Recherche sur la notion d'équilibre et ses applications aux théories de la planification économique

Grégory Chigolet

Université Paris I Panthéon-Sorbonne
Sciences Economiques- Sciences Humaines- Sciences Juridiques et Politiques

Thèse pour le Doctorat de Sciences Economiques

(Arrêté du 30 mars 1992)

Présentée et soutenue publiquement par
GREGORY CHIGOLET

Recherche sur la notion d'équilibre et ses applications aux théories de la planification économique

Directeur de Recherche :

ANDREFF Wladimir, Professeur à l'Université Paris I Panthéon- Sorbonne

Jury :

ANDREFF Wladimir, Professeur à l'Université Paris I Panthéon- Sorbonne
DESPRES Laure, Professeur Emérite à l'Université de Nantes (Présidente)
GARROUSTE Pierre, Professeur à l'Université Lumière Lyon- II (Rapporteur)
GAUBERT Patrice, Professeur à l'Université Paris XII- Val de Marne (Rapporteur)
GUERRIEN Bernard, Maître de Conférence à l'Université Paris I Panthéon- Sorbonne

Janvier 2008

« L'Université Paris I Panthéon-Sorbonne n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans cette thèse. Ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur. »

Remerciements

Je tiens à remercier ici les personnes qui, par leurs conseils et leurs encouragements, ont contribué à l'aboutissement de cette thèse.

Tous mes remerciements les plus sincères à M. *Wladimir Andreff*, Professeur à l'Université Paris I, qui a accepté de diriger cette thèse et qui m'a accordé la liberté nécessaire pour exposer les idées qu'elle contient. Qu'il s'en trouve sincèrement remercié.

Je témoigne aussi ma profonde reconnaissance à M. *Bernard Guerrien*, Maître de conférences à l'Université de Paris I, pour tout ce qu'il m'a apporté depuis le début de mes études d'économie à la faculté.

Je tiens également à adresser un grand merci à tous ceux qui m'ont soutenu, encouragé et aidé au cours de ces années de thèse. En particulier, j'adresse mes remerciements à M. *Thomas Leclavier*, Mlle *Mathilde Lozach*, M. *David Rossit* et Mlle *Zahra Tihadi*. Sans oublier *Marcel* et *Lisette Rouquette* ainsi que mon oncle et ma tante *Michel et Jeannine Suchet*.

Enfin, ma plus grande reconnaissance va à ma famille et plus spécifiquement à mes parents ainsi qu'à ma sœur.

.

A mes parents, à ma sœur et à Zahra…

INTRODUCTION GENERALE

Incontestablement, les équilibres sont à l'heure actuelle la situation de référence de pratiquement toutes les théories économiques (néo-classique, post-keynesienne...). Plusieurs motifs expliquent cette focalisation.
Cet état de fait résulte d'abord de la difficulté à analyser les situations de déséquilibres qui se caractérisent par des effets reports extrêmement complexes à saisir. D'autre part, on peut légitiment s'interroger sur l'intérêt de déployer des efforts non négligeables pour comprendre ces situations qui sont par essence extrêmement fugaces. Mieux vaut donc se concentrer sur des états pérennes. Enfin le recours croissant aux mathématiques, en particulier aux différentes versions du théorème du point fixe, constitue une dernière cause explicative.

Quoi qu'il en soit, et bien qu'elle soit continuellement employée, il est étonnant de constater que « la notion [d'équilibre] est mal définie […] » (Hahn (1976), p. 226) et que le concept s'avère « ni aussi simple ni aussi évident qu'il peut y paraître à première vue. » (Balasko (1988), p. 2). Avant d'aller plus avant, nous allons éclaircir ce point.

Les deux formulations courantes

Dans l'introduction de son ouvrage de 1984, Benassy évoque l'existence de deux conceptions de l'équilibre qui tendent d'ordinaire à se confondre :

« On trouve en effet dans la littérature deux significations différentes de ce mot. La première, que nous avons utilisée ci- dessus, se réfère à la notion d'équilibre d'un marché, c'est-à-dire à l'égalité de l'offre et de la demande sur ce marché. C'est la notion que l'on trouve chez Marshall, Walras, et chez la plupart des auteurs ultérieurs dans la tradition néoclassique. Cependant il existe une autre définition du mot équilibre empruntée aux sciences physiques et qui décrit intuitivement un « état de repos » d'un système. […]. Bien que cette seconde définition soit beaucoup plus générale que la première, elles ont souvent été confondues, notamment en théorie microéconomique où l'égalité de l'offre et de la demande sur tous les marchés apparaissait comme la condition la plus naturelle pour un équilibre selon la seconde définition. » (p. VIII- IX).

La version générale

Une façon similaire de présenter la notion d'équilibre, dans son sens général, est celle de A. Lalande ([1928], 1999) qui considère, en mécanique, qu'un « système est en équilibre sous l'action de forces déterminées lorsqu'il est susceptible de rester indéfiniment dans cet état en présence de ces actions. ». Ce qui une fois appliqué aux sciences économiques aboutit à la présentation de Machlup (1958) selon laquelle un équilibre correspond à une « constellation de variables choisies, reliées et ajustées les unes aux autres de telle manière qu'elles interdisent toute tendance au changement dans le modèle qu'elles constituent. » (p. 25).

Au-delà de ce sens général du terme équilibre, il en existe une interprétation plus restreinte sujette à davantage de controverses.

La compatibilité des plans des agents

Plutôt que d'exposer les choses en termes d'égalité entre l'offre et la demande, d'autres auteurs préfèrent utiliser un corollaire. Tel est, par exemple, le cas de Hicks (1934) pour qui : « Un marché est en équilibre, d'un point de vue statique, si chaque individu agit de manière à atteindre sa position préférée, dans la limite des occasions qui lui sont offertes. Cela suppose que les actions des protagonistes sont compatibles. » (p. 51).

Effectivement, puisque la démarche microéconomique se fonde sur un principe de maximisation simultanée sous contrainte de l'utilité et du profit, l'équilibre se caractérise par un contexte de compatibilité des plans des agents. Aucun d'entre eux n'ayant intérêt à modifier sa position. Ce que l'on résume parfois à travers la formule : « rien ne bouge ». Malinvaud (1991) remarque alors que :

« La compatibilité a deux dimensions toujours présentes, ne serait- ce qu'implicitement dans certains modèles : (1) les diverses actions d'un même agent sont compatibles entre elles, compte tenu des contraintes qui s'imposent à lui et des objectifs qu'il poursuit, éventuellement avec une rationalité limitée ; (2) les actions des divers agents sont compatibles entre elles : par exemple un échange sur un marché est un achat pour un agent et une vente pour un autre. Ainsi je propose la définition suivante : *Dans la représentation abstraite d'une catégorie de phénomènes économiques, un équilibre est un état dans lequel les actions des divers agents sont mutuellement cohérentes entre elles et sont, pour chaque agent, compatibles avec le comportement que cette représentation lui attribue.* » (p. 152).

Equilibre et vertus du système économique

Ces propos sont représentatifs de l'état d'esprit des économistes. La plupart associent systématiquement l'équilibre à une situation idéale. Dans ce domaine, la position sans doute la plus répandue est d'assimiler « équilibres non walrasien » et « déséquilibre ».

Implicitement, cela revient à spécifier que l'équilibre correspond uniquement à une coordination adéquate de l'activité économique (où chaque individu peut réaliser son plan optimal) :

« Pour passer du monde de Walras à celui de Keynes il suffit de supposer qu'il n'y a pas de mécanisme de tâtonnement. L'élimination de ce processus signifie simplement que l'élaboration de l'information nécessaire à la coordination des activités économiques dans un vaste système où la décision est décentralisée prend du temps et implique des coûts économiques, il n'est nécessaire d'éliminer aucune autre hypothèse classique […] il n'est pas nécessaire de nier l'existence d'un vecteur de prix non négatif et de taux d'intérêt compatibles avec l'utilisation complète des ressources. Pour être Keynésien, il suffit de prendre en compte les difficultés de trouver le vecteur prix qui équilibre les marchés. » (Leijohnufvud (1967), p. 404).

Pour autant, on trouve dans la littérature des démonstrations d'existences qui s'appuient sur les théorèmes du point fixe mais qui n'impliquent pas une compatibilité des plans des agents. Les équilibres à prix fixes en sont un exemple contemporain évident parmi d'autres.

La notion d'équilibre en cas d'absence de compatibilité des plans

En effet, si on se réfère à Keynes (1936), le niveau d'équilibre de l'emploi correspond au « niveau où rien n'incite plus les entrepreneurs pris dans leur ensemble à développer ni à contracter l'emploi. » (p. 55). L'analogie avec une situation où rien ne bouge est claire mais il n'est pas fait référence à une quelconque idée de compatibilité. Tout au plus peut- on estimer qu'il en existe une au sens (1) de Malinvaud.

Le cas échéant, la nécessité d'avoir une notion d'équilibre utilisable dans le cas où les plans des agents ne sont pas forcément compatibles, ne résulte pas d'une difficulté à faire converger les prix (absence de flexibilité) mais de la prise en compte de l'incertitude. Si l'on désire que le concept d'équilibre ne serve pas qu'à l'étude de cas particuliers (des économies sans incertitude), il faut pouvoir prendre en considération l'incertitude sans cacher la difficulté derrière un problème de « flexibilité ».

HYPOTHESE DE BASE *(H1)*

Après cette brève discussion, concluons sur notre problème de base, qui est de présenter diverses formulations du concept d'équilibre afin de fournir un point de départ à notre recherche. A la vue des éléments énoncés, on commencera celle- ci en posant l'*hypothèse* que l'*équilibre* est une situation où *rien ne bouge* ou, ce que l'on considérera comme équivalent, qu'il s'agit d'un état de *repos d'un système*.

Cette hypothèse n'est pas particulièrement restrictive car, autant que l'on sache, personne ne la conteste. Les débats sont liés à la possibilité de l'affiner et/ou de l'élargir ainsi qu'à l'étude de ses propriétés.

Soulignons toutefois que cette hypothèse ne permet pas de prendre en compte un éventuel aspect « dynamique ». Pour cause, on remarquera lors du chapitre VII qu'un équilibre ne peut en aucun cas être « dynamique ».

L'hypothèse (H1) étant désormais mentionnée, dévoilons à présent les objectifs que l'on souhaite poursuivre.

Objectifs de la thèse

Cette thèse a une triple ambition : dégager les fondements théoriques de la notion d'équilibre, démontrer que le modèle d'équilibre général décrit les principes de base d'une économie planifiée et réhabiliter la planification. Approfondissons un peu plus chacun de ces objectifs.

Les fondements théoriques

D'après le dictionnaire, l'étude du fondement d'une notion correspond à l'examen de ses éléments essentiels. C'est donc cette tâche que l'on se propose d'entreprendre. Toutefois selon le cadre théorique qui emploie la notion d'équilibre, la signification que ce concept recouvre peut varier. On ne peut donc pas se contenter d'énoncer quelques caractéristiques générales. Une étude modèle par modèle doit être entreprise. La situation est même plus complexe que cela, car à l'intérieur d'un même cadre théorique la notion d'équilibre a des implications différentes selon la nature des techniques mathématiques mobilisées. Bien que fastidieux, un examen attentif de la notion d'équilibre ne peut pas faire l'économie d'une étude au cas par cas.

L’équilibre général comme modèle de planification

L’analyse actuelle des économies de marchés se fonde sur un double paradoxe. Le premier est, qu’en dépit du degré élevé de centralisation qu’il implique (se référer au chapitre II), le modèle d’équilibre général est identifié aux économies de marchés. Etrangement ce rapprochement n’est pas que le fait de non- initiés, mais il est également opéré par les plus grands spécialistes :

« L’objectif de la théorie de l’équilibre général est de décrire et d’expliquer les phénomènes économiques du marché dont les plus remarquables se rapportent aux prix. » (Balasko (1988), p. 5).

Pourtant l’aspect centralisé (ou plus exactement semi- centralisé) du modèle d’équilibre général est aux antipodes de l’idée, même intuitive, que l’on se fait des économies de marchés.

Le second paradoxe est que malgré des résultats décevants en matière d’unicité et de stabilité (voir chapitre VI), l’équilibre général – ainsi que les économies de marchés auxquelles il s’identifie – continue à être présenté comme un modèle idéal de coordination de l’activité économique. Là encore, cette conviction se décèle parmi des économistes réputés :

« Dans le monde Walrassien, un équilibre est caractérisé par la compatibilité des plans des divers agents économiques, […]. Il est bien connu que ce sont les prix qui assurent la compatibilité des plans élaborés. » (Younes (1970), p. 1)

Comment expliquer ces paradoxes ? Nous pensons, qu’ils ont vocation à masquer le véritable caractère du modèle d’équilibre général. A savoir que celui- ci constitue un cadre théorique servant de base aux économies planifiées. Afin d’étayer ce point de vue, on va recenser les principales difficultés auxquelles le modèle d’équilibre général est confronté. La finalité étant d’observer que ces difficultés s’atténuent considérablement lorsqu’on conçoit explicitement le modèle d’équilibre général comme un système de planification.

La réhabilitation de la planification

L’idée de réhabiliter la planification est peut-être plus intrigante. Toutefois, nous avons la conviction que les techniques de planification peuvent être réadaptées avec succès lorsqu’elles mettent la notion d’équilibre au centre de leurs préoccupations et qu’elles s’appuient sur la théorie néo- classique.

Soulignons d'emblée que toutes les techniques de planification n'ont pas pour but de rechercher un équilibre général. Ainsi les méthodes des balances matières et des chaînons conducteurs se proposent juste d'atteindre des objectifs privilégiés (voir Andreff (1993)). On ne les traitera pas dans cette thèse.

Pour autant, la volonté de planifier l'économie sur la base de la notion d'équilibre n'est pas particulièrement nouvelle. Des méthodes élaborées de planification ont, par le passé, cherché à déterminer un équilibre ou du moins à l'approximer par l'intermédiaire d'algorithmes appropriés (confère la dernière section du chapitre VIII). Mais aucune de ces méthodes sophistiquées n'a permis d'éviter le déclin de la planification. Comment l'expliquer ?

Bien que l'on admire l'effort porté à leurs améliorations, nous jugeons que ces méthodes ont insuffisamment pris en compte les caractéristiques propres à la notion d'équilibre. Ce faisant, des problèmes d'unicité, de stabilité, de dynamique…ont été sous-estimés. Dès lors, les techniques de planification fondées sur la notion d'équilibre n'ont pas apporté les résultats escomptés. Notre but, après avoir mené une analyse approfondie des difficultés qu'engendre la notion d'équilibre, est d'y remédier en utilisant les outils mathématiques récents en matière de « contrôle optimal » et de « partitionnement du domaine ».

Ces observations étant effectuées, on va maintenant préciser le cadre dans lequel s'inscrit notre analyse.

Le cadre d'analyse

Celui-ci s'articule autour de trois éléments : les théorèmes du point fixe, la convexité des ensembles et l'interdépendance des marchés.

1. Les théorèmes du point fixe

Notre exposé prend pour point de départ la première formulation du théorème du point fixe (Brouwer (1910)). Celle- ci constitue les débuts d'une modélisation rigoureuse de la notion d'équilibre. Son rôle est primordial puisque la totalité des modèles que l'on va étudier recourt directement ou indirectement à une version du théorème du point fixe.

2. Les ensembles convexes

Dans presque tous les modèles, les ensembles de consommation et de production sont supposés convexes. Cela tient aux caractéristiques même de ces ensembles dont les propriétés sont particulièrement adaptées pour garantir l'existence d'un équilibre. En particulier, la convexité d'un ensemble implique :

- Sa connexité. Cela signifie intuitivement que l'ensemble est d'un seul morceau.
- Sa continuité. Par conséquent, il existe une suite possible de consommation et de production.

En ce qui nous concerne, on postulera toujours cette hypothèse de convexité dont les propriétés mentionnées nous serviront en permanence.

3. Une approche générale

Aucune discussion sur la notion d'équilibre peut, nous semble t-il, négliger l'interdépendance des marchés. En outre, lorsqu'on considère une approche de type d'équilibre général de nouvelles questions surgissent par rapport à celle d'équilibre partiel : Comment se forment les prix ? D'où viennent les revenus des agents ?...

Bien qu'il y ait là des difficultés supplémentaires, auxquelles il faudra faire face, un examen sérieux de la notion d'équilibre ne saurait les éclipser en se cachant derrière l'hypothèse « ceteris paribus ».

Les notations

Au cours des pages qui vont suivre, nous allons par moment être contraints d'adopter un style assez formalisé. On considérera alors l'existence de « l » biens, « n » producteurs et « m » consommateurs respectivement représentées par les indices h = 1,…, l ainsi que j = 1,…, n et i = 1,…, m. A chaque bien est associé, sauf mention contraire, un prix unique. L'ensemble de ces prix formant un vecteur de $\mathbb{R}^{l}_{++}$ tel que $P(t) = (p_1(t),...,p_h(t),...,p_l(t))$. Enfin, chaque consommateur détient un panier de biens qui forme sa dotation. Ainsi celle du consommateur i est désigné par : $Q_i = (q_1,...,q_h,...,q_l)$. La notation $\bar{Q}_i$ correspondant aux dotations initiales.

Ces remarques préliminaires étant achevées, on est en mesure d'énoncer le plan. Celui- ci découle logiquement des remarques précédentes.

Plan

Bien que l'on parte du principe que l'équilibre est une situation où « rien ne bouge », il nous semble néanmoins possible d'aller au-delà de cette première présentation. La première partie se propose donc d'affiner le sens à donner à la notion d'équilibre.

La seconde partie se concentre sur le modèle d'Equilibre Général Concurrentiel qui nous paraît le plus apte à intégrer la notion d'équilibre, du moins tel que nous l'aurons conçu dans la partie précédente.
Plus spécifiquement, on examine – en prenant l'exemple de ce modèle - les difficultés que pose une focalisation sur la notion d'équilibre. On en profite également pour présenter quelques suggestions qui ont été émises afin d'y pallier.

Enfin, dans une dernière partie, on réfléchit sur les applications de la notion d'équilibre. La planification (étatique et intra firme) apparaît alors comme une application naturelle. On se propose donc de développer ces deux thèmes.

PREMIERE PARTIE

Les fondements théoriques de la notion d'équilibre

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, la notion la plus utilisée par les économistes est celle d'équilibre. Pour s'en convaincre il suffit de consulter les principaux manuels et ouvrages spécialisés[1].

Cependant, il n'est pas aisé d'aller au-delà de l'affirmation plus ou moins vague selon laquelle un équilibre est une situation où « rien ne bouge ». L'objectif de cette première partie est toutefois d'essayer de préciser les choses. En d'autres termes, **on cherche à donner une assise théorique plus solide à la notion d'équilibre en étudiant notamment la structure des principaux cadres théoriques qui y ont recours.**

Pour mener à bien cette tâche, on présente la notion d'équilibre comme la congruence d'une série de caractéristiques. Le premier chapitre, intitulé *Les caractéristiques de l'équilibre*, expose cela.

Parmi l'ensemble de caractéristiques, que revêt la notion d'équilibre, l'une d'entre elle retiendra particulièrement notre attention. Il s'agit du cadre institutionnel. Selon la manière dont les auteurs l'envisagent, les notions d'équilibres qui en découlent sont différentes bien que liées les unes aux autres. Par conséquent, les trois autres chapitres qui forment cette partie, examinent les principaux cadres institutionnels que l'on trouve en théorie économique ainsi que les notions d'équilibres qui leur sont associées. Plus spécifiquement :

Le chapitre II est consacré à la Théorie de l'équilibre général et à son corollaire, la notion de point fixe.

Le chapitre III appréhende une économie de marchandage ainsi que le concept d'équilibre qui lui est joint : « l'ensemble d'accords finals ».

Le dernier chapitre, de cette partie, étudie le modèle de von Neumann et plus généralement ceux de croissance équilibrée. Ceci dans le but d'envisager le thème des *Trajectoires et orbites d'équilibres*.

[1] Comme le confirme F.H. Hahn (1976) : « Quant aux théoriciens il est à peine besoin d'illustrer l'usage continuel qu'ils font de la notion d'équilibre. » (p.225)

CHAPITRE I

Les caractéristiques de l'équilibre

La majorité des auteurs qui ont entrepris la tâche ardue de donner un fondement théorique à la notion d'équilibre ont tenté d'en établir des définitions (voir Machlup (1971), Balasko (1988), Kreps (1991))[1]. Hélas, celles- ci s'avèrent soient impropres, soient trop restrictives ou incomplètes. Afin d'éviter tous ces inconvénients, on se propose de spécifier la notion d'équilibre à partir d'un petit nombre de caractéristiques.

Le choix des caractéristiques

Lorsqu'on explore les principaux écrits sur le thème de l'équilibre on s'aperçoit rapidement, en dépit de certaines divergences, que la quasi- totalité des auteurs associe à cette notion une série d'autres concepts. Autant que l'on sache, Malinvaud (1991) fut l'un des premiers économistes à remarquer cela et à dégager des caractéristiques que doit posséder un équilibre pour être reconnu comme tel. Malheureusement, il ne dresse pas une liste explicite de ces caractéristiques dans son ouvrage. Ces dernières sont évoquées de façon éparse. En suivant son analyse, on peut néanmoins recenser trois grandes caractéristiques : l'existence d'un ensemble d'interactions, d'un cadre institutionnel et d'un processus.

SECTION I

L'existence d'un ensemble d'interactions

En fait, l'équilibre est un concept de solution à l'une des grandes interrogations des sciences économiques qu'exprime Debreu (1996) : puisque les décisions des agents « sont indépendantes les unes des autres et dictées par leur intérêt personnel, pourquoi n'en résulte t-il pas un chaos ? ». Comment une société peut- elle fonctionner sur la base d'agents agissant de manière autonome ? L'équilibre est alors la situation à laquelle les décisions individuelles

[1] Selon Malinvaud (1991), la plupart des définitions à l'instar de celle de Machlup, ne « ne font pas référence au processus qui conduirait à la réalisation de l'équilibre et assurerait son maintien. » (p. 152).

des agents aboutissent. Selon l'optique des différents auteurs, ce point d'aboutissement peut être désirable ou non. Quoi qu'il en soit, il n'a un sens que dans la mesure où il représente la combinaison des choix des agents. D'ailleurs, d'après Edmond Malinvaud (1991) :

« Comprendre les phénomènes économiques c'est précisément comprendre le jeu des interdépendances, qu'il importe dès lors de bien formaliser. Les économistes ont forgé pour cela le concept d'équilibre […] » (p. 150).

Si on désire aller au delà de ce constat, il est possible d'envisager les interdépendances en fonction du degré de coopération qui existe entre les individus. Lorsque les agents interagissent, ils peuvent choisir de se regrouper afin de créer des coalitions. Si tel est le cas, on considère que l'approche est *coopérative* en opposition à celle *non coopérative*.

I. I. 1 L'approche coopérative

L'approche coopérative trouve ses racines dans la théorie des jeux. Ce qui amène Arrow, dans son article de 1968, à formuler la remarque suivante :

« En principe, la théorie des jeux fournit une notion d'équilibre très générale qui devrait soit remplacer le principe d'équilibre concurrentiel soit l'inclure comme cas particulier. » (p. 379).

Cette approche stipule que les individus, en fonction d'intérêts communs, forment des coalitions. Ils « sont donc en mesure d'abdiquer leur pouvoir de décision entre les mains d'une autorité collective émanant d'une coalition à laquelle ils appartiennent. » (Moulin (1981)). Dans ce cas, il faut pour être rigoureux spécifier la manière dont elles se forment et dont elles évoluent. Le livre de von Neumann et Morgenstern (1942) a justement pour objectif de répondre à ces interrogations. Dans la mesure où *Theory of games and economic behavior* est l'ouvrage pionnier dans ce domaine, nous allons formuler quelques remarques en s'appuyant essentiellement sur cette publication.

Formation et évolution des coalitions

Pour von Neumann et Morgenstern l'existence de coalitions est une donnée initiale. Ils ne précisent pas les bases sur lesquelles elles se forment originellement. Par contre, leurs évolutions reposent sur un critère bien défini : tant qu'un individu (au moins) trouve un intérêt à quitter une coalition, celles- ci sont amenées à se modifier.

Solution et équilibre

L'idée de *Theory of games and economic behavior* est d'établir un concept de solution, permettant de rendre compte de la stabilité des coalitions, tel qu' « […] il y aura un état d'équilibre absolu ou ce qui revient à chacun sera déterminé avec précision » (p. 34). Une fois de plus, la notion d'équilibre est mobilisée pour appréhender les interactions. Malheureusement, il semble d'emblée « qu'une telle solution, qui aurait toutes les propriétés nécessaires, n'existe pas en général […] » (*ibid*, p. 34).

On est ici confronté au problème majeur et récurrent de *l'existence* de l'équilibre. La résolution d'un tel problème est loin d'aller de soi. Elle nécessite notamment de mettre en place un cadre institutionnel spécifique et de recourir à une série d'abstractions de telle sorte « […] qu'on ne peut quasiment plus parler d'une bonne approximation de la réalité. » (Wald (1951), p. 396).

Le concept d'imputation

Von Neumann et Morgenstern ont donc été amenés à suivre une autre voie et renoncer ce faisant, à la notion d'équilibre. Ils ont ainsi introduit le concept « d'imputation ». Ce dernier désigne comme stable les coalitions qui permettent à chacun de leurs membres de gagner au moins autant que s'ils n'en n'étaient pas membres et dont l'allocation des ressources est Pareto optimal.

La notion de cœur

Généralement, l'ensemble des imputations est très vaste. C'est pourquoi, Shapley et Gillies (1953) ont proposé un concept de solution plus restrictif : le « cœur ». En fait la notion de cœur présente l'avantage de réconcilier l'approche coopérative avec une analyse en terme d'équilibre. On peut même avancer qu'elle a contribué à un renouveau théorique de la notion d'équilibre.

L'évolution de la notion de cœur

L'idée de cœur est déjà ancienne puisqu'elle se retrouve chez Edgeworth (1881) bien qu'il n'utilise pas exactement ce vocabulaire et parle plutôt de « courbe des contrats » (voir Shubik (1959)). Néanmoins, il faut attendre 1963 et la publication par Debreu et Scarf de l'article « A limit theorem on the core of an economy » pour voir une formalisation rigoureuse de cette notion. Dans ce document, les auteurs définissent le cœur à partir d'un « ensemble de consommateurs bloquant une allocation ». Plus formellement, une coalition S de consommateurs bloque une allocation si les conditions suivantes sont vérifiées pour tous les membres de la coalition :

$$\text{(a)} \qquad \sum_{i \in S} (Q'_i - \bar{Q}_i) = 0$$

$$\text{(b)} \qquad Q'_i \succsim Q_i \qquad \text{avec une inégalité stricte pour au moins un } i$$

Dans ces conditions, « The core of the economy is defined as the collection of all allocations of the total supply which cannot be blocked by any set S . » (p. 239). Bien entendu, « One immediate consequence of this definition is that an allocation in the core is Pareto optimal.» (p. 239).

I. I. 2 L'approche non coopérative

A l'opposé de la coopération se trouve, bien entendu, l'approche non coopérative. Celle- ci est également issue de la théorie des jeux. Son intérêt, pour notre propos, réside dans son concept de solution privilégié : « l'équilibre de Nash ». Ce dernier a été d'une importance capitale puisqu'il a inspiré la plupart des démonstrations d'existence d'un équilibre général concurrentiel des années cinquante. Ce qui fait dire à Hildenbrand (1974) que la notion de cœur relève d'un concept d'équilibre coopératif tandis que l'équilibre général concurrentiel repose sur un point de vue non coopératif :

« The central problem of the theory […] is the relationship between two fundamental concepts of equilibrium for an economy: the core, which is a cooperative equilibrium concept, and Walras equilibrium, which is non cooperative concept. » (p. vii).

Fondement de l'approche non coopérative

On part ici du principe que « l'unité d'analyse est un individu […] » et non le groupe (p. 11, Kreps (1990)). Ceci n'excluant pas que les agents se regroupent en coalitions, mais

« c’est parce que de tels individus estiment alors qu’il s’agit du comportement le plus approprié du point de vue de leur intérêt […] » (*ibid.*).

En fait, l’approche non coopérative se trouve à l’origine même de la théorie des jeux puisqu’elle était auparavant utilisée dans les premiers jeux : ceux à sommes nulles des années vingt. Son retour au premier plan traduit l’importance croissante de l’analyse des comportements individuels au détriment d’une démarche globale. Dans cette perspective, on peut donc également considérer que la notion de cœur procède d’un concept d’équilibre s’insérant dans une démarche holiste alors que l’équilibre général concurrentiel s’inscrit dans une perspective d’individualisme méthodologique.

« L’équilibre de Nash »

Comme on l’a dit, « l’équilibre de Nash » est le principal concept de solution de la théorie des jeux non coopératifs. Bien que l’idée qu’il véhicule soit présente depuis longtemps dans l’esprit de nombreux économistes[1], il fut exposé pour la première fois en des termes rigoureux par John Nash (1950) dans l’article intitulé « Equilibrium Points in *N* Person Games ». L’idée que recouvre « l’équilibre de Nash » est élémentaire puisqu’elle correspond au fait que chaque agent fait « le meilleur choix possible pour lui compte tenu de ce qu’il anticipe être le choix des autres. ».

Equilibre et croyances

Pourtant, Von Neumann ne fut guère enthousiasmé par cette publication. Puisqu’il connaissait parfaitement les différentes versions du théorème du point fixe - et qu’il proposait en 1928 une solution au problème du meilleur choix compte tenu de celui des autres - on peut se demander pourquoi il n’a pas établi le concept d’équilibre de Nash avant ce dernier ? En suivant le raisonnement de Schotter (1992), on peut conjecturer que Von Neumann était très réfractaire à la façon dont interviennent les croyances dans le cadre d’un équilibre de Nash :

« En fait, il est plutôt remarquable que, dans *Theory of Games* […], le concept d’équilibre de Nash ne soit pas défini, ni l’existence démontrée, puisqu’au moins Morgenstern connaissait bien les travaux de Cournot. Je suppute que la principale raison de cela est qu’aussi bien von Neumann que Morgenstern cherchaient un moyen d’éviter le raisonnement circulaire "je pense qu’il pense que je pense", typique des situations stratégiquement

[1] On pense notamment aux écrits de Cournot.

interdépendantes. Tous deux voulaient trouver une façon de jouer qui soit indépendante de ce que chacun pense que ses adversaires feront. » (p. 106)

Or, on l'a vu plus haut, la notion d'équilibre n'est pas indépendante d'hypothèses sur les conjectures, et se caractérise par des ensembles d'interactions qui invitent à des raisonnements circulaires.

I. I. 3 L'agent représentatif

L'objet de la notion d'équilibre est donc d'étudier les interactions entre des agents ou des groupes d'agents. Ces dernières décennies ont paradoxalement vu émerger le concept « d'agent représentatif », lequel est fréquemment associé à la notion d'équilibre. Avant d'aller plus loin, il s'avère indispensable d'éclaircir ce point.

L'agent représentatif dans les écrits des économistes

Depuis la fin des années soixante dix, l'essor du concept d'agent représentatif est indéniable. A tel point que le recours à ce dernier est devenu habituel. Les propos de Kyland et Prescott (1982) sont révélateurs de cet état de fait :

« Comme dans la théorie usuelle de la croissance, on suppose l'existence d'un ménage représentatif […] » (p. 1345)

Toutefois, le concept d'agent représentatif se présente sous diverses formes selon l'auteur qui le mobilise. A titre d'illustration, nous allons voir la manière dont il intervient dans quelques publications.

Une première procédure pour insérer le concept d'agent représentatif est d'évoquer l'existence d'un «grand nombre d'agents » tous « identiques ». Ainsi, Romer (1996) utilise la présentation suivante : « On suppose que l'économie consiste en un grand nombre d'entreprises et de ménages identiques. » (p. 44) ; celle de De Long et Plosser (1983) est semblable : « Le modèle que nous considérons comporte un individu unique (ou un nombre constant d'individus identiques). » (p. 43).

Une seconde manière d'opérer, à l'instar de Solow (1956), est de parler de « communauté ». On laisse alors croire à une possible interaction entre les individus qui la compose. Néanmoins, tous les membres de la communauté ont pour particularité d'avoir la même fonction de production.

Agent représentatif et équilibre

De nombreux auteurs qui convoquent le concept d'agent représentatif y associent la notion d'équilibre. Tel est le cas, par exemple, de Kyland et Prescott qui appellent « équilibre » la « maximisation du bien- être du ménage représentatif compte tenu des contraintes d'ordre technique et informationnel » (p. 1357).

Une telle association est surprenante. En effet, l'équilibre implique des échanges entre les ménages puisqu'il rend compte des interactions. Un individu isolé, tel Robinson, est dans l'impossibilité d'interagir avec qui que ce soit ! Le fait qu'il puisse y avoir de nombreux individus identiques ne règle rien car leurs taux marginaux de substitutions sont égaux (même dotations initiales et préférences). Or, l'analyse économique enseigne que l'échange repose sur des différences de taux marginaux de substitutions. Sans quoi, il n'existe pas d'échange et aucune interaction possible.

Le problème de l'agrégation

En définitif, le recours à l'agent représentatif permet de contourner un problème fondamental : celui de l'agrégation.

Jusqu'à maintenant on s'est cantonné à l'examen des comportements individuels et à leurs interactions. Cependant, comment passer de cette étude à la déduction de « lois » valables pour l'économie dans son ensemble ? C'est là une difficulté qu'on ne peut laisser de coté dès lors qu'on s'intéresse, par exemple, à la question de la croissance.

En fait, il est plus juste de parler des problèmes d'agrégations selon qu'ils concernent les biens, les fonctions de productions ou encore le traitement des modèles macroéconomiques.

L'agrégation des biens

Conformément à ce que l'on a énoncé dans l'introduction, les paniers de biens sont représentés par des vecteurs Q. La gêne réside dans la possibilité de les comparer. Pour ce faire, il faut passer par l'intermédiaire du « système de prix » et par conséquent raisonner en valeur. Cette valeur étant un nombre on pourrait à priori s'en servir en tant qu'agrégat. Toutefois, le système de prix varie lorsque l'on passe d'un équilibre à un autre. En l'absence d'unicité de l'équilibre, il devient impossible de déterminer si une variation de la croissance est due principalement à une variation des prix ou des quantités. C'est pourquoi de nombreux économistes utilisent un bien unique et évacuent par ce biais le problème de l'agrégation.

Pour notre part, ce commentaire nous permet surtout de mettre l'accent sur un second problème fondamental auquel on devra régulièrement faire face : celui de la multiplicité des équilibres.

L'agrégation des fonctions

Une autre forme problématique d'agrégation est celle des fonctions de productions. Nous allons en dire quelques mots en se basant sur l'article de Fisher (1969).

La question est de savoir si l'addition de la production de toutes les entreprises d'une économie est équivalente à la production agrégée. En d'autres termes, si l'on note F la fonction de production agrégée et $\sum_{j=1}^{n} f_j(\cdot)$ la production totale, a t- on $F(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\cdot)$?

Si on se réfère aux observations de Fisher, la réponse est négative dans le cas général. En effet, à moins que les f_j soient toutes identiques et linéaires il est impossible d'obtenir une fonction de production agrégée. En réalité, il est tout de même possible d'y parvenir en dehors de ce cas particulier, en imposant une contrainte supplémentaire à savoir une répartition optimale des inputs entre les entreprises. On a alors $F(\cdot) = \max f_j(\cdot)$.

Evidemment l'interrogation est de savoir qui procède à cette répartition optimale ? Une réponse plausible est de faire appel à un planificateur. Ce dernier cherchera à amener l'économie dans une situation d'équilibre qui correspond également à une affectation optimale des facteurs de production. On voit ici nettement que la théorie néo- classique contient les germes d'une théorie de la planification.

Le passage à la macroéconomie

Même en supposant que l'on obtienne une fonction de production agrégée, de la forme $Q = F(\cdot)$, celle- ci ne suffit pas à décrire l'économie dans son ensemble. Il manque une prise en compte de la dimension temporelle. Or, le thème de l'évolution dans le temps est un sujet majeur qui ne cessera pas de nous préoccuper.

Une façon de procéder pour intégrer le temps est de considérer des états stationnaires. Ainsi la production est identique de périodes en périodes. Un tel procédé nécessite de mobiliser la série suivante d'hypothèses :

- la technologie demeure inchangée afin que la fonction F ne se déforme pas
- les goûts des consommateurs ne se modifient pas afin qu'ils gardent la même propension à épargner et consommer.

Conclusion

Dès lors qu'on s'intéresse sérieusement à la notion d'équilibre d'un point de vue macroéconomique, il est impossible de contourner la question de l'agrégation. Il est alors inutile de cacher la difficulté derrière l'idée d'un agent unique dont le comportement représenterait de façon satisfaisante l'évolution des agrégats économiques. Ce constat est largement partagé par Malinvaud (1991) :

« La pratique la plus courante consiste, nous l'avons vu, à transposer la loi de comportement obtenue pour une unité dite représentative en une loi de comportement analogue censée s'appliquer aux agrégats des unités de même nature. Cette pratique a pour effet non seulement de poser un modèle agrégé, mais aussi de lui donner une forme particulière qui reflète directement la forme déduite de l'analyse de l'unité représentative. Justifier l'existence d'un modèle agrégé, selon l'optique exposée précédemment, ne suffit donc pas à justifier la pratique macroéconomique. Il faudrait aussi montrer la similitude des relations du modèle agrégé avec celles du modèle détaillé. » (p. 204).

Le peu de fondement théorique qui sous tend le concept d'agent représentatif, lui fait même affirmer que l'emploi de celui- ci relève d'un effet de mode :

« Bien que les preuves empiriques me paraissent aujourd'hui manquer, les idées majoritaires chez les économistes ont évolué de l'emploi de modèles de plus en plus détaillés au recours fréquent à des spécifications très caricaturales par leur simplisme. Ce mouvement ne relève sans doute qu'un effet de mode. » (p. 221)

SECTION II

La spécification d'un cadre institutionnel

L'idée d'équilibre est née pour appréhender les problèmes de coordination des décisions et actions des membres d'une société. Or, le fonctionnement de toute collectivité est régi par des institutions qui déterminent les règles que doivent suivre leurs membres. De ce fait, les propriétés de l'équilibre varient selon le cadre institutionnel retenu et les règles édictées.

La définition du cadre institutionnel [1]

Si on se réfère au petit Larousse, les « institutions » s'appréhendent comme « l'ensemble des organismes et des règles établis en vue de la satisfaction d'intérêts collectifs […] ». D'un point de vue économique, étudier l'environnement institutionnel revient à s'interroger sur la forme d'organisation des marchés ainsi que sur les diverses règles qui s'imposent aux agents.

I. II. 1 Le degré de centralisation

Lorsqu'on s'intéresse au cadre institutionnel, la première question qui se pose est celle du degré de centralisation de l'économie. Pierre Picard (1979) signifie que « Le concept de décentralisation en économie renvoie à deux significations distinctes et complémentaires, selon que la décentralisation concerne la détention de l'information ou le pouvoir de décision. » (p. 3). On peut regretter que cette présentation ignore la manière dont s'effectue les échanges. C'est pourquoi, on préfère distinguer trois types de situations :

- La *centralisation totale*, qui implique simultanément une centralisation de l'information, des échanges et une absence d'autonomie de prise des décisions.

[1] Etrangement, la plupart des microéconomistes évitent de définir explicitement la structure institutionnelle dans laquelle s'insèrent leurs analyses. Ainsi, il n'y a rien sur le sujet dans le célèbre *Analyse Microéconomique* de Varian. Le constat est identique pour *Les fondements de l'analyse économique* de Samuelson (1965), *The Theory of General Equilibrium* de Mas Collel (1985), *Elements of General Equilibrium Analysis de Kirman (1998)* ou encore pour le *Classical General Equilibrium Theory* de Mac Kenzie (2002). Enfin, il n'y a rien non plus sur le sujet dans le très fameux *New Palgrave*.

- La *centralisation partielle ou semi- centralisation*, qui porte soit sur l'information, soit sur les échanges et qui généralement tolère l'autonomie des décisions.
- La *décentralisation* dont les caractéristiques sont évidentes.

La décentralisation

Bien que les discours ambiants insistent sur l'aspect décentralisé des économies, on ne trouve pas de trace au niveau théorique de modèle qui s'inscrive dans le cadre d'une organisation totalement décentralisée. Plusieurs raisons sont susceptibles d'être avancées pour expliquer cette situation.

Tout d'abord, sur le plan technique, l'étude d'une économie décentralisée est d'une redoutable complexité. Celle- ci tient en particulier à la multiplicité des sources d'informations (prix individualisés, etc.…) puisque aucune autorité centrale ne livre une information « officielle ». Face à l'abondance d'informations, chaque agent va adapter son comportement selon les éléments dont il dispose. Il en résulte un nombre incalculable de croyances et d'anticipations différentes. Comment alors prendre en compte ce phénomène ? Ainsi, les auteurs qui prétendaient initialement examiner une économie décentralisée ont dû, malgré eux, introduire une dose non négligeable de centralisation. C'est le cas de Benassy (1984) qui estimait au début de son ouvrage :

« Nous allons montrer dans cette section comment on peut formaliser la détermination des prix par des agents intérieurs au système. Or on observe en général dans la réalité deux modes de fixation décentralisée des prix : soit les agents d'un coté du marché (le plus souvent les offreurs) annoncent les prix, et les transactions ont lieu aux prix annoncés, soit les prix sont l'objet d'un marchandage entre offreurs et demandeurs. » (p. 21)

Avant d'être contraint, dans la foulée, d'ajouter : « La formalisation du processus de marchandage nous entraînerait presque immédiatement vers des problèmes de théorie des jeux non résolus, et nous nous limiterons donc à formaliser le premier mode de fixation des prix. […] . Nous pouvons remarquer que si sur un marché particulier on avait plusieurs agents qui fixent les prix, on rencontrerait un problème de définition de notre marché : en effet il n'y a aucune raison pour que des agents indépendants annoncent le même prix, même si les biens qu'ils vendent sont physiquement les mêmes. […]. Nous supposerons donc dans ce qui suit que les biens sont différenciés non seulement par leurs caractéristiques physiques, mais éventuellement aussi par l'agent qui en fixe le prix, de sorte que le prix d'un bien sera fixé par un seul agent. » (p. 21)

D'autre part, si le système n'est pas centralisé, les échanges ont lieu au hasard des rencontres. Les ménages les plus chanceux arrivent à satisfaire leurs besoins tandis que les plus malchanceux subissent une forme de rationnement. Il se pose ici un problème d'équité. On peut certes le contourner en envisageant que les agents se concertent entre eux pour organiser les échanges. Mais cela nécessite de préciser si l'organisation est spontanée ? Ou si un agent prend l'initiative de l'organisation ? Dans cette dernière configuration bénéficie t- il d'une rémunération ?... Cette abondance de questions fait qu'il est bien plus commode de laisser une autorité centrale organiser les transactions.

Etant donné les difficultés qui se présentent pour envisager une totale décentralisation, la quasi-totalité des auteurs optent pour la description d'une économie semi- centralisée.

La semi- centralisation

La centralisation partielle exige soit la décentralisation de l'information, soit celle des échanges. On va analyser la première configuration avant de s'intéresser à la seconde. Dans les deux cas, on sera amené à parler du phénomène de *path dependance* (ou *hystérésis*). Ce phénomène traduisant le fait que le processus influence la forme de l'équilibre.

Notons que l'on suppose, dans tout ce qui suit, que les agents choisissent librement le type et la quantité de biens qu'ils désirent consommer. De surcroît, pour un motif de clarté de l'exposé, on retient l'hypothèse néo- classique selon laquelle les prix sont l'unique source d'information.

On vient de le voir à l'instant, la décentralisation de l'information pose le problème de son origine. Pour y répondre, l'extrême majorité des auteurs est obligée de revenir à un système plus centralisé. De ce point de vue, Fisher (1983) est une exception puisqu'il refuse de spécifier qu'un agent unique fixe le prix de chaque bien. Dans ces conditions, il est amené à considérer des prix individualisés. Chaque producteur est libre de fixer le prix qui lui plait. Confrontés à cela, les agents effectuent des arbitrages et révisent en permanence leurs plans. Les conjectures et les anticipations des individus prennent alors toutes leur importance. A tel point que les équilibres du système sont profondément liés à la façon dont les agents reconsidèrent leurs plans. Autrement dit, on se trouve confronté à un phénomène d'hystérésis qui résulte de l'interaction entre processus et équilibre. Or, les conjectures et les anticipations, à la base du processus, se fondent sur les croyances des individus qui sont des éléments particulièrement délicats à formaliser. Il en résulte qu'en présence d'hystérésis la nature de l'équilibre est souvent indéterminée.

Pour éviter cet inconvénient, une autre manière d'introduire une dose de décentralisation est de considérer que le planificateur (ou une « autorité centrale ») reçoit une information imparfaite : « Nous avons souligné que l'importance d'une décentralisation de la planification provenait d'une information imparfaite […] » (Picard (1979), p. 38). Ceci étant, si on en reste là, on retrouve la procédure classique de tâtonnement où l'information manquante est acquise par l'annonce, de la part des agents, des quantités qu'ils désirent échanger. Il faut, en plus, supprimer la myopie des conjectures afin de permettre aux ménages d'anticiper le comportement du planificateur et par ce biais de manipuler l'information. Les travaux de Arrow et Hurwicz (1960) montrent que lorsque les agents ont la faculté d'anticiper, par l'intermédiaire d'effets d'apprentissages, la règle de variation de prix, ils ont toujours intérêt à annoncer une demande inférieure à celle effective qui maximise l'utilité. Il en est de même pour l'offre. Cette manipulation perpétuelle de l'information empêche d'atteindre toute forme d'équilibre[1].

Lorsque ce sont les échanges qui sont décentralisés, les ménages sont libres de procéder à des transactions à tout moment. Evidemment, lorsqu'ils décident d'échanger rien ne garantit que les prix sont d'équilibre. Cela apparaît d'ailleurs peu probable. Dans ce cas, le pouvoir d'achat des agents est fluctuant car il dépend du vecteur- prix en vigueur au moment d'effectuer les transactions. Il en va de même pour les équilibres qui sont étroitement liés aux offres et demandes des ménages.

Soulignons qu'il y a également une seconde forme d'hystérésis qui découle du choix du vecteur- prix initial.

La centralisation partielle, que ce soit de l'information ou des échanges, confronte le théoricien à un phénomène de path dépendance. Du reste, ce phénomène est encore plus visible dans le cadre de la décentralisation des échanges car il revêt deux aspects.

---

[1] Même si le planificateur propose un vecteur prix d'équilibre, les agents n'ont aucun motif d'arrêter d'envoyer des informations biaisées. Bien entendu, il est toujours possible de complexifier le modèle en ajoutant des mécanismes qui incitent les agents à révéler leurs offres et demandes effectives. Ce faisant, on est contraint à créer de nouvelles institutions qui éloignent du cadre d'une procédure de décentralisation.

La centralisation totale

Les économies décentralisées ou semi- centralisées se caractérisent par la diversité des conjectures qu'émettent les agents. Il en résulte une infinité d'équilibres. Dans ces conditions, on peut se demander s'il n'est pas possible d'instaurer des institutions pouvant contraindre les anticipations et les choix des individus. Bien entendu, c'est là une préoccupation d'un planificateur omniscient. Quoi qu'il en soit, il n'existe pas à notre connaissance de modèle théorique qui propose simultanément une centralisation de l'information et des échanges tout en contraignant le choix des agents. On voit aisément la récupération idéologique qui pourrait être faite d'un tel modèle. C'est pourquoi, les théoriciens se contentent de mettre en place des institutions qui influencent l'attitude des ménages. L'objectif étant que ces derniers adoptent les conjectures qui arrangent le modélisateur.

D'une part, le principe d'une information émise par un centre permet de contrôler les conjectures des individus (nous parlerons plus tard de conjectures institutionnalisées), cause essentielle des fluctuations économiques. D'autre part, la centralisation des échanges apparaît comme une condition nécessaire (mais non suffisante !) pour éviter les phénomènes de *Path Dependance*.

I. II. 2 <u>Les règles</u>

Intuitivement, l'idée d'un processus renvoie à celle d'une série de corrections et d'adaptations dont l'ampleur dépend des anticipations des agents. Lesquelles dérivent à leur tour des croyances. Or, on a déjà vu l'importance que peut avoir un processus sur la forme d'un équilibre. L'avantage de la centralisation, ou même de la semi- centralisation, est de modeler les anticipations des individus et d'influencer de cette manière le processus. Cette influence se faisant via l'édiction de règles que doivent suivre les ménages. Ce qui suppose de distinguer les règles qui permettent d'atteindre un équilibre. Mais avant de traiter ce point, nous devons au préalable préciser la relation qui existe entre « croyances, conjectures et anticipations ».

Croyances, conjectures et anticipations

Si l'on prend un dictionnaire, une « croyance » est synonyme d'une « conviction » ou d'une « opinion ». Adapté à notre domaine d'étude, les croyances des agents représentent l'idée qu'ils se font du fonctionnement du système économique. A partir de cette représentation, les ménages conçoivent diverses possibilités d'évolution de l'économie. Autrement dit, ils forment des conjectures. En s'appuyant sur ces dernières, ils adoptent par anticipation, c'est-à-dire par avance, l'attitude susceptible de convenir au mieux à leurs intérêts.

Le rapport avec l'équilibre

L'équilibre économique est une situation ou « rien ne bouge ». Ce qui implique, si le choix des agents n'est pas contraint, qu'à l'équilibre aucun individu n'a envie de modifier ses plans. Or, les plans des ménages proviennent de leurs préférences mais également des anticipations qu'ils ont formulées. En d'autres termes, à l'équilibre, les anticipations des ménages, et donc leurs conjectures, sont vérifiées. Il est important de remarquer que tel n'est pas le cas hors équilibre qui est par essence un contexte qui « bouge ». Ce qui induit une modification des plans des agents et par conséquent des conjectures erronées. Le duopole de Cournot est l'exemple le plus flagrant du fait que les conjectures sont infirmées en dehors de l'équilibre et corroborées à l'équilibre.

Dans le même genre d'idée, il convient de noter que l'équilibre peut procéder de croyances inexactes alors même que les conjectures sont systématiquement vérifiées.

Institutions et insertion de règles

La diversité des « croyances, conjectures et anticipations », fait que les équilibres d'un système peuvent très bien être multiples ou inversement inexistants. La question qui se pose à l'économiste est de savoir quelles conditions imposer aux « croyances, conjectures et anticipations » pour assurer l'existence d'un équilibre tout en ne démultipliant pas leurs nombres. L'idéal étant d'obtenir l'unicité. Toutefois, la marge de manœuvre du théoricien est limitée puisqu'il n'est pas en mesure d'influencer les croyances des individus. L'origine de ces dernières lui échappant et relève d'avantage d'une analyse psychologique. Il reste donc à intervenir au niveau des conjectures et des anticipations. C'est, par exemple, l'optique du modèle d'équilibre général tel que Walras le décrit lorsqu'il édicte la règle aux ménages « d'interdiction de quitter leurs domiciles ». Ce faisant, ils ne peuvent constater les déséquilibres comme le révèle A. Rebeyrol (1999) :

« Mais pour que ces prix criés [par le crieur] puissent servir de base à l'agrégation des comportements d'offre et de demande, encore faut- il que les agents les « prennent », les acceptent comme base de leurs calculs. Or, par définition, le prix ne sera pas stationnaire pendant le processus, si bien que les agents pourraient à bon droit spéculer, c'est à dire non seulement douter du prix crié et anticiper son évolution qui leur paraît la plus probable, mais aussi chercher à en tirer parti en ne révélant pas leurs « vraies » offres et demandes pour influencer son évolution. Etre preneur de prix, c'est accepter de renoncer à ces comportements spéculatifs en déclarant toujours ses offres et demandes effectives. D'une façon générale, le rôle du courtier est de figurer que l'agent resté chez lui, est preneur de n'importe quel prix malgré la conscience du déséquilibre que lui apporterait sans doute sa présence effective au marché. » (p. 73).

Ainsi, les conjectures « myopes » des agents – qui n'estiment n'avoir aucune influence sur l'évolution des prix – sont dues à la règle imposée. Le courtier étant l'institution qui veille à ce qu'elle ne soit pas transgressée.

SECTION III
L'existence d'un processus

Dans les modélisations traditionnelles, comme en histoire de la pensée économique, l'équilibre est conçu comme le point d'aboutissement d'un processus. D'après Malinvaud (1991) :

« Il importe aussi, pour la clarté de la conceptualisation et des applications, qu'on sache comment la compatibilité en question s'établit. Il y a implicitement l'idée d'un mécanisme qui assure la réalisation d'un équilibre. » (p. 135). En d'autres termes, « si l'on parle d'équilibre, c'est bien qu'on accepte l'idée qu'un processus […] devrait exister » (p. 125).

I. III. 1 Représentation d'un processus

Usuellement, le terme « processus » renvoie à un « ensemble de phénomènes conçus comme une chaîne causale progressive » (*dictionnaire Larousse*). La référence à une progression suggère, évidemment, une évolution dans le temps. Autrement dit, lorsqu'on parle de processus la première interrogation qui intervient est celle de la modélisation du temps.

Le choix de la périodicité

Spontanément, lorsqu'on examine l'évolution d'un système dans le temps, on considère des coupes instantanées. C'est donc une représentation de type séquentielle que l'on mobilise de la forme :

$$(1.1) \quad X_{t+1} = f\ (X_t)$$

Où X est un $n-uplet$ donnant les valeurs prises à l'instant t par les différentes variables du modèle.

Néanmoins si la fonction f présente un caractère saccadé, la suite (X_t), vérifiant (1) peut ne pas être définie en chaque instant du temps[1]. C'est pourquoi, bien que cela soit moins intuitif, on préfère une représentation continue du temps qui se modélise à l'aide d'équations différentielles. Avant de s'attarder sur ces dernières, observons que le choix de la périodicité n'est pas qu'une simple question d'ordre mathématique :

« Nous trouvons donc raisonnable d'exiger de notre concept d'équilibre qu'il reflète le caractère séquentiel des économies réelles. Mais je crois que nous exigeons plus que cela : nous souhaitons qu'il soit séquentiel de manière essentielle. J'entends par là qu'il ne devrait pas être possible de reformuler la notion de façon non séquentielle sans procéder à des modifications de contenu. Cela exige à son tour qu'on introduise explicitement et de façon essentielle dans la notion d'équilibre les processus et les coûts d'information ainsi que les anticipations et l'incertitude […] » (Hahn (197 6), p. 16).

Equations différentielles

On appelle équation différentielle (vectorielle) autonome, une équation du type :

$$(1.2) \quad X' = f(X)$$

Où X est, toujours un *n-uplet*, fonction de la variable t. On dit alors qu'une fonction X (t), continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}^n$, est une solution de (1.2) si l'on a :

[1] Un exemple évident est celui de la fonction racine.

$$X'(t) = f(X(t)) \qquad \forall t \in I$$

Dans cette modélisation, la fonction f ne dépend pas explicitement du temps. Elle ne se « déforme » pas. Ce qui, d'un point de vue économique, signifie une absence de transaction hors équilibre et par là même une absence d'incertitude. En effet, les échanges en dehors de l'équilibre engendrent des rationnements. Des stratégies opportunistes, pour essayer de desserrer les contraintes de rationnement, peuvent naître. Les croyances et les anticipations des agents vont alors jouer des rôles fondamentaux. Mathématiquement, la prise en compte de ce genre de situation nécessite d'incorporer explicitement le temps dans f. On est ainsi amené à considérer l'équation différentielle :

$$(1.3) \qquad X' = f(t, X)$$

Dont la solution $X(t)$ doit être telle que :

$$X'(t) = f(t, X(t)) \qquad \forall t \in I$$

Problème de Cauchy

Dans les deux cas, le problème qui nous préoccupe, dit de Cauchy, est le suivant :

Etant donné des conditions initiales X_0 (ou (t_0, X_0)), existe t- il une trajectoire X (t) satisfaisant l'équation (1.2) (ou respectivement (1.3)) telle que $X(0) = X_0$ (et $t_0 \in I$)?

THEOREME (de Cauchy- Lipschitz d'existence et d'unicité d'une solution globale)

Le théorème Cauchy- Lipschitz énonce les conditions sous lesquelles le « problème de Cauchy » admet une solution unique.

Si $f(\cdot)$ est dérivable ainsi qu'à dérivées partielles bornées sur $\mathbb{R}^n$, et si la solution de cette équation telle que $X(0) = X_0$ reste bornée sur tout intervalle borné où elle existe, alors cette solution existe et est unique sur $[t_0 ; \infty[$.

Ce théorème formule des conditions, qui si elles sont vérifiées, assurent l'existence et l'unicité globale. Il est toutefois possible de les alléger en se cantonnant à un aspect local.

THEOREME (de Cauchy- Lipschitz d'existence et d'unicité d'une solution locale)

Si f est localement lipschitzienne sur un ouvert E de $\mathbb{R}^n$ et si X_0 est un point intérieur à E alors l'équation (1.2) admet une solution unique X (t), vérifiant la condition initiale X (0) = X_0 et définie sur un intervalle de la forme $I_{t_0} = [t_0 - k; t_0 + h]\ (k > 0, h > 0)$.

Il est important de remarquer que pour que la fonction f soit lipschitzienne, ces dérivées partielles doivent seulement être continues.

Commentaire

Pour généraliser le théorème au système non autonome, il suffit de considérer que f intervenant dans l'équation (1.3) est localement lipschitzienne en X et que le point (t_0, X_0) est intérieur à un ouvert E de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Remarque sur le caractère lipschitzien de f

La condition principale d'existence est que f soit Lipschitzienne. Ce qui signifie que pour tout point $X_0 \in E$, il existe une boule fermée $\overline{B}(X_0, r_0) \subset E$ ainsi qu'une constante $k \geq 0$ tel que: $\|f(X_1) - f(X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|$

Dans le cas non autonome, f est de Lipschitz si pour tout point $(t_0, X_0) \subset E$ il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0; t_0 + T_0] \times \overline{B}(X_0, r_0)$ ainsi qu'une constante $k \geq 0$ tel que: $\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|$

Cette condition de Lipschtziannnité, et en particulier l'existence d'un « cylindre de sécurité », sera fort utile au moment de définir une zone de stabilité et de choisir la durée du programme de planification. Ceci explique pourquoi, il est plus aisé (et sans doute plus efficient) d'établir des programmes de planification à « court terme ». On reviendra sur ce point au cours du chapitre IX.

Remarque sur les trajectoires constantes et les équilibres stationnaires

Revenons maintenant à l'équation (1.2). Au lieu de prendre un point de départ quelconque du processus (du type $X(0) = X_0$), considérerons une situation initiale telle que $X_e(t) = X_e$. Bien entendu X_e est un vecteur d'équilibre c'est-à-dire un état où « rien ne bouge ».

Il en découle que $X'_e(t) = 0$ (dérivée d'une constante) et que l'on a : $X'_e(t) = F(X_e(t)) = 0$. Par conséquent la fonction $X_e(t) = X_e$ est une solution de l'équation $X' = F(X)$. De plus, il s'agit d'une fonction constante. C'est pourquoi les équilibres associés à l'équation (1.2) sont qualifiés de « stationnaire ». Plus généralement, un équilibre stationnaire X_e est une solution de l'équation $F(X) = 0$.

Les équilibres stationnaires sont surtout prisés en macroéconomie. Ils sont appréhendés comme des « équilibres de long terme » vers lesquels l'économie tend. Toutefois, si X est un vecteur représentant des variables économiques quelconques, des états stationnaires se caractérisent par un taux de croissance nul de ces variables. Il est alors délicat d'en faire des situations de références. En fait, on préfère décrire les équilibres stationnaires comme des cas très particuliers d'équilibres semi- stationnaires.

Après s'être intéressé à l'existence d'une trajectoire, et avoir établi un lien avec l'équilibre économique, la question suivante est celle de la stabilité. L'étude de la stabilité d'un système se décompose habituellement en deux parties : l'examen de la stabilité des équilibres et celui des processus. C'est ce schéma que l'on se propose de suivre. On en profite pour exposer, dans les deux sous- sections suivantes, quelques résultats de base en matière de convergence que nous utiliserons souvent par la suite.

I. III. 2 La stabilité d'un point d'équilibre

Un problème à deux aspects

Les modèles présentent de deux façons le problème de la stabilité :

- la première vision, plus prisée chez les microéconomistes, est de considérer qu'un processus est stable s'il converge vers la solution d'équilibre.
- la seconde vision, souvent le fait des macroéconomistes, est d'estimer qu'un équilibre est stable, si suite à un « choc » exogène aléatoire produisant un déséquilibre, le processus permet de revenir à la situation d'équilibre.

Les problèmes sont bien sûr de même nature. Pourtant, sur le plan formel, il faudra les distinguer. En cas d'échange en déséquilibre par exemple et d'hysteresis, l'équilibre atteint dépendra du point de départ du processus (voir le modèle Hahn- Negishi (1962)). De même, la possibilité de revenir à un équilibre après un choc dépendra de l'ampleur de celui- ci et de l'étendue de la « zone de stabilité ».

Stabilité locale et globale

On dit qu'un point d'équilibre X_e du système (1.2) est localement stable sur une partie de $\mathbb{R}^n$, si :

On peut définir une norme sur $\mathbb{R}^n$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta + \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout X_0, appartenant à cette partie de $\mathbb{R}^n$, vérifiant la relation $\|X_0 - X_e\| < \delta + \delta(\varepsilon)$, la solution de l'équation $X' = f(X)$ se prolonge pour tout t ≥ 0 et satisfait l'inégalité $\|X(t) - X_e\| < \varepsilon$.

Lorsqu' un point d'équilibre s'avère stable sur l'ensemble de son domaine de définition et pas simplement dans une boule centrée en X_e, on parle alors de stabilité globale.

Equilibre stable et équilibre asymptotiquement stable

La notion de stabilité, présentée ci- dessus, n'implique pas à proprement parler celle de convergence. Elle se contente d'affirmer qu'un équilibre est stable si la trajectoire qui lui est associée ne s'en éloigne pas. Mais rien ne garantit que la trajectoire va finalement atteindre son point d'équilibre. Afin de préciser ce fait, on utilise la notion de stabilité asymptotique.

On qualifie un équilibre X_e de globalement asymptotiquement stable s'il est globalement stable et si, quelque soit $X(0) \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \to \infty} f(X(t)) = X_e$

Bien sûr, un processus peut être que localement asymptotiquement stable. Ainsi, on dit qu'un équilibre X_e est localement asymptotiquement stable s'il est localement stable et si, pour tout $X(0) \in E(\subset \mathbb{R}^n)$, $\lim_{t \to \infty} f(X(t)) = X_e$

La notion de zone de stabilité

Lorsqu'un point d'équilibre est localement (asymptotiquement) stable, l'étape suivante est de déterminer le rayon maximale de la boule pour laquelle l'ensemble des conditions initiales X_0 demeurent borner à l'intérieur de la boule (ou convergent vers X_e). Cette boule est appelée *zone ou ensemble de stabilité.*

Par la suite, on reviendra sur ce concept dans la mesure où il permet de mettre en évidence le rôle primordial que doivent avoir les rigidités dans une économie. Ces dernières en limitant l'impact des chocs permettent de maintenir les trajectoires dans la zone de stabilité.

Les valeurs propres réelles de la matrice Jacobienne

Un critère pratique de stabilité locale porte sur les valeurs propres réelles de matrices jacobiennes.

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne, au point d'équilibre X_e, sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.
- S'il existe une valeur propre de la matrice jacobienne, au point d'équilibre X_e, à partie réelle strictement positive alors le point d'équilibre est instable.

Prouver la stabilité d'un point d'équilibre par cette méthode peut vite s'avérer délicat si les valeurs propres sont nulles ou si l'on se trouve dans le cadre d'un système, d'équations différentielles, non linéarisable. Il est alors préférable d'utiliser, si possible, des fonctions de Lyapounov [1].

Les fonctions de Lyapounov : DEFINITION

On appelle fonction de Lyapounov associée à l'équation (1.2), une fonction V de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ qui est :

a) continue

[1] L'étude des valeurs propres de la jacobienne d'une équation différentielle non linéaire impose d'effectuer une opération de « linéarisation ». Dans la mesure où l'on considère le cas non linéaire comme la perturbation d'un système différentiel linéaire, on est cantonné à une analyse locale de la stabilité. Par contre, l'usage des fonctions de Lyapounov et notamment du « principe de Lassale » permet d'obtenir des résultats de stabilité globaux plus satisfaisants. Un exemple classique est l'équation : $P''(t) + P(t) + 2P^3(t) = -P'(t)$. La linéarisation et l'examen des valeurs propres de la jacobienne d'un tel système nous permettent de conclure à la stabilité asymptotique locale. Parallèlement, si on trouve et examine la fonction de Lyapounov associée (celle- ci étant propre), on conclut à la stabilité asymptotique globale.

b) constante dans le temps si et seulement si $X(t)$ est un équilibre.

c) positive (V (X) > 0) et décroissante dans le temps (c'est-à-dire $\langle \nabla V(X), f(X) \rangle \leq 0$) sinon.

Les fonctions modifiées de Lyapounov

Le point c) est assez restrictif. C'est pourquoi ce dernier a fait l'objet d'un léger aménagement. Il est alors possible de substituer par la condition d), qui implique que la fonction V soit :

d) positive (V (X) > 0) et tel que V (f (X (t)) converge lorsque t tend vers l'infini, et cela pour tout point $X(0) \in E$

Remarque

Bien qu'aménagé le point d) est le plus délicat à démontrer. C'est pourquoi, on procède généralement en deux étapes. La première consistant à établir que $\langle \nabla V(X), f(X) \rangle \leq 0$ puis à prouver que V est minorée. Inversement, il est possible d'établir que $\langle \nabla V(X), f(X) \rangle \geq 0$ et que V est majorée.

On énonce maintenant trois théorèmes qui garantissent la stabilité d'un point d'équilibre. Tous, bien sûr, supposent que les conditions Cauchy- Lipschtiz soient vérifiées.

THEORME 1 (de Lyapounov)

Si X_e est un point d'équilibre de (1.2) contenu dans E, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et s'il existe une fonction de Lyapounov en ce point, alors X_e est stable sur E.

THEOREME 2 (de Lyapounov)

Si X_e est un point d'équilibre de (1.2) contenue dans E, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et s'il existe une fonction de Lyapounov stricte en ce point, alors X_e est asymptotiquement stable sur E.

PRINCIPE DE LASALLE

Si la fonction $V : E \to \mathbb{R}$:

a) est de lyapounov en X_e

b) est propre $\Leftrightarrow \forall L \in V(E), V^{-1}([0\,;L])$ est un compact dans E

c) si (X (t), t ≥ 0) est une solution de (2) tel que $\langle \nabla V(X), f(X) \rangle = 0 \ \forall t$

Alors X (t) = $X_e \forall t \geq 0$ et X_e est asymptotiquement stable.

La difficulté inhérente à ce type de méthode est de déterminer la fonction de Lyapounov. Dans la plupart des cas que l'on va étudier, elle apparaît cependant naturellement. A l'instar de la physique, un argument de type économique peut permettre de la trouver.

I. III. 3 La stabilité d'un processus

Nous allons maintenant changer de méthode et se pencher sur la stabilité d'un processus. Auparavant, on choisissait implicitement un point d'équilibre à l'avance avant de regarder les propriétés des trajectoires qui lui étaient associées. Désormais, on examine tout de suite les propriétés des trajectoires sans savoir vers quels équilibres elles conduisent.

DEFINITION

On dit que le processus défini par l'équation (1.2) est localement stable sur une partie de $\mathbb{R}^n$, si :

On peut définir une norme sur $\mathbb{R}^n$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta + \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout X_0, appartenant à cette partie de $\mathbb{R}^n$, vérifiant la relation $\|X_0 - X_e\| < \delta + \delta(\varepsilon)$, la solution de l'équation $X' = f(X)$ se prolonge pour tout t ≥ 0 et satisfait l'inégalité $\|X(t, X_0) - X_e\| < \varepsilon$.

De même, un processus peut- être globalement ou localement stable. La stabilité asymptotique, quant à elle, implique d'avoir : $\lim_{t \to \infty} X(t, X_0) = X_e$

Commentaire

La différence avec la formulation précédente est liée à l'intégration de X_0 comme argument de la fonction X. Ceci traduit une volonté plus explicite de prendre en compte l'incidence qu'ont les conditions initiales sur l'équilibre atteint. En effet, les équilibres d'un système peuvent être en nombre infini. Dans ce cas, de légères différences dans les conditions initiales sont susceptibles de conduire à des équilibres totalement différents. C'est la raison pour laquelle on utilise la notation $X(t, X_0)$.

L'économiste n'a souvent en sa possession que des indications qualitatives. Dans cette configuration, la démonstration de la stabilité d'un processus relève d'un tour de force. D'où l'idée de passer par une étape intermédiaire afin de faciliter la démonstration. Pour ce faire, on mobilise la notion de « quasi- stabilité » proposée par l'économiste japonais Uzawa (1961).

Quasi-stabilité

On considère qu'un processus est quasi- stable si ses valeurs d'adhérences sont des équilibres.

Intuitivement une valeur d'adhérence est un point par lequel le processus repasse sans cesse (sans pour autant y rester). Techniquement, on dit qu'un point $a \in \mathbb{R}^n$ est une valeur d'adhérence de (X_n) s'il existe une suite extraite de X_n convergente vers a.

Cette définition n'est intéressante que dans la mesure où les trajectoires ont au moins une valeur d'adhérence. Pour que cela soit assurément le cas, il faut que X (t, X_0) soit bornée sur une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

THEOREME (d'existence d'une valeur d'adhérence)

Toute suite définie sur un espace topologique compact possède au moins une valeur d'adhérence.

La condition essentielle pour que la suite $X((n, X_0))$, formée de points de la trajectoire $X(t, X_0)$, bénéficie d'une valeur d'adhérence est qu'elle soit définie sur une partie « fermée et bornée ». On peut déjà dire, que si l'on suppose que (1.2) admet une solution globale alors les dérivées partielles sont effectivement bornées. Ce qui aide grandement à satisfaire les hypothèses du théorème de quasi- stabilité.

Passage de la quasi- stabilité à la stabilité asymptotique globale

La quasi stabilité stipule que les trajectoires s'approchent d'un équilibre puis s'éloignent vers un autre sans toutefois les atteindre. Ce schéma se reproduisant en permanence. Il est donc nettement plus intéressant de démontrer que les trajectoires convergent. La transition vers la stabilité se faisant à l'aide de deux théorèmes.

THEOREME 3

Si une trajectoire est bornée et ne comporte qu'une seule valeur d'adhérence alors elle est convergente.

THEOREME 4

Si une trajectoire continue admet des valeurs d'adhérences isolées, alors elle est convergente.

Rappelons qu'une valeur d'adhérence d'une trajectoire est dite « isolée » s'il existe une boule dont elle est le centre et qui ne contient pas d'autre valeur d'adhérence de cette trajectoire.

Mentionnons également un dernier théorème, particulièrement précieux, qui élargi les résultats établis par Lyapounov au processus.

THEOREME (d'extension des fonctions de Lyapounov au processus)

Si les solutions du système (1.2) sont définies et prolongeables sur $\mathbb{R}_+$ et si on peut leur associer une fonction de Lyapounov, alors le processus considéré est globalement stable.

Remarque

Pour en finir, notons que l'étude de la stabilité d'un système d'équations différentielles non autonome est en tout point identique à celui d'un système autonome.

I. III. 4 La vitesse de convergence

Une fois l'étude de l'existence et de la stabilité achevée, il reste à s'interroger sur la vitesse à laquelle converge le processus. On comprend aisément qu'une trajectoire qui met un temps infini à atteindre un équilibre n'est pas d'un grand secours en pratique. Hélas, c'est pourtant le résultat auquel on parvient.

Rappel du résultat fondamental de stabilité asymptotique

X_e est un équilibre associé à (1.2), si $X(t)$ est définie sur $[0;\infty]$ et si $X(t) \to X_e$ lorsque t tend vers l'infini.

Cet énoncé peu encourageant est une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz et plus spécifiquement du fait que l'on a supposé f lipschtizienne.

L'importance des conditions initiales

Le résultat précédent met déjà en valeur le rôle crucial joué par les conditions initiales. Si on n'a pas d'emblée une situation telle que $X(t_0) = X_e$, il n'y a pas d'espoir d'atteindre l'équilibre dans un laps de temps fini.

Les solutions

Pour contourner la difficulté, on peut toujours estimer qu'on se trouve initialement au voisinage immédiat de l'équilibre. Mais cette technique, en dehors du fait qu'elle amène le théoricien à se placer dans un cas particulier, ne supprime pas complètement le problème. En effet, il reste la question des évènements qui surgissent lors du délai d'ajustement c'est-à-dire au cours de la phase de déséquilibre. Il faut donc en plus proscrire les échanges hors équilibre. Ce qui n'est pas raisonnablement susceptible d'être fait si l'on se situe dans un « temps réel ». Si l'on ne souhaite pas prendre en considération un « temps fictif », il faut assurer à l'avance la convergence du processus. C'est là un des objectifs de la planification lui conférant ainsi un rôle primordial.

Parmi toutes les caractéristiques qu'arbore la notion d'équilibre, celle du « cadre institutionnel » est fondamentale. Selon ses propriétés, les notions d'équilibres qui en résultent sont totalement différentes. Pour s'en apercevoir on étudie des chapitres II à IV les trois principaux modèles faisant appel à la notion d'équilibre.

CHAPITRE II

L'équilibre comme point fixe d'un processus

La représentation de l'équilibre en tant que point fixe d'un processus est intiment liée au cadre institutionnel du modèle d'équilibre général. Historiquement, les théorèmes du point fixe ont permis, dans la perspective de la théorie néo- classique, d'établir les premières preuves d'existence d'un équilibre général concurrentiel :

« Au début, les démonstrations d'existence d'un équilibre économique ont toujours été obtenues en appliquant un théorème de point fixe comme celui de Brouwer ou celui de Kakutani, ou par des arguments analogues. » (Debreu (1982), p. 125).

Après avoir rappelé les hypothèses essentielles du modèle d'équilibre général (section I), on examine dans ce chapitre les versions les plus populaires du théorème du point fixe. A savoir celle de Brouwer, pour les fonctions univoques, et celle de Kakutani concernant les fonctions biunivoques (section II et III). On achève cette étude par une comparaison des différentes preuves d'existences qui utilisent l'un de ces deux théorèmes.

SECTION I

L'Equilibre Général Concurrentiel

Les versions d'Arrow et Debreu (1954), McKenzie (1959) et Debreu (1959), du modèle d'équilibre général, se présentent comme des représentations modernes et rigoureuses des travaux de Léon Walras. Par la suite de nombreux auteurs ont cherché à développer ce modèle (pour une comparaison des diverses variantes voir Quirk et Saposnik (1974)). Toutefois, ces trois interprétations demeurent, pour le courant néo-classique, le point de départ de toute réflexion théorique rigoureuse. On décrit ici les hypothèses primordiales qui leurs sont, pour la plupart, communes. On privilégie néanmoins la formulation la plus aboutie c'est-à-dire celle de Debreu (1959).

II. I. 1 Le statut des agents : les principales hypothèses touchant le producteur et le consommateur

La démarche néo- classique, fondée sur l'individualisme méthodologique, explique les phénomènes économiques à partir des comportements individuels. On va donc commencer par rappeler les principales hypothèses portant sur les ensembles de production et de consommation.

La convexité des ensembles de production et des préférences

La convexité des ensembles de production est une hypothèse nécessaire pour des raisons techniques puisqu'en excluant les rendements croissants et les coûts fixes, elle assure l'existence d'un profit maximum. Il en va de même pour la convexité des préférences, traduisant un goût pour les mélanges, et qui s'avère « cruciale en raison de son rôle dans toutes les démonstrations existantes de plusieurs théorèmes économiques fondamentaux » (Debreu (1959), p. 57).

« Absence de faillite » et « Survie du consommateur » : la continuité

Etroitement liée à la convexité, l'absence de faillite a pour but d'éviter les discontinuités qui résulteraient de la disparition de certaines entreprises. Identiquement, l'hypothèse de survie du consommateur assure que ce dernier bénéficie de dotations initiales suffisantes pour survivre sans faire d'échanges.

L'hypothèse de concurrence parfaite

Une telle hypothèse signifie que producteurs et consommateurs prennent les prix comme données et ne pensent pas pouvoir les influencer à leurs profits. Ce comportement price taker provenant de conjectures plates qui sont rendues impératives par le « courtier », « market participant » ou « commissaire priseur ». Ces derniers sont chargés d'empêcher les agents de se rendre au marché et de constater l'existence de déséquilibres en cours de processus :

« D'une façon générale, le rôle du courtier est de figurer que l'agent, resté chez lui, est preneur de n'importe quel prix malgré la conscience du déséquilibre que lui apporterait sans doute sa présence effective au marché. » (Rebeyrol (1999), p. 73).

On peut ainsi considérer que la myopie des conjectures est institutionnalisée (voir Chigolet (2003)).

II. I. 2 La structure de l'économie

La propriété privée

Debreu (1959) désigne sous le nom d' « économies de propriété privé » le fait que « les consommateurs possèdent les ressources et contrôlent les producteurs. » (p.85).

Autrement dit, les entreprises sont la propriété des ménages actionnaires. Cela apparaît clairement dans l'équation de ressources des ménages qui se formule ainsi : $w_i = p.\omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}\, \pi_j(p)$ ou θ_{ij} représente la part du i-ème consommateur dans la j-ième société. L'intégralité du profit est perçue par les ménages c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$. Leurs ressources se composent donc des salaires et des profits[1].

L'hypothèse d'un système complet de marchés

Elle implique que les agents formulent, à la période initiale, leurs offres et demandes, en intervenant sur le marché à terme, pour tous les biens présents et futurs. Cette hypothèse, sans doute la plus contestable du modèle, élimine toute incertitude en estimant que les agents lient « dès le départ » des contrats pour toute la durée de vie de l'économie. Par conséquent, le comportement de la totalité des intervenants est connu. Tout au plus, l'unique « risque » est lié à la réalisation des états de la nature et donc à l'existence de contrats conditionnels. Relevons, pour finir, qu'une semblable hypothèse entraîne une multiplication des marchés à terme et contingents dont le coût d'organisation est loin d'être négligeable.

[1] Esquissons une remarque au sujet du « socialisme de marché » inauguré par O. Lange. Ce dernier conserve la propriété publique des moyens de productions mais dote l'entreprise d'un comportement capitaliste en lui faisant maximiser ses profits. Parallèlement, dans le modèle d'équilibre général, l'entrepreneur reverse, s'ils existent, l'intégralité des profits aux ménages- actionnaires. Il ne semble pas avoir de rémunération pour son activité (combinaison des facteurs de productions). Seule la propriété publique des moyens de productions pourrait justifier cette situation en faisant de l'entrepreneur un salarié spécifique.

L'invariance du nombre d'entreprises

Dans la mesure où les coefficients θ_{ij} sont donnés au départ, et que le modèle n'admet pas d'incertitude, il ne peut y avoir ni création, ni disparition d'entreprises[1]. La fixité du nombre de producteurs est introduite par Debreu (1959) au début du chapitre 3 : « Nous supposons qu'il y a un nombre entier positif donné n de producteurs […] » (p.40). Il en va de même pour les consommateurs : « Nous supposons qu'il y a un nombre entier positif donné m de consommateurs […] » (p. 53). La seule contrainte étant de supposer que le nombre de producteurs et de consommateurs est fini. Ce qui ne pose pas un gros problème d'interprétation économique.

Pour terminer, remarquons que cette fixité contribue à limiter la place de l'incertitude et évite des « discontinuités » liées à la création et à la disparition de sociétés.

La semi- centralisation

Si les agents prennent bien leurs décisions de façon autonome[2] (choix de leurs consommations ou quantités qu'ils désirent produire), il y a néanmoins une centralisation de l'information et des échanges. La centralisation de l'information étant révélée par l'unicité du vecteur prix, qui est d'ailleurs centralement affiché à la vue de l'ensemble des agents : « A chaque marchandise, disons la $h-$ième, est associé un nombre réel, son prix p_h » (p.36, Debreu (1959)), tandis que celle des échanges est exprimée par l'interdiction de réaliser des transactions en dehors de l'équilibre.

II. I. 3 Conclusion

En guise de conclusion pour cette section, formulons et développons quelques remarques sur les caractéristiques principales du modèle. Ce faisant, on va de nouveau constater le rôle fondamental joué par l'hypothèse du système complet de marchés.

[1] Soulignons que Debreu insère une hypothèse « d'additivité » qu'il interprète ainsi : « l'hypothèse d'additivité signifie qu'il y a *entrée libre* des entreprises dans cette industrie, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune barrière institutionnelle ou autre à l'entrée. » (p. 44). Etrangement, il n'y fait par la suite jamais appel. Sans doute peut-on l'interpréter comme une possibilité d'un déplacement inter- branche des n entreprises.

[2] Bien que le courtier ou le commissaire priseur veille à ce que les agents ne puissent se rencontrer, ils demeurent libres d'échanger ou non grâce à l'hypothèse de survie.

La conception de l'équilibre

Les hypothèses, ci-dessus, ont été introduites pour faciliter la démonstration d'existence d'un équilibre général. D'ailleurs, c'est au chapitre 5 de la *Théorie de la valeur* que Debreu le définit explicitement comme un vecteur prix annulant la demande nette globale. Sa conception implique quelques commentaires :

- l'équilibre est inter- temporel puisque les offres et demandes sont formulées pour toute la durée de vie de l'économie.
- en vertu du premier théorème de l'économie du bien- être, l'équilibre général concurrentiel est un optimum de Pareto. Il en résulte que, dans ce cadre conceptuel, tout processus destiné à converger vers l'équilibre devra être compatible avec un optimum Paretien et ne pas modifier la richesse relative des agents (voir le chapitre V).

La monnaie

Puisque l'équilibre est inter- temporel et que l'économie fonctionne sans véritable incertitude, la monnaie dans ses fonctions de moyen de paiement et de réserve de valeur devient inutile. La demande de monnaie est nulle. Il demeure uniquement son rôle d'étalon de mesure.

La formation des prix

La principale faiblesse de l'équilibre général est, de notre point de vue, le peu de place accordée au problème de l'origine des prix. Pour preuve Debreu (1959), si rigoureux par ailleurs, reste vague sur ce thème :

« Le fait que le prix d'une marchandise est positif, nul ou négatif n'est pas une propriété intrinsèque de cette marchandise ; il dépend de la technique, des goûts,…, de l'économie. » (p. 36).

C'est pourquoi les principales procédures de planification par les prix, qui s'inscrivent dans le cadre du modèle d'équilibre général, nécessitent au préalable pour s'initialiser la connaissance d'un plan réalisable (confère Arrow et Hurwicz (1960)[1], Malinvaud (1967), Younes (1972),…).

[1]Pour être exact la procédure d'Arrow et Hurwicz nécessite seulement, pour s'initialiser, une estimation par excès de l'ensemble des consommations. Le tout étant bien sûr de savoir comment une telle estimation peut-être obtenue ?

Il s'agit là d'un obstacle important que l'on devra prendre en compte dès lors que l'on s'inscrira dans une optique planificatrice (dernière partie).

SECTION II

Théorème du point fixe de Brouwer et équilibre économique

Définition

Soit une application d'un ensemble E dans lui même. On dit que $x \in E$ est un point fixe de f si on a $f(x) = x$

On dénombre plusieurs versions du théorème du point fixe. Enonçons tout d'abord celui de Brouwer, établit en 1912.

II. II. 1 THEOREME DE BROUWER

Si f $(\cdot)$ est une fonction continue d'un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$ (donc compact[1]) convexe et non vide dans lui même, alors il existe un point x appartenant à cet ensemble tel que f (x) = x.

II. II. 2 Point fixe et équilibre

La corrélation entre équilibre et point fixe prend la forme d'une relation d'équivalence. On peut donc prouver à la fois que $f(P) = P \Rightarrow E(P_e) = 0$ et que $E(P_e) = 0 \Rightarrow f(P) = P$. On se contente de prouver la première implication qui est celle majoritairement utilisée.

Du point fixe à l'équilibre

Pour démontrer ce premier lien on reprend la démarche proposée par B. Guerrien (1989).

[1] Le fait qu'un ensemble fermé borné soit un compact est valable que dans la mesure où l'on se situe dans l'ensemble $\mathbb{R}$ et non dans un espace métrique quelconque.

L'objectif est de construire une fonction $f(\cdot)$ telle que ses points fixes annulent la demande nette sur chaque marché.

Pour ce faire, on définit une première fonction $g(\cdot)$ qui admet un vecteur prix comme unique argument [1] :

$$g_h(P) = \max(-p_h ; e_h(P)), \ \forall P \in \mathbb{R}^l_+$$

D'après l'identité de Walras toutes les demandes nettes ne pouvant être négatives, il en découle $g_h(P) \geq 0$ ainsi que $\sum_{h=1}^{l} (p_h + g_h(P)) > 0$ (puisque que l'on a nécessairement $p_h > 0$ et $p_h + g_h(P) > 0$).

Il est désormais possible d'établir :

$$(2.1) \quad f(P) = \frac{P + g(P)}{\sum_{h=1}^{l} (p_h + g_h(P))}$$

On pose alors P_e comme point fixe de f (soit $f(P_e) = P_e$). Ce qui implique :

$$\sum_{h=1}^{l} (p_h + g_h(P_e))P_e = P + h(P_e)$$

Où bien encore :

$$cP_e = g(P_e) \ (\text{avec } c = \sum_{h=1}^{l} (p_h + g_h(P_e)) - 1).$$

En établissant, cette construction on fait l'hypothèse implicite que les conditions suffisantes pour que le point fixe existe sont réunies. En d'autres termes, on postule f continue ainsi qu'un ensemble de départ convexe et compact. Une fonction étant continue si chacune

[1] On pourra trouver dans certaines modélisation la fonction g définie de manière suivante : $g_h(P) = \max(g_h(P), 0)$. Cette formalisation est parfaitement équivalente dans la mesure où elle nous assure que $g_h(P) \geq 0$ (d'après sa construction même).

de ses composantes l'est également ; il en résulte que nous avons considéré g continue, ce qui implique, pour les mêmes motifs, la continuité de la demande nette.

D'autre part, en faisant le produit scalaire, par $e(P_e)$, de chacun des membres de l'égalité vectorielle, on a :

$$cP_e \cdot e(P_e) = g(P_e) \cdot e(P_e).$$

Or, en raison de la l'identité de Walras on sait que la demande nette en valeur est nulle c'est à dire $P_e \cdot e(P_e) = 0$. Il en découle immédiatement que :

$$g(P_e) \cdot e(P_e) = 0.$$

On remarque alors qu'on ne peut avoir $e(P_e) > 0$ car on aurait $g_h(P_e) = \max(-p_h^e, e_h(P_e)) = e_h(P_e)$ et par conséquent $g_h(P_e) \cdot e(P_e) = (e_h(P_e))^2 > 0$. Ce qui serait contradictoire avec le résultat précédent. On obtient alors obligatoirement $e_h(P_e) \leq 0$ avec $h = 1, ..., l$. Ce qui prouve que P_e est un équilibre.

De l'équilibre au point fixe

Cette seconde implication a été prouvée bien plus tardivement puisqu'elle est l'œuvre d'Uzawa (1962). Son utilité n'étant que peu manifeste, on renvoie à Border (1985) pour une démonstration.

II. II. 3 <u>Les rendements d'échelle décroissants</u>

L'intérêt d'exhiber cette démonstration est de percevoir l'importance des hypothèses de continuité et de convexité lorsque l'on envisage l'équilibre comme un point fixe d'un processus.

Convexité, rendements décroissants et morcellement des unités de productions

Les auteurs qui démontrent l'existence d'un équilibre, à partir du théorème de Brouwer, sont conduits, pour l'appliquer, à établir la convexité des ensembles de production.

Ainsi, le cas problématique des rendements d'échelle strictement croissants à l'avantage d'être d'emblée éliminé.

D'autre part, démontrer l'implication entre le théorème du point fixe de Brouwer et un équilibre économique suppose d'avoir des fonctions de productions strictement concaves, c'est à dire des rendements d'échelle partout décroissants. Cela a été implicitement supposé lorsque l'on a construit la fonction f. La division de $P+g(P)$ par $\sum_{h=1}^{l}(p_h+g_h(P))$ excluant les correspondances.

Dans ce cadre les entreprises ont intérêt, en l'absence de coût fixe, à se fragmenter en unités de plus en plus petites. Pour s'en convaincre, construisons un exemple simple.

Exemple

On considère une entreprise dont la fonction de production[1] est $f(L)=L^{1/2}$ avec $L\in[0;+\infty[$.

Le profit de l'entreprise est donné, si on pose P le prix de l'output et w le salaire unitaire, par :

$$\pi(L)=P\cdot f(L)-w\cdot L\,.$$

Sa maximisation implique :

$$\pi'(L)=P\cdot f'(L)-w$$

C'est-à-dire :

$$P\cdot\frac{1}{2}L^{-1/2}=w\Leftrightarrow L^{*}=\left(\frac{P}{2w}\right)^{2}$$

Par conséquent :

$$f^{*}(L)=\left(\left(\frac{P}{2w}\right)^{2}\right)^{1/2}=\left(\frac{P}{2w}\right).$$

Si on pose, par exemple, $P=8$ et $w=1$, on a : $L^{*}=16$, $f^{*}(L)=4$ et $\pi^{*}(L)=16$.

[1]On observe bien que f est strictement concave, donc que les rendements d'échelle sont partout décroissants sur cet intervalle, puisque $f''(L)=-\frac{1}{4}L^{-3/2}<0$.

Supposons maintenant que l'entreprise décide de se scinder en deux pour produire cette quantité optimale. Chaque société produira $f(L) = 2$. Pour se faire la quantité d'inputs employés devra être tel que $L^{1/2} = 2 \Leftrightarrow L = 4$. Le profit total se calcule comme la somme des profits ou i.e. :

$$\pi_{total}(L) = \pi_1(L) + \pi_2(L) = 2(8 \cdot 2 - 1 \cdot 4) = 24.$$

Autrement dit, le fait de se situer dans une zone ou les rendements d'échelle sont décroissants entraîne une augmentation du profit (et du taux de profit) lorsque que les entreprises se scindent en petites unités de production.

Imaginons pour finir que l'entreprise se scinde en quatre unités de taille équivalente, produisant chacune $f(L) = 1$. Nous aurons alors par entreprise, associé à la quantité produite, $L = 1$. Le profit total sera de :

$$\pi_{total}(L) = \pi_1(L) + \pi_2(L) + \pi_3(L) + \pi_4(L) = 4 \cdot (8 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 28$$

En suivant ce raisonnement jusqu'au bout, on constate qu'il n'y a plus que des entreprises individuelles dans l'économie.

L'introduction des coûts fixes

Pour sauver les rendements d'échelle décroissants et éviter le phénomène de morcellement des entreprises, certains auteurs ont choisi d'intégrer des coûts fixes[1]. Ces derniers ont pour conséquence :

- de fixer une taille minimale aux entreprises, à laquelle est associée un volume critique de production.
- Au niveau formel, cela se traduit par une discontinuité de la fonction d'offre. L'équilibre, si la fonction de demande passe au niveau de cette discontinuité, peut ne pas exister.
- Enfin, si l'équilibre existe, c'est à dire si la courbe de demande coupe la courbe d'offre dans sa partie continue, l'existence d'un profit positif est susceptible d'attirer d'autres producteurs. Leurs arrivées engendreront des sauts brusques de la fonction d'offre, liés aux coûts fixes qu'ils subiront également, impliquant d'autres discontinuités.

[1] La plupart des théoriciens qui incorporent les coûts fixes dans leurs analyses n'évoquent que très rarement ce problème de morcellement des unités de production. En règle générale, ils se contentent d'une pirouette à propos de la réalité.

Profit et justice sociale

En présence de rendements décroissants, il existe à l'équilibre un profit strictement positif. Toutefois, comment le justifier ?

La rémunération des facteurs à leur productivité marginale implique, selon la formule d'Euler, que le produit s'épuise en rémunération factorielle. Il n'y a pas de place pour un éventuel profit, sauf à reconnaître que certains facteurs sont sous rémunérés. Ce qui est fâcheux puisque le projet initial de Walras était de faire en sorte que chacun ait « selon son mérite ».

L'hypothèse de continuité

Un second point essentiel de la formulation de Brouwer est l'hypothèse de continuité de la fonction f qui représente ici un processus. La continuité dérive de l'hypothèse de convexité puisque toute fonction convexe est continue (la réciproque étant fausse). Toutefois, quel sens économique lui donner ? Yves Balasko (1988) précise :

« […] l'idée que la discontinuité est nuisible, synonyme de catastrophes, est communément admise […] » (p. 83). En somme, il convient « […] d'admettre l'intérêt économique que présente la notion de solution *continue* par rapport à celle de cheminement discontinu. » (p. 83).

Si d'un strict point de vue mathématique les discontinuités s'avèrent problématiques pour démontrer l'existence d'un point fixe, ces dernières posent également de redoutables difficultés au niveau économique. En outre, une discontinuité peut signifier que, pour certaines valeurs du vecteur prix, les ressources des agents (leurs dotations initiales) ont une valeur nulle. Dans cette situation certains d'entre eux trépassent.

SECTION III

La généralisation aux correspondances

Face aux difficultés d'interprétations théoriques qu'engendre le théorème de Brouwer, la plupart des démonstrations d'existences recourent à une version du point fixe, plus générale, proposée en 1941 par le mathématicien japonais Kakutani. Nous allons maintenant étudier cette seconde version en commençant par expliquer la manière dont elle s'est élaborée. Par la suite, on verra comment les démonstrations d'existence d'un équilibre général concurrentiel y font appel, souvent au prix d'une transformation radicale du cadre institutionnel.

II. III. 1 Origine du théorème de Kakutani

Retracer l'histoire du théorème de Kakutani est particulièrement important puisque cela permet de mettre en évidence une série essentielle de résultats intermédiaires.

L'influence de la théorie des jeux : le théorème du minimax

La théorie des jeux – et plus particulièrement le théorème du minimax de Von Neumann (1928) – est à l'origine de la formulation du théorème de Kakutani. La citation suivante de Werner Hildenbrand (1983) retrace parfaitement, pour le modèle Arrow- Debreu, cette influence :

« Sous certaines hypothèses relatives à ces éléments de base […], Arrow et Debreu démontrent qu'il existe un équilibre concurrentiel pour de telles « économies de propriété privée ». Pour cela ils introduisent un « agent fictif » dont le rôle est de choisir le système de prix, et de ramener ainsi le problème de l'existence d'un équilibre concurrentiel pour une économie donnée au problème de l'existence de l'équilibre de Nash dans un « jeu généralisé ». L'existence d'un équilibre de Nash dans de tels jeux, où l'ensemble des stratégies d'un joueur dépend des actions engagées par les autres joueurs, avait été préalablement démontré par Debreu dans son article « A Social Equilibrium Existence Theorem » (1952). Ainsi la démonstration de Arrow et Debreu plonge ses racines dans la théorie des jeux. En fait le théorème d'existence de Debreu dans « A Social Equilibrium Existence Theorem » est une généralisation du résultat de Nash (1950), obtenu en utilisant le théorème du point fixe de Kakutani (1941). Celui-ci à son tour, est une reformulation d'un lemme établi en topologie par J. von Neumann (1937). » (p. XXVIII)[1]

En effet, en 1928, Von Neumann formule le théorème du minimax[2] qui est

[1] Le lemme de Von Neumann (1937) est un corollaire du théorème du minimax. C'est pourquoi on présente plutôt ce dernier.
[2] Von Neumann établi son résultat dans le cadre d'un jeu à somme nulle et à deux joueurs. Sa généralisation fut l'œuvre de Fan (1952). Pour une synthèse se référer à Border (1985).

fondamental pour les futures démonstrations d'existence. Il s'énonce de la façon suivante.

THEOREME DU MINIMAX

Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes, compacts et non vides. Soit f (x, y) une fonction numérique, définie dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, semi- continue supérieurement et concave en x (dans A) ainsi que semi- continue inférieurement et convexe en y (dans B).

Sous ces hypothèses, il existe deux points $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$ tels que :

$$f(x_0, y_0) = \max_{x \in A} f(x, y_0) = \min_{y \in B} f(x_0, y)$$

Appliqué à la théorie des jeux, on retranscrit ainsi ce résultat : « dans tout jeu à somme nulle et à deux joueurs, qui font leurs choix dans un ensemble fini de stratégies pures, il existe au moins une solution en stratégie mixte ». Le théorème indiquant que celle- ci est de type point selle.

DEFINITION (de la semi- continuité d'une application)

Pour établir ce résultat, le mathématicien Hongrois s'appuie, non plus sur la continuité, mais sur le concept de « semi- continuité » inférieure et supérieure.

On dit que l'application f, intervenant dans le théorème du minimax, est semi-continue supérieurement en x si pour tout ouvert $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ rencontrant f (x, y_0), on a:

$$x \in A \Rightarrow f(x, y_0) \subset E$$

On dit que l'application f, intervenant dans le théorème du minimax, est semi-continue inférieurement en y si pour tout ouvert $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ayant une intersection avec f (x_0, y), on a:

$$y \in B \Rightarrow f(x_0, y) \bigcap E \neq \emptyset$$

Ces précisions étant apportées, on est en mesure d'énoncer le théorème de Kakutani.

II. III. 2 THEOREME de Kakutani (1941)

En 1932, Bouligand et Kuratowski vont appliquer la notion de semi- continuité aux fonctions multivoques. Kakutani, élève de Von Neumann, va reprendre le concept de « semi-continuité supérieure » en l'appliquant à un théorème du point fixe. Il généralise le résultat de Brouwer.

THEOREME

Soit C un ensemble convexe, compact et non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit Γ une application semi continue supérieure de C dans C. Si, $\forall x \in C$, l'ensemble $\Gamma(x)$ est convexe et non vide alors il existe dans C un point x tel que $\Gamma(x) = x$.

II. III. 3 Problèmes liés à l'usage du théorème de Kakutani

Au moins deux difficultés surviennent lorsqu'on désire appliquer le théorème de Kakutani pour démontrer l'existence d'un équilibre général.

L'absence d'équivalence

A l'inverse du point fixe de Brouwer, il n'y a aucune preuve de l'implication entre le théorème de Kakutani et l'équilibre économique. Il faut donc faire usage d'une série de « ruses », certes amusantes, mais gênantes d'un point de vue logique (voir dans la section suivante la démonstration de Arrow- Debreu (1954)).

Les rendements d'échelle constants

L'usage d'une correspondance implique d'avoir des rendements d'échelle partout constants. Dans cette configuration, le problème de la décomposition des firmes ne se pose plus et le profit peut-être nul à l'équilibre.

Malheureusement, les prix ne suffisent plus à transmettre toute l'information nécessaire. En présence d'une correspondance d'offre, la quantité à produire est totalement indéterminée. Le graphique ci- dessous l'illustre :

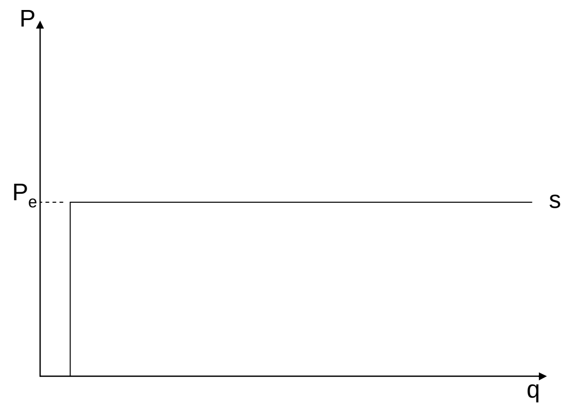


Figure 2.1- Représentation d’une correspondance d’offre

Seule la connaissance du niveau de la demande, par les producteurs, permet de lever cette indétermination :

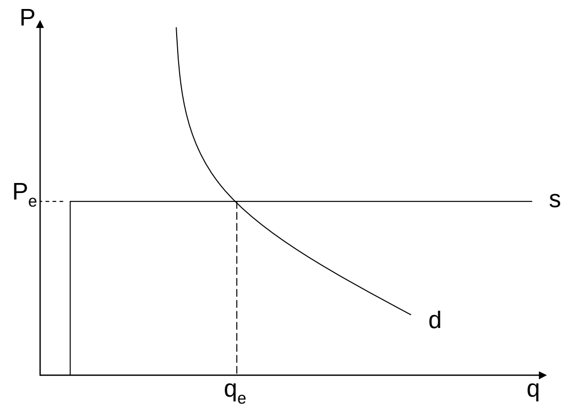


Figure 2.2- Représentation d’une correspondance d’offre contaminée par la demande

SECTION IV

Interprétation et portée de la notion de point fixe

Bien que les preuves d'existence d'un équilibre se fondent sur un théorème du point fixe, selon sa version et la manière dont il intervient dans les démonstrations, les cadres institutionnels sous-jacents sont susceptibles de varier. On va l'illustrer en examinant successivement les trois démonstrations d'existence de Mc Kenzie (1959), Arrow- Debreu (1954) et Debreu (1959).

II. IV. 1 <u>La démonstration de McKenzie (1959)</u>

Cette démonstration que l'on examine en premier, en déviant de l'ordre chronologique, présente l'intérêt de faire intervenir le théorème de Brouwer. On va tout particulièrement s'intéresser à la façon dont McKenzie tente de lever les obstacles inhérents à l'emploi de cette version du théorème du point fixe (voir section II).

Structure du modèle et preuve de l'existence

Les hypothèses mobilisées sont dans leurs grandes lignes plutôt classiques puisque :

- L'ensemble de consommation est supposé convexe et compact. De plus, l'espace des préférences est pré ordonné.
- L'ensemble total de production est un cône convexe. La production libre y est impossible.

L'équilibre général est un ensemble $(p, y, x_1, ..., x_m)$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

(I) $y \in Y$ et $p \cdot y = 0$, $\forall y' \in Y, p \cdot y' \leq 0$

(II) $x_i \in C_i(p) \cap H_i(p), i = 1, ..., m$

(III) $\sum_{i=1}^{m} x_i = y$

Où y est la production totale et Y l'ensemble total de production. Le terme x_i représentant la demande du i-ième consommateur et X_i son ensemble de consommation. Enfin, H_i (p) correspond à l'ensemble des combinaisons de biens dans X_i tel que $H_i(p) = \{x_i \mid p \cdot x_i \leq 0, x_i \in X_i\}$ et $C_i(p)$ est l'ensemble des préférences du i- ième agent définie par $C_i(p) = \{x_i' \mid x_i' \succsim x_i \; \forall x_i \in H_i(p)\}$

La différence centrale avec les autres démonstrations d'existences réside dans la possibilité de réversibilité du processus de production.

La réversibilité du processus de production

En cas de pertes supposées l'entrepreneur peut choisir de ne pas produire. Tel est, par exemple, la situation lorsque l'on introduit des coûts fixes pour pallier la décomposition des firmes. Ces derniers imposent une taille minimale aux entreprises :

« Le seul postulat alternatif qui soit compatible avec le modèle, celui d'un ensemble de production convexe avec des rendements d'échelle décroissants, implique une taille optimum pour chaque firme qui constituerait à la fois un optimum individuel et un optimum social (au sens parétien) et qui serait uniquement déterminé si l'ensemble était strictement convexe. » (Koopmans (1970), p. 147).

Dans ce contexte, le vecteur prix doit être tel que les ventes puissent couvrir les coûts fixes. Sans quoi l'entrepreneur encourt des pertes et optera pour « l'inaction ». Ici, il peut néanmoins prendre le risque d'avoir des pertes étant donné que, dans cette configuration, le processus de production est susceptible d'être inversé.

Cette hypothèse de réversibilité est bien entendu purement théorique car totalement extravagante dans la réalité. Néanmoins, elle permet de contourner le problème des « seuils de rentabilité » et en particulier celui du vecteur prix à partir duquel démarre la production.

Le traitement des profits à l'équilibre

On l'a vu, le théorème de Brouwer n'exclut pas des profits positifs à l'équilibre qui remettent en cause « l'épuisement du produit en rémunération factorielle ». L'hypothèse (I) que McKenzie interprète comme une absence de profit positif à l'équilibre, lui permet de s'affranchir du problème.

Malgré son élégance la démonstration de McKenzie n'est pas la plus reconnue. Pour cause, l'emploi du théorème de Brouwer amène à formuler une hypothèse de réversibilité totalement inconcevable économiquement. C'est la raison pour laquelle les preuves d'existence d'un équilibre général recourant au théorème de Kakutani se sont imposées. A commencer par celle de Arrow et Debreu.

II. IV. 2 La démonstration d'Arrow- Debreu (1954)

L'article de Arrow et Debreu intitulé « Existence of an equilibrium for a competitive economy », paru dans la revue *Econometrica*, est la première preuve de l'existence d'un équilibre général s'appuyant sur le théorème de Kakutani.

La réduction de l'économie à une structure de jeu

Ce qui interpelle, en première instance, c'est la volonté qu'ont les auteurs de se ramener à la structure d'un jeu :

« the concept of an abstract economy, a generalization of that of a game, will be introduced […] » (Arrow et Debreu (1954), p. 272)

En effet, l'économie est décrite comme un jeu dans lequel figure « m + n + 1 » participants. Le nombre m représentant comme à l'accoutumé les consommateurs tandis que le nombre n désigne les producteurs.

Cette présentation sous forme de jeu a pour objectif de reproduire la structure de l'article de Nash dans lequel le théorème de Kakutani est utilisé avec succès (voir chapitre I) :

« Professor Nash has formally introduced the notion of an *equilibrium point* for a game. The definition can easily be extended to an abstract economy […] » (Arrow et Debreu (1954), p. 273).

Une application directe impossible

Cependant le cadre de la théorie de l'équilibre général présente une différence majeure avec celui de la théorie des jeux. Afin d'éviter les interactions, qui renverraient à l'épineuse question de la formation des anticipations, les préférences d'un agent ne peuvent pas tenir compte de celles des autres agents. Debreu (1959) reprécise clairement ce point :

« Insistons sur le fait que la présente analyse ne couvre pas le cas où l'ensemble de consommation d'un consommateur et/ou ses préférences dépendent des consommations des autres consommateurs (et/ou des productions des producteurs). » (p. 79).

Le résultat de Nash ne peut donc s'appliquer directement au cadre du modèle d'équilibre général[1].

La solution modifiée

L'idée est alors de modifier le cadre institutionnel sous- jacent à la démonstration de Nash. Pour cela on ajoute un joueur supplémentaire centralisateur, « le market participant », en charge de veiller à ce qu'aucun individu ne puisse avoir connaissance des préférences des autres.

Néanmoins cet ajout n'est pas encore suffisant puisqu'il manque aussi un « processus ». L'incorporation d'un processus est encore une fois l'œuvre du market participant qui a l'attribution de proposer (et faire varier les prix) :

« We will here define an abstract economy whose equilibrium points will have all the properties of a competitive equilibrium. There will be m + n + 1 participants, the m consumptions units, the n production units, and a fictitious participant who chooses prices, and who may be termed the *market participant* » (Arrow et Debreu (1954), p. 274).

Solution modifiée et équilibre économique

La suite est bien connue puisqu'on considère que l'équilibre procède d'une opération d'optimisation simultanée, sous contraintes, des fonctions d'utilités des m consommateurs et du profit des n producteurs. On obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{i=1,..,n} u_i(\cdot) \\ \max\limits_{j=1,...,m} \pi_j(.) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{l} d_{ih}(P) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{l} s_{jh}(P)$$

π_j correspondant au profit du j-ième producteur.

[1] Sur le plan formel, on aurait $u_i\ (Q_i, U_{n\backslash i}(\cdot))$

Récapitulatif

Au final, Sylvain Sorin (1999) résume parfaitement les étapes successives de la démonstration effectuée par Arrow et Debreu :

« La démarche est donc, partant d'une économie E :

(i) de construire un jeu G(E) associé à E

(ii) de montrer que G(E) possède un équilibre (au sens de Nash)

(iii) d'établir que cet équilibre induit un équilibre (au sens de Walras) dans E. » (p. 12-13).

II. IV. 3 La démonstration de Debreu (1959)

Arrow- Debreu s'appuient sur deux astuces : la solution modifiée de Nash et le market participant. Bien que cette démonstration soit fondamentale puisqu'elle a ouvert la voie à l'application du théorème de Kakutani, elle peut apparaître comme « tordue ». C'est pourquoi, Debreu chercha à la rendre plus élégante et plus puissante en évitant ces détours. Il y parvint en généralisant un lemme topologique dû à Gale et Nikaido.

La structure de la démonstration

Debreu commence par considérer l'ensemble des prix $C \in \mathbb{R}_+^l$ pour lesquelles les conditions de maximisation du profit et des fonctions d'utilités puissent être satisfaites. Cet ensemble des prix a pour propriété d'être un cône convexe de sommet 0 [1]. Il en découle que la correspondance de demande nette est homogène de degré 0 par rapport aux prix [2]. Autrement dit, au minimum un consommateur est insatiable. D'autre part, on normalise les prix, soit P = $\{ p \in \Omega \sigma \sum_{h=1}^{l} p_h = 1 \}$ où Ω désigne l'orthant positif (ce qui induit $C \subset \Omega$). L'ensemble D se trouve ainsi définie par $D = C \cap \{ p \in \Omega \sigma \sum_{h=1}^{l} p_h = 1 \}$.

[1] Le sommet 0 du cône convexe est un point fixe. Il correspond à un cas ou tous les prix sont nuls. Naturellement, personne n'ayant intérêt à donner ses biens, on peut estimer qu'il s'agit d'un équilibre sans transaction. L'ensemble des équilibres sans transaction, comme le démontre Balasko (1988), est stable. A l'évidence de tels équilibres n'ont pas beaucoup d'intérêt pour l'économiste. D'ailleurs, on peut toujours exclure le sommet du cône de l'ensemble C, traduisant le fait qu'un consommateur au moins est insatiable.

[2] Ce qui provient du fait que les fonctions d'offres et de demandes optimales sont tous deux homogènes de degré 0 par rapport aux prix.

Dans ce cadre, le problème de l'existence d'un équilibre revient à se demander s'il existe $p \in D$ tel que $e(p) \cap (-\Omega) \neq \varnothing$? Naturellement, une telle solution implique obligatoirement que $0 \in e(p)$. C'est d'ailleurs le sens du lemme Gale- Nikaido.

Le lemme de Gale (1955) – Nikaido (1956)

Le résultat suivant à été établi quasi simultanément et de manière indépendante par Gale dans son article de 1955 intitulé *The Law of Supply and Demand*, et par Nikaido dans sa contribution de 1956 nommée *On the Classical Multilateral Exchange Problem*. Il s'énonce ainsi :

Lemme. Soit E un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^l$. Si e est une correspondance semi-continue supérieurement de P dans E de sorte que, pour tout $p \in P$, l'ensemble $e(p)$ soit non vide, convexe et satisfasse à la loi de Walras, alors il existe un $p \in P$ tel que $e(p) \cap (-\Omega) \neq \varnothing$.

On voit que ce résultat fournit une réponse positive à l'interrogation précédente et suffit à prouver l'existence d'un équilibre. Néanmoins, l'usage qu'en fait Debreu est une généralisation qui lui permet de se ramener au théorème du point fixe de Kakutani. En effet, il substitue dans la démonstration l'ensemble D à l'ensemble P.
Or, l'ensemble D pour peu qu'il soit un espace non linéaire a pour propriété d'être homéomorphe à un ensemble Z convexe et compact (pour une démonstration voir Border (1985)). En d'autres termes, les espaces topologiques D et Z sont équivalents. Toutes les conditions du théorème de Kakutani sont remplies et par conséquent il existe au moins un point fixe.

II. IV. 4 <u>Conclusion</u>

Le modèle d'équilibre général se décline donc en plusieurs versions. On peut alors se demander laquelle est la plus aboutie ? Ou encore laquelle est la plus propice à des développements ultérieurs ?

L’opinion de Weintraub

Weintraub (1980) apporte un premier élément de réponse dans une note de bas de page qu’il introduit ainsi :

« De nombreux auteurs parlent du modèle Arrow-Debreu. Mais comme la preuve d’existence sur laquelle se fonde les travaux actuels provient de McKenzie [1959], il semble convenable de donner à McKenzie une place équivalente. » (p. 27)

Pourtant, quelques lignes après, il précise concernant les différentes formulations du modèle d’équilibre général :

« Si on peut considérer un ouvrage unique comme canonique dans ce domaine, il s’agit de *Theory of Value* [1959] de Debreu. » (p. 27)

En résumé, si Weintraub semble donc considérer que la présentation de Debreu (1959) est la plus complète (dont il adopte les notations), il estime que la démonstration de McKenzie est sans aucun doute celle qui offre les extensions les plus prometteuses. Ce point de vue est partagé par de nombreux économistes dont Quirk et Saposnik.

Le point de vue de Quirk et Saposnik

Dans leur ouvrage de 1974, qui compare les différentes déclinaisons du modèle d’équilibre général, Quirk et Saposnik retiennent eux aussi la formalisation de Debreu :

« Dans cette section nous allons reformuler le problème de l’existence dans toute sa complexité et nous verrons comment on peut établir l’existence d’un équilibre concurrentiel en posant des conditions sur les ensembles de production et de consommation. Nous utiliserons essentiellement la formulation de Debreu. » (p. 85).

Toutefois, à l’instar de Weintraub, ils semblent implicitement considérer qu’une preuve d’existence fondée sur le théorème de Brouwer est davantage pertinente, en raison des meilleurs résultats d’unicité qu’il peut induire :

« Si les relations d’offre et de demande sont des correspondances, même s’il y a un seul vecteur prix normalisé, il peut exister plusieurs états de l’économie conduisant à un équilibre. » (p. 105)

L’argumentaire de McKenzie

Un dernier argument parmi les plus convaincants, en faveur de l’emploi du théorème de Brouwer, est directement mentionné par McKenzie (1959). Il tient à la simplicité de la démonstration d'existence qu'il permet d'effectuer :

« The argument uses the most elementary of the fixed point theorems, that of Brouwer, without introducing additional complications. » (p. 55).

Les principales simplifications, comparées au théorème de Kakutani, sont liées aux modifications des rendements et à la possibilité de travailler directement sur les relations de préférences sans passer par les fonctions d'utilités :

« In any case, this approach facilitates the handling of returns to the owners of firms, and simplifies the initial proofs[1]. The second feature is that I do not define a utility function, […], but proceed directly from the preference ordering. » (p. 55).

Conformément à la convention implicitement instaurée, nous utilisons dans cette thèse les notations de Debreu (1959). Cependant, l'usage du théorème de Brouwer s'avérant plus simple et vraisemblablement porteur de davantage de débouchés, nous le privilégierons.

[1] La preuve initiale, dont fait état McKenzie, concerne une première démonstration d'existence fondée sur le théorème de Kakutani qu'il publia en 1954 dans un article intitulé « On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems », paru dans le revue *Econometrica* (Vol. 22, No. 2, p. 147-161).

CHAPITRE III

L'équilibre comme ensemble d'accords finals

Si l'on a commencé par l'étude du modèle d'équilibre général, c'est qu'il constitue aujourd'hui encore le cadre institutionnel de référence tant au niveau de la recherche que sur le plan de l'enseignement. Pourtant, la centralisation qu'il implique, notamment par l'intermédiaire de « prix annoncés », va à l'encontre des discours usuels sur une économie concurrentielle. De ce point de vue, il peut sembler ne pas être totalement satisfaisant :

« Il apparaît clairement que la théorie de l'équilibre concurrentiel ne peut être fondée de manière satisfaisante sur le plan analytique qu'à condition de définir un autre concept d'équilibre, plus fondamental, et qui pourrait l'être sans référence aux prix annoncés, tout en demeurant plausible même pour de petites économies. » (Hildenbrand (1983), p. 131).

SECTION I

La représentation d'une économie de marchandage

Ce constat est également dressé par Edgeworth (1881) lorsqu'il refuse le rôle hégémonique du commissaire priseur dans l'approche walrasienne. Selon lui, il convient de mettre en place « une méthode générale applicable aux cas particuliers de concurrence imparfaite ; là où les concepts de demande et d'offre à un prix ne sont plus appropriés » (p. 31).

Afin d'établir un autre concept d'équilibre, il développe un modèle de marchandage.

III. I. 1 Le travail pionnier d'Edgeworth

Le comportement des agents : la gouvernance des forces du plaisir

Pour décrire le comportement des individus dans son modèle, Edgeworth (1881) utilise une analogie avec la mécanique. Les agents sont alors dépeints comme des machines à plaisir : « […] the conception of Man as a pleasure machine […] » (p. 15)

Il en résulte que « The Economical Calculus investigates the equilibrium of a system of hedonic forces each tending to maximum individual utility. » *(ibid*, p. 15)

Guerre ou coopération

On ne trouve pas non plus d'équivalent au courtier « walrasien ». Les agents sont libres de procéder en personne aux échanges. Ils peuvent interagir directement. Dans ce cas, sur quelle base vont être déterminés les taux d'échanges ? L'élément déterminant est ici le rapport de force. Les individus vont naturellement avoir tendance à former des coalitions pour défendre, contre d'autres coalitions, des intérêts communs. On peut alors se demander si l'économie se trouve principalement dans une situation de « guerre » ou de « paix » ? Sur ce point, Edgeworth apporte la précision suivante:

« The first principle of Economics is that every agent is actuated only by self- interest. The workings of this principle may be viewed under two aspects, according as the agent acts *without*, or *with*, the consent of others affected by his actions. In wide senses, the first species of action may be called *war*; the second *contract*. » (*ibid*, p. 16- 17)

En fait, dans l'approche initiale d'Edgeworth on trouve à la fois un état de paix et de guerre. Le premier est lié au fait que les échangistes passent des contrats qui permettent de s'engager au sein d'une coalition. Naturellement, un contrat implique l'accord des différentes parties. Par contre, le « recontrat » est assimilable à un état de guerre puisqu'il offre la possibilité aux individus de rompre unilatéralement un contrat existant afin de pouvoir faire partie d'une autre coalition.

Un monde sans prix

Le modèle décrit fondamentalement un univers sans prix. Bien que certaines présentations les incorporent tout de même, ils sont en fait totalement inutiles. Dans cette économie, le marchandage et les rapports de forces sont la règle.
L'éviction des prix évite de mobiliser la fiction du commissaire priseur. C'est là, le principal intérêt. Néanmoins, en son absence se pose la question de la transmission de l'information aux agents. Comment ces derniers sont- ils au courrant des possibilités d'échanges qui s'offrent à eux ?

La semi- centralisation

Pour répondre à cette interrogation, on est obligé d'introduire une dose de centralisation. Ainsi, Edgeworth (1881) envisageait de rassembler tous les individus en un lieu ou de les connecter par téléphone afin qu'ils puissent acquérir l'information nécessaire :

« There is free communication throughout a normal competitive field. You might suppose the constituent individual collected at a point, or connected by telephones- an ideal supposition, but sufficiently approximate to existence tendency for the purposes of abstract science. » (p. 18).

Sur le plan théorique, la centralisation de l'information est indispensable. Si tel n'était pas le cas, on se heurterait rapidement au problème de la « double coïncidence » des besoins et le processus d'échange se trouverait bloqué. Pour terminer, notons qu'il n'est pas fait mention, dans le modèle, de la manière dont s'effectuent les échanges.

Les conditions de la concurrence et le nombre d'agents

Dans ses *Mathematical Physics* Edgeworth ne fixe pas précisément le nombre d'agents présents. Il se contente de spécifier que l'on se trouve dans un contexte de concurrence dès lors que l'on est en présence de plus de deux agents.

III. I. 2 La formalisation par Debreu et Scarf

La contribution d'Edgeworth est restée longtemps sans prolongement. On peut conjecturer, comme Hildenbrand (1983), que cela est dû à sa manière particulière d'exposer ses conceptions. Quoi qu'il en soit, il faut attendre l'article de Debreu et Scarf (1963) pour observer un regain d'intérêt pour les économies de marchandage. Ces deux auteurs reprennent de façon formalisée les idées d'Edgeworth et y ajoutent quelques développements récents tel le concept de « cœur ». Nous allons tout d'abord faire un tour d'horizon des hypothèses qu'ils mobilisent.

L'insatiabilité du consommateur

Pour reprendre de façon plus contemporaine l'idée d'Edgeworth selon laquelle les individus sont gouvernés par les forces du plaisir, Debreu et Scarf formulent l'hypothèse

d' « insatiabilité » (p. 238)[1]. Celle- ci énonce qu'il existe toujours un panier de bien Q' strictement préféré par le $i-ème$ agent au panier Q.
Cette hypothèse revient à exclure un phénomène de satiété c'est-à-dire l'existence d'un « maximum » de satisfaction. Elle est complétée par celle de la convexité forte de la relation de préférence.

L'hypothèse de convexité forte des préférences

Rappelons qu'il y a convexité forte lorsque pour deux paniers biens Q' et Q (choisis arbitrairement) tels que $Q' \succeq Q$, et si quel que soit un nombre $\lambda \in \left]0;1\right[$, on a : $\lambda Q' + (1-\lambda)Q \succ_i Q$.

Cette hypothèse stipule que les agents ont un goût pour les mélanges. Ils préfèrent consommer un mélange de chaque panier de bien plutôt que d'en avoir un unique. On évite ainsi « les solutions en coin ». Pour une raison de cohérence on lui adjoint l'hypothèse de monotonie de la relation de préférence.

La continuité ou la survie du consommateur

On a eu l'occasion de le dire, l'hypothèse de continuité de la relation de préférence est une conséquence directe de la convexité. Dans le modèle d'équilibre général, la continuité certifie que la valeur des dotations initiales du consommateur est perpétuellement positive quelque soit le choix du vecteur prix choisit par le commissaire priseur. Par contre, comment interpréter cette hypothèse dans le cadre d'une économie sans prix ?

En réalité, la continuité a toujours pour but de garantir la survie du consommateur. Toutefois, son interprétation nécessite maintenant de considérer explicitement le caractère strictement positif des ressources individuelles :

« We assume that every consumer owns a strictly positive quantity of every commodity » (Debreu et Scarf (1963), p. 238).

[1] Debreu et Scarf (1963) ne font pas appel aux fonctions d'utilités. Ils présentent leur analyse uniquement à partir d'hypothèses sur les préférences.

Formellement, on considère que la relation de préférence est continue, si pour tout panier de biens $Q \in \mathbb{R}^l$, les ensembles $\left\{ Q' \in \mathbb{R}^l \,\middle|\, Q \preceq Q' \right\}$ et $\left\{ Q' \in \mathbb{R}^l \,\middle|\, Q' \preceq Q \right\}$ sont fermés.

En somme, le consommateur bénéficie d'un vecteur de dotations initiales lui permettant de survivre sans procéder à des échanges. Cette hypothèse garantit que tous les échanges effectués sont volontaires. Autrement dit, si un agent réalise une transaction c'est qu'il y trouve un surcroît de satisfaction et non qu'il y est contraint par la nécessité de se nourrir.

La propriété de monotonie

La monotonie de la relation de préférence n'apparaît pas explicitement dans la formulation de Debreu et Scarf. Elle est pourtant bien présente car elle assure que le $i-ème$ consommateur préfère le panier de biens Q' à celui Q que s'il contient au moins autant de chaque bien et plus d'un bien. En d'autres termes, les agents trouvent un surcroît de satisfaction à toute addition supplémentaire de biens.

Les autres hypothèses sur la relation de préférences

Pour le reste, les hypothèses sont classiques puisqu'il est supposé l'existence d'un pré ordre total. Ainsi, la relation de préférence est complète et réflexive. Naturellement, elle est aussi transitive afin de faire en sorte que les choix des consommateurs aient une cohérence minimale.

Le nombre d'échangiste

Le modèle Debreu- Scarf met en scène m agents distincts :

« We consider m consumer each with specific preferences for commodity bundles consisting of nonnegative quantities of a finite number of commodities. » (p. 237).

Toutefois, ces derniers sont dupliqués de manière à ce qu'il y ait « r » consommateurs de chaque type c'est- à- dire pourvus de dotations initiales et de préférences semblables. L'économie est alors composée de « $m \cdot r$ » individus. Dans ces conditions, une allocation possible est décrite par l'équation : $\sum_{i=1}^{m} \sum_{x=1}^{r} Q_{ix} - r \sum_{i=1}^{m} \bar{Q}_i = 0$. Naturellement, des individus identiques ont la même consommation. Il s'ensuit qu'une allocation est dans le cœur, pour une économie dupliquée, si :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{r} \sum_{x=1}^{r} Q_{ix} - \bar{Q}_i\right) = 0$$

$$(2) \qquad \frac{1}{r} \sum_{x=1}^{r} Q_{ix} \succsim Q_i$$

III. I. 3 <u>La représentation actuelle</u>

Bien que Debreu et Scarf fournissent une version rigoureuse d'une économie de marchandage, ils font néanmoins appel à des hypothèses quelques peu restrictives. C'est pourquoi, on utilise plutôt la représentation de Aumann (1964).

L'hypothèse de mesurabilité

Si Debreu et Scarf précisent d'emblée que la relation de préférence est pré- ordonnée, tel n'est pas le cas d'Aumann qui mobilise une hypothèse de « mesurabilité ».

DEFINITION

On dit qu'un ensemble $\{m : Q(m) \succ_m Q'(m)\}$ est mesurable au sens de Lebesgue (ou Lebesgue mesurable) sur M, s'il existe une unique mesure μ tel que μ (M) = Q (m) - Q'(m).

L'hypothèse de mesurabilité permet d'éviter que la relation de préférence soit transitive ou complète. La seule contrainte est qu'elle soit réflexive. Pourtant, Aumann ne trouve aucune interprétation économique à cette hypothèse :

« The measurability assumption (2.4) is of technical significance only and constitutes no real economic restriction. » (Aumann (1964), p.44)

La complétude de la relation signifie qu'il est toujours possible pour un consommateur i de comparer deux paniers de biens quelconques. Ce qui implique une rationalité « procédurale ». L'avantage de la mesurabilité est notamment de s'affranchir de cette hypothèse.

Désirabilité et continuité

En dehors de la mesurabilité, Aumann fait appel à des hypothèses de désirabilité et de continuité :

Désirabilité: $Q \geq Q' \Rightarrow Q \succ_m Q'$

Continuité: $\forall Q' \in E$, les ensembles $\{Q | Q \succ_m Q'\}$ et $\{Q | Q' \succ_m Q\}$ sont ouverts dans E.

Comparaison

On se propose à présent d'examiner la notion d'équilibre à l'œuvre lorsque le cadre institutionnel retenu est celui d'une économie de marchandage.

Pour mener cette étude nous allons tour à tour revenir sur les articles de Debreu et Scarf (1963) ainsi que sur celui d'Aumann (1964). Tous deux démontrent le résultat fondamental suivant : lorsque le nombre des agents de l'économie devient arbitrairement grand alors le cœur se confond avec l'ensemble des allocations d'équilibre de concurrence parfaite. La preuve de cet énoncé a été établie en s'appuyant pour les premiers sur des « duplications successives » du nombre d'individus et pour le second en recourant à un « continuum » d'agents.

SECTION II

L'approche par les duplications successives. Le théorème limite du cœur.

Ce théorème prouve, que sous certaines conditions, les allocations du cœur d'une économie sont équivalentes à l'ensemble des affectations des ressources à laquelle on parvient en recourant à des prix d'équilibres de concurrence parfaite. Comme son nom l'indique, Debreu et Scarf l'ont établi en se plaçant dans un cas extrême : celui où le nombre d'agents tend vers l'infini.

III. II. 1 Concurrence parfaite et cœur

Le raisonnement des deux auteurs part du résultat établi par Shapley (1955) : toute allocation de concurrence parfaite est contenue dans le cœur.

Avant de s'attarder sur la démonstration, énonçons d'abord l'axiome fort des préférences révélées qui en est le point fondamental.

Axiome fort des préférences révélées

Soit Q_h le panier de bien choisi au prix P_h. Considérons, la chaîne suivante de préférences : $Q_L \gtrsim Q_{L-1} \gtrsim \ldots \gtrsim Q_h \gtrsim \ldots \gtrsim Q_1$

Il résulte de l'axiome fort des préférences révélées, que si l'une au moins des relations est stricte, on doit avoir :

$$P_L \cdot Q_L > P_L \cdot Q_1$$

Ce résultat constitue une condition indispensable pour préserver la relation de transitivité des agents.

La démonstration de Shapley

Soit Q_e l'allocation des ressources de concurrence parfaite au prix P_e. Supposons qu'au moins une coalition préfère le panier de biens Q' (associé au prix P') à celui d'équilibre. On obtient alors :

$$Q'(P') \gtrsim Q_e(P_e) \gtrsim \bar{Q}(\bar{P})$$

En se souvenant qu'au moins un agent de la coalition à une préférence stricte, il dérive de l'axiome fort des préférences révélées que l'on a bien :

$$\sum_{i \in S} P' \cdot Q'_i > \sum_{i \in S} P' \cdot \bar{Q}_i$$

Toutefois, le couple (P_e, Q_e) maximisant, par définition, l'utilité du consommateur sous sa contrainte de budget ; il en découle, si l'on considère l'unicité de l'équilibre[1], que l'allocation Q' ne peut pas satisfaire la condition: $\sum_{i \in S} (Q'_i - \overline{Q}_i) = 0$.

Par conséquent, aucune allocation préférée à Q_e n'est réalisable et ne peut être « bloquée » par une coalition. Ce qui achève de prouver que Q_e est une allocation du cœur.

III. II. 2 Cœur et concurrence parfaite

La seconde et dernière étape de la démonstration consiste à prouver la réciproque c'est-à-dire que toute allocation du cœur Q est aussi une affectation des ressources de concurrence parfaite.

L'insertion d'ensembles convexes

On a déjà eu maintes fois l'occasion d'attirer l'attention sur le rôle crucial que jouent les ensembles convexes dans les démonstrations en économie. De façon presque systématique les théoriciens cherchent à s'y ramener. C'est également le cas ici.

Pour ce faire, Debreu et Scarf introduisent des ensembles Γ_i contenant tous les vecteurs Z, définis sur l'espace des biens, de sorte que $Z + \overline{Q}_i \succ_i Q_i$. Bien entendu ceux- ci ont pour propriétés d'être convexes et non vides. L'ensemble Γ correspondant alors à la « coque convexe de l'union de tous les Γ_i ».

Une application du théorème de la séparation des convexes

Le point clé de la démonstration est que ce dernier ensemble ne contient pas son origine. Il en résulte, d'après le théorème de séparation des convexes, qu'il existe un vecteur-prix P tel que $P \cdot Z \geq 0$ quel que soit Z dans Γ.

Il ne reste plus qu'à démontrer que ce vecteur prix P est nécessairement un vecteur prix d'équilibre de concurrence parfaite. Raisonnons par l'absurde et supposons que cela ne soit pas le cas. Pour une allocation $Q' \succ_i Q_i$, tel que $Q' - \overline{Q_i}$ appartienne à Γ_i, on pourrait alors

[1] C'est d'ailleurs ce qui a été implicitement supposé à travers l'axiome des préférences révélées.

obtenir $P \cdot Q' \geq P \cdot \overline{Q_i}$. Ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle le panier Q est dans le cœur. Afin qu'il s'y trouve on doit avoir, pour tous $Q' \succ_i Q_i$, $P \cdot Q' > P \cdot Q$ c'est-à-dire $\sum_{i \in S} (Q_i' - \overline{Q_i}) > 0$. Or ceci n'est vrai que si le vecteur- prix est d'équilibre.

III. II. 3 <u>Conclusion</u>

Le point central de la démonstration est que l'ensemble Γ ne contient pas son origine. C'est là une condition essentielle pour faire appel au théorème de la séparation des convexes. Pour fonder ce résultat, Debreu et Scarf augmentent successivement le nombre d'échangistes. Ces derniers sont dupliqués et l'économie passe tout d'abord de « $m \cdot r$ » agents à « $m \cdot (r+1)$ » individus. Il est alors facile de remarquer que la duplication des agents restreint le cœur :

« It is easy to see that the core for $r+1$ is contained in the core for r, for a coalition which blocks in the economy with r repetitions will certainly be available for blocking in the economy with $(r+1)$ repetitions. » (Debreu et Scarf (1963), p. 241).

En effet, l'augmentation du nombre d'individus de chaque type accroît également le nombre de coalitions envisageables ainsi que les possibilités de recontracter. Par conséquent, le cœur se réduit. A la rigueur lorsque le nombre d'agents tend vers l'infini, ce dernier se confond avec les allocations d'équilibres de concurrence parfaite.

SECTION III

La méthode du continuum d'agents

Malgré son incontestable élégance, la preuve de Debreu et Scarf a pour inconvénient de mettre en scène des agents identiques. La formalisation proposée par Aumann a justement pour point de départ le refus de considérer des individus semblables :

« This seems far from economic reality, where, in general, different traders cannot be expected to have the same initial bundles or the same preferences. The continuous model allows *all* traders to have different initial bundles and different preferences. » (p. 48)

L'objectif de « Markets with a Continuum of Traders » est donc d'obtenir le même résultat que précédemment mais en y ajoutant un surcroît de réalisme. Notons, enfin, que toute son analyse se limite au cadre d'une économie d'échange.

III. III. 1 Le statut des agents

L'originalité de l'article d'Aumann est liée à sa façon de théoriser les échanges et spécifiquement à l'usage d'un continuum d'agents.

L'axiomatisation des échangistes

Formellement, l'ensemble des échangistes prend place dans l'intervalle fermé unitaire $[0;1]$ que l'on désigne par la lettre M.

Dans cette optique, les dotations des individus sont des fonctions Q de M dans Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^l$. Ces dernières sont intégrables au sens de Lebesgue sur M. Autrement dit, une distribution des richesses est notée $\int_M Q(m)\, dm$ où m représente un individu.

Coalitions mesurables au sens de Lebesgue

Conformément à l'approche initiale d'Edgeworth, les échangistes se regroupent au sein de coalitions. On dit alors que celles- ci sont mesurables au sens de Lebesgue, sur un sous- ensemble de M, si elles peuvent être nulles. Une coalition nulle se caractérise par le fait que les dotations des consommateurs sont égales à zéro et qu'ils sont alors en situation de trépasser. La preuve effectuée par Aumann s'appuie de façon décisive sur le concept de coalition mesurable au sens de Lebesgue. Pourtant, en dehors du fait qu'il reconnaisse que cette notion s'oppose à l'hypothèse de survie du consommateur, il ne lui donne aucun sens précis dans son article :

« The other aspect we have not discussed is the economic significance of the Lebesgue measure of a coalition. This, too, we plan to discuss in a subsequent paper. »

En fait, ce concept donne un sens plus précis à la notion de coalition effective.

Coalition réalisable et allocations dominées

Une coalition *S* est dite réalisable ou effective si elle vérifie l'équation suivante :

$$(3.1) \quad \int_S Q(m)\,dm = \int_S \bar{Q}(m)\,dm$$

Cette condition garantie que l'on se situe exclusivement dans une économie d'échange et que par conséquent les ressources se réduisent au stock de biens disponibles à l'instant initial. De plus on observe, comme cela est pratiquement toujours le cas, que le modèle ne prend pas en compte la possibilité de détérioration de biens.

Pour terminer, on dit qu'une allocation Q' domine une allocation Q si tous les membres d'une coalition réalisable *S* préfèrent strictement le panier de biens Q' au panier Q.
La condition pour qu'une allocation soit dominée est ici plus forte que celle mobilisée par Debreu et Scarf. Ces derniers n'ayant besoin d'une préférence stricte que pour « au moins un agent ». Cette différence tenant au fait qu'Aumann considère un nombre plus important d'individus distincts. Logiquement les possibilités de recontrats se décuplent et il devient nécessaire de concevoir de manière plus restrictive la notion de cœur. C'est ce que nous allons observer maintenant.

III. III. 2 <u>Cœur et équilibre</u>

Pour la cause ci- dessus, Aumann est amené à présenter la définition suivante :

Définition

On appelle « cœur » l'ensemble des allocations qui ne peuvent être dominées par aucune coalition (non nulle).

C'est donc sur cette base, qu'il entame sa démonstration. Celle- ci est décomposable en deux morceaux.

La structure de la démonstration : première partie

A l'instar de Debreu et Scarf, Aumann commence par observer que les équilibres de concurrence parfaite se situent dans le cœur. Toutefois, pour faire émerger ce résultat il n'invoque pas le travail de Shapley mais propose une démonstration qui reprend le concept de mesurabilité au sens de Lebesgue. La preuve se réalise alors par l'absurde.

En effet, considérons un équilibre de concurrence parfaite que l'on note (P_e, Q_e). Si dans cet état de l'économie, l'allocation d'équilibre Q_e pouvait être dominée par une allocation Q' on obtiendrait, quelque soit m appartenant à une coalition S: $P_e \cdot Q'(m) > P_e \cdot \bar{Q}(m)$ puisque par définition d'une économie d'échange $P_e \cdot Q_e = P_e \cdot \bar{Q}(m)$. Il s'ensuivrait alors l'inégalité suivante :

$$P_e \cdot \int_S Q'(m)\,dm = \int_S P_e \cdot Q'(m)\,dm > \int_S P_e \cdot \bar{Q}(m)\,dm = P_e \cdot \int_S \bar{Q}(m)\,dm\,.$$

Cela contredirait le fait que la coalition S est effective c'est-à-dire que $\int_S Q'(m)\,dm = \int_S \bar{Q}(m)\cdot dm$.

Par conséquent, aucune autre distribution des ressources ne peut dominer l'allocation Q_e. Il en résulte que cette dernière est une allocation du cœur.

On a prouvé que toute allocation d'équilibre de concurrence parfaite se trouve dans le cœur. Inversement, il est possible de démontrer que toute allocation du cœur correspond à un équilibre général concurrentiel.

La structure de la démonstration : deuxième partie

Considérons une allocation Q faisant partie du cœur. On peut donc établir :

- que Q est préféré par la totalité des agents à n'importe quelle autre allocation ne faisant pas partie du cœur. En d'autres termes, on a : $F(m) = \{Q : Q \succ_m Q(m)\}$
- qu'il existe une fonction G (m) tel que $G(m) = F(m) - \bar{Q}(m) = \{Q - \bar{Q}(m) \mid Q \in F(m)\}$

A partir de ces deux axiomes, Aumann déduit le lemme suivant qui lui sert à établir la première propriété de sa démonstration.

LEMME

Pour la totalité des coalitions U d'agents, 0 n'est pas un point intérieur à $\Delta(U)$.

Où $\Delta(U)$ représente la coque convexe de l'union $\cup_{m \in U} G(m)$. Enfin, pour être complet rappelons que 0 est un point intérieur à $\Delta(U)$ si $\Delta(U)$ est dans le voisinage immédiat de 0.

Etant donné le lemme ci- dessus, il existe un hyperplan $P \cdot Q = 0$ qui supporte $\Delta(U)$. Il en découle que $P \cdot Q \geq 0 \, \forall Q \in G(m)$, ou ce qui est équivalent :

$$(3.2) \quad P \cdot Q \geq P \cdot \bar{Q}(m) \quad \forall Q \in F(m)$$

Le respect de la contrainte budgétaire

Si Q est une allocation d'équilibre de concurrence parfaite, alors elle respecte tout d'abord la contrainte budgétaire de chaque agent m. En d'autres termes :

$$(3.3) \quad P \cdot Q(m) \leq P \cdot \bar{Q}(m)$$

D'après l'hypothèse de « désirabilité », on a, pour toute allocation $Q(m) \succ_m \bar{Q}(m)$, $P \cdot Q(m) \geq P \cdot \bar{Q}(m)$. L'inégalité au sens strict est impossible dans la mesure où cela impliquerait que l'on est $\int_M P \cdot Q > \int_M P \cdot \bar{Q}$. Ce qui serait en contradiction avec le fait que Q est dans le cœur. On en déduit donc que (3.3) est vérifiée lorsque la contrainte budgétaire est saturée.

La satisfaction maximum

L'étape finale est de prouver que Q rend maximum la satisfaction de chaque agent étant ses impératifs budgétaires. Ceci revenant à spécifier que (3.2) peut se mettre sous la forme d'une inégalité au sens strict :

$$(3.4) \quad P \cdot Q > P \cdot \bar{Q}(m)$$

Pour effectuer cette preuve, Aumann impose une restriction supplémentaire selon laquelle le vecteur prix doit être strictement positif pour tous ses éléments. Il commence par observer que pour $\delta > 0$ suffisamment petit, on a toujours :

$$P \cdot \bar{Q}(m) \leq P\left[Q-(\delta, 0, \ldots, 0)\right]$$

Avec $P\left[Q-(\delta, 0, \ldots, 0)\right] \in F(m)$ d'après l'hypothèse de continuité.

A l'évidence, $Q-(\delta, 0, \ldots, 0) \prec Q$. D'après l'axiome des préférences révélées, il vient :

$$P \cdot \bar{Q}(m) \leq P\left[Q-(\delta, 0, \ldots, 0)\right] < P \cdot Q$$

SECTION IV

La question du processus et du rayonnement des modèles de marchandage

III. IV. 1 Existence d'un processus et stabilité

La question de l'existence d'un processus dans l'œuvre d'Edgeworth est un débat récurrent. Il est pour nous de la plus grande importance car, d'après les enseignements du premier chapitre, sans processus il n'est pas question de parler « d'équilibre ».

La position d'Edgeworth

La posture d'Edgeworth sur ce thème tout au long de *Mathematical Physics* alimente à profusion le débat. Il semble croire à l'existence d'un processus mais le considère comme secondaire (voir Berta (2000)). Dans la mesure où il ne livre que des indications nous n'allons pas spéculer plus longtemps sur sa position. Par contre, il est clair que ses successeurs estiment qu'un processus (convergeant) existe. Une célèbre formulation de celui- ci est due à Hahn (1982)[1].

La formulation de Hahn

Pour formaliser ce qu'il convient maintenant d'appeler le « processus d'Edgeworth »,

[1] On préfère ici présenter la formulation du processus d'Edgeworth réalisée par Hahn plutôt que celle faite par Uzawa (1962). En effet, Uzawa introduit des prix dans sa présentation alors que ces derniers ne jouent aucun rôle. Son interprétation pouvant alors induire des confusions.

l'auteur commence par introduire des fonctions d'utilités[1] jusque là absentes du modèle Debreu- Scarf. Il suppose entre autre qu'elles sont croissantes dans le temps pour tous les agents et strictement croissante pour au moins l'un d'entre eux. Il définit ensuite une équation différentielle représentant le processus d'Edgeworth :

$$(3.5) \qquad \bar{Q}'_i(t) = \sum_{h=2}^{l} (TMS^{i}_{h/1} - TMS^{m-i}_{h/1})$$

Où $\bar{Q}(t)$ est un vecteur formé par les quantités de biens détenues en t.

L'équation (3.5) montre que des possibilités d'échange avantageuses existent. L'agent i augmente son bien-être tant que son taux marginal de substitution n'égalise pas celui de ses coéchangistes. En d'autres termes, le consommateur i est favorable à des échanges dès lors que $Q'_i(t) > 0$.

Par contre, l'équilibre se caractérise par le fait qu'il n'y a plus d'échange mutuellement avantageux. L'agent i ne désire pas modifier sa position. On obtient alors $Q'_i(t) = 0$.

L'étude de la stabilité

Plutôt que d'étudier directement la stabilité de (3.5), Hahn passe par la fonction modifiée de Lyapounov suivante :

$$V(Q_i(t)) = \sum_{i=1}^{m} U_i(Q_i(t))$$

Dans la mesure où les échanges ont lieu en permanence et que $Q_i(t)$ varie continûment dans le temps, il en résulte que V est bien continue.

De plus, comme le vecteur Q représente une quantité de biens, on voit difficilement comment il pourrait tendre vers l'infini. Les trajectoires issues de $Q_i(t, \bar{Q}_i(t_0))$ sont donc bornées. Par conséquent, la fonction $V(Q_i(t, \bar{Q}_i(t_0)))$ l'est également. Si on ajoute à cela, le fait que les fonctions d'utilités sont croissantes et donc que V l'est aussi, alors on a : $\lim_{t \to \infty} V(Q_i(t, Q_i(t_0))) = V_e$ (V étant croissante et majorée).

[1] Celles- ci sont supposées être quasi- concaves (notamment afin de garantir que l'utilité marginale puisse être croissante).

Enfin, on observe aisément que la fonction V est constante à l'équilibre puisque l'on a $Q_i'(t)=0$ et donc $\sum_{i=1}^{m}(U_i'(Q(t))\cdot Q_i'(t))=0$. Ce qui finit de montrer que V est une fonction modifiée de Lyapounov.

La suite de la démonstration vient tout naturellement. Comme on peut associer une fonction modifiée de Lyapounov au processus (3.5), il découle du théorème d'extension des fonctions de Lyapounov au processus, que (3.5) est globalement stable.

III. IV. 2 L'influence de l'œuvre d'Edgeworth. Les modèles de marchandage versus la théorie de l'équilibre générale

Pour parachever cette analyse, on va tenter de répondre de manière plus précise à la question suivante : pourquoi, en dépit d'un résultat convaincant en matière de stabilité, les modèles de marchandage n'ont pas sur- planter le modèle d'équilibre général, typique de l'approche walrasienne ?

Un manque de réalisme associé à un obscurantisme

Peu de réflexions approfondies ont été consacrées à ce sujet. Nicholas Kaldor (1934) est l'un des quelques théoriciens à s'être interrogé là-dessus. Il expose en ces termes sa conviction :

« While Edgeworth's analysis may be slightly obscure and Walras's assumption slightly ridiculous […] » (p. 127)

A ses yeux, l'aspect ridicule de l'approche walrasienne est liée à un manque évident de réalisme. Il vise en particulier le processus de tâtonnement :

« […] in a really "perfect market" (in a market which is sufficiently perfect to make equilibrium determinate) it is not by "trial and error" that prices are established; » (*ibid*)

Toutefois, le modèle d'Edgeworth n'échappe pas non plus à cette critique dans la mesure où la formation des prix doit intervenir avant le processus d'échange et ne doit pas être l'une de ses résultantes :

« The formation of prices must *precede* the process of exchange and not be the result of it. » (p. 127)

A ce premier élément s'en ajoute un second. Il tient, selon Kaldor, à la présentation peu claire que dresse Edgeworth de la concurrence parfaite qui repose sur le principe de recontrat et sur l'hypothèse d'agents connectés par téléphone. Outre son irréalisme, les modèles de marchandage auraient donc pour handicap supplémentaire un manque de clarté. Les tergiversations d'Edgeworth sur l'existence d'un processus sont symptomatiques des ambiguïtés inhérentes aux modèles de marchandage.

Un second point de vue

Walker (1973) s'interroge lui aussi sur la prédominance du modèle d'équilibre général. Il reprend à son compte la thèse du manque de clarté, en y ajoutant des détails supplémentaires.

D'après Walker le premier élément qui introduit une certaine confusion dans l'esprit des lecteurs, provient du fait qu'Edgeworth adhère à la conception walrasienne de la concurrence parfaite :

« On the one hand, Edgeworth subscribed to a Walrasian point of view, which was an abstract mathematical and logical conception of an ideal perfectly competitive market model. » (p. 139).

Son objectif n'était alors pas de remettre en cause la vision walrasienne de la concurrence parfaite, mais de lui donner un prolongement « dynamique » permettant un meilleur ancrage dans la réalité :

« On the other hand, he wanted to develop an analysis of the historical dynamic processes whereby actual markets move towards equilibrium, for which purpose he developed his theory of recontract. » (*ibid*)

Conclusion

De ce dernier point de vue, les modèles de marchandage – fondés sur la théorie d'Edegeworth – apparaissent comme de simples contributions à l'analyse de la concurrence imparfaite. En dépit de leur originalité, ils ne restent que des raffinements de la théorie de l'équilibre général.

CHAPITRE IV

Trajectoires et orbites d'équilibres

On va à présent changer de perspective et s'intéresser non plus à l'équilibre comme un « point » mais en tant que « trajectoire ».

SECTION I

Présentation du modèle de Von Neumann

IV. I. 1 La structure

Le propos du modèle est d'étudier un processus de production circulaire. Outre le facteur travail, les marchandises sont produites à l'aide d'autres marchandises :

« Goods are produced not only from "natural factors of production," but in the first place from each other. These processes of production may be circular, i.e. good G_1 is produced with the aid of good G_2, and G_2 with the aid of G_1. » (p. 1)

Notation

Les biens de cette économie sont au nombre de l, caractérisés par l'indice h, et notés $G_1,...,G_l$. Ceux- ci peuvent être produits en utilisant plusieurs types de processus de productions $f_1,\ldots, f_n$. En fait, les processus sont des « applications » symbolisables comme suit :

$$\text{(4.1)} \quad f_j : \sum_{h=1}^{l} a_{jh}\, G_h \to \sum_{h=1}^{l} b_{jh}\, G_h$$

Précisons que a_{jh} et b_{jh} représentent respectivement les quantités du h- ième input et output utilisées et crées durant le $j-$ième processus de production.

Enfin, chaque marchandise est associée à une composante du vecteur prix $P = (p_1, ..., p_h, ..., p_l)$.

Coefficient d'expansion et facteur d'intérêt

Une technique de production peut être employée de façon plus où moins intensive. C'est pourquoi, il est adjoint à chaque processus une « intensité » d'utilisation représentée par un élément du vecteur $X = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)$.

Von Neumann fait l'hypothèse que les intensités relatives sont constantes. Par contre, elles peuvent être toutes multipliées par un même scalaire α appelé *coefficient d'expansion de l'économie*. Il en résulte que le taux de croissance est uniforme.

Parallèlement, il définit un facteur d'intérêt β tel que $\beta = 1 + \frac{z}{100}$ (z étant le taux d'intérêt).

Détermination du coefficient d'expansion et du facteur d'intérêt

L'un des objectifs des modèles de croissance équilibrée est, comme son nom l'indique, d'obtenir un taux de croissance constant et identique pour tous les biens et plus largement pour toutes les variables. Ceci afin d'éviter les goulets d'étranglements ainsi que les effets reports qui s'ensuivraient et qui ne manqueraient pas d'engendrer des déséquilibres. Par conséquent, le coefficient d'expansion est déterminé par le secteur le moins productif. Inversement, le facteur d'intérêt est déterminé par le processus de production le plus coûteux. Tout cela se résume formellement à travers les deux équations suivantes :

$$(4.2) \qquad \alpha = \underset{h=1,\dots,l}{\mathrm{Min}} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{jh}\ x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{jh}\ x_j} \right]$$

$$(4.3) \qquad \beta = \underset{j=1,\dots,n}{\mathrm{Max}} \frac{\sum_{h=1}^{l} b_{jh}\ p_h}{\sum_{j=1}^{n} a_{jh}\ p_h}$$

Sphère réelle et sphère monétaire

L'une des spécificités de ce modèle est, de l'aveu même de son auteur, d'établir un lien entre l'économie réelle et monétaire à travers le coefficient d'expansion et le facteur d'intérêt :

« Another feature of our theory, so far without interpretation, is the remarkable duality (symmetry) of monetary variables (prices y_j, interest factor β) and the technical variables (intensities of production x_i, coefficient of expansion of the economy α). » (p. 1)

En ce sens, von Neumann présage le théorème de la dualité.

IV. I. 2 Hypothèses complémentaires

Nous allons maintenant dévoiler toute une série d'hypothèses complémentaire (mais non secondaire!) nécessaire pour s'assurer de la cohérence du modèle ou pour en préciser le sens.

Les hypothèses sur les intensités et les prix

Les « intensités » et les « prix » sont positifs c'est-à-dire que l'on a :

$$(4.4)\ x_j \geq 0 \quad \text{et} \quad (4.5)\ p_h \geq 0$$

Toutefois, cette hypothèse n'élimine pas le cas extrême ou l'ensemble, des intensités ou des prix, serait nul. C'est pourquoi, il ajoute l'exigence suivante :

$$(4.6)\ \sum_{j=1}^{n} x_j > 0 \quad \text{et} \quad (4.7)\ \sum_{h=1}^{l} p_h > 0\,.$$

Les hypothèses sur les inputs et les outputs

Fondamentalement, ce modèle de croissance s'intéresse exclusivement à la production. La consommation des ménages n'y est jamais évoquée. Seule celle « d'inputs » intervient par l'intermédiaire de la condition de cohérence suivante :

$$(4.8) \quad \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{jh}\ x_j \leq \sum_{j=1}^{n} b_{jh}\ x_j$$

Cette condition relève du bon sens puisqu'elle stipule qu'il est impossible de consommer, au sein des processus de production, plus de chaque bien qu'il en est produit. Etant donné la manière dont est déterminé le coefficient d'expansion, il faut que l'inégalité (4.8) soit stricte pour chaque marchandise pour qu'il y ait une croissance de la production.

La consommation

On a présenté jusqu'ici les principes qui régissent la détermination des quantités offertes mais la consommation des ménages n'a pas encore été évoquée. Pour cause, elle ne joue pratiquement aucun rôle ! En fait, von Neumann estime qu'elle est prise en compte dans le processus de production à hauteur d'un niveau de subsistance :

« Consumption of goods takes place only through the processes of production which include necessities of live consumed by workers and employees. In other words we assume that all income in excess of necessities of live will be reinvested. » (p. 2).

Le cas de la surproduction

Un des attraits de l'article de von Neumann est d'envisager le cas d'une surproduction. Ce qui nous sera précieux au moment d'aborder les problèmes de planification. Toujours est-il, que la possibilité d'une surproduction apparaît dans l'équation ci-dessous :

$$\text{(4.9)} \qquad \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{jh}\, x_j < \sum_{j=1}^{n} b_{jh}\, x_j \Rightarrow p_h = 0$$

Cette équation montre que les biens surproduits sont associés à des prix nuls. Autrement dit, ils sont offerts gratuitement ou tout simplement éliminés sans coût.

De Leontieff à von Neumann

Le modèle de croissance de von Neumann est une généralisation de celui de Léontieff au cas où il y a production jointe. En effet, comme dans l'analyse entrée- sortie, les relations techniques sont linéaires (confère équation (4.1)), tout ce qui est produit sert à une nouvelle production (voir équation (4.8)) et les rendements d'échelle sont constants[1]. En réalité, la différence principale réside dans la prise en compte par von Neumann de biens durables.

[1]On s'en rend compte à travers le fait que les coefficients techniques sont constants. Nous verrons un peu plus loin les motifs pour lesquels des rendements d'échelle partout constants sont postulés.

La vision du temps

Un dernier point important concerne l'intervalle de temps dans lequel prend place ce modèle. A ce sujet, l'auteur précise la durée du processus de production :

« Each process to be of unit time duration. Processes of longer duration to be broken down into single processes of unit duration introducing if necessary intermediate products as additional goods. » (p. 2).

Le modèle envisage donc le long terme. Celui-ci est dépeint comme une suite de processus de production de court terme c'est-à-dire d'une unité de temps.

SECTION II

L'équilibre

IV. II. 1 <u>La nature du problème</u>

La nature du problème

La question qui préoccupe von Neumann est celle du choix du processus de production permettant d'obtenir la croissance la plus élevée possible :

« The problem is rather to establish which processes will actually be used and which not (being "unprofitable"). » (p. 1)

Un tel processus doit alors satisfaire une condition « d'équilibre ».

La condition d'équilibre

La condition d'équilibre que doit satisfaire un processus, pour accéder à la croissance la plus importante possible, est décrite à l'aide de deux équations :

$$(4.10) \quad \beta \sum_{h=1}^{l} a_{jh}\, p_h \geq \sum_{h=1}^{l} b_{jh}\, p_h$$

$$(4.11) \quad \beta \sum_{h=1}^{l} a_{jh}\, p_h > \sum_{h=1}^{l} b_{jh}\, p_h \Rightarrow x_i = 0$$

Ces équations signifiants simplement qu' « in equilibrium no profit can be made on any process […] ». (p.3). En fait, cette condition d'équilibre n'est pas une hypothèse du modèle mais une conséquence. On reviendra sur ce sujet vers la fin de la section.

IV. II. 2 La formalisation

Bien que cela ne soit pas présenté ainsi dans l'article, on peut pour la clarté de l'exposé distinguer trois étapes dans la formalisation du problème :

Les étapes

Première « étape » : Von Neumann commence par considérer que les vecteurs $X = (x_1, ..., x_n)$ et $P = (p_1, ..., p_{h,...,} p_l)$ constituent respectivement les intensités maximums et les prix minimums que peut atteindre l'économie. Il introduit ensuite deux autres vecteurs intensités et prix, notés $X' = (x'_1, ..., x'_n)$ et $P' = (p'_1, ..., p'_h, ..., p'_l)$, ce qui lui permet de définir une fonction ϕ de la forme :

$$(4.12) \quad \phi(X', P) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{l} b_{jh} \, x'_j p_h}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{l} a_{jh} \, x'_j p_h} \qquad (4.13) \quad \phi(X, P') = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{l} b_{jh} \, x_j p'_h}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{l} a_{jh} \, x_j p'_h}$$

Deuxième « étape » : On observe que (4.12) a une valeur maximum pour X' si $X' = X$. De la même manière (4.13) a une valeur minimum pour P' si $P' = P$. Dans ce cas, on est alors typiquement dans une situation de type « point selle » puisque $\max \phi(X^*, P) = \phi(X, P) = \min \phi(X, P^*)$.

Troisième « étape » : Le coefficient d'expansion α et le facteur d'intérêt β dépendent des intensités et des prix. En effet, il est concevable de les mettre sous la forme[1] :

[1] Les formulations ci- dessous sont bien sûr compatibles avec les équations (4.2) et (4.3).

$$(4.14)\quad \alpha = \frac{\sum_{h=1}^{l}\left[\sum_{j=1}^{n} b_{jh}\, x'_j\right] p_h}{\sum_{h=1}^{l}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{jh}\, x'_j\right] p_h} = \phi(X', P) \qquad (4.15)\quad \beta = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{h=1}^{l} b_{jh}\, p'_h\right] x_j}{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{h=1}^{l} a_{jh}\, p'_h\right] x_j} = \phi(X, P')$$

Il en découle que la recherche du taux de croissance le plus élevé possible, compte tenu du coût des inputs, revient résoudre un problème de détermination d'un point selle.

IV. II. 3 <u>Solution</u>

Pour prouver l'existence d'un point selle, von Neumann fait appel à une version généralisée du théorème du point fixe de Brouwer :

« The mathematical proof is possible only by means of a generalisation of Brouwer's Fix-Point Theorem, i.e. by the use of very fundamental topological facts. » (p. 1)

Dans la mesure où sa démonstration est loin d'être aisée et que son étude détaillée n'offre qu'un intérêt limité pour l'économiste, on va se contenter d'énoncer le résultat qui prend la forme d'un lemme. Par contre, on insistera largement sur les hypothèses mobilisées.

Lemme

Commençons par rappeler que les $X = (x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$ et $P = (p_1,\ldots,p_h,\ldots,p_l)$ sont respectivement des éléments de R^n et R^l. On considère ensuite un ensemble C (non vide, compact et convexe) appartenant à R^{n+1} ainsi que deux sous ensemble de C que l'on nome S et T. Ces derniers sont respectivement inclus dans R^n et R^l. De plus, on suppose que $S \times T$ satisfait les conditions suivantes :

(i) $\forall X \in S,\ S_X = \{P \setminus (X,P) \in S\}$ est convexe et non vide

(ii) $\forall P \in T,\ T_P = \{P \setminus (X,P) \in T\}$ est convexe et non vide

En s'appuyant sur le théorème du point fixe on peut alors montrer que $S \cap T$ est non vide. En d'autres termes, il existe au moins un point commun.

Interprétation de la solution

Pour établir sa preuve von Neumann se sert donc d’une version généralisée du théorème du point fixe aux fonctions multivoques. Ce qui l’amène à formuler un lemme qui préfigure le théorème de Kakutani, et qui à son instar, rend compatible point fixe et rendements d’échelle constants. La mobilisation de ces derniers a pour conséquence d’épuiser le produit $\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{l} b_{jh}\, x_j$ en rémunération factorielle. Le profit ne peut alors être que nul à l’équilibre.

IV. II. 4 Commentaires

Bien que le théorème du point fixe soit employé, l’équilibre ne peut évidemment pas être perçu ici dans le sens traditionnel d’une égalité entre l’offre et la demande. Cette dernière ne jouant absolument aucun rôle dans la mesure où, souvenons- nous, l’intégralité de ce qui est produit sert à une nouvelle production.

La notion d’équilibre chez von Neumann

Plusieurs commentateurs ont alors assimilé cette notion d’équilibre à un état quasi-stationnaire. Tel est, par exemple, le cas de Champernowne (1945-46):

« Prof. v. Neumann’s method is the familiar one of examining the conditions of equilibrium of his simplified model of the economic world. The first point is to get clear what is meant by equilibrium. The definition of equilibrium is very similar to that of the economist’s stationary state: but in v. Neumann’s article equilibrium differs from stationary state’s equilibrium in the vital respect that a uniform expansion of the whole system is allowed under equilibrium. Such a state of equilibrium may be called a quasi-stationary, although v. Neumann does not in fact use this term. » (p. 10).

« Equilibrium » ou « balanced growth »

D’autres théoriciens préfèrent insister sur son aspect « dynamique ». Concrètement, cela se traduit dans les commentaires par la substitution du terme « balanced growth » à celui d’« equilibrium » :

« We can also view the dynamics of the economy from a long-run perspective, in the sense of keeping account of actual amounts produced and consumed in each period, where the economy is assumed to operate in an efficient manner for an infinite time. A natural growth of production and consumption capacity appears to be associated with the economic process; we seek to determine the rate of this growth. This expansion process is known as the phenomenon of balanced growth.
We begin with a description of the classical model of an expanding economy proposed by von Neumann. ». (Karlin (1959), p. 336).

Dans ces conditions la croissance équilibrée est bien entendu toujours déterminée par l'égalité du taux d'expansion et d'intérêt :

« In this case we say that the economy undergoes a balanced growth such that the expansion rate and interest rate are equal. » (*ibid*, p. 338).

Il est intéressant de remarquer que von Neumann n'emploi ni l'expression d'état « quasi-stationnaire », ni celle de « balanced growth ». Il se contente du terme « equilibrium ».

Un équilibre ?

D'après nos « critères », est- on en droit de voir un équilibre dans le modèle mis au point par Von Neumann ?

Incontestablement l'un des mérites de cet article est de prendre en compte les interdépendances entre les divers secteurs de la production. Du reste c'est là l'origine de la problématique qui a inspiré les théories de la croissance équilibrée.

On peut également noter que von Neumann apporte une attention particulière à expliciter le cadre institutionnel dans lequel s'insère son modèle. Ainsi, il détaille avec soin l'ensemble des hypothèses mobilisées. Par contre, il reste discret sur le degré de centralisation de l'économie qu'il décrit. En réalité, le niveau de centralisation à l'œuvre se révèle dès lors que l'on se pose la question de l'existence d'un processus.

Dans sa publication, von Neumann ne s'intéresse qu'à l'existence d'un point selle et ne dit rien sur la manière d'y parvenir. En fait, son modèle prend toute son importance dans une perspective de planification. Il appartient alors au planificateur de le déterminer.

Limites

Comme toutes théories, le modèle de von Neumann pose plusieurs difficultés liées au choix des simplifications. On a choisi d'en souligner deux :

- En premier lieu, le taux de croissance dépend uniquement des techniques de production et le niveau de consommation des ménages est totalement absent du modèle. En d'autres termes, l'existence de problèmes de débouchés n'est pas envisagée.
- Une seconde critique concerne l'absence de signification économique donnée à la fonction ϕ. Von Neumann est d'ailleurs le premier à admettre ce point et suggère de chercher une interprétation du coté de la thermodynamique :

« A direct interpretation of the function $\phi(X,Y)$ would be highly desirable. Its rôle appears to be similar to that thermodynamic potentials in phenomenological thermodynamics; it can be surmised that the similarity will persist in its full phenomenological generality (independently of our restrictive idealisations). » (p. 1).

En dépit de ces limites, le modèle de von Neumann a joué un rôle fondamental puisqu'il a ouvert la voie à l'application des méthodes de programmation linéaire et non linéaire en économie.

SECTION III

La programmation

De façon générale, la programmation a pour objectif de déterminer les extremums de fonctions, linéaires ou non linéaires, soumises à des contraintes en formes d'inégalités. Afin d'y parvenir plusieurs méthodes sont utilisées. Toutes ont joué, et joueront encore, un rôle crucial dans l'élaboration des techniques de planification. On présente ici les méthodes dont on se servira dans la troisième partie.

IV. III. 1 Le théorème de la dualité

Dans la mesure où le modèle de von Neumann présente d'importantes similitudes avec la programmation, on va exposer le théorème de la dualité à partir de celui-ci.

Présentation

Le théorème de la dualité permet de résoudre des problèmes de programmation linéaire. Son principe consiste à établir un lien entre un programme à maximiser, le « primal », et un autre à minimiser : le « dual ».

Le primal

Si on reprend le modèle de von Neumann, dont le but est d'obtenir la croissance la plus importante possible, la fonction à maximiser est $\phi(X', P)$. Bien entendu, la maximisation s'effectue par rapport au premier argument. Quant- à- elles, les contraintes sont données par les équations (4.4), (4.6) et (4.8).

Autrement dit, le primal s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \max\limits_{X'} \phi(X', P) \\ \alpha \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jh}\, x_j \leq \sum\limits_{j=1}^{n} b_{jh}\, x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j > 0 \\ x_j \geq 0 \end{array} \right.$$

Le dual

A partir du primal, il est possible en respectant certaines règles précises de construire un programme dual. Dans notre exemple, celui- ci prend la forme suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \min\limits_{P'} \phi(X, P') \\ \beta \sum\limits_{h=1}^{l} a_{jh}\, p_h \geq \sum\limits_{h=1}^{l} b_{jh}\, p_h \\ \sum\limits_{h=1}^{l} p_h > 0 \\ p_h \geq 0 \end{array} \right.$$

Le théorème de la dualité

Si on note respectivement X^* et P^* la solution du primal et du dual, le théorème de la dualité indique alors que $\phi(X^*, P) = \phi(X, P^*)$.

En d'autres termes, le théorème de la dualité (appliqué ici au modèle de von Neumann) est un moyen simple de garantir l'existence d'un point selle.

Commentaire

L'intérêt d'un tel théorème dans une perspective de planification est immédiat puisqu'il introduit une équivalence entre le taux de croissance maximal et le facteur d'intérêt minimal. On peut également observer que le primal opère dans l'espace des biens tandis que le dual opère dans celui des valeurs.

En fait, le théorème de la dualité est une application particulière de celui de Khun et Tucker. Mais avant d'exposer ce dernier, nous allons passer par un stade intermédiaire en présentant la méthode de Lagrange.

IV. III. 2 La méthode de Lagrange

Comme précédemment le but poursuivi est de rechercher les extrema d'une fonction objective soumise à une série de contraintes. Ces dernières prennent, le cas échéant, la forme d'une égalité.

Formalisation

Soit une fonction f de n variables représentées par $X = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)$ et soumise à m contraintes de la forme $g_i(X) = 0, i = 1, ..., m$.

On suppose que les fonctions f et $g_i, i = 1, ..., m$ sont définies sur un sous ensemble E de $\mathbb{R}^n$. Enfin, on considère un sous ensemble S de E tel que $S = \{X \in E \mid g_i(X) = 0, i = 1, ..., m\}$. Le problème qui nous préoccupe est de déterminer les valeurs maximales de f (X) lorsque $X \in S$. Enfin, précisons que dans tout ce qui suit on fait l'hypothèse que les fonctions f et g_i sont concaves.

La fonction de Lagrange

La méthode usuelle pour résoudre ce problème d'optimisation sous contrainte est de faire appel à la « fonction de Lagrange ». Celle- ci a la forme suivante :

$$(4.16)\quad L(X) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$$

Les conditions d'optimalité du premier ordre sont telles que le point candidat à un extremum X^* annule les dérivées premières du Lagrangien. Soit :

$$(4.17)\quad L'_{x_j}(X^*) = f'_{x_j}(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i)'_{x_j}(X^*) = 0 \quad j = 1,\ldots, n$$

Rappelons que λ_i représente le « multiplicateur de Lagrange » associé à la i-ème contrainte. Ce nombre jouant un rôle essentiel par la suite, il nous semble important de saisir la manière dont il a été construit.

Multiplicateurs de Lagrange

A l'origine des multiplicateurs se trouve le théorème des fonctions implicites. En effet, si X^* est le point solution de (4.16) il respecte les contraintes. De plus, si les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont vérifiées en ce point, alors il existe des fonctions $\varphi_2,...,\varphi_j,...,\varphi_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned}
& g_1(X) = (x_1, \varphi_2(x_1),...,\varphi_j(x_1),...,\varphi_n(x_1)) \\
& . \\
& . \\
& . \\
(4.18)\quad & g_i(X) = (x_1, \varphi_2(x_1),...,\varphi_j(x_1),...,\varphi_n(x_1)) \\
& . \\
& . \\
& . \\
& g_m(X) = (x_1, \varphi_2(x_1),...,\varphi_j(x_1),...,\varphi_n(x_1))
\end{aligned}$$

Cela pour tout X appartenant à un voisinage $V \subset \mathbb{R}$ de X^*. Le problème de maximisation sous contrainte se ramène à celui d'une maximisation d'une fonction F « sans contrainte » définie par :

$$(4.19) \quad F(x_1) = f(x_1, \varphi_2(x_1), ..., \varphi_j(x_1), ..., \varphi_n(x_1))$$

En appliquant le théorème de dérivation en chaîne, on obtient (4.20) :

$$F'(x_1) = f'_{x_1}(x_1, \varphi_2(x_2), ..., \varphi_j(x_1), ..., \varphi_n(x_1)) + f'_{x_2}(x_1, \varphi_2(x_1), ..., \varphi_j(x_1), ..., \varphi_n(x_1))\varphi'_2(x_1) + ... +$$
$$f'_{x_j}(x_1, \varphi_2(x_1), ..., \varphi_j(x_1), ..., \varphi_n(x_1))\varphi'_j(x_1) + ... + f'_{x_n}(x_1, \varphi_2(x_1), ..., \varphi_j(x_1), ..., \varphi_n(x_1))\varphi'_n(x_1)$$

D'autre part, comme $F'(X^*) = 0$ est la condition nécessaire pour avoir un extremum, il s'ensuit (4.21) :

$$f'_{x_1}(X^*) + f'_{x_2}(X^*)\varphi'_2(x_1^*) + ... + f'_{x_j}(X^*)\varphi'_j(x_1^*) + ... + f'_{x_n}(X^*)\varphi'_n(x_1^*) = 0$$

Soit sous forme matricielle (4.22) :

$$f'_{x_1}(X^*) + (f'_{x_2}(X^*) ... f'_{x_j}(X^*) ... f'_{x_n}(X^*)) \begin{pmatrix} \varphi'_2(x_1^*) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi'_j(x_1^*) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi'_n(x_1^*) \end{pmatrix} = 0$$

En réapliquant le théorème de dérivation en chaîne à (4.18), on trouve :

$$(g_1)'_{x_1}(X^*) + (g_1)'_{x_2}(X^*)\varphi'_2(x_1^*) + ... + (g_1)'_{x_j}(X^*)\varphi'_j(x_1^*) + ... + (g_n)'_{x_n}(X^*)\varphi'_n(x_1^*)$$
.
.
.
$$(g_i)'_{x_1}(X^*) + (g_i)'_{x_2}(X^*)\varphi'_2(x_1^*) + ... + (g_i)'_{x_j}(X^*)\varphi'_j(x_1^*) + ... + (g_i)'_{x_n}(X^*)\varphi'_n(x_1^*)$$
.
.
.
$$(g_m)'_{x_1}(X^*) + (g_m)'_{x_2}(X^*)\varphi'_2(x_1^*) + ... + (g_m)'_{x_j}(X^*)\varphi'_{x_j}(x_1^*) + ... + (g_m)'_{x_n}(X^*)\varphi'_n(x_1^*)$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} (g_1)'_{x_2}(X^*) & . & . & . & (g_1)'_{x_j}(X^*) & . & . & . & (g_1)'_{x_n}(X^*) \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ (g_i)'_{x_2}(X^*) & . & . & . & (g_i)'_{x_j}(X^*) & . & . & . & (g_i)'_{x_n}(X^*) \, . \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ (g_m)'_{x_2}(X^*) & . & . & . & (g_m)'_{x_j}(X^*) & . & . & . & (g_m)'_{x_n}(X^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_2(x_1^*) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi'_j(x_1^*) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi'_n(x_1^*) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (g_1)'_{x_1}(X^*) \\ . \\ . \\ . \\ (g_i)'_{x_1}(X^*) \\ . \\ . \\ . \\ (g_m)'_{x_1}(X^*) \end{pmatrix}$$

De plus si la matrice des dérivées partielles de $g_i, i=1,...,m$ est inversible, il vient :

$$\begin{pmatrix} \varphi'_2(x_1^*) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi'_j(x_1^*) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi'_n(x_1^*) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (g_1)'_{x_2}(X^*) & . & . & . & (g_1)'_{x_j}(X^*) & . & . & . & (g_1)'_{x_n}(X^*) \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ (g_i)'_{x_2}(X^*) & . & . & . & (g_i)'_{x_j}(X^*) & . & . & . & (g_i)'_{x_n}(X^*) \, . \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ (g_m)'_{x_2}(X^*) & . & . & . & (g_m)'_{x_j}(X^*) & . & . & . & (g_m)'_{x_n}(X^*) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (g_1)'_{x_1}(X^*) \\ . \\ . \\ . \\ (g_i)'_{x_1}(X^*) \\ . \\ . \\ . \\ (g_m)'_{x_1}(X^*) \end{pmatrix}$$

En reportant dans (4.22), on trouve :

$$f'_{x_1}(X^*) - \begin{pmatrix} f'_{x_2}(X^*) & \cdots & f'_{x_j}(X^*) & \cdots & f'_{x_n}(X^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g_1)'_{x_2}(X^*) & \cdots & (g_1)'_{x_j}(X^*) & \cdots & (g_1)'_{x_n}(X^*) \\ \vdots & & & & \\ (g_i)'_{x_2}(X^*) & \cdots & (g_i)'_{x_j}(X^*) & \cdots & (g_i)'_{x_n}(X^*). \\ \vdots & & & & \\ (g_m)'_{x_2}(X^*) & \cdots & (g_m)'_{x_j}(X^*) & \cdots & (g_m)'_{x_n}(X^*) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (g_1)'_{x_1}(X^*) \\ \vdots \\ (g_i)'_{x_1}(X^*) \\ \vdots \\ (g_m)'_{x_1}(X^*) \end{pmatrix}$$

On fait alors apparaître le multiplicateur en posant :

$$\begin{pmatrix} f'_{x_2}(X^*) & \cdots & f'_{x_j}(X^*) & \cdots & f'_{x_n}(X^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g_1)'_{x_2}(X^*) & \cdots & (g_1)'_{x_j}(X^*) & \cdots & (g_1)'_{x_n}(X^*) \\ \vdots & & & & \\ (g_i)'_{x_2}(X^*) & \cdots & (g_i)'_{x_j}(X^*) & \cdots & (g_i)'_{x_n}(X^*). \\ \vdots & & & & \\ (g_m)'_{x_2}(X^*) & \cdots & (g_m)'_{x_j}(X^*) & \cdots & (g_m)'_{x_n}(X^*) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_i & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

La méthode pour résoudre ce problème est de considérer que les m contraintes définissent implicitement des variables en fonction d'autres (sous réserve naturellement d'avoir n > m).

Interprétation économique

Si on veut aller au-delà de l'aspect purement mathématique, il convient de préciser le sens économique à donner aux multiplicateurs de Lagrange. Ces derniers rendent compte de « l'intensité de la contrainte » subie au point extremum. Cette interprétation s'appuie directement sur le théorème de l'enveloppe. Celui- ci énonçant que la dérivée du lagrangien par rapport à un paramètre quelconque du modèle est un indicateur de la variation de la valeur maximale de la fonction objectif lorsque l'on modifie ce paramètre (pour plus de détail voir Archinard et Guerrien (1992)).

IV. III. 3 Le théorème de Khun et Tucker dans le cas linéaire [1]

Bien que la méthode de Lagrange soit un instrument précieux, elle ne peut généralement pas s'appliquer directement en économie où la plupart des problèmes d'optimisation font intervenir des contraintes sous forme d'inégalités. Il est alors souvent indispensable de recourir au théorème de Khun et Tucker ainsi qu'à un artifice : les *variables quadratiques de niveau*.

Les variables quadratiques de niveau

Considérons une fonction f sujette à des contraintes de la forme $g_i(X) \geq 0 \, (i = 1, ..., m)$ où X est un n- uplet appartenant à E un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'idée à la base de la méthode de Khun et Tucker est d'introduire une variable z_i^2, appelée « variable quadratiques de niveau », afin de modifier les contraintes de telle sorte que: $g_i(X) - z_i^2 = 0$ .Ce qui en définitif permet de se ramener à des contraintes sous forme d'égalités et d'employer la méthode de Lagrange.

Méthode et multiplicateurs de Lagrange

Dans ces conditions, le lagrangien s'écrit :

$$L(X, Z) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X) - z_i^2)$$

Rappelons que le nombre λ_i représente le « multiplicateur de Lagrange ». De surcroît, les points candidats à un extremum X^* et Z^* sont donnés par les deux équations suivantes :

$$L'_{x_i}(X^*, Z) = f'_{x_j}(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i)'_{x_j}(X^*) = 0$$

$$L'_{z_i}(X, Z^*) = -2\lambda_i z_i^* = 0$$

[1] On limite notre étude au cas linéaire dans la mesure, où la plupart du temps, le cas non linéaire peut se ramener par l'intermédiaire d'une linéarisation à un aspect linéaire.

Conditions d'applications : le théorème de Khun et Tucker

Plusieurs hypothèses, appelées théorème (ou conditions) de Khun et Tucker, ont été implicitement introduites pour résoudre ce programme. En premier lieu, les fonctions f (X) et g_i (X) ont été supposées dérivables et à dérivées partielles continues au voisinage de X^*. A cela s'ajoute une condition de « régularité » sur les contraintes. Celle- ci exigeant que le rang de la matrice jacobienne des contraintes saturées en X^* ($g_j(X^*) = 0$) soit égale au nombre de ces contraintes.

Si la fonction de Lagrange présente un tel intérêt dans cette thèse, c'est qu'elle est étroitement liée à la notion de point selle. Précisons avant d'aborder cette démonstration que l'on va être conduit à appréhender le multiplicateur comme argument du lagrangien. D'où les notations qui vont suivre « $L(X, \lambda)$ ». Bien qu'incorrects, car λ est un vecteur formé de nombres et généralement pas de variables, elles présentent l'avantage de clarifier l'exposé sans dénaturer la logique de la démonstration.

Point selle et maximum du lagrangien

On se propose maintenant de prouver que si (X^*, λ^*) est un point selle de $L(X, \lambda)$ (avec $X \geq 0, \lambda \geq 0$) alors X^* est un vecteur optimum du problème de maximisation.

Pour ce faire, partons de la définition du point selle c'est-à-dire :

$$\text{(i)} \qquad L(X, \lambda^*) \leq L(X^*, \lambda^*) \leq L(X^*, \lambda)$$

Où $L(X^*, \lambda^*) = \max_{X} L(X, \lambda^*) = \min_{\lambda} L(X, \lambda^*)$

Ceci est équivalent à l'expression suivante :

$$\text{(ii)} \qquad f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X^*)$$

Avec $g_i(X) \geq 0$

En observant que $\lambda_i^* g_i(X) \geq 0$ et que du fait de la relation d'exclusion on a $\lambda_i^* g_i(X^*) = 0$, on peut en déduire à partir de (ii) les inégalités suivantes :

$$f(X) \leq f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X) \leq f(X^*)$$

Ce qui montre bien entendu que X^* est la solution du programme d'optimisation maximisant le lagrangien.

Solutions du lagrangien et point selle

On va à présent faire la démarche inverse et démontrer que si X^* et λ^* sont des solutions du programme d'optimisation alors (X^*, λ^*) est un point selle du lagrangien.
Notre objectif est donc d'établir la véracité des inégalités suivantes :

$$L(X, \lambda^*) \leq L(X^*, \lambda^*) \leq L(X^*, \lambda)$$

Or si X^* et λ^* sont des solutions du programme d'optimisation cela implique, d'après la démonstration précédente, que l'on a :

$$f(X) \leq f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X) \leq f(X^*)$$

Par conséquent la première partie de l'inégalité, soit $L(X, \lambda^*) \leq L(X^*, \lambda^*)$ est immédiatement vérifiée.

Il reste à prouver que $L(X^*, \lambda^*) \leq L(X^*, \lambda)$. Là aussi le résultat est immédiat puisque $\lambda_i g_i(X^*) \geq 0$ et $\lambda_i^* g_i(X^*) = 0$, on obtient :

$$f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X^*)$$

Ce qui constitue la preuve que l'on a bien : $L(X, \lambda^*) \leq L(X^*, \lambda^*) \leq L(X^*, \lambda)$

Illustration graphique

La représentation ci dessous permet de mieux visualiser le concept de point selle et de se rendre compte de son lien intuitif avec la notion d'équilibre.

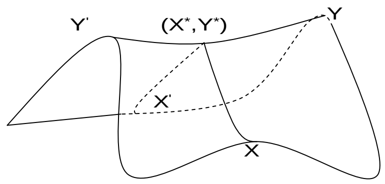


Figure 4.1- Représentation d'un point selle

Lagrangien et point selle

Revenons pour finir à des considérations plus pratiques et en particulier sur le lien entre lagrangien et équilibre. On a observé, via le modèle de von Neumann, qu'une croissance équilibrée se caractérise par l'existence d'un point selle. Or, la recherche d'un maximum d'une fonction soumise à des contraintes en forme d'inégalités – résoluble par le théorème de Khun et Tucker – implique l'existence d'un point selle (Hurwicz (1958)).

SECTION IV

Conclusion. Les débats sur la croissance équilibrée

Le thème d'une « trajectoire d'équilibre » est présent depuis longtemps dans l'analyse économique sous la forme de discussions sur le régime de croissance. Ces dernières avaient trouvé un écho important dans le cadre de la planification :

« Les problèmes de croissance représentent pour les économistes des pays socialistes des questions liées aux problèmes de la planification. Aussi, n'est-il pas surprenant qu'au cours de la toute première étape de la société soviétique se soit déroulé un débat théorique d'une ampleur considérable portant sur les modalités de l'allocation des ressources nationales à travers la planification en vue de l'industrialisation » (Rosier (1970), p. 608)

En effet, une controverse intéressante sur ce sujet a eu lieu en U.R.S.S entre Préobrajensky et Boukharine. Nous allons, pour conclure sur ce chapitre, rappeler la nature de la polémique.

IV. IV. 1 Contexte et Présentation du débat

Au cours des années vingt, le besoin de fonder le développement économique de l'U.R.S.S sur l'industrialisation fait l'objet d'un consensus. Toutefois une discorde apparaît concernant le modèle de développement à mettre en œuvre. Les partisans d'un modèle de développement donnant une priorité absolue à l'industrie, s'opposent à ceux qui désirent suivre un modèle de « croissance équilibrée » plus respectueux des intérêts de la paysannerie. Préobrajensky s'inscrit dans cette première tendance tandis que Boukharine s'insère dans la seconde. Brus (1968) résume ainsi les positions de chacun :

« Nous avons affaire ici à une étude du même problème vu sous deux angles différents ; [tandis] que Boukharine s'attache […] aux problèmes de l'allocation, de la distribution correcte des ressources disponibles en travail social, du maintien de l'équilibre et donc du développement équilibré des différentes branches de la production et de la consommation […], Préobrajenski met au premier plan les problèmes de la « montée abrupte » vers le développement où le changement brutal revêt une importance particulière. » (p. 78).

Le modèle de développement de Préobrajensky

Sa conception du développement se fonde sur « la loi de l'accumulation socialiste primitive », par analogie à l'accumulation capitaliste primitive de Marx, qu'il définit comme « l'accumulation entre les mains de l'Etat de ressources matérielles tirées principalement de sources situées en dehors du complexe de l'économie d'Etat ».

Dans l'esprit de Préobrajensky, au même titre que l'exploitation capitaliste implique un échange inégal des quantités de travail, l'accumulation socialiste s'effectue via de nombreux investissements industriels dont le financement exige de ne pas respecter un principe d'équivalence. Un transfert net de ressources doit s'effectuer au détriment du secteur agricole, par divers moyens (impôts, droits de douanes…), vers le secteur étatique afin que celui- ci puisse acquérir de nombreux éléments matériels de productions :

« Exactement de la même façon, l’accumulation socialiste au sens véritable du mot, c’est-à-dire l’accumulation sur la base technico-économique de l’économie socialiste qui développe déjà tous les traits qui lui sont propres et tous les avantages qui ne sont propres qu’à elle, ne peut elle aussi débuter qu’après que l’économie soviétique ait dépassé le stade de l’accumulation primitive. De même qu’un minimum déterminé de moyens préalablement accumulés sous forme d’éléments matériels de production est nécessaire au fonctionnement des manufactures et a fortiori des fabriques utilisant une technique fondée sur le machinisme, de même il faut un certain minimum pour que le complexe de l’économie d’Etat puisse développer tous ses avantages économiques et jeter ses fondements techniques nouveaux. » (Préobrajensky (1920), p. 131).

La conception du développement de Boukharine

A l’opposé de la vision précédemment exposée, se trouve celle de Boukharine. Ce dernier milite en faveur d’une croissance équilibrée. Pour justifier sa position, Boukharine évoque l’amplification des déséquilibres initiaux par des effets reports. Il préconise, entre autre, que le développement du secteur industriel ne se fasse pas au détriment de la croissance du secteur agricole. Selon lui, toute idée de priorité doit être rejetée sous peine d’engendrer des goulots d’étranglements. L’argumentaire de Boukharine est commenté en ces termes par Bernard Rosier (1970) :

« Le plan doit donc, pour Boukharine, respecter la proportionnalité de la division sociale du travail, et le principe d’équivalence en vue d’assurer un équilibre entre branches de la production et sphères de l’activité économique : Nous avons donc, avec le courant d’analyse qu’il représente, une « théorie de l’équilibre » clairement formulée. » (p. 609).

Brus (1968), qui dresse un constat comparable, est alors amené à soutenir à propos de Boukharine :

« Ce qui lui importe avant tout c’est la conservation d’un certain *équilibre* dans le processus de la croissance, c’est-à-dire de ce que la théorie économique d’aujourd’hui désigne sous le nom de « balanced growth » » (p. 76).

Pour pouvoir être équilibrée, la croissance doit être identique dans l’ensemble des secteurs. Afin que cela soit le cas, les décisions d’investissements sont strictement encadrées par l’Etat. A ce titre, et sans entrer plus avant dans le détail de l’argumentaire de Boukharine, il est déjà intéressant pour notre étude de remarquer que le choix d'une croissance équilibrée amène à mettre en avant les bienfaits des rigidités. Hirschman (1958) évoque ce point :

« C'est, en effet, sur la théorie de la croissance équilibrée qu'on s'appuie d'ordinaire pour justifier la centralisation et la coordination par l'Etat du processus de développement. […]. La production doit être intégrée et planifiée à l'échelon central comme s'il s'agissait d'un « trust » unique […] » (p. 70).

Le débat sur le régime de croissance ne se cantonne pas aux polémiques des années vingt. Il s'étend, certes de manière plus ambigüe, à la période de l'après guerre.

IV. IV. 2 <u>Les extensions récentes du débat</u>

A la controverse précédente a succédé principalement une série de fables (Solow (1956), Phelps (1961),…), caractérisée par un fracas mathématique destiné à masquer les difficultés d'agrégation et la mise en scène d'un individu unique censé être représentatif. Au premier abord, il est donc bien délicat d'établir une filiation claire entre le passionnant débat passé et les histoires actuelles montées de toute pièce. Malgré tout, en prêtant bien attention, on peut percevoir que les clivages des années vingt restent d'actualité. La thèse de la croissance équilibrée, basée sur des conditions d'optimalité, exerce encore un attrait indéniable :

« The search for a principle from which an "optimal" rate of economic growth can be deduced holds great fascination to economists. » (Koopmans (1963), p. 1)

Ainsi Samuelson (1975) explique de la façon suivante les aboutissants de son modèle le plus raffiné:

« By contrast, the present analysis, which takes into account differentiated periods of life, work and retirement, and also investment in capital goods, derives the conditions for an optimum intermediate population growth rate and proves, as a serendipity theorem, that under laissez faire private savings would just suffice to support this growth-rate state if biological cultural factors happened to mandate it. » (p. 501)

On retrouve ici l'idée de compatibilité sur laquelle se fonde les modèles de croissance équilibrée. Dans une logique similaire, la présentation d'Uzawa (1963) insiste également sur l'idée d'une adéquation :

« The rate of interest, on the other hand, is determined at the level which equates the value, at the current market price, of newly-produced capital goods to the amount of savings forthcoming at the level of the rate of interest. » (p. 105).

Néanmoins, un certain nombre d'auteurs ne s'appuient pas sur le concept d'agent représentatif, ce qui leur permet d'entretenir des discussions beaucoup plus prolifiques. Tel est notamment le cas de Hirschman (1964) puis Rostow (1963) concernant les détracteurs de la thèse de la croissance équilibrée et de Myrdal (1963), Harrod (1955) ainsi que Lewis (1971) concernant ses partisans.

La critique de Hirschman et Rostow

Le reproche central que formule Hirschman, à l'encontre de la théorie de la croissance équilibrée, tient à la somme colossale de savoirs faire entrepreneurials et administratifs qui sont nécessaires pour faire croître les secteurs de l'économie à un rythme homothétique. Une telle mise en œuvre de savoir est, d'après lui, incompatible avec la situation des pays sous-développés :

« on attend qu'elle [la population] engendre les aptitudes en matière d'entreprise et d'administration qui seraient nécessaires pour lancer en même temps toute une série d'industries absorbant mutuellement leur production ! Car c'est naturellement là mon principal grief contre la théorie de la croissance équilibrée : son application exige une énorme somme de ces aptitudes que nous avons reconnues comme très rares dans les pays sous-développés. » (p. 68-69).

De plus, si la théorie de la croissance équilibrée part du sentiment honorable de ne pas vouloir engendrer des inégalités ; elle introduit, toujours d'après Hirschman, pour cela des coûts sociaux insupportables - à travers l'intervention étatique qu'elle implique - pour des pays en développement:

« On a généralement plaidé pour l'extension des responsabilités de l'Etat en matière économique, non pour donner davantage d'impulsion au développement en additionnant tous les gains, mais pour introduire certains coûts sociaux dans les calculs économiques et tempérer ainsi le caractère impitoyable et destructeur du développement capitaliste. Les partisans de cette politique pensaient sans doute qu'il valait la peine de sacrifier un peu de la rapidité du processus de destruction créatrice si tel était le moyen d'en atténuer les ravages sur les valeurs matérielles, culturelles et spirituelles. Et, de l'aveu général, un des grands obstacles à la rapide industrialisation des pays sous- développés actuels consiste précisément en ce qu'ils ne sont pas prêts à supporter les coûts sociaux qui ont été liés de façon si spectaculaire au processus dans l'Europe occidentale des débuts du XIX^{e} siècle. Ils forcent leur jeune classe d'entrepreneurs (aussi bien que leurs contribuables en général) à prendre à leur compte une bonne part de ces coûts, par le moyen d'un système de sécurité sociale perfectionné, de la fixation d'un salaire minimum, d'une législation sur les conventions collectives, d'une politique de logement à loyer réduit et d'autres mesures « sociales » analogues. » (p. 72).

Ces arguments en faveur d'un régime de croissance déséquilibrée trouvent, semble t-il, une accréditation historique lorsque Rostow explique la phase de « démarrage » de la croissance grâce à des affectations prioritaires de ressources :

« Là où il existent des données sur le niveau et la structure de la formation du capital dans les sociétés qui n'ont pas encore démarré – et aussi dans celles qui commencent à le faire -, il apparaît à l'évidence qu'une proportion très élevée des investissements globaux doit être affectée aux transports et à d'autres dépenses d'infrastructure. » (p. 44).

La position de Myrdal

L'argumentaire qu'emploie Myrdal est littéralement à l'opposé de celui d'Hirschman. Il estime, au contraire, que les pays sous-développés ont hérité d'une importante administration leur permettant de mettre en application une politique de croissance équilibrée :

« Comme beaucoup d'entre eux étaient maintenus il y a peu de temps encore sous le régime colonial, ils ont hérité en grande partie l'embrigadement, la routine administrative et la bureaucratie mesquine, grâce auxquels les puissances métropolitaines gouvernaient les peuples étrangers de statut inférieur. Ils ont également tous utilisé leur brève période d'indépendance pour augmenter considérablement ces chaînes administratives. » (p. 24).

La planification lui apparaît alors comme une condition au développement et à la mise en place d'un régime de croissance équilibrée :

« Les économistes sont aujourd'hui généralement d'avis que les pays sous- développés ont encore plus besoin de planification et d'interventions étatiques s'ils veulent avoir une chance quelconque de donner naissance à un développement économique, alors qu'ils se trouvent dans des conditions bien plus difficiles que celles qu'affrontèrent les pays actuellement développés. » (p. 24-25).

L'opinion de Harrod

L'article de Harrod fournit, pour sa part, une objection au second argument de Hirschman à propos du caractère insoutenable des coûts sociaux dans une économie sous-développée.

Dans une pure logique keynésienne, Harrod insiste sur l'importance de la demande qu'anticipent les entrepreneurs dans leur décision d'investir :

« Tous les producteurs sont influencés à un haut degré, et même ceux qui attachent une importance à leurs possibilités financières du moment, par les variations de leurs estimations concernant la demande future. » (p. 361)

A cet égard, les politiques redistributives – telles que les a évoquées Hirschman – apparaissent comme bénéfiques puisqu'elles augmentent le revenu de ceux dont la propension à consommer est la plus importante. Elles sont alors à l'origine d'un cercle cumulatif autoentretenu d'investissements. Mais également, dans le vocabulaire utilisé par Harrod, cela permet d'abaisser le « taux justifié de croissance » (dont la variation dépend du ratio épargne sur investissement courant) en dessous du « taux naturel » (qui correspond à un taux moyen au cours d'une période) créant ainsi les conditions d'une croissance pérenne :

« Une croissance continue ne peut être assurée qu'au niveau ou au- dessus du taux justifié ; sinon nous assisterions à un mouvement centrifuge de dépression. Si le système économique à un taux justifié substantiellement plus élevé que le taux naturel, il sera soumis à des dépressions répétées […] » (p. 363).

La thèse de Lewis

Enfin, mentionnons le travail de Lewis. Ce dernier croit en la nécessité d'investir massivement dans l'ensemble des secteurs afin que ceux- ci se développent à un rythme à peu près équivalent. Pour se justifier, il met en avant le caractère interdépendant de l'activité économique :

« Même si elle n'a pas une tendance chronique à souffrir d'une insuffisance de la demande marginale, et même si elle est favorable à l'innovation et à la concurrence sur le marché intérieur, l'économie a encore un autre obstacle à franchir : il faut en effet que les divers secteurs se développent dans un juste équilibre les uns par rapport aux autres, sinon ils ne peuvent pas se développer du tout. Supposons par exemple que des innovations considérables interviennent dans le secteur agricole produisant des denrées alimentaires pour le marché intérieur. Le résultat en sera un surplus de denrées alimentaires à vendre dans les villes, ou un excédent de main d'œuvre agricole cherchant à s'employer dans des activités non agricoles, ou une combinaison quelconque des deux. Si elle progresse en même temps et au même rythme, l'industrie manufacturière pourra absorber à la fois l'excédent de produits et celui de main d'œuvre. » (p. 287)

Si à ce stade l'argument est plutôt usuel, l'originalité de Lewis réside dans le fait qu'il ne lie pas la mise en place d'un régime de croissance équilibrée avec l'instauration d'un système totalement planifié. La planification peut se contenter d'être partielle :

« En gros, le reproche à un système de planification centrale détaillée est qu'il est antidémocratique, bureaucratique, rigide, et sujet à beaucoup d'erreurs et de confusion. C'est aussi qu'il est inutile. Il y a beaucoup plus à dire en faveur de la planification fragmentaire ; c'est-à-dire qu'il est préférable de se limiter à quelques objets sur lesquels il est particulièrement souhaité d'agir – niveau des exportations, formation du capital, de la production industrielle, de la production alimentaire -, et de laisser tout le reste de l'économie s'adapter toute seule à l'offre et à la demande. » (p. 397)

Son analyse va jusqu'à préciser les conditions d'exercice d'une planification fragmentaire. Celle- ci doit s'exercer lorsque les effets sociaux des mécanismes de marché ne sont plus acceptables et quand la loi de l'offre et la demande n'arrive pas à équilibrer le marché :

« Un certain degré de planification reste nécessaire, puisque les résultats de la loi de l'offre et de la demande ne sont pas toujours acceptables sur le plan social […]
La planification fragmentaire est très nécessaire dans les secteurs où l'offre et la demande ne s'équilibrent pas aux prix en cours. » (p. 397)

Commentaire

Comme nous serons amenés à le constater dès le chapitre VI, la « loi de l'offre et de la demande » n'équilibre quasiment jamais spontanément les marchés. Un degré très élevé de planification est un élément indispensable pour le faire. Ceci étant la conséquence des théorèmes, tel celui de Sonnenschein, des années soixante-dix, reposant sur les phénomènes d'interactions des marchés.

Par conséquent, notre démarche s'inscrit dans le cadre des régimes de croissances équilibrées basés sur la planification.

Conclusion de la première partie

Au cours de cette première partie, nous avons tout d'abord été amenés à relever quelques grandes caractéristiques afin de circonscrire la notion d'équilibre. Toutefois selon la manière dont les auteurs agencent ces caractéristiques entre elles, la notion d'équilibre induit des représentations de l'économie totalement différentes. C'est la raison pour laquelle on a successivement examiné l'équilibre, en tant que point fixe d'un processus (modèle d'équilibre général), en tant qu'ensemble d'accords finals (modèles de marchandages) et comme trajectoire (modèles de von Neumann et de croissance équilibrée).

Bien que possédant des structures différentes, ces trois modèles sont étroitement corrélés. Ainsi, les équilibres concurrentiels peuvent se confondre avec les allocations du cœur tandis que le modèle d'équilibre général présente une analogie formelle avec le modèle de von Neumann.

Pourtant, la théorie de l'équilibre général est incontestablement la plus adaptée pour mener une analyse en termes d'équilibre.
Ceci s'explique, d'une part, par l'absence de prix au sein des modèles de marchandages qui sont amenés à privilégier les rapports de forces. Or, cette perception est loin d'être la plus aisée pour établir à coup sûr l'existence d'un équilibre. D'autre part, la prédominance de la théorie de l'équilibre général à intégrer la notion d'équilibre s'explique par le caractère limité du modèle de von Neumann. Celui- ci se propose uniquement d'étudier un processus de production et n'a pas pour prétention de constituer une véritable théorie alternative. On peut même soutenir qu'il est susceptible de s'incorporer, en tant que conception de la croissance, au sein du modèle d'équilibre général. C'est une opinion similaire que défend Weintraub (1980), lorsqu'il affirme concernant la filiation entre la contribution de Von Neumann et le modèle d'équilibre général :

« L'article établit sous une forme compréhensible les principales questions de la théorie de l'équilibre général sans aucun sacrifice de rigueur au profit de l'intuition. […]. L'utilisation d'argumentations fondées sur les points fixes laisse présager une littérature qui naîtra vingt ans plus tard. La compréhension du jeu qui existe entre les instruments et le mode de raisonnement a donné le ton à des analyses ultérieures. » (p. 22).

Pour les motifs cités ci- dessus, on va dans les parties qui vont suivre uniquement retenir le cadre institutionnel sous- jacent à la théorie de l'équilibre général, tel que Debreu (1959) le présente, ainsi que la notion d'équilibre qui en découle.

DEUXIEME PARTIE

Examen des principales difficultés théoriques liées à l'usage de la notion d'équilibre

Le modèle d’équilibre général concurrentiel constitue désormais notre cadre institutionnel de référence. La notion d’équilibre qui lui est associée est celle de point fixe. Ce qui est équivalent au fait que la demande nette de chaque agent s’annule sur tous les marchés.

Pourtant, bien que la théorie de l’équilibre général soit la plus apte à appréhender la notion d’équilibre, l’usage de celle- ci n’est pas sans poser des difficultés. Ces dernières concernent les points suivants :

- l’abondance ainsi que les caractéristiques des équilibres
- la recherche de processus permettant d’atteindre un état d’équilibre
- la mise en rapport du temps et de l’incertitude avec la notion d’équilibre

Pour tenter d’y voir plus clair et d’apporter des solutions, cette seconde partie se propose d’aborder tour à tour ces différents problèmes. A travers cet examen, **notre propos est de démontrer que le modèle d’équilibre général concurrentiel offre une base théorique plus adaptée à l’élaboration d’un système de planification plutôt qu’à la compréhension des économies de marchés.**

Plan de la 2$^{\text{ième}}$ Partie

Afin d’effectuer cette démonstration, cette seconde partie se divise en trois chapitres.

Le premier chapitre, intitulé « *Propriétés et sélection des équilibres* », traite des problèmes liés aux caractéristiques et à l’unicité des équilibres.

Le second chapitre, « *Stabilité des processus* », s’intéresse à la question de la convergence des trajectoires. A cette fin, le tâtonnement walrasien, le tâtonnement en quantité et la méthode de Newton sont successivement examinés.

Pour finir le dernier chapitre de cette partie, appelé « *Temps et amplification des déséquilibres. Le principe d’entropie* », a principalement pour vocation d’étudier la prise en compte d’une dimension temporelle par la notion d’équilibre.

CHAPITRE V

Propriétés et sélection des équilibres

Au fil de la partie précédente, nous avons cherché à préciser le contenu de la notion d'équilibre. Mais rien, jusqu'ici, ne permet de soutenir qu'il s'agit d'une situation particulièrement souhaitable.

Il est donc indispensable de préciser les conditions dans lesquelles un équilibre a des vertus qui en font une situation à établir. Autrement dit, il convient de prouver qu'un équilibre est susceptible d'être le « meilleur » état possible pour l'économie. Evidemment, une partie du débat porte sur le critère qui définit le « meilleur état possible ».

SECTION I

Les théorèmes de l'économie du bien-être

Si les analyses en termes d'équilibres sont autant utilisées, ceci est dû aux théorèmes de l'économie du bien- être. Ces derniers sont les premières et uniques preuves d'existence d'un lien entre un concept d'équilibre et un critère philosophique caractérisant une situation idéale.

V. I. 1 Equilibre et optimum de Pareto

Les théorèmes de l'économie du bien- être ont pour vocation de donner une consistance philosophique au concept d'équilibre. Plus précisément, ils prouvent que tout équilibre général concurrentiel est un optimum de Pareto. Et inversement.

Rappel sur l'optimum de Pareto

Rappelons qu'un état de l'économie est un *optimum de Pareto* s'il est réalisable et s'il n'est plus possible d'accroître l'*utilité* d'un ou plusieurs agents sans dégrader celle d'un ou plusieurs autres. Pour sa part, un état réalisable se définit comme une distribution de l'ensemble du stock de ressources d'une économie entre les ménages.

Il existe dans une économie donnée une infinité d'optima de Pareto qui dépendent de la manière dont sont partagées les ressources.

Optimum et interprétation des hypothèses : le cas de la survie du consommateur

Durant le chapitre II, on a recensé l'ensemble des hypothèses faites par Debreu pour démontrer l'existence d'un équilibre général concurrentiel. Parmi elles, la « survie du consommateur ». La plupart du temps cette hypothèse passe inaperçue. On peut conjecturer que cela est dû à la difficulté de l'interpréter. Koopmans (1970) est l'un des rares auteurs à en proposer une signification réaliste :

« On ferait une hypothèse plus réaliste, […], en reconnaissant l'existence de transferts de revenu par l'impôts et la sécurité sociale, et en cherchant les conditions, en y incluant impôts et prestations sociales, qui assurent la survie générale dans un état d'équilibre. » (p. 62).

D'après nous, la notion d'optimum de Pareto est incompatible avec ce genre d'interprétation puisqu'elle interdit toute redistribution des richesses. Du reste, Koopmans le perçoit puisqu'il propose quelques lignes plus bas une autre version :

« Le plan que fait chaque consommateur, en réponse au système des prix, comprend une spécification de sa durée de vie compatible avec ses ressources présentes, sa capacité d'effectuer un travail rémunérateur et d'autres aspects du plan de vie. Les postulats doivent simplement assurer la survie de chaque consommateur au moins dans la première période ; le montant et la distribution initiale des ressources et capacités dans la population déterminent l'étendue et le délai, s'il y a lieu, de la mort par inanition. » (p. 62).

On voit clairement, dans cette illustration, que la notion d'optimum limite et influence le sens que l'on peut donner aux hypothèses du modèle.

V. I. 2 Démonstration

On va effectuer la preuve des deux théorèmes de l'économie du bien- être. Si ces derniers ont connu un tel succès c'est qu'ils sont à la fois simples et généraux.

Premier théorème et principales hypothèses

Le premier théorème énonce que tout équilibre général concurrentiel est un optimum de Pareto. Sa formulation même, et en particulier la référence au régime concurrentiel, invite à considérer qu'il prend place dans une économie du type « Arrow- Debreu ». En outre, les agents doivent avoir un comportement price takers et un système complet de marchés doit exister. Naturellement, un cadre institutionnel adapté, avec un commissaire priseur, est nécessaire pour que ces deux hypothèses soient vérifiées. A cela, il convient d'ajouter la propriété de monotonie des préférences pour être en mesure de réaliser la démonstration.

Preuve

La preuve se réalise par l'absurde. Considérons deux états de l'économie $Q = \left\{Q_1, ..., Q_j, ...Q_m\right\}$ et $E = \left\{E_1, ..., E_j, ...E_m\right\}$ où Q_j et E_j représentent respectivement un panier de biens quelconque et le panier de biens « d'équilibre » attribué au $j-ième$ ménage. On suppute que tous deux sont des états « réalisables » c'est-à-dire tel que $\sum_{j=1}^{m} Q_j = \sum_{j=1}^{m} E_j = S$ où S est le stock de ressources disponibles dans l'économie.

Supposons qu'un équilibre général concurrentiel E ne soit pas un optimum de Pareto. Cela signifie qu'au moins un agent tire une utilité supérieure d'un autre état de l'économie, tandis que les autres ont également une utilité supérieure ou sont indifférents. Si on suppose, par exemple, que l'agent 1 tire une plus grande utilité du panier de biens Q_1 par rapport à celui dont il bénéficie à l'équilibre, on a : $U(Q_1) > U(E_1)$. Pour les j-1 autres agents on obtient : $U_{j-1}(Q_{j-1}) \geq U_{j-1}(E_{j-1})$.

Or, au prix d'équilibre P_E les agents n'ont pas accès au panier Q (autrement ils l'auraient acquis). L'hypothèse de monotonie des préférences permet d'affirmer que l'on a alors :

$$P_E \cdot Q_1 > P_E \cdot E_1 \text{ ainsi que } P_E \cdot Q_{j-1} \geq P_E \cdot E_{j-1}.$$

En additionnant les inégalités, il s'ensuit que : $P_E \cdot (\sum_{j=1}^{m} Q_j) > P_E \cdot (\sum_{j=1}^{m} E_j)$. Ce qui est contraire au fait que $\sum_{j=1}^{m} Q_j = \sum_{j=1}^{m} E_j = S$. Par conséquent, il ne peut pas exister d'état Q de l'économie préféré au sens de Pareto à l'état E. Ce dernier est obligatoirement un optimum.

Le second théorème

Le second théorème de l'économie du bien- être est plus délicat à prouver. Il établit un lien entre optimum de Pareto et équilibre général concurrentiel.

Nous voulons d'emblée souligner son extrême importance pour un thème comme la planification. La recherche d'un équilibre, et le choix d'un processus pour l'atteindre, ne sont souvent pas des choses aisées. Or, d'après ce deuxième théorème, il suffit d'avoir une répartition des ressources Pareto optimale pour obtenir l'équilibre recherché. Le problème se trouve déplacé et simplifié. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que ces théorèmes ont été établis par Lange, un fervent partisan de la planification et cela avant même la première preuve d'existence d'un équilibre général concurrentiel.

Hypothèses et démonstration

Les hypothèses nécessaires à cette seconde démonstration reprennent celles du premier théorème. On y introduit en plus la convexité des courbes d'indifférences et des ensembles de production.

Pour commencer, considérons l'état $Q^* = \left\{Q_1^*, ..., Q_i^*, Q_j^*, ..., Q_m^*\right\}$ que l'on suppose être un optimum de Pareto. Ceci implique que les taux marginaux de substitution soient les mêmes pour tous les agents (condition d'optimalité du premier ordre dérivant de la convexité des courbes d'indifférences). En d'autres termes, pour des consommateurs i et j ainsi que des biens h et l quelconques, on a : $\frac{(U_i)'_h}{(U_i)'_l} = \frac{(U_j)'_h}{(U_j)'_l}$.

Afin de s'assurer que les taux marginaux de substitutions soient définis positifs on mobilise l'hypothèse supplémentaire selon laquelle tous les biens sont « désirables »[1].

A présent, associons à chaque bien un prix de sorte que l'on puisse former un vecteur prix tel que : $P = \{p_a, ..., p_h, ..., p_l\}$. Il découle de l'égalité des taux marginaux de substitution que le prix du bien l, par exemple, est définit par :

$$\frac{p_h}{p_l} = \frac{(U_j)'_h}{(U_j)'_l} \Leftrightarrow p_l = p_h \Big/ \frac{\left(U_j\right)'_h}{\left(U_j\right)'_l} \qquad (5.1)$$

Il est possible de procéder ainsi pour tous les biens. On en déduit par exemple : $p_a = p_h \Big/ \frac{(U_j)'_h}{(U_j)'_a}$ (5.2)

Il en résulte que l'ensemble des ménages égalise son taux marginal de substitution aux rapports des prix, quelque soit le bien considéré. Ce qui est la condition pour que Q^* soit un équilibre pour le vecteur prix P.

En effet, (5.1) et (5.2) implique que $\frac{p_l}{p_a} = \frac{(U_j)'_h}{(U_j)'_a} \Big/ \frac{(U_j)'_h}{(U_j)'_l}$ ou ce qui est équivalent : $\frac{p_l}{p_a} = \frac{(U_j)'_l}{(U_j)'_a}$.

V. I. 3 <u>Portée des théorèmes</u>

Ces démonstrations ont été formulées dès 1942, avant même la première preuve d'existence d'un équilibre général concurrentiel. Le fait qu'Oskar Lang, un fervent partisan d'une forme de planification, soit à l'origine de ces théorèmes est symptomatique de l'intérêt que les économistes de l'ex union soviétique ont, plus généralement, porté aux notions d'optimums.

[1] Autrement dit, on estime que les courbes d'indifférences sont de type « hyperbolique », c'est-à-dire convexes mais également asymptotes aux axes et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Planification et optimum

Si on se réfère à Novozilov (1972), il ne fait pas de doute qu'une théorie de la planification doit être basée sur celle de l'optimum :

« La planification socialiste est notoirement fondée sur la connaissance et l'application des lois économiques. Puisque le principe de l'optimum s'étend à l'application des lois en vigueur dans le socialisme, la théorie de la planification doit être, essentiellement, une théorie de la planification optimale. » (p. 47).

On trouve chez Kantorovitch (1963) une position analogue :

« la société socialiste, dans son ensemble comme dans les secteurs particuliers, autorise, par sa nature même, l'utilisation la plus rationnelle des ressources de production pour la satisfaction des besoins de la société. C'est pourquoi le plan optimal est une réalité essentielle pour chaque secteur de production socialiste et pour la production socialiste dans son ensemble […] » (p. 267)

L'enthousiasme pour les optimums s'explique par les techniques de programmations mathématiques qu'ils permettent de mobiliser (voir chapitre IV). Ces dernières, selon Kantorovitch et *al* (1979), présentent l'atout de pouvoir simultanément prendre en compte la diversité des critères économiques, l'aspect concret des projets ainsi que l'évolution des techniques :

« Les modèles mathématiques d'optimisation sont, par construction, aptes à prendre en compte les exigences qu'impose la nature socialiste des relations de production. Ils permettent d'utiliser les critères généraux de maximisation de l'efficacité économique, de minimisation des coûts, de maximisation de la croissance, jusqu'au niveau des décisions relatives à des projets concrets. […]. En outre, pour la gestion de l'économie, les méthodes d'optimisations sont un instrument puissant de mise en pratique des lois économiques. De plus l'utilisation des méthodes informatiques pour les calculs d'optimisation permet d'associer les avantages du système économique socialiste et les acquisitions les plus récentes de la révolution scientifique et de la technique. » (p. 1054).

Pourtant, les théorèmes de l'économie du bien- être sont à mettre en relation avec le cadre institutionnel retenu. Ils prennent place dans une société bien différente de celle que l'on connaît.

Un monde néoclassique

Les résultats énoncés précédemment sont valables que dans la mesure où l'on se situe dans un univers néoclassique. On est contraint de considérer l'existence d'un système complet de marchés, une économie semi- centralisée sous l'hégémonie d'un commissaire priseur, un horizon temporel fini… (pour tous les détails, se référer au chapitre II). A cela s'ajoutent d'autres difficultés purement techniques liées à la mobilisation de certaines catégories d'hypothèses pour permettre une formalisation. Par exemple, la convexité des ensembles de production exclut les rendements d'échelles croissants. Que deviennent exactement les théorèmes de l'économie du bien être dans cette configuration ?

Les réponses apportées dans les ouvrages avancés

Les économistes, du moins ceux qui ce sont intéressés au problème de la planification, ont cherché à alléger les hypothèses des théorèmes. Majoritairement, deux directions ont été suivies. La première piste a consisté à les généraliser en horizon temporel infini (Malinvaud (1953), Debreu (1954)). Plus récemment, la seconde voie poursuivie a été de lever l'hypothèse d'un système complet de marchés. En d'autres termes, on a cherché à valider les deux théorèmes en présence d'équilibres temporaires.

L'applicabilité ?

Au final, les réponses partielles apportées rendent- elles applicables les théorèmes de l'économie du bien- être ? Il est possible, à plus d'un titre, d'en douter. L'existence d'un système complet de marchés et un horizon de temps fini n'étant pas, d'un point de vue institutionnel, les seuls obstacles à surmonter. Il reste à donner une interprétation moralement plus satisfaisante à l'hypothèse de survie, à lever les hypothèses de convexités…

Combien même il serait possible d'alléger suffisamment les hypothèses des théorèmes, on ne pourrait en faire que des usages restreints. En effet, le critère de Pareto n'entraînant aucune redistribution, il pérennise les inégalités. Dans les pays en développement, ces dernières sont loin d'être liées à une différence d'ardeur à la tâche (corruption…). Elles ne peuvent pas se justifier même si l'on adopte la vision des néoclassiques. L'optimum de Pareto servirait alors uniquement à planifier dans les quelques pays développés.

Bien que ce concept fournisse un critère permettant de soutenir qu'un équilibre est une situation souhaitable à atteindre, il s'avère insuffisamment restrictif. Plusieurs équilibres peuvent les satisfaire. La situation est même très délicate en ce qui concerne le modèle d'équilibre général puisque tout équilibre concurrentiel répond au critère de Pareto. Comment alors sélectionner un équilibre parmi tous ceux qui satisfont le critère retenu ?

Conclusion

On peut tout d'abord laisser le processus sélectionner « naturellement » un équilibre. Evidemment, cela suppose de s'assurer qu'il soit stable. Toutefois, cette méthode possède une part importante d'indétermination puisque l'étude de la stabilité ne renseigne pas précisément sur l'équilibre qui sera atteint.

En second lieu, on peut essayer de mettre au point un deuxième critère de sélection ou bien encore affiner celui existant.

Une dernière méthode consiste à s'interroger sur l'origine de la multiplicité des équilibres. Celle- ci est souvent due à la diversité des conjectures et des anticipations des agents. Dès lors, il convient – par des méthodes appropriées – de les orienter dans le sens voulu de manière à rendre l'équilibre unique. C'est cette piste qu'on suivit la majorité des auteurs néo-classiques et que l'on développe.

SECTION II

L'unicité de l'équilibre

Les hypothèses les plus souvent utilisées, par les théoriciens néo- classiques, pour démontrer l'unicité de l'équilibre sont celles de la substituabilité brute et de la domination diagonale.

V. II. 1 Substituabilité brute et domination diagonale

On commence ici par l'étude de la substituabilité brute qui trouve son origine dans le travail de Wald (1936) avant d'être généralisée dans les années cinquante.

Présentation

Soit deux biens distincts quelconques i et j. On dit que ces deux biens sont des substituts bruts en P si l'on a :

$$(e_i)'_{p_j}(P) > 0 \quad \text{avec } i \neq j$$

Ceci signifie qu'une légère variation du prix du bien j entraîne une variation dans le même sens de la demande nette du bien i. Plus globalement, on dit qu'il y a substituabilité brute en P pour tous les biens de l'économie, pris deux à deux, si ces derniers sont tous des substituts bruts en P.

Cette hypothèse a plusieurs implications qui proviennent du fait qu'en présence d'une substituabilité brute et de fonctions de demande nettes homogènes de degré zéro, on a d'après la formule d'Euler : $\sum_{j=1}^{n} p_j (e_i)'_{p_j}(P) = 0$. Il en découle que s'il y a substituabilité brute en $P \neq 0$:

- Tous les éléments du vecteur- prix doivent être strictement positifs. Ce qui exclut la présence de marchandises gratuites correspondant à un équilibre de la forme $E(P) \leq 0$.
- Alors $(e_i)'_{p_i}(P) < 0\ \forall i$.

Maintenant que l'on a énoncé ces deux propriétés, on est en mesure de démontrer la principale caractéristique de l'hypothèse de substituabilité brute. A savoir qu'elle assure l'unicité de l'équilibre.

Equilibre et unicité : les conséquences de l'hypothèse de substituabilité brute

Pour commencer, considérons deux biens k et i. Ce premier ayant pour particularité de subir la hausse de prix le plus faible de l'économie lorsque l'on passe d'un vecteur- prix P' à P. En d'autres termes, on a :

$$(5.3) \qquad \frac{p_k}{p'_k} \leq \frac{p_i}{p'_i} \text{ avec } i = 1,\ldots, n$$

Si l'on pose $\frac{p_k}{p'_k} = t$, on obtient :

$$(5.4) \qquad p_i \geq t \cdot p'_i \text{ avec } i = 1,\ldots, n$$

Dans un second temps, considérons un vecteur $P_1 = (p_1, tp'_2, ..., p_k, ..., tp'_n)$. Celui- ci ne se distingue de $tP' = (tp'_1, tp'_2, ..., p_k, ..., tp'_n)$ que par son premier élément. Etant donné (5.4) et la propriété de substituabilité brute $(e_k)'_{p_1} > 0$ qui assure que la fonction e_k est croissante par rapport à son premier argument, on peut écrire :

$$(5.5) \quad e_k(P_1) \geq e_k(tP')$$

Suivant la même logique, on établit un vecteur- prix $P_2 = (p_1, p_2, tp'_3, ..., p_k, ..., tp'_n)$. Ce dernier ne se différencie de P_1 que par son second élément. Pour des motifs similaires que ceux exposés précédemment, on a :

$$(5.6) \quad e_k(P_2) \geq e_k(P_1)$$

En conservant le même procédé, il est possible de créer une chaîne de prix reliant le vecteur tP' à P tel que :

$$(5.7) \quad e_k(P) \geq e_k(P_{n-1}) \geq ... \geq e_k(P_2) \geq e_k(P_1) \geq e_k(tP')$$

En raison de l'homogénéité de degré zéro des demandes nettes, les vecteurs $e_k(tP')$ et $e_k(P')$ sont équivalents. De plus si l'un des éléments des vecteurs P et P' ne sont pas proportionnels, nous obtenons une inégalité stricte de sorte que :

$$(5.8) \quad e_k(P) > e_k(P')$$

L'unicité de l'équilibre dérive immédiatement de cette démonstration. En effet, l'équilibre général assurant simultanément l'annulation de la demande nette pour tous les marchés, on doit avoir si P' est le vecteur d'équilibre : $e_k(P') = 0$. Tout autre vecteur- prix que P', non défini à une homothétie près, ne peut être un équilibre étant donné (5.7).

Pour terminer, remarquons également que l'hypothèse de substituabilité brute assure la stabilité globale de l'équilibre général. C'est là un point remarquable mais sur lequel nous n'insisterons pas puisqu'il sort largement de notre cadre d'analyse (voir Arrow, Block et Hurwicz (1958)).

Les fondements de la substituabilité brute

L'idée sous- jacente à l'hypothèse de substituabilité brute est que « l'effet prix » prédomine sur « l'effet revenu ». Par conséquent quand les agents voient le prix d'un bien augmenter, ils lui substituent d'autres biens. On ne tient pas compte du fait que la hausse du prix d'un bien est synonyme pour les détenteurs de celui- ci d'une élévation de leurs revenus[1]. Pour justifier cela, les auteurs néo- classiques, mettent en avant le rôle joué par les conjectures des agents. Ces derniers seraient plus sensibles à une hausse du prix plutôt qu'à une augmentation de leurs revenus. La question qui intervient est de savoir pourquoi les agents ont de telles conjectures qui apparaissent contraire à la « rationalité » ?

En fait, il n'y a pas vraiment de réponse à cette interrogation. L'hypothèse de substituabilité brute ne repose sur aucun fondement institutionnel et s'avère largement dépourvue de justification théorique. C'est pourquoi, plutôt que de recourir directement à cette hypothèse, de nombreux théoriciens préfèrent utiliser celle de « domination diagonale ».

La domination diagonale

On estime qu'il y a « domination diagonale » lorsque la demande nette d'un bien quelconque est plus sensible à la variation de son propre prix plutôt qu'à la somme des effets provenant des variations du prix de tous les autres biens. Il s'ensuit que la domination diagonale en P implique :

(a) $(e_i)'_{p_i}(P) < 0$ avec i = 1,…, n

(b) $\left| (e_i)'_{p_i}(P) \right| > \sum_{i=1}^{n-1} \left| (e_i)'_{p_j}(P) \right|$ avec $j \neq i$ et $j < n$

Substituabilité brute et domination diagonale

En fait, la domination diagonale est une conséquence de la substituabilité brute. Comme le note Hahn (1982) :

« il n'y a pas d'exemple dans la littérature sur les fonctions d'utilité et de production qui entraîne la domination diagonale, en dehors, bien entendu du cas où il y a substituabilité brute ».

[1] On le voit nettement dans le fait que la substituabilité brute implique une élasticité directe de la demande nette inférieure à -1.

En effet, il est toujours possible d'écrire la formule d'Euler, pour des biens k et h, sous la forme :

$$(5.9) \quad p_k (e_k)'_{p_k} (P) = -\sum_{h \neq k} p_h (e_k)'_{p_h} (P)$$

D'après l'hypothèse de substituabilité brute $(e_k)'_{p_h} (P) > 0$. Comme $p_h > 0$ quel que soit h, il en découle que le membre de droite de l'équation est négatif. Pour que l'égalité soit vérifiée, on doit absolument avoir $(e_k)'_{p_k} (P) < 0$ (propriété (a)).

De plus, en prenant (5.9) sous forme de valeur absolue et en supposant que p_i est la plus grande composante de P ($0 < p_k < p_i$) :

$$(5.10) \quad \left| p_i (e_i)'_{p_i} (P) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} p_h (e_i)'_{p_h} (P) \right| \text{ avec } h \neq i$$

En posant j = h

$$(5.11) \quad \left| p_i (e_i)'_{p_i} (P) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} p_j (e_i)'_{p_j} (P) \right| \text{avec } j \neq i$$

Si on enlève le n- ième terme intervenant dans la somme de droite de (5.11) et en observant que les dérivées partielles des demandes nettes par rapport au prix sont positifs (hypothèse de substituabilité brute), on aboutit à la propriété (b) (les prix étant strictement positifs).

Les démonstrations des propriétés (a) et (b) ont nécessité de faire appel à l'hypothèse de substituabilité brute. On en déduit que la domination diagonale a les mêmes propriétés que la substituabilité brute. Autrement dit, s'il y a domination diagonale en P, l'équilibre général est unique.

Conclusion

Les hypothèses de substituabilité brute et de domination diagonale ont le même inconvénient : elles portent sur les fonctions de demandes nettes. On verra au chapitre suivant toute la difficulté pour définir ces fonctions en présence d'incertitude. Plus généralement, les fonctions de demandes nettes posent des problèmes dès que l'on désire spécifier leurs propriétés. D'après les souvenirs de Werner Hildenbrand (1983), c'est aussi le constat que dressait Debreu :

« De fait, dans la *Théorie de la valeur*, les problèmes de l'unicité et de la stabilité ne font l'objet que d'une simple note de bas de page ; la statique comparative, quant à elle, n'est même pas mentionnée. De ma première conversation avec Debreu (à un moment où j'exprimai, très naïvement, le désir de travailler sur ces problèmes), je retiens qu'il était toujours convaincu que les fondements microéconomiques ne fournissent pas une structure suffisante pour les demandes nettes totales, qui puisse permettre un traitement satisfaisant de ces questions. Bien entendu, en rajoutant des hypothèses particulières, plus ou moins *ad hoc*, imposées directement sur les demandes nettes, certaines propriétés de statique comparative peuvent, par exemple, être obtenues. Mais quelle est alors la pertinence de tels résultats ? ». (p. XXXV)

L'absence de spécification exacte des fonctions de demandes nettes est l'illustration d'une difficulté récurrente en théorie économique. A savoir que seules quelques (rares) propriétés « qualitatives sont connues » avec certitude. Pour contourner cela, il est possible de mettre au point un autre critère de distribution des richesses.

V. II. 2 Les allocations B. C. P. E

La sélection des équilibres par l'introduction du concept d'allocation B. C. P. E (Budget Constrained Pareto Efficient) est largement méconnue. Il est vrai que ce concept amène, en matière d'unicité de l'équilibre, à des résultats moins satisfaisants que les hypothèses de substituabilité brute et de domination diagonale. Pourtant, il s'avère beaucoup mieux fondé et plus cohérent sur le plan théorique.

Le concept d'allocation B. C. P. E

L'idée implicite est d'affirmer que les agents consomment en priorité certains biens essentiels à leurs survies. L'habitat ou l'alimentation sont de bons exemples. La consommation de ce type de biens est alors élevée au rang de « droit fondamental ». Plus spécifiquement, une allocation B. C. P. E a pour caractéristiques :

- de saturer la contrainte budgétaire d'un agent étant donné le système de prix.

- d'être un optimum de Pareto.

A la différence de ce que l'on observe dans le modèle d'équilibre général traditionnel, les allocations B. C. P. E ne maximisent pas nécessairement l'utilité des agents. Ce qui est une conséquence du fait que les « droits fondamentaux » de chaque individu sont d'abord satisfaits avant d'autoriser l'acquisition d'autres types de biens. En somme, il s'agit d'une interprétation au sens large de l'hypothèse de survie.

Le vecteur « prix- revenu »

Le fait de revendiquer des droits fondamentaux oblige à ne plus concevoir séparément le niveau des prix et celui des revenus :

« Notons qu'il n'est pas économiquement justifié de considérer les revenus indépendamment des prix. En effet, les problèmes relatifs aux droits à consommer n'apparaissent que dans la mesure où, à revenus donnés, les prix de certains biens essentiels sont si élevés, qu'ils ne peuvent être acquis par tous les agents en quantités suffisantes par rapport à ce que recouvre la notion de droit à consommer. » (Balasko (1988), p. 155).

C'est pourquoi, on est amené à définir un vecteur « prix- revenu » (P, R) au lieu d'avoir séparément $P = (p_1, ..., p_l) \in \mathbb{R}^l$ et $R = (r_1, ..., r_m) \in \mathbb{R}^m$. Cependant, si l'on néglige l'éventuelle redistribution du profit et que l'on considère que le revenu des agents se réduit aux dotations initiales, alors le vecteur prix- revenu est du type $(P, \overline{Q}_i) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{l \cdot m}$. C'est à partir de cette dernière forme que l'on va exposer les principaux résultats en matière d'existence et d'unicité des allocations B. C. P. E. Etant donné que les démonstrations s'avèrent particulièrement lourdes et d'un intérêt limité sur le plan économique ; on se contente d'énoncer et de commenter ces résultats sans en établir les preuves. Le lecteur désireux d'approfondir le sujet peut se reporter aux articles de Keiding (1981) et Svenson (1984).

Théorème d'existence

Il existe au moins une allocation B. C. P. E associée à un vecteur prix- revenu quelconque.

On observe que le théorème proposé est très général puisqu'il ne spécifie aucune restriction particulière sur le vecteur prix- revenu pour assurer l'existence d'une allocation B.C.P.E. Ainsi, de telles allocations existent parfaitement en dehors de l'équilibre. Il est même fortement probable qu'elles soient multiples. En fait, et c'est là le résultat le plus intéressant, la recherche d'un couple prix- revenu d'équilibre va assurer l'unicité de l'allocation B.C.P.E.

L'unicité

Si le vecteur de demande nette est arbitrairement petit alors l'unicité de l'allocation B.C.P.E est assurée.

Autrement dit, si l'on se situe dans une économie d'échange, pour qu'il y ait unicité on doit avoir :

$$(5.12) \quad \left(D_1(P,\bar{Q}_1)+D_2(P,\bar{Q}_2)+\ldots+D_m(P,\bar{Q}_m)\right)-\sum_{h=1}^{l} q_h \leq \varepsilon$$

Ce qui est équivalent à :

$$(5.13) \quad \sum_{i=1}^{m} e_i(P,\bar{Q}_i)-\sum_{h=1}^{l} q_h \leq \varepsilon$$

Où ε désigne un nombre arbitrairement petit.

Changement d'approche et portée de la nouvelle approche

L'unicité des allocations B.C.P.E, au voisinage de $\sum_{i=1}^{m} e_i(P,\bar{Q}_i)=0$, est compatible avec l'existence de plusieurs vecteurs prix- revenu d'équilibre. L'unicité concerne uniquement la « distribution » des ressources associées aux équilibres. La logique qui sous tend cette démarche est donc profondément différente de celle mise en œuvre lors du recours aux hypothèses de substituabilité brute et de domination diagonale. De ce fait, la difficulté inhérente à la spécification des propriétés de la fonction de demande nette est évitée. On peut alors se demander si le concept d'allocation B.C.P.E ne constitue pas un cadre adéquat pour la théorie de l'équilibre général ?

Il est bien délicat de répondre de façon tranchée à cette question. On voit néanmoins que le concept d'allocation B.C.P.E génère une interprétation plus séduisante de l'hypothèse de survie. De plus, il exhibe des résultats convaincants d’unicité locale. La contre partie étant que les allocations BCPE accroissent les prérogatives de l’Etat en lui donnant pour mission de garantir les droits fondamentaux.

CHAPITRE VI

La stabilité des processus

On a vu au cours du chapitre I l'importance qu'ont les processus dans la caractérisation de la notion d'équilibre. Ce qui est aisément compréhensible puisqu'un équilibre inatteignable ne présente que peu d'intérêt sur le plan économique.

En ce qui nous concerne, il n'est pas question de fournir une liste exhaustive des processus envisagés pour assurer la stabilité des équilibres. On va uniquement exposer les particularités des principaux processus décrits dans la littérature et qui sont considérés comme le point de départ de toute réflexion rigoureuse sur le sujet.

SECTION I

Le tâtonnement walrasien

Incontestablement, le tâtonnement est la méthode qui a connu l'engouement le plus important pour parvenir à égaliser l'offre et la demande. On se propose donc de la commenter et d'examiner les conclusions auxquelles elle aboutit.

VI. I. 1 Formes des fonctions de demande nette et tâtonnement

Pour commencer, il convient de rappeler que la fonction de demande nette est une application de $\mathbb{R}^l_{++} \times (\mathbb{R}^l_{++})^m$ dans $\mathbb{R}^l$ définie par la formule :

$$(6.1) \qquad E(P(t),Q) = \sum_{i=1}^{m} (D_i(P(t), P(t) \cdot Q_i) - \bar{Q}_i)$$

Dans la mesure où en concurrence parfaite l'interdiction d'échanger en dehors de l'équilibre garantit l'absence d'hystérésis (confère chapitre I), on notera indifféremment la demande nette E (P (t)). L'équilibre économique correspond alors à un vecteur prix P_e qui assure l'égalité :

$$(6.2) \quad \sum_{i=1}^{m} (D_i(P_e, P_e \cdot Q_i)) = \sum_{i=1}^{m} \overline{Q}_i \Leftrightarrow E(P_e) = 0$$

Rappel sur la modélisation du processus de tâtonnement

L'idée du tâtonnement est décrite initialement en ces termes par Walras (1874) :

« Lorsque cette égalité (entre l'offre et la demande effectives) n'existe pas, il faut, pour arriver aux prix d'équilibre, une hausse du prix des marchandises dont la demande effective est supérieure à l'offre et une baisse du prix de celles dont l'offre effective est supérieure à la demande effective » (p. 133)

D'un point de vue mathématique sa formalisation en temps continu prend la forme de l'équation différentielle suivante :

$$(6.3) \quad P'(t) = f(E(P(t)))$$

Le tâtonnement comme interprétation de la loi de l'offre et la demande

La plupart des économistes interprètent le processus de tâtonnement comme une fidèle retranscription de la « loi de l'offre et de la demande ». Ce point de vue n'est valable que dans la mesure où l'on se cantonne à une étude locale de la stabilité :

« [...] à condition d'introduire des coefficients numériques adéquats qui s'interprètent comme des vitesses d'ajustement définies pour chaque bien, le tâtonnement walrassien est une approximation au premier ordre de la loi de l'offre et la demande au voisinage de l'équilibre » (Balasko (1988), p. 32).

C'est pourquoi lorsqu'on s'intéresse à sa convergence, on étudie la forme linéaire de l'équation (6.3) :

$$(6.4) \quad \begin{cases} P'(t) = J\,E(P_e)\,(P(t) - P_e) \\ P(0) = P \end{cases}$$

Un dilemme théorique

La preuve de la stabilité du processus de tâtonnement a constitué pendant longtemps un thème majeur de recherche. Les premières stratégies pour en prouver la stabilité étaient de recourir à des hypothèses de domination diagonale ou de substituabilité brute (confère Arrow et Hahn (1971)). Bien que ces approches s'avérèrent payantes elles posèrent le problème de la justification d'hypothèses touchant directement la forme des fonctions de demandes nettes. Le débat s'en trouva donc modifié au cours des années soixante. Il porta sur la forme que devaient satisfaire les fonctions de demandes nettes, issues des choix optimaux des agents, pour assurer la stabilité du tâtonnement.

THEOREME SONNENSCHEIN- MANTEL- DEBREU

Au début des années soixante- dix quelques économistes eurent l'intuition de renverser la problématique. Ils se demandèrent alors si les fonctions de demandes nettes n'étaient pas tout simplement quelconques. Par ce biais trois auteurs différents, Sonnenschein (1973), Mantel (1974) et Debreu (1974), arrivèrent aux mêmes conclusions. Ces dernières prennent la forme du théorème suivant :

Toute fonction de $\mathbb{R}^l_{++}$ *dans* $\mathbb{R}^l$ *qui est continue, homogène de degré zéro et qui vérifie l'identité de Walras, peut-être considérée comme une fonction de demande nette d'une économie d'échange où les agents ont des préférences monotones et strictement convexes.*

Autrement dit, la forme des fonctions de demandes nettes se caractérise uniquement par l'homogénéité de degré zéro et par le respect de l'identité de Walras. Toute autre propriété est susceptible d'être rejetée.

VI. I. 2 <u>Démonstration du théorème Sonnenschein- Mantel- Debreu</u>

On va à présent effectuer la preuve du théorème en recourant au calcul matriciel. Cette manière d'opérer présentant à la fois l'avantage d'être plus générale et de se révéler extrêmement élégante.

Comme nous l'avons vu, examiner la convergence du processus de tâtonnement revient à s'intéresser à la stabilité de l'équation (4). L'idée est d'exprimer sous une autre forme la matrice jacobienne de la demande nette. Pour cela, on utilise la propriété suivante :

$$(6.5) \quad \mathrm{JE(P(t))} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{M_i(P(t), r_i)} + \mathrm{K \cdot Y}$$

M_i = matrice de Slutsky du consommateur i

Y = matrice des points de la fibre

K = matrice dont le coefficient (h,i) équivaut à $\mathrm{k_{h,i}} = \frac{\partial \mathrm{D_i^h}(\mathrm{P(t)}, \mathrm{r_i})}{\partial \mathrm{r_i}} - \frac{\partial \mathrm{D_m^h}(\mathrm{P(t)}, \mathrm{r_m})}{\partial \mathrm{r_m}}$

En fait l'équation (6.5) s'appuie de façon décisive sur le concept de « fibre ».

La notion de fibre

Soient $P \in \mathbb{R}^l_{++}$ et $R \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{D_i}(\mathrm{P(t)}, \mathrm{r_i}) = \mathrm{c}$ (où c représente une constante quelconque). On appelle fibre associée à $P(t)$ et aux r_i l'ensemble des couples $(P(t), Q) \in \mathbb{R}^l_{++} \times (\mathbb{R}^l_{++})^m$ vérifiant les équations :

$$\begin{cases} \mathrm{P(t)} \cdot \mathrm{q_i} = \mathrm{r_i} \\ \sum_{i=1}^{m} \mathrm{q_i} = \mathrm{c} \end{cases}$$

On remarque immédiatement que si $(P(t), Q)$ est une fibre associée à $(P(t), R)$, alors c'est un équilibre.

Construction d'une structure fibrée

Pour démontrer le théorème Sonneinschein- Mantel- Debreu, le principe est de construire une fibre pour laquelle la matrice K est un rang $\geq l-1$. Afin d'y parvenir, prenons le cas où $l = m$ ce qui implique une égalité entre le nombre de biens et de consommateurs. En vertu de l'identité de Walras, on peut soutenir que le rang de la matrice K est au mieux de $l-1$. Si on choisit de façon appropriée les revenus r_i et les fonctions de demandes D_i, il est toujours possible d'établir que : $\mathrm{rg}(K) = l-1$. Ainsi $JE(P(t), Q)$ représente la totalité de l'espace des matrices carrés $(l-1) \times (l-1)$ lorsque Y varie en décrivant les points de la fibre.

Conséquence

Dans la mesure où nous avons doté le couple $(\mathrm{P(t)}, \mathrm{Q})$ d'une structure de fibre, on se situe obligatoirement dans « l'ensemble des équilibres ». Tous les points de la fibre vérifient donc l'égalité: $\mathrm{E(P_e)} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{D_i}(\mathrm{P_e}, \mathrm{P_e} \cdot \mathrm{Q_i}) - \sum_{i=1}^{m} \overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{i}} = 0$.

Or pour se placer dans cet ensemble, aucune hypothèse particulière n'a été formulée concernant la forme de la fonction de demande nette. A priori, cette dernière a une forme quelconque. On rejoint ici les résultats établis par Sonneinschein, Mantel et Debreu. Il en découle immédiatement que le processus de tâtonnement n'assure pas nécessairement la convergence puisqu' il a été conçu pour une forme spécifique de la fonction de demande nette[1].

Point de débat

Le principal point de discussion concerne les propriétés que doivent avoir les revenus et les fonctions de demandes $D_i(\cdot)$ pour que le rang de K soit égal à $l-1$. C'est là un débat important car si K n'avait pas le rang voulu, la matrice $JE(P(t),Q)$ ne décrirait pas l'ensemble des équilibres quand Y varie. Aucune conclusion globale ne pourrait être dégagée.

D'un point de vue « mathématique », il faut donc établir que les $(l-1)$ colonnes sont linéairement indépendantes[2]. Tel est le cas, d'après la façon dont la matrice a été construite, si les goûts des agents[3] sont disparates et s'il existe une dispersion des revenus suffisamment importante. Afin d'assurer le caractère varié des goûts des consommateurs, deux axiomes sur la relation de préférence sont mobilisés : la monotonie et la convexité stricte.

Pour terminer notons que des travaux récents, à l'instar de celui de Kirman et Kock (1986), atténuent ce débat. Ils tendent à prouver que le théorème Sonneinschein- Mantel-Debreu reste valable même si l'on considère une dispersion faible des revenus et des relations de préférences identiques.

VI. I. 3 Epilogue : instabilité et chaos des marchés

Si ce théorème a une importance aussi primordiale c'est qu'il ruine tout espoir d'établir des propriétés générales à partir des fonctions de demandes nettes. Il en résulte que la stabilité du processus de tâtonnement, et donc de la loi de l'offre et la demande, n'est en

[1] Décroissante en fonction des prix dans le cas d'un excès de demande et croissante en cas d'excès d'offre.
[2] Techniquement, il reviendrait au même d'étudier l'indépendance linéaire des lignes. En effet, le rang de l'ensemble des lignes des matrices est égal au rang de celui des colonnes.
[3] Rappelons que la fonction demande dérive de la fonction d'utilité, laquelle représente les préférences et les goûts des agents.

rien assurée. Pire encore, plusieurs articles invitent à penser que l'instabilité et le chaos constituent la norme.

De ce point de vue les écrits de Balasko (1986 et 1988) sont particulièrement riches d'enseignements. Nous allons nous en inspirer sans pour autant entrer dans le détail des démonstrations les plus lourdes.

De la stabilité des équilibres à celle des processus

La manière la plus intuitive d'étudier la stabilité est de considérer que les équilibres stables constituent un sous-ensemble de l'ensemble des équilibres. On s'interroge alors sur la place qu'occupe ce sous-ensemble dans l'ensemble. Malheureusement, cette manière d'opérer n'a jamais apporté les résultats escomptés :

« Les résultats disponibles portent uniquement sur la connexité par arc de ces ensembles et sur leur localisation dans l'ensemble des équilibres.»[1] (Balasko (1988), p. 94).

D'où l'idée de changer d'approche et de s'intéresser à la stabilité des trajectoires. Pour ce faire, on les partitionne. Les trajectoires convergentes deviennent alors un élément parmi d'autres. Si l'on prend une trajectoire au hasard : quelle est la probabilité que celle- ci converge ?

Probabilité de convergence

Pour répondre à ce dilemme, on s'intéresse aux propriétés que revêtent les trajectoires convergentes afin d'estimer leur fréquence. La démarche s'effectue en plusieurs étapes :

« 1[er] étape » : On observe que la fonction de demande nette est propre. Par conséquent, puisque $E:\mathbb{R}^l_{++} \to \mathbb{R}^l$ il s'ensuit que pour tout $M \in E(\mathbb{R}^l_{++})$, $E^{-1}\left([0\,;M]\right)$ est un compact dans $\mathbb{R}^l = \left\{P \in \mathbb{R}^l_{++} \text{ tel que } 0 \leq E(P(t)) \leq M\right\}$. Ainsi, la fonction de demande nette se trouve bornée.

[1] Concernant la localisation, on peut seulement affirmer que le sous-ensemble des équilibres stables n'est pas vide puisqu'il contient celui des équilibres sans transaction. En dépit de l'élégance de la démonstration, ce résultat n'a que peu d'intérêt d'un point de vue économique.

« 2ième étape » : Plutôt que de réfléchir via la fonction de demande nette, on raisonne grâce à l'identité de Walras à partir de $\overline{E}(P(t))$ qui est la projection du vecteur $E(P(t))$ sur l'espace $\mathbb{R}^{l-1}$ par l'intermédiaire des $l-1$ premières coordonnées de $\mathbb{R}^{l}$. Il en résulte que $\overline{E}:\mathbb{R}^{l}_{++}\to\mathbb{R}^{l-1}$.

« 3ième étape » : Malheureusement rien ne permet de garantir que $\overline{E}(P(t))$ est propre. C'est pourquoi, on lui adjoint une fonction Φ définie par :

$$\Phi(\overline{E}(P(t))=((1+p_1)e_1(P(t)),(1+p_2)e_2(P(t)),...,(1+p_{l-1})e_{l-1}(P(t)))\,.$$

Outre le fait d'être propre, $\Phi(\overline{E}(P(t))$ a pour spécificités d'avoir le même ensemble de 0 que $\overline{E}(P(t))$ et d'admettre 0 comme valeur régulière si et seulement si 0 est une valeur régulière de $\overline{E}(P(t))$.

« 4ième étape » : D'ordinaire, la forme de la fonction f du processus de tâtonnement (équation (6.3)) n'est pas précisée. On lui impose seulement de conserver le signe. Tel est la cas de la fonction Φ qui, à ce titre, peut jouer le rôle de f.

« 5ième étape » : L'étape suivante consiste à définir la notion de degré de Brouwer (de Φ). Comme $0\in\mathbb{R}^{l-1}$ est une valeur régulière[1] de $\overline{E}$, c'est également une valeur régulière de Φ. Le degré de Brouwer est alors donné par la formule :

$$\sum_{P_e\in\Phi^{-1}(0)} h(P_e)$$

Où $h(P_e)$ est de $+1$ si la matrice jacobienne de Φ a en P_e un signe positif et de -1 si son signe est négatif.

« 6ième étape » : La dernière étape se résume à remarquer que $\Phi(\overline{E}(P_e))$ est contenue dans la classe des fonctions propres de $\mathbb{R}^{l}_{++}$ dans $\mathbb{R}^{l-1}$ ayant un degré de Brouwer égal à $(-1)^{l-1}$. Laquelle est une partition de l'ensemble des fonctions propres de $\mathbb{R}^{l}_{++}$ dans $\mathbb{R}^{l-1}$.

[1] Ce qui signifie que $grad\ \overline{E}(0)\neq 0$

Par conséquent, $\Phi(\overline{E}(P_e))$ n'étant qu'un élément d'une partition d'un ensemble de fonctions propres de $\mathbb{R}^l_{++}$ dans $\mathbb{R}^{l-1}$, il en résulte que la probabilité de prendre au hasard une trajectoire qui converge parmi l'ensemble des trajectoires, est quasi nulle.

Commentaires

La méthode que l'on vient d'exposer ne nous a certes pas permis de chiffrer la probabilité de convergence du tâtonnement mais simplement de s'en faire une opinion. Néanmoins cela suffit largement à conclure, sauf cas exceptionnel, au caractère instable du mécanisme de tâtonnement.

SECTION II

Mécanisme de variation des quantités. Les équilibres à prix fixes

Etant donné l'instabilité de la méthode la plus « populaire » de variation des prix, une voie alternative qui semble naturelle est de stipuler que les ajustements sont du ressort des quantités :

« Intuitivement on peut considérer un K- équilibre à prix fixes comme le point fixe d'un tâtonnement en quantités […] » (Benassy (1984), p. 36).

VI. II. 1 Présentation

En premier lieu, mentionnons que ces approches mettent l'accent sur les équilibres non walrasiens :

« Nous avons vu dans le chapitre précédent les concepts de bases d'une théorie microéconomique valable dans le cas où l'offre et la demande ne sont pas égales sur tous les marchés. Nous allons maintenant rassembler ces éléments et construire un certain nombre de concepts d'équilibres non walrasiens que nous désignerons sous le nom générique de K-équilibres. […]. Ces concepts seront cependant non walrasiens dans la mesure où les signaux en quantités joueront dans les processus d'ajustement un rôle aussi important que les signaux prix. Quant aux prix, même s'ils sont flexibles, ils ne s'ajusteront pas nécessairement de façon à équilibrer l'offre et la demande sur tous les marchés. » (Benassy (1984), p. 26).

Etant donné le rôle primordial qu'ont joué les modèles à prix fixes dans l'étude des équilibres non walrasiens, on va examiner attentivement la formalisation de Benassy. Celui ci se place d'emblée dans une économie d'échange comportant m agents munis d'une fonction objective d'utilité.

Structure du modèle et formation des prix

Le choix du vecteur prix fixé une fois pour toute est de la responsabilité d'un agent i :

« Nous supposerons donc dans ce qui suit que les biens sont différenciés non seulement par leurs caractéristiques physiques, mais éventuellement aussi par l'agent qui en fixe les prix, de sorte que les prix d'un bien sera fixé par un seul agent. » (p. 21).

Les autres individus ont un comportement price taker :

« C'est au niveau de la formation des contraintes anticipées que l'agent *i* diffère des autres agents qui ne contrôlent pas les prix. En effet les autres agents prennent les prix et les contraintes anticipées comme des données paramétriques qu'ils ne peuvent influencer. » (p. 21).

Notons qu'à la différence du commissaire priseur walrasien l'agent i est muni d'une fonction d'utilité semblable à celle des autres agents, qu'il cherche à maximiser.

Le prix annoncé n'égalise généralement pas l'offre et la demande. Par conséquent, certains agents ne pourront acquérir ou vendre la quantité voulue. Ils seront alors rationnés.

Schémas de rationnement et règle du coté court

Dans ce contexte, l'équilibre engendré dépend étroitement de la règle de partage des rations instaurées par le modélisateur. En réalité, il existe au moins autant d'équilibres possibles que de schémas de rationnement.

Pour sa part Benassy instaure la règle du « coté court » qu'il décrit en ces termes :

« Le coté « court » d'un marché est celui ou le volume global des transactions désirées est le plus faible. C'est donc le coté de la demande s'il y a excès d'offre, le coté de l'offre s'il y a excès de demande. L'autre coté est appelé le coté « long » » (p. 5).

En d'autres termes, seuls les agents du coté court réalisent leurs offres ou demandes.

Sur le plan mathématique, le schéma de rationnement que subit un agent i sur un marché h est matérialisé par une fonction $F_{ih}(\cdot)$ qui possède pour argument les demandes nettes effectives des m individus.

En ce qui nous concerne, il est important de remarquer que cette fonction ne décrit en aucun cas un processus mais traduit simplement « l'organisation des marchés ». Il n'y a pas d'idée d'ajustement sous-jacente.

VI. II. 2 La nature du processus

La notion de demande effective

Une conséquence directe des rationnements est l'existence d'effets de report. Ces derniers expriment le fait qu'un agent contraint sur un marché modifie ses offres ou demandes sur d'autres marchés. Les agents qui ont conscience que les prix annoncés ne sont pas d'équilibre tentent d'anticiper les contraintes qu'ils subiront. Par ce biais, ils déterminent leurs demandes effectives qui résultent de « la maximisation de la fonction d'utilité sous la contrainte de budget et en tenant compte des contraintes perçues sur les autres marchés. » (p. 14).

La perception des contraintes à l'origine du processus

Dans la version proposée par Benassy, les contraintes perçues par un individu sur les offres ou demandes sont représentées par une fonction G (·), qui se déduit de F (·), et qui dépend des demandes nettes effectives des autres agents. Evidemment se pose le problème de la capacité de ce dernier à les connaître. En fait, il doit les anticiper. Là manière dont se font les anticipations n'est pas précisée dans le modèle. Cela dépend des croyances de chacun : élément particulièrement délicat à formaliser.

Enfin, notons l'importance de la fonction F (·), c'est à dire la règle de partage des rations dans la manière dont les individus vont considérer les contraintes.

La teneur du processus

Au départ, chaque agent doit donc déterminer sa demande nette effective en tenant compte des contraintes qu'il pense subir, lesquelles dérivent de l'idée qu'il se fait des demandes nettes effectives des autres agents.

L'étape suivante consiste à l'annoncer au centralisateur. Celui- ci, après les avoir regroupé, renvoie aux agents la valeur des demandes nettes effectives désormais observées. S'en suivra une nouvelle évaluation des contraintes et par conséquent une nouvelle demande nette effective. La démarche est ainsi décrite par Benassy :

« Intuitivement on peut considérer un K- équilibre à prix fixe comme le point fixe d'un tâtonnement en quantité où les agents annonceraient des demandes effectives sur la base de contraintes perçues. A partir de ces demandes effectives le « marché » renverrait aux agents de nouvelles contraintes perçues sur la base desquelles ils annonceraient de nouvelles demandes effectives, et ainsi de suite…L'équilibre à prix fixe serait atteint pour des demandes effectives et contraintes perçues se reproduisant à l'identique. Les transactions pourraient alors avoir lieu. » (p. 36).

VI. II. 3 <u>Equilibre et convergence</u>

L'équilibre

De ce point de vue, l'équilibre s'appréhende intuitivement comme une situation ou « rien ne bouge ». En effet, lorsque les nouvelles demandes nettes effectives qu'adresse le centralisateur aux agents ne modifie pas leurs perceptions des contraintes et donc leurs demandes nettes effectives : le circuit se reproduit bien à l'identique. On retrouve l'idée de point fixe sur laquelle va s'appuyer la démonstration d'existence.

Plus formellement un K- équilibre à prix fixes, associé à un système de prix P et à un schéma de rationnement F, est un ensemble de vecteurs $\tilde{e}_i, e_i^*, \overline{d}_i, \overline{s}_i$ tels que :

a) $\tilde{e}_i = \tilde{\xi}_i(P, \overline{d}_i, \overline{s}_i)$

b) $e_i^* = F(\tilde{e}_i, \tilde{E}_i)$

c) $\overline{d}_i = G_i^d(\tilde{E}_i)$ et $\overline{s}_i = G_i^s(\tilde{E}_i)$

où $\tilde{e}_i$ représente la demande nette effective tandis que les fonctions G_i^d et G_i^s se déduisent de F par l'intermédiaire de la définition suivante :

$$G^{d}_{ih}(\tilde{E}_{ih}) = \max\left\{ \tilde{e}_{ih} \,\middle|\, F_{ih}(\tilde{e}_{ih}, \tilde{E}_{ih}) = \tilde{e}_{ih} \right\}$$

$$G^{s}_{ih}(\tilde{E}_{ih}) = -\min\left\{ \tilde{e}_{ih} \,\middle|\, F_{ih}(\tilde{e}_{ih}, \tilde{E}_{ih}) = \tilde{e}_{ih} \right\}$$

THEOREME D'EXISTENCE D'UN K- EQUILIBRE

Si les hypothèses du théorème du point fixe de Brouwer sont vérifiées et si, de surcroît, les schémas de rationnements demeurent continus, alors il existe au moins un K-équilibre.

Réflexion sur la nature de l'ajustement

On affirme souvent, en s'appuyant sur ce modèle, qu'il suffit d'instaurer une parfaite flexibilité des prix pour éviter l'apparition de situations de K- équilibre. C'est d'ailleurs l'opinion de Benassy (1984) :

« Même si l'égalité offre-demande n'est pas assurée institutionnellement, on pourrait accepter l'hypothèse d'équilibre comme une bonne approximation du fonctionnement de certains marchés. Tel est le cas des marchés " très compétitifs ", comme les marchés de certaines denrées agricoles ou matières premières, où les prix sont très flexibles et répondent rapidement à des modifications de l'offre où de la demande. » (p. 3).

On va à présent montrer qu'il n'en n'est rien pour peu qu'on modifie légèrement les conjectures de certains agents. Pour cela, on va reprendre la démarche de Hahn (1980) que l'on va toutefois adapter à notre propos.

Définition

Un K- équilibre à prix flexibles associé à un système de prix P et à un schéma de rationnement F_i, $i = 1,...,m$, est un ensemble de vecteurs $\tilde{e}_i, e_i, \overline{d}_i, \overline{s}_i$ tel que :

(i) $\left\{ e_i, e^*_i, \overline{d}_i, \overline{s}_i \,/\, i = 1,...,m \right\}$ forment un K- équilibre pour le vecteur prix P*

(ii) $0 \le P^* \le \infty$

Hypothèse sur les conjectures

Jusqu'à maintenant on a supposé que tous les agents se complaisaient dans une attitude de preneur de prix. Or, une telle hypothèse paraît difficilement justifiable en ce qui concerne les agents rationnés. Désormais ces derniers vont tenter d'influencer l'évolution des prix par une manipulation du schéma de rationnement. Celle- ci s'effectuant selon les modalités suivantes :

- Si l'agent i est un demandeur contraint, il annoncera au centralisateur une demande supérieure à celle résultant de son programme de maximisation, c'est-à-dire : $d_i^a > d_i$, afin de favoriser une hausse des prix et une augmentation de l'offre globale.
- Si l'agent i est un offreur contraint, il annoncera au centralisateur une offre supérieure à celle résultante de son programme de maximisation, c'est à dire : $S_i^a > S_i$, dans le but d'obtenir une baisse des prix et par conséquent une augmentation de la demande.

Pourtant si l'agent i est capable d'anticiper les contraintes en quantités qu'il subira lorsque les prix affichés ne sont pas d'équilibre, on se demande pourquoi il s'entête à crier un vecteur prix qui n'égalise pas l'offre et la demande. Il n'y a ici aucun motif pour que l'ensemble des demandes nettes effectives soit nul.

Conclusion

Comme on l'a observé, les modèles d'équilibres à prix fixes, dans la mesure où ils s'inscrivent dans la perspective du modèle d'équilibre général, n'échappent pas à la nécessité d'une centralisation importante. A cela s'ajoute le fait que leur complexité les rend délicats à manipuler. C'est la raison pour laquelle une part importante des économistes ont privilégié une autre démarche.

SECTION III

Méthode de Newton et tendance des recherches

A l'inverse de Benassy, la majorité des théoriciens a préféré élaborer d'autres processus – pour parer à l'échec du tâtonnement walrasien – tout en conservant un mécanisme de prix pour assurer la convergence. Les travaux les plus célèbres étant ceux de Smale (1976) ainsi que Saari et Simon (1978) sur la méthode généralisée de Newton. On se contentera pour notre propos de présenter cette méthode sans recourir à sa forme généralisée.

VI. III. 1 Méthode globale de Newton

La stabilité du tâtonnement, quelle que soit la forme de la fonction f, ne peut- être démontrée que sous des hypothèses de « domination diagonale » ou de « substituabilité brute ». Ces dernières sont infondables à partir des comportements maximisateurs des agents. C'est pourquoi, au début des années 1970, est apparu l'idée de préciser la forme de f afin d'obtenir des résultats de stabilité plus convaincants[1].

Présentation de la méthode de Newton

Le but est de se rapprocher du vecteur prix d'équilibre P_e qu'on admet être unique. Pour ce faire, on considère en premier lieu qu'on dispose d'une valeur P définie au voisinage de P_e.

Dans un second moment, on suppose que la fonction f du tâtonnement s'écrit de la manière suivante :

$$(6.6) \quad JE\,(P(t))\,(P_e - P(t)) + E\,(P(t))$$

Où JE (P(t)) est la matrice jacobienne de la demande nette E en P

Sur cette base on définit un vecteur- prix $\widehat{P}$, généralement meilleur approximation que P, en posant :

$$(6.7) \quad \widehat{P}(t) = P(t) - \frac{E(P(t))}{JE(P(t))}$$

Ou encore si l'on fait l'hypothèse que JE (P(t)) est régulière, donc inversible, on a :

$$(6.8) \quad \widehat{P}\,(t) - P(t) = -\,E\,(P(t))\,(JE\,(P(t)))^{-1}$$

Ce qui, en passant en temps continu, fournit la règle suivante de variation des prix :

$$(6.9) \quad P'(t) = -(JE(P(t)))^{-1}E(P(t))$$

[1] Selon Carlo Benetti (2002) l'absence exacte de spécification du comportement du commissaire priseur est la cause de l'indétermination des prix en dehors de l'équilibre : « Mais la loi de l'offre et de la demande ne dit rien sur la grandeur de la variation des prix qui résulte des demandes excédentaires quantitativement déterminées. Elle n'indique que le sens de cette variation. A cette restriction près p' est donc indéterminée. […]. L'indétermination du vecteur p' (ou de la variation des prix relatifs) est, selon nous, à l'origine des difficultés de la théorie walrassienne […] » (p. 921).

Dans la mesure où JE (P(t)) a été supposé régulière au voisinage de P_e (det JE (P(t)) $\neq 0$), l'étude de la stabilité (locale), se ramène à l'examen du système linéarisé :

$$(6.10) \quad P'(t) = -(JE(P(t)))^{-1} JE(P_e)(P(t) - P_e)$$

THEOREME (de domination diagonale)

Soit une matrice **A**= (a_{ij}) d'ordre n. **A** est différentiellement stable si :

i) ses éléments diagonaux sont tous strictement négatifs (a_{ii}<0, i = 1,…,n)

ii) il existe n nombres k_j strictement positifs tels que :

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\, k_j < k_i\, |a_{ii}| \quad i = 1,\ldots,n \text{ et } j = 1,\ldots,n$$

Stabilité

Etant donné que par définition - (JE $(P_e))^{-1}$JE (P_e) = - I, il en découle que dans un voisinage de P_e, auquel appartient par hypothèse P, $-(JE(P(t)))^{-1} JE(P_e)$ a des éléments ayant pour valeur -1 sur sa diagonale et proche de 0 en dehors.

Il y a donc « domination » des éléments diagonaux sur ce voisinage. Il en résulte que le processus désigné par l'équation (6.10) est localement stable.

De plus, si on fait l'hypothèse que la matrice jacobienne est partout inversible c'est-à-dire que det JE (P(t)) $\neq 0$ quelque soit P, alors le processus décrit par (6.9) est globalement stable.

Pour démontrer cela, associons à (6.9) la fonction suivante: V $(\bullet)$ = E (P(t))$\bullet$E (P(t)). On constate immédiatement que celle- ci est décroissante dans le temps :

$$\frac{\partial}{\partial t}(E(P(t))\bullet E(P(t))) = 2E(P(t))JE(P(t))P'(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E(P(t))\bullet E(P(t))) = 2E(P(t))JE(P(t)) - (JE(P(t)))^{-1} E(P(t))$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E(P(t))\bullet E(P(t))) = -2E(P(t))\; E(P(t)) \leq 0$$

D'une part, cette dérivée ne s'annulant que si E (P(t)) = 0, ce qui implique d'avoir P = P_e ; d'autre part E (P(t))$\bullet$E (P(t)) étant minoré par 0, et décroissante dans le temps, la fonction converge. Part conséquent, V satisfait aux caractéristiques d'une fonction de Lyapounov. Il en découle que P_e est un équilibre globalement stable.

Remarque

Bien que la stabilité globale soit assurée, le fait de poser det JE (P(t)) $\neq 0$ quelque soit P est une hypothèse fort peu acceptable car cela revient à supposer l'unicité de l'équilibre. C'est là un cas extrêmement particulier comme le prouve le théorème Sonnenschein- Mantel-Debreu.

VI. III. 2 Tendance des recherches

Le processus à l'œuvre dans la méthode de Newton est loin d'être simple. Il nécessite un planificateur qui récolte les n demandes nettes[1] et qui calcule les n^2 dérivées partielles qui forment la jacobienne. Enfin celui- ci a également pour fonction d'inverser cette matrice ! On est bien loin de l'idée de marchés s'autorégulant spontanément.

Les deux orientations

Les travaux sur la méthode de Newton illustrent parfaitement un penchant : accroître le rôle de l'Etat (et d'un planificateur) pour trouver un mécanisme de prix visant à établir une convergence. En fait, on observe deux tendances. La première, comme on vient de le dire, est celle de la centralisation croissante. La seconde consiste à rechercher une régularité au sein des systèmes chaotiques.

La régularité dans le chaos

Le processus de tâtonnement, représentatif de la loi de l'offre et de la demande, conduit à une évolution chaotique. Ce type d'évolution est engendré par certaines propriétés des équations différentielles. Le schéma ci-dessous illustre cela :

[1] Pour être tout à fait exact le commissaire priseur peut se contenter, en vertu de l'identité de Walras, de déterminer $(n-1)$ demandes nettes. Bien entendu cela ne change strictement rien à l'incommensurabilité du problème.

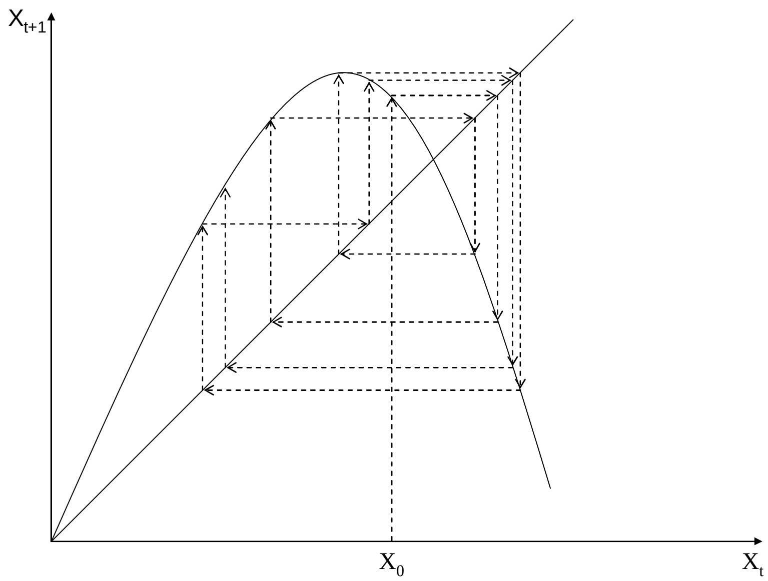


Figure 6.1- Représentation d’un cycle chaotique

Une trajectoire chaotique est formée d’une infinité de points qui passent et repassent perpétuellement dans une même zone sans toutefois revenir exactement au même endroit (en raison du théorème Cauchy- Lipschitz).

Paradoxalement, dans quelques circonstances spécifiques, il est pourtant possible d’observer des régularités au sein des systèmes chaotiques :

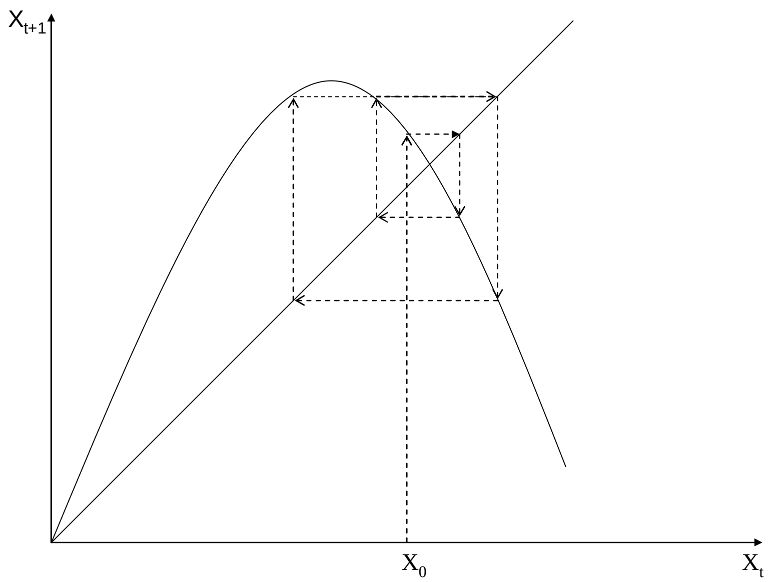


Figure 6.2- Représentation d’une régularité

Par exemple, l'enjeu dans le cadre du tâtonnement est d'essayer de dégager ces régularités.
Bien qu'il y ait une piste de recherche sur le plan mathématique, celle- ci n'en n'est qu'à ses balbutiements.

Orientation de la troisième partie

Dans la troisième partie de cette thèse, on s'engagera plutôt sur le thème de la « centralisation croissante » car rien n'indique que ces régularités ne soient pas des cas tout à fait exceptionnels. Notre but sera de prouver le caractère planifiable de l'économie ainsi que d'élaborer une méthode simple de planification. Mais avant d'aborder ce sujet, on se doit de traiter des difficultés induites par la prise en compte du temps en théorie économique.

CHAPITRE VII

Temps et amplification des déséquilibres. Le principe d'entropie.

Au cours des pages précédentes, nous avons plusieurs fois attiré l'attention sur le peu de place accordée à l'incertitude dans les différentes théories qui mettent la notion d'équilibre au centre de leur préoccupation. Pour cause : en présence d'incertitude le « principe d'entropie » ruine tout espoir de prouver l'existence ou la stabilité de l'équilibre.

Il est maintenant admis que l'idée d'équilibre est indissociable de celle d'un processus. Pour autant, est- on en droit d'affirmer que la notion d'équilibre revête un caractère « dynamique » ?
Afin d'éclaircir le débat, on va dans un premier temps s'atteler à définir les termes de « statique » et de « dynamique ». Dans un second moment, on soulignera la différence entre les notions de « processus » et de « dynamique ». Cela nous permettra alors d'énoncer le principe d'entropie qui remet en cause l'existence de l'équilibre. Pour étayer ce point de vue, on étudiera le modèle des équilibres temporaires avant de généraliser ces conclusions.

SECTION I

Les notions de statique et dynamique dans les écrits des économistes

Le recensement effectué par Malchup (1971) des termes « statique » et « dynamique » chez trente neufs auteurs montre le caractère hétéroclite des définitions.

VII. I. 1 Les positions triviales

Les définitions que nous présentons maintenant, que l'on qualifie de « triviales », esquivent selon nous les véritables enjeux et entretiennent une confusion. Toutes ont pour point commun de lier les concepts de statique et de dynamique avec une approche en terme d'équilibre.

Equilibre et convergence

La première de ces positions triviales, sans doute la plus répandue, consiste à décrire la statique comme l'étude de l'équilibre alors que l'analyse dynamique correspond à l'étude de la convergence vers celui-ci. Outre le lien établi sans démonstration entre statique et équilibre, ce genre d'approche présuppose la convergence des trajectoires. C'est là une position triviale dans le sens où elle pose comme hypothèse le résultat escompté. On trouve ce type de position chez Patinkin (1956) pour qui la statique est l' « Analyse de […] la nature de l'équilibre » tandis que la dynamique est l'« Analyse portant […] sur la nature des forces du marché, par lesquelles l'économie passe d'une position initiale de déséquilibre à la position d'équilibre. » (p. 32).

Système non perturbé et système perturbé

Une seconde vision triviale, présentée notamment par Moore (1929), consiste à définir la statique comme l'étude de l'équilibre au sein d'un système non perturbé. Dans cette optique, la statique examine les équilibres stables. Inversement, la dynamique a pour objet la compréhension de l'équilibre au sein d'un système perturbé. C'est l'étude des équilibres mouvants.

Le mérite de cette présentation, par rapport à celle précédente, est d'envisager des situations plus « incertaines » où l'équilibre peut-être perturbé. Toutefois afin de maintenir le lien entre dynamique et équilibre, les partisans de cette définition sont conduits implicitement à formuler une hypothèse « d'équilibre permanent ». Ainsi même si le système est perturbé, la dynamique demeure l'analyse des équilibres (mouvants). Il n'est plus question de trajectoire, de processus et de convergence.

La variable temps

Enfin, une dernière distinction s'effectue par rapport au temps. Pour Hayek (1941), par exemple, la statique correspond à une « Théorie de l'équilibre sans considération de temps. » (p. 17-18). Alors que la dynamique s'appréhende comme une « Théorie de l'équilibre intertemporel » (p. 22-23).

Bien que cette vision a l'avantage d'inclure une dimension temporelle, elle ne prend pas en compte l'incertitude, ni même le risque. C'est pourquoi, elle ne nous semble pas plus valable que les deux précédentes.

Observations

On l'a souligné, le dénominateur commun de ces trois définitions est de présupposer que la statique et/ou la dynamique analyse des situations d'équilibre. Cette tendance à se concentrer sur des états d'équilibres s'explique par la difficulté qu'il y a à analyser et comparer les situations de déséquilibres. Pourtant si l'on veut être rigoureux on ne peut pas se contenter d'évacuer par hypothèse ce qui devrait être l'objet même de l'analyse. Autrement dit, la capacité de la statique et de la dynamique à intégrer la notion d'équilibre doit être l'objet d'une démonstration et non d'un postulat.

A ces présentations triviales, s'opposent d'autres définitions plus subtiles que l'on trouve généralement chez des économistes qui ont bénéficié d'une formation mathématique plus avancée.

VII. I. 2 Les positions avancées

L'idée de distinguer la statique de la dynamique en incluant une dimension temporelle n'est pas récente car on la retrouve notamment chez Hicks (1939) :

« J'appelle Statique Economique, les parties de la théorie économique où nous ne nous préoccupons pas de la date ; j'appelle Dynamique Economique les parties où chaque quantité doit être datée » (p. 115).

Commentaire

La définition de Hicks échappe à la trivialité puisqu'elle ne fait pas intervenir la notion d'équilibre. Néanmoins, elle peut difficilement être retenue en l'état dans la mesure où elle propose d'exclure toute préoccupation temporelle d'une analyse statique. Le traitement du temps étant un élément essentiel de l'analyse économique, ce genre de position supprime quasiment tout intérêt à la démarche statique. C'est pourquoi, on mobilise plutôt la vision de

Kondratieff (1925) qui désigne sous le nom de statique une « Conception selon laquelle les phénomènes économiques sont considérés, essentiellement et par principe, en dehors de toute variation possible dans le temps […] » (p. 567).

Dans l'esprit de Kondratieff, l'analyse statique correspond donc à l'étude en « coupe instantanée » d'une trajectoire[1]. En ce sens, la statique peut se voir comme un cas particulier de l'analyse dynamique. C'est d'ailleurs l'idée que soutient Oppenheimer en avançant toutefois des arguments de natures légèrement différentes.

La statique comme cas particulier de la dynamique

En effet, si on se réfère à Oppenheimer (1924), la dynamique est constituée de la « statique » et de la « cinétique ». Cette dernière « comprend toutes les études des modifications en grandeur ou en direction ou les deux à la fois, en raison de changement dans les données. ». Pour sa part, la statique est une « partie de la dynamique » examinant « non pas un état en repos mais un état en mouvement […] qui n'est pas exposé à des perturbations venant de changements dans les données pendant la période d'observation ».

L'analyse de Samuelson présente de grandes similarités :

« *Stationnaire* est un terme descriptif caractérisant le comportement d'une variable économique dans le temps ; il implique d'habitude la constance, mais il est quelquefois généralisé pour indiquer un comportement qui se répète périodiquement. Utilisé dans ce sens, le mouvement d'un système dynamique peut être stationnaire : par exemple, le comportement d'un pendule vérifiant les lois de Newton, mais qui ne serait soumis à aucune perturbation et resterait donc au repos […] » (p. 395).

L'élément qui vient différencier la statique de la dynamique est la possibilité de prendre en compte des perturbations. On voit aussi clairement que l'analyse statique est l'examen de la trajectoire à un instant donné. C'est la raison pour laquelle on propose de retenir, par hypothèse, la définition suivante du terme « statique » :

[1] Si la « coupe instantanée » étudiée est le point d'aboutissement de la trajectoire, alors dans ce cas l'analyse statique peut se confondre avec l'analyse d'une situation d'équilibre.

HYPOTHESE (*H2*)

On qualifie d'analyse statique l'ensemble des phénomènes économiques dont l'étude s'effectue en immobilisant le temps c'est-à-dire en « coupe instantanée ».

Avant de retenir à son tour une définition de la notion de dynamique, il faut que nous la distinguions de celle d'un processus.

SECTION II

Au sujet de la distinction entre processus et dynamique

Conformément aux citations ci-dessus, l'idée intuitive que l'on se fait de la notion de dynamique laisse entrevoir une évolution dans le temps. Pourtant, inclure une dimension temporelle est insuffisante pour qualifier une approche de dynamique puisque celle- ci est susceptible d'être réduite, sous certaines conditions, à une approche statique.

VII. II. 1 Processus et réduction à une approche statique

En effet, en présence d'une information complète[1], d'un système complet de marchés ou encore d'autres hypothèses particulières , les plans futurs des agents sont déterminés à l'instant initial malgré l'existence de différentes périodes.. Pour reprendre l'expression de Samuelson (1965), il s'agit d'une « pseudodynamique ». Afin d'illustrer ce point, prenons l'exemple du modèle d'équilibre général.

L'exemple du modèle d'équilibre général

Une des hypothèses mobilisées par Debreu (1959) pour démontrer l'existence d'un équilibre est celle du système complet de marchés. Cette dernière a pour vocation de fournir, aux agents, la liste des prix présents et futurs. Naturellement le temps est fini. Une fois en possession de cette liste, les agents sont en mesure de répartir leurs consommations ou leurs

[1] On entend par information complète, la connaissance de la part des agents : de leurs ensembles de choix, de celui des autres agents, des issues et gains possibles ainsi que les motifs des autres intervenants. Les autres hypothèses auxquelles on fait référence sont par exemple les conjectures myopes.

productions sur toute leur vie. Bien qu'il existe des périodes et que le temps s'écoule, tous les choix économiques sont faits dès le départ (à l'instant initial).

On pourrait multiplier les exemples et examiner d'autres hypothèses qui permettent d'opérer une régression statique. Mais plutôt que d'étudier des cas particuliers, nous allons concentrer notre attention sur l'élément qui permet d'effectuer ces régressions statiques : l'élimination de l'incertitude.

Pseudo dynamique et incertitude

En fait, toutes les hypothèses permettant d'opérer ces réductions statiques sont effectivement vouées à éliminer l'incertitude des modèles[1]. L'un des premiers auteurs à l'avoir remarqué est Hart (1940). Ce dernier a eu l'idée, pour définir la dynamique, d'ajouter à la dimension temporelle « les anticipations et l'incertitude ».

Le rôle des anticipations

On l'a déjà dit, les anticipations trouvent leur fondement dans les croyances des agents. Celles- ci dérivant d'éléments aussi subjectifs et variés, que le caractère, la vision du monde…il n'y a, a priori, aucun motif pour que les individus aient des croyances identiques. On voit alors aisément que la diversité des anticipations, provenant de l'abondance des croyances, est l'un des phénomènes à l'origine de l'incertitude.

VII. II. 2 Définitions

Maintenant que l'on a achevé ce tour d'horizon, on est en mesure de présenter une définition des termes de processus et de dynamique. Evidemment, on ne prétend pas ici mettre les économistes d'accord sur le sens exact à donner à ces notions. C'est pourquoi, les définitions proposées prennent la forme d'hypothèses. L'objectif étant d'avoir une base de travail solide sur ces thèmes.

[1] Insistons sur le fait que les hypothèses considérées éliminent l'incertitude et non pas forcément le risque. Pour un complément d'information, sur la distinction entre l'incertitude et le risque ainsi que sur la nature de l'incertitude, se référer à la section suivante.

HYPOTHESE (*H3*)

On appelle « processus » ou « trajectoire », un ensemble de phénomènes évoluant dans le temps et conçus comme une chaîne causale progressive.

Remarque

Cette définition induit quelques brefs commentaires. En particulier, elle ne dit rien sur la présence ou l'absence d'incertitude. Par conséquent, un processus est susceptible de faire l'objet d'une régression statique. Enfin, on observe que tout processus peut se percevoir comme une succession d'approches statiques c'est-à-dire de « coupes instantanées ».

HYPOTHESE (*H4*)

On appelle « analyse dynamique » l'ensemble des processus qui tiennent compte de l'incertitude.

Observation

On constate immédiatement, à travers cette définition, que dans une analyse dynamique tout n'est pas décidé dès le départ puisqu'il existe de l'incertitude. La dynamique correspond donc à la partie des processus ne pouvant pas faire l'objet d'une régression statique.

SECTION III

Origine et formulation du principe d'entropie

A l'origine du phénomène d'entropie se trouve l'incertitude. C'est pourquoi, on se propose à présent d'exposer la façon dont les économistes la conçoivent.

VII. III. 1 L'incertitude

L'idée d'incertitude en économie - soit l'existence de « doutes » sur la réalisation d'un événement ou sur le comportement d'un agent - est ancienne. Ainsi, les physiocrates envisageaient la possibilité de catastrophes naturelles venant modifier le volume prévu de la production. Pour leur part, les auteurs de la période classique considéraient le cas d'une variation impromptue des prix :

« Dans le cours ordinaire des évènements, il n'est pas de marchandise dont la quantité offerte corresponde toujours exactement à ce qu'exigent les besoins des hommes, il n'en est donc pas qui ne subisse des variations accidentelles et temporaires de leurs prix. » (Ricardo (1821), p. 109).

Toutefois, il faut attendre l'ouvrage de Knight (1921) pour voir un véritable effort de rigueur dans la spécification de la notion d'incertitude. Sa contribution ayant servi de principal support aux travaux dans ce domaine, nous allons en dire quelques mots.

La formulation de Knight : probabilités, risque et incertitude

Knight distingue l'idée de *risque* de celle d'*incertitude*. D'après lui :

« La différence pratique entre les deux catégories, le risque et l'incertitude, est que, s'agissant de la première, la distribution du résultat parmi un ensemble de cas est connue (soit par calcul *a priori*, soit par des statistiques fondées sur les fréquences observées), tandis que ceci n'est pas vrai de l'incertitude en raison de l'impossibilité de regrouper les cas, parce que la situation à traiter présente un degré élevé de singularité. » (p. 233).

Autrement dit, l'incertitude ne peut pas être réduite à un calcul en raison de la nouveauté d'une situation ou de sa complexité. Par abus de langage on qualifie souvent le risque de « probabilité objective » tandis que l'incertitude est appelée « probabilité subjective ». Ce qui ne fait qu'entretenir une confusion car l'incertitude est indépendante de toute notion de probabilité.

Les objections de Savage (1954)

La distinction opérée par Knight est néanmoins loin de faire l'unanimité. Pour Savage, la singularité d'une situation ne suffit pas à engendrer de l'incertitude car en réalité tout calcul de probabilité accorde une place importante aux croyances et jugements des individus.

Afin d'étayer son point de vue, il livre un exemple subtil. Au niveau de généralité où l'on se situe, il n'est pas d'un grand intérêt de le reprendre tel quel. On va plutôt généraliser sa démarche.

Pour cela considérons la matrice d'une application f de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ à valeur dans un corps commutatif C. Les m vecteurs lignes $\{E_1, ..., E_m\}$ donnant les états de la nature tandis que les n vecteurs colonnes $\{A_1,...,A_n\}$ représentent des actions possibles. Chaque action choisie entraîne une conséquence selon l'état de la nature qui se réalise. C'est pourquoi on note c_{ij} les éléments de la matrice, comme l'illustre le tableau suivant :

	E_1	E_2	$\dots$	E_j	$\dots$	E_m
A_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1j}	$\dots$	c_{1m}
A_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2j}	...	c_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
A_i	c_{i1}	c_{i2}	$\dots$	c_{ij}	$\dots$	c_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
A_n	c_{n1}	c_{n2}	$\dots$	c_{nj}	$\dots$	c_{nm}

Incertitude et temps

La matrice de Savage représente une fonction univoque. Pour un état de la nature donné et une action choisie, est associée une seule conséquence : « Or, more formally, an **act** is a function attaching a consequence to each state of the world. » (Savage (1954), p. 14).

Du propre aveu de l'intéressé, une telle hypothèse est difficilement justifiable:

« Again, the formal description might seem inadequate in taht it does not provide explicitly for the posssibility that one decision may lead to another. (*ibid*, p. 15)

En effet, la conséquence induite par une action implique de réaliser un nouvel acte lequel entraîne une autre conséquence. Ainsi de suite. Seule une absence de prise en compte de développement temporel rend l'hypothèse de Savage plausible. Son modèle est donc profondément statique. Dès que l'on intègre une évolution dans le temps, la chaîne de décisions est infinie et on ne peut pas recourir au calcul probabiliste.

Outre la singularité d'une action, le passage du risque à l'incertitude est lié au temps. C'est d'ailleurs la conception que développe Keynes dans la *théorie générale* et dans ses commentaires ultérieurs :

« Il me faut expliquer que, par l'expression de connaissance « incertaine », mon intention n'est pas simplement de distinguer ce qui est su avec certitude de ce qui est seulement probable. […]. Le sens dans lequel j'utilise ce terme est celui selon lequel la perspective d'une guerre européenne était incertaine, ou encore le prix du cuivre et le taux d'intérêt dans vingt ans, ou la date d'obsolescence d'une invention nouvelle, ou la position des détenteurs de fortunes privées dans le système social de 1970. En ces matières, il n'y a pas de fondement scientifique sur lequel on puisse formuler, de façon autorisée, quelques raisonnements probabilistes que ce soit. Nous ne savons pas, tout simplement. » (Keynes (1937), p. 144).

Les conceptions actuelles

La manière, dont on envisage aujourd'hui le risque et l'incertitude, est directement liée aux controverses précédentes. Il est ainsi communément admis que le risque est une forme d'incertitude probabilisable. Selon Anne Perrot (1986) :

« La majeure partie des travaux sur le choix économiques en environnement aléatoire supposent que l'incertitude est probabilisable, c'est à dire qu'il est possible de recenser a priori l'ensemble des éventualités, en leur attachant des probabilités de réalisation. En dépit des critiques nombreuses adressées à cette hypothèse, les théories de la demande de travail en incertitude considèrent que tous les agents disposent de la même vision a priori de l'environnement, formalisée par l'existence d'une distribution de probabilité objective commune sur les événements futurs. » (p. 4).

L'incertitude probabilisable (ou tout simplement le risque) se caractérise par le fait que les agents affectent des probabilités à la réalisation des états de la nature. Ces dernières sont dites objectives puisqu'elles sont une donnée. Il est donc possible de dénombrer, ex ante, l'ensemble des événements aléatoires et de leur associer une unique probabilité. Il en découle que chaque agent possède une vision, et donc des anticipations, rigoureusement identiques. La seule modification intervenant dans ces modèles est que les agents nouent des contrats conditionnels (voir Debreu (1959), chap. 7) [1].

Inversement, toute situation ne pouvant pas faire l'objet d'un calcul de probabilité, en raison de sa nouveauté et de son éloignement dans le temps, est qualifiée d'incertitude radicale ou plus simplement d'incertitude. Dans ce contexte les anticipations des agents

[1]En effet, « La façon la plus naturelle d'introduire l'incertitude dans les modèles de comportement est de supposer que certaines variables, sur la base desquelles les agents doivent prendre leurs décisions, ne seront connues qu'une fois les actions entreprises. A la date de leurs choix, les individus sont dans l'incapacité de connaître avec certitude l'environnement qui sera le leur demain. » (Perrot (1986), p.1). L'introduction du risque par ce biais aboutit à incorporer dans les modèles un marché contingent à terme. Il en résulte une multiplication des marchés puisque désormais il y aura un marché par bien, par période, ainsi que par événements.

dépendent de l'idée qu'ils se font de l'économie, c'est à dire de leurs croyances. Le problème étant de savoir si cette situation incite les agents à adopter un comportement spécifique, modifiant ainsi « le sens et la nature de l'équilibre économique » (*ibid*, p. 480). Il semble que :

« Le rappel des modèles traditionnels de décision dans l'incertain, appliqués au marché du travail, permet d'apporter une réponse affirmative à cette question : ils montrent que les résultats relatifs à l'offre et à la demande de travail en incertitude ne sont pas les transpositions directes, aux espérances mathématiques, des propriétés classiques issues des modèles en environnement déterministe. » (Perrot (1986), p.1).

VII. III. 2 Principe d'entropie et solutions apportées

Après avoir identifié les causes de l'incertitude, on va maintenant énoncer le *principe d'entropie*. Celui- ci est à la base de la réflexion proposée dans la dernière partie.

Enoncé

Tout déséquilibre dans système dynamique, entendu au sens de (*H4*), ne peut pas régresser avec le temps. Par conséquent, il ne peut que ce stabiliser ou s'amplifier.

Bien qu'il ne soit jamais ouvertement formulé, l'idée d'un principe d'entropie semble être implicitement présente dans l'esprit des économistes. Cela se perçoit lorsqu'ils reconnaissent l'incapacité à modéliser dans un contexte d'incertitude. Ainsi, selon Kennet Arrow (1951) :

« Frequency theorists are therefore compelled to accept the view that probability statements cannot describe all kinds of ignorance (see Keynes [**1**, pp. 95-99]). This is indeed the viewpoint that has predominated among statisticians […] » (p. 410).

Plus récemment, North (2005) souligne également que la mathématisation de l'économie s'accompagne d'une absence de prise en compte de l'incertitude :

« Les économistes eux-mêmes se montrent assez ambigus sur le sujet : ils raisonnent largement comme si l'incertitude était une condition exceptionnelle, alors que la condition usuelle, la certitude, permet établir les élégants modèles mathématiques de l'économie formelle. » (p. 32)

Ce principe d'entropie se fonde sur une distinction intermédiaire : celle d'une conception du temps prenant place dans le corps des réels.

La flèche du temps

Le temps est perçu comme suivant une trajectoire linéaire allant du passé vers le futur. Sur le plan économique cela prend la forme d'une irréversibilité du processus de production :

« Le processus de production ne peut pas être inversé puisque, en particulier, la production prend du temps et les marchandises sont datées. » (Debreu (1959), p. 43).

Il est vrai que des démonstrations lèvent cette hypothèse (confère chapitre II). Néanmoins, cela n'est qu'une astuce servant à contourner les problèmes des seuils de rentabilités lorsque les rendements d'échelle sont décroissants. En aucun cas, on envisage dans la littérature économique une inversion du temps ou l'insertion de celui- ci dans le corps des complexes.

Système dynamique et incertitude

Cette précision étant faite, on va prouver que toute approche dynamique est incompatible avec l'existence d'un équilibre. Ceci étant à la fois le fruit de notre perception du temps et des effets de l'incertitude. Remarquons d'ailleurs que le principe d'entropie demeure vrai même si l'on se réfère, comme c'est le cas, à un cadre théorique particulièrement simple.

La solution par des hypothèses sur les croyances

Afin de garder une conception du temps, sans pour autant faire face à une incertitude, est apparue l'idée d'attribuer aux croyances des agents des caractéristiques particulières. Ce procédé repose sur trois phases :

1) La première consiste à admettre l'existence d'une croyance particulière selon laquelle la situation présente est l'indicateur le plus approprié pour connaître les perspectives futures.
2) Il découle du premier point que les individus (rationnels) vont chercher à extrapoler sur la base de leurs connaissances et opinions présentes.

3) Pour s'assurer du caractère acceptable de leurs anticipations, les agents vont les ajuster de manière à ce qu'elles soient partagées par un groupe. En d'autres termes, les individus se règlent sur des prévisions moyennes.

Naturellement, si chaque agent détermine ses anticipations sur la base de celles des autres, on aboutit à un jeu de miroir caractéristique des situations stratégiquement interdépendantes. Aucune anticipation ne peut se former. Cette théorie repose donc sur des bases particulièrement friables comme le suggérait Keynes (1937) :

« Or, une théorie pratique de l'avenir fondée sur ces trois principes présente certaines caractéristiques bien marquées. En particulier puisqu'elle repose sur des fondements si peu solides, elle est sujette à des changements soudains et violents. La pratique établie, faite de tranquillité et d'immobilité, de certitude et de sécurité peu s'effondrer tout à coup. Des craintes et des espoirs nouveaux se mettent alors à guider la conduite des hommes. » (p. 145).

Le rôle des institutions

Une autre façon de réduire l'incertitude est de créer des institutions comme l'explique North (2005) :

« Les croyances et les institutions imaginées par les humains ne sont compréhensibles que comme une réponse permanente aux divers niveaux d'incertitude auxquels ils ont été et restent confrontés au cours de l'évolution du paysage physique et humain. L'effort accompli par les humains pour structurer l'environnement afin de le rendre plus prévisible a été et demeure la source profonde des institutions […] » (p. 33).

Les exemples les plus adéquats d'institutions instaurées pour diminuer l'incertitude sont celles du modèle d'équilibre général. En particulier le commissaire priseur, ou ce qui est équivalent, le bureau central de la planification en délivrant les prix présents et futurs (hypothèse du système complet de marchés) évince l'incertitude du modèle. Ceci est essentiel pour prouver l'existence d'un équilibre général, car en l'absence d'un système complet de marchés une telle preuve est loin d'aller de soi. On se propose de le voir[1].

---

[1] Les économistes néo- classiques, qui considèrent la présentation de Debreu comme la formulation la plus aboutie de la théorie de l'équilibre général, préfèrent remettre en cause l'hypothèse du système complet de marchés en évoquant une question de réalisme. Grandmont (1977), dans l'introduction, justifie par ces quelques mots l'étude des équilibres temporaires : « In the real world, there is no such thing as a complete set of futures markets, nor are there enough institutions enabling the agents to transfer wealth freely over time and across states of nature. » (p. 4). Curieusement, la question de l'entropie est éludée.

SECTION IV

Entropie et existence de l'équilibre. L'exemple des « équilibres temporaires ».

Les travaux de Grandmont (1977) ont justement pour but de s'absoudre du système complet de marchés. La conséquence immédiate de la disparition de cette hypothèse est l'introduction d'une incertitude qui remet en cause l'existence d'un équilibre général. Désormais, l'économie est morcelée en « périodes » ou en « séquences » dont rien ne garantit à priori que chacune d'elles possède un équilibre :

« A recurrent problem in temporary competitive equilibrium models is precisely to prove the existence of a price system that matches supply and demand at a given moment. » (Grandmont (1977), p. 10 et 11).

Précisons que l'analyse que l'on va faire des équilibres temporaires se borne aux modèles comportant des marchés à termes qui évitent ainsi tous stockages de biens. Ces modèles sont du point de vue de l'étude de « l'équilibre » (et de la convergence) bien plus intéressants dans la mesure où ils permettent aux agents de procéder à une allocation inter temporelle de leurs ressources. Ces derniers peuvent notamment emprunter au moment présent en vendant leurs ressources futures.

VII. IV. 1 Logique et problèmes du modèle

Le modèle de Grandmont est un aménagement de celui de Debreu (1959). A part l'absence d'un système complet de marchés, on a toujours entre autres :

- une économie semi-centralisée avec un prix unique par bien.
- des agents avec un comportement price taker ; le commissaire priseur veillant à ce qu'ils conservent des conjectures myopes.

Choix et anticipations des agents

Pour simplifier, nous allons considérer- à l'instar de Grandmont- deux périodes. Dans un premier temps, on se cantonne à l'étude d'une économie d'échange. Le principe de fonctionnement du modèle est le suivant.

A la période initiale t, les agents reçoivent, du commissaire priseur, un signal- prix P_t. A partir de celui-ci ils se font une première idée de leurs choix a_t de consommation[1]. Toutefois comme l'économie s'étend sur deux périodes, les ménages doivent tenir compte, avant de se décider définitivement, de ce que sera la situation économique en « t + 1 » ainsi que de l'impact de leurs choix présents sur leurs consommations futures. Pour cela, les prix étant les seuls signaux[2], ils ne peuvent qu'extrapoler sur la base de P_t, selon une règle floue qui dépend essentiellement de leurs croyances, ce que sera P_{t+1} :

« It may be influenced by all observations made by the agent up to the current period. In particular, it will be influenced by the signal s_1 $[P_t]$ currently perceived, and in some cases, by the action a_1 chosen by the agent. In order to keep the formal exposition simple, I will single out the dependance on the current signal, and represent it by the agent's *expectation function* ψ which maps $S_1[\{P_t\}]$ into the space of probability distributions $M(S_2)[M(\{P_{t+1}\})]$. » (p. 7).

Une fois les prix en t + 1 extrapolés, les agents anticipent leurs choix futurs de consommation. Selon ceux qu'ils anticipent, les ménages peuvent être incités à revoir l'idée première qu'ils se faisaient de leurs choix présents. Cette modification ayant elle-même pour effet de modifier les anticipations de consommations (« a_{t+1} »).

Représentation schématique

Le schéma suivant résume la logique du modèle :

[1] Naturellement a_t appartient à l'ensemble A_t des actions possibles.

[2] En effet, étant donné la myopie des conjectures, les choix ne peuvent pas intervenir directement dans la prévision de P_{t+1}. Néanmoins, pour essayer d'apporter un surcroît de réalisme à son modèle Grandmont estime que l'agent est conscient des incidences que ses décisions entraînent : « The agent must, of course, be aware of the *consequences* of his choices. » (p. 7). Les choix (a_t, a_{t+1}) ont alors des incidences, non directement sur les prix (myopie des conjectures oblige), mais sur l'espace C des conséquences $(\gamma(a_t, a_{t+1}) \in C)$.

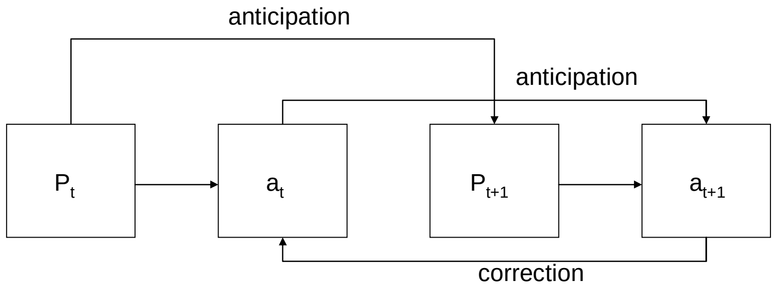


Figure 7.1- Raisonnement logique à l'œuvre dans la théorie des équilibres temporaires

L'absence de flèche allant des choix vers les prix s'explique par les conjectures myopes des agents. Ceux-ci sont fondamentalement prices takers. D'autre part, cette représentation permet de visualiser une circularité : les choix présents déterminent les choix futurs, et inversement. Il y a ici une indétermination majeure qui découle directement de l'absence d'un système complet de marchés.

Identification des sources d'incertitude

Plus généralement, l'absence d'un système complet de marchés crée de l'incertitude sur les deux aspects suivants :

- le niveau des prix en t + 1. Cela a pour conséquence d'obliger les agents à l'anticiper. Or, cette anticipation risque à la fois d'être érronée et différente d'un individu à un autre. Les chances de prouver l'existence d'un équilibre dans ce contexte sont particulièrement minces. A moins de supposer, comme le font les modèles à anticipations rationnelles des nouveaux classiques, que les agents connaissent tous le véritable fonctionnement de l'économie…
- la spécification des fonctions de demandes nettes. En effet, les choix présents a_t dépendent de P_t et a_{t+1}. Ce que l'on peut écrire ainsi: $a_t(P_t, a_{t+1})$. Malheureusement, a_{t+1} dépend à son tour de P_{t+1} et de a_t. En tenant compte de l'ensemble de ces dépendances, on obtient

finalement : $a_t(P_t, a_{t+1}(P_{t+1}(P_t), a_t(\cdot)))$. Sous cette forme, on voit facilement que le problème tient à la présence de a_{t+1} en tant qu'argument de a_t. Car ce dernier est lui-même un argument de a_{t+1}. Cette circularité enlève tout espoir de raisonner à partir des fonctions de demandes nettes.

Résolution des difficultés

Une méthode pour contourner la première difficulté a été proposée par Green (1973). Celui-ci dote les individus d'anticipations communes. Ainsi, confrontés à l'indétermination de P_{t+1}, les agents l'anticiperont tous de manière identique. A la différence des nouveaux classiques, il ne dit rien sur l'exactitude de cette anticipation. Peu importe qu'elle soit erronée. L'essentiel est ici que tout le monde soit dans l'erreur ou au contraire dans l'exactitude.

Pour évincer la seconde difficulté, Grandmont propose de couper l'implication entre a_{t+1} et a_t. Ceci revenant à faire l'hypothèse que les agents n'ont plus la possibilité de corriger leur consommation présente en fonction de ce qu'ils estiment consommer dans le futur. Leur marge de manœuvre se limitant à adapter les choix futurs. On se trouve par ce biais amené à résoudre un programme classique d'optimisation sur la seule période t.

VII. IV. 2 Le choix du consommateur

Avant d'étudier ce problème de programmation qui se pose désormais, nous devons préalablement introduire les notions *d'utilité de Von Neumann- Morgenstern* et d'*index de Bernouilli*.

Formalisation de von Neumann- Morgenstern et index de Bernouilli

Von Neumann et Morgenstern se proposent de prendre en compte le risque et l'incertitude à travers une notion d'utilité numérique. Ils précisent en ces termes leurs objectifs et méthodes:

« Let us for the moment accept the picture of an individual whose system of preferences is all- embracing and complete, i.e. who, for any two objects or rather for any two imagined events, possesses a clear intuition of preference.

More precisely we expect him, for any two alternative events which are put before him as possibilities, to be able to tell which of the two he prefers.
It is a very natural extension of this picture to permit such an individual to compare not only events, but even combinations of events with stated probabilities. » (p. 17).

L'idée est de raisonner directement sur les utilités, sans se référer aux courbes d'indifférences, en les rendant numériquement mesurables :

« At any rate we hope we have shown that the treatment by indifference curves implies either too much or too little : if the preferences of the individual are not comparable, then the indifference curves do not exist. If the individual's preferences are all comparable, then we can even obtain a (uniquely defined) numerical utility which renders the indifference curves superflous. » (p. 19- 20).

Pour ce faire, les auteurs insèrent une correspondance, notée ϕ, associant à chaque utilité, appartenant à un système U, un nombre réel ρ tel que : $u \to \rho = \phi(\rho)$ [1].
L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'attribuer une signification quantitative au risque et à l'incertitude par l'intermédiaire des probabilités et de rendre possible la comparaison de combinaisons d'événements.
Ainsi, si on considère une perspective aléatoire $\chi(C) = (u_i, \alpha_i)$ où $u_i \in C$ représente l'utilité procurée à l'individu lorsque la conséquence i résulte de ses choix, α_i étant la probabilité subjective qu'il attribue à la réalisation de cette conséquence. L'utilité de la perspective aléatoire est définissable de la façon suivante :

$$v(\chi(C)) = \alpha_1\phi(u_1) + \alpha_2\phi(u_2) + ... + \alpha_n\phi(u_n)$$

Il est possible, sous les conditions supplémentaires que ϕ soit continue et bornée, de formaliser l'utilité de la perspective aléatoire à l'aide du calcul intégral. On obtient alors :

$$v(\mu) = \int_C \phi \ d\mu, \mu \in \chi(C)$$

[1] Il est primordial de remarquer que Von Neumann et Morgenstern (1967) parlent uniquement « d'utilité » et non de « fonction d'utilité ». Cette dernière est traditionnellement définie comme « une application croissante de X_i préordonné par $\underset{i}{\precsim}$ dans R » (Debreu (1959), p.59), où X_i est l'ensemble des consommations possibles pour l'individu i.

La fonction $v(\mu)$ est appelée *index de Bernouilli*. Une telle fonction a l'attrait de permettre une actualisation en temps continu.

Le programme dynamique

L'objet d'un tel programme, particulièrement adapté pour une démarche séquentielle, est de réduire un choix inter temporel portant sur deux périodes à un choix sur une seule période. Pour cela on cherche à déterminer le maximum d'une fonction objective z, compte tenu de contraintes, définie comme suit :

$$z* = \max_{u_1,u_2} \left\{ \sum_{t=1}^{2} \phi(u_t) \right\}$$

Sous la contrainte :

$$\sum_{t=1}^{2} \alpha_t u_t \leq b \text{ avec } 0 \leq \alpha_t \leq 1, \text{ et } \quad u_t \geq 0$$

En sélectionnant et en fixant une valeur de u_2, on peut écrire étant donné la propriété de séparabilité :

$$\max_{u_1} \left\{ \sum_{t=1}^{2} \phi(u_t) \right\} = \phi(u_2) + \max \phi(u_1)$$

Où $\max \phi(u_1)$ a pour contrainte $\alpha_1 u_1 \leq b - \alpha_2 u_2$.

En posant $\Lambda(b - \alpha_2 u_2) = \max \phi(u_1)$, on en déduit :

$$z* = \max_{u_2} \left(\phi(u_2) + \Lambda(b - \alpha_2 u_2) \right).$$

On remarque alors que le maximum z ne dépend que de u_2 et de la distribution de probabilité associée. Ainsi :

$$v(u_2) = \phi*(u_2) + \Lambda(b - \alpha_2 u_2)$$

L'utilité de la seconde période est une conséquence, on l'a vu, des choix effectués lors de la première et seconde séquence. A leurs tours, les choix de la première séquence dépendent de p_1 tandis que ceux de la seconde dépendent de a_1 et de $p_2^a = \psi(p_1)$. Autrement dit, on se trouve confronté à une fonction implicite de la forme :

$$\phi*(p_1, q_1, p_2^a(\psi(p_1)).$$

En intégrant sur l'espace P_2, on obtient la forme :

$$v(u_2) = \int_{P_2} \phi*(p_1, a_1, \psi(p_1)) \;\; d\psi(p_1)$$

L'intérêt de cette démarche est de créer un continuum dans le choix des agents, condition essentielle pour pouvoir s'assurer de la continuité de la fonction de demande et appliquer les théorèmes du point fixe. D'une manière générale, les problèmes de continuité occupent une place prépondérante dans la théorie des équilibres temporaires et plus particulièrement au niveau de la démonstration d'existence.

VII. IV. 3 L'existence d'un équilibre temporaire

Nous allons à présent nous confronter au problème de l'existence d'un « équilibre temporaire ». Avant d'aller plus loin, précisons ce que l'on entend exactement par ce terme.

Définition

On considère qu'une économie est en équilibre temporaire, si pour une séquence donnée, le vecteur prix permet d'égaliser les offres et demandes sur l'ensemble des marchés.

Commentaires

A la différence du modèle de Debreu (1959), les marchés sont ré ouverts à chaque période et pas seulement à celle initiale. Cela n'empêche pas les agents de prendre des engagements sur les marchés à terme. Mais, rien ne garantit alors que les choix futurs des ménages seront compatibles puisque les prix sont susceptibles de fluctuer d'une période à l'autre.

Toujours dans un souci de simplification, nous allons reprendre l'hypothèse de Grandmont et supposer qu'il n'y a pas d'implication allant de a_{t+1} vers a_t.

Le traitement des équilibres temporaires par Green (1973)

L'une des démonstrations les plus célèbres d'existence d'équilibres temporaires a été réalisée par Green (1973).

Toutefois, comme on l'a déjà mentionné, cette démonstration s'appuie sur une hypothèse d'anticipation commune tout à fait injustifiable du point vue de la rationalité.
De plus, bien qu'identiques, ces anticipations peuvent également être erronées. Il s'ensuit des risques de faillites et de banqueroutes en chaîne. En effet, suite à de mauvaises anticipations, certains agents peuvent ne pas être en mesure d'honorer les engagements pris sur les marchés à terme. Or, une hypothèse fondamentale du modèle d'équilibre général, qui n'a pas été ici remise en cause, est la « survie du consommateur ». Il faut donc mettre en place un mécanisme institutionnel permettant d'annuler une partie des dettes contractées tout en ne créant pas un risque systémique lié cette fois à une banqueroute des créanciers. Pour résoudre le problème, Green propose, en cas de banqueroute, d'obliger l'agent à choisir lors de la séquence suivante une consommation nulle.

L'existence

En fait, Green cherche à trouver les conditions d'existence d'un équilibre temporaire pour la première mais également pour la seconde période. Si l'on note, comme lui, E (P) la correspondance de demande nette, alors un équilibre temporaire pour la première séquence se définie par :

$$(1) \qquad E(P_t^*) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{l} D_{ih}(P_t^*) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{l} \omega_{ih}^1 = 0$$

Un équilibre temporaire pour la seconde période « is the sum of offers to buy such contracts minus offers to sell them. » (Grenn (1973), p.). Soit :

$$(2) \qquad \underline{E}(\tilde{P}_{t+1}^*) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{l} \underline{D}_{ih}(\tilde{P}_{t+1}^*) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{l} (\underline{\omega}_{ih}^2 + \underline{S}_{ih}(\tilde{P}_{t+1}^*)) = 0$$

Le problème se résume donc à montrer que les équations (1) et (2) peuvent être simultanément vérifiées. Pour ce faire, Green utilise une version modifiée du théorème du point fixe de Kakutani.Toutefois, on ne rentrera pas plus dans le détail de sa démonstration dans la mesure où sa méthode n'est pas d'un point de vue économique entièrement satisfaisante :

« The treatment by Green of the problem is not entirely satisfactory, since he uses purely mechanical rules to determine whether an agent is bankrupt and the extent of bankruptcy. » (Grandmont (1977), p. 16).

VII. IV. 3 Observations complémentaires et conclusion

Jusqu'à maintenant, on s'est placé dans le cadre d'une économie d'échange. Mais quand est- il lorsque l'on ajoute la production ? Les problèmes soulevés par l'introduction de celle- ci sont avant tout d'ordre institutionnel.

Remarques sur l'introduction de la production

En présence d'un système complet de marchés, où le futur est parfaitement connu aux aléas de la nature près, les consommateurs et les producteurs sont en accord sur les plans de productions qui maximisent le profit. Tel n'est plus le cas ici où les anticipations des agents vont diverger. De nouveau, il est indispensable d'introduire un mécanisme institutionnel afin de savoir qui décide et comment sont prises les décisions ?

Les agents, non satisfaits des décisions adoptées, peuvent décider de vendre leurs actions. Pour que cela soit possible, une « bourse des valeurs » doit être instituée sur laquelle va se reposer inévitablement la question de l'existence d'un équilibre (voir, par exemple, Arrow et Hahn (1971)).

Une seconde nouveauté a trait au financement du plan de production. Les firmes sont susceptibles d'émettre ou de racheter des obligations. Autrement dit, elles peuvent s'endetter (voire spéculer en effectuant des opérations sur les marchés à terme telle la vente de leurs productions futures) afin de dépasser leurs contraintes budgétaires de la période. Mais là encore va intervenir le problème de l'existence de l'équilibre sur le marché obligataire.

Une dernière difficulté, que l'on mentionnera juste, tient à la période de versement des dividendes.

La place de la monnaie

Bien que laissant ouvert la manière dont s'effectue les transactions, le modèle d'équilibre général ne fait pas appel à la monnaie ; on ne peut pas maintenant la négliger. Plusieurs motifs invitent à la considérer :

- la distribution des dividendes se fait désormais période par période et non au terme de la durée de vie de l'économie. D'ailleurs l'achat d'actions dépend largement de la politique de versement des dividendes.
- il faut pouvoir procéder à une allocation inter- temporelle des ressources. Les biens étant généralement considérés comme périssables, ils ne peuvent jouer ce rôle.
- les agents pouvant délibérément se mettre en banqueroute, la monnaie intervient comme moyen de « sanction sociale ». En effet, en rajoutant au programme de maximisation du consommateur une contrainte monétaire, si on se limite au cadre d'une économie d'échange, on écrit : $\max(q_t, q_{t+1})$ sous les contraintes $p_t q_t + m_t \leq p_t w_t + m_t$ ainsi que $p^a_{t+1} \cdot q_{t+1} \leq m_t$ où w représente les dotations initiales[1] et m la monnaie. Si l'agent choisit de tout consommer en t (c'est-à-dire $m_t = 0$), il aura pour sanction d'avoir une consommation nulle en t + 1.

Une première méthode, pour prendre en compte la monnaie, est de l'intégrer en tant qu'argument de la fonction d'utilité (voir Patinkin (1965)). Toutefois, cette solution est bien peu satisfaisante car elle revient à lui conférer une utilité en soi.

Dès que l'on sort de cette solution, on se heurte à un problème typique de « backward induction ». Le nombre de périodes étant supposé fini, il n'y a aucun intérêt à détenir de la monnaie, si elle n'a pas d'utilité en soi, lors de la dernière séquence. Les agents ne souhaiteront pas non plus en posséder à l'avant dernière s'ils ne pourront plus l'échanger par la suite. Par un principe évident de récurrence, il en résulte que personne ne voudra en avoir à la période initiale. C'est pourquoi, les auteurs qui traitent de cette question sont contraints d'en revenir à insérer la monnaie dans la fonction d'utilité (cf. par exemple Grandmont (1974)). Ils justifient ce choix en invoquant l'incertitude : la monnaie, actif le plus liquide, jouant son rôle de réserve de valeur.

---

[1] Par soucis de simplification, on suppose dans notre présentation que la totalité des dotations initiales sous forme de biens sont en t échangées contre d'autres biens ou de la monnaie. Ce qui est parfaitement juste si les biens sont considérés comme périssables ; uniquement la monnaie peut « passer » de t à t + 1.

Conclusion

Même dans un cadre théorique très simplifié où l'on a envisagé que deux périodes ainsi qu'une économie d'échange, il a fallu faire appel à une série d'hypothèses complémentaires pour prouver l'existence d'un équilibre temporaire. Les principales hypothèses mobilisées, outre celles usuelles, ont alors été :

- l'existence d'anticipations communes
- l'existence d'une consommation nulle à la période suivante en cas de banqueroute
- l'impossibilité d'adapter les choix présents en fonction de ceux futurs

En dehors du débat sur la cohérence de ces hypothèses avec la rationalité du consommateur, on peut tout de même se demander si elles permettent de parler de dynamique à propos de ce modèle ?

Equilibre temporaire et approche dynamique

On ne peut que répondre négativement à cette question. Bien qu'il y ait une indétermination concernant les prix de la seconde période, les agents décident de leur consommation présente et future dès le départ. Il n'y a pas ici d'idée d'adaptation progressive des choix de consommation. En fait, les équilibres temporaires sont une suite d'équilibre « pseudo-dynamique ».

Ce constat est dû à la multiplication des hypothèses qui ont été formulées pour contrecarrer les effets de l'incertitude. Ce faisant, on a renoncé à l'aspect initialement dynamique du modèle.

SECTION V

Généralisation du principe d'entropie

On a illustré le principe d'entropie par l'intermédiaire de la théorie des équilibres temporaires. Le constat aurait été identique si l'on avait étayé notre propos à l'aide d'exemples empruntés en dehors du cadre du modèle d'équilibre général. Comme le souligne von Neumann et Morgenstern (1967) :

« A static theory deals with equilibria. The essential characteristic of an equilibrium is that it has no tendency to change, i.e. that it is not conducive to dynamic developments. ». En somme, « The dynamic theory deals also with inequilibria- even if they are sometimes called “dynamic equilibria”. » (p. 45).

Nous allons voir ce qui permet à von Neumann et Morgenstern d’être aussi généraux et affirmatifs. Enfin, on verra les solutions envisagées pour contrecarrer les méfaits de l’incertitude.

VII. V. 1 <u>**Généralisation**</u>

A travers l’étude des équilibres temporaires, nous avons vu comment l’incertitude entraîne une absence de spécification des fonctions de demandes nettes. En fait, c’est là un cas particulier des problèmes que posent les situations stratégiquement interdépendantes. Que celles- ci soient des interactions entre agents, temporelles ou encore une forme mixte.

Les interdépendances entre acteurs

On a déjà évoqué au premier chapitre les interactions entre individus et plus particulièrement la solution de Nash, concept de solution privilégié des jeux non coopératifs. C’est pourquoi on n’insistera guère sur ce point, d’autant plus qu’il apparaît clairement qu’une solution de Nash ne peut pas être qualifiée « d’équilibre ». Rappelons juste que le « jeu de miroir », caractéristique de ces situations, provient du doute qu’ont les agents sur le comportement de leurs semblables.

Les interdépendances temporelles

L’incertitude est ici à la base d’une sorte « d’aller-retour » entre le présent et le futur. Lorsqu’un agent établit ses plans, en présence d’incertitude, il doit tenir compte de l’incidence qu’auront ses choix actuels sur sa situation future. Laquelle invite à reconsidérer les choix présents. En résumé, les choix actuels engendrent les états futurs qui eux-mêmes conditionnent les choix présents.

Dans ce contexte, un équilibre est une situation où l’anticipation de « l’état futur », faite par l’agent, n’incite plus à modifier les choix présents. On retrouve naturellement l’idée d’un point fixe comme l’illustre le schéma ci-après :

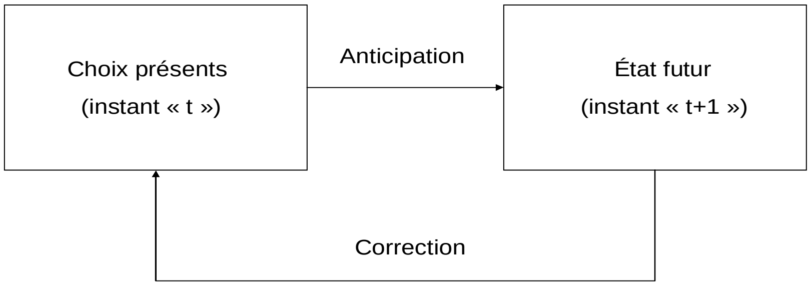


Figure 8.2- Effets d’anticipations et de corrections apparentées à un point fixe

A mesure que les périodes se multiplient, les chances de voir exister un équilibre s’amenuisent. Cela étant lié à l’abondance et à la complexité des anticipations et des corrections, qui sont sans cesse mouvantes.

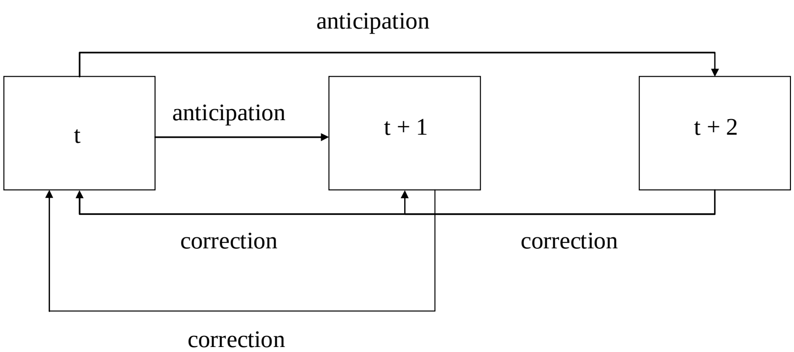


Figure 8.3- Représentation des effets d’anticipations et de corrections sur trois périodes

Si on ajoute une interdépendance entre les agents, alors les possibilités d’existence d’un équilibre sont nulles.

VII. V. 2 A la recherche d'une solution. Planification et entropie

La planification, et la centralisation qu'elle implique, va apparaître comme une solution naturelle au principe d'entropie.

Planification et système complet de marchés

Le système complet de marchés est, bien sûr, une solution totalement irréaliste pour lutter contre l'entropie. Le développement d'approches séquentielles, de la recherche d'informations, témoigne de la volonté des économistes de produire une solution plus vraisemblable. Il n'est pourtant guère aisé de remplacer une telle hypothèse. En outre, celle-ci offre une caractéristique fondamentale d'un système produisant de l'ordre, en assurant :

« Une structure stable de relations d'échange sur [les marchés politiques] et économiques.» (North (2005), p. 139)

La planification, si elle aussi garantit une certaine stabilité des prix, peut jouer le rôle du système complet de marchés. A son instar, elle contribue à éviter des discontinuités dont a remarqué l'aspect problématique au chapitre II.

Planification et anticipations

Par essence le plan permet d'orienter les anticipations des agents en instituant des rigidités. Ces dernières jouent à la fois un rôle coercitif et de stabilisation des anticipations en réduisant les marges de manœuvre. Si on en croît le spécialiste des institutions qu'est North (2005), une des causes favorisant le désordre est justement la disparition d'un « conformisme résultant d'une certaine alliance entre l'intériorisation des normes et leur application coercitive. » (p. 139).

Planification et équilibre dynamique

Ces remarques nous permettent de mettre le doigt sur l'atout majeur de la planification.

Elle peut produire suffisamment de stabilité pour assurer l'existence d'un équilibre dynamique sans annihiler complètement l'incertitude de sorte que l'équilibre ne se réduise pas à une forme pseudo- dynamique[1].

[1] Rappelons qu'un équilibre pseudo- dynamique est, par nature, fort peu réaliste car il permet de tout déterminer à l'instant initial.

Conclusion de la deuxième partie

La théorie de l'équilibre général est donc confrontée à, au moins, trois grands types de difficultés qui concernent : (a) les propriétés ainsi que la multiplicité des équilibres, (b) l'instabilité de son mécanisme de tâtonnement, (c) l'existence d'un principe d'entropie.

Les solutions qui ont été apportées pour y remédier ont toutes pour points communs d'élever le niveau de centralisation de l'économie. Ainsi :

(a) les hypothèses de substituabilité brute et de domination diagonale, en portant directement sur la forme des fonctions de demandes nettes, n'ont de sens que dans la mesure où un organisme veille à ce que les agents aient des conjectures myopes. D'ailleurs, ces hypothèses sont souvent évoquées pour justifier des approches par « l'équilibre partiel ». Mais du point de vue du modèle d'équilibre général, elles sont sans lien avec le comportement « maximisateur » des agents. Il en va de même pour les allocations B.C.P.E qui, en imposant des droits fondamentaux, accroissent également les prérogatives de l'Etat.

(b) les autres processus, qu'il s'agisse du tâtonnement en quantité où plus encore de la méthode de Newton, nécessitent un véritable bureau central de la planification.

(c) les effets de l'incertitude, liés à l'évolution temporelle, sont minimisés grâce au système complet de marchés ou au contrôle acéré des conjectures. Ces deux remèdes imposent un commissaire priseur omnipotent.

On peut alors se demander s'il ne serait pas plus adéquat de formuler explicitement une théorie de la planification, préservant la propriété privée des moyens de productions, plutôt que de s'obstiner à vouloir maintenir une économie de marchés qui n'en porte plus que le nom ? Comme le fait remarquer Andreff (1993) :

« Des premières théories et des premières expériences de l'économie socialiste, on peut tirer un bilan assez paradoxal. S'agissant d'un système élaboré au nom de la théorie marxiste, celle- ci n'en précise pas les modalités pratiques de fonctionnement, et c'est au sein de la théorie néo-classique qu'est démontrée la possibilité pratique d'une économie socialiste rationnelle. » (p. 56).

Dès que l'on accepte l'optique de la planification, cela permet d'inclure des rigidités qui facilitent grandement les choses. C'est ce que l'on se propose de voir dans la troisième partie.

TROISIEME PARTIE

Application de la notion d'équilibre à la planification

On va désormais se concentrer sur les travaux en matière de planification. Notre ambition est moins d'apporter des réponses définitives que de susciter de nouvelles interrogations. Aucune recette toute faite n'émerge des pages qui vont suivre. Cependant, **notre travail est guidé par la conviction que les systèmes planifiés peuvent se substituer à l'incertitude et à la conjoncture mouvante, toutes deux caractéristiques, des économies de marchés.**

Plan de la 3$^{\text{ième}}$ Partie

Cette dernière partie se divise en trois chapitres.

Le premier, intitulé « De la possibilité de gérer l'activité économique par un système planifié », a pour fonction de discuter les objections faites à la planification. On en profite pour rappeler quelques principes qui guident l'élaboration des programmes de planification. Enfin, on présente une méthode qui nous semble particulièrement adaptée pour planifier l'activité économique.

Le second chapitre, traite de la possibilité de mettre au point une procédure de planification étatique par l'intermédiaire de la théorie du contrôle optimal. Le recours à cette théorie amène à des résultats convaincants tant sur le plan de la convergence du programme vers l'équilibre que sur sa capacité à faire face à des chocs exogènes.

Le dernier chapitre, consacré à la planification des firmes, propose une nouvelle voie de recherche. On tente, après avoir exposé les méthodes de séparabilité, de décomposer un problème de contrôle optimal de grande taille en une suite de sous problèmes de tailles plus modestes. L'objectif étant d'obtenir une décomposition telle que la solution globale engendre celles locales.

CHAPITRE VIII

De la possibilité de gérer l'activité économique par un système planifié

Si on se réfère au rapport *Jean de Gaulle* (1994), commandé par le premier ministre *Monsieur Balladur*, la planification consiste à « organiser un futur désiré et les moyens d'y parvenir dans un cadre temporel donné » (p. 47). Cependant, le principal reproche qui lui est adressé tient à sa « difficulté croissante à anticiper l'avenir, et l'incapacité à prévoir des crises majeures d'un contexte mondial de plus en plus perturbé […] » (p. 24)[1].

Il peut donc sembler étrange, à l'heure actuelle où l'on parle de « crise » voir de « discrédit sur l'exercice de la planification », de traiter dans une thèse d'un tel sujet. Il est vrai que ces dernières années ont plutôt été marquées, dans l'ensemble des pays européens, par un recul de cet exercice. Paradoxalement, le recours croissant à la formalisation ainsi que la formation mathématique de plus en plus poussée des économistes devrait au contraire favoriser une effervescence dans l'élaboration de nouvelles techniques de planification.

Pour notre part, nous pensons qu'elle s'avère être, pour peu qu'on l'utilise correctement, un formidable instrument d'analyse économique constituant une application essentielle de la notion d'équilibre.

Le thème de la planification est tombé en désuétude depuis la fin des années soixante dix. A notre connaissance, la thèse de Picard (1979) est l'une des dernières recherche effectuée en France sur ce thème. Il n'est donc pas inutile de rappeler les grandes lignes théoriques qui président à l'élaboration et la mise en œuvre d'un programme de planification.

Ce tour d'horizon va nous confronter à un certains nombres de difficultés. La majorité d'entres elles résultent directement des observations émises au cours des deux parties précédentes et sont imtimement liées à l'usage de la notion d'équilibre. Pour faire face à ces

[1] Cette critique relève de la faute logique, puisqu'elle revient à lui reprocher de ne pas être capable de comprendre et de décrire la situation présente (aspect « positif »), alors même qu'on lui demande seulement d'avoir un rôle normatif.

difficultés, on sera astreint à opérer des choix. Lesquels nous conduirons à présenter un petit modèle de planification.

SECTION I
L'horizon temporel du plan

Historiquement les économies socialistes ont toujours élaboré des plans intégrants différents horizons temporels. Ainsi, il existait des plans annuels et quinquennaux. Pourtant, seuls ces premiers jouaient un rôle primordial. Outre le fait qu'ils étaient les plus « tenables », ils permettaient également d'énoncer de façon détaillée les objectifs poursuivis :

« La planification de type soviétique prend en compte plusieurs horizons temporels. Le plan quinquennal est le plus connu, mais pas le plus important, car il ne détermine pas les objectifs de productions courants pour les entreprises. […]. Le véritable plan impératif est le plan annuel. Il contient des objectifs détaillés pour l'économie nationale dont la *désagrégation* permet d'obtenir des chiffres de contrôle destinés aux différents ministères sectoriels, puis après une deuxième désagrégation ceux des entreprises. » (Andreff (1993), p. 71)

Les propos de Kornai (1996) sont similaires :

« Du point de vue de la durée, il y a des plans annuels à court terme, et des plans à moyen terme, qui sont des plans quinquennaux dans la majorité des cas. La planification annuelle est le véritable outil opérationnel pour la direction de l'économie nationale. Le plan quinquennal est plutôt une manifestation d'intention de politique économique […] » (p. 143).

On va maintenant exposer les raisons pour lesquelles la planification annuelle nous semble effectivement la plus judicieuse.

VIII. I. 1 Incertitude et investissement

On n'a pas cessé de le répéter, l'incertitude est une composante majeure de l'activité économique. Elle peut évidemment prendre d'innombrables formes. L'une d'entre elles a été mise en évidence par Keynes (1936) et concerne l'investissement. Dans l'esprit de Keynes, le choix d'investir dépend notamment du rendement escompté, par les entrepreneurs, du capital. Celui- ci est lié, dans une large mesure, à « l'état de la prévision à long terme » qui dépend à son tour d'éléments psychologiques difficilement saisissables :

« Les évaluations des rendements futurs sont fondées en partie sur des faits actuels, qu'on peut supposer être connus avec plus ou moins de certitude et en partie sur des évènements futurs qui ne peuvent qu'être prévus avec plus ou moins de confiance. […]. Dans la seconde catégorie figurent les changements futurs dans l'espèce et la quantité des divers biens capitaux et dans les goûts des consommateurs, l'ampleur de la demande effective aux diverses époques de l'existence de l'investissement considéré et enfin les changements pendant cette existence de l'unité de salaire exprimée en monnaie. On peut condenser l'état psychologique d'attente vis-à-vis des évènements de la seconde catégorie dans l'expression *état de la prévision à long terme* […] » (Keynes (1936), p. 163).

L'investissement dans un programme de planification

Etant donné la difficulté qu'il y a pour saisir les déterminants de l'investissement, la prise en compte de son évolution dans un plan est un important sujet de tracasserie. C'est en partie pour résoudre ce problème que la propriété publique des moyens de productions était en vigueur dans les économies socialistes. La décision d'investir était alors du ressort de l'Etat :

« […] le plan doit fixer le montant et l'orientation des investissements, ce qui signifie que le Centre décide au niveau macro-économique du taux d'investissement (part de l'accumulation dans le RN), ainsi que la répartition sectorielle et régionale des investissements. »[1] (Andreff (1993), p. 89 et 90).

L'avantage du plan annuel

Si l'on ne souhaite pas imiter les économies socialistes et que l'on désire conserver la propriété privée des moyens de production, il convient alors de solutionner ce problème par un autre biais.

[1] Pour être tout à fait fidèle à la pensée d'Andreff, il convient de préciser que « Seuls les projets d'investissement les plus importants (plus de 150 millions de roubles) relèvent des autorités centrales. ». Par conséquent, il faut « relativiser un peu les grands principes présidant à la détermination de l'investissement hérités de la période stalinienne. » *(ibid)*.

Peu de monde conteste aujourd'hui que l'investissement est par nature une opération de « long terme ». Quel que soit ce que l'on entend exactement par l'expression « opération de long terme », il ne fait guère de doute que le « long terme » dépasse une année. Du point de vue mathématique, il est donc raisonnable de considérer que sur l'année les ensembles de productions sont bornés :

« Any division of time into the "short-run" and the "long-run" contains an element of arbitrariness: yet such distinctions may nonetheless be useful and intuitively appealing, and that is indeed the case with the distinction about to be made. There are two approaches to establishing it, and the first of these has the sanction of economic tradition. It has been customary in economic theory to refer to the short-run as a period within which the quantity of fixed capital equipment available must be taken as given: the first definition of the short-run is that it refers to a period within which resource constraints are absolute and cannot be altered. This certainly conforms to traditional usage, for the amount of fixed capital equipment available has been taken as a resource constraint. If this approach is adopted, what period of time does it suggest as the short-run? Casual empiricism suggests any period about five years.» (Heal (1973), p.63).

Il en découle immédiatement que les ensembles de consommations sont eux aussi bornés.

L'aspect formel

Techniquement une planification annuelle invite à considérer des ensembles de productions bornés. Comme on l'a vu au cours du premier chapitre, c'est là une condition essentielle pour assurer l'existence et l'unicité globale des équations différentielles.

VIII. I. 2 Incertitude et choix des agents

Comme on a pu le réaliser à travers l'étude des équilibres temporaires, les croyances et les conjectures des agents prennent une importance primordiale dès que l'on se situe dans un univers incertain. Leurs choix de consommation deviennent très délicats à prévoir. C'est pour ce motif que tous les modèles que l'on a examinés ont recours à des artifices pour limiter l'incertitude (système complet de marchés,…). Mais ce sont là des hypothèses bien peu réalistes. Evidemment, la planification socialiste n'a pas non plus échappé à cette difficulté comme le reconnait Ellman (1999) :

« Dans bien des cas, le conflit entre « produire pour le plan » et « produire pour les besoins » ne provient pas d'un conflit entre « les préférences des planificateurs » et « les préférences des consommateurs », mais du fait que les autorités ne savent ni ce que préfèrent les consommateurs ni quelles sont les possibilités de production réelles des entreprises. » (p. 135).

La dictature des besoins

La plupart du temps, les erreurs d'anticipations du planificateur – liées à la mauvaise connaissance des préférences des agents – conduisaient à une pénurie. Ceci faisant rapidement affirmer à Boukharine (1920), qu'a l'inverse du capitalisme, le socialisme se caractérisait par une sous production :

« Mais, chez nous, cette disproportion est renversée […] ; là-bas la demande de la part des masses est considérablement moindre que l'offre, ici la demande est plus grande que l'offre. »

Plus récemment, un diagnostic similaire est dressé par la plupart des spécialistes des économies planifiées :

« Les économies des pays de l'Est restent en effet largement, et on peut dire structurellement, des économies de pénurie pour les biens, les services et le travail ; » (Duchêne (1987), p. 13)

D'après les travaux de Fehér, Heller et Márkus (1983), les économies socialistes tentaient de résoudre ce problème, de connaissance des préférences des agents, en instituant une « dictature sur les besoins ». Autrement dit la solution consistait à élaborer, ce que nous avons appelé, une centralisation totale (voir chapitre I). Si l'on souhaite maintenir le caractère semi- centralisé de l'économie, une autre réponse doit être trouvée.

La prévision du choix des agents

Une anticipation erronée, par le planificateur, des choix des agents peut provoquer une sous production. Ce qui risque d'engendrer une économie de pénurie. Afin d'éviter cela, il convient de produire tous les ans et dans toutes les entreprises au maximum des capacités de production. Ces dernières sont, rappelons le, bornées.

Cette solution correspond à celle que Von Neumann retient dans son modèle de croissance équilibrée (chapitre IV). Malheureusement, elle a pour désagrément d'inverser le problème. Le risque majeur est désormais la surproduction.

Origine et risque de la surproduction

La surproduction est liée au fait qu'une partie des ménages ne dépense pas l'intégralité de leurs revenus. En effet plus la production est importante, plus la distribution de revenus est conséquente. Ce qui permet alors l'achat des biens produits. Hélas, une fraction du revenu étant épargnée[1], celui- ci devient insuffisant pour que les entreprises puissent écouler la totalité de leur production.

En fait, si la surproduction nous préoccupe c'est qu'elle a pour inconvénient de baisser le niveau de profit des entreprises. Dans ce cas, pourquoi prendraient- elles le risque de produire au maximum de leurs capacités et de faire des pertes ?

Mécanisme de transfert

Pour inciter les entreprises à produire au maximum de leurs capacités de production, tout en maintenant une économie de propriété privée, un mécanisme de transfert est envisageable. Ainsi, une partie de l'épargne des consommateurs peut- être redistribuée aux entreprises dans le but de compenser leurs pertes. Une autre possibilité est d'instituer un dispositif de solidarité entre les entreprises réalisant du profit et celles faisant des pertes[2]. Naturellement, cela suppose que les pertes soient limitées de manière à ce qu'une fraction de l'épargne puisse les combler.

Rendements d'échelle croissants

Comment alors, en présence d'une surproduction, minimiser la baisse des profits ? La réponse est simple : en se situant dans une zone où les rendements d'échelle sont croissants. Les pertes unitaires encourues par les entreprises y sont plus faibles. Ceci nous amenant alors à nous pencher sur le rôle des rigidités.

---

[1] Cela d'autant plus que le niveau de revenu est élevé si on en croît la « loi psychologique » de Keynes.

[2] La proposition de mettre en œuvre des systèmes de transferts dans les économies planifiées n'est pas spécialement novatrice. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, de tels systèmes existaient dans les pays de l'Est (confère Duchêne (1987)). L'originalité réside seulement dans la couverture d'un « risque de faillite ».

SECTION II

Rigidités et ensemble de stabilité. L'existence, l'unicité et la stabilité de l'équilibre en question

Pourquoi accorder tant d'importance aux rigidités ? Car elles permettent de répondre à la plupart des objections émises à l'encontre des systèmes planifiés

VIII. II. 1 La réfutation des objections par les rigidités

Un type d'argument souvent évoqué concerne l'efficacité du système économique. L'entrave à la libre concurrence qui ne pourrait assurer le salutaire processus de destruction créatrice décrit par Schumpeter :

« Nous pouvons résumer les points 1 et 2 en indiquant que ce n'est pas la concurrence de marché, la « sélection naturelle » qui a « droit de vie ou de mort » sur l'entreprise en tant qu'organisation collective, en tant qu'organisme, mais bien la bureaucratie. On observe l'absence complète du processus que Schumpeter avait considéré comme la force motrice la plus importante d'un développement économique sain, à savoir l'émergence d'entrepreneurs qui introduisent de nouveaux produits ou de nouvelles technologiques, qui créent de nouvelles organisations et conquièrent de nouveaux marchés, tandis que les produits désuets et les organisations fossilisées sont éliminés. En d'autres termes, dans ce système il n'y a pas de place pour l'effet révolutionnaire de la « destruction créatrice » de Schumpeter. » [1] (Kornai (1996), p. 147).

Outre la manière contestable dont Kornai présente la concurrence qui est assimilée à une sorte de compétition où les plus faibles trépassent, nous voulons déjà faire remarquer que ces rigidités présentent des avantages. En imposant des règles strictes, la bureaucratie évite les évolutions chaotiques, résultant des disparitions et créations d'entreprises, qui engendrent des discontinuités (voir chapitre II). Par ce biais, elle limite l'incertitude et facilite les investissements à long terme favorables au développement de l'activité économique.

[1] Les points 1 et 2 renvoient respectivement à *la fondation d'entreprises* ainsi qu'à *la cession d'entreprises* qui dépendent d'une autorisation bureaucratique.

L’ouverture des économies

Un des éléments les plus fréquemment avancées à l’encontre de la planification a trait à l’abondance des échanges internationaux qui influencent de manière erratique le mouvement des prix intérieurs, rendant encore plus délicate la construction du plan. On retrouve ici une autre justification aux rigidités : elles permettent suite à un choc exogène, une mauvaise conjoncture internationale par exemple, d’empêcher le mouvement du système de sortir de sa zone de stabilité. En d’autres termes, elles modèrent l’impact du « choc » subi en le ramenant à terme vers un équilibre.

Propriété des moyens de production et développement technologique

Enfin, notons, que dans l’esprit de la plupart des économistes, la planification était associée, y compris chez les théoriciens du « socialisme de marché », à l’idée de propriété publique des moyens de productions :

« La planification de l’économie nationale et de ses divers secteurs au niveau du pouvoir central n’est possible que par le remplacement de l’appropriation capitaliste des moyens de production par l’appropriation socialiste par la société tout entière. Seule la liquidation des rapports de production capitalistes et leur remplacement par les rapports socialistes crée la possibilité d’une telle planification. » (Kantorovitch (1963), p. 1).

Le modèle que l’on va développer n’implique aucune restriction de ce genre. Il en découle que les arguments de Mises sur l’impossibilité d’un calcul rationnel ou sur l’absence d’incitation au progrès technique sont d’emblée caducs.

On ne va pas s’attarder d’avantage sur ces remarques qui ont pour seules vocations de renforcer les préjugés ambiants. Il existe par contre d’autres difficultés beaucoup plus sérieuses que peut rencontrer la planification.

On a vu les motifs pour lesquels l’année est, d’après nous, l’intervalle de temps le plus adapté à l’élaboration d’un programme de planification. Néanmoins bien que cette vision de court terme réduise l’incertitude, elle ne l’élimine pas complètement. Il est incontestable que de nombreux évènements peuvent encore survenir au cours d’une année venant perturber la réalisation du plan. Il est donc nécessaire de limiter l’impact de ses perturbations en maintenant l’économie dans sa « zone de stabilité ».

VIII. II. 2 Au sujet de l'importance des ensembles de stabilité et des rigidités pour la planification

La notion d'ensemble de stabilité amène à se pencher sur le rôle des rigidités. Ces dernières ont des vertus particulièrement importantes dans une optique planificatrice. Ces rigidités sont salvatrices, du point de vue de l'efficience, pour le planificateur.

Choix de l'équilibre, rigidités et stabilité

D'un strict point de vue mathématique un équilibre ne peut pas, en règle générale, être atteint en un temps fini (confère chapitre I section III).

Une façon astucieuse de contourner la difficulté est d'en choisir un à proximité immédiate des « conditions initiales ». Encore faut- il qu'un tel équilibre existe et qu'il soit stable. La première condition est aisément remplie puisque les ensembles de production et de consommation sont bornés. Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et garantit l'existence d'au moins un équilibre sur la durée du plan. En fait, le planificateur va d'avantage être confronté à une multitude d'équilibres dont la plupart sont instables. L'instabilité étant la règle. Or paradoxalement, un équilibre instable peut quand même comporter des directions stables. Celles- ci sont données, dans le cas linéaire, par l'espace engendré par les vecteurs propres dont les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives. Les rigidités sont alors susceptibles de maintenir le processus dans sa direction stable et d'atteindre un équilibre qui paraissait à priori instable.

On devine facilement l'importance de ce résultat pour un planificateur. En présence de rigidités, ce dernier n'a plus à se soucier du problème de stabilité lorsqu'il doit sélectionner un équilibre à atteindre à proximité des conditions initiales.

Hystérésis et rigidités

Afin d'échapper au problème de la vitesse de convergence du processus, nous avons eu recours à une « astuce ». Toutefois, choisir un équilibre au voisinage immédiat des conditions initiales ne résout pas le problème des événements qui surgissent pendant le délai d'ajustement c'est-à-dire la phase de déséquilibre. Par exemple, Solow (1988) observe en s'intéressant au marché de l'emploi qu'une partie des chômeurs se retire de celui-ci par découragement, par perte de qualification…C'est là une conséquence d'un « déséquilibre » prolongé qui détruit, le cas échéant, une partie de la force de travail.

Plus généralement, on se trouve confronté à un problème d'hystérésis. Les rigidités en réduisant les fluctuations du processus peuvent alors contribuer à raccourcir au minimum cette phase d'ajustement.

Chocs exogènes et rigidités

Un des arguments le plus souvent évoqué à l'encontre de la planification est sa capacité à faire face aux nombreux événements imprévus pouvant surgir. Dans ce domaine les illustrations abondent : catastrophes atmosphériques détruisant une partie des récoltes, conflits internationaux accroissant le prix des matières premières…Du point de vue de la modélisation, tous ces imprévus prennent la forme de « chocs exogènes » qui se traduisent par le déclenchement de fluctuations erratiques du processus. Les rigidités en limitant les mouvements du système empêche l'apparition de ces fluctuations dont le résultat est incertain.

Rigidités et Etat

Pour la plupart des économistes, l'Etat est perçu comme une source de rigidité et d'inefficience. Etant donné ce que l'on a dit dans ce chapitre, on peut objecter qu'en imposant des règles et des normes, l'Etat exerce une influence sur les croyances et les anticipations des agents.

Les remarques que l'on vient de formuler ont un caractère très général et sont valables quelque soit le cadre institutionnel retenu pour planifier l'économie. On peut toutefois préciser d'avantage les bienfaits des rigidités en les appliquant à la théorie de l'équilibre général.

Rôle des rigidités, effets de seuil et interprétation de l'hypothèse de fixité du nombre d'entreprises

En abordant l'étude du modèle d'équilibre général, et sa représentation de l'équilibre sous forme de point fixe, on a eu l'occasion de remarquer combien les rendements d'échelle croissants sont problématiques. Dans cette situation, et à ce stade de nos connaissances, seule une règle de tarification marginale associée à des restrictions sur les conjectures des agents permettent de démontrer l'existence d'un équilibre. En d'autres termes, une économie comportant des courbes marginales en U peut sous ces conditions avoir un équilibre walrasien.

Dans cette dernière configuration, une légère perturbation[1] est susceptible d'engendrer d'importantes répercussions. Il suffit que des entreprises tombent en dessous de leur seuil minimum de production pour qu'elles se retirent du marché faute d'être rentables.
Il va s'ensuivre un certain nombre d'effets de reports et par conséquent des risques de réaction en chaîne.

La présence de rigidités permet de supprimer ce risque systémique en excluant toute chance de faillite ou de retrait des entreprises.

SECTION III
Un modèle de planification

Les remarques que l'on vient de formuler nous permettent de concevoir un modèle simple de planification.

VIII. III. 1 Exposition

A la base de ce nouveau modèle se trouve une petite astuce que l'on peut résumer ainsi : plutôt que faire varier les prix en espérant par itération arriver à l'équilibre mieux vaut agir sur leur marge de fluctuation.

Raisonnement

Le raisonnement est donc le suivant : à l'instant initial t_0 le planificateur choisit au hasard[2] un vecteur prix que devra atteindre l'économie en T. Pour la clarté de la présentation,

[1] La plus souvent « exogène » au modèle.

[2] La seule contrainte qui lui est imposé est que le vecteur prix choisit appartienne à l'ensemble $B = \left\{ \overline{P} \in \mathbb{R}^3 \middle| \; \overline{p}_1 > 0, \overline{p}_2 > 0, \overline{p}_3 = 1 \right\} \in \mathbb{R}^2_{++}$

on va se situer exclusivement dans un monde à trois biens. De plus, on pose la condition de normalisation $p_3 = 1$. Le vecteur prix à atteindre en t_n est alors noté : $\overline{P}(T) = (\overline{p}_1(T), \overline{p}_2(T))$.

Des périodes t_0 à T le planificateur va progressivement diminuer la marge de fluctuation des prix comme illustrée ci-dessous :

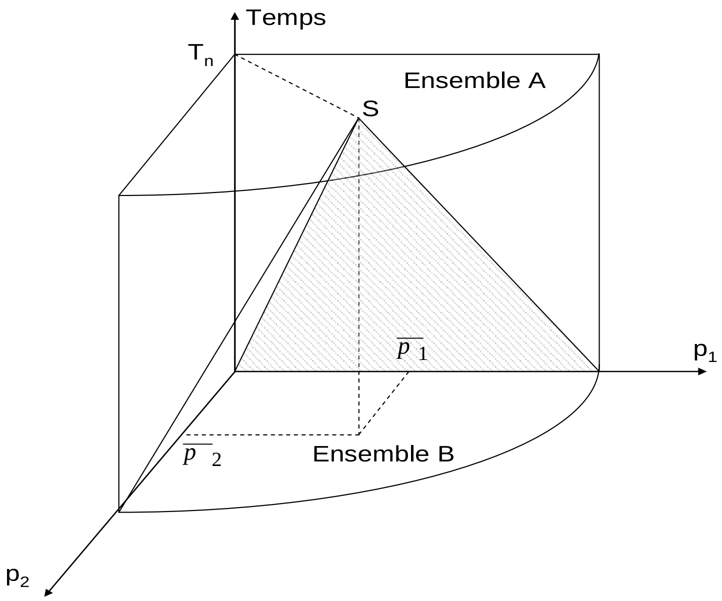


Figure 8.1- Réduction des marges de fluctuations formants un cône

Commentaire

On remarque que la figure forme un cône de sommet $S = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, T)$. Or, le sommet d'un cône est un point fixe. Il s'ensuit qu'en T, $\overline{P}$ est nécessairement un vecteur prix d'équilibre.

Plus généralement, tout vecteur prix que choisira le planificateur en T est assurément un vecteur- prix d'équilibre.

Sur le plan économique, ce résultat peut paraître surprenant au premier abord. Il est pourtant extrêmement logique. En effet, en ayant en T un vecteur prix à atteindre, la structure de l'économie s'adapte graduellement. Les génératrices du cône constituent quant à elles des rigidités garantissant la convergence des trajectoires vers S, comme dessiné ci-dessous :

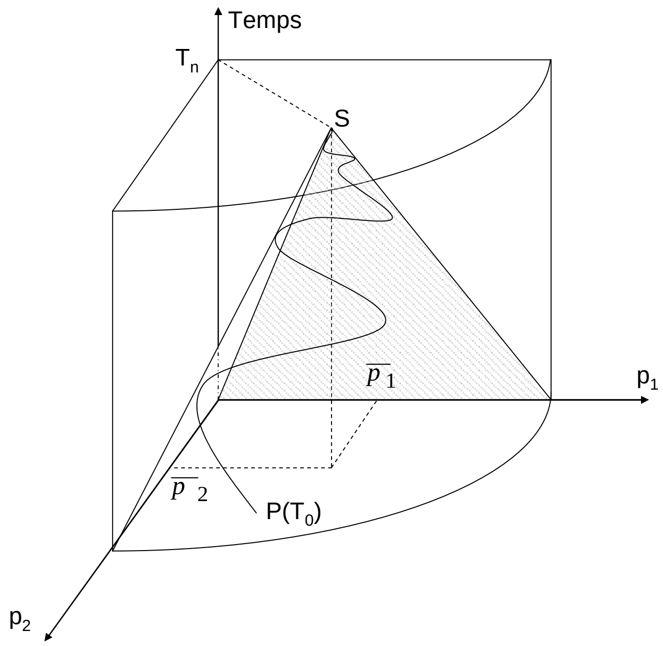


Figure 8.2- Trajectoires convergentes bornées par les génératrices du cône

VIII. III. 2 Vitesse de convergence

On a vu qu'il est impossible, à ce stade de notre connaissance, d'obtenir un équilibre dynamique. D'après nous, ce point est à l'origine de l'échec des systèmes planifiés ainsi que de leurs projets de réformes dans les économies socialistes.

Pour résoudre ce problème, la solution est de « réguler » le système économique afin de limiter sa tendance au chaos qu'il manifeste, comme tout système, dès lors qu'il n'existe pas de rigidités. Toutefois, un tel « contrôle » étant difficile à exercer et n'échappant pas non plus au principe d'entropie, il doit être le plus bref possible. D'où l'intuition d'amener le système à l'équilibre par le chemin le plus court[1] :

[1] C'est à partir de cette réflexion qu'est née la théorie du contrôle optimal dont la paternité est attribuée à Pontriaguine. Evidemment le point de départ de cette théorie est qu'« On suppose que le mouvement de l'objet est susceptible d'être commandé, i.e. l'objet est doté de « gouvernails » dont la position conditionne le mouvement. » (Pontriaguine et *al.* (1974), p. 11).

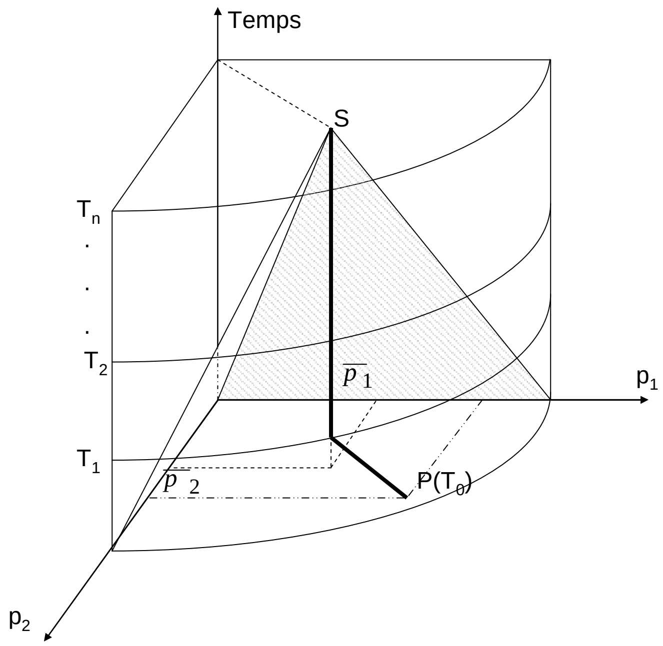


Figure 8.3- Trajectoire convergeant rapidement vers le vecteur prix d'équilibre

En d'autres termes, on doit chercher à faire converger la trajectoire en un temps minimum vers le vecteur prix d'équilibre. Cela revenant à « aplatir » le cône :

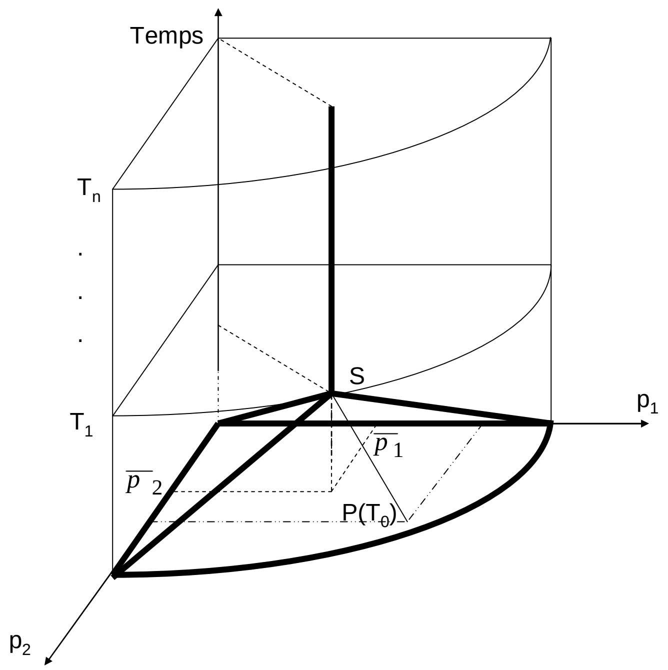


Figure 8.4- Aplatissement du cône

Ces dessins ne peuvent pas tenir lieu de démonstration rigoureuse. Ils permettent néanmoins de mieux comprendre la démarche que l'on va mettre en œuvre dans le prochain chapitre.

SECTION IV

Problèmes pratiques de la planification

Historiquement, une difficulté récurrente à laquelle ont été confrontées les économies planifiées concerne la mise en œuvre des solutions théoriques. Naturellement, aucune réflexion sur la planification ne peut contourner cet obstacle. Deux manières de résoudre ce problème avaient été élaborées :

« Si l'assimilation des problèmes d'affectation optimale des ressources aux niveaux d'un atelier et de la nation est possible sur le plan théorique (sous certaines hypothèses), on sait que méthodologiquement cette assimilation pose des problèmes de dimension et d'information qui nécessite une extension des principes de la programmation. Nous nous limiterons à rappeler que deux solutions sont alors possibles : le socialisme de marché, conçu comme une concrétisation « naturelle » du théorème de la dualité, et ce qu'on appelle le centralisme indirect, qui représente la mise en pratique, lors de l'élaboration du plan, des procédures de décomposition des programmes mathématiques. » (Duchêne (1978), p. 1114).

VIII. IV. 1 Le socialisme de marché

L'idée d'articuler le plan et le marché remonte à Oskar Lange (1936). Ce dernier reprend à son compte la remarque de Barone (1908) selon laquelle le marché résout automatiquement et sans effort un ensemble d'équations destiné, d'une part, à résoudre la question de l'existence de l'équilibre et, d'autre part, celle de la stabilité.

Présentation

A la base du modèle de socialisme de marché, se trouve un point commun entre la concurrence parfaite et l'économie planifiée. Dans les deux cas, les prix annoncés respectivement par le commissaire priseur et le bureau central de la planification sont paramétriques. Ils s'imposent aux agents.

Partant de ce constat, Oskar Lange propose de s'en remettre au marché pour converger vers les prix d'équilibre. Ce qui, bien entendu, ne pose pas de difficultés spécifiques dans les quelques secteurs de l'économie socialiste qui échappent à la planification. En revanche, dans les secteurs planifiés, le bureau central doit imiter la loi de l'offre et de la demande. Il lui incombe d'agir par itérations et de mettre en œuvre la procédure de tâtonnement pour atteindre le vecteur prix d'équilibre. Ce mécanisme pouvant alors être perçu comme une sorte d'application naturelle du théorème de la dualité permettant de déduire des prix d'équilibres, les quantités correspondantes.

Introduire de l'économie de marché au sein d'un système planifié impose de revoir le comportement des entreprises. Celles- ci sont désormais amenées à maximiser le profit ou ce qui est équivalent à minimiser les coûts. Cette modification comportementale ainsi que la mise en œuvre d'un processus de tâtonnement est à la base des différentes versions des modèles de socialisme de marché (pour une comparaison voir Andreff (1993)).

Socialisme et stabilité du tâtonnement

Lorsqu'on s'intéresse à la littérature de l'époque, il est étonnant de constater que la convergence du processus de tâtonnement ne faisait que peu de doute :

« […] une hausse du prix au-dessus du niveau d'équilibre doit nécessairement faire entrer en jeu des forces tendant à provoquer une baisse; ce qui implique, en concurrence parfaite, qu'une hausse de prix rend l'offre plus importante que la demande. La condition de stabilité est la suivante : une hausse de prix rend l'offre plus importante que la demande, une baisse de prix rend la demande plus importante que l'offre » (Hicks (1937), p. 55)[1].

On trouve des extrapolations identiques au court des années soixante. Ces dernières ont largement été renforcées par l'annonce de résultats encourageants concernant la stabilité du tâtonnement dans des modèles avec échanges hors équilibre :

[1] Le fait que les « forces du marché » s'exercent dans le sens indiqué ne suffit pas pour garantir la convergence. D'ailleurs pour étayer sa démonstration, Hicks établit des conditions de non négativité sur les mineurs primaires principaux de la matrice jacobienne des demandes nettes. Le théorème Sonnenschein est l'illustration de la difficulté qu'il y a à fonder micro- économiquement ce genre de conditions mathématiques.

« Jusqu'ici, les recherches ont été confinées presque exclusivement à l'étude d'un cas idéal, celui d'un ensemble de marchés parfaits où vendeurs et acheteurs, en partant d'un point de départ quelconque, recherchent à tâtons les prix qui permettront d'équilibrer l'offre et la demande pour chacun des produits échangés. Différentes modalités de tâtonnement ont été étudiées. La conclusion est que, dans ce cas idéal, les tâtonnements convergent vers l'équilibre – l'œuf, heureusement, roule au fond d'une gouttière et ne risque pas de s'écraser sur le trottoir cinq mètres plus bas. » (Waelbroeck (1964), p. 20).

De façon plus surprenante, la conviction de la stabilité du tâtonnement a perduré après la publication de l'article de Sonnenschein (1973). Preuve sans doute, de l'existence d'un délai d'assimilation des résultats théoriques.

La vitesse de convergence

Quoi qu'il en soit, à l'époque, les économistes étaient davantage préoccupés par la vitesse de convergence du mécanisme de tâtonnement. Dès 1963, Edmond Malinvaud note l'existence d'un antagonisme entre précision du processus et vitesse de convergence. Il commente en ces termes la démonstration de stabilité d'Uzawa (1958) qui est basée sur une méthode de gradient discrétisée :

« La formulation de la convergence, telle qu'elle a été donnée par UZAWA (cf. remarque (ii)), montre bien une difficulté fondamentale de la procédure étudiée : comment choisir le coefficient ρ qui fixe l'importance des révisions à opérer sur les prix ? Si l'on prend une valeur faible de ρ, les ajustements se feront lentement et on risque d'avoir un programme peu satisfaisant après un petit nombre d'itérations. Si l'on prend pour ρ une valeur forte, les vecteurs prix successifs p^1, p^2, p^3…peuvent varier de manière désordonnée sans se rapprocher d'un vecteur optimal ; car les valeurs de ε pour lesquelles ρ_0 (ε) excède ρ peuvent être très élevées. » (p. 26).

Recherche d'un coefficient adéquat et algorithmes d'approximations

La prise en compte de cette difficulté s'est traduite par le développement de deux voies de recherches.

La première consistait à essayer de déterminer économétriquement des coefficients d'ajustements constituant « un juste milieu » entre précision et vitesse de convergence (voir par exemple Potier (1972)). Toutefois, cette première piste a été peu suivie dans la mesure où elle nécessite que le bureau central de la planification connaisse, a priori, la valeur du coefficient à partir duquel les révisions effectuées permettent de converger. En pratique le bureau central de la planification n'a évidemment aucune indication en la matière.

La seconde voie de recherche a été de développer des algorithmes d'approximations (confère notamment Malinvaud (1963), Kornai et Liptak (1965)…). Ce qui conduit à renoncer à une stabilité asymptotique au profit d'une stabilité simple.
L'abondance des publications témoigne d'ailleurs de l'intérêt que ce type de travaux a suscité. A ce titre, l'article de Younes (1972), qui se présente comme une extension de celui de Malinvaud, est révélateur de ce qu'ont été les prospections dans ce domaine. En outre, Younes ajoute à la délivrance du vecteur prix, par le bureau du Plan, une indication sur le niveau de production souhaitable pour chaque entreprise. Cette indication prend la forme d'un « ensemble de choix » qui correspond au voisinage de la solution optimale préalablement déterminée par le bureau du Plan.
Bien entendu ce type d'approche, destiné à améliorer la vitesse de convergence en se contentant d'une solution approchée, pose à la fois le problème de la connaissance préalable par le Bureau Central d'un plan optimal et celui de l'amplification des déséquilibres dans le temps.

Des résultats peu satisfaisants

En réalité ces deux voies de recherches sont apparues très tôt comme bien peu satisfaisantes. Citons à nouveau J. Waelbroeck (1964) :

« Par contre, ces procédures demeurent sans exception assez artificielles. Sans doute n'est- ce pas là un vice nouveau des études d'économie mathématique, qui se sont toujours largement reposées sur des simplifications radicales lorsque celles- ci permettaient de mieux cerner une difficulté. Ce qui est plus grave, c'est qu'il n'apparaît pas très clairement comment pourrait être abordé le problème capital de la vitesse de convergence de ces procédures. Ici, comme pour le problème de l'évaluation du coût des procédures de transmission des informations, l'approche rigoureuse de la théorie économique mathématique risque de conduire à une impasse ou a des résultats trop faibles pour être vraiment intéressants ; » (p. 22)[1].

[1] Bien entendu, la vitesse de convergence est un élément fondamental du coût d'une procédure. Chaque itération se traduisant par des coûts de transferts et de traitement (de l'information) supplémentaires.

Dans son ouvrage de 1979, Picard dresse un diagnostic identique. Il commente ainsi la solution d'Y. Younes :

« Inversement, la relation entre le diamètre des ensembles de choix et la vitesse de convergence ne semble pas évidente. En début de procédure, lorsque la solution approchée déterminée par le Bureau du Plan est encore éloignée du programme optimal, les entreprises devraient pouvoir faire des propositions nettement différentes de cette solution approchées : le diamètre des ensembles de choix devrait donc être choisi relativement grand. Au contraire, lorsque le Bureau du Plan a déjà une idée assez précise du programme qui sera adopté, le diamètre devrait être plutôt petit, afin d'éviter que les entreprises ne proposent des programmes de productions qui s'éloigneraient trop de la solution approchée déterminée par le Bureau du Plan. Il serait évidemment possible de faire tendre le diamètre vers 0 au cours des itérations de la procédure ; nous ne serions alors plus assurés de la convergence de l'algorithme. » (p. 80)

Au-delà du débat sur la vitesse de convergence, c'est bien la pertinence des échanges plan-marché qui est en cause. La multiplication de ces échanges apparaît comme une perte de temps :

« Supposons maintenant que le bureau du plan communique à une entreprise des prix pour les divers biens et lui demande d'annoncer le système d'inputs et d'outputs qui maximise la valeur nette de sa production. Si les prix sont biens choisis, la proposition de l'entreprise peut apparaître comme tout à fait raisonnable. Mais, pour certains systèmes de prix tout au moins, la proposition risque d'être inadmissible. Des prix un peu trop favorables pouvant conduire l'entreprise à annoncer un volume de production beaucoup plus grand que celui souhaitable ; des prix un peu trop défavorables pouvant avoir l'effet inverse et amener une production annoncée beaucoup trop faible.

Il est intuitivement vraisemblable que des réponses inadmissibles de ce genre font perdre du temps dans les échanges d'informations. » (Malinvaud (1963), p. 61)

Conclusion

Au terme de ce bref commentaire, il apparaît que le socialisme de marché est un système plutôt décevant. Ceci étant dût à l'abondance des informations à transmettre et à recueillir qui ralentissent considérablement la vitesse de convergence et élèvent le coût de la procédure[1]. On rejoint, ici, l'opinion de Jean-Hervé Lorenzi (1975) qui souligne «l'inefficience actuelle des systèmes d'informations des « socialismes de marché » » (p. 198).

Néanmoins, l'expérience du socialisme de marché n'a pas été dénouée d'enseignements. Elle permet de relever un certain nombre de conditions que doit satisfaire un processus pour avoir un intérêt en pratique. Outre le fait d'être stable, on exige qu'il soit simple et par conséquent qu'il limite les échanges d'informations entre le centre (le bureau de la planification) et la périphérie (les agents).

Peu de processus répondent aussi bien à ces critères que le contrôle optimal. On va donc être conduit à présenter, et à appliquer, la théorie du contrôle optimal dans le chapitre suivant. Mais avant cela, nous allons dire quelques mots de l'autre versant de la mise en œuvre de la planification c'est-à-dire les méthodes de décomposition du domaine.

VIII. IV. 2 La décomposition du domaine

Les techniques de décomposition du domaine partent d'une interrogation simple : est-il possible de scinder un problème global en une suite de sous- problèmes, de taille plus restreinte, dont les solutions engendreront la solution globale ?

L'idée est déjà ancienne puisqu'elle remonte à la fin 19[ième] siècle avec la publication de Schwarz. Toutefois, c'est avec le développement de la planification que cette dernière va réellement prendre son essor.

En effet, les premiers essais d'application à l'économie prennent place dans le cadre d'un programme linéaire de planification et sont l'œuvre de Dantzig et Wolfe (1961) ainsi que Dantzig (1966).

La parabole de Dantzig

Pour illustrer l'apport de la décomposition, Dantzig emploie une parabole ludique. Il met en scène trois personnages confrontés à un problème de transport de produits pétroliers.

[1] Sans parler des hypothèses extrêmement restrictives, de substituabilité brute et de domination diagonale, mobilisées pour faire converger le processus.

Ces derniers sont fabriqués dans deux raffineries et doivent être acheminés, par bateau ou par pipe-line, vers quatre destinations différentes.

L'objectif des trois compères est de minimiser les coûts. Pour ce faire, ils disposent de la matrice suivante des coûts unitaires de transport (dont les lignes représentent les coûts pour les deux raffineries et les colonnes ceux liés aux quatre destinations) :

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 5 \\ 8 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Pour mener à bien leur tâche, ils bénéficient également de la matrice indiquant le nombre de bateaux requis pour le transport d'une unité (les zéros signifiant que ce dernier est assuré par pipe-line):

$$\left[t_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A cela il convient d'ajouter que la production de la première raffinerie est de 9 tandis que celle de la seconde est de 8. Enfin, les demandes des destinataires sont respectivement de 2, 7, 3 et 5.
Munis de ces informations, on calcul aisément le plan optimal qui présente un coût de 53 et qui utilise 18 bateaux. On le note ainsi :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 53 \\ 18 \end{bmatrix}$$

A ce stade intervient de manière impromptue une pénurie de bateau. Seuls 9 sont disponibles. Un nouveau plan P_2 est dressé qui minimise leur nombre :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 95 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bien que ce nouveau plan n'utilise plus un seul bateau, il a pour inconvénient de presque doubler les coûts. Les trois protagonistes ont alors l'idée de combiner les deux plans. Pour ce faire, ils dressent le petit programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 53\lambda_1 + 95\lambda_2 + (-z) &= 0 \\ \lambda_0 + 18\lambda_1 + 0\lambda_2 &= 9 \qquad \text{Où } \lambda_i \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

λ_0 représente une marge éventuelle dans l'utilisation des bateaux.

Un tel programme se résout facilement à l'aide de la méthode du pivot. On obtient : $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = ½$, $\lambda_2 = ½$ et le coût z = 74. Ce qui indique notamment que les plans P_1 et P_2 doivent être combiné dans les mêmes proportions. Toutefois, l'intérêt réside ici surtout dans le dual qui s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 53 + 18\pi^1 - s^1 &= 0 \\ 93 + \ 0\pi^1 - s^1 &= 0 \end{aligned}$$

π^1, qui équivaut à 2/3, traduit la hausse du coût du transport résultant de la situation de pénurie. Ce qui impose alors de rectifier la matrice des coûts unitaires. On a désormais :

$$\left[c_{ij}\right] + 2\frac{1}{3}\left[t_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6+4\frac{1}{3} & 5 \\ 8 & 1+4\frac{1}{3} & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

La solution optimale qui en résulte correspond au plan :

$$P_3 = \begin{bmatrix} 57 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Comme antérieurement, on peut construire un programme linéaire nommé *programme principal restreint* qui combine les trois plans :

$$\begin{aligned} 53\lambda_1 + 95\lambda_2 + 57\lambda_3 + (-z) &= 0 \\ \lambda_0 + 18\lambda_1 + \ 0\lambda_2 + 10\lambda_3 &= 9 \\ \lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

Toutefois, aucune combinaison des plans P_1 et P_3 ne saurait faire appel à moins de 10 bateaux. Par conséquent, on peut se contenter de mélanger P_2 et P_3 en posant $\lambda_1 = 0$. On obtient alors comme solution $\lambda_2 = 1/10$ ainsi que $\lambda_3 = 9/10$. Ceci entrainant un coût de z = 57(9/10) + 95 (1/10) = 60,8. Quant à lui, le dual s'écrit :

$$95+\ \ 0\pi^2-s^2=0$$
$$57+10\pi^2-s^2=0$$

La résolution de ce programme amène à trouver $s^2=95$ et $\pi^2=3{,}8$. Ce qui indique que la hausse du coût du transport doit être portée de 2/3 à 3,8. Comme précédemment, on obtient une nouvelle matrice des coûts unitaires et donc un nouveau plan P_4 :

$$\left[c_{ij}\right]+3{,}8\left[t_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6+7{,}6 & 5 \\ 8 & 1+7{,}6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ainsi que :

$$P_4=\begin{bmatrix} 87 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En combinant cette fois P_3 et P_4, dans des proportions respectives de 9/10 et 1/10, on trouve z = 60. La résolution du programme dual, nous indique alors un surcoût de transport de $\pi^3=3$. Bien que la matrice des coûts unitaires se trouve de nouveau modifiée, le plan qui lui est associé est identique puisqu'il correspond encore à P_4. Désormais plus « rien ne bouge ».

Le simplexe

Sous son aspect amusant, cette historiette nous permet de deviner que la décomposition est basée sur l'algorithme du simplexe.

L'objectif est de disséquer un programme en sous programmes indépendants, uniquement reliés entre eux par l'intermédiaire d'un programme principal. Dantzig (1966) expose en ces termes la méthode qu'il a initialement élaborée avec Wolfe :

« D'abord nous résolvons le programme principal. Puis, à partir de sa solution, nous construisons les fonctions économiques des sous-programmes. Les solutions de ces derniers engendrent à leur tour de nouvelles colonnes à ajouter au programme principal et ce processus est répété un nombre fini de fois jusqu'à ce qu'un test d'optimalité soit satisfait. » (p. 279).

Plus précisément, Kornai (1969) distingue quatre critères inhérents à cette procédure de décomposition :

« The four main criteria of the decomposition methods are:

1. Instead of solving a *single* large equation system in a *single* calculation, *several* smaller equation systems must be solved *several times*.
2. The higher-level computations are more aggregate in character while the lower-level computations are more disaggregate and more detailed.
3. The method is iterative. In every iteration both higher-level and lower level computations are carried out.
4. In every iteration, the higher-level computations yield new information relevant to the lower-level ones, and vice versa. A two-way flow of information occurs, providing a basis for repeated iteration on both levels » (p. 152-153).

Soulignons que l'intérêt central de ces itérations est, non pas d'engendrer une décentralisation, mais de permettre une planification malgré l'absence d'une information complète.

Toutefois, on ne va pas davantage exposer la méthode du simplexe dont les calculs peuvent s'avérer relativement lourds. Surtout qu'il est possible de faire appel à des programmes informatiques, parfaitement au point, pour obtenir une résolution. C'est pourquoi, on préfère relater les incidences qu'a eues l'algorithme du simplexe sur les techniques de planification.

La principale application de la procédure de Dantzig-Wolfe, dans une perspective de planification, a été l'élaboration du S.O.F.E.

Le projet S.O.F.E [1]: la planification par automate

L'idée est de s'appuyer sur la méthode du simplexe, et sur son traitement informatique, afin de partitionner l'économie en différents « blocs » (ou régions) indépendants les uns des autres. Chaque bloc se trouve sous la tutelle d'un ministère chargé d'appliquer un principe d'optimisation. Fédorenko (1974) résume ainsi le changement d'approche que véhicule le projet SOFE, dont il fut le principal responsable :

« le point de vue du planificateur, quelque peu unilatéral, cède la place à une approche systémique de l'économie socialiste, beaucoup plus large et exprimant les processus réels. Dans la présente conception de l'économie comme système cybernétique complexe, la programmation mathématique n'est plus considérée comme le seul instrument d'optimisation mais devient un des éléments d'un ensemble de modèles liés réciproquement […] »

[1] Littéralement SOFE signifie « Sistéma Optimalnovo Founktsionirovania Ékonomiki » c'est-à-dire « système de fonctionnement optimal de l'économie ».

Autrement dit, sous le projet SOFE se cache la perspective de l'élaboration d'un modèle général tenant largement compte de l'autonomie de décision des agents économiques. La procédure d'élaboration d'un plan respectant cette perspective est présentée dans Fédorenko et *al* (1974) :

« L'élaboration du plan passe alors par trois étapes :

1. Calcul, dans une première approximation, de l'importance de tous les objectifs du plan, ainsi que le besoins nationaux en ressources matérielles pour la défense, l'administration, la science, et permettant d'honorer les engagements contractés dans le commerce extérieur, etc.
2. Optimalisation des plans économiques particuliers des régions, du niveau supérieur de l'économie nationale, et ajustement de tous ces éléments entre eux. A ce stade, on peut procéder de deux façons : en premier lieu, les projets du plan optimalisé par branches (par complexes) peuvent tout d'abord être coordonnés au sein du plan économique national, puis s'accorder aux possibilités des différentes régions. En second lieu, les régions se voient investies d'une plus grande initiative dans le choix des spécialisations et des structures économiques.
3. Harmonisation du plan avec les processus sociaux qui dépendent de sa réalisation (mouvement de la population et des ressources de main-d'œuvre, formation de la demande en biens de consommation, etc.). A ce troisième stade, on met l'accent sur la création planifiée des conditions qui peuvent le mieux favoriser la réalisation du plan.» (p. 36).

Schématiquement, le SOFE se présente comme un système de guidage établissant des relations entre trois niveaux : le centre, des régions et des unités de base. Un découpage approprié, du deuxième niveau, est la condition *sine qua non* pour assurer la cohérence de l'opération d'optimisation qui a lieu lors de la seconde étape de l'élaboration du plan.

Condition élémentaire de l'efficacité de la décomposition

Pour assurer l'efficacité de l'optimisation, les différents blocs ne doivent quasiment pas contenir des parties qui se superposent. En d'autres termes, le partitionnement doit être non recouvrant, à l'exception bien sûr des frontières communes séparant les blocs. Cette exigence avait été formulée par Dantzig (1966) à travers l'exemple de la gestion d'une usine comprenant deux ateliers :

« Chaque atelier a à faire face à un nombre important de contraintes qui ne sont pas affectées par les activités de l'autre, sauf en ce qui concerne un petit nombre de contraintes communes aux deux ateliers. » (p. 278).

Dans la première moitié des années soixante dix, la recherche d'une décomposition non recouvrante apparaît comme la principale difficulté que doit résoudre le SOFE. Malgré l'ampleur de la tâche, Fédorenko et *al* (1974) semblent convaincus du dénouement heureux de ce type de travaux :

« Il faut souligner que l'élaboration d'un système de fonctionnement optimal de l'économie (planification et gestion) est une procédure très complexe et qui comporte plusieurs stades, qui a une dimension horizontale (concilier l'optimum de l'économie nationale avec l'optimisation des niveaux inférieurs) et une dimension verticale (créer un système de fonctionnement optimal de l'économie sur une période toujours plus longue, tout en respectant l'optimum pour des intervalles de temps plus courts).

Outre les approches et les méthodes que l'on peut considérer comme bien étudiées et approuvées, le développement de ce système prévoit des recherches, l'élaboration et la mise à l'épreuve expérimentale d'approches qui sont encore mal étudiées ou insuffisamment vérifiées. L'évolution du système dégagera, à n'en pas douter, de nouvelles approches et méthodes qui pourront s'avérer assez intéressantes dans plusieurs cas. » (p. 39-40)

Conclusion

Pour conclure ce paragraphe, une question se pose : où en est actuellement la recherche sur les mécanismes de décompositions ?

Techniquement on considère, aujourd'hui, que décomposer un domaine signifie le diviser en des sous- domaines modélisés par des équations aux dérivées partielles différentielles en y ajoutant des conditions bien appropriées sur les interfaces entre les sous-domaines.

En dépit de la conviction d'auteurs comme Dantzig ou Almon qui estimaient avoir trouvé une méthode qui « rend possible la planification globale », c'est dans les sciences naturelles (notamment en climatologie) que les techniques de décompositions ont trouvé leur débouché le plus prometteur. A l'instar de Duchêne (1978), on peut supposer que l'application de la décomposition à l'économie s'est heurtée à l'existence « d'un coût humain et institutionnel » important lié aux réorganisations. On constate à nouveau la nécessité de mettre en place une méthode simple de planification ne venant pas bouleverser le système institutionnel.

La démarche que l’on se propose de suivre dans le dernier chapitre est proche de celle des économistes mathématiciens russes. A la nuance près que l’on substitue à la technique de décomposition celle de séparabilité. Bien que sur le plan formel les démarches soient quasiment analogues (puisqu’il s’agit d’effectuer des partitions non recouvrantes), la logique qui préside à la séparabilité présente quelques différences substantielles notamment dans ces conditions d’applications. En outre, la séparabilité a l’avantage d’avoir déjà été appliquée avec succès à Electricité De France et Général Motors. De plus, elle s’allie parfaitement avec la théorie du contrôle optimal que l’on va maintenant exposer.

CHAPITRE IX

Planification étatique et contrôle optimal

Au stade où l'on se trouve, notre problème de planification se résume à faire converger la structure des prix de P_0 à $\overline{P} = P_e$. Afin d'y arriver, nous allons utiliser la théorie du « contrôle optimal » que l'on va adapter à notre propos.

SECTION I

Présentation et utilisation de la procédure de contrôle optimal

Initialement cette technique mathématique avait exclusivement pour vocation d'être utilisée en science physique. Les propos introductifs de Pontryaguine et *al* (1974) ne laissent guère planer de doute :

« Les processus physiques qui trouvent leurs applications en technique sont en règle générale commandés, i.e. peuvent être réalisés de multiples au gré de l'homme. Dès lors il s'agira donc de chercher la meilleure commande selon tel ou tel critère, en d'autres termes la commande *optimale* du processus. » (p. 45).

C'est pourquoi, l'aéronautique et les vols spatiaux (guidage des fusées) ont constitué les premiers champs d'application. Toutefois la mise au point du « principe du maximum » en 1956 ainsi que la découverte de liens avec la théorie de la stabilité de Lyapounov ont largement contribué à sa diffusion.

Contrôle optimal et économie

La théorie du contrôle optimal présente un quadruple intérêt dans le cadre d'un programme de planification :

(i) Elle permet le passage d'un état initial quelconque à une situation d'équilibre en un laps de temps choisi.

(ii) Elle corrige les effets des chocs exogènes.

(iii) Elle permet de stabiliser les trajectoires afin de les insensibiliser aux perturbations inhérentes à l'activité économique (états de la nature, incertitude…).

(iv) Enfin, la théorie du contrôle optimal a l'attrait de s'appuyer sur des méthodes qualitatives. Ce qui représente un avantage non négligeable étant donné la difficulté pour l'économiste d'obtenir des données quantitatives fiables.

IX. I. 1 Définition et formalisation

Si on se réfère à Trélat (2005), « La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. » (p. 3).

Autrement dit, sous l'idée de contrôle optimal il y a celle de guidage d'un système. Sa modélisation met en jeu deux types de variables.

Les variables

On distingue d'ordinaire les variables d'états et de commandes (ou de contrôles). Les premières décrivent la situation du système tandis que les secondes déterminent son évolution. Dans la formalisation que l'on adopte, la variable d'état correspond au vecteur- prix $P(t) = (p_1(t),\ldots,p_l(t)) \in \mathbb{R}^l_{++}$ alors que celle de commande est un vecteur de $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l_{++}$ noté $U(t,P(t)) = (u_1(t,P(t)),\ldots,u_l(t,P(t)))$.

Modélisation du système de contrôle

La modélisation d'un système de contrôle prend la forme de l'équation différentielle suivante[1] :

$$(9.1) \qquad \frac{\partial p_h}{\partial t} = f_h(t, p_1,\ldots,p_l,u_1,\ldots,u_l) \quad h = 1,\ldots, l$$

Ce qui se note encore :

$$(9.2) \qquad p'_h(t) = f_h(t, p_1,\ldots,p_l,u_1,\ldots,u_l) \quad h = 1,\ldots, l$$

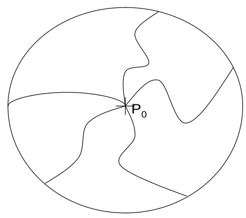
[1] On ne considère que des équations différentielles non autonomes. La dépendance explicite par rapport au temps illustrant la prise en compte des phases de déséquilibres et des phénomènes d'hystérésis qui peuvent surgir.

Ou encore en utilisant les notations vectorielles et en ajoutant une condition initiale :

$$(9.3) \quad P'(t) = f(t, P(t), U(t, P(t))) \text{ avec } P(0) = P_0$$

Variation du contrôle

Le théorème de Cauchy- Lipschitz (voir chapitre I) donne les conditions d'existence et d'unicité du problème posé par l'équation (9.3). Observons qu'il y a autant de trajectoires possibles que de contrôles U. En effet si l'on modifie le contrôle, nous obtenons une autre trajectoire dans $\mathbb{R}^{l}_{++}$, comme illustrée ci-dessous :



Trajectoires issues P_0 lorsque U est modifié

Figure 9.1- Trajectoires issues de P_0 lorsque U est modifié

IX. I. 2 La contrôlabilité

Considérons le système contrôlé (9.3) :

$$P'(t) = f(t, P(t), U(t, P(t))) \text{ avec } P(0) = P_0$$

La première question qui intervient est de savoir s'il existe, étant donné un vecteur prix $\overline{P} \in \mathbb{R}^{l}_{++}$, un contrôle U tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne P_0 à $\overline{P}$ en un temps fini ?

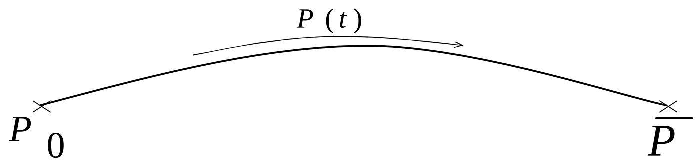


Figure 9.2- Représentation d'un problème de contrôlabilité

En d'autres termes, on s'intéresse à la question de la *contrôlabilité* du système.

DEFINITION

On appelle l'ensemble des points accessibles (ou l'ensemble de contrôlabilité) à partir de P_0 en un temps $T > 0$, l'ensemble défini par :

$$Acc(P_0, T) = \left\{ P_u(T) \middle| u \in L^{\infty}\left([0;T], \Omega\right) \right\}$$

Où $P_u(\cdot)$ est la solution de (9.3) associée au contrôle U et L^{∞} est l'ensemble des applications mesurables de $[0,T]$ dans Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^1$, de puissance infiniment intégrable.

Résultats

La contrôlabilité d'un système, dans un contexte de non linéarité, est particulièrement délicate à évaluer. Au niveau de généralité auquel on se situe, on ne peut pas affirmer grand-chose sans apporter d'autres spécifications sur f. On peut seulement supputer que les situations d'incontrôlabilité semblent les plus fréquentes. En effet, jusqu'à présent, la preuve de la contrôlabilité s'est effectuée principalement dans le cadre de systèmes sous Rienamien spécifiques.

L'aspect local

Une façon de contourner la difficulté évoquée ci-dessus est de linéariser l'équation (9.3). On se ramène ainsi à l'étude de la forme :

$$P'(t) = A(t)P(t) + B(t)U(t) + R(t)$$

Avec $A = Jf_P(P_0, U_0)$ et $B = J\,f_U(P_0, U_0)$ où Jf_P et Jf_U représentent respectivement les matrices jacobiennes de f par rapport à P et U.

A partir du théorème des fonctions implicites on en déduit, si le $rg\left(B\middle|AB\middle|...\middle|A^{l-1}B\right) = l$, que le système est localement contrôlable en P_0 (confère Lee et Markus (1967)). On supposera par la suite que cette condition est vérifiée.

Pour être complet, spécifions que les recherches les plus récentes continuent à adopter une démarche locale qui conduit à des résultats bien plus convaincants. A titre d'illustration, citons la publication de Krastanov (1998) portant sur la détermination de conditions qui garantissent la contrôlabilité locale du système pour un « petit temps »[1].

IX. I. 3 L'optimalité

Une fois la question de la contrôlabilité résolue, se pose celle de l'optimalité et du critère d'optimisation à retenir.

Bien qu'ils n'en soient pas toujours conscients, les économistes privilégient en permanence les situations d'équilibres. Pour cause : les phases de déséquilibres se caractérisent par des rationnements ou par l'existence d'effets reports extrêmement compliqués à analyser. Le principe est donc de limiter au maximum ces phases de déséquilibres en atteignant le plus rapidement possible un état d'équilibre. C'est la raison pour laquelle on retient la minimisation du temps comme critère d'optimisation.

Formalisation

On va à présent modéliser la notion de temps minimal pour passer de P_0 à $\overline{P}$. Pour cela supposons tout d'abord que ce temps minimal soit t^*. Il en découle que pour tout $t < t^*$, le

[1] Bien qu'il énonce des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité locale pour un petit laps de temps, Krastanov ne recours pas à une opération de linéarisation. Toutefois les hypothèses formulées sur le système de contrôle étant particulièrement restrictives (essentiellement bornage de u et compacité de f), seules des conclusions locales peuvent être dégagées.

vecteur prix $\overline{P}$ n'appartient pas à l'ensemble accessible ($\overline{P} \notin \mathrm{Acc}(P_0, t)$). Sans quoi le fait que $\overline{P}$ soit accessible à partir de P_0 en un temps inférieur à t* serait contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle t* est le temps minimal. Par conséquent :

$$t^* = \inf\left\{t > 0 \middle| \overline{P} \in \mathrm{Acc}(P_0, t)\right\}$$

Reformulation

Le problème de contrôle optimal revient donc à chercher les conditions nécessaires d'optimalité pour le système (9.3), agrémenté de la condition :

$$(9.4) \qquad \min \int_0^T f_0(t, P(t), U(t, P(t)))\,dt$$

Principe du maximum

Une fois la notion de temps optimal clarifiée, il convient de trouver les modalités qui permettent de le déterminer. Le principe du maximum fournit une réponse (pour l'histoire et une démonstration du principe du maximum, se reporter à Gamkrelidze (1999)).

Si le contrôle U *associé au système* (9.3) *est optimal pour la condition* (9.4)*, alors il existe une application* $Z(\cdot) = (z_1(\cdot), \ldots, z_l(\cdot))$ *absolument continue sur* [0 ; T], à *valeurs dans* $\mathbb{R}^l$ *et un réel* $z_0 \leq 0$, *tels que le couple* $(Z(\cdot), z_0)$ *est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout* $t \in [0;T]$:

$$\begin{aligned}
&P'(t) = J\,H_Z(t, P(t), Z(t), z_0, U(t, P(t))) \\
&Z'(t) = J\,H_P(t, P(t), Z(t), z_0, U(t, P(t))) \\
&J\,H_U(t, P(t), Z(t), z_0, U(t, P(t))) = 0
\end{aligned}$$

Où H est le Hamiltonien associé au système (9.3) ainsi qu'à la condition (9.4) et correspond à :

$$H(t, P(t), Z(t), z_0, U(t, P(t)) = \sum_{\psi=0}^{l} z_\psi(t) f_\psi(t, P(t), U(t, P(t))) + z_0 f_0(t, P(t), U(t, P(t)))$$

Enfin, précisons que l'application $Z(\cdot)$ est appelée vecteur adjoint ou encore *multiplicateur de Pontryaguine*.

SECTION II

Elaboration et correction d'un programme de planification

Après avoir brièvement présenté l'état actuel de la théorie du contrôle optimal, nous allons l'adapter à l'élaboration d'un programme de planification.

IX. II. 1 Elaboration d'un programme de planification

Pour ce faire, considérons que le planificateur désigne le vecteur prix $\overline{P}$ comme celui à atteindre, avec évidemment l'égalité $\overline{P} = P_e$. La mise en œuvre d'un programme de planification suppose alors d'être capable de guider la trajectoire des prix jusqu'à parvenir à l'équilibre. En d'autres mots, on va examiner la stabilité des systèmes de contrôle.

Continuité et continuité par morceaux

Comme nous avons eu l'occasion de le souligner, le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles se fonde sur la continuité de la fonction f. Or, une importante difficulté à laquelle on est confronté concerne justement ce point. En règle générale, f est simplement continue par morceaux. Au préalable, il est donc nécessaire d'affaiblir les hypothèses du théorème de Cauchy- Lipschitz à un aspect local.

Adaptation du théorème local de Cauchy-Lipschitz

Si f est *localement lipschitzienne en* P *sur un ouvert* E *de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{l}_{++}\times\mathbb{R}^{l}$ *et si* P_0 *est un point intérieur à* E *alors l'équation* (9.3) *admet une solution unique* $P_u(t)$, *vérifiant la condition initiale* P(0) = P_0 *et définie sur un intervalle de la forme* $I_{t_0} = \left[t_0 - k; t_0 + h\right] (k > 0, h > 0)$.

En ce qui nous concerne, il est important de remarquer que pour que la fonction f soit lipschitzienne, ces dérivées partielles doivent seulement être continues. Ce point étant résolu, nous pouvons entrer véritablement dans le thème de la stabilité.

La quasi-stabilité : application au système de contrôle

Plutôt que d'analyser directement la stabilité du système de contrôle, on va passer par une étape intermédiaire que l'on a déjà vue : celle de la quasi stabilité.

A l'évidence, toute trajectoire issue P_0 est susceptible d'être bornée[1] grâce au contrôle U. D'autre part, la cible à atteindre c'est-à-dire $\overline{P}$ est bien sûr une valeur d'adhérence comme l'illustre la figure ci-contre :

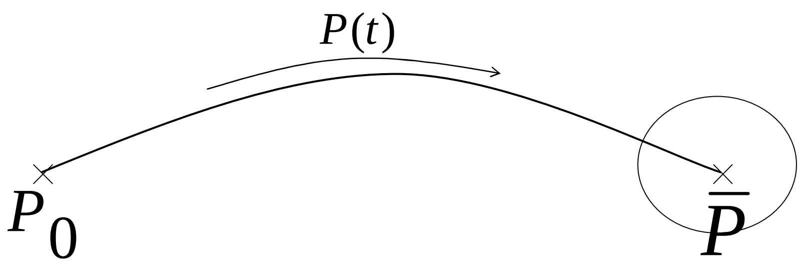


Figure 9.3

Par conséquent, le système de contrôle pour peu qu'il soit contrôlable est toujours « quasi-stable ». Le passage de la quasi-stabilité à la stabilité globale ce faisant à l'aide du théorème 4, mentionné dans le premier chapitre.

Remarque

En réalité, la stabilité de notre programme de planification est assez évidente. L'enjeu portant nettement plus sur sa capacité à faire face aux « évènements imprévus ».

[1] Il convient néanmoins d'exclure le cas ou certains prix tendent vers 0, faisant tendrent les prix relatifs vers l'infini.

IX. II. 2 Modélisation d’un choc exogène et de sa correction

A l’instar des macroéconomistes, on peut aisément imaginer qu’un évènement imprévu vienne perturber la mise en œuvre d’un programme de planification. Pour formuler cela autrement, on considère maintenant la possibilité de chocs exogènes dus, par exemple, à la conjoncture internationale. La représentation suivante illustre le cas d’un « choc initial » modifiant la trajectoire des prix originellement prévue par l’autorité centrale.

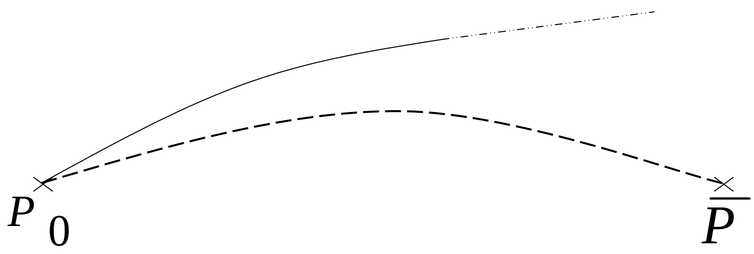


Figure 9.4- Choc exogène venant modifier la trajectoire initialement prévue

La théorie du contrôle optimal propose, sous certaines conditions, un moyen efficace de remédier à ce genre de situation.

Formalisation

Mathématiquement, un choc exogène est appréhendé comme une « perturbation » affectant l’équation (9.3). On note cela :

$$(9.5) \qquad P'(t) = f(t, P(t), U(t, P(t))) + \alpha(t, P(t), U(t, P(t)))$$

Où $\alpha(t, P(t), U(t, P(t)))$ est le terme perturbateur. Il est important de remarquer que ce dernier dépend de U. Il peut donc faire l’objet d’un contrôle.
L’idée pour contrôler la perturbation est d’associer à l’équation (9.3) une fonction de Lyapounov et de percevoir ses dérivées comme la représentation de α.

HYPOTHESES

Usuellement l'économiste n'a que peu d'informations sur α. Seules quelques propriétés qualitatives peuvent être connues. On supposera que α est, comme f, continue, uniformément bornée par rapport à t et localement uniformément bornée par rapport à P.
De plus, on considère qu'il existe un contrôle U = U (t, P (t)) tel que l'équation (9.3) est asymptotiquement stable en $\overline{P} = P_e$ pour ce contrôle.

PROPOSITION

Sous les hypothèses mentionnées ci-dessus, on peut toujours associer à chacun des membres de l'équation (9.5) *une fonction de Lyapounov, de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{l}_{++}$ dans $\mathbb{R}_{+}$, *de sorte que le système défini par l'équation* (9.5) *soit stable.*

IX. II. 3 <u>Démonstration</u>

Le raisonnement que l'on exhibe se fonde sur trois étapes intermédiaires.

LEMMES

« L_1 » : si $\overline{P}$ est équilibre de (9.3), alors il existe un contrôle U = U (t, P (t)) de sorte que :

$$U(t,P(t)) \leq \beta\left\|P(t)-\overline{P}\right\| \quad \beta > 0$$

β représentant l'ampleur de la perturbation.

« L_2 » : si $\overline{P}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (9.3), on est en mesure - d'après le second théorème de Lyapounov – d'associer à l'équation (9.3) une fonction V de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{l}_{++} \to \mathbb{R}_{+}$ de classe C^1 et qui, le cas échéant, a pour propriétés[1] :

[1] La fonction V de Lyapounov associée à l'équation (9.3), est bien sur : continue, constante dans le temps si et seulement si $\overline{P}$ est un équilibre, tel que V (f (t, P (t), U (t, P))) converge lorsque t tend vers l'infini, et cela pour tout $P(0)\in E$ (pour tous les détails se référer à la section III du premier chapitre).

$$\lambda_1 \left\| P(t) - \overline{P} \right\|^2 \le V(t, P(t)) \le \lambda_2 \left\| P(t) - \overline{P} \right\|^2 ,$$
$$V_t'(t, P(t)) + \nabla^T V(t, P(t)) f(t, P(t), U(t, P(t))) \le -\lambda_3 V(t, P(t))$$
$$\left\| J\, V_P(t, P(t)) \right\|_{\left[P_0 ; \overline{P}\right]} \le \lambda_4 \left\| P(t) - \overline{P} \right\|$$

Quelque soit $(t, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l_{++}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$.

« L_3 » : Dans la mesure où par hypothèse la perturbation est bornée, on considère qu'il existe une fonction ρ positive, globalement et uniformément lipscthizienne satisfaisant :

$$\left\| \alpha(t, P(t), U(t, P(t)) \right\|_{\left[P ; \overline{P}\right]} \le \left\| \rho(t, P(t)) \right\|_{\left[P ; \overline{P}\right]} + \gamma \left\| U(t, P(t)) \right\|_{\left[P ; \overline{P}\right]}$$

PREUVE

Considérons la fonction de Lyapounov V (t, P(t)). Sa dérivée le long des trajectoires de (9.5) avec le contrôle U = U (t, P(t)) est donnée par :

$$\dot{V}(t, P(t)) = V_t'(t, P(t)) + J\, V_P(t, P(t)) \cdot P'(t)$$
$$\dot{V}(t, P(t)) = V_t'(t, P(t)) + J\, V_P(t, P(t)) \big(f(t, P(t), U(t, P(t))) + \alpha(t, P(t), U(t, P(t)) \big)$$

En se servant des énoncés du lemme 2, on obtient successivement :

$$\dot{V}(t, P(t)) \le -\lambda_3 V(t, P(t)) + \left\| J\, V_P(t, P(t)) \right\|_{\left[P_0 ; \overline{P}\right]} \left\| \alpha(t, P(t), U(t, P(t))) \right\|_{\left[P_0 ; \overline{P}\right]}$$
$$\dot{V}(t, P(t)) \le -\lambda_3 \lambda_1 \left\| P_0 - \overline{P} \right\|^2 + \lambda_4 \left\| P_0 - \overline{P} \right\| \left\| \alpha(t, P(t), U(t, P(t)) \right\|_{\left[P_0 ; \overline{P}\right]}$$

Grâce au lemme 3, on aboutit à l'équation :

$$\dot{V}(t, P(t)) \le -\lambda_3 \lambda_1 \left\| P_0 - \overline{P} \right\|^2 + \lambda_4 \left\| P_0 - \overline{P} \right\| \left(\rho(t, P(t)) + \gamma \left\| U(t, P(t)) \right\|_{\left[P_0 - \overline{P}\right]} \right)$$

Après avoir employé de nouveau le lemme 2 :

$$\dot{V}(t, P(t)) \le -\lambda_3 \lambda_1 \left\| P_0 - \overline{P} \right\|^2 + \lambda_4 \left\| P_0 - \overline{P} \right\| \left(\rho(t, P(t)) + \gamma\beta \left\| P_0 - \overline{P} \right\| \right)$$

Puis en se servant du fait que ρ est de lipschtiz, c'est-à-dire que $\left\| \rho(t, P_0) - \rho(t, \overline{P}) \right\| \le k \left\| P_0 - \overline{P} \right\|$, on a :

$$\dot{V}(t, P(t)) \le -\lambda_3 \lambda_1 \left\| P_0 - \overline{P} \right\|^2 + \lambda_4 \left\| P_0 - \overline{P} \right\| \left(k \left\| P_0 - \overline{P} \right\| + \gamma\beta \left\| P_0 - \overline{P} \right\| \right)$$

Il vient en factorisant :

$$\dot{V}(t,P(t)) \leq \left(-\lambda_3\lambda_1 + \lambda_4(k+\gamma\beta)\right)\left\|P_0 - \overline{P}\right\|^2$$

Si on pose :

$$k + \gamma\beta < \frac{\lambda_3\lambda_1}{\lambda_4}$$

Il s'ensuit que :

$$\beta < \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_4} - k\right) \text{ avec } k < \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_4}$$

Ou encore :

$$\dot{V}(t,P(t)) \leq -l\left\|P(t) - \overline{P}\right\|^2 \text{avec } l > 0$$

Dans la mesure où cette dernière ligne indique que les dérivées partielles de la fonction V sont décroissantes le long des trajectoires - et qu'en raison du lemme 2- cette même fonction est minorée, alors elle satisfait la condition c) caractérisant les fonctions de Lyapounov (voir chapitre I).

De surcroît, V étant bornée on est sûr que la trajectoire partant de P_0 est bornée donc prolongeable sur E. Il résulte, du théorème d'extension des fonctions de Lyapounov au processus, que le système (9.5) est stable sur E.

Remarque sur le choc exogène

On a considéré ici que le choc exogène, venant perturber le déroulement du programme de planification, est intervenu dès le départ. Cependant, on peut tout à fait concevoir que ce choc se produise un peu plus tard, cela n'affectant pas le résultat de la démonstration.

SECTION III

Insensibilisation d'un programme de planification

On a pu se rendre compte de l'utilité que revêt la théorie du contrôle optimal pour faire face à un choc exogène. Toutefois, son action est susceptible d'être étendue. Au lieu de corriger les effets d'un choc aléatoire, elle peut le prévenir en « insensibilisant » une trajectoire.

Pour comprendre ce phénomène, il nous faut saisir l'origine et la signification économique du multiplicateur de Pontryaguin.

IX. III. 1 Théorème de Khun et Tucker et principe du maximum

En fait, la condition d'optimalité des problèmes de contrôle est une adaptation de celle de Khun et Tucker. On rappelle d'abord son énoncé.

THEOREME

Soit f (X) et g_j (X), j = 1,…, m, des fonctions dérivables, à dérivées partielles continues, au voisinage d'un point A, avec $g_j (A) \geq 0$ et tel que les contraintes $g_j (X) \geq 0$ soient régulières en A.

Alors si A est un extremum local de f sous ces m contraintes, il existe m nombres μ_j, nommés variables duales tels que :

$$f'_{x_i}(A) + \sum_j \mu_j (g_j)'_{x_i}(A) = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$
$$\mu_j g_j(A) = 0$$
$$\mu_j \geq 0 \; si\; A\; est\; un\; \max imum, \; \mu_j \leq 0 \; si\; A\; est\; un\; \min imum$$

Ces conditions étant dites de Khun et Tucker.

Principe du maximum et condition de Khun et Tucker

Nous avons déjà eu l'occasion d'évoquer les problèmes de continuité qui interviennent en théorie du contrôle optimal. Bien souvent, f n'est que continue par morceaux. Cela étant dû aux contraintes pouvant peser sur le vecteur de contrôle et/ou d'état. On est donc amené à réaliser une étude en « coupes » du processus. Pour notre part, considérons ces différents types de contraintes, sous le terme générique :

$$g_j(t, P(t), U(t, P(t))) \geq 0 \; \forall t \in [0;T] \quad j = 1, \ldots, m$$

Par conséquent, on est conduit à résoudre:

$$\min \int_{t_0}^{T} f_0(t, P(t), U(t, P(t)))dt$$
$$P'(t) = f(t, P(t), U(t, P(t)))$$
$$g_j(t, P(t), U(t, P(t))) \geq 0 \quad j = 1, \ldots, m$$
$$P(t_0) = P_0 \text{ et } P(T) = \overline{P}$$

Si le couple (P (t), U (t, P(t))) est une solution de ce problème, alors :

a) s'il existe des multiplicateurs Z(t) = (z_1(t),…,z_l(t)) de Pontryaguin non tous nuls et variant continûment dans le temps tels qu'en tout instant t le vecteur commande U(t, P) soit une solution du programme optimal :

$$\max/\, U\; H(t, P_U(t), U(t, P(t)), Z(t)) \equiv Z(t) f(t, P_U(t), U(t, P(t))) + z_0(t) f_0(t, P_U(t), U(t, P(t)))$$
$$g_j(t, P_U(t), U(t, P(t))) \geq 0 \quad j = 1, \ldots, m$$

Si ces conditions sont vérifiées alors cette optimalité est caractérisée par les conditions de Khun et Tucker suivantes :

$$\exists \mu_j(t) \geq 0 \text{ tq } \mu_j(t) g_j(t, P_U(t), U(t, P(t))) = 0$$
$$J\, H_U(t, P_U(t), U(t, P(t)), Z(t)) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j(t)(Jg_j)_U(t, P_U(t), U(t, P(t)))$$

Cette dernière ligne pouvant également s'écrire :

$$\left(Z(t)\, J\, f_U(t, P_U(t), U(t, P(t))) + z_0(t)(Jf_0)_U(t, P_U(t), U(t, P(t))) \right) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j(t)(Jg_j)_U(t, P_U(t), U(t, P(t)))$$

b) le multiplicateur z_0 (t) est constant dans le temps et les multiplicateurs Z (t) = (z_1 (t),…, z_l (t)) sont des solutions des équations différentielles :

$$P'(t) = -J\, H_P(t, P_U(t), U(t, P(t))) - \sum_{j=1}^{l} \mu_j(t)(Jg_j)_P(t, P_U(t), U(t, P(t)))$$

c) en l'instant terminal T, on a : z_1 (T) =….= z_l (T) = 0

IX. III. 2 Interprétation économique et conclusion

A l'évidence, les multiplicateurs de Pontryaguine présentent une analogie avec les nombres μ_j qui apparaissent dans l'énoncé du théorème de Khun et Tucker. Alors que ces derniers traduisent « l'intensité de la contrainte » subie au point extremum, les multiplicateurs de Pontryaguine peuvent être appréhendés comme des éléments informatifs concernant les états à venir. De ce point de vue, ils constituent une « sorte de résumé du futur » (Lacaze (1990), p. 202).

Interprétation

Supposons, pour les besoins de la discussion économique, que le vecteur prix en vigueur P(t), associé au contrôle U, n'égalise pas l'offre et la demande. Les plans des agents ne sont donc pas compatibles. Dans ce cas, certains d'entre eux auront intérêt à modifier leurs positions en augmentant ou diminuant la quantité de marchandises qu'ils souhaitent acheter ou vendre.

Le planificateur qui désire atteindre le vecteur prix d'équilibre, ne connaît pas avec précision le temps qu'il lui faudra pour y parvenir. Combien même sait- il que celui-ci est fini et qu'il est en mesure de déterminer une trajectoire optimale. Néanmoins, tant que l'équilibre n'est pas atteint, il peut observer que $z_1(t) = ... = z_l(t) \neq 0$. Autrement dit, les multiplicateurs renseignent sur l'existence future d'effets reports inhérents aux situations de déséquilibres. Il appartient alors au planificateur d'en restreindre la portée en modifiant le contrôle U par itérations successives.

L'analyse de Hayek

L'économie est- elle planifiable ? Il semble que non, si en croît Hayek (1939). Ce dernier doute, en premier lieu, de la capacité du planificateur à être en possession de toute l'information existante :

« Mais ce qui importe pratiquement ici, ce n'est pas la structure technique du système, mais d'une part la nature et la quantité des informations nécessaires si l'on veut tenter de trouver une solution numérique […] » (p. 210).

Combien même il y parviendrait, le planificateur ne disposerait pas d'information sur le futur permettant d'établir des prévisions fiables :

« A cela Hayek (1940) ajoute que, même si le planificateur accède à toutes les informations existantes à un moment donné, il ne peut pas disposer des informations sur l'évolution future. Le plan sera donc toujours en retard sur la réalité économique. » (Andreff (1993), p. 41).

A ces objections s'en ajoute une autre tenant cette fois à l'incommensurabilité des calculs à effectuer. La planification nécessiterait selon lui :

« […] l'écriture de millions d'équations sur la base de millions de données statistiques fondées sur un nombres encore plus grand de millions de calculs individuelles. »

En d'autres termes la mise en œuvre d'un programme de planification induirait trop de retards et trop de complexité pour que cela soit réellement possible.

Des objections obsolètes

Nous avons largement vu au cours de ce chapitre combien l'usage des techniques mathématiques récentes, et en particulier le contrôle optimal, rendent obsolètes les affirmations précédentes. Les multiplicateurs de Pontryaguin fournissent simultanément l'information nécessaire et une indication sur le futur. De plus, le rôle du planificateur n'est absolument pas titanesque puisqu'il se contente de guider la trajectoire des prix en exerçant un contrôle approprié. Dans la pratique, il s'agit simplement d'encadrer les prix.

CHAPITRE X

La planification de l'entreprise

Pour terminer cette thèse, on aborde dans un dernier chapitre le thème de la planification intra- firme. Ceci va nous donner l'opportunité d'appliquer à nouveau la procédure de contrôle optimale ainsi que d'en mesurer toute son importance. Toutefois, on va l'associer à un autre concept : la « séparabilité ».

SECTION I

La séparabilité

Il est intéressant de constater que ce concept est issu de la recherche opérationnelle et que ces premières utilisations ont porté sur le choix des équipements de production à E.D.F. (voir l'appendice de Bessière (1967)). Cela s'explique par le caractère particulièrement adapté de la séparabilité à l'organisation des firmes.

X. I. 1 Présentation

La séparabilité se fonde sur un constat évident : l'existence plausible d'un décalage entre l'intérêt particulier et général. Ce décalage peut, par exemple, être observé entre l'intérêt global de l'entreprise et celui des différents services qui la composent. Sa cause peut être liée à une information insuffisante, en particulier lorsqu'il s'agit de « prix duaux » :

« Malheureusement, en général, la réponse est négative : *la connaissance des prix duaux n'est pas suffisante pour assurer la cohérence entre optimum local et global.* » (Bessière (1967), p. 783).

L'objectif

L'idée de la séparabilité est de remédier à cette situation en modifiant la structure organisationnelle. L'objectif étant que cette modification rende suffisante l'information transmise par les prix duaux. On aboutit alors logiquement à la définition suivante.

DEFINITION

On dit qu'un problème d'optimisation périphérique est *séparable* du problème global d'optimisation si la connaissance des prix duaux suffit à assurer que l'optimum local soit compatible avec l'optimum global.

Structuration efficace

Parmi toutes les façons de modifier l'organisation d'une entreprise, l'une d'entre elle retient plus précisément l'attention. Il s'agit de la *structuration efficace*.

Une structuration efficace permet de partitionner un problème global (d'optimisation) en sous problèmes non interdépendants. Bien entendu, l'enjeu est d'arriver à trouver des conditions suffisantes, les moins restrictives possibles, qui assurent cette partition.

Intérêt

L'intérêt du concept de séparabilité est assez net puisqu'il permet de simplifier et rendre compatible des problèmes d'optimisation par l'intermédiaire d'une partition appropriée. En fait derrière la séparabilité, on retrouve la question de la coordination. Le lien avec la notion d'équilibre est donc relativement intuitif.

Mais avant de l'explorer, on va au préalable mentionner les résultats actuels en matière de séparabilité.

X. I. 2 Résultats de séparabilité

Les résultats en la matière sont plutôt limités. A la fin des années soixante, l'espoir d'en voir émerger étaient pourtant de mise :

« Il reste à dire que, pour le moment, la théorie de la séparabilité n'a été sérieusement étudiée que dans le cas de programmes linéaires possédant une sous- matrice nulle, et dans celui de programmes convexes ayant une structure particulièrement simple. Mais il est a *priori* certain que de larges généralisations sont possibles, et des travaux sont déjà en cours dans cette voie. » (Bessière (1967), p. 786).

Malheureusement, depuis lors, les travaux sur des thèmes corrélés à la planification ont disparu et les généralisations espérées furent peu nombreuses.

Pour saisir la logique à l'œuvre à travers le concept de séparabilité, raisonnons d'abord sur un exemple simple.

Exemple

Considérons le processus de production d'une entreprise représenté sous sa forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} & \cdot & \\ A & \cdot & B \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C & \cdot & D \\ & \cdot & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ \cdot \\ Q' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} X \\ \cdot \\ Y \end{bmatrix}$$

La firme produit deux types de paniers de biens X et Y. Pour ce faire, elle utilise deux paniers d'inputs Q et Q'. La première matrice (décomposable par blocs) représentant les cœfficients techniques de production.
De plus, on fait l'hypothèse que les contraintes liées à la technologie se divisent en deux sous ensembles, que l'on note :

$$\begin{bmatrix} & \cdot & \\ & \cdot & \\ E & \cdot & F \\ & \cdot & \\ & \cdot & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ \cdot \\ Q' \end{bmatrix}$$

Autrement dit, on se trouve confronté au programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} Q, Q' \geq 0 & (a) \\ AQ + BQ' \geq X & (b) \\ CQ + DQ' \geq Y & (c) \end{array}$$

Sous la contrainte : Min EQ + FQ'

Supposons maintenant que P et P' soient les variables duales associées à ce programme. Les valeurs $\bar{Q}, \bar{Q}', \bar{P}, \bar{P}'$ étant considérées être les solutions optimales. La forme « réduite » (séparable) de ce programme est alors donnée par :

$$\begin{aligned} & CQ \geq B - T\bar{Q}' \\ & \operatorname{Min}(E - \bar{P}A)\, Q \end{aligned}$$

Il découle du théorème de la dualité que la solution du programme principal est de la forme :

$$E\bar{Q} + F\bar{Q}' = \bar{P}X + \bar{P}'Y$$

Ou encore :

$$\left.\begin{aligned} & \bar{P}\,(A\bar{Q} + B\bar{Q}' - X) = 0 \\ & \bar{Q}'(\bar{P}B + \bar{P}'D - F) \;\; = 0 \end{aligned}\right\}$$

Ce qui implique successivement :

$$\begin{aligned} & \bar{P}B\bar{Q}' = \bar{P}X - \bar{P}A\bar{Q} \\ & \bar{P}B\bar{Q}' = F\bar{Q}' - \bar{P}'D\bar{Q}' \end{aligned}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\bar{P}X - \bar{P}A\bar{Q} = F\bar{Q}' - \bar{P}'D\bar{Q}'$$

En mettant la première égalité, sous une forme légèrement différente :

$$E\bar{Q} - \bar{P}X = \bar{P}'Y - F\bar{Q}'$$

Puis en additionnant avec la dernière égalité, on obtient finalement :

$$\boxed{(E - \bar{P}A)\, \bar{Q} = \bar{P}'\,(Y - D\bar{Q}')}$$

Ce qui prouve que les vecteurs $\bar{Q}$ et $\bar{P}'$ sont les solutions optimales du programme restreint.

Enseignement

Cette illustration permet de voir, dans l'hypothèse où la séparabilité est assurée, que la solution optimale du programme d'optimisation principal génère la solution optimale du programme d'optimisation restreint.

HYPOTHESES

Pour s'assurer de la séparabilité quelques hypothèses doivent être formulées. On doit supposer que :

- D est une matrice nulle
- le problème principal n'est pas indéterminé
- le problème principal et restreint n'a pas une solution dégénérée. Ce qui revient à considérer que la solution est unique.

X. I. 3 Généralisation

A présent, énonçons le principal résultat disponible en matière de séparabilité.

RESULTAT

Un programme d'optimisation « réduit » est séparable si toutes ses solutions optimales sont engendrées par au moins une solution optimale du programme d'optimisation principal.

Naturellement, l'enjeu est de déterminer la condition qui permet d'obtenir ce résultat.

CONDITION

Un programme réduit est séparable si et seulement si le nombre de composantes, strictement positif, de la solution optimale $\overline{Q}$ est égal aux nombres de contraintes (c) saturées à l'optimum.

Cette condition peut s'exprimer également sous la forme du corollaire suivant :

CORROLAIRE

Un programme réduit est séparable si et seulement si le nombre de composantes, strictement positif, de la solution optimale $\overline{Q}'$ est égal aux nombres de contraintes (b) saturées à l'optimum.

SECTION II

L'exemple d'Electricité De France

X. II. 1 L'intérêt pratique de la séparabilité dans le choix des investissements

En France, comme dans la plupart des pays industrialisés, la consommation d'électricité double tous les dix ans. D'où la nécessité de développer en permanence de nouveaux équipements.
Cet accroissement constant de la consommation d'électricité pose donc le problème du choix d'investissements à effectuer. Plusieurs options sont susceptibles d'être retenues. En particulier le développement de l'énergie : thermique, hydraulique, à gaz ou nucléaire.

En pratique la solution retenue est quasiment toujours une combinaison des différentes possibilités. L'interrogation porte alors sur la proportion dans laquelle chaque source d'énergie doit être utilisée de façon à satisfaire la demande et minimiser les coûts.

La « note bleue »

Au lendemain de la seconde guère mondiale, le dilemme concernait surtout un choix de combinaison entre l'énergie thermique et hydraulique. Pour permettre une combinaison adéquate, une première méthode – nommée « note bleue » - a été mise au point en 1950. Son principe repose sur une adaptation de l'analyse comparative coûts/avantages. Des projets équivalents sont comparés deux à deux. Celui respectant, au mieux, la contrainte de demande et minimisant les coûts est choisi.

Bien que cette méthode paraisse relativement rudimentaire de nos jours, elle a ouvert la porte à des développements considérables. Plus que la méthode en elle-même, ce sont les difficultés qu'elle a induites qui sont à l'origine de la séparabilité.

Limite principale de la méthode « bleue »

L'inconvénient principal de cette méthode est lié à la décentralisation des choix d'investissements.

En fonction de la localisation, et donc des ressources naturelles disponibles (fleuve, ensoleillement…), un même projet prend des coûts et des valeurs différents. Il se pose un problème de cohérence global.

Les trois plans directeurs

Pour pallier ce problème de cohérence, un premier plan directeur fût élaboré en 1957. Il incorpore 90 variables et 70 contraintes. Sa résolution se fonde sur un algorithme de décomposition obtenu grâce à une collaboration entre les ingénieurs d'EDF et la Rand Corporation[1].

Par la suite ce plan fut amélioré par un second plan en 1958 puis un troisième en 1961, incorporant respectivement 200 et 253 variables auxquelles ont été associées 180 et 224 contraintes.

L'objectif de ces plans successifs était double. D'une part, fournir une problématique agrégée des choix d'investissements nationaux. D'autre part, dégager des perspectives à long terme des politiques d'investissements.

Toutefois, bien que fournissant une approche globale irremplaçable, ces trois plans directeurs continuent de laisser un important degré de liberté aux responsables régionaux de l'équipement. Spécialement en ce qui concerne la localisation exacte et la dimension des projets à adopter. Il était donc indispensable de coordonner les choix globaux des plans directeurs et les décisions des responsables régionaux. Cette coordination a été permise, à EDF, par le concept de séparabilité. Son utilisation est à l'origine du programme « Investissement 85 ».

« Investissement 85 »

Comme son nom l'indique, l'objet d' « Investissent 85 » est de fournir une approche permettant de mettre en œuvre une stratégie cohérente d'investissement sur la période 1965-1985. Ce programme se présente comme une synthèse entre une approche agrégée (les plans directeurs) et sectorielle.

---

[1] La *RAND Corporation*, fondée en 1945, est une institution américaine à but non lucratif qui a pour objectif d'améliorer la politique et le processus décisionnel par la recherche et l'analyse. Dantzig y travailla de 1952 à 1960.

Afin d'assurer la séparabilité, le plan « Investissement 85 » fait l'objet d'une série de partition.

Les partitions

Les vingt années du programme sont subdivisées en périodes de cinq ans. Cette subdivision a l'avantage de caler les choix d'investissements sur les plans indicatifs du Commissariat Général du Plan. Ce qui permet d'avoir une anticipation plus fine des fluctuations de la demande d'électricité.

Malgré cela, les variations de la demande peuvent rester importantes. Comme le souligne Bessière (1970): « Production and consumption being uncertainty, to meet the demand in all circumstances would theoretically require unlimited quantities of equipment. » (p. 198).Une division en deux périodes est alors effectuée. D'une part, celle de « crête maximale » caractérisée par une situation où l'offre peut être insuffisante[1]. D'autre part, une période normale où l'approvisionnement des agents en électricité est parfaitement assuré.

Les sources d'énergie sont scindées en sept catégories relevant du thermique et de l'hydraulique :

- les équipements thermiques conventionnels (basé sur une alimentation en fuel)
- les turbines à gaz
- les stations nucléaires
- les productions modulables (ayant la propriété de pouvoir s'adapter aux variations de la demande. Ces productions sont notamment permises grâce à l'existence de barrages)
- les productions non modulables
- les capacités de réservoirs saisonniers
- les équipements hydroélectriques (fondés sur l'ajout d'un turboalternateur comme source d'approvisionnement additionnelle à la production hydraulique)

La subdivision opérée ici est à la fois une partition entre techniques de productions (les trois premiers éléments) et méthode de fonctionnement.

Enfin, d'un point de vue géographique, la France est divisée en six régions (Nord et

[1] La demande d'électricité variant avec la saison mais également en fonction des heures de la journée, la période critique où l'offre est susceptible d'être insuffisante est globalement estimée, dans le programme Investissement 85, à 1600 heures par an.

Paris, Nord- Est, Sud- Est, Massif-Central, Sud- Ouest et Ouest).

Le programme

Munis de ces partitions, le programme mathématique peut-être écrit. Evidemment chaque méthode de production rencontre des contraintes spécifiques. Par exemple, aucune station thermique ne peut être construite dans le Massif-Central. De la même manière aucune installation thermique ne peut-être édifiée en dehors de la zone nord et aucune station nucléaire ne peut être développée dans le Sud- Ouest avant 1975. A cette catégorie de contraintes s'ajoute celles portant sur la transmission d'énergie et les coûts.

Au final, le modèle inclut 150 variables et 60 contraintes. Ces nombres relativement peu élevés, comparativement aux trois plans précédents, s'expliquent par son caractère non linéaire qui le rend largement plus complexe à résoudre[1]. Il s'agit là certainement de l'inconvénient majeur du projet « Investissement 85 ». En effet, selon des estimations de 1969, la prise en compte de la totalité des opérations s'exerçant sur le choix des investissements devait conduire à la construction d'un modèle composé de 2000 variables et 1200 contraintes.

La solution

La solution du modèle est obtenue en avril 1965 grâce au concours d'un ordinateur IBM de type 7094.

L'hypothèse retenue d'un taux de croissance moyen de 8 % par an amène, notamment, aux résultats suivants pour le programme principal :

- les équipements thermiques conventionnels doivent être développés à un rythme de 2250 Mégawatt par an, aussi longtemps que l'énergie nucléaire n'a pas été développée.
- l'énergie nucléaire doit commencer son expansion à partir de 1980. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la décision de mettre en œuvre en France un programme nucléaire est antérieure au premier choc pétrolier.
- Les équipements hydroélectriques doivent être développés lentement, passant d'une production de 60 Terawatter à 68 Terrawatter par an, afin d'atteindre un maximum de production en 1980.

[1] Cela en dépit des efforts des ingénieurs d'EDF pour élaborer des techniques de résolutions des systèmes non linéaires (voir Bessière et Sautter (1968)).

Ces orientations globales, que l'on n'a évidemment pas toutes mentionnées, permettent surtout aux responsables régionaux d'élaborer des stratégies d'investissements locales qui sont compatibles avec la solution globale. De ce point de vue, le plan « Investissement 85 » est un succès :

> « In these circumstances, the fact that the regional distribution shown in the solution is as coherent as it is may be considered a success » (Bessière (1970), p. 209).

Pourtant, en dépit de cette réussite, les ingénieurs d'Electricité de France n'utilisent plus présentement de méthodes basées sur la séparabilité.

X. II. 2 Nouvelles méthodes du choix d'investissements et prospective

Plusieurs motifs sont en général invoqués pour expliquer l'abandon du choix d'investissements basé sur la séparabilité. L'explication considérée comme la plus pertinente, d'après les centres de géopolitique de l'énergie, est celle de la vague de réformes libérale.

Les réformes

La fin de la planification indicative conjuguée, plus récemment, à l'ouverture du « marché » de l'énergie à la concurrence a largement accru l'incertitude. A travers notamment une dispersion plus importante de la demande et une évolution moins prévisible de la consommation.

Du coté de l'offre, la contrainte fondamentale n'est plus la satisfaction de la demande mais la maximisation du profit. Avec la perspective microéconomique usuelle que la maximisation simultanée – par les firmes – du profit, engendre une quantité d'électricité offerte compatible avec celle demandée.

Naturellement, un tel système ne repose plus sur des méthodes mathématiques de séparabilité mais sur la stabilité du régime concurrentiel. En particulier, cette vision se fonde sur la capacité des prix à converger et à s'avérer une information fiable.

Les prix comme indicateur du choix d'investissement

Conformément à la doctrine néo- classique, les investissements se décident désormais sur la seule indication des variations de prix. Des tensions inflationnistes sont censées traduire une insuffisance de l'offre d'électricité et des capacités de production. La possibilité de capter un profit supplémentaire devant conduire, comme le suggère Kirsch et Rajaraman (2001), à la réalisation de nouveaux investissements.

La logique à l'œuvre

Derrière ce mécanisme se trouve l'idée que « la loi de l'offre et de la demande » permet une meilleure allocation des ressources énergétiques. Ainsi, selon Maloney (2001), l'ouverture à la concurrence a pour but d'améliorer le fonctionnement d'un système préalablement sur-capacitaire.

Pour notre part, on ne peut que contester ce point de vue. Bien que la méthode de séparabilité ait eu pour principale contrainte de satisfaire la demande, des situations d'insuffisance de l'offre – lors de pics de consommation – existaient. Citons, à ce sujet, Bessière (1970) qui qualifiait ces situations « d'échecs » :

« a nonnegligible risk of failures must be accepted, and a choice must be made between the certain cost of supplementary equipment and the possible disadvantages of failures. » (p. 198)

Au delà de cette controverse sur la capacité de production, c'est la question de la formation des anticipations qui est en cause.

La formation des anticipations

L'investissement en capacités de production d'électricité est – étant donné l'ampleur des projets – une opération particulièrement longue. En d'autres termes, on ne pas se contenter d'observer une hausse des prix du kilowattheure avant de se décider à investir. Il faut anticiper l'augmentation des prix

On se trouve, une fois de plus, confronté au problème de la formation des anticipations. Lesquelles, répétons le, dépendent en dernier ressort des croyances. Or, nous avons déjà attiré l'attention, par l'intermédiaire notamment de l'étude des économies séquentielles, sur le peu de résultats auxquels sont parvenues les approches axées les phénomènes d'anticipations dans un contexte d'équilibre général.

Une aversion au risque

Conscientes des erreurs possibles d'anticipations et de leurs effets désastreux, étant donné la taille des investissements, les fournisseurs d'énergie vont vraisemblablement développer une aversion au risque. Les premières observations commandées par l'Institut Français de l'Energie, sur les projets d'investissements lourds tels les centrales nucléaires, confirment cette thèse :

« On comprend dès lors que les entreprises soumises à concurrence n'envisagent pas de s'engager dans des investissements en base de type centrale nucléaire. En effet, les délais de construction sont d'environ dix ans, ce ne sont donc pas des signaux de prix envoyés par le marché (signaux de court terme) qui peuvent susciter la construction de nouveau réacteurs, tout simplement parce qu'il est impossible de prévoir avec fiabilité quel sera l'équilibre offre-demande au moment de sa mise en marche. » (Esnault (2002), p. 17)

Conclusion

Un risque de sous- investissement, et à terme de pénurie d'électricité, apparaît bien réel. Si on ajoute à cela le caractère essentiellement instable de la « loi de l'offre et de la demande », qui permet de s'interroger sur la validité des prix comme signal d'investissement, on peut difficilement voir un progrès dans le renoncement au concept de séparabilité. C'est pourquoi nous pensons, qu'à condition de l'adapter, ce dernier peut être un outil de gestion des firmes plus efficace. La section suivante est donc une adaptation de la séparabilité à la théorie du contrôle optimal.

SECTION III

Application de la séparabilité au contrôle optimal

Dans cette section, après avoir formalisé et linéarisé le problème de contrôle optimal appliqué à l'entreprise, on décompose le domaine Ω de ce problème de contrôle optimal de telle manière que les conditions de séparabilité soient garanties.

L'aspect extrêmement lourd de la formalisation risquant de nous entraîner au-delà du raisonnable pour une thèse d'économie, on se contente d'énoncer un certain nombre de propriétés sans les démontrer. Pour des preuves concernant des décompositions non recouvrantes, on peut consulter le travail de Bounaim (1999) ainsi que celui de Lagnese et Leugering (1998).

X. III. 1 Formalisation

On suppose, tout d'abord, que l'évolution des quantités produites par la j- ième entreprise est régie par l'équation différentielle vectorielle :

$$Q' = f(t, Q)$$

Système de contrôle du processus de production

A l'évidence, l'entreprise pouvant intervenir sur son niveau de production, on est amené à considérer le système de contrôle (du processus de production) suivant :

$$(10.1) \quad Q' = f(t, Q, U)$$

L'évolution du profit

Si l'on estime que l'on se situe à l'instant initial t_0 et que l'on s'intéresse à l'état final T, alors le profit de l'entreprise entre t_0 et T est donné par :

$$\int_{t_0}^{T} \pi(t, Q, U)\, dt$$

Ou ce que l'on notera, dans un souci de commodité, plus simplement :

$$\int_{0}^{T} \pi(t, Q, U)\, dt$$

Le vecteur- prix ne figure pas comme argument du profit dans la mesure où l'on conserve pour cadre d'analyse le modèle de concurrence parfaite. Les prix sont de simples paramètres.

X. III. 2 Linéarisation

Les principaux résultats de séparabilité ne portent, à l'heure actuelle, que sur des formes linéaires. Il est donc impossible de décomposer un programme de contrôle optimal à partir de l'équation (10.1). Une solution est de procéder par linéarisation. Certes, les conclusions obtenues ne seront valables que localement mais cela n'est pas très embêtant dans la mesure où les démonstrations de contrôlabilité imposent aussi de se cantonner à un aspect local.

Linéarisation du système de contrôle

La linéarisation de (10.1) le long de la trajectoire Q (·) + δQ (·) associée au contrôle $U(\cdot)+\bar{U}(\cdot)$ s'effectue à l'aide du développement de Taylor ($\bar{U}$ étant un contrôle fixé).

Considérons le terme $\frac{d}{dt}(Q+\delta Q)(t)\left(= f(t, Q(t)+\delta t, U(t)+\bar{U}(t)\right)$. La partie principale de son développement de Taylor d'ordre 1 est donnée par :

$$\frac{d}{dt}(Q+\delta Q)(t) = f(t, Q(t), U(t)) + Jf_Q(t, Q(t), U(t))\ \delta Q(t) + Jf_U(t, Q(t), U(t))\ \bar{U}(t)$$

De plus, puisque Q'(t) = f (t, Q (t), U (t)), on peut également écrire :

$$\frac{d}{dt}(\delta Q)(t) = Jf_Q(t, Q(t), U(t))\ \delta Q(t) + Jf_U(t, Q(t), U(t))\ \bar{U}(t)$$

En posant $\delta Q = \delta_1 Q + \delta_2 Q + ...$ (où $\delta_1 Q$ est la partie linéaire en $\bar{U}$, $\delta_2 Q$ la partie quadratique…) et en identifiant, il vient :

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 Q)(t) = Jf_Q(t, Q(t), U(t))\ \delta_1 Q(t) + Jf_U(t, Q(t), U(t))\ \bar{U}(t) = A(t)\delta_1 Q(t) + B(t)\bar{U}(t)$$

Or comme Q (0) + δ Q (0) = Q_0 = Q (0), cela implique que δ Q (0) = 0 et donc que δ_1 Q (0) = 0. Par intégration, on obtient alors :

$$\delta_1 Q(t) = M(T)\int_0^T M^{-1}(s)B(s)\bar{U}(s)\ ds$$

M étant la résolvante du système homogène :

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 Q)(t) = Jf_Q(t, Q(t), U(t))\ \delta_1 Q(t)$$

Enfin, lorsque Q (·) + δQ (·) = Q_u (t) la linéarisation a lieu le long de la trajectoire d'équilibre.
On utilisera l'indice $\bar{u}$ lorsque la linéarisation est fixée le long de la trajectoire d'équilibre (celle qui maximise le profit) et v lorsque celle- ci a lieu le long d'une trajectoire quelconque.

Si l'on pose $y_v(t) = \delta_1 Q(t)$, on obtient finalement, le système de contrôle linéaire suivant :

$$(10.2) \quad \begin{cases} y'_v(t) = A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) = 0 \end{cases}$$

Linéarisation de la contrainte de profit

On remplace, dans la fonction de profit, Q par y_v (différentielle de Fréchet) qui permet de prendre en compte l'évolution de la production sur l'intervalle $[0;T]$.

La contrainte de profit qui est alors de la forme $\int_0^T \pi(t, y_v(t), U(t))\,dt$, peut elle aussi se linéariser au voisinage de la trajectoire $y_{\bar{u}}(t)$. Sa linéarisation est donnée par :

$$(10.3) \quad \int_0^T \left[\pi(t, y_{\bar{u}}, \bar{U}) + \sum_h (\pi)'_{(y_v)_h}(t, y_{\bar{u}}, \bar{U}) \left(\left\| (t, y_v, v)_h - (t, y_{\bar{u}}, \bar{U})_h \right\| \right) \right] dt$$

Ecriture du programme

On se trouve donc confronté au problème de programmation linéaire suivant :

$$(10.4) \left| \begin{array}{l} \max \left[\int_0^T \pi(t, y_{\bar{u}}, \bar{U})\,dt + \int_0^T \left[\sum_h (\pi)'_{(y_v)_h}(t, y_{\bar{u}}, \bar{U}) \left(\left\| (t, y_v, v)_h - (t, y_{\bar{u}}, \bar{U})_h \right\| \right) \right] dt \right] \\ \text{avec } y_{\bar{u}} \text{ la solution de :} \\ (10.2) \begin{cases} y'_{\bar{u}}(t) = A(t)y_{\bar{u}}(t) + B(t)\bar{U}(t) \\ y_{\bar{u}}(0) = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

X. III. 3 <u>Séparabilité du domaine</u>

Soit $\Omega = [0;T]$ le domaine, fermé et borné, de $\mathbb{R}^d$ (d ≥ 1). On va considérer une décomposition, sans recouvrement, de Ω en p sous domaines ne communiquant que par l'intermédiaire de leurs interfaces communes.

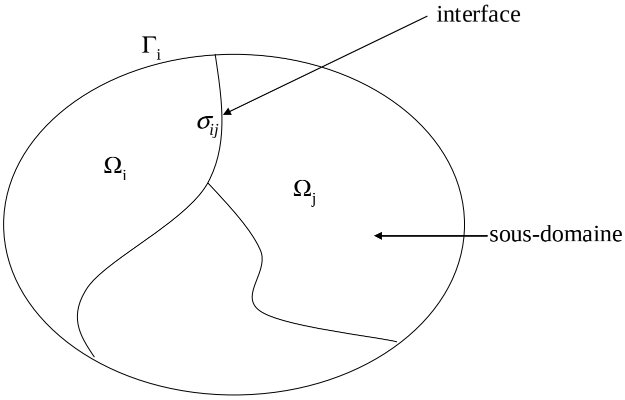


Figure10.1- Domaine de $\mathbb{R}^2$ (p = 3)

Notations

Du point de vue des notations cela implique :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_k \cup \sum \quad , \qquad , i = \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \, , \qquad , i = 1,\ldots, p$$

$$\sigma_{ip} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k \, , \qquad , i = 1,\ldots., p, \quad k \neq i, \qquad , \sum = \bigcup_{1 \le k \neq i \le p} \sigma_{ik}$$

$$I = \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, 1 \le i \le p \right\}$$

Où :

(i) Ω_i est le sous domaine i, un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Les Ω_i étant disjoints deux à deux.

(ii) σ_{ik} est l'interface entre Ω_i et Ω_k, un sous ensemble de $\mathbb{R}^{d-1}$. Σ symbolisant la réunion de toutes les interfaces.

On peut facilement donner les conditions qui garantissent l'équivalence entre la solution sur le domaine globale et ses restrictions sur le sur sous- domaine issu de la décomposition.

PROPOSITION

La restriction sur le sous domaine Ω_i de $y_{\overline{u}}$, la solution du problème (2), est égale à la fonction $(y_{\overline{u}})_i \in H^1(\Omega_i)$ si et seulement si les $(y_{\overline{u}})_i$ vérifient :

$$\begin{cases} (y_{\overline{u}})'_i(t) = A(t)_i (y_{\overline{u}})_i(t) + B(t)_i \overline{U}_i(t) \\ (y_{\overline{u}})_i(0) = 0 \end{cases}$$

A cela s'ajoutent des conditions de continuité imposées aux interfaces. Pour tout $i, k \in I$, $i \neq k$ et $\sigma_{ik} \neq 0$:

$$(y_{\overline{u}})_i = (y_{\overline{u}})_k \quad \text{sur}\, \sigma_{ik}$$

$$\frac{\partial (y_{\overline{u}})_i}{\partial \eta_{ik}} = -\frac{\partial (y_{\overline{u}})_k}{\partial \eta_{ik}} \ \text{sur}\, \sigma_{ik}$$

Les $(y_{\overline{u}})_i$ et les $\overline{U}_i$ sont les restrictions respectives de $y_{\overline{u}}$ et $\overline{U}$ sur Ω_i (les $\overline{U}_i$ étant fixés). Les η_{ik} sont la normale extérieure au sous domaine Ω_i en σ_{ik}. Nous avons donc $\eta_{ik} = -\eta_{ki}$.

Reformulation

En divisant le domaine Ω en sous domaines non recouvrants, la décomposition de (3) (= (3')) vient naturellement :

$$\sum_{i=1}^{p} \left[\int_{\Omega_i} \pi_i(t_i, (y_{\overline{u}})_i, \overline{U}_i)\, dt + \int_{\Omega_i} \left[\sum_h (\pi_i)'_{((y_v)_h)_i} (t_i, (y_{\overline{u}})_i, \overline{U}_i) \left(\left\| (t_i, (y_v)_i, v_i)_h - (t_i, (y_{\overline{u}})_i, \overline{U}_i)_h \right\| \right) \right] dt \right]$$

On a alors l'équivalence suivante :

$$(10.4) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \max (3') \\ \text{avec } i \in I \text{ et } k \neq i \\ (y_{\bar{u}})'_i(t) = A(t)_i (y_{\bar{u}})_i(t) + B(t)_i \bar{U}_i(t) \\ (y_{\bar{u}})_i(0) = 0 \\ (y_{\bar{u}})_i = (y_{\bar{u}})_k \ \text{sur } \sigma_{ik} \\ \dfrac{\partial (y_{\bar{u}})_i}{\partial \eta_{ik}} = -\dfrac{\partial (y_{\bar{u}})_k}{\partial \eta_{ik}} \text{sur } \sigma_{ik} \end{array} \right.$$

Commentaire

Cette relation d'équivalence signifie qu'il est indifférent, sous les conditions mentionnées, pour l'entreprise d'essayer de maximiser son profit sur un important intervalle de temps $[0;T]$ où successivement sur une suite d'intervalle de temps plus restreint.

Ce résultat permet à la fois de simplifier les calculs et, en limitant l'intervalle de temps, réduit les éléments d'incertitude pouvant surgir et fausser la prévision.

Section IV

Remarques terminales sur la modélisation

La formalisation, présentée dans la section précédente, devrait tenir compte davantage des particularités de l'entreprise. L'application de la théorie du contrôle optimal à cette dernière impose quelques aménagements. En particulier l'ouverture de marchés à terme ainsi que l'existence d'effets reports, liés aux situations de déséquilibre, donnent un rôle prépondérant aux arbitrages et anticipations des entreprises. C'est ce que Albouy (1972) sous entend lorsqu'il écrit :

« Or l'examen du processus de décisions de l'entreprise nous montre que les problèmes d'arbitrage instantané se doublent toujours de problèmes d'arbitrages dans le temps. C'est à tout instant de la vie de l'entreprise que surgit un éventail d'alternatives possibles, éventail qui ne cesse de s'ouvrir rapidement dans le futur. » (p. 1).

Pour terminer, on se propose de donner une idée de ce que devrait être une formalisation, par la théorie du contrôle optimal, qui tient mieux compte de ces particularités. On trouve une modélisation comparable dans Guerrien (1989).

X. IV. 1 Formalisation et interprétation

Le modèle d'équilibre général, même lorsqu'il envisage des états hors équilibre, considère que la fonction de l'entreprise est de combiner des inputs et d'obtenir le profit le plus important possible. Lequel résulte du choix de la quantité produite. En première approche, la modélisation par (1) du processus de production demeure donc pertinente. On conserve :

$$Q' = f\ (t, Q, U)$$

La condition nécessaire d'Euler

Une situation intéressante est celle où $Q'(t) = U$. Dans ce cas, une condition nécessaire pour que Q (t) soit une solution de (1), est que la fonctionnelle :

$$\int_0^T \pi\,(t, Q, U)\,dt$$

Soit extrémale avec :

$$\pi'(t) = U$$
$$\left[\frac{\partial \pi_0}{\partial U}\right]_T = 0$$
$$t(0) = t_0$$

Ce qui est vérifié lorsque (pour une preuve voir Abouy (1972)) :

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial Q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \pi_0}{\partial Q'}\right] = 0$$

Interprétation

La condition d'Euler signifie, qu'au niveau de la trajectoire d'équilibre Q_u (t), il est indifférent de prendre à la date t une décision U (t) un peu plus important à condition qu'elle soit compensée à la date (t + ∂t) par une décision de moindre ampleur. De cette façon la trajectoire Q (t) demeure inchangée au-delà de la date (t + ∂t).

Ce degré de liberté par rapport à la trajectoire d'équilibre permet de prendre en compte les anticipations. Le graphique, ci-dessous, illustre cela :

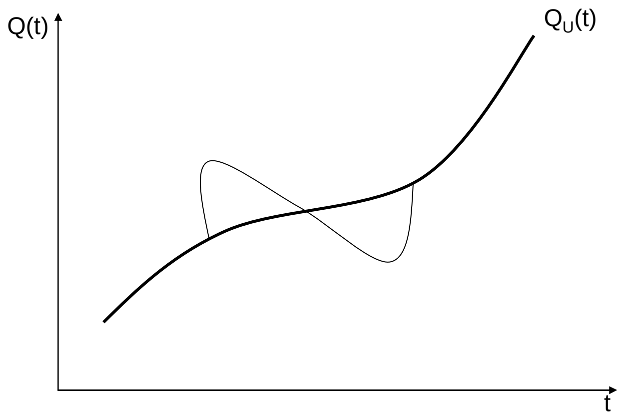


Figure 10.2- Prise en compte des anticipations

Les contraintes

Pour revenir à un commentaire plus général, l'objectif de maximisation du profit que poursuit l'entreprise induit plusieurs contraintes qu'il convient de détailler de plus près. Celles- ci peuvent être classées à travers trois catégories :

1. La contrainte « institutionnelle » résultante des obligations légales auxquelles l'entreprise doit se soumettre
2. La contrainte « physique » liée aux capacités de production
3. La contrainte financière inhérente à toute activité commerciale

X. IV. 2 Les contraintes institutionnelles

Les contraintes institutionnelles sont les plus variées. L'entreprise étant plongée dans un « système » économique, elle est soumise à de nombreuses obligations ou entraves auxquelles il est impossible de se soustraire. On en expose trois.

Contrainte sur les prix

Si l'on adopte l'hypothèse plus vraisemblable selon laquelle l'entreprise est « prices makers », cela astreint à intégrer le vecteur prix comme argument de la fonction de production.

De plus, laisser l'initiative aux entreprises de fixer les prix, implique une modification de la structure institutionnelle du modèle d'équilibre général. On doit renoncer à l'unicité du vecteur- prix. Cela induit, pour chaque firme, des coûts de recherche des inputs (les plus avantageux) qu'il importe de formaliser.

Un argument pour se soustraire à ce type de modélisation est d'estimer que la pression concurrentielle limite grandement la marge de manœuvre en matière de fixation des prix. Encore faut- il pour cela que les prix tendent à s'homogénéiser. Ce qui n'est possible que si ces derniers sont centralement affichés à la vue de toutes les entreprises.

La centralisation est ainsi bénéfique aux firmes dans le sens où elles économisent les frais de recherche des inputs meilleurs marchés.

La contrainte temporelle

On a supposé que le processus de production prenait place sur l'intervalle [0 ; T]. Mais cette hypothèse est bien peu satisfaisante à un double égard.

En premier lieu, en commençant à étudier le comportement de l'entreprise à l'origine, c'est-à-dire à l'instant 0, le poids du passé a été négligé. Or, à l'évidence celui-ci est important. Une modélisation plus appropriée nécessite de se situer à un instant t distinct de l'origine.

En second lieu, l'activité de l'entreprise, sauf faillite, ne s'arrête pas à l'instant T. Il est plus judicieux de travailler sur un intervalle de temps infini. Mais cela a l'inconvénient de rendre le profit difficilement maximisable. Il est donc primordial de pouvoir effectuer, comme on l'a fait, des « coupes » dans l'évolution du temps et de décomposer un problème complexe en une suite logique de sous problèmes de taille plus restreinte.

Contraintes transactionnelles

La vigueur d'une économie et plus spécialement de la consommation, ne dépend évidemment pas des politiques de recrutement et salariale menées par une seule entreprise. En toute logique cette dernière peut être victime d'un manque de débouchés ou devoir faire face à des problèmes d'approvisionnements.

Si l'on désire tenir compte de cette remarque, tout en conservant le cadre institutionnel du modèle d'équilibre général, alors il convient d'indexer la formalisation sur le modèle des équilibres à prix fixes.

X. IV. 3 La contrainte physique

D'après les observations ci- dessus, une formulation plus réaliste consisterait à se situer en t et à s'intéresser à la production en t". Le processus de production prenant place sur l'intervalle $[0;\infty]$ (avec $t, t'' \in [0;\infty]$). Dans cette configuration, la fonctionnelle de production est :

$$F\ (t,\ t'',\ Q\ (\cdot,\ t))\ \text{avec}\ t'' \geq t$$

Q (·, t) représentant le flux d'inputs, donné entre 0 et t, à déterminer entre par le producteur entre t et t". L'argument t y figure deux fois pour signifier que les décisions de l'entreprise portent sur les périodes postérieures à t. La fonctionnelle dépend aussi de t et t". Ce qui s'explique par le fait que l'on considère que celle- ci est susceptible de se déformer dans le temps et que l'on s'intéresse à l'état de la production en t".

De surcroît, si l'on admet que l'évolution des quantités produites est contrôlable, on obtient[1] :

$$F\ (t,\ t'',\ Q\ (\cdot,\ t),\ U\ (\cdot,\ t))\ \text{avec}\ t'' \geq t$$

[1] Si l'on se place dans le cas où les instants t et t" sont proches ($t'' \in B(t, \varepsilon)$), on peut alors considérer que la fonctionnelle de production est une constante. Ceci présente aussi l'avantage de régler les problèmes d'agrégations (voir chapitre I).

Transactions et anticipations

Les biens que l'entreprise pense être en mesure de détenir en t", dépendront à la fois de ces ventes réalisées sur l'intervalle de temps [t ; t"] et de sa production qui provient directement de ses achats d'inputs. Plus simplement, nous noterons W (·) les transactions nettes (achats – ventes) anticipées et $\bar{W}(\cdot)$ celles effectuées. Ceci conduit à modéliser de la manière suivante:

$$\bar{W}(t, t'', U(\cdot, t)) + \int_t^{t''} W(t, a, t'', U(\cdot, t))\, da$$

L'argument « a » traduisant le caractère prévisionnel des transactions. Quant à la production escomptée, elle est donnée par :

$$\Phi\ (t, t'', Q\ (\cdot, t), U\ (\cdot, t)) \text{ avec } t'' \geq t$$

L'écriture de la contrainte physique

Etant donné ce que l'on vient de dire, la contrainte physique s'écrit :

$$\bar{W}(t, t'', U(\cdot, t)) + \int_t^{t''} W(t, a, t'', U(\cdot, t))\, da + \Phi\left(t, t'', Q(\cdot, t), U(\cdot, t)\right) \geq Q(t, t'')$$

Le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte dépend de la date t à laquelle elle est anticipée et de son évolution. Par conséquent, on note (10.5) :

$$\int_t^{\infty} \mu_1(t, t'') \left(\left(\bar{W}(t, t'', U(\cdot, t)) + \int_t^{t'} W(t, a, t'', U(\cdot, t))\, da + \Phi\left(t, t'', Q(\cdot, t), U(\cdot, t)\right) \right) - Q(t, t'') \right) dt'' \geq 0$$

Enfin, pour un motif évident (non négativité des inputs), on postule que : Q (t, t") ≥ 0. Cela induisant une seconde contrainte :

$$(10.6) \quad \int_t^{\infty} \mu_2(t, t'') Q(t, t'')\, dt''$$

X. IV. 4 La contrainte financière

Les facultés d'arbitrages et les capacités d'anticipations sont des éléments majeurs de la vie des entreprises. Cela pose alors le problème de la spéculation et des risques de banqueroutes. Pour réduire un risque de faillite, l'entreprise doit éviter de se précipiter dans des achats d'inputs, qui pourraient venir à lui manquer au dernier moment. En d'autres termes, elle doit organiser à l'avance, sur les marchés à terme, ses achats.

L'écriture de la contrainte

Ce souci de prévision, ce traduit mathématiquement par la contrainte suivante:

$$Q(t,t'') - \left(\bar{W}(t,t'',U(\cdot,t)) + \int_t^{t''} W(t,a,t'',U(\cdot,t))\,da + \Phi\left(t,t'',Q(\cdot,t),U(\cdot,t)\right)\right) \leq \beta(t,t',t'')$$

$\beta(t,t',t'')$ étant naturellement une fonction continue qui tend vers 0 lorsque t' tend vers t".

Lagrangien

En associant un multiplicateur de Lagrange du type μ_3 (t, t', t") à cette contrainte, on arrive à l'expression :

$$(10.7)\quad \int_t^{\infty}\int_t^{t''} \mu_3(t,t',t'')\begin{pmatrix}\beta(t,t',t'') - Q(t,t'') + \bar{W}(t,t'',U(\cdot,t)) \\ +\int_t^{t''} W(t,a,t'',U(\cdot,t))\,da + \Phi(t,t'',Q(\cdot,t),U(\cdot,t))\end{pmatrix} dt'dt''$$

X. IV. 5 Ecriture du programme

On se trouve donc confronté au problème de programmation suivant :

$$\left|\begin{array}{l} \max \int_t^{t''} \pi(t,t'',Q(\cdot,t),U(\cdot,t))\,dt'' \\ Q'(\cdot,t) = F(t,t'',Q(\cdot,t),U(\cdot,t)) \end{array}\right.$$

Ce problème est agrémenté de « sous contraintes » qui dérivent de la recherche de maximisation du profit. On les classe en deux catégories selon leurs formes. D'un coté celles du type $g_j \geq 0$ et de l'autre celle du genre $q_i = 0$.

Sous-contraintes du type $g_j \geq 0$

Dans les paragraphes précédents, on a associé aux contraintes (10.5), (10.6) et (10.7) des multiplicateurs. Toutes ces contraintes ont pour point commun d'être en forme d'inégalités ($g_j \geq 0$) et par conséquent de se conformer aux conditions du théorème de Khun et Tucker.

Sous- contraintes du genre $q_i = 0$

Toutefois, si la firme ne désire prendre aucun risque et exclut toute opération d'arbitrage sur les marchés à terme, ce qui revient à confondre t' et t", alors la contrainte (10.7) prend la forme d'une égalité.

Le programme principal

En considérant l'ensemble de ces éléments, le programme principal s'écrit à l'aide du lagrangien de la façon ci- dessous :

$$
\begin{aligned}
L(Q(t)) = \ & \int_t^{t''} \pi(t,t'',Q(\cdot,t),U(\cdot,t))\,dt'' \\
& + Q'(\cdot,t) = F(t,t'',Q(\cdot,t),U(\cdot,t)) \\
& + \int_t^{\infty} \mu_1(t,t'') \left(\begin{pmatrix} \bar{W}(t,t'',U(\cdot,t)) \\ + \int_t^{t'} W(t,a,t'',U(\cdot,t))\,da + \Phi\left(t,t'',Q(\cdot,t),U(\cdot,t)\right) \end{pmatrix} - Q(t,t'') \right) dt'' \\
& + \int_t^{\infty} \mu_2(t,t'') Q(t,t'')\,dt'' \\
& + \int_t^{\infty} \int_t^{t''} \mu_3(t,t',t'') \begin{pmatrix} \beta(t,t',t'') - Q(t,t'') + \bar{W}(t,t'',U(\cdot,t)) \\ + \int_t^{t''} W(t,a,t'',U(\cdot,t))\,da + \Phi(t,t'',Q(\cdot,t),U(\cdot,t)) \end{pmatrix} dt'\,dt''
\end{aligned}
$$

Programme restreint et séparabilité

La séparabilité consiste ici à décomposer le domaine des contraintes. Le programme restreint est séparable si la solution du programme principal engendre la solution de tous les programmes restreints c'est-à-dire associés à une seule contrainte.

Hélas, pour l'instant, aucun argument ne permet de plaider en faveur de la séparabilité d'un tel programme. Bien que délicate, il y a incontestablement là une voie de recherche pour les mathématiques appliquées à l'économie.

CONCLUSION GENERALE

Dans cette conclusion générale, nous allons revenir sur notre démarche et souligner les principaux résultats auxquels on a abouti.

Caractérisation de l'équilibre

On a commencé ce travail en dégageant quelques caractéristiques inhérentes à la notion d'équilibre. En s'inspirant de l'ouvrage de Malinvaud (1991), on a pu en recenser trois :

- L'existence d'un ensemble interactions
- La présence d'un cadre institutionnel spécifié
- L'existence d'un processus associé

Développement

Les chapitres II à IV ont consisté à affiner cette analyse. Pour cela, les trois principaux cadres de référence de la théorie économique ont fait l'objet d'un examen minutieux. Une première conclusion s'est alors imposée : la théorie de l'équilibre général est le modèle le plus adapté pour intégrer la notion d'équilibre.

On aurait pu s'arrêter à ce constat mais il nous a semblé utile de poursuivre en s'intéressant de plus près aux difficultés que soulèvent la notion d'équilibre au sein de la théorie néo- classique. Celles- ci sont de trois ordres.

Nature des difficultés posée par la notion d'équilibre

1. Critère d'évaluation et de sélection des équilibres

La première difficulté provient du fait qu'il est nécessaire de prouver que l'équilibre est une situation souhaitable. Pour y parvenir, la notion d'optimum de Pareto est mobilisée et reliée à l'équilibre par l'intermédiaire des théorèmes de l'économie du bien-être. Malheureusement, la condition d'optimalité au sens de Pareto est trop peu restrictive. Plusieurs équilibres peuvent la satisfaire. Certes, des hypothèses de substituabilité brute ou de domination diagonale peuvent être retenues pour garantir l'unicité de l'équilibre. Mais celles-ci ne trouvent guère de justifications sur le plan théorique. Les allocations B.C.P.E paraissent alors une alternative intéressante dans la mesure où elles sont davantage en adéquation avec les hypothèses du modèle d'équilibre général. Elles ont néanmoins pour spécificité de réclamer une importante intervention étatique pour garantir les « droits fondamentaux ».

2. Instabilité des processus associés

Le principal processus associé à la notion d'équilibre, le tâtonnement walrasien, peut très bien engendrer des trajectoires aux comportements erratiques ou explosifs. Il semble même que ce soit le cas le plus probable. Face à cette situation, la tendance a été de développer d'autres mécanismes de convergences (tâtonnement en quantité, méthode de Newton…). Si certains parviennent à assurer la stabilité de l'équilibre, tous ont pour point commun de mettre en œuvre un degré élevé de centralisation.

3. Entropie

L'accroissement du désordre dans le temps, lié à la multiplication des anticipations, réduit à néant les possibilités d'existence d'un équilibre dynamique.

Pour limiter ce principe d'entropie, une fois de plus, la solution a consisté à solliciter l'Etat. Ce dernier, en instituant un système complet de marchés ou en orientant les anticipations, supprime l'incertitude. De ce fait, il transforme un système dynamique en système pseudo-dynamique susceptible d'accueillir un équilibre. Malheureusement, ces deux solutions apparaissent peu réalistes. Dans la pratique, une économie planifiée est la plus à même de limiter l'incertitude sans toutefois la faire disparaître complètement. Ainsi, elle garantit les conditions d'existence d'un équilibre dynamique.

Ainsi, bien que la notion d'équilibre soit omniprésente dans la théorie néo-classique, elle soulève de redoutables problèmes. En fait, les difficultés rencontrées ont une source simple : le modèle d'équilibre général est une base plus adaptée à une théorie de la planification plutôt qu'à celle d'une économie de marchés.

Conformément à ce point de vue, la dernière partie est une tentative de réhabiliter la planification en se fondant principalement sur les hypothèses du modèle d'équilibre général.

Réhabilitation de la planification étatique

Pour remettre au goût du jour la planification étatique, on a choisi de s'appuyer sur la théorie du contrôle optimal. En outre, elle permet d'établir, de corriger et d'insensibiliser un programme de planification.

D'une manière générale, cette technique part du principe qu'il est possible de « guider » l'économie en exerçant un « contrôle ». Elle est donc particulièrement adaptée à l'exercice de la planification. Mais elle invite également à reconsidérer les bienfaits des rigidités auxquelles le « contrôle » est assimilable.

Planification intra- firme

Au-delà de l'aspect étatique, nous avons voulu montrer que la planification pouvait aussi s'avérer un outil précieux dans l'élaboration de la stratégie des entreprises.
Pour ce faire, on a combiné la théorie du contrôle optimal avec le concept de séparabilité. Ce dernier, issu de la recherche opérationnelle, garanti la compatibilité entre un programme et ses sous programmes. En des termes économiques, la séparabilité donne les conditions de compatibilité entre l'intérêt général et particulier. Associée au contrôle optimal, elle permet par exemple de simplifier grandement des problèmes de maximisation du profit dans le temps.

Pour terminer, on se propose de donner quelques pistes de réflexions qui nous semblent découler logiquement de ce travail.

L'extension de la séparabilité à des formes non linéaires

Comme on l'a vu, les résultats de séparabilité portent quasi-exclusivement sur des formes linéaires. Ce qui n'est pas trop grave dans la mesure où l'on a pris l'option, pour des raisons économiques, de travailler sur des résultats locaux de contrôlabilité. Mais qu'advient-il lorsqu'on sort de ce cadre ?

Il existe des techniques élargissant les résultats de contrôlabilité à une perspective globale (voir Bonnard B. et Chyba M. (2003), *The role of singular trajectories in control theory*, Springer-Verlag ainsi que Jurdjevic V. (1997), *Geometric control theory*, Cambrige University Press). Les résultats linéaires de séparabilité sont dès lors trop restrictifs pour s'adapter à la théorie du contrôle optimal. Dès dix neuf cent soixante- sept, Bèssière affirmait :

« Il reste à dire que, pour le moment, la théorie de la séparabilité n'a été sérieusement étudiée que dans le cas de programmes linéaires possédant une sous-matrice nulle, et dans celui de programmes convexes ayant une structure particulièrement simple […] Mon but aura été atteint si, par cet article, je suis parvenu à convaincre les lecteurs que le concept de *séparabilité* permet de rechercher les structurations efficaces et de savoir quelles informations doivent alors être échangées.

Mes espoirs seront dépassés si, en me lisant, quelques mathématiciens se décident à consacrer ses recherches à l'étude générale de la séparabilité. » (p. 786).

L'étape suivante est donc celle de l'extension de la séparabilité à des formes non linéaires.

L'équilibre dans un environnement non convexe

Une seconde voie de recherche concerne l'étude de l'équilibre dans un environnement non convexe. Plusieurs thèses et publications ont déjà été rédigées dans ce sens. Toutes ont néanmoins pour défaut de mettre en jeu des hypothèses difficilement justifiables économiquement.

Au cours de ce travail, nous avons attiré l'attention sur les problèmes liés aux rendements d'échelle décroissants et constants, en évitant délibérément d'insister sur le cas de ceux croissants. Pourtant ces derniers jouent indéniablement un rôle essentiel dans l'activité économique mais soulèvent au niveau théorique de redoutables difficultés.

En présence de rendements d'échelles croissants, les entreprises ont théoriquement intérêt, si elles ne s'inquiètent guère des problèmes de débouchés (c'est notamment le cas en concurrence parfaite), à faire une offre infinie. Le coût d'une unité produite diminue graduellement avec le volume de la production. Le profit ne peut- être maximisé dans la mesure où il est illimité. Sur le plan mathématique, leur prise en compte se traduit par l'étude d'ensembles de production non convexes. Il est alors impossible d'appliquer directement les théorèmes du point fixe.

Considérer les rendements d'échelles croissants oblige à redéfinir le comportement des producteurs. Une manière astucieuse de procéder (voir Guesnerie (1975), Bonnisseau (1988)) est de les doter d'une règle dite de « tarification marginale » de telle sorte que la condition de premier ordre de maximisation du profit puisse tout de même être satisfaite. Cette règle se formalisant à l'aide du cône normal de Clarke.

Considérons une économie formée de l biens, m consommateurs ainsi que n producteurs respectivement représentée par l'indice i et j.

Soit $Y_j \in \mathbb{R}^1$ l'ensemble total de production qui a pour seule hypothèse d'être fermé afin de s'assurer de sa continuité[1]. De plus, on définit la distance sur Y_j par la fonction : $d_{Y_j}(y_j) = \min\left\{ \left| y_j - y'_j \right| : y'_j \in Y_j \right\}$

Il est important de remarquer que cette fonction distance est Lipschitzienne, donc uniformément continue (pour une preuve se référer à Clarke (1990), p. 50) . Il s'ensuit qu'elle admet au moins une dérivée directionnelle.

L'étape suivante est d'introduire la notion de cône tangent à Y_j en un point y_j . On le note : $T_{Y_j}(y_j) = \left\{ v \in R^l / d^\circ_{Y_j}(y_j; v) = 0 \right\}$ ou $d^\circ_{Y_j}(y_j; v)$ est la dérivée directionnelle généralisée, évaluée en y_j , dans la direction du vecteur v . En outre, le cône tangent présente l'avantage de ne pas requérir la régularité ni la convexité des ensembles de production mais s 'avère lui même être un ensemble fermé et convexe[2].

Il ne reste alors plus qu'à définir le cône normal par polarité à $T_{Y_j}(y_j)$. Celui- ci se note :

$$N_{Y_j}(y_j) = \left\{ p \in R^l / p \cdot v \leq 0 \quad \textit{pour tout } v \in T_{Y_j}(y_j) \right\}$$

Naturellement le cône normal au sens de Clarke conserve la fermeture et la convexité[3].

Le lien qui existe entre les deux cônes présente une analogie certaine avec la programmation linéaire et plus particulièrement avec le théorème de la dualité. Pourtant, si l'élégance mathématique de la démarche est incontestable elle ne doit pas cacher le peu d'intérêt économique. En effet, se ramener à un cône convexe revient à affirmer que les producteurs font « comme si », en dépit du bon sens et de leurs intérêts, les ensembles de productions obéissaient à la loi des rendements constants.

Des progrès importants restent donc encore à faire pour obtenir un traitement satisfaisant, du point de vue de l'interprétation économique, des rendements d'échelle

[1] La fermeture tant des ensembles de production et de consommation est une hypothèse usuelle du modèle Arrow- Debreu. Elle constitue une hypothèse de « survie ».

[2] Ce résultat est lié au fait que la fonction distance est Lipschitzienne, ce qui implique que :

- la fonction $v \rightarrow d^\circ_{Y_j}(y_j; v)$ est finie et positivement homogène.

[3] Remarquons qu'il est possible de définir le cône tangent et normal sans passer par la fonction distance (confère Clarke (1990), p. 11) . Pour notre part, on préfère les introduire à partir de cette dernière ce qui permet de faire apparaître le lien entre la dérivée directionnelle généralisée et le cône tangent.

croissants.

Economies planifiées et démocratie

Il reste, pour achever notre travail, à lever une dernière ambiguïté : la planification est-elle incompatible avec un système politique démocratique ?

Bien sûr que non ! Si l'on a pris l'option de planifier c'est bien à cause des résultats insatisfaisants auxquels conduit l'économie de marchés. Résultats, que les théoriciens tentent d'atténuer moyennant un modelage des conjectures et une remise en cause croissante des libertés individuelles. La planification apparaît alors comme un procédé judicieux pour remédier aux difficultés des économies capitalistes tout en garantissant des régimes politiques démocratiques (Chigolet (2005)).

BIBLIOGRAPHIE

AGENCE **I**NTERNATIONALE DE L'**E**NERGIE, *Competition in electricity markets*, OCDE, Paris.

ANDREFF W. (1976), *Les variations du degré de centralisation dans les pays de l'Est européen depuis les réformes*, Thèse complémentaire en Sciences Economiques, Université Paris I Panthéon- Sorbonne.

ANDREFF W. (1993), *La crise des économies socialistes. La rupture d'un système*, Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble.

ARCHINARD G. et **G**UERRIEN B. (1992), *Analyse mathématique pour économistes* (4^{e} édition), Economica, Paris.

ARROW J.K. (1951), « Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations », *Econometrica*, 19, 4, 404-437.

ARROW J.K. (1968), « Economic equilibrium », *International Encyclopedia of the Social Sciences*, Mac Millan and the Free Press, 4, 376-86.

ARROW J.K. et **D**EBREU G. (1954), « Existence of an Equilibrium for a competitive economy », *Econometrica*, 22, 265-290.

ARROW J.K. et **H**URWICZ L. (1960), « Decentralization and computation in ressource allocation », *in Essays in economics and econometrics*, ed. Pfouts.

ARROW J.K. et **H**AHN F.H. (1971), *General Competitive Analysis*, Holden Day, San Francisco.

ARROW J.K., **H**URWICZ L. et **U**ZAWA H. (1958), *Studies in linear and non – linear programming*, Standford University Press, Standford.

AUMANN R.J. (1964), « Markets with a Continuum of Traders », *Econometrica*, 32, 39-50.

AUTUME A. (D') (1992), « Théorie des jeux et marché », *Cahiers d'Economie Politique*, 20-21, L'Harmattan.

BALASKO Y. (1975), « Some results on uniqueness and on stability of equilibrium in general equilibrium theory », *Journal of Mathematical Economics*, 2, 95-118.

BALASKO Y. (1986), « The class of aggregate excess demand functions », in *Contributions to mathematical economics: In Honor of Gérard Debreu*, ed. by Hildenbrand W. and Mas-Colell A., North- Holland.

BALASKO Y. (1988), *Fondements de la Théorie de l'Equilibre Général*, Economica, Paris.

BARONE E. (1908), « The Ministry of production in the collectivist state », in Hayek (1935).

BARRERE C. (1991), « Penser le marché, " Le monde est- il un marché ? " », *Actuel Marx*, numéro spécial.

BENASSY J-P. (1984), *Macroéconomie et théorie du déséquilibre*, Dunod, Paris.

BENETTI C. (2002), « Le problème de la variation des prix. Les limites de la théorie walrassienne », *Revue économique*, 53, 5, 917-931.

BERGE C. (1966), *Espaces topologiques : Fonctions multivoques* (2e édition), Dunod, Paris.

BERTA N. (2000), *Origines et fondements de la représentation du marché dans la théorie de l'équilibre général concurrentiel*, Thèse pour le Doctorat de Science Economique, Université de Paris I Panthéon- Sorbonne.

BESSIERE F. (1967), « De l'importance du concept de " séparabilité " en économie », Revue d'Economie Politique, 6, 775-790.

BESSIERE F. (1969(a)), « The concept of separability and the optimization of economic organization », *European Economic Review*, 1, 1, 74-91.

BESSIERE F. (1969(b)), « Methods of choosing equipment at Electricité De France: development and present-day concept », *European Economic Review*, 1, 2, 199- 211.

BESSIERE F. (1970), « The "investment '85" model of Electricité De France », *Management Science*, 17, 4, 192-211.

BESSIERE F. et **S**AUTER E. (1966), « Optimisation et environnement économique : la méthode des modèles élargis », Revue Française de Recherche Opérationnelle, 40, 243-264.

BILLINGSLEY P. (1986), *Probability and Measure* (Second Edition), Wiley and Sons.

BONNISSEAU J-M. (1988), *Existence de l'équilibre : le cas d'ensembles de production non convexes*, Thèse pour le Doctorat de Mathématiques, Université Paris I Panthéon- Sorbonne.

BORDER K.C. (1985), *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Cambridge University Press.

BOUKHARINE N. ([1920], 1970), *Economique de la période de transition*, Etudes et Documentation Internationales.

BOUNAIM A. (1999), *Méthodes de décomposition de domaine: Application à la résolution de problèmes de contrôle optimal*, Thèse pour le Doctorat de Mathématiques Appliquées, Université Joseph Fourrier- Grenoble I.

BRUS W. (1968), *Problèmes généraux du fonctionnement de l'économie socialiste*, Maspero, Paris.

CHAVANCE B. (1994), *La fin des systèmes socialistes,* L'Harmattan, Paris.

CHAMPERNOWNE D.G. (1945-46), « A note on J. v. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium" », *Review of Economic Studies*, 13, 1, 10-18.

CHIGOLET G. (2003), *A propos de l'équilibre : Analyses et critiques* (sous la direction de C. Benetti et B. Guerrien), Mémoire de 3ième cycle en Sciences Economiques, Université Paris I Panthéon- Sorbonne.

CHIGOLET G. (2005), « Economies de marchés et démocratie politique. Démonstration d'une incompatibilité », Communication au 3ième colloque du Programme Pluriformations « La Transition », Université Paris I, 30 et 31 mai 2005.

CLARKE F.H. (1990), *Optimization and Nonsmooth Analysis*.

DANTZIG G. (1963), *Linear programming and extensions*, Princeton University Press. Traduction Française (1966), *Applications et prolongements de la programmation linéaire,* Dunod, Paris.

DANTZIG G.B. et **W**OLFE P. (1961), « The decomposition algorithm for linear programs », *Econometrica*, 29, 4, 767-778.

DAVIDSON P. (1991), « Is Probability Theory Relevant for Uncertainty ? A Post Keynesian Perspective », *Journal of Economic Perspectives,* 5, 1, 129-143.

DEBREU G. (1954), « Valuation Equilibrium and Pareto Optimum », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A*, 40, 588-592.

DEBREU G. (1956), « Market Equilibrium », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A*, 42, 886-893.

DEBREU G. (1959), *Theory of value. An axiomatic analysis of economic equilibrium*, Wiley. Traduction française (2001), *Théorie de la Valeur. Analyse axiomatique de l'équilibre économique*, Dunod.

DEBREU G. (1982), « Existence of Competitive Equilibrium », *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, chap. 15.

DEBREU G. (1996), General Equilibrium Theory, Cheltemham (UK), The international Library of Critical Writings in Economics , 4 vol.

DEBREU G. et **S**CARF H. (1963), « A limit theorem on the core of an economy », *International Economic Review*, September, 4, 235-246.

DE LONG et **P**LOSSER (1983), « Real Business Cycles », *Journal of Economics Theory*, 8, 39-69.

DEMAILLY J-P. (1996), *Analyse numérique et équations différentielles*, Presse Universitaire de Grenoble, Grenoble.

DUCHÊNE G. (1977), « La rationalisation de la planification soviétique : problèmes théoriques et pratiques », *Economies et Sociétés*, série Economie Planifiée, 34, 1111-1174.

DUCHÊNE G. (1987), « Les transferts sociaux dans les économies centralement planifiées », *Economies et Sociétés*, série Economie Planifiée, 42, 5-27.

EDGEWORTH F.Y. (1881), *Mathematical Psychics*, Kelley Reprint.

EDGEWORTH F.Y. (1889), « On the Application of Mathematics to Political Economy », *in* Edgeworth, Papers Relating to Political Economy, Mac Millan, 1925.

ELLMAN M. (1999), « L'ascension et la chute de la planification socialiste. », in *Cpitalisme et socialisme en perspective. Evolution et transformations des systèmes économiques*, LA découverte, Paris.

ESNAULT B. (2002), « Nouvelles formes de marchés électriques et choix d'investissement », *Cahier de recherche du CGEMP*, 1/2002, Université Paris IX.

FÉDORENKO N. (1972), « Sur l'élaboration du système de fonctionnement optimal de l'économie socialiste », *Vop. Eko*, 6, 94-107.

FÉDORENKO N. et *al* (1974), *Développement économique et planification à long terme*, Editions du Progrès, Moscou.

FEHÉR F., **H**ELLER A. et **M**ÁRKUS G. (1983), *Dictatorship over Needs*, Basil Blackwell, Oxford.

FISHER F. (1969), « The Existence of Aggregate Production Functions », *Econometrica*, 37, 4, 553-577.

FISHER F. (1983), *Disequilibrium Foundations of Equilibrium Economics*, Cambridge University Press.

GALE D. (1955), « The Law of Supply and Demand », *Mathematica Scandinava*, 3, 155-169.

GAMKRELIDZE R.V. (1999), « Discovery of the maximum principle », *Journal of dynamical and control system*, 5, 4, 437-451.

GIOCOLI N. (2003), « Fixing the point: the contribution of early game theory to the tool-box of modern economics », *Journal of Economic Methodology*, 10, 1, 1-39.

GRANDMONT J-M. (1972), « Continuity properties of a von Neumann- Morgenstern utility », in *Temporary Equilibrium: Selected Readings*, edited by J-M. Grandmont, Academic Press, 1988.

GRANDMONT J-M. (1974), « On the short-run equilibrium in a monetary economy », in *Temporary Equilibrium: Selected Reading*, edited by J-M. Grandmont, Academic Press, 1988.

GRANDMONT J-M. (1977), « Temporary general equilibrium theory », *in* Temporary Equilibrium: Selected Readings, edited by J-M. Grandmont, Academic Press, 1988.

GREEN J.R. (1973), « Temporary General Equilibrium in a Sequential Trading Model with Spot and Future Transactions », *Econometrica*, 41, 6, 1103-1123.

GUERRIEN B. (1989 (a)), *Concurrence, flexibilité et stabilité. Des fondements théoriques de la notion de flexibilité*, Economica, Paris.

GUERRIEN B. (1989 (b)), *La théorie néo- classique. Bilan et perspectives du modèle d'équilibre général* (3e édition), Economica, Paris.

GUERRIEN B. (1999), « Préface », in Kreps D.M. (1999), *Théorie des jeux et modélisation économique*, Dunod.

GUERRIEN B. (2002), « Equilibre », *Encyclopedis Universalis*.

GUERRIEN B. (2002), *La Théorie des jeux* (3e édition), Economica, Paris.

GUERRIEN B. (2002), *Dictionnaire d'analyse économique* (3e édition), La Découverte, Paris.

GUERRIEN B. et **N**EZEYS B. (1987), *Microéconomie et calcul économique* (2e édition), Economica, Paris.

HADLEY G. (1970), *Nonlinear and dynamic programming*, Addisson- Wesley.

HAHN F.H. (1973), « On the Notion of Equilibrium in Economics », Inaugural lecture**,** Cambridge University Press. Traduction Française (1976), « De la notion d'équilibre en économie », *Economie Appliquée*, 29, 225-255.

HAHN F.H. (1982), « Stability », in *Handbook of Mathematical Economics*, North Holland.

HAHN F.H. (1985), *Money, Growth and Stability*, Basil Blackwell, Oxford.

HAHN F.H. et **N**EGISHI T. (1962), « A theorem of non- tatonnement stability », *Econometrica*, 30, 463-469.

HAMMANI M.A. (2001), « On the stability of nonlinear control systems with uncertainty », *Journal of Dynamical and Control System*, 7, 2, 171-179.

HARROD R. (1955), « Les relations entre l'investissement et la population », *Revue économique*, 6, 3, 356-367.

HEAL G.M. (1973), *The Theory of Economic Planning*, North-Holland.

HICKS J.R. (1939), *Value and Capital*, Clarendon Press. Traduction Française (1956), *Valeur et Capital*, Dunod.

HILDENBRAND W. (1974), *Core and equilibria of a large economy*, Princeton University Press.

HILDENBRAND W. (1980), « Core of an economy », in *Handbook of Mathematicals Economics*, vol. 2, ed. Arrow K.J. et Intriligator M.D. (1982), North- Holland.

HILDENBRAND W. (1983), *Mathematical Economics. Twenty Papers of Gérard Debreu*, Cambridge University Press, Cambridge.

HILDENBRAND W. et **K**IRMAN A.P. (1976), *Introduction to equilibrium analysis*, North-Holland, Amsterdam.

HIRSCHMAN A.O. (1964), *Stratégie du développement économique*, Les Editions Ouvrières, Paris.

HURWICZ L. (1958), « Programming in linear spaces », in *Studies in linear and non-linear programming*, edited by Arrow J., Hurwicz L. and Uzawa H., Oxford University Press.

KANTOROVITCH L.V. (1963), *Calcul économique et utilisation des ressources*, Dunod, Paris.

KANTOROVITCH L.V. et *al* (1979), « L'emploi des méthodes d'optimisation dans les systèmes automatisés de gestion des branches de l'économie », *Economie et Sociétés*, Série Economie Planifiée, 37, 1053-1074.

KALDOR N. (1934), « A Classificatory Note on the Determinateness of Equilibrium », *The Review of Economic Studies*, 1, 2, 122-136.

KARLIN S. (1959), *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*, Pergamon Press.

KEIDING H. (1981), « Existence of Budget Constrained Pareto Efficient Allocations », *Journal of Economic Theory*, 24, 99-108.

KEYNES J.M. (1936), *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie*, Payot, Paris.

KEYNES J.M. (1937), « The general theory of employment », 51, 209-223, *Quarterly Journal of Economics*. Traduction Française (1990), « La théorie générale de l'emploi », *Revue Française d'Economie,* 51, 141-156.

KIRSCH L. et **R**AJARAMAN R. (2001), « Assuring enough generation: whose job and how to do it », *Public Utilities Fortnightly*, 139, 8, 34-42.

KNIGHT F.H. (1921), *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin Company, Boston.

KONDRATIEFF N.D. (1925), « The Static and the Dynamic View of Economics », *Quarterly Journal of Economics*, 39, 4, 575-583.

KOOPMANS T.C. (1957), *Three Essays on the State of Economic Science*, McGraw-Hill Book Compagny. Traduction Française (1970), *Trois Essais sur la Science Economique Contemporaine*, Dunod, Paris.

KOOPMANS T.C. (1963), « On the concept of optimal economic growth », Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University.

KORNAI J. (1969), « Multi-level programming – a first report on the model and on the experimental computations », *European Economic Review*, 1, 1, 134-191.

KORNAI J. (1992), T*he Socialist System*, *The political Economy of Communism*, Oxford University Press. Traduction Française (1996), *Le système socialiste : L'économie politique du communisme*, Presses Universitaires de Grenoble.

KORNAI J. et **L**IPTÁK TH. (1965), « Two- Level Planning », *Econometrica*, 33, 1, 141-169.

KRASTANOV M.I. (1998), « A necessary condition for small time local controllability », *Journal of dynamical and controls systems*, 4, 3, p. 425-456.

KREPS D.M. (1990), *A course in microeconomic theory*, Harvester Wheatsheaf. Traduction Française (1996), *Leçon de théorie microéconomique*, Presse Universitaire de France.

KREPS D.M. (1990), *Game Theory and Economic Modelling*, Oxford University Press. Traduction Française (1999), *Théorie des Jeux et modélisation économique*, Dunod.

KURATOWSKI K. (1932), « Les fonctions semi- continues dans l'espace des ensembles fermés », *Fundamenta Mathematica*, 18, 148-160.

KYLAND et **P**RESCOTT (1982), « Time to Build and Aggregate Fluctuations », *Econometrica*, 50, 1345-1370.

LACAZE D. (1990), *Optimisation appliquée à la gestion et à l'économie*, Economica, Paris.

LAGNESE J. et **L**EUGERING G. (1998), *Dynamic domain decomposition in approximate and exact boundary control in transmission problems*, Preprint.

LANGE O. (1936), « On the Economic Theory of Socialism: Part One », *The Review of Economic Studies*, 4, 1, 53-71.

LANGE O. (1937), « On the Economic Theory of Socialism: Part Two », *The Review of Economic Studies*, 4, 2, 123-142.

LANGE O. (1942), « The Foundations of Welfare Economics », *Econometrica*, 10, 215-228.

LEE et **M**ARKUS (1967), *Foundations of optimal control theory*, John Wiley, New York.

LEIJONHUFVUD A. (1967), « Keynes and Keynesians: A suggested Interpretation », *American Economic Review*, v. LVII, 2, p. 401-410.

LEWIS W.A. (1963), *The Theory of Economic Growth*, George Allen and Unwin, London. Traduction française (1971), *La Théorie de la Croissance Economique*, Payot, Paris.

LORENZI J-H. (1975), *Le marché dans la planification*, Presses Universitaires de France, Paris.

MALCHUP F. (1967), *Essays in Economic Semantics*, ed. by Fritz Malchup. Traduction Française (1971), *Essais de Sémantique Economique*, Calmann-Levy.

MALINVAUD E. (1953), « Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources », *Econometrica*, 21, 233-268.

MALINVAUD E. (1963), *Procédures décentralisées pour la préparation des plans*.

MALINVAUD E. (1984), *Leçons de théorie microéconomique* (4ième édition), Dunod.

MALINVAUD E. (1991), *Voies de recherche macroéconomique*, Odile Jacob.

MALONEY M. (2001), « Economies and Diseconomies: estimating Electricity Cost Functions », *Review of Industrial Organization*, 19, 165-180.

MCKENZIE L.W. (1959), « On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market », *Econometrica*, 27, 1, 54-71.

MICHEL P. (1989), *Cours de mathématiques pour économistes* (2e édition), Economica, Paris.

MOUCHOT C. (1978), *Temps et Sciences Economiques. Nécessité et insuffisance de la Mathématique*, Economica, Paris.

MOULIN H. (1981), *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*, Hermann, Paris.

MYRDAL G. (1960), *Beyond the Welfare State,* Gerald Duckworth and Co, London. Traduction Française (1963), *Planifier pour développer. De l'Etat- Providence au Monde-Providence*, Les Editions Ouvrières, Paris.

NASH J. F. (1950), « Equilibrium Points in N- Person Games », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A*, 36, 48-49.

NEUMANN (von) J. (1945- 46), « A model of General Economic Equilibrium », *Review of Economic Studies*, in Readings in the theory of Growth (1971), ed. by F.H. Hahn

NEUMANN (von) J. and **M**ORGENSTERN O. (1964), *Theory of Games and Economic behavior* (first Science Edition), Science Edition, Wiley and Sons, New- York.

NIKAIDO H. (1956), « On the classical multilateral exchange problem », *Metroeconomica*, 8, 135-145.

NOVOZILOV V.V. (1972), « Développement de la théorie de la planification optimale dans sa phase moderne », *Economie et Sociétés*, série Economie Planifiée, 30, 47-67.

PERROT A. (1986), *Informations, incitations et contrats : des fondements microéconomiques pour une dynamique du marché du travail*, Thèse pour le Doctorat de Sciences Economiques, Université de Paris I Panthéon- Sorbonne.

PHELPS E. (1961), « The Golden Rule of Accumulation : A Fable for Growthmen », *The American Economic Review*, 51, 4, 638-643.

PICARD P. (1979), *Procédures et modèles de planification décentralisée*, Economica, Paris.

PONTRIAGUINE L., **B**OLTIANSKI V., **G**AMKRELIDZE R. et **M**ICHTCHENKO E. (Traduction Française [1974]), *Théorie mathématique des processus optimaux*, Editions MIR, Moscou.

POTIER D. (1972), « Algorithmes de coordination – applications à la gestion d'unités de production interdépendantes » in *Cahiers de l'I.R.I.A*, 11.

QUIRK J. et **S**APOSNIK R. (1968), *Introduction to general equilibrium theory and welfare economics*, McGraw- Hill Book Compagny, New York. Traduction Française (1974), *Théorie de l'équilibre général et économie du bien être*, Presse Universitaire de France, Paris.

REBEYROL A. (1999), *La pensée économique de Walras*, Dunod, Paris.

ROMER P. (1996), *Advanced Macroeconomics*, Mc Graw-Hill. Traduction Française (1998), *Macroéconomie approfondie*, Dunod, Paris.

ROSIER B. (1970), « Signification du principe d'efficience dans l'analyse théorique de la croissance économique », *Revue économique*, 21, 4, 597-634.

ROSTOW W.W (1960), *The Stages of economic growth*, Cambridge University Press. Traduction Française (1963), *Les Etapes de la croissance économique*, Editions du Seuil.

SAMUELSON P.A. (1947), *Foundations of economics analysis*, Harvard University Press. Traduction Française (1965), *Les fondements de l'analyse économique*, Gauthier-Villars, Paris.

SAMUELSON P.A. (1975), « The Optimum Growth for Population », *International Economic Review*, 16, 3, 531-538.

SAVAGE L. (1954), *The Foundations of Statistics*, John Wiley and Sons, New York.

SCHOTTER A. (1992), « Oskar Morgenstern's Contribution to the Development of the Theory of Games », in *Toward a History of Game Theory*, sous la direction de E. R. Weintraub (1992), Duke University Press.

SCHOTTER A. (1994), *Microeconomics: a modern approach*, Happer Collins College Publishers. Traduction Française (1996), *Microéconomie: une approche contemporaine*, Vuibert.

SHUBIK M. (1959), « Edgeworth's Market Games » in *Contribution to the Theory of Games*, IV, Princeton University Press.

SMALE S. (1976), « A convergent process of price adjustment and global Newton methods », *Journal of Mathematical Economy*, 1, 1-14.

SOLOW R. (1956), « A Contribution to the Economic Growth », *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65-94.

SORIN S. (1999), « Von Neumann-Morgenstern, Nash et Arrow-Debreu: Théorie des Jeux et Equilibre Général », *Cahiers d'économie politique*, 35, 7-17.

SVENSSON L.G. (1984), « The Existence of Budget Contrained Pareto- Efficient Allocations », *Journal of Economic Theory*, 32, 346-350.

TRELAT E. (2005), *Contrôle optimal. Théorie et applications*, Vuibert, Paris.

UZAWA H. (1958), « The Khun-Tucker Theorem in concave programming », in *Studies in linear and non-linear programming*, Standford University Press.

UZAWA H. (1962), « Walras'Existence Theorem and Brouwer's Fixed Point Theorem », *Economic Studies Quarterly*, 8, 59-62

UZAWA H. (1963), « On a Two-Sector Model of Economic Growth II », *The Review of Economic Studies*, 30, 2, 105-118.

WAELBROECK J. (1964), « La grande controverse sur la planification et la théorie économique mathématique contemporaine », *Economie et Société*, série Economie Planifiée, 19, 3-24.

WALD A. (1951), « On Some Systems of Equations of Mathematical Economics », *Econometrica*, 19, 368-403.

WALRAS L. (1874), *Eléments d'Economie Politique Pure*, LGDJ.

WALKER D.A. (1973), « Edgeworth's Theory of Recontract », *The Economic Journal*, 83, 329, 138-149.

WEINTRAUB E.R (1980), *Fondements microéconomiques. La microéconomie et la macroéconomie sont-elles compatibles ?*, Economica, Paris

YOUNES Y. (1970), « Sur une notion d'équilibre utilisable dans le cas où les agents ne sont pas assurés de la compatibilité de leurs plans », CEPREMAP, Paris.

YOUNES Y. (1972), « Indices prospectifs quantitatifs et procédures décentralisées d'élaboration des plans », *Econometrica*, 40, 1, 137-146.

Table des matières

PREMIERE PARTIE

Les fondements théoriques de la notion d'équilibre

DEUXIEME PARTIE

Examen des principales difficultés théoriques liées à l’usage de la notion d’équilibre

TROISIEME PARTIE

Application de la notion d’équilibre à la planification