1} g(\Gamma) \subseteq f(\Gamma)$.

Ensuite il est facile de vérifier que $\lambda g(\Gamma) \subseteq f(\Gamma)$ si et seulement s'il existe un endomorphisme injectif $\tau \colon \Gamma \hookrightarrow \Gamma$ tel que $\lambda g = f \circ \tau$.

3.1.4.4 Exemples

On va maintenant utiliser le critère de la proposition 3.12 pour donner des exemples de corps enveloppants d'algèbres de type Witt (ou Virasoro) ayant même degré de transcendance de niveau 3 mais qui ne sont pas isomorphes. Soient $A, B \in \mathcal{L}_d(\mathbb{K})$ des sous-groupes additifs libres, de rang d, de $\mathbb{K}$. On écrira $A \equiv B$ s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $\lambda A \subseteq B$.

Lemme 3.13

1. *La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}_d(\mathbb{K})$.*
2. *Soient $A, B \in \mathcal{L}_d(\mathbb{K})$ tels que $A \equiv B$. Soient $a \in A \smallsetminus \{0\}$, $b \in B \smallsetminus \{0\}$. Alors $a^{-1}A$ et $b^{-1}B$ sont des sous-groupes libres de rang d de $\mathbb{K}$, contenant l'élément 1_k, tels que $a^{-1}A \equiv A \equiv b^{-1}B$. De plus, les sous-corps de $\mathbb{K}$ engendrés par $a^{-1}A$ d'une part et par $b^{-1}B$ d'autre part sont égaux.*

Preuve. La réflexivité et la transitivité de la relation $\equiv$ sont évidentes. Il reste à voir que $A \equiv B$ entraîne aussi $B \equiv A$, pour tous $A, B \in \mathcal{L}_d(\mathbb{K})$. Il existe des plongements $f, g \colon \mathbb{Z}^d \hookrightarrow \mathbb{K}$

tels que $f(\mathbb{Z}^d) = A$, $g(\mathbb{Z}^d) = B$. L'hypothèse $A \equiv B$ entraîne l'existence d'un morphisme injectif $\tau \colon \mathbb{Z}^d \hookrightarrow \mathbb{Z}^d$ et de $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tels que $\lambda f = g \circ \tau$. Or on sait qu'il existe un morphisme $\tau^\# \colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$ tel que $\tau \circ \tau^\# = \det(\tau) Id$: la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\tau^\#)$ de $\tau^\#$ dans une base $\mathcal{B}$ donnée est la transposée de la comatrice de $Mat_{\mathcal{B}}(\tau)$. On vérifie qu'alors $\lambda f \circ \tau^\# = \det(\tau) g$, et donc $\lambda^{-1} \det(\tau) g = f \circ \tau^\#$, d'où $\lambda^{-1} \det(\tau) B = \lambda^{-1} \det(\tau) g(\mathbb{Z}^d) \subseteq f(\mathbb{Z}^d) = A$, d'où $B \equiv A$. Le numéro 1 est démontré.

Démontrons le numéro 2. Soient $A \in \mathcal{L}_d(\mathbb{K})$ un sous-groupe additif de $\mathbb{K}$ et $a \in A \setminus \{0\}$. Il est clair que $a^{-1}A$ est un sous-groupe libre de rang d de $\mathbb{K}$, contenant l'élément $1_{\mathbb{K}}$, tel que $a^{-1}A \equiv A$. Soient $B \in \mathcal{L}_d(\mathbb{K})$ tel que $B \equiv A$ et $b \in B \setminus \{0\}$; on a alors $b^{-1}B \equiv B \equiv A \equiv a^{-1}A$ comme annoncé. Pour la suite de la preuve, on remplace A par $a^{-1}A$ et B par $b^{-1}B$, de sorte qu'on supposera $1_{\mathbb{K}} \in A \cap B$. Notons $\mathbb{Q}(A)$ (resp. $\mathbb{Q}(B)$) le sous-corps de $\mathbb{K}$ engendré par A (resp. par B).

Supposons $A \equiv B$; montrons que $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(B)$. Comme $A \equiv B$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $\lambda A \subseteq B$. On a donc $A \subseteq \lambda^{-1}B$, d'où $\mathbb{Q}(A) \subseteq \mathbb{Q}(\lambda^{-1}B)$. Or $1_{\mathbb{K}} \in A$, on en déduit que $\lambda = \lambda.1_{\mathbb{K}} \in B \setminus \{0\}$. On a donc aussi $\lambda^{-1}B \subseteq \mathbb{Q}(B)$, d'où $\mathbb{Q}(\lambda^{-1}B) \subseteq \mathbb{Q}(B)$, d'où $\mathbb{Q}(A) \subseteq \mathbb{Q}(B)$. Un argument de symétrie prouve que $\mathbb{Q}(B) \subseteq \mathbb{Q}(A)$: le numéro 2 est démontré.

Notations 3.14 Soient $A \in \mathcal{L}_d(\mathbb{K})$ et $a \in A \setminus \{0\}$. D'après le lemme, le sous-corps de $\mathbb{K}$ engendré par $a^{-1}A$ ne dépend pas du choix de a : on pourra donc le noter $\mathbb{Q}(A)$.

Corollaire 3.15 *Soient $f, g \colon \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ deux plongements. Si les sous-corps $\mathbb{Q}(f(\Gamma))$ et $\mathbb{Q}(g(\Gamma))$ sont différents, alors les corps enveloppants $K(\mathfrak{w}(f))$ et $K(\mathfrak{w}(g))$ ne sont pas isomorphes ; et il en va de même pour les corps $K(Vir(f))$ et $K(Vir(g))$.*

Preuve. S'ils étaient isomorphes, on aurait $f(\Gamma) \equiv g(\Gamma)$ d'après la proposition 3.12, et donc $\mathbb{Q}(f(\Gamma)) = \mathbb{Q}(g(\Gamma))$ d'après le lemme précédent.

Exemple 3.16 Les corps enveloppants d'algèbres de Witt (ou de Virasoro) associés aux plongements $f_k \colon \mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, 3)$ sont deux à deux non-isomorphes :

$$f_1(x, y) = x + iy \ ; \ f_2(x, y) = x + \pi y \ ; \ f_3(x, y) = x + \pi^2 y.$$

3.2 Parties positives des algèbres de type Witt

3.2.1 Conventions générales

Dans toute cette partie, on considère un plongement $f : \Gamma = \mathbb{Z}^d \hookrightarrow \mathbb{K}$ par lequel on identifie Γ à une partie de $\mathbb{K}$. On suppose Γ totalement ordonné ; on pose $\Gamma_+ = \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha > 0\}$. On note $\mathfrak{w}_+ = \mathfrak{w}_+(f)$ la partie positive de $\mathfrak{w}(f)$ (relative à cette relation d'ordre), autrement dit $\mathfrak{w}_+ = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_+} \mathbb{K}\, e_\gamma$, avec le crochet $[e_\alpha, e_\beta] = (\beta - \alpha)e_{\alpha+\beta}$ (pour $\alpha, \beta \in \Gamma_+$).

On reprend en outre les notations introduites dans la partie 3.3. En particulier on note $\mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+) = Gr\big(K(\mathfrak{w}_+)\big)$, que l'on munit du crochet de Poisson canonique $\{.,.\}$. Pour tout $x \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$, on note $ad(x)$ l'application $y \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+) \mapsto \{x, y\} \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$. Les éléments de $\mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$ peuvent être considérés comme des fractions rationnelles en des variables E_γ, où $\gamma \in \Gamma_+$. On notera ∂_γ la dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial E_\gamma}$. On a aussi, pour $\varphi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+) : MV(\varphi) = \sup\{\gamma \in \Gamma_+ \mid \partial_\gamma(\varphi) \neq 0\} \in \Gamma_+ \cup \{- \in fty\}$. Pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$ on écrira enfin $\{\varphi, \psi\}_{\alpha,\beta} = \partial_\alpha\varphi \,.\, \partial_\beta\psi - \partial_\beta\varphi \,.\, \partial_\alpha\psi$.

3.2.2 Centralisateurs

3.2.2.1 Centralisateurs dans $Gr(K(\mathfrak{w}_+))$

Pour tout élément $\varphi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$ on note $C(\varphi; \mathcal{Q})$ le centralisateur de φ dans $\mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$ relativement au crochet de Poisson. C'est une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$; celle-ci est graduée lorsque φ est homogène.

Lemme 3.17 *Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$.*

1. *On suppose $\varphi \notin \mathbb{K}$. Il y a équivalence entre :*
   - *i.* $MV(\{\varphi, \psi\}) \leq MV(\varphi)$;
   - *ii.* $\{\varphi, \psi\} = 0$;
   - *iii.* $(\forall\, \alpha, \beta \in \Gamma_+) \ : \ \{\varphi, \psi\}_{\alpha,\beta} = 0$.
2. *Supposons $\varphi \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$ homogène, non-constant. Si $deg(\varphi) = 0$, alors $C(\varphi; \mathcal{Q})$ est une sous-algèbre graduée de $\mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$ concentrée en degré 0. Si $deg(\varphi) \neq 0$, alors il existe un élément homogène $h \in \mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+) \smallsetminus \{0\}$ tel que $C(\varphi; \mathcal{Q}) = \mathbb{K}[h, h^{-1}]$; en particulier deux éléments homogènes de même degré commutant à φ sont toujours proportionnels.*
3. *On suppose qu'il existe $N \geq 1$ tel que $(ad\,\varphi)^N(\psi) = 0$. Alors $\{\varphi, \psi\} = 0$.*

Preuve. Démontrons le n^{o}1. Comme dans la preuve de la proposition 3.17, équation (3.2), on voit qu'on a la relation $\{\varphi, \psi\} = \sum_{\beta > \alpha} (\beta - \alpha) E_{\alpha+\beta} \{\varphi, \psi\}_{\alpha,\beta}$. L'implication *iii)* $\Rightarrow$ *ii)* est alors évidente. L'implication *ii)* $\Rightarrow$ *i)* est claire. Il reste à voir *i)* $\Rightarrow$ *iii)*. Si ψ est constant, l'assertion *iii)* est trivialement vérifiée. On suppose donc $\psi \notin \mathbb{K}$. On a $MV(\{\varphi, \psi\}) \leq MV(\varphi) < MV(\varphi) + MV(\psi)$; d'après la proposition 3.4, n^{o}3, on en déduit $MV(\psi) = MV(\varphi)$. Notons $\mu = MV(\varphi)$ cette valeur commune : en particulier, pour tout $\gamma \in \Gamma_+$, on a $\mu + \gamma > \mu$, donc les fractions rationnelles φ et ψ, ainsi que les $\{\varphi, \psi\}_{\alpha,\beta}$ (où $\alpha, \beta \in \Gamma_+$), ne dépendent pas de la variable $E_{\mu+\gamma}$. En dérivant l'identité du début de la preuve par rapport à $E_{\mu+\gamma}$ (lorsque $\gamma \in \Gamma_+$), on en déduit :

$$(\forall\, \gamma > 0) \quad : \sum_{\substack{\alpha+\beta=\mu+\gamma \\ \beta>\alpha}} (\beta-\alpha)\{\varphi,\psi\}_{\alpha,\beta} = 0. \tag{3.3}$$

Soit $\mathcal{V} = \{\alpha \in \Gamma_+ \mid \partial_\alpha\varphi \neq 0 \text{ ou } \partial_\alpha\psi \neq 0\}$: ni φ ni ψ ne dépendent de E_α si $\alpha \notin \mathcal{V}$, en particulier $\{\varphi,\psi\}_{\alpha,\beta} = 0$ si α ou $\beta \in \mathcal{V}$. C'est un sous-ensemble fini de l'ensemble totalement ordonné Γ_+. On peut donc l'écrire sous la forme $\mathcal{V} = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$, avec $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N = \mu$. Notons à présent $\mathcal{H}_m$ l'hypothèse : $(\forall\, \alpha,\beta \in \Gamma_+),\ (\alpha,\beta \geq \alpha_m) \Rightarrow \{\varphi,\psi\}_{\alpha,\beta} = 0$. Par définition de $\mathcal{V}$, ceci revient encore à : $(\forall\, \alpha,\beta \in \mathcal{V}),\ (\alpha,\beta \geq \alpha_m) \Rightarrow \{\varphi,\psi\}_{\alpha,\beta} = 0$. On voit que la propriété *iii*) que l'on veut prouver résulte de $\mathcal{H}_1$. Il reste à démontrer $\mathcal{H}_1$; à cet effet on fait une récurrence descendante.

L'hypothèse $\mathcal{H}_N$ est vraie. Supposons $\mathcal{H}_m$ vérifiée, avec $1 < m \leq N$ et démontrons $\mathcal{H}_{m-1}$. On a $\alpha_{m-1} > 0$; d'après (3.3) il vient :

$$\sum_{\substack{\beta+\alpha=\mu+\alpha_{m-1} \\ \beta>\alpha}} (\beta-\alpha)\{\varphi,\psi\}_{\alpha,\beta} = (\mu-\alpha_{m-1})\{\varphi,\psi\}_{\alpha_{m-1},\mu} + \sum_{\substack{\beta+\alpha=\mu+\alpha_{m-1} \\ \mu>\beta>\alpha \\ \alpha,\beta\in\mathcal{V}}} (\beta-\alpha)\{\varphi,\psi\}_{\alpha,\beta} = 0. \tag{3.4}$$

Or, pour tous $\alpha,\beta \in \Gamma_+$, si $\beta+\alpha = \mu+\alpha_{m-1}$ et $\mu > \beta > \alpha$, alors $0 < \mu-\beta = \alpha-\alpha_{m-1}$; il vient $\alpha,\beta > \alpha_{m-1}$. Lorsque α et β sont dans $\mathcal{V}$, ceci entraîne $\alpha,\beta \geq \alpha_m$. L'hypothèse $\mathcal{H}_m$ s'applique alors dans (3.4) sur la somme de droite qui s'en va. Comme en outre $m-1 < N$, on a $\alpha_{m-1} \neq \alpha_N = \mu$, et on trouve finalement $\{\varphi,\psi\}_{\alpha_{m-1},\mu} = \partial_{\alpha_{m-1}}\varphi \,.\, \partial_\mu\psi - \partial_\mu\varphi \,.\, \partial_{\alpha_{m-1}}\psi = 0$. Pour tous $\alpha,\beta \geq \alpha_{m-1}$, on a donc :

$$\partial_\alpha\varphi \,.\, (\partial_\beta\psi \,.\, \partial_\mu\varphi) \;=\; \partial_\alpha\varphi \,.\, (\partial_\mu\psi \,.\, \partial_\beta\varphi) \;=\; (\partial_\alpha\varphi \,.\, \partial_\mu\psi) \,.\, \partial_\beta\varphi \;=\; (\partial_\mu\varphi \,.\, \partial_\alpha\psi) \,.\, \partial_\beta\varphi.$$

Par définition de $\mu = MV(\varphi)$, on a $\partial_\mu\varphi \neq 0$; en simplifiant on trouve $\partial_\alpha\varphi \,.\, \partial_\beta\psi = \partial_\beta\varphi \,.\, \partial_\alpha\psi$, prouvant $\mathcal{H}_{m-1}$. On en déduit par une récurrence descendante que $\mathcal{H}_1$ est vraie, d'où *iii*).

Démontrons le n^{o}2. Soit $\psi \in C(\varphi;\mathcal{Q})$ un élément homogène, non-nul. Posons $a = deg(\varphi)$ et $b = deg(\psi)$. Montrons d'abord qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $\varphi^b = \lambda\psi^a$. A cet effet, on montre que $\psi^{-a}\varphi^b$ est constante. Pour tout $\alpha \in \Gamma_+$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha(\psi^{-a}\varphi^b) &= b\varphi^{b-1}\partial_\alpha(\varphi)\psi^{-a} - a\psi^{-a-1}\partial_\alpha(\psi)\varphi^b \\ &= \varphi^{b-1}\psi^{-a-1}(b\partial_\alpha(\varphi)\psi - a\partial_\alpha(\psi)\varphi). \end{aligned}$$

Comme φ est homogène, de degré a, on voit que $a.\varphi = \sum_{\beta} E_\beta\, \partial_\beta(\varphi)$ d'après l'identité d'Euler ; de même on a $b.\psi = \sum_{\beta} E_\beta\, \partial_\beta(\psi)$. Il vient :

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(\psi^{-a}\varphi^b) &= \varphi^{b-1}\psi^{-a-1}\big(\partial_\alpha(\varphi)\sum_\beta E_\beta\partial_\beta(\psi) - \partial_\alpha(\psi)\sum_\beta E_\beta\partial_\beta(\varphi)\big)\\ &= \varphi^{b-1}\psi^{-a-1}.\sum_\beta E_\beta\big(\partial_\alpha(\varphi)\partial_\beta(\psi) - \partial_\alpha(\psi)\partial_\beta(\varphi)\big)\\ &= 0 \quad \text{d'après le n}^o1,\ iii),\ \text{parce que } \{\varphi,\psi\} = 0.\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $\alpha \in \Gamma_+$, $\dfrac{\partial}{\partial E_\alpha}(\psi^{-a}\varphi^b) = 0$; par suite, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $\varphi^b = \lambda\psi^a$.

Supposons à présent $a = deg(\varphi) = 0$. Alors $\varphi^b = \lambda\psi^0 = \lambda \in \mathbb{K}^\star$; comme $\varphi \notin \mathbb{K}$, nécessairement $b = deg(\psi) = 0$: les éléments de $C(\varphi;\mathcal{Q})$ sont homogènes, de degré 0. Inversement, on suppose $a \neq 0$. Soient $\psi_1, \psi_2 \in C(\varphi) \smallsetminus \{0\}$, homogènes, de même degré. Montrons que ψ_1 et ψ_2 sont proportionnels. En effet, soit $\Phi = \psi_1/\psi_2$. L'élément Φ est homogène, de degré nul et φ est un élément de degré non-nul du centralisateur $C(\Phi;\mathcal{Q})$. Ceci n'est pas possible si $\Phi \notin \mathbb{K}$ d'après ce qui précède ; on en déduit bien que ψ_1 et ψ_2 sont proportionnels. Choisissons maintenant $h \in C(\varphi;\mathcal{Q})$, homogène, de degré $m > 0$ minimal. Alors h est inversible dans $\mathcal{Q}(\mathfrak{w}_+)$, et $\mathbb{K}[h,h^{-1}] \subseteq C(\varphi;\mathcal{Q})$. Montrons que $C(\varphi;\mathcal{Q}) \subseteq \mathbb{K}[h,h^{-1}]$. Soit $\psi \in C(\varphi;\mathcal{Q})$ homogène, de degré n. Posons $d = pgcd(m,n) \geq 1$. Il existe deux entiers u, v tels que $um + vn = d$. Alors $h^u\psi^v \in C(\varphi;\mathcal{Q})$ est un élément homogène, de degré $d \geq 1$. On en déduit par minimalité de m que $m \leq d$; comme d divise m on a nécessairement $m = d$. Donc m divise n : il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = qm$. Dans ce cas, ψ et h^q sont deux éléments de $C(\varphi;\mathcal{Q})$ de même degré : ψ est donc proportionnel à h^q. Ceci prouve que $C(\varphi;\mathcal{Q}) \subseteq \mathbb{K}[h,h^{-1}]$.

Démontrons le troisième point. Supposons $N \geq 2$. Comme $\{\varphi, (ad\,\varphi)^{N-1}(\psi)\} = 0$, on a $MV\big((ad\,\varphi)^{N-1}(\psi)\big) \leq MV(\varphi)$ d'après le n^{o}1, $ii) \Rightarrow i)$. Cette inégalité peut aussi s'écrire $MV\big(\{\varphi, (ad\,\varphi)^{N-2}(\psi)\}\big) \leq MV(\varphi)$; en appliquant cette fois le n^{o}1, $i) \Rightarrow ii)$, on en déduit que $(ad\,\varphi)^{N-1}(\psi) = 0$. De proche en proche on se ramène au cas où $N = 1$, c'est-à-dire $\{\varphi,\psi\} = 0$.

3.2.2.2 Centralisateurs dans l'algèbre enveloppante

Soient A une algèbre filtrée sur $\mathbb{N}$ et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa filtration. On suppose $A_0 = k$. On suppose aussi $Gr(A)$ intègre ; en particulier A est intègre et l'application filtration $\nu\colon A \to \mathbb{N}$ vérifie $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$, pour tous $x, y \in A \smallsetminus \{0\}$. Il en résulte notamment que les éléments non-scalaires de A sont transcendants sur $\mathbb{K}$.

Proposition 3.18 *Soit $x \in A$ tel que $\nu(x) > 0$ et $C(x;A)$ le commutant de x dans A. On suppose que $gr(x) \in Gr(A)$ vérifie la condition suivante :*

(C) *pour tous $u, v \in Gr(A)$ homogènes, de même degré : si $\{gr(x), u\} = \{gr(x), v\} = 0$, alors u et v sont proportionnels.*

On a alors les conclusions suivantes :

1. *$C(x;A)$ est un $\mathbb{K}[x]$-module libre, de type fini, et son rang divise $\nu(x)$.*
2. *$C(x;A)$ est commutatif.*

Preuve. On adapte la démonstration d'Amitsur [4, théorème 1]. Commençons par deux lemmes :

Lemme 3.19 *Soient $a, b \in C(x;A)$ tels que $\nu(a) = \nu(b)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\nu(a-\lambda b) < \nu(a)$.*

Preuve du lemme. Comme $[a, x] = [b, x] = 0$, il est clair que $\{gr(a), gr(x)\} = \{gr(b), gr(x)\} = 0$. D'après la condition **(C)**, $gr(a)$ et $gr(b)$ sont proportionnels ; il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $gr(a) = \lambda gr(b) = gr(\lambda b)$, autrement dit $\nu(a - \lambda b) < \nu(a)$.

Lemme 3.20 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble $X_m = \big\{a \in C(x;A) \mid \nu(a) \leq m\big\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

Preuve du lemme. D'abord, $X_0 = \mathbb{K}$; ensuite le lemme précédent signifie exactement que l'espace quotient X_m/X_{m-1} est de dimension au plus 1 pour tout m.

On peut maintenant achever la preuve de la proposition 3.2.2.2. Posons $N = \nu(x)$; on appelle $Z_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists\, a \in C(x;A)\ tq.\ \nu(a) = n\}$. Il est clair que Z_x est une partie additive non-vide de $\mathbb{Z}$. L'ensemble $\overline{Z_x} = \{n + N\mathbb{Z} \mid n \in Z_x\}$ est donc un sous-groupe de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$; l'entier $\rho = \#\overline{Z_x}$ est alors un diviseur de N. Appelons alors $\overline{m_1}$, $\overline{m_2}, \ldots,$ $\overline{m_\rho}$ les éléments de $\overline{Z_x}$ que l'on relève en $m_1, \ldots, m_\rho \in\ Z_x$ minimaux ; on peut choisir $m_1 = 0$. Pour chaque m_j on fixe un élément $y_j \in C(x;A)$ de filtration m_j ; on peut prendre $y_1 = 1_A$. Montrons que $\{y_1, \ldots, y_\rho\}$ est une $\mathbb{K}[x]$-base de $C(x;A)$.

Soient $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_\rho(x) \in \mathbb{K}[x]$ tels que $\varphi_1(x)y_1 + \ldots + \varphi_\rho(x)y_\rho = 0$. Si les $\varphi_j = \varphi_j(x)$ ne sont pas tous nuls, il existe $j \neq k$ tel que $\varphi_j, \varphi_k \neq 0$ et $\nu(\varphi_j y_j) = \nu(\varphi_k y_k)$. Mais alors $\overline{m_j} = \nu(y_j) + N\mathbb{Z} = \nu(\varphi_j) + \nu(y_j) + N\mathbb{Z} = \nu(\varphi_j y_j) + N\mathbb{Z} = \nu(\varphi_k y_k) + N\mathbb{Z} = \overline{m_k}$, contradiction.

Soit $y \in C(x;A)$, on montre par récurrence sur $\nu(y)$ que $y \in \mathbb{K}[x]y_1 + \ldots + \mathbb{K}[x]y_\rho$. Reprenons la notation X_m du deuxième lemme. Si $\nu(y) = 0$: $y \in X_0 = \mathbb{K}$ donc $y = \lambda.1_A = \lambda.y_1$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\nu(y) > 0$: il existe $j \in \{1, \ldots, \rho\}$ tel que $\nu(y) + N\mathbb{Z} = \overline{m_j}$; autrement dit, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\nu(y) = m_j + Nq$. Par minimalité de m_j , on a $q \geq 0$. Dans ce cas, on a $\nu(y) = \nu(x^q y_j)$; d'après le premier lemme, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\nu(y - \lambda x^q y_j) < \nu(y)$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $y - \lambda x^q y_j$ fournit le résultat voulu.

Établissons à présent la commutativité de $C(x;A)$. Le groupe $\overline{Z_x}$ est cyclique : on peut trouver $Y \in C(x;A)$ tel que $\nu(Y) + N\mathbb{Z}$ engendre $\overline{Z_x}$. Il est alors facile de voir que l'ensemble

$$\big\{\nu(H) \mid H = H(x,Y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)Y + \ldots + \varphi_{\rho-1}(x)Y^{\rho-1} \text{ avec } \varphi_0, \ldots, \varphi_{\rho-1} \in \mathbb{K}[x]\big\}$$

contient tous les entiers de Z_x sauf au plus un nombre fini. On peut supposer que Z_x contient tous les éléments $\{t, t+1, t+2, \ldots\}$ pour un certain $t \in \mathbb{N}$.

Comme dans la première partie de la preuve, on montre que tout élément $y \in C(x;A)$ peut s'écrire sous la forme $y = H(x,Y) + h$, avec $h \in C(x;A)$ et $\nu(h) \leq t$. D'après le second lemme, l'ensemble de tous les h ainsi construits forme un espace vectoriel de dimension finie d. En particulier, on définit une famille linéairement *dépendante* $\{h_0, \ldots, h_d\}$ par les décompositions : $x^j y = H_j(x,Y) + h_j,\ \nu(h_j) \leq t$. Soit alors $(\lambda_0, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}$ tel que $\sum \lambda_j h_j = 0$; on a : $\big(\sum \lambda_j x^j\big)y = \sum \lambda_j H_j(x,Y)$. Par suite, on a prouvé que, pour tout $y \in C(x;A)$, il existe $H(x,Y) \in \mathbb{K}[x,Y]$ et $h(x) \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ tels que $h(x)y = H(x,Y)$; on en déduit que $C(x;A)$ est contenu dans $\mathbb{K}(x)[Y]$, qui est commutative.

Théorème 3.21 *Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{w}_+$. Soit u un élément non constant de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Le centralisateur de u dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est commutatif ; c'est de plus un sous-$\mathbb{K}[u]$-module libre dont le rang divise $\nu(u)$.*

Preuve. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}_+$, il suffit d'appliquer la proposition 3.2.2.2 dont les hypothèses sont vérifiées d'après le lemme 3.17, n^{o}2. Si $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{w}_+$ est quelconque, l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ s'identifie à une sous-algèbre filtrée de $\mathcal{U}(\mathfrak{w}_+)$ et $Gr\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\big)$ à une sous-algèbre de Poisson de $Gr\big(\mathcal{U}(\mathfrak{w}_+)\big)$. Les hypothèses de la proposition 3.18 restent donc vraies dans $Gr\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\big)$, d'où le résultat.

3.2.2.3 Centralisateurs dans le corps enveloppant

On reprend les notations et hypothèses de la partie 3.2.2.2 : A est une algèbre filtrée sur $\mathbb{N}$ par des sous-espaces $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; on suppose que $A_0 = k$ et que $Gr(A)$ est intègre. En outre, on suppose ici que A est un domaine de Ore ; on notera K son corps de fractions. On munit K de la filtration naturellement induite par celle de A. Les méthodes qui suivent sont inspirées de Goodearl [21].

Proposition 3.22 *Soient $x \in K$ et $C(x;K)$ le commutant de x dans K. On suppose que x vérifie l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :*

1. *$\nu(x) \neq 0$ et, pour toute paire d'éléments $u, v \in Gr(K)$ homogènes, de même degré : si $\{gr(x), u\} = \{gr(x), v\} = 0$, alors u et v sont proportionnels.*
2. *$\nu(x) = 0$ et, pour tout $y \in C(x;K)$, non nul, on a $\nu(y) = 0$.*

Alors $C(x;K)$ est commutatif.

Preuve. Traitons d'abord le cas où $\nu(x) \neq 0$. Soit $Z_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists\, y \in C(x;K),\ \nu(y) = n\}$. L'ensemble Z_x est un sous-groupe non-nul de $\mathbb{Z}$; il existe donc $m > 0$ tel que $Z_x = m\mathbb{Z}$. On fixe alors un élément y dans $C(x;K)$ de filtration m. On va prouver que $C(x;K) = \overline{\mathbb{K}(y)}$, adhérence de $\mathbb{K}(y)$ dans K pour la topologie canonique (voir page 18), ce qui suffira. En effet, l'application : $[.,.]\colon (a,b) \in K \times K \mapsto [a,b] \in K$ est continue ; il vient :

$$[C(x;K), C(x;K)] = [\overline{\mathbb{K}(y)}, \overline{\mathbb{K}(y)}] \subseteq \overline{[\mathbb{K}(y), \mathbb{K}(y)]} = \{0\}.$$

Considérons $a \in C(x;K)$. Il existe $a_1 \in \mathbb{K}(y)$ tel que $\nu(a - a_1) \leq \nu(a) - 1$. En effet, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\nu(a) = n\nu(y) = \nu(y^n)$. Mais a et y^n commutent à x dans K, donc on a aussi $\{gr(a), gr(x)\} = \{gr(y^n), gr(x)\} = 0$ dans $Gr(K)$. Comme $deg\big(gr(a)\big) = deg\big(gr(y^n)\big)$, on peut appliquer l'hypothèse n^{o}1 : il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $gr(a) = \lambda gr(y^n) = gr(\lambda y^n)$, d'où $\nu(a - \lambda y^n) < \nu(a)$. Par récurrence on construit alors une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{K}(y)$ telle que $\lim\limits_{n\to\in fty} a_n = a$, c'est ce qu'on voulait.

Traitons maintenant le cas où $\nu(x) = 0$. On va montrer que $C(x;K)$ s'identifie naturellement à un sous-corps de $Gr(K)$. Comme $C(x;K) \subseteq K_0$ (l'ensemble des éléments de K de filtration négative), on peut définir $\phi\colon C(x;K) \longrightarrow K_0/K_{-1} \subseteq Gr(K)$ par $\phi(y) = y + K_{-1}$. L'application ϕ est linéaire et multiplicative : c'est un morphisme d'algèbres par lequel on peut identifier le corps $C(x;K)$ à son image dans $Gr(K)$, qui est commutatif.

Théorème 3.23 *Soit $f : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{K}$ une application additive, injective et $\mathfrak{w}_+(f)$ la partie positive de l'algèbre de type Witt associée à f. Alors les centralisateurs d'éléments non-centraux du corps enveloppant $K\big(\mathfrak{w}_+(f)\big)$ sont commutatifs.*

Preuve. On note pour simplifier $\mathfrak{w}_+ = \mathfrak{w}_+(f)$. Soit $x \in K(\mathfrak{w}_+)$ un élément non-central. Si $\nu(x) \neq 0$, alors $gr(x)$ vérifie la condition n^{o}1 de la proposition 3.22 d'après le lemme 3.17, n^{o}2. Supposons maintenant $\nu(x) = 0$. Si $gr(x) = \lambda \in \mathbb{K}^\star$, les centralisateurs de x et $x - \lambda$ sont confondus, et $\nu(x - \lambda) < \nu(x) = 0$: on est ramené au cas précédent. Si $gr(x) \notin \mathbb{K}$, le lemme 3.17, n^{o}2, assure une fois de plus qu'on peut appliquer le résultat de la proposition 3.22.

Remarquons que le théorème précédent reste valable en remplaçant le corps $K\big(\mathfrak{w}_+(f)\big)$ par n'importe quelle sous-algèbre de $K\big(\mathfrak{w}_+(f)\big)$. En particulier, on retrouve le fait que les centralisateurs dans l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\big(\mathfrak{w}_+(f)\big)$ sont commutatifs.

3.2.3 Sous-algèbres de $K(\mathfrak{w}_+)$

3.2.3.1 Sous-algèbres commutatives maximales

Proposition 3.24 *Soit B une sous-algèbre de $K(\mathfrak{w}_+)$.*

1. *Soit C une sous-algèbre de B ; il y a équivalence entre :*
   i. *C est une sous-algèbre commutative maximale de B ;*
   ii. *il existe un élément non scalaire x de B tel que $C = C(x; B)$;*
   iii. *$C \neq \mathbb{K}$ et, pour tout élément non scalaire y de C, on a $C = C(y; B)$.*
2. *Soient C une sous-algèbre de B distincte de $\mathbb{K}$, C' son commutant dans C.*
   a. *Si C est non commutative, $C' = \mathbb{K}$.*
   b. *Si C est commutative, C' est une sous-algèbre commutative maximale de B.*
3. *Si x et y sont des éléments non scalaires permutables dans B, on a $C(x; B) = C(y; B)$.*
4. *Soient C une sous-algèbre commutative maximale de B, y un élément de B, et $P \in \mathbb{K}[t]$ un polynôme non scalaire. Si $P(y) \in C$, on a $y \in C$.*
5. *Dans B, l'intersection de deux sous-algèbres commutatives maximales distinctes est réduite à $\mathbb{K}$.*

Preuve. On peut recopier mot pour mot les démonstrations de [13, corollaires 4.3 à 4.7].

Corollaire 3.25 *Les sous-algèbres commutatives maximales de $\mathcal{U}(\mathfrak{w}_+)$ sont de degré de transcendance (au sens classique des algèbres commutatives) égal à 1.*

Preuve. On applique la proposition précédente avec $B = \mathcal{U}(\mathfrak{w}_+)$. Soit C une sous-algèbre commutative maximale de $\mathcal{U}(\mathfrak{w}_+)$. D'après la proposition précédente, n^{o}1 : il existe $x \in B \smallsetminus \mathbb{K}$ tel que $C = C(x; B)$; d'après le théorème 3.21, c'est un $\mathbb{K}[x]$-module de type fini. Le résultat est alors immédiat.

3.2.3.2 Sous-algèbres de Lie de dimension finie

On considère touours $\mathfrak{w}_+ = \mathfrak{w}_+(f)$ la partie positive d'une algèbre de type Witt $\mathfrak{w}(f)$. Pour tout élément $x \in K(\mathfrak{w}_+)$, on note $C(x)$ le centralisateur de x dans $K(\mathfrak{w}_+)$. On note alors $N(x)$ l'ensemble $\{y \in K|\ (ad\, x)^n(y) = 0,\ n \gg 0\}$. C'est une sous-algèbre de $K(\mathfrak{w}_+)$ contenant $C(x)$; on peut considérer $N(x)$ comme un $C(x)$-module à gauche, par exemple.

Lemme 3.26 *Soient $x, y \in K(\mathfrak{w}_+)$; on suppose que $y \in N(x)$. Alors $\{gr(x), gr(y)\} = 0$.*

Preuve. Posons $X = gr(x)$, $Y = gr(y)$. Pour n suffisamment grand, on a $(ad\, x)^n(y) = 0$. On en déduit que, dans $Gr\big(K(\mathfrak{w}_+)\big)$, on a aussi $(ad\, X)^n(Y) = 0$ pour n assez grand. D'après le lemme 3.17, n^{o}3, on a bien $\{gr(x), gr(y)\} = 0$.

Théorème 3.27 *Pour tout élément $x \in K(\mathfrak{w}_+)$, on a $N(x) = C(x)$. De façon équivalente : pour tout $y \in K(\mathfrak{w}_+)$, $[x, y] \in C(x)$ implique $[x, y] = 0$.*

Preuve. On suppose d'abord $N = \nu(x) \neq 0$. L'ensemble $Z_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists\, y \in N(x),\ \nu(y) = n\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ contenant N ; on en déduit l'existence de $y_1, \ldots, y_m \in N(x)$ tels que, pour tout $y \in N(x)$, il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ avec $\nu(y) \equiv \nu(y_j)$ $[N]$.

Considérons à présent $M(x) \subseteq N(x)$, le sous-$C(x)$-module engendré par $y_1, \ldots, y_m$. Montrons que $M(x)$ est dense dans $N(x)$ (pour la topologie canonique, voir page 18). Soit $y \in N(x)$. Il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $\nu(y) = q\nu(x) + \nu(y_j)$, et donc $\nu(y) = \nu(x^q y_j)$. Or y et $x^q y_j$ sont dans $N(x)$, donc $\{gr(x), gr(y)\} = \{gr(x), gr(x^q y_j)\} = 0$ d'après le lemme précédent. D'après le lemme 3.17, n^{o}2, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $gr(y) = \lambda gr(x^q y_j)$, d'où $\nu(y - \lambda x^q y_j) < \nu(y)$. On peut alors construire par récurrence une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $M(x)$ telle que $\lim\limits_{n\to\in fty} \nu(y - \eta_n) = - \in fty$, d'où le résultat.

Comme $y_1, \ldots, y_m \in N(x)$: il existe $a > 0$ tel que $(ad\, x)^a(y_j) = 0$ pour tout j, d'où l'on déduit que $(ad\, x)^a M(x) = 0$ par $C(x)$-linéarité. Comme $ad(x)$ est continue, on a :

$$(ad\, x)^a N(x) = (ad\, x)^a \big(\overline{M(x)}\big) \subseteq \overline{(ad\, x)^a M(x)} = \{0\}.$$

Supposons à présent que $N(x) \neq C(x)$; il existe $y \in N(x)$ tel que $[x, y] \neq 0$ mais $[x, [x, y]] = 0$. La deuxième équation implique par récurrence que $(ad\, x)^n(y^n) = n![x, y]^n$ pour tout $n \geq 1$; or cet élément est toujours non-nul, contradiction.

On suppose maintenant $\nu(x) = 0$. Si $gr(x) = \lambda \in \mathbb{K}^\star$, on peut remplacer x par $x - \lambda$ et on est ramené au cas précédent. On supposera donc $gr(x) \notin \mathbb{K}$. Pour tout $y \in N(x) \smallsetminus \{0\}$, on a $\{gr(x), gr(y)\} = 0$, d'où $\nu(y) = deg\big(gr(y)\big) = 0$ d'après le lemme 3.17, n^{o}2. Dans ce cas, $\nu([x, y]) < \nu(x) + \nu(y) = 0$. Mais $[x, y] \in N(x)$ aussi, et $\nu([x, y]) \neq 0$ n'est possible que si $[x, y] = 0$, c'est-à-dire $y \in C(x)$.

Enfin, il est facile de voir que $N(x) = C(x)$ si et seulement si, pour tout élément $y \in K(\mathfrak{w}_+)$, $[x, y] \in C(x)$ implique $y \in C(x)$.

Corollaire 3.28 *Toute sous-algèbre de Lie de dimension finie de $K(\mathfrak{w}_+)$ est commutative.*

Preuve. On supposera pour simplifier $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $K(\mathfrak{w}_+)$ de dimension finie. Considérons $x \in \mathfrak{g}$; soit λ une valeur propre de l'endomorphisme $ad_{\mathfrak{g}}(x)$: il existe $y \in \mathfrak{g} \smallsetminus \{0\}$ tel que $[x, y] = \lambda y$. Alors $[y, [y, x]] = 0$, donc $x \in N(y) = C(y)$ (théorème 3.27) ; on en déduit que $[x, y] = 0$, d'où $\lambda = 0$. Ainsi, toutes les valeurs propres de $ad_{\mathfrak{g}}(x)$ sont nulles : c'est donc un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$. Mais alors $\mathfrak{g} \subseteq N(x) = C(x)$, qui est commutative (théorème 3.23), donc $\mathfrak{g}$ est abélienne.

3.2.3.3 Comparaison avec les corps de Weyl

Rappelons tout d'abord la définition des algèbres et corps de Weyl.

Définition 3.29 Soient $n, s \in \mathbb{N}$ deux entiers. L'*algèbre de Weyl* (*sur* $\mathbb{K}$*, d'indices* n *et* s), notée $A_{n,s}(\mathbb{K})$ est l'algèbre engendrée par $2n+s$ générateurs p_i, q_j, z_k (avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \{1, \dots, s\}$) soumis aux relations suivantes :

$$[p_i, q_j] = \delta_{i,j} \ ; \ [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = [p_i, z_k] = [q_j, z_k] = 0,$$

pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \{1, \dots, s\}$. C'est une algèbre intègre et noethérienne ; en particulier on peut considérer son corps de fractions $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$ que l'on appelle *corps de Weyl* (*sur* $\mathbb{K}$*, d'indices* n *et* s). On écrit aussi $A_n(\mathbb{K}) = A_{n,0}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_{n,0}(\mathbb{K})$.

Corollaire 3.30 *Pour* $n \geq 1$ *et* $s \geq 0$*, il n'existe aucun plongement du corps* $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$ *dans* $K(\mathfrak{w}_+)$.

Preuve. Deux éléments $p, q \in K(\mathfrak{w}_+)$ vérifiant $[p, q] = 1$ engendreraient une algèbre de Lie non-commutative de dimension 3, en contradiction avec le corollaire 3.28.

Remarque 3.31 Il est connu que le corps de Weyl $\mathcal{D}_1(\mathbb{K})$ contient une sous-algèbre non-commutative libre [28]. On a ici le même résultat, à savoir que le corps enveloppant $K(\mathfrak{w}_+)$ contient une algèbre libre non-commutative. En effet, soit $\mathfrak{w} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}\, e_n$ l'algèbre de Witt usuelle ; on considère la sous-algèbre $\mathfrak{w}_1 = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{K}\, e_n$ de $\mathfrak{w}$. Il est clair que $\mathfrak{w}_1$ se plonge dans $\mathfrak{w}_+(f)$, il suffit donc de démontrer que le corps enveloppant $K(\mathfrak{w}_1)$ contient une sous-algèbre non-commutative libre. Soit $C(e_1; \mathfrak{w}_1)$ le centralisateur de e_1 dans $\mathfrak{w}_1$. On vérifie sans difficulté que $C(e_1; \mathfrak{w}_1) = \mathbb{K}\, e_1$ et $[\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_1] = \bigoplus_{n \geq 3} \mathbb{K}\, e_n$. En particulier, on a $\mathfrak{w}_1 \neq C(e_1; \mathfrak{w}_1) + [\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_1]$. D'après [20, théorème D], le corps $K(\mathfrak{w}_1)$ contient une algèbre non-commutative libre.

Plus précisément, la démonstration de [20] montre par exemple que les éléments e_1^{-1} et $e_1^{-1} e_2$ engendrent librement une sous-algèbre non-commutative libre de $K(\mathfrak{w}_1)$.

Chapitre 4

Corps enveloppants en caractéristique positive

Introduction

Dans ce chapitre, on suppose que le corps de base $\mathbb{K}$ est de caractéristique $p > 0$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Les résultats classiques (voir par exemple [18]) montrent que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est un module de type fini sur son centre $Z(\mathfrak{g})$. Soit $C(\mathfrak{g}) = \operatorname{Frac} Z(\mathfrak{g})$; la localisation $K(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{g}) \otimes_{Z(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ coïncide alors avec le corps enveloppant $\operatorname{Frac} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. En contraste avec le cas de la caractéristique 0, c'est une $C(\mathfrak{g})$-algèbre simple centrale de dimension finie. La structure algébrique du corps $K(\mathfrak{g})$ est encore peu connue en général. Comme en caractéristique 0, on peut se poser la question suivante [19] : existe-t-il deux entiers $n, s \geq 0$ tels que le corps $K(\mathfrak{g})$ soit isomorphe au corps de Weyl classique $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$? En particulier, est-ce que le centre $C(\mathfrak{g})$ est une extension transcendante pure de $\mathbb{K}$?

Du fait que $K(\mathfrak{g})$ soit de dimension finie sur $C(\mathfrak{g})$, on peut se poser de nouvelles questions propres à la situation modulaire. Parmi elles, la détermination de l'exposant de $K(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire l'ordre de la classe de $K(\mathfrak{g})$ dans le groupe de Brauer de $C(\mathfrak{g})$ est encore largement ouverte.

Enfin, l'étude de l'anneau $Z(\mathfrak{g})$ proprement dit est également un problème très riche. Supposons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est restreinte. Alors $Z(\mathfrak{g})$ contient une sous-algèbre commutative libre $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$ de rang $\dim(\mathfrak{g})$, appelée p-centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, telle que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$. En général, on a $Z(\mathfrak{g}) \neq \mathcal{O}[\mathfrak{g}]$; tout naturellement on est amené à rechercher un système de générateurs de $Z(\mathfrak{g})$ comme algèbre sur $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$. De plus, on peut se poser la question suivante (cf. [8], voir [14, 12] pour le cas de la caractéristique 0) : l'anneau $Z(\mathfrak{g})$ est-il un anneau factoriel ? Ce problème a été résolu affirmativement par Premet et Tange dans [34] pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ ou, lorsque p ne divise pas n, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première partie, on introduit le cadre de notre étude. On définit tout d'abord l'indice et l'exposant d'un corps gauche de dimension finie sur son centre [22]. Ensuite on introduit les algèbres et les corps de Weyl classiques [19, 35]. En caractéristique $p > 0$, on détermine explicitement leur centre, puis on calcule l'indice et l'exposant des corps de Weyl. Enfin on rappelle la notion d'algèbre de Lie restreinte [18]. On introduit alors la notion de p-centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie restreinte. Le centre du corps enveloppant est une extension de dimension finie du corps des fractions du p-centre ; la relation générale $p^{\dim \mathfrak{g}} = [K(\mathfrak{g}) : C(\mathfrak{g})][C(\mathfrak{g}) : \mathrm{Frac}\, \mathcal{O}[\mathfrak{g}]]$ est alors établie. Pour finir, on établit un critère d'isomorphisme entre corps enveloppants et corps de Weyl classiques.

Dans la deuxième partie, on étudie le cas des algèbres de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ lorsque p ne divise pas n. En suivant la méthode de Gelfand et Kirillov [19] et en se servant des résultats de Premet et Tange [34] sur le centre du corps enveloppant , on démontre que $K(\mathfrak{g})$ est isomorphe au corps de Weyl $\mathcal{D}_{\frac{n(n-1)}{2},s}(\mathbb{K})$ avec $s = n$ lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ et $s = n-1$ lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ (théorèmes 4.19 et 4.21). En particulier on en déduit que le corps $K(\mathfrak{g})$ est d'exposant p dans les deux cas.

La troisième partie est consacrée à l'étude de l'algèbre de Witt $W(1)$ et d'une certaine sous-algèbre de l'algèbre de Witt $W(2)$. Dans la première section, on présente quelques résultats techniques utiles. Le premier permet la détermination explicite d'invariants d'une algèbre associative sous l'action de certaines dérivations. Le deuxième permet de construire algorithmiquement, sous certaines hypothèses ad hoc assez fortes, un isomorphisme entre le corps enveloppant d'une algèbre de Lie et un corps de Weyl classique. Le dernier résultat concerne le lemme de Nagata (proposition 4.29) et permet d'établir la factorialité du centre $Z(\mathfrak{g})$ dans les cas étudiés par la suite. Pour finir, on définit précisément les algèbres de Witt $W(n)$ comme algèbres de dérivations d'anneaux de polynômes tronqués à n variables. Quelques propriétés immédiates de $W(n)$ sont alors établies.

Dans les deux sections suivantes, on se tourne enfin vers l'étude des algèbres de Lie $\mathfrak{g} = W(1)$ ou $\mathfrak{g} = A(1) \otimes W(1) \subseteq W(2)$. On y démontre dans les deux cas que le corps enveloppant $K(\mathfrak{g})$ est isomorphe à un corps de Weyl $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$ et que le centre $Z(\mathfrak{g})$ est un anneau factoriel (théorèmes 4.42 et 4.59). La démarche est la même pour les deux algèbres : on commence par trouver une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}$ telle que $K(\mathfrak{g}_0) \simeq \mathcal{D}_{n,0}(\mathbb{K})$, avec $n = \dim(\mathfrak{g}_0)$. On construit ensuite explicitement des éléments $\Omega_1, \ldots, \Omega_s \in Z(\mathfrak{g})$ avec $s = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{g}_0)$ (dans le cas où $\mathfrak{g} = W(1)$ on retrouve l'élément central classique défini par exemple dans [16]). La forme explicite des éléments $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ permet de démontrer que $K(\mathfrak{g})$ est engendré par $K(\mathfrak{g}_0)$ et $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$, d'où l'on déduit que $K(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$. Enfin, à l'aide de techniques d'algèbres filtrées, on montre simultanément que $Z(\mathfrak{g})$ est engendré par ces éléments $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ comme algèbre sur le p-centre $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$ et que $Z(\mathfrak{g})$ est un anneau factoriel.

Dans toute la suite du chapitre, on fixe un corps de base $\mathbb{K}$ de caractéristique $p > 0$.

4.1 Préliminaires

4.1.1 Indice et exposant d'un corps gauche

Proposition 4.1 *Soit D un corps gauche de dimension finie sur son centre $\mathbb{K}$.*
1.[22, théorème 4.1.2] L'entier $[D : \mathbb{K}]$ est un carré parfait.
2.[22, théorème 4.4.4] Il existe un entier $m \geq 1$ tel que l'algèbre $D \otimes_{\mathbb{K}} \ldots \otimes_{\mathbb{K}} D$ (m fois) soit isomorphe à une algèbre de matrices $M_n(\mathbb{K})$, pour un certain entier $n \geq 1$.

Cette proposition permet de définir deux invariants pour un corps gauche D de dimension finie sur son centre $\mathbb{K}$. D'abord *l'indice de D* est l'entier $\mathrm{Ind}(D) = \sqrt{[D : \mathbb{K}]}$. Ensuite *l'exposant de D*, noté $\mathrm{Exp}(D)$, est le plus petit entier $m \geq 1$ vérifiant la propriété du n^{o}2. Alternativement, $\mathrm{Exp}(D)$ est l'ordre de la classe de D dans le groupe de Brauer de $\mathbb{K}$ [22]. Ces deux entiers sont liés comme suit :

Proposition 4.2 *Soit D un corps non-commutatif de dimension finie sur son centre $\mathbb{K}$.*
1. [22, théorème 4.4.5] L'entier $\mathrm{Exp}(D)$ *divise* $\mathrm{Ind}(D)$.
2. [22, lemme 4.4.5] Tout diviseur premier de $\mathrm{Ind}(D)$ *divise aussi* $\mathrm{Exp}(D)$.

4.1.2 Algèbres de Weyl et corps de Weyl

Les définitions et résultats de cette section sont classiques, voir par exemple [19, 24, 35].

Définition 4.3 Soient n, s deux entiers positifs. On appelle *algèbre de Weyl (sur $\mathbb{K}$, d'indices n et s)* l'algèbre définie sur $\mathbb{K}$ par les $2n + s$ générateurs $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$, $Z_1, \ldots, Z_s$ soumis aux relations suivantes :

$$[X_i, Y_j] = \delta_{i,j} \ ; \ [X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = [X_i, Z_j] = [Y_i, Z_j] = [Z_i, Z_j] = 0, \tag{4.1}$$

pour tous entiers $i, j \geq 1$ ($\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker). La deuxième série de relations sera décrite dans la suite par l'expression "les autres crochets sont nuls". Ces relations de commutation seront dites *canoniques*. Ces algèbres seront notées $A_{n,s}(\mathbb{K})$, ou plus simplement $A_n(\mathbb{K})$ si $s = 0$. L'algèbre de Weyl $A_{n,s}(\mathbb{K})$ est intègre et $\mathrm{Dim}^2\ A_{n,s}(\mathbb{K}) < \infty$; elle admet donc un corps des fractions que l'on appelle *corps de Weyl (sur $\mathbb{K}$, d'indices n et s)*. On note $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K}) = \mathrm{Frac}\ A_{n,s}(\mathbb{K})$, ou plus simplement $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ si $s = 0$.

Soit $\mathbb{K}(t_1, \ldots, t_s)$ le corps des fractions rationnelles à s variables à coefficients dans $\mathbb{K}$. On peut alors observer que les $\mathbb{K}$-algèbres $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_{n,0}\big(\mathbb{K}(t_1, \ldots, t_s)\big)$ sont isomorphes.

4.1.2.1 Structure des corps de Weyl en caractéristique p

Soient n, s deux entiers, avec $n \geq 1$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on considère les éléments X_k^p et Y_k^p dans $A_{n,s}(\mathbb{K})$. Le résultat suivant est bien connu [35] :

Proposition 4.4 *Le centre de l'algèbre $A_{n,s}(\mathbb{K})$ est la sous-algèbre engendrée par les éléments $X_1^p, \ldots, X_n^p$, $Y_1^p, \ldots, Y_n^p$, $Z_1, \ldots, Z_s$. L'algèbre $A_{n,s}(\mathbb{K})$ est un module libre, de rang p^{2n} sur son centre.*

Corollaire 4.5 *Le centre du corps $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$ est le sous-corps $\mathbb{K}(X_1^p, \ldots, X_n^p, Y_1^p, \ldots, Y_n^p, Z_1, \ldots, Z_s)$. C'est une extension transcendante pure de $\mathbb{K}$, de degré de transcendance $2n+s$. Le corps $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$ est de dimension p^{2n} sur son centre.*

Proposition 4.6 *Soient $n, s \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$. Alors* $\operatorname{Ind} \mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K}) = p^n$ *et* $\operatorname{Exp} \mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K}) = p$.

Preuve. Dans cette démonstration, on note $A_{n,s}$ et $\mathcal{D}_{n,s}$ au lieu de $A_{n,s}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$. Le fait que $\operatorname{Ind}(\mathcal{D}_{n,s}) = p^n$ résulte du corollaire 4.5. Calculons l'exposant de $\mathcal{D}_{n,s}$. Si $n = 1$, alors $\operatorname{Exp}(\mathcal{D}_{1,s})$ est divisible par p et divise $\operatorname{Ind}(\mathcal{D}_{1,s}) = p$ d'après la proposition 4.2, donc $\operatorname{Exp}(\mathcal{D}_{1,s}) = p$. Passons au cas général. D'abord on se ramène au cas où $s = 0$ en changeant au besoin $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}(Z_1, \ldots, Z_s)$. On écrira alors $\mathcal{D}_n$ au lieu de $\mathcal{D}_{n,0}$.

Soit C_n le centre du corps $\mathcal{D}_n$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ on appelle $\widetilde{B}_k = C_n[X_k, Y_k]$ la sous-C_n-algèbre de $\mathcal{D}_n$ engendrée par X_k et Y_k. Observons d'abord que $\widetilde{B}_k$ est un corps gauche $\mathbb{K}$-isomorphe au corps de Weyl $\mathcal{D}_{2,2n-2}(\mathbb{K})$ (voir par exemple [35]). De plus le centre de $\widetilde{B}_k$ est exactement C_n ; en particulier on a $[\widetilde{B}_k : C_n] = p^2$. En notant $\otimes$ au lieu de $\otimes_{C_n}$ le produit tensoriel des C_n-algèbres, l'application de multiplication induit un C_n-isomorphisme $\widetilde{B}_1 \otimes \ldots \otimes \widetilde{B}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_n$: en effet, l'application C_n-linéaire $\Theta \colon \widetilde{B}_1 \otimes \ldots \otimes \widetilde{B}_n \to \mathcal{D}_n$ donnée par propriété universelle des produits tensoriels est clairement multiplicative et surjective. Comme $[\widetilde{B}_1 \otimes \ldots \otimes \widetilde{B}_n : C_n] = (p^2)^n = p^{2n} = [\mathcal{D}_n : C_n]$, il s'agit d'un isomorphisme.

On peut maintenant calculer $\operatorname{Exp}(\mathcal{D}_n)$. C'est une puissance de p d'après la proposition 4.2 ; par ailleurs $\operatorname{Exp}(\mathcal{D}_n) \neq 1$ car $\mathcal{D}_n$ n'est pas isomorphe à une algèbre de matrices sur C_n. On en déduit l'inégalité $\operatorname{Exp}(\mathcal{D}_n) \geq p$. Ensuite, pour tout entier $m \geq 0$, on a d'après ce qui précède :

$$\mathcal{D}_n^{\otimes m} \simeq (\widetilde{B}_1 \otimes \ldots \otimes \widetilde{B}_n)^{\otimes m} \simeq \widetilde{B}_1^{\otimes m} \otimes \ldots \otimes \widetilde{B}_n^{\otimes m}.$$

Comme chaque $\widetilde{B}_k$ est isomorphe à un corps de Weyl $\mathcal{D}_{1,2n-2}$, avec centre C_n, on sait que pour $m = p$, chaque algèbre $\widetilde{B}_k^{\otimes m}$ est isomorphe à une algèbre de matrices sur C_n. En particulier pour $m = p$ l'algèbre $\mathcal{D}_n^{\otimes m}$ est également isomorphe à une algèbre de matrices sur C_n. Par définition de l'exposant, on a $\operatorname{Exp}(\mathcal{D}_n) \leq p$, d'où le résultat.

4.1.3 Algèbres de Lie restreintes

4.1.3.1 Notion de p-structure

Définition 4.7 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Une *p-structure sur* $\mathfrak{g}$ est une application $x \in \mathfrak{g} \mapsto x^{[p]} \in \mathfrak{g}$ (non linéaire en général) vérifiant les trois propriétés suivantes [18, paragraphe 2.1] :

1. $ad(x^{[p]}) = (ad\, x)^p$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$;
2. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^p$ pour tous $x \in \mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$;
3. $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{j=1}^{p-1} s_j(x,y)$,

où $s_j(x,y)$ est défini par l'identité $\big(ad(x \otimes t + y \otimes 1)\big)^{p-1}(x \otimes 1) = \sum_{j=1}^{p-1} j s_j(x,y) \otimes t^{j-1}$ dans $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t]$. Une algèbre de Lie munie d'une p-structure est dite *restreinte*.

Exemple 4.8

1. Soit A est une $\mathbb{K}$-algèbre associative, considérée comme algèbre de Lie avec le crochet $[x,y] = xy - yx$. Alors A est munie d'une p-structure naturelle pour laquelle on a $x^{[p]} = x^p$ pour tout $x \in A$.
2. Soit S est une $\mathbb{K}$-algèbre associative ou une algèbre de Lie et $Der(S)$ l'algèbre de Lie des $\mathbb{K}$-dérivations de S. Alors $\mathfrak{g}$ est restreinte. En effet, on voit à l'aide de la formule de Leibnitz que la puissance p-ème d'une dérivation ∂ est encore une dérivation ; la p-structure naturelle de $Der(S)$ est alors donnée par $\partial^{[p]} = \partial^p$ pour toute dérivation ∂.

D'après [18, corollaire 2.2.2 et théorème 2.2.3], on a :

Proposition 4.9 *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie et $\{x_j\}_{j\in J}$ une base de $\mathfrak{g}$.*

1. *Si le centre de $\mathfrak{g}$ est réduit à $\{0\}$, alors $\mathfrak{g}$ admet au plus une p-structure.*
2. *On suppose que pour tout $j \in J$, il existe $y_j \in \mathfrak{g}$ tel que $(ad\, x_j)^p = ad\, y_j$. Alors $\mathfrak{g}$ admet une unique p-structure telle que $x_j^{[p]} = y_j$ pour tout $j \in J$.*

4.1.3.2 Notion de p-centre

Notations 4.10 Dans toute la suite, on utilisera les notations générales suivantes. Pour toute $\mathbb{K}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Lorsque $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ admet un corps des fractions, on note $K(\mathfrak{g}) = \text{Frac } \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $C(\mathfrak{g})$ le centre de $K(\mathfrak{g})$.

Définition 4.11 Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie restreinte de dimension finie. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'élément $x^p - x^{[p]}$ est central dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On appelle alors *$p$-centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$* et on note $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$ la sous-algèbre de $Z(\mathfrak{g})$ engendrée par les éléments de la forme $x^p - x^{[p]}$, où x varie dans $\mathfrak{g}$. On notera $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ le corps des fractions de $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$.

D'après [18, théorème 5.3.1], on a :

Proposition 4.12 *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie restreinte. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$.*

1. *L'algèbre $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$ est commutative libre de rang n, engendrée par les $x_j^p - x_j^{[p]}$ avec $j \in \{1, \ldots, n\}$.*
2. *L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est un $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$-module libre, de rang fini p^n.*
3. *L'anneau $Z(\mathfrak{g})$ est entier sur $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$.*

Rappelons [36, exemple 1.10.14] que *l'anneau des quotients centraux* d'un anneau intègre A désigne le localisé de A par rapport à l'ensemble des éléments centraux non-nuls.

Corollaire 4.13 *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie restreinte.*

1. *L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ admet un corps des fractions $K(\mathfrak{g})$. Plus précisément, $K(\mathfrak{g})$ est l'anneau des quotients centraux de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*
2. *On a $C(\mathfrak{g}) = \mathrm{Frac}\, Z(\mathfrak{g})$. Plus précisément, $C(\mathfrak{g})$ est le localisé de $Z(\mathfrak{g})$ par rapport à $\mathcal{O}[\mathfrak{g}] \setminus \{0\}$.*
3. *Le corps $K(\mathfrak{g})$ est une p-algèbre, c'est-à-dire que l'indice de $K(\mathfrak{g})$ est une puissance de p. De plus, on a la formule :*

$$p^{\dim(\mathfrak{g})} = [K(\mathfrak{g}) : C(\mathfrak{g})][C(\mathfrak{g}) : \mathcal{O}(\mathfrak{g})].$$

Preuve. L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est intègre ; comme c'est un module de rang fini sur $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$, et a fortiori sur son centre, l'anneau des quotients centraux de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est aussi son corps des fractions, et on a $C(\mathfrak{g}) = \mathrm{Frac}\, Z(\mathfrak{g})$ [36, proposition 1.10.13]. On a enfin, avec $n = \dim(\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned} p^n &= [\mathcal{U}(\mathfrak{g}) : \mathcal{O}[\mathfrak{g}]] = [K(\mathfrak{g}) : \mathcal{O}(\mathfrak{g})] \quad \text{(car } \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \text{ est un } \mathcal{O}[\mathfrak{g}]\text{-module libre)} \\ &= [K(\mathfrak{g}) : C(\mathfrak{g})][C(\mathfrak{g}) : \mathcal{O}(\mathfrak{g})]. \end{aligned}$$

En particulier, l'indice de $K(\mathfrak{g})$ est bien une puissance de p.

4.1.3.3 Lemme de reconnaissance

Le lemme suivant fournit un crit'ere d'isomorphisme entre le corps enveloppant d'une algèbre de Lie et un corps de Weyl en caractéristique p.

Lemme 4.14 *Soient $n, s \in \mathbb{N}$ deux entiers et $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension $2n+s$. On suppose qu'il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_s$ dans le corps enveloppant $K(\mathfrak{g})$ tels que $[x_i, y_j] = \delta_{i,j}$ pour tous i et j, les autres crochets étant nuls. Soit A la sous-$\mathbb{K}$-algèbre engendrée par ces éléments. On suppose que $\mathrm{Frac}(A) = K(\mathfrak{g})$. Alors A est isomorphe à l'algèbre de Weyl $A_{n,s}(\mathbb{K})$ et $K(\mathfrak{g})$ est isomorphe au corps de Weyl $\mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$.*

Si de plus $\mathfrak{g}$ est restreinte et $s = 0$, alors le centre de l'algèbre enveloppante est réduit au p-centre : autrement dit, on a $Z(\mathfrak{g}) = \mathcal{O}[\mathfrak{g}]$.

Preuve. Notons pour simplifier $A_{n,s} = A_{n,s}(\mathbb{K})$. D'après la propriété universelle des algèbres définies par générateurs et relations, il existe un morphisme surjectif $\pi\colon A_{n,s} \twoheadrightarrow A$. Soit J le noyau de ce morphisme, de sorte que $A \simeq \frac{A_{n,s}}{J}$. On a alors :

$$\mathrm{Dim}^2(A_{n,s}) \geq \mathrm{Dim}^2(A) \geq \mathrm{Tdeg}^2\ \mathrm{Frac}(A) = \mathrm{Tdeg}^2\ K(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}).$$

Comme $\mathrm{Dim}^2(A_{n,s}) = 2n+s = \dim(\mathfrak{g})$, toutes ces inégalités sont des égalités. En particulier $\mathrm{Dim}^2(A_{n,s}) = \mathrm{Dim}^2(\frac{A_{n,s}}{J})$. Comme $A_{n,s}$ est intègre, ceci implique que $J = \{0\}$ d'après le corollaire 2.52, n^{o}5 ; il vient $A \simeq A_{n,s}$.

Si $s = 0$: on a alors $[K(\mathfrak{g}) : C(\mathfrak{g})] = (\mathrm{Ind}\ \mathcal{D}_n)^2 = p^{2n}$ et $\dim \mathfrak{g} = 2n$ d'après ce qui précède. Avec la formule du corollaire 4.13, on en déduit que $[C(\mathfrak{g}) : \mathcal{O}(\mathfrak{g})] = 1$, autrement dit $C(\mathfrak{g}) = \mathcal{O}(\mathfrak{g})$. Il vient $\mathrm{Frac}\ Z(\mathfrak{g}) = \mathrm{Frac}\ \mathcal{O}[\mathfrak{g}]$. L'anneau $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$ étant isomorphe à un anneau de polynômes, il est aussi intégralement clos ; comme $Z(\mathfrak{g})$ est une extension entière de $\mathcal{O}[\mathfrak{g}]$, on en déduit bien que $Z(\mathfrak{g}) = \mathcal{O}[\mathfrak{g}]$.

4.2 Corps enveloppants des algèbres de matrices

On fixe dans cette partie un corps commutatif algébriquement clos $\mathbb{K}$ de caractéristique $p > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier ; on notera $\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre de Lie des matrices à n lignes et à n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$; on notera $\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_n$ formée des matrices à trace nulle. Enfin, on utilisera librement les notations générales $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \supseteq Z(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{O}[\mathfrak{g}]$ et $K(\mathfrak{g}) \supseteq C(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ introduites en 4.10 et 4.11.

4.2.1 Un résultat préliminaire

Notations 4.15 Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ; on pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$. Soient $v \in V$ un vecteur non-nul. On note $\mathfrak{g}^v \subseteq \mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Lie formée des applications linéaires qui s'annulent en v. C'est en fait une sous-algèbre de Lie restreinte : en effet, si $X \in \mathfrak{g}$ vérifie $X(v) = 0$, alors $X^p(v) = 0$ aussi.

Par ailleurs, on définit des sous-algèbres de $\mathfrak{gl}_n$ et $\mathfrak{sl}_n$ de la manière suivante. On note $\mathfrak{g}_n^0$ la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_n$ formée des matrices dont la première colonne est nulle et $\mathfrak{s}_n^0$ la sous-algèbre de $\mathfrak{sl}_n$ formée des matrices dont la première colonne, sauf peut-être le premier coefficient, est nulle.

Lemme 4.16 *On reprend les notations ci-dessus.*

1. *L'algèbre $\mathfrak{g}^v$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_n^0$.*
2. *Si p ne divise pas n, les algèbres $\mathfrak{g}_n^0$ et $\mathfrak{s}_n^0$ sont isomorphes.*

Preuve. On fixe une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V telle que $v_1 = v$. Soit $M : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ l'isomorphisme défini par le choix de cette base. Il est facile de voir que, pour une application linéaire $X \in \mathfrak{gl}(V)$, on a $X(v) = 0$ si et seulement si la première colonne de $M(X)$ est nulle. L'application M induit donc un isomorphisme entre $\mathfrak{g}^v$ et $\mathfrak{g}_n^0$, d'où le n^{o}1.

Démontrons le n^{o}2. On suppose que p ne divise pas n, c'est-à-dire $n \neq 0$ dans $\mathbb{K}$. Soit $I_n \in \mathfrak{gl}_n$ la matrice identité. L'application linéaire $M \in \mathfrak{g}_n^0 \mapsto M - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(M) I_n \in \mathfrak{s}_n^0$ est alors un isomorphisme d'algèbres de Lie : le n^{o}2 est établi.

Proposition 4.17 *Reprenons l'algèbre $\mathfrak{g}_n^0$ introduite ci-dessus. Le corps enveloppant $K(\mathfrak{g}_n^0)$ est $\mathbb{K}$-isomorphe au corps de Weyl $\mathcal{D}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{K})$. De plus, on a $Z(\mathfrak{g}_n^0) = \mathcal{O}[\mathfrak{g}_n^0]$ et $C(\mathfrak{g}_n^0) = \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^0)$.*

Preuve. On procède par récurrence sur n comme dans [19, lemme 7]. Dans $\mathfrak{g}_{n+1}^0$ on considère la base naturelle composée des $e_{i,j}$ avec $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $j \in \{2, \ldots, n+1\}$. On pose, pour $i, j \in \{2, \ldots, n+1\}$:

$$x_j = e_{1,j} \quad , \quad y_j = e_{j,j} x_j^{-1} \quad , \quad \widetilde{e_{i,j}} = e_{i,j} x_i x_j^{-1}.$$

On va montrer que les x_j et y_j, pour $j \geq 2$, vérifient les relations de commutations (4.1) définissant l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{K})$; ensuite on construira à partir des éléments $\widetilde{e_{i,k}}$ une sous-algèbre commutant aux éléments précédents et sur laquelle on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Dans les calculs qui suivent, on utilisera souvent sans le préciser explicitement des identités de la forme suivante. Pour $x, y, z_i, z_j \in K(\mathfrak{g}_{n+1}^0)$ avec $y \neq 0$:

$$[x, y^{-1}] = -y^{-1}[x, y]y^{-1} \quad \text{et} \quad \delta_{i,j} z_i = \delta_{i,j} z_j.$$

On rappelle les relations de commutation, valables pour tous $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n+1\}$:

$$[e_{i,j}, e_{k,l}] = \delta_{j,k} e_{i,l} - \delta_{l,i} e_{k,j}.$$

En particulier notons que $[x_i, e_{j,k}] = \delta_{i,j} x_k$ pour $i, k \geq 2$ et $j \geq 1$. Soient $i, j, k \in \{2, \ldots, n+1\}$. On a immédiatement $[x_i, x_j] = [e_{1,i}, e_{1,j}] = 0$. Si $i \neq j$, on a de même $[x_i, e_{j,j}] = [e_{i,i}, e_{j,j}] = 0$, d'où $[y_i, y_j] = [e_{i,i} x_i^{-1}, e_{j,j} x_j^{-1}] = 0$. Si $i = j$ la relation $[y_i, y_j] = 0$ est triviale. En outre :

$$[x_i, y_j] = [x_i, e_{j,j}] x_j^{-1} = \delta_{i,j} x_j x_j^{-1} = \delta_{i,j}.$$

Par ailleurs, on a :

$$[\widetilde{e_{i,k}}, x_j] = [e_{i,k} x_i x_k^{-1}, x_j] = [e_{i,k}, x_j] x_i x_k^{-1} = -\delta_{i,j} x_k x_i x_k^{-1} = -\delta_{i,j} x_j.$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
[\widetilde{e_{i,k}}, y_j] &= [\widetilde{e_{i,k}}, e_{j,j}] x_j^{-1} - e_{j,j} x_j^{-1} [\widetilde{e_{i,k}}, x_j] x_j^{-1} \\
&= [e_{i,k} x_i x_k^{-1}, e_{j,j}] x_j^{-1} + \delta_{i,j} e_{j,j} x_j^{-1} x_j x_j^{-1} \\
&= (\delta_{k,j} e_{i,j} - \delta_{j,i} e_{j,k}) x_i x_k^{-1} x_j^{-1} + e_{i,k} [x_i, e_{j,j}] x_k^{-1} x_j^{-1} \\
&\quad - e_{i,k} x_i x_k^{-1} [x_k, e_{j,j}] x_k^{-1} x_j^{-1} + \delta_{i,j} e_{j,j} x_j^{-1} \\
&= \delta_{k,j} e_{i,j} x_i x_k^{-1} x_j^{-1} - \delta_{i,j} e_{j,k} x_k^{-1} + \delta_{i,j} e_{i,k} x_j x_k^{-1} x_j^{-1} - \delta_{k,j} e_{i,k} x_i x_k^{-1} x_j x_k^{-1} x_j^{-1} + \delta_{i,j} y_j \\
&= \delta_{i,j} y_j.
\end{aligned}$$

On a donc établi les relations suivantes pour $i, j, k \geq 2$:

$$[x_i, x_j] = 0 \quad , \quad [y_i, y_j] = 0 \quad , \quad [x_i, y_j] = \delta_{i,j} \quad , \tag{4.2}$$

$$[\widetilde{e_{i,k}}, x_j] = -\delta_{i,j} x_j \quad , \quad [\widetilde{e_{i,k}}, y_j] = \delta_{i,j} y_j. \tag{4.3}$$

Soient $(c_{i,k})_{i,k=2,\ldots,n+1}$ des coefficients. On a pour tout $j \in \{2, \ldots, n+1\}$:

$$[\sum_{i,k} c_{i,k} \widetilde{e_{i,k}}, x_j] = -\sum_{i,k} c_{i,k} \delta_{i,j} x_j = -(\sum_k c_{j,k}) x_j,$$

et de même $[\sum_{i,k} c_{i,k} \widetilde{e_{i,k}}, y_j] = (\sum_k c_{j,k}) y_j$. Par conséquent, si les coefficients $c_{i,k}$ satisfont aux conditions :

$$(\forall\, j \in \{2, \ldots, n+1\}) \ : \ \sum_{k=2}^{n+1} c_{j,k} = 0, \tag{4.4}$$

alors l'élément $\sum_{i,k} c_{i,k} \widetilde{e_{i,k}}$ commute aux x_j et y_j pour $j \in \{2, \ldots, n+1\}$.

Notons à présent $\mathfrak{h}$ l'ensemble des matrices $C = (c_{i,k})_{2 \leq i,k \leq n+1} \in \mathfrak{gl}_n$ dont les coefficients vérifient les identités (4.4). D'abord, il s'agit d'une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{g}_n^0$. En effet, identifions de la manière usuelle $\mathfrak{gl}_n$ à $\mathfrak{gl}(V)$ où V est l'espace des vecteurs-colonnes $\mathbb{K}^n$. Dans cette identification, $\mathfrak{h}$ s'identifie à la sous-algèbre $\mathfrak{g}^v$ des applications linéaires qui s'annulent sur le vecteur

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

D'après le lemme 4.16, on a bien $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}_n^0$. Pour une matrice $C \in \mathfrak{h}$ on définit alors un élément $\alpha(C) = \sum_{i,k \geq 2} c_{i,k} \widetilde{e_{i,k}} \in K(\mathfrak{g}_{n+1}^0)$. Montrons que l'application linéaire α est un morphisme d'algèbres de Lie. Soient $C, C' \in \mathfrak{h}$ deux matrices ; on note $C = (c_{i,j})_{i,j \geq 2}$ et $C' = (c'_{i,j})_{i,j \geq 2}$. On a donc $[C, C'] = (c''_{i,j})_{i,j \geq 2}$, avec :

$$(\forall\, i, j \geq 2) \ : \ c''_{i,j} = \sum_{k=2}^{n+1} c_{i,k} c'_{k,j} - c'_{i,k} c_{k,j}.$$

On a donc d'une part :

$$\alpha\left([C, C']\right) = \sum_{i,j} \left(\sum_k c_{i,k} c'_{k,j} - c'_{i,k} c_{k,j} \right) \widetilde{e_{i,j}}. \tag{4.5}$$

D'autre part, soient $i, j, k, l \in \{2, \ldots, n+1\}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
[\widetilde{e_{i,j}}, \widetilde{e_{k,l}}] &= [\widetilde{e_{i,j}}, e_{k,l} x_k x_l^{-1}] = [\widetilde{e_{i,j}}, e_{k,l}] x_k x_l^{-1} + e_{k,l} [\widetilde{e_{i,j}}, x_k] x_l^{-1} - e_{k,l} x_k x_l^{-1} [\widetilde{e_{i,j}}, x_l] x_l^{-1} \\
&= [e_{i,j} x_i x_j^{-1}, e_{k,l}] x_k x_l^{-1} - \delta_{i,k} e_{k,l} x_k x_l^{-1} + \delta_{i,l} e_{k,l} x_k x_l^{-1} x_l x_l^{-1} \\
&= \left(\delta_{j,k} e_{i,l} - \delta_{i,l} e_{k,j}\right) x_i x_j^{-1} x_k x_l^{-1} + e_{i,j} [x_i, e_{k,l}] x_j^{-1} x_k x_l^{-1} \\
&\quad - e_{i,j} x_i x_j^{-1} [x_j, e_{k,l}] x_j^{-1} x_k x_l^{-1} - \delta_{i,k} e_{k,l} x_k x_l^{-1} + \delta_{i,l} e_{k,l} x_k x_l^{-1} \\
&= \delta_{j,k} e_{i,l} x_i x_j^{-1} x_k x_l^{-1} - \delta_{i,l} e_{k,j} x_i x_j^{-1} x_k x_l^{-1} + \delta_{k,i} e_{i,j} x_l x_j^{-1} x_k x_l^{-1} \\
&\quad - \delta_{j,k} e_{i,j} x_i x_j^{-1} x_l x_j^{-1} x_k x_l^{-1} - \delta_{i,k} e_{k,l} x_k x_l^{-1} + \delta_{i,l} e_{k,l} x_k x_l^{-1} \\
&= \delta_{j,k} \widetilde{e_{i,l}} - \delta_{i,l} \widetilde{e_{k,j}} + \delta_{k,i} \widetilde{e_{i,j}} - \delta_{j,k} \widetilde{e_{i,j}} - \delta_{i,k} \widetilde{e_{k,l}} + \delta_{i,l} \widetilde{e_{k,l}}.
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
[\alpha(C),\alpha(C')] &= \sum_{i,j}\sum_{k,l} c_{i,j}c'_{k,l}[\widetilde{e_{i,j}},\widetilde{e_{k,l}}]\\
&= \sum_{i,j}\sum_{k,l} c_{i,j}c'_{k,l}\left(\delta_{j,k}\widetilde{e_{i,l}}-\delta_{i,l}\widetilde{e_{k,j}}+\delta_{k,i}\widetilde{e_{i,j}}-\delta_{j,k}\widetilde{e_{i,j}}-\delta_{i,k}\widetilde{e_{k,l}}+\delta_{i,l}\widetilde{e_{k,l}}\right)\\
&= \sum_{i,l}\left(\sum_k c_{i,k}c'_{k,l}\right)\widetilde{e_{i,l}}-\sum_{k,j}\left(\sum_i c_{i,j}c'_{k,i}\right)\widetilde{e_{k,l}}-\sum_{i,j}\left(\sum_l c_{i,j}c'_{i,l}\right)\widetilde{e_{i,j}}\\
&\quad -\sum_{i,j}\left(\sum_l c_{i,j}c'_{j,l}\right)\widetilde{e_{i,j}}-\sum_{k,l}\left(\sum_j c_{k,j}c'_{k,l}\right)\widetilde{e_{k,l}}+\sum_{k,l}\left(\sum_j c_{l,j}c'_{k,l}\right)\widetilde{e_{k,l}}.
\end{aligned}$$

Regardons la troisième somme. On a, compte tenu de la condition (4.4) pour $C'\in\mathfrak{h}$:

$$\sum_{i,j}\left(\sum_l c_{i,j}c'_{i,l}\right)\widetilde{e_{i,j}}=\sum_{i,j}c_{i,j}\left(\sum_l c'_{i,l}\right)\widetilde{e_{i,j}}=0.$$

On montre de même que les trois dernières sommes s'annulent. Après changement d'indices, il reste :

$$\begin{aligned}
[\alpha(C),\alpha(C')] &= \sum_{i,j}\left(\sum_k c_{i,k}c'_{k,j}\right)\widetilde{e_{i,j}}-\sum_{i,j}\left(\sum_k c_{k,j}c'_{i,k}\right)\widetilde{e_{i,j}}\\
&= \sum_{i,j}\left(\sum_k c_{i,k}c'_{k,j}-c'_{i,k}c_{k,j}\right)\widetilde{e_{i,j}},
\end{aligned}$$

et finalement, en comparant avec l'identité (4.5) on a bien $\alpha([C,C'])=[\alpha(C),\alpha(C')]$.

On peut maintenant prolonger l'application α en un morphisme d'algèbres associatives $\widehat{\alpha}$: $\mathcal{U}(\mathfrak{h})\to K(\mathfrak{g}^0_{n+1})$, dont on note A l'image. Par construction, A commute aux éléments x_j et y_j pour tout $j\in\{2,\dots,n+1\}$. La sous-algèbre B engendrée par ces x_j et y_j est isomorphe à un quotient de l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{K})$. Soit C la sous-algèbre engendrée par A et B ; c'est un quotient de $A\otimes_{\mathbb{K}}B$ et il est facile de voir que $K(\mathfrak{g}^0_{n+1})=\mathrm{Frac}(C)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(n+1)n &= \mathrm{Tdeg}^2\ K(\mathfrak{g}^0_{n+1})\le \mathrm{Dim}^2(C)\le \mathrm{Dim}^2(A\otimes_{\mathbb{K}}B)\le \mathrm{Dim}^2(A)+\mathrm{Dim}^2(B)\\
&\le \mathrm{Dim}^2\ \mathcal{U}(\mathfrak{h})+\mathrm{Dim}^2\ A_n(\mathbb{K})=n(n-1)+2n=n(n+1),
\end{aligned}$$

d'où en particulier $\mathrm{Dim}^2(A)=\mathrm{Dim}^2\ \mathcal{U}(\mathfrak{h})$. On en déduit comme dans le lemme 4.14 que $\widehat{\alpha}$ est injectif, donc $A\simeq\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Par suite, le corps des fractions $\mathrm{Frac}(A)$ est isomorphe à $K(\mathfrak{h})$, donc à $K(\mathfrak{g}^0_n)$. Par hypothèse de récurrence, $K(\mathfrak{g}^0_n)$ est engendré par n^2-n éléments satisfaisant aux relations (4.1). Par suite, le corps $K(\mathfrak{g}^0_{n+1})$ est engendré par $(n^2-n)+2n=(n+1)^2-(n+1)$ éléments soumis à ces mêmes relations. D'après le lemme 4.14, on en déduit bien que $K(\mathfrak{g}^0_{n+1})$ est isomorphe au corps de Weyl $\mathcal{D}_{\frac{(n+1)n}{2}}(\mathbb{K})$ et que $Z(\mathfrak{g}^0_n)=\mathcal{O}[\mathfrak{g}^0_n]$. La proposition est démontrée.

4.2.2 Les corps enveloppants de $\mathfrak{gl}_n$ et $\mathfrak{sl}_n$

On note $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ les éléments de Casimir de $\mathfrak{gl}_n$ (voir par exemple [34]). Pour étudier la structure algébrique de $K(\mathfrak{gl}_n)$, on cherche à établir que $K(\mathfrak{gl}_n)$ est engendré par $K(\mathfrak{g}_n^0)$ (où $\mathfrak{g}_n^0$ est définie en 4.15) et le centre $C(\mathfrak{gl}_n)$. À cet effet, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.18 *Soient K un corps gauche, K_0 un sous-corps gauche, C et C_0 leurs centres respectifs. On suppose $C_0 \subseteq C$. Soit $K_1 = C.K_0 \subseteq K$ la sous-algèbre de K engendrée par C et K_0. Alors $K_1 \simeq C \otimes_{C_0} K_0$. En particulier, le centre $Z(K_1) = C$ et on a les identités des dimensions :*

$$[K_1 : C] = [K_0 : C_0] \quad ; \quad [K_1 : K_0] = [C : C_0].$$

Preuve. L'application de multiplication induit un morphisme d'algèbres $\mu : C \otimes_{C_0} K_0 \to K_1$ qui est évidemment surjectif. Par ailleurs l'algèbre $C \otimes_{C_0} K_0$ est simple (voir par exemple Bourbaki, *Algèbre* VIII, p. 43) donc μ est injectif et c'est bien un isomorphisme. Enfin, le centre de $C \otimes_{C_0} K_0$ est $Z(C) \otimes_{C_0} Z(K_0) = C \otimes_{C_0} C_0$, d'où l'on déduit bien que $Z(K_1) = C$. Les identités sur les dimensions sont immédiates.

Théorème 4.19 *Le corps enveloppant de $\mathfrak{gl}_n$ est isomorphe à un corps de Weyl :*

$$K(\mathfrak{gl}_n) \simeq \mathcal{D}_{\frac{n(n-1)}{2},n}(\mathbb{K}).$$

Preuve. On reprend la sous-algèbre $\mathfrak{g}_n^0$ introduite en 4.15. On pose $K_0 = K(\mathfrak{g}_n^0)$ et $C_0 = C(\mathfrak{g}_n^0)$. Montrons que $K(\mathfrak{gl}_n)$ est engendré par K_0 et $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Si c'est le cas, on déduit de la proposition 4.17 que le corps enveloppant $K(\mathfrak{gl}_n)$ est engendré par des éléments $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N$ et $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ avec $N = \frac{n(n-1)}{2}$ et satisfaisant aux relations canoniques (4.1). D'après le lemme 4.14, on en déduit bien que $K(\mathfrak{gl}_n) \simeq \mathcal{D}_{N,n}(\mathbb{K})$.

D'après la proposition 4.17, on a $C_0 = \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^0) \subseteq C(\mathfrak{gl}_n)$. D'après la démonstration de [34, théorème 1], on voit que le corps $C(\mathfrak{gl}_n)$ est engendré au-dessus de $\mathbb{K}$ par $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ et les éléments $e_{i,j}^p - e_{i,j}^{[p]}$ tels que $j \in \{2, \ldots, n\}$. Or ces derniers engendrent précisément $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n^0)$; autrement dit $C(\mathfrak{gl}_n) = C_0(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Notons K_1 le sous-corps de $K(\mathfrak{gl}_n)$ engendrée par K_0 et $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Il s'agit aussi de la sous-algèbre engendrée par K_0 et $C(\mathfrak{gl}_n)$. D'après le lemme précédent, on a :

$$[K_1 : C(\mathfrak{gl}_n)] = [K_0 : C_0] = [\mathcal{D}_N : Z(\mathcal{D}_N)] = p^{2N} = p^{n^2-n}.$$

Comme $[K(\mathfrak{gl}_n) : C(\mathfrak{gl}_n)] = p^{n^2-n}$ (cf. [34]), on en déduit bien que $K_1 = K(\mathfrak{gl}_n)$.

En utilisant le fait que les corps de Weyl non-commutatifs sont d'exposant p (proposition 4.6), on obtient :

Corollaire 4.20 *Le corps enveloppant $K(\mathfrak{gl}_n)$ est d'exposant p.*

Avec une méthode tout à fait identique à celle qui précède, mais en remplaçant l'algèbre $\mathfrak{g}_n^0$ par $\mathfrak{s}_n^0$ (définie en 4.16), on démontrerait le théorème suivant :

Théorème 4.21 *Lorsque p ne divise pas n, le corps enveloppant de $\mathfrak{sl}_n$ est isomorphe à un corps de Weyl :*

$$K(\mathfrak{sl}_n) \simeq \mathcal{D}_{\frac{n(n-1)}{2},n-1}(\mathbb{K}).$$

En particulier on a aussi $\mathrm{Exp}\, K(\mathfrak{sl}_n) = p$.

4.3 Algèbres de Witt

Dans cette partie, on considère toujours un corps de base $\mathbb{K}$ de caractéristique $p > 0$. On supposera pour simplifier $p \neq 2$; on pose alors $q = \frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$, de sorte que $2q + 1 = 0$ dans $\mathbb{K}$. On supposera en outre par commodité que $\mathbb{K}$ est un corps parfait. Les notations générales $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \supseteq Z(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{O}[\mathfrak{g}]$ et $K(\mathfrak{g}) \supseteq C(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ introduites en 4.10 et 4.11 seront employées librement.

4.3.1 Résultats préliminaires

Notations 4.22 Pour les éléments de $\mathbb{Z}^{q+1}$, on utilisera les notations multi-indicielles classiques suivantes. Les symboles de la forme $\underline{\boldsymbol{m}}$, $\underline{\boldsymbol{k}}$, etc. désignent les $(q+1)$-uplets $(m_0, \ldots, m_q)$, $(k_0, \ldots, k_q)$, etc. De plus, pour $\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{Z}^{q+1}$ on notera $|\underline{\boldsymbol{m}}| = m_0 + m_1 + \ldots + m_q$ la longueur du $(q+1)$-uplet $\underline{\boldsymbol{m}}$.

4.3.1.1 Invariants sous l'action d'une dérivation

Le lemme suivant concerne les invariants d'une algèbre sous l'action de certaines dérivations. On l'appliquera dans les parties suivantes pour construire des invariants sous l'action de l'algèbre de Witt $W(1)$ dans certaines algèbres enveloppantes.

Lemme 4.23 *Soit B une algèbre associative. Pour tout $k \in \{0, \ldots, q\}$, on considère une famille $\{X_j^{(k)}\}_{-1 \leq j \leq p-2}$ dans B. On note par commodité $X_j^{(k)} = 0$ si $j \notin \{-1, 0, \ldots, p-2\}$. On pose :*

$$\Omega = \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{m}}| = p-1}} X^{(0)}_{p-2-m_0} X^{(1)}_{p-2-m_1} \cdots X^{(q)}_{p-2-m_q}.$$

Soit ∂ une dérivation de B vérifiant l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1. pour tous $k \in \{0, \ldots, q\}$ *et* $j \in \{-1, 0, \ldots, p-2\}$ *:* $\partial\big(X_j^{(k)}\big) = (j+1)X_{j-1}^{(k)}$ *;*

2. pour tous $k \in \{0, \ldots, q\}$ *et* $j \in \{-1, 0, \ldots, p-2\}$ *:* $\partial\big(X_j^{(k)}\big) = (j-p+2)X_{j+p-2}^{(k)}$.

Alors $\partial(\Omega) = 0$.

Preuve. Pour simplifier les écritures, on note dans cette démonstration

$$\mathcal{M} = \big\{(m_0, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^{q+1} \,|\, m_0 + \ldots + m_q = p-1\big\}.$$

Examinons d'abord le premier cas. Pour $\underline{\boldsymbol{m}} = (m_0, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^{q+1}$, on notera $p-2-\underline{\boldsymbol{m}}$ au lieu de $(p-2-m_0, \ldots, p-2-m_q)$. Enfin, pour $\underline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{Z}^{q+1}$, on pose $X(\underline{\boldsymbol{a}}) = X_{a_0}^{(0)} \ldots X_{a_q}^{(q)} \in B$. L'élément Ω peut donc être écrit sous la forme :

$$\Omega = \sum_{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M}} X(p-2-\underline{\boldsymbol{m}}).$$

Posons $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = (\delta_{0,s}, \ldots, \delta_{q,s})$: c'est le $(q+1)$-uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice s qui vaut 1. Pour tout $\underline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{Z}^{q+1}$, on calcule facilement que $\partial\Big(X(\underline{\boldsymbol{a}})\Big) = \sum_{s=0}^{q}(a_s+1)X(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s)$. Il vient :

$$\begin{aligned}\partial(\Omega) &= \sum_{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M}} \sum_{s=0}^{q} (p-2-m_s+1)X(p-2-\underline{\boldsymbol{m}}-\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s) \\ &= \sum_{\underline{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{s \in \{0,\ldots,q\} \\ \underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M} \\ \underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{m}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s}} (\underbrace{p-2-m_s+1}_{=p-(m_s+1)=p-a_s})X(p-2-\underline{\boldsymbol{a}}),\end{aligned}$$

où $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^{q+1}$ désigne l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A} = \big\{\underline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{Z}^{q+1} \mid \exists\, \underline{\boldsymbol{\mu}} \in \mathcal{M},\ \exists t \in \{0, \ldots, q\} \text{ tels que } \underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\big\}.$$

Fixons à présent un élément $\underline{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{A}$. On peut choisir un élément $\underline{\boldsymbol{\mu}} \in \mathcal{M}$ et un entier $t \in \{0, \ldots, q\}$ tels que $\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$. Pour $s \in \{0, \ldots, q\}$, il existe au plus un élément $\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M}$ tel que $\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{m}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s$; soit $\delta(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \in \mathcal{M}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ Alors :

$$\partial(\Omega) = \sum_{\underline{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{A}} \left(\sum_{s=0}^{q}(p-a_s)\delta(s)\right) X(p-2-\underline{\boldsymbol{a}}). \tag{4.6}$$

Calculons alors le coefficient $\sum_{s=0}^{q}(p-a_s)\delta(s)$. On a $\delta(s)=1$ si, et seulement si, $\underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \in \mathcal{M}$. Or on a déjà la condition $|\underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s| = |\underline{\boldsymbol{\mu}}+\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_t-\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s| = |\underline{\boldsymbol{\mu}}| = p-1$. Il vient :

$$\delta(s)=1 \iff \underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \in \mathcal{M} \iff \underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \in \mathbb{N}^{q+1}.$$

Or toutes les composantes de $\underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \underline{\boldsymbol{\mu}}+\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_t-\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s$ sont toujours positives, sauf si $s \neq t$ **et** $\mu_s = 0$. Dans ce cas, on a aussi $a_s = \mu_s = 0$, d'où $p-a_s = (p-a_s)\delta(s) = 0$ dans $\mathbb{K}$. Lorsque $\delta(s)=1$ l'égalité $p-a_s = (p-a_s)\delta(s)$ est triviale. Par conséquent, on a l'identité suivante dans $\mathbb{K}$:

$$\sum_{s=0}^{q}(p-a_s)\delta(s) = \sum_{s=0}^{q}(p-a_s) = -\sum_{s=0}^{q} a_s = -|\underline{\boldsymbol{a}}| = -|\underline{\boldsymbol{\mu}}+\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_t| = -(p-1+1) = 0.$$

En remplaçant dans l'équation (4.6), on voit que $\partial(\Omega)=0$.

Examinons à présent le deuxième cas. On décompose $\mathcal{M}$ en trois parties : $\mathcal{M} = \mathcal{M}(1) \cup \mathcal{M}(2) \cup \mathcal{M}(3)$ de la manière suivante. On pose :

$$\mathcal{M}(1) = \{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M} \mid \text{tous les } m_j \text{ sont nuls, sauf un qui vaut } p-1\}\ ;$$

$$\mathcal{M}(2) = \{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M} \mid \text{tous les } m_j \text{ sont nuls, sauf deux qui valent 1 et } p-2\}\ ;$$

$$\mathcal{M}(3) = \{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M} \mid \text{tous les } m_j \text{ sont } \leq p-3\}.$$

On décompose alors $\Omega = \omega_1+\omega_2+\omega_3$, avec

$$\omega_i = \sum_{\underline{\boldsymbol{m}}\in\mathcal{M}(i)} X^{(0)}_{p-2-m_0} X^{(1)}_{p-2-m_1} \dots X^{(q)}_{p-2-m_q} \quad \text{pour } i \in \{1,2,3\}.$$

Comme $\partial(X_j^{(k)}) = 0$ lorsque $j>0$, il est clair que $\partial(\omega_3)=0$. Écrivons explicitement les éléments ω_1 et ω_2 :

$$\omega_1 = \sum_{s=0}^{q} X^{(0)}_{p-2} \dots X^{(s-1)}_{p-2} X^{(s)}_{-1} X^{(s+1)}_{p-2} \dots X^{(q)}_{p-2}$$

et

$$\omega_2 = \sum_{0\leq s<t\leq q} \left(X^{(0)}_{p-2} \dots X^{(s)}_{p-3} \dots X^{(t)}_{0} \dots X^{(q)}_{p-2} + X^{(0)}_{p-2} \dots X^{(s)}_{0} \dots X^{(t)}_{p-3} \dots X^{(q)}_{p-2} \right).$$

Dans ces expressions, les "..." désignent des produits d'éléments $X^{(k)}_{p-2}$, l'indice étant toujours $p-2$ et l'exposant $k \in \{0,\dots,q\}$ est arbitraire. On a : $\partial(X^{(k)}_{-1}) = (1-p)X^{(k)}_{p-3} = X^{(k)}_{p-3}$ et

$\partial(X_0^{(k)}) = (2-p)X_{p-2}^{(k)} = 2X_{p-2}^{(k)}$; il vient :

$$\begin{aligned}
\partial(\Omega) &= \sum_{s=0}^{q} X_{p-2}^{(0)} \dots X_{p-3}^{(s)} \dots X_{p-2}^{(q)} + \sum_{s=0}^{q} \sum_{t \neq s} 2X_{p-2}^{(0)} \dots X_{p-2}^{(t)} \dots X_{p-3}^{(s)} \dots X_{p-2}^{(q)} \\
&= \sum_{s=0}^{q} X_{p-2}^{(0)} \dots X_{p-3}^{(s)} \dots X_{p-2}^{(q)} + \sum_{s=0}^{q} 2qX_{p-2}^{(0)} \dots X_{p-3}^{(s)} \dots X_{p-2}^{(q)} \\
&= \sum_{s=0}^{q} (1+2q)X_{p-2}^{(0)} \dots X_{p-3}^{(s)} \dots X_{p-2}^{(q)} = 0.
\end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Sous certaines hypothèses énoncées plus loin, on cherche à construire algorithmiquement des générateurs de $K(\mathfrak{g})$ satisfaisant aux relations canoniques (4.1) définissant les algèbres de Weyl. L'algorithme s'inspire de celui utilisé dans [19]. On a besoin tout d'abord du lemme de prolongement suivant.

Lemme 4.24 *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et ∂ une dérivation de $\mathfrak{g}$ vérifiant la propriété suivante :*

$$(\forall\, j,k \geq 0)\ (\forall\, X,Y \in \mathfrak{g})\ :\ j+k \geq p \Rightarrow\ [\partial^j(X), \partial^k(Y)] = 0.$$

Soit $c \in C(\mathfrak{g})$ un élément central du corps enveloppant. Alors l'application linéaire

$$\phi : X \in \mathfrak{g} \mapsto \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} c^k \partial^k(X) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})[c]$$

se prolonge en un morphisme d'algèbres $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})[c]$.

Notons encore ∂ le prolongement naturel de ∂ en une dérivation de $K(\mathfrak{g})$. Si $\partial(c) = -1$ et $\partial^p = 0$, alors $\partial \circ \phi = 0$.

Preuve. D'après la propriété universelle des algèbres enveloppantes, il suffit de montrer que, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$: $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}\phi([X,Y]) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} c^k \partial^k([X,Y]) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} c^k [\partial^j(X), \partial^{k-j}(Y)] \\ &= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=j}^{p-1} \frac{1}{j!(k-j)!} c^k [\partial^j(X), \partial^{k-j}(Y)] \\ &= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1-j} \frac{1}{j!k!} c^{k+j} [\partial^j(X), \partial^{k}(Y)],\end{aligned}$$

et d'autre part $[\phi(X), \phi(Y)] = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{j!k!} c^{k+j} [\partial^j(X), \partial^k(Y)]$. Il vient :

$$[\phi(X), \phi(Y)] - \phi([X,Y]) = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=p-j}^{p-1} \frac{1}{j!k!} c^{k+j} [\partial^j(X), \partial^k(Y)].$$

Dans tous les termes de la deuxième somme, on a $k + j \geq p$, donc $[\partial^j(X), \partial^k(Y)] = 0$ par hypothèse sur ∂. On en déduit bien que $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X,Y])$.

Si $\partial(c) = -1$, on voit par récurrence que $\partial(c^j) = -jc^{j-1}$. Il vient, pour $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\partial \circ \phi(X) &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{-1}{(j-1)!} c^{j-1} \partial^j(X) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} c^j \partial^{j+1}(X) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} c^{p-1} \partial^p(X).\end{aligned}$$

Si ∂^p s'annule sur $\mathfrak{g}$, alors $\partial \circ \phi$ s'annule aussi sur $\mathfrak{g}$. On vérifie ensuite facilement que $\partial \circ \phi = 0$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On suppose qu'il existe une suite de composition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{g}_1 \supsetneq \mathfrak{g}_0 \supsetneq \mathfrak{g}_{-1} \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{g}_{-n} = \mathfrak{z}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. pour tout $k \in \{-n, \ldots, n\}$, il existe $X_k \in \mathfrak{g}_k$ tel que $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_{k-1} \oplus \mathbb{K}X_k$;
2. pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, le centre de $\mathfrak{g}_k$ est exactement $\mathfrak{g}_{-k}$;
3. pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$: $[X_k, X_{-(k-1)}] \in \mathfrak{z}$;
4. pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$: $(ad\, X_k)^p(\mathfrak{g}_{k-1}) = \{0\}$;
5. pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$(\forall\, i, j \geq 0)\ (\forall\, a, b \in \mathfrak{g}_k)\ :\ i + j \geq p \Rightarrow\ [(ad\, X_k)^i a, (ad\, X_k)^j b] = 0.$$

En particulier, $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$. On note, pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$: $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}$ le localisé de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ par le système multiplicatif engendré par $\mathfrak{z} \setminus \{0\}$.

Proposition 4.25 *Sous les hypothèses précédentes : il existe $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$ vérifiant les conditions suivantes. Pour toute base $\{z_1, \dots, z_s\}$ de $\mathfrak{z}$:*

1. *les éléments $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ et $z_1, \dots, z_s$ vérifient les relations de commutation (4.1) définissant l'algèbre de Weyl $A_{n,s}(\mathbb{K})$;*
2. *les éléments $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$, $z_1, \dots, z_s$, ainsi que les inverses des éléments non-nuls de $\mathfrak{z}$ engendrent l'algèbre $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$.*

Preuve. Par récurrence sur m, on va montrer qu'il existe des éléments $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$ dans $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)}$ satisfaisant aux relations (4.1) et tels que les éléments $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$, le sous-espace $\mathfrak{g}_{-m}$ (c'est-à-dire le centre de $\mathfrak{g}_m$), ainsi que les inverses des éléments non-nuls de $\mathfrak{z}$, engendrent l'algèbre $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)}$. On s'inspire à cet effet de la démonstration de [19, lemme 9, 2ème cas].

Appelons $\mathcal{H}(m)$ l'hypothèse selon laquelle l'énoncé ci-dessus est vrai pour l'entier m. L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est évidemment satisfaite, car $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_0$ est abélienne.

Passons maintenant à l'étape récursive. Fixons $m \in \{1, \dots, n\}$. On suppose la condition $\mathcal{H}(m-1)$ vérifiée, avec des éléments $x_1, \dots, x_{m-1}$, $y_1, \dots, y_{m-1}$. On cherche à construire des nouveaux éléments $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_m$, et $\widetilde{y}_1, \dots, \widetilde{y}_m$ vérifiant les propriétés 1 et 2.

On rappelle qu'on a la décomposition $\mathfrak{g}_{-(m-1)} = \mathfrak{g}_{-m} \oplus \mathbb{K}X_m$. On a $[X_m, X_{-(m-1)}] \neq 0$, sans quoi on aurait $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_m) = \mathfrak{g}_{-(m-1)}$ tout entier. Il vient $[X_m, X_{-(m-1)}] \in \mathfrak{z} \setminus \{0\}$. Posons $u = X_m$, $v = Y_m$, $w = [u, v] \in \widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)} \setminus \{0\}$. Comme $w \in \mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{g}_{-(m-1)}$ et $v \in \mathfrak{g}_{-(m-1)}$, l'élément $-vw^{-1}$ est central dans $K(\mathfrak{g}_{m-1})$. Appliquons le lemme 4.24 à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{m-1}$ avec $\partial = ad(u)$, restreinte à $\mathfrak{g}_{m-1}$ et $c = -vw^{-1}$: il existe un morphisme d'algèbres $\phi\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})[c] \subseteq \widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)}$ vérifiant :

$$(\forall\, X \in \mathfrak{g}_{m-1}) \quad : \quad \phi(X) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{j!} (vw^{-1})^j (ad\, u)^j (X). \tag{4.7}$$

On a $\partial(c) = [u, -vw^{-1}] = -[u, v]w^{-1} = -1$ et $\partial^p = 0$. D'après le lemme 4.24, on a $\partial \circ \Phi = 0$, autrement dit, pour tout $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})$: $[u, \phi(X)] = 0$.

Pour tout élément $z \in \mathfrak{z}$, on a $(ad\, u)(z) = 0$. Mais alors $\phi(z) = z$ est inversible dans $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)}$. On peut alors prolonger ϕ par localisation en un morphisme d'algèbres, encore noté

$\phi\colon \widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})} \to \widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)}$. Ce prolongement vérifie toujours la propriété (4.7). De plus, la relation $[u, \phi(X)] = 0$ reste encore valable pour $X \in \widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})}$.

On peut maintenant définir les éléments $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m$ et $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_m$. On pose

$$\widetilde{x}_i = \phi(x_i),\ \widetilde{y}_i = \phi(y_i) \text{ lorsque } i \in \{1, \ldots, m-1\} \quad ;$$

$$\widetilde{x}_m = uw^{-1},\ \widetilde{y}_m = v.$$

Il s'agit à présent de vérifier que ces éléments satisfont aux propriétés (A) et (B) requises. Comme ϕ est un morphisme d'algèbres, les relations $[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_j] = \delta_{i,j}$ résultent de l'hypothèse de récurrence lorsque $1 \leq i, j < m$. D'autre part, on a $[\widetilde{x}_m, \widetilde{y}_m] = [uw^{-1}, v] = 1$. Ensuite, on fixe $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. On a $[\widetilde{x}_j, \widetilde{y}_m] = [\phi(x_j), v] = 0$ car l'image de ϕ est contenue dans $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})}$ et v est central dans $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})}$. Enfin, on a $[\widetilde{x}_m, \widetilde{y}_j] = [uw^{-1}, \phi(y_j)] = [u, \phi(y_j)]w^{-1} = 0$. On utilise les mêmes arguments pour démontrer que les autres crochets sont nuls. La condition 1 est vérifiée.

Démontrons la condition 2. On a $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{z} \oplus \displaystyle\sum_{j=-(n-1)}^{k} \mathbb{K}X_j$ pour tout $k \in \{-n, \ldots, n\}$. Compte tenu des hypothèses faites sur $\mathfrak{g}$, on voit que $[u, \mathfrak{g}_k] = [X_m, \mathfrak{g}_k] \subseteq \mathfrak{g}_{k-1}$ pour tout $k \leq m$. Par suite, on voit que pour $k \leq m-1$:

$$\phi(X_k) \equiv X_k \mod \widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{k-1})}.$$

Comme $[u, \mathfrak{g}_{-(m-1)}] = \{0\}$, on voit comme précédemment que $\phi(z) = z$ pour tout $z \in \mathfrak{g}_{-(m-1)}$. Il est facile d'en déduire que $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})}$ est engendré par $\phi\left(\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})}\right)$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, par :

$$\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{m-1}, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{m-1}, \mathfrak{g}_{-(m-1)},$$

ainsi que les inverses d'éléments non nuls de $\mathfrak{z}$. On a $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}_{m-1} \oplus \mathbb{K}X_m$, avec $X_m = \widetilde{x}_m$. On en déduit alors que $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)}$ est engendrée par $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m-1})}$ et $\widetilde{x}_m$. De plus, $\mathfrak{g}_{-(m-1)} = \mathfrak{g}_{-m} \oplus \mathbb{K}X_{-(m-1)}$, avec $X_{-(m-1)} = w\widetilde{y}_m$ où w est un élément non nul de $\mathfrak{z}$. On en déduit que $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)}$ est engendrée par :

$$\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{m-1}, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{m-1}, \widetilde{x}_m, \widetilde{y}_m, \mathfrak{g}_{-m},$$

ainsi que les inverses d'éléments non nuls de $\mathfrak{z}$. C'est la propriété 2 requise. La proposition est démontrée.

Corollaire 4.26 Sous les hypothèses précédentes, on a $K(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{D}_{n,s}(\mathbb{K})$.

Preuve. Comme $\dim(\mathfrak{g}) = 2n + s$, le lemme 4.14 s'applique directement.

Proposition 4.27 *Reprenons les notations et hypothèse de la proposition précédente. On considère $d \in Der(\mathfrak{g})$ telle que $d(X_k) \in \mathbb{K}X_k$ pour tout $k \in \{-(n-1), \ldots, n\}$. On forme le produit semi-direct $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{K}d \ltimes \mathfrak{g}$. On suppose enfin $\mathfrak{z} = \mathbb{K}z$ avec $d(z) \neq 0$. Alors il existe dans $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)}$ des éléments $x_0, \ldots, x_n$ et $y_0, \ldots, y_n$ vérifiant les relations de commutation canoniques (4.1). En particulier, $K(\mathfrak{g}_0) \simeq \mathcal{D}_{n+1,0}(\mathbb{K})$.*

Preuve. On observe tout d'abord que si $d(X) = \lambda X$ et $d(Y) = \mu Y$, alors $d([X,Y]) = (\lambda + \mu)[X,Y]$. Par récurrence et en se servant de la construction de la preuve précédente, on montre alors qu'il existe des éléments $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{K}$ tels que $[d, x_j] = \alpha_j x_j$ et $[d, y_j] = \beta_j y_j$ avec en outre $\alpha_j + \beta_j = 0$. Posons $\theta = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j y_j$. Un calcul élémentaire fournit la relation :

$$[\theta, x_j] = -\alpha_j \theta_j = [d, x_j] \quad ; \quad [\theta, y_j] = \alpha_j y_j = [d, y_j] \quad ; \quad [\theta, d] = 0.$$

On pose alors $x_0 = [d,z]^{-1}(d - \theta)$ et $y_0 = z$. Il est clair que $x_0, \ldots, x_n$, $y_0, \ldots, y_n$ engendrent $K(\mathfrak{g}_0)$.

Montrons que ces éléments satisfont aussi aux relations de commutation canoniques des algèbres de Weyl. Il suffit de vérifier les relations faisant intervenir x_0 ou y_0. L'élément $y_0 = z$ étant central dans $K(\mathfrak{g})$, on a bien $[x_j, y_0] = [y_j, y_0] = 0$ pour $j \neq 0$. Pour la même raison, $[\theta, y_0] = 0$. Il vient : $[x_0, y_0] = [d,z]^{-1}[d - \theta, z] = [d,z]^{-1}[d,z] = 1$. Enfin, pour $j \neq 0$, on a $[x_j, x_0] = [d,z]^{-1}[x_j, d - \theta] = [d,z]^{-1}([x_j, d] - [x_j, \theta]) = 0$. De même on a $[y_j, x_0] = 0$ si $j \neq 0$.

4.3.1.2 Éléments premiers dans les algèbres filtrées et graduées

Lemme 4.28 *Soit A une algèbre commutative et intègre.*

1. *On suppose que A est filtrée, avec $Gr(A)$ une algèbre intègre. Soit $x \in A$ un élément tel que $gr(x)$ est un élément premier de $Gr(A)$. Alors x est un élément premier de A.*
2. *On suppose que A est $\mathbb{Z}^n$-graduée. Soit $x \in A$ un élément homogène, non-inversible. On suppose que, pour tous éléments homogènes $a, b \in A$:*

$$x \mid ab \;\Rightarrow\; x \mid a \;\text{ ou }\; x \mid b. \tag{4.8}$$

Alors x est un élément premier de A.

Preuve. Soit $I = xA \subseteq A$ l'idéal engendré par x dans A. Alors $Gr(I) = gr(x)Gr(A)$ est l'idéal de $Gr(A)$ engendré par $gr(x)$. Par ailleurs, on a $Gr(A/I) \simeq Gr(A)/Gr(I)$, l'algèbre A/I étant munie de la filtration quotient. Si $gr(x)$ est premier dans $Gr(A)$, alors $Gr(A)/Gr(I)$ est intègre, donc $Gr\,(A/I)$ est intègre aussi. Ceci entraîne que A/I est intègre, donc x est un élément premier de A : la première assertion est démontrée.

Démontrons la deuxième assertion. On note encore $I = xA$ l'idéal de A engendré par x. Comme x est homogène, l'algèbre quotient A/I est également $\mathbb{Z}^n$-graduée, et les éléments homogènes dans A/I sont les images d'éléments homogènes dans A. L'hypothèse (4.8) signifie que A/I n'a pas de diviseur de zéro homogène. En regardant des termes de plus haut degré relativement à un ordre total sur $\mathbb{Z}^n$ compatible avec l'addition, on vérifie que A/I est intègre, autrement dit x est un élément premier de A.

Enfin, on aura besoin du résultat suivant [15, lemme 19.20] :

Proposition 4.29 (lemme de Nagata) *Soit A un anneau intègre, commutatif, noethérien. Soit $x \in A$ un élément premier non nul de A. Si le localisé $A[x^{-1}]$ est factoriel, alors A est factoriel.*

4.3.2 Polynômes tronqués et algèbres de Witt

Définition 4.30 Soit $n \geq 1$ un entier. On note $A(n)$ l'anneau de polynômes tronqués

$$A(n) = \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{(x_1^p, \ldots, x_n^p)}.$$

L'*algèbre de Witt*, notée $W(n)$, est l'algèbre de Lie des $\mathbb{K}$-dérivations de $A(n)$:

$$W(n) = Der\,A(n).$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on note $\frac{\partial}{\partial x_j}$ la dérivation de $A(n)$ telle que $\frac{\partial}{\partial x_j}(x_k) = \delta_{j,k}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On montre alors que $W(n)$ est un $A(n)$-module à gauche libre ayant pour base la famille $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$:

$$W(n) = \bigoplus_{j=1}^{n} A(n)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Comme c'est une algèbre de dérivations, c'est aussi une algèbre de Lie restreinte d'après l'exemple 4.8. De plus, il est facile de voir que le centre de $W(n)$ est réduit à $\{0\}$; la p-structure de $W(n)$ est donc unique : on l'appellera *p-structure naturelle de $W(n)$*. Pour $\partial = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}.x_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ on a $\partial^{[p]} = \begin{cases} \partial & \text{si } (a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ dans } \mathbb{Z}^n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

4.3.2.1 Graduation naturelle

L'algèbre $A(n)$ est naturellement $\mathbb{Z}^n$-graduée ; pour cette graduation, un monôme $x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$ est homogène, de degré $(a_1,\dots,a_n)$. Cette graduation induit une graduation de l'algèbre de Lie $W(n)$; pour $k\in\{1,\dots,n\}$, la dérivation $x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}.x_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ est homogène, de degré $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^n$. Cette graduation se prolonge naturellement à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\big(W(n)\big)$. On a :

Lemme 4.31 *Soient $u\in\mathcal{U}(W(n))$ un élément homogène, de degré $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^n$ et $k\in\{1,\dots,n\}$. Alors $[x_k\frac{\partial}{\partial x_k},u]=a_ku$. Par suite, la sous-algèbre $\mathbb{K}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\oplus\dots\oplus\mathbb{K}x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\subseteq W(n)$ agit diagonalement sur $\mathcal{U}\big(W(n)\big)$.*

Terminologie 4.32 Relativement à cette graduation, le degré est appelé *poids* et noté pds. On introduit cette terminologie pour ne pas confondre la $\mathbb{Z}$-graduation naturelle de l'algèbre symétrique $S\big(W(n)\big)$ avec la $\mathbb{Z}^n$-graduation de $S\big(W(n)\big)$ induite par la $\mathbb{Z}^n$-graduation précédemment décrite de $W(n)$.

4.3.3 Cas de l'algèbre $W(1)$

Dans ce qui suit, on cherche à étudier le corps enveloppant de l'algèbre de Witt $W(1)$. Rappelons que, sauf mention contraire, on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps parfait de caractéristique $p\geq 3$. Enfin, on pose toujours $q=\frac{p-1}{2}$.

Tout d'abord, on simplifie les notations générales introduites en 4.30.

Notations 4.33 On pose d'abord $\mathfrak{w}=W(1)$. Pour $j\in\{-1,0,1,\dots,p-2\}$ on pose $e_j=x_1^{j+1}\frac{\partial}{\partial x_1}$. On a alors $\mathfrak{w}=\bigoplus_{j=-1}^{p-2}\mathbb{K}e_j$; le crochet de Lie vérifie :

$$[e_i,e_j]=\begin{cases}(j-i)e_{i+j} & \text{si } -1\leq i+j\leq p-2,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Les éléments e_k sont homogènes relativement à la graduation naturelle définie en 4.3.2, et on a $\mathrm{pds}(e_k)=k$. Remarquons que $\mathfrak{w}$ n'a pas de composante homogène de degré d lorsque $d\geq p$. Le résultat suivant est facile à vérifier :

Proposition 4.34 *La p-structure de $\mathfrak{w}$ vérifie $e_j^{[p]}=0$ si $j\neq 0$ et $e_0^{[p]}=e_0$. Le p-centre de l'algèbre enveloppante est donc la sous-algèbre $\mathcal{O}[\mathfrak{w}]=\mathbb{K}[e_{-1}^p,e_0^p-e_0,e_1^p,\dots,e_{p-2}^p]$.*

4.3.3.1 Un résultat préliminaire

Posons $\mathfrak{w}_0 = \bigoplus_{k=0}^{p-2} \mathbb{K}e_k \subseteq \mathfrak{w}$. C'est une sous-algèbre de Lie restreinte de $\mathfrak{w}$. On va démontrer d'abord que $K(\mathfrak{w}_0)$ est un corps de Weyl ; on montrera ensuite que $K(\mathfrak{w})$ est engendré par $K(\mathfrak{w}_0)$ et un élément central, ce qui nous permettra d'en déduire facilement la structure du corps enveloppant $K(\mathfrak{w})$.

Proposition 4.35 *On a $K(\mathfrak{w}_0) \simeq \mathcal{D}_{\frac{p-1}{2}}(\mathbb{K})$. En outre, on a $Z(\mathfrak{w}_0) = \mathcal{O}[\mathfrak{w}_0]$.*

Preuve. On va utiliser les propositions 4.25 et 4.27. Posons, pour $k \in \{-(q-1), \dots, q-1\}$:

$$\mathfrak{g}_k = \mathbb{K}e_{q-k} \oplus \mathbb{K}e_{q-k+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_{p-2}.$$

En particulier, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{-(q-1)} = \mathbb{K}e_{p-2}$. Pour $k \in \{-(q-1), \dots, q-1\}$, on pose $X_k = e_{q-k}$, de sorte que pour tout k, on a $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_{k-1} \oplus \mathbb{K}X_k$: c'est la condition 1 de la proposition 4.25. À l'aide des relations décrites en 4.33, on voit sans difficulté que, pour tout $k \in \{0, \dots, q-1\}$, $\mathfrak{g}_{-k}$ est le centre de $\mathfrak{g}_k$ et que $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{z}_{k-1}] = \mathfrak{z}$; ce sont les conditions 2 et 3 requises. Enfin, pour $k \geq 0$, on a $(ad\, X_k)^p = ad(X_k^{[p]}) = 0$ d'après la proposition 4.33, d'où la propriété 4. Ensuite, on observe que X_k est homogène, de degré ≥ 1. Alors tout crochet de la forme $[(ad\, X_k)^i a, (ad\, X_k)^j b]$ avec $a, b \in \mathfrak{w}_0$ homogènes est un élément homogène, de degré $\geq i+j+\deg(a)+\deg(b) \geq i+j$. Lorsque $i + j \geq p$ on voit que $[(ad\, X_k)^i a, (ad\, X_k)^j b] = 0$; la propriété 5 en découle immédiatement.

Ensuite on remarque que $\mathfrak{w}_0 \simeq \mathbb{K}\partial \ltimes \mathfrak{g}_{q-1}$, où ∂ est la restriction de la dérivation intérieure $ad(e_0)$ à l'idéal $\mathfrak{g}_{q-1} \subseteq \mathfrak{w}_0$. On voit que $\partial(X_k) \in \mathbb{K}X_k$. En prenant $z = e_{p-2} \in \mathfrak{z}$, on voit aussi que $\partial(z) \neq 0$. D'après la proposition 4.27, il vient $K(\mathfrak{w}_0) \simeq \mathcal{D}_{q,0}(\mathbb{K})$. On en déduit aussi que $Z(\mathfrak{w}_0) = \mathcal{O}[\mathfrak{w}_0]$ (lemme 4.14).

4.3.3.2 Structure du corps enveloppant $K(\mathfrak{w})$

Maintenant on va étudier la structure de $K(\mathfrak{w})$ comme extension de $K(\mathfrak{w}_0)$.

Définition 4.36 On définit un élément $\Omega \in \mathcal{U}(\mathfrak{w})$ par la formule :

$$\Omega = \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{m}}| = p-1}} e_{p-2-m_0} \dots e_{p-2-m_q}. \tag{4.9}$$

Cet élément est connu depuis longtemps. Par exemple, dans [16, proposition 2], Ermolaev démontre que Ω est un élément central dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et que $Z(\mathfrak{w}) = \mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$. Ce résultat va être ici redémontré avec une méthode apparemment nouvelle.

Lemme 4.37

1. *L'élément Ω est central dans $\mathcal{U}(\mathfrak{w})$. C'est un élément entier sur $\mathcal{O}[\mathfrak{w}]$.*
2. *On peut écrire Ω sous la forme $\Omega = qe_{-1}e_{p-2}^q + \Omega_0$, où $\Omega_0 \in \mathcal{U}(\mathfrak{w}_0)$. En particulier, Ω est transcendant sur $K(\mathfrak{w}_0)$.*

Preuve. Pour le premier point, on utilise le lemme 4.23 : prenons $B = \mathcal{U}(\mathfrak{w})$ et $X_j^{(k)} = e_j$ pour tout $k \in \{0, \dots, q\}$ et $j \in \{-1, 0, \dots, p-2\}$. Les dérivations intérieures $ad(e_{-1})$ et $ad(e_{p-2})$ vérifient respectivement les conditions 1 et 2 du lemme ; on en déduit que Ω est invariant par l'action adjointe de e_{-1} et e_{p-2}. Comme ces deux éléments engendrent $\mathfrak{w}$, on en déduit bien que Ω est invariant sous l'action de $\mathfrak{w}$, autrement dit $\Omega \in Z(\mathfrak{w})$. De plus, d'après la proposition 4.10, n^{o}3, $Z(\mathfrak{w})$ est une extension entière de $\mathcal{O}[\mathfrak{w}]$; l'élément Ω est donc entier sur $\mathcal{O}[\mathfrak{w}]$.

Vérifions le deuxième point. On voit dans (4.9) que $\Omega = a + \sum_{j=0}^{q} e_{p-2}^j e_{-1} e_{p-2}^{q-j}$, où $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{w}_0)$. Maintenant, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, il existe un élément $a_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{w}_0)$ tel que $e_{p-2}^j e_{-1} = e_{-1}e_{p-2}^j + a_j$: par exemple, on peut voir par récurrence que $a_{j+1} = e_{p-3}e_{p-2}^j + e_{p-2}a_j$. Par suite, Ω est bien de la forme $\Omega = \Omega_0 + q.e_{-1}e_{p-2}^q$, avec $\Omega_0 \in \mathcal{U}(\mathfrak{w}_0)$. Le troisième point est une conséquence facile du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Proposition 4.38 *Soit $\mathfrak{w} = \bigoplus_{j=-1}^{p-2} \mathbb{K}\, e_j$ l'algèbre de Witt, $\mathfrak{w}_0 = \bigoplus_{j\geq 0} \mathbb{K}\, e_j$ la sous-algèbre étudiée en 4.3.3.1 et Ω l'élément central introduit précédemment.*

1. *Le corps $K(\mathfrak{w})$ est engendré par $K(\mathfrak{w}_0)$ et Ω.*
2. *On a $K(\mathfrak{w}) \simeq \mathcal{D}_{\frac{p-1}{2},1}(\mathbb{K})$.*

Preuve. Le corps $K(\mathfrak{w})$ est engendré par $K(\mathfrak{w}_0)$ et e_{-1} ; en utilisant le lemme 4.37 on voit que $K(\mathfrak{w})$ est engendré par $K(\mathfrak{w}_0)$ et Ω. D'après la proposition 4.35, on en déduit que $K(\mathfrak{w})$ est engendré par $2q+1 = p$ éléments $x_1, \dots, x_q$, $y_1, \dots, y_q$ et $z = \Omega$ satisfaisant aux relations canoniques (4.1) ; comme $\dim(\mathfrak{w}) = p$ on en déduit d'après le lemme 4.14 que $K(\mathfrak{w}) \simeq \mathcal{D}_{q,1}(\Omega)$.

Corollaire 4.39

1. *On a $C(\mathfrak{w}) = \mathcal{O}(\mathfrak{w}_0)(\Omega)$. C'est une extension transcendante pure de degré de transcendance p sur $\mathbb{K}$.*
2. *L'élément Ω est entier, de degré p sur $\mathcal{O}[\mathfrak{w}]$.*

Preuve. Comme $K(\mathfrak{w}) = K(\mathfrak{w}_0)(\Omega)$, avec Ω transcendant sur $K(\mathfrak{w}_0)$, on a aussi $C(\mathfrak{w}) = C(\mathfrak{w}_0)(\Omega)$. Or d'après la proposition 4.35 on a $C(\mathfrak{w}_0) = \mathcal{O}(\mathfrak{w}_0)$, d'où le n^{o}1. D'après le corollaire 4.10, on a :

$$p^p = [K(\mathfrak{w}) : C(\mathfrak{w})][C(\mathfrak{w}) : \mathcal{O}(\mathfrak{w})].$$

Comme $K(\mathfrak{w}) \simeq \mathcal{D}_{\frac{p-1}{2}}(\mathbb{K})$, on a $[K(\mathfrak{w}) : C(\mathfrak{w})] = p^{p-1}$ d'après la proposition 4.6 ; il vient $[C(\mathfrak{w}) : \mathcal{O}(\mathfrak{w})] = p$. Enfin, comme $C(\mathfrak{w}) = \mathcal{O}(\mathfrak{w}_0)(\Omega)$, on a a fortiori $C(\mathfrak{w}) = \mathcal{O}(\mathfrak{w})(\Omega)$: on en déduit bien que Ω est de degré p sur $\mathcal{O}[\mathfrak{w}]$.

4.3.3.3 Le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{w})$

On passe maintenant à l'étude plus approfondie du centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{w})$. Soit Ω l'élément central de la définition 4.36. On a donc $Z(\mathfrak{w}) \supseteq \mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$. On va établir tout d'abord, à l'aide du lemme de Nagata (proposition 4.29), que le sous-anneau $\mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$ est factoriel. On montrera ensuite comment en déduire que $Z(\mathfrak{w}) = \mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$.

Lemme 4.40 *L'élément $e_{p-2}^p \in \mathcal{O}[\mathfrak{w}]$ est premier dans $\mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$.*

Preuve. Rappelons d'abord que $\mathcal{U}(\mathfrak{w})$ et ses sous-algèbres sont naturellement filtrées et qu'on a, relativement à cette filtration, $Gr\,\mathcal{U}(\mathfrak{w}) = S(\mathfrak{w})$. Pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{w})$, on note $\nu(u)$ la filtration de l'élément u ; c'est aussi le degré de l'élément $gr(u)$ dans l'algèbre graduée associée. Dans la suite de la démonstration, on notera $S = S(\mathfrak{w})$ et, pour $j \in \{-1, \dots, p-2\}$: $X_j = gr(e_j)$. L'algèbre S s'identifie donc à l'algèbre de polynômes à p indéterminées $\mathbb{K}[X_{-1}, X_0, \dots, X_{p-2}]$. Pour finir, on note $S^p = \mathbb{K}[X_{-1}^p, X_0^p, \dots, X_{p-2}^p]$. On peut voir facilement que $S^p = Gr\,\mathcal{O}[\mathfrak{w}]$. En particulier, $\nu(u) \in p\mathbb{Z}$ pour tout $u \in \mathcal{O}[\mathfrak{w}]$.

Pour alléger les notations, on pose à présent :

$$\mathcal{M} = \{(m_0, \dots, m_q) \in \mathbb{N}^{q+1} \,|\, m_0 + \dots + m_q = p-1\}.$$

Notons aussi $A = \mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$. Soit $Gr(A) \subseteq S$ l'algèbre graduée associée. Posons $\zeta = gr(\Omega) \in S$; on a :

$$\zeta = \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}} X_{p-2-m_0} \dots X_{p-2-m_q}.$$

Montrons que $Gr(A) = S^p[\zeta]$. D'abord $S^p[\zeta] \subseteq Gr(A)$ parce que $X_j^p = gr(e_j^p - e_j^{[p]}) \in Gr(A)$ et $\zeta = gr(\Omega) \in Gr(A)$. Réciproquement, soit $a \in A$. D'après le corollaire 4.38, n^{o}2, l'élément Ω

est de degré p sur $\mathcal{O}[\mathfrak{w}]$: on peut donc écrire $a = \sum_{j=0}^{p-1} a_j \Omega^j$, où les $a_j \in \mathcal{O}[\mathfrak{w}]$. Pour tout j, on a $\nu(a_j\Omega^j) = \nu(a_j) + j\nu(\Omega)$. Par ailleurs, $\nu(\Omega) = q+1 \neq 0$ modulo p, et $\nu(a_j) \in p\mathbb{Z}$. Les filtrations des $a_j\Omega^j$ sont donc deux à deux distinctes modulo p, donc deux à deux distinctes dans $\mathbb{Z}$. On en déduit qu'il existe $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $gr(a) = gr(a_k\Omega^k) = gr(a_k)\zeta^k \in S^p[\zeta]$, d'où l'inclusion $Gr(A) \subseteq S^p[\zeta]$. Notons que ce qui précède prouve aussi que les éléments homogènes dans $Gr(A)$ sont de la forme $\alpha\zeta^k$, avec $\alpha \in S^p$ et $k \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Le corps $\mathbb{K}$ ayant été supposé parfait, on voit que S^p est aussi l'ensemble des éléments de S de la forme f^p, pour $f \in S$. Soient $x = e_{p-2}^p \in A$ et $X = gr(x) = X_{p-2}^p \in Gr(A)$; on va montrer que X est un élément premier dans $Gr(A)$, ce qui permettra avec le lemme 4.28, n^{o}1, de conclure que x est un élément premier de A. Pour alléger les notations, on pose $B = Gr(A)$. D'après le n^{o}2 du lemme 4.28, il suffit de montrer la propriété suivante : pour tous $u, v \in B$ homogènes,

$$X \mid uv \text{ dans } B \ \Rightarrow X \mid u \ \text{ ou } \ X \mid v \text{ dans } B.$$

Or d'après la discussion qui précède, il existe $u_0, v_0 \in S$ et $j, k \in \{0, \ldots, p-1\}$ tels que $u = u_0^p\zeta^j$ et $v = v_0^p\zeta^k$. On suppose que $X \mid uv$ dans B, autrement dit $X_{p-2}^p \mid u_0^p v_0^p \zeta^{j+k}$. En particulier, $X_{p-2} \mid u_0^p v_0^p \zeta^{j+k}$ dans S. Comme X_{p-2} est premier dans S, on en déduit qu'on a :

$$X_{p-2} \mid u_0^p \ \text{ ou } \ X_{p-2} \mid v_0^p \ \text{ ou } \ X_{p-2} \mid \zeta^{j+k} \text{ dans } S,$$

soit, encore par primalité de X_{p-2} :

$$X_{p-2} \mid u_0 \ \text{ ou } \ X_{p-2} \mid v_0 \ \text{ ou } \ X_{p-2} \mid \zeta \text{ dans } S.$$

On peut décomposer ζ sous la forme $\zeta = \zeta_1 + X_{p-2}\zeta_2$, avec

$$\zeta_1 = \sum_{\substack{(m_0,\ldots,m_q)\in\mathcal{M} \\ m_0,\ldots,m_q>0}} X_{p-2-m_0} \ldots X_{p-2-m_q}.$$

Il est facile de voir que $\zeta_1 \neq 0$ et est indépendant de X_{p-2} ; on en déduit que X_{p-2} ne divise pas ζ dans S. Nécessairement, $X_{p-2} \mid u_0$ ou v_0 dans S, disons $X_{p-2} \mid u_0$ pour fixer les idées. Il existe $u_1 \in S$ tel que $u_0 = X_{p-2}u_1$; il vient $u_0^p\zeta^j = X_{p-2}^p u_1^p \zeta^j$ dans S. Comme $X = X_{p-2}^p$ et $u_1^p\zeta^j \in B$, ceci prouve que X divise $u_0^p\zeta^j$ dans B. Le lemme est démontré.

Proposition 4.41 *On considère toujours l'algèbre de Witt* $\mathfrak{w}$ *et* Ω *l'élément central de la définition 4.36.*

1. *L'anneau* $\mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$ *est factoriel.*
2. *On a* $Z(\mathfrak{w}) = \mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$.

Preuve. Notons $A = \mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$ et $x = e_{p-2}^{p} \in A$. L'élément x est un élément premier dans A d'après le lemme précédent. On va démontrer que le localisé $A[x^{-1}]$ est un anneau factoriel. D'après le lemme de Nagata (proposition 4.3.2), on en déduira bien que A est factoriel. Soient

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{U}(\mathfrak{w}_0)[e_{p-2}^{-p}] \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = \mathcal{U}(\mathfrak{w})[e_{p-2}^{-p}].$$

Comme ce sont des localisations centrales, on a $Z(\mathcal{R}_0) = Z(\mathfrak{w}_0)[e_{p-2}^{-p}]$. D'après la proposition 4.35, on a donc :

$$Z(\mathcal{R}_0) = \mathcal{O}[\mathfrak{w}_0][e_{p-2}^{-p}]. \tag{4.10}$$

D'après le lemme 4.37, l'élément Ω est transcendant sur $\mathcal{O}[\mathfrak{w}_0]$. On en déduit que $\mathcal{O}[\mathfrak{w}_0][\Omega]$ est une algèbre commutative libre ; en particulier c'est un anneau factoriel. Le localisé $\mathcal{O}[\mathfrak{w}_0][\Omega][e_{p-2}^{-p}]$ est donc aussi un anneau factoriel.

Montrons à présent que $Z(\mathcal{R}) = A[x^{-1}]$. On a déjà $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0[e_{-1}]$. En écrivant $\Omega = qe_{-1}e_{p-2}^{q} + \Omega_0$ (avec $\Omega_0 \in \mathcal{U}(\mathfrak{w}_0) \subseteq \mathcal{R}_0$), on voit que $e_{-1} = q^{-1}(\Omega - \Omega_0)e_{p-2}^{-q} \in \mathcal{R}_0$. Il vient $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0[\Omega]$. D'après le lemme 4.37, l'élément Ω est transcendant sur $\mathcal{R}_0$; on en déduit que $Z(\mathcal{R}) = Z(\mathcal{R}_0)[\Omega]$, d'où :

$$Z(\mathcal{R}) = \mathcal{O}[\mathfrak{w}_0][\Omega, e_{p-2}^{-p}].$$

Comme $e_{-1}^{p} \in Z(\mathcal{R})$, on a trivialement $Z(\mathcal{R}) = Z(\mathcal{R})[e_{-1}^{p}]$, d'où :

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{R}) &= \mathcal{O}[\mathfrak{w}_0][e_{-1}^{p}][\Omega][e_{p-2}^{-p}] \\ &= \mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega][e_{p-2}^{-p}] \\ &= A[x^{-1}]. \end{aligned}$$

On en déduit bien que $A[x^{-1}] = Z(\mathcal{R})$ est un anneau factoriel. Le n^{o}1 est établi.

Comme $\mathcal{O}[\mathfrak{w}] \subseteq A \subseteq Z(\mathfrak{w})$ et que $Z(\mathfrak{w})$ est une extension entière de $\mathcal{O}[\mathfrak{w}]$, a fortiori $Z(\mathfrak{w})$ est une extension entière de A. De plus, A est intégralement clos car c'est un anneau factoriel d'après le n^{o}1. Pour voir que $Z(\mathfrak{w}) = A$ il suffit donc de montrer que Frac $Z(\mathfrak{w}) =$ Frac A. Or, à l'aide du corollaire 4.38, n^{o}1, on a :

$$C(\mathfrak{w}) = \operatorname{Frac} Z(\mathfrak{w}) \supseteq \operatorname{Frac} A = \mathcal{O}(\mathfrak{w})(\Omega) \supseteq \mathcal{O}(\mathfrak{w}_0)(\Omega) = C(\mathfrak{w}),$$

d'où l'on tire bien $Z(\mathfrak{w}) =$ Frac A. La proposition est démontrée.

4.3.3.4 Conclusion

Théorème 4.42 *Soient* $\mathfrak{w} = \bigoplus_{j=-1}^{p-2}$ *l'algèbre de Witt sur* $\mathbb{K}$ *et* $\Omega \in Z(\mathfrak{w})$ *l'élément défini par :*

$$\Omega = \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{m}}| = p-1}} e_{p-2-m_0} \cdots e_{p-2-m_q}.$$

1. *On a* $Z(\mathfrak{w}) = \mathcal{O}[\mathfrak{w}][\Omega]$. *C'est de plus un anneau factoriel.*
2. *Le corps enveloppant* $K(\mathfrak{w})$ *est isomorphe au corps de Weyl* $\mathcal{D}_{\frac{p-1}{2},1}(\mathbb{K})$.

Corollaire 4.43 *Soit* $\mathfrak{w}$ *l'algèbre de Witt en caractéristique* $p \geq 3$. *L'indice du corps enveloppant* $K(\mathfrak{w})$ *est* $p^{(p-1)/2}$, *l'exposant de* $K(\mathfrak{w})$ *est égal à* p. *Le centre de* $K(\mathfrak{w})$ *est une extension transcendante pure du corps de base* $\mathbb{K}$, *de degré de transcendance* p *:*

$$\text{Ind } K(\mathfrak{w}) = p^{\frac{p-1}{2}} \;;\; \text{Exp } K(\mathfrak{w}) = p \;;\; \text{trdeg } C(\mathfrak{w}) = p.$$

Remarque 4.44 En caractéristique 2, l'algèbre de Witt est de la forme $\mathfrak{w} = \mathbb{K}.x \oplus \mathbb{K}.y$, avec le crochet $[x, y] = y$. Dans ce cas, il est immédiat de vérifier que le corps enveloppant $K(\mathfrak{w})$ est isomorphe au corps de Weyl $\mathcal{D}_{1,0}(\mathbb{K})$, les générateurs canoniques correspondant aux éléments $y^{-1}x$ et y. En particulier, l'indice et l'exposant du corps enveloppant sont tous deux égaux à 2, et le centre est une extension transcendante pure de degré de transcendance 2. Enfin, le centre $Z(\mathfrak{w})$ est alors réduit au p-centre $\mathbb{K}[x^2 - x, y^2]$, isomorphe à une algèbre de polynômes à deux variables.

4.3.4 Le produit tensoriel $A(1) \otimes W(1)$

4.3.4.1 Définitions et notations

Rappelons les notations du paragraphe 4.3.2. L'algèbre de Lie $W(2)$ est l'algèbre des dérivations d'un anneau de polynômes tronqués à deux variables :

$$W(2) = Der \, \frac{\mathbb{K}[x_1, x_2]}{(x_1^p, x_2^p)}.$$

On peut décomposer $W(2)$ en :

$$W(2) = \sum_{j,k=0}^{p-1} \mathbb{K} x_1^j x_2^k \frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \sum_{j,k=0}^{p-1} \mathbb{K} x_1^j x_2^k \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

On s'intéresse à la sous-algèbre suivante :

$$\mathfrak{p} = \sum_{j,k=0}^{p-1} \mathbb{K} x_1^j x_2^k \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Celle-ci est isomorphe à l'algèbre de Lie produit tensoriel $A(1) \otimes W(1)$. On notera, pour $\alpha = (j, k) \in \{-1, \ldots, p-2\} \times \{0, \ldots, p-1\}$: $e_\alpha = e_{j,k} = x_2^k x_1^{j+1} \frac{\partial}{\partial x_1}$. On a alors les relations

$$[e_{j,k}, e_{j',k'}] = \begin{cases} (j' - j) e_{j+j',k+k'} & \text{si } (j + j', k + k') \in \{-1, \ldots, p-2\} \times \{0, \ldots, p-1\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant la formule explicite sur la p-structure de $W(2)$ donnée au paragraphe 4.3.2, on voit que $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre restreinte de $W(2)$, avec :

$$e_{j,k}^{[p]} = \begin{cases} e_{0,0} & \text{si } (j,k) = (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On posera enfin $\mathfrak{p}_0 = \sum_{j,k \geq 0} \mathbb{K}\, e_{j,k}$; c'est une sous-algèbre restreinte de $\mathfrak{p}$. On a aussi : $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{K}\, e_{-1,k}$.

4.3.4.2 Un résultat préliminaire

Reprenons l'algèbre $\mathfrak{p}_0$ ci-dessus. Cette sous-algèbre jouera dans la suite le même rôle vis-à-vis de $\mathfrak{p}$ que $\mathfrak{w}_0$ vis-à-vis de $\mathfrak{w}$. Ainsi, on va d'abord établir que $K(\mathfrak{p}_0)$ est un corps de Weyl ; on démontrera ensuite que $K(\mathfrak{p})$ est engendré par $K(\mathfrak{w}_0)$ et certain éléments centraux à définir. Ceci nous permettra alors d'en déduire facilement la structure du corps enveloppant $K(\mathfrak{p})$.

Lemme 4.45 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ un idéal de codimension 1. On fixe une décomposition $\mathfrak{g} = \mathbb{K}X \oplus \mathfrak{h}$. Il y a équivalence entre :*
i. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \not\subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$;
ii. $(ad\, X)_{|\mathfrak{h}}$ *est une dérivation intérieure de* $\mathfrak{h}$.

Preuve. S'il existe $h \in \mathfrak{h}$ tel que $(ad\, X)_{|\mathfrak{h}} = (ad\, h)_{|\mathfrak{h}}$, alors $[X - h, \mathfrak{h}] = 0$ et $[X - h, X] = -[h, X] = (ad\, X)(h) = (ad\, h)(h) = 0$, donc $X - h$ est central dans $\mathfrak{g}$. Par ailleurs il est clair que $X - h \notin \mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \not\subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Réciproquement, si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \not\subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, il existe $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ tel que $y \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Décomposons $y = \lambda X + h$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h \in \mathfrak{h}$. Nécessairement $\lambda \neq 0$, sinon on aurait $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. On a donc, pour tout $a \in \mathfrak{h}$: $[\lambda X + h, a] = 0$, d'où l'on déduit que $(ad\, X)_{|\mathfrak{h}} = ad(-\lambda^{-1}h)_{|\mathfrak{h}}$ est une dérivation intérieure de $\mathfrak{h}$. Le lemme est établi.

Proposition 4.46 *On a $K(\mathfrak{p}_0) \simeq \mathcal{D}_{\frac{p(p-1)}{2}}(\mathbb{K})$. En particulier $Z(\mathfrak{p}_0) = \mathcal{O}[\mathfrak{p}_0]$.*

Preuve. On s'intéresse tout d'abord à la sous-algèbre $\mathfrak{p}_1 = \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k \neq 0}} \mathbb{K}\, e_{j,k} \subseteq \mathfrak{p}_0$. Montrons que $\mathfrak{p}_1$ satisfait aux conditions 1 à 5 de la proposition 4.25.

L'algèbre $\mathfrak{p}$ est $\mathbb{Z}^2$-graduée. Pour $\alpha = (j,k) \in \mathbb{Z}^2$ on notera $e_\alpha = e_{j,k}$ si $\alpha \in \{-1, \ldots, p-2\} \times \{0, \ldots, p-1\}$; on convient que $e_\alpha = 0$ sinon. Posons :

$$A_0 = \{0, \ldots, p-2\} \times \{0, \ldots, p-1\} \;\text{ et }\; A_1 = A_0 \setminus \{(0,0)\},$$

de sorte que $\mathfrak{p}_i = \sum_{\alpha \in A_i} \mathbb{K}\, e_\alpha$ pour $i = 0$ ou 1. On ordonne A_0 lexicographiquement, c'est-à-dire que $(j,k) \leq (j',k')$ si $k < k'$ ou si $k = k'$ et $j \leq j'$. On pose $\mu = \max(A_0) = (p-2, p-1)$ et $c = (q,q) = (\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{2})$. Remarquons que $e_\gamma = 0$ lorsque $\gamma > \mu$ dans $\mathbb{Z}^2$. Enfin on note $A_0^+ = \{\alpha \in A_0 \mid \alpha \geq c\}$ et $A_0^- = \{\alpha \in A_0 \mid \alpha < c\}$.

Montrons que l'application $\alpha \in A_0 \mapsto \mu - \alpha \in A_0$ est une bijection décroissante qui échange A_0^+ et A_0^-. En effet, c'est clairement une involution décroissante. De plus, on voit que $\mu - c = (\frac{p-1}{2} - 1, \frac{p-1}{2})$ est le prédecesseur de c dans l'ensemble ordonné A_0. Il vient :

$$\alpha \in A_0^+ \iff \alpha \geq c \iff \mu - \alpha \leq \mu - c \iff \mu - \alpha < c \iff \mu - \alpha \in A_0^-.$$

On peut donc écrire $A_0^+ = \{m_0, m_{-1}, \ldots, m_{-N}\}$, avec $c = m_0 < m_{-1} < \ldots < m_{-N} = \mu$. On a alors $A_0^- = \{\mu - m_{-N}, \ldots, \mu - m_0\}$. Pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ on pose enfin $m_i = \mu - m_{-(i-1)}$. On a donc $A_0^- = \{0, m_N, \ldots, m_1\}$ avec $0 < m_N < \ldots < m_1$. On introduit pour finir les sous-espaces de $\mathfrak{p}_0$ suivants : pour tout $k \in \{-N, \ldots, N\}$,

$$\mathfrak{g}_k = \sum_{\alpha \geq m_k} \mathbb{K}\, e_\alpha.$$

Ceci définit une suite d'idéaux :

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{g}_N \supseteq \mathfrak{g}_{N-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_{-N} = \mathfrak{z} = \mathbb{K}\, e_\mu.$$

Pour tout $k \in \{-N, \ldots, N\}$, on pose $X_k = e_{m_k}$, de sorte qu'on a toujours $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_{k-1} \oplus \mathbb{K}X_k$. La condition 1 de la proposition 4.25 est donc bien satisfaite. Pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, on a $[X_k, X_{-(k-1)}] = [e_{m_k}, e_{m_{-(k-1)}}] \in \mathbb{K}\, e_{m_k + m_{-(k-1)}} = \mathbb{K}\, e_\mu = \mathfrak{z}$, c'est la propriété 3. Soient $\alpha \geq m_k$ et $\beta \geq m_{-k}$, de sorte que $e_\alpha \in \mathfrak{g}_k$ et $e_\beta \in \mathfrak{g}_{-k}$. On a $[e_\alpha, e_\beta] \in \mathbb{K}\, e_{\alpha+\beta}$. Comme $\alpha + \beta \geq m_k + m_{-k} > m_k + m_{-(k-1)} = \mu$, on a $[e_\alpha, e_\beta] = 0$. On a donc $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_{-k}] = 0$. Ceci prouve que le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_k) \supseteq \mathfrak{g}_{-k}$. Montrons que ces deux sous-espaces sont égaux, autrement dit que la propriété 2 est satisfaite. On procède par récurrence sur k. Si $k = 0$, l'algèbre $\mathfrak{g}_0$ est abélienne, donc l'hypothèse est vraie. Si $k > 0$: on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{k-1}) = \mathfrak{g}_{-(k-1)}$ par hypothèse de récurrence. Considérons $Y_k = e_{m_{-(k-1)}} \in \mathfrak{g}_{-(k-1)}$; notons $m_k = (j,r)$ et $m_{-(k-1)} = (j', r')$. On a :

$$[X_k, Y_k] = [e_{m_k}, e_{m_{-(k-1)}}] = (j' - j) e_{m_k + m_{-(k-1)}} = (j' - j) e_\mu.$$

Or $m_{-(k-1)} = \mu - m_k = (p - 2 - j, p - 1 - r)$ donc $j' - j = p - 2 - 2j$. Comme $0 \leq j \leq p - 2$, on a $-(p-2) \leq j' - j \leq p - 2$, donc $j' - j = 0$ dans $\mathbb{K}$ si et seulement si $j' - j = 0$ dans $\mathbb{Z}$. Comme enfin $j' - j = p - 2 - 2j$ et que p est impair, on a $j' - j \neq 0$. Il vient :

$$[X_k, Y_k] \neq 0. \tag{4.11}$$

On en déduit que $ad(X_k)_{|\mathfrak{g}_{k-1}}$ n'est pas une dérivation intérieure de $\mathfrak{g}_{k-1}$ parce qu'elle agit non-trivialement sur le centre. En appliquant le lemme 4.45, on en déduit aussi que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_k) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{k-1})$. D'après (4.11), cette inclusion est stricte. Il vient :

$$\mathfrak{g}_{-k} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_k) \subsetneq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{k-1}) = \mathfrak{g}_{-(k-1)}\ ;$$

en comparant les codimensions ceci impose bien $\mathfrak{g}_{-k} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_k)$.

Les propriétés 4 et 5 s'établissent comme pour l'algèbre de Witt $W(1)$ (proposition 4.35) à l'aide de la graduation naturelle de $\mathfrak{p}_1$.

Pour parachever la preuve en utilisant la proposition 4.27, il suffit d'observer que $\mathfrak{p}_0 = \mathbb{K}\partial \ltimes \mathfrak{p}_1$, où ∂ est la restriction de $ad(e_{0,0})$ à l'idéal $\mathfrak{p}_1$. Cette dérivation vérifie bien $\partial(X_k) \in \mathbb{K}X_k$ pour tout $k \in \{-N, \ldots, N\}$; en outre $\partial(e_\mu) = (p-2)e_\mu \neq 0$. On en déduit que $K(\mathfrak{p}_0) \simeq \mathcal{D}_{N+1,0}(\mathbb{K})$, et $2(N+1) = \dim(\mathfrak{p}_0) = p(p-1)$. La conclusion sur le centre résulte du lemme 4.14. La proposition est démontrée.

4.3.4.3 Structure de $K(\mathfrak{p})$

Notations 4.47 On convient de poser $e_{i,j} = 0$ si $(i,j) \notin \{-1, \ldots, p-2\} \times \{0, \ldots, p-1\}$. Pour tous $(q+1)$-uplets $\underline{\boldsymbol{k}}, \underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{N}^{q+1}$, on pose :

$$M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) = e_{p-2-m_0,p-1-k_0} \times \ldots \times e_{p-2-m_q,p-1-k_q} \in \mathcal{U}(\mathfrak{p}). \tag{4.12}$$

Pour tout $(q+1)$-uplet $\underline{\boldsymbol{k}} \in \{0, \ldots, p-1\}^{q+1}$, on pose :

$$\Omega(\underline{\boldsymbol{k}}) = \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{m}}| = p-1}} M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{U}(\mathfrak{p}). \tag{4.13}$$

Enfin, pour tout $s \in \{0, \ldots, p-1\}$ on pose :

$$\Omega_s = \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{k}}| = s}} \Omega(\underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{U}(\mathfrak{p}). \tag{4.14}$$

Lemme 4.48 *Pour tout $s \in \{0, \ldots, p-1\}$, soit $\mathfrak{w}(s) = \sum_{j=-1}^{p-2} \mathbb{K}\, e_{j,s}$. On note $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(0)$.*

1. *Le sous-espace $\mathfrak{w} \subseteq \mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Witt $W(1)$. Elle agit sur $\mathfrak{p}$ par action adjointe.*
2. *Pour tout $s \in \{0, \ldots, p-1\}$, le sous-espace $\mathfrak{w}(s)$ est un sous-$\mathfrak{w}$-module isomorphe à $\mathfrak{w}$, muni de la représentation adjointe.*
3. *Pour tout $\underline{\boldsymbol{k}} \in \{0, \ldots, p-1\}^{q+1}$, l'élément $\Omega(\underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$ est invariant par $\mathfrak{w}$.*

Preuve. La démonstration des n^{o}1 et 2 est très simple et sera omise ici. Pour le n^{o}3, on cherche à appliquer le lemme 4.23. Posons $B = \mathcal{U}(\mathfrak{p})$ et $X_i^{(j)} = e_{i,p-1-k_j}$ pour tous $i \in \{-1, \ldots, p-2\}$

et $j \in \{0, \ldots, q\}$. À l'aide des n^{o}1 et 2, on vérifie directement que les dérivations intérieures $ad(e_{-1,0})$ et $ad(e_{p-2,0})$ vérifient les hypothèses du lemme 4.23. On en déduit que $\Omega(\underline{\boldsymbol{k}})$ est invariant par $e_{-1,0}$ et $e_{p-2,0}$, donc aussi par la sous-algèbre engendrée, c'est-à-dire $\mathfrak{w}$. Le lemme est démontré.

Notations 4.49 On pose, pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$:

$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{p}_0 \oplus \sum_{j=0}^{k} \mathbb{K}\, e_{-1,p-1-j}.$$

Proposition 4.50 *On considère les sous-algèbres $\mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_{p-1}$ de $\mathfrak{p}$ (notation 4.49) et les éléments $\Omega_0, \ldots, \Omega_{p-1}$ (notations 4.47). Pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, on a :*

1. *Le sous-espace $\mathfrak{g}_k$ est une sous-algèbre de Lie restreinte de $\mathfrak{p}$. De plus, on a $\Omega_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$.*
2. *L'élément Ω_k est central dans $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$.*
3. *Le corps enveloppant $K(\mathfrak{g}_k)$ est engendré par $K(\mathfrak{p}_0)$ et $\Omega_0, \ldots, \Omega_k$.*

Preuve. Dans cette démonstration, on notera pour simplifier :

$$\mathcal{M} = \{(m_0, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^{q+1} \,|\, m_0 = \ldots + m_q = p-1\},$$

et plus généralement, pour $s \in \{0, \ldots, p-1\}$:

$$\mathcal{M}_s = \{(m_0, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^{q+1} \,|\, m_0 = \ldots + m_q = s\}.$$

Reprenons la sous-algèbre $\mathfrak{w}$ et les sous-$\mathfrak{w}$-modules $\mathfrak{w}(s)$ introduits dans le lemme 4.48. Vérifions d'abord que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est engendrée par $\mathfrak{w}$ et $e_{0,1} \in \mathfrak{w}(1)$. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{w}$ et $e_{0,1}$. On va montrer par récurrence que $\mathfrak{w}(s) \subseteq \mathfrak{h}$ pour tout $s \in \{0, \ldots, p-1\}$, ce qui suffira car $\mathfrak{p} = \mathfrak{w}(0) + \ldots + \mathfrak{w}(p-1)$. Pour $s = 0$ on a $\mathfrak{w} \subseteq \mathfrak{h}$ par définition. Supposons à présent que $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{w}(s)$ pour un entier $s \in \{0, \ldots, p-2\}$. Alors $e_{1,s+1} = [e_{0,1}, e_{1,s}] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{w}(s+1)$. Comme $\mathfrak{w}(s+1)$ est un $\mathfrak{w}$-module simple, on en déduit que $\mathfrak{h} \supseteq [\mathfrak{h}, e_{1,s+1}] \supseteq [\mathfrak{w}, e_{1,s+1}] = \mathfrak{w}(s+1)$.

Démontrons maintenant la proposition. Le fait que $\mathfrak{g}_k$ soit une sous-algèbre restreinte de $\mathfrak{p}$ est facile à voir. Vérifions que $\Omega_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$. Soit $(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}_k$. Pour tout indice $i \in \{0, \ldots, q\}$, on a $0 \leq k_i \leq k$, d'où aussi $e_{p-2-m_i,p-1-k_i} \in \mathfrak{g}_k$. Il vient $M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$, puis également $\Omega_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$.

Démontrons le n^{o}2. Comme $\mathfrak{p}$ est engendrée par $\mathfrak{w}$ et $e_{0,1}$, il suffit de voir que les Ω_k sont invariants par $\mathfrak{w}$ et par $e_{0,1}$. Le lemme 4.48 montre que Ω_k est toujours invariant par $\mathfrak{w}$. Il reste donc à établir que $[e_{0,1}, \Omega_k] = 0$ pour $k \in \{0, \ldots, p-1\}$. Posons d'abord, pour tout $i \in \{0, \ldots, q\}$:

$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = (\delta_{0,i}, \delta_{1,i}, \ldots, \delta_{q,i})$, autrement dit le $(q+1)$-uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice i qui vaut 1. Pour $\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{N}^{q+1}$, on a :

$$\begin{aligned}
[e_{0,1}, M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}})] &= \sum_{i=0}^{q} (p-2-m_i) e_{p-2-m_0,p-1-k_0} \cdots e_{p-2-m_i,p-1-k_i+1} \cdots e_{p-2-m_q,p-1-k_q} \\
&= \sum_{i=0}^{q} (p-2-m_i) M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i).
\end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
[e_{0,1}, \Omega_k] &= [e_{0,1}, \sum_{\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{M}_k} \Omega(\underline{\boldsymbol{k}})] = \sum_{\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{M}_k} \sum_{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M}} [e_{0,1}, M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}})] \\
&= \sum_{\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{M}_k} \sum_{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M}} \sum_{i=0}^{q} (p-2-m_i) M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) \\
&= \sum_{\underline{\boldsymbol{c}} \in \mathbb{N}^{q+1}} \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{k}}, i \\ \underline{\boldsymbol{k}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \underline{\boldsymbol{c}}}} \sum_{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M}} (p-2-m_i) M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{c}}) \\
&= \sum_{\underline{\boldsymbol{c}}, \underline{\boldsymbol{m}}} \left(\sum_{i=0}^{q} \delta(\underline{\boldsymbol{c}}, i)(p-2-m_i) \right) M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{c}}),
\end{aligned}$$

avec $\delta(\underline{\boldsymbol{c}}, i) = 1$ si $\underline{\boldsymbol{c}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \in \mathcal{M}_k$ et 0 sinon. Observons à présent que, dans cette sommation, les $(q+1)$-uplets $\underline{\boldsymbol{c}} \in \mathbb{N}^{q+1}$ apparaissant vérifient $c_0 + \ldots + c_q = k-1$. Ainsi, si on pose $\underline{\boldsymbol{k}} = \underline{\boldsymbol{c}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ on a $\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{N}^{q+1}$ et $k_0 + \ldots + k_q = k$, autrement dit $\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{M}_k$. Par suite, on en déduit que $\delta(\underline{\boldsymbol{c}}, i) = 1$ pour tout i. Il vient :

$$[e_{0,1}, \Omega_k] = \sum_{\underline{\boldsymbol{c}}, \underline{\boldsymbol{m}}} \left(\sum_{i=0}^{q} p-2-m_i \right) M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{c}}).$$

Enfin, pour tout élément $\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M}$, un calcul simple permet de voir que $\sum_{i=0}^{q} p-2-m_i = 0$ dans $\mathbb{K}$: on a donc bien $[e_{0,1}, \Omega_k] = 0$. Ceci établit le deuxième point.

Démontrons le troisième point. Pour tout $k \in \{-1, 0, \ldots, p-1\}$, on pose $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$. On voit que $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k-1}[e_{-1,p-1-k}]$ pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$. Montrons que, pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, l'élément $\Omega_k \in \mathcal{U}_k$ est de degré 1 en $e_{-1,p-1-k}$ sur la sous-algèbre $\mathcal{U}_{k-1}$. Plus précisément, on établit la relation suivante, pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$:

$$\Omega_k \equiv (q+1) e_{p-2,p-1}^{q} e_{-1,p-1-k} \mod \mathcal{U}_{k-1}. \tag{4.15}$$

Fixons tout d'abord $(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}_k$. Si, pour tout $i \in \{0, \ldots, q\}$, on a $(m_i, k_i) \neq (p-1, k)$ alors $e_{p-2-m_i,p-1-k_i} \in \mathfrak{g}_{k-1}$ pour tout i, d'où $M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{U}_{k-1}$. S'il existe $i \in \{0, \ldots, q\}$ tel que

$(m_i, k_i) = (p-1, k)$: alors $(m_j, k_j) = (0, 0)$ pour tout $j \neq i$; on a alors :

$$M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) = e_{p-2,p-1}^{j} e_{-1,p-1-k} e_{p-2,p-1}^{q-j}.$$

On peut voir, par exemple par récurrence descendante sur j, que :

$$e_{p-2,p-1}^{j} e_{-1,p-1-k} e_{p-2,p-1}^{q-j} \equiv e_{p-2,p-1}^{q} e_{-1,p-1-k} \mod \mathcal{U}_{k-1}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \sum_{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{M}} \sum_{\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{M}_k} M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \\ &\equiv \sum_{j=0}^{q} e_{p-2,p-1}^{j} e_{-1,p-1-k} e_{p-2,p-1}^{q-j} \mod \mathcal{U}_{k-1} \\ &\equiv \sum_{j=0}^{q} e_{p-2,p-1}^{q} e_{-1,p-1-k} \mod \mathcal{U}_{k-1}, \end{aligned}$$

c'est la relation (4.15).

Il est alors immédiat de vérifier que, pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$:

$$\mathcal{U}_k[e_{p-2,p-1}^{-1}] = \mathcal{U}_{k-1}[e_{-1,p-2-k}][e_{p-2,p-1}^{-1}] = \mathcal{U}_{k-1}[e_{p-2,p-1}^{-1}][\Omega_k].$$

Par récurrence on obtient alors $\mathcal{U}_k[e_{p-2,p-1}^{-1}] = \mathcal{U}_{-1}[e_{p-2,p-1}^{-1}][\Omega_0, \ldots, \Omega_k]$, autrement dit :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)[e_{p-2,p-1}^{-1}] = \mathcal{U}(\mathfrak{p}_0)[e_{p-2,p-1}^{-1}][\Omega_0, \ldots, \Omega_k].$$

En passant aux corps de fractions, on a bien $K(\mathfrak{g}_k) = K(\mathfrak{p}_0)[\Omega_0, \ldots, \Omega_k]$. La proposition est démontrée.

Corollaire 4.51 *Soit* $k \in \{0, \ldots, p-1\}$.

1. *On a un isomorphisme* $K(\mathfrak{g}_k) \simeq \mathcal{D}_{\frac{p(p-1)}{2}, k+1}(\mathbb{K})$. *De plus,* $C(\mathfrak{g}_k) = \mathcal{O}(\mathfrak{p}_0)(\Omega_0, \ldots, \Omega_k)$. *Enfin, les éléments* $\Omega_0, \ldots, \Omega_k$ *sont algébriquement indépendants sur* $\mathcal{O}(\mathfrak{p}_0)$.
2. *L'élément* Ω_k *est entier, de degré* p *sur* $\mathcal{O}[\mathfrak{g}_k][\Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}]$. *L'algèbre* $\mathcal{O}[\mathfrak{g}_k][\Omega_0, \ldots, \Omega_k]$ *est un* $\mathcal{O}[\mathfrak{g}_k]$*-module libre ayant pour base la famille*

$$\left\{ \Omega_0^{j_0} \ldots \Omega_k^{j_k} \mid 0 \leq j_0, \ldots, j_k < p \right\}.$$

Preuve. On procède par récurrence sur k en utilisant les mêmes arguments que dans le cas de l'algèbre $W(1)$ (corollaire 4.39).

4.3.4.4 Le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$

Maintenant on cherche à démontrer pour l'anneau $Z(\mathfrak{p})$ des résultats analogues à ceux obtenus pour $Z(\mathfrak{w})$. Plus précisément, on va démontrer que $Z(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}[\mathfrak{p}][\Omega_0, \ldots, \Omega_{p-1}]$ et on va établir en même temps que c'est un anneau factoriel. La démarche suivie ici est beaucoup plus technique que dans le cas de $W(1)$. La première étape consiste à déterminer quel est le gradué associé de l'anneau $\mathcal{O}[\mathfrak{p}][\Omega_0, \ldots, \Omega_{p-1}]$ (relativement à la filtration canonique induite par celle de l'algèbre enveloppante). On a tout d'abord besoin de deux lemmes.

Lemme 4.52 *Soient $S = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un anneau de polynômes, $S^p = \mathbb{K}[X_1^p, \ldots, X_n^p] \subseteq S$ et $K = \mathrm{Frac}(S)$. Pour tout polynôme $f \in S$, on note $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$ la différentielle de f. Soient $u_1, \ldots, u_k \in S$ tels que les différentielles $du_1, \ldots, du_k$ soient linéairement indépendantes sur K. Alors la famille*

$$\left\{ u_1^{j_1} \ldots u_k^{j_k} \,|\, 0 \leq j_1, \ldots, j_k < p \right\}$$

est libre sur S^p.

Preuve. On note par commodité $J = \{0, \ldots, p-1\}^k$. On considère $F(t_1, \ldots, t_k) \in S^p[t_1, \ldots, t_k]$ un polynôme de la forme :

$$F(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{\underline{\boldsymbol{j}} \in J} \lambda(\underline{\boldsymbol{j}}) t_1^{j_1} \ldots t_k^{j_k}, \tag{4.16}$$

les $\lambda(\underline{\boldsymbol{j}}) \in S^p$ n'étant pas tous nuls. On suppose que $F(u_1, \ldots, u_k) = 0$. D'abord, on peut choisir un tel F de degré total (par rapport aux variables $t_1, \ldots, t_k$) minimal. Dans ce cas, il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(\partial F/\partial t_i)(u_1, \ldots, u_k) \neq 0$. Supposons en effet que ce ne soit pas le cas. Comme $(\partial F/\partial t_i)$ est de degré total strictement plus petit que celui de F, par minimalité on doit avoir $(\partial F/\partial t_i) = 0$ dans $S^p[t_1, \ldots, t_k]$. Cette propriété étant alors valable pour tout i, on a $F(t_1, \ldots, t_k) \in S^p[t_1^p, \ldots, t_k^p]$. D'après (4.16), on voit que $F(t_1, \ldots, t_k) \in S^p$ est constant ; mais alors $0 = F(u_1, \ldots, u_k)$ d'où $F = 0$, contradiction.

On peut maintenant établir le lemme. On notera, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$: $\phi_i = \frac{\partial F}{\partial t_i}(u_1, \ldots, u_k)$. Soit $s \in \{1, \ldots, k\}$. En dérivant la relation $F(u_1, \ldots, u_k) = 0$ par rapport à X_s, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_i}{\partial X_s} \frac{\partial F}{\partial t_i}(u_1, \ldots, u_k) = 0.$$

Dans l'espace $\bigoplus_{s=1}^{k} K dX_s$, on a donc :

$$0 = \sum_{s=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_i}{\partial X_s} \phi_i \right) dX_s = \sum_{i=1}^{k} \phi_i \left(\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial u_i}{\partial X_s} dX_s \right) = \sum_{i=1}^{k} \phi_i du_i.$$

Comme les coefficients $\phi_i \in K$ ne sont pas tous nuls, les différentielles $du_1, \ldots, du_k$ sont linéairement dépendantes sur K. Le lemme est démontré.

Notations 4.53 On reprend les sous-algèbres $\mathfrak{g}_s$ introduites dans les notations 4.49. Pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, on pose en outre :

$$\mathcal{A}_s = \{0, \ldots, p-2\} \times \{0, \ldots, p-1\} \cup \bigcup_{j=0}^{s} \{(-1, p-1-j)\} \subseteq \mathbb{Z}^2,$$

de sorte que $\mathfrak{g}_s = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_s} \mathbb{K} e_\alpha$. On pose aussi $\mathcal{A}_k^\star = \mathcal{A}_k \setminus \{(p-2, p-1)\}$. On considère enfin les algèbres de polynômes :

$$S_k = \mathbb{K}[X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_k],\ S_k^p = \mathbb{K}[X_\alpha^p \mid \alpha \in \mathcal{A}_k],$$
$$Q_k = \mathbb{K}[X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_k^\star],\ Q_k^p = \mathbb{K}[X_\alpha^p \mid \alpha \in \mathcal{A}_k^\star].$$

Remarquons tout d'abord que, par construction, on a $S_k = Q_k[X_{p-2,p-1}]$: S_k est une algèbre de polynômes à une variable sur Q_k. On peut par ailleurs identifier Q_k au quotient $Q_k \simeq S_k/(X_{p-2,p-1})$ de l'algèbre S_k.

Le corps $\mathbb{K}$ ayant été supposé parfait, l'algèbre S_k^p (resp. Q_k^p) est aussi l'ensemble des polynômes de la forme f^p pour $f \in S_k$ (resp. Q_k). On a des identifications naturelles $Gr\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}_k) \simeq S(\mathfrak{g}_k) \simeq S_k$; dans cette identification, on a $Gr\,\mathcal{O}[\mathfrak{g}_k] = S_k^p$.

Notations 4.54 Pour $\underline{\boldsymbol{m}}$ et $\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{N}^{q+1}$, on pose :

$$P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) = X_{p-2-m_0, p-1-k_0} \ldots X_{p-2-m_q, p-1-k_q} \in S_k. \tag{4.17}$$

Dans l'identification $S_k \simeq Gr\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$, l'élément $P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}})$ correspond à la forme initiale du monôme $M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$ (notation 4.47) : $P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) = gr\big(M(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}})\big)$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, on pose :

$$\zeta_k = \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{m}}| = p-1}} \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{k}}| = k}} P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \quad \text{et} \quad \xi_k = \widetilde{\sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{N}^{q+1}, \underline{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{m}}| = p-1, |\underline{\boldsymbol{k}}| = k}}} P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}),$$

où le symbole $\widetilde{\sum}$ signifie qu'on ne conserve que les termes de la sommation tels que $(m_i, k_i) \neq (0,0)$ pour tout i.

Pour tout $s \in \{0,\ldots,k\}$, on a donc $\xi_s \in Q_k$ et $\zeta_s = \xi_s + X_{p-2,p-1}R_s$, avec $R_s \in S_k$. Rappelons que Q_k s'identifie à l'algèbre quotient $\dfrac{S_k}{(X_{p-2,p-1})}$. Soit $\pi : S_k \twoheadrightarrow Q_k$ la projection canonique. On a, dans cette identification, $\pi(\zeta_s) = \xi_s$ pour tout $s \in \{0,\ldots,k\}$.

Lemme 4.55 *Soit $k \in \{0,\ldots,p-1\}$. On pose $J = \{0,\ldots,p-1\}^{k+1} \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$.*

1. *La famille $\left\{\xi_0^{j_0}\ldots\xi_k^{j_k} \,|\, (j_0,\ldots,j_k) \in J\right\}$ est libre sur Q_k^p.*
2. *La famille $\left\{\zeta_0^{j_0}\ldots\zeta_k^{j_k} \,|\, (j_0,\ldots,j_k) \in J\right\}$ est libre sur S_k^p.*

Preuve. Dans toute cette démonstration, on pose à nouveau

$$\mathcal{M} = \{(m_0,\ldots,m_q) \in \mathbb{N}^{q+1} \,|\, m_0 = \ldots + m_q = p-1\},$$

et plus généralement, pour $s \in \{0,\ldots,p-1\}$:

$$\mathcal{M}_s = \{(m_0,\ldots,m_q) \in \mathbb{N}^{q+1} \,|\, m_0 = \ldots + m_q = s\}.$$

Démontrons le n^{o}1. D'après le lemme 4.52, il suffit de montrer que les différentielles $d\xi_0,\ldots,d\xi_k$ sont linéairement indépendantes sur Q_k. Il suffit à cet effet de trouver des variables $X_{\alpha_0},\ldots,X_{\alpha_k}$ telles que l'on ait :

$$\begin{array}{rcll}
\partial\xi_0 & = & \frac{\partial\xi_0}{\partial X_{\alpha_0}} dX_{\alpha_0} & +r_0 \\
\partial\xi_1 & = & \frac{\partial\xi_1}{\partial X_{\alpha_0}} dX_{\alpha_0} + \frac{\partial\xi_1}{\partial X_{\alpha_1}} dX_{\alpha_1} & +r_1 \\
\ldots & & \ldots & \ldots \\
\partial\xi_k & = & \frac{\partial\xi_k}{\partial X_{\alpha_0}} dX_{\alpha_0} + \ldots + \frac{\partial\xi_k}{\partial X_{\alpha_k}} dX_{\alpha_k} & +r_k,
\end{array}$$

où $\dfrac{\partial\xi_s}{\partial X_{\alpha_s}} \neq 0$ pour $s \in \{0,\ldots,k\}$ et les éléments r_j sont des combinaisons linéaires de dX_α tels que $\alpha \notin \{\alpha_0,\ldots,\alpha_k\}$. Pour tout $s \in \{0,\ldots,k\}$, on pose $\alpha_s = (q-1, p-1-s) \in \mathcal{A}_s^\star$. Montrons que ce choix convient.

Tout d'abord, on va décomposer chaque ξ_s en combinaison linéaire de monômes linéairement indépendants. Pour tout $s \in \{0,\ldots,k\}$ on pose

$$\Xi_s = \{(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}_s \mid (m_i, k_i) \neq (0,0) \text{ pour tout } i \in \{0,\ldots,q\}\},$$

de sorte que :

$$\xi_s = \sum_{(\underline{\boldsymbol{m}},\underline{\boldsymbol{k}}) \in \Xi_s} P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}).$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{q+1}$ agit sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_s$ par permutation des coordonnées. Cette action induit une action sur le produit cartésien $\mathcal{M} \times \mathcal{M}_s$. On voit facilement que cette action se restreint à $\Xi_s \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}_s$. Par ailleurs, pour $(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}})$ et $(\underline{\boldsymbol{m}}', \underline{\boldsymbol{k}}') \in \Xi_s$, on a :

$$P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) = P(\underline{\boldsymbol{m}}', \underline{\boldsymbol{k}}') \iff (\exists \sigma \in \mathfrak{S}_{q+1}) \text{ tel que } (\underline{\boldsymbol{m}}', \underline{\boldsymbol{k}}') = \sigma \cdot (\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}).$$

Choisissons $\mathcal{R}_s \subseteq \Xi_s$ un système de représentants des orbites de $\mathfrak{S}_{q+1}$ dans Ξ_s. Pour $\rho = (\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{R}_s$ on notera $c(\rho)$ le cardinal de l'orbite de ρ et $P(\rho) = P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}})$. On a donc :

$$\xi_s = \sum_{\rho \in \mathcal{R}_s} c(\rho) P(\rho).$$

L'entier $c(\rho)$ divise le cardinal de $\mathfrak{S}_{q+1}$; comme $q + 1 < p$, en particulier $c(\rho)$ est premier à p, autrement dit $c(\rho) \neq 0$ dans $\mathbb{K}$.

Soit $s \in \{0, \dots, k\}$. Montrons que $\dfrac{\partial \xi_s}{\partial X_{\alpha_s}} \neq 0$. On définit un élément $\rho_s = (\underline{\boldsymbol{m}}_s, \underline{\boldsymbol{k}}_s) \in \Xi_s$ par :

$$\underline{\boldsymbol{m}}_s = (p - 1 - q, 1, \dots, 1) \text{ et } \underline{\boldsymbol{k}}_s = (s, 0, \dots, 0).$$

On peut supposer $\rho_s \in \mathcal{R}_s$. On a $P(\rho_s) = X_{\alpha_s} X_{p-3,p-1}^q$, donc

$$\xi_s = c(\rho_s) X_{\alpha_s} X_{p-3,p-1}^q + \dots,$$

où "..." est une combinaison linéaire de monômes différents de $X_{\alpha_s} X_{p-3,p-1}^q$. Comme $c(\rho_s) \neq 0$, on en déduit facilement que : $\dfrac{\partial \xi_s}{\partial X_{\alpha_s}} \neq 0$.

Soient $j, s \in \{0, \dots, k\}$. On suppose $j > s$. On va établir que $\dfrac{\partial \xi_s}{\partial X_{\alpha_j}} = 0$, ce qui achèvera la démonstration du lemme. Soit $(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \Xi_s$. Pour tout indice $i \in \{0, \dots, q\}$, on a $k_i \leq k_0 + \dots + k_q = s < j$. En particulier $k_i \neq j$ et le produit $P(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) = X_{p-2-m_0,p-1-k_0} \cdots X_{p-2-m_q,p-1-k_q}$ ne fait pas intervenir la variable X_{α_j}. Le polynôme $\xi_s = \displaystyle\sum_{(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \Xi_s}$ est donc également indépendant de X_{α_j}.

Le n^{o}2 se traiterait de manière analogue. Le lemme est démontré.

Proposition 4.56 *Reprenons les notations $\mathfrak{g}_k, \Omega_k, \zeta_k$ introduites dans cette section. On note $S^p(\mathfrak{g}_k) = \{f^p \mid f \in S(\mathfrak{g}_k)\}$. Soient*

$$A_k = \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k][\Omega_0, \dots, \Omega_k] \subseteq Z(\mathfrak{g}_k)$$

et

$$B_k = S^p(\mathfrak{g}_k)[\zeta_0, \dots, \zeta_k] \subseteq S(\mathfrak{g}_k).$$

On munit A_k de la filtration induite par la filtration canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$. On a alors $Gr(A_k) = B_k$.

Preuve. On note à nouveau

$$\mathcal{M} = \{(m_0, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^{q+1} \,|\, m_0 = \ldots + m_q = p-1\},$$

et, pour $s \in \{0, \ldots, p-1\}$:

$$\mathcal{M}_s = \{(m_0, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^{q+1} \,|\, m_0 = \ldots + m_q = s\}.$$

Pour tout $s \in \{0, \ldots, k\}$, on a :

$$\Omega_s = \sum_{(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}_s} e_{p-2-m_0, p-1-k_0} \ldots e_{p-2-m_q, p-1-k_q},$$

$$\zeta_s = \sum_{(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{k}}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}_s} X_{p-2-m_0, p-1-k_0} \ldots X_{p-2-m_q, p-1-k_q}.$$

On voit sur ces décompositions que $\zeta_s = gr(\Omega_s)$. Comme par ailleurs $Gr\,\mathcal{O}[\mathfrak{g}_k] = S^p(\mathfrak{g}_k)$, il vient $Gr(A_k) \supseteq B_k$.

Réciproquement, soit $a \in A_k$ un élément non nul. D'après le corollaire 4.51, on peut décomposer a sous la forme :

$$a = \sum_{\underline{\boldsymbol{j}} \in J} a(\underline{\boldsymbol{j}}) \Omega_0^{j_0} \ldots \Omega_k^{j_k},$$

où $a(\underline{\boldsymbol{j}}) \in \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k]$ pour tout $\underline{\boldsymbol{j}} \in J = \{0, \ldots, p-1\}^{k+1}$. Soient

$$n = \max\left\{\nu\left(a(\underline{\boldsymbol{j}})\Omega_0^{j_0} \ldots \Omega_k^{j_k}\right) \,|\, \underline{\boldsymbol{j}} \in J\right\} \text{ et } J_0 = \left\{\underline{\boldsymbol{j}} \in J \,|\, \nu\left(a(\underline{\boldsymbol{j}})\Omega_0^{j_0} \ldots \Omega_k^{j_k}\right) = n\right\}.$$

L'ensemble J_0 est non-vide par construction. On pose alors :

$$a_0 = \sum_{\underline{\boldsymbol{j}} \in J_0} a(\underline{\boldsymbol{j}}) \Omega_0^{j_0} \ldots \Omega_k^{j_k}.$$

On a $\nu(a_0) \leq n$ et $\nu(a - a_0) < n$. Posons à présent $b(\underline{\boldsymbol{j}}) = gr\big(a(\underline{\boldsymbol{j}})\big)$ pour tout $\underline{\boldsymbol{j}} \in J_0$ et $b_0 = \sum_{\underline{\boldsymbol{j}} \in J_0} b(\underline{\boldsymbol{j}}) \zeta_0^{j_0} \ldots \zeta_k^{j_k} \in B_k$. D'après le lemme 4.55, les éléments $\zeta_0^{j_0} \ldots \zeta_k^{j_k}$ pour $\underline{\boldsymbol{j}} \in J_0$ sont libres sur $S^p(\mathfrak{g}_k)$; donc on a $b \neq 0$. Par ailleurs, b est homogène, de degré n. On en déduit que $gr(a_0) = b_0$, et en particulier $\nu(a_0) = n$. Mais alors $\nu(a - a_0) < \nu(a_0)$. D'après le lemme 1.38, n^{o}2, on a $gr(a) = gr(a_0)$, d'où $gr(a) = b_0 \in B_k$. Ceci prouve l'inclusion $Gr(A_k) \subseteq B_k$.

Proposition 4.57 *L'élément $e_{p-2,p-1}^p$ est premier dans $\mathcal{O}[\mathfrak{g}_k][\Omega_0,\dots,\Omega_k]$.*

Preuve. Notons $A_k = \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k][\Omega_0,\dots,\Omega_k] \subseteq Z(\mathfrak{g}_k)$ et $B_k = S^p(\mathfrak{g}_k)[\zeta_0,\dots,\zeta_k] \subseteq S(\mathfrak{g}_k)$. On munit A_k de la filtration canonique provenant de l'algèbre enveloppante, de sorte que $Gr(A_k) = B_k$ d'après le lemme 4.56. Pour voir que l'élément $e_{p-2,p-1}^p \in A_k$ est premier dans A_k, il suffit de démontrer que l'élément $gr(e_{p-2,p-1}^p) \in B_k$ est premier dans B_k d'après le lemme 4.28, n^{o}1.

On utilise les notations $S_k = S(\mathfrak{g}_k)$, $Q_k \subseteq S_k$ et S_k^p, Q_k^p introduites en 4.53. Pour alléger les écritures, on notera $X_\mu = X_{p-2,p-1}$. On a $\dfrac{S_k}{(X_\mu)} \simeq Q_k$: l'élément X_μ est donc premier dans S_k. On notera enfin $\pi : S_k \twoheadrightarrow Q_k$ la projection canonique. Observons que $\pi(S_k^p) = Q_k^p$ et rappelons que $\pi(\zeta_s) = \xi_s$ pour tout $s \in \{0,\dots,k\}$.

Posons $X_{i,j} = gr(e_{i,j}) \in S(\mathfrak{g}_k)$ pour tous indices i,j tels que $e_{i,j} \in \mathfrak{g}_k$. On a donc $X_{p-2,p-1}^p = gr(e_{p-2,p-1}^p)$. Soient $I_S \subseteq S(\mathfrak{g}_k)$ l'idéal de $S(\mathfrak{g}_k)$ engendré par $X_{p-2,p-1}$ et $I_B \subseteq B_k$ l'idéal de B_k engendré par $X_{p-2,p-1}^p$.

Démontrons tout d'abord que $I_S \cap B_k = I_B$. On a $I_S = X_\mu S_k$ et $I_B = X_\mu^p B_k \subseteq I_S \cap B_k$. Il s'agit de démontrer qu'on a l'inclusion réciproque. Soit $u \in I_S \cap B_k$ un élément non nul. Montrons que $u \in I_B$. Autrement dit, il s'agit d'établir la propriété suivante :

$$X_\mu \mid u \ \text{ dans } \ S_k \ \text{ et } \ u \in B_k \ \Rightarrow \ X_\mu^p \mid u \ \text{ dans } \ B_k.$$

Posons $J = \{0,\dots,p-1\}^{k+1}$. On peut décomposer u sous la forme

$$u = \sum_{\underline{\boldsymbol{j}} \in J} u(\underline{\boldsymbol{j}}) \zeta_0^{j_0} \dots \zeta_k^{j_k},$$

avec $u(\underline{\boldsymbol{j}}) \in S_k^p$ pour tout $\underline{\boldsymbol{j}}$. Comme $u \in I_S$, on a :

$$0 = \pi(u) = \sum_{\underline{\boldsymbol{j}} \in J} \pi\left(u(\underline{\boldsymbol{j}})\right) \xi_0^{j_0} \dots \xi_k^{j_k}.$$

Les coefficients $\pi\big(u(\underline{\boldsymbol{j}})\big) \in Q_k^p$. D'après le lemme 4.55, on a $\pi\big(u(\underline{\boldsymbol{j}})\big) = 0$ pour tout $\underline{\boldsymbol{j}}$, autrement dit X_μ divise chaque $u(\underline{\boldsymbol{j}})$ dans S_k. Or $u(\underline{\boldsymbol{j}}) \in S_k^p$: c'est une puissance p-ème dans S_k. Il est facile d'en déduire (en utilisant le fait que X_μ est premier dans S_k) qu'il existe $v(\underline{\boldsymbol{j}}) \in S_k$ tel que $u(\underline{\boldsymbol{j}}) = X_\mu^p v(\underline{\boldsymbol{j}})^p$. Finalement, on a la décomposition :

$$u = X_\mu^p \sum_{\underline{\boldsymbol{j}} \in J} v(\underline{\boldsymbol{j}})^p \zeta_0^{j_0} \dots \zeta_k^{j_k}.$$

Comme chaque $v(\underline{\boldsymbol{j}})^p \zeta_0^{j_0} \dots \zeta_k^{j_k} \in B_k$, ceci prouve que X_μ^p divise u dans B_k. L'inclusion $I_S \cap B_k \subseteq I_B$ est démontrée.

On a donc démontré $I_S \cap B_k = I_B$. Comme I_S est un idéal premier de S_k, sa trace $I_B = I_S \cap B_k$ est un idéal premier de B_k. Comme I_B est engendré par X_μ^p, cela signifie que X_μ^p est un élément premier de B_k. La proposition est démontrée.

Proposition 4.58 *Soit* $k \in \{0, \ldots, p-1\}$.

1. *On a* $Z(\mathfrak{g}_k) = \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k][\Omega_0, \ldots, \Omega_k]$.
2. $Z(\mathfrak{g}_k)$ *est un anneau factoriel.*

Preuve. Introduisons d'abord quelques notations commodes. Pour $k = -1$, on pose $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{p}_0$ et $A_{-1} = \mathcal{O}[\mathfrak{p}_0]$. Pour $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, la notation $\mathfrak{g}_k$ est celle de 4.49, et $A_k = \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k][\Omega_0, \ldots, \Omega_k]$. On pose $e_\mu = e_{p-2,p-1} \in \mathfrak{p}_0$, de sorte que $e_\mu^p \in \mathcal{O}[\mathfrak{p}_0]$. Pour tout $k \in \{-1, 0, \ldots, p-1\}$ on note :

$$\mathcal{U}_k = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_k) \ ; \ \widetilde{\mathcal{U}_k} = \mathcal{U}_k[e_\mu^{-p}].$$

Comme $\widetilde{\mathcal{U}_k}$ est une localisation centrale de $\mathcal{U}_k$, on voit que :

$$Z(\widetilde{\mathcal{U}_k}) = Z(\mathcal{U}_k)[e_\mu^{-p}] = Z(\mathfrak{g}_k)[e_\mu^{-p}].$$

Posons, pour $k \in \{0, \ldots, p-1\}$: $\theta_k = e_{-1,p-1-k}$. On a donc $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_{k-1} \oplus \mathbb{K}\theta_k$; aussi,

$$\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k-1}[\theta_k] \quad \text{et} \quad \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k] = \mathcal{O}[\mathfrak{g}_{k-1}][\theta_k^p].$$

Il vient :

$$A_k = \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k][\Omega_0, \ldots, \Omega_k] = A_{k-1}[\theta_k^p, \Omega_k]. \tag{4.18}$$

Rappelons que d'après la relation (4.15), on a aussi $\Omega_k \equiv (q+1)e_\mu^q \theta_k \mod \mathcal{U}_{k-1}$. On observe, à l'aide du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, que les éléments Ω_k et θ_k sont transcendants sur $\mathcal{U}_{k-1}$, et a fortiori sur la sous-algèbre $A_{k-1} \subseteq \mathcal{U}_{k-1}$. Enfin, l'élément e_μ étant inversible dans chaque $\widetilde{\mathcal{U}_k}$, on voit que l'on a aussi, pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$:

$$\widetilde{\mathcal{U}_k} = \widetilde{\mathcal{U}_{k-1}}[\Omega_k]. \tag{4.19}$$

Montrons à présent par récurrence sur k qu'on a la propriété suivante :

$$Z(\mathfrak{g}_k) = A_k \quad \text{et} \quad Z(\mathfrak{g}_k) \text{ est un anneau factoriel.} \tag{4.20}$$

Si $k = -1$, on a $Z(\mathfrak{p}_0) = \mathcal{O}[\mathfrak{p}_0]$ d'après 4.46 ; comme $\mathcal{O}[\mathfrak{p}_0]$ est une algèbre commutative libre, c'est aussi un anneau factoriel. Considérons à présent un entier $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ et supposons les conditions (4.20) satisfaites pour l'entier $k-1$. On a $\widetilde{\mathcal{U}_k} = \widetilde{\mathcal{U}_{k-1}}[\Omega_k]$ d'après (4.19). L'élément Ω_k étant transcendant sur $\widetilde{\mathcal{U}_{k-1}}$, on en déduit :

$$Z(\widetilde{\mathcal{U}_k}) = Z(\widetilde{\mathcal{U}_{k-1}})[\Omega_k] = Z(\mathfrak{g}_{k-1})[e_\mu^{-p}][\Omega_k].$$

On déduit, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$Z(\widetilde{\mathcal{U}_k}) = A_{k-1}[e_\mu^{-p}, \Omega_k]. \tag{4.21}$$

On a par ailleurs $\theta_k^p \in \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k] \subseteq Z(\widetilde{\mathcal{U}_k})$. Comte tenu de (4.18), il vient :

$$A_k[e_\mu^{-p}] = A_{k-1}[\theta_k^p, \Omega_k][e_\mu^{-p}] = A_{k-1}[\Omega_k, e_\mu^{-p}]. \tag{4.22}$$

L'élément Ω_k est transcendant sur A_{k-1}, qui est un anneau factoriel : l'anneau $A_{k-1}[\Omega_k]$ est donc aussi factoriel, et par suite le localisé $A_{k-1}[\Omega_k][e_\mu^{-p}]$ est factoriel aussi. L'anneau $A_k[e^{-p}]$ est donc factoriel. D'après le corollaire 4.57, e_μ^p est un élément premier de A_k. En appliquant le lemme de Nagata (proposition 4.29), on en déduit que A_k est un anneau factoriel.

Il reste à montrer que $Z(\mathfrak{g}_k) = A_k$. On a les inclusions $Z(\mathfrak{g}_k) \supseteq A_k \supseteq \mathcal{O}[\mathfrak{g}_k]$. L'anneau $Z(\mathfrak{g}_k)$ est entier sur $\mathcal{O}[\mathfrak{g}_k]$; a fortiori, $Z(\mathfrak{g}_k)$ est entier sur A_k. Comme A_k est factoriel, on sait qu'alors A_k est intégralement clos. Pour voir que $Z(\mathfrak{g}_k) = A_k$ il suffit donc de voir que $\mathrm{Frac}\, Z(\mathfrak{g}_k) = \mathrm{Frac}\, A_k$. D'après (4.21) et (4.22), on a :

$$Z(\widetilde{\mathcal{U}_k}) = A_{k-1}[\Omega_k, e_\mu^{-p}] = A_k[e_\mu^{-p}].$$

On a donc :

$$\mathrm{Frac}\, Z(\mathcal{U}_k) = \mathrm{Frac}\, Z(\widetilde{\mathcal{U}_k}) = \mathrm{Frac}\, A_k[e_\mu^{-p}] = \mathrm{Frac}\, A_k.$$

L'hypothèse (4.20) est donc bien vérifiée pour l'entier k. La proposition est démontrée.

4.3.4.5 Conclusion

Théorème 4.59 *Soit $\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie $A(1) \otimes W(1)$ en caractéristique $p \geq 3$. Les éléments $\Omega_0, \ldots, \Omega_{p-1}$ sont définis, pour tout $s \in \{0, \ldots, p-1\}$, par la formule :*

$$\Omega_s = \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{k}}| = s}} \sum_{\substack{\underline{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{N}^{q+1} \\ |\underline{\boldsymbol{m}}| = p-1}} e_{p-2-m_0, p-1-k_0} \times \ldots \times e_{p-2-m_q, p-1-k_q}.$$

1. *On a $Z(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}[\mathfrak{p}][\Omega_0, \ldots, \Omega_{p-1}]$. C'est de plus un anneau factoriel.*
2. *Le corps enveloppant $K(\mathfrak{p})$ est isomorphe au corps de Weyl $\mathcal{D}_{\frac{p(p-1)}{2}, p}(\mathbb{K})$. En particulier,*

$$\mathrm{Ind}\, K(\mathfrak{p}) = p^{p(p-1)/2} \quad ; \quad \mathrm{Exp}\, K(\mathfrak{p}) = p.$$

De plus, le centre de $K(\mathfrak{p})$ est une extension transcendante pure du corps de base $\mathbb{K}$, de degré de transcendance p^2.

Bibliographie

[1] J. Alev : *Sur le corps de Weyl $D_1(\mathbb{C})$*, Comptes-rendus du contact Franco-Belge en algèbre (Montpellier, 1988), paru en 1992.

[2] J. Alev, A. Ooms et M. Van den Bergh : *A class of counterexamples to the Gelfand-Kirillov conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), n^{o}5, 1709-1716.

[3] J. Alev, A. Ooms et M. Van den Bergh : *The Gelfand-Kirillov conjecture for Lie algebras of dimension at most eight*, J. Alg. **227** (2000), 549-581.

[4] S.A. Amitsur : *Commutative linear differential operators*, Pacific J. Math **8** (1958), 1-10.

[5] G.E. Andrews : "The theory of partitions", Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[6] W. Borho, P. Gabriel et R. Rentschler : *Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie Algebren*, Lecture Notes in Math. **357** (1973).

[7] W. Borho et H. Kraft : *Über die Gelfand-Kirillov Dimension*, Math. Ann. **220** (1976), 1-24.

[8] A. Braun et C. Hajarnavis : *Smooth polynomial identity algebras with almost factorial centers*, preprint.

[9] G. Cauchon : *Centralisateurs dans les corps de Weyl*, Comm. Alg. **14** (1988), n^{o}8, 1403-1428.

[10] G. Cauchon : *Séries de Malcev-Neumann sur le groupe libre et questions de rationalité*, Theoret. Comput. Science **98** (1992), 79-97.

[11] G. Cauchon : *Séries formelles croisées*, J. Pure Applied Algebra **107** (1996), 153-169.

[12] J. Dixmier : *Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente*, Arch. Math. **10** (1959) 321-326.

[13] J. Dixmier : *Sur les algèbres de Weyl*, Bull. Soc. math. France **96** (1968), 209-242.

[14] J. Dixmier : "Algèbres enveloppantes", Cahiers Scientifiques, fasc. XXXVII, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[15] D. Eisenbud : "Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry", Graduate Texts in Math., vol. 150, Springer, New York, 1995.

[16] Y. Ermolaev : *Computation of the central element of the universal enveloping algebra of a Witt algebra*, Izv. Vys. Ucebn. Zaved. Matematika **156** (1975), n^{o}5, 20-26.

[17] D. Farkas : *Modules for Poisson algebras*, Comm. Alg. **28** (2000), n^{o}7, 3293-3306.

[18] R. Farnsteiner et H. Strade : "Modular Lie algebras and their representations", Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **116**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[19] I.M. Gelfand et A.A. Kirillov : *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie*, Paris, PUF 1966 (IHES, publ.math. t.31, 5-19).

[20] J.Z. Gonçalves et M. Shirvani : *Free group algebras in the field of fractions of differential polynomial rings and enveloping algebras*, J. Alg. **204** (1998), 372-385.

[21] K.R. Goodearl : *Centralizers in differential, pseudo-differential and fractional differential operator rings*, Rocky Mountain J. Math. **13** (1983), n^{o}4, 573-618.

[22] I.N. Herstein : "Noncommutative Rings", The Carus Mathematical Monographs **15**, John Wiley & Sons, Inc., New York 1968.

[23] A. Joseph : *Proof of the Gelfand-Kirillov conjecture for solvable Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 1-10.

[24] G. Krause et T. Lenagan : "Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension", revised edition, Graduate Studies in Mathematics **22**, Am. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[25] D. Leites et E. Poletaeva : *Defining relations for classical Lie algebras of polynomial vector fields*, Math. Scand. **81** (1997), 5-19.

[26] J.C. Mc Connell : *Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand-Kirillov conjecture*, Proc. London Math. Soc. **3** (1974), 453-484.

[27] J.C. Mc Connell et J.C. Robson : "Noncommutative noetherian rings", Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1987.

[28] L. Makar-Limanov : *The skew field of fractions of the Weyl algebra contains a free noncommutative subalgebra*, Comm. Algebra **11** (1983), 2003-2006.

[29] O. Mathieu : *Classification of simple graded Lie algebras of finite growth*, Invent. Math. **108** (1992), 455-519.

[30] O. Mathieu : *Classification des algèbres de Lie simples*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1998-99, Astérisque **266** (2000), n^{o}858, 4, 245-286.

[31] B.H Neumann : *On ordered division rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949) 202-252.

[32] S.Q. Oh : *Poisson enveloping algebras*, Comm. Algebra **27** (1999), 2181-2186.

[33] V.M. Petrogradsky : *Intermediate growth in Lie algebras and their enveloping algebras*, J. Alg. **179** (1996), n^{o}2, 459-482.

[34] A. Premet et R. Tange : *Zassenhaus varieties of general Lie algebras*, preprint.

[35] P. Revoy : *Algèbres de Weyl en caractéristique p*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, **276** (1973), 225-228.

[36] L. Rowen : "Ring theory", Vol. 1, Pure and Applied Mathematics **127**, Academic Press, Boston, MA (1988).

[37] M.K. Smith : *Universal enveloping algebras with subexponential but not polynomially bounded growth*, Proc. Amer. Math. Soc. **60** (1976), 22-24.

[38] V.A. Ufnarovsky : *On growth of algebras*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh. **4** (1978), 59-65.

[39] M. Vergne : *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. math. France **98** (1970), 81-116.

[40] M. Vergne : *La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente*, Bull. Soc. math. France **100** (1972), 301-335.

[41] R.W.T. Yu : *Algèbre de Lie de type Witt*, Comm. Alg. **25** (1997), 1471-1484.

[42] J.J. Zhang : *On Gelfand-Kirillov transcendance degree*, Trans. Am. Math. Soc. **348** (1996), n^{o}7, 2867-2899.

Résumé. Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $K(\mathfrak{g})$ le corps des fractions de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. L'objet de cette thèse est d'étudier des propriétés algébriques du corps gauche $K(\mathfrak{g})$ dans les deux cas suivants : d'une part si $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0 et $\mathfrak{g}$ est de dimension infinie ; d'autre part si $\mathbb{K}$ est de caractéristique positive et $\mathfrak{g}$ est de dimension finie.

On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. On définit d'abord la notion de *degré de transcendance de niveau* $q \in \mathbb{N}^\star$ pour les algèbres de Poisson. Cette notion est introduite à partir de la notion de dimension de niveau $q \in \mathbb{N}^\star$ définie par V. Pétrogradsky pour les algèbres associatives et les algèbres de Lie. On démontre, sous des hypothèses peu restrictives sur $\mathfrak{g}$, que le degré de transcendance de niveau $q+1$ de $K(\mathfrak{g})$ est égal à la dimension de niveau q de $\mathfrak{g}$.

On s'attache ensuite à l'étude de la famille des algèbres de type Witt définies par R. Yu. On construit ainsi des familles infinies de corps gauches deux à deux non isomorphes mais de même degré de transcendance de niveau 3 donné. On étudie aussi la question des centralisateurs dans les corps enveloppants des parties positives des algèbres de type Witt. On établit en particulier le résultat suivant : il existe des algèbres de Lie non commutatives de dimension infinie $\mathfrak{g}$ telles que le premier corps de Weyl ne se plonge pas dans $K(\mathfrak{g})$.

Supposons maintenant $\mathbb{K}$ de caractéristique $p > 0$. On étudie le cas particuliers des algèbres de Lie suivantes : les algèbres $\mathfrak{gl}_n$; les algèbres $\mathfrak{sl}_n$ lorsque p ne divise pas n ; l'algèbre de Witt modulaire $W(1)$ et une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de l'algèbre de Witt $W(2)$ (s'identifiant à un produit tensoriel de l'algèbre de Lie $W(1)$ avec une algèbre associative de polynômes tronqués). Dans tous les cas, on démontre que le corps enveloppant est isomorphe à un corps de Weyl. Pour les algèbres $W(1)$ et $\mathfrak{p}$, on démontre en outre que le centre de l'algèbre enveloppante est un anneau factoriel, en accord avec une conjecture récente de A. Braun et C. Hajarnavis.

Abstract. Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra over $\mathbb{K}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ its enveloping algebra, $K(\mathfrak{g})$ the ring of fractions of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. The aim of this thesis is to study algebraic properties of the division ring $K(\mathfrak{g})$ in the following two situations : on the one hand when $\mathbb{K}$ is of characteristic 0 and $\mathfrak{g}$ is infinite-dimensional ; on the other hand when $\mathbb{K}$ is of positive characteristic and $\mathfrak{g}$ is finite-dimensional.

Assume $\mathbb{K}$ is of characteristic 0. We first define the notion of *transcendance degree of level* $q \in \mathbb{N}^\star$ for Poisson algebras. This notion is introduced from V. Petrogradsky's dimensions of level $q \in \mathbb{N}^\star$ for associative or Lie algebras. We prove, under mild assumptions on $\mathfrak{g}$, that the transcendance degree of level $q+1$ of $K(\mathfrak{g})$ is equal to the dimension of level q of $\mathfrak{g}$.

We then proceed to the study of the family of Witt type Lie algebras defined by R. Yu. We can thus construct infinite families of pairwise non-isomorphic division rings with a given transcendance degree of level 3. We also study the question of centralizers in the enveloping skewfield of positive parts of Witt type algebras. In particular, we prove the following result : there exist infinite dimensional non-commutative Lie algebras $\mathfrak{g}$ such that the first Weyl skewfield does not embed in $K(\mathfrak{g})$.

Now assume that $\mathbb{K}$ is of characteristic $p > 0$. We study the following specific Lie algebras : the matrix algebras $\mathfrak{gl}_n$; the algebras $\mathfrak{sl}_n$ provided p does not divide n ; the modular Witt algebra $W(1)$ and a subalgebra $\mathfrak{p}$ of the Witt algebra $W(2)$ (isomorphic to a tensor product of the Lie algebra $W(1)$ with an associative algebra of truncated polynomials). In each case we prove that the enveloping skewfield is isomorphic to a Weyl skewfield. For the algebras $W(1)$ and $\mathfrak{p}$, we also prove that the center of the enveloping algebra is a unique factorization domain, in agreement with a recent conjecture by A. Braun and C. Hajarnavis.

Discipline : mathématiques.

Mots-clefs : algèbres de Lie, algèbres enveloppantes universelles, théorie de la dimension, algèbres à division, conjecture de Gelfand-Kirillov.

Laboratoire de mathématiques - UMR 6065, Université de Reims Champagne-Ardenne
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France.